

Univerzitet u Novom Sadu
Građevinski fakultet Subotica

Budinski Ljubomir

**MATEMATIČKO MODELIRANJE
RAVANSKIH (OSREDNJENIH PO DUBINI)
JEDNAČINA STRUJANJA VODE,
TRANSPORTA NANOSA I MORFOLOŠKIH
PROMENA U PRIRODNIM ALUVIJALNIM
VODOTOCIMA**

- Doktorska disertacija –

Subotica, 2010.

SADRŽAJ

1. Uvod	1
2. Pregled literature	3
3. Teorijske osnove	17
3.1. Jednačine kojima se opisuje strujanje vode.....	17
3.2. Jednačine kojima se opisuje transport nanosa i deformacija korita	19
3.2.1. Uvod.....	19
3.2.2. Nanos pri dnu i na dnu	20
3.2.2.1. Jednačina održanja mase nanosa pri dnu – aktivni sloj	21
3.2.3. Suspendovani nanos.....	27
3.2.4. Razmena nanosa na dnu i pri dnu i nanosa u suspenziji.....	28
3.2.5. Zatvaranje sistema jednačina – pomoćne formule	32
3.3. Jednačine osrednjene po dubini toka – ravanski model	35
3.3.1. Jednačine kojima se opisuje strujanje vode.....	37
3.3.2. Jednačine kojima se opisuje transport nanosa i deformacija korita.....	40
3.3.3. Strategija numeričkog rešavanja jednačina osrednjenih po dubini.....	41
3.4. Promenljiva oblast strujanja	46
3.5. Kompletna transformacija sistema jednačina u krivolinijski neortogonalni koordinatni sistem	48
3.5.1. Opšti principi transformacije	49
3.5.2. Strujanje vode - jednačina kontinuiteta	53
3.5.3. Strujanje vode – advekcija.....	53
3.5.4. Strujanje vode – difuzija.....	54
3.5.5. Strujanje vode – propagacija.....	57
3.5.6. Transport suspendovanog nanosa – advekcija i difuzija	58
3.5.7. Transport nanosa na dnu i pri dnu	59
4. Numeričko rešavanje jednačina	61
4.1. Numeričko rešavanje jednačina ravnog toka	61
4.1.1. Etapno rešavanje	61
4.1.2. Advekcija	63
4.1.3. Difuzija	71

4.1.4. Propagacija.....	75
4.2. Numeričko rešavanje nanosnih jednačina	81
4.2.1. Numeričko rešavanje jednačine održanja mase suspendovanog nanosa primenom etapnog postupka	82
4.2.1.1. Advekcija – suspendovani nanos	82
4.2.1.1.1. Modeliranje neto masenog fluksa S_k	87
4.2.1.2. Difuzija – suspendovani nanos	89
4.2.2. Numeričko rešavanje jednačine održanja mase aktivnog sloja i globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu.....	90
4.2.3. Pomoćne formule.....	94
4.3. Postupak rešavanja sušenja i kvašenja priobalnog područja kod fiksne računske mreže.....	99
5. Programski kod	104
6. Analiza rezultata	108
6.1. Šematski model kanala u krivini	109
6.2. Šematski model pravog kanala sa ostrvom	114
6.3. Model reke Missouri	125
6.4. Model reke Atchafalaya	148
6.5. Model Zvorničke akumulacije	170
6.6. Zaključci o verifikaciji modela	194
7. Zaključak	196
Prilozi	201
Literatura	229
Apendiks	238

Spisak slika

3.1	Podela rečnog dna na pokretni (gornji) i nepokretni (donji) sloj	20
3.2	Prikaz elementarne zapremine aktivnog sloja	23
3.3	Prikaz strukture podslojeva zastupljenih ispod aktivnog sloja.....	25
3.4	Krivolinijska i njoj ekvivalentna računska mreža	48
3.5	Šematski prikaz delimične i kompletne transformacije	49
4.1	Interpretacija materijalnog izvoda kartezijskih komponenti brzina u krivolinijskoj računskoj oblasti	64
4.2	Detalj računске ćelije prikazan na krivolinijskoj mreži fizičke oblasti i ekvivalentnoj računskoj mreži	65
4.3	Diskretizacija karakteristika (trajektorija).....	66
4.4	Položaj karakteristika u zavisnosti od Courant-ov broja : a) slučaj kada je $C_r > 1$; b) transformacija trajektorije uz uslov da je $C_r \leq 1$	67
4.5	Detalj smaknute računске mreže	78
4.6	Diskretizacija karakteristika (trajektorija).....	83
4.7	Prikaz teorijskog rasporeda koncentracije po dubini sa elementima referentnog sloja	88
4.8	Detalj fizičke i računске oblasti pri promeni aktivnog domena strujanja	100
5.1	Blok dijagram programskog koda	105
6.1	Geometrijske karakteristike kanala u krivini pri skretnom uglu od 180°	109
6.2	Strujna slika kanala u krivini pri napredovanju oštrog čela brzine za slučaj čiste advekcije	111
6.3	Dijagram promene brzine kroz vreme u izabranim kontrolnim presecima.....	112
6.4	Položaj fronta brzine po poprečnom preseku kanala za slučaj kada je čelo dostiglo sredinu deonice	113
6.5	Geometrijske karakteristike pravog kanala sa ostrvom.....	115
6.6	Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=0.0$ čas (ustaljeno stanje) : (a) – aktivna računska mreža, (b) – rezultujuća strujna slika, (c) - prostorni prikaz kanala	116
6.7	Dijagram uzvodnog i nizvodnog graničnog uslova.....	117
6.8	Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=1.25$ čas : (a) - aktivna računska mreža, (b) – rezultujuća strujna slika, (c) - prostorni prikaz kanala, (d) - podužni presek duž ose kanala	118
6.9	Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=3.60$ čas : (a) - aktivna računska mreža, (b) – rezultujuća strujna slika, (c) - prostorni prikaz kanala, (d) - podužni presek duž ose kanala	118

6.10	Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=4.80$ čas : (a) - aktivna računaska mreža, (b) – rezultujuća strujna slika, (c)-prostorni prikaz kanala, (d)-podužni presek duž ose kanala	121
6.11	Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=5.50$ čas : (a) - aktivna računaska mreža, (b) – rezultujuća strujna slika, (c)-prostorni prikaz kanala, (d)-podužni presek duž ose kanala	121
6.12	Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=7.50$ čas : (a) - aktivna računaska mreža, (b) – rezultujuća strujna slika, (c)-prostorni prikaz kanala, (d)-podužni presek duž ose kanala	123
6.13	Položaj mernih profila sa mernim vertikalama	126
6.14	Detalj mernih lokacija D1 i D2	126
6.15	Situacija korita rečne krivine sa položajem prikazanih detalja - reka Missouri.....	128
6.15a	Strujna slika - detalj D1	128
6.15b	Strujna slika - detalj D2.....	129
6.15c	Strujna slika - detalj D3.....	129
6.15d	Strujna slika - detalj D4.....	130
6.15e	Strujna slika - detalj D5.....	130
6.15f	Strujna slika - detalj D6	131
6.16	Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile B3, B5, B9 i B13 - reka Missouri.....	134
6.17	Dobijeni raspored koncentracije C_2 duž modelirane deonice reke Missouri	139
6.18	Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile B3, B5, B9 i B13 - reka Missouri.....	141
6.19	Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile B3, B5, B9 i B13 – reka Missouri	142
6.20	Zastupljenost drugog granulometrijskog intervala β_2 duž krivine reke Missouri	144
6.21	Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B8 - reka Missouri....	145
6.22	Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B10- reka Missouri...	146
6.23	Kumulativna promena kote dna	146
6.24	Situacija deonice donjeg toka reke Atchafalaya sa naznačenim položajem mernih profila	149
6.25	Situacija deonice sa položajem prikazanih detalja - reka Atchafalaya	152
6.26a	Strujna slika - detalj D1	152
6.26b	Strujna slika - detalj D2.....	153
6.26c	Strujna slika - detalj D3.....	153
6.26d	Strujna slika - detalj D4.....	154
6.26e	Strujna slika - detalj D5.....	154

6.27	Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile M3, M4, M6 i M9 - reka Atchafalaya	157
6.28	Dobijeni raspored koncentracije C_1 duž modelirane deonice reke Atchafalaya	163
6.29	Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile M3, M4, M6 i M9 - reka Atchafalaya.....	165
6.30	Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile M3, M4, M6 i M9 - reka Atchafalaya.....	166
6.31	Zastupljenost trećeg granulometrijskog intervala β_3 duž deonice reke Atchafalaya	167
6.32	Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M3 – Atchafalaya.....	168
6.33	Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M6 – Atchafalaya.....	169
6.34	Kumulativna promena kote dna	169
6.35	Situacija brane i akumulacije HE "Zvornik"	170
6.36	Prikaz računске mreže izabrane deonice HE "Zvornik"	172
6.37	Satni hidrogram na ulazu u deonicu (Profil P2) dobijen na osnovu linijskog modela CHARIMA (uzvodni granični uslov), i satni nivogram gornje vode (nizvodni granični uslov).....	174
6.38	Prikaz strujne slike za ustaljeno stanje	177
6.39	Dobijeni rasporedi nanosnih parametara duž modelirane deonice jezera HE "Zvornik" - ustaljeno stanje : (a) koncentracija C_1 , (b) zastupljenost pvog granulometrijskog intervala β_1 , (c) kumulativna promena kote dna ΔZ	179
6.40	Poređenje aktivne računске mreže pri nivou $Z_v=155.95$ mnm (crna boja) sa početnom računskom mrežom ($Z_v=157.00$).....	181
6.41	Prikaz strujne slike za vremenski presek $t=16.00$ h ($Z_v=155.95$ mnm).....	182
6.42	Dobijeni rasporedi nanosnih parametara duž modelirane deonice jezera HE "Zvornik" za vremenski presek $t=16$ h : (a) koncentracija C_1 , (b) zastupljenost pvog granulometrijskog intervala β_1 , (c) kumulativna promena kote dna ΔZ	182
6.43	Poređenje aktivne računске mreže pri koti nivoa $Z_v=155.02$ mnm (crna boja) sa mrežama pri nivou $Z_v=155.95$ (zelena), i nivou $Z_v=157.00$ (crvena – početno stanje).....	186
6.44	Prikaz strujne slike za vremenski presek $t=28.36$ h ($Z_v=155.02$ mnm).....	186
6.45	Dobijeni rasporedi nanosnih parametara duž modelirane deonice jezera HE "Zvornik" za vremenski presek $t=28.36$ h : (a) koncentracija C_1 , (b) zastupljenost pvog granulometrijskog intervala β_1 , (c) kumulativna promena kote dna ΔZ	188
6.46	Poređenje aktivne računске mreže pri koti nivoa $Z_v=154.00$ mnm (crna boja) sa mrežama pri nivoima : $Z_v=155.02$ (plava), $Z_v=155.95$ (zelena), i $Z_v=157.00$ (crvena – p.s.).....	190

6.47	Prikaz strujne slike za vremenski presek $t=40.16h$ ($Z_v=154.00$ mm).....	191
6.48	Dobijeni rasporedi nanosnih parametara duž modelirane deonice jezera HE "Zvornik" za vremenski presek $t=40.16h$: (a) koncentracija C_1 , (b) zastupljenost pvog granulometrijskog intervala β_1 , (c) kumulativna promena kote dna ΔZ	192

Spisak tabela

6.1 Poređenje merenih i sračunatih vrednosti nivoa vodnog ogledala – reka Missouri	131
6.2 Granulometrijski intervali nanosnog materijala reke Missouri	135
6.3 Usvojeni granulometrijski intervali deonice reke Missouri	136
6.4 Usvojena granulometrijska kriva deonice reke Missouri	137
6.5 Granični uslovi zadati na otvorenim granicama – donji tok reke Atchafalaya	150
6.6 Granulometrijski intervali nanosnog materijala donjeg toka reke Atchafalaya	159
6.7 Usvojeni granulometrijski intervali donjeg toka reke Atchafalaya	160
6.8 Usvojena granulometrijska kriva korita donjeg toka reke Atchafalaya (početni uslov)	161
6.9 Usvojena granulometrijska zastupljenost mernog profila M1 (granični uslov)	162
6.10 Usvojeni granulometrijski intervali razmatrane deonice HE "Zvornik"	175
6.11 Usvojena granulometrijska kriva razmatrane deonice HE "Zvornik"	175

Spisak priloga

Prilog 1 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile B2, B4, B6 i B7 - reka Missouri	200
Prilog 2 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile B8, B10, B11 i B12 - reka Missouri	201
Prilog 3 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile B14, D1 i D2 - reka Missouri	202
Prilog 4 Raspored po dubini merenih komponenata brzine u,v,w za vertikalnu V3 profila B3 – reka Missouri	203
Prilog 5 Raspored po dubini merenih komponenata brzine u,v,w za vertikalnu V2 profila B9 – reka Missouri	203
Prilog 6 Raspored po dubini merenih komponenata brzine u,v,w za vertikalnu V1 profila B13 – reka Missouri	204
Prilog 7 Dobijeni raspored koncentracije C_1 duž modelirane deonice reke Missouri.....	204
Prilog 8 Dobijeni raspored koncentracije C_3 duž modelirane deonice reke Missouri.....	205
Prilog 9 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile B1, B2, B4 i B6 - reka Missouri.....	206
Prilog 10 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile B7, B8, B10 i B11 - reka Missouri.....	207
Prilog 11 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile B12, B14, D1 i D2 - reka Missouri	208
Prilog 12 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile B1, B2, B4 i B6 - reka Missouri	209
Prilog 13 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile B7, B8, B10 i B11 – reka Missouri	210
Prilog 14 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile B12, B14, D1 i D2 – reka Missouri	211
Prilog 15 Zastupljenost trećeg granulometrijskog intervala β_3 duž rečne krivine - reka Missouri	212

Prilog 16 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B2 - reka Missouri	212
Prilog 17 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B7 - reka Missouri	213
Prilog 18 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B12 - reka Missouri	213
Prilog 19 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B13 - reka Missouri	214
Prilog 20 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B14 - reka Missouri	214
Prilog 21 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile M1, M2, M5 i M7 - reka Atchafalaya	215
Prilog 22 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile M8, M10 i M11 - reka Atchafalaya	216
Prilog 23 Dobijeni raspored koncentracije C_2 duž modelirane deonice reke Atchafalaya	217
Prilog 24 Dobijeni raspored koncentracije C_3 duž modelirane deonice reke Atchafalaya.....	217
Prilog 25 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile M1, M2, M5 i M7 - reka Atchafalaya.....	218
Prilog 26 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile M8, M10, i M11 - reka Atchafalaya	219
Prilog 27 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile M1, M2, M5 i M7 – reka Atchafalaya.....	220
Prilog 28 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile M8, M10, i M11 - reka Atchafalaya.....	221
Prilog 29 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M4 – Atchafalaya	222
Prilog 30 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M5 – Atchafalaya	222
Prilog 31 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M7 – Atchafalaya	223
Prilog 32 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M9 – Atchafalaya	223
Prilog 33 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M10 – Atchafalaya.....	224
Prilog 34 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M11 – Atchafalaya.....	224

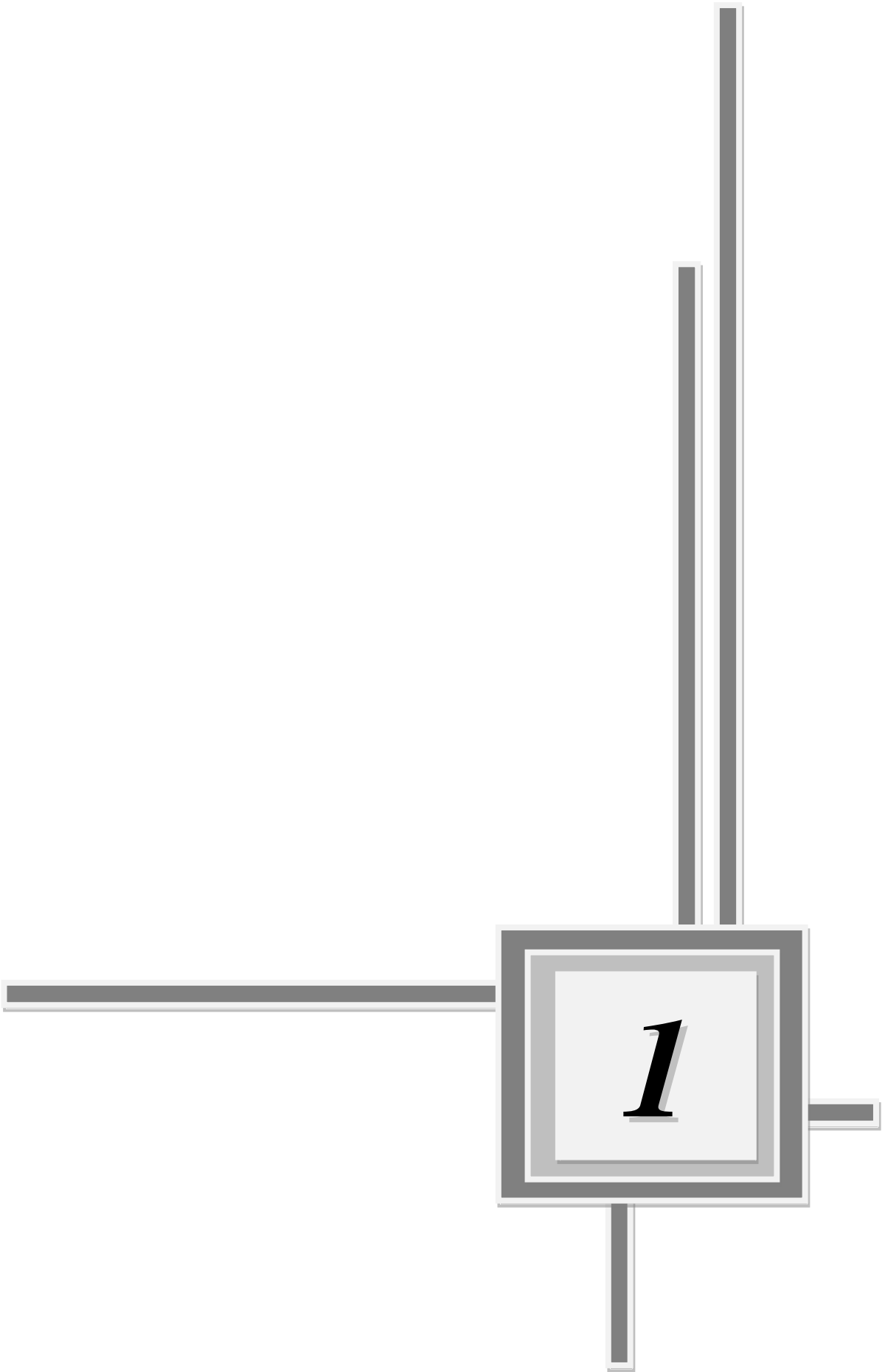
Prilog 35 Dobijeni rasporedi koncentracija i granulometrijske zastupljenosti (β) za frakcije d_2 i d_3 (početno – ustaljeno stanje) - HE "Zvornik"	225
Prilog 36 Dobijeni rasporedi koncentracija i granulometrijske zastupljenosti (β) frakcija d_2 i d_3 za vremenski presek $t=16.00h$ - HE "Zvornik"	225
Prilog 37 Dobijeni rasporedi koncentracija i granulometrijske zastupljenosti (β) frakcija d_2 i d_3 za vremenski presek $t=28.36h$ - HE "Zvornik"	226
Prilog 38 Dobijeni rasporedi koncentracija i granulometrijske zastupljenosti (β) frakcija d_2 i d_3 za vremenski presek $t=40.16h$ - HE "Zvornik"	226
Prilog 39 Dobijeni rasporedi koncentracija C_1 između analiziranih vremenskih preseka $t=28.36h$ ($Z_v=155.02$ mm) i $t=40.16h$ ($Z_v=154.00$ mm) - HE "Zvornik"	227

Spisak oznaka

a	debljina referentnog sloja
$A_{i,j}^n, Bk_{i,j}^a, \dots, Ik_{i,j}^a$	koeficijenti diskretizovanog člana difuzije dinamičke jednačine u ξ pravcu
$A_{i,j}^n, Be_{i,j}^a, \dots, Ie_{i,j}^a$	koeficijenti diskretizovanog člana difuzije dinamičke jednačine u η pravcu
c	parametar erozije
C	bezdimenziona masena koncentracija suspendovanog nanosa
C_o	prosečnu koncentraciju nanosa na dnu - <i>Van Rijn</i>
C_a	referentna koncentracija suspendovanog nanosa
C'	Chézy – jev koeficijent
C_k	koncentracija suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k
C_τ	koeficijent trenja
C_r	<i>Courant</i> -ov broj
d_{50}, d_{90}	karakteristični prečnici zrna
d_*	bezdimenzionalni parametar zrna
d_k	reprezentativni prečnik granulometrijskog intervala k
D/Dt	materijalni izvod
D_{Ti}	koeficijent turbulentne difuzije u pravcu i
D_{Mi}	koeficijent molekularne difuzije u pravcu i
D	fluks deponovanja
D_k	fluks deponovanja nanosnog materijala granulometrijskog intervala k
D_m	prečnik najmanjeg nepokretnog zrna
E	fluks erozije
E_k	fluks erozije nanosnog materijala granulometrijskog intervala k
E_m	debljina aktivnog sloja
f_i	zapreminska sila po jedinici mase u pravcu i
f	opšta zavisno promenljiva
g	ubrzanje zemljine teže
G	opšta zavisno promenljiva
\tilde{G}	srednja vrednost opšte zavisno promenljive G po dubini
G'	odstupanje opšte zavisno promenljive G od srednje vrednosti \tilde{G}
G_{11}, G_{22}, G_{12}	metrički koeficijenti transformacije
h	dubina vode

I_i	zbirni fluks molekularne i turbulentne difuzije u pravcu i
J	determinanta <i>Jakobijan</i> matrice
k	oznaka granulometrijskog intervala
k_f	kinetička energija fluktuacija
n	<i>Manning</i> -ov koeficijent hidrauličke hrapavosti
n_p	oznaka vremenskih podnivoa
p_r	pritisak
p	poroznost
q_{dno}	jedinični maseni pronos vučenog nanosa
q_{dno_k}	pronos vučenog nanosa granulometrijskog intervala k
Re^*	Reynolds-ov broj zrna
s	relativna gustina nanosa na dnu
S	neto maseni fluks razmene nanosa između rečnog dna i suspenzije
S_k	neto maseni fluks razmene nanosa granulometrijskog intervala k između rečnog dna i suspenzije
S_{p_k}	maseni fluks razmene nanosa granulometrijskog intervala k između aktivnog sloja i podsloja
t	vreme
T	efektivni bezdimenzionalni tangencijalni napon
u_i	komponenta brzine vode u pravcu i
\bar{u}_j	brzina osrednjena po vremenu
u'_j	fluktuacija brzine
u, v, w	komponente brzine duž koordinatnih pravaca x, y, z
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	komponente brzine duž koordinatnih pravaca x, y, z , osrednjene po vremenu
u', v', w'	fluktuacije brzine duž koordinatnih pravaca x, y, z
\bar{u}, \bar{v}	krivolinijske komponente brzina – kontravarijante
u_o	srednja brzina zrna - <i>Van Rijn</i>
u_*	efektivna smičuća brzina
u^*_k	kritična smičuća brzina
\bar{U}, \bar{V}	krivolinijske komponente jediničnih protoka
\bar{U}_s, \bar{V}_s	krivolinijske komponente jediničnih protoka smaknute računске mreže
w_t	brzina taloženja
x_i	Dekartova koordinata u pravcu i
x, y, z	Dekartovi koordinatni pravci

Z_d	kota rečnog dna
Z_v	kota slobodne površine vode
Z^*	suspenzioni broj
α, β, γ	koeficijenti linearizovanog člana propagacije
β_k	parametar zastupljenosti granulometrijskog intervala k u mešavini nanosa
γ	zapreminska težina vode
δ_o	srednja visina skoka zrna - <i>Van Rijn</i>
δ_{ij}	<i>Kroneker-ov</i> operator
ΔV	elementarna zapremina
Δl	elementarna dužina
Δ	bezdimezionalna gustina nanosa
Δa	diskretizovani prostorni priraštaj
$\Delta x, \Delta y$	širina numeričke mreže u x, y pravcima Dekartovog koordinatnog sistema
$\Delta \xi, \Delta \eta$	širina numeričke mreže u ξ, η pravcima krivolinijskog koordinatnog sistema
Δh	priraštaj dubine u linearizovanom članu propagacije
ΔZ_d	priraštaj kote rečnog dna u linearizovanoj globalnoj jednačini održanja mase nanosa na dnu
$\Delta \beta_k$	priraštaj parametra granulometrijske raspodele u linearizovanoj jednačini održanja mase aktivnog sloja
ε	granični parametar konvergencije
ζ_k	parametar redukcije pronosa nanosa granulometrijskog intervala k za deo čestica koji nisu direktno izloženi toku – hiding factor
θ_t	bezdimezionalni tangencijalni napon
θ	težinski koeficijent <i>Crank-Nicholson-ove</i> šeme
κ	<i>von Kármán-ova</i> konstanta
μ	koeficijent dinamičke viskoznosti
ν_t	kinematički koeficijent turbulentne viskoznosti
ν_m	kinematički koeficijent turbulentne viskoznosti
ν_u	kinematički koeficijent ukupne viskoznosti
ξ, η	pravci krivolinjiskog koordinatnog sistema
ρ	gustina vode
ρ_m	gustina mešavine vode i suspendovanog nanosa
ρ_s	gustina nanosa na rečnom dnu
τ_{xy}	smičući napon u fluidu, za ravan sa normalom x , u pravcu y



1. Uvod

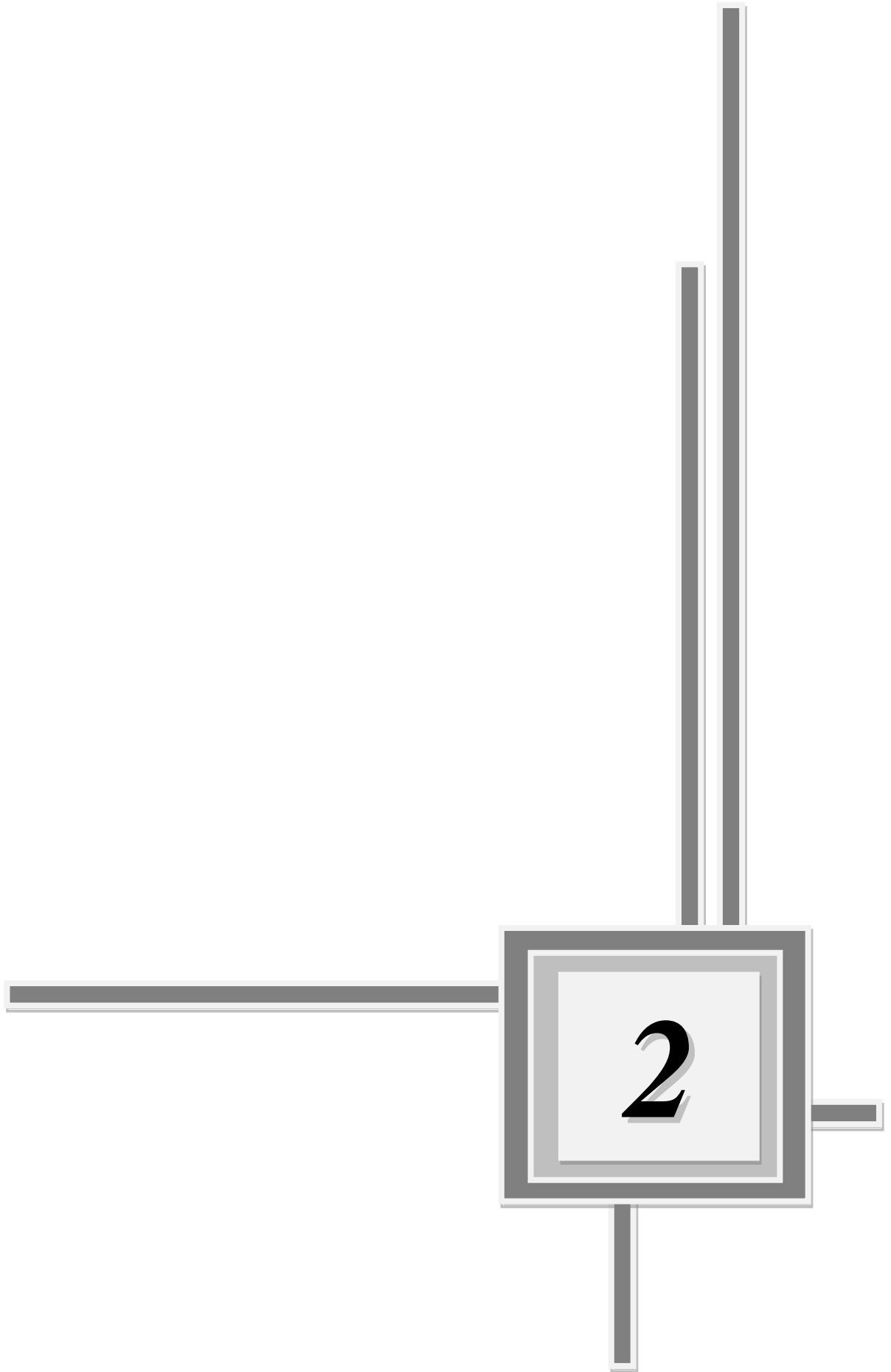
Predmet istraživanja u ovoj disertaciji je složena interakcija strujanja vode i ponašanja nanosa u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Strujanje vode u prirodnim vodotocima je samo po sebi veoma složeno, ne samo zbog kompleksne geometrije vodotoka, već i zbog neustaljenog karaktera strujanja, odnosno stalne promene gornje granice oblasti strujanja (slobodnog nivoa vode), što opet izaziva promene oblasti strujanja i u horizontalnom planu (tzv. kvašenje i sušenje obala). Nadalje, strujanje vode u prirodnim vodotocima je osnovni mehanizam koji definiše ponašanje nanosa, od pokretanja do transporta zrna nanosa (bilo da se nanos kreće pri dnu kao tzv. vučeni nanos ili u suspenziji). Kretanje nanosa izaziva promene korita usled erozije odnosno deponovanja nanosa, odnosno morfološke promene korita vodotoka koje imaju direktan povratni uticaj na promenu strujne slike (kao dodatna promena oblasti strujanja). Dodatni problem predstavlja ponašanje prirodne mešavine nanosa različitih frakcija, čije je postojanje karakteristično za korita većine prirodnih aluvijalnih vodotoka. Čak i pri istovetnim brzinama strujanja, zrna nanosa različite veličine se ponašaju različito : neka ostaju nepokretna, neka se kreću pri dnu kao vučeni nanos, a neka bivaju uvučena u suspenziju i kreću se kao suspendovani nanos. Složena strujna slika i prisustvo mešavine zrna nanosa u toku za posledicu imaju veoma kompleksnu dinamiku kretanja nanosa i neprekidne promene granulometrijskog sastava nanosa na dnu rečnog korita i u suspenziji. Dodatno povratno dejstvo ponašanja nanosa na struju se manifestuje kroz promene hrapavosti korita, odnosno gustine mešavine vode i suspendovanog nanosa.

Za potrebe izučavanja interakcije strujanja vode i ponašanja nanosa, koje kako je prethodno navedeno izuzetno složena i kompleksna, danas se mogu koristiti fizički modeli, eksperimentalne laboratorijske metode, analitičke metode, terenska merenja i matematičko modelisanje. Svaka od ovih metoda poseduje određene prednosti ali i ograničenja kada je u pitanju modeliranje strujanja vode i transporta nanosa u otvorenim tokovima. Tako su fizički modeli, zasnovani inače na principima sličnosti (II teorema), veoma korisni pri izučavanju strujanja otvorenih vodotoka, čak i u slučaju kompleksne geometrije vodotoka. Međutim, njihova primena na izučavanje interakcije vode i nanosa u prirodnim vodotocima je veoma ograničena zbog ograničenja koja proizilaze iz principa sličnosti. Sa druge strane, eksperimentalne laboratorijske metode se po samoj prirodi pristupa rešavanju problema koriste za detaljno izučavanje pojedinih izolovanih aspekata interakcije vode i nanosa, kao što su trenutak pokretanja zrna nanosa, ponašanje vučenog nanosa, brzina tonjenja zrna nanosa i sl. Analitičke metode su takođe ograničene na

pojednostavljene situacije za koje su analitička rešenja moguća, dok terenska merenja omogućavaju istovremeno izučavanje većine aspekata interakcije strujanja vode i ponašanja nanosa, ali ne pružaju mogućnost da se predvide buduće još nerealizovane situacije. Iz prethodno navedenog se može zaključiti da jedino matematičko modelisanje predstavlja pristup koji pruža mogućnost da se istovremeno razmatraju svi ključni aspekti interakcije strujanja vode i ponašanja nanosa, a koji se pri tome može koristiti i za predviđanje posledica budućih promena u vodotocima. Nadalje, matematičko modelisanje se danas već standardno kombinuje sa terenskim merenjima koja obezbeđuju podatke za kalibraciju i verifikaciju modela, odnosno sa eksperimentalnim laboratorijskim merenjima čiji rezultati omogućavaju dalje profinjenje modela. Istraživanje u ovoj disertaciji se fokusira na dalji razvoj i unapređenje matematičkih modela kojima se opisuje i simulira složena interakcija strujanja vode i ponašanja nanosa u prirodnim aluvijalnim vodotocima.

Zbog kompleksne prirode problema (interakcije strujanja vode i ponašanja nanosa u prirodnim aluvijalnim vodotocima) sve tri postojeće kategorije modela koji se odnose na ovu vrstu problema (linijski, ravanski i prostorni) su i danas predmet istraživanja, razvoja i unapređenja. Pri tome se mora imati u vidu da je razvoj ovakvih modela usko povezan sa razvojem i napretkom računarskih resursa i kapaciteta. Razvoj linijskih modela (koji omogućavaju izučavanje dugoročnih promena na veoma dugim deonicama prirodnih vodotoka, ali samo po dužini toka) je započeo onog trenutka kada je razvoj kompjuterskih resursa to omogućio, tj. krajem 60-tih i početkom 70-tih godina prošlog veka. Napredak u razvoju (a posebno u široj dostupnosti) kompjuterskih resursa 80-tih godina prošlog veka stvorio je mogućnost za istraživanja i razvoj u oblasti ravanskih modela (koji omogućavaju izučavanje promena ne samo duž toka već i upravno na tok), a ubrzo zatim i prostornih modela (koji u obzir uzimaju i treću prostornu dimenziju). Istorijat istraživanja u ovoj oblasti beleži relativno brz prelaz sa razvoja ravanskih na razvoj prostornih modela, tako da je razvoj ravanskih modela zastao u nekoj vrsti nedorečene faze. Međutim, iskustvo sa razvojem i primenom prostornih modela tokom poslednjih dvadesetak godina jasno pokazuje da čak i današnji računarski resursi značajno limitiraju primenu prostornih modela, pogotovo kada se radi o dugoročnim prognozama morfoloških promena u prirodnim vodotocima

Istraživanje u ovoj disertaciji se fokusira na ravanske modele (u horizontalnoj ravni), odnosno na modeliranje strujanja vode i ponašanja nanosa koje se opisuje jednačinama osrednjenim po dubini toka. Detaljan pregled stanja u ovoj oblasti istraživanja nedvosmisleno ukazuje da postoji značajna potreba za daljim izučavanjem, razvojem i unapređenjem ravanskih modela kojima se opisuje interakcija vode i nanosa u prirodnim vodotocima.



2. Pregled literature

Izuzetno brz razvoj računarskih resursa u poslednje četiri decenije omogućio je hidrotehničkim inženjerima da do tada samo teorijski razmatrane zakonitosti ponašanja prirodnih vodotoka prenesu sada i na nivo praktične primene. Mogućnost manipulacije računara sa veoma velikim bazama podataka, kao i njegova sposobnost obavljanja složenih i kompleksnih proračuna, dozvolio je inženjerima da po prvi put sisteme diferencijalnih jednačina, kojima se definišu razni procesi u toku (strujanje vode, transport nanosa, kretanje zagađenja, itd.), prvo rešavaju, a zatim i kombinuju sa veoma velikim spektrom empirijskih zavisnosti. Opisujući na taj način veoma složeno ponašanje jednog prirodnog toka, konačno je postalo moguće sa visokim stepenom detaljnosti analizirati i rešavati najsloženije probleme hidrotehničke prakse sa jedne strane, odnosno predviđati i vremenski simulirati dugotrajne procese sa druge. Imajući u vidu da ove diferencijalne jednačine, kojim se opisuju mahom svi procesi u prirodnom toku, nemaju analitičko rešenje, za potrebe njihovog rešavanja neophodno je bilo koristiti principe numeričke matematike. U tu svrhu su se tokom prethodnih par decenija razvile mnogobrojne numeričke metode i postupci. Zavisno od razmatranog problema, odnosno od procesa koji se modelira, ovi numerički modeli su se u cilju što veće tačnosti i efikasnosti u prethodnom periodu konstantno dopunjavali i usavršavali, što je rezultiralo formiranjem izuzetno stabilnih i robustnih matematičkih modela.

Kako su numeričke metode za modeliranje otvorenih tokova postajale sve stabilnije i efikasnije, tako su apetiti inženjerske prakse sve više rasli. Sve veća potreba za detaljnosti analize, koja pored strujanja vode uključuje i dodatne procese kao što su transport materije ili toplote, deformacija čvrste granice, promena oblasti strujanja, itd., intenzivira razvijanje numeričkih modela u funkciji formiranja što obuhvatnijeg i numerički što tačnijeg modela. Međutim, za razliku od modeliranja „čistog“ strujanja vode (fiksne granice, nema dodatnih procesa), koje je zbog svoje kompleksnosti i bazne uloge najviše analizirano, i za koji je definisan najveći broj numeričkih metoda i postupaka, kombinovano dejstvo vode i nekog dodatnog procesa znatno menja strukturu celog modela. Pored fizike samog procesa, koji može da utiče kako na postojeće karakteristike vodotoka, tako i da povratno menja hidrauličke uslove u toku (deformacija rečnog korita povratno utiče na struju, promena aktivne oblasti strujanja menja granice hidrauličkog modela, transport nanosa utiče na morfološke karakteristike što opet povratno menja strujnu sliku, itd.), numeričko rešavanje ovakvog složenog procesa postaje znatno složenije i računski mnogo „skuplje“.

Kako se predmet ovog rada ogleda u unapređenju i poboljšanju ravanskog modela strujanja vode sa aspekata numeričkog rešavanja i dinamičke promene aktivne oblasti strujanja sa jedne strane (sušenje i kvašenje priobalnog područja), i modeliranja kombinovanog dejstva vode i transporta prirodne mešavine nanosa u toku (suspendovanog i vučenog) sa druge strane, to će se u nastavku izvršiti pregled vladajućih stavova iz ovih oblasti. Pregled literature sadrži pregled dominantnih pristupa u modelisanju interakcije vode i nanosa u prirodnim vodotocima, kao i njihove primene u ravanskim i prostornim modelima. Pregledom literature obuhvaćeni su i ravanski i prostorni modeli, kako zbog niza zajedničkih elemenata, tako i zbog toga što se određena rešenja iz prostornih modela mogu, u pojednostavljenom obliku, primenjivati i kod ravanskih modela (što je u ovoj disertaciji i rađeno).

- *Jednačine kojima se opisuje strujanje vode*

Iako danas oblasti direktnog rešavanja Navier-Stokes - ovih jednačina, skraćeno "DNS" (Direct Navier-Stokes), i simulacije velikih vrtloga, skraćeno "LES" (Large-Eddy Simulation), zauzimaju značajno mesto u modeliranju strujanja otvorenih tokova, najveći deo matematičkih modela u numeričkoj hidraulici otvorenih tokova bazira se na osrednjenim po vremenu Navier-Stokes - ovim jednačinama, tj. Reynolds-ovim jednačinama (RANS - Reynolds-Averaged Navier-Stokes). Zasnovane na predstavljanju zavisno promenljivih veličina (komponente brzine i pritisak) u formi zbira srednje vrednosti u izabranom vremenskom intervalu i odstupanja od te vrednosti (fluktuacije), osnovne Navier-Stokes - ove jednačine se na ovaj način praktično transformišu u oblik pogodan za opisivanje turbulentnih tokova (Reynolds - ovi naponi). Imajući u vidu da najveći deo prirodnih vodotoka spada u oblast "plitkih" tokova, tj. u zonu blago promenljivog neustaljenog tečenja kod koje je vertikalna dimenzija znatno manja od horizontalne, Reynolds-ove jednačine se u sledećem koraku "prevode" iz prostornog u ravanski domen. Zanemarenjem vertikalnog ubrzanja fluidnih čestica u odnosu na gravitaciono ubrzanje, tj. uvođenjem pretpostavke o hidrostatičkom raspodelu pritiska duž toka, prostorno definisane Reynolds-ove jednačine se osrednjavaju po dubini, odnosno transformišu se u znatno pogodniji ravanski oblik. Ova transformacija će se detaljnije prikazati u Poglavlju 3.

Kao što je prethodno navedeno, Reynolds-ove jednačine, koje su dobijene vremenskim osrednjavanjem Navier-Stokes - ovih jednačina, u model strujanja pored viskoznih uticaja uključuju i efekte turbulencije. Kako su ovi uticaji turbulencije u okviru postojećeg hidrodinamičkog modela definisani isključivo preko "Reynoldsovih napona", koji formalno govoreći izražavaju uticaj fluktuacija (odstupanja od osrednjenih vrednosti) na glavno strujanje, stoga i njihovo modeliranje zahteva poseban tretman. U tom pogledu jedan od najčešće

primenjivanih pristupa za modeliranje turbulencije jeste koncept analogije turbulentnih i viskoznih napona razvijen od strane Boussinesq-a. Koristeći postojeći model viskoznih napona, autor u ovom pristupu koeficijent molekularne viskoznosti “zamenjuje” sa koeficijentom turbulentne (vrtložne) viskoznosti, a uticaj devijatorskog dela dilatacije sa kinetičkom energijom fluktuacija. Modeli turbulencije bazirani na principu Boussinesq-a danas variraju od najprostijih kao što su modeli zasnovani na konstantnom koeficijentu turbulentne viskoznosti i dužini mešanja, do onih znatno složenijih kao što su modeli sa jednom transportnom jednačinom, “k-model” (Rodi 1980), ili dve transportne jednačine, “k- ϵ model” ili “k- ω model” (Rastogi i Rodi 1978, Rodi 1993).

- *Metode za rešavanje jednačina strujanja vode*

Numeričko rešavanje jednačina strujanja, bilo da se odnosi na ravansko ili prostorno strujanje, generalno se može grupisati u tri osnovne grupe: *metodu konačnih razlika*, *metodu konačnih zapremina* i *metodu konačnih elemenata*. Koja će se od njih za rešavanje datog problema primeniti, zavisi kako od prirode samog problema, tako i od efikasnosti i tačnosti izabrane metode.

Prva navedena metoda, Metoda konačnih razlika, bazira se na diskretizaciji parcijalnih izvoda u prostor-vreme mreži. Na ovaj način vrednosti zavisno promenljivih razmatraju se samo u nizu diskretnih tačaka, a parcijalne diferencijalne jednačine se svode na algebarske. Kako od toga koja će se aproksimacija (“numerička šema”) za dati izvod koristiti zavisi i tačnost približnog rešenja diferencijalnih jednačina, u tu svrhu razvijeno je mnoštvo numeričkih šema. Najčešće primenjivana aproksimacija izvoda, koja se uglavnom može sresti u manje zahtevnim numeričkim modelima, jeste aproksimacija dobijena razvojem funkcije zavisno promenljive u Taylor-ov red (Jovanović 1998, Spasojević 1996). On je po strukturi najprostiji i najpristupačniji oblik aproksimacije izvoda, koji kao takav matematički znatno pojednostavljuje celokupan numerički proračun. Međutim, ono što se javlja kao najčešći problem kod ovakvog vida aproksimacije izvoda jeste to da njegova tačnost, odnosno stabilnost, uglavnom ne zadovoljava kriterijume celokupnog modela. U cilju prevazilaženja ovog problema, odnosno formiranja numerički što stabilnijeg i efikasnijeg modela strujanja, istraživači su u prethodnom periodu definisali znatan broj numeričkih šema, kojim su se pokušali obezbediti osnovni elementi numeričkog rešenja (stabilnost, konvergencija, tačnost rešenja). Tako su se formirale složenije aproksimacije kao što su : Crank-Nicholson - ova šema koja koristi težinski koeficijent po vremenu, zatim Preissmann - ova šema četiri tačke koja koristi težinske koeficijente i po vremenu i po prostoru (Preissmann 1961, Chau 1990, Spasojević 1996), kao i šeme dobijene tzv.

prilagođavanjem polinoma - Polynomial Fitting i Compact Schemes (Ferziger i Perić 2002). Takođe, kako izbor aproksimacije izvoda ne zavisi samo od toga koji član parcijalnih diferencijalnih jednačina strujanja se aproksimira, već i od slučaja na koji će se takva jednačina primeniti, razvijene su šeme kojima se pokriva oblast specijalnih slučajeva (diskontinuiteta). U tom pogledu advekcija kao najproblematičniji član kompletnog strujanja uslovio je formiranje konzervativnih šema tipa MUSCL - Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws (Kurganov i Levy 2000, Kurganov i Tadmor 2000, Bouchut-Bourdarias i Perthame 1996), i MUSCL-TVD (Total Variation Dimishing), kao i šema Mac-Cormack i Mac-Cormack-TVD (Batinić i Milanović 1997, Vincent-Caltagirone i Bonneton 2001, Garcia i Kahawita 1986, itd.). Ove šeme se mahom koriste za rešavanje izuzetno naglih i skokovitih promena u toku (rušenje brane, poplavni talasi, oštra čela, itd.). Ukoliko se advekcija ipak rešava aproksimacijama jednostavnijeg tipa, za najprikladniju šemu kojom se delimično osigurava fizička realnost struje koristi se šema uzvodnih razlika (Champman i Johnson 1996, Roache 1977, Jovanović 1998).

Izborom odgovarajuće aproksimacije za pojedine članove, i zatim njihovom zamenom u jednačine ravanskog toka, dobijaju se kao rezultat algebarske jednačine čiji oblik direktno zavisi od primenjenog tipa aproksimacije. Uopšteno se može reći da se dobijene algebarske jednačine ravanskog toka rešavaju primenom nekih od mnogobrojnih matematičkih metoda koje se koriste za rešavanje sistema linearnih, odnosno nelinearnih jednačina. Ukoliko su rezultujuće algebarske jednačine linearnog tipa, one se rešavaju ili direktnim metodama, ili postupcima iterativnog približavanja. Koja će se od ove dve grupe koristiti uglavnom zavisi od matematičkog karaktera algebarskih jednačina (linearne ili nelinerane) i obima računskog domena. Ako se radi o linearnom sistemu jednačina u računskoj oblasti manjih dimenzija, sa relativno malim brojem računskih čvorova, najčešće se koriste direktni metodi kao što su : postupak Gaus-ove eliminacije (Ferziger i Perić 2002, Carnahan-Luther i Wilkes 1969, itd.), gde se odgovarajućim algebarskim operacijama eliminišu određeni članovi sistema, zatim metod LU dekompozicije kao jedan od vidova prethodno navedene Gaus-ove eliminacije, kao i TDMA algoritam (Roache 1972, Jovanović 1998, Radojković i Klem 1989, itd.), postupak gde se tridijagonalna matrica rešava metodom “dvostrukog prolaza”. Međutim, kako diskretizovane jednačine ravanskog toka često formiraju sistem nelineranih jednačina koje se primenjuju na računске domene sa znatnim brojem računskih čvorova (više hiljada), aplikacija ovih direktnih postupaka je najčešće nemoguća, spora i računski veoma “skupa”. Iz tog razloga se za rešavanje sistema algebarskih jednačina ravanskog toka mnogo češće koriste iterativni metodi. Najprepoznatljivije metode ove grupe su bazni postupci kao što je Jacobi metod (Ferziger 1998, Press 1987), Gauss-Seidel metod (Ferziger i Perić 2002), i Metoda sukcesivne nadrelaksacije-SOR (Jovanović 1998, Press

1987) kao poseban oblik Gauss-Seidel - ovog metoda sa mogućnošću ubrzanja ili usporenja konvergencije. Njihove znatno efikasnije i računski stabilnije varijante, koje su kao takve našle veliku primenu u rešavanju problema numeričke hidraulike, čini postupak identifikacije minimuma funkcije CGM metodom (Conjugate Gradient) (Golub i van Loan 1990), zatim primena tog postupka na nesimetrične sisteme jednačina sa raznim varijacijama stabilnosti u formi CGS (Conjugate Gradient Squared), CGSTAB (CGS stabilized) i GMRES metoda (Saad i Shultz 1986, Van den Vorst 1992, Sonneveld 1989), kao i metod razdvajanja po koordinatnim pravicima nazvana ADI metoda (Hageman i Young 1981, Ferziger i Perić 2002, Carnahan-Luther i Wilkes 1969).

Navedeni postupci rešavanja sistema lineranih algebarskih jednačina mogu se koristiti za modeliranje oba stanja toka, tj. ustaljen i neustaljen režim strujanja. Ukoliko se modelira ustaljeno stanje u vodotoku, iterativno rešavanje sistema jednačina se nakon uspostavljanja graničnog kriterijuma konvergencije zaustavlja, dok se u slučaju neustaljenog procesa on ponavlja koristeći vrednosti iz prethodnog stanja. Kao što se i vidi iz navedenog, ukoliko je u pitanju ustaljeno tečenje efikasnost i brzina iterativnog postupka računski nema značajnog uticaja na karakteristike kompletnog proračuna. Ta sposobnost procedure da dođe do rešenja što brže i stabilnije mnogo veću ulogu igra kod neustaljenih procesa, gde se proračun obavlja u smislu konačnog broja ustaljenih stanja. Ukoliko je primenjena šema eksplicitna, proračun je kao i programska aplikacija znatno jednostavnija i prostija (manje memorije, lakše za programiranje), dok je sam račun nestabilan. Međutim, ako je šema implicitna, rešavanje sistema je jedino moguće iterativnim postupcima (znatno teže programirati), ali je sa druge strane proračun mnogo stabilniji i pouzdaniji. Kako bi se iskombinovale pozitivne strane oba pristupa, definisan je iz tog razloga set posebnih metoda koje za proračun nepoznatih koriste razvoj u Taylor-ov red po vremenu. U metode ovog tipa spadaju : Metod dva nivoa koji koristi trapezno pravilo kod aproksimacije vremenskih integrala (Ferziger i Perić 2002), zatim Prediktor-korektor metoda kojom se u prvom koraku pretpostavljaju vrednosti a potom u drugom koriguju (Butcher 2003, Goldstine 1977, Hairer i Gerhard 1996, Iserles 1996, Carnahan-Luther i Wilkes 1969, Jovanović 1998), kao i postupak više vremenskih nivoa poznatiji kao Runge-Kutta metod (Forsythe-Malcolm i Moler 1977, Hairer-Norsett i Wanner 1993, Atkinson 1989, Cellier i Kofman 2006). Specijalne varijante prediktor-korektor postupka su metode Mac-Cormack (Garcia i Kahawita 1986, Garcia-Navarro i Saviron 1992, Đorđević 1998, Jovanović 1998, itd.) i Adams-Bashfort (Butcher 2003, Goldstine 1977). Najveći deo danas raspoloživih numeričkih modela za proračun ravanskog strujanja zasniva se na nekim od navedenih postupaka (SUTRENCH-2D, TABS-2, CCHE2D, FAST2D, MIKE 21, MOBED2).

Opisani principi numeričkog modeliranja primenjuju se istovremeno na sve elemente (članove) jednačina ravanskog toka. Pri takvom načinu rešavanja ne vodi se bitno računa o samoj prirodi pojedinih članova jednačina ravanskog toka, tj. matematički i fizički karakter svakog člana posebno u jednačinama toka ne igra značajnu ulogu u samom rešavanju. Takvo zanemarenje same strukture članova dinamičke jednačine i jednačine kontinuiteta često se nepovoljno projektuje na stabilnost i tačnost kompletnog proračuna strujanja. Ukoliko pored hidrauličkog dela model uključuje još nanosne procese i promene geometrije, celokupan problem se dodatno amplificira. Ovakvo ponašanje modela najočiglednije je prilikom modeliranja složenih i zahtevnih hidrauličkih stanja (prolom brane, poplavni talas, opstrujavanje, nagle promene geometrije, itd.). U cilju pronalaženja načina za obezbeđenje što veće stabilnosti i tačnosti hidrauličkog modela, Janenko je 1971 god., a autori Benqué, Cunge, Feuillet, Hauguel i Holly, Jr. 1982 god., su kao alternativni način rešavanja jednačina predložili tzv. postupak “razlomljenih koraka” (Fractional step method). Na ovaj način dinamička jednačina i jednačina kontinuiteta se raščlanjuju na članove advekcije, difuzije i propagacije, koji se zatim rešavaju metodama koje najbolje odgovaraju njihovim matematičkim karakteristikama. Zasnovan na struktuiranoj mreži, bez mogućnosti modeliranja dodatnih procesa (transport nanosa, deformacija korita, proračun transporta toplote) i promene geometrije fizičkog domena, razvijeni model za proračun strujanja nastalog usled plime i oseke CYTHERE-ES1 (Benqué 1982) je za član advekcije koristio metodu karakteristika, za član difuzije implicitnu metodu konačnih razlika, a za član propagacije ADI postupak. Kako je ovakav način rešavanja jednačina ravanskog toka računski veoma “skup” i numerički izuzetno zahtevan, numerički model CYTHERE-ES1 ostaje za sada jedini raspoloživ model baziran na ovoj metodi.

- *Transformacija jednačina u krivolinijski koordinatni sistem*

Struktuirane mreže su u svom primitivnom obliku veoma nepodesne za prikazivanje i modeliranje strujanja u domenima „prirodne“ geometrije. Kako bi opisali složene granice fizičke oblasti koje najčešće nisu bile poravnate ni sa jednom od osa koordinatnog sistema, prvi dvodimenzionalni hidrodinamički modeli razvijeni 70-ih godina koristili su tzv. stepenaste mreže (Benqué 1982). Ovakav tip mreže prouzrokovao je mnogo problema kako tehničke prirode, tako i numeričke (granični uslovi). Neminovna posledica svega toga bio je prelaz na krivolinijske koordinate. Jedan od prvih koraka bile su tzv. ortogonalne krivolinijske koordinate, koje iako su zakrivljene, seku se pod pravim uglom (Spasojević 1990, Thompson 1975, Benqué 1982). Međutim, u slučaju metode konačnih razlika ovakva vrsta krivolinijskih koordinata i dalje znatno

ograničava modeliranje strujanja oko objekata lokalnog karaktera. Iz tog razloga dalje povećanje fleksibilnosti je ostvareno formiranjem neortogonalnih krivolinijskih koordinata, gde je u cilju boljeg prilagođavanja složenim geometrijama dopuštena potpuna deformacija računске ćelije. Kao posledica ovakve transformacije parcijalnih diferencijalnih jednačina javlja se pojava velikog broja dodatnih članova koje treba posebno diskretizovati i rešavati, što opet značajno utiče na vreme proračuna i raspoloživi memorijski prostor (Simmonds 1994, Champman i Johnson 1996). Da bi se ovaj vid transformacije sveo na matematički što prihvatljiviji i prostiji oblik, današnji numerički modeli najčešće koriste princip delimične transformacije kod koga se uslovno rečeno transformišu samo vektori položaja, odnosno nezavisno promenljive veličine.

- *Jednačine kojima se opisuje transport nanosa i deformacija korita*

Iako Navier-Stokes - ove jednačine zajedno sa jednačinom kontinuiteta (RANS) predstavljaju generalno prihvaćeni matematički opis (model) strujanja fluida, trenutno nema takvih matematičkih formulacija za kompletan proces interakcije vode i nanosa. Najnovija nastojanja da se formuliše opšti matematički model interakcije vode i nanosa baziraju se na dvofaznom (two-phase flow) pristupu (Villaret i Davies 1995, Liu 1996, Ni 1996, Cao 1996, Greimann 1999), inspirisani istorijom dvofaznog strujanja u drugim oblastima (Ishii 1975, Drew 1983, Elghobashi 1994, Croue 1996). Osnovna ideja koja stoji iza ovakvog pristupa jeste formulacija osnovnih jednačina održanja mase i količine kretanja za obe faze ponaosob, što zahteva definisanje i potom uključivanje u model članova kojima se definiše interakcija između faza (npr. naponi usled interakcije faza).

Međutim, iako pristup dvofaznog strujanja izgleda obećavajuće, njegova primena i formulacija osnovnih jednačina održanja su još uvek u svom pivoju. Određeni članovi osnovnih jednačina održanja koji se u drugim oblastima uglavnom zanemaruju, u domenu interakcije vode i nanosa najčešće imaju potpuno drugačiji tretman. Tako se na primer naponi između vode i nanosnih čestica najčešće zanemaruju pod pretpostavkom da su oni znatno manji od turbulentnih napona između fluidnih čestica, dok se naponi koji se javljaju usled međusobne interakcije nanosnih čestica zanemaruju pod pretpostavkom da to takvog kontakta uopšte ne dolazi. Obe ove pretpostavke postaju veoma diskutabilne u slučaju visokih koncentracija. Iz tog razloga svi trenutno raspoloživi modeli za proračun interakcije vode i nanosa u prirodnim vodotocima baziraju se na znatno prostijim konceptima.

Osnovna ideja ovog znatno prostijeg koncepta modeliranja interakcije vode i nanosa se sastoji u tome da se kompletan transport nanosa deli prvo na suspendovani i vučeni, za koje se zatim

definiše set jednačina kojim se opisuje posebno tretman suspendovanog nanosa, a posebno transport vučenog nanosa i deformacija rečnog korita. Kao tako definisan koncept, on zahteva podelu nanosnog domena na oblast pri dnu sa jedne strane, i na preostali deo domena sa druge strane. Iz toga direktno sledi da se jednačine za procese na dnu i pri dnu pišu za odgovarajući sloj na dnu korita, dok se jednačine za procese vezane za suspendovani nanos pišu za preostali deo oblasti.

Danas u inženjerskoj praksi zastupljena su tri bazna koncepta za modeliranje procesa koji se javljaju na rečnom dnu : pristup mešanog sloja (mixing layer) predložen od strane Karim-a i Kennedy-a 1982 god., zatim pristup sloja vučenog nanosa (bedload layer) predložen od strane autora van Rijn - a (1987), kao i model aktivnog sloja (active layer) predložen od strane Spasojevića i Holly-ja (1990). Slično kao i u slučaju dvofaznog strujanja, ni jedan od ovih konceptata nije prihvaćen kao generalni pristup za modeliranje i proračun procesa pri i na rečnom dnu. Iako je uopšteno govoreći formulacija osnovnih jednačina za sva tri kocepta prilično slična, one se ipak mogu razlikovati zavisno od usvojenog pristupa. Za razliku od nanosnih procesa na i pri dnu rečnog korita, modeliranje transporta suspendovanog nanosa se uvek bazira na adektivno-difuznoj jednačini, gde se adektivni član vertikalnog ubrzanja izražava u formi brzine pada. Ova jednačina se može dobiti ili iz osnovnih jednačina dvofaznog strujanja, ili pak iz jednačine održanja mase. Ukoliko se koristi ovaj drugi pristup, uvodi se pretpostavka da su brzine kretanja nanosnih čestica u horizontalnoj ravni identične sa brzinama fluidnih čestica, dok su brzine čestica u vertikalnoj ravni jednake brzini fluida umanjenom za brzinu tonjenja date čestice.

Kako je osnovna pretpostavka ovog koncepta podela kontinualne nanosne oblasti na zonu suspendovanog i na zonu vučenog nanosa, potrebno je naknadno definisati članove kojima se one povezuju. Ovo se prvenstveno ostvaruje preko članova razmene materijala između suspenzije i dna koji se definišu kao maseni fluks sumarnog dejstva erozije i deponovanja. Kao takav on se pojavljuje i u jednačini održanja mase suspendovanog nanosa, i u jednačinama vezanim za i pri rečnom dnu.

Kao što se može i zaključiti na osnovu prethodno navedenog, osnovne razlike između danas raspoloživih nanosnih modela ogledaju se prvenstveno u modeliranju procesa na i pri rečnom dnu. Pod ovim se podrazumevaju kako transport vučenog nanosa i deformacija rečnog korita, tako i pravilno definisanje veoma značajnog člana razmene između suspenzije i dna. U tom svetlu je do danas razvijen čitav set nanosnih modela koji za rešavanje struje koriste 1D, 2D ili 3D hidraulički model, dok za modeliranje nanosa koriste varijacije nekih od navedenih konceptata. Tako autori Shimizu (1990) i Brors (1999) za deformaciju rečnog korita koriste

baznu Exner-ovu jednačinu (Spasojević 1990, Spasojević i Holly 1990a), u koju uključuju i transport vučenog nanosa i član razmene sa suspenzijom, dok ravanski 2D model Argos Modeling System (Usseglio-Polatera i Cunge 1985), i prostorni 3D FLESCOT model (Onishi i Trent 1985) koriste samo transport suspendovanog nanosa i Exner-ovu jednačinu bez fluksa divergencije vučenog nanosa. Ravanski model CCHE2D (Jia i Wang 1999), kao i modeli autora Nagata (2000), Keh-Chia i Chih-Tsung - a (2003) i Tassi (2007) uključuju samo vučeni nanos i Exner-ovu jednačinu bez člana razmene sa suspenzijom, dok model TABS-2 (Thomas and McAnally 1985), koji ne razdvaja vučeni i suspendovani nanosa (total-load pristup), koristi Exner-ovu jednačinu sa empirijskim fluksom pronosa ukupnog nanosa. Pored navedenih modela, koji za proračun nanosa obavezno uključuju rešavanje deformacije korita (Exner-ova jednačina), danas su na raspolaganju i modeli koji se zbog efikasnosti i brzine proračuna koncentrišu samo na transport nanosa. Takvi su modeli TELEMAT-3D, kao i modeli autora Sheng-a (1983), Olsen-a (1999), Jankowsk-og (1994), Lin-a i Falconer-a (1996).

Drugu grupu čine modeli bazirani na metodi holandskog naučnika Van Rijn-a (1987). Kao novi pristup on uvodi koncept sloja vučenog nanosa (bedload layer), i predlaže dve metode za proračun deformacije rečnog korita. Prva metoda se zasniva na jednačini održanja mase za kontrolnu zapreminu ovog sloja, dok se druga metoda bazira na jednačini održanja mase za kontrolnu zapreminu kompletne dubine toka, koja kao takva uključuje kontrolnu zapreminu sloja vučenog nanosa i celokupnog sloja suspendovanog nanosa iznad (razmatra se pronos ukupnog nanosa). Na ovim metodama su zasnovani modeli SUTRENCH-2D i SUTRENCH-3D (van Rijn 1987), kao i modeli FAST2D (Minh Duc 1998), FAST3D (Wu 2000), i model autora Wang-a i Adefa-a (1986). Modeli FAST2D i FAST3D kao alternativu za proračun divergencije fluksa vučenog nanosa koriste postupak kod koga se bilans vučenog nanosa u računskoj ćeliji računa kao razlika između ravnotežnog i sračunatog pronosa nanosa - non-equilibrium pristup (Wu 2000).

Modeli MOBED2 (Spasojević i Holly, 1990a, 1990b) i CH3D-SED (Spasojević i Holly 1993) koriste kako je ranije navedeno koncept baziran na pristupu aktivnog sloja i aktivnog podsloja (active layer i active stratum). Ovim pristupom autori predlažu postupak za proračun promene kote dna korita i granulometrijskog sastava aktivnog sloja u slučaju prirodne mešavine nanosa - neograničen broj granulometrijskih intervala. Prirodnu mešavinu rečnog nanosa razmatraju još jedino model FLESCOT (Onishi i Trent 1985), koji umesto proizvoljne granulacije koristi tri jasno definisane frakcije (glina, prašina, i pesak), kao i prostorni model FAST3D (Wu 2000) i model autora Olsen-a (1999).

Drugi, podjednako bitan element nanosnog proračuna, jeste definisanje tzv. procesa razmene

između suspenzije i rečnog dna. Formulisan kao granični uslov jednačine održanja mase suspendovanog nanosa pri dnu korita sa jedne strane, i veze nanosnih procesa na dnu i suspenzije sa druge strane, njegova matematička i fizička kvantifikacija se pokazala kao jedan od najizazovnijih problema u modeliranju nanosnog transporta.

U svom uopštenom obliku ovaj član razmene je definisan kao razlika između masenog fluksa erozije i deponovanja. Kako on utiče podjednako na nanos i u suspenziji i na rečnom dnu, u jednačini održanja mase suspendovanog nanosa član razmene se pojavljuje sa pozitivnim predznakom, dok u jednačine kojim se opisuju nanosni procesi na dnu on ulazi sa negativnim predznakom. Da bi se u cilju primene u nanosnim modelima ovaj član razmene i matematički kvantifikovao, teorijski oblik svakog od elemenata ponaosob (član erozije i član deponovanja) izveden je iz jednačina održanja mase suspendovanog nanosa (Jobson i Sayre 1970, Ashida i Okabe 1982, Spasojević i Holly 1993, Jovanović 2002). Na osnovu tih teorijskih razmatranja član erozije je formulisan kao turbulentni difuzni fluks koji je usmeren vertikalno naviše, dok je član deponovanja predstavljen kao advektivni fluks uzrokovan brzinom tonjenja čestice (težina čestice) koji je usmeren vertikalno naniže.

Imajući u vidu isključivo prostorni karakter članova erozije i deponovanja, njihovo modeliranje kao takvih moguće je sprovesti jedino u okviru prostornih modela. Tako rapoloživi prostorni nanosni modeli autora Shimizu-a (1990), Spasojevića i Holly-a (1990a, 1990b), Spasojevića i Holly-a (1993), Minh Duc-a (1998), Rodi-ja (2000) i Wu-a (2000) za proračun fluksa deponovanja koriste vrednost koncentracije sračunate u oblasti neposredno iznad rečnog dna, dok Jankowski (1994) uvodeći stohastički faktor za obračunavanje efekta da zрно pre nego što padne na dno može da bude resuspendovano, taj pristup dodatno proširuje. Za razliku od fluksa deponovanja, eroziju je znatno teže modelisati. U toj oblasti autori Celik-Rodi (1984) i van Rijn (1986) predložili su da se za proračun fluksa erozije koristi vrednost koncentracije pri ravnotežnom stanju toka. Međutim, nedostatak ovog pristupa korištenog u modelima autora Spasojevića i Holly-a (1990a, 1990b), Lin-a i Falconer-a (1996), Minh Duc-a (1998), Rodi-ja (2000) i Wu-a (2000) je u tome što je erozija na rečnom dnu praktično uvek prisutna, i to uvek sa svojim maksimalnim intenzitetom. Zbog takve, fizički nerealne pretpostavke, autor Brors (1999) je predložio modeliranje fluksa erozije u svom osnovnom obliku. Ovaj pristup korišten je u modelima autora Spasojević-a i Holly-a (1993). U tom slučaju teorijski fluks erozije računat je kao diskretizovani vertikalni gradijent sračunate vrednosti koncentracije u oblasti neposredno iznad rečnog dna (ista vrednost koja je korištena i kod deponovanja), i koncentracije dobijene eksperimentalnim postupkom za ravnotežno stanje pronosa nanosa - referentna koncentracija (Einstein 1950, van Rijn 1984). Takođe, u ovom modelu autori su kod oba člana koristili pristup

nanosne mešavine.

Za slučaj ravanskog modela ovi postupci su znatno pojednostavljeni. S obzirom na to da u tom slučaju ne postoje informacije o vertikalnom rasporedu koncentracije koje je neophodno za definisanje teorijskog oblika članova razmene, izraz za proračun masenog fluksa deponovanja predložio je autor Lin (1984), dok se maseni fluks erozije računa po prethodno navedenoj pretpostavci ravnotežnog stanja toka predloženoj od strane autora Celik-Rodi (1984) i van Rijn-a (1986).

- *Modeliranje dinamičke promene aktivne oblasti strujanja*

Promenljivi računski domeni sa pokretnim granicama predmet su istraživanja prvenstveno onih naučnih disciplina gde dolazi ili do naglog i intenzivnog deformisanja (prostornog i vremenskog) razmatrane oblasti za kratak vremenski period (talasno kretanje), ili gde granična interakcija zahteva dodatne analize i formulacije (elastična granica). Kako u oba ova slučaja promena aktivnog domena bitno utiče na tačnost zavisno promenljivih veličina, modeliranje dinamičke promene granične linije u ovim oblastima predstavlja praktično neophodan sastavni element kompletnog proračuna.

Modeliranje deformacije aktivnog domena strujanja danas se generalno može podeliti u dve osnovne grupe. Prvu grupu, znato ređe korištenu kada su u pitanju modeli otvorenih tokova, čine tzv. pokretne mreže. Prema ovom pristupu, dinamička promena čvrstih granica modela uzrokuje novu koordinatnu raspodelu računskih tačaka unutar domena, formirajući pri tom u svakom vremenskom preseku praktično novu računsku mrežu. Međutim, znatan broj nedostataka kao što su dodatno povećanja složenosti jednačina strujanja, zatim potencijalna deformacija računskih ćelije koja može dovesti do numeričke nestabilnosti proračuna, kao i znatno povećanje samog vremena proračuna i potrebnog memorijskog prostora, ovaj pristup čine veoma nepodesnim za modeliranje velikih domena kakvi se uglavnom javljaju kod otvorenih tokova. Ovaj metod modeliranja dinamičke promene granica modela razmatran je od strane autora Lynch i O'Neill 1980, Helenbrook 2000, Boer-Schoot i Bijl 2007, itd.

Da bi se na neki način izbegla deformacija računске mreže kao izuzetno problematičan i računski „skup“ postupak pri modeliranju dinamičke promene položaja čvrste granice (za modeliranje velikih fizičkih domena deformacija računске mreže je praktično nemoguća a i nepotrebna), istraživači se u ovim oblastima koncentrišu više na grupu metoda koje koriste princip fiksne računске mreže, ali sa mogućnošću praćenja „kretanja“ obalne linije. Uopšteno govoreći, dinamičko pomeranje granične linije domena se u ovoj metodi modelira dodatnim

jednačinama, dok se računске tačke na osnovu sračunatog položaja obalne linije zatim jednostavno ili aktiviraju ili isključuju iz proračuna. Na ovaj način nepoželjni efekti prostorno-vremenske deformacije računске mreže su generalno izbegnuti, dok se kao jedini nedostatak javlja dodatni set jednačina koje treba rešiti.

Za oblast intenzivnog talasnog kretanja u morskim priobalnim područjima jedan od često korištenih primera ovog metoda dali su autori Prasad i Svendsen (2003). Rešavanjem dinamičke jednačine ravnskog toka po komponentama graničnih brzina u^g i v^g , a uz primenu kinematičkog uslova da tačke na graničnoj liniji ostaju na njoj i tokom kretanja, oni su definisali vremensku funkciju promene položaja obalne granične linije za slučaj pojave talasa u priobalnim područjima. Na sličan način grupa autora Marella, Krishnan, Liu i Udaykumar (2005) je za poznato polje brzina ovu funkciju definisala kao materijalni izvod normalnog rastojanja diskretnih tačaka od granične linije. Takođe, inspirisani ovom metodom, autori Gilmanov i Sotiropoulos (2005) su proučavajući i analizirajući kretanje potopljenih objekata predložili postupak za modeliranje kretanja kompleksnih 3D potopljenih objekata po unapred definisanoj putanji.

- *Cijevi istraživanja u disertaciji*

Nakon pregleda dosadašnjih stavova, postupaka i metoda iz domena modeliranja ravanskog strujanja vode, transporta nanosa i promene aktivnog računskog domena (sušenje i kvašenje priobalnog područja), generalno se može zaključiti da svaka od ovih oblasti ponaosob istovremeno pokazuje potrebu i otvara prostor za dodatna poboljšanja i unapređenja. Problem numeričke efikasnosti i tačnosti postupaka za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina ravanskog toka i transporta nanosa u geometrijski kompleksnim oblastima, zatim rešavanje interakcije vode i nanosa pri stanju prirodne mešavine nanosa sa matematičkom formulacijom fizičkih procesa koji se javljaju pri dnu rečnog korita (član erozije i deponovanja kod ravanskih modela), kao i definisanje postupka dinamičke promene granice domena kao neophodnog elementa za pravilno i tačno modeliranje ravanskih tokova (sušenje i kvašenje priobalnog područja), predstavljaju neke od osnovnih problema koji se javljaju pri modeliranju ravanskog strujanja vode i transporta nanosa u prirodnim vodotocima. Takođe, istovremeno dejstvo svih navedenih procesa uzrokuju dodatne efekte i probleme koji se ne mogu javiti ukoliko se procesi razmatraju pojedinačno. Iz tog razloga kombinovana međusobna interakcija svih navedenih procesa predstavlja element koji zahteva dodatnu analizu i rešavanje.

Imajući u vidu navedeno osnovni cilj istraživanja u ovom radu se može definisati kao dalje

unapređenje i razvoj u oblasti matematičkog modelisanja interakcije strujanja vode i ponašanja nanosa u prirodnim aluvijalnim vodotocima, pri čemu se istraživanje fokusira na modelisanje ravanskih jednačina, osrednjenih po dubini toka.

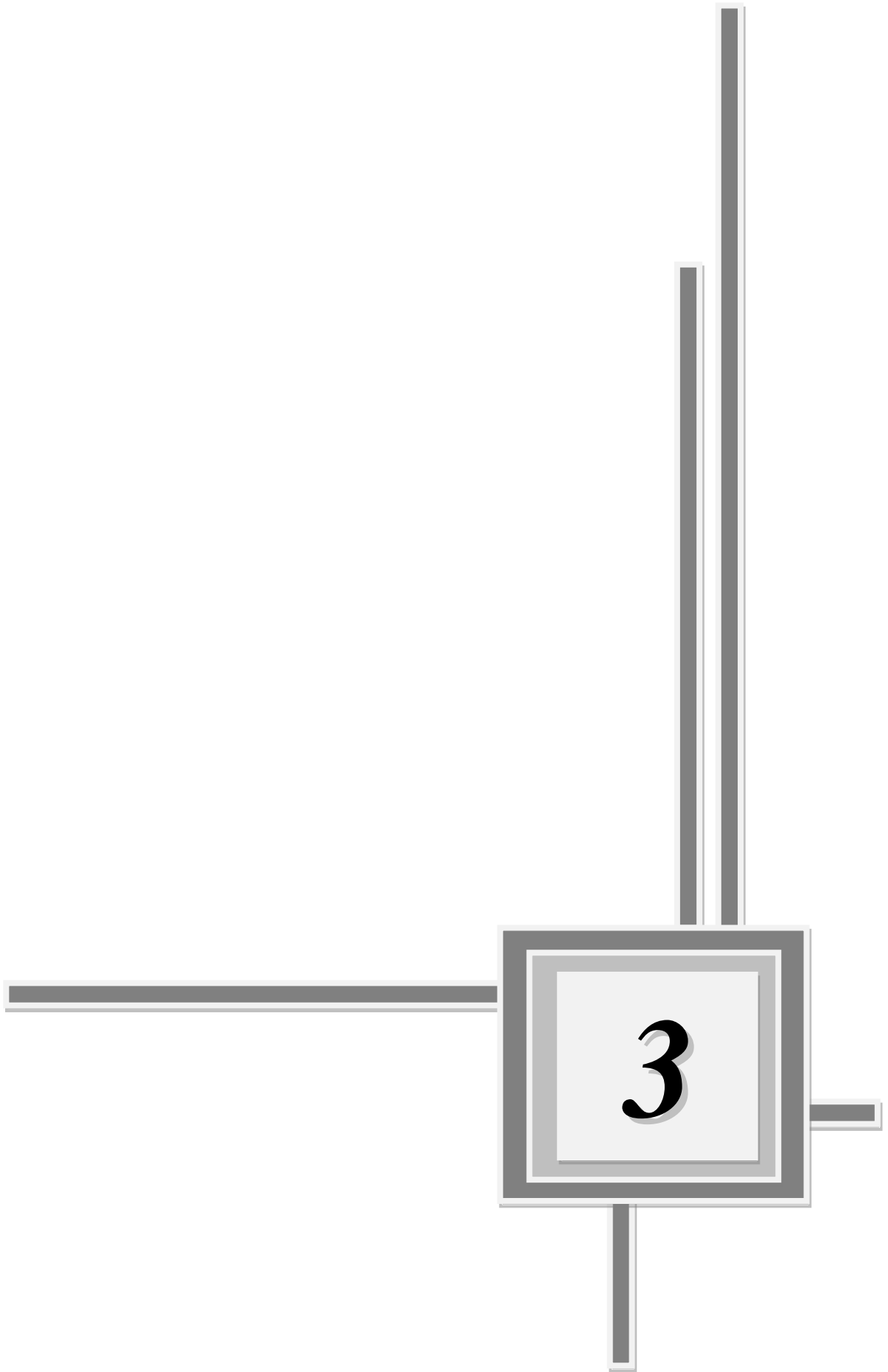
Partikularni ciljevi istraživanja su :

- Matematičko formulisanje, uz unapređenje nekih od postojećih formulacija, ključnih elemenata problema izučavanja, kao što su :
 - strujna slika u uslovima kompleksne geometrije korita i neustaljenog strujanja uz stalne promene granice oblasti strujanja;
 - ponašanje nanosa, od pokretanja do transporta zrna nanosa (bilo da se nanos kreće pri dnu kao tzv. vučeni nanos ili u suspenziji);
 - promene korita usled erozije odnosno deponovanja nanosa, odnosno morfoloških promena korita vodotoka koje imaju direktan povratni uticaj na promene stujne slike;
 - ponašanja prirodne mešavine nanosa različitih frakcija, odnosno kompleksne dinamike kretanja nanosa i neprekidne promene granulometrijskog sastava nanosa na dnu korita, vučenog nanosa i nanosa u suspenziji;
 - povratnog dejstvo ponašanja nanosa na struju koje se manifestuje kroz promene hrapavosti korita, odnosno gustine mešavine vode i suspendovanog nanosa.
- Transformisanje formulisanog seta jednačina u opšte krivolinijske koordinate :
 - obezbeđenje adekvatnog prikaza složene geometrije prirodnog vodotoka sa promenljivim granicama.
- Razvoj algoritama i numeričkih postupaka koji omogućavaju rešavanje prethodno formulisanog seta jednačina, za slučaj jednačina u opštim krivolinijskim koordinatama, sa posebnim akcentom na :
 - poboljšanje tačnosti, pouzdanosti i efikasnosti numeričkog rešenja;
 - izbor opšteg numeričkog pristupa koji omogućava primenu adekvatnog numeričkog rešenja za pojedine delove jednačina;
 - rešavanje numeričkih problema koje unosi advekcija u jednačinama strujanja i jednačinama transporta;

- razvoj algoritma za rešavanje promenljive oblasti strujanja u horizontalnom planu (tzv. kvašenje i sušenje obala);
 - strategiju rešavanja (uz razvoj odgovarajućeg algoritma) kompletnog seta jednačina.
- Razvoj programa na osnovu seta jednačina, odnosno algoritama i numeričkih postupaka za njihovo rešavanje :
- testiranje programa na šematskim primerima, posebno delova sa novim rešenjima.
- Primena razvijenog programa na formiranje simulacionih modela za niz izabranih situacija za koje postoje detaljna merenja i analiza rezultata modela :
- testiranje programa na stvarnim primerima za koje postoje merenja;
 - kalibracija i verifikacija formiranih modela, na osnovu poređenja rezultata simulacija sa rezultatima merenja;
 - poboljšane analize interakcije strujanja vode i ponašanja nanosa u prirodnim aluvijalnim vodotocima.

Kao krajnji rezultat očekuje se poboljšan i unapređen ravanski model strujanja vode i ponašanja nanosa u aluvijalnim vodotocima. Poboljšanja se posebno očekuju kroz :

- unapređenja nekih od postojećih matematičkih formulacija procesa;
- poboljšanje tačnosti, pouzdanosti i efikasnosti numeričkog rešenja (kao kombinacija opšteg numeričkog pristupa i pojedinih numeričkih rešenja u slučaju jednačina u opštim krivolinijskim koordinatama);
- razvoj algoritma za rešavanje promenljive oblasti strujanja u horizontalnom planu (tzv. kvašenje i sušenje obala);
- poboljšane mogućnosti analize interakcije strujanja vode i ponašanja nanosa u prirodnim aluvijalnim vodotocima.



3. Teorijske osnove

3.1. Jednačine kojima se opisuje strujanje vode

Ključnu ulogu u rešavanju i opisivanju interakcije vode i nanosa u otvorenim tokovima ima strujna slika, koja je po svojim fizičkim osobinama prostornog i turbulentnog karaktera. Definisane ovako složenog tečenja, nastalog kao posledica kompleksne geometrije prirodnog vodotoka, bazira se na osnovnim principima mehanike fluida sadržanim u zakonima održanja mase (jednačina kontinuiteta) i održanja količine kretanja (dinamička jednačina). Ako se ovi zakoni primene na slučaj homogenog, izotropnog, nestišljivog i viskoznog fluida, dolazi se do poznatog oblika *Navier-Stokes* - ovih jednačina koje važe u x, y, z (1,2,3) koordinatnom sistemu :

- *Jednačina kontinuiteta*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (3.1)$$

gde je u_i - komponenta lokalne brzine u koordinatnom pravcu x_i .

- *Dinamička jednačina*

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = f_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_r}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i=1,2,3; j=1,2,3). \quad (3.2)$$

U ispisanim izrazima prostorna koordinata x_i i vreme t su nezavisno promenljive, dok su zavisno promenljive lokalna brzina u i pritisak p_r . Koefficient dinamičke viskoznosti μ i gustina ρ su fizičke „konstante“. Prvi član na levoj strani dinamičke jednačine predstavlja lokalnu promenu brzine, a drugi promenu usled advekcije. Njihov zbir čini materijalni izvod brzine (Du_j/Dt) - ubrzanje fluidnog delića. Prvi član na desnoj strani predstavlja zapreminsku silu po jedinici mase, drugi gradijent pritiska, a poslednji difuziju količine kretanja usled viskoznosti fluida.

Usled hrapavosti prirodnog korita i čestih promena hidrauličkih parametara, strujanje u prirodnim tokovima je pod jakim uticajem *turbulencije*. Da bi se ovo vremensko i prostorno pulziranje vrednosti veličina u glavnom toku (Hajdin 2002) jasno definisalo, uvodi se princip vremenskog osrednjavanja (*Reynolds*) veličina, gde se trenutne vrednosti bilo koje zavisno promenljive (u_j) izražavaju u vidu zbira srednje vrednosti (\bar{u}_j) i odstupanja od srednje vrednosti (u'_j) - fluktuacije. Zamenom ove formulacije u *Navier-Stokes*-ove jednačine, sada se uz primenu odgovajućih aritmetičkih operacija mogu izvesti osrednjene *Reynolds*-ove jednačine (RANS - Reynolds Averaged Navier Stokes), koje ispisane u razvijenoj formi dobijaju sledeći oblik :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'u'}}_{\tau_{xx}} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}}_{\tau_{yx}} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \overline{u'w'}}_{\tau_{zx}} \right); \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \rho \overline{u'v'}}_{\tau_{xy}} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho \overline{v'v'}}_{\tau_{yy}} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \rho \overline{v'w'}}_{\tau_{zy}} \right); \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = & -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \rho \overline{u'w'}}_{\tau_{xz}} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \rho \overline{v'w'}}_{\tau_{yz}} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \rho \overline{w'w'}}_{\tau_{zz}} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

gde su : x, y, z - koordinatni pravci, u, v, w - komponente brzine u sva tri koordinatna pravca, p_r - pritisak, τ - smičući napon (viskozni i turbulentni) a g - gravitaciono ubrzanje.

Dobijeni sistem jednačina osrednjenih po *Reynolds*-u (*RANS*), koji čine jednačina kontinuiteta (3.3) i dinamička jednačina za sva tri koordinatna pravca (3.4, 3.5 i 3.6), predstavlja matematičku osnovu za modeliranje strujanja u otvorenim tokovima. U daljem tekstu izostaviće se oznaka vremenskog osrednjavanja.

3.2. Jednačine kojima se opisuje transport nanosa i deformacija korita

Morfološke promene prirodnog korita, nastale kao posledica strujanja vode i kretanja nanosa, definišu jednu izuzetno kompleksnu problematiku izučavanja ponašanja otvorenih tokova. Složena strujna slika u prirodnim vodotocima, kao i neujednačen sastav njihovog nanosnog materijala, uzrokuju procese koje je veoma teško prvo jasno definisati, a zatim i sa potrebnom tačnošću za inženjersku praksu predvideti. Cilj ovog rada je formiranje računskog alata za proračun interakcije vode i nanosa u vodotocima sa promenljivom oblasti strujanja, koji istovremeno treba da omogući kako uvid u dugoročne procese koji se odvijaju u prirodnim tokovima, tako i da odgovori na visoke zahteve inženjerske prakse.

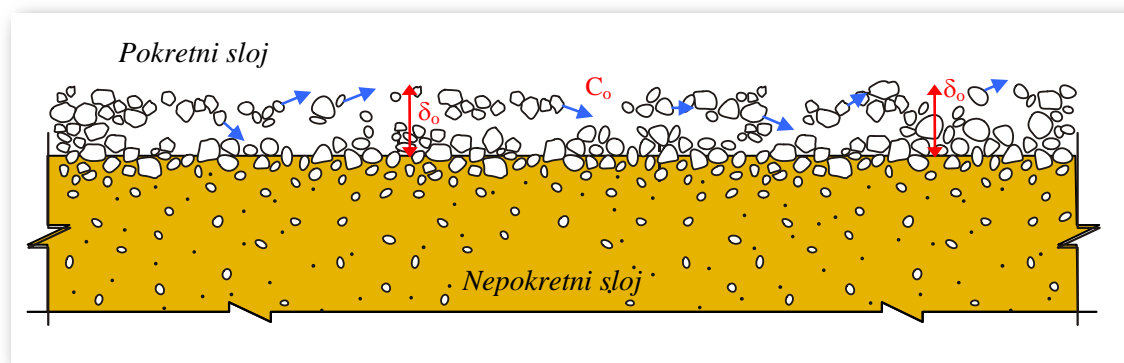
3.2.1. Uvod

Transport nanosa u prirodnim vodotocima je prvenstveno posledica strujanja vode, koje u zavisnosti od graničnih uslova može biti izuzetno složeno. Bazni koncept na kome se zasniva proračun interakcije vode i nanosa u ovom radu je podela transportne oblasti nanosa na tri osnovne zone : zonu *suspendovanog* nanosa, oblast *vučenog* nanosa ili nanosa pri dnu, kao i zonu na samom dnu. Deo nanosa koji čine „sitnije“ frakcije, kroz tok se kreću uglavnom kroz suspenziju - mešavinu vode i nanosa, dok čestice „krupnije“ granulometrije ostaju na dnu, duž koga se kreću skokovima ili kotrljanjem (vučeni nanos). Ako se u vidu ima ovakva podela nanosnog domena, gde određenu zonu praktično formuliše način transporta čestica, sam nanosni proračun se može posmatrati kroz tri bazna procesa: transport suspendovanog materijala, transport vučenog materijala i deformaciju rečnog korita. Svaki od ovih procesa formulisan je odgovarajućim izrazima, koji kombinovani sa jednačinama strujanja formiraju kompletan sistem. Simultanim rešavanjem jednačina unutar sistema uspostavlja se međusobna veza kako između toka i nanosa, tako i između samih nanosnih zona. S obzirom na to da mehanizam transporta direktno zavisi od veličine čestice nanosa, sistem jednačina rešava se za mešavinu nanosa, odnosno za izabran broj granulometrijskih intervala sa reprezentativnim prečnikom zrna. Na ovaj način zasebno se formulišu jednačine za svaku frakciju nanosa, što dalje omogućava dobijanje

informacija o granulometrijskom sastavu nanosne mešavine, kao i fizički realnije definisanje nekih osnovnih procesa u proračunu interakcije vode i nanosa kao što su erozija i deponovanje.

3.2.2. Nanos pri dnu i na dnu

Rečno dno sastavljeno je od nanosa različitih frakcija, od kojih jedan deo biva podignut i uvučen u tok (suspendovani nanos), dok drugi deo, koji uglavnom čini krupnija frakcija, ostaje na rečnom dnu formirajući dva različita sloja : gornji – pokretni sloj i donji - nepokretni sloj (Slika 3.1). Kada hidraulički parametri presudni za stabilnost zrna pređu graničnu vrednost za određenu frakciju, stvaraju se uslovi za pokretanje i transport čestica nanosa, što eksplicitno dovodi do formiranja navedenog pokretnog sloja. Ova granična stabilnost zrna ispitivana je od strane mnogobrojnih autora. Šamov i Gončarov formulisali su koncept *kritične brzine* i definisali je kao najmanju prosečnu brzinu pri kojoj zrna na dnu počinju da se kreću, dok je američki inženjer Shields formulisao dijagram zavisnosti bezdimenzionalnog tangencijalnog napona θ_t i Reynolds-ovog broja zrna Re_* poznat kao *Shields-ov dijagram*. Pored ova dva najčešće primenjivana koncepta, u praksi se koriste i pristupi bazirani na analizi sila koje deluju na pojedinačno zrno, kao i pristup na bazi verovatnoće pojave (stohastički pristup).



Slika 3.1 Podela rečnog dna na pokretni (gornji) i nepokretni (donji) sloj

Kada je zrno nanosa jednom pokrenuto, dalje kretanje po rečnom dnu obavlja se pod dominantnim uticajem težine, zbog čega takvo kretanje poprima oblik kotrljanja, klizanja ili kratkih skokova. Ovakav haotičan i nepredvidiv transport nanosa, nastao kao posledica složenih hidrauličkih uslova (turbulentne fluktuacije) koji vladaju na rečnom dnu, predstavlja izuzetno složen proces čije definisanje zahteva teorijske i eksperimentalne analize velikog broja parametara. Pored toga, složen granulometrijski sastav materijala i prisustvo različitih nanosnih formacija na rečnom dnu u velikoj meri otežavaju pravilno analitičko formulisanje procesa

transporta vučenog nanosa.

Dinamika kretanja rečnog nanosa, koja zajedno sa postojećim hidrauličkim uslovima izaziva složenu sliku režima nanosa u otvornim tokovima, uslovljena je prvenstveno njegovim fizičkim karakteristikama. Ove karakteristike nanosa, koje podrazumevaju osobine kao što su sastav nanosnog materijala prema krupnoći zrna, zatim klasifikacija prema vrsti materijala (vezani i nevezani) kao i sama gustina zrna, daju jasnu sliku o tome o kom sedimentu se radi i na koji način treba analizirati njegovo ponašanje. Da bi predviđanja dinamike ponašanja rečnog nanosa bila tačnija i fizički realnija, navedena fizička svojstva moraju činiti sastavni deo analize nanosnih procesa (erozija, deponovanje, transport) kao jedan od osnovnih elemenata koji je odgovaran za njihovo pravilno definisanje.

3.2.2.1. Jednačina održanja mase nanosa pri dnu - aktivni sloj

Otvorene tokove karakteriše prirodna mešavina nanosa, svojstvena prvenstveno za oblast kroz koju se tok prostire. Ova mešavina sastavljena je od čestica različitih fizičkih karakteristika kao što su krupnoća i mineraloški sastav, koji time eksplicitno utiču na njenu prostornu raspodelu, bilo da se radi o rečnom dnu ili o suspenziji. Pored toga, na raspodelu granulometrijskog sastava mešavine duž rečnog toka direktno utiču i hidraulički uslovi koji vladaju u vodotoku. Pokrenuta zrna bivaju nošena pod uticajem struje toka (glavna struja i turbulentne pulzacije na dnu), čime vodotok intenzivno utiče na zastupljenost određene frakcije kako na rečnom dnu, tako i u suspenziji. Takođe, podizanjem čestica sa površine dna zrna koja su bila pokrivena i sprečena da se kreću sada postaju izložena struji, pa na formiranje mešavine nanosa podjednako utiču i slojevi ispod površine dna. Ovakvo složeno ponašanje nanosa u otvorenim tokovima koje je vezano za krupnoću nanosne čestice, zahteva da definisanje procesa transporta i razmene između toka i dna bude prvenstveno sagledano sa stanovišta *pojedinačne frakcije*, ili određene *grupe frakcija*. Uvođenje ovakvog pristupa, koji se zasniva na formulisanju granulometrijskog sastava mešavine kroz određene intervale frakcija umesto primene uniformnog rasporeda definisanog reprezentativnim prečnikom (d_{50}), omogućava detaljnije sagledavanje promene sastava nanosanog materijala, kao i njegovog uticaja na morfologiju rečnog korita.

Koncept mešavine nanosa u osnovi posmatra granulometrijski sastav nanosnih čestica kao određen set intervala (k), gde je svaki interval definisan sopstvenim reprezentativnim prečnikom koji je određen pravilom geometrijske sredine. Ovakav pristup u predstavljanju prirodnog konglomerata čestica nanosa otvara prostor za uvođenje jednog novog parametra, kojim će se sada odrediti uticaj pojedine frakcijske grupe (intervala) na sastav celokupne mešavine. Ovaj

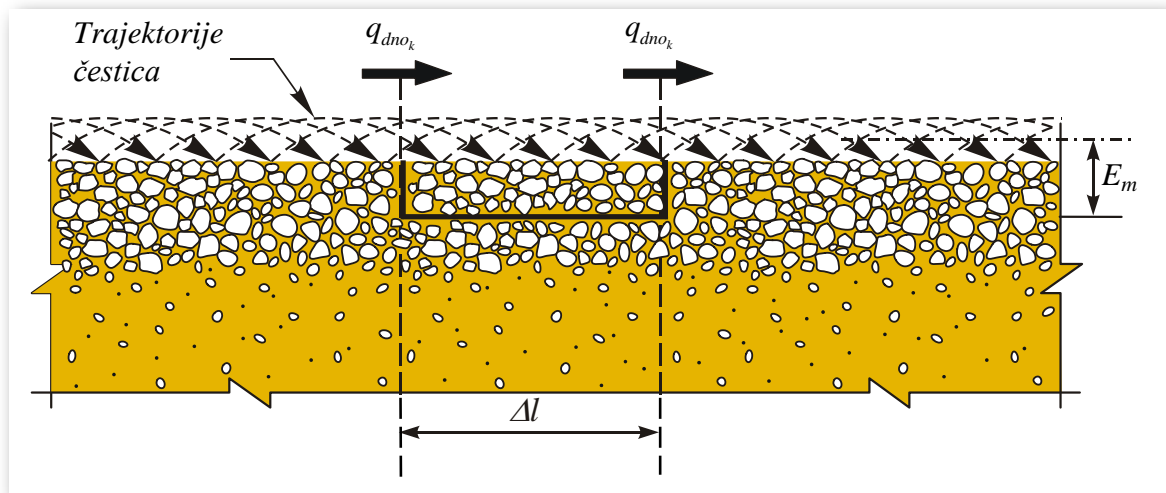
odnos formuliše se kao zapreminski udeo čestica određenog intervala (k) u ukupnoj elementarnoj zapremini ΔV svih razmatranih čestica na rečnom dnu, što ga ujedno identifikuje kao parametar zastupljenosti određenog granulometrijskog intervala (označava se simbolom β).

Konstantno kretanje rečnog nanosa po dnu i u suspenziji ima izuzetno velikog uticaja na rečnu morfologiju, bilo da se radi o ravnotežnom stanju, ili o neustaljenom režimu pronosa nanosa. Ispiranje i taloženje nanosnog materijala na rečnom dnu, kao i neprekidno kretanje čestica duž vodotoka izaziva promenu morfoloških karakteristika toka, menjajući prvenstveno granulometrijski sastav nanosne mešavine i položaj kote rečnog dna. Čestice se uvlače u tok na jednoj lokaciji a talože na potpuno drugoj, pa kvantifikovanje morfoloških promena nastalih kao posledica postaje izuzetno složen zadatak. Kako bi se na neki način ove promene opisale, kao osnovni princip primeniće se zakon o nepromenljivosti mase nanosnih čestica na rečnom dnu.

Da bi se mogli analizirati i predvideti procesi kao što su promene granulometrijskog sastava i kote dna, potrebno je prvo uz pretpostavku dominantnog vučenog nanosa formulisati elementarnu zapreminu na rečnom dnu (slika 3.2), na koju je zatim moguće primeniti princip održanja mase. Ovaj princip se definiše kao priraštaj mase M jednog određenog granulometrijskog intervala (k) za tu zapreminu u jedinici vremena, koji je jednak divergenciji fluksa vučenog nanosa q_{dno_k} za taj isti granulometrijski interval. Međutim, da bi se ova zakonitost u potpunosti mogla primeniti, potrebno je da širina ove elementarne zapremine Δl bude veća od maksimalne dužine trajektorije čestica, kako bi fluks q_{dno_k} predstavljao razmenu samo između susednih elementarnih ćelija. Pod ovim se prvenstveno podrazumeva da izlazni fluks iz jedne zapremine bude istovremeno ulazni fluks u susednu zapreminu. Priraštaj mase M ovako formulisane ćelije sada određuju isključivo čestice koje ulaze ili napuštaju elementarnu zapreminu iz susednih ćelija, dok one čestice koje svoju trajektoriju počinju i završavaju unutar te zapremine ne utiču na promenu mase (Slika 3.2). Na taj način, ukoliko je ulazni fluks veći od izlaznog, javlja se deponovanje materijala, s obzirom na to da je broj čestica koji ulazi u ćeliju veći od broja koji izlazi, dok se u obrnutom slučaju javlja erozija praćena podizanjem materijala i potkopavanjem rečnog dna. Unutar elementarne ćelije se pretpostavlja da je zastupljen jedan granulometrijski sastav, koji se posmatra kao prostorno osrednjena vrednost za tu ćeliju, tako da se i nastale promene u koti i zastupljenosti određene frakcije takođe smatraju kao uniformno raspoređene duž računске ćelije.

Usled neprekidnog kretanja nanosa, čestice koje se nalaze ispod razmatranog površinskog sloja rečnog dna takođe mogu postati izložene toku. Uticaj ovih podpovršinskih slojeva u formiranju morfologije korita zavisi kako od hidrauličkih uslova, tako i od granulometrijskog sastava

materijala na samom dnu i ispod njega. Pošto je nemoguće utvrditi položaj i krupnoću svih čestica ispod površine rečnog dna koje eventualno mogu formirati novo rečno dno, uvodi se koncept *aktivnog sloja* (Spasojević 1990) kojim se praktično određuje onaj površinski sloj rečnog dna debljine (E_m) u kome se nanos kreće (Slika 3.2), uključujući i trenutnu površinu dna koji čine čestice koje su u potpunosti izložene toku i koje imaju istu mogućnost pokretanja i transporta kao vučeni ili kao suspendovani nanos.



Slika 3.2 Prikaz elementarne zapremine aktivnog sloja

Formulisanjem procesa koji se javljaju na rečnom dnu, uz uvođenje određenih pretpostavki, konačno postaje moguće formiranje elementarne ćelije na koju će se primeniti princip održanja mase. Ako se debljina ove elementarne zapremine označi kao debljina aktivnog sloja E_m , a širina kao Δl , tada se primenom metode konačnih zapremina, zakon održanja mase nanosa aktivnog sloja za jedan granulometrijski interval (k) može napisati kao :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial(\beta_k E_m)}{\partial t} + \frac{\partial(q_{dno_k})_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (3.7)$$

gde su p - poroznost, ρ_s - gustina nanosa koje se smatraju konstantnim, β_k - zastupljenost frakcije određenog granulometrijskog intervala u aktivnom sloju, a $(1-p) \cdot \Delta V$ zapremina svih čestica sadržanih unutar ukupne zapremine ΔV . Dobijeni izraz (3.7) pokazuje da je vremenski priraštaj mase nanosa granulometrijskog intervala (k), za elementarnu zapreminu ΔV , jednak divergenciji fluksa vučenog nanosa (koji s obzirom na to da je q_{dno_k} vektor koji je paralelan sa dnom, je

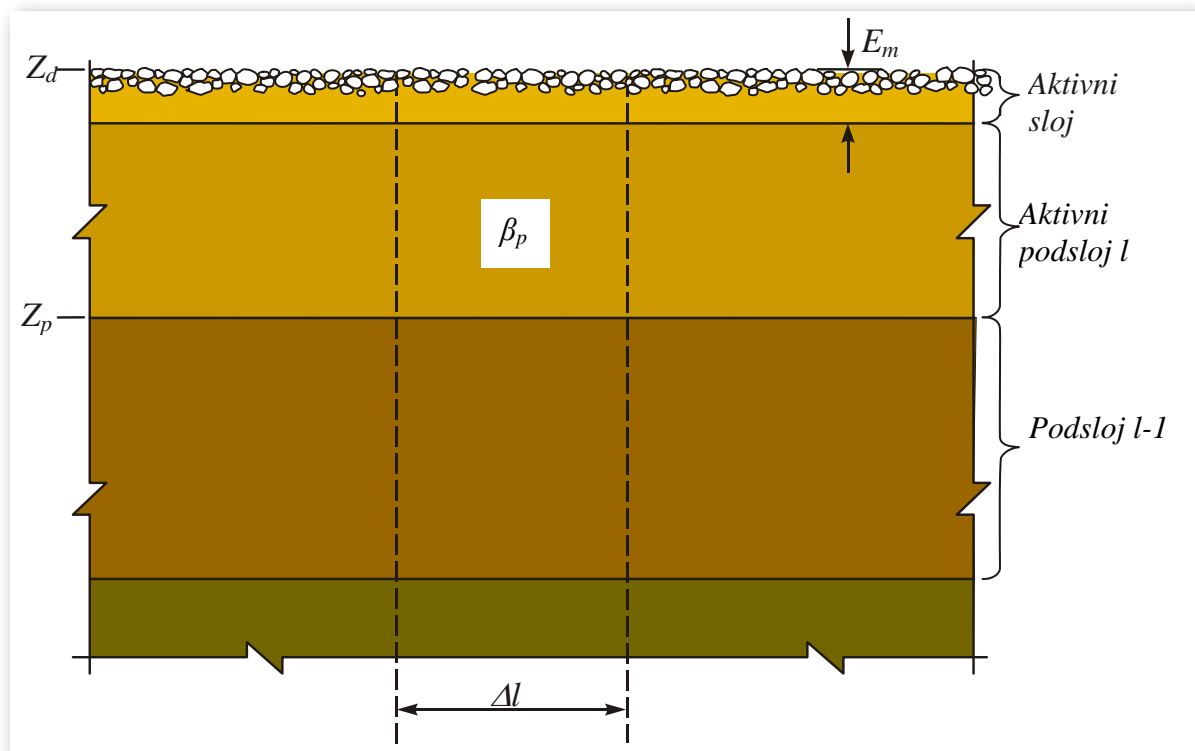
praktično dvodimenzionalan).

Određivanje aktivnog sloja, koji čine prvenstveno čestice u pokretu, direktno zavisi od uslova koji vladaju na rečnom dnu. Usled kontinualne erozije dolazi, do kako je ranije rečeno, razmene materijala sa slojem neposredno ispod, usled čega se aktivni sloj deklariše kao sloj gde su čestice potpuno izmešane i podjednako izložene toku. Konstantnim erodovanjem materijala sa dna sitnije čestice se uvlače u tok povećavajući pri tome broj krupnijih - nepokretnih zrna na dnu, uz istovremeno redukovanje intenziteta erodivnog procesa. Debljina E_m ovako nastalog sloja predložena je od strane jednog broja autora (*Karim i Kennedy*) kao konstantna veličina definisana empirijskim obrascima, dok sa druge strane autori kao što su *Bennet i Nordin* zastupaju teoriju gde je debljina sloja promenljiva veličina koja zavisi od intenziteta i vremena trajanja erozije. Bilo da se koristi izraz konstantne debljine ili debljine promenljive sa intenzitetom erozije, obrazac za definisanje debljine aktivnog sloja E_m mora da zadovolji uslov da erozija kroz vreme ispiranjem sitnijih čestica povećava procenat krupnijih zrna i time praktično smanjuje svoj intenzitet. U slučaju deponovanja rečno dno je manje poremećeno, pa je aktivni sloj relativno tanji u poređenju sa slučajem dominantne erozije. Tada se taloženjem materijala iz suspenzije pokriva nanos na dnu, čime se smanjuje ili potpuno isključuje njegova mogućnost za kretanje sve do ponovne pojave erozije. Usled toga ove čestice se isključuju iz aktivnog sloja, formirajući time sada aktivni podsloj. Izrazi koji opisuju ove procese obradiće se detaljnije u Poglavlju 4.

Morfološke promene rečnog korita opisane izrazom (3.7) zavise isključivo od transporta vučenog nanosa. Kako je ranije naglašeno, u otvorenim tokovima pored transporta vučenog nanosa dolazi do kretanja i sitnijih čestica u vidu suspendovanog nanosa. Ovaj finiji materijal podignut sa dna svoje kretanje može nastaviti u vidu suspenzije, ili može biti deponovan nazad na rečno dno. U oba slučaja primećuje se uticaj suspendovanog materijala na promenu morfologije korita, a time i na bilans mase nanosa u elementarnoj zapremini ΔV . Razlika erodovanog i deponovanog materijala kroz elementarnu površinu pri rečnom dnu opisuje se neto masenim fluksom S , kojim se definiše ukupna količina materijala koja se podiže sa dna ili taloži na rečno dno. Na osnovu toga zakon održanja mase dopunjuje se članom S , pa jednačina (3.7) dobija oblik :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial(\beta_k E_m)}{\partial t} + \frac{\partial(q_{dno_k})_i}{\partial x_i} + S_k = 0. \quad (3.8)$$

Ako se ima u vidu uticaj slojeva ispod površine rečnog dna na sastav i položaj aktivnog sloja, gde je ova interakcija uzrokovana procesima razmene između toka i dna, može se primetiti da zakon održanja mase formulisan izrazom (3.8) još nije u potpunosti zadovoljen. Aktivni sloj usled konstantnih procesa razmene materijala na rečnom dnu menja svoj vertikalni položaj, spuštajući se ukoliko se radi o eroziji i podižući se kada je prisutno taloženje materijala na rečno dno. Ukoliko se kota rečnog dna usled erozije spušta, materijal koji se nalazi u podsloju neposredno ispod aktivnog sloja sada postaje njegov sastavni deo, pri čemu intenzitet uticaja zavisi od intenziteta erozije. Kako bi se aktivni sloj, odnosno njegova granulometrijska raspodela, sada mogao odrediti, potrebno je znati prvenstveno sastav materijala u slojevima ispod aktuelne kote dna, tj. ispod dna aktivnog sloja definisanog kao $Z_d - E_m$ (Slika 3.3).



Slika 3.3 Prikaz strukture podslojeva zastupljenih ispod aktivnog sloja

Materijal ispod kote Z_d najčešće je zastupljen u svojoj prirodnoj (prvobitnoj) formaciji, jedan podsloj ispod drugog, gde svaki od njih karakteriše različit sastav i debljina. Da bi se definisao uticaj ovih podslojeva na priraštaj mase nanosa elementarne zapremine aktivnog sloja, a s obzirom na to da je određivanje položaja i veličine pojedinačnih čestice nemoguće, po istom principu diskretizacije uvodi se kontrolna zapremina podsloja (Spasojević 1990). Ova elementarna zapremina podsloja ima dimenziju Δl istu kao i kontrolna zapremina aktivnog sloja

(Slika 3.3), dok njihova debljina zavisi prvenstveno od sastava materijala. Podslaj koji je lociran neposredno ispod aktivnog sloja formuliše se kao *aktivni podslaj*, dok njihova međusobna interakcija, koja je uzrokovana kretanjem nanosa, dovodi do toga da materijal može biti iznet ili unet u podslaj, usled čega se istovremeno menjaju karakteristike kako aktivnog podslaja, tako i aktivnog sloja.

U cilju kvantifikovanja interakcije između aktivnog sloja i podslaja, u izraz (3.8) uvodi se član razmene nanosnog materijala između ove dve oblasti, S_p , nakon čega jednačina (3.8) dobija svoj konačan oblik :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial(\beta_k E_m)}{\partial t} + \frac{\partial(q_{dno_k})_i}{\partial x_i} + S_k - S_{p_k} = 0 \quad (i=1,2). \quad (3.9)$$

Fluks S_{p_k} predstavlja masu materijala određenog granulometrijskog intervala koja je izneta ili uneta u aktivni sloj iz aktivnog podslaja kroz elementarnu površinu u jedinici vremena.

Kako izraz (3.9) opisuje priraštaj mase elementarne zapremine aktivnog sloja kao posledicu kretanja vučenog nanosa, zatim procesa razmene materijala između suspenzije i dna, kao i razmene između aktivnog sloja i aktivnog podslaja, primenjujući isti princip održanja mase ekvivalentna jednačina se može ispisati i za kontrolnu zapreminu aktivnog podslaja. U ovoj zoni promena mase nanosa javlja se, kako je ranije navedeno, usled promene položaja dna aktivnog sloja, pri čemu je materijal ili dodat ili oduzet od njega, uz nepromenjen položaj kote dna Z_p (Slika 3.3). Ovaj priraštaj mase aktivnog podslaja opisuje se izrazom :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial}{\partial t} [\beta_p (Z_d - E_m)] + S_{p_k} = 0. \quad (3.10)$$

Imajući u vidu da su zakoni održanja mase, opisani izrazima (3.9) i (3.10), formulisani prvenstveno za jedan granulometrijski interval (k), njihovim ispisivanjem za sve definisane intervale jedne granulometrijske krive ($k = 1, 2, \dots, K$), pa zatim sumiranjem uz osnovni princip da je $\sum_{k=1}^K \beta_k = 1$, dobijaju se globalna jednačina održanja mase za aktivni sloj :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial E_m}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial(q_{dno_k})_i}{\partial x_i} + S_k - S_{p_k} \right) = 0, \quad (3.11)$$

i globalna jednačina održanja mase aktivnog podsloja :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial(Z_d - E_m)}{\partial t} + \sum_{k=1}^K S_{pk} = 0. \quad (3.12)$$

Krajnjim sabiranjem ove dve jednačine dolazi se do globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial Z_d}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial(q_{dno_k})_i}{\partial x_i} + S_k \right) = 0 \quad (i=1,2), \quad (3.13)$$

koja se može identifikovati kao *Exner*-ova jednačina sa dodatkom člana S_k , koji predstavlja razmenu nanosa između dna i suspenzije.

3.2.3. Suspendovani nanos

Čestice rečnog nanosa formirane od „sitnijih“ frakcija, koje u vodotok dospevaju delom usled površinskog spiranja tla okolnog područja, a delom usled turbulentnih fluktuacija na samom rečnom dnu, zajedno sa vodom formiraju mešavinu vode i nanosa - *suspenziju*. Usled svoje male težine ove čestice kroz tok se kreću isključivo pod uticajem strujnog polja samog vodotoka, zbog čega suspenzija duž toka menja svoje osnovne karakteristike kao što su gustina i sastav. Ovakvi uslovi kretanja čestica u suspenziji omogućavaju formulisanje tzv. *dvofaznog tečenja*, koji ujedno predstavlja i osnovnu pretpostavku za primenu principa održanja mase za suspendovani nanos.

Priraštaj mase suspendovanog nanosa za elementarnu zapreminu dV u jedinici vremena definisana je poznatim zakonom o nepromenljivosti mase :

$$\frac{\partial(\rho_m C)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \rho_m C)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{Mi} \frac{\partial(\rho_m C)}{\partial x_i} \right) \quad (i=1,2,3). \quad (3.14)$$

Izraz (3.14) predstavlja konvektivno - difuznu parcijalnu diferencijalnu jednačinu, gde je ρ_m gustina mešavine, a C bezdimenzionalana koncentracija suspendovanog nanosa koja odražava

deo mase čestice definisane kao $dM_s = \rho_m C dV$ u ukupnoj masi mešavine vode i nanosa. Leva strana jednačine predstavlja materijalni izvod mase suspendovanog nanosa po jedinici zapremine ($D(\rho C)/Dt$), dok desna strana definiše molekularnu difuziju u sva tri koordinatna pravca.

Zbog izražene turbulencije otvorenih tokova, tj. njenog uticaja na transport i formiranje suspendovanog nanosa, potrebno je izvršiti vremensko osrednjavanje jednačine (3.14). Nakon primene koncepta mešavine nanosa, gde se bezdimenzionalna koncentracija suspendovanog nanosa definiše u funkciji razmatranog granulometrijskog intervala (k), vremenski osrednjena jednačina (3.14) razvijena u koordinatne pravce (x, y, z) dobija svoj konačan oblik :

$$\frac{\partial(\rho_m \bar{C}_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} \rho_m \bar{C}_k)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} \rho_m \bar{C}_k)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w} \rho_m \bar{C}_k)}{\partial z} - \frac{\partial(w_t \rho_m \bar{C}_k)}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left((D_{Mx} + D_{Tx}) \frac{\partial(\rho_m \bar{C}_k)}{\partial x} \right)}_{I_x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left((D_{My} + D_{Ty}) \frac{\partial(\rho_m \bar{C}_k)}{\partial y} \right)}_{I_y} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left((D_{Mz} + D_{Tz}) \frac{\partial(\rho_m \bar{C}_k)}{\partial z} \right)}_{I_z}. \quad (3.15)$$

Parametri su : D_{Ti} - koeficijent turbulentne difuzije u pravcu i koji zavisi od intenziteta turbulencije (modeliranje turbulentne difuzije primenom *Boussinesq*-ovog koncepta), D_{Mi} - koeficijent molekularne difuzije. U daljem tekstu će se izostaviti simbol vremenskog osrednjavanja.

Transport suspendovanog nanosa duž rečnog toka obavlja se pod dominantnim uticajem struje, pa komponente brzine čestice \bar{u} , \bar{v} i \bar{w} u izrazu (3.15) označavaju praktično brzinu fluida, dok brzina w_t predstavlja brzinu taloženja čestice odgovarajuće frakcije. Kako čestice nanosa pored transporta glavnom strujom dospevaju u tok i usled turbulentnih fluktuacija na rečnom dnu, za rešavanje transportne jednačine potrebno je dodatno formulisati interakciju toka sa nanosom na dnu. Pod ovim se prvenstveno misli na definisanje uslova pri kojima dolazi do podizanja i uvlačenja čestica određene frakcije u tok (“turbulencija”), kao i uslova za njihovo taloženje nazad na rečno dno (“gravitacija”).

3.2.4. Razmena nanosa na dnu i pri dnu i nanosa u suspenziji

Usled turbulentnih pulzacija pritiska i brzina na rečnom dnu dolazi do podizanja čestica nanosa, gde jedan deo, koji čine najfinije čestice, nastavlja svoje kretanje u vidu suspenzije, dok se istovremeno drugi deo, koji se već nalazi u suspenziji, usled sopstvene težine taloži nazad na

dno. Ovo konstantno erodovanje i taloženje nanosnog materijala sa jedne strane menja granulometrijski sastav dna, izazivajući pri tome promene u morfologiji korita i hidrauličkim uslovima tečenja, a sa druge direktno utiče na raspored koncentracije suspendovanog nanosa duž rečnog toka. Na ovaj način uspostavlja se veza između nanosa na dnu i nanosa u suspenziji.

Kako mehanizmi razmene nanosa između rečnog toka i dna zavise prvenstveno od velikog broja hidrauličkih i morfoloških uslova, njihovo teorijsko formulisanje predstavlja izuzetno složen zadatak. Da bi se u cilju modeliranja celokupnog procesa ponašanja nanosa na neki način analitički opisali ovi procesi razmene, kao prvi korak u ovom postupku uvodi se pojam *masenog fluksa*. Njime se praktično definiše količina erodovanog materijala kroz elementarnu površinu (na rečnom dnu) u jedinici vremena kao fluks E koji je usmeren vertikalno naviše, kao i količina deponovanog materijala u vidu fluksa D usmerenog vertikalno naniže. Razlika ova dva člana daje neto maseni fluks suspendovane materije S na rečnom dnu, koji u zavisnosti od predznaka označava da li se radi o dominantnoj eroziji ili deponovanju :

$$S = E - D. \quad (3.16)$$

Uz pretpostavku ravnotežnog stanja pronosa suspendovanog nanosa i zanemarljive difuzije u podužnom i poprečnom pravcu, formulacija neto masenog fluksa S za oblast pri dnu rečnog korita može se dobiti iz izraza (3.14) kao :

$$S = \underbrace{D_{Tz} \cdot \frac{\partial(\rho_m C)}{\partial z}}_E + \underbrace{w_t \cdot \rho_m \cdot C}_D = 0 \quad (kg/(sm^2)). \quad (3.17)$$

Za slučaj rečnog dna, $Z=Z_d$, prvi član na desnoj strani izraza (3.17) predstavlja proces erozije u formi vertikalnog priraštaja mase po jedinici zapremine suspendovanog materijala koji je pomnožen sa koeficijentom turbulentne difuzije (molekularna difuzija je zanemarljivo mala), dok drugi član opisuje deponovanje nanosa iz suspenzije kroz elementarnu površinu kao masu istaložene materije u jedinici vremena izražene preko brzine taloženja.

Ako se pak pretpostavi da u oblasti razmene nanosa vlada neravnotežno stanje, izraz (3.17) se definiše tada kao :

$$S = \underbrace{D_{Tz} \cdot \frac{\partial(\rho_m C)}{\partial z}}_E + \underbrace{w_t \cdot \rho_m \cdot C}_D \neq 0. \quad (3.18)$$

Većina numeričkih modela, koji u svoje proračune uključuju elemente razmene materijala (fluks S), član deponovanja D za slučaj neravnotežnog (neustaljenog) stanja definišu u formi masenog fluksa dobijenog kao proizvod brzine taloženja i odgovarajuće koncentracije pri dnu rečnog korita :

$$D = w_t \cdot \rho_m \cdot C_d, \quad (3.19)$$

pri čemu se koncentracija pri dnu C_d određuje iz proračuna transporta suspendovanog nanosa. Međutim, zbog same fizike procesa razmene znatno teži zadatak predstavlja definisanje fluksa erozije E . U tom pogledu razvijeno je više različitih pristupa.

Autori *Celik i Rodi* (1984) i *van Rijn* (1986) predložili su koncept proračuna erozionog fluksa E baziran na principu ravnotežnog stanja. Kako je u tom slučaju ravnotežni erozioni fluks E jednak fluksu deponovanja D , izraz za proračun mase erodovanog materijala sa rečnog dna u jedinici vremena dobija oblik ekvivalentan obrascu (3.19) :

$$E = w_t \cdot \rho_m \cdot C_e. \quad (3.20)$$

Obzirom da izraz (3.20) ukazuje na to da se erozija u ovom slučaju uvek javlja sa svojim maksimalnim intenzitetom, autori *Brors* (1999) i *Spasojević i Holly* (1993) predložili su da se erozioni fluks računa koristeći njegovu izvornu formulaciju, odnosno formu koncentracije nanosa pri dnu i njenog gradijenta. Definisan kao maseni difuzni fluks koji je usmeren naviše, erozioni fluks se u ovom slučaju formuliše izrazom :

$$E = -D_{Tz} \cdot \left. \frac{\partial(\rho_m C)}{\partial z} \right|_a, \quad (3.21)$$

pri čemu parametar a označava da se erozioni fluks računa na referentnom rastojanju a od rečnog dna. Primenjujući osnovno pravilo diskretizacije izvoda, izraz (3.21) dalje se transformiše u oblik :

$$E = -D_{Tz} \cdot \frac{(\rho_m C)_{a+\Delta a} - (\rho_m C)_a}{\Delta a}, \quad (3.22)$$

gde je C_a referentna koncentracija pri dnu koja oslikava uticaj toka (struje) na čestice nanosa pri dnu i na samom dnu, dok je $C_{a+\Delta a}$ koncentracija na rastojanju $a+\Delta a$ od rečnog dna koja je dobijena iz proračuna transporta suspendovanog nanosa. Ovako formulisan erozioni fluks ukazuje praktično na to da količina erodovanog materijala zavisi od odnosa koncentracije nanosnog materijala na samom rečnom dnu i koncentracije nanosa u suspenziji nastale kao posledica transporta materijala rečnom strujom sa uzvodne lokacije. Referentna koncentracija C_a određuje se pomoću empirijskih izraza za slučaj ravnotežnog stanja nanosa pri rečnom dnu.

Ako se dobijeni izrazi konačno primene na nanosnu mešavinu, obrazac za fluks deponovanog materijala (3.19) dobija oblik :

$$D_k = w_{tk} \cdot \rho_m \cdot (C_k)_{a+\Delta a}, \quad (3.23)$$

dok izrazi za erozioni fluks (3.21) i (3.22) postaju :

$$E_k = -\beta_k D_{Tz} \cdot \left. \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial z} \right|_a, \quad (3.24)$$

odnosno,

$$E_k = -\beta_k D_{Tz} \cdot \frac{(\rho_m C_k)_{a+\Delta a} - (\rho_m C_k)_a}{\Delta a}. \quad (3.25)$$

Kao što se može primetiti iz dobijenih izraza, parametar β konfigurise samo u članu erozije, s obzirom na to da on zavisi isključivo od zastupljenosti određene frakcije na dnu. Što se tiče člana deponovanja, on zavisi od koncentracije čestica koja se nalaze u suspenziji, a koje se za slučaj mešavine nanosa definišu kao C_k - koncentracija određenog granulometrijskog intervala (k).

Shodno prethodno navedenom, neto maseni fluks S_k granulometrijskog intervala (k) definiše se konačno kao :

$$S_k = E_k - D_k. \quad (3.26)$$

3.2.5. Zatvaranje sistema jednačina - pomoćne formule

Analizom nanosnih procesa koji se javljaju u prirodnim vodotocima, sada se može formirati konačan sistem jednačina kojima se opisuje transport suspendovanog nanosa, vučenog nanosa i morfoloških promena rečnog korita :

- *Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa za jedan granulometrijski interval (k)*

$$\frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \rho_m C_k)}{\partial x_i} = \frac{\partial I_{k_i}}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3), \quad (3.27)$$

- *Jednačina održanja mase aktivnog sloja za jedan granulometrijski interval (k)*

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial(\beta_k E_m)}{\partial t} + \frac{\partial(q_{dno_k})_i}{\partial x_i} + S_k - S_{p_k} = 0 \quad (i=1,2), \quad (3.28)$$

- *Globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu*

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial Z_d}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial(q_{dno_k})_i}{\partial x_i} + S_k \right) = 0 \quad (i=1,2), \quad (3.29)$$

gde uz izostavljanje simbola vremenskog osrednjavanja veličina fluks I_i označava zbir molekularne i turbulentne difuzije.

U dobijenim jednačinama kao zavisno promenljive veličine pojavljuju se : koncentracija suspendovanog nanosa za jedan granulometrijski interval C_k , zastupljenost određenog granulometrijskog intervala u ukupnoj mešavini nanosa β_k i kota rečnog dna Z_d . Veličine kao što su fluks vučenog nanosa q_{dno_k} , neto maseni fluks suspendovane materije S_k , debljina aktivnog sloja E_m i fluks razmene materijala između aktivnog sloja i podsloja S_{p_k} su sekundarni parametri koji zavise od uslova strujanja i tretiraju se kao empirijski obrasci.

Teorijski izrazi za pronos vučenog nanosa q_{dno}^i (*Van Rijn, Meyer-Peter, Muller, Bagnold*) izvedeni su kao što je poznato za slučaj dominantnog vučenog nanosa, gde se kao pretpostavka koristi uniforman granulometrijski sastav materijala (definisani reprezentativnim prečnikom d_{50}) pri ravnotežnom stanju toka. Međutim, pri intenzivnijim uslovima tečenja, kada je kretanje

suspendovanog nanosa izraženije (veći protoci, izraženija turbulencija), ovi izrazi daju nerealno visoke vrednosti, što eksplicitno ukazuje na to da deo nanosa koji se podigne sa dna završi u suspenziji (nedostatak pristupa uniformne granulometrije). Da bi se na neki način odredio ovaj odnos između transportnog kapaciteta suspendovanog i ukupnog nanosa, *Van Rijn* (1984b) je uveo parametar γ kao funkciju odnosa smičuće brzine i brzine taloženja čestice u_* / w_t , kojim se uz primenu pojednostavljenja (*Holly*) teorijski pronos vučenog nanosa dodatno koriguje:

$$q_{dno} = (1 - \gamma) \cdot q_{dno}^t. \quad (3.30)$$

Ovom redukcijom izraza za pronos vučenog nanosa isključuje se iz proračuna deo nanosa koji odlazi u suspenziju, zbog čega ovi teorijski izrazi postaju primenjivi i za uslove intenzivnog strujanja.

S obzirom na to da je teorijska analiza transporta vučenog nanosa bazirana na uniformnom rasporedu nanosa (granulometrijski sastav nanosa definisan reprezentativnim prečnikom d_{50}), uvođenjem koncepta mešavine nanosa i bezdimenzionog parametra β potrebno je izvršiti njenu korekciju kako bi se dobio izraz koji opisuje ponašanje jedne određene grupe frakcija unutar ukupne nanosne mešavine. Na osnovu toga izraz (3.30) posle korekcije postaje :

$$q_{dno_k} = (1 - \gamma_k) \cdot q_{dno_k}^t, \quad (3.31)$$

gde indeks k označava granulometrijski interval definisan sopstvenim reprezentativnim prečnikom d_k . Imajući u vidu da je izvorni koncept izraza (3.31) formulisan za slučaj uniformne raspodele, a time praktično i transport ukupnog nanosa, deo transportnog kapaciteta koji otpada na pojedine frakcijske grupe dobija se dodatnim množenjem jednačine (3.31) sa parametrom β_k :

$$q_{dno_k} = \beta_k \cdot (1 - \gamma_k) \cdot q_{dno_k}^t. \quad (3.32)$$

Analizirajući stanja kada je rečno dno sastavljeno od samo jedne frakcije, može se pretpostaviti da su sve čestice nanosa podjednako izložene struji, što dovodi do toga da je verovatnoća njihovog pokretanja ista za sve razmatrane čestice. Ova teza predstavlja jednu od osnovnih pretpostavki na kojoj se zasniva teorija transportnog procesa. Međutim, ako se razmatra slučaj mešavine nanosa kao realnije situacije u prirodnim vodotocima, tada se u obzir mora uzeti i slučaj gde usled konstantnog kretanja različitih frakcija sitnije čestice ostaju sakrivene ispod

krupnijih, zbog čega sada njihovo pokretanje, a time i uvlačenje u suspenziju postaje ograničeno (verovatnoća pokretanja tada nije ista za sve frakcije). Kako bi se ovaj efekat opisao, autori *Karim, Holly* i *Yang* (1987) predložili su uvođenje parametra ζ kojim bi se redukovao pronos nanosa za deo čestica koji nisu direktno izloženi toku. Množenjem izraza (3.32) ovim parametrom redukcije ζ , dolazi se do konačnog oblika izraza za pronos vučenog nanosa jednog granulometrijskog intervala (k) :

$$q_{dno_k} = \zeta_k \cdot \beta_k \cdot (1 - \gamma_k) \cdot q_{dno_k}^t. \quad (3.33)$$

Detaljniji prikaz teorijskog izraza za pronos vučenog nanosa biće dat u Poglavlju 4.

Takođe, uvođenjem koncepta mešavine nanosa moguće je sada definisati i razmenu materijala između aktivnog sloja i aktivnog podsloja (član S_{pk}). U tom pogledu, ukoliko se dno aktivnog sloja spušta, čestice nanosa koje su pripadale kontrolnoj zapremini podsloja postaju sastavni deo elementarne zapremine aktivnog sloja. Mešajući se pri tom sa postojećim česticama aktivnog sloja uz istovremeno menjanje njegovog granulometrijskog sastava, pri čemu sastav aktivnog podsloja ostaje nepromenjen, član S_{pk} se za slučaj spuštanja dna aktivnog sloja definiše kao :

$$S_{pk} = -\rho_s (1 - p) \frac{\partial}{\partial t} [\beta_{pk} (Z_d - E_m)] \text{ (kg/(sm}^2\text{))}, \quad (3.34)$$

gde je β_{pk} - zastupljenost frakcije određenog granulometrijskog intervala (k) u aktivnom podsloju. Međutim, ako se dno aktivnog sloja pak počne podizati, čestice koje su pripadale elementarnoj zapremini aktivnog sloja postaju deo kontrolne zapremine aktivnog podsloja, menjajući pri tome sada njegov granulometrijski sastav. U tom slučaju član S_{pk} se formuliše kao:

$$S_{pk} = -\rho_s (1 - p) \frac{\partial}{\partial t} [\beta_k (Z_d - E_m)]. \quad (3.35)$$

Detaljnije objašnjenje ovih izraza dato je u Poglavlju 4.

3.3. Jednačine osrednjene po dubini toka – ravanski model

Razmatranjem procesa koji se javljaju u prirodnim vodotocima, sada se može formirati konačan sistem jednačina kojima se opisuju strujanje vode, transport nanosa (suspendovani i vučeni) i morfološke promene rečnog korita :

- *Jednačina kontinuiteta (RANS)*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (i=1,2,3), \quad (3.36)$$

- *Dinamička jednačina (RANS)*

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = f_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_r}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3; j=1,2,3), \quad (3.37)$$

- *Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa za jedan granulometrijski interval (k)*

$$\frac{\partial (\rho_m C_k)}{\partial t} + \frac{\partial (u_i \rho_m C_k)}{\partial x_i} = \frac{\partial I_{k_i}}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3), \quad (3.38)$$

- *Jednačina održanja mase aktivnog sloja za jedan granulometrijski interval (k)*

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial (\beta_k E_m)}{\partial t} + \frac{\partial (q_{dno_k})_i}{\partial x_i} + S_k - S_{p_k} = 0 \quad (i=1,2), \quad (3.39)$$

- *Globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu*

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial Z_d}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial (q_{dno_k})_i}{\partial x_i} + S_k \right) = 0 \quad (i=1,2), \quad (3.40)$$

gde uz izostavljanje simbola vremenskog osrednjavanja veličina τ_{ij} predstavlja zbir viskoznih i turbulentnih smičućih napona, dok fluks označava I_i zbir molekularne i turbulentne difuzije.

Dobijeni sistem jednačina definišu dve grupe zavisno promenljivih (primarnih) veličina. Prvu grupu čine veličine koje opisuju strujanje vode - komponente brzine u_i za sva tri koordinatna pravca i pritisak p_r , dok drugu grupu čine veličine vezane za kretanje nanosa i morfološke promene korita - koncentracija suspendovanog nanosa za jedan granulometrijski interval C_k , zastupljenost određenog granulometrijskog intervala u ukupnoj mešavini nanosa β_k i kota rečnog dna Z_d . Kako je i ranije navedeno, veličine kao što su fluks vučenog nanosa q_{dno} , neto maseni fluks suspendovane materije S , debljina aktivnog sloja E_m i fluks razmene materijala između aktivnog sloja i podsloja S_p su sekundarni parametri koji zavise od uslova strujanja i tretiraju se kao empirijski obrasci.

Kao što se može i videti iz prethodno navedenog, usvojeni sistem jednačina čini sedam parcijalnih diferencijalnih jednačina kojima se sada mogu matematički opisati procesi strujanja vode i ponašanja prirodne mešavine nanosa u otvorenim tokovima. Takođe, međusobna zavisnost ovih procesa, ostvarena preko deformacije rečnog korita, omogućava modeliranje njihove interakcije i rešavanje uticaja nanosne mešavine na hidrauličku sliku toka. Međutim, kako su svi ovi razmatrani elementi fizički veoma složeni i kompleksni, bilo da se radi o individualnim procesima (tečenje vode i ponašanje nanosne mešavine) ili pak o njihovoj međusobnoj interakciji (povratni uticaj deformacije rečnog korita na strujnu sliku, veza suspendovanog i vučenog nanosa), njihovo pravilno matematičko definisanje, a potom i rešavanje zahteva detaljan pristup i visok stepen analize. Posmatrano sa hidrauličke tačke gledišta, težište problema tačnosti i fizičke verodostojnosti modeliranog stanja postavlja se prvenstveno na iznalaženje i primenu adekvatnih i matematički pouzdanih metoda za rešavanje postojećih parcijalnih diferencijalnih jednačina strujanja. U tom pogledu, pravilna matematička aproksimacija jednačina i njihovo kvalitetno numeričko rešavanje predstavljaju kako osnovni element za postizanje željene tačnosti i efikasnosti modela, tako i najveći potencijal za dalje unapređenje. Sa druge strane, u oblasti nanosnog modela veoma bitan aspekt za detaljnu i fizički pravilnu formulaciju nanosnih procesa predstavlja modeliranje granulometrijski definisanog nanosa. Drugim rečima, ovaj pristup omogućava kako da se pojedini elementi nanosnog domena formulišu znatno detaljnije i fizički verodostojnije, tako i da se tačnost i efikasnost nanosnih procesa, koji su zbog svoje prirode veoma bitni za sam nanosni model (veza suspendovanog i vučenog nanosa), podigne na znatno višnji nivo.

Karakter tečenja u prirodnim vodotocima nameće činjenicu da je strujanje vode u vertikalnom

pravcu (strujanje lokalnog karaktera) zanemarljivo u odnosu na strujanje u ostala dva pravca (horizontalna ravan). Imajući ovo u vidu, problematika složenog prostornog tečenja može se sada svesti na ravanski problem (dvodimenzionalni u horizontalnoj ravni). Uvođenjem ovakve pretpostavke, tj. hidrostatičke raspodele pritiska po dubini, problem rešavanja kompleksnog tečenja značajno se pojednostavljuje, uz istovremeno zadržavanje visokog stepena detaljnosti strujne slike. To ujedno predstavlja i jednu od osnovnih prednosti dvodimenzionalnih (ravanskih) numeričkih modela u odnosu na linijske i prostorne modele.

3.3.1. Jednačine kojima se opisuje strujanje vode (RANS)

Osrednjavanje po vertikalnoj koordinati *Reynolds*-ovih jednačina vrši se uz pretpostavku o hidrostatičkom rasporedu pritiska (po dubini), čime se od vertikalnih ubrzanja fluidnih čestica zadržava jedino uticaj gravitacionog ubrzanja. Na osnovu ovoga dinamička jednačina (3.37) se za vertikalni pravac svodi na :

$$\frac{dp_r}{dx_3} = -\rho g, \quad (3.41)$$

što nakon integracije po dubini dovodi do izraza za hidrostatički raspored pritiska po dubini;

$$p_r(x_3) = \rho g (Z_v - x_3) \quad (Z_d \leq x_3 \leq Z_v). \quad (3.42)$$

Z_v - kota slobodne površine vode.

Dobijanjem izraza (3.42), dalje osrednjavanje po dubini redukovanih *RANS* jednačina (izrazi 3.36 i 3.37) za koordinatne pravce (x, y) vrši se integracijom po vertikalnoj koordinati uz primenu dva granična - *kinematička* uslova : na slobodnoj površini (Z_v) i na rečnom dnu (Z_d).

Prvi kinematički uslov odnosi se na *slobodnu površinu* ($x_3 = Z_v$) i definiše da je brzina u vertikalnom pravcu jednaka materijalnom izvodu :

$$u_3(Z_v) = \frac{DZ_v}{Dt} = \frac{\partial Z_v}{\partial t} + u_i(Z_v) \frac{\partial Z_v}{\partial x_i} \quad (i=1,2). \quad (3.43)$$

Ako se kota nivoa vode zameni kao zbir dubine i kote dna $Z_v = Z_d + h$ (h - dubina vode), izraz (3.43) uz pretpostavku nedeformabilnog korita $\partial Z_d / \partial t = 0$ dobija sledeći oblik :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_3(Z_v) - u_i(Z_v) \frac{\partial Z_v}{\partial x_i} \quad (i=1,2). \quad (3.44)$$

Drugi kinematički uslov veže se za *rečno dno* ($x_3 = Z_d$), a zadaje se kao da je brzina u vertikalnom pravcu jednaka nuli :

$$u_3(Z_d) = \frac{DZ_d}{Dt} = \frac{\partial Z_d}{\partial t} + u_1(Z_d) \frac{\partial Z_d}{\partial x_1} + u_2(Z_d) \frac{\partial Z_d}{\partial x_2} = 0. \quad (3.45)$$

Usvajanjem iste pretpostavke o nedeformabilnosti rečnog dna, dobija se konačni oblik :

$$u_i(Z_d) \frac{\partial Z_d}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2). \quad (3.46)$$

Za samu integraciju članova u *Reynolds*-ovim jednačinama (za x,y koordinatne pravce) primeniće se *Leibnitz*-ovo pravilo za integrisanje izvoda funkcije :

$$\int_{z_d}^{z_v} \frac{\partial G}{\partial a} dx_3 = \frac{\partial}{\partial a} \int_{z_d}^{z_v} G dx_3 - G(Z_v) \frac{\partial Z_v}{\partial a} + G(Z_d) \frac{\partial Z_d}{\partial a}, \quad (3.47)$$

gde je a - opšta nezavisno promenljiva, a G - opšta zavisno promenljiva koja se može izraziti kao zbir srednje vrednosti po dubini \tilde{G} i odstupanja od te vrednosti G' .

Ako se navedena pravila integracije, uz zanemarivanje vertikalnog strujanja, primene na članove u *RANS* izrazima, dolazi se do jednačina osrednjenih po dubini koje važe u horizontalnoj ravni. Ovako osrednjene jednačine nazivaju se "*jednačine ravanskog toka*", koje napisane za (x,y) koordinatne pravce dobijaju sledeći oblik :

- *Jednačina kontinuiteta*

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\tilde{v})}{\partial y} = 0,} \quad (3.48)$$

- Dinamička jednačina u x-pravcu

$$\frac{\partial(h\tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\tilde{u}\tilde{v})}{\partial y} = -gh \frac{\partial Z_v}{\partial x} - \frac{\partial(hu'v')}{\partial x} - \frac{\partial(hu'v')}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h\tau_{xx}) \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} (h\tau_{yx}) \right) + \frac{1}{\rho} \tau_{sx} - \frac{1}{\rho} \tau_{ox}, \quad (3.49)$$

- Dinamička jednačina u y-pravcu

$$\frac{\partial(h\tilde{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\tilde{u}\tilde{v})}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = -gh \frac{\partial Z_v}{\partial y} - \frac{\partial(hu'v')}{\partial x} - \frac{\partial(hv'^2)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h\tau_{xy}) \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} (h\tau_{yy}) \right) + \frac{1}{\rho} \tau_{sy} - \frac{1}{\rho} \tau_{oy}. \quad (3.50)$$

Dobijeni sistem jednačina (izrazi 3.48, 3.49 i 3.50) predstavlja model ravanskog strujanja u otvorenim tokovima. Članovi na levoj strani dinamičkih jednačina definišu lokalne i advektivne promene, dok prvi član na desnoj strani predstavlja gradijent pritiska i težine. Drugi i treći član na desnoj strani dinamičkih jednačina odražavaju odstupanje brzine od osrednjene vrednosti (dispersioni članovi koji su isključivo posledica osrednjavanja po dubini), dok četvrti i peti član predstavljaju vrednosti smičućih napona usled molekularne viskoznosti i fluktuacija brzine (turbulentni naponi), koji npr. ispisan za (x,y) ravan ima oblik :

$$\tau_{yx} = (\tau_m)_{yx} + (\tau_t)_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u'v'}. \quad (3.51)$$

Da bi se formirani sistem „zatvorio“, potrebno je navedene „turbulentne napone“ dodatno modelirati, odnosno vezati ih za zavisno promenljive veličine. Postoji više izraza za modeliranje ovih napona, a kao jedan od najprikladnijih je izraz zasnovan na konceptu *Boussinesq*-a, gde se turbulentni naponi modeliraju prema analogiji sa „viskozni“ naponima :

$$\frac{1}{\rho} (\tau_t)_{ij} = -\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k_f. \quad (3.52)$$

Koeficijenti u izrazu (3.52) su : ν_t - koeficijent turbulentne viskoznosti, k_f - kinetička energija

fluktuacija i δ_{ij} - *Kroneker*-ov operator.

Poslednja dva člana dinamičkih jednačina definišu tangencijalne napone na slobodnoj površini τ_s (uticaj vetra) i na rečnom dnu τ_o , a modeliraju se njačešće empirijskim izrazima. U opštem slučaju izraz za tangencijalni napon na dnu je :

$$\tau_{ox} = C_\tau \rho u \sqrt{u^2 + v^2} ; \quad \tau_{oy} = C_\tau \rho v \sqrt{u^2 + v^2} , \quad (3.53)$$

gde se za koeficijent trenja može koristiti jedan od empirijskih izraza, na primer *Mannig*-ov :

$$C_\tau = gn^2 / (h^{1/3}), \quad (3.54)$$

ili izraz dobijen na osnovu logaritamskog rasporeda brzina po dubini :

$$C_\tau = \frac{\kappa^2}{\left[\frac{z_o}{h} - 1 + 2.304 \cdot \log \left(\frac{h}{z_o} \right) \right]^2}, \quad (3.55)$$

gde je z_o - rastojanje od dna (kalibracioni parametar), a κ - *von Kármán*-ova konstanta.

3.3.2. Jednačine kojima se opisuje transport nanosa i deformacija korita

Za slučaj nanosnih jednačina osrednjavanje po dubini potrebno je samo u slučaju jednačine održanja mase suspendovanog nanosa (izraz 3.38), dok su jednačina održanja mase aktivnog sloja i globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu u svom osnovnom obliku dvodimenzionalni izrazi, koji važe samo u oblasti pri dnu i na samom dnu (izrazi 3.39 i 3.40).

Ako se na jednačinu održanja mase suspendovanog nanosa za jedan granulometrijski interval (k) primeni *Leibnitz*-ovo pravilo o integraciji izvoda funkcije, kao rezultat dobija se izraz koji ispisan za (x,y) koordinatne pravce ima oblik:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(h\rho_m C_k)}{\partial t} + \frac{\partial(h\rho_m C_k \tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\rho_m C_k \tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(h\rho_m C'_k u')}{\partial x} + \frac{\partial(h\rho_m C'_k v')}{\partial y} + \\ & + \left[\rho_m C_k \left(w - \frac{\partial z}{\partial t} - u \frac{\partial z}{\partial x} - v \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right]_{z_d}^{z_v} = \frac{\partial(hI_{k_x})}{\partial x} + \frac{\partial(hI_{k_y})}{\partial y} + \left[I_{k_z} - I_{k_x} \frac{\partial z}{\partial x} - I_{k_y} \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{z_d}^{z_v}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Prvi član na levoj strani jednakosti predstavlja lokalnu promenu mase suspendovanog nanosa, drugi i treći član označavaju advektivne promene duž (x,y) pravca, dok su četvrti i peti (dispersioni) član, kao i izraz u uglastoj zagradi isključivo posledica osrednjavanja. Na desnoj strani jednakosti prvi i drugi član predstavlja turbulentnu i molekularnu difuziju, dok je treći član dobijen osrednjavanjem jednačine. Primenom kinematičkih uslova definisanih izrazom (3.43) za kotu nivoa vode i izrazom (3.46) za rečno dno, a uz izostavljanje disperzionih članova zbog zanemarljivo malih vrednosti, jednačina (3.56) se transformiše u :

$$\frac{\partial(h\rho_m C_k)}{\partial t} + \frac{\partial(h\rho_m C_k \tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\rho_m C_k \tilde{v})}{\partial y} = \frac{\partial(hI_{k_x})}{\partial x} + \frac{\partial(hI_{k_y})}{\partial y} + S_k. \quad (3.57)$$

Konačno, kombinovanjem dobijenog izraza (3.57) i jednačine kontinuiteta (izraz 3.48), dolazi se do krajnjeg oblika osrednjene po dubini jednačine održanja mase suspendovanog nanosa za jedan granulometrijski interval (k) :

$$\boxed{\frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial(hI_{k_x})}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial(hI_{k_y})}{\partial y} + \frac{S_k}{h}.} \quad (3.58)$$

3.3.3. Strategija numeričkog rešavanja jednačina osrednjenih po dubini

Nakon formulisanja svih potrebnih jednačina ravanskog modela za opisivanje strujanje vode, transporta nanosa i deformacije rečnog korita, kao sledeći korak u procesu formiranja numeričkog modela ponašanja nanosa u otvorenim tokovima definiše se procedura, odnosno strategija njihovog rešavanja. U tom pogledu jedno od osnovnih pitanja koje se na samom početku nameće, jeste na koji način obezbediti adekvatnu numeričku vezu između strujanja, odnosno hidrauličkih parametara toka i nanosnih procesa. Imajući u vidu da se u prirodi pored ove generalne interakcija između toka i nanosa javlja i veza između suspendovanog nanosa i nanosa pri dnu i na dnu, od izbora strategije numeričkog rešavanja, odnosno pravilnog matematičkog povezivanja procesa u otvorenim tokovima, zavisice i fizička verodostojnost modeliranih procesa.

Numeričko rešavanje osrednjenih po dubini *Reynolds*-ovih jednačina isključivo je u funkciji njihovog karaktera, pa je stoga potrebno jasno definisati matematičku prirodu dobijenih izraza. Uobičajna praksa koja se koristi u rešavanju jednačina toka, jeste njihovo definisanje u funkciji primitivnih zavisno promenljivih veličina - dve komponente brzine i kota slobodne površine

vode. Ovakva formulacija jednačina, gde se svaka od njih veže za jednu promenljivu, omogućava jasnije definisanje njihovog matematičkog karaktera, što direktno utiče na pravilan izbor numeričke metode i tačniju implementaciju graničnih uslova. Na osnovu ovoga komponente brzine se najčešće vežu za dinamičke jednačine definisane za dva koordinatna pravca, dok se kombinacijom jednačine kontinuiteta i određenih članova dinamičke jednačine (članovi težine, pritiska i smičućih napona) dobija treći izraz – propagacija, koji se veže za kotu nivoa vode. Dinamičke jednačine se sada mogu identifikovati kao kombinovane advektivno-difuzne jednačine mešanog hiperboličko/paraboličkog tipa, gde izbor numeričkog modela prvenstveno zavisi od pojedinačnog dominantnog uticaja advektivnog ili difuznog člana. Treći, kombinovani izraz propagacije, rešava se integracijom jednačine kontinuiteta po elementarnoj kontrolnoj zapremini, koristeći pri tom izraze dobijene diskretizacijom odgovarajućih članova dinamičke jednačine.

Dominantni uticaj određenih članova u dobijenom sistemu jednačina predstavlja osnovni parametar za izbor numeričkog modela koji će se primeniti za njihovo rešavanje. Ako se, na primer, razmatra tok sa dominantnim uticajem inercijalnih sila, dinamička jednačina će biti prevenstveno hiperboličnog tipa, dok će u slučaju dominantnih smičućih sila ova jednačina imati parabolički karakter. Na osnovu uticaja pojedinih članova na prirodu kompletne jednačine, može se zaključiti da je praktično nemoguće izabrati takav pojedinačni numerički model kojim će se zadovoljiti svi mogući uslovi tečenja. Da bi se ovaj problem prevazišao uvodi se postupak *etapnog rešavanja* (Yanenko 1971, Benqué, Cunge, Feuillet, Haguel, Holly 1982), gde se sada dinamička (advektivno-difuzna) jednačina dodatno razbija na prostije i fizički jasnije korake advekcije i difuzije. Osnova ovakvog pristupa je pretpostavka da se ukupna lokalna promena količine kretanja može dobiti superpozicijom lokalnih promena pojedinih članova dinamičke jednačine. Na ovaj način proračun tečenja se praktično odvija kroz tri računski koraka. U prvom koraku rešava se prvo jednačina advekcije duž (x,y) pravaca (leva strana izraza 3.49 i 3.50) :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(huu)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = 0, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hvv)}{\partial y} = 0. \quad (3.60)$$

Korišćenje dobijenih vrednosti brzina iz ovog koraka, u drugom koraku se, takođe duž x,y koordinatnih pravaca, modelira potom član difuzije u obliku (treći i četvrti član na desnoj strani izraza 3.49 i 3.50) :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} = \frac{I}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h\tau_{xx}) \right) + \frac{I}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} (h\tau_{yx}) \right), \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} = \frac{I}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h\tau_{xy}) \right) + \frac{I}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} (h\tau_{yy}) \right), \quad (3.62)$$

da bi se zatim kao krajnji korak rešavao član propagacije, koji čini kombinaciju preostalih članova dinamičke jednačine (prvi i poslednji član na desnoj strani izraza 3.49 i 3.50, dok su disperzioni članovi zbog svog malog uticaja na kompletno strujanje zanemareni) :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} = -gh \frac{\partial Z_v}{\partial x} + \frac{I}{\rho} (\tau_{sx} - \tau_{ox}), \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} = -gh \frac{\partial Z_v}{\partial y} + \frac{I}{\rho} (\tau_{sy} - \tau_{oy}), \quad (3.64)$$

i jednačine kontinuiteta :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (3.65)$$

Ovakav pristup u rešavanju jednačina omogućava jasno formulisanje matematičkog karaktera svih članova zasebno, što uz pravilan odabir graničnih uslova i numeričkih metoda za svaki od koraka posebno direktno utiče na tačnost i kvalitet dobijenih rezultata. Numeričkim rešavanjem jednačina toka za izabrani naredni vremenski trenutak dobijaju se vrednosti komponenata brzine i kote nivoa vode koji sada predstavljaju ulazne parametre za rešavanje nanosnih jednačina.

Sistem transformisanih nanosnih jednačina koje čine jednačina održanja mase suspendovanog nanosa, zatim jednačina održanja mase aktivnog sloja i globalna jednačina održanja mase na dnu, opisuju jedan složen proces interakcije toka i nanosa koji za posledicu ima promenu morfoloških i nanosnih karakteristika toka. Kako je navedeno u prethodnom poglavlju, jednačine održanja mase suspendovanog nanosa i aktivnog sloja se vežu za jedan granulometrijski interval (k), dok treći izraz predstavlja održanje ukupne mase kompletne granulometrijske mešavine nanosa na dnu. Da bi se na dati sistem primenio odgovarajući numerički postupak, potrebno je prvo jasno definisati matematičku strukturu, odnosno tip svake jednačine posebno. Kao i u slučaju jednačina toka, pravilno definisanje matematičke prirode sistema nanosnih jednačina je praktično nemoguće, pa se stoga svaka od jednačina sistema mora vezati za neku od zavisno promenljivih

veličina; koncentraciju suspendovanog nanosa za jedan granulometrijski interval C_k , zastupljenost određenog granulometrijskog intervala u ukupnoj mešavini nanosa β_k i kotu rečnog dna Z_d . Na osnovu toga koncentracija C_k se može smatrati kao primarna promenljiva jednačine održanja mase suspendovanog nanosa za jedan granulometrijski interval, parametar β_k kao primarna promenljiva jednačine održanja mase aktivnog sloja za jedan granulometrijski interval, dok se kota dna Z_d veže za globalnu jednačinu održanja mase nanosa na dnu. Ovakva formulacija nanosnih jednačina dozvoljava sada da se jednačina održanja mase suspendovanog nanosa po analogiji sa dinamičkom jednačinom shvati kao kombinovani advektivno-difuzni izraz mešanog hiperboličko/paraboličkog tipa, koji će se na osnovu pretpostavke da se ukupna lokalna promena može dobiti susperpozicijom lokalnih promena pojedinih članova rastaviti na dva zasebna člana, advektivni pronos mase suspendovanog nanosa (leva strana izraza 3.58) :

$$\frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial y} = \frac{S_k}{h}, \quad (3.66)$$

i pronos mase suspendovanog nanosa usled difuzije (prvi i drugi član na desnoj strani izraza 3.58) :

$$\frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial t} = \frac{1}{h} \frac{\partial(hI_{k_x})}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial(hI_{k_y})}{\partial y}. \quad (3.67)$$

Advektivni član kao prirodno dominantniji u kretanju suspendovanog materijala sadrži i dodatni slobodni član veze između nanosa na dnu i nanosa u suspenziji - neto maseni fluks S . Sa druge strane, u slučaju kretanja nanosa na dnu i pri dnu matematička klasifikacija jednačina bazira se na dominantnom članu. S obzirom na to da je i u jednačini održanja mase aktivnog sloja za jedan granulometrijski interval (k) :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial(\beta_k E_m)}{\partial t} + \frac{\partial(q_{dno_k})_x}{\partial x} + \frac{\partial(q_{dno_k})_y}{\partial y} + S_k - S_{p_k} = 0, \quad (3.68)$$

i u globalnoj jednačini održanja mase na dnu :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial Z_d}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial(q_{dno_k})_x}{\partial x} + \frac{\partial(q_{dno_k})_y}{\partial y} + S_k \right) = 0, \quad (3.69)$$

fluks vučenog nanosa član koji dominira prirodom procesa, činjenica da se nanosne čestice po dnu kreću isključivo pod uticajem i u smeru glavnih strujnih pravaca eksplicitno ukazuje na advektivnu osobinu, odnosno hiperbolički karakter navedenih jednačina.

Nanosni procesi koji se odvijaju u prirodnim vodotocima su u tesnoj međusobnoj vezi, što direktno utiče na postupak rešavanja sistema nanosnih jednačina. Podizanjem nanosa sa rečnog dna u suspenziju menjaju se sastav i struktura nanosnog materijala na dnu, uz istovremenu promenu koncentracije suspendovanog nanosa. Kao posledica toga dolazi do vertikalnog pomeranja kote dna uz aktiviranje nanosnih podslojeva, koji sada aktivno učestvuju u formiranju novog dna i time utiču na prostorni raspored granulometrijskog sastava rečnog korita. Na osnovu ovakve interakcije i međusobnog uticaja nanosnih parametara može se primetiti da rešavanje sistema nanosnih jednačina mora biti u iterativnoj, međusobno zavisnoj formi. Ovakav pristup podrazumeva rešavanje sistema jednačina gde se prvo rešava jednačina održanja mase suspendovanog nanosa po koncentraciji C_k za naredni vremenski trenutak, da bi se zatim, korišćenjem dobijenih vrednosti koncentracija, za taj isti vremenski nivo simultanim rešavanjem jednačina održanja mase aktivnog sloja i globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu sračunale vrednosti parametra β_k i kote dna Z_d . Nove vrednosti nanosnih zavisno promenljivih veličina posredno utiču na hidrauličke uslove toka, pa definisnjem intenziteta međusobnog uticaja toka i nanosa formuliše se proces rešavanja kompletnog sistema jednačina.

Transport nanosa, uslovljen konstantnim erodovanjem i deponovanjem nanosnih čestica, utiče na postojeću morfološku strukturu rečnog toka, menjajući sa jedne strane parametre dna kao što su granulometrijski sastav, apsolutna hrapavost i kota dna rečnog korita, dok sa druge strane može dovesti do promene u gustini mešavine (ρ_m) usled velikih koncentracija suspendovanog nanosa. Ovim promenama nanos direktno utiče na strujno polje vodotoka, menjajući pri tom raspored brzina i kotu nivoa vode duž rečnog toka, što se ponovo povratno odražava na postojeće nanosne procese. Intenzitet uticaja transporta nanosa i morfoloških promena na strujnu sliku rečnog toka je od presudnog značaja za definisanje procedure rešavanja kompletnog sistema jednačina. Kako se ponašanje toka i nanosni procesi ne odvijaju na istoj vremenskoj skali, promene u morfološkim karakteristikama rečnog korita za jedan vremenski korak (karakterističan za proračun strujanja) su zanemarljivo male, pa je samim tim i njihov uticaj (u okviru jednog vremenskog koraka) na tečenje beznačajan. Ovakva pretpostavka praktično znači da struja u toku jednog vremenskog koraka nije u stanju da poremeti postojeću morfološku strukturu korita u toj meri, da sada ta promena ima značajan povratni uticaj na tok. Iz tog razloga prvo se rešavaju jednačine toka po nepoznatim komponentama brzine i nivoa za poznate vrednosti hrapavosti i kote dna, da bi se zatim na osnovu tih dobijenih vrednosti rešavale

nanosne jednačine po nepoznatim koncentracijama suspendovanog nanosa, granulometrijskom rasporedu i koti dna za taj isti vremenski korak. Dobijene vrednosti nanosnih zavisno promenljivih veličina u opštem iterativnom smislu zamenjuju vrednosti iz prethodnog vremenskog trenutka, što zahteva ponovno rešavanje kompletnog sistema jednačina sve dok se ne postigne zadovoljavajuća tačnost. Međutim, kako je ranije navedeno, morfološke promene za jedan računski vremenski korak ne menjaju bitno strujnu sliku toka, pa iterativno rešavanje kompletnog sistema jednačina nema uticaja na tačnost rezultata tog vremenskog preseka. Iz tog razloga proračun za jedan vremenski korak obavlja se isključivo u okviru samo jedne vremenske “iteracije”.

3.4. Promenljiva oblast strujanja

Prethodna teorijska razmatranja strujanja i nanosnih procesa zasnovana su isključivo na prostorno i vremenski nepromenljivoj oblasti tečenja. Fiksna oblast modela formira se uz uslov važenja jednačina toka i nanosa u svakom segmentu modeliranog domena, dok se njegova deformacija ne uzima u obzir. Međutim, imajući u vidu prirodnu neustaljenost vodotoka koja se prvenstveno ogleda u variranju hidrauličkih parametara toka, jasno se može zaključiti da ovaj pristup nije u potpunosti prihvatljiv. Jedna od značajnih dinamičkih promena ovog tipa jeste podizanje i spuštanje nivoa rečnog toka. Ovakva neustaljenost u pogledu nivoa vodnog ogledala izaziva kao posledicu promenu *aktivne oblasti* strujanja (zona dominantnog strujanja), pri čemu delovi toka koji nisu bili aktivno uključeni u ovu oblast (priobalna područja) sada postaju njen sastavni deo, ili u zavisnosti od uslova koji vladaju u toku, bivaju isključeni iz nje. Pored toga, zavisno od postojećih uslova tečenja geometrija kao i granulometrijski sastav ovih sada aktivnih (neaktivnih) delova toka direktno utiču (ne utiču) na strujanje i nanosne procese koji se odvijaju u „glavnom toku“. Da bi se na neki način obuhvatili efekti ovakvog ponašanja prirodnog toka koji imaju izuzetno veliki uticaj na sam tok, neophodno je uključiti deformaciju aktivne oblasti strujanja u modeliranje jednačina toka i nanosa. Pri tome osnovni uslov koji ovaj element deformacije aktivne oblasti mora da zadovolji, jeste uslov primenjivosti osnovnih jednačina ravanskog toka, odnosno da se hidraulički uslovi, kao i uslovi ponašanja nanosa koji se modeliraju, mogu definisati sistemom dobijenih jednačina zasnovanih na osnovnim principima održanja mase i količine kretanja.

Uticaj dinamičke promene oblasti tečenja na samu strujnu sliku zavisi kako od same geometrije toka, tako i od sastava nanosnog materijala. Plavljenje određenih oblasti može da

uzrokuje delimično aktiviranje pasivnih („suvih“) delova toka, koji se sada kao takvi mogu pojaviti npr. u vidu izolovanih kaset sa cirkularnim unutrašnjim strujanjem uz intenzivno taloženje nanosa. Takođe, nepotpuno plavljenje (pojava izolovanih delova toka usled podizanja nivoa) dovodi do pojave lokalnih suženja ili proširenja toka, što opet može imati velikog uticaja kako na strujnu sliku, tako i na nanosne i morfološke promene samog toka. Usled promene oblasti strujanja aktivirani delovi toka sada i sami postaju izloženi morfološkim promenama i nanosnim procesima, zbog čega dolazi do ugroženosti priobalnih područja od moguće erozije ili deponovanja nanosnog materijala. Na osnovu ovoga može se zaključiti da zanemarivanje uticaja promene aktivne oblasti na ponašanje rečnog toka može dovesti do nepotpune i nedovoljno tačne slike onoga što se dešava u samom toku, a sam intenzitet tog uticaja je u direktnoj vezi sa trenutnim hidrauličkim i morfološkim karakteristikama analiziranog vodotoka.

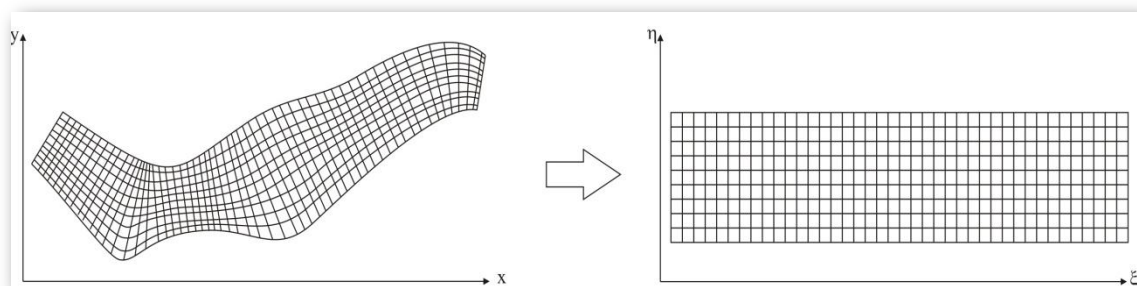
Primena dodatnih jednačina u rešavanju dinamike promene položaja linije interakcije (Poglavlje 2), bilo da se radi o oblastima različitih karakteristika (fluid-fluid), ili o aktivnom i pasivnom računskom domenu (fluid-čvrsta granica), zavisi kako od intenziteta promene položaja, tako i od međusobnog uticaja oblasti sa obe strane granične linije. U slučaju blago promenljivih domena sam intenzitet promene ima zanemarljivo mali uticaj na razmatranu oblast, pa se deformacija analizirane oblasti rešava postupkom identifikacije pasivnog dela i njenim isključivanjem ili uključivanjem u aktivni deo. U ovu grupu spadaju i prirodni vodotoci, s obzirom na njihov sporo promenljiv karakter.

Pomeranje aktivnog domena strujanja, koje je diktirano prvenstveno hidrauličkim uslovima u toku, definiše se kao vremensko i prostorno kretanje obalne linije (linije useka vodnog ogledala u obalnu ravan), usled čega dolazi do sušenja ili kvašenja priobalnih delova rečnog toka. Promene koje nastaju usled ovakvog pomeranja obalne linije ne zavise mnogo od intenziteta kretanja (brzine pomeranja), koje je u slučaju prirodnih tokova najčešće zanemarljivo, već uglavnom samo od njenog prostornog položaja. Imajući u vidu ovu pretpostavku, postupak identifikacije pasivnih oblasti toka isključuje dodatne jednačine iz proračuna i orjentiše se na parametarski model definisanja aktivne oblasti. Kod ovog postupka određivanje delova vodotoka koji se isključuju ili uključuju u aktivnu oblast vrši se primenom odgovarajućih graničnih parametara, koji ujedno definišu i donju granicu primenjivosti jednačina toka. Kako je strujanje vode u relativno plitkim priobalnim područjima izvan oblasti primene ovih graničnih vrednosti, ovde i sama analiza morfoloških promena izlazi iz okvira primene osnovnih nanosnih jednačina. Za ove granične parametre najčešće se uzimaju dubina vode i brzina strujanja.

3.5. *Kompletna transformacija jednačina u krivolinijski neortogonalni koordinatni sistem*

Formirani sistem jednačina (3.59 ÷ 3.69), koji važi duž koordinatnih pravaca (x,y) , definišu vektori zavisno i nezavisno promenljivih veličina razloženih na komponente duž ovih osnovnih pravaca. Računska mreža u ovom slučaju sastavljena je od tačkaka postavljenih duž pravih, međusobno ortogonalnih linija, i kao takva pogodna je samo za modeliranje relativno proste geometrije, tj. domena gde granice razmatrane oblasti prate (x,y) računске pravce. Međutim, ukoliko je geometrija računskog domena kao kod prirodnih vodotoka kompleksna, definisanje računске mreže i graničnih uslova kako na čvrstim, tako i na otvorenim granicama primenom Dekartovih koordinatnih pravaca postaje izuzetno složen i zahtevan posao. U tom slučaju se za opisivanje složene geometrije koju nameće prirodna morfologija najčešće koristi mreža *krivolinijskih* koordinata, gde se fizička oblast strujanja pokriva mrežom krivih linija koje bolje opisuju konture prirodnog vodotoka. Na ovaj način formirani pravci krivolinijske mreže nemaju ograničenje ortogonalnosti (dozvoljena je potpuna deformacija računске ćelije), a računska ćelija ne mora biti isključivo četvorougona. Prednost ovakavog izbora računске mreže je bolje prilagođavanje računskog domena geometriji vodotoka, uz mogućnost dodatnog progušćavanja mreže na oblastima od posebnog interesa, dok sam izbor tipa mreže zavisi od numeričke metode koja se primenjuje.

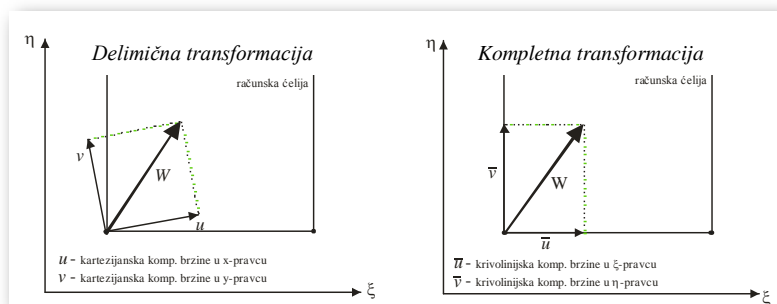
Modeliranje osnovnih jednačina toka i pronosa nanosa primenom sistema krivolinijskih koordinata moguće je uz uspostavljanje metrike prelaza između fizičke i računске oblasti. Ovo podrazumeva da se fizička oblast definisana u (x,y) koordinatnom sistemu prvo „prekrije“ krivolinijskom mrežom, a zatim se uz uspostavljanje funkcije zavisnosti u obliku $x = x(\xi, \eta)$ i $y = y(\xi, \eta)$ definiše računski pravougaoni domen u novom koordinatnom sistemu (ξ, η) (Slika 3.4).



Slika 3.4 Krivolinijska i njoj ekvivalentna računska mreža

Modeliranje i rešavanje sistema jednačina (3.59 ÷ 3.69) se sada vrši isključivo u računskoj (ξ, η) oblasti, gde se uz primenu određenih transformacija jednačine koje u osnovnom obliku važe u (x, y) oblasti, „prevode“ u formirani računski (ξ, η) domen. Kao dva najčešće primenjivana pristupa za prevođenje jednačina u krivolinijske koordinate koriste se *delimična* i *kompletna* transformacija, dok njihov izbor zavisi prvenstveno od numeričke metode koja će se koristiti.

Prvi pristup podrazumeva transformisanje samo nezavisno promenljivih veličina primenom osnovnih pravila parcijalne transformacije, pri čemu vektori zavisno promenljivih zadržavaju svoju početnu prostornu orijentaciju. Kako se radi o delimičnom prevođenju jednačina iz jednog koordinatnog sistema u drugi, ovaj vid transformacije može biti razlog za pojavu numeričkih problema karakterističnih za svaki modelirani slučaj posebno (prilikom korišćenja smaknute računске mreže dolazi do pojave značajnih numeričkih deformacija rešenja). Drugu, a istovremeno i bolju opciju, predstavlja postupak kompletne transformacije postojećih jednačina, gde se pored nezavisno promenljivih transformišu i zavisno promenljive veličine (komponente brzine). Ovakvim načinom transformacije u potpunosti se prelazi na novi koordinatni sistem (ξ, η) , gde su vektori komponentata zavisno promenljivih veličina paralelni sa koordinatnim pravcima, što nije slučaj sa delimičnom transformacijom (Slika 3.5). Ovim se postiže jednostavnija interpretacija jednačina na računsku ćeliju, što omogućava lakše definisanje i rešavanje problema strujanja i pronosa nanosa.



Slika 3.5 Šematski prikaz delimične i kompletne transformacije

3.5.1. Opšti principi transformacije

Transformacija zavisno promenljivih veličina postaje moguća ako se uspostavi metrička veza između (x, y) i (ξ, η) oblasti, a koja se definiše na osnovu totalnog izvoda funkcije zavisnosti $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ fizičkog domena i odgovarajuće inverzne funkcije $\xi = \xi(x, y)$ $\eta = \eta(x, y)$ računskog domena :

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{fizička oblast,} \quad (3.70)$$

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \\ d\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{računska oblast.} \quad (3.71)$$

Ispisivanjem dobijenih izraza u matricnoj formi :

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

$$\overset{B}{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

i zatim primenom odgovarajućih algebarskih transformacija :

$$\left. \begin{aligned} A^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \\ B \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B=A^{-1}, \quad (3.74)$$

gde je inverzan oblik matrice A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

dolazi se do veze dva domena :

$$\boxed{\begin{matrix} B \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right] \end{matrix}} = \frac{1}{J} \boxed{\begin{matrix} A^{-1} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{array} \right] \end{matrix}}, \quad (3.76)$$

koju definiše determinanta *Jakobijan* matrice :

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (3.77)$$

Uspostavljanjem metrike prelaza sa fizičke na računsku oblast, sada je moguće izvršiti transformaciju i prostornih izvoda zavisno promenljivih veličina između ova dva domena. Shodno tome, uz primenu elementarnih algebarskih transformacija prvi i drugi izvod zavisno promenljivih veličina dobijaju oblik :

- prvi izvod

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right], \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{J} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right], \quad (3.79)$$

- drugi izvod

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{1}{J} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \xi} \right\} \end{array} \right\}, \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{J} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{J} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{J} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\} \end{array} \right\}, \quad (3.81)$$

gde je funkcija f opšta zavisno promenljiva veličina (komp. brzine u, v ili dubina h).

Pored transformacije prostornih izvoda zavisno promenljivih veličina (delimična transformacija), postupak kompletne transformacije, kako je prethodno navedeno, nalaže i transformaciju samih zavisno promenljivih veličina, odnosno komponentata brzina u i v . Diferenciranjem izraza 3.70 po vremenu dolazi se do formulacije kartezijskih komponentata brzine definisanih u računskom domenu :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Ispisivanjem komponentata brzine u obliku :

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \end{array} \right\} - \text{kartezijske komponente brzine} \quad (3.83)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u} = \frac{d\xi}{dt} \\ \bar{v} = \frac{d\eta}{dt} \end{array} \right\} - \text{krivolinijske komponente brzine (kontravarijante),}$$

i zamenom u izraz (3.82), dolazi se do izraza za transformaciju kartezijskih u krivolinijske komponente brzine :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}, \\ v &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Takođe, ako se isti postupak primeni na inverznu funkciju zavisnosti $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, odnosno izraz 3.71 diferencira po vremenu, uz primenu pravila o prethodno definisanoj geometrijskoj transformaciji dolazi se do izraza za kontravarijante brzine :

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} u + \frac{\partial \xi}{\partial y} v = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} u - \frac{\partial x}{\partial \eta} v \right), \\ \bar{v} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\partial \eta}{\partial y} v = \frac{1}{J} \left(-\frac{\partial y}{\partial \xi} u + \frac{\partial x}{\partial \xi} v \right).\end{aligned}\tag{3.85}$$

Formulisanjem osnovnih pravila transformacije zavisno i nezavisno promenljivih, sada se konačno sistem jednačina (3.59 ÷ 3.69) može transformisati u krivolinijski koordinatni sistem, gde će izbor postupka transformacije (delimična ili kompletna) zavistiti od karaktera pojedinih članova i numeričkog modela koji će se koristiti za njihovo rešavanje.

3.5.2. Strujanje vode - jednačina kontinuiteta

Ako se postupak kompletne transformacije primeni na jednačinu kontinuiteta, izraz (3.65) dobija transformisani oblik :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (Jh\bar{u}) \right] + \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (Jh\bar{v}) \right] = 0,}\tag{3.86}$$

gde su \bar{u}, \bar{v} kontravarijante brzine, a J determinanta *Jakobijan* matrice.

3.5.3. Strujanje vode - advekcija

Kao prvi transformisaće se advektivni korak - promena količine kretanja mase vode duž x i y pravca usled advekcije (izrazi 3.59 i 3.60), gde će se za transformaciju primeniti delimični postupak, procedura koja se pokazala kao bolje rešenje ukoliko se kao numerički model koristi metoda karakteristika :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(huu)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = 0,\tag{3.87}$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hvv)}{\partial y} = 0.\tag{3.88}$$

Ako se na izraze (3.87) i (3.88), uz korišćenje jednačine kontinuiteta (izraz 3.65), primeni pravilo o izvodu složene funkcije, dolazi se do jednostavnijeg oblika jednačina :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.90)$$

na koji se zatim shodno strukturi numeričkog modela primenjuje postupak delimične transformacije :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)}_{\bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \underbrace{\left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)}_{\bar{v}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{\left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)}_{\bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \underbrace{\left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)}_{\bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0. \quad (3.92)$$

Izrazi u zagradama predstavljaju krivolinijske (kontravarijante) komponente brzine \bar{u}, \bar{v} .

Ako se sada na dobijene jednačine primeni pravilo materijalnog izvoda, dolazi se do konačnog oblika delimično transformisanog člana advekcije koji ispisan u formi *Lagrange*-ovog pristupa postaje :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Du}{Dt} = 0 \\ \frac{Dv}{Dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ duž trajektorija } \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial x} u + \frac{\partial \xi}{\partial y} v = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} u - \frac{\partial x}{\partial \eta} v \right) \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\partial \eta}{\partial y} v = \frac{1}{J} \left(-\frac{\partial y}{\partial \xi} u + \frac{\partial x}{\partial \xi} v \right) \end{array} \right. \quad (3.93)$$

Izrazom (3.93) definiše se da je materijalni izvod kartezijanskih komponenata brzine u i v u krivolinijskom koordinatnom sistemu jednak nuli duž trajektorija definisanih kao kontravarijante brzina.

3.5.4. Strujanje vode - difuzija

Drugi korak dinamičke jednačine definiše se kao promena količine kretanja usled difuzije i predstavljaju ga prostorni izvodi osrednjenih smičućih napona (viskozni i turbulentni) ispisan u obliku :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h\tau_{xx}) \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} (h\tau_{yx}) \right), \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (h\tau_{xy}) \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} (h\tau_{yy}) \right). \quad (3.95)$$

Ako se smičući naponi zamene odgovarajućim izvodima brzina, a primenom postupka kompletne transformacije prostorni izvodi nezavisno promenljivih transformišu po pravilima parcijalne transformacije (izrazi 3.78 ÷ 3.81), uz uslov vremenski nepokretne mreže (zanemaruju se vremenski izvodi geometrije) i zamene kartezijanskih komponenti brzina kontravarijantama (izraz 3.84) dobija se korak difuzije transformisan u krivolinijski (ξ, η) koordinatni sistem :

- ξ - pravac

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} = \frac{1}{J} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] \right] - \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] \right] - \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] \right] + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] \right] \end{array} \right\}, \quad (3.96)$$

- η - pravac

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} = \frac{1}{J} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] \right] - \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] \right] - \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] \right] + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] \right] \end{array} \right\}. \quad (3.97)$$

U jednačinama (3.96) i (3.97) ν_u je ukupan kinematski koeficijent viskoznosti, koji je jednak zbiru kinematskog koeficijenta molekularne viskoznosti ν_m i koeficijenta turbulentne viskoznosti ν_t :

$$\nu_u = \nu_m + \nu_t. \quad (3.98)$$

Na osnovu dobijenih izraza može se primetiti da prvi član u obe jednačine predstavlja lokalnu promenu količine kretanja u ξ pravcu, dok drugi član označava lokalnu promenu u η pravcu. U cilju definisanja promene količine kretanja difuzijom duž računskih pravaca ξ i η krivolinijskog koordinatnog sistema, potrebno je u prvom koraku iz izraza (3.96) i (3.97) eliminisati član $\partial(h\bar{v})/\partial t$, a u drugom koraku član $\partial(h\bar{u})/\partial t$. Kako bi se ovo postiglo u prvom slučaju potrebno je izraz (3.96) pomnožiti sa izvodom $\partial y/\partial \eta$, dalje izraz (3.97) pomnožiti sa izvodom $-\partial x/\partial \eta$, a zatim ovako dobijene jednačine sabrati. Primenom osnovnih algebarskih operacija uz određene permutacije prostornih izvoda u cilju dobijanja jednostavnije forme jednačina, dolazi se do konačnog oblika transformisanog koraka difuzije koji važi duž krivolinijskog ξ pravca :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} = & \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Na sličan način vrši se i eliminacija člana $\partial(h\bar{u})/\partial t$ iz izraza (3.96) i (3.97). Množenjem jednačine (3.96) sa izvodom $-\partial y/\partial \xi$ i jednačine (3.97) sa izvodom $\partial x/\partial \xi$, a zatim njihovim sabiranjem dobija se transformisani difuzni član dinamičke jednačine koji važi duž η koordinatnog pravca :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} = & \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right], \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

Veličine G_{11} , G_{22} i G_{12} zovu se metrički koeficijenti i računaju se po izrazima :

$$G_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad G_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad G_{12} = G_{21} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (3.101)$$

3.5.5. Strujanje vode - propagacija

Poslednji član dinamičke jednačine - propagacija predstavlja zbir gradijenta pritiska i razlike smičućih napona na površini vode (napon usled dejstva vetra) i rečnom dnu. Definisan duž (x, y) koordinatnih pravaca, ovaj član ima oblik :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} = -gh \frac{\partial Z_v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} (\tau_{sx} - \tau_{ox}), \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} = -gh \frac{\partial Z_v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} (\tau_{sy} - \tau_{oy}). \quad (3.103)$$

Transformisanje koraka propagacije će se izvršiti na sličan način kao što je to rađeno u slučaju difuzije, primenom postupka kompletne transformacije. Uz zamenu izraza za napone smicanja na rečnom dnu koristeći jednačinu 3.53, primenom postupka parcijalne transformacije nezavisno i zavisno promenljivih (nepokretna mreža) izrazi (3.102) i (3.103) dobijaju oblik :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} = & -gh \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(Z_v \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Z_v \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] - \\
 & - C_r \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right)^2} \right] + \frac{\tau_{sx}}{\rho}, \quad 3.104
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial (h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial (h\bar{v})}{\partial t} = & -gh \frac{1}{J} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(Z_v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Z_v \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right] - \\ & - C_\tau \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right)^2} \right] + \frac{\tau_{sy}}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Dalje, primenom elementarnih algebarskih transformacija nakon naizmenične eliminacije članova $\partial(h\bar{u})/\partial t$ i $\partial(h\bar{v})/\partial t$ iz izraza (3.104) i (3.105) na način kako je to rađeno u koraku difuzije, kao krajnji rezultat dobija se transformisani oblik koraka propagacije za pravac ξ :

$$\frac{\partial (h\bar{u})}{\partial t} = \frac{gh}{J^2} \left[-\frac{\partial Z_v}{\partial \xi} G_{22} + \frac{\partial Z_v}{\partial \eta} G_{12} \right] - C_\tau \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 G_{11} + 2\bar{u}\bar{v}G_{12} + \bar{v}^2 G_{22}} + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\tau_{sy}}{\rho}, \quad (3.106)$$

i za pravac η :

$$\frac{\partial (h\bar{v})}{\partial t} = \frac{gh}{J^2} \left[-\frac{\partial Z_v}{\partial \eta} G_{11} + \frac{\partial Z_v}{\partial \xi} G_{12} \right] - C_\tau \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 G_{11} + 2\bar{u}\bar{v}G_{12} + \bar{v}^2 G_{22}} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\tau_{sx}}{\rho} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\tau_{sy}}{\rho}. \quad (3.107)$$

3.5.6. Transport suspendovanog nanosa – advekcija i difuzija

Nanosne jednačine koje uključuju transport suspendovanog nanosa (izraz 3.58) i par jednačina koje opisuju održanje mase aktivnog sloja za jedan granulometrijski interval (k) (izraz 3.68) i globalno održanje mase na dnu (izraz 3.69) direktno zavise od parametara toka, pa je za rešavanje kompletnog sistema takođe potrebno izvršiti njihovu transformaciju u krivolinijske koordinate.

S obzirom na strukturu i matematički karakter jednačine održanja mase suspendovanog nanosa, koji direktno utiče na izbor numeričkog modela, advektivni pronos mase suspendovanog nanosa definisan duž kartezijanskih (x,y) pravaca u obliku :

$$\frac{\partial (\rho_m C_k)}{\partial t} + u \frac{\partial (\rho_m C_k)}{\partial x} + v \frac{\partial (\rho_m C_k)}{\partial y} = \frac{S_k}{h}, \quad (3.108)$$

transformisaće se u krivolinijske koordinate na isti način kao što je to rađeno u slučaju advektivnog člana dinamičke jednačine. Primenom principa delimične transformacije i pravila

materijalnog izvoda na način kako je to rađeno u slučaju izraza (3.91 ÷ 3.93), advektivni pronos suspendovanog nanosa za jedan granulometrijski interval (k) posle transformacije u krivolinijski koordinatni sistem dobija svoj konačan oblik :

$$\left. \frac{D(\rho_m C_k)}{Dt} = \frac{S_k}{h} \right\} \text{ duž trajektorija } \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial x} u + \frac{\partial \xi}{\partial y} v = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} u - \frac{\partial x}{\partial \eta} v \right) \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\partial \eta}{\partial y} v = \frac{1}{J} \left(-\frac{\partial y}{\partial \xi} u + \frac{\partial x}{\partial \xi} v \right) \end{array} \right. \quad (3.109)$$

U slučaju difuznog koraka definisanog u kartezijskom obliku :

$$\frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial t} = \frac{1}{h} \frac{\partial(hI_{k_x})}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial(hI_{k_y})}{\partial y}. \quad (3.110)$$

skalarni karakter zavisno promenljive veličine (koncentracije suspendovanog nanosa) nameće primenu, uslovno rečeno, postupka delimične transformacije :

$$\frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial t} = \frac{1}{hJ} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{DhG_{22}}{J} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial \xi} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{DhG_{12}}{J} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial \eta} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{DhG_{11}}{J} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{DhG_{12}}{J} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial \xi} \right] \end{array} \right\}. \quad (3.111)$$

3.5.7. Transport nanosa na dnu i pri dnu

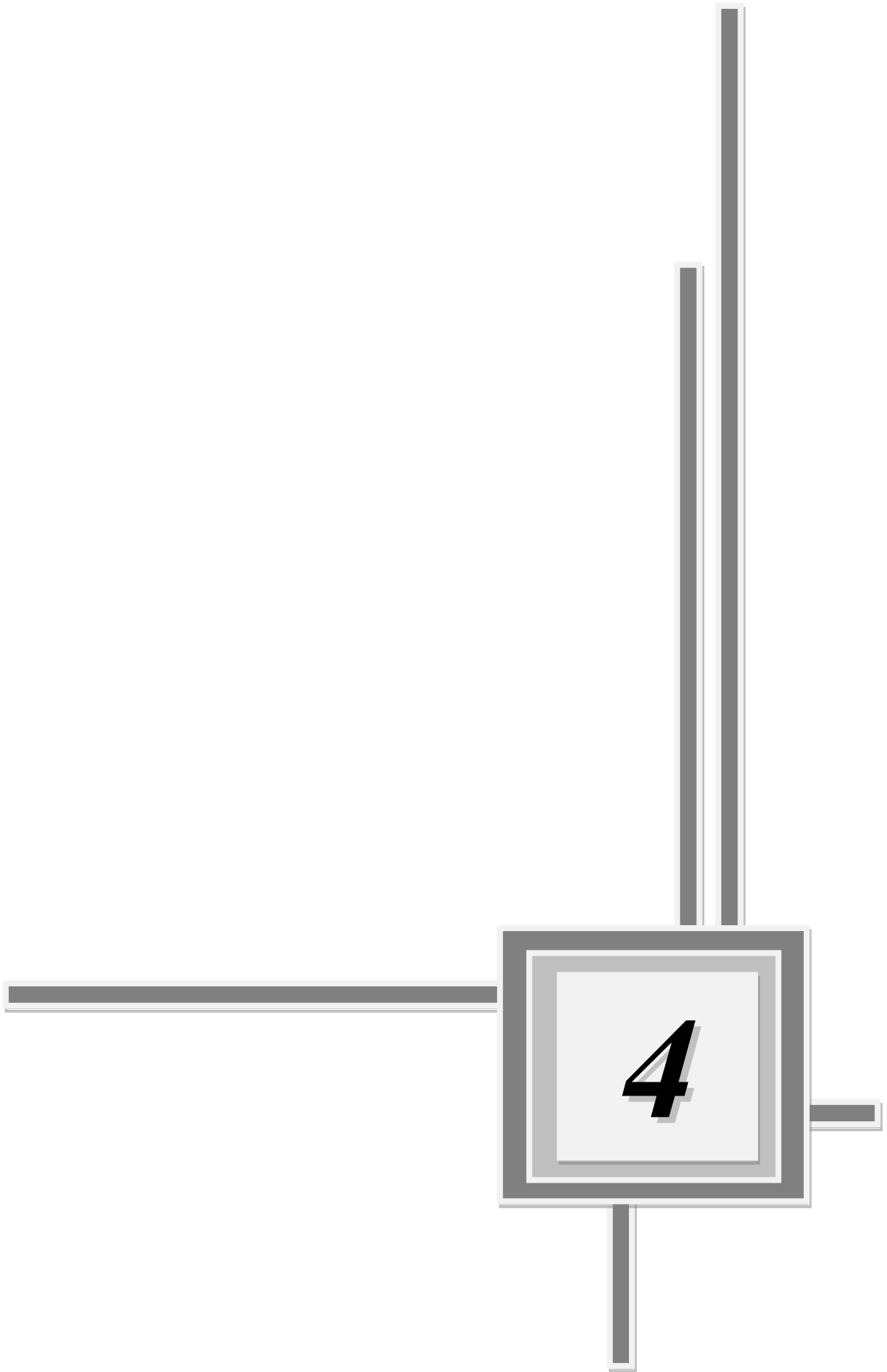
Jednačine održanja mase aktivnog sloja za jedan granulometrijski interval (k) (izraz 3.68) i jednačina globalnog održanja mase nanosa na dnu (izraz 3.69) „prevode“ se u krivolinijske koordinate jednostavnom transformacijom divergencije fluksa vučenog nanosa q_{dno} , što dovodi do konačnog oblika jednačine (3.68) transformisane u računski (ξ, η) domen :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial(\beta_k E_m)}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial(Jq_{dno_k})_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial(Jq_{dno_k})_{\eta}}{\partial \eta} + S_k - S_{p_k} = 0, \quad (3.112)$$

i do konačnog transformisanog oblika izraza (3.69) :

$$\rho_s (1-p) \frac{\partial Z_d}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{J} \frac{\partial (J q_{dno_k})_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial (J q_{dno_k})_{\eta}}{\partial \eta} + S_k \right) = 0, \quad (3.113)$$

gde su $(q_{dno_k})_{\xi}$ i $(q_{dno_k})_{\eta}$ komponente fluksa vučenog nanosa definisane u krivolinijskim koordinatnim pravcima ξ i η .



4. Numeričko rešavanje jednačina

Dobijeni sistem jednačina sastavljen od izraza kojim se opisuje strujanje vode (izrazi 3.86, 3.93, 3.99, 3.100, 3.106 i 3.107), transport suspendovanog nanosa (izrazi 3.109 i 3.111) i deformacija rečnog korita (izrazi 3.112 i 3.113), predstavlja matematičku formulaciju ponašanja prirodnih vodotoka za slučaj ravanskog strujnog polja. Ovaj sistem čine parcijalne diferencijalne jednačine ravanskog toka i nanosnih procesa koje su prvo osrednjene po dubini, a zatim transformisane u krivolinijski koordinatni sistem radi lakšeg definisanja i opisivanja složenih geometrijskih domena. Matematička analiza ovih jednačina prvenstveno ukazuje na to da se radi o složenom sistemu čije rešavanje isključuje mogućnost analitičkog rešenja. Iz tog razloga njihovo rešavanje zahteva uvođenje i primenu odgovarajućih numeričkih metoda i modela, čiji će izbor prvenstveno zavisiti od matematičkog karaktera pojedinih članova u ovim jednačinama.

4.1. Numeričko rešavanje jednačina ravanskog toka

4.1.1. Etapno rešavanje

Numeričko modeliranje i rešavanje jednačina toka uslovljeno je različitim diferencijalnim operatorima (hiperbolički, parabolički), koje sadrže određeni članovi formulisanih jednačina strujanja. Kako bi se ovi izrazi numerički tačnije modelirali, a potom i rešavali na njima odgovarajući postupak, na sistem osrednjenih po dubini i koordinatno transformisanih *Reynolds*-ovih jednačina primeniće se metoda *etapnog rešavanja*, gde će se shodno matematičkom karakteru pojedinih članova, jednačine razdvojiti na tri zasebna računski koraka. Cilj ovakvog postupka je prvenstveno dobijanje fizički jasnijih izraza (omogućava pravilnije i tačnije definisanje numeričkih postupaka koji će se primeniti za njihovo rešavanje) sa mogućnošću kontrolisanja udela određenog člana u ukupnom rešenju i njegovog isključivanja (uključivanja) iz ukupnog proračuna u zavisnosti od hidrauličkih uslova koji vladaju u toku.

Primenom pravila superpozicije lokalne promene količine kretanja na sistem jednačina ravanskog toka definisanih u krivolinijskom (ζ, η) koordinatnom sistemu, formiraju se kako je u prethodnom poglavlju navedeno tri etape, odnosno tri računski koraka : *advekcija*, *difuzija* i *propagacija*. U prvoj etapi rešava se advektivni deo dinamičke jednačine - lokalna promena količine kretanja usled advekcije duž (ζ, η) koordinatnih pravaca :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Du^a}{Dt} = 0 \\ \frac{Dv^a}{Dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ duž trajektorija } \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial x} u^a + \frac{\partial \xi}{\partial y} v^a \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x} u^a + \frac{\partial \eta}{\partial y} v^a \end{array} \right. \quad (4.1)$$

gde indeks a označava da se za komponente brzine koriste vrednosti „advektivnih“ brzina. Zbog primene optimalne numeričke metode uslovljene hiperboličkim karakterom koraka advекcije, u ovom slučaju koristi se oblik gde se rešavanje obavlja u funkciji „primitivnih“ varijabli - komponenta brzine, za razliku od ostale dve etape, gde se zavisno promenljive izražavaju kao jedinični proticaji duž (ξ, η) pravaca. Uz uzimanje uticaja advекcije, u drugom koraku rešavaju se difuzni članovi dinamičkih jednačina koji izražavaju uticaj tangencijalnih napona na lokalnu promenu količine kretanja duž (ξ, η) pravaca :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})^d}{\partial t} &= \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h v_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h v_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h v_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h v_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \\ &- \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h v_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h v_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h v_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h v_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] \\ \frac{\partial(h\bar{v})^d}{\partial t} &= \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h v_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h v_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h v_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h v_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \\ &- \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h v_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h v_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h v_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h v_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

gde po analogiji indeks d označava komponente brzine dobijene na kraju koraka difuzije. Kako se može primetiti iz izraza (4.2), difuzni korak ne obuhvata smičuće napone na površini vodnog ogledala i na rečnom dnu, već se oni vežu za poslednju etapu u rešavanju jednačina toka. U

ovom trećem koraku - propagacija, uz primenu prethodno dobijenog strujnog polja (difuzija) rešava se kombinovana jednačina preostalih članova dinamičke jednačine duž krivolinijskih (ζ, η) pravaca (članovi pritiska, težine i napona trenja na rečnom dnu i površini vodnog ogledala) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} &= \frac{gh}{J^2} \left[-\frac{\partial Z_v}{\partial \xi} G_{22} + \frac{\partial Z_v}{\partial \eta} G_{12} \right] - \left[C_\tau \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 G_{11} + 2\bar{u}\bar{v} G_{12} + \bar{v}^2 G_{22}} \right]^d + \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\tau_{sy}}{\rho}, \\ \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} &= \frac{gh}{J^2} \left[-\frac{\partial Z_v}{\partial \eta} G_{11} + \frac{\partial Z_v}{\partial \xi} G_{12} \right] - \left[C_\tau \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 G_{11} + 2\bar{u}\bar{v} G_{12} + \bar{v}^2 G_{22}} \right]^d - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\tau_{sx}}{\rho} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\tau_{sy}}{\rho}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

i jednačine kontinuiteta :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (Jh\bar{u}) \right] + \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (Jh\bar{v}) \right] = 0. \quad (4.4)$$

Diskretizovane dinamičke jednačine (izraz 4.3) zamenjuju se u jednačinu kontinuiteta (izraz 4.4), koja se zatim rešava po nepoznatoj koti vodnog ogledala. Na osnovu ovako dobijenih vrednosti nivoa (dubina), sada se povratno rešavanjem dinamičkih jednačina konačno određuju nepoznate komponente brzine (jedinični proticaji) za naredni računski vremenski trenutak.

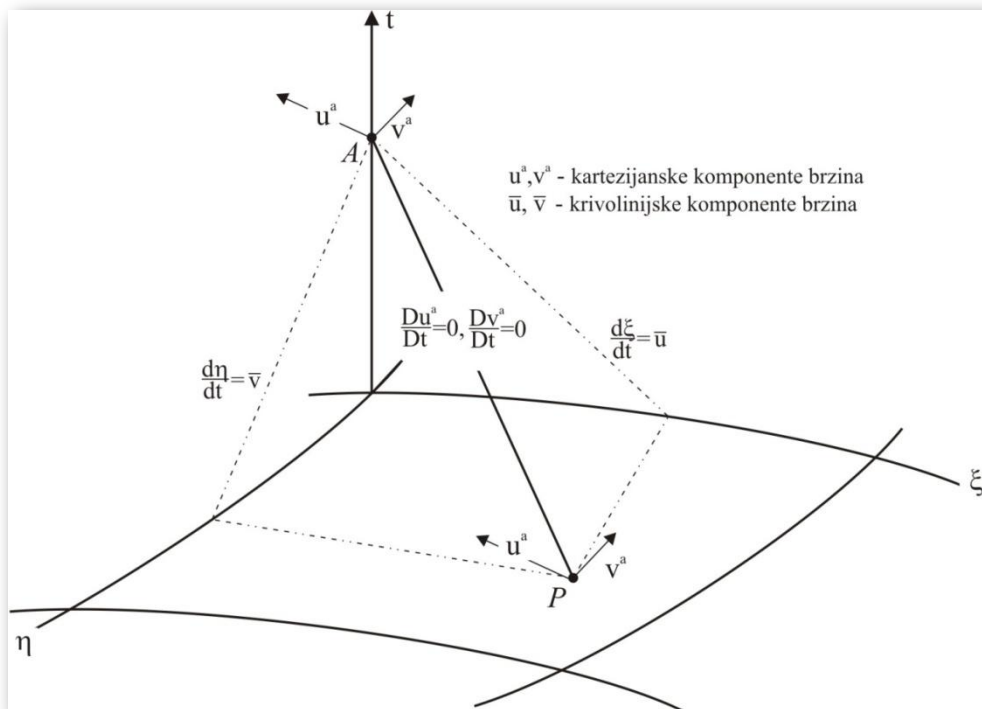
4.1.2. Advekcija

Transformisanjem *Reynolds*-ovih jednačina osrednjenih po dubini u krivolinijski (ζ, η) koordinatni sistem, rešavanje sistema jednačina toka se “prebacuje” u pravougaonu računsku oblast, uz određene transformacije pojedinih članova. Kao što je rečeno u prethodnom poglavlju izbor tipa transformacije (kompletna ili delimična) uslovljen je prvenstveno matematičkim karakterom članova, odnosno optimalnom numeričkom metodom (postupak koji najbolje odgovara matematičkoj strukturi jednačine) koja će se koristiti za njihovo modeliranje. Kako je advektivni korak najosetljiviji i najznačajniji deo proračuna strujanja (jer se u preostale dve etape vrši samo korekcija dobijenih rezultata), izbor numeričkog modela za njegovo rešavanje je presudan za kvalitet krajnjeg rezultata. Ako se ima u vidu da primena postupka *etapnog rešavanja* jasno definiše hiperbolički diferencijalni operator prve etape - advekcije, za modeliranje advektivnog člana usvojiće se implicitna varijanta *Metode karakteristika* kao numerička metoda sa najvećim stepenom pouzdanosti kako sa stanovišta veštačke (numeričke) difuzije i tačnosti rešenja, tako i u pogledu numeričke stabilnosti. Ova metoda u osnovi formuliše

materijalni izvod zavisno promenljive (brzine) duž familije određenih karakterističnih linija (trajektorija). Iz tog razloga metoda uslovljava delimični postupak za transformaciju člana advekcije, koji transformisan u krivolinijski koordinatni sistem i napisan u formi *Lagrange*-ovog pristupa ima oblik :

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du^a}{Dt} = 0 \\ \frac{Dv^a}{Dt} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ duž trajektorija } \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} u^a + \frac{\partial \xi}{\partial y} v^a = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} u^a - \frac{\partial x}{\partial \eta} v^a \right) \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} u^a + \frac{\partial \eta}{\partial y} v^a = \frac{1}{J} \left(-\frac{\partial y}{\partial \xi} u^a + \frac{\partial x}{\partial \xi} v^a \right) \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

Pristup na kome se bazira Metoda karakteristika podrazumeva da je advektivna promena količine kretanja izabranog fluidnog delića, koji se kreće (za razliku od fiksne tačke u kojoj se prati promena - metoda konačnih razlika) duž karakterističnih linija, jednaka nuli, odnosno formulisano izrazom (4.5), da je materijalni izvod kartezijskih komponenta brzine u^a i v^a duž krivolinijskih trajektorija $d\xi/dt$ i $d\eta/dt$ jednak nuli. Ako se ova formulacija dodatno pojednostavi može se reći da komponente brzina u^a i v^a duž definisanih trajektorija ostaju konstantne, pa se problem rešavanja strujnog polja svodi na određivanje funkcija trajektorija duž kojih se izabrana čestica kreće (Slika 4.1).



Slika 4.1 Interpretacija materijalnog izvoda kartezijskih komponenti brzina u krivolinijskoj računskoj oblasti

Za izabrani globalni vremenski korak Δt (usvojeni vremenski korak koji je jednak za sve tri etape) i definisanu pravougaonu računsku mrežu, jednačine trajektorija (izraz 4.5) se rešavaju numeričkom integracijom uz primenu implicitnog računskog postupka. Aproksimacijom parcijalnih izvoda konačnim priraštajima i potom primenom trapeznog postupka integracije, jednačine trajektorija duž krivolinijskih ξ i η pravaca dobijaju diskretizovani oblik :

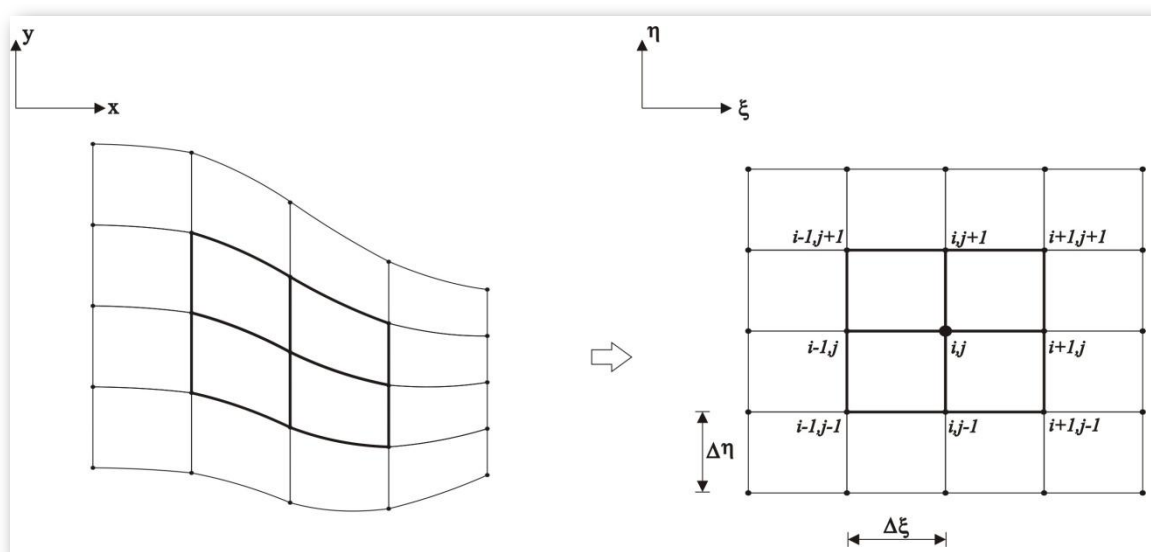
$$\Delta \xi^a = \xi_A - \xi_P = \frac{1}{J} \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\left((u^a) \frac{\Delta y}{\Delta \eta} - (v^a) \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_A + \left((u^a) \frac{\Delta y}{\Delta \eta} - (v^a) \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_P \right], \quad (4.6)$$

$$\Delta \eta^a = \eta_A - \eta_P = \frac{1}{J} \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\left(-(u^a) \frac{\Delta y}{\Delta \xi} + (v^a) \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_A + \left(-(u^a) \frac{\Delta y}{\Delta \xi} + (v^a) \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_P \right]. \quad (4.7)$$

U dobijenim izrazima komponente brzine u^a i v^a predstavljaju vrednosti kartezijanskih brzina, dok se diskretizacija geometrijskih izvoda na računskoj mreži (Slika 4.2) vrši metodom aproksimacije izvoda konačnim razlikama prvog reda :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j} &= \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{\Delta \xi}, & \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j} &= \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta \xi}, \\ \left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} &= \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\Delta \eta}, & \left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} &= \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\Delta \eta}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

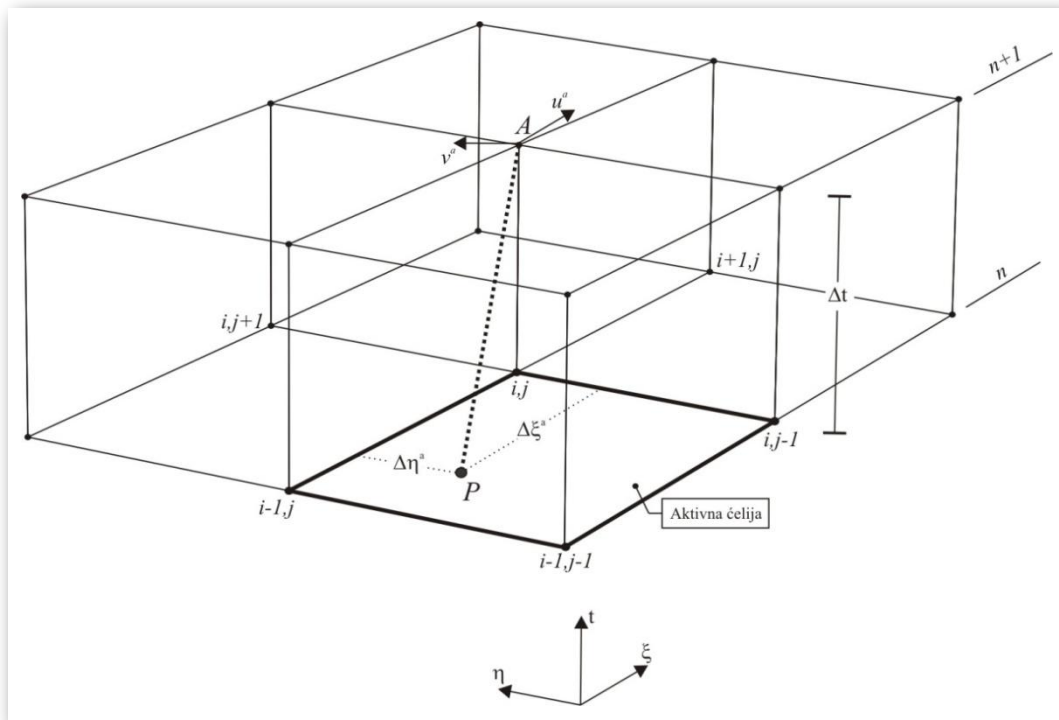
Radi jednostavnosti diskretizacije za prostorne korake uzimaju se vrednosti $\Delta \xi = 1$ i $\Delta \eta = 1$.



Slika 4.2 Detalj računске ćelije prikazan na krivolinijskoj mreži fizičke oblasti i ekvivalentnoj računskoj mreži

Određivanjem geometrijskih izvoda sada postaje moguće formulisanje procedure za proračun jednačina trajektorija, odnosno advektivnih prostornih priraštaja $\Delta\xi^a$ i $\Delta\eta^a$.

Kako je sistem jednačina (4.5) implicitnog karaktera, proračun strujnog polja za naredni (nepoznati) vremenski trenutak vrši se iterativnim postupkom koji će se opisati kroz dva računsa koraka. U prvom koraku za nepoznate brzine u^a i v^a u tački A na vremenskom nivou $n+1$ (Slika 4.3) pretpostavljaju se vrednosti sa prethodnog vremenskog trenutka n , za koje se zatim po diskretizovanim jednačinama trajektorije (4.6) i (4.7) računaju prostorni priraštaji $\Delta\xi^a$ i $\Delta\eta^a$. Ovi priraštaji, koji predstavljaju komponente trajektorije fluidnog delića za vremenski korak Δt , određuju tačku preseka P trajektorije sa prethodnim vremenskim nivoom. Definisanjem ove tačke preseka, u drugom koraku prostornom interpolacijom između četiri granične tačke (aktivna ćelija) određuje se vrednost komponenti brzina u^a i v^a u tački P , koje se zatim koristeći jednačinu materijalnog izvoda (4.5) jednostavno transliraju („prebacuju“) u tačku A , zamenjujući tako početne-pretpostavljene vrednosti. Za interpolacione izraze koristi se polinom drugog reda, koji se sa stanovišta tačnosti interpolovanog rešenja i broja računskih tačaka potrebnih za intrepolaciju pokazao kao optimalan interpolacioni izraz. Dobijanjem

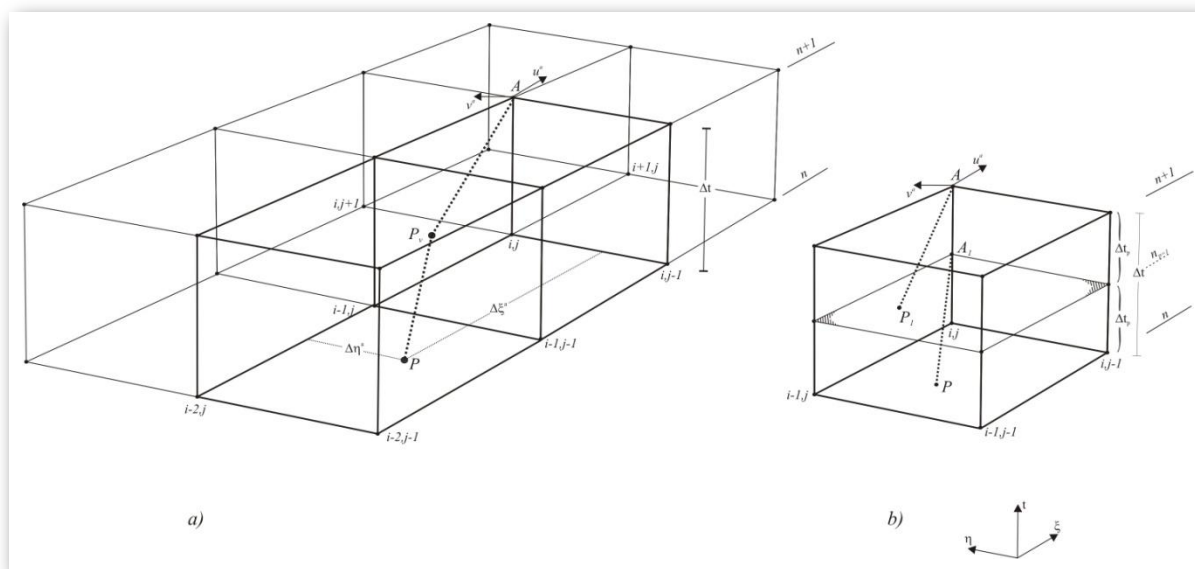


Slika 4.3 Diskretizacija karakteristika (trajektorija)

novih brzina u tački A , prvobitno pretpostavljena trajektorija sada menja svoj prostorni položaj, zbog čega je u drugoj iteraciji potrebno odrediti novu putanju fluidne čestice koristeći dobijene vrednosti brzina. U daljem postupku kompletna procedura se ponavlja, sve dok se interpolovane

vrednosti komponenta brzine sa poznatog vremenskog nivoa (tačka P) ne izjednače sa pretpostavljenim brzinama na narednom vremenskom nivou (tačka A). Kad se za tačku A postigne ovaj uslov, proračun se završava, a rešavanje jednačina trajektorije pomera na sledeću računsku tačku.

Metoda karakteristika je u osnovi bezuslovno stabilna numerička šema, što podrazumeva da model nema prostornog i vremenskog ograničenja. Linije trajektorija se u zavisnosti od prostorne orijentacije pružaju sve do preseka sa poznatom vremenskom ravni, gde se vrednosti nepoznatih kako je ranije opisano, određuju interpolacijom. Vremenski i prostorni korak u ovom slučaju nemaju uticaj na tačnost numeričkog rešenja, već ona zavisi isključivo od stepena prostorne interpolacije. Da bi model mogao da zadovolji ove uslove stabilnosti, potrebno je da strujno polje bude unapred poznato kako na prethodnom, tako i na narednom vremenskom trenutku, odnosno da linije karakteristika ne zavise od nepoznatih zavisno promenljivih veličina (transport koncentracije suspendovanog nanosa ili stepena zagađenja). Pošto u slučaju advektivne promene količine kretanja trajektorija fluidnog delića direktno zavisi od nepoznatih brzina, prostorno vremenski položaj karakteristika ograničen je time da trajektorija mora da seče prethodni nivo u okviru *aktivne ćelije* (Slika 4.3), odnosno da ni pod kojim uslovima ne sme da prolazi kroz granične vertikalne ravni (Slika 4.4a).



Slika 4.4 Položaj karakteristika u zavisnosti od Courant-ovog broja :

a) slučaj kada je $C_r > 1$; b) transformacija trajektorije uz uslov da je $C_r \leq 1$

Ovaj uslov ispunjen je isključivo ukoliko Courant-ov broj C_r kao parametar stabilnosti zadovoljava sledeću nejednakost :

$$C_r \left(\frac{\bar{u}}{(\Delta\xi/\Delta t)}, \frac{\bar{v}}{(\Delta\eta/\Delta t)} \right) \leq 1. \quad (4.9)$$

Međutim, problem nastaje ukoliko je *Courant*-ov broj veći od jedinice. U tom slučaju karakteristike seku zidove aktivne ćelije, zbog čega na prostorni položaj trajektorije (izrazi (4.6) i (4.7)) pored brzina iz tačaka P i A utiču i brzine iz interpolovane tačke P_v (Slika 4.4a). Ono što se ovde javlja kao problematični korak jeste sama interpolacija čvora P_v , koja pored poznatih računskih tačaka na vremenskom nivou n uključuje sada i one sa narednog vremenskog nivoa. Kako u zavisnosti od uslova tečenja i smera proračuna nepoznate brzine u ovim tačkama ne moraju biti izračunate pre definisanja brzina u tački A (povratno strujanje), interpolacija u ovoj vertikalnoj ravni, a time i određivanje položaja trajektorije postaje praktično nemoguće. Takođe, kao dodatna poteškoća javlja se slučaj čvrste granice, gde se kao granični uslov može uzeti da su obe komponente brzine jednake nuli. Da bi se ovaj problem *Courant*-ovog broja prevazišao, uvodi se postupak za transformaciju dobijenih karakterističnih linija, gde se poštovanjem graničnog uslova stabilnosti da je $C_r \leq 1$ svaka od dobijenih karakteristika transformiše u više zasebnih pojedinačnih trajektorija (Slika 4.4b). Procedura se suštinski bazira na rastavljanju globalnog vremenskog koraka Δt (određeni prostorni koraci $\Delta\xi$ i $\Delta\eta$) na set određenih *podnivoa* $n_1, n_2, n_p, \dots, n_k$, uz uslov da maksimalna krivolinijska komponenta brzine zadovoljava numeričku stabilnost formulisanu izrazom :

$$C_r^{\max} \left(\frac{\bar{u}_{\max}}{(\Delta\xi/\Delta t_p)}, \frac{\bar{v}_{\max}}{(\Delta\eta/\Delta t_p)} \right) < 1. \quad (4.10)$$

Usvajanjem vremenskog podkoraka Δt_p na osnovu izraza (4.10), proračun strujnog polja za prvi n_1 vremenski podnivo ($n_1 = n + \Delta t_p$) vrši se rešavanjem jednačina (4.6) i (4.7) na isti način kao što je to prethodno opisano (iterativni postupak), s'tim što u ovom slučaju karakteristika zasigurno ostaje u okviru aktivne ćelije (ćelije u kojoj se proračun trenutno vrši) i preseca samo prethodni vremenski podnivo (tačka P_1). Dobijeno strujno polje na nivou n_1 predstavlja sada početno (pretpostavljeno) stanje za proračun sledećeg podnivoa, čija se vremenska kota dobija po formuli $n_p = n_{p-1} + \Delta t_p$ ($p=1, 2, \dots, k$). U momentu kada se dostigne naredni vremenski nivo $n+1 = n+k\Delta t_p$ proračun se zaustavlja, a rešavanje člana advekcije za globalni vremenski korak Δt se završava.

Formiranje podnivoa u okviru jednog globalnog vremenskog koraka predstavlja postupak koji

je posledica tačnosti numeričkog modela i pravilnog definisanja računskih karakteristika, bez ikakvog uticaja granične stabilnosti kao ograničavajućeg faktora (metoda konačnih razlika). Njihovim uvođenjem u proračun jednačine materijalnog izvoda rešavaju se interpolacijom veličina isključivo sa poznate vremenske ravni, dok se numerička greška redukuje na najmanju moguću vrednost. Iz tog razloga primena ovakvog pristupa kod modeliranja advekcije implicitnom metodom karakteristika otvara mogućnost rešavanja hidraulički složenih i računski zahtevnih uslova tečenja (oštra čela, strujanje nastalo kao posledica naglih promena u geometriji toka), uz izuzetno visok stepen tačnosti i pouzdanosti numeričkog modela.

➤ *Interpolacija*

Kako je poznato da postupak linearne interpolacije nepoznatih vrednosti unosi izvestan stepen numeričke greške u sam proračun, kao interpolacioni postupak za određivanje vrednosti komponenata brzine u tački preseka P korištena je *QUICK* metoda - *Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics* (Leonard 1979). Formirana sa ciljem da objedini pozitivne i eliminiše negativne elemene najčešće korištenih šema (upstream i central differencing), odnosno da smanji numeričku grešku odstupanja i istovremeno poveća samu stabilnost advektivnog procesa, ova procedura je bazirana na interpolaciji nepoznatih vrednosti koristeći polinom drugog reda (parabola) uz strogu kontrolu prirode advekcije, odnosno smera toka. Nakon određivanja položaja tačke preseka P u okviru aktivne računске ćelije, u prvom prolazu se koristeći tri tačke sa poznatog vremenskog nivoa (za definisanje parabole potrebne su vrednosti sa tri računске tačke) određuju nepoznate komponente brzine \bar{u} i \bar{v} duž tri uzastopne podužne ζ linije po izrazu (Ferziger i Perić 2002) :

$$\phi_P = \phi_U + g_1(\phi_N - \phi_U) + g_2(\phi_U - \phi_{UU}), \quad (*)$$

$$g_1 = \frac{(\xi_P - \xi_U)(\xi_P - \xi_{UU})}{(\xi_N - \xi_U)(\xi_N - \xi_{UU})}; \quad g_2 = \frac{(\xi_P - \xi_U)(\xi_N - \xi_P)}{(\xi_U - \xi_{UU})(\xi_N - \xi_{UU})}. \quad (**)$$

U jednačini (*) indeks N označava prvi nizvodni čvor od tačke preseka, tj. za slučaj kada je $\bar{u} > 0$ tačku i (Slika 4.4b), zatim indeks U definiše prvi uzvodni čvor (tačka $i-1$ na slici 4.4b), dok indeks UU označava čvor uzvodno od tačke U (tačka $i-2$). Ukoliko duž ζ linije komponenta brzine pak promeni svoju orijentaciju ($\bar{u} < 0$), indeksi N , U i UU tada

postaju i , $i+1$ i $i+2$. Definisanjem interpolovanih vrednosti komponenta brzina duž ξ linije, u drugom prolazu se sada po istom principu vrši interpolacija u poprečnom pravcu, odnosno duž η pravca. Kao rezultat ovakvog pristupa konačno se dobijaju vrednosti komponenta brzina interpolovanih u tački preseka P koje su sada u potpunosti u skladu sa lokalnim smerom toka (advektivnim karakteristikama struje), i koje su u cilju povećanja tačnosti sračunate koristeći kvadratnu aproksimaciju polja uticaja. Na ovaj način je uz minimalan dodatni računski napor (za razliku od linearne interpolacije koja koristi dve računске tačke *QUICK* metoda koristi tri računska čvora) postignut visok stepen tačnosti i stabilnosti primenjene šeme, što nesumnjivo doprinosi efikasnosti i stabilnosti daljeg toka proračuna.

➤ *Početni uslov*

Advektivni korak, koji ujedno predstavlja i prvu etapu u proračunu jednačina ravanskog toka, kao početni uslov koristi poznato strujno polje formulisano funkcijama $u(\xi, \eta, t_0)$ i $v(\xi, \eta, t_0)$. Ono može biti definisano ili kao nulto stanje, gde se za obe komponente brzine uzima da su jednake nuli, ili kao već određeno strujno polje sa poznatim vrednostima brzina.

➤ *Granični uslov*

Hiperbolička struktura advektivnih jednačina nameće potrebu za graničnim uslovom samo na uzvodnom kraju razmatrane oblasti, koji shodno sistemu jednačina (4.5) ima oblik vremenskih funkcija $u=u(\xi_g, \eta_g, t)$ i $v=v(\xi_g, \eta_g, t)$.

4.1.3. Difuzija

Difuzija, član koji se rešava u drugoj etapi, u osnovi predstavlja doprinos dejstva tangencijalnih napona u ukupnoj promeni količine kretanja. Ovaj uticaj smičućih napona opisuje se sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina koje nakon prevođenja u krivolinijski (ξ, η) koordinatni sistem dobijaju oblik :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})^d}{\partial t} = & \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \\ & - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{v})^d}{\partial t} = & \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \\ & - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right] + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u}^a + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}^a \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Poštujući pravilo superpozicije, transformisani sistem jednačina (4.11) i (4.12) rešava se na osnovu prethodno dobijenog „advektivnog“ strujnog polja, koje sada u proračunu koraka difuzije dobija ulogu početnog stanja. Na ovaj način struja se praktično koriguje uticajima smičućih napona, što kao rezultat daje polje brzina koje je posledica zbirnog dejstva advekcije i difuzije.

Kao i u prethodnom slučaju advekcije, izbor numeričkog modela prvenstveno zavisi od njegove matematičke strukture, gde on istovremeno mora da zadovolji kako uslove numeričke stabilnosti i tačnosti, tako i da postigne visoku pouzdanost i efikasnost u modeliranju tečenja otvorenih tokova. Imajuću u vidu ove uslove i parbolički karakter samog difuznog člana, kao optimalni numerički postupak za njegovo rešavanje koristiće se *Metoda konačnih razlika* uz primenu *Crank-Nicholson*-ove šeme. Bazirana na pretpostavci o linearnoj promeni zavisno

promenljivih veličina duž elementarnih rastojanja, ova metoda aproksimira izvode konačnim razlikama (postoji više vrsta aproksimacija gde svaka od njih predstavlja jednu „numeričku šemu“), transformišući na taj način diferencijalne jednačine u algebarske izraze, koji se zatim rešavaju odgovarajućim računskim metodama.

Ako se zavisno promenljive u jednačinama (4.11) i (4.12) izraze u funkciji krivolinijskih jediničnih proticaja $\bar{U} = \bar{u}h$ i $\bar{V} = \bar{v}h$, a zatim njihovi izvodi aproksimiraju oko računске tačke i, j (Slika 4.2) delimičnom *Crank-Nicholson*-ovom šemom :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \cong \theta \cdot \left(\frac{f_{i+1,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi^2} \right) + (1-\theta) \cdot \left(\frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{\Delta \xi^2} \right), \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \cong \theta \cdot \left(\frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta^2} \right) + (1-\theta) \cdot \left(\frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{\Delta \eta^2} \right), \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \cong \frac{(f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n - f_{i-1,j}^n + f_{i-1,j-1}^n)}{\Delta \xi \Delta \eta}, \quad (4.16)$$

kao rezultat dobijaju se sledeći algebarski izrazi :

$$\begin{aligned} & \bar{U}_{i,j}^d \cdot A_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j}^d \cdot B1k_{i,j}^n + \bar{U}_{i-1,j}^d \cdot C1k_{i,j}^n + \bar{U}_{i+1,j}^d \cdot D1k_{i,j}^n + \\ & + \bar{V}_{i,j}^d \cdot F1k_{i,j}^n + \bar{V}_{i-1,j}^d \cdot G1k_{i,j}^n + \bar{V}_{i+1,j}^d \cdot H1k_{i,j}^n + \\ & + \bar{U}_{i,j}^d \cdot B2k_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j-1}^d \cdot C2k_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j+1}^d \cdot D2k_{i,j}^n + \\ & + \bar{V}_{i,j}^d \cdot F2k_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j-1}^d \cdot G2k_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j+1}^d \cdot H2k_{i,j}^n = \\ & = Ik_{i,j}^a, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & \bar{V}_{i,j}^d \cdot A_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j}^d \cdot B1e_{i,j}^n + \bar{U}_{i-1,j}^d \cdot C1e_{i,j}^n + \bar{U}_{i+1,j}^d \cdot D1e_{i,j}^n + \\ & + \bar{V}_{i,j}^d \cdot F1e_{i,j}^n + \bar{V}_{i-1,j}^d \cdot G1e_{i,j}^n + \bar{V}_{i+1,j}^d \cdot H1e_{i,j}^n + \\ & + \bar{U}_{i,j}^d \cdot B2e_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j-1}^d \cdot C2e_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j+1}^d \cdot D2e_{i,j}^n + \\ & + \bar{V}_{i,j}^d \cdot F2e_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j-1}^d \cdot G2e_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j+1}^d \cdot H2e_{i,j}^n = \\ & = Ie_{i,j}^a. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Odgovarajući koeficijenti prikazani u Apendiksu A.

Na levoj strani dobijenih izraza, obeležene indeksom d , ispisane su sve nepoznate zavisno promenljive veličine u okolini računске tačke i,j koje množe koeficijenti sa vremenskog nivoa n (koeficijenti pored geometrijskih izvoda i viskoznosti sadrže i dubinu koja se kroz advektivni korak ne menja), dok se grupisani u koeficijent I na desnoj strani nalaze promenljive čije su vrednosti uzete iz prethodnog računskog koraka (advekcije). Ono što se može primetiti iz jednačina (4.17) i (4.18) je to da delimična *Crank-Nicholson*-ova šema mešovite izvode aproksimira koristeći vrednosti samo sa poznatog vremenskog nivoa (izraz 4.16), zbog čega se u ovim jednačinama ne pojavljuju nepoznate sa krajeva računskog molekula ($i-1,j-1$), već se proračun isključivo zadržava duž računskih pravaca koji se ukrštaju u tački i,j . Cilj ovakve „uprošćene“ aproksimacije mešovitih izvoda jeste dobijanje pogodnog oblika jednačina za rešavanje metodom *ADI* (*Alternate-Direction-Implicit*), postupkom najčešće primenjivanim kada se radi o dvodimenzionalnim diferencijalnim jednačina paraboličnog tipa (Ames 1977). Osnovno svojstvo ove metode jeste razdvajanje proračuna na računске pravce, tako što se u prvom polukoraku proračun obavlja samo duž jednog, npr. ξ pravca, uz tretiranje svih ostalih veličina kao poznate, da bi se zatim u drugom polukoraku dobijene vrednosti praktično korigovale rešavanjem jednačina duž drugog η -pravca. Primenom ovog principa na izraze (4.17) i (4.18) dobijaju se odgovarajući sistemi jednačina duž računskih pravaca :

- ξ -pravac

$$\begin{aligned} & \bar{U}_{i,j}^{m+1/2} \cdot (A_{i,j}^n + B1k_{i,j}^n) + \bar{U}_{i-1,j}^{m+1/2} \cdot C1k_{i,j}^n + \bar{U}_{i+1,j}^{m+1/2} \cdot D1k_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j}^{m+1/2} \cdot F1k_{i,j}^n + \bar{V}_{i-1,j}^{m+1/2} \cdot G1k_{i,j}^n + \bar{V}_{i+1,j}^{m+1/2} \cdot H1k_{i,j}^n = \\ & = Ik_{i,j}^a - \left(\begin{aligned} & \bar{U}_{i,j}^m \cdot B2k_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j-1}^m \cdot C2k_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j+1}^m \cdot D2k_{i,j}^n + \\ & \bar{V}_{i,j}^m \cdot F2k_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j-1}^m \cdot G2k_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j+1}^m \cdot H2k_{i,j}^n \end{aligned} \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} & \bar{V}_{i,j}^{m+1/2} \cdot (A_{i,j}^n + F1e_{i,j}^n) + \bar{U}_{i,j}^{m+1/2} \cdot B1e_{i,j}^n + \bar{U}_{i-1,j}^{m+1/2} \cdot C1e_{i,j}^n + \bar{U}_{i+1,j}^{m+1/2} \cdot D1e_{i,j}^n + \bar{V}_{i-1,j}^{m+1/2} \cdot G1e_{i,j}^n + \bar{V}_{i+1,j}^{m+1/2} \cdot H1e_{i,j}^n = \\ & = Ie_{i,j}^a - \left(\begin{aligned} & \bar{U}_{i,j}^m \cdot B2e_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j-1}^m \cdot C2e_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j+1}^m \cdot D2e_{i,j}^n + \\ & \bar{V}_{i,j}^m \cdot F2e_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j-1}^m \cdot G2e_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j+1}^m \cdot H2e_{i,j}^n \end{aligned} \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

- η -pravac

$$\begin{aligned} \bar{U}_{i,j}^m \cdot (A_{i,j}^n + B2k_{i,j}^n) + \bar{U}_{i,j-1}^m \cdot C2k_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j+1}^m \cdot D2k_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j}^m \cdot F2k_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j-1}^m \cdot G2k_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j+1}^m \cdot H2k_{i,j}^n = \\ = Ik_{i,j}^a - \left(\bar{U}_{i,j}^{m+1/2} \cdot B1k_{i,j}^n + \bar{U}_{i-1,j}^{m+1/2} \cdot C1k_{i,j}^n + \bar{U}_{i+1,j}^{m+1/2} \cdot D1k_{i,j}^n + \right. \\ \left. + \bar{V}_{i,j}^{m+1/2} \cdot F1k_{i,j}^n + \bar{V}_{i-1,j}^{m+1/2} \cdot G1k_{i,j}^n + \bar{V}_{i+1,j}^{m+1/2} \cdot H1k_{i,j}^n \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{i,j}^m \cdot (A_{i,j}^n + F2e_{i,j}^n) + \bar{U}_{i,j}^m \cdot B2e_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j-1}^m \cdot C2e_{i,j}^n + \bar{U}_{i,j+1}^m \cdot D2e_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j-1}^m \cdot G2e_{i,j}^n + \bar{V}_{i,j+1}^m \cdot H2e_{i,j}^n = \\ = Ie_{i,j}^a - \left(\bar{U}_{i,j}^{m+1/2} \cdot B1e_{i,j}^n + \bar{U}_{i-1,j}^{m+1/2} \cdot C1e_{i,j}^n + \bar{U}_{i+1,j}^{m+1/2} \cdot D1e_{i,j}^n + \right. \\ \left. + \bar{V}_{i,j}^{m+1/2} \cdot F1e_{i,j}^n + \bar{V}_{i-1,j}^{m+1/2} \cdot G1e_{i,j}^n + \bar{V}_{i+1,j}^{m+1/2} \cdot H1e_{i,j}^n \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Indeksom m označen je broj iteracije. U prvom polukoraku iteracije $m=1$ rešava se prvo sistem jednačina (4.19) i (4.20) po nepoznatim veličinama grupisanim na levoj strani ($m+1/2$), dok se u drugom polukoraku iste iteracije rešavaju jednačine (4.21) i (4.22), gde se sada kao poznate koriste prethodno dobijene vrednosti zavisno promenljivih. U narednim iteracijama ($m=2, \dots, M$) kompletan postupak se ponavlja, sve dok granični kriterijumi definisani kao razlika jediničnih proticaja između dve uzastopne iteracije ne budu zadovoljeni. Kako koeficijenti jednačina (4.19-4.22) formiraju tridijagonalnu matricu, za rešavanje ovog sistema koristi se procedura „double-sweep“ (Carnahan, Luther and Wilkes 1969, Spasojević 1996, Jovanović 1998), koja je zbog svog obima detaljnije objašnjena na koraku propagacije u Apendiksu B.

➤ Početni uslov

Analizom jednačina (4.11) i (4.12) vidi se da rešavanje člana difuzije pored poznatog rasporeda brzina zahteva i poznavanje dubine vode duž računске deonice. Kako je ranije naglašeno, za početni raspored brzina difuznog koraka uzima se prethodno dobijeno „advektivno“ strujno polje, dok se za dubine koriste vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa (kota nivoa se ne menja tokom advektivnog koraka). Poznavajući sada ova dva parametra, kao početni uslov duž računске deonice zadaju se krivolinjske komponente vektora jediničnog proticaja u obliku prostornih funkcija $\bar{U} = \bar{U}(\xi, \eta, t_0^a)$ i $\bar{V} = \bar{V}(\xi, \eta, t_0^a)$.

➤ *Granični uslov*

Izrazi (4.11) i (4.12) po matematičkom karakteru predstavljaju jednačine parabolickog tipa, čije rešavanje zahteva poznavanje graničnih uslova na svim granicama, i to na uzvodnoj i nizvodnoj granici, kao i na samom kontaktu vode i čvrste granice. Granični uslovi na otvorenim granicama dele se uglavnom na dve grupe. Prvu grupu čine uslovi *Dirichlet*-ovog tipa, koji se zadaju u vidu poznatih vremenskih funkcija $\bar{U} = \bar{U}(\xi_g, \eta_g, t)$ i $\bar{V} = \bar{V}(\xi_g, \eta_g, t)$, dok drugu grupu čine uslovi *Neumann*-ovog tipa, koji se definišu kao izvodi zavisno promenljivih u vidu flukseva $q_{\xi_g} = \partial\bar{U}/\partial\xi$ i $q_{\eta_g} = \partial\bar{U}/\partial\eta$. Uslovi iz prve grupe najčešće se vežu za uzvodnu (ulaznu) granicu, dok se za izlaznu graničnu liniju kao pogodniji koriste uslovi iz druge grupe, i to u obliku nultih izvoda $\partial\bar{U}/\partial\xi = 0.0$ i $\partial\bar{V}/\partial\eta = 0.0$ (uslov „slobodnog prenosa“). Ukoliko se radi o čvrstoj konturi granični uslov se može zadati kao nulti jedinični proticaj, koji u prvom slučaju mogu da budu samo vektori upravni na konturu („*slip condition*“), dok se u drugom slučaju može uzeti da su obe komponente vektora jedničnog proticaja uz čvrstu granicu jednaki nuli („*no-slip condition*“).

4.1.4. *Propagacija*

Kao poslednja etapa u modeliranju transformisanih jednačina toka rešava se jednačina kontinuiteta (izraz 4.4) kombinovana sa preostalim članovima dinamičkih jednačina - član pritiska, težine i smičućih napona na rečnom dnu, čiji se uticaj na ukupnu promenu količine kretanja opisuje izrazima (4.3). Kako je ranije rečeno, ovakvo „kombinovanje“ ima za cilj dobijanje izraza vezanog za dubinu kao zavisno promenljivu veličinu, s obzirom na to da se dve dinamičke jednačine vežu prvenstveno za komponente brzine (jedinični proticaji). Na ovaj način modifikovana jednačina kontinuiteta praktično koriguje prethodno dobijeno strujno polje (difuzija), uz istovremeno održavanje kontinuiteta struje.

Da bi zamena izraza (4.3) u jednačinu kontinuiteta (izraz 4.4) bila moguća, potrebno je prvo izvršiti njihovu vremensku diskretizaciju. Ako se zanemare tangencijalni naponi na površini vode (τ_s) i uvede jedinični proticaj kao zavisno promenljiva veličina, vremenska diskretizacija preostalih članova dinamičke jednačine (ξ i η pravac) i jednačine kontinuiteta primenom *Crank-Nicholson*-ove šeme daje sledeće izraze :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^d}{\Delta t} &= \frac{g}{J^2} (\theta h^{n+1} + (1-\theta)h^n) \cdot \\ &\cdot \left\{ -G_{22} \left[\theta \left(\frac{\partial Z_v}{\partial \xi} \right)^{n+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial Z_v}{\partial \xi} \right)^n \right] + G_{12} \left[\theta \left(\frac{\partial Z_v}{\partial \eta} \right)^{n+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial Z_v}{\partial \eta} \right)^n \right] \right\} - \\ &- (\theta \bar{U}^{n+1} + (1-\theta)\bar{U}^d) \cdot \frac{C_\tau}{(h^2)^n} \left(\sqrt{\bar{U}^2 G_{11} + 2\bar{U}\bar{V}G_{12} + \bar{V}^2 G_{22}} \right)^d, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}^{n+1} - \bar{V}^d}{\Delta t} &= \frac{g}{J^2} (\theta h^{n+1} + (1-\theta)h^n) \cdot \\ &\cdot \left\{ -G_{11} \left[\theta \left(\frac{\partial Z_v}{\partial \eta} \right)^{n+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial Z_v}{\partial \eta} \right)^n \right] + G_{12} \left[\theta \left(\frac{\partial Z_v}{\partial \xi} \right)^{n+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial Z_v}{\partial \xi} \right)^n \right] \right\} - \\ &- (\theta \bar{V}^{n+1} + (1-\theta)\bar{V}^d) \cdot \frac{C_\tau}{(h^2)^n} \left(\sqrt{\bar{U}^2 G_{11} + 2\bar{U}\bar{V}G_{12} + \bar{V}^2 G_{22}} \right)^d, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} + \frac{1}{J} \left[\theta \frac{\partial}{\partial \xi} (J\bar{U})^{n+1} + (1-\theta) \frac{\partial}{\partial \xi} (J\bar{U})^n \right] + \\ + \frac{1}{J} \left[\theta \frac{\partial}{\partial \eta} (J\bar{V})^{n+1} + (1-\theta) \frac{\partial}{\partial \eta} (J\bar{V})^n \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Analogno prethodnim etapama, leva strana izraza (4.23) i (4.24) predstavlja diskretizovanu lokalnu promenu količine kretanja, pri čemu se za poznate jedinične proticaje sa prethodnog računskog nivoa uzimaju vrednosti dobijene u koraku difuzije (promenljive označene indeksom d). Na desnoj strani nalaze se osrednjeni po vremenu nagibi pijezometarske kote i smičući naponi na rečnom dnu, gde su, kako je ranije navedeno, članovi koji sadrže dubinu osrednjeni između narednog i prethodnog vremenskog nivoa (θ koeficijent). Ovo je isključivo posledica konstantne dubine tokom prethodne dve računске etape (advekcija i difuzija). Sličan postupak primenjen je i pri diskretizaciji jednačine kontinuiteta (izraz 4.25), s'tim što se za razliku od dinamičke jednačine ovde kao poznato strujno polje uzimaju vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa n (a ne sa prethodnog računskog koraka).

Zamenom kote nivoa (Z_v) u jednačine (4.23) i (4.24) kao zbir kote dna (Z_d) i dubine vode (h), pijezometarski nagibi se rastavljaju na dva dodatna člana - pad dna i prostorni priraštaj dubine. Kako su dobijene jednačine nelinearne (po dubini h), njihovim razvijanjem u *Taylor*-ov red, uz zadržavanje samo članova prvog reda, dobija se linearizovani oblik izraza (4.23) i (4.24) izraženih u funkciji jediničnih proticaja \bar{U}^{n+1} i \bar{V}^{n+1} :

$$\bar{U}^{n+1} = \alpha_u \frac{\partial \Delta h}{\partial \xi} + \beta_u \Delta h + \gamma_u, \quad (4.26)$$

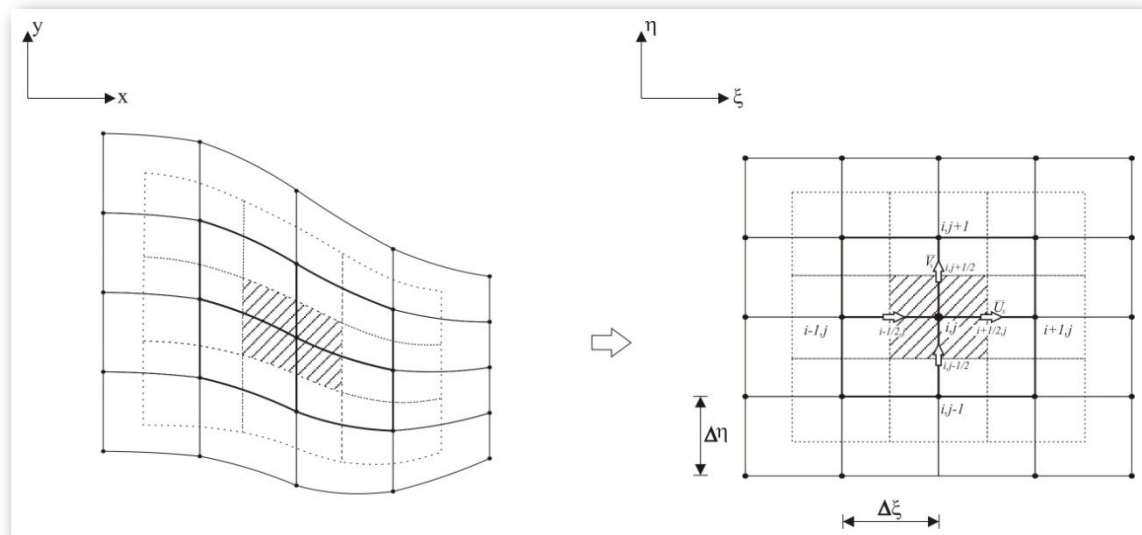
$$\bar{V}^{n+1} = \alpha_v \frac{\partial \Delta h}{\partial \eta} + \beta_v \Delta h + \gamma_v, \quad (4.27)$$

gde je $\Delta h = h^{n+1} - h^n$ (priraštaj dubine između dva vremenska nivoa), dok su koeficijenti α , β , i γ ispisani su u Apendiksu B. Ako se sada izrazi (4.26) i (4.27) uvrste u izraz (4.25), kao rezultat dobija se karakterističan oblik jednačine kontinuiteta u kojoj kao zavisno promenljiva veličina konfigurise vremenski priraštaj dubine Δh :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{\Delta t} + \frac{1}{J} \theta \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \left(\alpha_u \frac{\partial \Delta h}{\partial \xi} + \beta_u \Delta h + \gamma_u \right) \right] + \frac{1}{J} (1-\theta) \frac{\partial}{\partial \xi} [JU^n] + \\ + \frac{1}{J} \theta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \left(\alpha_v \frac{\partial \Delta h}{\partial \eta} + \beta_v \Delta h + \gamma_v \right) \right] + \frac{1}{J} (1-\theta) \frac{\partial}{\partial \eta} [JV^n] = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ovom transformacijom (postupak zasnovan na ideji „jednačine pritiska“) jednačina kontinuiteta se izražava u funkciji nepoznatog priraštaja Δh , koji zajedno sa dve komponente brzine vezane za dinamičke jednačine čini vektor od tri osnovne veličine po kojim se rešava ravanski tok.

Matematička struktura izraza (4.28) ukazuje na to da se ovde radi o parabolikom tipu jednačine koja za svoje rešavanje zahteva poznavanje graničnih uslova na svim granicama, i to kako na otvorenim graničnim linijama tako i na čvrstoj konturi. Na sličan način kao u prethodnom računskom koraku, gde je jednačina difuzije uslovljavala iste granične parametre, u ovoj etapi propagacije za optimalni numerički model koristiće se *Metoda konačnih razlika*, koja će se za razliku od prethodne etape primeniti na *smaknutoj* računskoj mreži. Ovaj tip mreže, kod koje se dubine računaju u osnovnim računskim tačkama dok su komponente brzine (jedinični proticaji) smaknute za polovinu računskog polja (Slika 4.5), ima za cilj prvenstveno izbegavanje pojave fizički nerealnih brzina i nivoa koji se mogu javiti ukoliko se njihovi prostorni gradijenti diskretizuju u „klasičnoj“ pravougaonoj mreži. Takođe, primenom smaknute računске mreže sama interpretacija transformisane jednačine kontinuiteta (izraz 4.28) postaje fizički realnija, što je i grafički prikazano na slici 4.5.



Slika 4.5 Detalj smaknute računске mreže

Oko računске tačke formira se kontrolna ćelija (šrafirani kvadrat na slici 4.5) čije stranice čine pravci smaknute mreže istih dimenzija kao i originalna pravougaona mreža, s'tim što su one prostorno pomerene za polovinu polja, i to jedna u ξ a druga u η pravcu. U ovim smaknutim računskim tačkama definišu se vektori jediničnih proticaja, gde se duž ξ pravca računa jedinični proticaj \bar{U}_s , dok se duž smaknutog η pravca računa druga komponenta proticaja \bar{V}_s . Kako ovi vektori predstavljaju prosečnu vrednost jediničnog proticaja za odgovarajuće elementarno rastojanje, promena dubine h nastale unutar kontrolne zapremine (prosečna vrednost dubine za tu zapreminu definiše se u računskoj tački i, j osnovne pravougaone mreže) isključivo je pod uticajem ovih smaknutih flukseva. Time proračun ne uključuje informacije o dubini i proticajima iz iste računске tačke, što je ujedno i najčešći uzrok nestabilnosti modela. Primenom smaknute mreže pojava numeričkih oscilacija se otklanja, dok sama diskretizacija prostornih nagiba dobija jasniji fizički smisao.

Imajući u vidu prethodno navedeno, diskretizacija transformisane jednačine kontinuiteta (4.28), uz određeno grupisanje članova, daje izraz sličan onima iz koraka difuzije (izrazi (4.17) i (4.18)) :

$$\begin{aligned}
 & b_{i,j} \Delta h_{i,j} + a1_{i,j} \Delta h_{i-1,j} + b1_{i,j} \Delta h_{i,j} + c1_{i,j} \Delta h_{i+1,j} + \\
 & + a2_{i,j} \Delta h_{i,j-1} + b2_{i,j} \Delta h_{i,j} + c2_{i,j} \Delta h_{i,j+1} = d_{i,j},
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

gde su koeficijenti b , $a1$, $b1$, $c1$, $a2$, $b2$, $c2$, kao i sam postupak rešavanja „double-sweep“ procedurom dati u Apendiksu B. Rešavanjem jednačine (4.29) kao rezultat dobijaju se priraštaji

dubine $\Delta h_{i,j}$, koji se zatim kao takvi uvrštavaju u jednačine (4.26) i (4.27). Rešavanjem ovog sistema jednačina po nepoznatim protocima konačno se dobijaju vrednosti jediničnih proticaja \bar{U}^{n+1} i \bar{V}^{n+1} za naredni vremenski trenutak $n+1$.

➤ *Početni uslov*

Za početni uslov izraz (4.29) koristi poznat prostorni raspored dubina $h(\xi, \eta, t_0)$ i jediničnih proticaja $\bar{U} = \bar{U}(\xi, \eta, t_0)$ i $\bar{V} = \bar{V}(\xi, \eta, t_0)$ duž cele računске oblasti.

➤ *Granični uslov*

Korak propagacije koristi granične uslove na svim granicama. Granični parametri na čvrstoj konturi zadaju se na isti način kao što je rađeno i u etapi difuzije, dok se za otvorene granice može koristiti varijacija od tri tipa graničnih uslova : poznata zavisnost jediničnog proticaja i vremena u obliku $\bar{U}^{n+1} = f(t^{n+1})$ i $\bar{V}^{n+1} = f(t^{n+1})$, zatim poznata funkcija nivograma $Z_v = f(t)$, kao i zavisnost jediničnog proticaja i nivoa definisana funkcijama $\bar{U} = f(Z_v)$ i $\bar{V} = f(Z_v)$. U prvom slučaju granični uslov na otvorenim granicama zadaje se zamenom leve strane izraza (4.26) i (4.27) poznatim zavisnostima $\bar{U}^{n+1} = f(t^{n+1})$ i $\bar{V}^{n+1} = f(t^{n+1})$:

$$f(t^{n+1}) = \alpha_u \frac{\partial \Delta h}{\partial \xi} + \beta_u \Delta h + \gamma_u, \quad (4.30)$$

$$f(t^{n+1}) = \alpha_v \frac{\partial \Delta h}{\partial \eta} + \beta_v \Delta h + \gamma_v, \quad (4.31)$$

dok se u drugom slučaju uslov definiše kao poznat priraštaj dubine :

$$\Delta h = Z_v(t^{n+1}) - Z_d^{n+1} - h^n. \quad (4.32)$$

Za treći slučaj graničnog uslova, gde se koristi transformisana Q - Z kriva u obliku $\bar{U} = f(Z_v)$ i $\bar{V} = f(Z_v)$, potrebno je pored zamene ovih zavisnosti u izraze (4.26) i (4.27) :

$$f(Z_v) = \alpha_u \frac{\partial \Delta h}{\partial \xi} + \beta_u \Delta h + \gamma_u, \quad (4.33)$$

$$f(Z_v) = \alpha_v \frac{\partial \Delta h}{\partial \eta} + \beta_v \Delta h + \gamma_v, \quad (4.34)$$

izvršiti i njihovu linearizaciju :

$$\alpha_u \frac{\partial \Delta h}{\partial \xi} + \beta_u \Delta h + \gamma_u = f(Z_v^n) + \left. \frac{\partial f}{\partial Z_v} \right|_{Z_v^n} \Delta h, \quad (4.35)$$

$$\alpha_v \frac{\partial \Delta h}{\partial \eta} + \beta_v \Delta h + \gamma_v = f(Z_v^n) + \left. \frac{\partial f}{\partial Z_v} \right|_{Z_v^n} \Delta h, \quad (4.36)$$

u kojoj su $\left. \frac{\partial f}{\partial Z_v} \right|_{Z_v^n}$ izvodi funkcije $f(Z_v)$ izračunati za prethodni vremenski nivo n .

4.2. Numeričko rešavanje nanosnih jednačina

Za numeričko modeliranje sistema nanosnih jednačina je kao i kod jednačina ravninskog toka presudna njihova matematička struktura. Kako su izrazi kojima se opisuju nanosni procesi uglavnom bazirani na empirijskim zavisnostima, jasna definicija matematičkog karaktera pojedinih jednačina sistema delimično je složenija nego što je to bio slučaj kod strujanja. Međusobna uska povezanost nanosnih procesa, kao i njihova direktna zavisnost od parametara strujanja, uzrokuju da matematička formulacija tipa nanosnih jednačina pored teorijske dobije i fizičko pokriće. Ovo podrazumeva da se jednačine pored matematičke analize posmatraju i sa stanovišta samog ponašanja nanosa, i to bilo da se radi o procesima kao što je transport nanosnog materijala duž toka (suspendovani ili vučeni nanos), ili pak njegovo vertikalno kretanje u vidu razmene između rečnog dna i toka. Pravilno i jasno određivanje karaktera ovh procesa u okviru jednačina sistema predstavlja osnovni preduslov za odabir optimalnog numeričkog modela koji će se primeniti za njegovo rešavanje.

Sistem kojim se opisuje ponašanje nanosa i morfološke promene na rečnom dnu sastavljen je od tri osnovne jednačine : jednačina održanja mase suspendovanog nanosa koja predstavlja klasičnu advektivno-difuznu jednačinu izraženu u funkciji bezdimenzionalne koncentracije C_k , zatim jednačina održanja mase aktivnog sloja na rečnom dnu kojom se opisuje promena zastupljenosti određenog granulometrijskog intervala u ukupnoj mešavini nanosa β_k , kao i globalna jednačina održanja mase kojom se određuje deformacija rečnog korita (promena kote dna Z_d) nastala usled kretanja nanosnog materijala. Njihova veza, koja se ogleda u direktnoj međusobnoj zavisnosti primarnih veličina (C_k, β_k, Z_d) ostvarenoj kroz zajedničke procese koji se u ovim jednačinama pojavljuju (članovi S_k, S_{p_k}), uslovljava simultani postupak kao proceduru koja će se primeniti za rešavanje ovog „nanosnog“ sistema. Pod pretpostavkom da promene u koti dna i granulometrijskom rasporedu nanosa na dnu ne utiču na dubinu i brzine vode između dva vremenska nivoa (vremenski korak je dovoljno mali), jednačine održanja mase suspendovanog nanosa i održanja mase aktivnog sloja rešavaju se po koncentraciji C_k , odnosno parametru zastupljenosti β_k za definisan broj granulometrijskih intervala ($k=1, \dots, K$), dok se globalna jednačina održanja mase rešava po nepoznatoj koti dna Z_d . Za hidrauličke parametre koji figurišu u nanosnim procesima koriste se prethodno dobijeni prostorni raspored brzina i dubina (vrednosti dobijene prethodnim rešavanjem jednačina toka) za tekući (n) i naredni ($n+1$) vremenski nivo. Na ovaj način proračun nanosnih promenljivih uključuje poznate hidrauličke uslove sa naredne (nepoznate) vremenske ravni, što sa jedne strane dodatno komplikuje sam proračun, ali sa druge znatno poboljšava tačnost dobijenih rezultata.

4.2.1. Numeričko rešavanje jednačine održanja mase suspendovanog nanosa primenom etapnog postupka

Ponašanje suspendovanog nanosa u otvorenim tokovima ravanskog tipa opisuje se jednačinom održanja mase osrednjenom po dubini (izraz 3.58), koja se može predstaviti kao klasična advektivno-difuzna jednačina. Ovakva formulacija tipa jednačine održanja mase suspendovanog nanosa, koja je proizašla iz same matematičke strukture izraza, ukazuje na to da je za njeno numeričko rešavanje, čiji je cilj prvenstveno visoka tačnost rezultata, potrebno primeniti dva različita numerička modela. Ovakav tretman kod modeliranja korišćen je ranije u slučaju advektivnih i difuznih članova dinamičkih jednačina, gde je iz tog razloga primenjen postupak *etapnog rešavanja* koji omogućuje zasebno modeliranje pojedinih članova u zavisnosti od njihovog matematičkog karaktera. S obzirom na prisutnu analogiju isti princip će se primeniti i kod rešavanja jednačine održanja mase suspendovanog nanosa, gde će se za modeliranje advektivnog člana transformisanog u krivolinijske koordinate (izraz 3.109) koristiti implicitna varijanta *Metode karakteristika*, dok će se za rešavanje transporta suspendovanog nanosa difuzijom (izraz 3.111) koristiti *Metoda konačnih razlika*, uz primenu *Crank-Nicholson-ove šeme*.

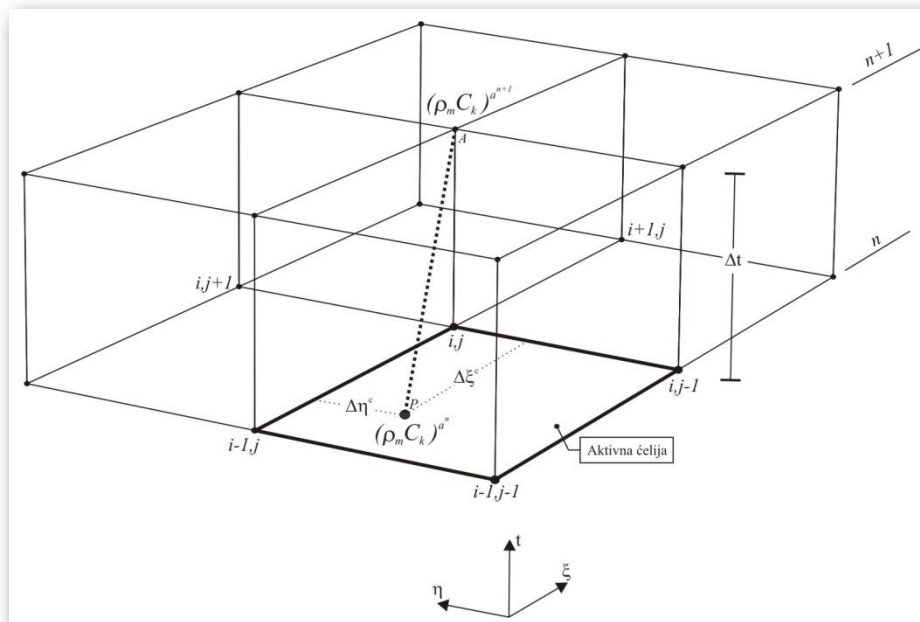
4.2.1.1. Advekcija - suspendovani nanos

Postupkom etapnog rešavanja, koji se zasniva na tezi susperpozicije lokalne promene zavisno promenljive veličine, jednačina održanja mase suspendovanog nanosa osrednjena po dubini rastavlja se na dva zasebna člana. Kao prvi član razmatraće se transport suspendovanog nanosa usled advekcije. Transformacijom ovog advektivnog člana u krivolinijski koordinatni sistem koristeći postupak delimične transformacije (izbor tipa transformacije zavisi od izabranog numeričkog modela), dolazi se do izraza koji ispisan u *Lagrange*-ovoj formi ima oblik :

$$\left. \frac{D(\rho_m C_k)^a}{Dt} = \frac{S_k}{h} \right\} \text{ duž trajektorija } \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial x} u + \frac{\partial \xi}{\partial y} v = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} u - \frac{\partial x}{\partial \eta} v \right) \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\partial \eta}{\partial y} v = \frac{1}{J} \left(-\frac{\partial y}{\partial \xi} u + \frac{\partial x}{\partial \xi} v \right) \end{cases} \quad (4.37)$$

Dobijenom jednačinom definiše se zakonitost da je vremenski priraštaj mase (po jedinici zapremine) suspendovanog materijala jednog granulometrijskog intervala (k) jednak neto masenom fluksu suspendovane materije tog granulometrijskog intervala S_k/h duž definisanih

karakteristika - trajektorija (Slika 4.6). Slobodni član S_k/h uzet je u obzir kod advektivnog dela jednačine održanja mase suspendovanog nanosa prvenstveno zbog dominantnog uticaja u odnosu na proces difuzije.



Slika 4.6 Diskretizacija karakteristika (trajektorija)

Kako postoji očigledna analogija između izraza (4.37) i jednačine advektivne promene količine kretanja (4.5), diskretizacija kao i sam postupak integracije obaviće se na način kako je to rađeno u Poglavlju 4.1.2. Aproksimacijom transformisanih geometrijskih izvoda konačnim razlikama i potom numeričkom integracijom između dva vremenska nivoa na osnovu poznatog polja brzina i dubina (poznata dubina h i komponente brzina u i v u vremenskim ravnima n i $n+1$), jednačina materijalnog izvoda mase suspendovanog nanosa, kao i odgovarajuće trajektorije duž krivolinijskih ξ i η pravaca dobijaju svoj diskretizovani oblik :

$$(\rho_m C_k)_A^{n+1} = (\rho_m C_k)_P^n + \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{S_k}{h} \right)_A^{n+1} + \left(\frac{S_k}{h} \right)_P^n \right], \quad (4.38)$$

$$\Delta \xi^c = \xi_A - \xi_P = \frac{I}{J} \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\left(u \frac{\Delta y}{\Delta \eta} - v \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_A^{n+1} + \left(u \frac{\Delta y}{\Delta \eta} - v \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_P^n \right], \quad (4.39)$$

$$\Delta \eta^c = \eta_A - \eta_P = \frac{I}{J} \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\left(-u \frac{\Delta y}{\Delta \xi} + v \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_A^{n+1} + \left(-u \frac{\Delta y}{\Delta \xi} + v \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_P^n \right], \quad (4.40)$$

gde je Δt usvojeni globalni vremenski korak (definisani u proračunu strujanja), dok prostorni koraci računске mreže formirane u advektivnom koraku strujanja (Slika 4.2) uzimaju vrednosti $\Delta \xi = 1$ i $\Delta \eta = 1$.

Dobijeni sistem jednačina rešava se implicitnom varijantom *Metode karakteristika* na sličan način kao što je to rađeno kod advektivne promene količine kretanja (Poglavlje 4.1.2.). Poznavajući prostorne rasporede brzina i dubina iz proračuna strujanja, u prvom koraku rešavaju se jednačine trajektorija, tj. izrazi 4.39 i 4.40, da bi se zatim u drugom koraku, na osnovu definisane karakteristike prikazane na slici 4.6, rešavala jednačina materijalnog izvoda (izraz 4.38). Sam postupak proračuna u prvom koraku podrazumeva iterativno određivanje priraštaja $\Delta \xi^e$ i $\Delta \eta^e$. U prvoj iteraciji se na osnovu poznatih komponenti brzina u tački A (u slučaju rešavanja advektivne promene količine kretanja ova vrednost se pretpostavljala) i onih interpolovanih za pretpostavljeni položaj tačke P računaju njihove početne vrednosti. Ovako dobijeni priraštaji definišu sada novi položaj tačke preseka trajektorije sa tekućim vremenskim nivoom n (tačka P), pa se prostornom interpolacijom u toj tački ponovo računaju vrednosti brzina i geometrijskih izvoda, koji istovremeno formiraju početno stanje za narednu iteraciju. Određivanjem novog položaja tačke P primenom odgovarajućeg interpolacionog postupka, kompletan postupak se ponavlja sve dotle dok razlika priraštaja između dve iteracije ne dostigne zadovoljavajuće malu vrednost. Kao rezultat proračuna dobija se prostorno određena karakteristika koja predstavlja geometrijski pravu liniju između narednog (tačka A) i tekućeg (tačka P) vremenskog nivoa.

U drugom koraku duž prethodno formirane trajektorije rešava se diskretizovana jednačina materijalnog izvoda mase suspendovanog nanosa (izraz 4.38), gde se pored nepoznate koncentracije jednog granulometrijskog intervala C_k razmatra i promena gustine mešavine vode i suspendovanog nanosa ρ_m (veličina koja se u većini slučajeva smatra za konstantu). Uvođenjem ovog parametra u proračun obuhvata se uticaj suspendovanog nanosa na gustinu vode, a sama transportna jednačina se analizira sa stanovišta mase nanosa (po jedinici zapremine definisane za elementarnu računsku ćeliju) koji se nalazi u suspenziji. Definisanjem gustine mešavine po izrazu (Zhou, McCorquodale 1992) :

$$\rho_m = \rho + C \left(1 - \frac{1}{s-1} \right), \quad (4.41)$$

(ρ - gustina čiste vode, C - koncentracija suspendovanog nanosa svih granulometrijskih intervala, s - relativna gustina nanosa na dnu), uz interpolaciju u tački P dubine h_p^n , koncentracije jednog

granulometrijskog intervala $C_{k_p}^n$ i neto masenog fluksa $S_{k_p}^n$, moguće je odrediti prvi i treći član na desnoj strani izraza (4.38). U slučaju drugog člana, kao nepoznata veličina pojavljuje se neto maseni fluks $S_{k_A}^{n+1}$ (dubina h^{n+1} poznata iz proračuna strujanja), koji se zbog pretpostavke o relativno sporij promeni koncentracije suspendovanog nanosa između dva vremenska trenutka može uzeti sa prethodnog vremenskog trenutka ($S_{k_A}^{n+1} = S_{k_A}^n$). Kompletiranjem desne strane izraza (4.38) sada se konačno može odrediti nepoznata masa suspendovanog nanosa u tački A $(\rho_m C_k)_A^{n+1}$, a time i nepoznati neto maseni fluks $S_{k_A}^{n+1}$, čime se proračun za određeni granulometrijski interval k u toj računskoj tački završava. Kompletan postupak se ponavlja za sve tačke računске oblasti i za celokupan definisani set granulometrijskih intervala ($k=1, \dots, K$).

Karakteristične linije koje predstavljaju trajektoriju duž kojih važi jednačina materijalnog izvoda suspendovanog nanosa, protežu se sve do preseka sa prethodnom računskom vremenskom ravni (n). Kako je navedeno u poglavlju 4.1.2, ukoliko Courant-ov broj zadovoljava uslov definisan izrazom (4.9) ova tačka preseka pozicionirana je unutar prve računске ćelije, odnosno ne dolazi do preseka karakteristike sa vertikalnim zidovima (ξ -t i η -t ravni) koji okružuju ćelije (Slika 4.6). Ukoliko ovaj uslov ipak nije zadovoljen, tada trajektorija nanosnog delića seče vertikalne zidove računskih zapremina, zbog čega tačka preseka sa prethodnim vremenskim nivoom može biti bilo gde, odnosno u bilo kojoj računskoj ćeliji (Slika 4.4). Kako se u tom slučaju javlja potreba za dodatnom interpolacijom nepoznatih veličina, uvode se u okviru jednog vremenskog intervala vremenski podnivoi. Primenujući izraz (4.10), globalni vremenski korak Δt deli se na određen broj podkoraka Δt_p , zbog čega formirane karakteristike zasigurno presecaju prethodnu vremensku ravan u prvoj aktivnoj ćeliji ($C_r < 1$). Kao što je ranije navedeno, ovakav postupak proračuna direktna je posledica toga što jednačine trajektorije (izrazi 4.39 i 4.40) sadrže, kao promenljive, komponente brzine koje su u slučaju advektivne promene količine kretanja bile ujedno i nepoznate zavisno promenljive veličine. Međutim, kod rešavanja advektivnog dela transportne jednačine suspendovanog nanosa prostorni raspored komponenti brzina poznat je za oba vremenska nivoa (tekući n i naredni $n+1$), pa se može reći da postupak koji uključuje formiranje podnivoa ovde nije neophodan, odnosno da se karakteristikama može dozvoliti i presecanje vertikalnih ravni kontrolnih zapremina ukoliko se za to stvore uslovi ($C_r > 1$). Time karakteristike postaju nezavisne od vremenskog koraka, a sam proračun se pored interpolacije u horizontalnoj ravni dodatno proširuje i na vertikalne ravni (tačka P_v na slici 4.4). Ipak, pored ispunjavanja strogih matematičkih uslova kao što su održanje stabilnosti i kontinuiteta rešenja, ono što se javlja kao negativna strana ovakvog vremenski

nezavisnog načina rešavanja *Metode karakteristika* je to da karakteristike imaju praktično neograničenu prostorno-vremensku dimenziju. Pod ovim se podrazumeva da se trajektorije u zavisnosti od vremenskog koraka mogu protezati kroz veći broj računskih ćelija, što paralelno dovodi do povećanja broja interpolacionih tačaka koje nepovoljno utiču na tačnost rezultata. Takođe, velika prostorna udaljenost dve krajnje računске tačke karakteristike (tačka preseka P i tekuća računске tačka A) bitno utiče i na sam fizički aspekt celog procesa koji se modelira, što može dodatno da amplificira nepovoljne uticaje na konačno rešenje. Da bi se u cilju postizanja visokog stepena tačnosti rezultata navedeni problemi eliminisali, ovde će se kao i u slučaju advektivne promene količine kretanja uvesti princip vremenskih podnivoa, postupak koji je detaljno opisan u Poglavlju 4.1.2.

➤ *Interpolacija*

Za razliku od polinoma drugog reda, koji korišten pri interpolaciji nepoznatih vrednosti kod modeliranja advektivne promene količine kretanja, za potrebe određivanja nepoznatih koncentracija u tački P primenjena je šema četvrtog reda poznata kao *Holly-Preissmann* - ov metod (Spasojević 1996). Zasnovan na modelu „cubic Hermite“ interpolacije, kod koga se za formiranje interpolacionog polinoma pored vrednosti u datoj tački koriste još i odgovarajući izvodi, ovaj metod znatno tačnije aproksimira funkciju uz istovremenu značajnu redukciju interpolacione greške. Međutim, bitno je napomenuti da i pored visokog stepena tačnosti koju ovaj metod pruža, njegova primena nije uvek u potpunosti moguća (slučaj advektivne promene količine kretanja). Sa druge strane, pored interpolacije nepoznate koncentracije u tački preseka trajektorije P , potrebno je odrediti još i nepoznatu vrednost neto masenog fluksa S_k . U tu svrhu je za potrebe ovog modela korišten *QUICK* metod, postupak koji je detaljnije objašnjen u Poglavlju 4.1.2.

➤ *Početni uslov*

Advektivni član jednačine održanja mase suspendovanog nanosa kao početni uslov koristi poznat prostorni raspored proizvoda koncentracije suspendovanog nanosa jednog granulometrijskog intervala C_k i odgovarajuće gustine mešavine ρ_m . Ova zavisnost formuliše se funkcijom $(C_k \rho_m) = f(\xi, \eta, t_0)$.

➤ *Granični uslov*

Hiperbolička struktura advektivnih jednačina nameće potrebu za graničnim uslovom samo na uzvodnom kraju razmatrane oblasti, koji shodno jednačini (4.38) ima oblik vremenske funkcije $(C_k \rho_m) = f(\xi_g, \eta_g, t)$.

4.2.1.1.1. *Modeliranje neto masenog fluksa S_k*

Proces razmene suspendovanog materijala sa rečnim dnom obuhvaćeno je slobodnim članom S_k , koji predstavlja neto masu suspendovanih čestica jednog granulometrijskog intervala (k) erodovanih i deponovanih kroz elementarnu površinu (računska ćelija). Ovaj fluks formuliše se izrazom :

$$S_k = \underbrace{\beta_k \cdot D_{Tz} \cdot \left. \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial z} \right|_{Z=Z_d+a}}_{E_k} + \underbrace{w_{t_k} \cdot \rho_m \cdot C_k}_{D_k} \Big|_{Z=Z_d+a}, \quad (4.42)$$

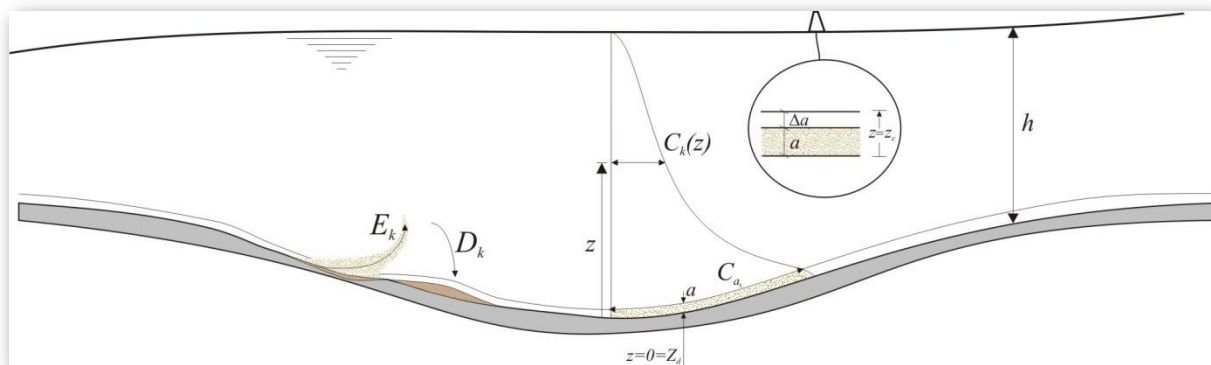
gde je fluks erozije (E_k) definisan kao izvod mase suspendovanog nanosa pri dnu pomnožen sa koeficijentom turbulentne difuzije, dok je fluks deponovanja (D_k) predstavljen kao masa istaloženog nanosa u jedinici vremena. Numeričko rešavanje izraza (4.42) za tačku definisane računске mreže (mreža formirana u koraku advekcije) podrazumeva određivanje prosečnog neto masenog fluksa S_k za elementarnu površinu koja se formira oko te računске tačke. Kao elementarna površina usvaja se smaknuta računska ćelija.

Modeliranje fluksa S_k sastoji se praktično iz dva dela. U prvom delu modelira se erozija, gde se izvod u vertikalnom pravcu aproksimira *Metodom konačnih razlika* (Slika 4.7) :

$$E_k = \beta_k \cdot D_{Tz} \cdot \frac{(\rho_m C_k)_{Z_d+(a+\Delta a)} - (\rho_m C_k)_{Z_d+a}}{\Delta a}, \quad (4.43)$$

da bi se potom u drugom delu, za kotu $Z = Z_d + (a + \Delta a)$, odredio fluks deponovanja po obrascu:

$$D_k = (w_{t_k} \cdot \rho_m \cdot C_k)_{Z_d+(a+\Delta a)}. \quad (4.44)$$



Slika 4.7 Prikaz teorijskog rasporeda koncentracije po dubini
sa elementima referentnog sloja

Pored referentne koncentracije C_{a_k} i brzine taloženja w_t , koji se određuju na osnovu empirijskih zakonitosti, zatim granulometrijske zastupljenosti β i gustine mešavine ρ_m , koje nisu u funkciji vertikalnog pravca, kao nepoznate veličine u ovim izrazima javljaju se koncentracija C_k i koeficijent turbulentne dufuzije D_{Tz} na koti $Z = Z_d + (a + \Delta a)$ (Slika 4.7). Kako se proračun obavlja u dvodimenzionalnoj računskoj oblasti, gde računate koncentracije određenog granulometrijskog intervala predstavljaju osrednjene vrednosti po vertikalnoj koordinati, ovi parametri odrediće se na osnovu teorijskih zakonitosti. Tako će se za slučaj proračuna koncentracije C_k na nivou z_c (Slika 4.7) koristiti kriva bazirana na logaritamskoj funkciji brzine, tzv. „Rouse-ova jednačina“, koja izražena u funkciji prosečne koncentracije po dubini (dobijene iz proračuna transporta suspendovanog nanosa) ima oblik :

$$C_k(z_c) = \tilde{C}_k(h - z_c) \frac{\left(\frac{h}{z_c} - 1\right)^{Z^*}}{\int_a^h \left(\frac{h}{z} - 1\right)^{Z^*} dz}, \quad (4.45)$$

dok će se u slučaju koeficijenta turbulentne difuzije D_{Tz} primeniti teorijski izraz baziran na *Raynolds*-ovoj analogiji sa koeficijentom turbulentne viskoznosti ν_t :

$$D_{Tz}(z_c) = \frac{z_c}{h} \left(1 - \frac{z_c}{h}\right) \cdot \beta_z \cdot \kappa \cdot h \cdot u_* \quad (4.46)$$

U navedenim izrazima kota $z_c = a + \Delta a$ označava nivo meren od rečnog dna (Slika 4.7), dok se

bezdimenzioni eksponent Z^* („suspension broj“) određuje kao :

$$Z^* = \frac{w_{I_k}}{\beta_z \cdot \kappa \cdot u_*}. \quad (4.47)$$

4.2.1.2. Difuzija - suspendovani nanos

Drugi član jednačine održanja mase suspendovanog nanosa (izraz 3.67), kojim se opisuje transport suspendovanog nanosa procesom difuzije (molekularna + turbulentna), posle transformacije u krivolinijski koordinatni sistem dobija sledeći oblik :

$$\frac{\partial(\rho_m C_k)^{n+1}}{\partial t} - \frac{\partial(\rho_m C_k)^a}{\partial t} = \frac{1}{hJ} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{DhG_{22}}{J} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial \xi} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{DhG_{12}}{J} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial \eta} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{DhG_{11}}{J} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{DhG_{12}}{J} \frac{\partial(\rho_m C_k)}{\partial \xi} \right] \end{array} \right\}. \quad (4.48)$$

Izraz (4.48), koji definiše doprinos difuzije u ukupnom održanju mase suspendovanog nanosa, predstavlja drugu i ujedno poslednju etapu u rešavanju transportne jednačine. Uzimajući prethodno dobijene vrednosti koncentracije C_k i gustine mešavine ρ_m kao početno stanje, ovde će se takođe za izbor optimalnog numeričkog modela koristiti analogija sa modelom strujanja (promena količine kretanja usled difuzije), gde je kao postupak korištena *Metoda konačnih razlika* uz primenu *Crank-Nicholson-ove* šeme. Kako je ovaj model detaljno objašnjen u Poglavlju 4.1.3, u nastavku će se navesti samo osnovni izrazi.

Aproksimacijom izvoda delimičnom *Crank-Nicholson-ovom* šemom (izrazi 4.13 ÷ 4.16), uz grupisanje članova oko zavisno promenljive veličine, dobija se kao rezultat algebarski izraz :

$$\begin{aligned} (C_k \rho_m)_{i,j}^{n+1} \cdot A_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i-1,j}^{n+1} \cdot C1_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i,j}^{n+1} \cdot B1_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i+1,j}^{n+1} \cdot D1_{i,j}^n + \\ + (C_k \rho_m)_{i,j-1}^{n+1} \cdot C2_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i,j}^{n+1} \cdot B2_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i,j+1}^{n+1} \cdot D2_{i,j}^n = \\ = I_{i,j}^a, \end{aligned} \quad (4.49)$$

gde su koeficijenti ispisani u Apendiksu C. Daljom transformacijom u skladu sa *ADI metodom* (Poglavlje 4.1.3), dobijena jednačina rastavlja se na dva računska pravca :

- ξ -pravac

$$\begin{aligned} (C_k \rho_m)_{i,j}^{n+1} \cdot (A_{i,j}^n + B I_{i,j}^n) + (C_k \rho_m)_{i-1,j}^{n+1} \cdot C I_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i+1,j}^{n+1} \cdot D I_{i,j}^n = \\ = I_{i,j}^a - \left((C_k \rho_m)_{i,j-1}^{n+1} \cdot C 2_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i,j}^{n+1} \cdot B 2_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i,j+1}^{n+1} \cdot D 2_{i,j}^n \right), \end{aligned} \quad (4.50)$$

- η -pravac

$$\begin{aligned} (C_k \rho_m)_{i,j}^{n+1} \cdot (A_{i,j}^n + B 2_{i,j}^n) + (C_k \rho_m)_{i,j-1}^{n+1} \cdot C 2_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i,j+1}^{n+1} \cdot D 2_{i,j}^n = \\ = I_{i,j}^a - \left((C_k \rho_m)_{i-1,j}^{n+1} \cdot C I_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i,j}^{n+1} \cdot B I_{i,j}^n + (C_k \rho_m)_{i+1,j}^{n+1} \cdot D I_{i,j}^n \right), \end{aligned} \quad (4.51)$$

gde se zatim svaki od njih rešava primenom ranije opisane „*double-sweep*“ procedure (Apendiks B). Kao krajnji rezultat dobija se nepoznata vrednost proizvoda koncentracije jednog granulometrijskog intervala C_k^{n+1} i gustine mešavine ρ_m^{n+1} (masa suspendovanog nanosa po jedinici zapemine) duž cele računске oblasti, čime se proračun održanja mase suspendovanog nanosa za naredni vremenski trenutak završava. Kako se materijal u suspenziji najčešće deli u više granulometrijskih interavala ($k=1, \dots, K$), kompletan postupak se ponavlja (advekcija + difuzija) za svaki od definisanih intervala posebno.

4.2.2. Numeričko rešavanje jednačine održanja mase aktivnog sloja i globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu

Morfološke promene rečnog toka, koje podrazumevaju deformaciju rečnog korita i promenu granulometrijskog sastava nanosa na rečnom dnu, definisane su transformisanim parcijalnim diferencijalnim jednačinama (3.112) i (3.113). Dobijeni sistem će se s obzirom na svoju hiperboličku strukturu rešiti primenom *Metode konačnih razlika* uz aproksimaciju parcijalnih izvoda ranije navedenom *Crank-Nicholson*-ovom šemom, dok će se preostali parametri (fluks vučenog nanosa q_{dno} , neto maseni fluks S_k) definisati odgovarajućim empirijskim zavisnostima detaljnije opisanim u Poglavlju 3.

Ako se upotrebi analogija između divergencije fluksa vučenog nanosa i divergencije jediničnog proticaja u modifikovanoj jednačini kontinuiteta (4.28), tada se diskretizacija jednačina (3.112) i (3.113) u okolini tačke (i,j) može izvršiti na smaknutoj računskoj mreži (Slika 4.5) :

- Jednačina održanja mase aktivnog sloja za jedan granulometrijski interval (k)

$$\begin{aligned}
 F1_k \equiv & \frac{\rho_s(1-p)}{\Delta t} \left[(\beta_k E_m)_{i,j}^{n+1} - (\beta_k E_m)_{i,j}^n \right] + \\
 & + \frac{\theta}{J} \left[\frac{(Jq_{dno_k})_{\xi_{i+1/2,j}}^{n+1} - (Jq_{dno_k})_{\xi_{i-1/2,j}}^{n+1}}{\Delta \xi} \right] + \frac{(1-\theta)}{J} \left[\frac{(Jq_{dno_k})_{\xi_{i+1/2,j}}^n - (Jq_{dno_k})_{\xi_{i-1/2,j}}^n}{\Delta \xi} \right] + \\
 & + \frac{\theta}{J} \left[\frac{(Jq_{dno_k})_{\xi_{i,j+1/2}}^{n+1} - (Jq_{dno_k})_{\xi_{i,j-1/2}}^{n+1}}{\Delta \xi} \right] + \frac{(1-\theta)}{J} \left[\frac{(Jq_{dno_k})_{\xi_{i,j+1/2}}^n - (Jq_{dno_k})_{\xi_{i,j-1/2}}^n}{\Delta \xi} \right] + \\
 & + (\theta S_k^{n+1} + (1-\theta) S_k^n) + (S_{p_k})_{i,j} = 0 \quad (k = 1, \dots, K),
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

- Globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu

$$\begin{aligned}
 F2 \equiv & \frac{\rho_s(1-p)}{\Delta t} \left[(Z_d)_{i,j}^{n+1} - (Z_d)_{i,j}^n \right] + \\
 & + \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{\theta}{J} \left[\frac{(Jq_{dno_k})_{\xi_{i+1/2,j}}^{n+1} - (Jq_{dno_k})_{\xi_{i-1/2,j}}^{n+1}}{\Delta \xi} \right] + \frac{(1-\theta)}{J} \left[\frac{(Jq_{dno_k})_{\xi_{i+1/2,j}}^n - (Jq_{dno_k})_{\xi_{i-1/2,j}}^n}{\Delta \xi} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\theta}{J} \left[\frac{(Jq_{dno_k})_{\xi_{i,j+1/2}}^{n+1} - (Jq_{dno_k})_{\xi_{i,j-1/2}}^{n+1}}{\Delta \xi} \right] + \frac{(1-\theta)}{J} \left[\frac{(Jq_{dno_k})_{\xi_{i,j+1/2}}^n - (Jq_{dno_k})_{\xi_{i,j-1/2}}^n}{\Delta \xi} \right] \Bigg\} + \\
 & + \sum_{k=1}^K (\theta S_k^{n+1} + (1-\theta) S_k^n) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Za razliku od prethodnih jednačina hiperboličkog tipa (advekcija), za čije je rešavanje bilo moguće primeniti *Metodu karakteristika* kao optimalnu numeričku metodu, u ovom slučaju se za aproksimaciju izvoda fluksa vučenog nanosa q_{dno_k} koristi *upwind* šema, koja je u cilju povećanja numeričke stabilnosti dodatno modifikovana. Ovakva modifikacija, koja proizilazi iz

pretpostavke da se kretanje vučenog nanosa obavlja pod uticajem strujanja, bazira se na pojavi da morfološke promene na određenoj lokaciji pored uslova koji vladaju na toj lokaciji, zavise i od uslova koji vladaju uzvodno od nje (sličan princip je prisutan i kod advektivnih procesa gde se informacije prenose nizvodno duž definisanih trajektorija). Pod ovim se podrazumeva da fluks vučenog nanosa koji nailazi na uzvodnu stranu kontrolne zapremine ne poseduje nikakvu informaciju o granulometrijskom sastavu sa nizvodnog lica, već isključivo „donosi“ informacije iz prethodne, uzvodno pozicionirane kontrolne zapremine. Uvođenjem ove teze kod modeliranja divergencije fluksa vučenog nanosa modifikovana *upwind* šema (vodi se računa o smeru fluksa) postaje numerički stabilnija, dok sistem diskretizovanih jednačina dobija hiperboličku strukturu, gde se kao granični uslovi koriste samo oni na uzvodnoj granici. Fluks koji definiše transport vučenog nanosa za naredni vremenski nivo ($q_{dno_k}^{n+1}$) određuje se na osnovu poznatog strujnog polja (u^{n+1} i v^{n+1}), s'tim što se odgovarajući parametar zastupljenosti β_k izražava eksplicitno koristeći vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa (n).

Imajući u vidu da su parametri kojima se opisuje transport nanosa po rečnom dnu (q_{dno_k}), zatim razmena nanosa sa suspenzijom (S_k) i podslojevima (S_{p_k}), kao i debljina aktivnog sloja (E_m) u funkciji nepoznatih zavisno promenljivih veličina β_k^{n+1} i Z_d^{n+1} (Poglavlje 3), dobijeni izrazi (4.52) i (4.53) formiraju sistem nelinearnih jednačina, koji će se shodno tome rešavati iterativno primenom *Newton-Raphson*-ovog postupka. Da bi ovaj postupak bilo moguće primeniti, potrebno je prvo razvijanjem u *Taylor*-ov red jednačine (4.52) i (4.53) linearizovati :

$$[F I_l]_{m+1}^{n+1} = [F I_l]_m^{n+1} + \left[\frac{\partial F I_l}{\partial Z_d} \right]_m^{n+1} \Delta Z_d + \left[\frac{\partial F I_l}{\partial \beta_1} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_1 + \dots + \left[\frac{\partial F I_l}{\partial \beta_k} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_k + \dots + \left[\frac{\partial F I_l}{\partial \beta_K} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_K, \quad (4.54)$$

$$[F I_k]_{m+1}^{n+1} = [F I_k]_m^{n+1} + \left[\frac{\partial F I_k}{\partial Z_d} \right]_m^{n+1} \Delta Z_d + \left[\frac{\partial F I_k}{\partial \beta_1} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_1 + \dots + \left[\frac{\partial F I_k}{\partial \beta_k} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_k + \dots + \left[\frac{\partial F I_k}{\partial \beta_K} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_K, \quad (4.55)$$

$$[F I_K]_{m+1}^{n+1} = [F I_K]_m^{n+1} + \left[\frac{\partial F I_K}{\partial Z_d} \right]_m^{n+1} \Delta Z_d + \left[\frac{\partial F I_K}{\partial \beta_1} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_1 + \dots + \left[\frac{\partial F I_K}{\partial \beta_k} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_k + \dots + \left[\frac{\partial F I_K}{\partial \beta_K} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_K, \quad (4.56)$$

$$[F 2]_{m+1}^{n+1} = [F 2]_m^{n+1} + \left[\frac{\partial F 2}{\partial Z_d} \right]_m^{n+1} \Delta Z_d + \left[\frac{\partial F 2}{\partial \beta_1} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_1 + \dots + \left[\frac{\partial F 2}{\partial \beta_k} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_k + \dots + \left[\frac{\partial F 2}{\partial \beta_K} \right]_m^{n+1} \Delta \beta_K, \quad (4.57)$$

(izvodi uz priraštaje $\Delta \beta_k$ i ΔZ_d prikazani su u Apendiksu D), što ispisano u matricnoj formi ima oblik :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F1_1}{\partial Z_d} & \frac{\partial F1_1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F1_1}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F1_1}{\partial \beta_K} \\ \frac{\partial F1_k}{\partial Z_d} & \frac{\partial F1_k}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F1_k}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F1_k}{\partial \beta_K} \\ \frac{\partial F1_K}{\partial Z_d} & \frac{\partial F1_K}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F1_K}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F1_K}{\partial \beta_K} \\ \frac{\partial F2}{\partial Z_d} & \frac{\partial F2}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial F2}{\partial \beta_k} & \dots & \frac{\partial F2}{\partial \beta_K} \end{bmatrix}_m^{n+1} \begin{bmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_k \\ \Delta\beta_K \\ \Delta Z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F1_1 \\ -F1_k \\ -F1_K \\ -F2 \end{bmatrix}_m^{n+1} \quad (4.58)$$

Formirani sistem linearizovanih jednačina rešava se direktnim invertovanjem matrice koeficijenata, gde se za inverziju koristi postupak „*maximum pivot strategy*“ (Carnahan, Luter and Wilkes (1969)). Kao rezultat dobijaju se nepoznati priraštaji kote dna ΔZ_d i granulometrijske zastupljenosti svih definisanih intervala $\Delta\beta_{k=1,\dots,K}$ za iteraciju m , duž cele računске oblasti. U narednoj iteraciji izračunavanjem novih vrednosti zavisno promenljivih po obrascu:

$$(\beta_k^{n+1})_{m+1} = (\beta_k^{n+1})_m + \Delta\beta_k \quad (k = 1, \dots, K), \quad (4.59)$$

$$(Z_d^{n+1})_{m+1} = (Z_d^{n+1})_m + \Delta Z_d,$$

i „popravljanjem“ izvoda i slobodnih članova, kompletan postupak se iterativno ponavlja sve dok se ne zadovolji kriterijum konvergencije definisan kao :

$$\begin{bmatrix} \Delta\beta_1 \\ \cdot \\ \Delta\beta_k \\ \cdot \\ \Delta\beta_K \\ \Delta Z_d \end{bmatrix} \leq \varepsilon, \quad (4.60)$$

gde je ε granični parametar konvergencije.

4.2.3. Pomoćne formule

- ◆ Modeliranje debljine aktivnog sloja E_m i fluksa razmene sa podslojem S_{p_k}

Vertikalno pomeranje kote rečnog dna izazvano konstantnim kretanjem nanosnog materijala direktno utiče kako na aktivni sloj, tako i na podslojeve neposredno ispod aktuelne kote dna. Dinamika i intenzitet ovih promena, koje pored promene položaja istovremeno menjaju i sastav rečnog dna, zavisi prvenstveno od dominantnog nanosnog procesa. Ukoliko se radi o eroziji, nanosni materijal sa dna se ispira, zbog čega dolazi do spuštanja kote dna i aktiviranja materijala u podslojevima. Ako je dominantan proces deponovanje nanosa na rečno dno, postojeća kota dna se pomera vertikalno naviše, formirajući tako podslojeve koji se ponovo mogu aktivirati prilikom erozije. U zavisnosti o kom elementu morfoloških promena se radi, proračun debljine aktivnog sloja E_m i fluksa razmene sa podslojem S_{p_k} sprovedeće se na osnovu diskretizovanih izraza izvedenih u Poglavlju 3.

Kao što je ranije navedeno, aktivni sloj čine čestice koje su međusobno potpuno izmešane i usled toga sve podjednako izložene toku. Erodovanjem rečnog dna sitnije frakcije se uvlače u tok, povećavajući time procenat krupnoznoznih čestica na dnu uz istovremenu redukciju intenziteta procesa. Uzimajući u obzir ovakvo ponašanje nanosa pri eroziji, gde debljina aktivnog sloja zavisi od intenziteta i vremena trajanja samog procesa, autori *Bennet* i *Nordin* predložili su izraz za izračunavanje parametra E_m , koji je uvođenjem efekta popločavanja dodatno modifikovan (Borah 1982) :

$$E_m = -c(Z_d^{n+1} - Z_d^n) + \frac{I}{\sum_{k=m}^K \beta_k} \frac{D_m}{1-p}. \quad (4.61)$$

U izrazu (4.61) c je parametar erozije, a D_m prečnik najmanjeg nepokretnog zrna.

Pomeranje dna aktivnog sloja izazvano promenom debljine E_m aktivira podsloj koji se nalazi neposredno ispod, uzrokujući time razmenu materijala između slojeva koja se u proračun uvodi kroz član S_{p_k} . Kako se dno aktivnog sloja tokom erozije može pomerati vertikalno u oba smera, proračun razmene materijala između aktivnog sloja i aktivnog podsloja obavlja se na dva načina. Ako se usled erozije dno aktivnog sloja spušta, proračun fluksa razmene sa podslojem S_{p_k} za jedan granulometrijski interval (k) obavlja se tada na osnovu izrazu (3.34), koji posle vremenske diskretizacije dobija oblik :

$$S_{p_k} = -\frac{\rho_s(1-p)}{\Delta t} \left[(Z_d^{n+1} - E_m^{n+1}) - (Z_d^n - E_m^n) \right] \beta_{p_k}. \quad (4.62)$$

U ovom slučaju granulometrijski sastav podsloja ostaje nepromenjen. Međutim, ako se desi da dno aktivnog sloja počne da raste (slučaj koji se retko javlja), član razmene sa podslojem S_{p_k} se tada računa po diskretizovanom obliku izraza (3.35) :

$$S_{p_k} = -\frac{\rho_s(1-p)}{\Delta t} \left[(Z_d^{n+1} - E_m^{n+1}) - (Z_d^n - E_m^n) \right] \frac{(\beta_k^{n+1} + \beta_k^n)}{2}, \quad (4.63)$$

gde je β_k zastupljenost nanosnog materijala granulometrijskog intervala (k) u aktivnom sloju.

Aktivni podsloj sada preuzima deo nanosnog materijala iz aktivnog sloja, menjajući na taj način svoj granulometrijski sastav koji se u rešavanju nanosnih jednačina izražava parametrom β_{p_k} .

Zbog retke pojave ovog slučaja, u rešavanju nanosnih jednačina zastupljenost granulometrijskog intervala β_{p_k} formuliše se eksplicitno i računa se na kraju vremenskog koraka.

Tokom procesa deponovanja istaložene čestice dodaju se postojećem aktivnom sloju i u potpunosti mešaju sa njegovim nanosnim materijalom. Ako se pretpostavi da dno ostaje nepromenjeno, taloženjem nanosa kota gornje granice aktivnog sloja raste, pa se izraz za debljinu E_m formuliše kao :

$$E_m^{n+1} = E_m^n + (Z_d^{n+1} - Z_d^n), \quad (4.64)$$

dok se član razmene sa podslojem izjednačava sa nulom :

$$S_{p_k} = 0. \quad (4.65)$$

◆ *Transport vučenog nanosa q_{dno}*

Kako bi se pravilno definisao transport nanosa na rečnom dnu q_{dno} , razmatrano je više pristupa. Haotično kretanje zrna vučenog nanosa, koje za razliku od suspendovanog nanosa nije pod dominantnim uticajem struje toka već težine samog zrna, u potpunosti je isključio zakon održanja mase kao osnovni koncept ponašanja vučenog nanosa. Da bi na neki način ipak računski „ukrotili“ dinamiku transporta nanosa pri dnu rečnog korita, istraživači su se okrenuli

ka drugom, relativno složenijem alternativnom pristupu, koji u proračun transporta nanosa uvodi elemente dinamike kretanja svakog zrna zasebno (visine skoka, brzine, trajektorije). Međutim, kako se usled svoje težine zrna različite frakcije kreću različitim brzinama, zbog čega i dolazi do njihove međusobne interakcije i nepredvidljivog haotičnog kretanja, određivanje parametara pojediničnih zrna je praktično nemoguće. Imajući ovo u vidu, holandski naučnik *Van Rijn* (1984a) je oslanjajući se delimično na ovaj koncept predložio primenu iste baze pristupa, ali u smislu osrednjenih vrednosti. Na osnovu eksperimentalnih merenja on je prvo definisao srednju trajektoriju svih zrna, da bi zatim izračunao srednju visinu skoka δ_0 i srednju brzinu zrna u_0 . Uz poznatu prosečnu koncentraciju nanosa na dnu C_0 , autor je formulisao izraz za zapreminski jedinični *pronos vučenog nanosa* (količina materijala nošena rečnim tokom u jedinici vremena) :

$$q = \int_0^{\delta_0} C(z) \cdot u(z) \cdot dz = \delta_0 \cdot C_0 \cdot u_0 \quad (\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})), \quad (4.66)$$

gde je korišćenjem rezultata eksperimentalnih istraživanja velikog broja autora (Jovanović 2002) definisao analitičke izraze za proračun veličina na desnoj strani izraza (4.66) :

$$\delta_0 = d \cdot 0.3 \cdot d_*^{0.7} \cdot T^{0.5} \quad (\text{m}), \quad (4.67)$$

$$C_0 = 0.117 \cdot d_*^{-1} \cdot T \quad (-), \quad (4.68)$$

$$u_0 = \sqrt{g \cdot \Delta \cdot d} \cdot 1.5 \cdot T^{0.6} \quad (\text{m/s}). \quad (4.69)$$

Parametri u gornjim izrazima se definišu kao :

$d = d_{50}$	- karakteristični prečnik zrna (mm);
$d_* = d \cdot \sqrt[3]{g \cdot \Delta / \nu^2}$	- bezdimenzionalni parametar zrna;
$T = \frac{u_*^2 - (u_*)_k^2}{u_*^2}$	- efektivni bezdimenzionalni tangencijalni napon;
$u_* = \frac{u \cdot \sqrt{g}}{C'}$	- efektivna smičuća brzina;
$C' = 18 \cdot \log \left(\frac{12 \cdot h}{3 \cdot d_{90}} \right)$	- Chézy – jev koeficijent ($\text{m}^{-1/2}/\text{s}$);

$$\Delta = \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \quad - \text{ bezdimenzionalna gustina nanosa.}$$

gde su : g - gravitaciono ubrzanje, ν - kinematski koeficijent viskoznosti, u - osrednjena brzina po dubini, h - dubina, ρ_s - gustina nanosa na rečnom dnu, ρ - gustina vode, u_{*k} - kritična smičuća brzina dobijena iz *Shields*-ovog dijagrama.

Zamenom izraza (4.67), (4.68) i (4.69) u izraz (4.66) i njegovim množenjem sa gustinom nanosa ρ_s kako bi se dobio *maseni* pronos, izraz za transport vučenog nanosa dobija svoj konačan oblik :

$$q_{dno}^t = 0.053 \cdot \rho_s \cdot \sqrt{\Delta \cdot g \cdot d} \cdot d \cdot \frac{T^{2.1}}{d_*^{0.3}} \quad (\text{kg}/(\text{sm})), \quad (4.70)$$

odnosno za slučaj mešavine nanosa,

$$q_{dno_k}^t = 0.053 \cdot \rho_s \cdot \sqrt{\Delta \cdot g \cdot d_k} \cdot d_k \cdot \frac{T_k^{2.1}}{d_{*k}^{0.3}}. \quad (4.71)$$

Kako izraz (4.70) u svojoj osnovi ima eksperimentalna istraživanja širokog dijapazona, metoda *Van Rijn*-a predstavlja jednu od vodećih metoda u proceni transporta vučenog nanosa pogodnu za analize, projektovanje i numeričko modeliranje nanosnih procesa.

Uticao velikog broja hidrauličkih parametara na pronos vučenog nanosa uzrokovao je pojavu i drugih, podjednako kvalitetnih pristupa. Koncept kritičnog tangencijalnog napona (*Meyer-Peter, Muller*) definiše pokretanje i pronos nanosa kao posledicu efektivnog tangencijalnog napona, dok se energetske pristup (*Bagnold, Yang*) bazira na vezi pokretanja nanosa i energije rečnog toka, formulisane kao proizvod brzine i tangencijalnog napona rečnog dna. Pored determinističkih metoda za određivanje transporta nanosa, u literaturi se često sreće i stohastički pristup baziran na verovatnoći pokretanja zrna nanosa (*Einstein*).

♦ *Parametar transportnog kapaciteta γ*

U cilju pravilnog definisanja odnosa između transportnog fluksa ukupnog i suspendovanog nanosa, *Van Rijn* (1984b) je uveo parametar $\gamma = q_{susp} / q_{ukupno}$ kao funkciju odnosa smičuće brzine i brzine taloženja čestice :

$$\gamma_k = \left(\frac{q_{susp}}{q_{ukupno}} \right)_k = 0.25 + 0.325 \ln \left(\frac{u_*}{w_{tk}} \right) \quad 0.4 < \frac{u_*}{w_{tk}} < 10, \quad (4.72)$$

pri čemu su : q_s - količina suspendovanog nanosa, q_u - količina ukupnog nanosa, w_{tk} - brzina taloženja čestica granulometrijskog intervala (k) i u_* - smičuća brzina.

◆ *Parametar izloženosti zrna ζ*

Efekti skrivanja sitnijih čestica iza krupnijih zrna nanosa unose se u proračun transporta nanosa i deformacije korita empirijskim izrazom predloženim od strane autora *Karim, Holly* i *Yang* (1987) :

$$\zeta_k = \left(\frac{d_k}{d_{50}} \right)^{0.85} . \quad (4.73)$$

◆ *Referentna koncentracija C_a*

Referentna koncentracija, koja se u izrazu (3.22) javlja kao koncentracija pri dnu rečnog korita, računa se po izrazu koji je na osnovu empirijskih istraživanja i teorijskih razmatranja prvi predložio *Van Rijn* (1984b) :

$$C_a = 0.015 \cdot \frac{d_{50}}{a} \cdot \frac{T^{1.5}}{d_*^{0.3}} \quad (-), \quad (4.74)$$

a koji za slučaj nanosne mešavine ima oblik

$$C_{a_k} = 0.015 \cdot \frac{d_k}{a} \cdot \frac{T_k^{1.5}}{d_{*k}^{0.3}} . \quad (4.75)$$

Imajući u vidu da u dobijenim izrazima parametri T , d_{50} i d_* istovremeno utiču na kretanje i vučenog (izrazi 4.70 i 4.71) i suspendovanog nanosa, autor je praktično za stanje ravnotežnog pronosa nanosa izrazom (4.74) uspostavio vezu između ove dve grupe nanosa.

4.3. Postupak rešavanja sušenja i kvašenja priobalnog područja kod fiksne računске mreže

Dinamika promene aktivne računске oblasti direktno zavisi od funkcije promene hidrauličkog stanja toka. Neustaljeno strujanje nametnuto graničnim uslovima (hidrogrami, nivogrami) izaziva vertikalno kretanje nivoa u celom računskom domenu, što kako je rečeno u Poglavlju 3, dovodi do širenja i skupljanja aktivnog dela računске oblasti. U zavisnosti da li se radi o vremenski intenzivnim oscilacijama nivoa, ili je ipak reč o relativno sporom pomeranju kote slobodne površine vode, kretanje obalnog pojasa ima veoma velik uticaj kako na strujnu sliku, tako i na morfološke karakteristike razmatrane oblasti. Iz tog razloga, a u cilju poboljšanja numeričkog modela strujanja i transporta nanosa, u proračun će se uvesti postupak za definisanje aktivne računске oblasti, čime se rešavanju kompletnog sistema dodaje efekat sušenja i kvašenja priobalnog područja.

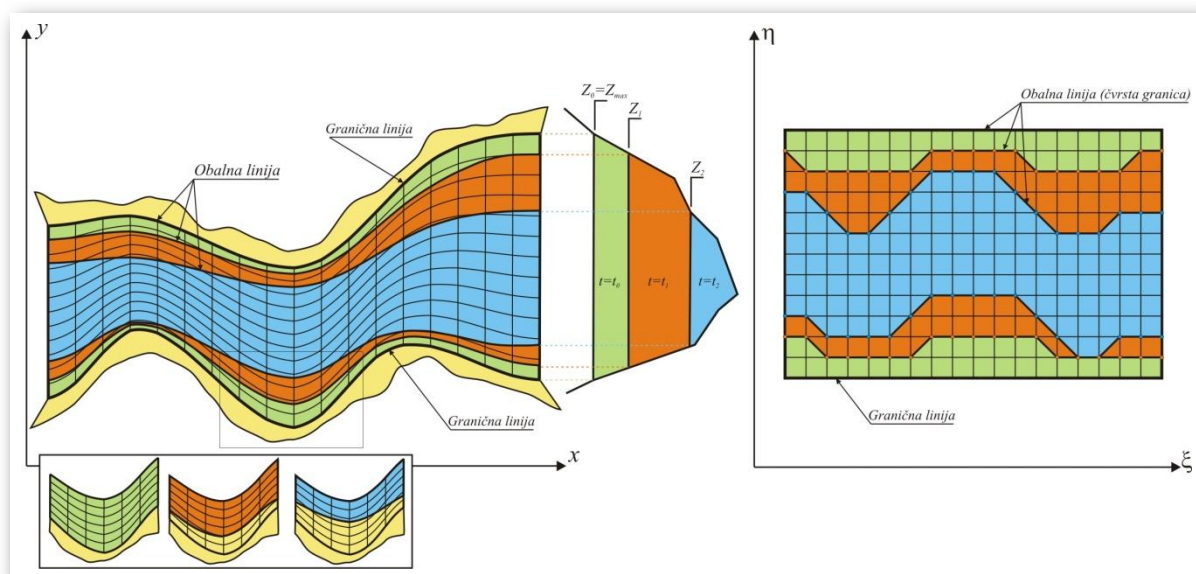
Transformacijom kompletnog sistema jednačina (voda i nanos) u krivolinijske koordinate, proračun se iz fizičke prebacuje u računsku pravougaonu oblast, gde se u zavisnosti od primenjenog numeričkog modela zavisno promenljive određuju na osnovnoj ili smaknutoj računskoj mreži. Kako će se i na koji način fizička oblast prekriti mrežom računskih tačaka, zavisi od dva osnovna faktora :

- geometrijskih karakteristika razmatranog domena,
- i dinamičkih karakteristika modeliranih procesa.

Prvi faktor definiše elementarne parametre računске mreže kao što su dimezije ćelija i broj računskih tačaka, dok se drugi uvodi isključivo za potrebe kretanja obalne linije. Da bi se stekao jasniji uvid u sam postupak promene aktivne oblasti strujanja, na slici 4.8 prikazan je segment fizičke i ekvivalentne računске oblasti sa svim potrebnim elementima.

Prvi korak u određivanju aktivne oblasti strujanja predstavlja formiranje fiksne računске mreže. Oblast od interesa prekriva se mrežom krivih linija, koje prateći konture vodotoka opisuju njegovu geometriju u koordinatnom sistemu (x,y) . Međutim, ono što se odmah nameće kao prvo pitanje jeste na koji način ispravno i tačno definisati ovu oblast od interesa. Kako se proračun obavlja na dvodimenzionalnoj fiksnoj mreži, na kojoj tokom proračuna nema prostornog pomeranja računskih tačaka, određivanje položaja granične linije oslanja se u tom slučaju isključivo na hidrauličke uslove koji vladaju u toku. Pod ovim uslovima prvenstveno se misli na

kotu nivoa vodnog ogledala, odnosno na njenu maksimalnu vrednost koja se javlja kao posledica vertikalnih oscilacija nastalih usled neustaljenosti toka. S obzirom na to da maksimalnoj koti odgovara praktično najveća oblast strujanja (oblast predstavljena zelenom bojom na slici 4.8), ona se može usvojiti kao ključni parametar za utvrđivanje položaja granične linije, koja u tom slučaju predstavlja liniju useka (linija preseka vodnog ogledala sa čvrstom granicom) pri ovom maksimalnom nivou. Nakon definisanja ovih granica, fizička oblast prvo se prekriva fiksnom mrežom krivih linija sa odgovarajućim geometrijskim parametrima, da bi se zatim primenom ranije navedenih pravila ona transformisala u pravougaonu računsku mrežu, prilagođenu potrebama proračuna.



Slika 4.8 Detalj fizičke i računске oblasti pri promeni aktivnog domena strujanja

Neustaljenost toka, koja za posledicu ima vertikalno pomeranje nivoa vodnog ogledala, direktno utiče na geometrijske karakteristike oblasti strujanja. Podizanje i spuštanje nivoa vode menja položaj obalne linije (usek nivoa u obalu), usled čega se ova aktivna oblast strujanja širi i skuplja. Sama pojava, posmatrana sa fizičke strane, ne zahteva dodatne analize u pogledu definisanja procesa. Međutim, ukoliko se takvi procesi uključe u rešavanje sistema jednačina strujanja i transporta nanosa, problematika plavljenja priobalnog pojasa postaje veoma složen i zahtevan posao. Kao osnovni problem u modeliranju promene aktivne oblasti pri rešavanju kompletnog sistema jednačina javlja se pravilno određivanje položaja obalne linije. Variranjem kote nivoa obalna linija se pomera, što istovremeno izaziva i promenu aktivnog domena

strujanja. Ovakvo kretanja obalne linije moguće je modelirati na više načina koji se generalno mogu podeliti u dve osnovne grupe. Prvu grupu uglavnom čine postupci koji se baziraju na ispisivanju i rešavanju dodatnih jednačina, dok se u drugoj grupi nalaze modeli zasnovani na parametarskom utvrđivanju linije useka, gde se na osnovu zadatih parametara oblasti uključuju ili isključuju iz proračuna. Koji će se od ovih procedura primeniti zavisi od karaktera modeliranih procesa.

Ako se imaju u vidu hidrauličke karakteristike priobalnog pojasa kao što su male dubine, zanemarljive brzine i talasno kretanje vode, može se kao prvo zaključiti da ova oblast izlazi iz domena potencijalnog strujanja i da shodno tome ona ne može biti modelirana primenom osnovnih jednačina toka (*RANS*). Takođe, tečenje vode u ovim plitkim oblastima ne utiče bitno na strujnu sliku glavnog korita, pa se kao takvo može eliminisati iz ukupnog proračuna strujanja i transporta nanosa. Ako se pored matematičke i numeričke složenosti modela tečenja i transporta nanosa u obzir uzmu i navedene činjenice vezane za značaj priobalne zone u celokupnom procesu strujanja, kao optimalna procedura za određivanje položaja obalne linije usvojiće se navedeni parametarski postupak. Kako je ranije rečeno ovaj postupak bazira se na definisanju aktivne i pasivne oblasti strujanja primenom graničnih parametara, od kojih se najčešće primenjuju dubina vode i brzina strujanja. Da bi se postupak detaljnije opisao, na slici 4.8 prikazan je detalj postepenog obaranja kote nivoa i sušenja priobalnog pojasa kroz tri karakteristična stanja.

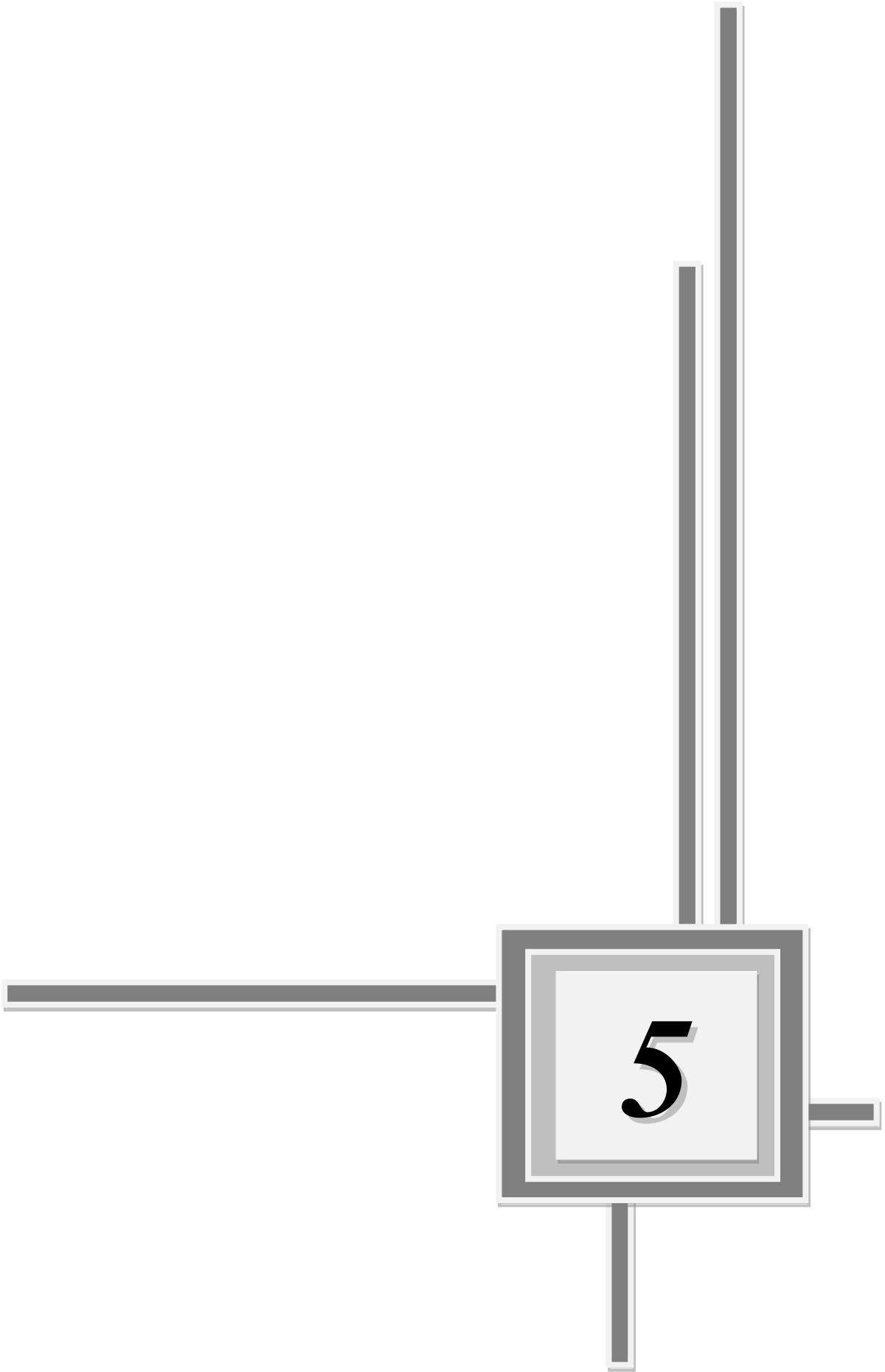
U početnom trenutku ($t=0$) pretpostavlja se da je nivo na maksimalnoj koti ($Z_0=Z_{max}$) i da su svi čvorovi mreže „pokvašeni“, tj. da su sve tačke računski aktivne. Ovo stanje prikazano je na slici 4.8 zelenom bojom, gde je iz praktičnih razloga za početno stanje uzeta maksimalna kota nivoa. U prvom koraku rešavaju se jednačine ravanskog toka (advekcija, difuzija, propagacija) za naredni vremenski trenutak ($t=t_1$), što u ovom slučaju na osnovu zadatih graničnih uslova dovodi do pada nivoa u celoj oblasti strujanja. Posle formiranja prostornog rasporeda nivoa i strujnog polja duž toka, u drugom koraku se na osnovu definisanih graničnih parametara iz daljeg proračuna eliminišu one računске tačke koje ne zadovoljavaju ove granične vrednosti. Kako je ranije navedeno, ovi parametri predstavljaju praktično minimalne vrednosti zavisno promenljivih veličina (najčešće dubina vode) ispod kojih strujanje vode više nije u oblasti primene jednačina toka, dok se njihove vrednosti zadaju zavisno od modeliranog slučaja. Nakon eliminisanja određenog broja računskih tačaka usled primene dubine kao graničnog parametra, novo stanje ($Z=Z_1$) na fizičkoj i njoj ekvivalentnoj računskoj mreži prikazano je na slici 4.8 narandžastom bojom. Obaranjem nivoa obalna linija kreće se ka središnjem delu toka, pa su sušenjem zahvaćene prvo tačke koje se nalaze na najvišem terenu, odnosno gledano sa stanovišta

računske mreže, tačke koje se nalaze na njenom obodu. Nova aktivna oblast sada pokriva površinski manji deo rečnog toka, čime se smanjuje broj računskih tačaka i u zavisnosti od geometrijskih karakteristika aktiviraju pojedini lokalni poremećaji koji mogu imati velik uticaj na strujnu sliku glavnog toka (detalj u donjem levom uglu Slike 4.8). U eliminisanim računskim tačkama vrednosti komponenti brzina se izjednačavaju sa nulom, dok se uz pretpostavku da je poprečni nagib kote nivoa mali, u ovim tačkama za nivo uzimaju vrednosti iz prve „mokre“ tačke. Kako se na taj način dobijaju vrednosti negativnih dubina u eliminisanim čvorovima, to će se one koristiti kao osnovni pokazatelj kada ove tačke treba računski ponovo aktivirati ukoliko dođe do njihovog plavljenja. Sa ovakvom redukovanom računskom mrežom i definisanim parametrima strujanja (dubine i brzine), ulazi se u proračun transporta nanosa i deformacije rečnog korita za vremenski trenutak $t=t_1$ shodno ranije opisanom postupku rešavanja kompletnog sistema jednačina. Trenutna kota dna kao i granulometrijski sastav u suvim čvorovima ostaju nepromenjeni, dok se s obzirom na to da u njima nema strujanja vode, koncentracije suspendovanog nanosa izjednačavaju sa nulom. Završetkom proračuna za vremenski nivo $t=t_1$ kompletan postupak se ponavlja za sledeći vremenski trenutak $t=t_2$. Ponovno obaranje nivoa i pomeranje obalne linije za posledicu ima dodatno skupljanje aktivne oblasti i redukciju računске mreže. Aktivni deo toka za stanje $t=t_2$ prikazan je na slici 4.8 plavom bojom, gde je na levoj strani prikazana fizička oblast, a na desnoj njoj ekvivalentni računski domen. Rešavanjem transporta suspendovanog nanosa i deformacije rečnog korita na novo formiranoj računskoj mreži, proračun se za vremenski nivo $t=t_2$ završava.

Drugi scenario koji se može javiti pri proračunu neustaljenog strujanja, jeste plavljenje priobalnog područja nastalo kao posledica konstantnog porasta nivoa vodnog ogledala. U ovom slučaju aktivna oblast strujanja definiše se na isti način kao što je to rađeno u slučaju sušenja, s'tim što se sada umesto eliminacije računskih tačaka iz proračuna primenom istih graničnih parametara (dubina vode) one u taj proračun uključuju. Ovo aktiviranje računskih tačaka može se objasniti na istoj slici 4.8, gde će se sada za početno stanje uzeti aktivna oblast predstavljena plavom bojom. Rešavanjem jednačina toka nivo vode u narednom vremenskom trenutku raste. Imajući u vidu navedenu pretpostavku o poprečnom nagibu vodnog ogledala, kota nivoa iz krajnjih aktivnih (*mokrih*) tačaka prebacuje se u prve pasivne (*suve*) tačke, gde se na osnovu upoređenja njihovih dubina i zadatih graničnih parametara one ili uključuju u proračun, ili i dalje ostaju računski neaktivne. Ukoliko je njihova dubina veća od zadate granične vrednosti, računska tačka se aktivira, a sama aktivna oblast se širi. Ovo stanje na slici 4.8 prikazano je narandžastom bojom. Po istom principu, u drugom koraku na ovoj modifikovanoj mreži rešavaju se nanosne jednačine, gde se za početne vrednosti koncentracije suspendovanog nanosa usvajaju

nulte vrednosti, dok se granulometrijski sastav i kota dna uzimaju sa predhodnog vremenskog nivoa. U daljem proračunu kompletan postupak se ponavlja.

Konstantno opadanje ili porast nivoa pri proračunu neustaljenog strujanja mogu se posmatrati kao dva granična slučaja kod definisanja aktivne oblasti strujanja. Nametnuti granični uslovi često mogu da izazovu dinamičke oscilacije nivoa, pri kojima se ovi navedeni slučajevi naizmenično smenjuju uzrokujući permanentno kvašenje i sušenje priobalnog područija. Gledano sa strane modela, ovakva dinamika promene nivoa izaziva konstantno širenje i skupljanje aktivne oblasti strujanja tokom proračuna, što nesumnjivo ima velikog uticaja kako na strujnu sliku, tako i na nanosne i morfološke karakteristike modeliranog toka. Iz tog razloga veoma je bitno pravilno definisati vrednosti graničnih parametara, što zavisi kako od geometrijske strukture toka, tako i od samog hidrauličkog stanja nametnutog graničnim uslovima.



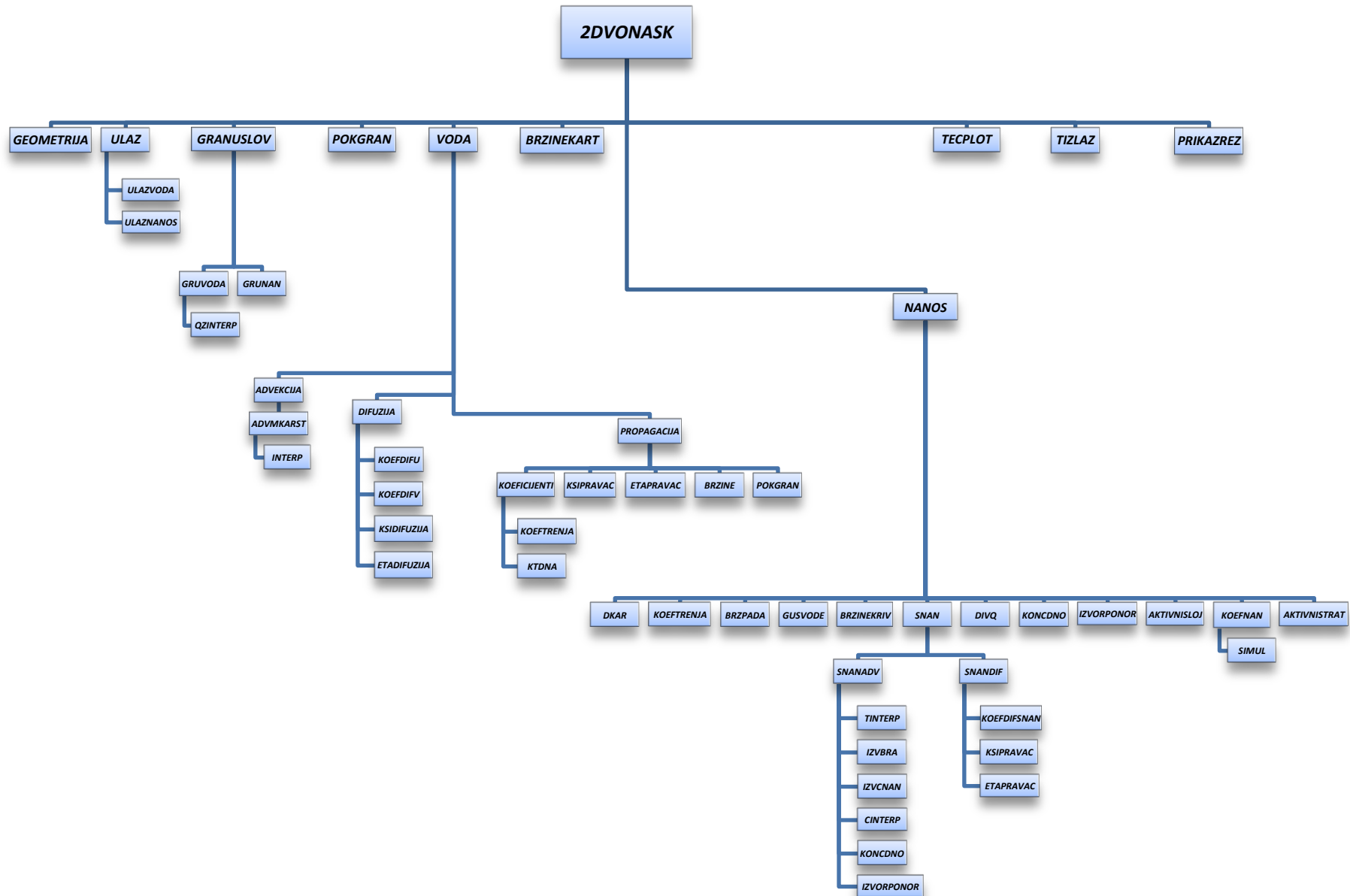
5. Programski kod

Za potrebe numeričkog rešavanja definisanih parcijalnih diferencijalnih jednačina strujanja vode, transporta nanosa, deformacije rečnog korita i plavljenja priobalnog područja, kao osnovni alat korišten je programski jezik *FORTRAN-2008*. Sa mogućnošću formiranja korisničkih podprograma i funkcija, zatim korišćenja obimnih matematičkih i grafičkih biblioteka, kao i primene paralelnog procesiranja i velikog broja programerskih analiza (*Debugging*), definisane računске procedure su ovim kompajlerom prvo pisane u formi izvorne (*source*) datoteke, a zatim izvršavane njenim prevođenjem u binarni oblik (kompajliranje). Kao krajnji rezultat ovakvog pristupa, formirana je izvršna aplikacija koja se kao takva može koristiti na više računarskih jedinica, bez potrebe za izvornim datotekama.

S obzirom na to da sam postupak rešavanja formiranih algebarskih izraza zahteva izuzetno veliki broj parametara i zahtevnih matematičkih procedura, rešavanje definisanih jednačina sprovedeno je u vidu zasebnih podprogramskih jedinica. Kompletna računska procedura "razbijena" je na više manjih podprograma, koje su zatim u zavisnosti od potrebe povezivane odgovarajućim naredbama. Koji su podprogrami korišteni, kao i na koji način su oni povezivani u okviru generalne procedure, prikazano je na blok dijagramu 5.1.

Osnovu svake programske aplikacije pisane u FORTRAN-u, koja u suštini predstavlja bazni element kojim se povezuju sve ostale podprogramske jedinice, jeste glavna programska jedinica (*Main*) nazvana *2DVONASK*. Ona ne sadrži nikakve računске procedure ili matematičke operacije bilo kakvog tipa, već služi samo za deklarisanje promenljivih i kontrolu (direktno ili indirektno povezivanje) ostalih podprogramskih jedinica. Kao što se može videti i na dijagramu 5.1, te podprogramske jedinice su :

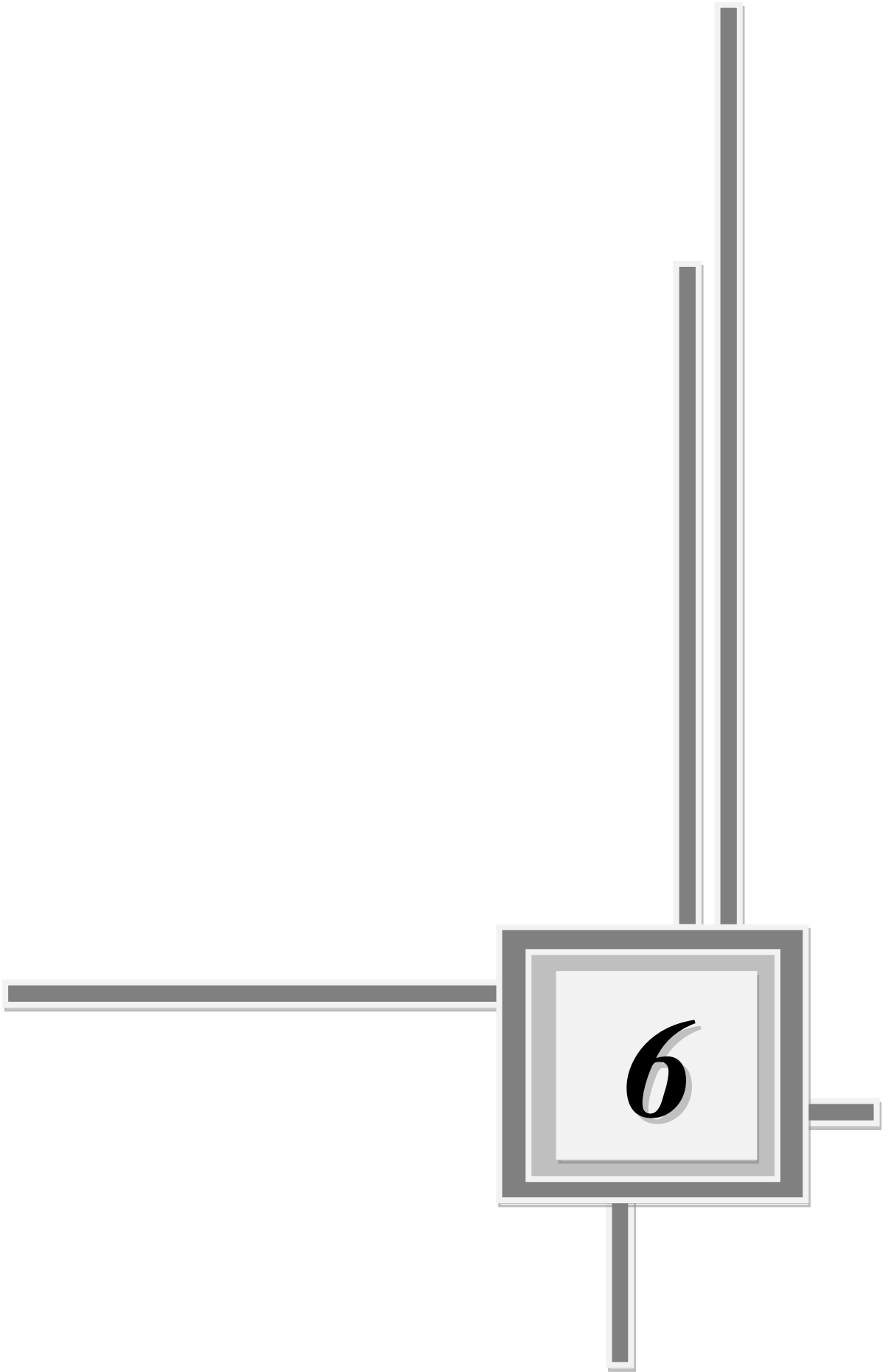
- **GEOMETRIJA** - služi za učitavanje geometrijskih podataka (x,y,z parova) i izračunavanje geometrijskih parametara (geometrijski izvodi i metrički koeficijenti);
- **ULAZ** - koristi se za učitavanje ulaznih podataka. Za potrebe proračuna strujanja vode i plavljenja priobalnog područja podaci se učitavaju u podprogramu *ULAZVODA*, dok se podaci nanosnog proračuna učitavaju u podprogramu *ULAZNANOS*;
- **GRANUSLOV** - služi za definisanje graničnog uslova. Grana se na podprogram *GRUVODA*, koji služi za kontrolu graničnog uslova strujanja vode, i koji sadrži dodatnu proceduru *QZINTERP* za interpolaciju ulaza, i na podprogram *GRUNAN* kojim se definišu granični uslovi nanosnih jednačina;



Dijagram 5.1 Blok dijagram programskog koda

- **POKGRAN** - podprogram zadužen za kontrolu postupka sušenja i kvašenja računskih čvorova;
- **VODA** - podprogram za proračun strujanja vode, koja se prema članovima postupka razlomljenih koraka grana na podprograme :
 - ♦ **ADVEKCIJA** - služi za proračun advektivnog člana dinamičke jednačine, i čini je podprocedura **ADVMKARST**. U okviru ove programske jedinice određuje se minimalno vreme potrebno da karakteristika preseče dato polje, dok se prostorna interpolacija vrši u podproceduri **INTERP**.
 - ♦ **DIFUZIJA** - koristi se za proračun difuznog člana dinamičke jednačine, a sastoji se od četiri podprograma. Procedure **KOEFDIFU** i **KOEFDIFV** se koriste za definisanje potrebnih koeficijenata u ξ i η pravcu, dok podrutine **KSIDIFUZIJA** i **ETADIFUZIJA** služe za proračun jediničnih proticaja **TDMA** metodom.
 - ♦ **PROPAGACIJA** - podprogram koji služi za proračun kombinovanog dejstva jednačine kontinuiteta i preostalih članova dinamičke jednačine (pritiska i smičućih napona na površini i dnu), i sastoji se od pet podprocedura. U podprogramu **KOEFICIJENTI**, koji uključuje podrutinu za proračun koeficijenta trenja **KOFTRENJA**, i podrutinu za obnavljanje računске kote dna **KTDNA**, izračunavaju se koeficijenti linearizovane jednačine kontinuiteta (Poglavlje 4). Na osnovu ovih koeficijenata, podrutine **KSIPRAVAC** i **ETAPRAVAC** izračunavaju priraštaje dubine Δh u ξ i η pravcu, da bi zatim podprocedura **BRZINE** odredila konačne vrednosti brzina u narednom vremenskom trenutku. Kako je sada nivo vodnog ogledala za naredni vremenski trenutak izračunat, poslednja podrutina **POKGRAN** koristi se za korigovanje aktivnih i pasivnih računskih tačaka.
- **BRZINEKART** - podprogram za transformaciju krivolinijskih komponenti brzina u kartezijske;
- **NANOS** - podprogram za proračun transporta suspendovanog nanosa, deformacije rečnog korita i granulometrijske zastupljenosti frakcija mešavine na dnu. Sastoji se od sledećih podrutina :
 - ♦ **DKAR** - podprogram za definisanje zrna d_{50} i d_{90} ,
 - ♦ **KOFTRENJA** – podprogram za proračun koeficijenta trenja,
 - ♦ **BRZPADA** - podprogram kojom se definiše brzina taloženja određene frakcije,
 - ♦ **GUSVODE** - podprogram za određivanje gustine suspenzije na osnovu koncentracije suspendovanog nanosa,

- ♦ **BRZINEKRIV** – podprogram za transformaciju kartezijanskih komponenti brzina u krivolinijske,
 - ♦ **SNAN** - podprogram za proračun održanja mase suspendovanog nanosa. Kako je i u prethodnim poglavljima navedeno, ovaj deo proračuna se shodno metodi razlomljenih koraka rastavlja na advektivni deo, koji se rešava u podrutini **SNANADV**, i difuzni deo koji se rešava u podrutini **SNANDIF**. Advektivni deo proračuna se sastoji od podprograma za interpolaciju brzina između dva vremeska nivoa - **TINTERP**, zatim podprograma za proračun prostornih izvoda brzina i izvoda koncentracija - **IZVBRA** i **IZVCNAN**, kao i podprograma za prostornu interpolaciju koncentracija na mestu preseka karakteristika - **CINTERP**, podprograma za određivanje koncentracije na dnu po *Rouse*-ovoj jednačini - **KONCDNO**, i podrutine za proračun masenog fluksa erozije i deponovanja - **IZVORPONOR**. Podprogram za proračun difuzije, slično kao i kod proračuna strujanja, sadrži podprogram za definisanje koeficijenata - **KOEFDIFSNAN** (*ADI* metoda), i dve podrutine za proračun koncentracija u ξ i η pravcu *TDMA* metodom - **KSIPRAVAC** i **ETAPRAVAC**.
 - ♦ **DIVQ** – podprogram za proračun divergencije fluksa vučenog nanosa,
 - ♦ **KONCDNO** – podprogram za određivanje koncentracije na dnu po *Rouse*-ovoj jednačini,
 - ♦ **IZVORPONOR** - podprogram za proračun masenog fluksa erozije i deponovanja,
 - ♦ **AKTIVNISLOJ** - podprogram za proračun parametara aktivnog sloja (E_m , S_{pk}),
 - ♦ **KOEFNAN** - podprogram za proračun koeficijenata linearizovanih jednačina održanja mase aktivnog sloja i globalne jednačine održanja mase na dnu (Poglavlje 4),
 - ♦ **AKTIVNISTRAT** – podprogram za obnavljanje granulometrije i debljine aktivnog podsloja na kraju računskog koraka.
- **TECPLOT** - podprogram koja služi za generisanje izlazne datoteke u formatu potrebnom za prikaz rezultata u programskoj aplikaciji *TECPLOT360*;
 - **TIZLAZ** - podprogram za vremenski ispis rezultata za definisane računске čvorove,
 - **PRIKAZREZ** – podprogram za iniciranje prikaza rezultata u realnom vremenu programskom aplikacijom *MATFOR4*.



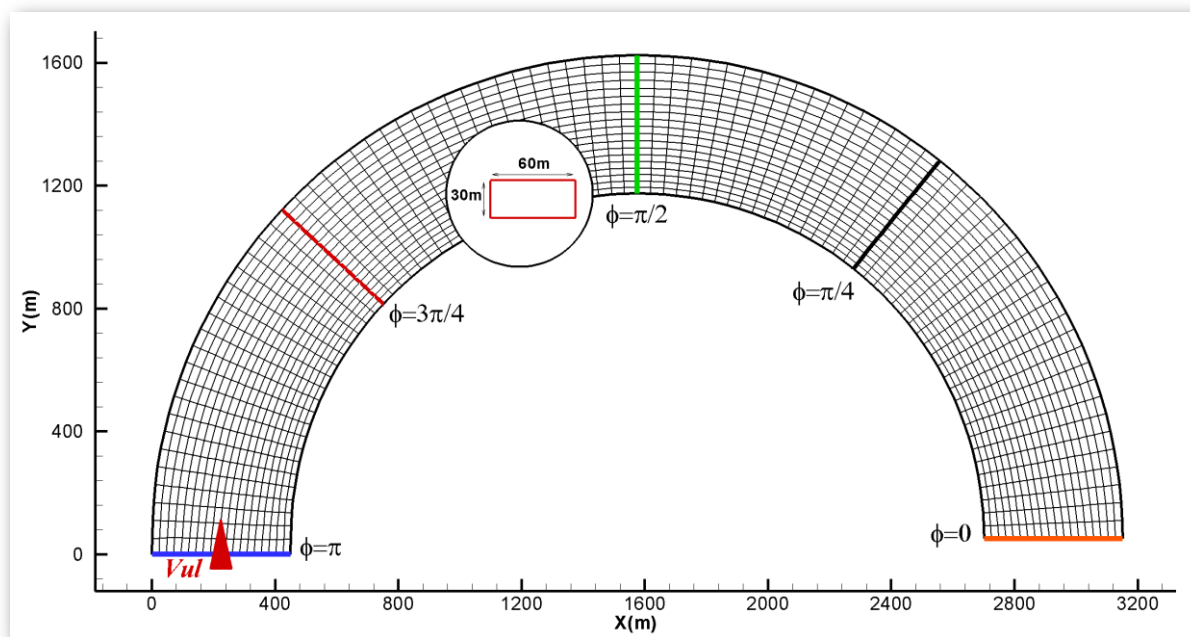
6. Analiza rezultata

Poslednja faza u procesu matematičkog modeliranja tečenja i transporta nanosa ima za cilj verifikaciju formiranog numeričkog modela i potvrdu valjanosti rezultata. Primenom adekvatnih test-primera, numerički model se testira da bi se otklonili njegovi mogući nedostaci i utvrdila tačnost dobijenih rezultata, kao i da bi se definisali odgovarajući numerički parametri bitni za njegovu oblast primene (stabilnost ili numerička greška). Da bi model bio u stanju da aktivira sve elemente koji su u njega implementirani, i na taj način demonstrira sve prednosti (mane) primenjenih numeričkih metoda (Poglavlje 3 i 4), potrebno je za test-primere koristiti prvenstveno prirodne vodotoke koje karakterišu kompleksni geometrijski i morfološki uslovi. Njihova neujednačena strujna slika, kombinovana sa složenim uslovima kretanja nanosa predstavlja najpodesnije stanje za kvalitetnu verifikaciju jednog matematičkog modela. Pored ovih “prirodnih” test-primera, čija realizacija podrazumeva zahtevna terenska merenja (merenja u prirodi), za testiranje numeričkih modela mogu se koristiti još i merenja u laboratoriji (jeftinija ali sa problemom modelske sličnosti), kao i određene zakonitosti iz oblasti klasične hidraulike. Takođe, u nedostatku navedenih rešenja u praksi su često i jednostavni šematski modeli, koji mogu dobro da posluže pri testiranju i analizi pojedinih karakterističnih delova modela.

U ovom radu formirani numerički model će se testirati na 5 različitih test-primera. U prva dva slučaja, primeniće se šematski model kanala u krivini i pravog kanala sa usamljenim ostrvom. Na prvom primeru testiraće se advektivni član jednačine održanja količine kretanja i član održanja mase suspendovanog nanosa, kao karakteristični elementi numeričkog modela koji su rešavani *Metodom karakteristika*, dok će se na primeru kanala sa ostrvom testirati sposobnost modela da menja aktivnu oblast strujanja. Za ova dva modela ne postoje merenja, već se oni koriste isključivo za testiranje parametra (efikasnost, tačnost) primenjenih numeričkih metoda. Za treći uporedni test-primer, koristiće se rezultati merenja strujne slike i transporta nanosa na deonici reke *Missouri* (Spasojević, Muste, Holly, Jr. 2001), dok će se za četvrti slučaj primeniti merenja istog tipa na deonici reke *Atchafalaya* [Spasojević, Muste 2000]. Za obe ove lokacije kao uporedjenje sa rezultatima numeričkog modela koristiće se merenja strujne slike - komponente brzina u i v , nivoa vodnog ogledala Z_V , kao i koncentracije suspendovanog nanosa C_k i granulometrijske zastupljenosti β_k . Kao poslednji test primer uzeće se deonica *akumulacije HE “Zvornik”* na reci Drini, koji će se prvenstveno iskoristiti za testiranje parametarskog postupka sušenja i kvašenja priobalnog područja na slučaju prirodnog vodotoka.

6.1. Šematski model kanala u krivini

Za prvi uporedni test-primer uzet je hipotetički slučaj kanala u krivini, pri skretnom uglu od 180° (Slika 6.1). Izabrana deonica je prizmatični kanal pravougaonog poprečnog preseka, sa širinom korita od 475 m , i dužinom od 4250 m , merenom duž ose kanala. S obzirom na to da je osnovna svrha ovog modela testiranje advekcije, za pad dna kanala usvojena je vrednost od $I_{dna}=0.0\%$ (horizontalno dno). Na osnovu ovih geometrijskih elemenata, izabran je potom kao optimalan odnos stranica računске ćelije odnos od $1:2$, što je dalo prosečne dimenzije pravougaone računске ćelije od oko $\Delta x=60\text{ m}$ i $\Delta y=30\text{ m}$. Kao rezultat dobijena je računska mreža dimenzija 86×20 , koja broji ukupno 4300 tačaka. Ulazni i izlazni presek postavljen je na levom ($\varphi=\pi$), odnosno desnom kraju kanala ($\varphi=0$), dok su sve ostale granice tretirane kao nepropusne. Situacija šematskog kanala, “prekrivenog” sa usvojenom računskom mrežom i kontrolnim presecima, prikazana je na slici 6.1.



Slika 6.1 Geometrijske karakteristike kanala u krivini
pri skretnom uglu od 180°

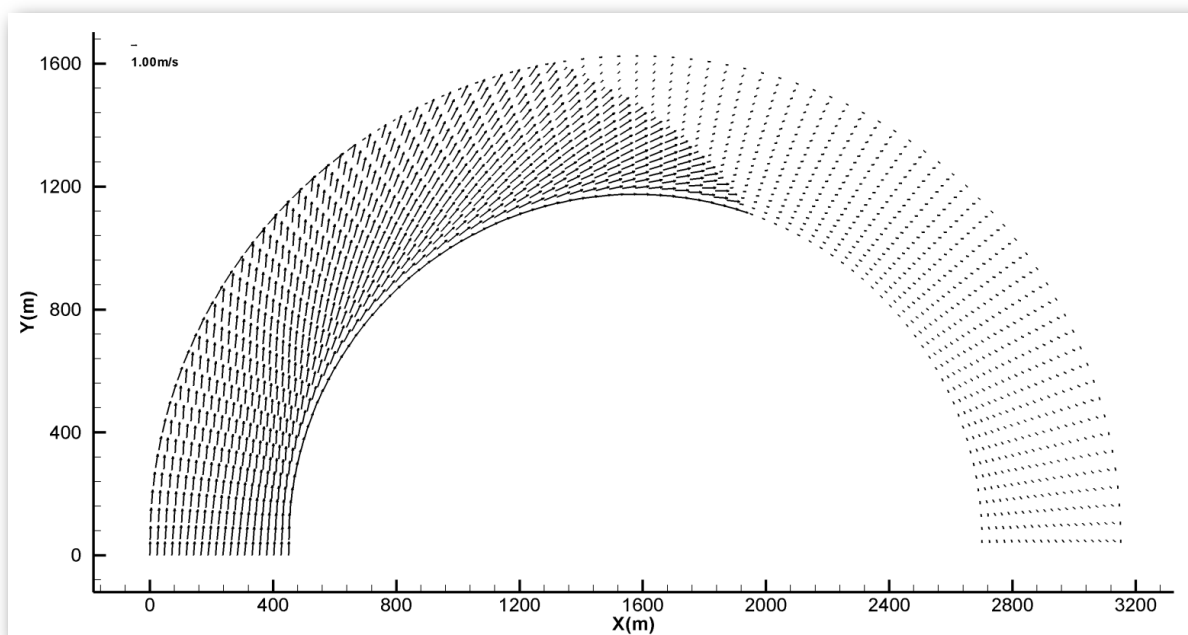
Kako je ranije navedeno, advektivni članovi zbog svoje matematičke prirode predstavljaju najosetljiviji deo numeričkog modela, i to bilo da se radi o jednačini promene količine kretanja ili o jednačini održanja mase suspendovanog nanosa. Da bi se istovremeno eliminisali numerički problemi (stabilnost, numerička difuzija), i povećala efikasnost i oblast uticaja (oštro čelo),

advektivni članovi su u ovom radu rešavani *Metodom karakteristika* - modelom koji najviše odgovara njihovom matematičkom karakteru. Shodno tome dalja analiza će se isključivo fokusirati na testiranje advektivnog člana, i to samo u dinamičkoj jednačini - advektivni pronos količine kretanja. S obzirom na to da je advektivni pronos suspendovanog materijala numerički rešavan na potpuno identičan način, prethodno dobijeni zaključci će biti u potpunosti validni i pri modeliranju tog procesa.

Da bi se neustaljeno tečenje uopšte moglo primeniti kao test analiza bilo kakvog tipa, ono zahteva da se u kanalu kao prvo definiše početno stanje u vidu ustaljenog strujanja. Kako bi se izbegli i eliminisali bilo kakvi uticaji ostalih članova u dinamičkoj jednačini (difuzija i propagacija), uspostavljanje ovog stanja u kanalu vršeno je isključivo posredstvom advekcije. Kao posledica toga rezultujući vektori brzine u tom slučaju ne poseduju realnu fizičku orijentaciju i intenzitete (kod krivine pravci vektora brzine prate geometriju kanala), već “pokušavaju” da što duže zadrže ulazni intenzitet i usmerenje (shodno teoriji advekcije). Zadavanjem uniformnog rasporeda brzina sa vrednostima od $V_{ul}=0.5035 \text{ m/s}$ kao graničnog uslova na uzvodnoj granici (presek $\varphi=\pi$ na slici 6.1), a svih ostalih brzina u kanalu da su jednake nuli, model za usvojeni vremenski korak od $\Delta t=200 \text{ s}$ u kanalu formira ustaljeno strujanje sa vrednostima ukupnih vektora brzina jednakim ulaznoj brzini. Kao uslov na čvrstim granicama korišten je tzv. “*slip condition*”, tj. uslov da je kontravarijanta brzine upravna na konturu jednaka nuli.

Za analizu i testiranje numeričkog modela advekcije izabran je slučaj “oštrog čela” brzine, kao jedno od najzahtevnijih hidrauličkih stanja posmatrano sa strane numeričkog modeliranja. Ono što karakteriše ovo stanje, jeste izuzetno nagla i trenutna promena brzine u vodotoku, koja se manifestuje kao oštar front koji se kreće u smeru toka. Da bi se ovakvo stanje formiralo i u šematskom modelu kanala, na uzvodnoj granici je tokom intervala od jednog vremenskog koraka brzina od $V_{ul}=0.5035 \text{ m/s}$ povećana petostruko, na $V_{ul}=2.5174 \text{ m/s}$. Ovakva nagla promena uzvodnog graničnog uslova, momentalno je uzrokovala intenzivni porast brzine i pojavu oštrog čela. Kako bi model mogao da pravilno simulira stanje čiste advekcije, iz proračuna su kako je već ranije navedeno isključeni koraci propagacije i difuzije. Takođe, pošto se ovde razmatra kanal u krivini a ne pravolinijska deonica, front porasta brzine nastao na ulazu se duž deonice ne rasprostire translatorno, zadržavajući pri tom ortogonalnost sa čvrstom granicom, već se s obzirom na različite dužine podužnih traka on kreće u vidu zakošenog čela, kod koga spoljni kraj (konkavna strana krivine) čela “kasni” u odnosu na unutrašnji (konveksna strana). Naime, jedini razlog zbog čega vektori brzine duž deonice uopšte i menjaju svoj pravac u odnosu na ulazne (zadate) vektore, jeste unutrašnja (konveksna) strana krivine. S obzirom na to da duž ove

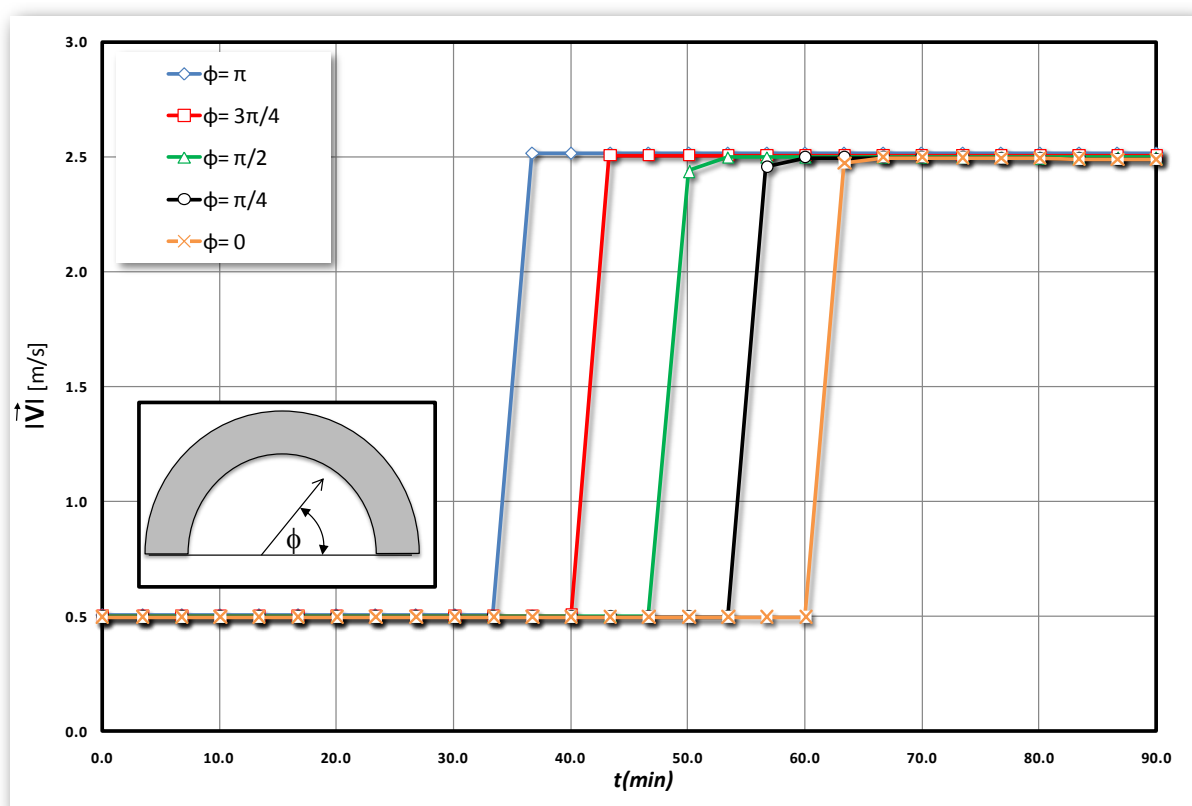
granične linije “*slip*” granični uslov usmerava vektore brzine tako da prate samu konturu kanala, shodno prirodi advekcije oni sada kao takvi izazivaju zakrivljenje brzina u preostalom delu struje. Kao što se i vidi sa slike 6.2 ovo zakrivljenje je najintenzivnije duž pravaca uz samu unutrašnju konturu, dok idući ka spoljnoj strani krivine ono polako opada, tj. uticaj konveksne granice na struju se sve više gubi. Imajući prethodno navedeno u vidu, može se reći da se vektori brzine formirani na unutrašnjoj strani krivine ponašaju praktično kao granični uslov za preostali deo kanala. Stanje za slučaj čela brzine, koje je dostiglo polovinu dužine deonice, prikazano je u vidu rezultujuće strujne slike na slici 6.2.



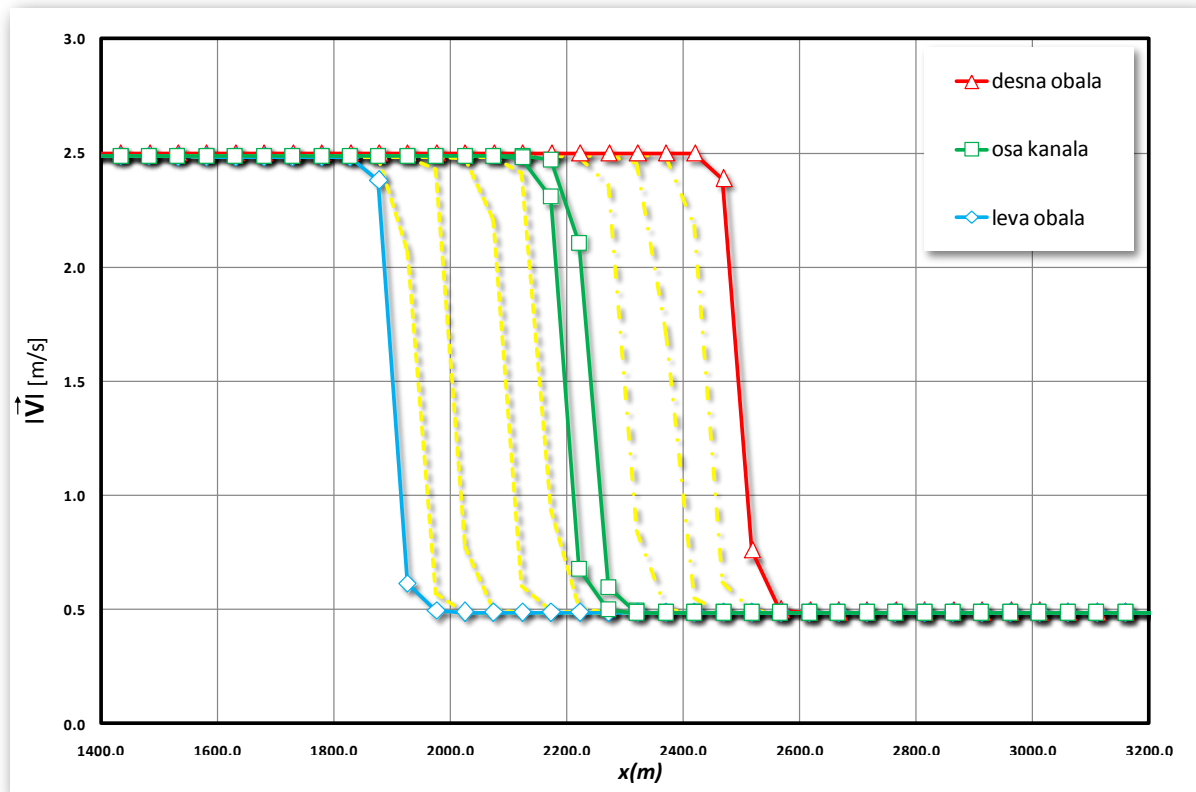
Slika 6.2 Strujna slika kanala u krivini
pri napredovanju oštrog čela brzine za slučaj “čiste” advekcije

Kao što se može videti na slici 6.3, gde je prikazana vremenska promena ukupnog vektora brzine u karakterističnim presecima, nakon 36.72 minuta od početka simulacije, poremećaj se prvo formira u najuzvodnijem (graničnom) preseku ($\varphi=\pi$). Nagli skok brzine je u ovom preseku označen plavom bojom. Kako na ovu hipotetičku struju trenje, pritisak i difuzija nemaju nikakvog uticaja, front se u jednakim vremenskim intervalima od po 6.66 min ($2\Delta t$) prenosi zatim i na preostala 4 karakteristična profila ($\varphi=3\pi/4$, $\varphi=\pi/2$, $\varphi=\pi/4$, $\varphi=0$), koji su zbog prirode analize raspoređeni na jednakom rastojanju duž deonice. U poslednji računski profil ($\varphi=0$) čelo stiže u $t=63.36$ min. Shodno obliku i položaju fronta, za referentnu traku, duž koje su formirani dijagrami na slici 6.3, uzeta je srednja linija sa indeksom $j=10$. Ono što se može zaključiti sa

slike 6.3 jeste, da se računski diskontinuitet brzine nizvodno translira bez pojave bilo kakvog oblika deformacije rešenja koje je karakteristično za klasične modele advekcije. Trenutna promena brzine, uzrokovana na ulazu u deonicu, se u svim kontrolnim presecima ostvaruje tokom samo jednog vremenskog intervala. Nagli skok intenziteta brzine, koji se u ovom slučaju kvantifikuje kao petostruko povećanje u odnosu na početnu vrednost, model simulira kao oštar front, koji ni u jednoj od izabranih kontrolnih preseka ne pokazuje prisustvo numeričke difuzije ili značajnijih (nefizičkih) oscilacija rešenja. Zanimljivo mala deformacija ovog tipa uočljiva je jedino u presecima $\varphi=\pi/2$ i $\varphi=\pi/4$, gde se kao direktna posledica prostorne interpolacije javlja odstupanje brzine za oko 2.5 %. Dobijeni zaključci se mogu dodatno potvrditi i na osnovu slike 6.4, na kojoj je prikazan trenutni položaj čela brzine za stanje kada je front dostigao sredinu deonice (strujna slika prikazana na slici 6.2). I ovde se, osim zanemarljivih odstupanja prouzrokovanim prostornom interpolacijom, može primetiti potpuno odsustvo numeričke difuzije, ili bilo kakvog drugog tipa deformacije rešenja. Takođe, rezultati prikazani na ovom dijagramu dodatno potvrđuju prethodno navedenu tvrdnju, a to je da se oštar front brzine u krivini, shodno dužinama traka, kreće u iskošenom položaju u odnosu na ulaz, tj. da je “najbrži” kraj čela uz desnu obalu (crvena linija), a “najsporiji” uz levu granicu (plava linija).



Slika 6.3 Dijagram promene brzine kroz vreme u izabranim kontrolnim presecima



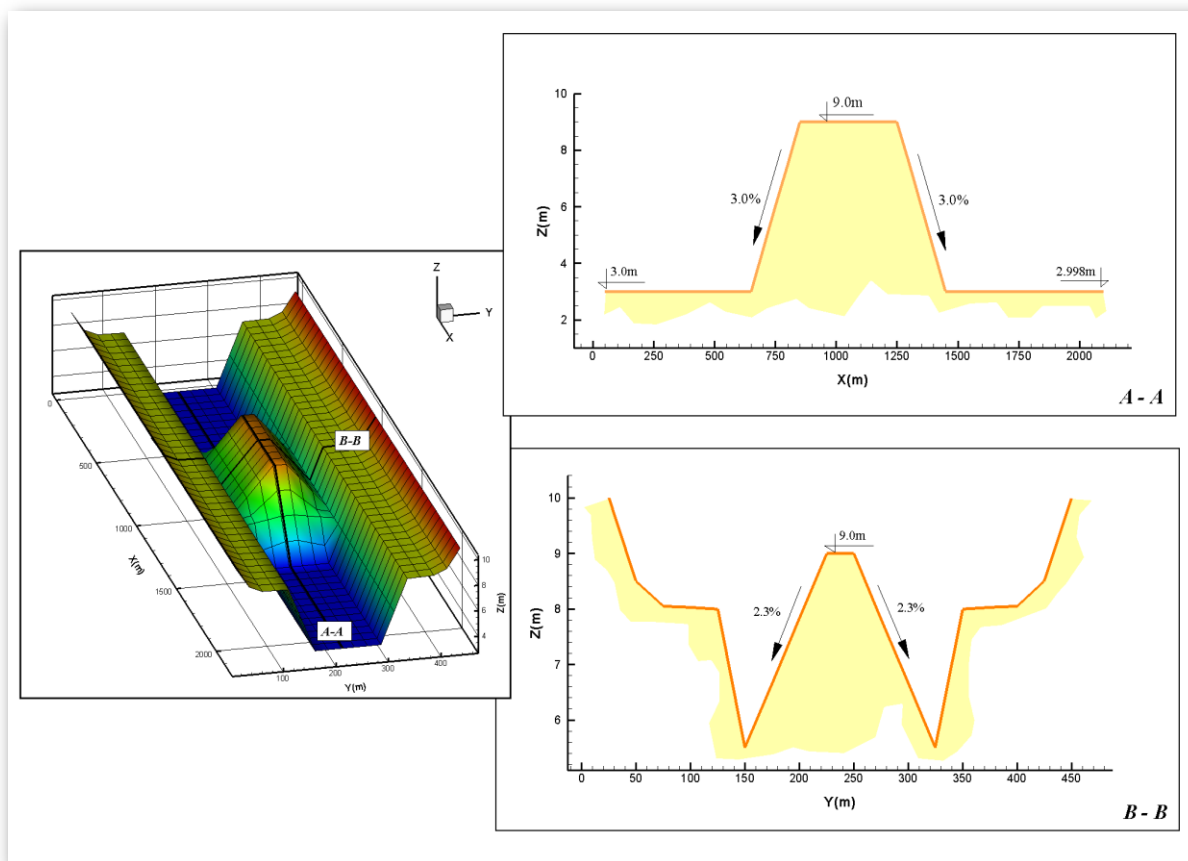
Slika 6.4 Položaj fronta brzine po poprečnom preseku kanala za slučaj kada je čelo dostiglo sredinu deonice

Simulacija fenomena “oštrog čela” primenom *Metode karakteristika* demonstrirala je visok stepen numeričke stabilnosti i tačnosti dobijenih rezultata. Nezavistan od *Courant* - ovog broja, ovaj model se uz primenu kvadratnog ili *Holly-Preissmann* - ovog modela prostorne interpolacije (zavisno od uloge samog modela), pokazao kao veoma stabilan i pouzdan alat za modeliranje advektivnih procesa. Dobijena veoma mala zastupljenost numeričke greške, i to u vidu zanemarljivih oscilacija i difuznog rasplinjavanja, ukazuje na to da je ovim modelom moguće sa veoma velikom tačnošću modelirati advektivna kretanja čak i pri ekstremnim uslovima.

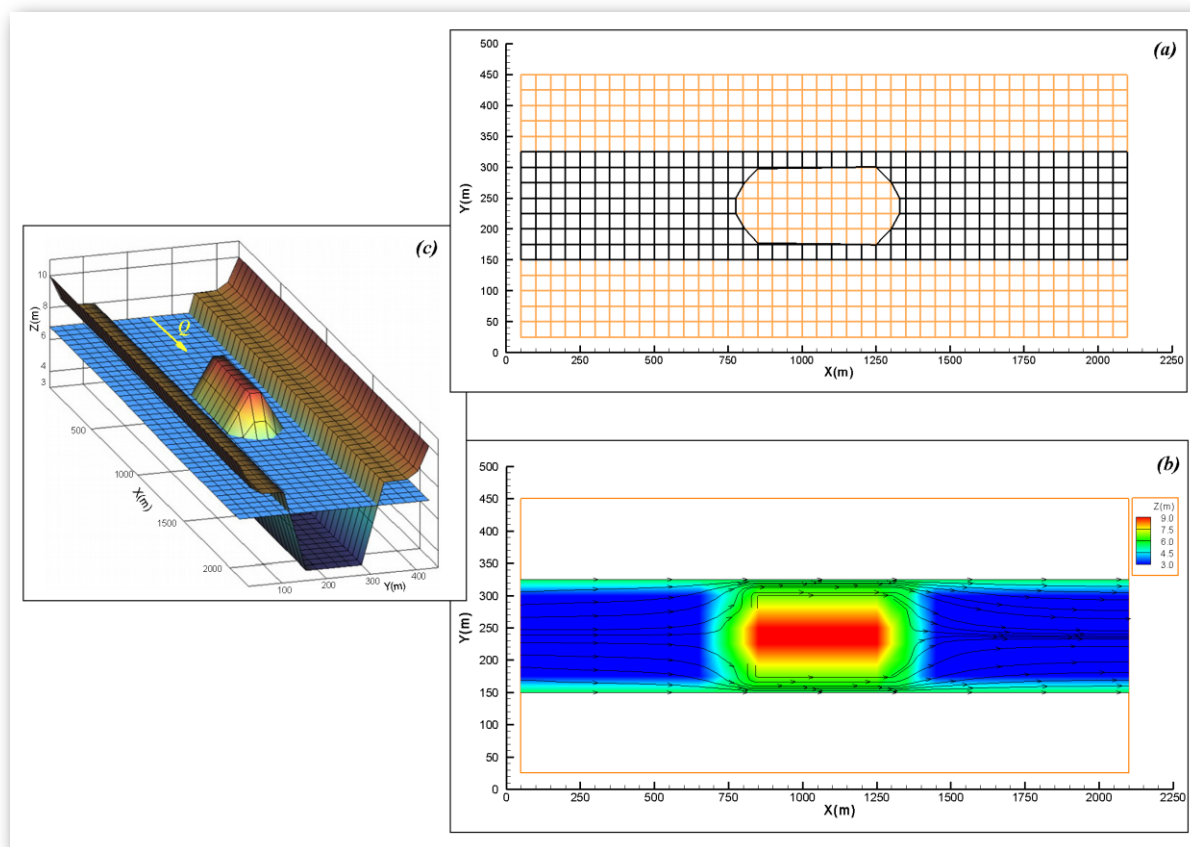
6.2. Šematski model pravog kanala sa ostrvom

Jedan od osnovnih nedostataka numeričkih modela za proračun strujanja otvorenih tokova koji su danas u širokoj upotrebi, jeste nedostatak mogućnosti promene aktivne oblasti proračuna u zavisnosti od hidrauličkih uslova u toku. Isključivanje iz modela procesa plavljenja i sušenja priobalnog područja, ostrva ili veštačkih objekata, u mnogome može da utiče na pravilno i tačno simuliranje kako hidrauličkog stanja u toku, tako i na transport nanosa i morfološke promene korita. Kao jedan od primarnih ciljeva ovog rada, razvijen je u tu svrhu tzv. *parametarski postupak* (Poglavlje 3 i 4). Koncipiran tako da se uz neznatno opterećenje numeričkog modela omogući uvođenje svih ovih efekata u proračun, ovaj postupak prvenstveno ima za cilj postizanje što tačnije i verodostojnije slika prirodnog strujanja. Zasnovana na uključivanju /isključivanju računskih tačaka u zavisnosti od graničnih vrednosti zadatih parametara, promenom aktivne oblasti procedura praktično simulira neustaljenost toka pri promeni geometrijskih uslova domena, što pre svega podrazumeva uključivanje u kompletan proračun (hidraulički i nanosni) efekata kao što su ; plavljenje priobalnog područja i “geometrijske neustaljenosti” objekata lokalnog karaktera (usled variranja nivoa vodnog ogledala ostrva i objekti u toku bivaju u manjoj ili većoj meri izloženi struji). Međutim, ono što se javlja kao problem u vezi ove procedure, jeste sama njena verifikacija. Testiranje i verifikovanje ovakvog postupka prvenstveno zahteva podatke o strujnoj slici i domenu strujanja, koji su vezani isključivo za slučaj neustaljenog tečenja. Pod ovim se podrazumevaju odgovarajuće vremenske serije izmerenih parametara kao što su brzine, nivoi i podaci o geometrijskoj promeni oblasti strujanja duž celog računskog domena. Takođe, ukoliko analiza pored hidrauličkih elemenata uključuje i nanosne procese, isti tip merenih podataka potreban je i za nanosne parametre (koncentracija suspendovanog nanosa, granulometrijska zastupljenost). Ono što je problem sa ovakvim tipom podataka, jeste da su oni veoma retki, bilo da se radi o prirodnim vodotocima ili o laboratorijskim modelima. Istovremena “neustaljena” merenja svih relevantnih elemenata (hidraulički parametri, kompletan set nanosnih parametara, aktivna oblast strujanja), iziskuju veoma zahtevne tehničke uslove (merni instrumenti), kao i znatne ekonomske izdatke (terenska merenja su najskuplji vid prikupljanja podataka). Iz tog razloga testiranje valjanosti postupka za definisanje aktivne oblasti će se u prvom slučaju sprovesti na jednostavnijem šematskom modelu pravog kanala sa usamljenim ostrvom, dok će se u drugom slučaju koristiti test model Zvorničke akumulacije, za koju postoje i delimična merenja protoka i nivoa. U ovom podpoglavljju obradiće se šematski model.

Za formiranje modela pravog kanala sa ostrvom, koristiće se hipotetički kanal prikazan na slici 6.5. Izabranu deonicu kanala dužine 2200 m , i nagiba dna od 0.0001% , čini složeni poprečni presek, koji je sastavljen od trapeznog dela širine 125 m , i dve inundacione zone (leva i desna) širine oko 100 m . Na sredini toka nalazi se ostrvo dužine 800 m , i relativne visine 6.0 m (u kruni), čiji se nagibi kosine kreću od 3% u podužnom, do 2.3% u poprečnom smeru. Da bi se proračun neustaljenog strujanja sproveo, potrebno je kao i u prethodnom slučaju prvo definisati početne i granične uslove. S obzirom na to da ne postoje mereni podaci za ovaj slučaj, za početno stanje usvojena je strujna slika i prostorni raspored nivoa dobijen zadavanjem proticaja od $Q=30.0\text{ m}^3/\text{s}$ na uzvodnom kraju kanala. Na slici 6.6 prikazana je odgovarajuća aktivna računaska mreža (a), rezultujuća strujna slika (b), kao i prostorni raspored nivoa za slučaj ustaljenog stanja (c).



Slika 6.5 Geometrijske karakteristike pravog kanala sa ostrvom

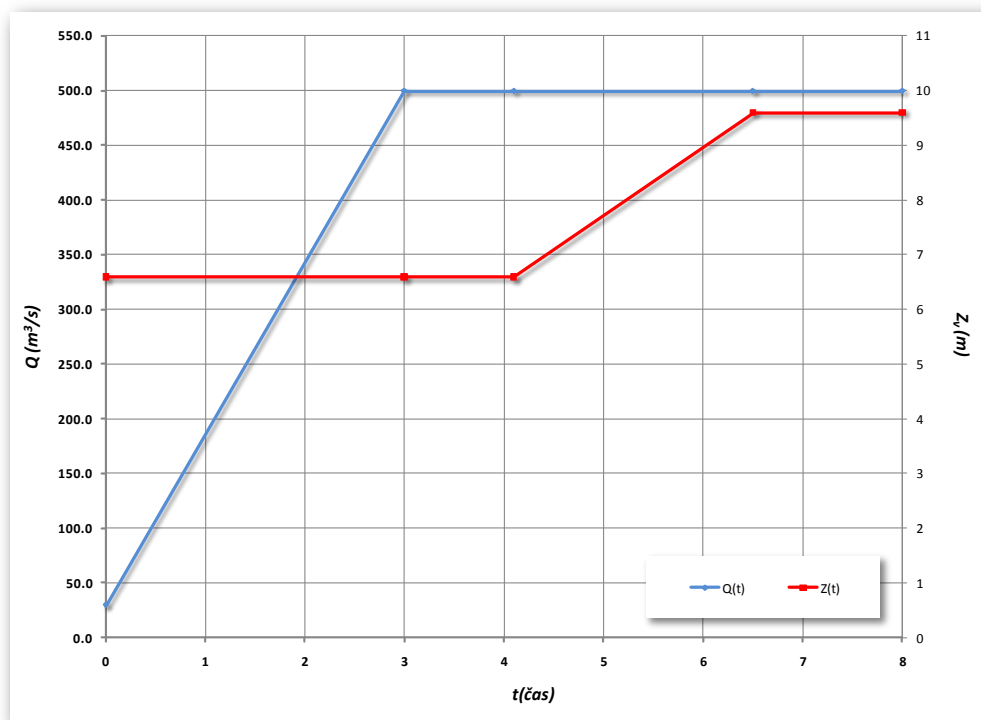


Slika 6.6 Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=0.0$ čas (ustaljeno stanje) : (a) - aktivna računska mreža, (b) – rezultujuća strujna slika, (c) - prostorni prikaz kanala

Zadavanjem nizvodnog graničnog uslova u vidu konstantnog nivoa $Z_{vniZV}=6.60$ m, model pri proticaju od $Q=30.0$ m³/s uspostavlja ustaljeno stanje u kanalu, sa rezultujućim nivoom na uzvodnom kraju od $Z_{vuZV}=6.79$ m. Kako dobijeni raspored kote nivoa duž kanala pokazuje da su oni niži za oko 3.2 m od najviše kote inundacionih zona (leve i desne), i za oko 2.2 m od najviše kote ostrva, zadata računska mreža, koja pokriva kompletnu fizičku oblast kanala (označena je oker bojom na slici 6.6-(a)), u tom slučaju nije aktivirana u svim svojim računskim tačkama. Upoređenjem dubine vode i zadatog graničnog parametra $h_g=0.1$ m (parametar se definiše zavisno od slučaja), model je iz proračuna isključio one računске tačke kod kojih nije zadovoljen uslov da je $h>h_g$, sprovodeći tako proračun samo u jednoj uskoj oblasti (na slici 6.6-(a) prikazana crnom bojom). Za razliku od početne računске mreže, koja je dimenzija 42×18 sa 738 tačaka, ovu aktivnu oblast sada čini mreža dimenzija 8×42 , koja uz izuzimanje ostrvskog dela broji ukupno 294 tačke. Kao rezultat proračuna, na slici 6.6-(b) prikazana je strujna slika prevučena preko konture dna korita. Na slici se jasno vide uticaji isključenih računskih tačaka.

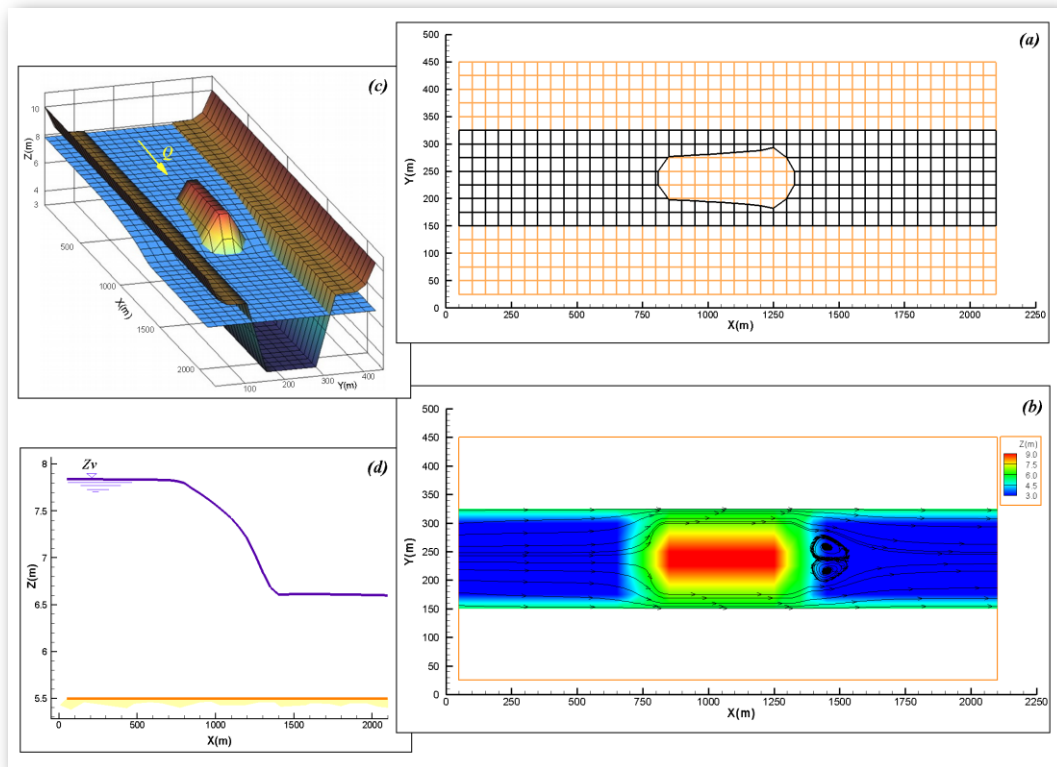
Nakon definisanja početnog stanja u obliku $Z_v=Z_v(x,y,t=0)$, $u=u(x,y,t=0)$ i $v=v(x,y,t=0)$, neustaljeno tečenje u kanalu uspostavlja se zadavanjem vremenske funkcije $Q=Q(t)$ na uzvodnom kraju kanala (uzvodni granični uslov u tački $i=1$), i funkcije $Z_v=Z_v(t)$ na nizvodnom kraju kanala (nizvodni granični uslov u tački $i=42$). Funkcije graničnih uslova grafički su prikazane na slici 6.7. Ovakvom naizmeničnom promenom proticaja na ulazu u kanal, i nivoa na njegovom izlazu, uspostavlja se u kanalu izuzetno složeno hidrauličko stanje, koje je potrebno za pravilno testiranje postupka sušenja i kvašenja.

U vremenskom trenutku $t=0.0$, u kanalu vlada ustaljeno stanje sa ulaznim proticajem od $Q=30.0 \text{ m}^3/\text{s}$. Pri konstantnom nivou na nizvodnom kraju kanala, proticaj se na ulazu u naredna

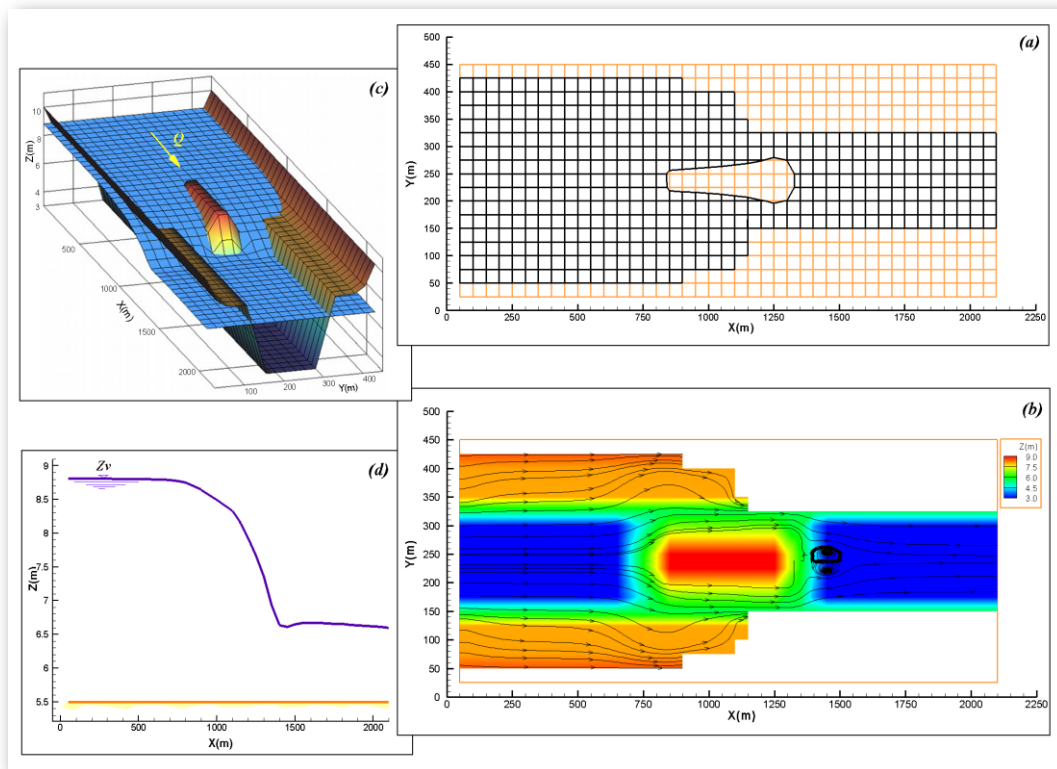


Slika 6.7 Dijagram uzvodnog i nizvodnog graničnog uslova

3.0 sata linerano povećava do $Q=500.0 \text{ m}^3/\text{s}$. Ovakav porast protoka neminovno dovodi do podizanja nivoa vodnog ogledala i porasta brzina u kanalu. Kako sada nivo vode raste, približno trapezna geometrija profila dovodi do poprečnog širenja vodnog ogledala, pri čemu se istovremeno sama aktivna oblast strujanja povećava. Kao posledicu toga, model u zavisnosti od parametra h_g sada aktivira (“kvasi”) dotada pasivne (“suve”) računске tačke, šireći na taj način aktivnu računsku mrežu i sam domen proračuna. Dobijeni rezultati za dva vremenska trenutka, $t=1.25 \text{ čas}$ i $t=3.60 \text{ čas}$, dati su na slikama 6.8 i 6.9.



Slika 6.8 Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=1.25$ čas : (a) - aktivna računaska mreža, (b) - rezultujuća strujna slika, (c) - prostorni prikaz kanala, (d) - podužni presek duž ose kanala



Slika 6.9 Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=3.60$ čas : (a) - aktivna računaska mreža, (b) - rezultujuća strujna slika, (c) - prostorni prikaz kanala, (d) - podužni presek duž ose kanala

Tečenje vode u kanalu sa suženjem preseka, koje je formirano postavljanjem ostrva na sredini toka, izaziva pojavu značajne denivelacije nivoa u zoni suženja. Ovakva "lokalna" promena nivoa, koja se zbog uspostavljenog mirnog režima tečenja definiše kao porast nivoa u uzvodnom smeru, u prvom slučaju iznosi oko 1.26 m , dok se u drugom njena vrednost kreće oko 2.25 m . Kao posledica ovakve denivelacije, na slici 6.8 uočava se da u odnosu na početnu aktivnu mrežu (Slika 6.6), broj aktivnih računskih tačaka za prvih 1.25 čas raste isključivo na ostrvskom delu. Porast nivoa vode uzvodno od ostrva na kotu od $Z_v=7.84\text{ m}$, "kvasi" tako 2 tačke na uzvodnom licu ostrva, i po jednu tačku sa leve i desne strane ostrva. Uz zadržavanje postojećih granica aktivne oblasti, ovo uključuje 4 nove tačke u proračun povećava sada broj aktivnih računskih tačaka na 298, pa se i sam domen proračuna menja. Uticaj ovog aktiviranja računskih tačaka, koje se nalaze na samom obodu ostrva, može se videti i na rezultujućoj strujnoj slici. Na njoj se primećuje da se kao posledica povećanja uzvodnog proticaja, i promena usled geometrije ostrva koje je izloženo toku, iza ostrva formira vrtlog. Otisak ostrva koji je prikazan na slici 6.8, ukazuje na to da promena pravca okvašenog zida od 5.5% blago usmerava strujnice dalje od ostrva (zbog relativno slabog intenziteta ovo skretanje nije vidljivo na slici 6.8), menjajući im pri tom i pravac i smer. Zbog svoje težnje da zadrže nametnuti smer, one u oblasti iza ostrva formiraju vrtlog, čiji intenzitet zavisi kako od intenziteta struje, tako i od oblika otpora. Brzine se u zoni uzvodno od ostrva kreću od 0.07 m/s u plitkim delovima, do 0.3 m/s u sredini toka, dok u uskom proticajnom delu zone ostrva one uzimaju vrednosti od 0.77 m/s (linija uz ostrvo) do 2.0 m/s . U nizvodnom delu prosečna brzina se kreće oko 0.3 m/s .

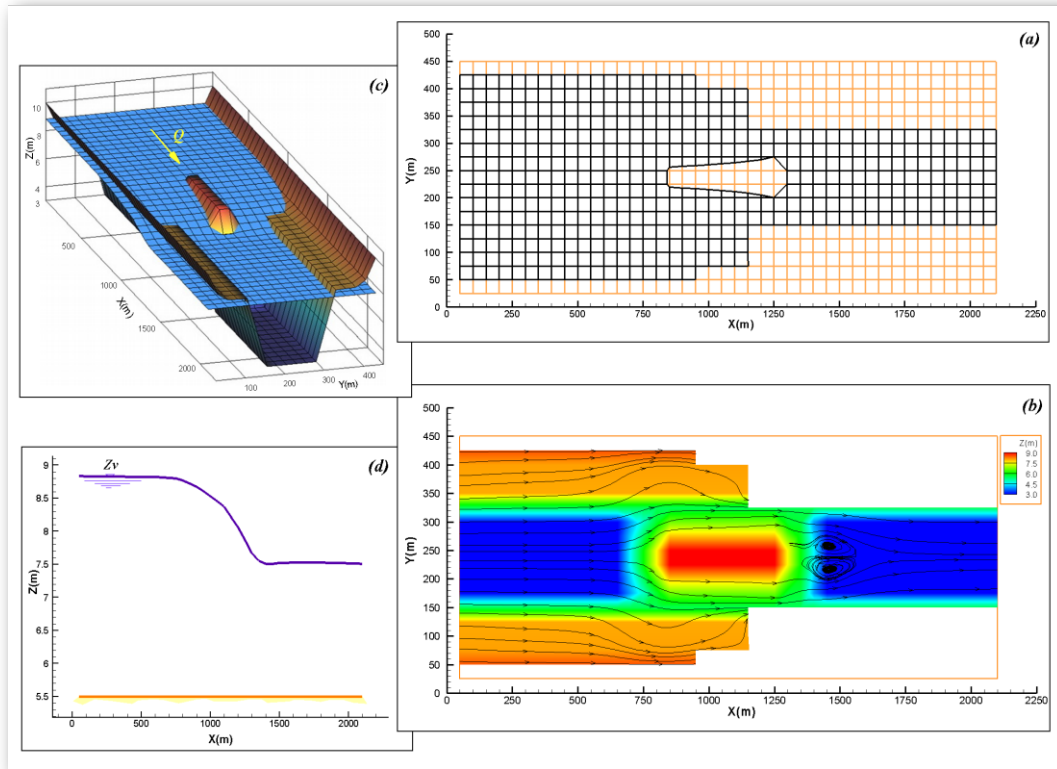
Daljim povećanjem protoka nivo na delu toka uzvodno od ostrva nastavlja da raste, sve do uspostavljanja proticaja od $Q=500.0\text{ m}^3/\text{s}$ u $t=3.0\text{ sata}$. Od tog trenutka, narednih 1.1 čas model upuštanjem konstantnog proticaja formira kvazi-ustaljeno stanje u kanalu, pri čemu se ostvaruje maksimalna denivelacija nivoa od oko 2.25 m . Kao uporedni presek uzet je vremenski trenutak $t=3.60\text{ čas}$, za koji su dobijeni rezultati prikazani na slici 6.9. Ostvareni nivo na ulazu u kanal ($i=1$) iznosi $Z_v=8.82\text{ m}$, što je za oko 0.33 m iznad kote dna na računskoj liniji $j=2$ i $j=17$. Kao što se i vidi na slici 6.9, uz nagib vodnog ogledala od oko 0.003% u oblasti uzvodno od ostrva, sračunati nivo plavi ovu zonu i uzvodno lice ostrva sve do poslednje računске linije. Na ovaj način se u odnosu na prethodno stanje aktivira dodatnih 150 računskih tačaka, zbog čega sada ova zona broji ukupno 286 računskih čorova. Takođe, na deonici samog ostrva, koja je dužine 800 m , uzvodni nivo od 6.67 m "kvasi" sada ukupno 83 nove računске tačke, što je za 49 tačaka više nego u prethodnom slučaju. Na nizvodnom delu kanala (posle suženja) nema nikakvih promena u poređenju sa prethodnim slučajem, pa broj aktivnih računskih tačaka ostaje 128.

Upoređujući trenutno stanje ($t=3.60\text{ čas}$) sa prethodnim vremenskim presekom ($t=1.25\text{ čas}$),

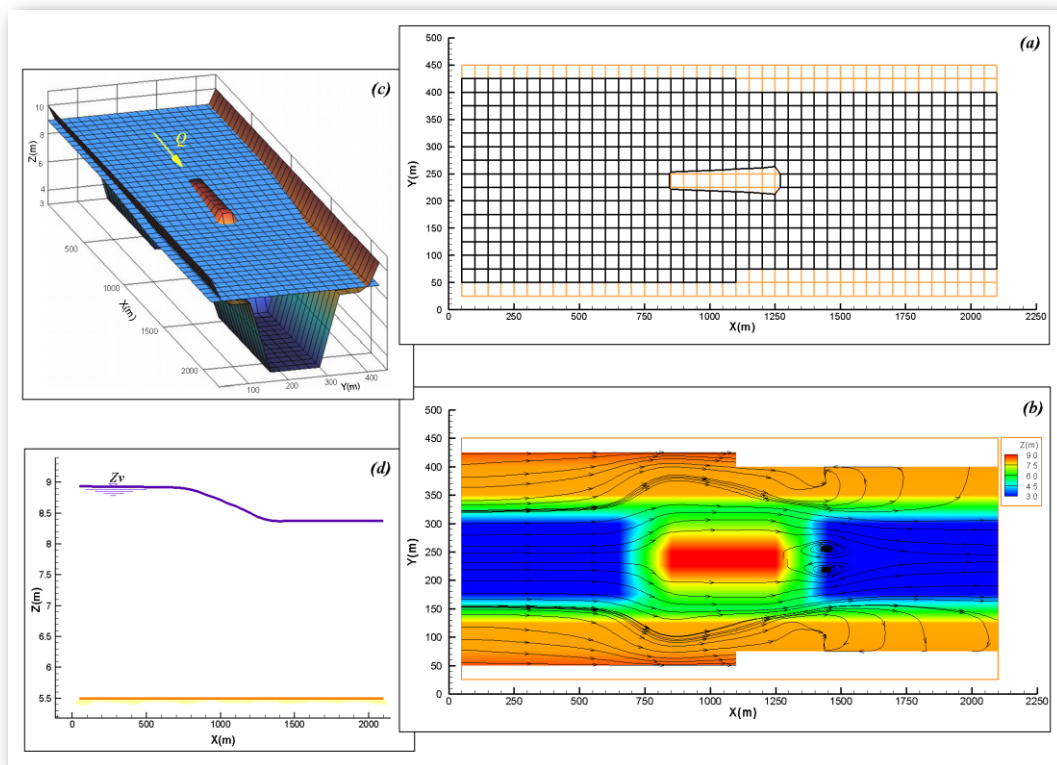
uočava se da skok uzvodnog nivoa od 0.98 m dovodi do aktiviranja dodatnih 199 računskih tačaka, što je povećanje za oko 70 % u odnosu na prethodni slučaj. Kao što je i ranije rečeno, ovo proširenje aktivne računске oblasti najintenzivnije je u zoni uzvodno od ostrva. Podizanje nivoa vode iznad kote dna inundacije, uslovalo je u ovoj oblasti plavljenje obe inundacione zone, u kojima se zatim uspostavilo sekundarno strujanje. Rezultujuća strujna slika ukazuje na to da je ovo tečenje relativno slabog intenziteta, sa strujnicama usmerenim mahom ka čvrstoj granici. Idući dalje nizvodno, aktivna oblast se zbog pada računске kote nivoa postepeno smanjuje, formirajući na taj način blagi prelaz sa većeg preseka na manji (u obliku postepenog suženja). U ovoj oblasti se pored suženja koje izaziva samo ostrvo, sada javlja i dodatno suženje (postepenog tipa), koje je izazvano promenom aktivnog domena strujanja. Takva “kombinovana” promena proticajnog preseka ima za posledicu formiranje izuzetno složene strujne slike, koju karakterišu intenzivne i nagle promene brzina (Slika 6.9-(b)), i to kako u samoj zoni suženja, tako i u oblasti nizvodno od ostrva (vrtlog). Radi poređenja, maksimalne brzine u ovoj zoni ostrva dostižu vrednosti od 1.8 m/s na uzvodnom licu, do 4.2 m/s na nizvodnom kraju ostrva. Što se tiče prosečnih vrednosti brzina u gornjem delu toka, u inundacijama se one kreću oko 0.1 m/s , dok u glavnom toku toka one uzimaju vrednosti od $0.2 \div 0.6\text{ m/s}$. Na nizvodnom delu kanala brzine se kreću od 0.4 m/s u plicim delovima, do 1.0 m/s u sredini toka.

Uspostavljanjem kvazi-ustaljenog stanja za proticaj od $Q=500.0\text{ m}^3/\text{s}$, sada se sa početkom u $t=4.1\text{ čas}$, promenom nivoa na nizvodnom kraju (Slika 6.7) formira novi ciklus neustaljenog tečenja. Pri konstantnom proticaju na uzvodnom kraju kanala, nizvodni nivo se za vremenski period od 2.4 sata linerano podiže sa početne vrednosti od $Z_{nizv}=6.6\text{ m}$, na maksimalnu vrednost od $Z_{nizv}=9.6\text{ m}$. Ovakav granični uslov za zadatak ima prvenstveno potapanje kompletnog ostrva, sa istovremenim uključivanjem celokupne računске mreže u proračun. Iz ovog segmenta proračuna izdvojena su tri vremenska preseka, koja su prikazana na slikama 6.10, 6.11 i 6.12.

Prvi presek, koji se odnosi na vremenski trenutak $t=4.8\text{ čas}$ (Slika 6.10), pokazuje neznatne promene u poređenju sa stanjem koje je prikazano na slici 6.9. Porast nizvodnog nivoa za 0.9 m dovelo je do “kvašenja” samo 7 novih računskih tačaka lociranih u zoni ostrva, dok je uzvodni deo zbog male promena nivoa od oko 0.20 m u tom pogledu ostao nepromenjen. Ovakve relativno male izmene u dimeziji aktivne računске mreže (ukupno 504 aktivne računске tačke) ne utiču bitno ni na postojeću strujnu sliku, kod koje se kao direktna posledica povećane potopljenosti ostrva od promena može primetiti samo delimičan porast u dimenzijama vrtloga. U gornjem delu kanala, vrednosti brzina ne pokazuju bitne razlike u poređenju sa prethodnim stanjem, dok se u zoni ostrva maksimalne vrednosti kreću od 1.8 m/s na uzvodnom, do 2.85 m/s na nizvodnom kraju.



Slika 6.10 Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=4.80$ čas : (a) - aktivna računaska mreža, (b) - rezultujuća strujna slika, (c) - prostorni prikaz kanala, (d) - podužni presek duž ose kanala



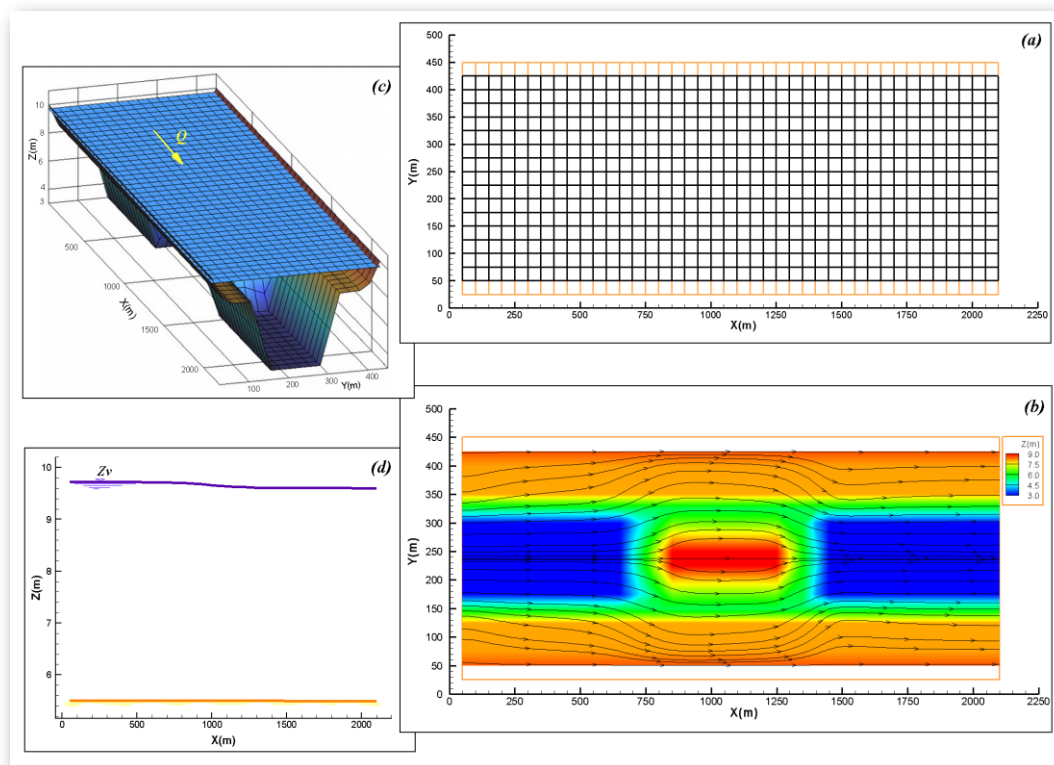
Slika 6.11 Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=5.50$ čas : (a) - aktivna računaska mreža, (b) - rezultujuća strujna slika, (c) - prostorni prikaz kanala, (d) - podužni presek duž ose kanala

Daljim podizanjem nizvodnog nivoa na kotu od $Z_{nizv}=8.375m$ ($t=5.5$ čas), voda počinje da se izliva u inundacione zone na nizvodnoj polovini kanala. "Kvašenjem" preostale tri računске linije sa obe strane nizvodnog dela toka, zajedno sa 6 tačaka postavljenih na linijama $j=2$ i $j=17$, aktivna računска oblast značajno se širi za dodatnih 120 računskih čvorova (Slika 6.11). Zbog ovakvog porasta nivoa ostrvo se dodatno potapa (dubine oko ostrva rastu), dok krana, koju kao i u prethodnom slučaju čine 18 računskih tačaka, i dalje ostaje suva. Kako se aktiviraju preostali delovi inundacije, primećuje se da za razliku od uzvodnog dela model u ovim nizvodnim inundacionim zonama formira jedan vid povratnog strujanja, koji je karakterističan sada za slučaj naglog suženja. Treba međutim imati u vidu da se ovde ne radi o klasičnom tipu suženja, kod koga su konturni uslovi unapred jasno definisani (fiksirani), već o vremenski i prostorno promenljivoj geometriji, kombinovanoj sa dodatnom preprekom u toku (ostrvo). Ovo stvara složenu strujnu sliku, koja se ne može posmatrati samo sa aspekta „čistog“ suženja, već se u razmatranje mora uzeti celokupna dinamika promene geometrije korita.

Oblik korita nameće da su rezultujuće brzine ovog sekundarnog toka relativno male. Njihove vrednosti se kreću oko 0.035 m/s, dok same dubine iznose 0.25 m. Kako se pri ovako malim dubinama i brzinama ne mogu formirati vrtlozi momentalno iza suženja (pojava karakteristična za slučaj klasičnog naglog suženja), strujnice se tada zakrivljuju na većem rastojanju, stvarajući pri tom gore pomenuto povratno strujanje u inundacijama. Analiza brzina preostalog dela toka pokazuje da se u oblasti nizvodno od ostrva njihove vrednosti kreću od 0.2 m/s u plitkim delovima, do 0.55 m/s na polovini toka, dok se vrtlozi, kao i u prethodnim slučajevima, formiraju odmah neposredno iza ostrva (direktna posledica odvajanja mlaza od konture ostrva). Što se tiče uzvodnog dela toka, porast nivoa za 0.1 m u odnosu na prethodni slučaj nije značajno uticao na brzine. One se u glavnom toku kreću u granicama od $0.15 \div 0.55$ m/s, dok se u inundacijama njihova prosečna vrednost iznosi oko 0.08 m/s.

Za poslednji vremenski presek uzet je trenutak $t=7.5$ čas (Slika 6.12). Nakon dostizanja maksimalne vrednosti nizvodnog nivoa od $Z_{nizv}=9.60$ m u vremenskom trenutku $t=6.5$ čas, model je narednih 1.5 sata pušten da uspostavi ustaljeno strujanje u kanalu. Dobijeni nivo na uzvodnom kraju kanala od $Z_{uzv}=9.725$ m obrazuje prosečni pad vodnog ogledala od 0.006 %. Kao što se vidi i na slici 6.12, rezultat proračuna pokazuje da ova kota vodnog ogledala aktivira celokupnu računsku mrežu, ostavljajući pri tom suvim samo granične računске linije $i=1$ i $i=18$, koje u ovom slučaju simuliraju visoku zonu obale. Kao posledica toga, rezultujuća strujna slika se u zonama uzvodno i nizvodno od ostrva u velikoj meri uniformiše, sa prosečnim intenzitetima brzine od 0.35 m/s u glavnom koritu, do 0.12 m/s u inundacijama. Iako je sada potpuno potopljena, zona ostrva se i dalje ponaša kao lokalna prepreka, koja najveći deo toka koncentriše

na oblasti između ostrva i korita. Brzine u ovom delu korita dostižu vrednosti i do 0.8 m/s (Slika 6.12-(b)). Iz tog razloga, brzine su na samoj kruni ostrva, gde su dubine znatno pliće (oko 0.6 m), manje i kreću se oko 0.22 m/s .



Slika 6.12 Rezultati simulacije za vremenski trenutak $t=7.50$ čas : (a) - aktivna računaska mreža, (b) - rezultujuća strujna slika, (c) - prostorni prikaz kanala, (d) - podužni presek duž ose kanala

Za proračun neustaljenog strujanja u kanalu sa ostrvom korišten je vremenski korak $\Delta t=100s$ sa maksimalno ostvarenom vrednošću Courant-ovog broja od $Cr=5.3$. Intenzivna promena proticaja na uzvodnom, i nivoa na nizvodnom kraju kanala, dovela je do formiranja složenih hidrauličkih uslova u toku. Dinamičku promenu nivoa u kanalu, kao jednu od posledica ovakvog strujanja, model je koristio za paralelnu deformaciju računske mreže. Na osnovu zadatog parametra h_g računske tačke su tokom simulacije isključivane iz aktivne oblasti, što je izazvalo istovremenu promenu konturnih uslova u toku samog proračuna. Od pravougaonog kanala sa ostrvom na sredini ($t=1.25$ čas), podizanjem uzvodnog nivoa je u narednom vremenskom preseku ($t=3.60$ čas) uspostavljena aktivna kontura u obliku postepenog suženja (prikazani vremenski preseki ne prikazuju trenutak uspostavljanja nove konture, već jedan od momenata karakterističnih za to stanje). Ovakvi novi konturni uslovi dodatno menjaju strujnu sliku, tako da ono što je do sada bilo strujanje u pravom kanalu, sada se transformiše na tečenje u kanalu sa

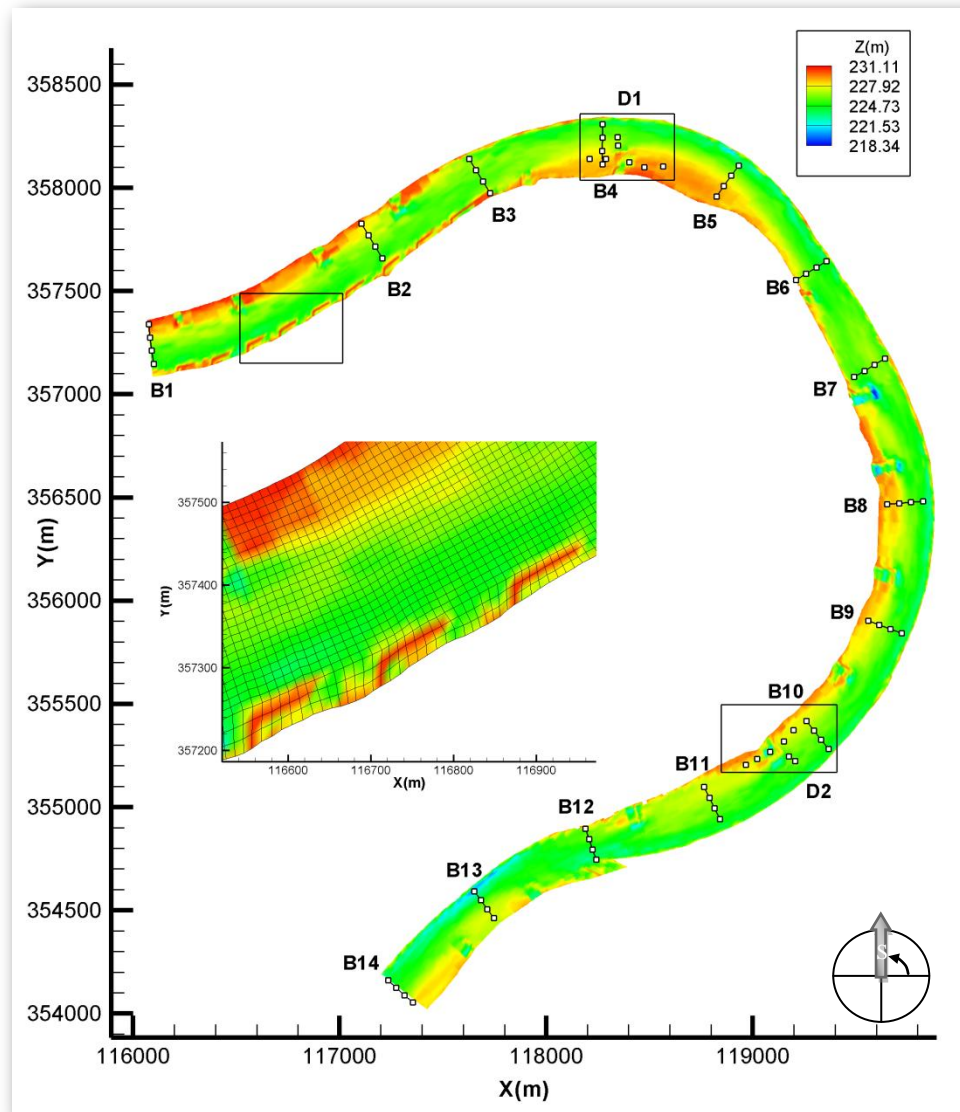
ostrvom i suženjem. Kako je osnovni cilj ovog primera bilo prvenstveno testiranje sposobnosti modela da simulira uticaj promenljive geometrije toka na same uslove strujanja, povratni proces, odnosno sušenje, nije posebno analizirano iz razloga što se očekuje slično “ponašanje” modela. S obzirom na nedostupnost merenih podataka, analiza dobijenih rezultata pokazuje da model sa velikim stepenom verodostojnosti simulira nametnuto hidrauličko stanje u toku, bilo da se radi o strujanju sa jasno definisanim konturnim uslovima, ili o tečenju izazvanom dinamičkom promenom čvrste granice. Takođe, sam momenat aktiviranja neke računске tačke, kao najosetljiviji deo proračuna, sprovodi se bez pojave bilo kakvih deformacija rešenja (numerička nestabilnost, pojava nefizičkih oscilacija), što je direktna posledica visokog stepena stabilnosti modela zasnovanog na zasebnom modeliranju članova numeričkim metodama koje u najboljoj meri odgovaraju njihovom matematičkom karakteru.

Pored samog procesa promene računске oblasti, prikazani vremenski preseki pokazuju da se ona u toku samog proračuna neustaljenog tečenja može menjati neograničen broj puta, i sa različitim intenzitetom. Taj intenzitet promene aktivne oblasti strujanja, koji sa jedne strane zavisi od geometrijskih karakteristika toka, a sa druge od nametnutih graničnih uslova, u proračun neustaljenog strujanja uvodi još jedan element bitan kako za stabilnost modela, tako i za tačnost dobijenih rezultata. Intenzivnije promene računске oblasti praćene dinamičnijim uključivanjem (ili isključivanjem) računskih tačaka iz proračuna, izazivaju nagle hidrauličke promene u toku, koje kao takve u mnogome mogu uticati na pravilno i tačno modeliranje stanja vodotoka. Pod ovim se podrazumevaju i nanosni procesi, koji su u cilju izolovane analize promene računске oblasti u ovom test primeru isključeni. Međutim, s obzirom na već ranije navedenu tesnu vezu vode i nanosa, može se reći da uključivanje kompletnog nanosnog procesa (suspendovani nanos, vučeni nanos, deformacija rečnog korita, granulometrijski sastav) u proračun neustaljenog strujanja pri promeni aktivnog domena podiže složenost celokupnog problema na viši nivo, dajući mu pri tom potpuno novu dimenziju. Ovaj slučaj obradiće se kod modela Zvorničke akumulacije.

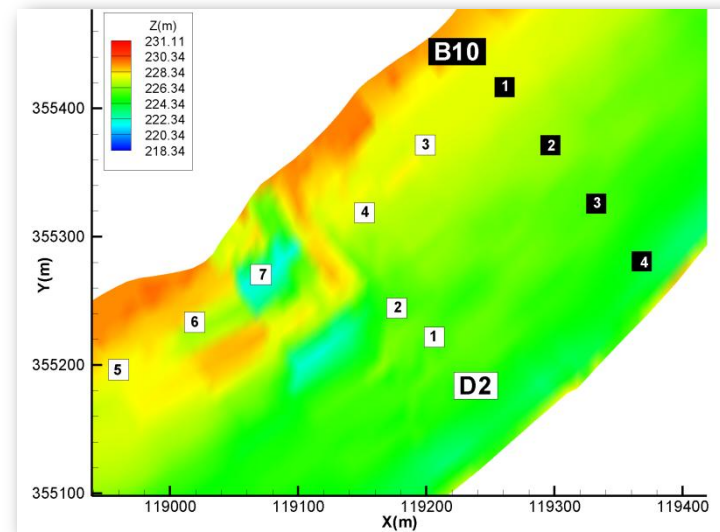
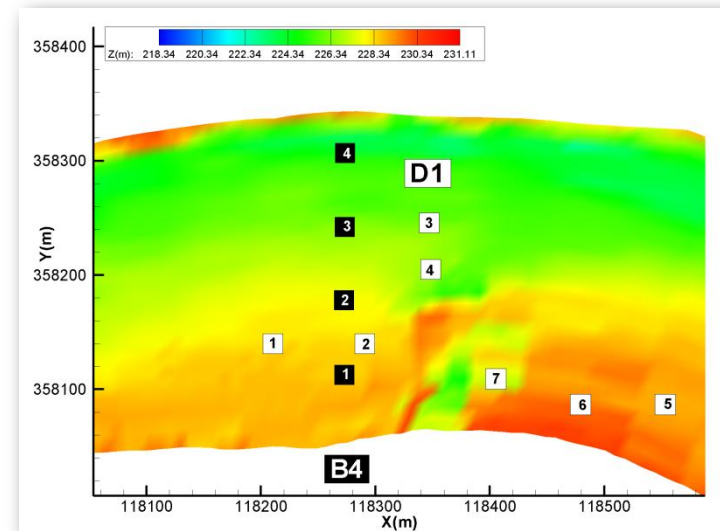
6.3. Model reke Missouri

Testiranje numeričkog modela na deonicama prirodnih vodotoka, gde su pored geometrijskih karakteristika toka uključena i terenska merenja zavisno promenljivih veličina, predstavlja najtačniji vid verifikacije i potvrde valjanosti tog numeričkog modela. Kompleksna geometrija prirodnih vodotoka, koja nameće veoma složene hidrauličke i nanosne uslove, omogućava ispitivanje i testiranje validnosti svih aspekata modela, kao i potvrdu sposobnosti modela da simulira realna fizička stanja. Iz tog razloga će se kao prvi uporedni fizički test-model, za koji postoje dostupna terenska merenja hidrauličkih i nanosnih parametara, koristiti deonica rečne krivine na toku reke *Missouri*.

Test deonica *Leavenworth Bend* nalazi se između 642.77 i 651.78 rečnog kilometra reke *Missouri*, lociranoj u SAD, država *Missouri*. Za potrebe matematičkog modeliranja, a u cilju analize mera revitalizacije staništa reke, na ovom delu toka su tokom perioda od 9. do 10. juna 2000. god. izvršena potrebna terenska merenja koja uključuju : batimetriju, nivo vodnog ogledala, komponente brzine (ADCP metoda), koncentraciju suspendovanog nanosa, kao i granulometrijski sastav nanosa na dnu. Zbog uslova modela, batimetrija toka uzimana je duž poprečnih preseka koji su bili na međusobnoj udaljenosti od oko 60.0 m, dok su ostala merenja vršena na mernim profilima čija je lokacija prikazana na slikama 6.13 i 6.14. Iako je pozicija mernih profila u slučaju brzina i nanosa ista, broj vertikala duž koje su merenja vršena se delimično razlikuje. Koncentracija suspendovanog nanosa merena je duž svih mernih profila u četiri vertikale, koje su, idući od desne obale (Sl. 6.14), međusobno ravnomerno raspoređene duž jednog mernog profila na rastojanju od oko 45 m. Ovi uzorci suspendovanog nanosa prikupljeni su metodom *double sampling* (dvostruko uzorkovanje) u tri do pet tačaka po vertikali, gde je u prvom prolazu merena koncentracija nanosa, a u drugom granulometrijski sastav suspenzije, dok je sastav nanosa na dnu određivan je na osnovu uzorka uzetog sa dna vertikala pojedinih mernih profila. U slučaju brzina, merenja su vršena tzv. ADCP metodom (Acoustic Doppler Current Profiler), postupkom koji se zasniva na podvodnom emitovanju zvučnih signala male talasne dužine duž tzv. akustičnih zraka (Spasojević, Muste, Holly, Jr. 2001). Nailaskom ovog signala na sitne čestice u vodi (suspendovani nanos, plankton), eho – signal, koji je takođe male talasne dužine, vraća se u prijemnik, noseći informaciju o komponenti brzine koja ima isti pravac kao i emitovani zrak. Kako bi se dobile sve tri komponente brzine, ADCP metoda koristi tri snopa koja se emituju pod različitim uglovima u odnosu na vertikalu, dok se postprocesorskom obradom dobijene komponente razlažu na osnovne x,y,z pravce. Povratni signal uređaj razbija na određen broj diskretnih visina po dubini (oko 0.3 m), čime se istovremeno definiše broj mernih



Slika 6.13 Položaj mernih profila sa mernim vertikalama



Slika 6.14 Detalj mernih lokacija D1 i D2

tačkaka po vertikali, a koji zavisi od merne dubine. U cilju eliminacije turbulentnih oscilacija, i postizanja što veće tačnosti merenih podataka, merenja brzina vršena su u stacionarnom plovilu (drugi način je merenje u pokretnom plovilu). Za razliku od merenja koncentracije suspendovanog nanosa, koja su vršena u svim naznačenim mernim vertikalama (Slika 6.13), merenja brzina od ovakvog rasporeda odstupaju u profilima *B5*, *B8*, *B9* i *B14*, gde su merenja obavljena u samo tri vertikale, i na lokaciji *D1*, gde su brzine uzorkovane samo u vertikalama *1*, *2*, *3*, *4* i *7*. Što se tiče uzoraka sa dna, oni nisu uzimani u svim mernim profilima, već samo duž mernih linija *B2*, *B7*, *B8*, *B10*, *B12*, *B13* i *B14*, kao i u dva dodatna profila *D1* i *D2*.

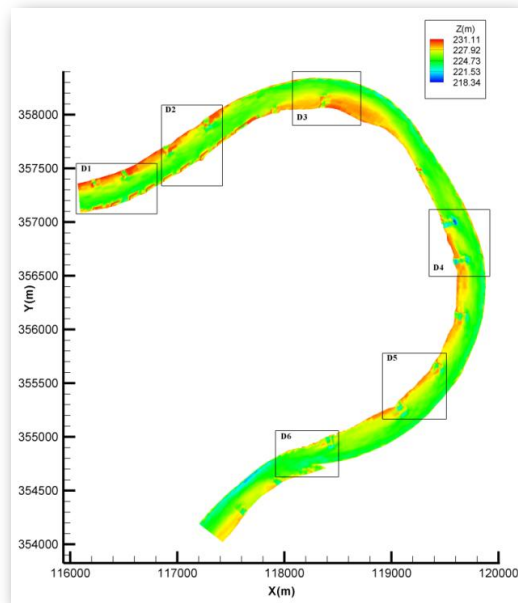
Na osnovu dobijenih batimetrijskih merenja formirane su granice računskog modela krivine. Da bi se definisali svi potrebni elementi toka koji nisu obuhvaćeni ovim standardnim merenjima korita, dodatne korekcije modela vršene su na lokacijama velikog broja postavljenih objekata, kao što su naperi ili podvodni pragovi. Naknadnim unošenjem njihovih dimenzija, model je dodatno poboljšán, što demonstrira i detalj ovih objekata na uzvodnom delu toka prikazan na slici 6.13. Nakon formiranja modela, generisana je računska mreža. Sastavljena od relativno uniformnih ćelija, prosečnih dužina stranica od $10 \times 10 \text{ m}$ (Slika 6.13), mrežu dimenzija 824×34 čine 23804 aktivne tačke. Uzani pojas na levoj obali od 4212 tačke isključen je iz modela. Za uzvodnu granicu modela usvojena je linija *B1*, sa 28 tačkaka u η (*j*) pravcu, dok je na nizvodnom kraju za granicu uzeta linija na mestu mernog profila *B14*, sa ukupno 34 računске tačke u η (*j*) pravcu. Sve ostale granice smatrane su za čvrste, gde je kao uslov korištena nulta vrednost normalnog vektora brzine.

Zbog prirode proračuna analiza rezultata će se podeliti na dva dela. Prvi deo se odnosi isključivo na *hidraulički proračun*, dok drugi deo pokriva *proračun transporta suspendovanog nanosa i deformacije rečnog korita*

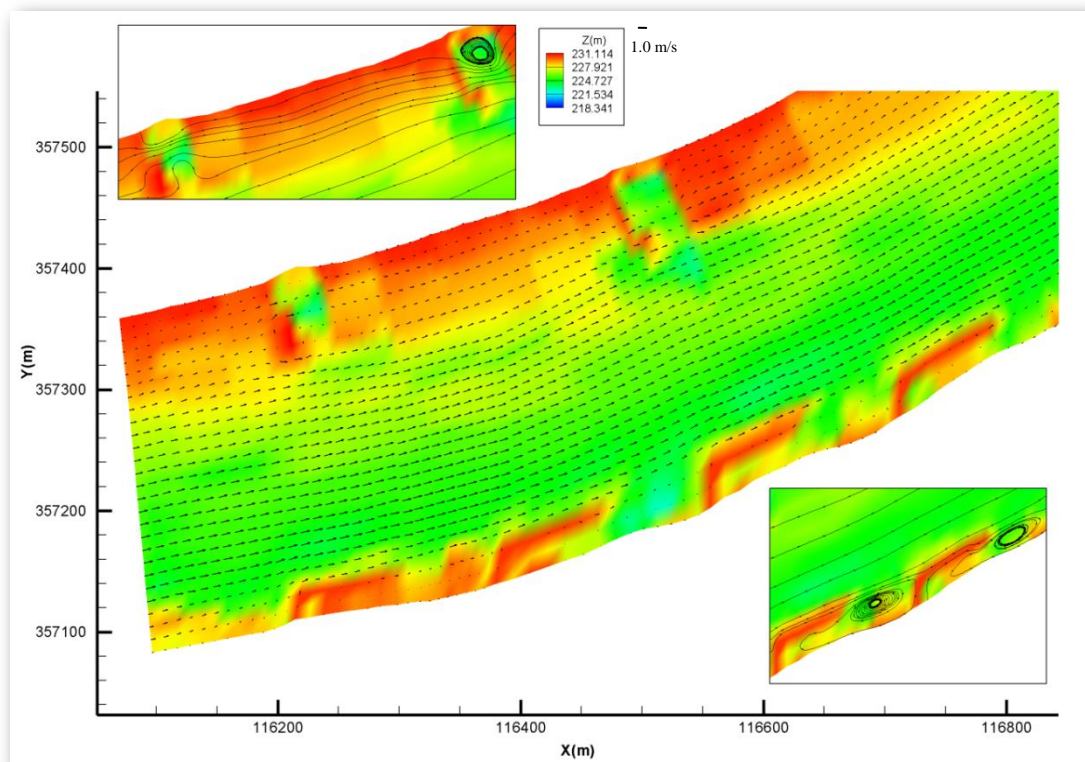
- ***Hidraulički proračun***

Kao prvi deo simulacije izvršen je proračun strujne slike u rečnoj krivini. Kako je ranije navedeno (Poglavlje 4), za modeliranje strujanja formirani numerički model zahteva poznavanje graničnih uslova na svim granicama računskog domena, kao i početnog uslova duž cele računске oblasti. U tom pogledu za granični uslov na uzvodnoj granici (profil *B1*) uzet je proticaj koji je na osnovu merenja brzina procenjen na konstantnu vrednost od $Q=1060.0 \text{ m}^3/\text{s}$, dok je za nizvodni granični uslov (profil *B14*) usvojen nivo od $Z_{nizv}=229.55 \text{ m}$. Koristeći dodatni set merenja, obavljenih u periodu od 5. do 7. oktobra 1999. god., usvojena je vrednost kalibracionog parametra od $z_o=0.016\text{m}$ (izraz 3.55), što daje opseg Manning-ov koeficijenta hrapavosti od

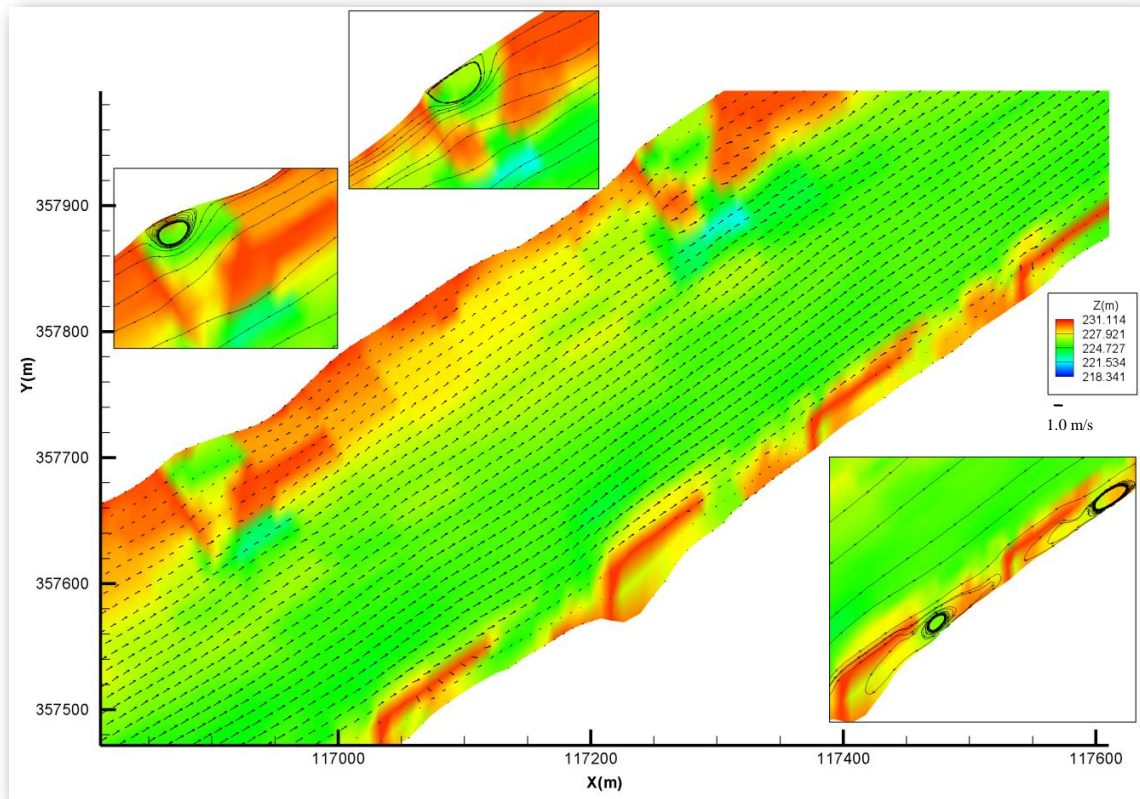
0.034 do 0.036 $m^{-1/3}/s$, kao i vrednost koeficijenta turbulentne difuzije od $\nu_t=0.1 m^2/s$. Takođe, pretpostavilo se da su na početku simulacije nema strujanja u krivini (komponente brzine jednake su nuli), kao i da je nivo duž toka konstantan, i jednak sa vrednošću nizvodnog graničnog uslova. Za stabilizacioni period usvojeno je 10.0 sati, što se pokazalo kao dovoljan vremenski interval da se uspostavi kvazi-ustaljeno stanje osmotreno u periodu od 9-10 juna 2000 godine. U nastavku su prikazani detalji rezultujuće strujne slike.



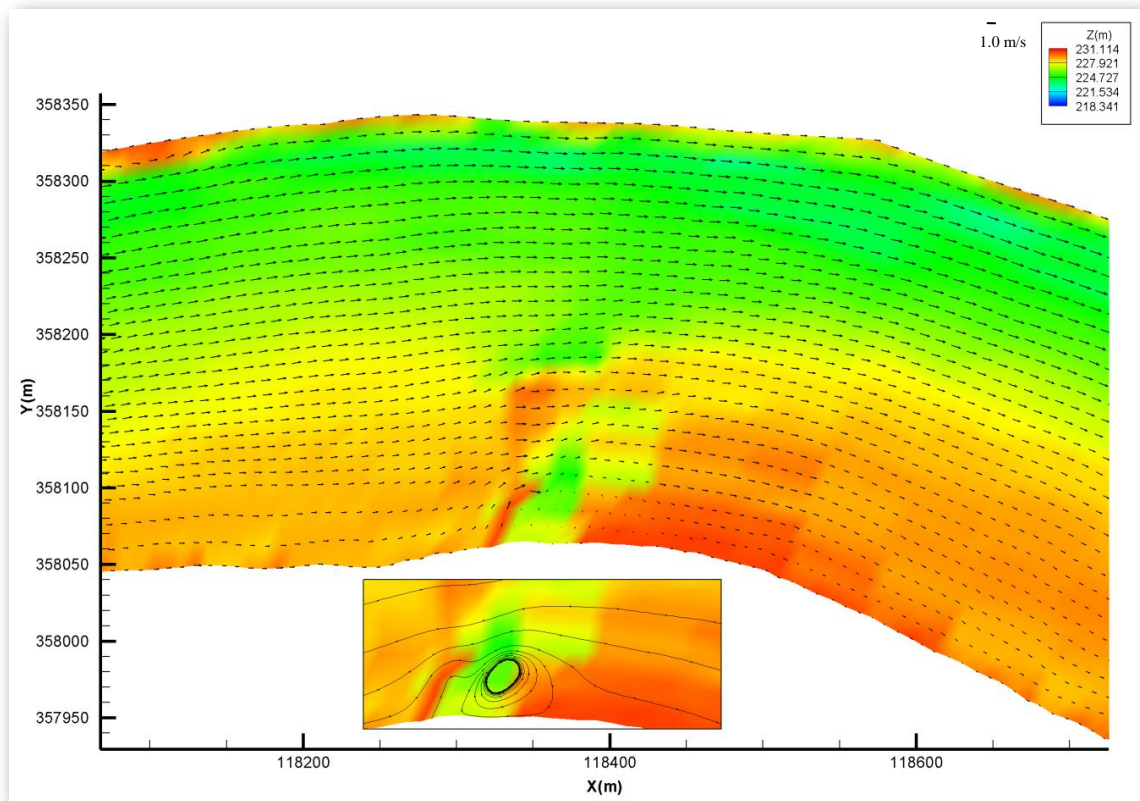
Slika 6.15 Situacija korita rečne krivine sa položajem prikazanih detalja - reka Missouri



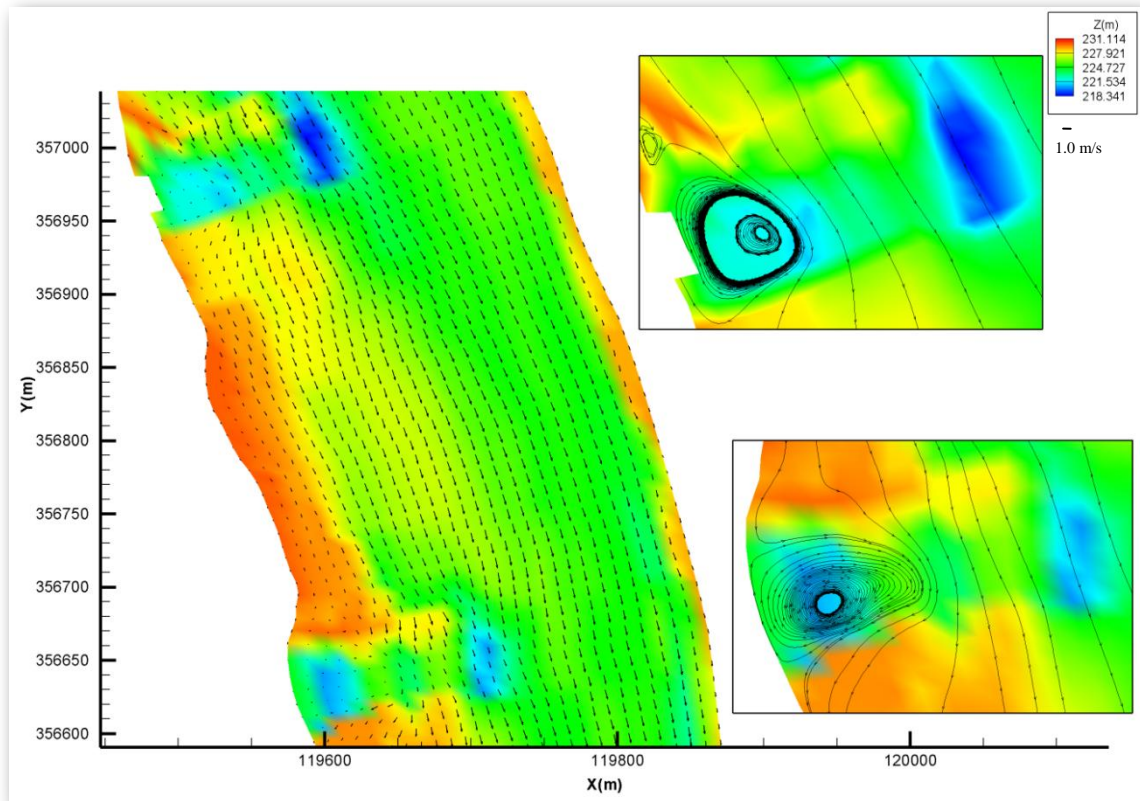
Slika 6.15a Strujna slika - detalj D1



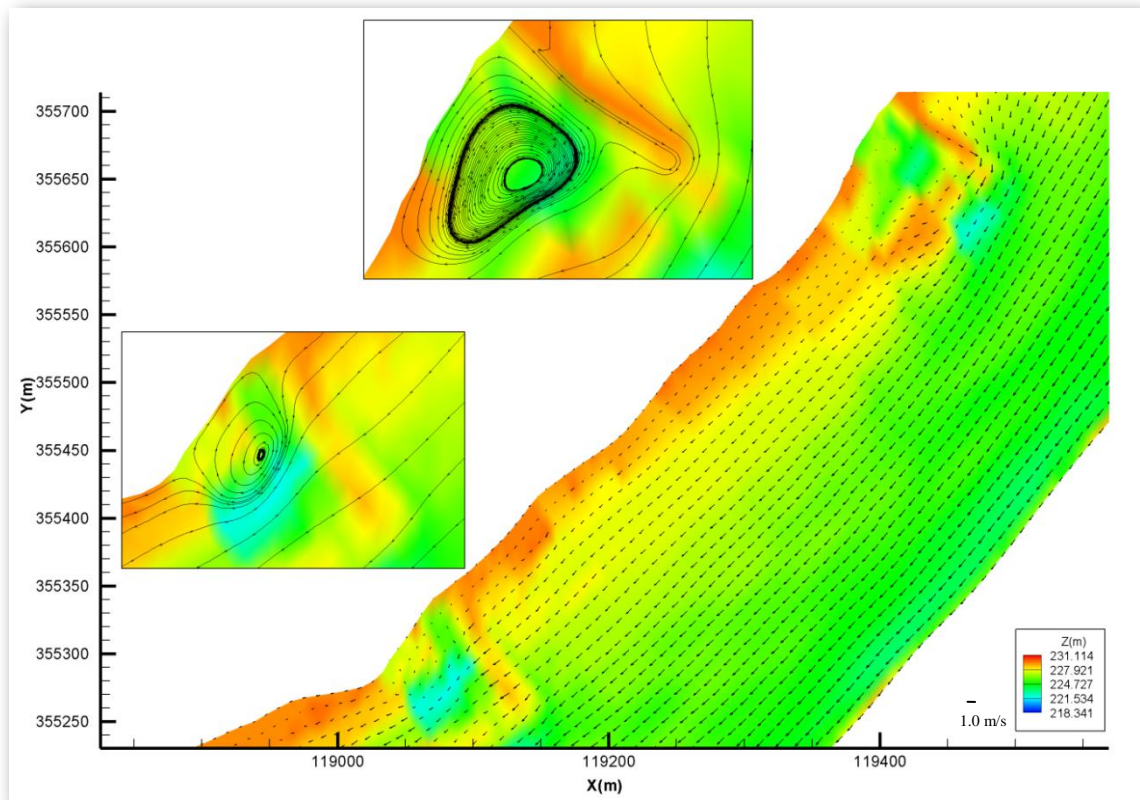
Slika 6.15b Strujna slika - detalj D2



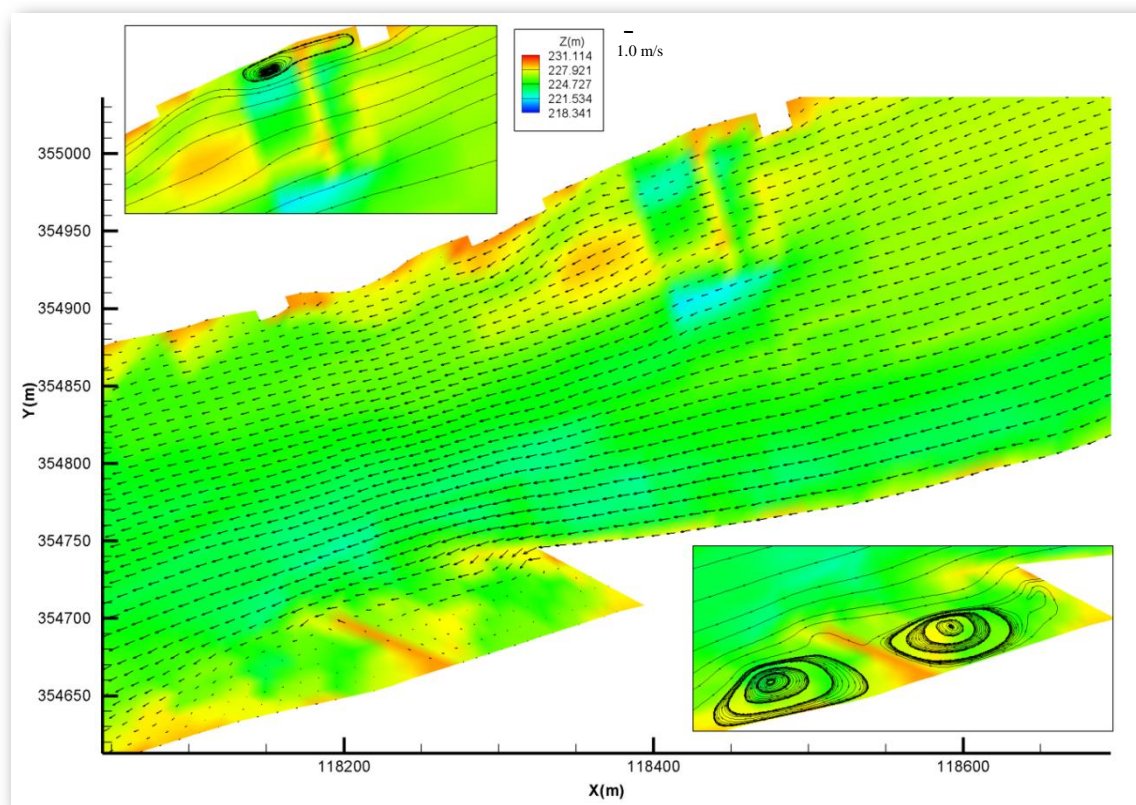
Slika 6.15c Strujna slika - detalj D3



Slika 6.15d Strujna slika - detalj D4



Slika 6.15e Strujna slika - detalj D5



Slika 6.15f Strujna slika - detalj D6

Nakon 720 računskih koraka, sa usvojenim vremenskim intervalom od $\Delta t=50s$, uspostavljeno je ustaljeno stanje u krivini. S obzirom na to da su merenja nivoa pored nizvodne granične linije (profil *B14* - nizvodni granični uslov) vršena još na 2 dodatne lokacije, poređenje sračunatih vrednosti sa merenim prikazano je u tabeli 6.1 :

<i>Profil</i>	<i>Nivo vodnog ogledala (m)</i>	
	<i>Mereno</i>	<i>Računato</i>
B14 (uz levu obalu)	229.55	229.55 (g.u.)
B11 (uz desnu obalu)	230.04	230.026
B1 (uz levu obalu)	231.23	231.217

Tabela 6.1 Poređenje merenih i sračunatih vrednosti nivoa vodnog ogledala – reka Missouri

Na mernim lokacijama oba profila (izuzimajući *B14*), izračunate vrednosti pokazuju da je odstupanje od merenih vrednosti praktično isto u oba slučaja, i da se ono kreće za prosečno oko 1.35 cm. Kako je sračunati raspored nivoa duž toka blago promenljivog karaktera sa prosečnim podužnim padom od oko 0.019%, ovo odstupanje se može preformulisati u formu pada. U tom

slučaju, dobijena razlika merenih i sračunatih nivoa daje odstupanje sračunatog od merenog prosečnog podužnog pada od 0.75% , što imajuću u vidu da je reč o modelu rečne krivini dužine 9.0 km sa velikim brojem lokalnih objekata u potpunosti prihvatljivo. Što se tiče sračunatih poprečnih nagiba vodnog ogledala, u mernom profilu *B11* on iznosi 0.0035% , dok na uzvodnoj granici *B1* on uzima vrednost od 0.002% . Međutim, ono što je očigledno jeste da ovako mali broj merenih vrednosti nivoa, koji karakteriše prvenstveno blagi podužni nagib sa odsustvom značajnijih oscilacija, ne pruža dovoljno adekvatne podatke za pravilnu i kvalitetnu potvrdu modela. Mnogo veći značaj za verifikaciju samog hidrauličkog dela numeričkog modela ima analiza i poređenje rezultujućeg polja brzina. Iz tog razloga je na slikama 6.15a - 6.15f, kao prvi set priloga, prikazana sračunata strujna slika na 6 značajnih lokacija duž računskog domena.

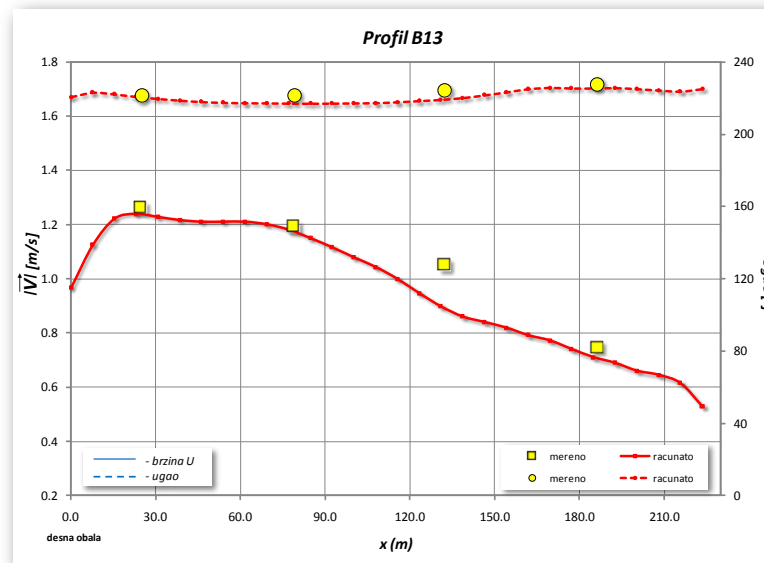
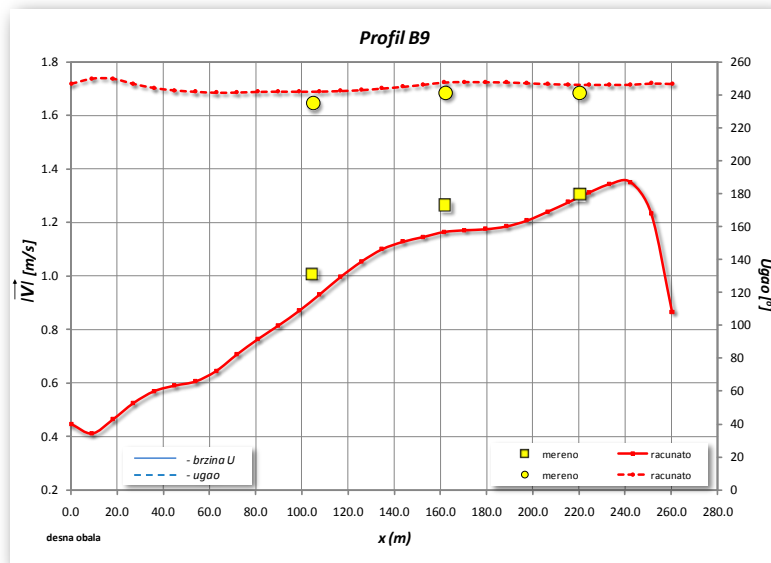
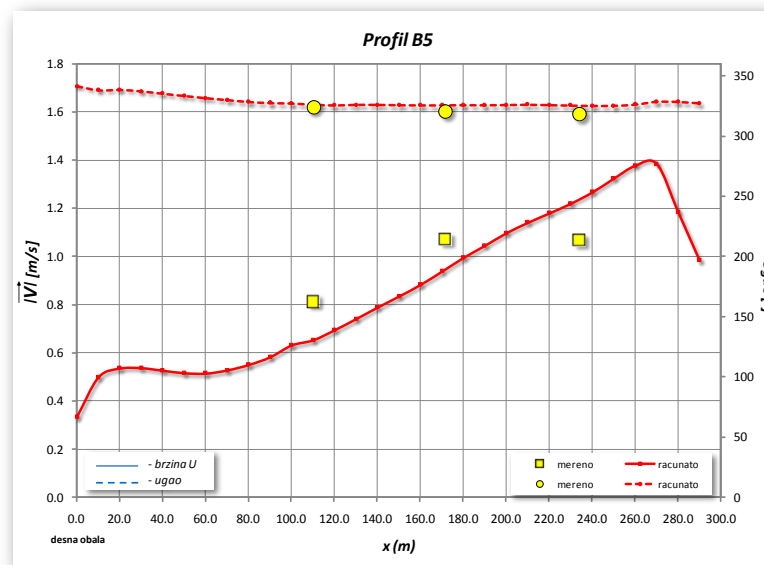
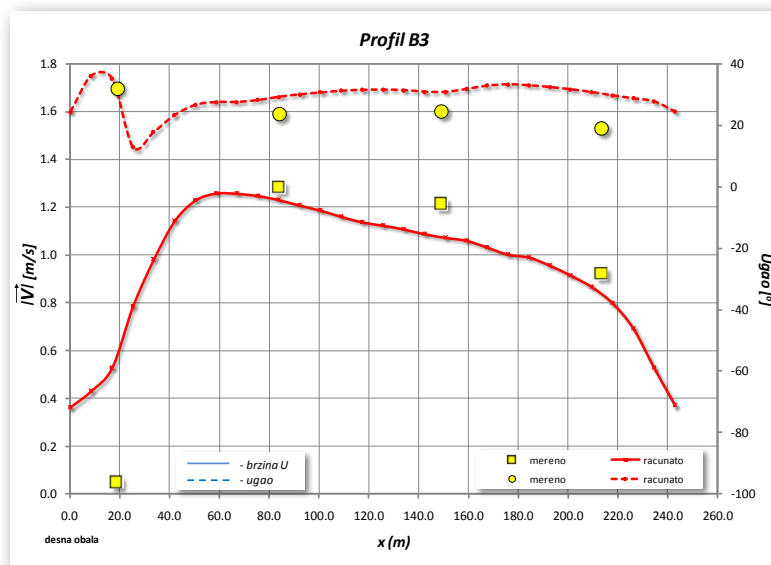
Zbog prisustva velikog broja regulacionih građevina u toku, koji zasigurno uzrokuju prostorno (trodimenzionalno) strujanje u svojoj bliskoj oblasti, na svakoj od priloženih slika (6.15a-6.15f) su pored vektora brzina prikazani i detalji strujne slike. Ono što je karakteristično za ove objekte koji su locirani na obe strane krivine, jeste njihova različita konfiguracija duž toka. Bilo da su orjentisani u pravcu toka (slike 6.15a i 6.15b), ili upravno na njega (slike 6.15c, 6.15d i 6.15e), oni su ili delimično potopljeni, ili potpuno suvi, sa kotom krune iznad nivoa vode. Od toga o kom naperu se radi, zavisi i rezultujuća strujna slika iza objekta. Na uzvodnom delu toka, uz levu obalu korita, nalazi se 9 objekata *L* oblika, čija je duža strana prosečne dužine oko 80.0 m postavljena u pravcu toka. Ovakav oblik prepreke za posledicu ima pojavu cirkularnog strujanja u oblasti između objekta i obale, sa obaveznom pojavom vrtloga na samom vrhu napera (slike 6.15a i 6.15b). Svakako sam intenzitet i dimenzije formirane cirkularne zone i vrtloga u najvećoj meri zavise od potopljenosti objekta. Na preostalom delu toka dominiraju regulacione građevine sa položajem upravno na struju, čije se dimenzije kreću od 30 m (detalj D3) do 100 m (detalj D5). Zbog svoje orjentacije, objekti ovog tipa u znatno većoj meri menjaju strujnu sliku toka, što se prvenstveno manifestuje kroz formiranje vrtloga većih razmera nego što je to bio slučaj sa *L* naperima. Efekat delimično potpoljenog napera postavljenog upravno na tok prikazan je na slikama 6.15c i 6.15d, dok je poremećena strujna slika nastala kao posledica potpuno "suvog" napera prikazana na slikama 6.15e i 6.15f. Ovo vrtložno strujanje, nastalo kao viskozna interakcija glavne struje i usporene mase vode iza napera (sa slika 6.15d - 6.15f vidi se da su vektori brzina iza objekata, ili dela objekata, koji su iznad nivoa vode, znatno manji nego u preostalom delu toka), potkopava rečno korito iza građevine, praveći na taj način zone većih dubina (nižeg terena). Takve zone, koje su u proseku niže za oko $1.0 \div 3.0\text{ m}$ u odnosu na okolni teren, uočljive su na svim lokacijama postavljenih poprečnih napera (označene plavom bojom na

slikama 6.15a - 6.15f), gde istovremeno pokazuju i izuzetno dobro slaganje sa intenzitetom i prostornom pozicijom sračunatih vrtloga.

Glavni deo toka pokazuje relativno uniformnu strujnu sliku sa delimičnim padom brzina u plićim zonama uz obale. Pored lokalnog povećanja brzina, koje se ostvaruje pri prelasku struje preko delimično potopljenih napera, prosečna brzina u toku se kreće od oko 0.5 m/s u plitkim delovima, do 1.2 m/s u središnjem delu toka. Ovakav raspored brzina može se videti i na slici 6.16, gde su za profile *B3*, *B5*, *B9* i *B13* sračunate vrednosti intenziteta ukupnih vektora brzina i njihovih položajnih uglova upoređene sa izmerenim vrednostima. Za sve ostale profile *B2*, *B4*, *B6*, *B7*, *B8*, *B10*, *B11*, *B12* i *B14*, kao i za merne lokacije *D1* i *D2*, dijagrami poređenja sračunatih vrednosti sa merenim nalaze se u priložima (Prilog 1 - 3).

Poređenje izračunatih brzina urađeno je u formi intenziteta kompletnog vektora brzine i njegovog položajnog ugla (Slika 6.13). Kako je ranije navedeno, *ADCP* metoda meri sve tri komponente brzine duž vertikalnog pravca. Da bi poređenje ovih vrednosti sa rezultatima ravanskog modela bilo moguće, potrebno je prethodno izvršiti njihovo osrednjavanje po dubini. Kako su merene vrednosti vertikalne komponente brzine male, $2.0 \div 5.0 \%$ od intenziteta horizontalnog vektora brzine, a sam raspored horizontalnih komponenti po vertikali ujednačen (primer za jednu od vertikala mernih profila *B3*, *B9* i *B13* nalazi se u priložima 4 - 6), može se reći da je pretpostavka o hidrostatičkoj raspodeli pritiska kao potreban preduslov vertikalnog osrednjavanja u potpunosti zadovoljena. Za potrebe osrednjavanja korišten je postupak numeričke integracije uz primenu trapeznog pravila.

Kao što se vidi na priloženim dijagramima, rezultati dobijeni formiranim numeričkim modelom pokazuju veoma dobro slaganje sa izmerenim vrednostima. Izuzev relativno značajnijeg odstupanja intenziteta sračunatih brzina u odnosu na merene u vertikali *V1* profila *B3*, *B4*, *B5*, *B6* i *B12*, vertikali *V4* profila *B2*, zatim u vertikalama *V1* i *V5* merne lokacije *D1*, kao i u vertikalama *V3*, *V5*, *V6* i *V7* merne lokacije *D2*, koje su najverovatnije posledica izražene turbulencije toka na ovim lokacijama, devijacija sračunatih u odnosu na merene vrednosti brzina se u svim ostalim vertikalama kreće u opsegu od 0.0% do 8.0% . Ove oscilacije su nešto intenzivnije u prvoj polovini deonice, do profila *B8*, dok su u drugom delu one svode na opseg od svega 0.0 do 3.0% . Što se tiče položajnih uglova, odstupanja sračunatih vrednosti u odnosu na merene ovde su još manje izražene. Nešto veće oscilacije, od oko 10° , primetne su jedino u profilima *B2*, *B3*, *B4* i *B8*, kao i na lokaciji *D2*, dok se u svim ostalim profilima maksimalna odstupanja kreću u opsegu od 0.0 do 5.0° .



Slika 6.16 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile B3, B5, B9 i B13 - reka Missouri

- **Proračun transporta suspendovanog nanosa i deformacije rečnog korita**

Nakon uspostavljanja kvazi-ustaljenog tečenja u krivini i definisanja potrebnih hidrauličkih parametara, drugi deo proračuna predstavlja modeliranje nanosnih procesa i njihovog uticaja na samu morfologiju korita. Kao što je navedeno u poglavljima 3 i 4, ovaj deo matematičkog modela sastoji se od tri primarna segmenta nanosnog proračuna ; transport suspendovanog nanosa, deformacija rečnog korita i promena granulometrijskog sastava dna. Definisani odgovarajućim izrazima, koji kao i u slučaju jednačina toka zahtevaju poznavanje početnih i graničnih uslova, ovi nanosni procesi nalaze se u međusobnoj veoma uskoj vezi, koja se pored osnovnih elemenata razmene (erozija, deponovanje), ogleda i u prirodnoj mešavini nanosa. Naime, za razliku od većine nanosnih modela, gde se u proračunu koristi uniforman granulometrijski sastav (srednji prečnik d_{50}), ovde se svaki nanosni proces (transport suspendovanog i vučenog nanosa, erozija i deponovanje) posmatra sa stanovišta odgovarajućeg intervala (k) definisane granulometrijske krive. Na ovaj način proračunom se pokriva celokupan spektar frakcija rečnog toka (bilo da se radi o suspenziji ili samom koritu), zbog čega sama fizika kretanja i razmene nanosa dobija jednu dodatnu dimenziju. Za modeliranu deonicu reke *Missouri* ova granulometrijska kriva prikazana je u tabeli 6.2.

Gran. interval k	Prečnik frakcije D (mm)	Gran. interval k	Prečnik frakcije D (mm)	Gran. interval k	Prečnik frakcije D (mm)
1	$D < 0.062$	6	$0.420 < D < 0.840$	11	$4.760 < D < 6.727$
2	$0.062 < D < 0.074$	7	$0.840 < D < 1.414$	12	$6.727 < D < 12.700$
3	$0.074 < D < 0.149$	8	$1.414 < D < 2.000$		
4	$0.149 < D < 0.210$	9	$2.000 < D < 3.360$		
5	$0.210 < D < 0.420$	10	$3.360 < D < 4.760$		

Tabela 6.2 Granulometrijski intervali nanosnog materijala reke *Missouri*

Formirana na osnovu uzoraka uzetih iz suspenzije i sa dna reke, prikazana kriva sastoji se od $k=12$ granulometrijskih intervala, gde se kao minimalni prečnik frakcije pojavljuje vrednost od $D_{min}=0.062$ mm (krupna prašina - Jovanović 2002). S obzirom na to da je broj nanosnih jednačina direktno proporcionalan ovom broju granulometrijskih intervala (za svaki interval k piše se po jedna jednačina održanja mase suspendovanog nanosa i po jedna jednačina održanja mase aktivnog sloja), za sam proračun potrebno je ipak koristiti njihov optimalan broj, koji se utvrđuje na osnovu raspoloživih računarskih resursa za konkretan model (broj računskih tačaka

modela, vremenski korak,...). U ovom slučaju je $k=12$ osnovnih granulometrijskih intervala, svedeno na svega $k=3$ (Tabela 6.3). Prva dva intervala, koji su klasifikovani kao prašina, kombinovani su u jedan zajednički interval GI_1 , dok su granulometrijski intervali u rasponu od 3 do 9 (pesak) grupisani u dve grupe, GI_2 i GI_3 . Zbog izuzetno male zastupljenosti u suspenziji i na samom rečnom dnu, intervali od 10 do 12 su isključeni iz proračuna. Usvajanjem granulometrijskih raspona (GI), odgovarajući karakteristični prečnici d (mm) određeni su zatim na osnovu geometrijske sredine najmanjeg i najvećeg zastupljenog prečnika.

Usvojeni granulometrijski intervali	Prečnik frakcije D (mm)	Karakteristični prečnik d(mm)	Pripadajući intervali
GI_1	$D < 0.074$	0.015	1-2
GI_2	$0.074 < D < 0.420$	0.176	3-5
GI_3	$0.420 < D < 3.360$	1.188	6-9

Tabela 6.3 Usvojeni granulometrijski intervali deonice reke Missouri

Nakon definisanja računskih intervala GI i njihovih reprezentativnih frakcija d , sledeći korak u uspostavljanju nanosnog modela je formiranje graničnih i početnih uslova. Kako je ranije rečeno, svaki od nanosnih procesa opisan je odgovarajućom jednačinom, koja shodno svojoj matematičkoj prirodi uslovljava određen oblik ovih uslova. Za slučaj transporta suspendovanog nanosa, advektivni deo zahteva granične uslove na uzvodnoj i čvrstoj granici, dok difuzni deo traži poznavanje uslova na svim granicama.

Na uzvodnoj granici, koja je obeležena profilom BI (Slika 6.13), merene vrednosti suspendovanog nanosa korištene su kao uzvodni granični uslov. Kako je merenje suspendovanog nanosa u svim mernim vertikalama vršeno po dubini (3 do 4 tačke po visini), ovde je kao i u slučaju brzina za potrebe ravanskog modela izvršeno vertikalno osrednjavanje. Ove ulazne osrednjene merene vrednosti koncentracije, koje su radi bolje i jasnije prezentacije izražene u milionitim delovima (ppm - “parts per million”), prikazane su zajedno sa zadatim ulaznim vrednostima na prilogu 9. Sa priloženog dijagrama se vidi da duž mernog profila BI izmerene koncentracije C_1 i C_3 pokazuju relativno konstantan raspored, sa prosečnim vrednostima od $C_1=100.0$ ppm i $C_3=10.0$ ppm, dok koncentracija C_2 značajno varira. Preliminarni rezultati su pokazali da ubacivanje ovakve raspodele koncentracije C_2 u uzvodni granični uslov, dovodi do istovremenog istaložavanja materijala odmah neposredno nizvodno od profila BI . Iz ovoga je direktno zaključeno da se ovde radi o fenomenu kratkog vremenskog trajanja, koji je

najverovatnije rezultat prolaznih turbulentnih oscilacija, a ne ustaljenog nanosnog režima vodotoka. Usvojena računaska raspodela prikazana je na prilogu 9 (puna linija). Što se tiče početnog uslova, analiza merenih vrednosti na ostalim mernim profilima pokazala je da koncentracije C_1 i C_3 ostaju konstantne po dubini duž cele deonice rečne krivine, i da se sa izuzetkom malog broja mernih tačaka one kreću u rasponu od $90.0 \div 120.0 \text{ ppm}$ za C_1 , i od $0.0 \div 10.0 \text{ ppm}$ za C_3 . Na osnovu ovih raspona usvojene su vrednosti koncentracija koje su zadate kao početni uslov kompletnog računskog domena : $C_1=105.0 \text{ ppm}$ i $C_3=3.0 \text{ ppm}$. Međutim, neravnomernu raspodelu demonstriranu u profilu $B1$, koncentracija C_2 je zadržala takođe duž cele rečne deonice. Koncentracije pri dnu, koja su generalno varirale od $0.0 \div 400.0 \text{ ppm}$, u velikom broju tačaka pokazale su izrazito velike vrednosti (i do 3000.0 ppm). Pored toga, u par mernih vertikala zapažena je pojava veoma naglih i intenzivnih pikova izmerenih koncentracija, zbog čega je sama monotonost vertikalnog rasporeda narušena (javlja se značajno odstupanje od očekivanog – teorijskog oblika). Da bi se ovakva variranja koncentracije C_2 svela na što manju moguću meru, za početni uslov usvojena je prosečna vertikalna raspodela sa koncentracijom pri dnu od 100.0 ppm . Osrednjavanjem za potrebe ravanskog modela ove raspodele po dubini, dobijena je kao rezultat vrednost koncentracije od $C_2=46.00 \text{ ppm}$. Ona je zatim kao konstantna vrednost zadata u celoj računskoj oblasti (početni uslov).

Na osnovu uzoraka nanosa sa rečnog dna, koji su uzeti u mernim profilima $B2, B7, B8, B10, B12, B13, B14, D1$ i $D2$, definisane su zastupljenosti usvojenih granulometrijskih intervala β_k . Ovi uzorci pokazuju da je nanos prvog granulometrijskog intervala GI_1 u deonici zastupljen sa veoma malim procentom, od $1.0 \div 4.0 \%$, dok se preostale dve karakteristične frakcije, GI_2 i GI_3 , kreću u širokom dijapazonu sa veoma izraženom prostornom neravnomernošću, od $2 \div 97.0 \%$. S obzirom na to da ovakvi podaci o zastupljenostii nisu jasno definisali prostorni raspored granulometrijskog sastava rečnog dna, za potrebe proračuna usvojena je njihova prosečna vrednost, koja uključuje sve gore navedene merne profile. Pored toga što su zadate kao početni uslov duž cele rečne deonice, sračunate vrednosti prikazane u tabeli 6.4 su zbog nedostatka merenih podataka na profilu $B1$ korištene i kao uzvodni granični uslov jednačine održanja mase aktivnog sloja.

$\beta_k [-]$		
GI_1	GI_2	GI_3
0.01	0.53	0.46

Tabela 6.4 Usvojena granulometrijska kriva deonice reke Missouri

Formiranjem ulazne strukture nanosnog dela proračuna, koja pored navedenih elemenata (početnih i graničnih uslova) obuhvata i zadavanje potrebnih nanosnih parametara kao što su :

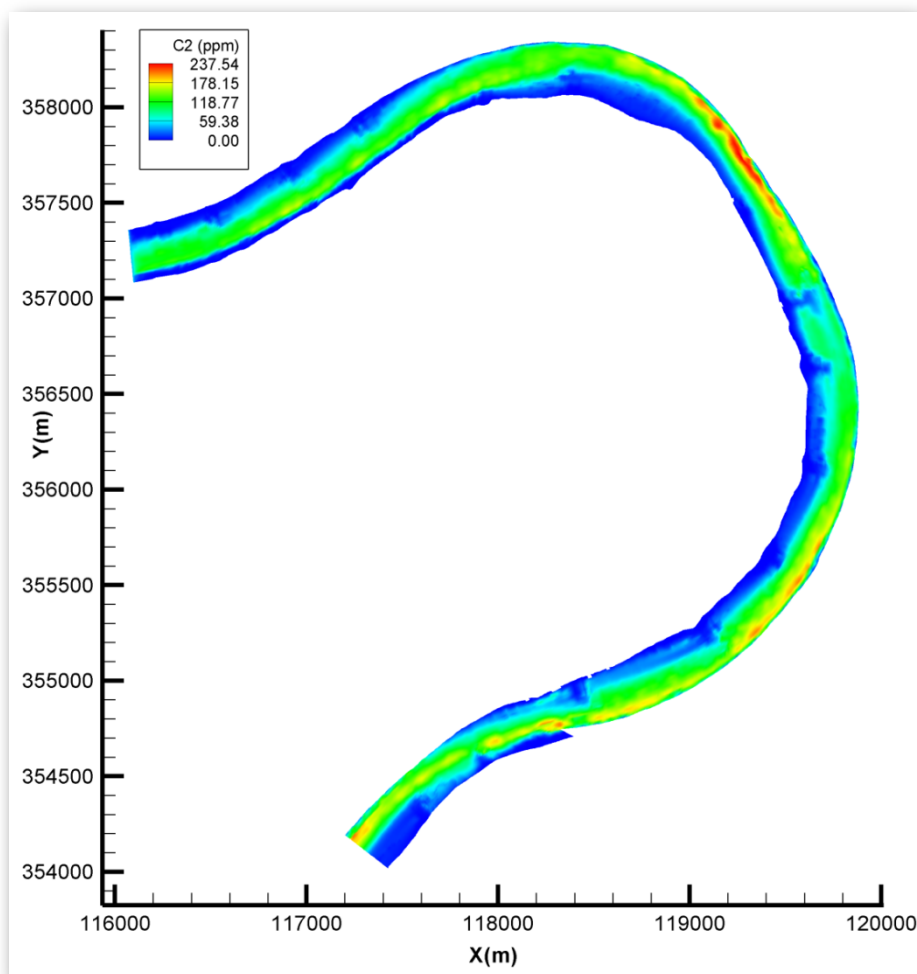
- početna debljina aktivnog sloja - $E_m=0.05\text{ m}$,
- debljina aktivnog podsloja - $Dap=0.3\text{ m}$
- odstojanje referentne koncentracije od dna - $a=0.03\text{ m}$,
- vertikalni priraštaj iznad referentnog sloja - $\Delta a=0.01\text{ m}$,

model je, koristeći računski korak od $\Delta t=50\text{ s}$ (isti korak kao i u slučaju strujanja), uspostavio potrebno kvazi - ravnotežno stanje između vode i nanosa nakon simulacionog perioda od jednog dana.

Duž primarne struje toka, koja se formira u oblasti neporemećenog tečenja, sva tri granulometrijska intervala pokazuju tendenciju pojačane koncentracije suspendovanog nanosa. Regulacione građevine, koje su u najvećem broju locirane na desnoj obali korita (unutrašnja – konveksna strana krivine), pomeranjem glavnog dela struje ka spoljnoj strani krivine uspostavljaju oblast intenzivnije strujne slike sa izraženom erozijom nanosnog materijala (Slika 6.17). Izuzetak od ovoga čini prisustvo jednog broja objekata na levoj obali korita, koji izazivaju da se na kratkom ulaznom delu struja koncentriše većim delom u sredini toka, dok se na izlaznom kraju krivine ona orjentiše više uz desnu obalu. Nasuprot ovoj intenzivnoj zoni, delove toka iza regulacionih objekata uglavnom karakteriše strujanje znatno manjeg intenziteta (opisano u hidrauličkom proračunu), koje je praćeno izuzetno malim prisustvom nanosnog materijala u suspenziji. Iz navedenog se jasno vidi, da se zahvaljujući samoj hidrauličkoj strukturi toka, ceo računski domen praktično deli na dve zone, oblast niske i visoke koncentracije suspendovanog nanosa, koje se kao takve mogu primetiti kod sva tri razmatrana intervala.

Analizom prostornog rasporeda koncentracije najmanje frakcije C_1 (Prilog 7), primećuje se da je ona u zoni primarne struje mahom zadržala svoje početne vrednosti, od oko 105.0 ppm , dok je u uzanoj liniji od oko 70.0 m uz unutrašnju stranu krivine ona pala na prosečnih 50.0 ppm . Njena najmanja vrednost od 10.0 ppm , zabeležena je neposredno iza građevina lociranih na uzvodnom delu krivine (obeleženo plavom bojom na prilogu 7), što je s obzirom na karakter strujanja ovih zona i očekivano. U slučaju intervala GI_2 , sračunate koncentracije se značajno razlikuju od početnih vrednosti. Naime, ranije spomenuta prostorna neujednačenost koncentracija, koju su pokazali uzeti uzorci suspendovanog nanosa, primetna je i u dobijenim rezultatima. Nakon uspostavljanja kvazi ustaljenog stanja, koncentracija C_2 je u zoni primarne struje generalno skočila sa početne vrednosti od 46.00 ppm , na prosečnih 110.00 ppm (zelena boja na slici 6.17),

s'tim što su se na pojedinim delovima krivine pojavile izolovane oblasti i sa dvostruko većim koncentracijama, od $200.00 \div 230.00 \text{ ppm}$ (crvena boja). Preostali deo toka, koji se nalazi pod jakim uticajem regulacionih objekata, pokazuje značajan pad koncentracije na prosečnu vrednost od oko $C_2=10.00 \text{ ppm}$. Slična tendencija prostornog rasporeda koncentracije, ali sa znatno manjim intenzitetom, prisutna je i kod trećeg granulometrijskog intervala GI_3 (Prilog 8). Kao i u prethodna dva intervala, i ovde oblast najvećih koncentracija prati glavni struju, uzimajući pri tom vrednosti u opsegu od 10.0 ppm , do maksimalnih 50.0 ppm (zelena boja).

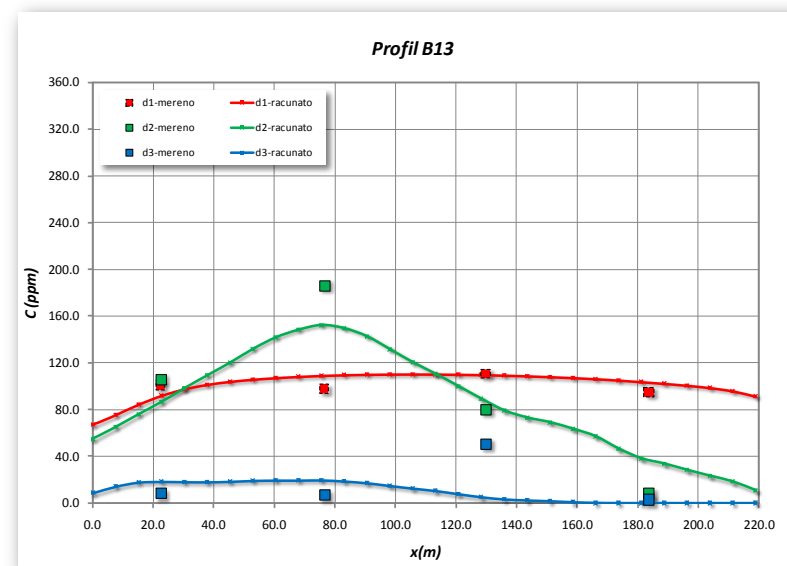
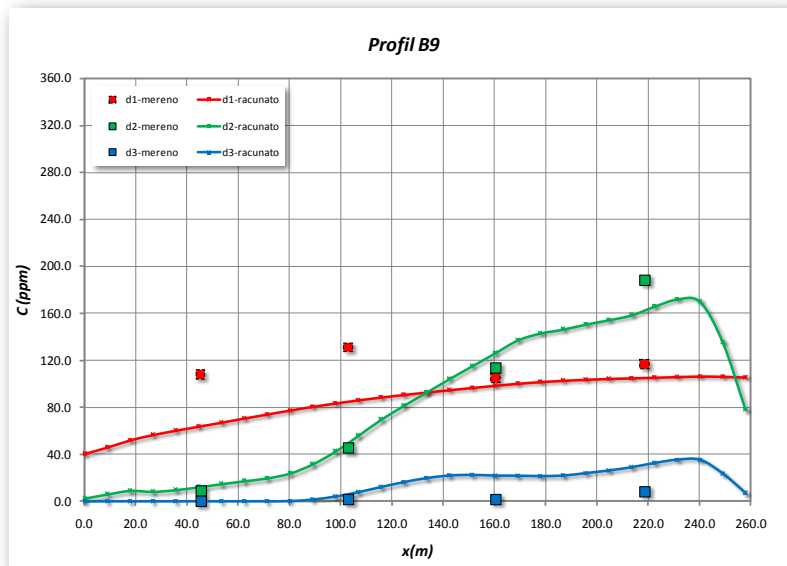
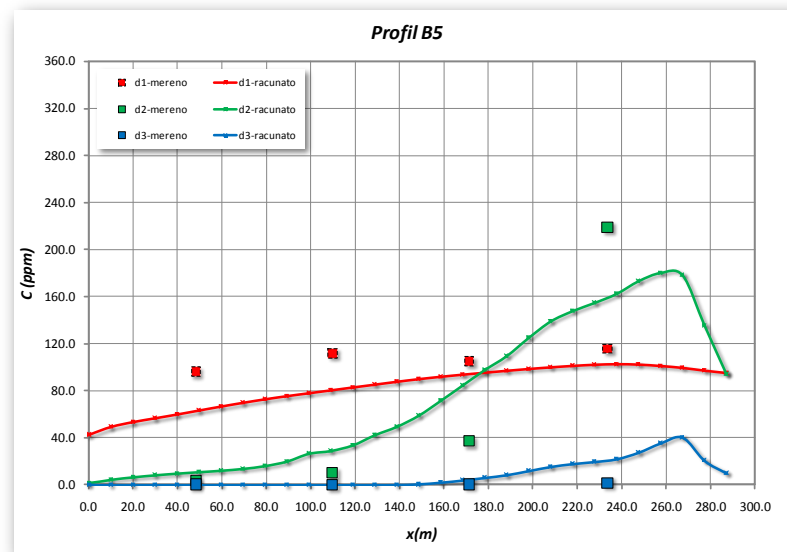
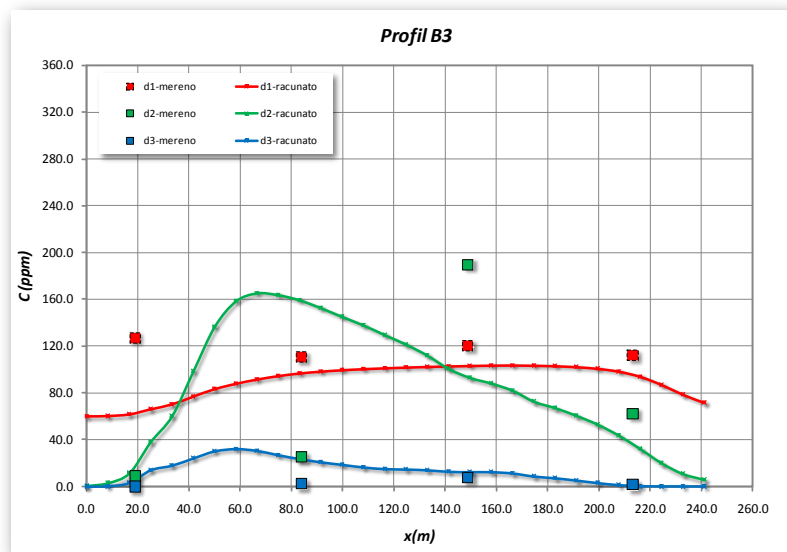


Slika 6.17 Dobijeni raspored koncentracije C_2 duž modelirane deonice reke Missouri

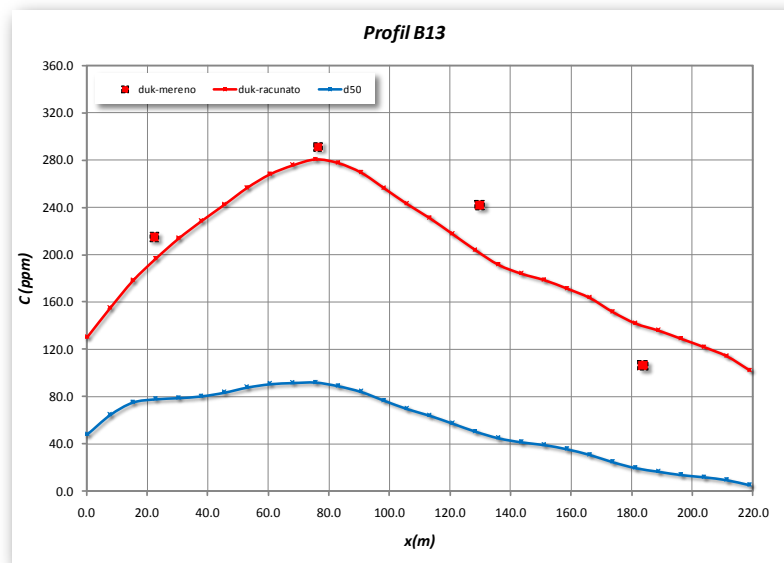
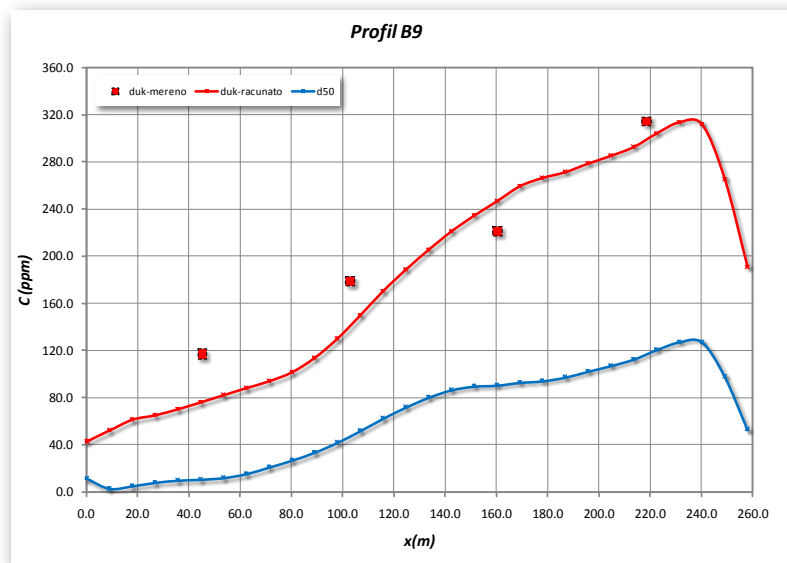
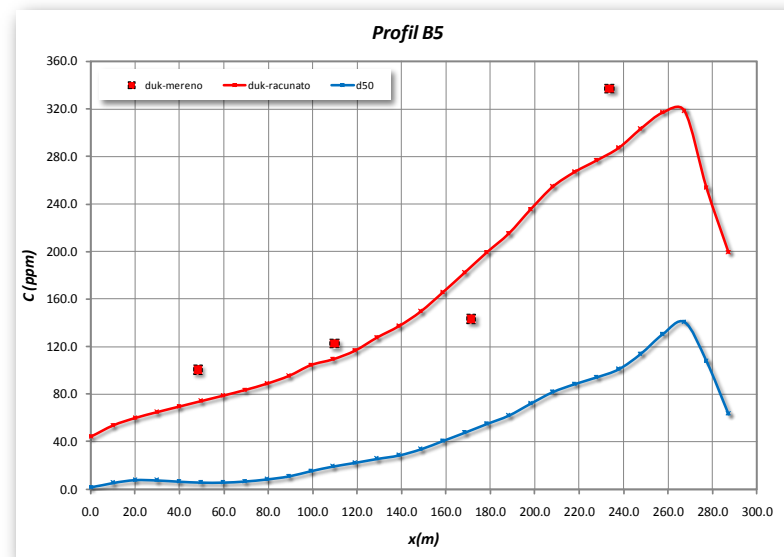
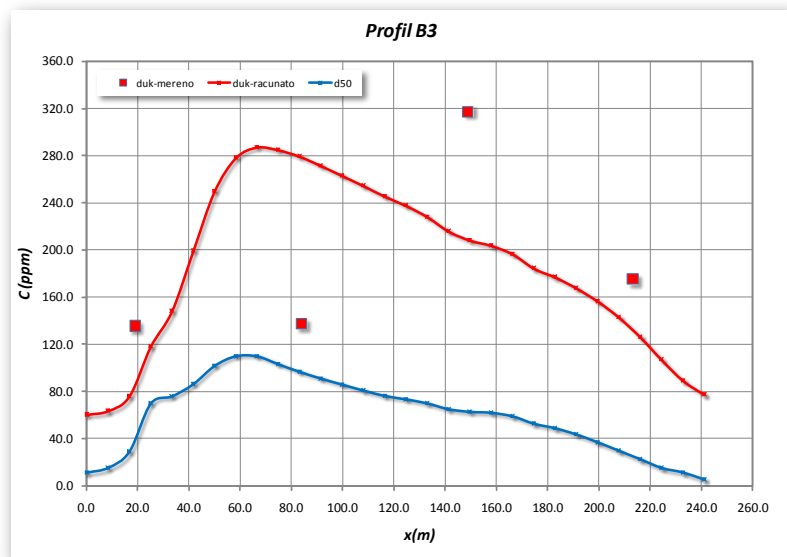
Kako bi se dobijeni rezultati prostornog rasporeda koncentracije potvrdili, potrebno je sračunate vrednosti porediti sa merenim podacima. Kao što je ranije navedeno, merenja suspendovanog nanosa vršena su u 14 ravnomerno raspoređenih mernih profila duž cele rečne krivine (Slika 6.13), od kojih je svaki od profila imao po 4 merne vertikale, kao i u dve dodatne lokacije $D1$ i $D2$ oko napera (Slika 6.14). Integracijom merenih koncentracija po dubini

sračunate su njihove osrednjene vrednosti, koje su zatim poređene sa dobijenim rezultatima. Takođe, dodatna analiza rađena je za i slučaj uniformnog rasporeda nanosa, gde je za reprezentativni prečnik usvojena vrednost od $d_{50}=0.207mm$. Dobijeni rezultati proračuna pri pretpostavci uniformnog nanosa su zatim poređeni sa kumulativnim računatim (po frakcijama), i kumulativnim merenim vrednostima koncentracije. Za profile *B3*, *B5*, *B9* i *B13* ovo poređenje je prikazano na slikama 6.18 i 6.19, dok se dijagrami za sve ostale profile nalaze u prilogima (Prilog 9-14).

Izuzev profila *B2*, *B4*, *B7*, *B8*, *B10*, *B11* i *D7*, gde se za interval GI_2 u jednoj do dve merne vertikale primećuju značajnije razlike između sračunatih i merenih vrednosti, svi merni profili pokazuju veoma dobro slaganje poređenih rezultata za sva tri granulometrijska intervala. Verno ispraćena tendencija relativnog porasta izmerenih koncentracija od desne ka levoj obali na središnjem delu krivine, kao i obrnuti trend na samom izlazu iz deonice (Slika 6.18 i Prilog 11), primetna je duž svih mernih profila i za sve tri usvojene frakcije. Što se tiče intervala GI_2 , ranije je naglašeno da sami mereni podaci daju veoma nejasan prostorni raspored koncentracije, tj. evidentna je intenzivna aktivnost čestica ovog intervala duž modelirane deonice. Njihovo istovremeno prisustvo i na rečnom dnu i u suspenziji, gde čak par mernih profila pokazuju izuzetno visoke vrednosti koncentracija, nesumnjivo potvrđuje da interval GI_2 grupiše praktično onaj deo čestica koje se za date uslove strujanja i morfoloških karakteristika toka nalaze u stanju labilne nanosne ravnoteže. Međutim, iako je zaključeno da su ove visoke koncentracije samo prolaznog (trenutnog) karaktera, model ipak na lokaciji *B2* pokušava pojačanom erozijom da delimično nadomesti ove vrednosti. Na prilogu 9 ovo je vidljivo kao blagi porast koncentracije uz desnu obalu. Značajnija odstupanja ovog tipa, koja se primećuju na dve vertikale profila *B4*, *B7* i *B10* (Prilog 9 i 10), kao i na jednoj vertikali profila *B8*, *B11* i *D2* (Prilog 10 i 11), izazvana su izuzetno visokim izmerenim koncentracijama pri dnu (druga vertikala profila *B7* - $C_{dno2}=2702.00 ppm$, sedma vertikala merne lokacije *D2* - $C_{dno2}=2678.00 ppm$), koje s obzirom na to da su nastale kao posledica izolovanih lokalnih turbulentnih procesa, model nije bio u stanju da reprodukuje. Ono što treba ovde naglasiti jeste da je granulometrija GI_2 pretrpela najveću prostornu preraspodelu u odnosu na zadati početni uslov. Dok su se prva i treća frakcija relativno malo menjali tokom proračuna, model je sa početnih $46.00 ppm$ uspeo da duž kompletne deonice rečne krivine simulira veoma zahtevan i složen raspored koncentracije C_2 . S obzirom na to da, kako je prethodno navedeno, interval GI_2 obuhvata najaktivniji deo granulometrijske krive, povećanje tačnosti moglo bi se ostvariti dodatnim rastavljanjem ovog intervala.



Slika 6.18 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile B3, B5, B9 i B13 - reka Missouri

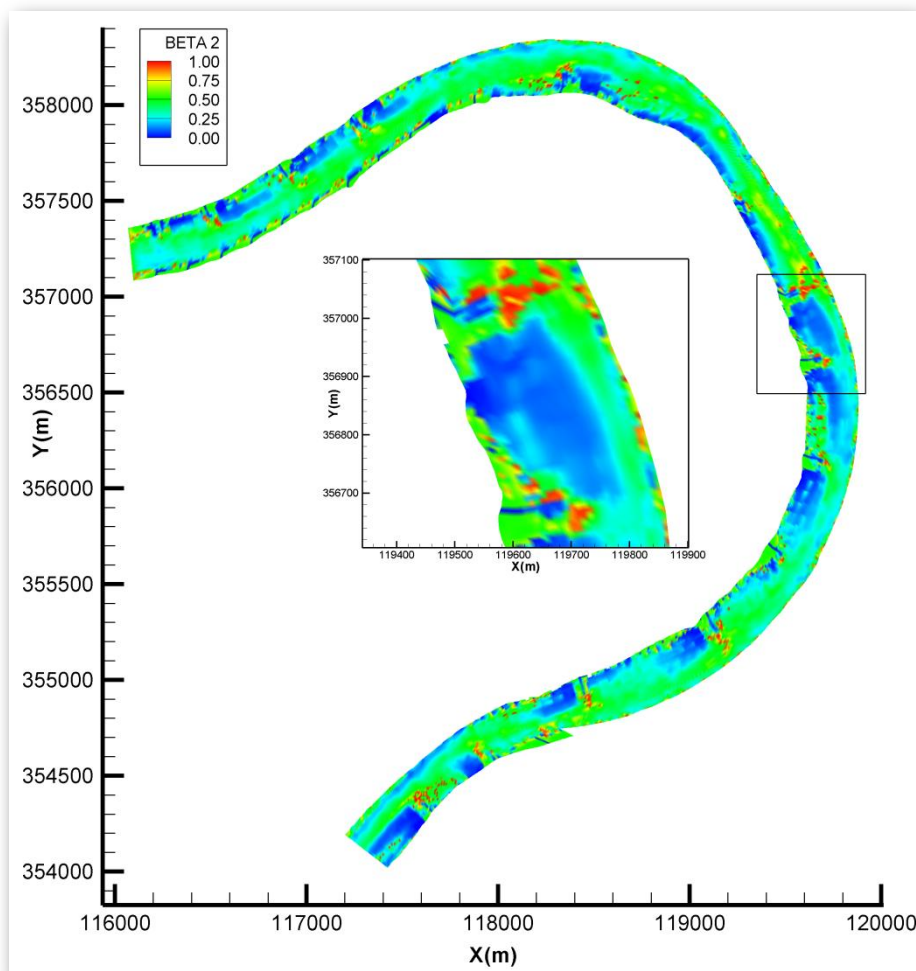


Slika 6.19 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile B3, B5, B9 i B13 - reka Missouri

Da dobijeni rezultati potvrđuju sposobnost formiranog nanosnog modela, baziranog na frakcijama, da simulira transport nanosa sa znatno većom tačnošću i pouzadanošću nego model zasnovan na uiformnom rasporedu nanosa (d_{50}), potvrđuje i Slika 6.19, kao i prilozi 12 - 14. Na ovim dijagramima prikazano je poređenje ukupne koncentracije nanosa sračunatog po frakcijama sa izmerenom, i sračunatom pri uniformnom rasporedu nanosa. Kao što se i vidi sa dijagrama, u slučaju uniformne pretpostavke nanosa dolazi do značajnog podcenjivanja izmerenih koncentracija suspendovanog nanosa. Zadavanjem jedne vrednosti prečnika zrna, koja predstavlja 50% zastupljenosti na granulometrijskoj krivoj, model nije u stanju da pravilno reprodukuje fiziku kretanja nanosnih čestica u suspenziji i na rečnom dnu (erozija i deponovanje određene frakcije), što povratno za rezultat daje znatno manje koncentracije (masu) nanosa u suspenziji nego što je to izmereno. Sa druge strane, ukupna količina suspendovanog nanosa dobijena primenom modela sa tri frakcije, pokazuje veoma dobro slaganje sa izmerenim vrednostima, čime ne samo da je zadovoljen bilans ukupne mase nanosa u suspenziji, već su i uspešno modelirane količine svake od usvojenih frakcija ponaosob. Tek neznatna odstupanja prisutna su iz već prethodno pomenutih razloga. Ovo ukazuje na to da je kombinovanje modela za proračun transporta suspendovanog nanosa, koji je zasnovan na *Metodi karakteristika*, sa teorijskom *Rouse*-ovom krivom za proračun erozije (Poglavlje 4), i metodom razlomljenih koraka za proračun strujanja, rezultiralo dobijanjem izuzetno robusnog numeričkog modela, koji je u stanju da za konkretne granulometrijske frakcije sa velikom tačnošću reprodukuje kompleksne prostorne raspodele.

Veza između suspendovanog nanosa i materijala na rečnom dnu ostvaruje se preko procesa erozije i deponovanja. Konstantnim erodovanjem nanosnog materijala određene frakcije (intervala), njeno procentualno prisustvo na dnu se smanjuje, dok se istovremeno procenat preostalih - krupnijih frakcija povećava. Na isti način, ali sa suprotnim smerom, deluje i proces taloženja nanosa iz suspenzije. Međutim, kao što je objašnjeno u poglavljima 3 i 4, ova dva elementa nanosnog kretanja nisu jedini koji utiču na to koja će se količina materijala neke frakcije naći na određenoj lokaciji toka, ili na to u kojoj meri će se kota dna oboriti ili podići. Procesi kao što su kretanje krupnijeg nanosa po dnu (vučeni nanos), i neposredna razmena materijala sa podslojevima ispod, permanentno menjaju strukturu i vertikalni položaj kote rečnog korita, direktno menjajući na taj način granulometrijski sastav nanosa ne samo dna, već i samih podslojeva. Definisanjem međusobne interakcije svih navedenih elemenata (kombinovano sa transportom suspendovanog nanosa), formirani sedimentni numerički model kao rezultat daje prostorne raspodele parametara zastupljenosti usvojenih intervala β_k , i priraštaja kote dna ΔZ ,

duž celog računskog domena. Sračunata granulometrijska zastupljenost drugog intervala β_2 , kao i njeno poređenje sa izmerenim vrednostima, dato je za razmatrani slučaj rečne krivine na slikama 6.20, 6.21 i 6.22.

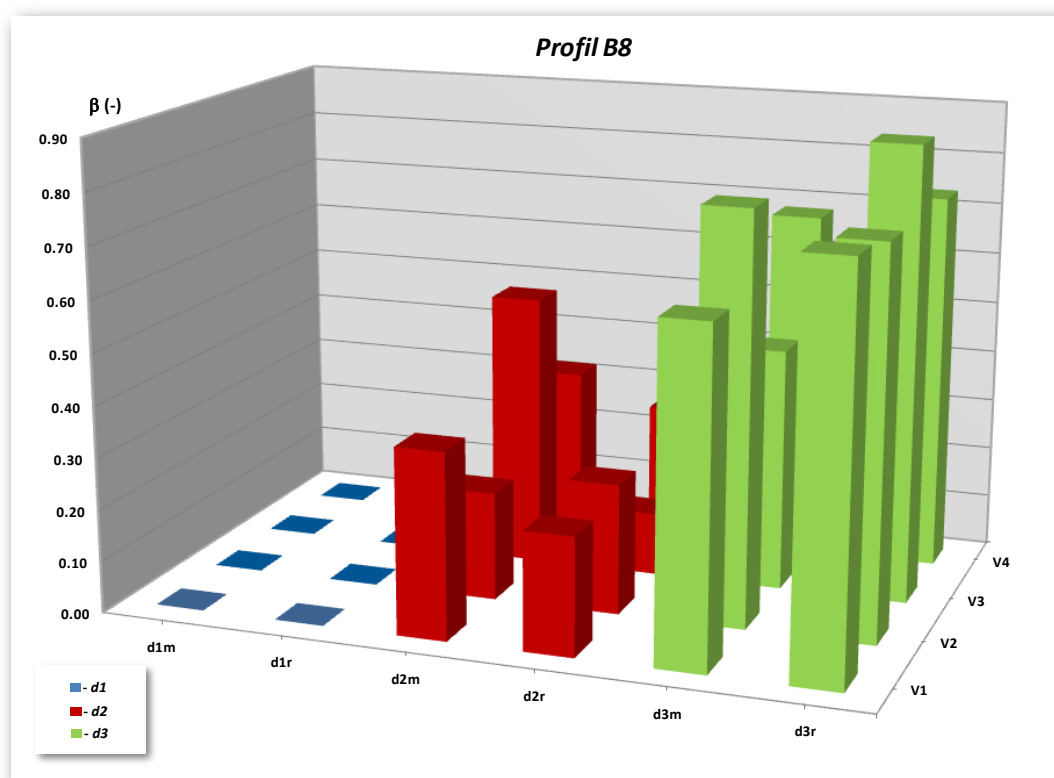


Slika 6.20 Zastupljenost drugog granulometrijskog intervala β_2 duž krivine reke Missouri

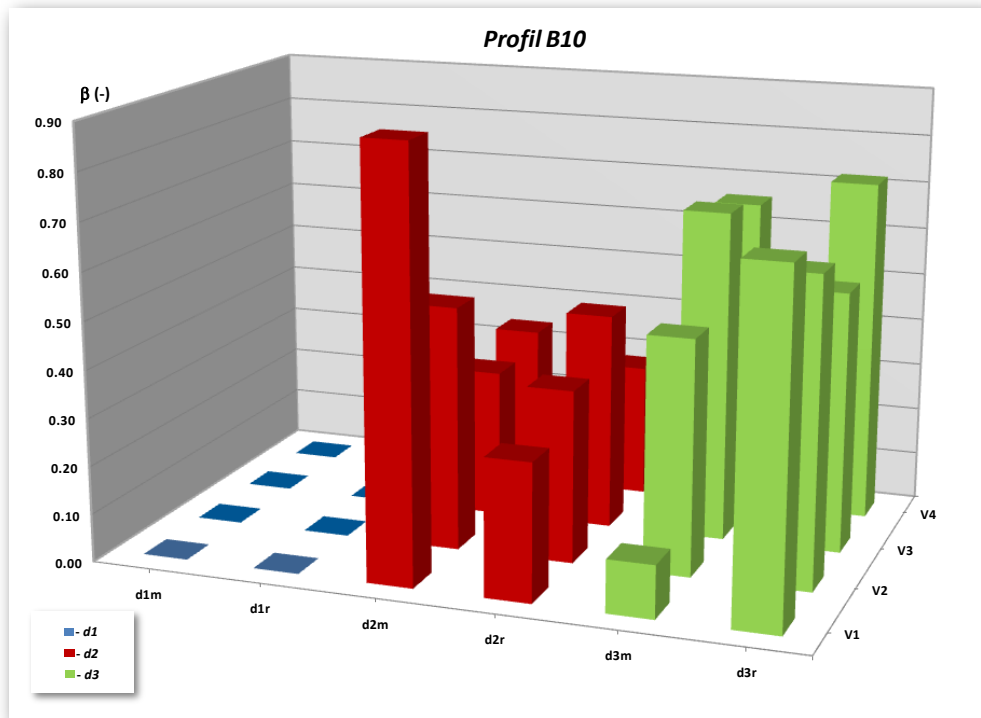
Dobijeni rezultati pokazali su da duž cele modelirane deonice prve usvojene frakcije uopšte nema na rečnom dnu ($\beta_1=0.0$), tj. da korito krivine čine isključivo granulometrijski intervali GI_2 i GI_3 . Generalno posmatrajući, duž primarnog dela toka prisutna je delimična promena početnog stanja drugog intervala GI_2 sa zadatih 53.0 %, na prosečnih 48 % (zeleno boja), što istovremeno uzrokuje porast trećeg intervala sa 46.0 %, na prosečnih 52.0 %. Za razliku od ovog dela korita, situacija je u zonama poremećenog tečenja ipak značajno drugačija. Rezultati pokazuju da je u oblastima odmah neposredno iza regulacionih objekata (petostruki skok brzina) druga frakcija u potpunosti isprana (oko 5.0%), zbog čega se s obzirom na prisustvo samo dve granulometrije procenat trećeg intervala naglo povećava na oko 95.0 % (Prilog 15). Međutim, dok je u ovim delovima korita druga frakcija potpuno odnešena, na samim krajevima ovih građevina javlja se

sasvim obrnut slučaj. Smanjujući prisustvo treće frakcije na svega 3.0 %, drugi interval je sada taj čiji procenat naglo skače na izuzetno visoke vrednosti od oko 97.0 %. Kako su u ovim zonama dobijene koncentracije i jednog i drugog intervala izuzetno niske, jedini logičan uzrok ovakvom ponašanju nanosa na dnu je poremećena strujna slika izazvana regulacionim objektima. Naime, kako zbog malih vrednosti brzina neposredno iza objekata tok nije u stanju da pokreće najkrupnije čestice (GI_3) po rečnom dnu, shodno tome kao direktna posledica javlja se potpuno iznošenje (ispiranje) materijala sitnije frakcije, GI_2 , sa te konkretne lokacije. Sa druge strane, na krajevima građevina se javlja nagli porast brzina, što za rezultat ima dominiranje frakcije GI_2 .

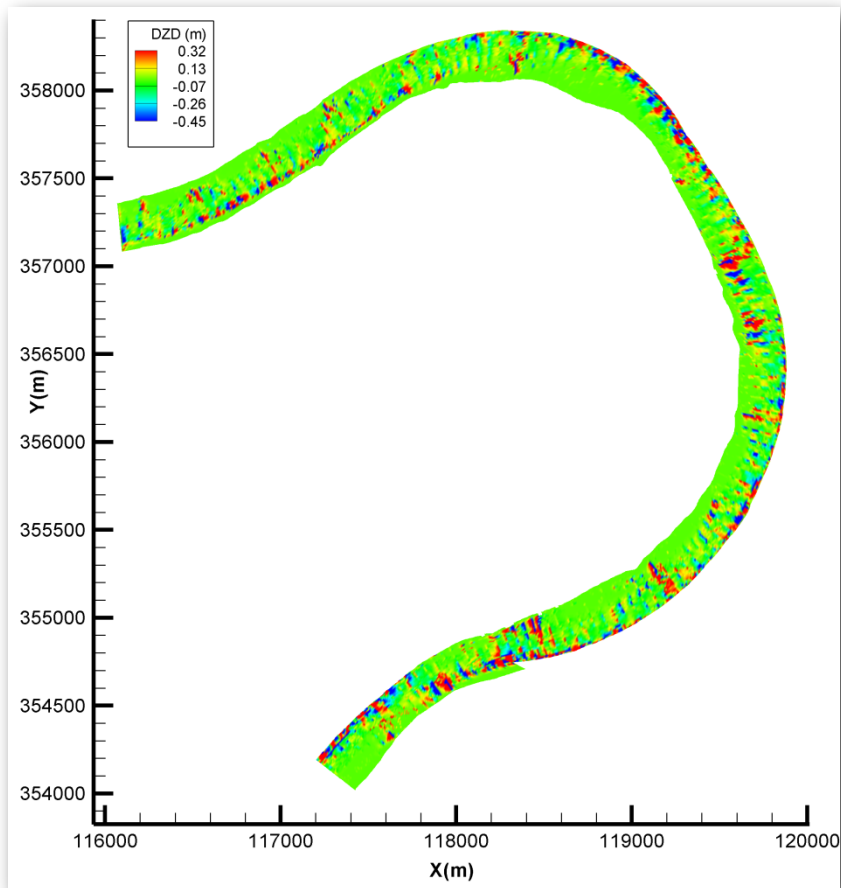
Potvrda tačnosti sračunate granulometrijske slike demonstrirana je veoma dobrim slaganjem dobijenih i merenih vrednosti za sve merne profile, od kojih su merni profili $B8$ i $B10$ prikazani na slikama 6.21 i 6.22, dok se svi ostali nalaze u prilogima (Prilog 16-20). U ovim dijagramima indeks m se odnosi na merene vrednosti, dok indeks r označava sračunate vrednosti.



Slika 6.21 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil $B8$ - reka Missouri



Slika 6.22 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B10- reka Missouri



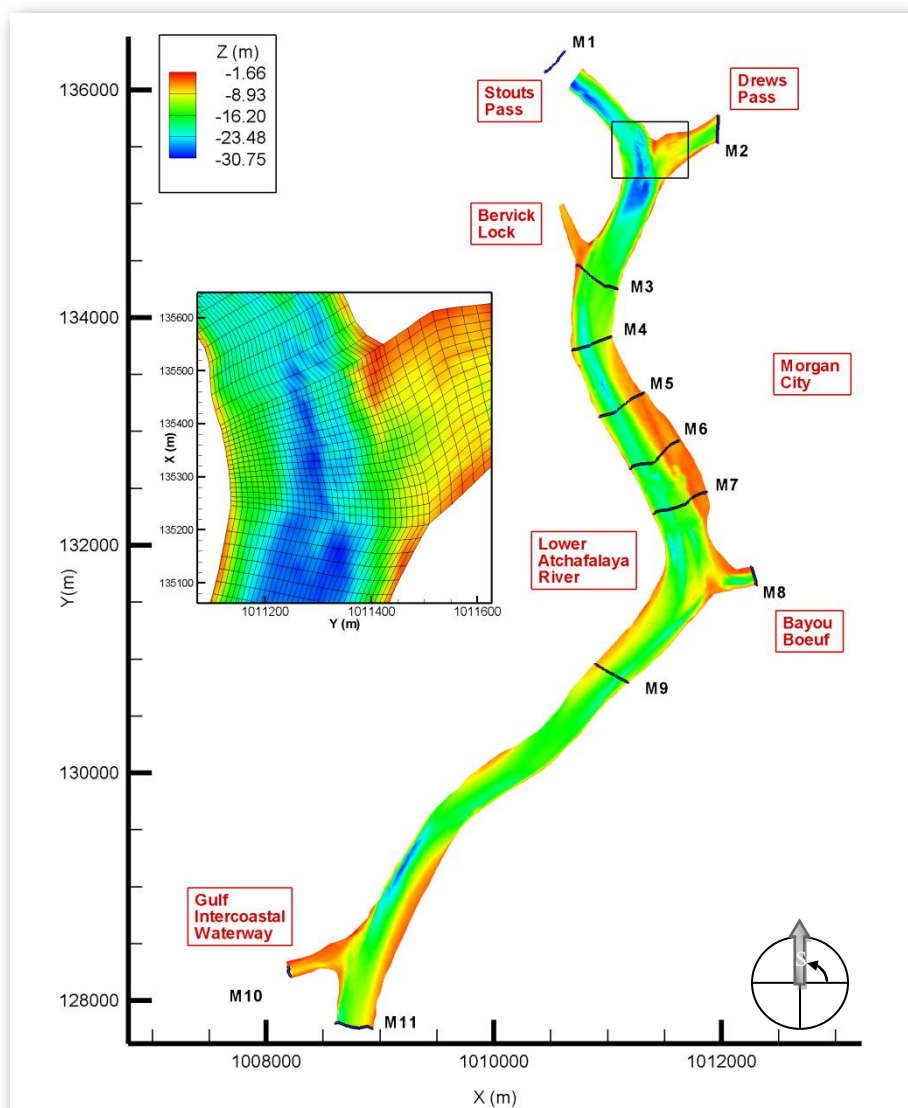
Slika 6.23 Kumulativna promena kote dna

Na poslednjoj slici 6.23, prikazani su rezultujući kumulativni priraštaji ΔZ duž kompletnog domena rečne krivine. Dobijeni kao posledica jednodnevne simulacije strujanja i transporta nanosa, sračunati priraštaji u najvećem delu krivine pokazuju da je kumulativna erozija/deponovanje izuzetno malog intenziteta, reda veličine svega par centimetara. Tako zanemarljivo male deformacije rečnog korita jasno ukazuju na to da je uspostavljeno ravnotežno stanje nanosa u krivini, kao i to da su sami početni uslovi pravilno i tačno definisani. Samo su u zonama uz spoljnu (levu) obalu krivine, i pored samih regulacionih građevina, priraštaji nešto većeg intenziteta (vrednosti se kreću u dijapazonu od $-0.45 \div 0.32$ m), što je najverovatnije posledica loših batimetrijskih merenja na ovim lokacijama, kao i intenzivne erozije usled poremećene strujne slike u neposrednoj okolini građevina (porast brzina).

6.4. Model reke Atchafalaya

Kao drugi test model za koji postoje dostupna terenska merenja hidrauličkih i nanosnih parametara, korišće se deonica donjeg toka reke *Atchafalaya*, kod grada *Morgan City* u državi *Louisiana* (SAD). Locirana između 179.5 (*Stouts Pass*) i 190.0 (neposredno nizvodno od *Gulf Intercoastal Waterway* - a) rečnog kilometra glavnog korita reke *Atchafalaya*, izabrana rečna deonica je praktično menader u obliku dvostruke "2" krivine, čija je najveća širina vodnog ogledala oko 500.0 m. Pored relativno složene geometrijske strukture glavnog korita, na ovom potezu dužine približno 11.0 km, prisutni su i bočni uticaji u vidu 4 lateralna kanala. Dva ovakva kanala nalaze se na samom uzvodnom delu, kod mesta *Drews Pass* i *Bervick Lock*, dok su treći i četvrti locirani na sredini deonice (*Bayou Boeuf*), i na njenom nizvodnom kraju (*Gulf Intercoastal Waterway*). Njihova pozicija je zajedno sa lokacijom kompletne deonice prikazana na slici 6.24.

U cilju fomiranja numeričkog modela deonice donjeg toka reke *Atchafalaya*, urađena su kao prvi korak neophodna terenska merenja. Koristeći istu metodologiju uzorkovanja kao i kod modela reke *Missoury*, u periodu između 28. i 29. maja 1999. god. su duž cele rečne deonice (uključujući i pritoke) izvršena merenja: batimetrije korita, brzine, koncentracije suspendovanog nanosa, kao i merenja granulometrijskog sastava rečnog dna. Kako u ovom slučaju nivoi slobodne površine vodnog ogledala nisu mereni, njihove vrednosti su računane na osnovu procenjenog podužnog pada. Osim batimetrije korita, koja zbog potreba samog modela zahteva gušću mernu mrežu, sva ostala merenja vršena su duž 11 istih mernih profila (na slici 6.24 označeni slovom *M*), kod kojih je kao i u prethodnom slučaju različita tehnika uzorkovanja brzina i nanosa uzrokovala različit broj mernih vertikalaa. Tako su na primer uzorci nanosa iz suspenzije i sa rečnog dna mereni samo u četiri merne vertikale, ravnomerno raspoređene duž određenog mernog profila (prosečan razmak vertikalaa je oko 110.0 m), dok se kod brzina, koje su takođe merene *ADCP* metodom (u ovom slučaju merenja brzina su rađena na plovilu u pokretu), ovaj broj kreće u opsegu od 13 do 40 mernih vertikalaa po profilu. Za razliku od ovakvog, relativno ravnomernog rasporeda vertikalaa, najveći broj mernih profila je mahom grupisano na gornjoj polovini deonice - 7 profila, dok se preostala 4, od kojih su čak tri profila postavljena na otvorenim granicama modela (neophodna merna mesta zbog graničnog uslova), nalazi na nizvodnoj polovini. Što se tiče rasporeda mernih tačaka po vertikali, u oba slučaja (i kod merenja brzina i kod uzorkovanja nanosa) su korišćeni postupci koji su detaljnije objašnjeni u prethodnom podpoglavlju 6.3.



Slika 6.24 Situacija deonice donjeg toka reke Atchafalaya sa naznačenim položajem mernih profila

Nakon analize prikupljenih terenskih merenja, sledeći korak u uspostavljanju matematičkog modela podrazumeva definisanje granica aktivnog domena i formiranje potrebne računске mreže. U tom pogledu su za ulaznu granicu modela usvojene dve računске linije. Prva linija je postavljena na samom ulazu u računsku oblast *Stouts Pass*, oko 200.0 m nizvodno od mernog mesta *M1*, dok se druga linija poklapa sa lokacijom mernog profila *M2*, kod mesta *Drews Pass*. Sa druge strane, za izlazne granice usvojene su dve računске linije locirane na krajevima bočnih kanala *Bayou Boeuf* i *Gulf Intercoastal Waterway*, i poklapaju se sa položajem mernih profila *M8* i *M10*, dok je treća izlazna linija postavljena na poziciji mernog profila *M11*. Sve ostale granice smatrane za čvrste.

Ovako definisan računski domen prekriven je zatim računskom mrežom. Preliminarnom analizom više različitih dimenzija mreže, došlo se do zaključka da je optimalna širina računске

ćelije 10 m, a da se optimalni odnos stranica kreće između ; 1:1 na mestima spajanja bočnih kanala sa glavnim koritom (izrazito prostorno strujanje), do 1:4 u zonama relativno jednolikog strujanja. Usvajanjem ovih karakteristika računске ćelije, konačno je dobijena mreža dimenzija 379 x 76, koja broji ukupno 28804 računskih ćvorova. Međutim, kako je ovom mrežom prekrivena i računski neaktivna (“suva”) oblast, koja je locirana između bočnih kanala sa leve i desne strane glavnog korita, ukupan broj računskih tačaka redukuje se sa početnih 28804 računskih ćvorova, na 14196 tzv. aktivnih računskih tačaka. Tako je na primer dobijeno da glavno korito u *j* pravcu ima 36 računskih tačaka, dok kod bočnih kanala taj broj prosečno iznosi oko 20 računskih ćvorova. Detalj računске za mesto spajanja bočnog kanala sa glavnim koritom prikazan je na slici 6.24.

- **Hidraulički proračun**

Kao i u prethodnom slučaju, prvi deo proračuna odnosi se isključivo na uspostavljanje kvazi-ustaljenog strujanja unutar računskog domena, tj. proračun strujne slike i prostornog rasporeda nivoa. Na osnovu prikupljenih terenskih merenja, koja prvenstveno podrazumevaju izmerene intenzitete brzine i procenjene vrednosti nivoa, na svim otvorenim granicama formirani su granični uslovi u vidu proticaja ili nivoa. Integracijom merenih brzina po površini poprečnog preseka, dobijene su procenje vrednosti protoka koje su zadate u računskim linijama profila *M1* (prva linija postavljena nizvodno od mernog mesta), *M2*, *M8* i *M10*, dok je konstantna vrednost nivoa zadata samo na krajnje nizvodnoj (izlaznoj) graničnoj liniji, kod profila *M11*. Kalibracijom na dodatnom setu merenja, obavljenom između 16. i 17. juna 1999. god., za vrednost kalibracionog parametra usvojeno je $z_o=0.008m$ (izraz 3.55), što daje opseg *Manning*-ov koeficijenta hrapavosti od 0.028 do 0.030 $m^{-1/3}/s$, dok je za vrednost koeficijenta turbulentne difuzije uzeta vrednost od $v_t=0.1 m^2/s$. Odgovarajuće vrednosti proticaja i nivoa za svaku od graničnih računskih linija dati su u tabeli 6.5.

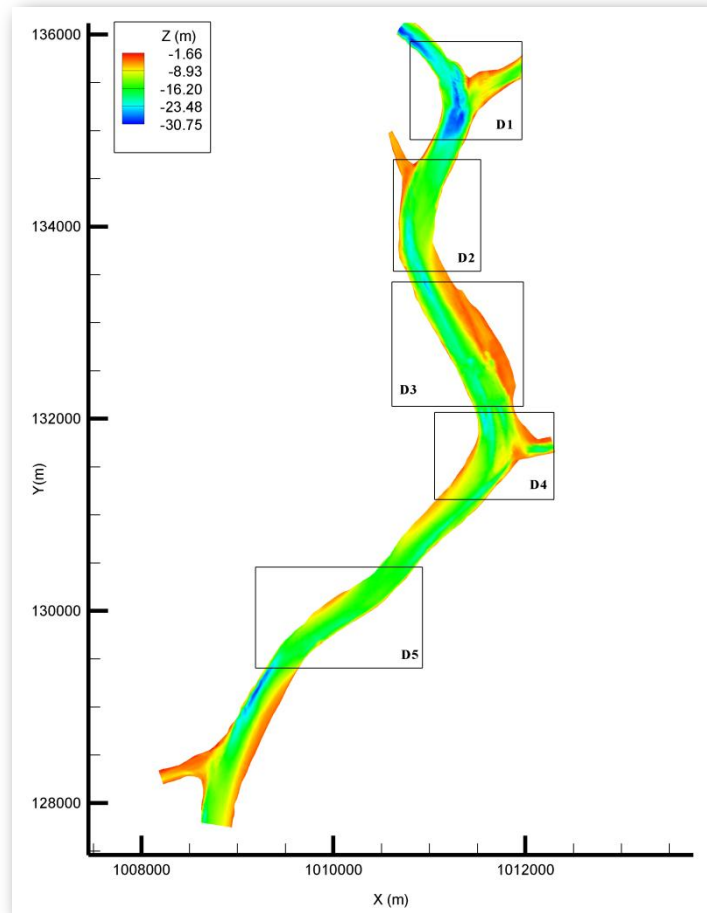
<i>Profil</i>	<i>Q (m³/s)</i>	<i>Z_v (m)</i>
M1	3879.4 (ulaz)	
M2	1302.6 (ulaz)	
M8	906.1 (izlaz)	
M10	481.4 (izlaz)	
M11		1.22

Tabela 6.5 Granični uslovi zadati na otvorenim granicama – donji tok reke Atchafalaya

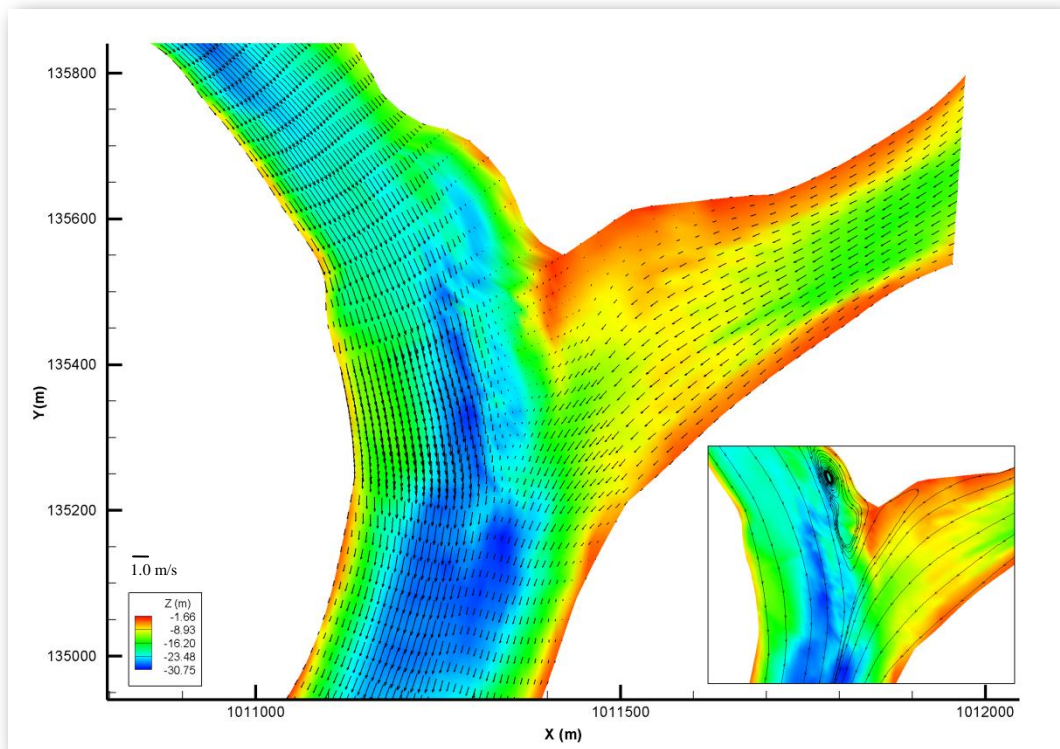
Kako ovaj set terenskih merenja nije sadržao nikakve podatke o rasporedu nivoa vodnog ogledala duž deonice, sve potrebne vrednosti kote slobodne površine vode računane su na osnovu procenjenog uzdužnog pada od 2.9 cm/km . Za početne uslove u deonici usvojeno je stanje bez strujanja (komponente brzine su jednake nuli), pri nivou vodnog ogledala od $Z_v=1.22 \text{ m}$ (vrednost nizvodnog graničnog uslova).

Nakon stabilizacionog perioda od 10.0 sati , koje je model simulirao sa 720 računskih koraka, i usvojenim vremenskim intervalom od $\Delta t=50s$, uspostavljeno je kvazi-ustaljeno tečenje za period između 28 i 29 maja 1999 godine. Za zadati ulazni proticaj od $5182.1 \text{ m}^3/s$ ($Q_{M1}+Q_{M2}$), model duž deonice formira relativno ravnomerno raspoređen podužni pad vodnog ogledala od 2.1 cm/km , pri čemu se dubine kreću u opsegu od 31.0 m u najdubljim delovima toka, do 1.7 m u najplićim zonama deonice. Ova prostorna ujednačenost podužnog nagiba nivoa, koja prvenstveno podrazumeva postepeni (blagi) trend porasta nivoa od nizvodnog ka uzvodnom kraju deonice, narušena je samo na mestima samih krivina. Na ovim lokacijama, gde se usled promene pravca glavnog korita (ili uticaja bočnog kanala) javlja izraženo zakrivljeno strujanje, nagibi vodnog ogledala u poprečnom smeru uzimaju maksimalne vrednosti od 0.007 cm/m (mesto spajanja bočnog kanala *Drews Pass* sa glavnim koritom), dok se duž pravolinijskog dela toka sa neporemećenim (ravanskim) strujanjem oni kreću prosečno oko 0.002 cm/m . Ovakvi značajni poprečni nagibi vodnog ogledala u zoni krivina, čije su vrednosti praktično trostruko veće od podužnih padova, ukazuje na to da je strujanje u ovim oblastima veoma intenzivno i izuzetno složeno. U prilog ovome idu i slike 6.25, 6.26a - 6.26e, na kojima su za par značajnijih lokacija prikazani detalji dobijene strujne slike.

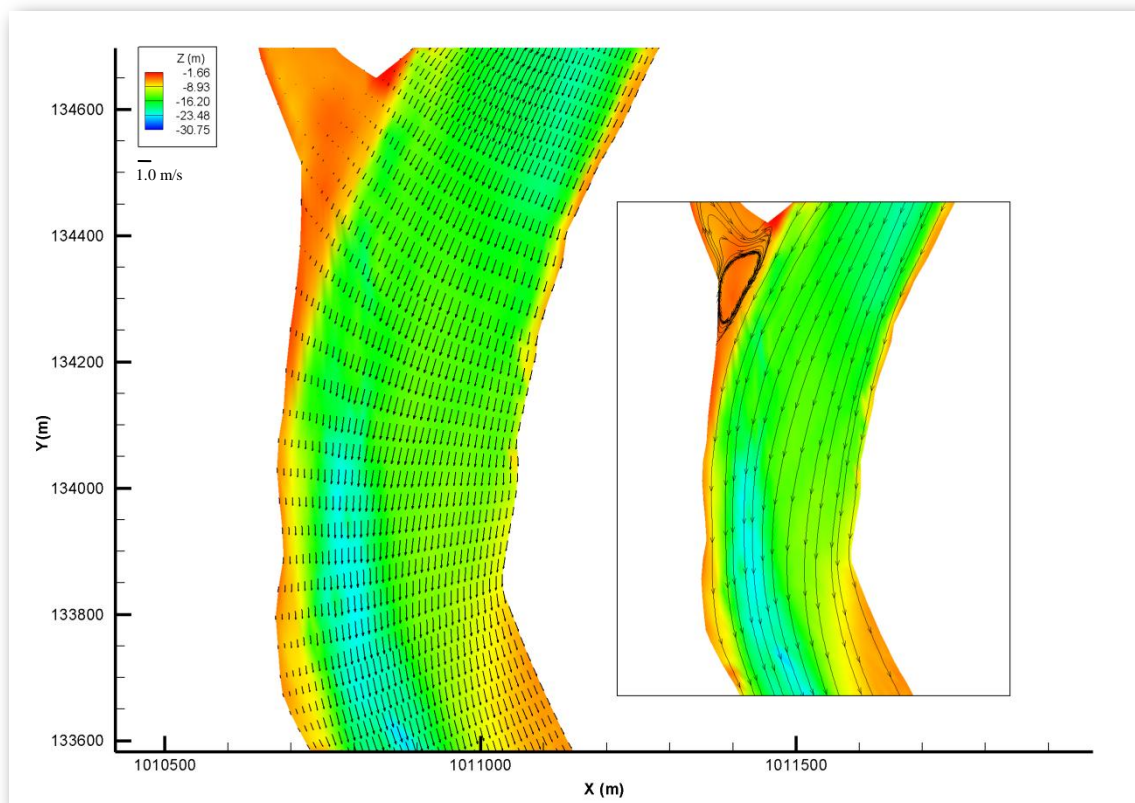
Spajanjem lateralnog kanala sa glavnim koritom na uzvodnom delu deonice (Slika 6.26a), primarna struja se kao posledica kombinovanog uticaja geometrije krivine (zakrivljenost strujnica) i bočnog dotoka pomera ka desnoj obali glavnog korita, što dovodi do porasta poprečne denivelacijom nivoa na oko 3.0 cm . Istovremeno sa ovakvim koncentrisanjem primarnog toka uz njegovu unutrašnju obalu, strujna slika se sa početnog paraboličnog rasporeda, koji ima intenzitet maksimuma od oko 1.15 m/s , transformiše u strujanje koje zauzima efektivno oko 65% od ukupnog poprečnog preseka, i ima relativno konstantni intenzitet od 1.6 m/s . Preostalih 35% preseka nalazi se pod direktnim uticajem zajedničkog dejstava naglog proširenja preseka i spajanja dva toka, u kome se uz levu obala korita, u zoni oblika slova "V", formira strujanje vrtložnog karaktera sa veoma slabim intenzitetom (prosečne vrednosti brzina u vrtlogu su oko 0.03 m/s). Idući nizvodno od ove pozicije, na potezu od spajanja do bočnog kanala *Bervick Lock*, primarni tok se postepeno "prebacuje" sa desne obale na levu.



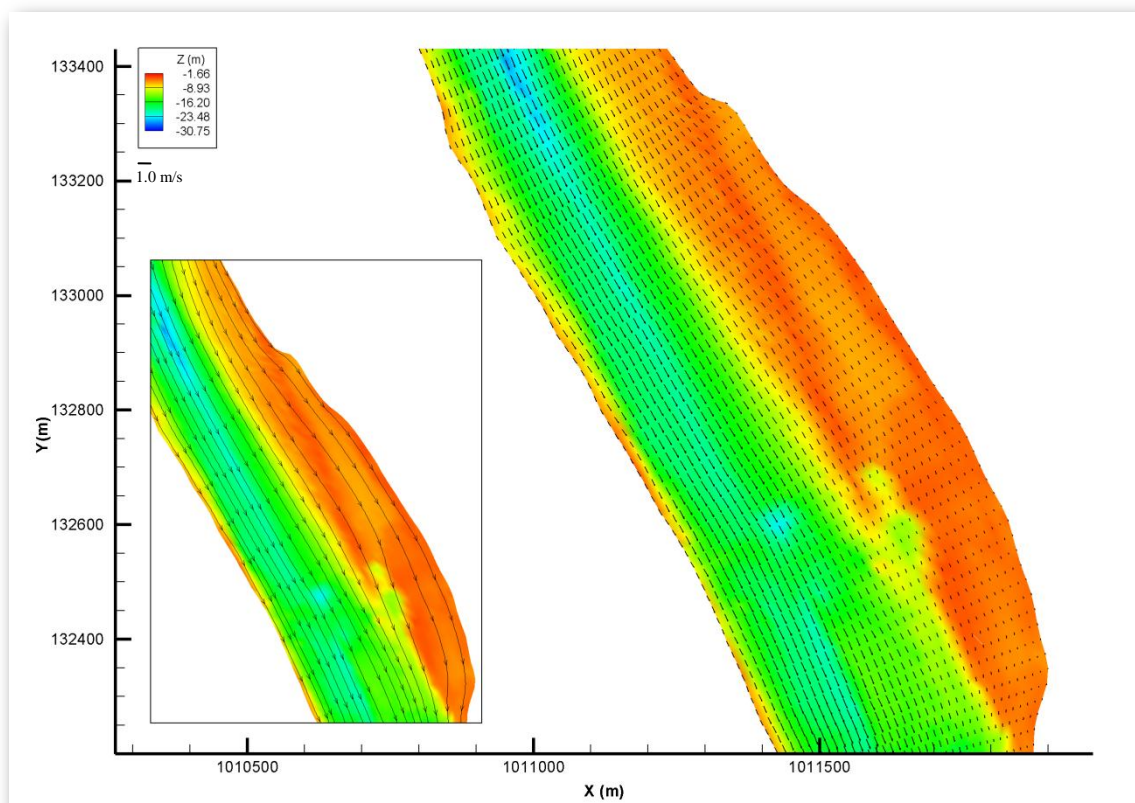
Slika 6.25 Situacija deonice sa položajem prikazanih detalja - reka Atchafalaya



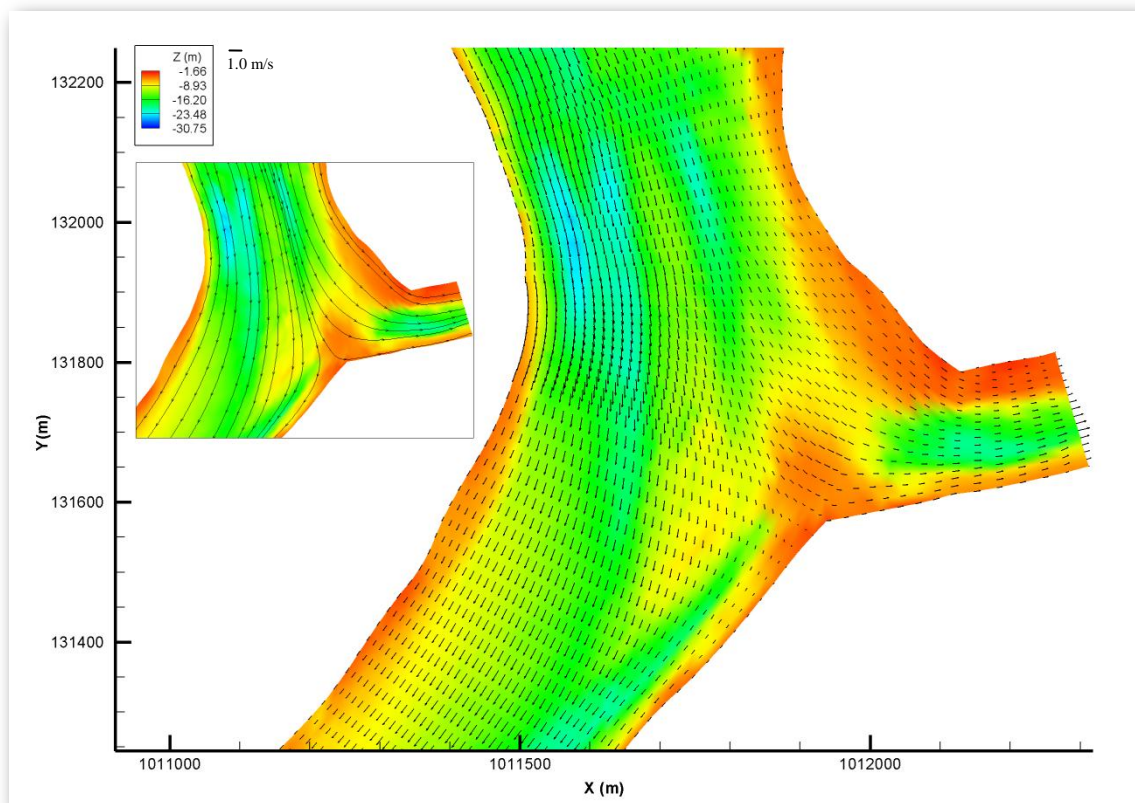
Slika 6.26a Strujna slika - detalj D1



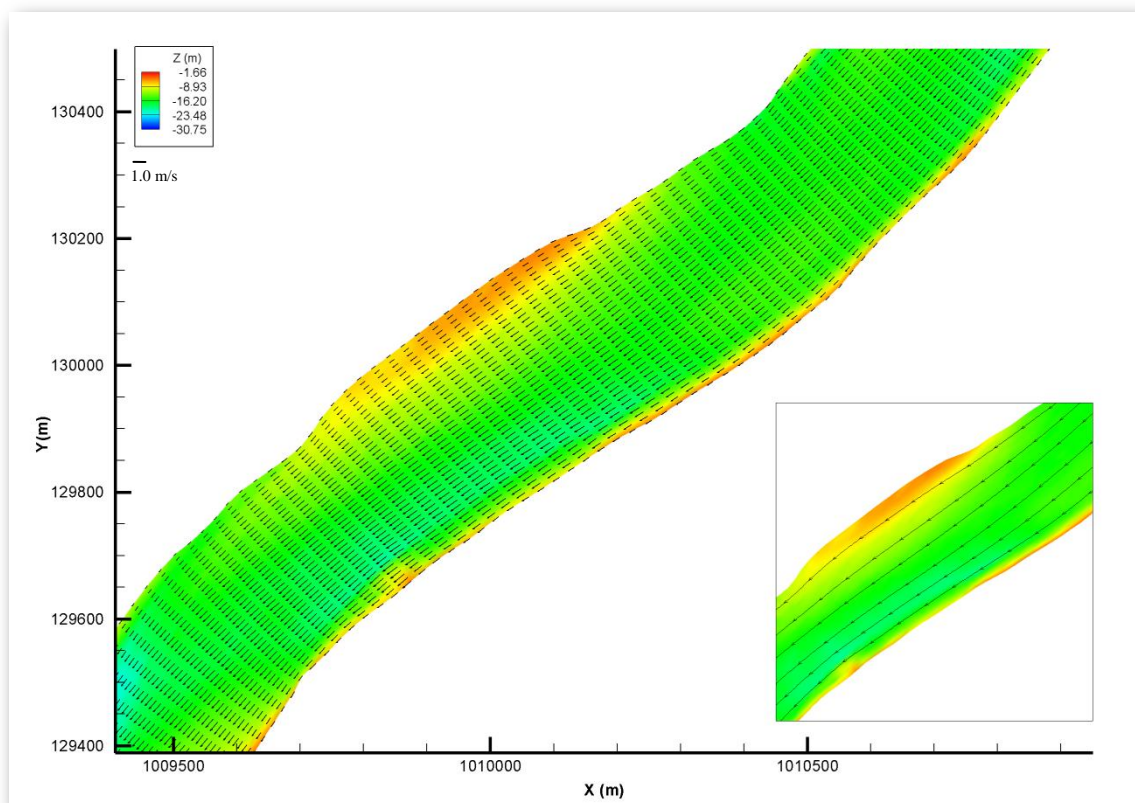
Slika 6.26b Strujna slika - detalj D2



Slika 6.26c Strujna slika - detalj D3



Slika 6.26d Strujna slika - detalj D4



Slika 6.26e Strujna slika - detalj D5

U krivini lociranoj neposredno ispod ulaza u kanal (Slika 6.26b), raspored brzina sada dobija oblik karakterističan za slučaj skretanja toka. Na samoj desnoj obali korita, uz spoljnu (konkavnu) stranu krivine, intenziteti vektora brzine su najmanji, i kreću se oko 0.23 m/s , dok se položaj maksimuma u profilu, koji prosečno iznosi oko 1.15 m/s , menja zavisno od položaja tog profila u krivini. Tako imamo da se od samog ulaza u krivinu, gde je najveća vrednost brzine locirana negde oko plovine dužine poprečnog preseka, položaj maksimalnog intenziteta pomera sve više ka desnoj obali, ostavljajući iza sebe relativno ravnomeran raspored brzina sa intenzitetima koji u preseku imaju vrednost blisku maksimalnoj.

Izlaskom iz ove krivine, struja nailazi na pravu deonicu dužine oko 2.0 km , koja se na potezu od 1.3 km širi na levoj obali za oko 50.0 m (Slika 6.26c). Znatno manje dubine u proširenju nego u preostalom delu toka (dubine u proširenju se kreću u opsegu od $4.0 \div 7.0 \text{ m}$), dele strujno polje ovog dela deonice na dve jasno definisane zone. Prva, sa prosečnim dubinama oko 20.0 m , i vrednostima brzina od 1.1 m/s , predstavlja primarni deo struje, i nalazi se na desnoj polovini toka, dok je druga zona sama oblast proširenja, gde su brzine znatno manjeg intenziteta, i kreću se oko prosečnih 0.3 m/s . Ono što je ovde karakteristično, jeste prilično ravnomeran raspored intenziteta vektora brzine po preseku za obe ove oblasti, što je najverovatnije posledica koncentrisanja toka u glavnom koritu usled otpora koji zona proširenja pruža strujanju.

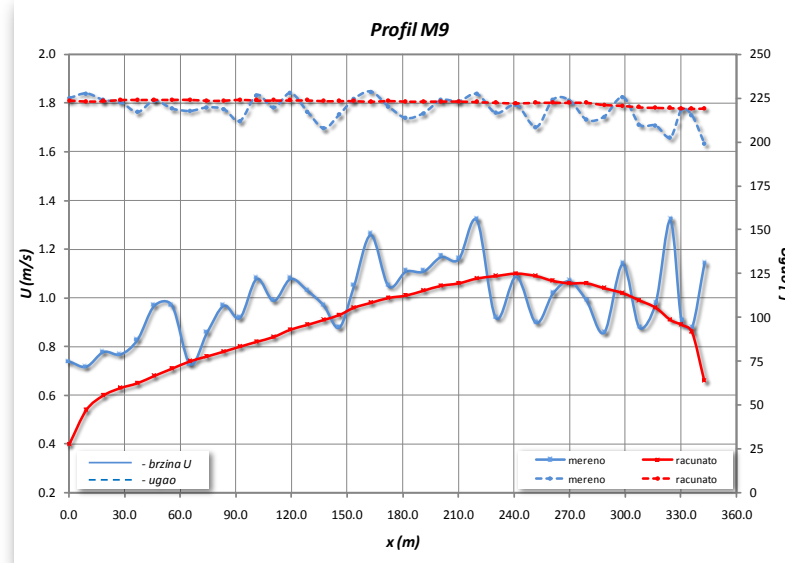
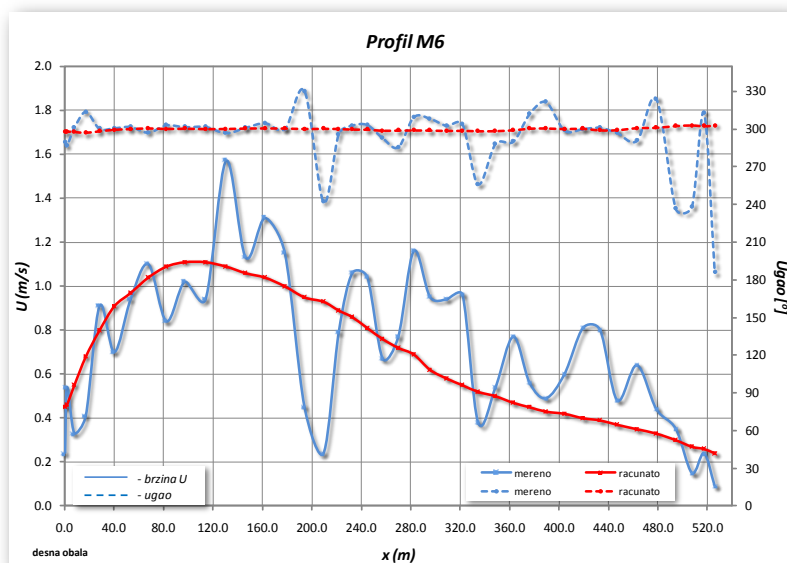
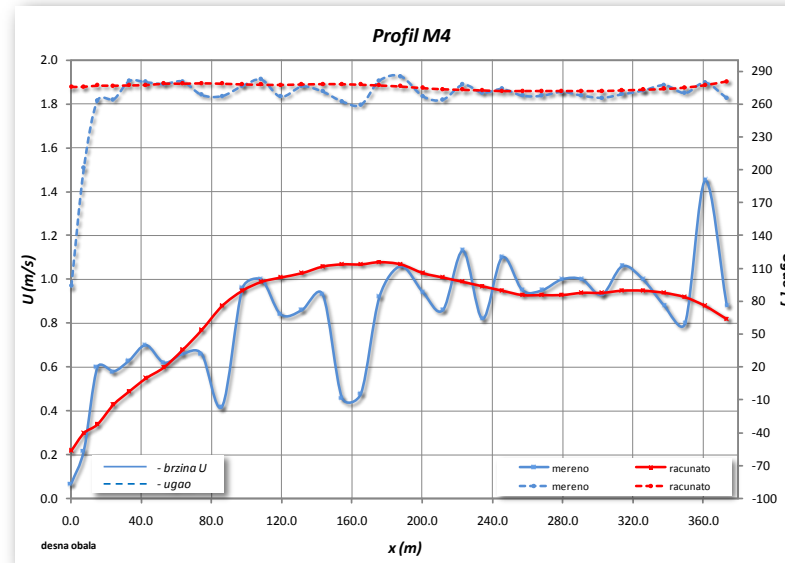
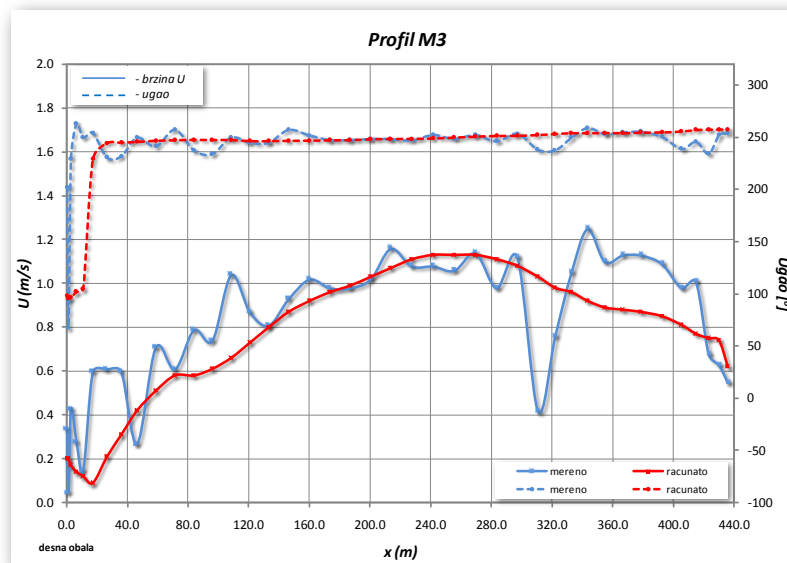
Nakon ove prave deonice, koja se može posmatrati i kao prelaz između dve "2" krivine, korito donjeg toka reke *Atchafalaya* ponovo ulazi u krivinu. Na njenom samom početku (Slika 6.26d) glavni tok se sa leve strane izliva u bočni kanal *Bayou Boeuf*, zbog čega se do sada ukupan protok od $5182.1 \text{ m}^3/\text{s}$ smanjuje za $906.1 \text{ m}^3/\text{s}$. Slično kao i slučaju uzvodnog dela, intenziteti brzina se ovde usled zakrivljenja strujnica uz desnu obalu krivine povećavaju na vrednosti od oko 1.0 m/s , što je dvostruko više u odnosu na brzine preostalog dela krivine i samog bočnog kanala *Bayou Boeuf* (one u preseku iznose oko 0.5 m/s). Vrlo brzo posle izlaska iz krivine ova neravnomernost brzina po preseku se gubi, a uspostavlja se ujednačen (relativno konstantan) raspored brzina sa intenzitetom od oko 1.0 m/s . Struja ovakav trend zdražava duž celog nizvodnog poteza dužine 3.0 km , kada tok ponovo ulazi u krivinu, koja je po svojim karakteristikama znatno blaža od prethodnih. Relativno mala zakrivljenost krivine (veliki poluprečnik krivine), menja strukturu strujne slike po preseku (Slika 6.26e) na isti način kao što je to bio slučaj sa uzvodnom krivinom, formirajući blago paraboličan raspored brzina sa minimalnim vrednostima od 0.3 m/s uz desnu obalu korita, i maksimalnim brzinama od oko 1.0 m/s na sredini preseka. Izlaskom iz ove poslednje krivine, tok vrlo brzo ponovo uspostavlja ujednačen raspored brzina sa prosečnom vrednošću od 1.0 m/s . Ove karakteristike struja sada

zadržava sve do izlaza iz deonice. Kako bi se ova sračunata strujna slika i potvrdila, u nastavku će se izvršiti njeno poređenje sa izmerenim vrednostima.

Kako je ranije navedeno, profilna ADCP merenja sve tri komponente brzine vršena su na 11 mernih profila (Slika 6.24), duž kojih je za razliku od prethodno obrađenog modela korišteno plovilo u pokretu. Da bi ove izmerene vrednosti bile uporedljive sa rezultatima ravanskog modela, primenom trapeznog pravila urađena je njihova integracija po vertikalnoj koordinati (z), što je za rezultat dalo komponente brzine u i v koje su osrednjene po dubini. I u ovom slučaju postupak vertikalnog osrednjavanja, kao i usvojenu pretpostavku o hidrostatičkom rasporedu pritisaka, opravdavaju veoma male vrednosti vertikalnih komponenta brzine, koje su posmatrane u odnosu na horizontalne komponente zanemarljive. Na način kao što je to bio slučaj kod reke *Missoury*, poređenje izmerenih i sračunatih vrednosti za sve merne profile rađeno je u obliku intenziteta kompletnog vektora brzine i njegovog položajnog ugla. Ovo poređenje je za profile *M3*, *M4*, *M6* i *M9* prikazano na slici 6.27, dok se za sve preostale merne profile (*M1*, *M2*, *M5*, *M7*, *M8*, *M10* i *M11*) dijagrami poređenja nalaze u prilogima (Prilog 21-22).

Izuzev nešto većeg stepena oscilacija izmerenih vrednosti koje su prisutne kod određenog broja mernih vertikalna (posledica uzorkovanja brzina sa plovila u pokretu), i u ovom slučaju primećuju se veoma dobra slaganja sračunatih vrednosti intenziteta brzina i njihovih položajnih uglova sa izmerenim vrednostima. Merni profili *M1* i *M2* (Prilog 21), koji s obzirom da se nalaze na mestima ulaznih granica, su kao i kod reke *Missoury* prvenstveno korištene za zadavanje i kontrolu ulaznih graničnih uslova (jedinični protok). U tom pogledu, na prvom ulaznom profilu *M1*, zadate vrednosti pokazuju znatno veće odstupanje od merenih nego što je to slučaj sa drugim profilom *M2*. Detaljnijim analizama i nakon više puštenih prolaza, ovakav neravnomeran raspored izmerenih brzina po preseku identifikovan je kao posledica lokalne promene hidrauličkih uslova na tom mernom mestu, koji je u mernom periodu između 28 i 29 maja 1999 god. uzrokovao određeni hidraulički poremećaj kratkog vremenskog trajanja. Iz tog razloga ovi izmereni intenziteti brzina na mernom profilu *M1* korišteni su samo za procenu ulaznog protoka, koji je zatim za potrebe ulaznog graničnog uslova “raspodeljen” na osnovu usvojenog algoritma o raspodeli koncentrisanog protoka prema pripadajućim jediničnim površinama.

Da ovo ni u kom slučaju nije raspored brzina pri stvarnom ustaljenom stanju toka, pokazuje i veoma dobro poklapanje sračunatih i izmerenih vrednosti brzina i njihovih položajnih uglova na prvom nizvodnom mernom profilu *M3* (Slika 6.27). Osim par mernih vertikalna u kojima se javlja nagli i intenzivni skok izmerenih brzina, duž celog mernog profila, koji je postavljen u samoj krivini toka (ostvaruje se strujanje prostornog karaktera), odstupanja sračunatih i izmerenih



Slika 6.27 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile M3, M4, M6 i M9 - reka Atchafalaya

vrednosti kreću se u opsegu od $\pm 20.0\%$. Slična situacija je takođe prisutna i kod mernog profila *M4* (merna linija postavljena na nizvodnom kraju iste krivine), gde ako se iz analize izuzmu vrednosti ekstremnih tačaka (vertikala), kojih u ovom profilu ima nešto više nego u prethodnom, primećuje se da dobijeni rezultati pokazuju čak i bolja slaganja sa izmerenim vrednostima nego što je to bio slučaj sa profilom *M3*. U prilog ovoj tvrdnji idu i vrednosti relativnih procentulnih odstupanja između izmerenih i sračunatih vrednosti brzina, koja su u ovom profilu nešto manja, i kreću se u rasponu od $\pm 17.0\%$.

Za razliku od ova dva merna profila, čija je pozicija locirana u oblasti strogo prostornog strujanja (krivina), svi ostali profili postavljeni su duž pravih deonica u kojima vladaju znatno prostiji hidraulički uslovi. Međutim, iako se oni nalaze u zonama sa dominantnim ravanskim strujanjem u horizontalnoj ravni (vertikalne komponente su zanemarljivo male), sa prikazanih dijagrama (Slike 6.27 i prilozi 21 – 22) se vidi da izmerene vrednosti duž ovih profila karakteriše mnogo veći stepen oscilovanja nego što je to bio slučaj kod profila *M3* i *M4*. Intenzivna variranja merenih vrednosti brzina, koje se kreću u rasponu od čak $\pm 70.0\%$ u odnosu na profilski trend brzina, prisutna su u profilima *M5*, *M6*, *M7*, *M8*, *M10* i *M11*, dok takva dinamika nije ispoštovana jedino u slučaju mernog profila *M9* (Slika 6.27), kod koga su ove varijacije mnogo manje, reda veličine kao i kod profila *M3* i *M4*. Osnovni razlog za ovakav izuzetno neujednačen raspored izmerenih brzina duž poprečnog preseka, leži u samom načinu uzorkovanja brzina. Naime, za razliku od stacionarnog plovila, koje je korišteno kod reke *Missouri*, ovde je za potrebe uzorkovanja brzina primenjeno plovilo u pokretu, čije se osnovne prednosti ogledaju u ekonomičnosti i brzini merenja, dok su glavni nedostaci sama tačnost dobijenih rezultata [Spasojević, Muste 2000].

Imajući prethodno navedeno u vidu, može se zaključiti da sračunate vrednosti i pored ovakvih intenzivnih oscilacija merenih veličina izuzetno dobro opisuju trend rasporeda izmerenih brzina i njihovih položajnih uglova, formirajući pri tom liniju prosečnih brzina duž poprečnog preseka koja se po vrednostima veoma dobro slaže sa merenim vrednostima.

- ***Proračun transporta suspendovanog nanosa i deformacije rečnog korita***

Nakon uspostavljenog kvazi ustaljenog tečenja duž donjeg toka reke *Atchafalaya*, drugi deo numeričkog proračuna obuhvata modeliranje nanosnih procesa (transport suspendovanog i vučenog nanosa, deformacija rečnog korita, razmena materijala između rečnog dna i toka). Na isti način kao što je to rađeno i u slučaju reke *Missouri*, za formiranje ovog segmenta modela potrebno je pored hidrauličke podloge, koja podrazumeva sračunatu strujnu sliku i rasporede

dubina duž modelirane deonice, pre samog nanosnog proračuna definisati odgovarajući set računskih parametara i potrebnih nanosnih uslova. U tom pogledu prvi od neophodnih elemenata je računski granulometrijski interval GI , parametar sa kojim se u proračun uvodi efekat prirodne mešavine nanosa.

Prosejavanjem uzoraka nanosa iz suspenzije i sa rečnog dna kroz sita odgovarajućeg otvora, dobijena je kao rezultat granulometrijska struktura nanosnog materijala donjeg toka reke *Atchafalaya* prikazana u tabeli 6.6. Kao što se iz tabele vidi, i u ovoj izmerenoj raspodeli

<i>Gran. interval k</i>	<i>Prečnk frakcije D (mm)</i>
1	$D < 0.062$
2	$0.062 < D < 0.074$
3	$0.074 < D < 0.088$
4	$0.088 < D < 0.125$
5	$0.125 < D < 0.177$
6	$0.177 < D < 0.250$
7	$0.250 < D < 0.350$
8	$0.350 < D < 0.500$
9	$0.500 < D < 1.000$

Tabela 6.6 *Granulometrijski intervali nanosnog materijala donjeg toka reke Atchafalaya*

najmanja frakcija je identifikovana kao krupna prašina sa prečnikom zrna $D_{min}=0.062$ mm, dok se u ulozi maksimalnog zrna pojavljuje krupan pesak prečnika $D_{max}=1.00$ mm (Jovanović 2002). Sa ovim prečnicima kao graničnim vrednostima zrna, sve frakcije izmerenog raspona grupisane su u ukupno $k=9$ granulometrijskih intervala, koji su se na sličan način kao i kod reke *Missoury* pokazali računski neadekvatnim (broj intervala k koji definiše broj nanosnih jednačina). Iz tog razloga i ovde je izvršena dodatna redukcija izmerenih granulometrijskih raspona na njihov optimalan broj, vodeći pri tom računa o istovremenom zadržavanju visokog stepena efikasnosti modela i kvaliteta samih rezultata. U tom pogledu optimizacijom ovih izmerenih intervala dobilo se novih $k=5$ granulometrijskih raspona, od kojih su samo prvi i poslednji identični sa izmerenim, dok su preostala tri formirana grupišući frakcije od drugog do osmog izmerenog raspona, i to na način koji je prikazan u tabeli 6.7. Za određivanje odgovarajućih reprezentativnih frakcija $d(mm)$, takođe je korišteno pravilo geometrijske sredine najmanjeg i najvećeg zastupljenog prečnika u intervalu (Tabela 6.7).

Usvojeni granulometrijski intervali	Klasa	Prečnik frakcije D (mm)	Karakteristični prečnik d (mm)	Pripadajući intervali
GI ₁	Prašina i glina	$D < 0.062$	0.015	1
GI ₂	Vrlo fini pesak	$0.062 < D < 0.125$	0.088	2-4
GI ₃	Fini pesak	$0.125 < D < 0.250$	0.177	5-6
GI ₄	Pesak srednje krupnoće	$0.250 < D < 0.500$	0.354	7-8
GI ₅	Krupan pesak	$0.50 < D < 1.00$	0.707	9

Tabela 6.7 Usvojeni granulometrijski intervali donjeg toka reke Atchafalaya

Nakon formiranja računskog granulometrijskog sastava nanosa, kao sledeći korak u uspostavljanju nanosnog modela potrebno je definisati početni i granični uslov. U slučaju suspendovanog nanosa, analiza uzetih uzoraka pokazala je da se od ukupno pet usvojenih granulometrijska intervala u suspenziji deonice nalaze samo prva tri - GI_1, GI_2 i GI_3 , dok su preostala dva, GI_4 i GI_5 , identifikovana samo na rečnom dnu. Izuzev prvog bočnog kanala, kod mesta *Drews Pass*, sva tri granulata pokazuju prilično konstantan raspored koncentracije po vertikali duž toka. Uzimajući u obzir uzorke sa svih mernih profila (izuzev profila $M2$), utvrđeno je da su sa prosečnom koncentracijom od 350.00 ppm , najzastupljenije frakcije u toku prašina i glina (interval GI_1). Druge dve frakcije, prisutne u suspenziji sa znatno manjim intenzitetom od svega 10.00 ppm , identifikovane su kao vrlo fini i fini pesak (intervali GI_2 i GI_3). Jedinu razliku u odnosu na ovo prosečno stanje koncentracija, koje je duž celog računskog domena postavljeno kao početni uslov jednačine održanja mase suspendovanog nanosa, pravi merni profil $M2$. Prosečne koncentracije prvog intervala GI_1 su na ovom mernom mestu trostruko manje nego u preostalom delu toka, oko $C_1 = 130.00 \text{ ppm}$, dok se druga dva intervala se uopšte i ne pojavljuju. Imajući u vidu ove značajne razlike u koncentracijama, početni uslov bočnog kanala je modifikovan na osnovu pretpostavke da su vrednosti koncentracija sa mernog profila $M2$ merodavne za celu dužinu kanala. Što se tiče graničnih uslova, oni su zadavni samo na ulaznim granicama, kod mernih linija $M1$ (prva računaska linija nizvodno) i $M2$. Za ulazni raspored koncentracija po preseku usvojena je izmerena raspodela koncentracija, koja je za potrebe ravanskog modela osrednjena po dubini (Prilog 21).

Početni raspored parametra granulometrijske zastupljenosti β_k , formiran je na osnovu nanosnih uzoraka uzetih sa rečnog dna. Ono što je njihova analiza pokazala, jeste da se procentualna zastupljenost granulometrijskih intervala u glavnom koritu znatno razlikuje od onog koji se javlja u bočnim kanalima. Izuzev uzanog pojasa uz desnu obalu, gde se procenat prašine i gline

(GI_1) kreće u rasponu od $60.0 \div 90.0$ %, procentualno najzastupljenija frakcija na dnu glavnog korita je fini pesak, koji se kreće u opsegu od $40.0 \div 90.0$ % (GI_3). Sa izuzetkom dve visoke vrednosti, drugi granulati (GI_2) ovde varira između 0.0 i 40.0 %, dok se procenat peska srednje krupnoće (GI_4) kreće u dijapazonu od $1.0 \div 70.0$ %. Najkrupnije zrno je na dnu prisutno u veoma malim količinama, reda veličine $0.0 \div 11.0$ % (GI_5). Srednje vrednosti procentualnog prisustva duž glavnog korita (za osrednjavanje korišteni su svi merni profili glavnog korita - $M1, M3, M4, M5, M6, M7, M9$ i $M11$) dato je za sve intervale u vidu parametra β_k u tabeli 6.8.

Kod mernog profila $M2$, lociranog na samom ulazu u prvi bočni kanal, situacija je sasvim drugačija. Uzorci nanosa pokazuju da je na dnu ovog mernog profila sa čak 96.0 % zastupljenosti prisutan praktično samo prvi računski interval GI_1 , dok su količine sve ostale četiri frakcije zanemarljivo male, i kreću se između 0.0 i 0.5% . Delimična odstupanja od granulometrijske slike glavnog korita prisutne su još i kod mernog profila $M8$, postavljenog na kraju bočnog kanala *Bayou Beouf*, kao i kod profila $M10$, lociranog na izlazu iz kanala *GIW*. Slično kao i kod glavnog korita, njihove prosečne granulometrijske zastupljenosti svih pet intervala, koje su korištene kao početni uslovi duž bočnih kanala, dati su u tabeli 6.8.

	$\beta_k [-]$				
	GI_1	GI_2	GI_3	GI_4	GI_5
Glavno korito	0.15	0.12	0.57	0.15	0.01
Bočni kanal - Drews Pass	0.96	0.01	0.01	0.01	0.01
Bočni kanal - Bayou Beouf	0.27	0.36	0.35	0.01	0.01
Bočni kanal - GIW	0.26	0.22	0.45	0.06	0.01

Tabela 6.8 Usvojena granulometrijska kriva
korita donjeg toka reke Atchafalaya (početni uslov)

S obzirom na advektivni karakter jednačine održanja mase aktivnog sloja i suspendovanog nanosa, granični uslovi su zadati samo na ulaznim granicama. Na obe ulazne računске linije (nizvodno od profila $M1$ i na mestu profila $M2$), granični uslov je zadat u vidu prosečnih zastupljenosti svih pet intervala za te merne profile. Za slučaj mernog profila $M2$ ove prosečne zastupljenosti definisane su tabelom 6.8 (*Drews Pass*), dok se za profil $M1$ one nalaze u tabeli 6.9.

	$\beta_k [-]$				
	GI_1	GI_2	GI_3	GI_4	GI_5
Profil M1	0.23	0.04	0.49	0.23	0.01

Tabela 6.9 Usvojena granulometrijska zastupljenost mernog profila M1 (granični uslov)

Takođe, pored definisanih početnih i graničnih uslova zadati su i ostali kalibracioni parametri :

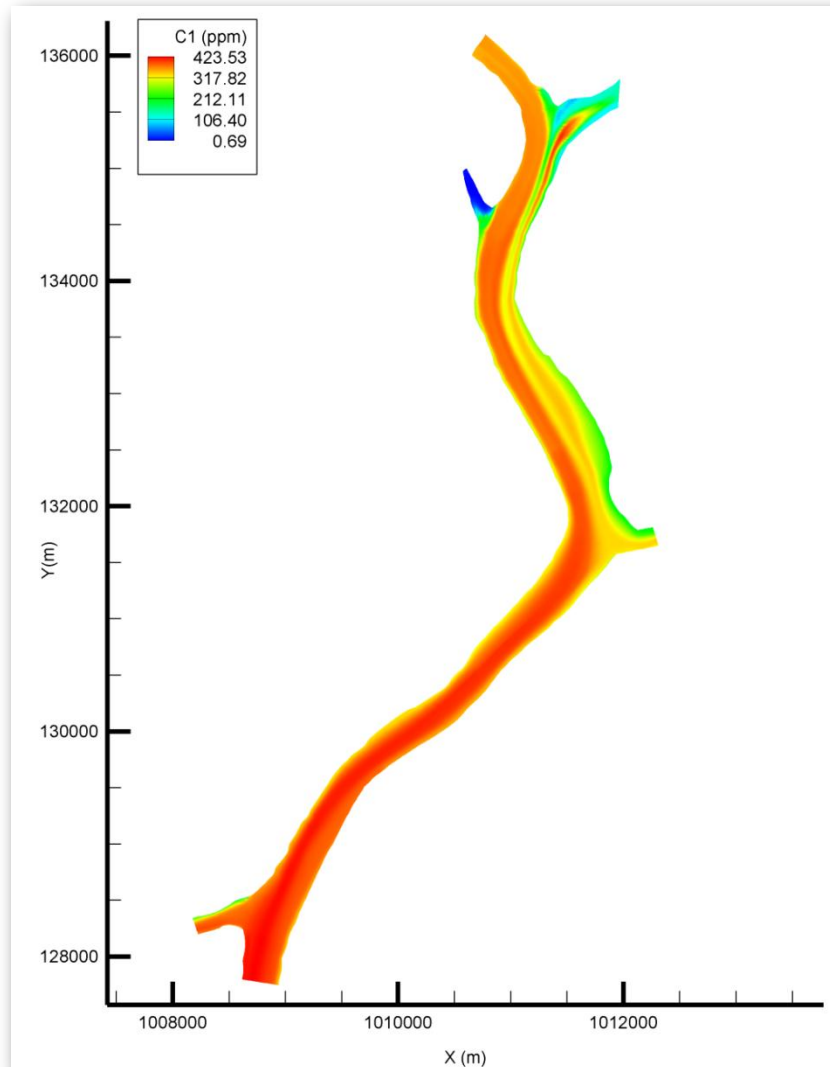
- početna debljina aktivnog sloja - $E_m=0.05$ m,
- debljina aktivnog podsloja - $Dap=0.5$ m
- odstojanje referentne koncentracije - $a=0.05$ m,
- vertikalni priraštaj iznad referentnog sloja - $\Delta a=0.025$ m,
- vremenski korak $\Delta t=50$ s (kao i u slučaju stabilizacionog perioda struje),

dok je za simulacioni period, potreban za uspostavljanje kvazi - ravnotežnog stanje između vode i nanosa, usvojeno vreme od jednog dana, odnosno 1728 računskih koraka.

Rezultujući raspored koncentracija suspendovanog nanosa za prvi granulometrijski interval GI_1 prikazan je na slici 6.28. Prateći glavni deo struje, polje relativno visoke koncentracije C_1 (crvena boja) proteže se duž cele deonice donjeg toka reke *Atchafalaya*, menjajući na taj način svoj intenzitet od početnih 350.00 ppm na ulazu, do čak 420.00 ppm na izlazu iz deonice. Kao što se i vidi na slici 6.28, izuzev srednjeg dela korita, i jednog kratkog segmenta posle uliva bočnog kanala *Drews Pass*, ove vrednosti koncentracija su uglavnom konstantne po celoj širini poprečnog preseka. Međutim, kako je navedno u analizi strujne slike, samu zonu proširenja korita, kao i oblast neposredno posle uliva prvog bočnog kanala, karakterišu znatno manji intenziteti brzina, koji se sada kao takvi direktno odražavaju i na transport suspendovanog nanosa. Tako je npr. u proširenom delu toka, gde su ostvarene brzine čak tri puta manje nego u glavnoj struji, koncentracija nanosa sa prosečnih $C_1=400.00$ ppm, pala na približnih $C_1=250.00$ ppm (zeleno boja), dok je u oblasti neposredno posle uliva prvog bočnog kanala ta vrednost nešto veća, i iznosi oko $C_1=270.00$ ppm. Uska izolovana traka pojačane koncentracije od oko $C_1=400.00$ ppm, koja je takođe primetna u ovoj zoni, direktna je posledica pojačane erozije na mestu uliva.

U slučaju preostale dve koncentracije, C_2 i C_3 , trend prostornog rasporeda pokazuje nešto drugačiju dinamiku. Obe frakcije dostižu prvo maksimalne vrednosti koncentracije od približnih 50.00 ppm u sredini toka, duž same ose glavnog korita, da bi se zatim sa relativno blagom

promenom po poprečnom preseku uz obale one smanjile na svega nekoliko *ppm*. Ovako zanemarljivo male koncentracije C_2 i C_3 prisutne su i duž svih bočnih kanala, kao i u samoj zoni proširenja (Prilozi 23 i 24).



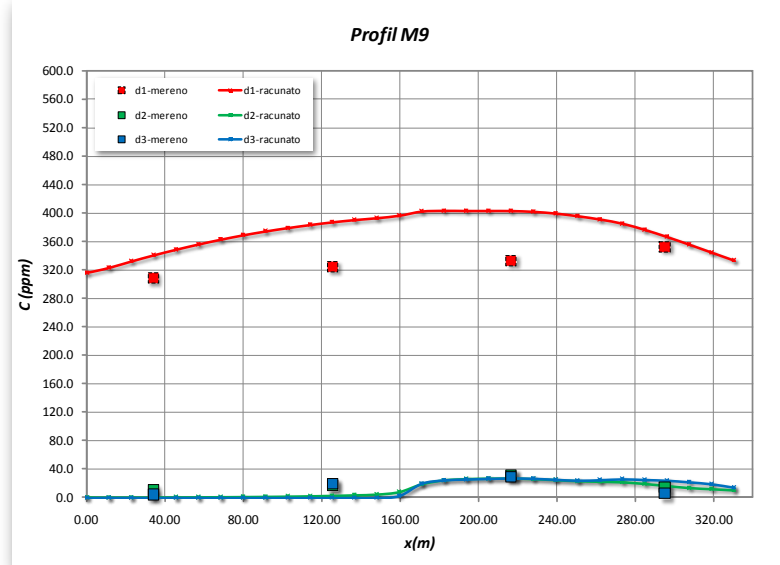
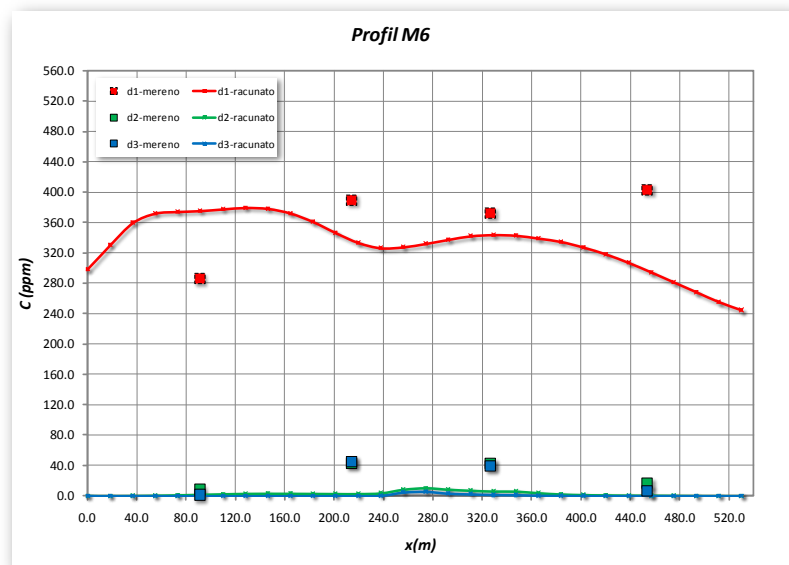
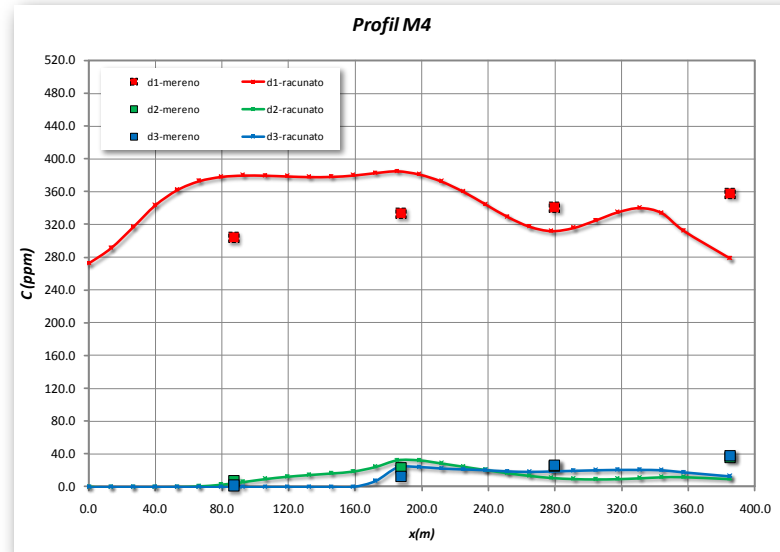
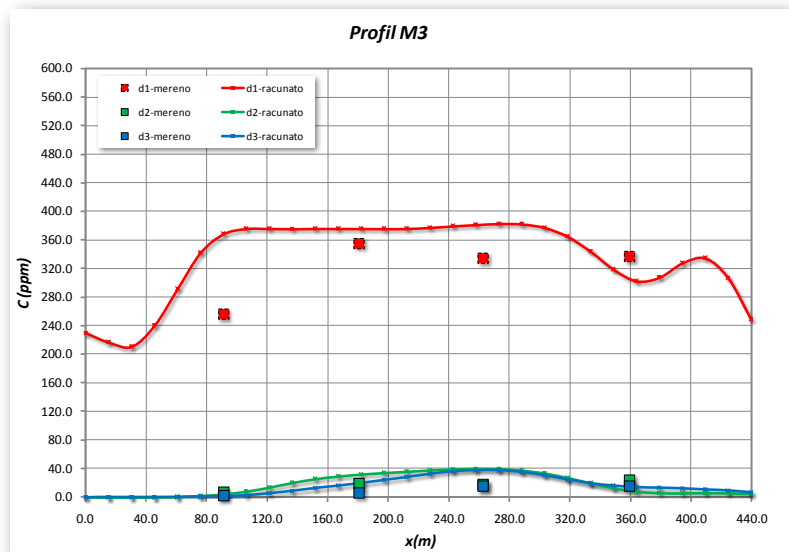
Slika 6.28 Dobijeni raspored koncentracije C_1 duž modelirane deonice reke Atchafalaya

Kako bi se sračunati prostorni rasporedi koncentracija konačno i fizički verifikovali, izvršice se njihovo poređenje sa izmerenim vrednostima. Pošto su dobijene koncentracije praktično srednje vrednosti njenog vertikalnog rasporeda po dubini, uzeti uzorci suspendovanog nanosa su u cilju poređenja takođe prvo osrednjeni po dubini (trapezno pravilo), a zatim kao takvi i upoređeni sa sračunatim rezultatima. Imajući u vidu da se frakcije C_4 i C_5 praktično uopšte ne pojavljuju u suspenziji, ovo osrednjavanje merenih uzoraka rađeno je isključivo samo za prve tri koncentracije, C_1 , C_2 i C_3 , i to duž svih mernih profila ($M1 - M11$). Dijagrami poređenja sračunatih i izmerenih koncentracija, koji uključuju poređenja kako po frakcijama, tako i

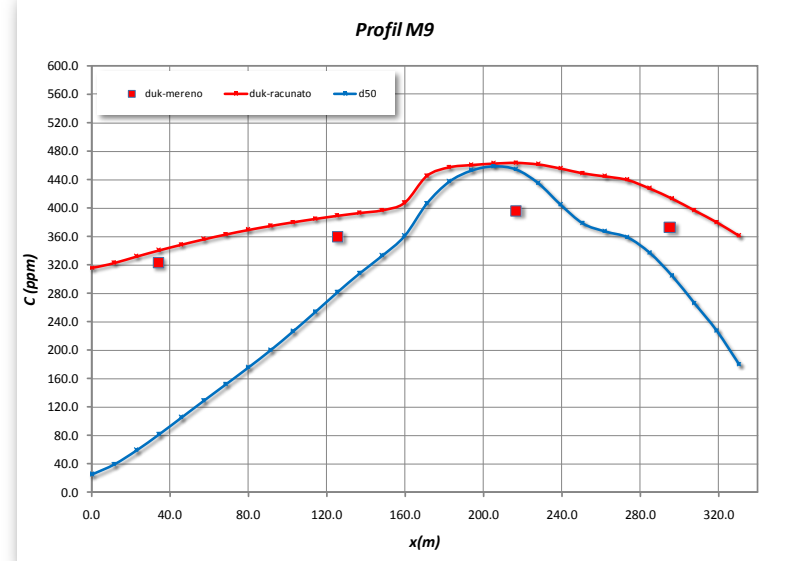
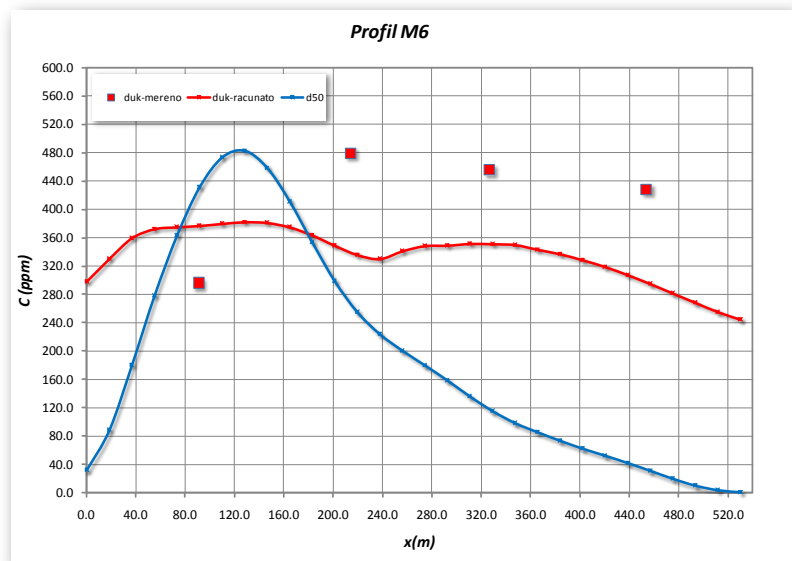
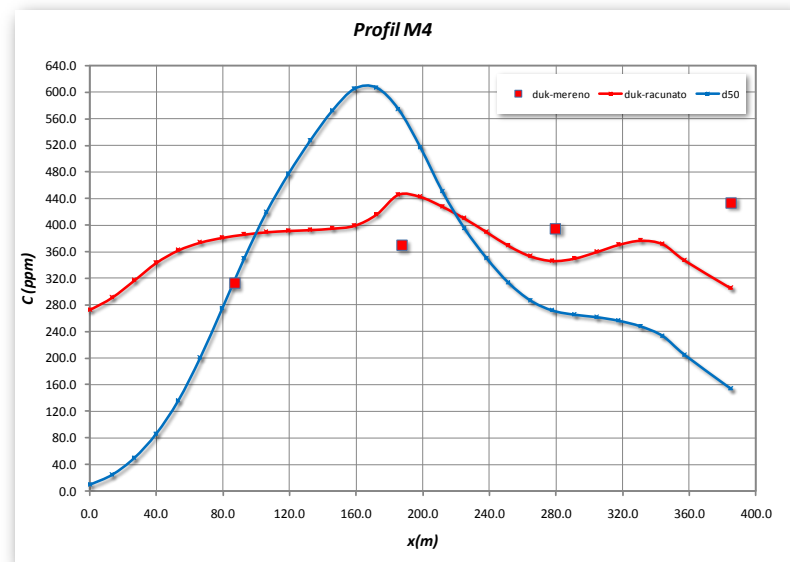
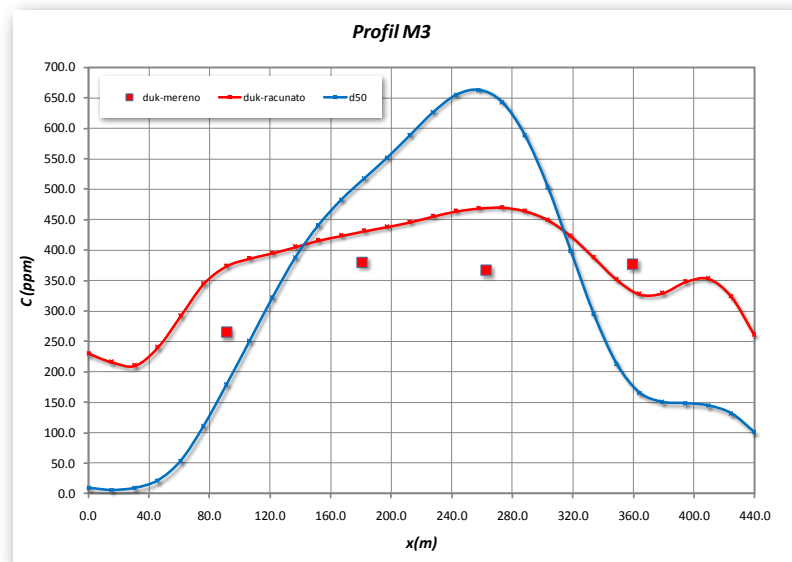
upoređenje ukupnih količina suspendovanog nanosa (sračunatih i merenih) sa rezultatima dobijenim pri pretpostavci uniformnog rasporeda nanosa (d_{50}), za profile *M3*, *M4*, *M6* i *M9* su prikazani na slikama 6.29 i 6.30, dok su za sve ostale profile ovi dijagrami nalaze u priložima (Prilog 25-28).

Izuzev relativno malih odstupanja uz same obale korita, sračunate vrednosti koncentracije prve frakcije C_1 pokazuju veoma dobro slaganje sa izmerenim podacima. Njen približno uniforman raspored po poprečnom presku, sa prosečnim intenzitetom od 360.00 ppm , potvrđen je računski duž cele rečne deonice, i to kako u oblastima rečnih krivina (profili *M3* i *M4* na slici 6.29), tako i duž pravih deonica (Slika 6.29 i prilozima 25-28). Jedino se na srednjem delu modelirane deonice, u zoni proširenja i uz desnu obalu korita, javljaju delimična neslaganja poređenih koncentracija (profili *M5*, *M6* i *M7*). Neznatno podcenjena u proširenom delu, a precenjena uz desnu obalu korita, sračunata vrednost koncentracije C_1 ukazuje na to da u ovim delovima korita formiranje suspenzije ne zavisi u potpunosti od hidrauličkih parametara toka (brzina, dubina), već da su tu na snazi i određeni dodatni procesi (izražena turbulencija struje, sekundarna emisija suspendovanog nanosa). Sličan trend rasporeda koncentracija po preseku, ali znatno manjeg intenziteta, primetan je i u slučaju preostale dve koncentracije C_2 i C_3 .

Za razliku od poređenja ukupnih količina suspendovanog nanosa, sračunatih po frakcijama i izmerenih, koje pokazuju veoma dobro međusobno slaganje (Slika 6.30), poređenje sa rezultatima dobijenim pri pretpostavci uniformnog rasporeda nanosa i ovde pokazuje veliki stepen odstupanja. Kao što se i vidi sa slike 6.30 i priloga 27, za usvojen srednji prečnik zrna od $d_{50}=0.046 \text{ mm}$, model u srednjem delu toka, do bočnog kanala *Bayou Boeuf*, koncentracije suspendovanog nanosa precenjuje, dok ih uz obale pak znatno podcenjuje. Idući nizvodno od ovog račvanja, u profilima *M9*, *M10* i *M11*, vrednost koncentracija sada duž celog poprečnog preseka intenzivno opada, zadržavajući i dalje trend maksimuma u sredini toka, i minimuma pored obala. Osnovni razlog u ovakvom ponašanju modela ogleda se praktično u nemogućnosti kvalitetnog pokrivanja celog aspekta nanosnih procesa sa samo sa jednim prečnikom zrna, što, imajući u vidu fiziku pokretanja i transporta nanosa, za posledicu ima ne samo podcenjivanje ili precenjivanje računskih koncentracija duž modelirane deonice, već i apsolutno nezadovoljenje uslova održanja mase suspendovanog nanosa u toku.

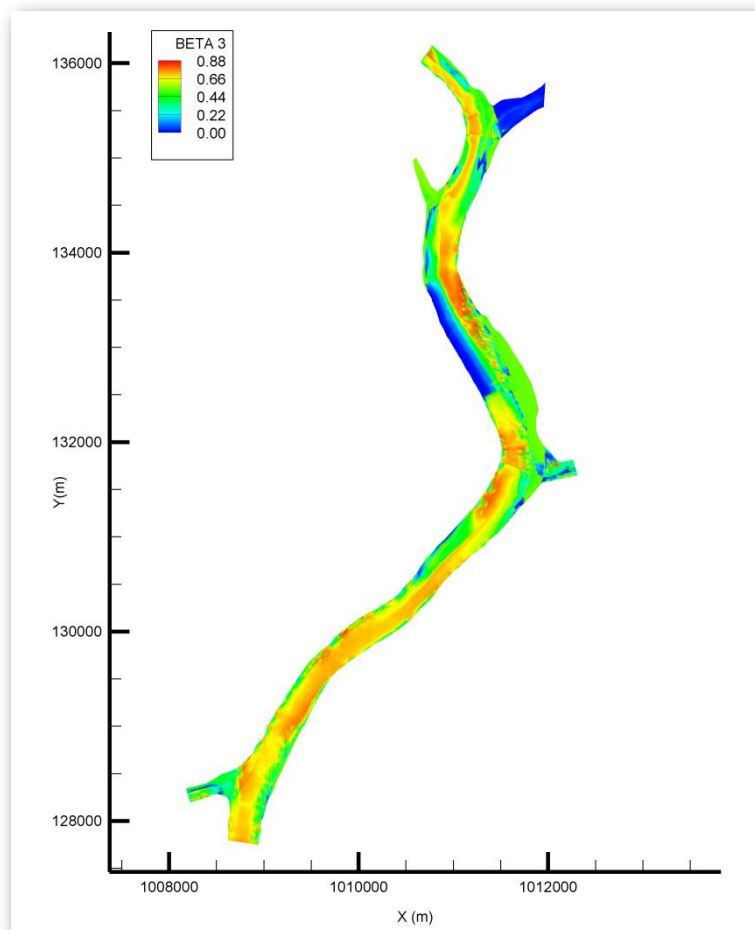


Slika 6.29 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile M3, M4, M6 i M9 - reka Atchafalaya



Slika 6.30 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile M3, M4, M6 i M9 - reka Atchafalaya

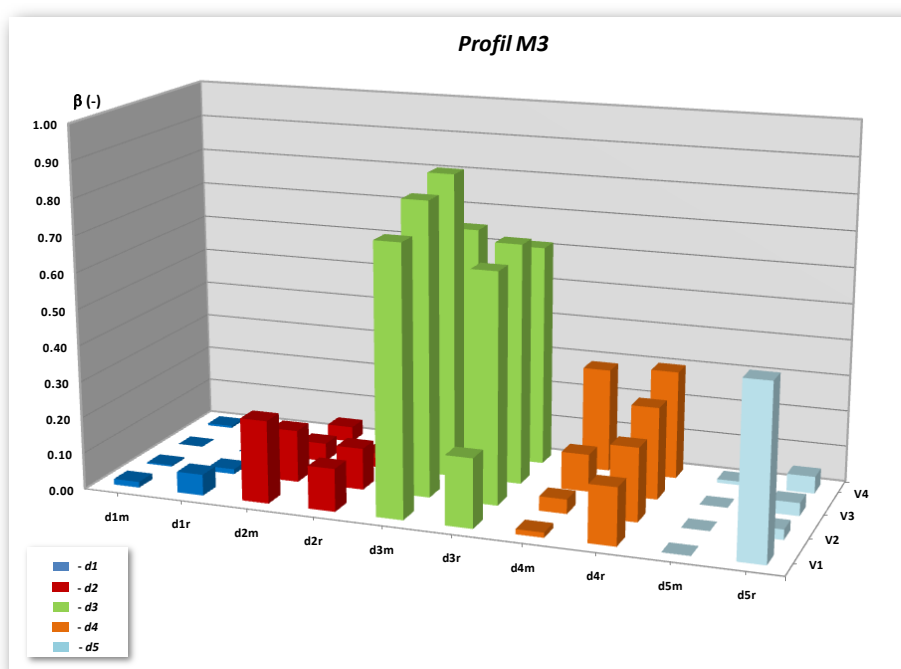
Nasuprot dominantnom položaju prvog granulometrijskog intervala GI_1 u suspenziji, na rečnom dnu najzastupljenija frakcija je fini pesak, interval GI_3 . Koncentrisana slično kao i kod rasporeda koncentracije C_1 , mahom duž trase glavne struje toka (veći intenziteti brzina nego u preostalom delu toka), maksimalna zastupljenost ovog intervala kreće se oko prosečnih 75.0 % ($\beta_3=75/100$) (Slika 6.31). Relativno manja zastupljenost, od oko 53.0 %, prisutna je jedino u zonama proširenja, i neposredno nizvodno od spajanja prvog i trećeg kanala sa glavnim koritom (zeleno boja), dok se u oblastima uz desnu obalu srednjeg dela toka, i duž prvog bočnog kanala, primećuje da je ova granulometrija potpuno "isprana" (zone plave boje). Na rečno dno ovih lokacija, mnogo veći uticaj ima frakcija prašine i gline (interval GI_1). U prvom slučaju, kod proširenja, i neposredno posle uliva prvog kanala, ova frakcija je na dnu zastupljena sa relativno malim intenzitetom, od oko 20.0 %, dok je u drugom slučaju, u zonama uz desnu obalu, i duž prvog kanala, ta vrednost znatno veća, i ide do čak 90.0 %. Što se tiče preostalih frakcija, korito duž trase glavne struje dopunjuje interval GI_2 sa približno 25.0 % prisustva, dok se intervali GI_4 i GI_5 praktično i ne pojavljuju.



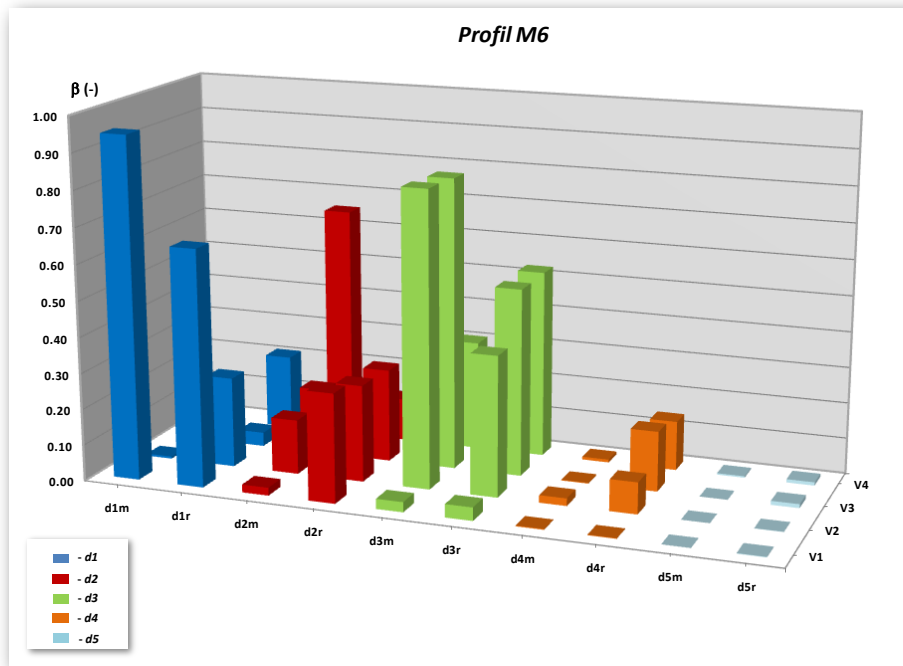
Slika 6.31 Zastupljenost trećeg granulometrijskog intervala β_3 duž deonice reke Atchafalaya

Da je ova sračunata prostorna raspodela granulometrijske zastupljenosti β_k i fizički potpuno opravdana, potvrđuju njena izuzetno dobra slaganja sa izmerenih vrednostima (Slike 6.32 - 6.33, kao i prilozi 29 - 34). Poređenja koja su vršena za sve merne profile, pokazala su da sračunata zastupljenost određenih frakcija bilo kog segmenta rečne deonice reprodukuje stvarno (izmereno) stanje rečnog dna sa veoma velikom tačnošću. Imajući u vidu da modelirani domen karakterišu različiti hidraulički i nanosni uslovi (složena geometrija), sa sigurnošću se može reći da se ova visoka tačnost podjednako odnosi kako na profile sa relativno neujednačenom strujnom slikom (profili *M3* i *M4* postavljeni u krivini toka, i profili *M5*, *M6* i *M7* koji su locirani u proširenju korita), tako i na one koji su postavljeni na hidraulički manje zahtevnim lokacijama (profili *M9* i *M11*). Najbolja potvrda ovoga može se primetiti u profilima proširenja *M5* (Prilog 30) i *M6* (Slika 6.33). Pored dominantne zastupljenosti druge i treće frakcije u srednjem delu toka, matematički model u prvoj vertikali ovih mernih linja uspeva da pojača prisustvo prve frakcije, i tako verno reprodukuje poprečni diskontinuitet parametra β . Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β je za profile *M3* i *M6* prikazano na slikama 6.32 i 6.33, dok se za sve ostale profile oni nalaze u prilogima (Prilog 29 - 34).

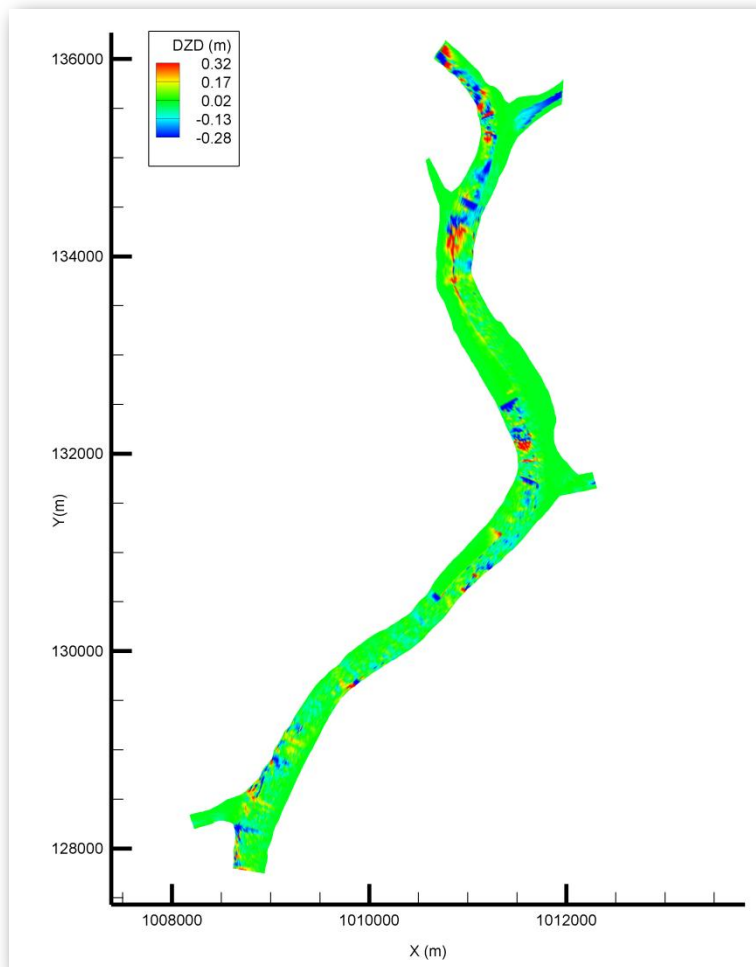
S obzirom na to da se i u slučaju reke *Atchafalaya* radi o simulaciji kvazi ustaljenog stanja transporta nanosa, ukupni priraštaj kote dna kretao se u prilično malom rasponu od $-0.28 \div 0.32$ m. Najveće vrednosti priraštaja zabeležene su u glavnom koritu, duž trase glavne struje, dok se u preostalim delovima toka on kretao oko svega nekoliko centimetara (zelena boja). Prostorni raspored kumulativne erozije/deponovanja je za deonicu reke *Atchafalaya* prikazan na slici 6.34.



Slika 6.32 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M3 - *Atchafalaya*



Slika 6.33 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M6 – Atchafalaya



Slika 6.34 Kumulativna promena kote dna

6.5. Model Zvorničke akumulacije

Da bi se testiranje sposobnosti formiranog matematičkog modela da menja aktivni domen strujanja proširilo izvan oblasti prostih konturnih uslova (pravougaoni kanal u Poglavlju 6.2), kao poslednji test model prirodnog vodotoka koristiće se deonica akumulacije HE "Zvornik". Njena osnovna prednost u pogledu verifikacije postupka sušenja i kvašenja priobalnog poručija u odnosu na prethodna dva obrađena slučaja, jesu prvenstveno podaci o neustaljenom tečenju u akumulaciji, definisani kao vremenske zavisnosti protoka i nivoa. Nastale kao posledica kontrolisanog ispuštanja vode iz jezera, ove vremenske funkcije će se kao takve koristiti za formiranje matematičkog modela, i uspostavljanje stanja potrebnog za testiranje validnosti parametarskog postupka.

Locirano na 93.1 rečnom kilometru od ušća reke *Drine* u *Savu*, kod mesta *Mali Zvornik*, akumulaciono jezero HE "Zvornik" nastalo je pregrađivanjem reke *Drine* gravitacionom betonskom branom. Sa dužinom pregrade od 260.0 m, i kotom krune na koti od 164.00 mnm, brana za evakuaciju velikih voda i pražnjenje akumulacije koristi 8 prelivnih polja, i 4 temeljna ispusta. Prelivna polja, čija je osnovna uloga regulacija nivoa gornje vode, opremljena su

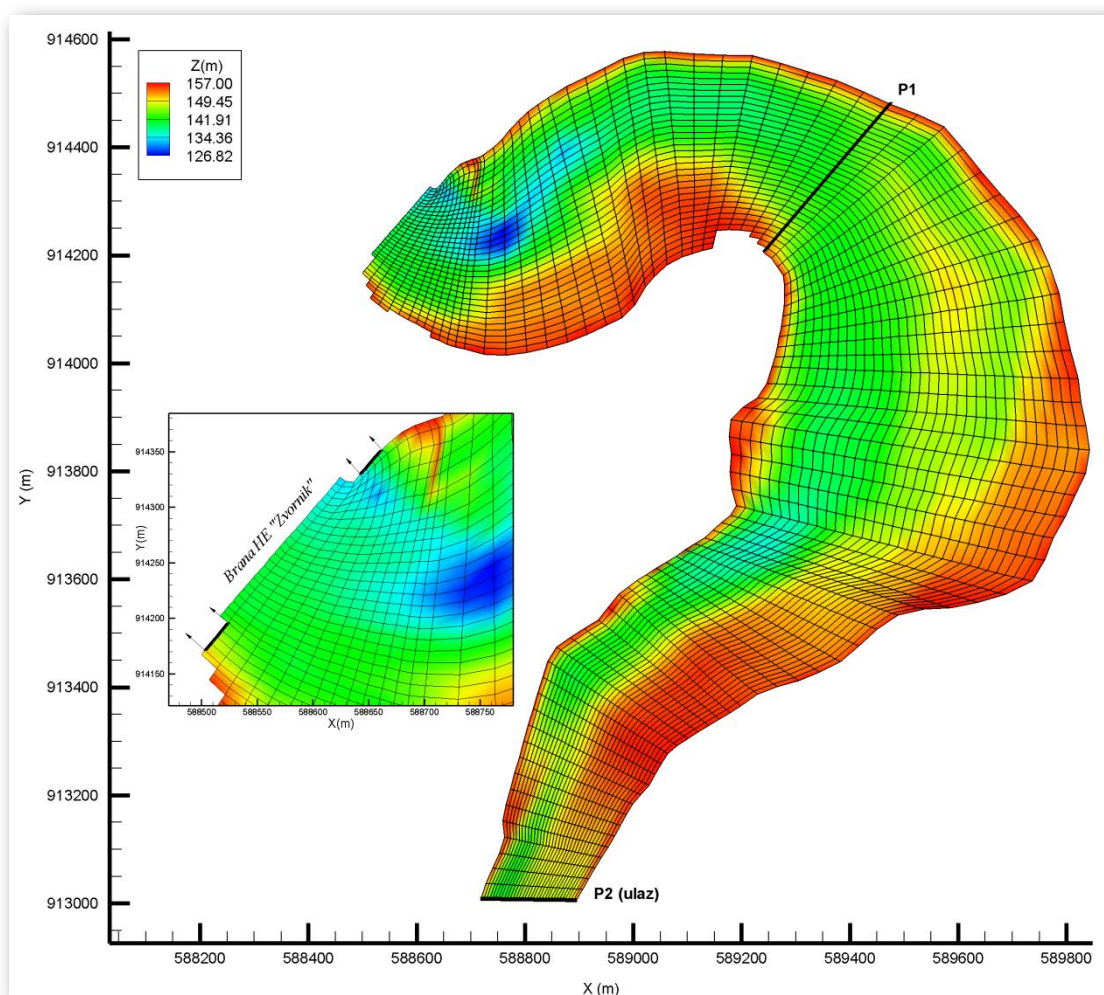


Slika 6.35 Situacija brane i akumulacije HE "Zvornik"

sektorskim zatvaračima dimenzija $6.0\text{ m} \times 18.0\text{ m}$, kojima se na brani omogućava održavanje nivoa vode na koti $Z_{NU}=157.50\text{ mnm}$ (kota normalnog uspora), i spuštanje ovog nivoa do kote krune preliva $Z_{KP}=151.0\text{ mnm}$. Kota minimalnog radnog nivoa je $Z_{mu}=154.00\text{ mnm}$. U nastavku brane, sa leve i desne strane, postavljene su mašinske zgrade u kojima su smeštena po dva agregata. Ukupni instalisani proticaj turbina je $Q_i = 4 \cdot 160 = 640.0\text{ m}^3/\text{s}$, dok je ukupna snaga HE 100 MW . HE "Zvornik" je najnižvodnija hidroelektrana na reci Drini, dok se uzvodno od HE "Zvornik", na 199.5 rečnom kilometru reke Drine, nalazi HE "Bajina Bašta". Slika 6.35 prikazuje situaciju brane i akumulacije HE "Zvornik".

Za računsku oblast modela izabrana je najnižvodnija deonica akumulacije, u delu jezera uz samu branu HE "Zvornik" (detalj na slici 6.35). Ova geometrijski veoma složena deonica akumulacije, dužine oko 3.0 km , predstavlja krivinu pod uglom od 180° , koja se neposredno uz telo brane naglo ispravlja i usmerava ka prelivima i ulivnim građevinama. Pored tako kompleksne i hidraulički izuzetno nepovoljne prirodne geometrije deonice, na desnoj strani brane, u zoni ispred samog ulaza u mašinsku zgradu, locirana je i regulaciona građevina (naper) dužine oko 70.0 m . Postavljen sa namerom da spreči ulazak nanosa i plivajućih objekata u ulivne građevine (agregate), naper je tokom dužeg vremenskog perioda prouzrokovao, na udaljenosti od oko 50.0 m , pojavu znatnog udubljenja - proloke. Dubine oko 15.0 m u odnosu na okolno dno (oblast prikazana plavom bojom na slici 6.36), ova proloka predstavlja najdublju zonu deonice koja pri koti normalnog uspora ima prosečne dubine vode oko 30.0 m . U preostalom delu razmatranog domena dubine vode su znatno manje, i kreću se prosečno oko 15.0 m duž ose toka (zeleno boja), do svega par metara uz same obale korita (Slika 6.36). Za formiranje profila korita korištena su batimetrijska merenja sprovedna duž mernih profila postavljenih na prosečnom rastojanju od oko 200.0 m (elaborat Društva za geodetske radove za posebne potrebe "GEODET DB"), dok je za profinjenje batimetrije u neposrednoj blizini brane korištena karta izobata (elaborat Energoprojekt-Hidroinženjering-a 1989a).

Definisanjem čvrste granice računskog domena, razmatrana oblast je prekrivena računskom mrežom dimenzija 91×34 , pri čemu je za referentni nivo korištena kota od $Z_v=157.00\text{ mnm}$ (slika 6.36). Zbog izuzetno zahtevne geometrijske strukture deonice, formirane računске ćelije su za razliku od prethodnih slučajeva relativno neuniformne duž celog izabranog domena. Tako su u oblasti same brane one nešto manjih dimenzija, sa stranicama od $10 \times 15\text{ m}$, dok idući ka uzvodnom kraju ovaj odnos se povećava na vrednosti od čak $20 \times 60\text{ m}$. Iako se dužine stranica računskih ćelija menjaju duž deonice, osnovni kriterijum, po kome maksimalni odnos širine i dužine ne sme da pređe vrednost od $1:4$, je ispoštovan. S obzirom da od ukupnih 3094 računskih tačaka, 28 tačaka ima kotu iznad $Z_v=157.0\text{ m}$, one su odmah na početku isključene iz proračuna.



Slika 6.36 Prikaz računске mreže izabrane deonice HE "Zvornik"

Kako je ranije naglašeno, osnovni cilj modela *Zvorničke akumulacije* jeste prevashodno demonstracija postupka „sušenja i kvašenja“ priobalnog područja. U tom pogledu, da bi se akumulacija dovela u stanje neustaljenog režima „pogodnog“ za pravilnu verifikaciju parametarskog postupka, definisani su i potrebni granični i početni uslovi modela. Oni su formirani na osnovu prikupljenih merenja.

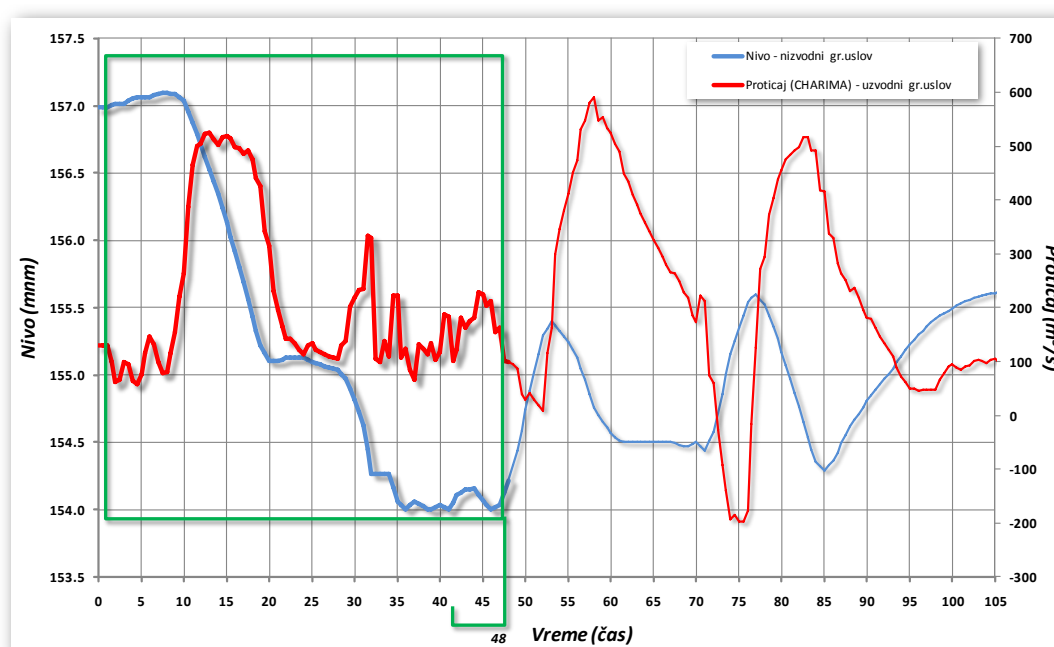
Analiza dostupnih hidrauličko-hidroloških-psamoloških podataka pokazala je da su tokom 1989 i 1990. god. duž akumulacije HE "Zvornik" izvršene po dve serije merenja. U trajanju od po dva dana tokom 1989. god., i od po jedan dan tokom 1990. god., svaka od njih je pored standardnih podataka o radu HE "Zvornik", i HE "Bajina Bašta", uključivala i dodatno prikupljanje podataka na 5 kontrolnih profila duž akumulacije HE "Zvornik". Duž ovih mernih profila, od kojih su dva locirana i u definisanoj računskoj oblasti (profili P1 i P2 na slici 6.36), paralelno su prikupljeni podaci o koncentraciji suspendovanog nanosa i koti nivoa vode. Na

osnovu uzoraka suspendovanog nanosa dobijene su prosečne koncentracije suspendovanog nanosa za presek, dok granulometrijska analiza uzoraka suspendovanog nanosa nije rađena. S obzirom na znatno veći obim i detaljnost prikupljenih podataka, za kombinovano modeliranje strujne slike, transporta nanosa i plavljenja priobalnog područja izabrane deonice, korištena su merenja druge serije, obavljena tokom 1990. god. (elaborat Energoprojekt-Hidroinženjering-a, 1991.).

Sprovedena 22. novembra 1990. god., druga serija merenja obuhvata satni hidrogram isticanja iz HE "Bajina Bašta", satni hidrogram isticanja iz HE "Zvornik" i satni nivogram gornje vode HE "Zvornik". Tokom ovog perioda, HE "Bajina Bašta" radila je u svom uobičajenom režimu, dok su isticanja iz HE "Zvornik" podešavana tako da se kota gornje vode HE "Zvornik" pre početka uzorkovanja u mernim profilima spusti na vrednost kote minimalnog uspora, $Z_{mu}=154.00 \text{ mmm}$, tokom uzorkovanja zadrži se približno na toj koti, a nakon uzorkovanja vrati na vrednost oko kote normalnog uspora od $Z_{NU}=157.5 \text{ mmm}$ (Slika 6.37). Ista procedura ispraćena je i u svim ostalim serijama. U svakom od kontrolnih profila uzimani su, zahvatanjem u tri tačke po vertikali (površina, sredina i dno), relativno oskudni uzorci suspendovanog nanosa u sredini glavnog toka, a paralelno su mereni i nivoi slobodne površine vode. Na osnovu ovih uzoraka suspendovanog nanosa, dobijeni su potom rasporedi koncentracija suspendovanog nanosa po dubini glavnog toka za svaki od preseka. Napominje se da dobijeni rasporedi koncentracija pokazuju određene nelogičnosti, kao što je pojava maksimalne koncentracije u sredini, ili čak na površini toka. U svih pet kontrolnih profila uzeta su po tri uzorka nanosa sa dna, po dva sa sprudova, i po jedan iz korita sa dubine od jednog metra. Za sve ove uzorke je uradjena granulometrijska analiza.

Nakon prikupljanja svih relevantnih podataka, kao sledeći korak u formiranju ravanskog modela definisani su period simulacije, granični i početni uslovi modela. Imajući u vidu da su za sam postupak dinamički promenljive oblasti modelisanja („sušenja i kvašenja“) hidraulički uslovi u deonici znatno značajniji od transporta nanosa i morfoloških karakteristika dna, za izbor trajanja simulacionog perioda korišteni su dostupni satni hidrogrami i nivogrami. Kako bi se uspostavila što intenzivnija i drastičnija promena kote nivoa u izabranoj deonici, i na taj način izazvalo znatno skupljanje (širenje) aktivne oblasti strujanja, za reprezentativni simulacioni period izabrano je prvih 48 časova obaranja gornje vode u akumulaciji HE "Zvornik". U tom vremenskom intervalu, obaranje nivoa sa kote $Z_v=157.0 \text{ mmm}$, na kotu $Z_v=154.0 \text{ mmm}$, obavljeno je za približno 25 časova, dok je preostalo vreme korišteno za njihovo održavanje (stabilizaciju). S obzirom na to da prelivna polja u ovo vreme nisu radila, definisani nivogram zadat je kao nizvodni granični uslov samo na mestima ulaza u mašinsku zgradu. Oni su na računskoj mreži

predstavljani sa po četiri računsa polja sa leve i desne strane brane (detalj slike 6.36). Sa druge strane, za uzvodni granični uslov korišten je odgovarajući satni hidrogram (profil *P2* na slici 6.36). Međutim, kako merenja ovog tipa za ulazni profil *P2* nisu postojala, potreban satni hidrogram dobijen je na osnovu rezultata linijskog modela celokupne akumulacije *HE "Zvornik"* (korišten je jednodimenzionalan model *CHARIMA*). U tom slučaju kao uzvodni granični uslov korišten je satni hidrogram isticanja iz *HE "Bajina Bašta"* (Energoprojekt-Hidroinženjering-a, 2007.). Sve ostale granice računskog modela smatrane su za čvrste. Rezultujući hidrogram i nivogram su, sa naznakom segmenta korištenog kao granični uslov u modelu, prikazani na slici 6.37. Slično kao i kod prethodnih modela, za početni uslov korišteno je tzv. "nulto" stanje (nulte vrednosti vektora brzina), dok je za početni nivo uzeta kota od $Z_v=157.0$ mm.



Slika 6.37 Satni hidrogram na ulazu u deonicu (Profil *P2*) dobijen na osnovu linijskog modela *CHARIMA* (uzvodni granični uslov), i satni nivogram gornje vode (nizvodni granični uslov)

Paralelno sa neustaljenim strujanjem, i sa promenom aktivne oblasti koja se javlja kao njena posledica, model će u izabranoj deonici simulirati i neustaljenost transporta suspendovanog nanosa i morfoloških promena korita. Da bi to bilo moguće, potrebno je na sličan način kao i u svim prethodno obrađenim modelima, kao prvi korak definisati potrebne granulometrijske intervale. Analiza granulometrijskog sastava uzoraka iz 1990. godine, pokazala je da se granulometrijski sastav nanosa akumulacije *HE "Zvornik"* može modelisati pomoću 5 intervala, odnosno frakcija zrna nanosa. Klasifikovani prema standardnim veličinama zrna, ovi usvojeni

<i>Usvojeni granulometrijski intervali</i>	<i>Klasa</i>	<i>Prečnik frakcije D (mm)</i>	<i>Karakteristični prečnik d(mm)</i>
GI ₁	Prašina i glina	0.001<D < 0.02	0.0045
GI ₂	Prašina	0.02<D<0.06	0.035
GI ₃	Fini pesak	0.06<D<0.20	0.110
GI ₄	Sitan i krupan pesak	0.20<D<2.0	0.630
GI ₅	Sitan šljunak	0.20<D<15.0	5.480

Tabela 6.10 Usvojeni granulometrijski intervali razmatrane deonice HE "Zvornik"

granulometrijski intervali su zajedno sa odgovarajućim reprezentativnim prečnicima prikazani u tabeli 6.10. Ako se sada uzorci uzeti sa dna profila *P1* i *P2* povratno klasifikuju prema utvrđenim intervalima, dobija se kao rezultat reprezentativna granulometrijska kriva modelirane deonice, koja se duž računске oblasti zadaje kao početni uslov, a na ulazu u model kao granični uslov. Ova računска granulometrijska kriva data je u tabeli 6.11.

<i>$\beta_k [-]$</i>				
<i>GI₁</i>	<i>GI₂</i>	<i>GI₃</i>	<i>GI₄</i>	<i>GI₅</i>
0.53	0.35	0.08	0.03	0.01

Tabela 6.11 Usvojena granulometrijska kriva razmatrane deonice HE "Zvornik"

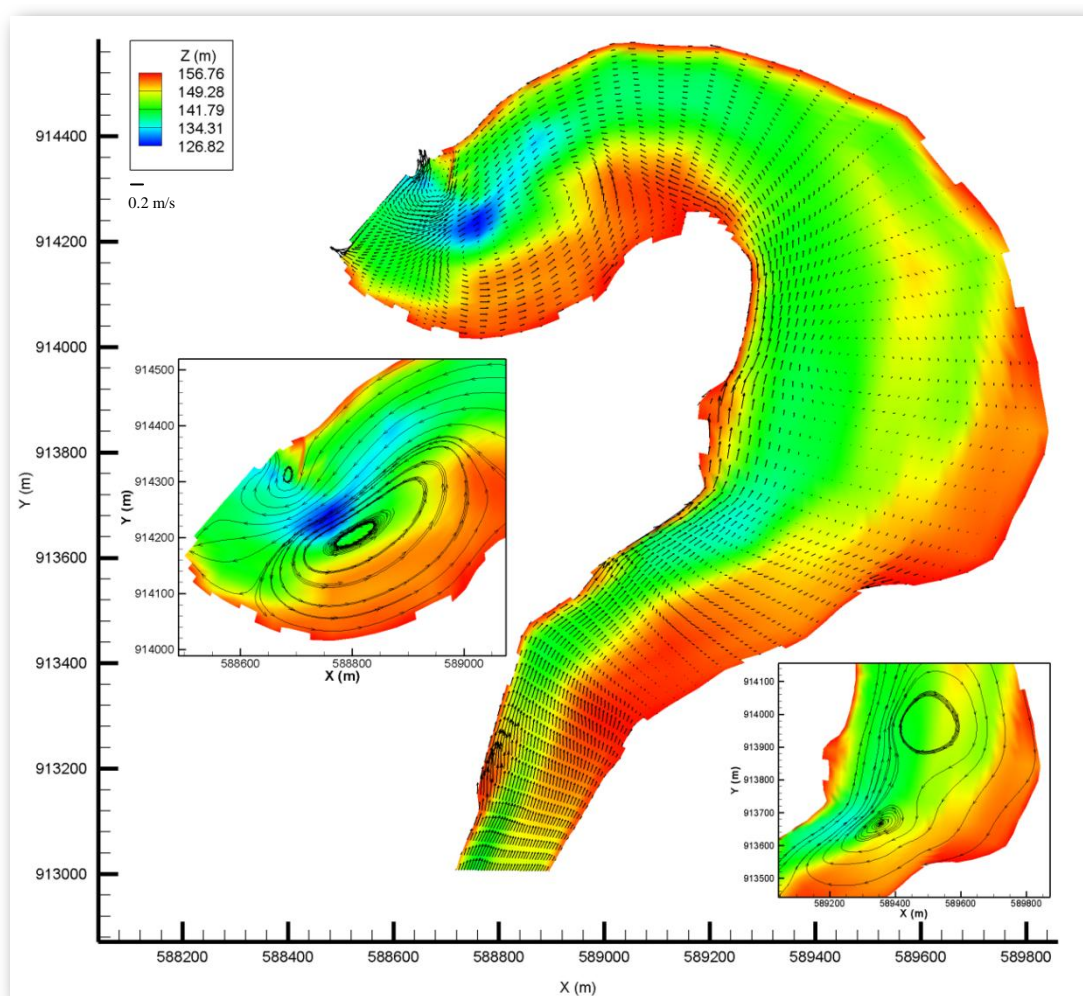
Obzirom da u slučaju suspendovanog nanosa prethodno navedena granulometrijska analiza nije rađena, pretpostavljeno je da se u zoni izabrane deonice u suspenziji nalazi samo najfinija frakcija prašine i gline, sa prečnicima zrna između 0.001 i 0.02 mm ($d_{sr} = 0.0045$ mm). Na sličan način kao što je to rađeno i kod strujanja, vrednosti koncentracije od $C_1=0.02$ g/l, koje su zadate na profilu *P2* (uzvodni granični uslov), i duž akumulacije (početni uslov), određene su na osnovu rezultata linijskog modela, i odnose se u potpunosti na frakciju *GI₁* (Energoprojekt-Hidroinženjering-a, 2007.). Iako je ovim linijskim modelom obuhvaćen proračun transporta suspendovanog nanosa usled ranije opisanog neustaljenog strujanja vode, rezultujuće koncentracije su se pokazale kao relativno konstantne tokom vremena, pa su kao takve na ulazu modela i zadate. Za koncentracije svih ostalih frakcija usvojene vrednosti su jednake nuli.

- **Rezultati proračuna**

Prvi korak u kombinovanom modeliranju neustaljenog strujanja, transporta nanosa i morfoloških promena korita, jeste definisanje stabilizacionog perioda tokom kojeg se uspostavlja ustaljeno stanje za sve modelirane segmente. Kako sam proračun nanosa i morfološke promene rečnog dna direktno zavise od strujne slike i prostornog rasporeda dubina, to se kao prvo stabilizuju hidraulički uslovi u toku. U tom pogledu pokazalo se da za uspostavljanje ustaljenog strujanja u akumulaciji (slično kao i kod prethodno obrađenih modela) vreme od *10.0 časova* predstavlja sasvim dovoljan vremenski period. Sa zadatim nivoom od $Z_{nizv}=157.0 \text{ mnm}$ kao nizvodnim graničnim uslovom, proticajem od $130 \text{ m}^3/\text{s}$ kao uzvodnim graničnim uslovom (Slika 6.37), i izabranim optimalnim vremenskim korakom od $\Delta t=50.0\text{s}$, model nakon 720 računskih koraka stabilizuje strujanje u akumulaciji i formira ustaljeno strujanje. Analizom ponašanja modela za različite vrednosti graničnih parametara, utvrđena je optimalna vrednost granične dubine od $h_g=0.1 \text{ m}$. Rezultujuća strujna slika za ustaljeno stanje u akumulaciji, preklapljen preko dna korita, prikazana je na slici 6.38.

Iz prikazanih rezultata uočava se da su brzine strujanja u oblasti ravanskog modela relativno male, reda veličine 5.0 cm/s u većem delu modelisane oblasti. Nešto veće brzine, reda veličine $10.0 \div 15.0 \text{ cm/s}$, sračunate su kod nizvodnog vrtloga, u zoni proloke ispred same brane, kao i uz levu obalu korita. Najveći intenziteti brzina, reda veličine 30.0 do 40.0 cm/s , ostavareni su ipak u oblasti neposredno uzvodno od ulaza u agregate, kao i u uzanom delu toka na uzvodnom kraju modela, neposredno nizvodno od profila *P2*. Međutim, i pored toga što se u akumulaciji ostvaruje relativno sporo tečenje, sa veoma malim intenzitetima brzina, prostorna orijentacija vektora brzine ukazuje na to da je strujanje u ovom delu jezera znatno složenije. Tako se na samom nizvodnom kraju, u zoni proloke, formira uz levu obalu povratno vrtložno strujanje koje je najzaslužnije za izrazito nepovoljan ulaz (struja ulazi pod kosim uglom) struje u agregate (strujnice prikazane na detalju slike 6.38). Analizom ovog dela strujne slike, locirane neposredno uzvodno od brane, dolazi se do zaključka da je strujanje u ovoj oblasti pod dominantnim uticajem dva faktora. Jedan faktor je svakako rad agregata, dok je drugi faktor geometrija korita, strujanje u krivini neposredno uzvodno od brane, postojeći naper, plitko korito uz levu obalu i posebno postojanje duboke proloke u blizini glave postojećeg napera. Struja koja dolazi veoma malim brzinama iz širokog dela toka uzvodno od postojećeg napera, koncentriše se, zbog postojećeg napera i plitke zone uz levu obalu, u najdublji deo toka (proloku), da bi se zatim razdvojila, tj. usmerila prema levoj i desnoj obali privučena radom agregata. Pri tome, struja zbog uticaja uzvodne krivine u proloku već ulazi pod kosim uglom u odnosu na pravac upravan

na branu. Pored veoma složene strujne slike formirane na nizvodnom delu akumulacije, sa detalja prikazanog u donjem desnom uglu slike 6.38 vidi se da se i na uzvodnom delu deonice, neposredno nakon izlaska iz uzanog toka, u zoni velikog proširenja toka takođe javlja povratno strujanje. Detalji su prikazani u vidu strujnih funkcija - strujnica, koji praktično predstavljaju pravce dobijene na osnovu sračunatih vektora brzine kojih po definiciji tangiraju. S obzirom na to da se prezentovani prikaz odnosi na jedan vremenski trenutak, dobijene strujnice se mogu shvatiti i kao trenutne trajektorije fluidnih delića.



Slika 6.38 Prikaz strujne slike za ustaljeno stanje

Kao što je već navedeno, proračun ustaljenog (ravnotežnog) stanja vode i nanosa započeo je nakon stabilizacionog perioda, odnosno postizanja ustaljenog stanja za tečenje vode. Posle simulacionog perioda od jednog dana (poslednjih 10 sati ovog perioda prikazano je na slici 6.37 kao početnih 10 časova simulacije neustaljenog tečenja), koji se pokazao kao sasvim dovoljan vremenski interval za uspostavljanje ravnotežnog stanja nanosa, model je kao rezultat dao rasporede koncentracija i granulometrijske zastupljenosti definisanih frakcija u razmatranoj

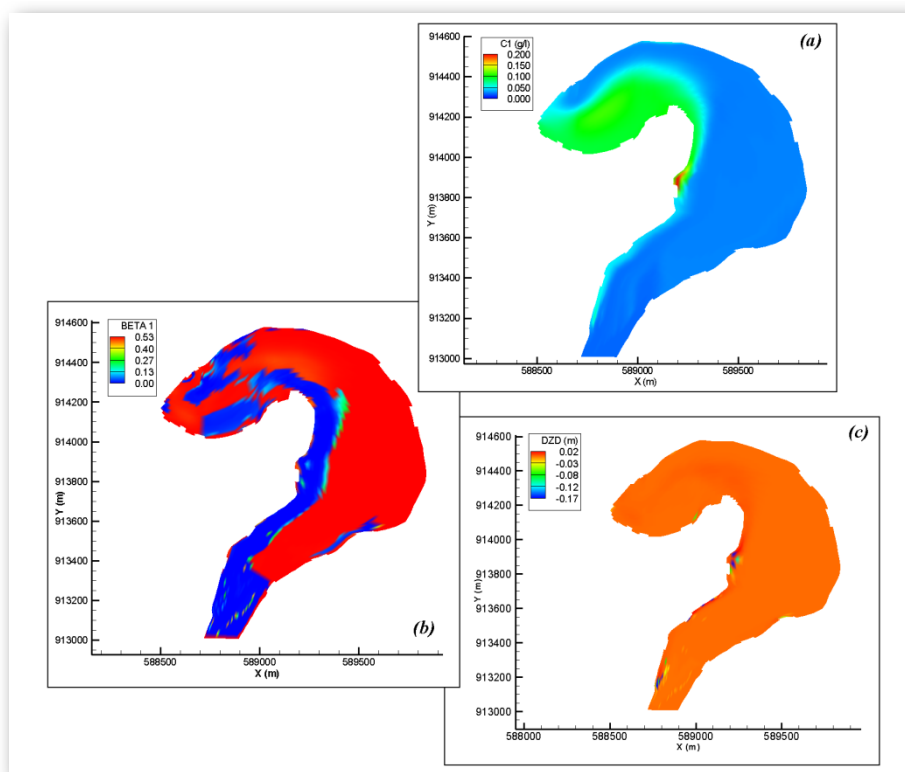
oblasti. Za frakciju d_1 (prašina i glina) ovi rasporedi prikazani su na slici 6.39, dok se za frakcije d_2 i d_3 oni nalaze u prilogima (Prilog 35). Izuzev dve veoma plitke zone, koje su locirane neposredno nizvodno od ulaznog profila, i na polovini dužine leve obale, kao i samog vrtloga formiranog neposredno ispred brane, dobijene vrednosti koncentracije C_1 duž cele razmatrane oblasti vrlo malo odstupaju od svojih početnih vrednosti. Veoma slabo strujanje vode u ovom delu jezera (red veličine 5 cm/s), uzrokuje tek neznatno erodovanje frakcije d_1 sa rečnog dna, menjajući pri tom pretpostavljeno početno stanje koncentracije za svega nekoliko procenata. Prikazane na slici 6.39-(a) plavom bojom, one se tako u ovoj oblasti kreću od početnih 0.02 g/l na uzvodnom kraju deonice, do svega 0.028 g/l , koliko je dobijeno na delu neposredno ispred brane. Ovu nepromenljivost nanosnih parametara u odnosu na početno stanje potvrđuje takođe i sam raspored granulometrijske zastupljenosti frakcije d_1 prikazan na slici 6.39-(b). U preostalom delu toka, koji obuhvata levu obalu korita, zatim uzani deo na uzvodnom kraju modela, kao i samu zonu vrtloga, brzine su kao što je ranije navedeno za red veličina veće (Slika 6.38). Kao takve one sada sa znatno intenzivnijom erozijom nego što je to bio slučaj sa plavom zonom potpuno ispiraju frakciju d_1 sa rečnog dna (na slici 6.39-(b) oblast označena plavom bojom), dovodeći pri tom do istovremenog pojačavanja njene koncentracije u suspenziji. Prosečne vrednosti ovog polja pojačane koncentracije kreću se oko 0.1 g/l , i prikazane su na slici 6.39-(a) zelenom bojom, dok izuzetak od kompletnog polja predstavlja vrednost koncentracije od 0.2 g/l locirana na polovini dužine leve obale (označena crvenom bojom).

U zoni leve obale, slična situacija ali sa znatno manjim intenzitetom primetna je i kod rasporeda koncentracije i granulometrijske zastupljenosti druge frakcije d_2 . Intenzivnija strujna slika duž leve obale deonice formira u ovoj oblasti polje pojačane koncentracije C_2 (Prilog 35), čije se vrednosti kreću od prosečnih 0.02 g/l , do maksimalnih 0.05 g/l . Takođe, istovremeno sa potpunim ispiranjem granulometrije d_1 , granulometrijska zastupljenost zrna d_2 povećava se sa početnih 35.0% na maksimalnih 100.0% . Međutim, iako je u ovoj oblasti intenzitet struje uspeo da u potpunosti sa dna ispere frakciju d_1 , i time poveća procenat frakcije d_2 na maksimalnih 100.0% , na uzanom delu uzvodnog kraja modela čak ni ova frakcija nije bila u stanju da se odupre struji. Iz tog razloga najveću zastupljenost na dnu ovog dela jezera ima sada treća frakcija d_3 , čije se prisustvo u ovoj oblasti kreće oko prosečnih 85.0% . U preostalom delu deonice, obe frakcije (d_2 i d_3) zadržale su zadate početne vrednosti. Što se tiče preostalih frakcija, d_4 i d_5 , model je pokazao da je pretpostavka o njihovom potpunom odsusutvu iz suspenzije u potpunosti opravdana.

Kao poslednji pokazatelj uspešno uspostavljenog ravnotežnog stanja vode i nanosa, data je na slici 6.39-(c) kumulativna promena kote dna ΔZ duž kompletnog domena modelirane deonice.

Izuzev nešto intenzivnije erozije (reda veličine ± 10 cm), koja je prisutna samo u već ranije navedenim plitkim zonama modela (tačke na polovini dužine leve obale i uzani deo uzvodnog kraja modela), dobijene vrednosti priraštaja pokazuju da je kumulativna erozija/deponovanje duž celog računskog modela zanemarljiva. Ovakve vrednosti kumulativne deformacije korita nesumnjivo ukazuju na to da su početni i granični uslovi modela strujanja i transporta nanosa pravilno i tačno definisani, kao i to da je model dobro reprodukovao ravnotežno stanje vode i nanosa u jezeru.

Iz prethodno navedenog može se generalno zaključiti da je red veličine pokazatelja strujanja vode i ponašanja nanosa dobijenih pomoću ravanskog modela u skladu sa oskudnim podacima merenja u oblasti ravanskog modela. Takođe, može se zaključiti da rezultati ravanskog modela ne pokazuju fizički nerealne rezultate, dok sam model ne pokazuje znake numeričke nestabilnosti. Nažalost, zbog nedostatka odgovarajućih merenja, detaljnija provera rezultata ravanskog modela je nemoguća.



Slika 6.39 Dobijeni rasporedi nanosnih parametara duž modelirane deonice jezera HE "Zvornik" - ustaljeno stanje : (a) koncentracija C_1 , (b) zastupljenost prvog granulometrijskog intervala β_1 , (c) kumulativna promena kote dna ΔZ

Nakon uspostavljanja ravnotežnog stanja vode i nanosa u jezeru, formiranog pri koti nivoa vode od $Z_v=157.00$ mm, u narednih 25 sati se intenzivnim ispuštanjem vode iz HE "Zvornik"

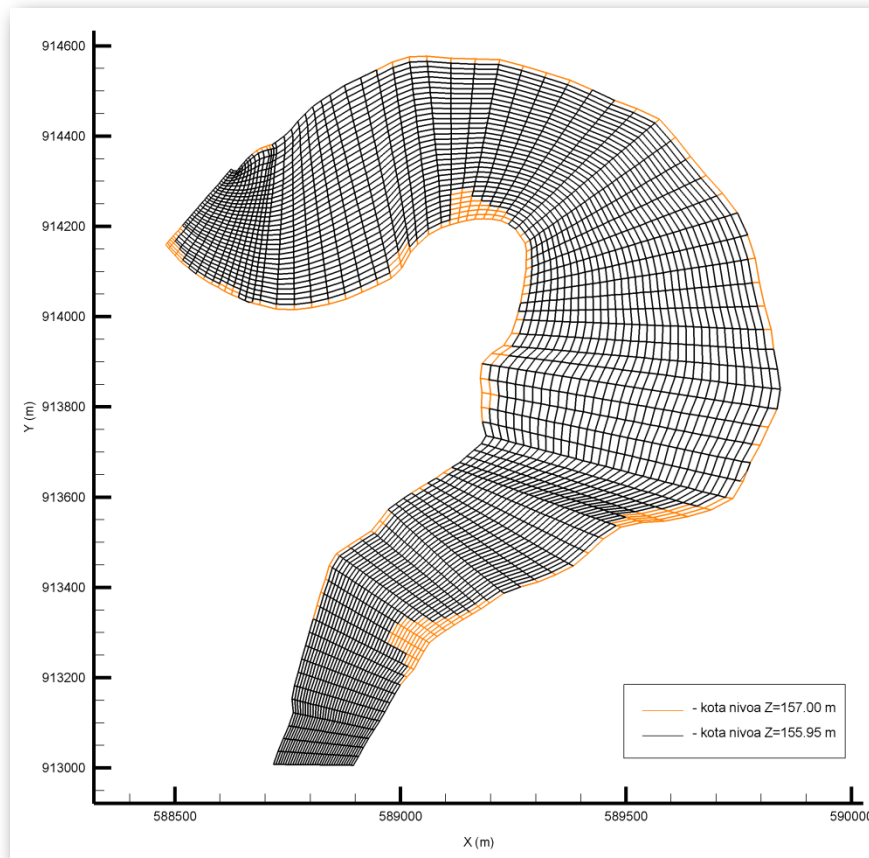
izaziva pad vodnog ogledala za ukupno 3.0 m . U tom periodu vodno ogledalo akumulacije je izloženo konstantnoj redukciji (smanjenju) svoje površine, menjajući neminovno pri tom granice kako fizičke oblasti, tako i granice samog računskog domena. Ove promene u modeliranoj oblasti povratno menjaju strujnu sliku deonice, što opet direktno utiče na ponašanje nanosa i morfološke procese korita.

Kako je prethodno navedno, početna računska mreža, koja je formirana pri nivou od $Z_v=157.00\text{ mnm}$, odmah je u prvom modeliranom (ustaljenom) stanju deonice jezera *HE "Zvornik"* redukovana sa 3094 na ukupno 3066 računskih tačaka. Smanjenje aktivnih čvorova za 28 računskih tačaka, usledilo je odmah posle prvog računskog koraka, kada je model upoređenjem kote terena i zadanog nivoa ($h_g=0.1\text{ m}$) višlje kote računski "osušio", i na taj način isključio ih iz proračuna. Kao što se može videti i sa slike 6.38, ove isključene tačke su najvećim delom koncentrisane u grupama od po dve do tri tačke, koje su zatim kao takve "razbacane" duž leve i desne obale jezera. Takva šema prostornog rasporeda ukazuje na to da pri ovom računskom nivou ne dolazi ni do kakve značajne promene u geometriji fizičke oblasti strujanja, već se radi samo o sporadičnim tačkama, sa tek nešto višljom kotom terena od sračunatog nivoa. Iz tog razloga sva ostala stanja će se zbog jednostavnosti prikaza analizirati u odnosu na početno (neporemećeno) stanje mreže (broj tačaka 3094).

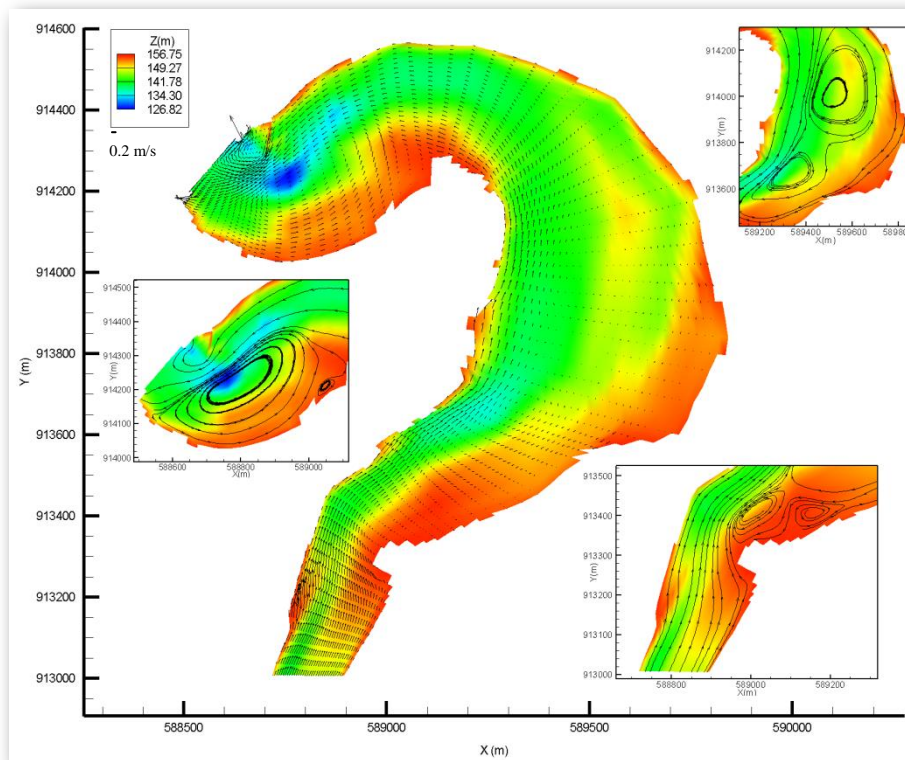
Kao što je već ranije rečeno, ispuštanjem vode iz akumulacije nivo vodnog ogledala u jezeru počinje da opada po dinamici prikazanoj na slici 6.37. Da bi se sam proces "sušenja i kvašenja", koji nastaje kao posledica ovakvog neustaljenog strujanja, što jasnije i detaljnije prikazao, za analizu rezultujućeg strujanja vode i transporta nanosa izabraće se, pored početnog (ustaljenog) stanja, još tri reprezentativna vremenska preseka. Stanje posle 16.0 časova od početka proračuna usvojiće se kao prvi ovakav presek.

Nakon 16.0 časova od početka simulacije neustaljenog tečenja u jezeru, nivo gornje vode pada sa početnih $Z_v=157.00\text{ mnm}$ na kotu od $Z_v=155.95\text{ mnm}$, dok vrednost proticaja na ulazu u deonicu dostiže maksimalnu vrednost od $Q_{ul}=510\text{ m}^3/\text{s}$. Kako se i očekivalo, pri ovom obaranju nivoa gornje vode za vrednost od oko 1.05 m , fizička (računske) oblast strujanja se na račun određenih "višljih" zona korita smanjuje, menjajući pri tom i strujnu sliku i nanosnu situaciju u jezeru. O kojim se, uslovno nazvanim "višljim" zonama radi, najbolje se može videti sa slike 6.40, koja prikazuje upoređenje novoformirane računске mreže (crna boja) sa mrežom pri početnom – neporemećenom stanju (svih 3094 tačaka). Na samom uzvodnom kraju modela, u oblasti gde je korito jezera najuže, formira se prva suva zona sa ukupno 47 suvih tačaka. Kao što se može i primetiti sa slike 6.40, prostorni položaj ovih "suvih" tačaka je takav da se one sada mogu praktično posmatrati kao jedan vid "lokalnog objekta", koji je sa dužinom od oko 30.0%

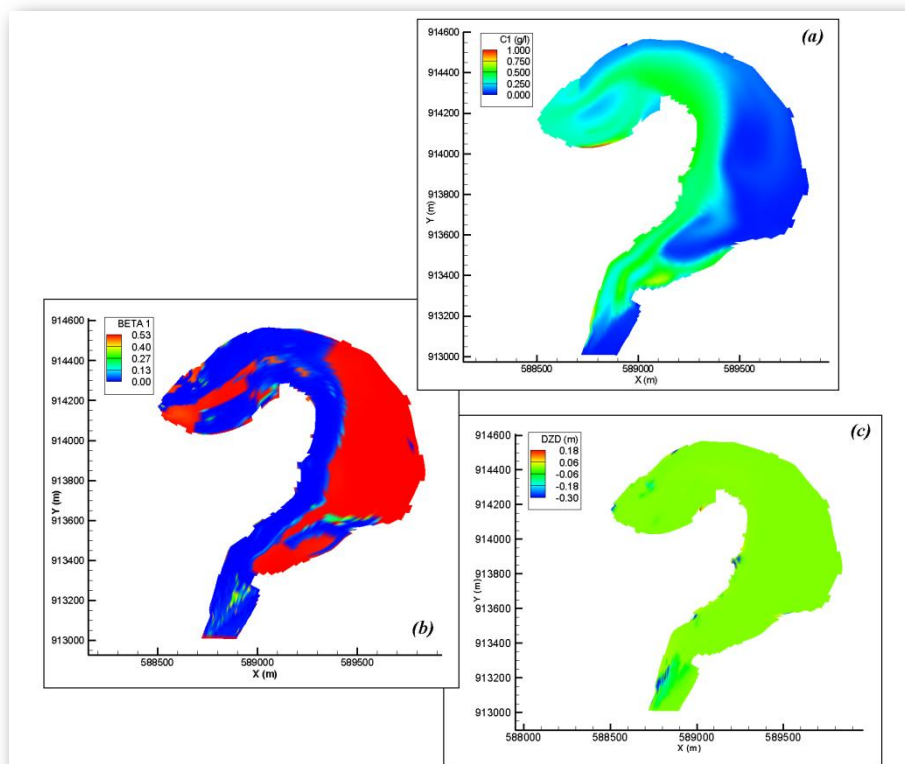
od početnog preseka orjentisan upravno na struju. Sa ovako izrazito nepovoljnim položajem, novoformirana “građevina” dodatno smanjuje već i onako veoma uzan presek korita na ovom delu jezera, pri čemu, se uz povećanje proticaja sa uzvodne granice, javlja znatno povećanje prosečnih brzina sa 0.15 m/s na vrednosti od oko 0.50 m/s . Takođe, i sa slike 6.41 se vidi da je sada na ovom delu deonice sam glavni tok usmeren znatno više ka levoj obali, prema zoni malih dubina, što u ovoj zoni pojačava intenzitete brzina sa ranije navedenih 30.0 cm/s , na znatno veće vrednosti od oko 80.0 cm/s . Dodatni poremećaj koji prati mahom sve “objekte” ovog tipa, jeste neminovna pojava lokalnog vrtloga u oblasti odmah neposredno iza objekta. Za slučaj ove “suve” zone, formirani vrtlog se može videti na detalju slike 6.41. Iako su sami intenziteti brzina u ovom vrtlogu znatno manji (reda veličine 5 cm/s) nego što je to slučaj sa opisanim uskim delom korita, njegov pravi efekat primećuje se tek u nanosnom delu proračuna.



Slika 6.40 Poređenje aktivne računске mreže pri nivou $Z_v=155.95 \text{ m}$ (crna boja) sa početnom računskom mrežom ($Z_v=157.00$)



Slika 6.41 Prikaz strujne slike za vremenski presek $t=16h$ ($Z_v=155.95$ mm)



Slika 6.42 Dobijeni rasporedi nanosnih parametara duž modelirane deonice jezera HE "Zvornik" za vremenski presek $t=16h$: (a) koncentracija C_1 , (b) zastupljenost pvog granulometrijskog intervala β_1 , (c) kumulativna promena kote dna ΔZ

Intenziviranje struje u ovom delu jezera, direktno utiče i na nanosne (suspendovanog i vučenog) i morfološke procese u modeliranoj deonici. Upoređujući rasporede nanosnih parametara prikazanih na slikama 6.42 i 6.39, primećuje se kao prvo da su vrednosti, a i sama oblast, pojačanih koncentracija prve frakcije C_1 u suspenziji znatno veće pri nivou $Z_v=155.95$ mm i povećanom protoku, nego što je to slučaj bio sa početnim stanjem. Koncentrisane sada u znatno širem pojasu, koji se od uzanog dela deonice prostire uz levu obalu korita sve do neposredno ispred brane, prosečne vrednosti koncentracije su u ovoj zoni praktično 2.5 puta veće od maksimalnih vrednosti zabeleženih pri početnom stanju, i kreću se oko $C_1=0.5$ g/l (na slici 6.42-(a) oblast prikazana zelenom bojom). Pored toga, u oblasti samog vrtloga primećuju se dodatna (lokalna) pojačanja koncentracije na prosečnih 0.65 g/l, dok se u kompletnom preostalom delu deonice koncentracija C_1 tek neznatno pojačava u odnosu na početno stanje ($C_1=0.05$ g/l). Imajući u vidu da sama priroda procesa formiranja suspenzije (erozija sa rečnog dna), kao i njeno kretanje u toku, direktno zavise od intenziteta i položaja strujne slike, kao osnovni uzrok ovakve pojačane emisije frakcije d_1 u suspenziji nameće se znatno intenzivnije strujanje u uzvodnom uzanom delu korita. Nastala kao posledica istovremenog porasta ulaznog protoka i “sužavanja” korita usled obaranja nivoa, ovakva strujna slika intenzivira sada proces lokalne erozije (podizanja) frakcije d_1 u suspenziju, koja se zatim kao polje pojačane koncentracije transportuje primarnom strujom toka sve do izlaza iz deonice. U prilog ovoj tvrdnji ide takođe i sračunati prostorni raspored zastupljenosti prvog granulometrijskog intervala β_1 , prikazan na slici 6.42-(b). Na njemu se primećuje da se u okviru plave oblasti, koja označava potpuno odsustvo frakcije d_1 sa dna, neposredno ispred “suve” zone javlja izolovano polje, u kojem je prosečna granulometrijska zastupljenost granulata d_1 znatno veća od okolne $\beta_1=0.35$. Naime, veće brzine sada pored frakcije d_1 pokreću i ostale granulate, formirajući pri tom takvu raspodelu materijala na dnu, koja uslovno rečeno “sprečava” potpuno ispiranje prve frakcije. Da se ovde radi prvenstveno o mešanju granulometrijskog materijala, a ne o njegovom permanentnom ispiranju sa rečnog dna, potvrđuje i zanemarljivo mala kumulativna promena kote dna prikazana na slici 6.42-(c). Poređenjem slike 6.42-(b) sa strujnom slikom prikazanom na slici 6.41, odmah postaje jasno da ovo izolovano polje predstavlja taj deo korita, koji pod novonastalom pojačanom strujom praktično “hrani” suspenziju sa frakcijom d_1 . Ipak, kako je sada kao posledica većih brzina erozija prve frakcije u uzanom uzvodnom delu deonice znatno intenzivirana, tako su i sve ostale frakcije u ovom delu jezera postale ugroženije u pogledu njihovog pokretanja i podizanja u suspenziju. Na osnovu dobijenih rezultata prikazanih na prilogu 36, može se videti da su u oblasti uz levu obalu deonice koncentracije druge i treće frakcije u odnosu na početno stanje povećane čak desetostruko, dok su u preostalom delu toka

njihove vrednosti ostale nepromenjene. Vrednosti koncentracija poslednje dve frakcije ostale su praktično nepromenjene duž cele deonice.

Idući uzvodnije od ovog ulaznog dela deonice, primećuje se duž leve i desne obale prisustvo dodatnih “suvih” oblasti. Za razliku od prethodno opisane zone, koja je više bila orjentisana upravno na struju toka, u ovom slučaju “suve” tačke su, izuzev jednog segmenta lociranog na unutrašnjoj strani krivine, grupisane više u obliku uzanih traka postavljenih paralelno sa strujom. Zbog toga one kao takve bitno ne menjaju samu hidrauličku i nanosnu strukturu toka, ali značajno smanjuju njen računski obim. Tako je na primer pri ovom nivou vodnog ogledala, duž leve obale isključeno ukupno 102 računске tačke, dok je duž desne obale taj broj zajedno sa prethodno opisanom zonom nešto manji, i iznosi ukupno 94.

Pored opisane uzvodne “suve” zone, koja je identifikovana kao lokalni objekat sa izuzetno velikim uticajem na postojeće stanje u deonici, računski pasivna oblast sličnih geometrijskih karakteristika i značaja primetna je i na unutrašnjoj strani krivine (leva obala), u oblasti samog skretanja toka. Sastavljena od 22 računске tačke, koje su grupisane u trougaonoj formi, “suva” oblast u ovom slučaju poprima ulogu regulacione građevine koja praktično levu obalu u krivini dodatno ispravlja. Zbog toga, kao i zbog svog većeg intenziteta (veći ulazni protok), sama struja formira sada vrtlog koji je pomeren više ka desnoj obali korita (za razliku od prethodnog stanja), bliže središtu proloke (Slika 6.41). Kao posledica toga, tok nailazi na branu pod znatno oštrijim uglom, što se istovremeno odražava i na same ulaze u agregate (jedan od osnovnih problema koji se javljaju pri eksploataciji brane HE “Zvornik”). Takođe, dodatna promena u strujnoj slici u odnosu na početno stanje primećuje se i u oblasti neposredno iza “suve” zone, gde struja slično kao i kod uzvodnog dela obrazuje vrtlog znatno manjih dimenzija od opisanog. Ovi opisani efekti “lokalnog sužavanja” aktivne oblasti strujanja najbolje se mogu uočiti ukoliko se uporede strujne slike za dva stanja prikazana na slikama 6.38 i 6.41.

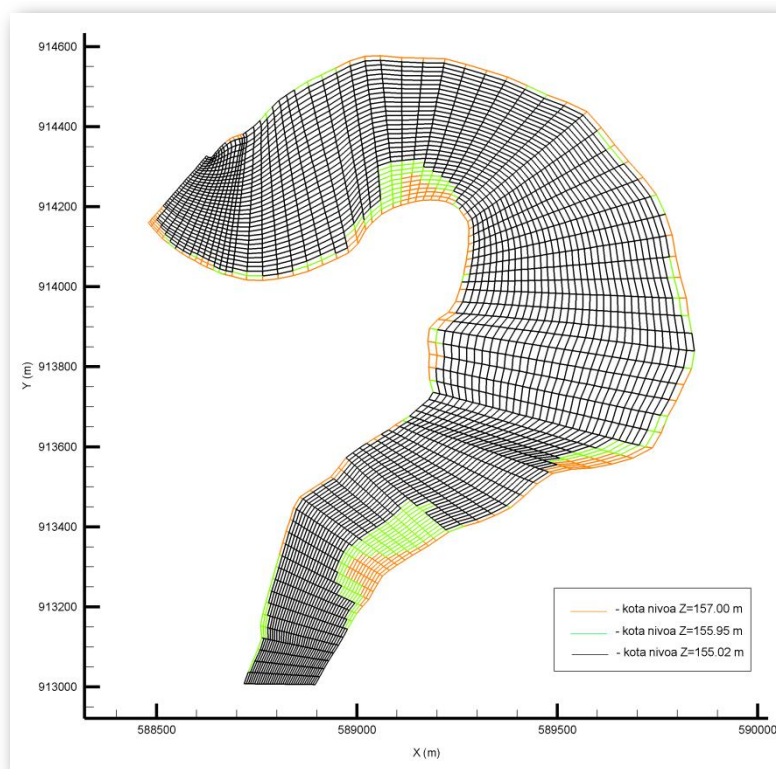
Nanosna situacija u ovom delu jezera u potpunosti prati prethodno opisanu strujnu sliku. Zadržavajući mahom svoje prosečne vrednosti od $C_I=0.5$ g/l, polje pojačane koncentracije prve frakcije C_I transportovano je uz levu obalu korita glavnom strujom sve do nizvodnog dela jezera. U samom vrtlogu ove koncentracije tek neznatno opadaju, za svega par procenata, dok izuzetak predstavlja njegov središnji deo, gde se one kreću oko $C_I=0.2$ g/l, kao i uzana traka sa maksimalno ostvarenom vrednošću od čak $C_I=1.0$ g/l. Ovako izuzetno visoke koncentracije objašnjavaju se pojačanom erozijom prve frakcije, koja se javila kao posledica intenzivnije struje u oblasti plitkih dubina. I u ovom slučaju se primećuje “prihrana” suspenzije sa frakcijom d_1 , ali sa znatno manjim intenzitetom nego što je to bilo na uzvodnom kraju (slika 6.42-(a)).

Što se tiče zastupljenosti ove frakcije na dnu korita, sa slike 6.42-(b) se vidi da je ona zadržala

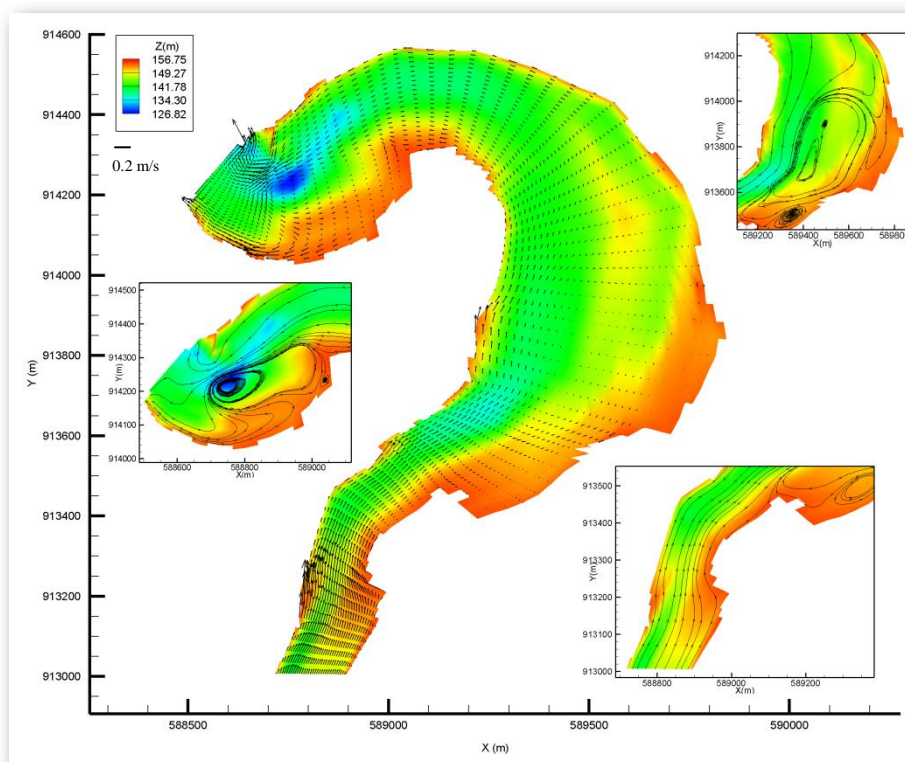
sličan trend rasporeda kao i u prethodnom (početnom) stanju. Duž celog polja pojačane koncentracije C_1 (zeleno boja na slici 6.42-(a)), frakcija d_1 je potpuno isprana sa dna, dok se u preostalom delu deonice ona javlja sa vrednošću od oko 52.0 % ($\beta_1=0.52$). Preostalih 48.0 % ovog dela korita otpada na frakciju d_2 . U oblasti lociranoj uz levu obalu korita, tj. u njenom uzvodnom delu, najzastupljenija je treća frakcija sa vrednostima od oko 82%, dok idući ka brani ovaj intenzitet se smanjuje, prepuštajući mesto drugoj frakciji koja se ovde kreće čak i do 100.0 % (Prilog 36). Četvrta i peta frakcija u ovom slučaju nisu zastupljene ni u suspenziji ni na dnu.

Nakon analiziranog stanja deonice u prvom izabranom vremenskom preseku ($t=16.0h$), uopšteno se može zaključiti da obaranje kote nivoa vodnog ogledala u jezeru uz povećanje ulaznog proticaja znatno utiče na njeno hidrauličko i nanosno stanje. Spuštanjem nivoa za oko 1.05 m (posledica nametnutog neustaljenog strujanja), ukupno 196 računskih tačaka ostaje “suvo”, odnosno računski pasivno, pa se kao posledica aktivna oblast strujanja sa početnih 3094 tačaka, smanjuje na novih 2898 računskih čvorova. Ovaj novi domen strujanja pokazao je da pored značaja samog broja isključenih računskih tačaka, koji u ovom slučaju pozitivno utiču na obim proračuna (smanjuju ga), znatno veći uticaj na sam hidraulički i nanosni model imaju njihovi prostorni položaji. Koncentrisane na jednom mestu, “pasivne” računске tačke ponašaju se kao lokalni objekti koji svojom orijentacijom i gabaritom u velikoj meri utiču na uslove u toku, i to bilo da se radi o strujanju vode, ili o transportu nanosa. U slučaju vremenskog preseka $t=16.0 h$, ovakve forme isključenih računskih tačaka zabeležene su na samom uzvodnom kraju deonice, kao i na polovini dužine leve obale. Pored “suvih” zona ovakvog tipa, isključene računске tačke se duž deonice pojavljuju još i u vidu uskih traka lociranih paralelno uz same obale korita, ili pak kao pojedinačni računski čvorovi. Kao što je i prethodno opisano, ovako grupisane “pasivne” tačke diktiraju uslove prvenstveno u lokalnim zonama, tj. oblastima lociranim u njihovoj bliskoj okolini, što zavisno od modeliranog slučaja (morfologija, hidraulički i nanosni uslovi) može u velikoj meri uticati i na preostali deo domena (uz levu obalu nizvodnog dela deonice, pojačana strujna slika uzrokuje pojačanu eroziju – Slika 6.42-(a)).

Daljim ispuštanjem vode iz jezera, nivo vodnog ogledala nastavlja da opada. Po dinamici prikazanoj na slici 6.37, nakon 20 časova od početka simulacije on u jezeru dostiže kotu od $Z_v=155.1 \text{ mnm}$, koja je zatim uz mala variranja zadržana narednih 9 časova. U tom vremenskom intervalu, trenutak $t=28.36 h$ je usvojen kao drugi reprezentativni vremenski presek. Imajući u vidu da se radi o jezeru sa praktično potpuno horizontalnom površinom vodnog ogledala, računska kota nivoa duž cele deonice u tom momentu iznosi $Z_v=155.02 \text{ mnm}$, dok je odgovarajući uzlazni proticaj jednak vrednosti od $Q_{ul}=130.25 \text{ m}^3/\text{s}$.



Slika 6.43 Poređenje aktivne računске mreže pri koti nivoa $Z_v=155.02$ mm (crna boja) sa mrežama pri nivou $Z_v=155.95$ (zeleno), i nivou $Z_v=157.00$ (crvena – početno stanje)



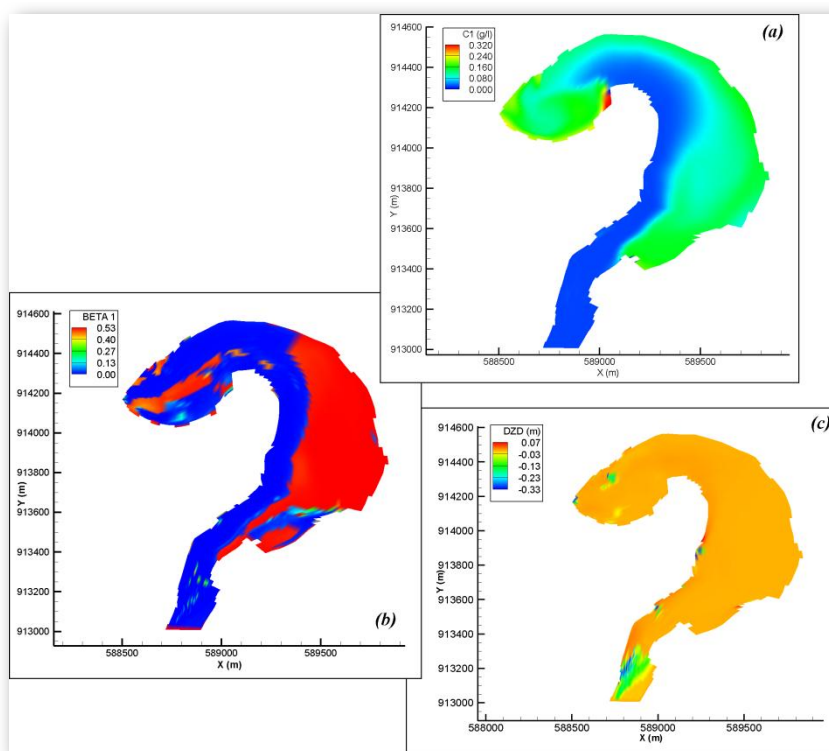
Slika 6.44 Prikaz strujne slike za vremenski presek $t=28.36h$ ($Z_v=155.02$ mm)

Kao što se i može videti sa slike 6.43, spuštanje nivoa u jezeru za dodatnih 0.93 m , uzrokovalo je i dodatno “sušenje” računskih tačaka. Zahvatajući mahom iste one oblasti deonice koje su se formirale i pri nivou $Z_v=155.95\text{ mmm}$, ove nove isključene računске tačke proširuju “pasivne” zone modela generalno na svim lokacijama deonice. Ono što je osnovna razlika između njih jeste sam intenzitet proširenja i njihova prostorna orijentacija. U tom pogledu se i u ovom slučaju, kao i u prethodno opisanom stanju, najveća “suva” zona javlja na samom uzvodnom delu modela, čije je brojačano i prostorno “napredovanje” najintenzivnije u celom računskom domenu. Sa nove 103 “suve” tačke, koje su u periodu između 16.00 i 28.36 časa isključene iz aktivnog proračuna, ova zona je povećala svoje dimenzije sa prethodnih 47 tačaka, na ukupnih 150 “pasivnih” računskih čvorova. Međutim, kao što je ranije rečeno da sam broj isključenih tačaka pozitivno utiče na obim proračuna, tako ipak za sam hidraulički i nanosni model znatno veću ulogu ima njihova prostorna orijentacija (položaj). Tako je za razliku od prethodnog slučaja, kada su tačke ovog relativno visokog terena bile postavljene više u formi “lokalnog objekta”, početni presek korita sada sužen na znatno većoj dužini (suženja za oko 40% na dužini od 330m). Slična situacija ali sa znatno manjim intenzitetom, primetna je i kod “suve” zone locirane na nizvodnom delu deonice, kod samog skretanja toka. Takođe visok teren korita za uspostavljen nivo vode od $Z_v=155.02\text{ mmm}$, uzrokovao je isključenje iz proračuna dodatnih 40 računskih čvorova, što ovu zonu sada povećava na ukupno 62 “suve” tačke. Što se tiče preostalih “pasivnih” zona, formiranih mahom u vidu traka duž leve i desne obale korita, povećanje njihovog broja računskih tačaka je više sporadičnog tipa, i sa znatno manjim intenzitetom. Takođe, pored već prethodno formiranih zona, koje su u ovom slučaju samo proširene, na levoj obali samog uzvodnog dela deonice (13 računskih tačaka), kao i na dve lokacije duž desne obale, trenutni nivo vodnog ogledala izazvao je i “sušenje” jednog relativno malog broja novih računskih tačaka (Slika 6.43). Imajući u vidu sve navedeno, može se konstatovati da aktivna računska mreža u drugom vremenskom preseku (pri nivou vodnog ogledala od $Z_v=155.02\text{ mmm}$) broji ukupno 2713 računskih tačaka, tj. za 185 čvorova manje od prethodnog stanja (nivo od $Z_v=155.95\text{ mmm}$), odnosno za 381 računski čvor manje u odnosu na početno stanje ($Z_v=157.00\text{ mmm}$).

Znatno manji proticaj na ulazu u model ($130\text{ m}^3/\text{s}$) nego što je to bio slučaj sa prethodnim stanjem, formira sada u deonici strujnu sliku generalno manjeg intenziteta i relativno ravnomernijeg rasporeda. Maksimalne brzine u deonici, koje su pri ovom nivou reda veličine od oko 16.0 cm/s , ostvaruju se i u ovom slučaju prvenstveno u uzanom ulaznom delu modela i u oblastima ispred agregata i zoni proloke. Tek nešto manje vrednosti brzina, od oko 8.0 cm/s , sračunate su u zonama uz levu obalu korita i u oblasti primarnog dela nizvodnog vrtloga. U preostalom delu deonice sračunati intenziteti brzine su vrlo mali, i kreću se svega oko

prosečnih 2.0 cm/s .

Pored zabeleženog opadanja samih intenziteta vektora brzina u odnosu na prethodno stanje, novi uslovi u toku (nivo vodnog ogledala kombinovan sa “novom” aktivnom oblasti) menjaju sada i njihovu prostornu orijentaciju. Tako se sa detalja slike 6.44 može primetiti da su se dimenzije vrtloga, lociranog na nizvodnom delu deonice, znatno smanjile, dok se njegov središnji deo dodatno pomerio ka samoj proloci (centar vrtloga je pozicioniran skoro potpuno iznad proloke). Kao posledica ove promene položaja nizvodnog vrtloga, formira se uz samu levu obalu korita uzan pojas struje, koji je sada usmeren tačno u pravcu agregata. Na ovaj način strujna slika ispred samog ulaza u agregat dovedena je praktično sa stanovišta eksploatacije u najpovoljniji mogući položaj (prethodno je navedeno da je jedan od osnovnih problema eksploatacije HE “Zvornik” suviše oštar ugao ulaza struje u agregate). Što se pak tiče uzvodnog dela deonice, dodatno redukovanje preseka na samom ulazu u domen, koje je u ovom slučaju prisutno na znatno većem rastojanju nego pri nivou $Z_v=155.95 \text{ mnm}$, intenziviralo je struju u ovoj oblasti modela, formirajući pri tom i dalje kao posledicu vrtloge na njenom izlazu. Detalj strujne slike za ovaj deo deonice prikazan je na slici 6.44.



Slika 6.45 Dobijeni rasporedi nanosnih parametara duž modelirane deonice jezera HE "Zvornik" za vremenski presek $t=28.36h$: (a) koncentracija C_1 , (b) zastupljenost prvog granulometrijskog intervala β_1 , (c) kumulativna promena kote dna ΔZ

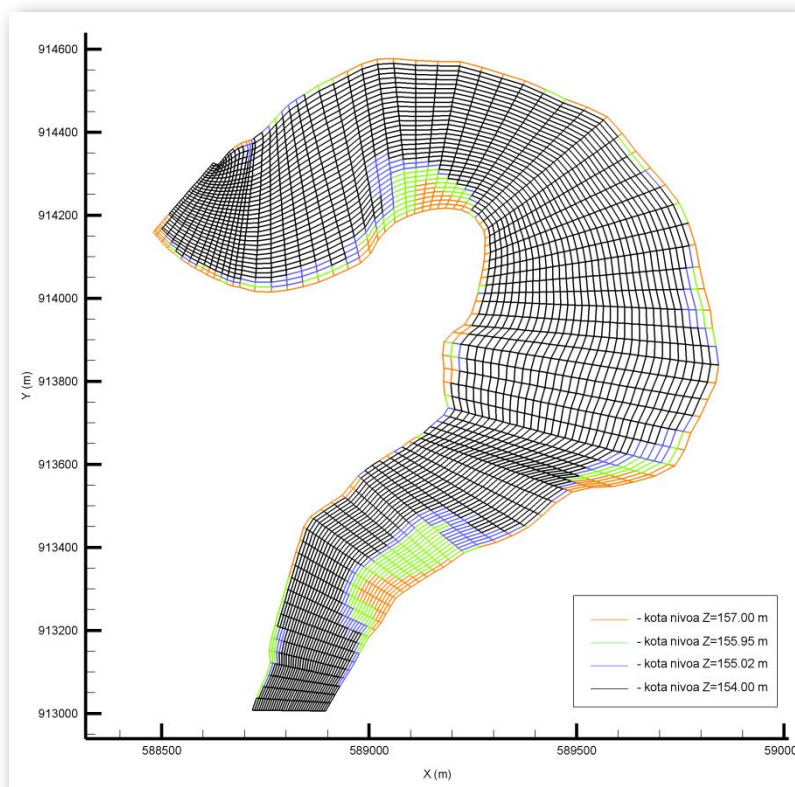
Da je intenzitet formirane strujne slike znatno manji u odnosu na prethodno razmatrano stanje, može se primetiti i na rezultatima nanosnog proračuna. Opisano polje visoke koncentracije C_I , koje se pri nivou $Z_v=155.95 \text{ mm}$ formiralo duž kompletne leve obale korita, postala je sada zona “putovanja” ulazne koncentracije $C_I=0.02 \text{ g/l}$ (plava oblast na slici 6.45-(a)). Naime, male brzine u deonici kombinovane sa potpunim odsustvom granulata d_I sa dna, sada ne uspevaju da eroduju ovu frakciju sa korita, pa su koncentracije suspendovanog nanosa duž ove zone (oblast uz levu obalu korita) posledica isključivo ulaznih vrednosti (čista advekcija). U preostalom delu deonice, gde je zastupljenost frakcije d_I na dnu znatno veća, i kreće se oko $\beta_I=0.52$ (Slika 6.45-(b)), primećuje se da su i koncentracije C_I u suspenziji intenzivnije, reda veličine $C_I=0.1 \text{ g/l}$. Obzirom da su brzine u ovoj oblasti još manjeg intenziteta nego što je to slučaj sa zonom primarnog toka, dodatna analiza je pokazala da su ove, relativno visoke koncentracije, posledica trenda prethodnih računskih stanja (analizirani preseki odnose se na vremenske trenutke neustaljenog tečenja vode i transporta nanosa, a ne na njihova ustaljena-ravnotežna stanja). Preostale frakcije nisu zastupljene u suspenziji, dok je njihovo prisustvo na dnu korita ostalo nepromenjeno u odnosu na stanje pri nivou $Z_v=155.95 \text{ mm}$ (Prilog 37).

Dijagram kumulativne promena kote dna, koji je prikazan na slici 6.45-(c), pokazuje da je nakon 28.36 časova najintenzivnija deformacija rečnog korita prisutna na samom uzanom ulaznom delu modela. Nastala sa jedne strane kao posledica “skupljanja” aktivnog domena strujanja (smanjenje aktivnog poprečnog preseka zbog sušenja priobalnog područija), a sa druge kao promena uzvodnog graničnog uslova, kota dna je u ovom delu deonice erodovana za maksimalnih 0.33 m. U preostalom delu domena, vrednost parametra ΔZ je, izuzev par izolovanih računskih tačaka ostala, praktično zanemarljiva.

Za poslednji reprezentativni vremenski presek, uzet je trenutak najnižeg ostvarenog nivoa u jezeru. Konačno dostignuta nakon $t=40.16h$ od početka simulacije, ova kota minimalnog uspora od $Z_v=154.00 \text{ mm}$ uspostavljena je kontinualnim obaranjem nivoa u jezeru za 1.02 m (u odnosu na prethodni reprezentativni nivo $Z_v=155.02$) tokom vremenskog perioda od 11.8 časova. U tom intervalu sami ulazni proticaji su varirali oko prosečne vrednosti od oko $Q_{ul}=150.00 \text{ m}^3/s$, dok je konkretno zabeležena vrednost protoka u $t=40.16h$ iznosila $Q_{ul}=128.00 \text{ m}^3/s$ (Slika 6.37).

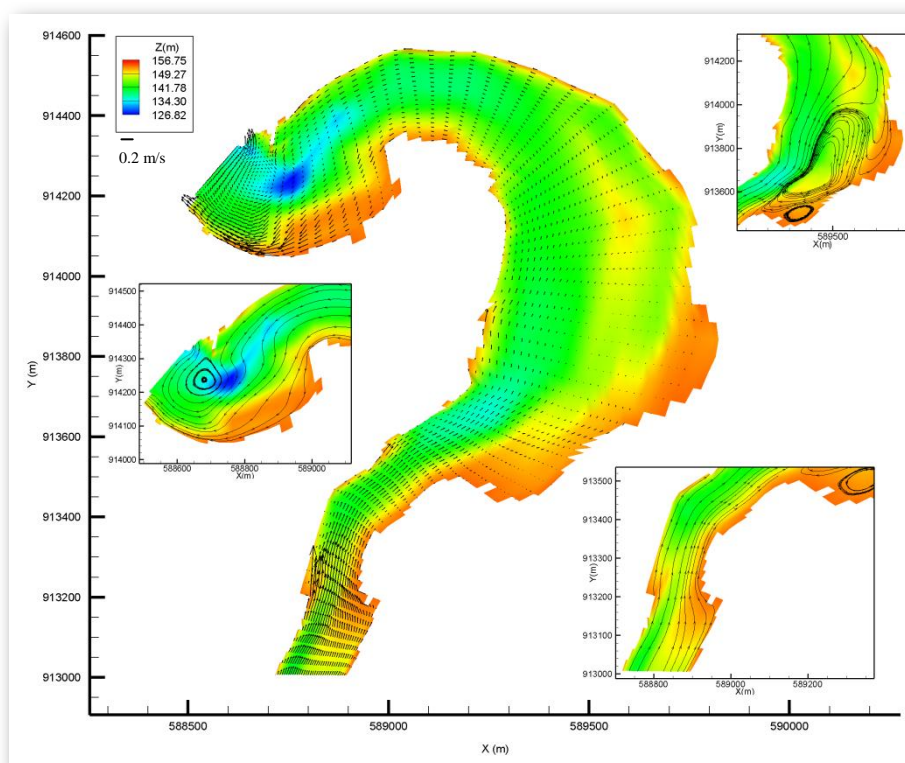
Poštujući i dalje prethodno uspostavljen trend sušenja priobalnog područija, obaranje nivoa u ovom vremenskom periodu ponovo je najvećim delom izazvalo isključenje računskih tačaka u već ranije definisanim “suvim” oblastima (Slika 6.46). Tako je sa približno istim intenzitetom “sušenja” kao i u prethodnom periodu, zona locirana na samom ulazu u deonicu povećala svoj broj čvorova za nove 74 računске tačke, koje grupisane više po obodu zone (za razliku od prethodnog stanja), podižu sada broj isključenih čvorova na ukupno 224. Na ovaj način ona

postaje ujedno i najveća “suva” oblast deonice. Takođe, slično pojačanje već formirane “suve” zone prisutno je i na levoj obali korita, kod samog skretanja toka. Sa nove 34 računске tačke koncentrisane na nizvodnoj strani zone, ovo pasivno polje broji sada ukupno 96 računskih čvorova. Pored proširenja ova dva pasivna polja, koja broje najveći broj računskih tačaka, duž leve i desne obale korita prisutne su promene dimenzija i drugih, manje intenzivnih zona. Tako se na polovini desne obale korita primećuje dodatno sušenje tačaka u dve već ranije formirane zone, dok se na samom nizvodnom kraju, kod ulaza u agregat (naper), formira i jedna nova (Slika 6.46). Što se tiče suprotne, leve obale korita, relativno visok teren duž cele obale izazvao je sušenje tek par tačaka na uzvodnoj polovini deonice, kao i (izuzev već opisane zone) neznatan broj na njenoj nizvodnoj polovini. Krajnjim sumiranjem ovih “suvih” tačaka, dolazi se do činjenice da je aktivna računska mreža u poslednjem vremenskom periodu smanjena za dodatnih 168 računskih čvorova u odnosu na prethodno stanje ($Z_v=155.02$), odnosno za ukupnih 549 tačaka u odnosu na početno stanje ($Z_v=157.00$). Iz ovoga konačno sledi da aktivna računska mreža na kraju simulacije neustaljenog strujanja vode i transporta nanosa broji ukupno 2545 aktivnih računskih čvorova, što je za ukupno 22.0 % manje u odnosu na njenu početnu konfiguraciju.



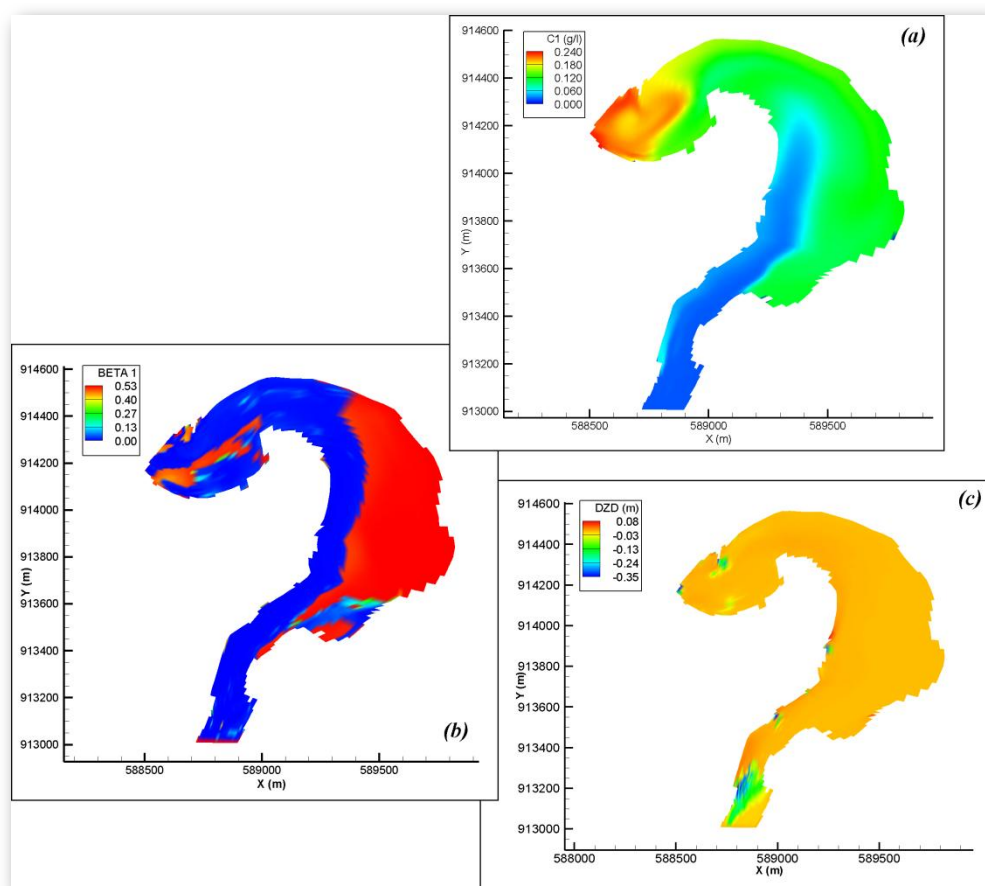
Slika 6.46 Poređenje aktivne računске mreže pri koti nivoa $Z_v=154.00$ mm (crna boja) sa mrežama pri nivoima : $Z_v=155.02$ (plava), $Z_v=155.95$ (zelena), i $Z_v=157.00$ (crvena – p.s.)

Obaranje nivoa vodnog ogledala na kotu od $Z_v=154.00\text{ mm}$, tek je u neznatnoj meri uticalo na intenzitete struje u deonici. Kod njenih hidraulički najaktivnijih delova, suženog uzvodnog dela deonice, i oblasti krajnjeg nizvodnog dela jezera, dodatno smanjenje poprečnog preseka pojačalo je intenzitete brzine sa prethodnih 16.0 cm/s , na prosečne vrednosti od oko 28.0 cm/s , dok je u preostalom delu domena stanje ostalo mahom nepromenjeno. Samo u par tačaka na ulazu u deonicu, kod naglog proširenja leve obale, brzine su nešto veće od navedenih, i kreću se oko 85.0 cm/s (direktna posledica sušenja leve obale). Međutim, iako su brzine uglavnom zadržale svoje prosečne intenzitete u odnosu na prethodno stanje, to se ne može u potpunosti tvrditi i za njihovu prostornu orijentaciju. Na istom ulaznom delu deonice, dodatno sušenje desne obale korita izazvalo je još intenzivnije zakrivljenje strujnica nego što je to bio slučaj sa nivoom $Z_v=155.02\text{ mm}$ (Slika 6.47), dok je isključivanje tačaka na suprotnoj obali formiralo lokalni efekat naglog proširenja (mrtva zona strujanja). Posmatrano u istom svetlu, na nizvodnom kraju deonice prisutne su još intenzivnije promene strujne slike. Isključivo kao posledica dodatnog sužavanja poprečnog preseka na lokaciji samog skretanja toka, postojeći vrtlog je sada znatno smanjen, i po prethodno uspostavljenom trendu kretanja, dodatno pomeren. Njegov novi položaj, lociran između proloke i same brane (u zoni neposredno ispred vrha napera), usmerava sada tok više ka levoj obali korita. Kao posledica toga same strujnice se na ulazu u levi agregat dodatno ispravljaju, dok se u zoni brane formira strujanje paralelno sa objektom (Sl 6.47).



Slika 6.47 Prikaz strujne slike za vremenski presek $t=40.16\text{ h}$ ($Z_v=154.00\text{ mm}$)

Analizom rezultata nanosnog proračuna za stanje pri nivou $Z_v=154.00\text{ mm}$, došlo se do zaključka da je izuzev jednog nizvodnog dela deonice, gde je “oblak” pojačane koncentracije primetan u zoni neposredno ispred brane, nanosno stanje u domenu ostalo uglavnom nepromenjeno u odnosu na prethodno analizirani slučaj ($Z_v=155.02\text{ mm}$). Duž primarne struje, u oblastima uz levu obalu korita, i u zoni neposredno ispred brane, rečno dno je i dalje najvećim delom sastavljeno od frakcija d_2 i d_3 (Prilog 38), dok je frakcija d_1 potpuno isprana (Slika 6.48-(b)). U drugom delu deonice, u zoni gde je ostvareno strujanje znatno slabijeg intenziteta, dno je sastavljeno od generalno sitnijeg granulata, koje takođe kao i ranije ravnomerno dele frakcije d_1 i d_2 . Preostale dve frakcije (d_4 i d_5) uopšte nisu zastupljene na dnu. Što se pak tiče koncentracije ovih granulata u suspenziji, frakcije d_2 , d_3 , d_4 i d_5 su kao i u prethodnom slučaju potpuno odsutne iz suspenzije (Prilog 38), dok se u slučaju prve frakcije d_1 javlja određeno odstupanje od stanja pri nivou $Z_v=155.02\text{ mm}$. Prikazan na slici 6.48-(a) kao polje pojačane koncentracije, koje je locirano na krajnjem nizvodnom delu jezera, ovaj oblak se očigledno formira kao



Slika 6.48 Dobijeni rasporedi nanosnih parametara duž modelirane deonice jezera HE "Zvornik" za vremenski presek $t=40.16\text{ h}$: (a) koncentracija C_1 , (b) zastupljenost prvog granulometrijskog intervala β_1 , (c) kumulativna promena kote dna ΔZ

posledica neustaljenosti toka i transporta nanosa između ova dva analizirana vremenska stanja. Međutim, ono što se javlja kao problem, jeste sama lokacija, odn. “izvor” te povišene koncentracije. Ako se pogleda nanosna slika deonice prethodnog stanja (Slika 6.45), primećuje se kao prvo da je duž tog dela korita frakcija d_I potpuno isprana, i kao drugo da su sami intenziteti brzina nedovoljni da eroduju druge frakcije. Dobijeni rezultat je raspored koncentracije C_I , koji, kako je ranije rečeno, zavisi isključivo od ulaznog graničnog uslova ($C_I=0.02\text{g/l}$). Na osnovu ovakvog odnosa vode i nanosa u deonici, zaključeno je da tok pri ovim ulaznim graničnim parametrima (voda i nanos) nije više u stanju da bitno menja svoju strukturu. Međutim, kako po dinamici nizvodnog graničnog uslova nivo u jezeru i dalje pada, na uskom ulaznom delu deonice dolazi do dodatnog sušenja visokog terena. Kao posledica toga tok je gurnut više ka levoj obali korita, što u ovoj uzanoj oblasti sada izaziva intenzivniju struju i pojavu erozije određenog trajanja (Prilog 39). Podignut materijal formira u suspenziji koncentraciju $C_I=0.4\text{ g/l}$, koji struja tada u vidu “oblaka” odnosi sve do nizvodnog dela jezera. Duž tog puta vrednost koncentracije pada (taloženje), pa ona na ovoj krajnjoj lokaciji iznosi konačnih $C_I=0.24\text{ g/l}$. Takođe, pored ove transportovane vrednosti, jedan deo pojačane koncentracije C_I u ovoj zoni hrani se i iz uske trake uz levu obalu korita, locirane neposredno ispred levog agregata.

Što se tiče kumulativne promene kote dna ΔZ , ona i dalje na najintenzivnijem delu deonice (uzani ulaz u deonicu) pokazuje male promene vrednosti u odnosu na prethodno stanje, svega par centimetara. Sa druge strane, znatno manje pojačanje erozionog procesa, reda veličine 10.0 cm , primetno je u nizvodnom delu jezera (kod samog napera), kao i kod par izolovanih tačaka duž leve obale korita, dok je u preostalom delu domena kumulativna promena kote dna ΔZ ostala i dalje zanemarljiva. Na kraju simulacionog perioda od $t=40.16\text{h}$ može se zaključiti da maksimalna vrednost kumulativne erozije u celom domenu iznosi prosečno oko $\Delta Z=5.0\text{ cm}$, osim u uzvodnom delu domena, u samoj zoni “sušenja”, gde ona iznosi oko $\Delta Z=35.0\text{ cm}$. Ovaj izolovani slučaj u pogledu rasporeda kumulativne erozije duž domena, može se do određenog stepena smatrati kao lokalna nestabilnost modela uzrokovana nepovoljnim kombinovanim dejstvom strujanja vode, kretanja nanosa, promene geometrije i neustaljenosti toka.

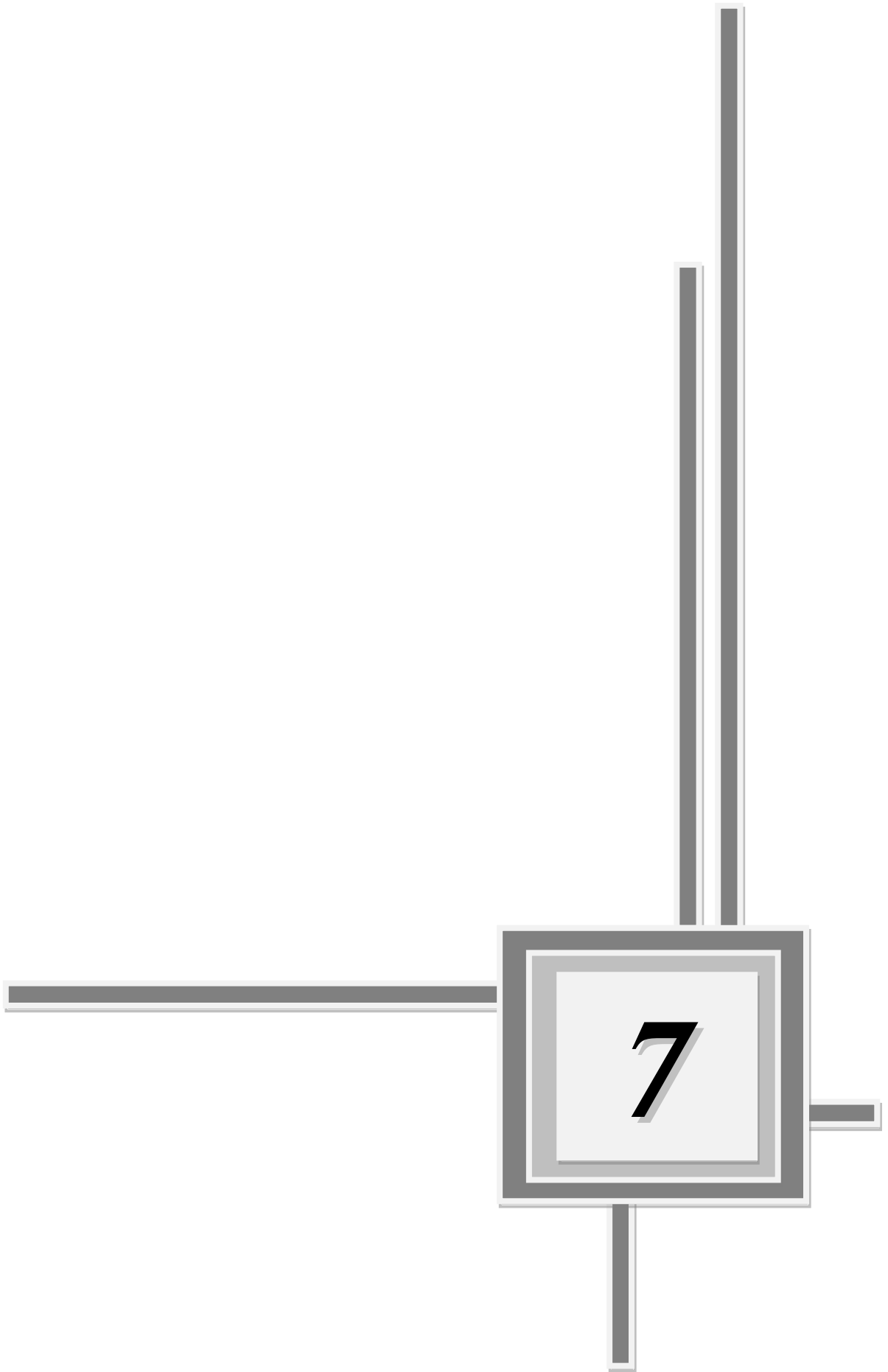
6.6. Zaključci o verifikaciji modela

Aplikacijom formiranog matematičkog modela na prethodnim test primerima, simulirana su u šematskim i prirodnim vodotocima kvazi-ustaljena i neustaljena stanja tečenja vode i nanosa. U prvom segmentu ovih simulacija, gde je prvenstveno na prostijoj geometriji matematički model testiran u cilju verifikacije advektivnih članova i definisanog postupka “sušenja i kvašenja”, dobijeni rezultati su pokazali veoma visok stepen tačnosti i verodostojnosti zadanog stanja. Sprovedni proračuni za propagaciju “oštrog čela”, koji su ovde ispraćeni sa zanemarljivo malim numeričkim deformacijama rešenja, pokazali su da visoka stabilnost advektivnih članova, koja je ostvarena primenom *Metode karakteristika*, dozvoljava sada opisivanje veoma naglih i intenzivnih promena (diskontinuiteta) u toku, a da pri tom ne ugrožava kompletan hidraulički i nanosni model (stabilnost i tačnost). Da bi se ovako visoka efikasnost i tačnost definisanih advektivnih članova dodatno potvrdila, oni su zajedno sa drugim karakterističnim elementom modela, postupkom kvašenja i sušenja priobalnog područja, testirani zatim na slučaju kanala sa ostrvom. Uspostavljanjem izraženog neustaljenog tečenja u kanalu sa ostrvom, testirana je sposobnost matematičkog modela da dinamički menja aktivnu oblast strujanja, tj. da kao posledicu toga postojeće uslove u toku prilagođava novom računskom domenu. Imajući u vidu nedostupnost merenja kojim bi se verifikovali rezultati ovog tipa, analiza sračunatih vrednosti nivoa i brzina pokazala je da je model ovo stanje u toku simulirao fizički verodostojno, kao i da je sam proračun sproveden bez pojave bilo kakvih deformacija rešenja (numerička nestabilnost, pojava nefizičkih oscilacija). Analizirani vremenski preseki, koji su pored hidraulički prostijih delova kanala uključivali i njegove složenije oblasti (male dubine sa intenzivnim strujanjem, vrtlozi), pokazali su da su dobijena stanja nivoa i brzina fizički validna, kao i da su njihove vrednosti fizički opravdane. Međutim, kako su ova dva primera ipak šematski kanali sa relativno prostom geometrijom, u drugom segmentu analize rezultata verifikacija modela je orjentisana na test primere prirodnih vodotoka.

Simulacijom kvazi-ustaljenog i neustaljnog tečenja vode i transporta nanosa, matematički model je testiran na tri prirodna vodotoka. U prva dva slučaja, kod deonica reke *Missoury* i *Atchafalaya*, rezultati simulacije kvazi-ustaljenog stanja modela poređeni su sa vrednostima terenskih merenja vode i nanosa, dok je u trećem slučaju, kod deonice akumulacije *HE "Zvornik"*, testirana sposobnost modela da usled zadanog neustaljenog tečenja dinamički menja aktivni domen strujanja (proračuna). Na osnovu analiziranih rezultata generalno se može zaključiti da je matematički model, čiji je hidrodinamički deo baziran na rešavanju članova jednačina metodama koje najbolje odgovaraju njihovom karakteru (metoda razlomljenih koraka),

a nanosni segment na rešavanju transporta prirodne mešavine nanosa (po frakcijama) u suspenziji i na rečnom dnu, u potpunosti potvrdio. Bilo da se radi o strujanju, gde su se kao uporedne veličine koristili kota nivoa vodnog ogledala i brzine, ili je pak reč o nanosnim procesima kao što su transport mešavine suspendovanog nanosa, granulometrijski raspored mešavine nanosa na rečnom dnu i deformacija rečnog korita, sračunate vrednosti su sa prihvatljivim odstupanjima od izmerenih vrednosti opisale prirodno stanje deonice vezano za period simulacije. Izuzev oscilacija izmerenih vrednosti, koje se duž mernog profila pojavljuju što zbog samog načina merenja, što zbog uticaja turbulentnih efekata na izmerene veličine, sračunate vrednosti reprodukuju stanje u prirodi sa visokim stepenom tačnosti, i to bilo da se ono odnosi na oblasti sa jednostavnom geometrijom, ili pak na delove toka koje karakterišu znatno složeniji hidraulički uslovi - zakrivljene oblasti, regulacione građevine, račvanje i spajanje glavnog korita i bočnih kanala, itd. Takođe, pokazana je neophodnost da se u cilju kvalitativnog modeliranja nanosnih procesa u rečnom toku kao osnova mora koristiti prirodna mešavina nanosa (model baziran na frakcijama), a ne pretpostavka o uniformnom rasporedu.

U slučaju trećeg razmatranog test-primera, kod deonice *HE "Zvornik"*, merenja ovog tipa nisu bila dostupna. Na sličan način kao i kod kanala sa ostrvom, i ovde je sa ciljem intenzivnog obaranja nivoa i sušenja priobalnog područja, uspostavljeno izraženo neustaljeno tečenje. Kao posledicu toga, model tokom simulacije isključuje računski "pasivne" čvorove duž deonice formirajući pri tom "suve" zone koja povratno menjaju hidrauličku i nanosnu sliku deonice. Sprovedenom analizom sračunatih rezultata, pokazalo se da je matematički model i u ovom, geometrijski znatno složenijem slučaju, reprodukovao fizički validna prirodna stanja strujanja vode i transporta nanosa.



7. Zaključak

U cilju formiranja robustnog, numerički efikasnog i pouzdanog ravanskog matematičkog modela, koji prvenstveno treba da posluži za modeliranje interakcije vode i prirodne mešavine nanosa u uslovima kompleksne geometrije i stalne promene granica oblasti strujanja prirodnih aluvijalnih vodotoka, postavljene hipoteze, na kojim se bazira ovaj rad, su u potpunosti potvrđene. Koristeći kao polazni koncept za opisanje interakcije vode i prirodne mešavine nanosa, set jednačina ravanskog toka (jednačine osrednjene po dubini) za modeliranje strujanja vode, i inovativni pristup aktivnog sloja i aktivnog podsloja zasnovan na mešavini različitih frakcija nanosa, razvijen je matematički model kojim se opisuju praktično svi važni aspekti ovog veoma kompleksnog prirodnog procesa. Ovo uključuje mehanizme strujanja vode, oba vida transporta mešavine nanosa (suspendovani i vučeni), zatim mehanizme razmene između mešavine nanosa u suspenziji i nanosa u aktivnom sloju, deformaciju korita vodotoka usled erozije i deponovanja, kao i rezultujuće mehanizme razmene mešavine nanosa između aktivnog sloja i aktivnog podsloja. Modelski koncepti kojima su definisani ovi mehanizmi, prilagođeni su uslovima složene geometrije, odnosno rezultujuće jednačine su transformisane u krivolinijski neortogonalni koordinatni sistem, a zatim modelirane odgovarajućim numeričkim postupcima. Da bi se ostvarila što veća pouzdanost matematičkog modela u svim aspektima bitnim za modeliranje prethodno navedenih procesa, u ovom radu izvršena su poboljšanja kako u pogledu numeričkog segmenta modela i delom konceptualnih postavki opisanih procesa, tako i u pogledu celokupnog uticaja svih navedenih elemenata modela. Shodno tome, navedena poboljšanja i unapređenja ostvarena su u oblasti :

- Kompletan set jednačina, kojim se rešava strujanje vode, transport mešavine nanosa (vučenog i suspendovanog) i morfološke promene korita, su u cilju adekvatnog prikaza složene geometrije prirodnog vodotoka sa promenljivim granicama, prilagođene neortogonalnim krivolinijskim koordinatama - kompletna transformacija.
- Veza između nanosa na rečnom dnu i u suspenziji, ostvarena je preko procesa razmene. Članovi erozije i deponovanja određenih frakcija modelirani su kao difuzni i advektivni fluks, respektivno, pri čemu su, s obzirom na ravanski model, koncentracija neposredno iznad dna i koeficijent turbulentne difuzije u blizini dna definisani adekvatnom teorijskom raspodelom.

- Primenom metode razlomljenih koraka, transformisane jednačine rešavane su numeričkim postupcima koji najbolje odgovaraju matematičkoj prirodi pojedinih članova.
- Rastavljanjem transformisanog seta jednačina, advektivni članovi jednačine strujanja vode i jednačine održanja mase suspendovanog nanosa su, s obzirom na svoj hiperbolički karakter, kao najproblematičniji delovi modela rešavani šemom visoke tačnosti (metodom karakteristika) sa interpolacijom višeg reda.
- Članovi propagacije i difuzije u slučaju transformisanih jednačina strujanja vode, i član difuzije u transformisanoj jednačini održanja mase suspendovanog nanosa, rešavani su metodom konačnih razlika. Za diskretizaciju jednačina korišćena je implicitnom Crank-Nicholson - ova šema, a za rešavanje rezultujućeg sistema algebarskih jednačina iterativna ADI procedura.
- Kako bi se neustaljenost prirodnih tokova modelirala na fizički što verodostojniji i realniji način, za set transformisanih jednačina strujanja vode, transporta mešavine nanosa i deformacije rečnog korita, razvijen je algoritam za rešavanje promenljive oblasti strujanja u horizontalnom planu (sušenje i kvašenje).
- Jednačine održanja mase aktivnog sloja i globalna jednačina održanja mase mešavine nanosa na dnu rešavane su modifikovanom upwind šemom, uz primenu Newton-Raphson - ovog postupka.

Nakon uspostavljanja matematičkog modela, usledila je njegova verifikacija. Radi poređenja numeričkog rešenja sa odgovarajućim teorijskim zakonitostima, verifikacija je prvo obavljena na dva geometrijski prostija slučaja.

U prvom primeru, gde je razmatran kanal u krivini, testirana je aplikacija metode karakteristika na advektivni član u jednačini strujanja. Simulacijom nagle i intenzivne promene brzine u kanalu, pokazano je da se modelom baziranom na ovoj metodi mogu uspešno rešavati čak i najzahtevnija stanja prirodnih vodotoka. Uz visok stepen numeričke stabilnosti i efikasnosti, model je „klasične“ deformacije numeričkog rešenja sveo na najmanju moguću meru, dok je samom procedurom obezbeđeno pravilno modeliranje fizike advektivnog procesa. Takođe, modeliranjem advekcije na ovaj način osigurano je kvalitetno i pouzdano simuliranje i hidraulički najekstremnijih slučajeva (nagle i intenzivne promene strujanja), kao i безусловna stabilnost kompletnog sistema jednačina ravanskog toka. Kao takav, robustan i numerički veoma

pouzdan i efikasan, on predstavlja osnovni preduslov za kvalitetno modeliranje svih preostalih procesa vezanih za strujanje vode i transporta nanosa.

Definisanjem kompletnog hidrauličkog modela, koji pored osnovnih članova jednačina ravanskog toka sadrži i algoritam za promenljivu oblast strujanja, korišten je u drugom šematskom primeru prav kanal, trapeznog poprečnog preseka, sa ubačenim ostrvom. Kako je njegov osnovni zadatak bio provera postupka sušenja i kvašenja pri veštački nametnutom neustaljenom tečenju, dinamičkom promenom graničnih uslova prvo je plavljena oblast uzvodno od ostrva, a zatim i zona na nizvodnom delu kanala. Analiza rezultujuće hidrauličke slike pokazala je da model sa aplikacijom algoritma za sušenje i kvašenje neustaljeno stanje simulira sa visokim stepenom fizičke verodostojnosti, kao i da ovakav način modeliranja neustaljenog tečenja u otvorenim vodotocima u velikoj meri utiče na hidrauličke uslove u samom toku. Pokazano je takođe da efekti izazvani plavljenjem inundacija i ostrva ni na koji način ne utiču na numeričku strukturu modela (stabilnost), odnosno da promena granice fizičke oblasti ne izaziva numeričke poremećaje celokupnog rešenja. Ako se ima u vidu sve prethodno navedeno, kao krajnji zaključak se nameće činjenica da je uzimanje u obzir efekta sušenja i kvašenja apsolutno neophodno i neizostavno kada se radi o modeliranju otvorenih tokova.

Nakon provere pojedinih elemenata matematičkog modela na geometrijski prostijim slučajevima, u drugoj fazi verifikacije korišteni su prirodni vodotoci. Za prve dve reke, Missouri i Atchafalaya, sračunati rezultati poređeni su sa adekvatnim merenjima. Kako složena osnova oba vodotoka izaziva izraženo prostorno strujanje praktično u svakom njihovom segmentu, i to bilo da se radi o lokalnom poremećaju (naperi kod reke Missouri), ili pak o strujanju u samoj krivini ili spajanju dva toka (bočni kanali kod reke Atchafalaya), oni su kao takvi predstavljali dobru podlogu za proveru postavljenih hipoteza (ravansko strujanje).

Na osnovu analize rezultata obavljene u poglavlju 6, sračunate vrednosti brzina, koncentracija suspendovanog nanosa i granulometrijskog sastava nanosa na rečnom dnu, se u oba slučaja veoma dobro poklapaju sa izmerenim vrednostima. Rešavanjem koordinatno transformisanih jednačina ravanskog toka metodama koji u najvećoj meri odgovaraju njihovom matematičkom karakteru, svi negativni efekti koji se javljaju pri numeričkom modeliranju tečenja u otvorenim tokovima eliminisani su, dok je sama tačnost i stabilnost kompletnog dvodimenzionalnog hidrodinamičkog modela znatno poboljšana i unapređena. Kao posledica toga, formirani model je sada, uz svoja neosporna ograničenja (dvodomenzionalna oblast primene), postao prihvatljiv alat i za „procenu“ strujanja vode kako u uslovima izraženog prostornog tečenja (lokalni objekti, krivine, spajanje dva vodotoka, itd.) i složene geometrije (koordinatna transformacija), tako i u

slučaju rešavanja drugih procesa vezanih za hidrodinamičku sliku vodotoka (transport materije, promena morfologije, itd.).

Na ovako poboljšan hidraulički model, u drugom koraku nadograđen je model za proračun transporta suspendovanog nanosa, granulometrijskog sastava nanosne mešavine na rečnom dnu i deformacije rečnog korita. Sa prethodno obezbeđenim parametrima strujanja, koji kao takvi na samom početku nanosnog proračuna garantuju fizičku realnost hidrauličkog stanja razmatranog vodotoka, akcenat unapređenja samog nanosnog proračuna stavljen je na numeričko rešavanje transporta suspendovanog nanosa, i na fizički i računski najzahtevniji član kompletnog nanosnog procesa - fluks razmene nanosnog materijala između rečnog dna i suspenzije (erozija i deponovanje). Oba ova procesa su zajedno sa transportom vučenog nanosa, deformacijom rečnog korita i granulometrijske raspodele nanosa na rečnom dnu razmatrani sa stanovišta prirodne mešavine nanosa različitih frakcija. Na osnovu veoma dobrog poklapanja dobijenih rezultata sa merenim vrednostima kad su u pitanju transport suspendovanog nanosa i morfološke promene rečnog korita, koji pokazuju da čak i u zonama izrazito prostornog strujanja (naperi) model prirodno stanje reprodukuje sa visokim stepenom tačnosti, zaključuje se da su postavljene hipoteze u potpunosti potvrđene.

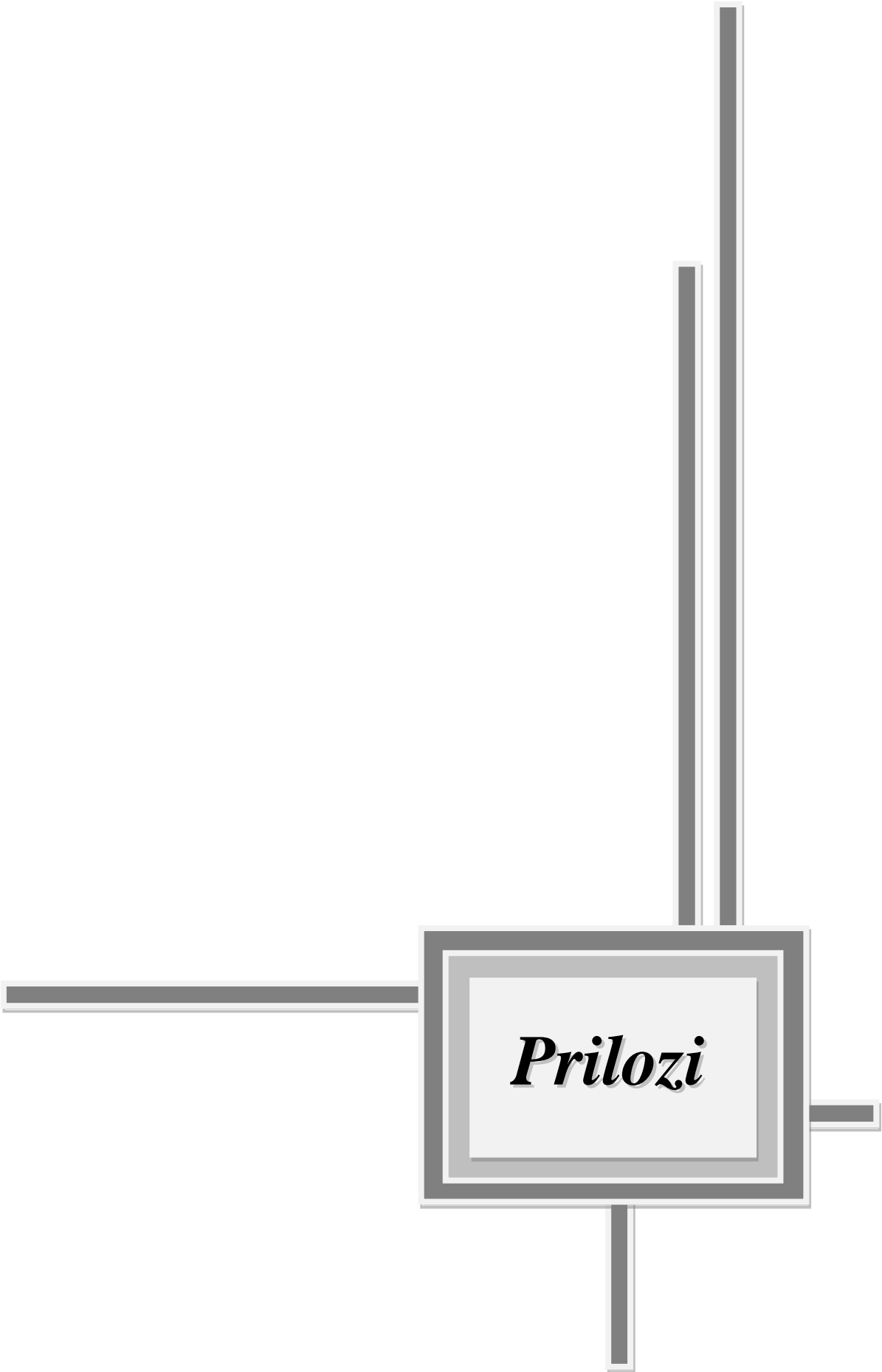
U trećem segmentu razvoja matematičkog modela za rešavanje strujanja vode, transporta mešavine nanosa i promene morfoloških karakteristika otvorenih tokova, uspostavljen je algoritam za rešavanje dinamičke promene aktivne oblasti strujanja u horizontalnom planu – sušenje i kvašenje priobalnog područja. Za testiranje ovog postupka kao model korištena je Zvornička akumulacija, u kojoj je neustaljeno tečenje izazvano radom hidroelektrane HE "Bajina Bašta". Kako u ovom slučaju nisu postojali adekvatni mereni podaci na osnovu kojih bi se izvršila verifikacija parametarskog postupka, analiza dobijenih rezultata vršena je na osnovu prethodno potvrđenih elemenata modela i odgovarajućih teorijskih i praktičnih saznanja. U tom pogledu dobijeni rezultati su pokazali veoma visok stepen fizičke verodostojnosti i doslednosti nametnutog neustaljenog stanja, i to kako u slučaju hidrauličkog dela modela, tako i u segmentu samog nanosnog proračuna. Na osnovu toga generalno se može zaključiti da je tačnost i efikasnost postojećeg matematičkog modela za rešavanje tečenja vode i transporta nanosa u otvorenim tokovima na ovaj način uspešno poboljšana, dok je sama struktura matematičkog modela dodatno unapređena.

Na osnovu svega navedenog konačno se može zaključiti da su sve postavljene hipoteze u potpunosti potvrđene, kao i da su predložena unapređenja i poboljšanja matematičkog modela za rešavanje strujanja, transporta prirodne mešavine nanosa u suspenziji i na rečnom dnu, kao i deformacije rečnog dna uspešno sprovedena.

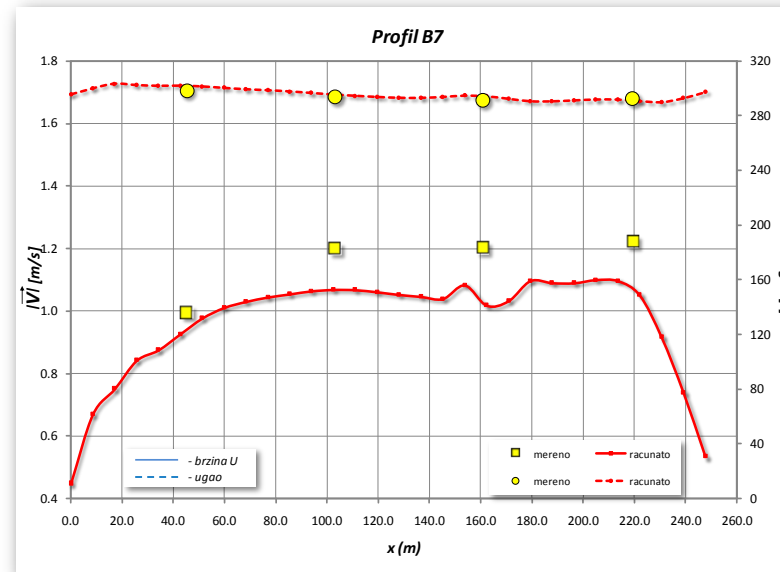
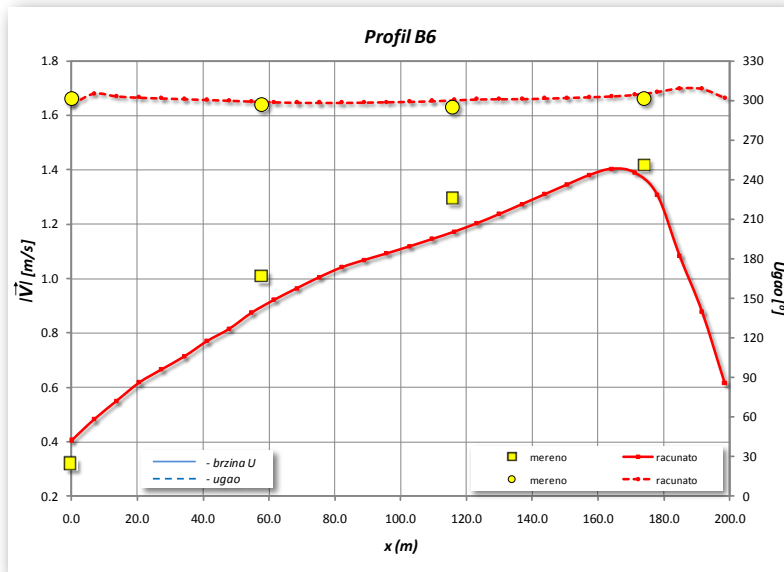
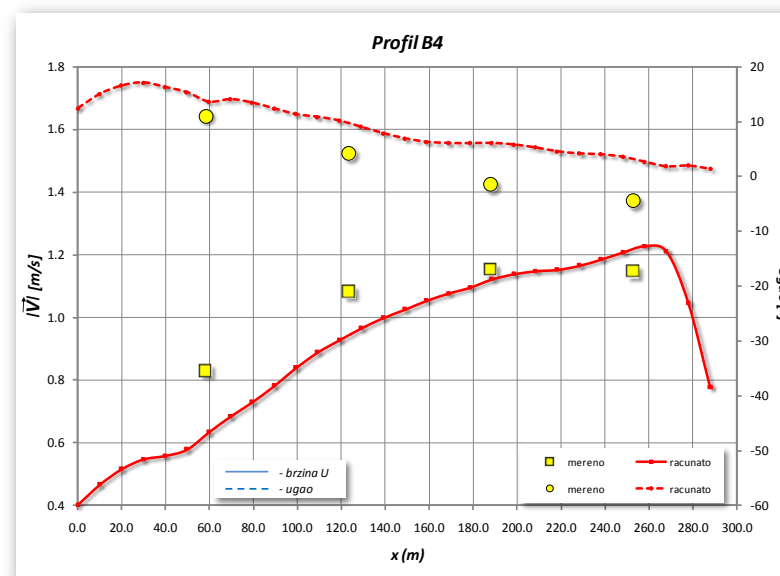
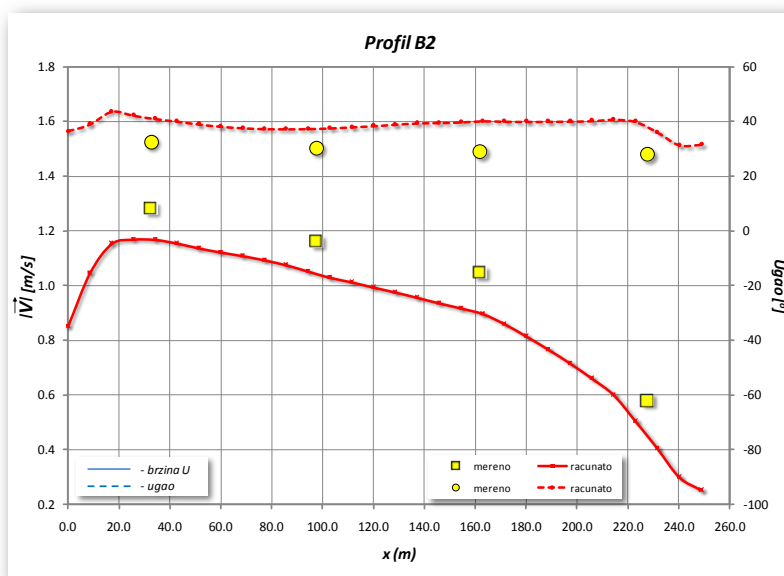
- *Predlozi za dalja istraživanja*

U cilju razvoja formiranog matematičkog modela, dalja istraživanja bi trebalo fokusirati prvenstveno na kvalitativne verifikacije predloženih postupaka. Prikupljanje merenih podataka pri neustaljenom stanju vodotoka omogućilo bi kao prvo pravilnu i jasnu verifikaciju nedovoljno potvrđene procedure sušenja i kvašenja. Informacije o samoj dinamici promene aktivne oblasti strujanja dale bi mogućnost detaljnijeg uvida ne samo u samu fiziku procesa, već i na posledice koje on ima na kompletno stanje toka. Sa druge strane, takvi podaci pružili bi jasniju sliku o tome kako i na koji način takvi procesi utiču na samu hidrauličku i nanosnu strukturu rečnog korita, što bi svakako pomoglo u definisanju dodatnih mehanizama interakcije vode i nanosa u priobalnim područjima pri neustaljenim stanjima toka (voda i nanos).

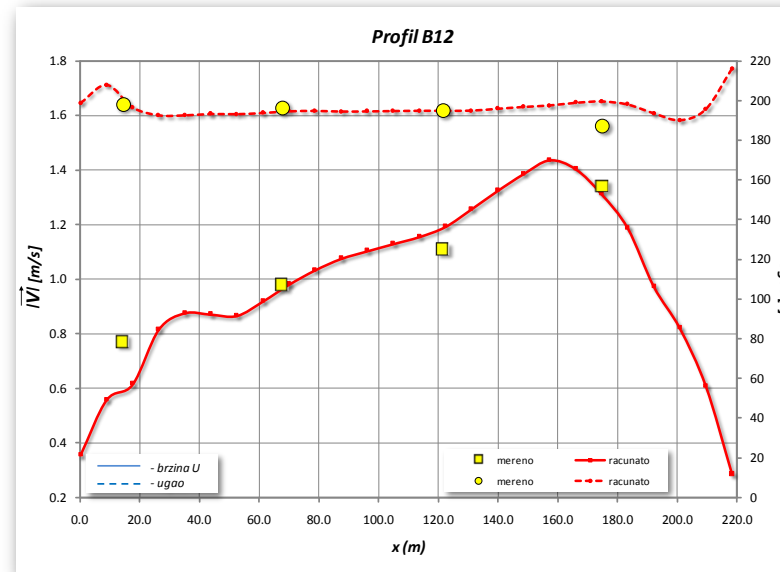
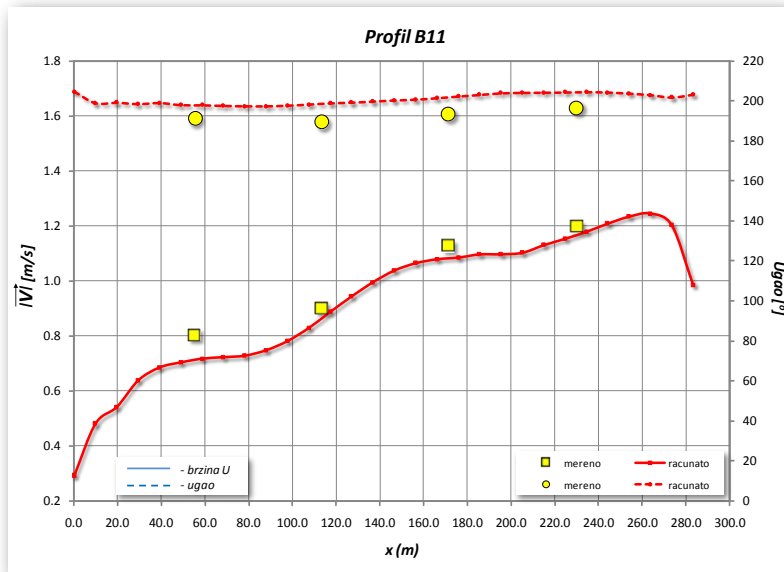
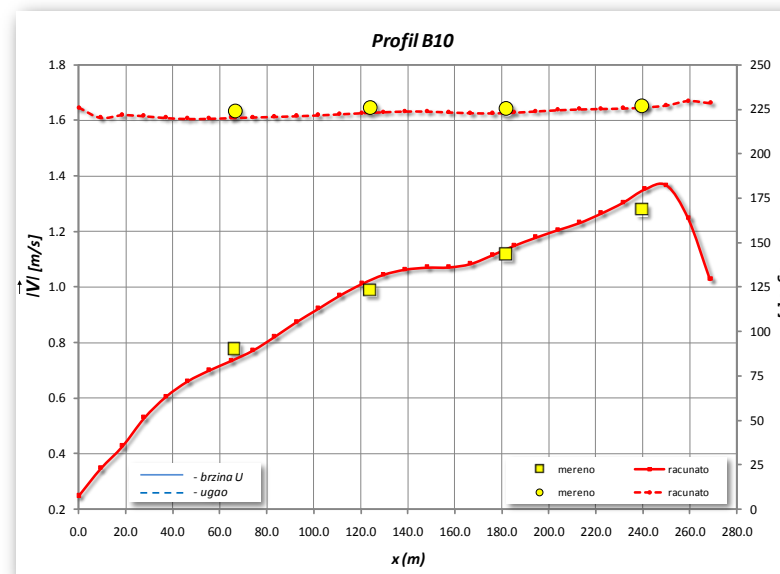
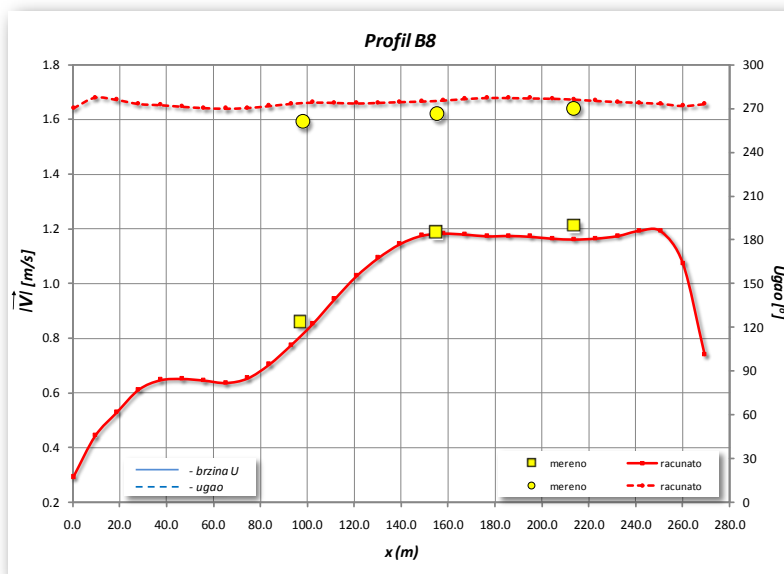
Imajući u vidu da je tečenje u otvorenim tokovima prvenstveno turbulentno i trodimenzionalno, proširenje postojećeg modela trebalo bi takođe usmeriti ka proveru modela za slučajeve intenzivnog strujanja (buran režim), kao i ka modeliranju turbulencije kao veoma bitnom činiocu u pokretanju i transportu nanosa.



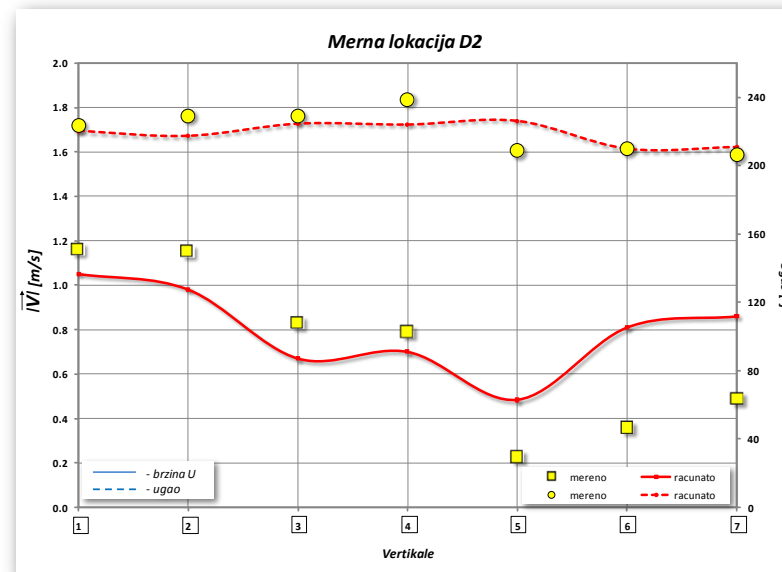
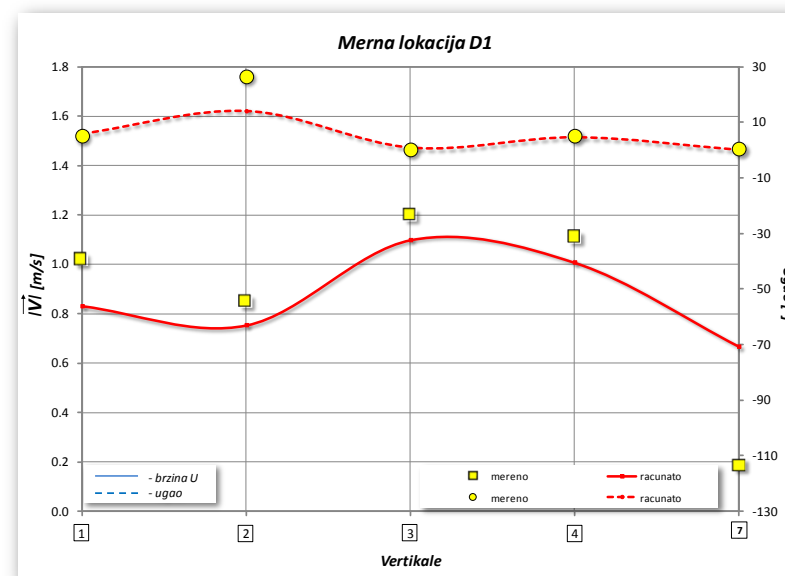
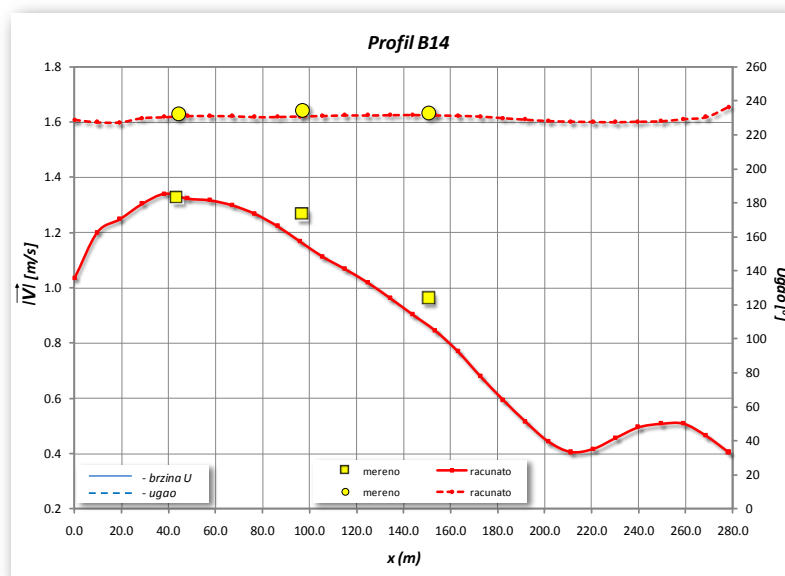
Prilozi



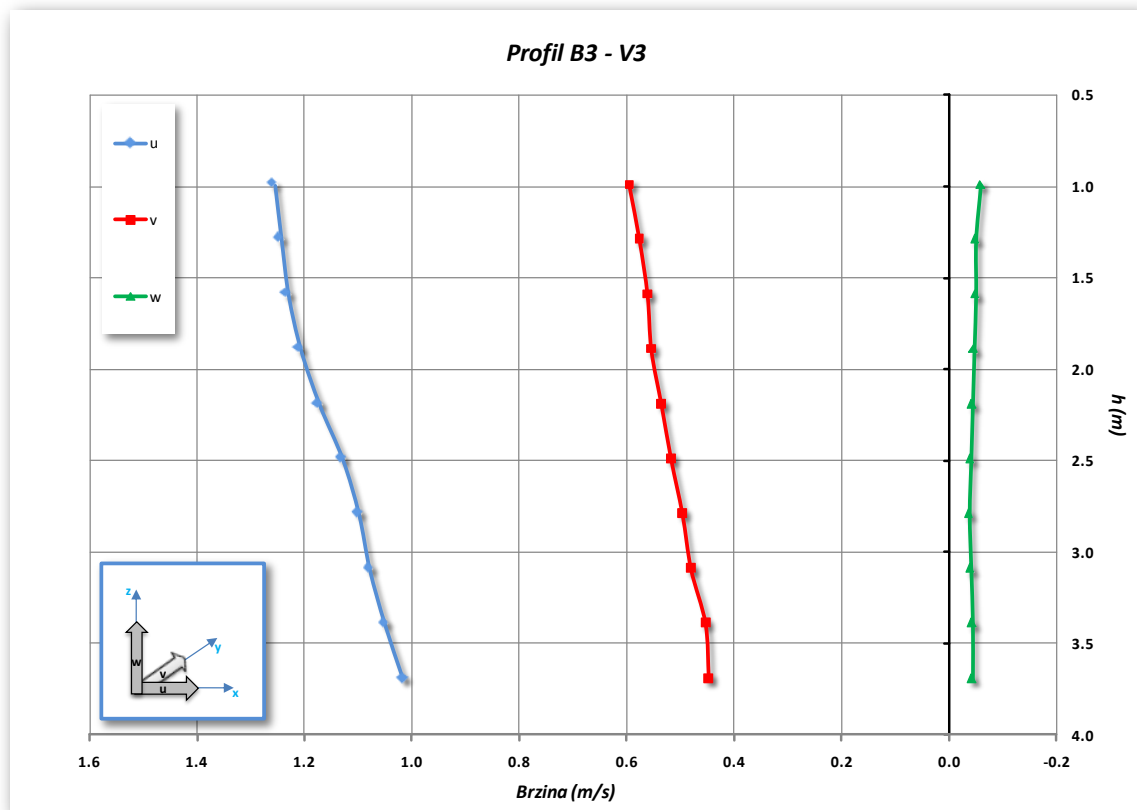
Prilog 1 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile B2, B4, B6 i B7 - reka Missouri



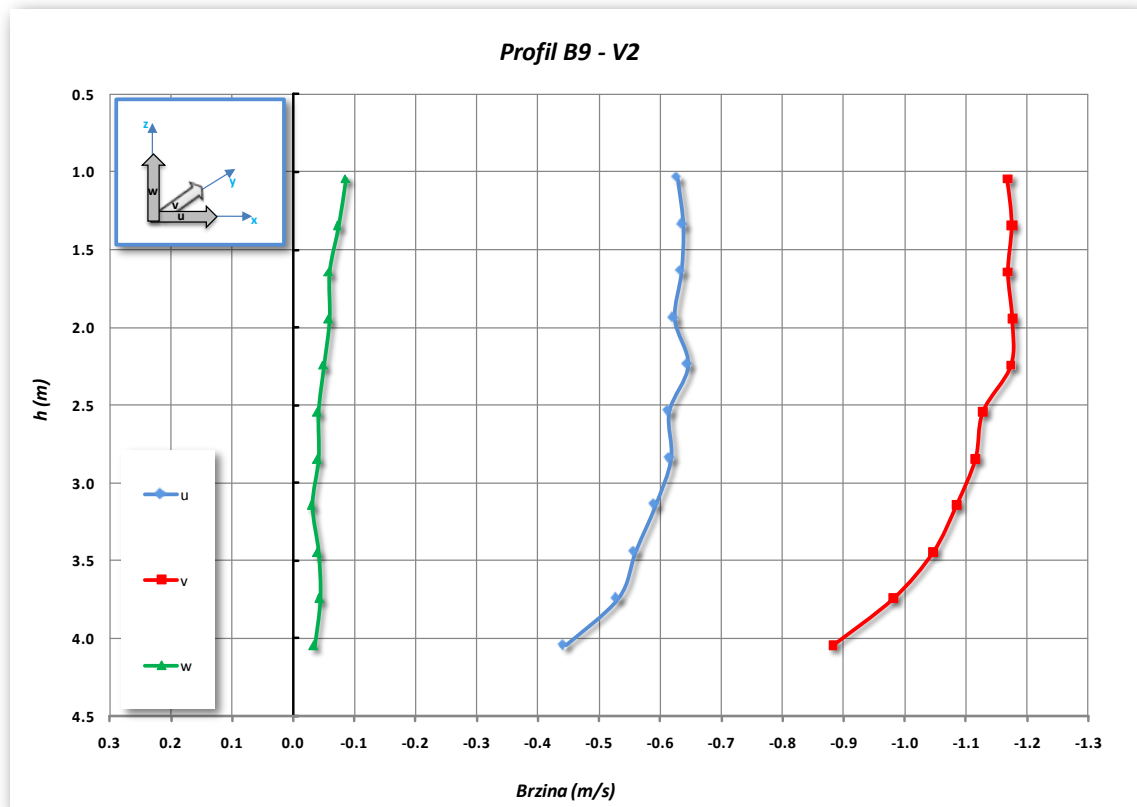
Prilog 2 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile B8, B10, B11 i B12 - reka Missouri



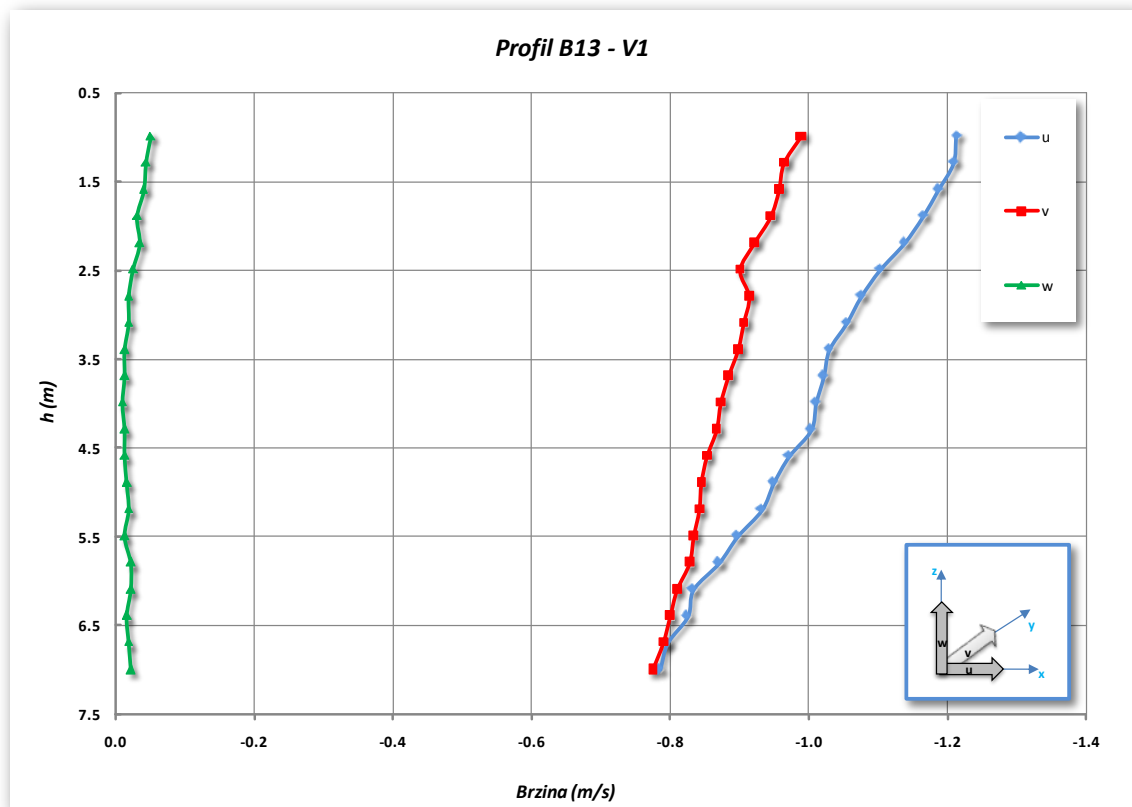
Prilog 3 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile B14, D1 i D2 - reka Missouri



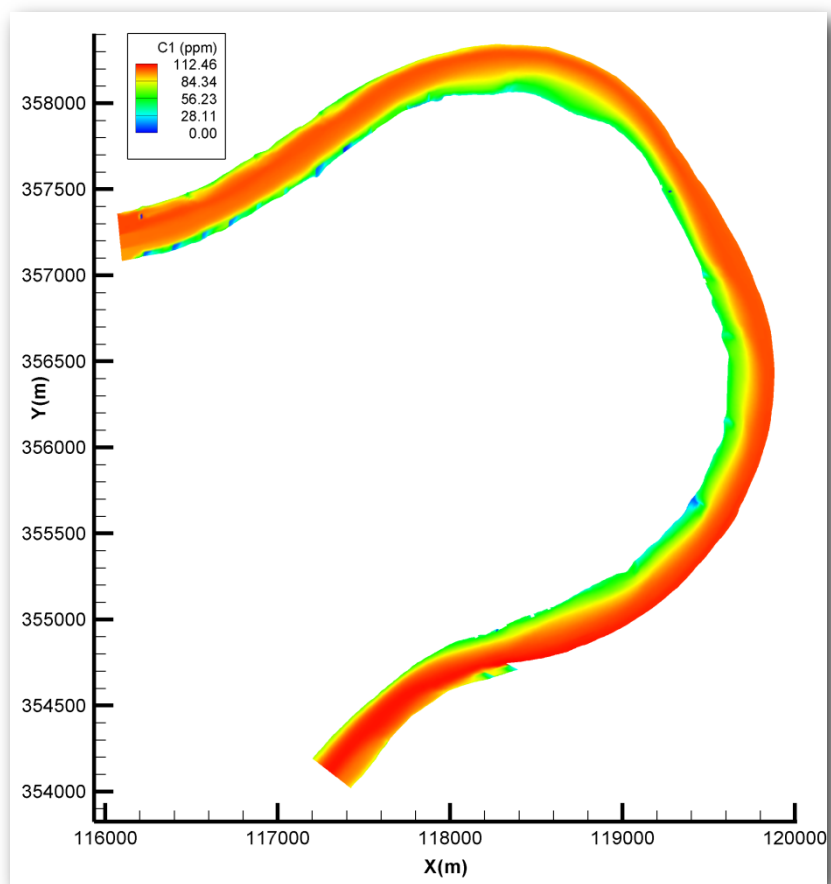
Prilog 4 Raspored po dubini merenih komponenta brzine u, v, w za vertikalnu V3 profila B3 - reka Missouri



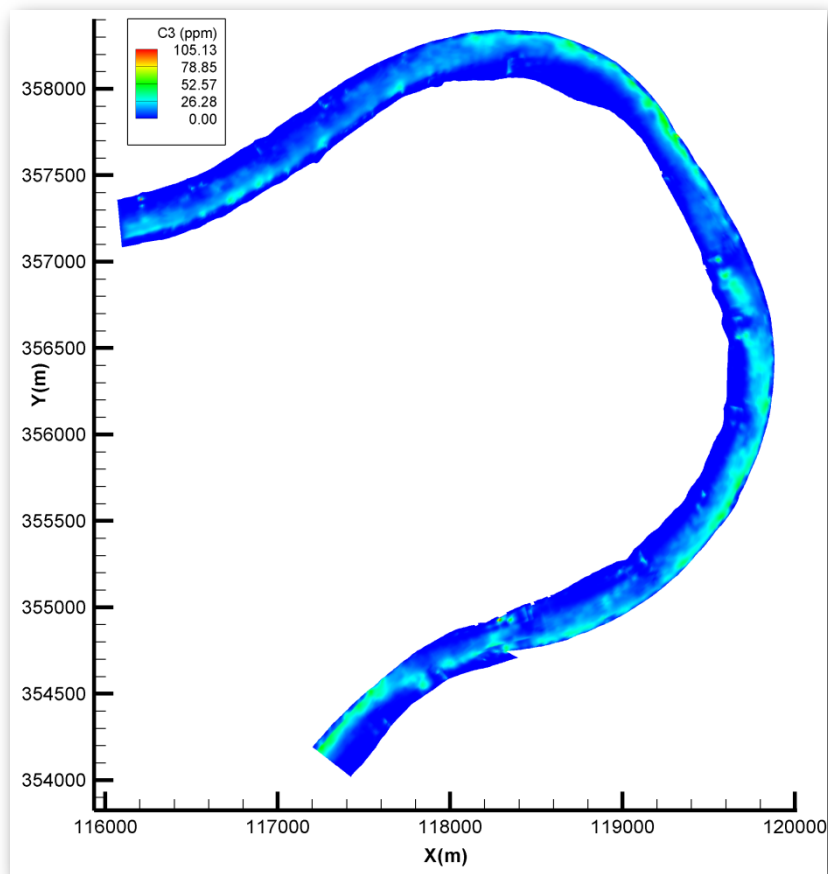
Prilog 5 Raspored po dubini merenih komponenta brzine u, v, w za vertikalnu V2 profila B9 - reka Missouri



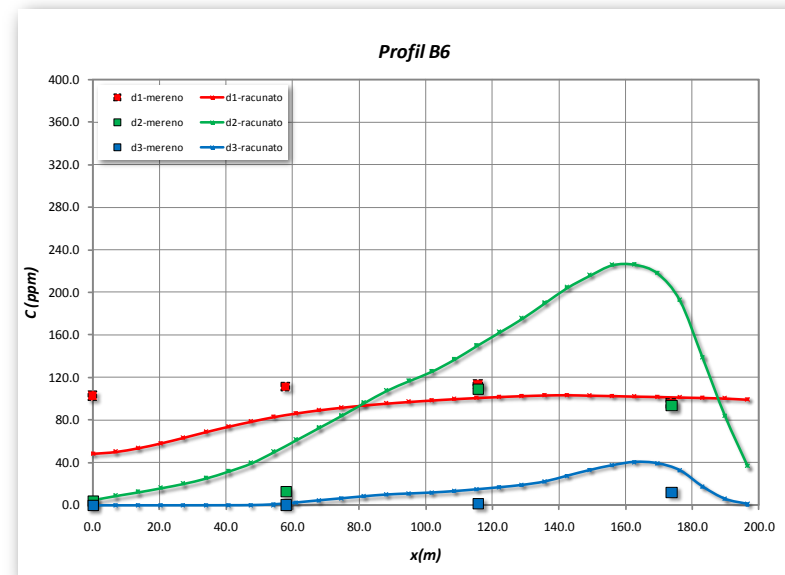
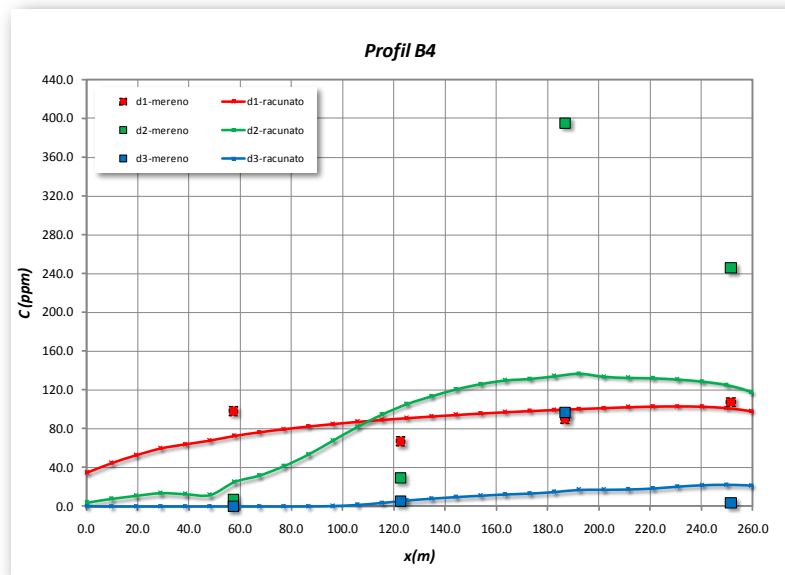
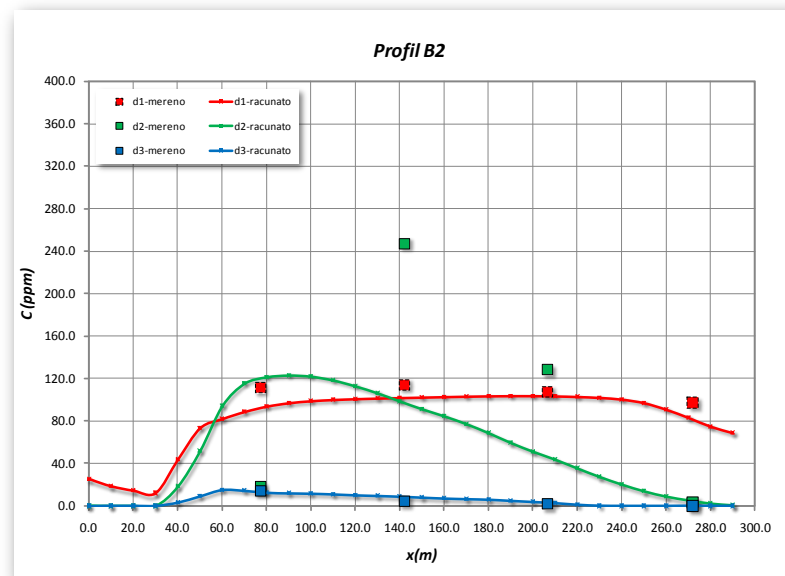
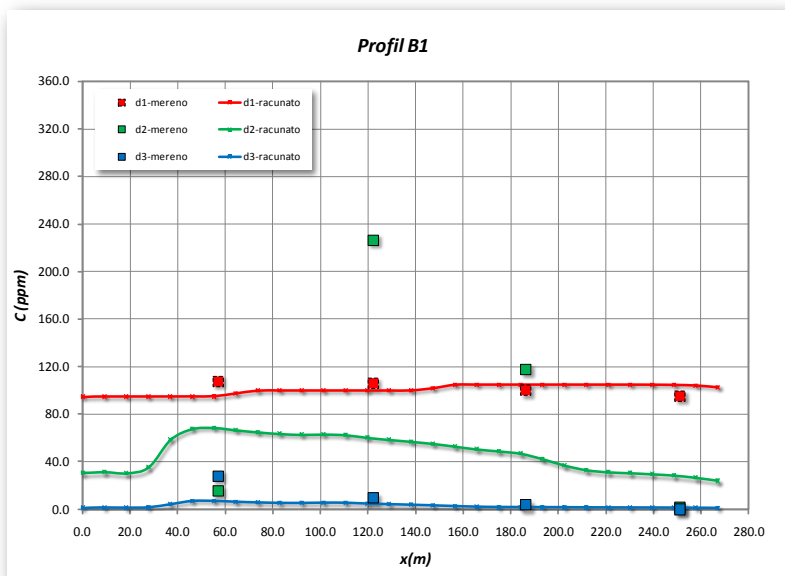
Prilog 6 Raspored po dubini merenih komponenta brzine u, v, w za vertikalnu V1 profilu B13 - reka Missouri



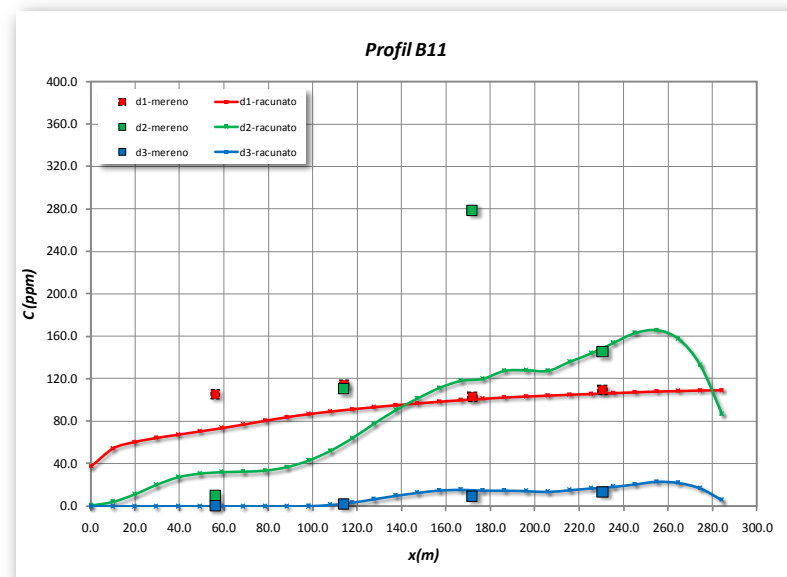
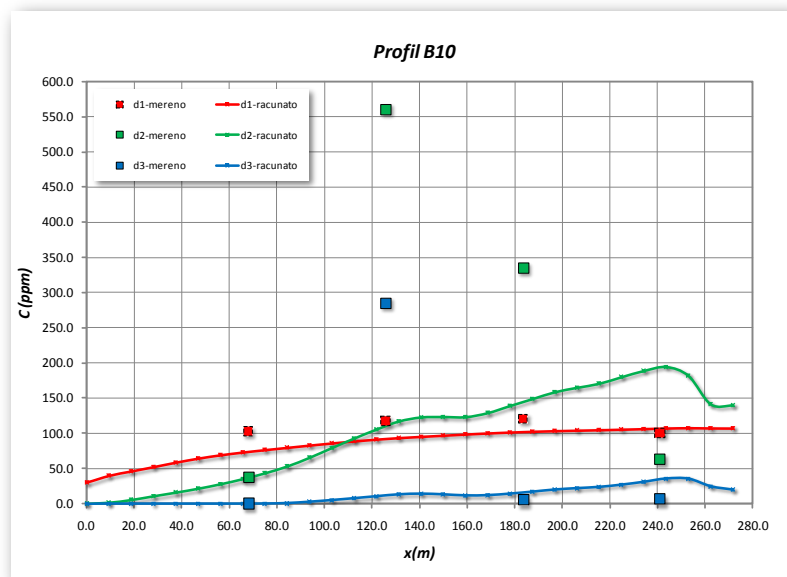
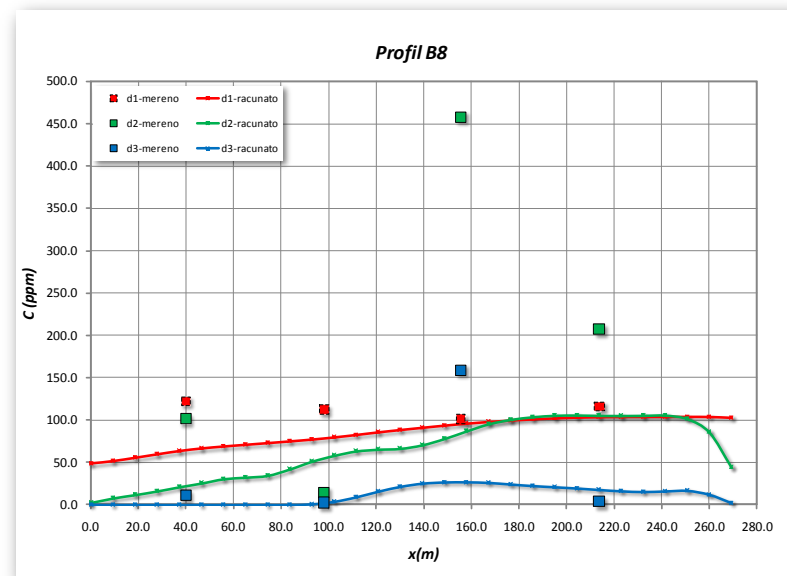
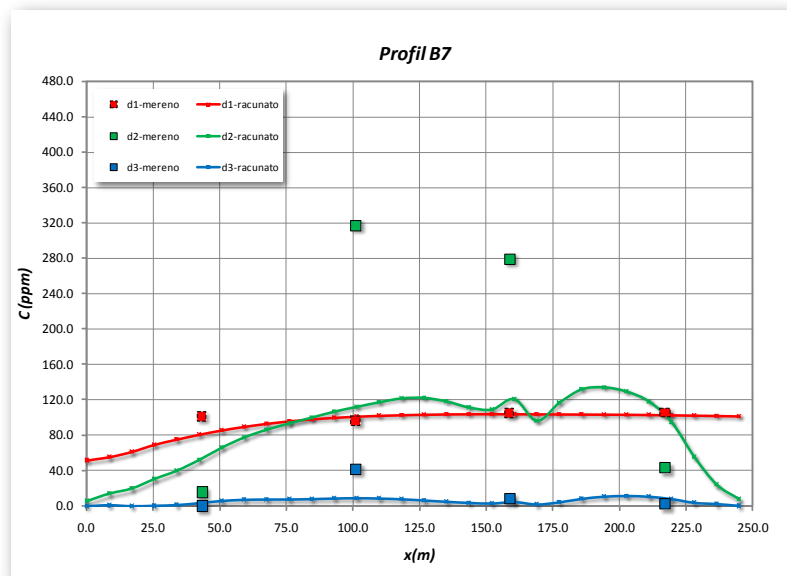
Prilog 7 Dobijeni raspored koncentracije C_1 duž modelirane deonice reke Missouri



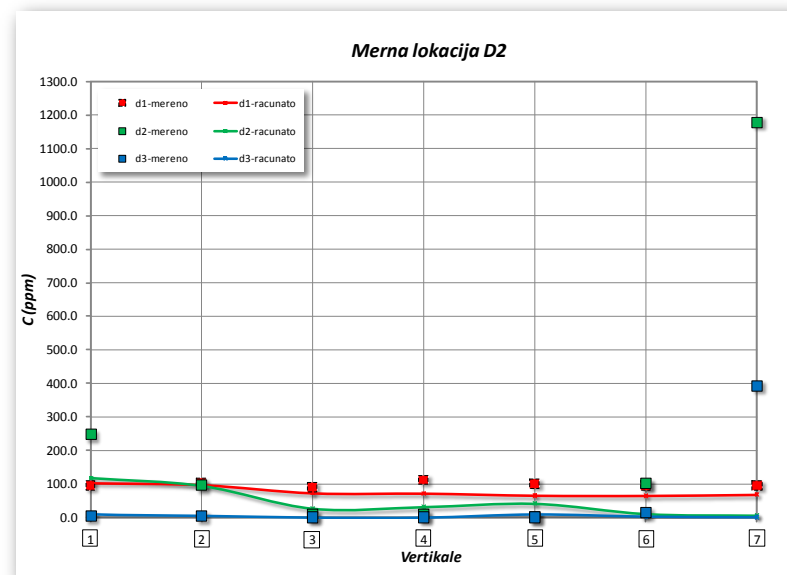
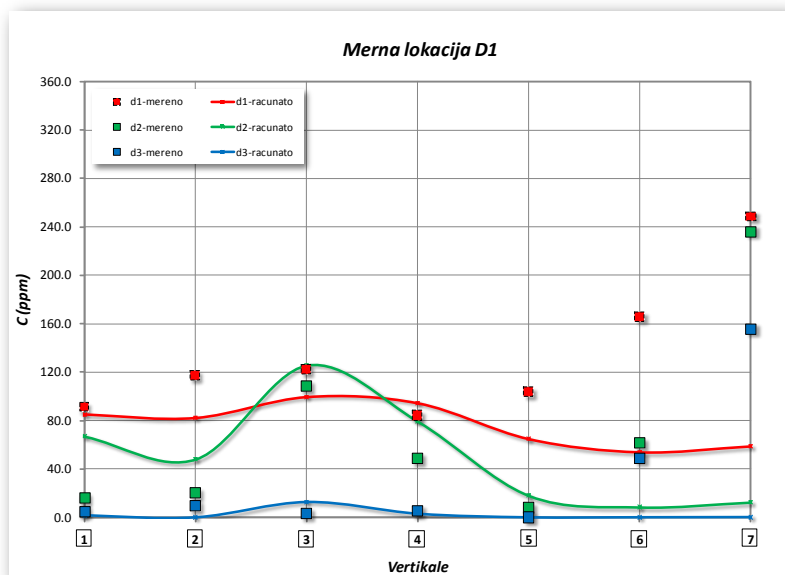
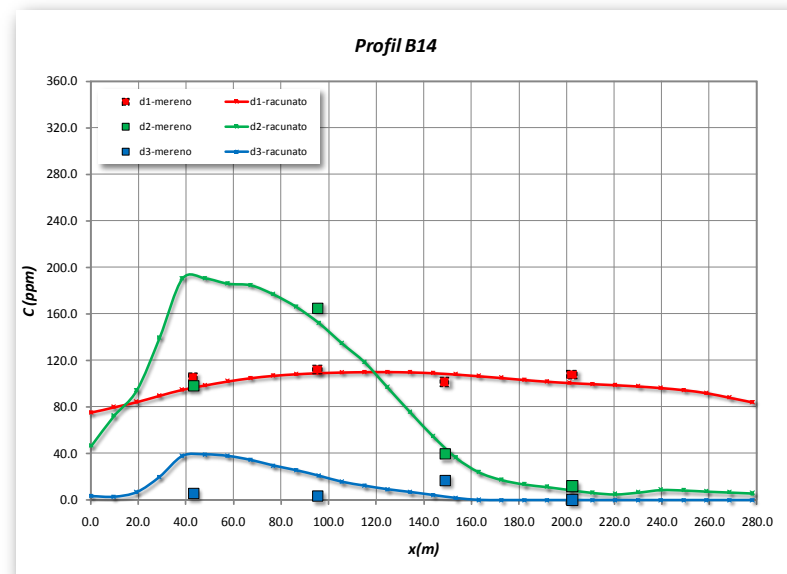
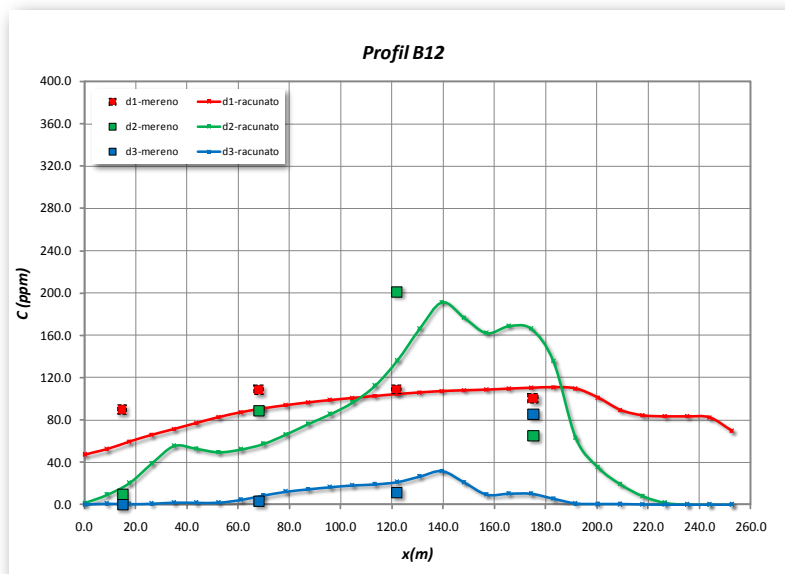
Prilog 8 Dobijeni raspored koncentracije C_3 duž modelirane deonice reke Missouri



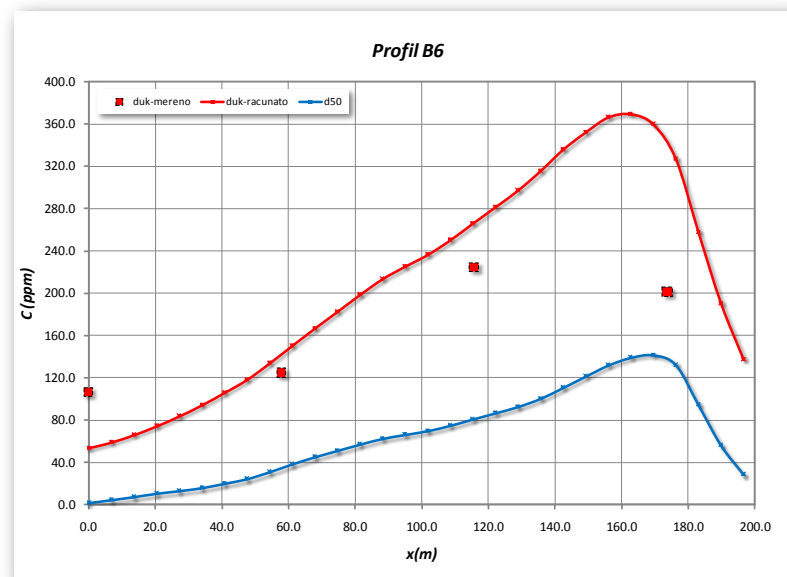
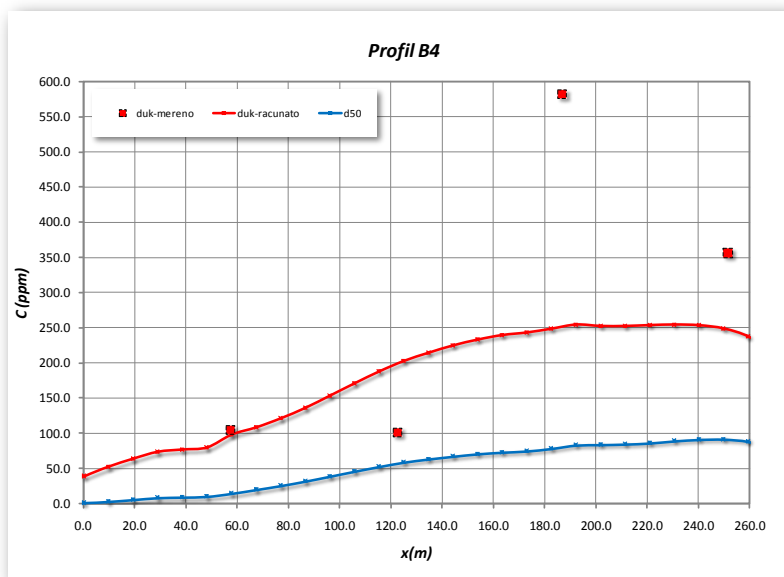
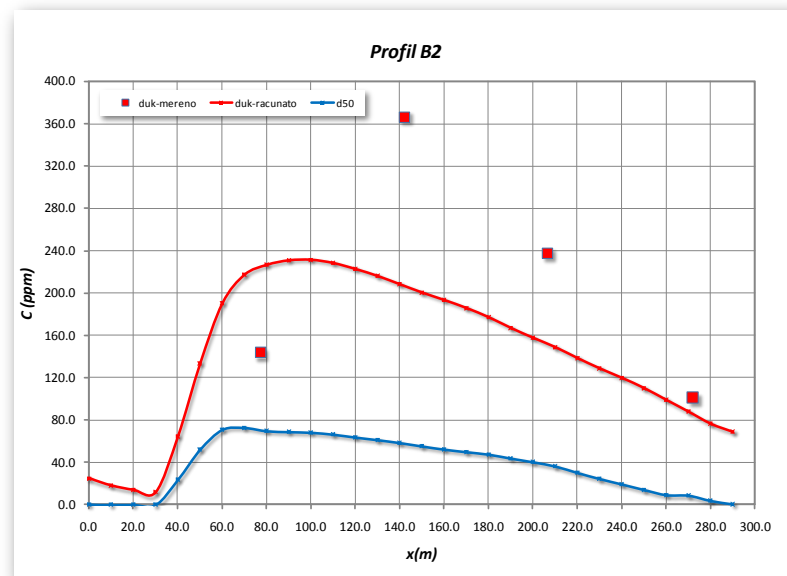
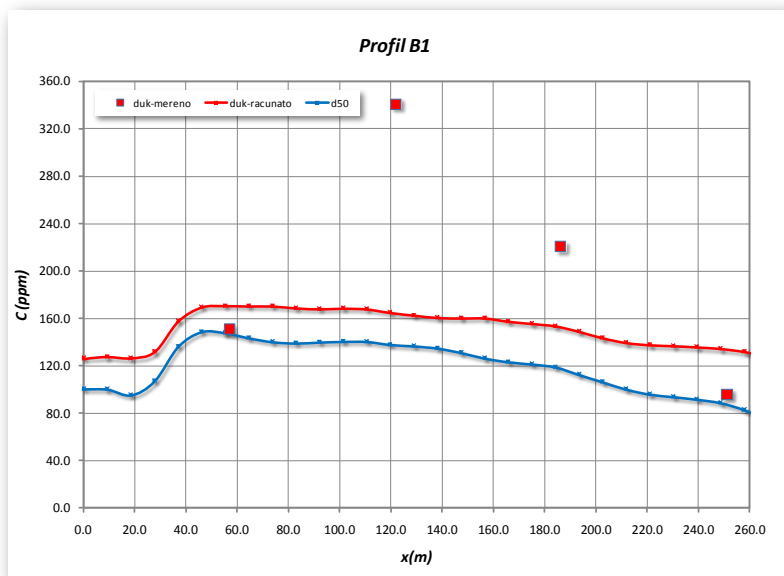
Prilog 9 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile B1, B2, B4 i B6 - reka Missouri



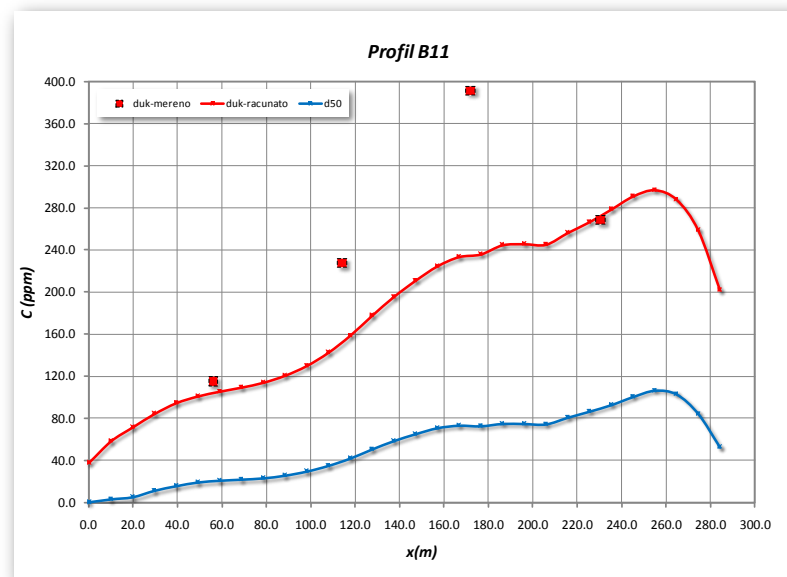
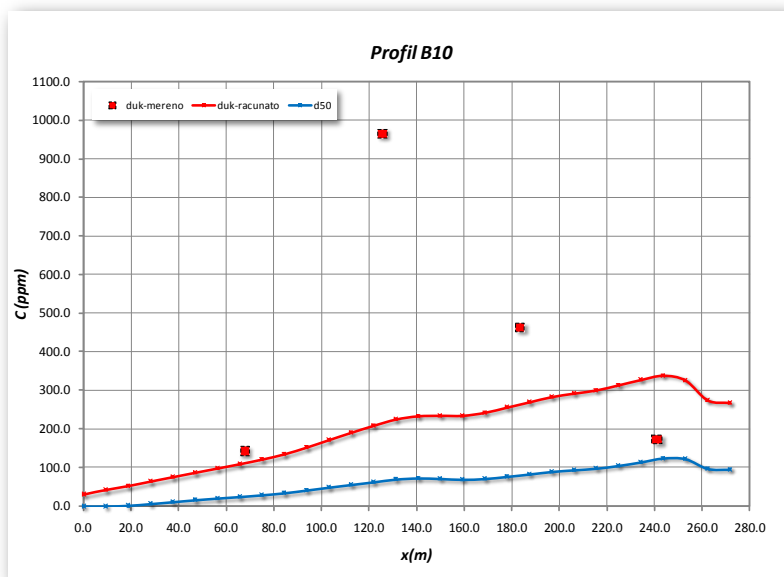
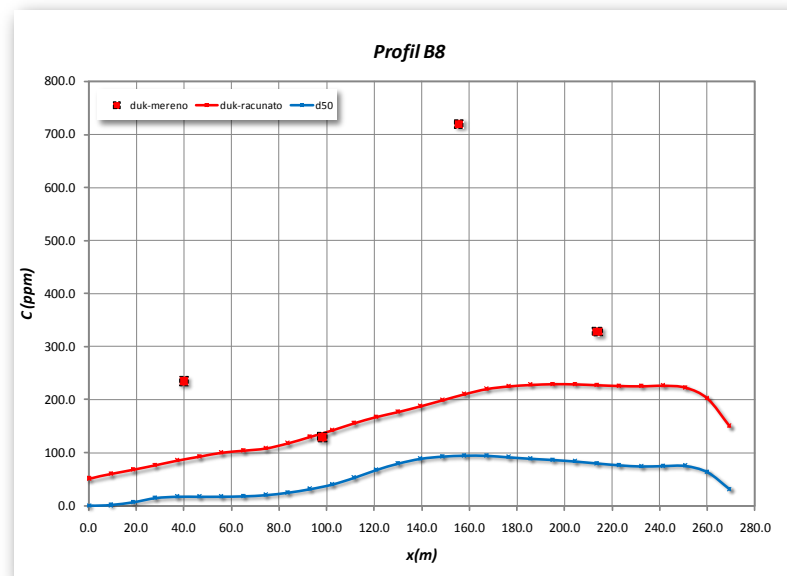
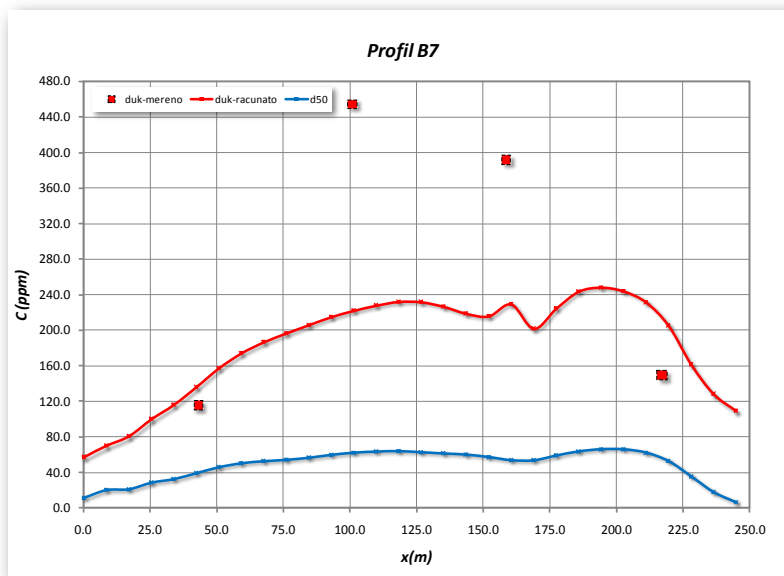
Prilog 10 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile B7, B8, B10 i B11 - reka Missouri



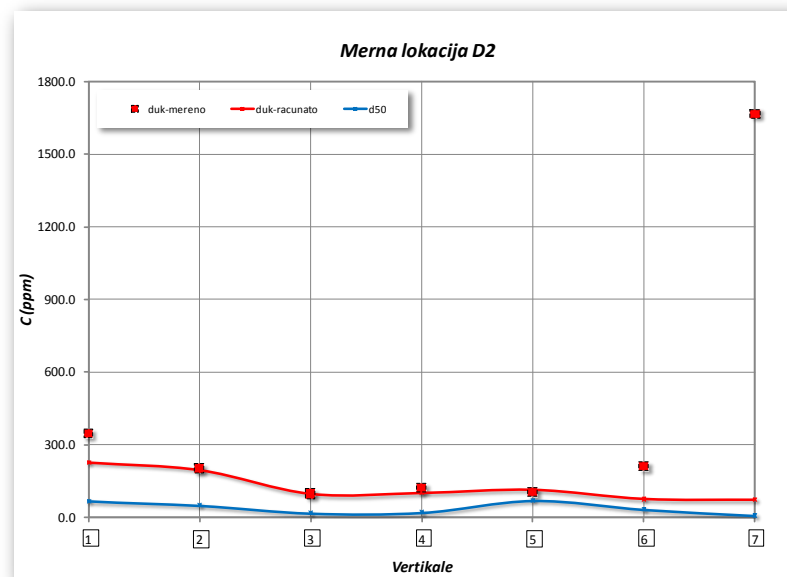
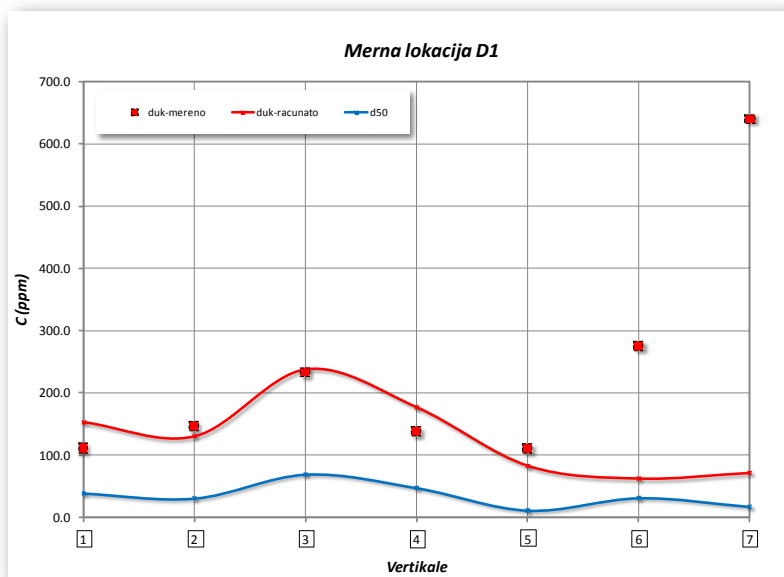
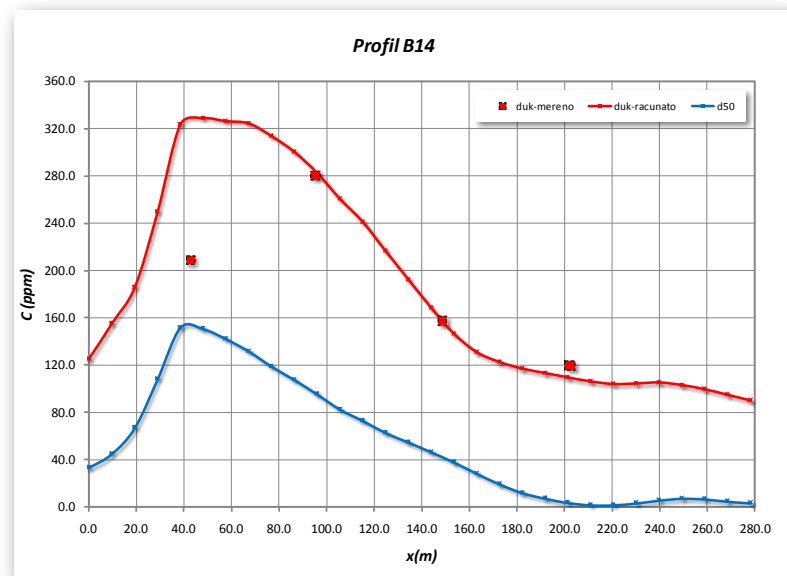
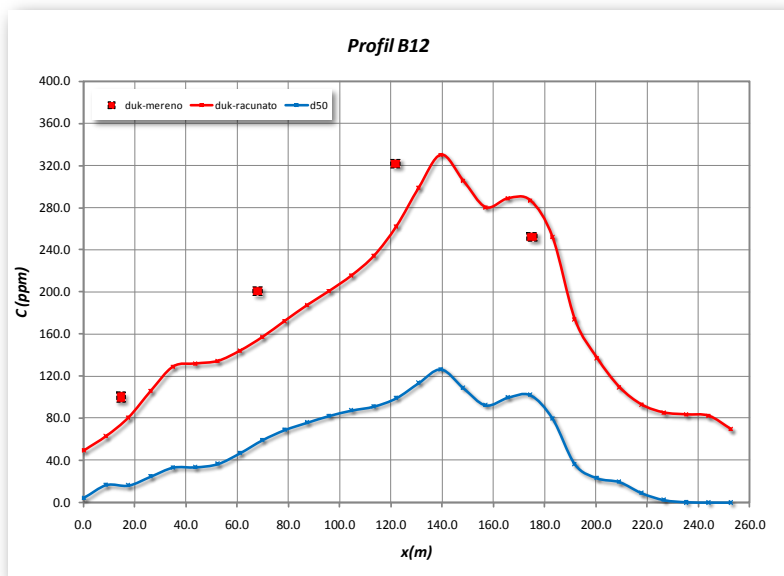
Prilog 11 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile B12, B14, D1 i D2 - reka Missouri



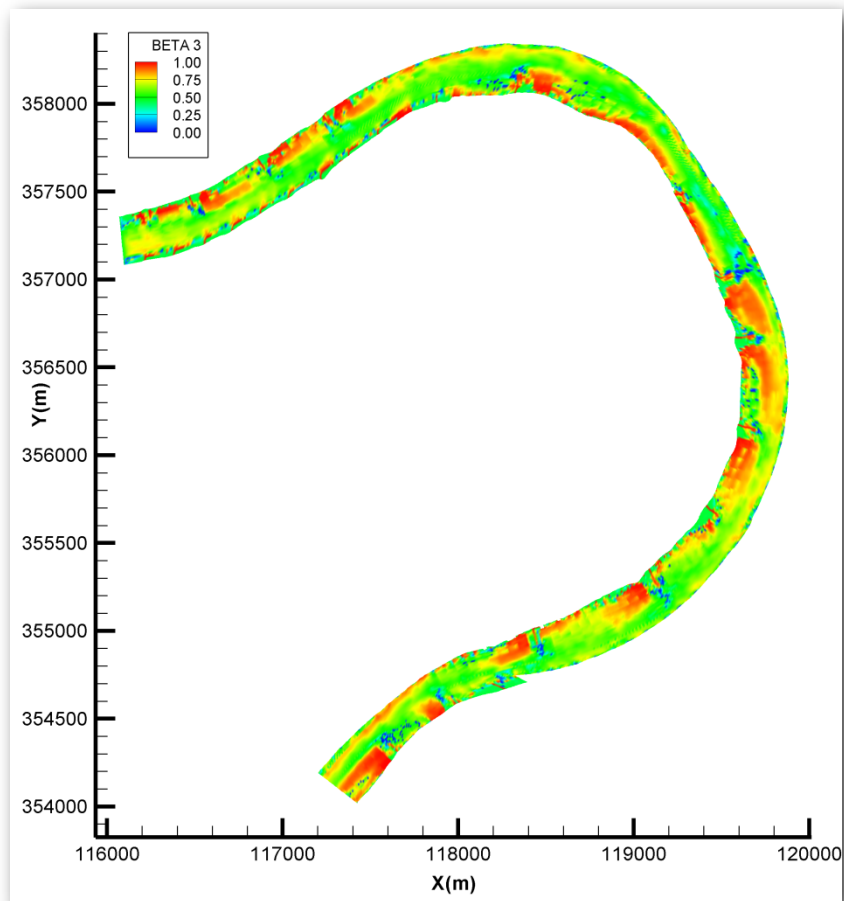
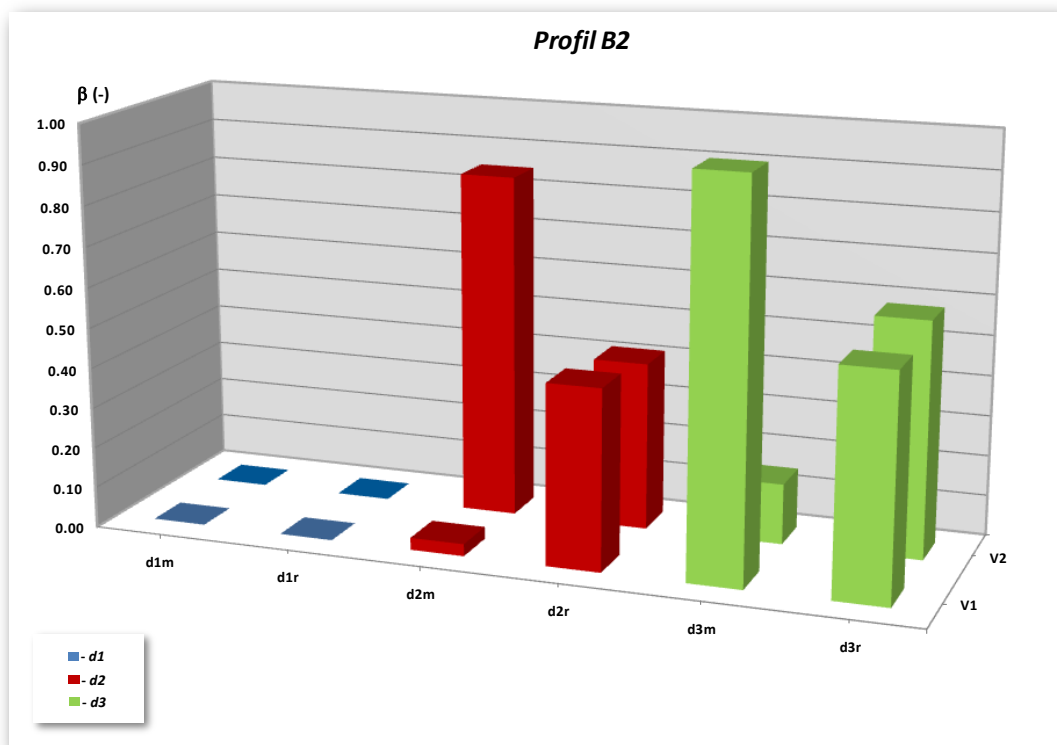
Prilog 12 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile B1, B2, B4 i B6 - reka Missouri

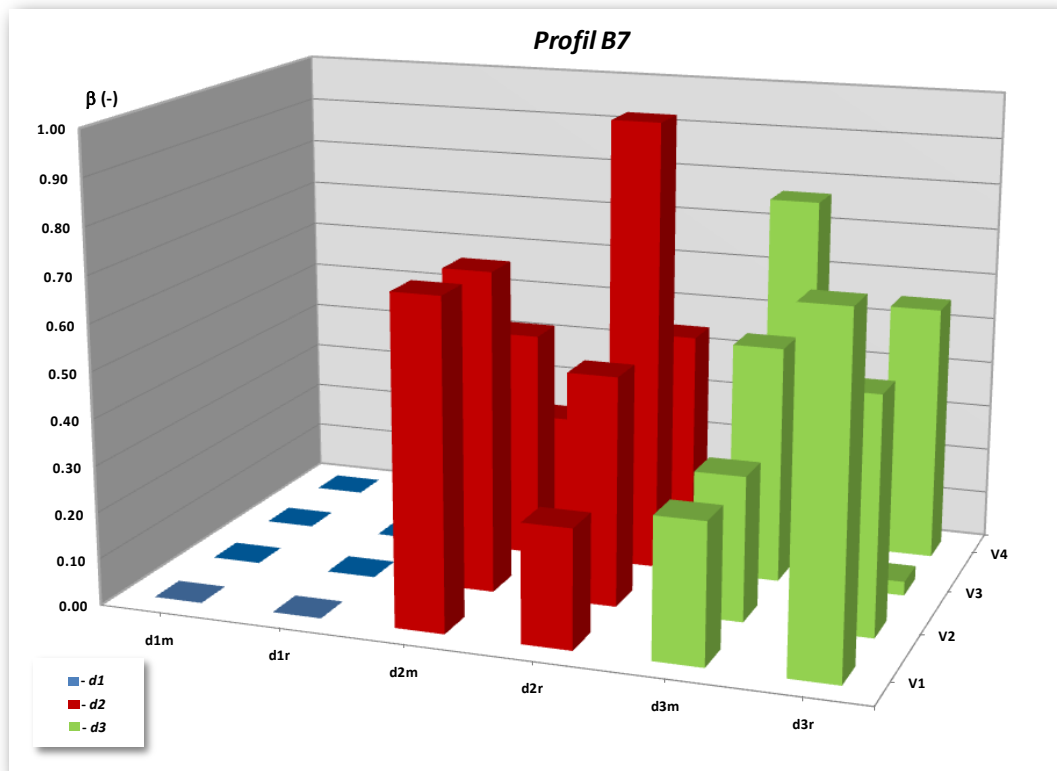


Prilog 13 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile B7, B8, B10 i B11 - reka Missouri

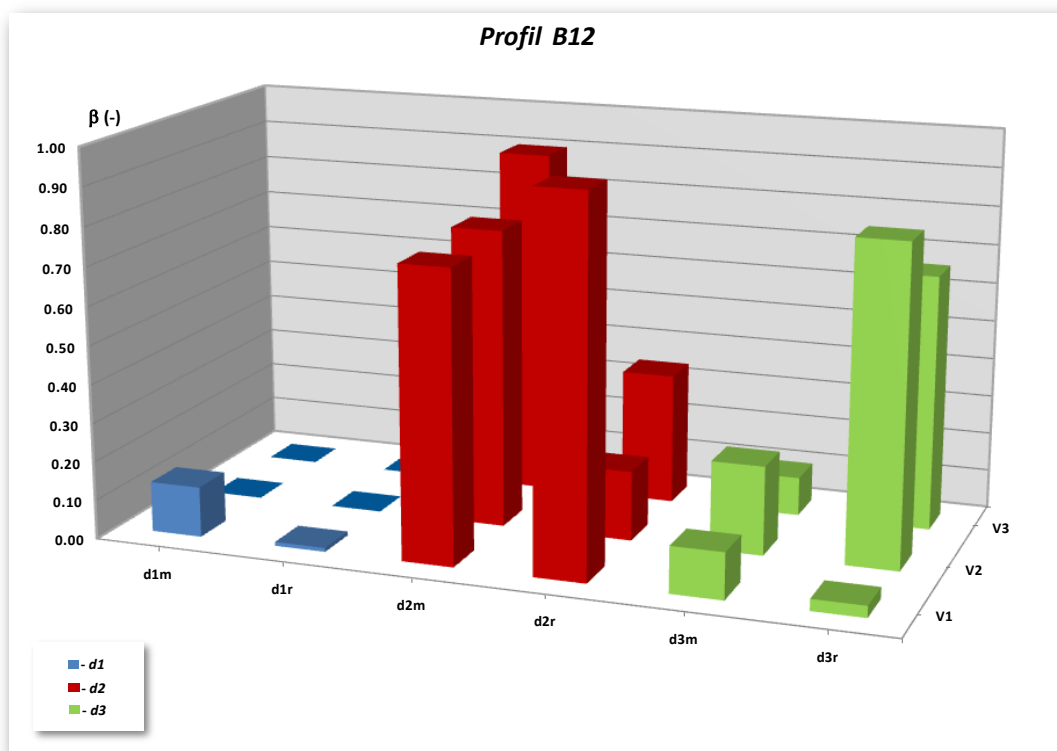


Prilog 14 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile B12, B14, D1 i D2 - reka Missouri

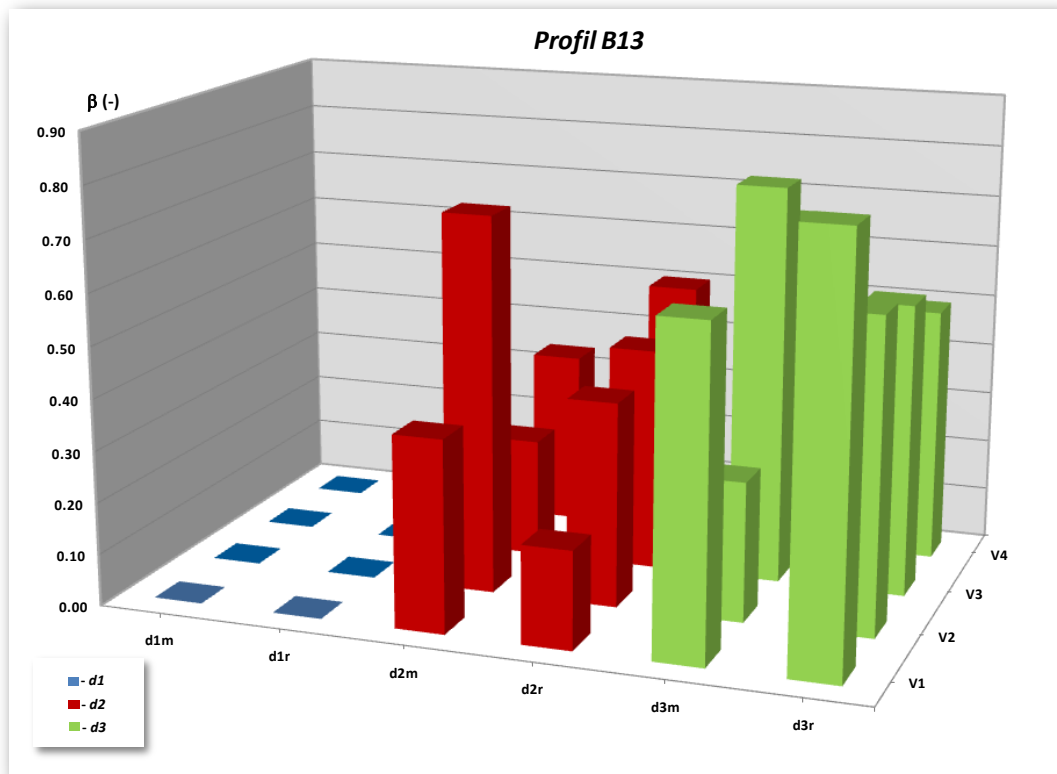
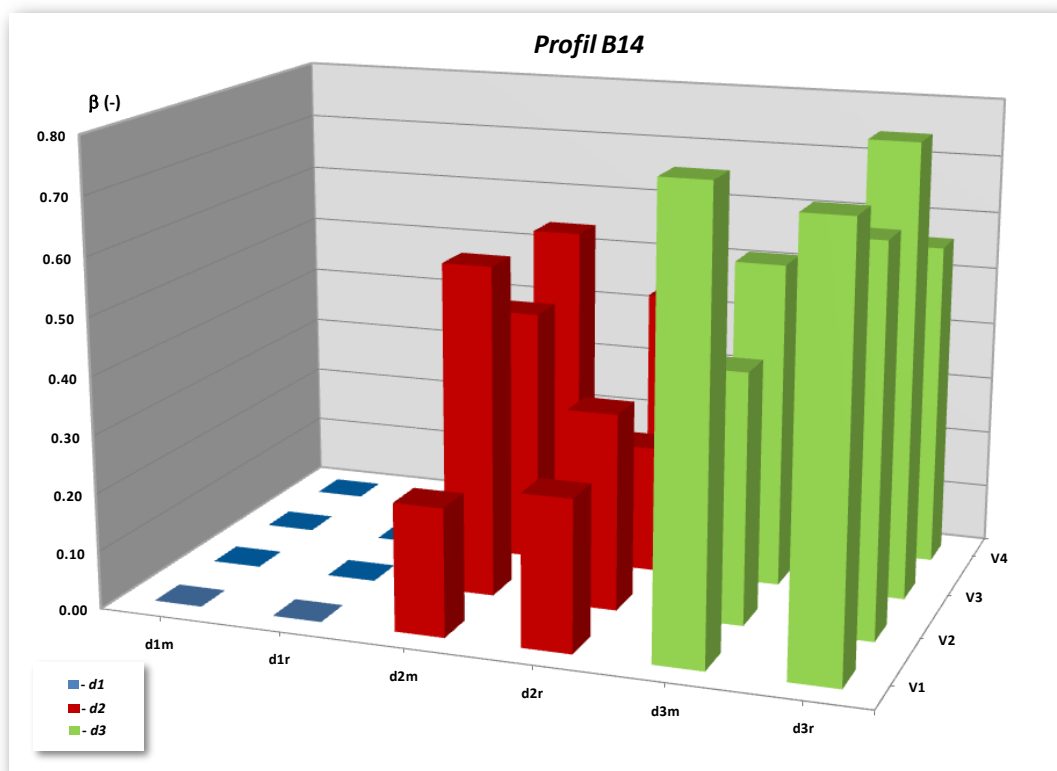
Prilog 15 Zastupljenost trećeg granulometrijskog intervala β_3 duž rečne krivine - reka MissouriPrilog 16 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B2 - reka Missouri

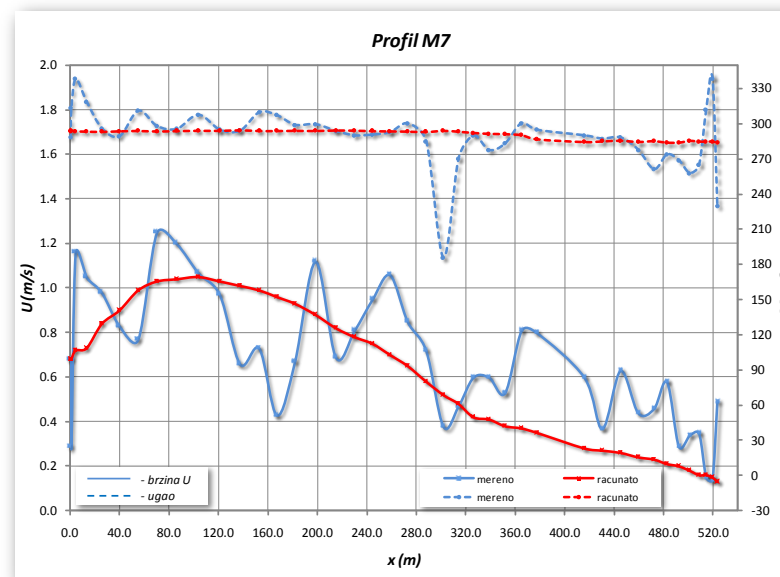
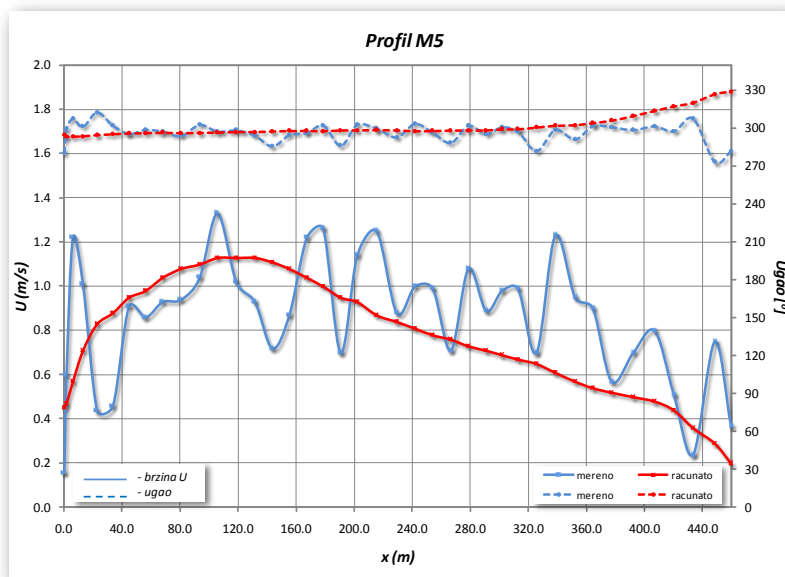
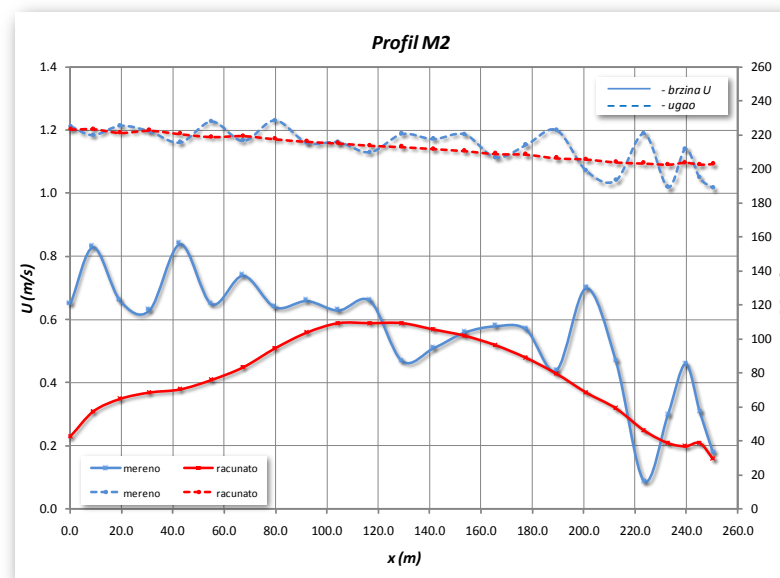
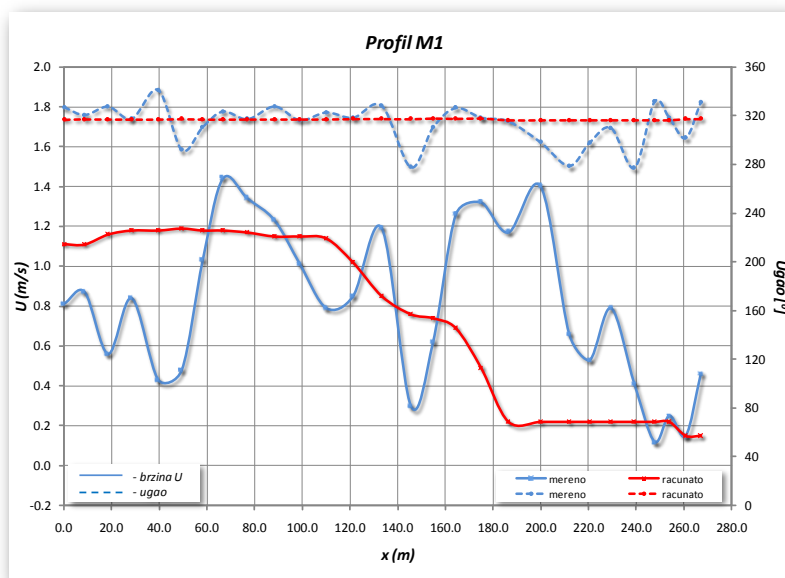


Prilog 17 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B7 - reka Missouri

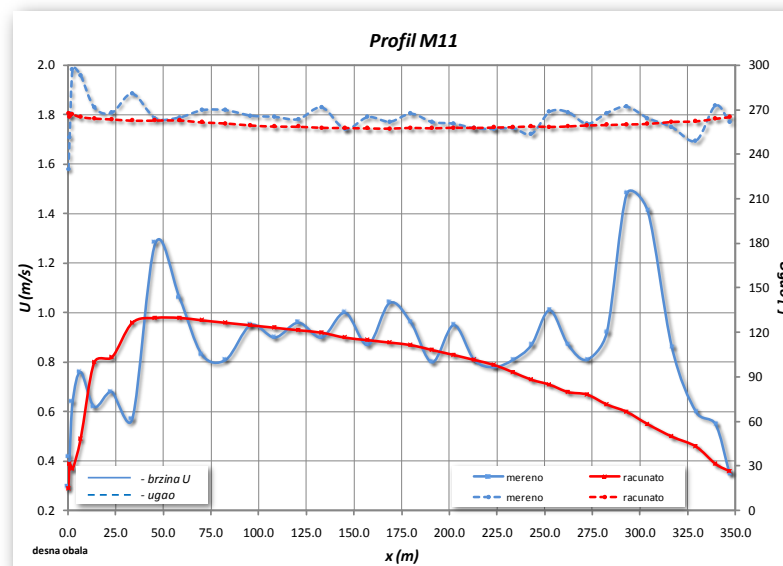
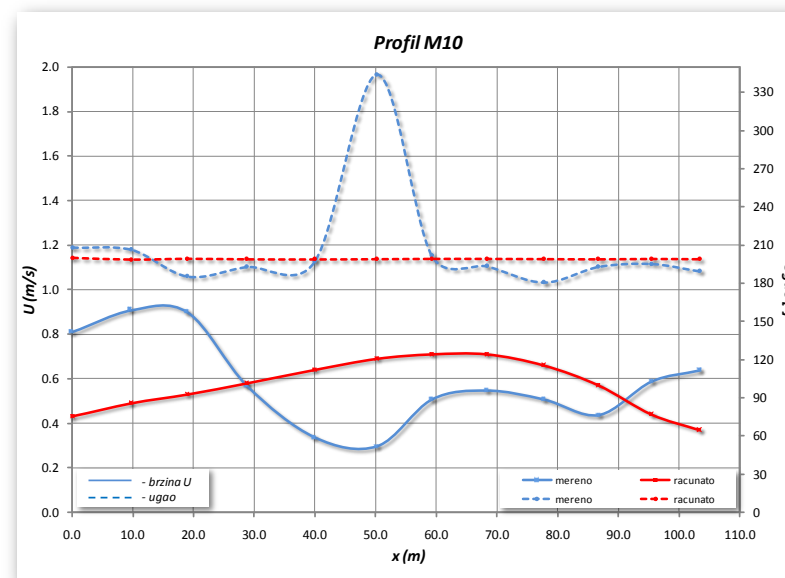
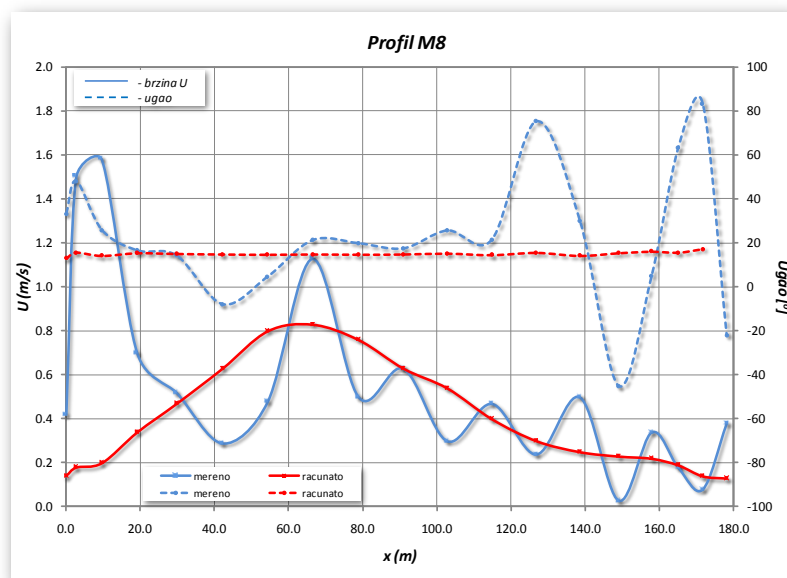


Prilog 18 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B12 - reka Missouri

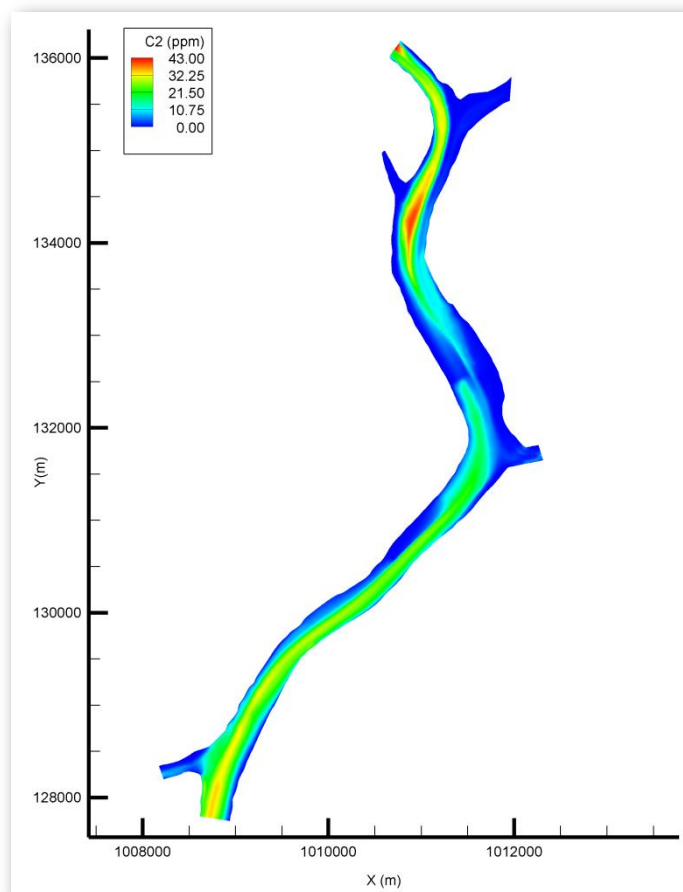
Prilog 19 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B13 - reka MissouriPrilog 20 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil B14 - reka Missouri



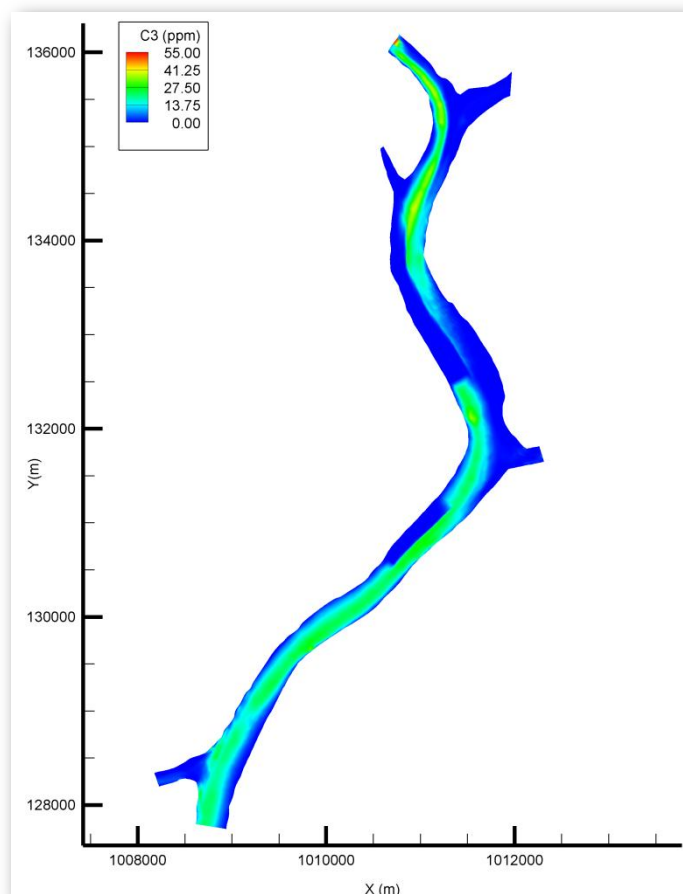
Prilog 21 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile M1, M2, M5 i M7 - reka Atchafalaya



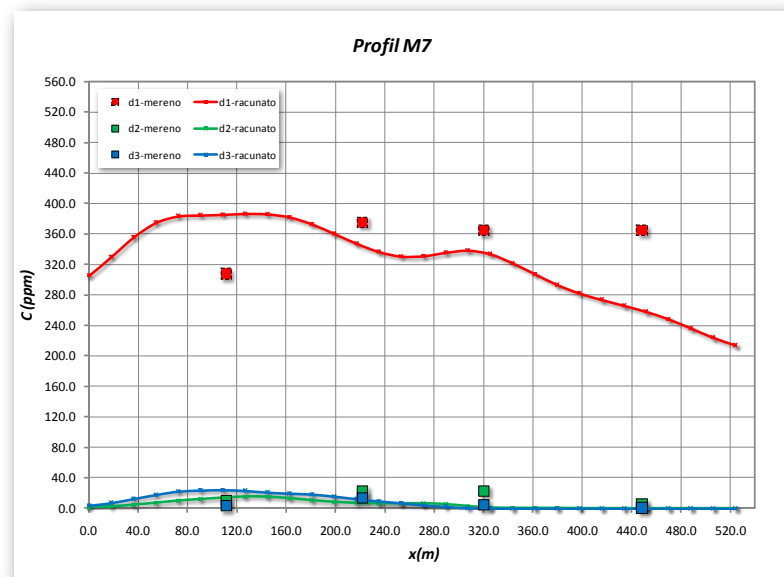
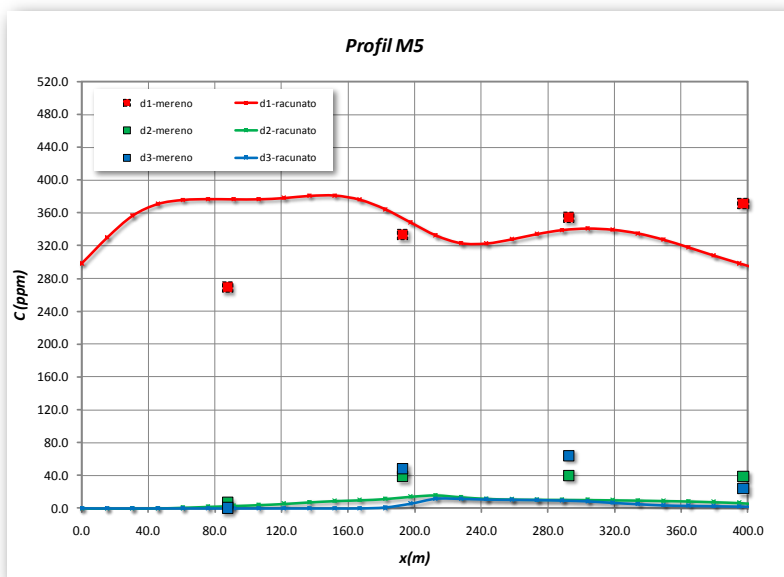
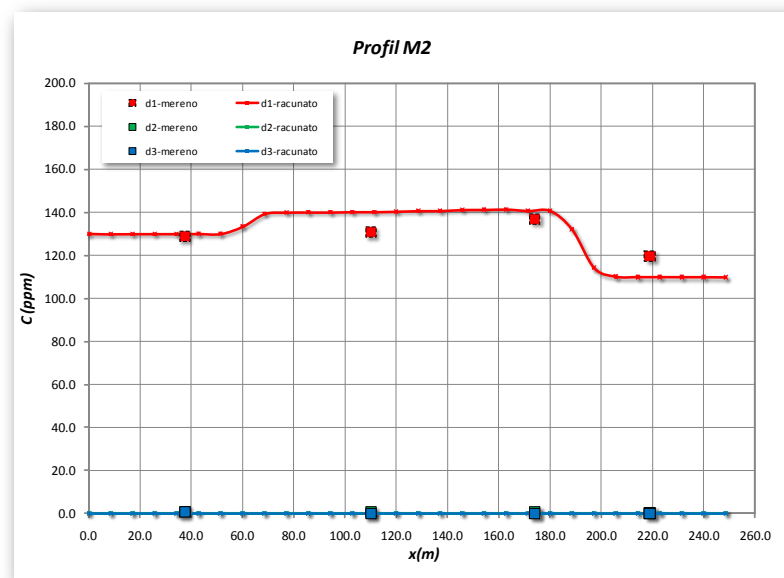
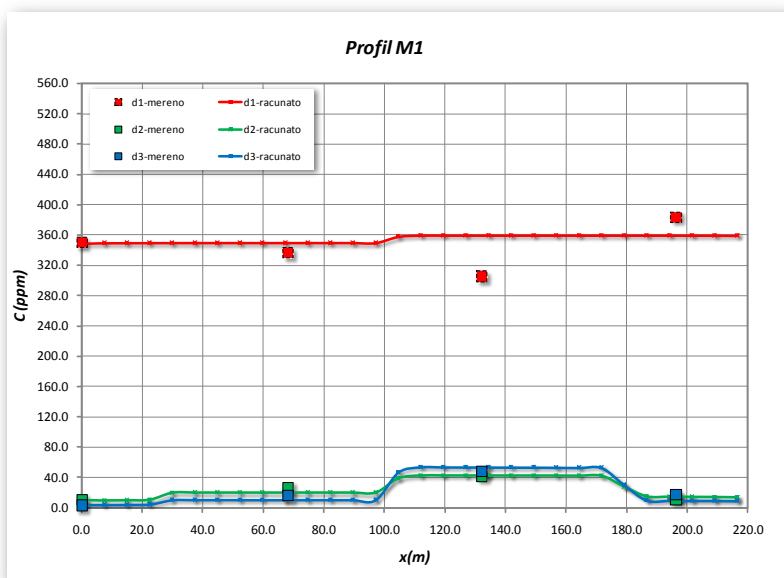
Prilog 22 Poređenje sračunatih brzina i položajnih uglova sa merenim vrednostima za merne profile M8, M10 i M11 - reka Atchafalaya



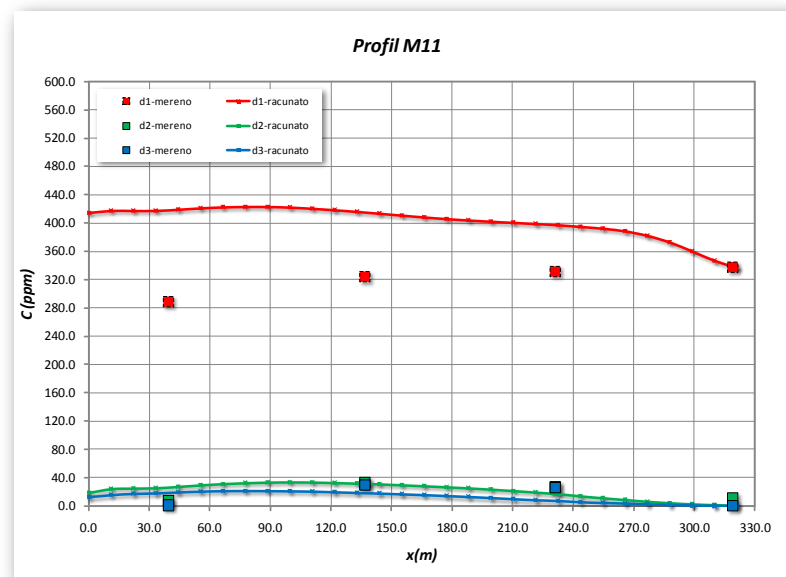
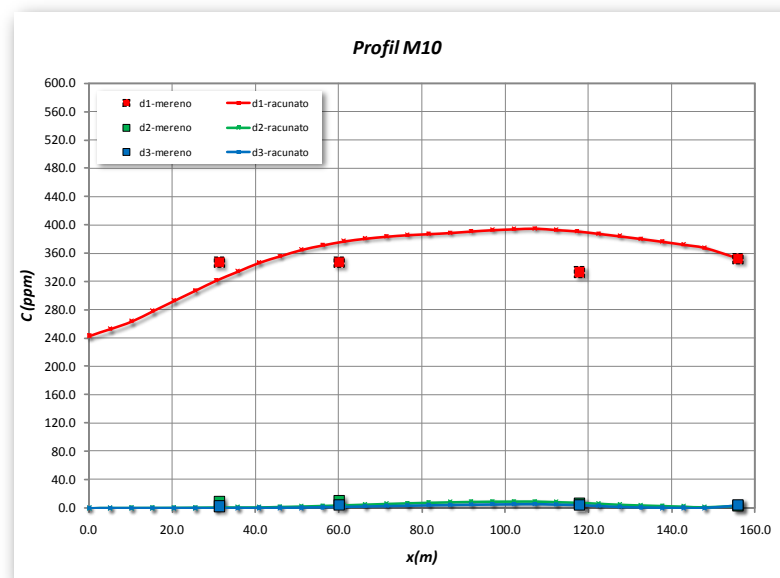
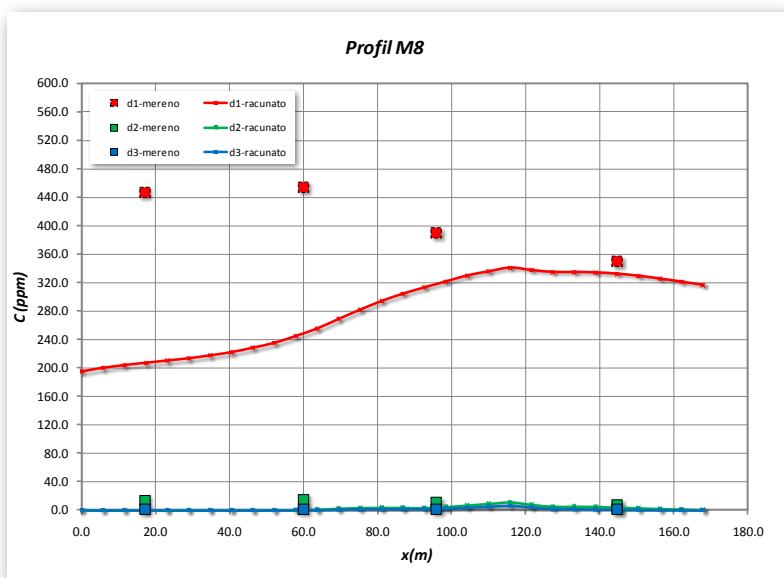
Prilog 23 Dobijeni raspored koncentracije C_2 duž modelirane deonice reke Atchafalaya



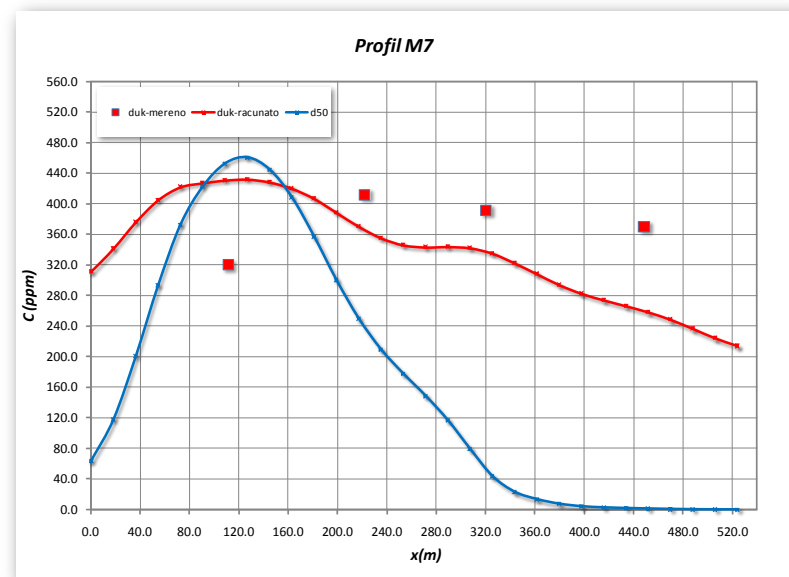
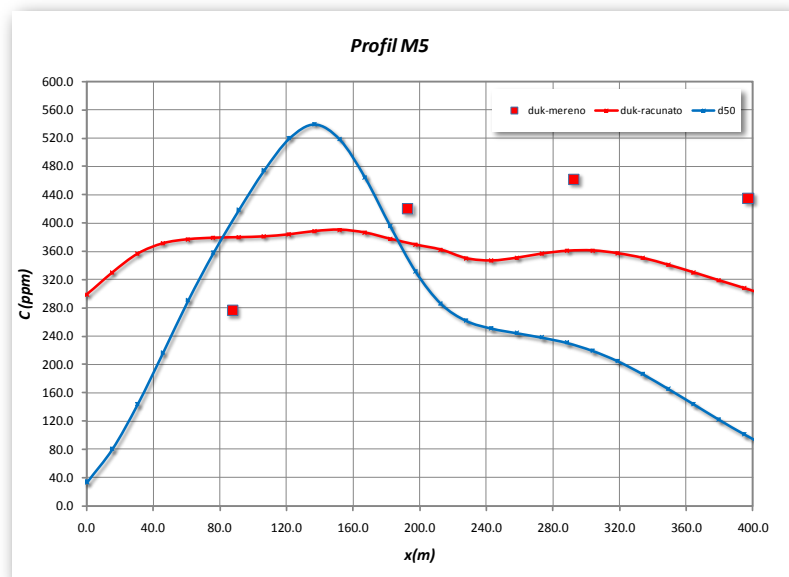
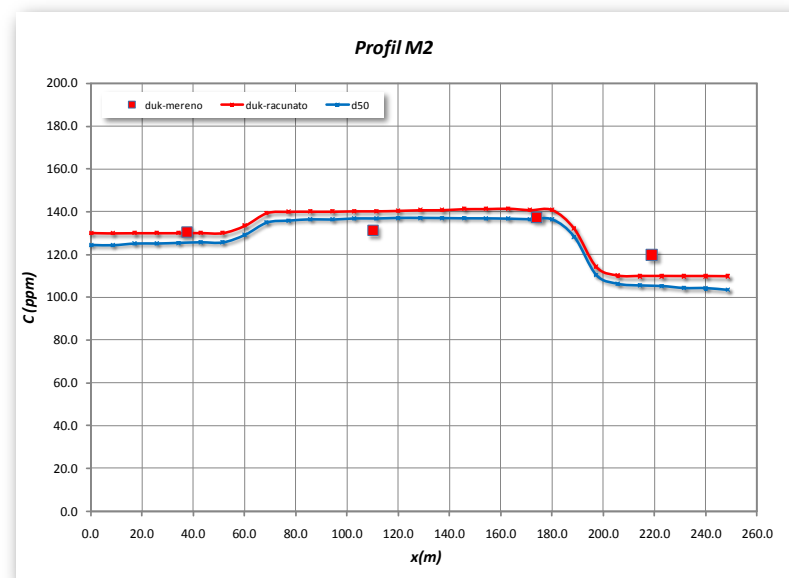
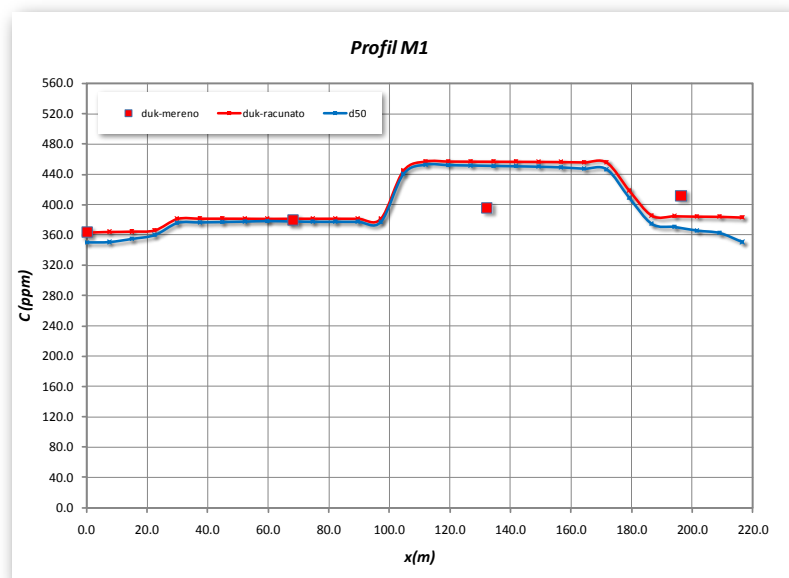
Prilog 24 Dobijeni raspored koncentracije C_3 duž modelirane deonice reke Atchafalaya



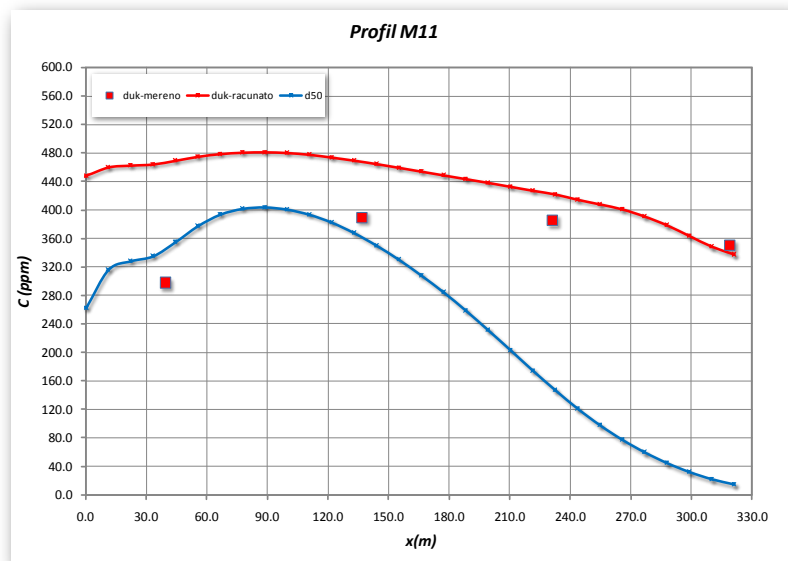
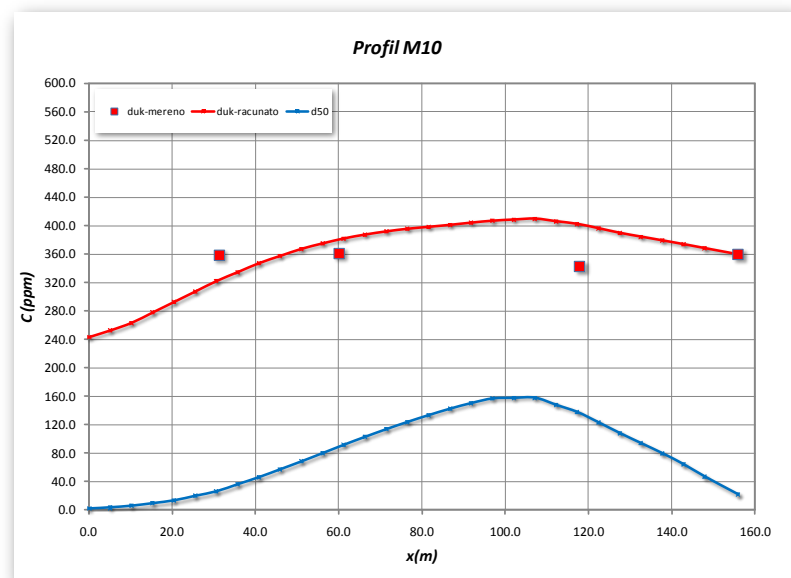
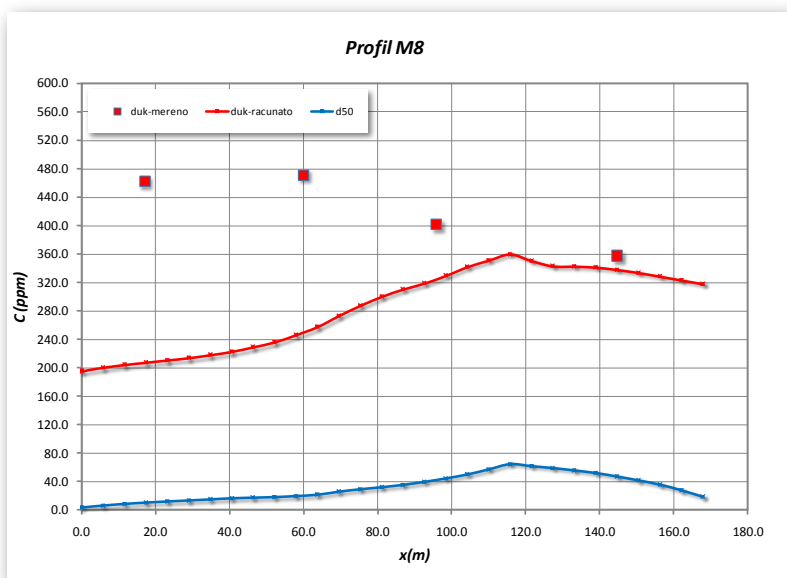
Prilog 25 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile M1, M2, M5 i M7 - reka Atchafalaya



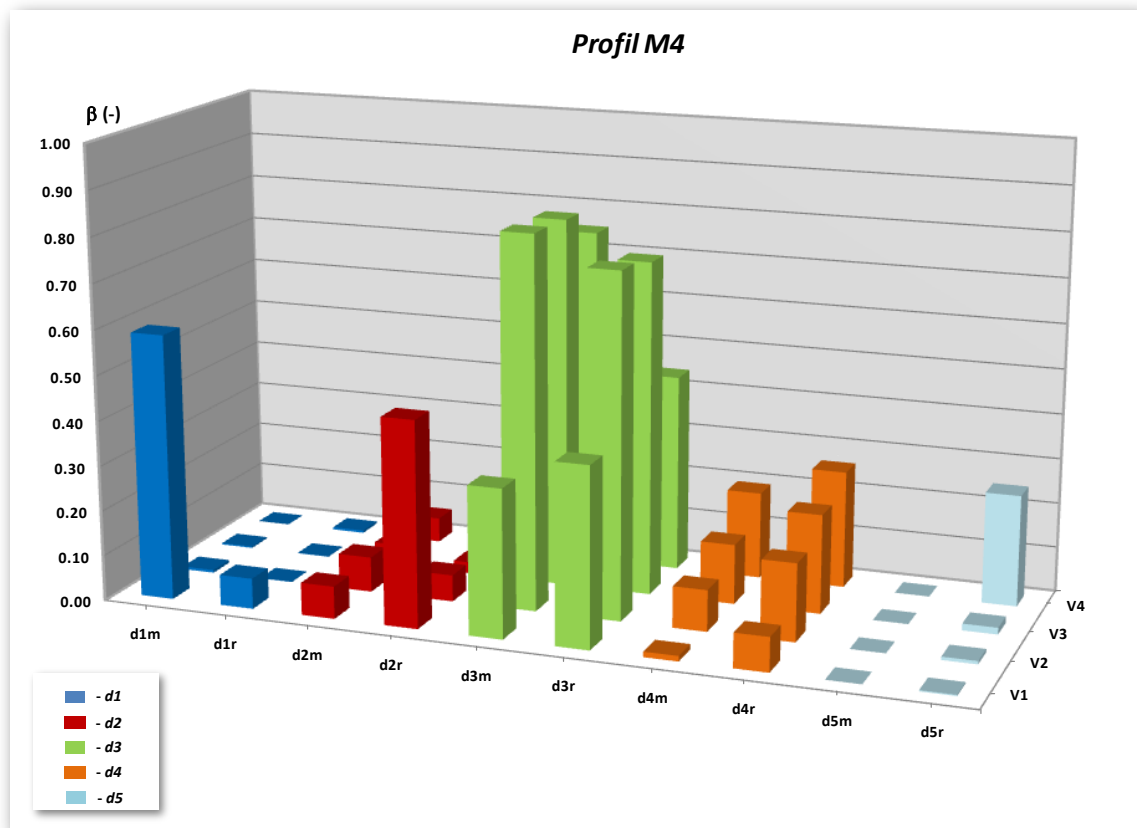
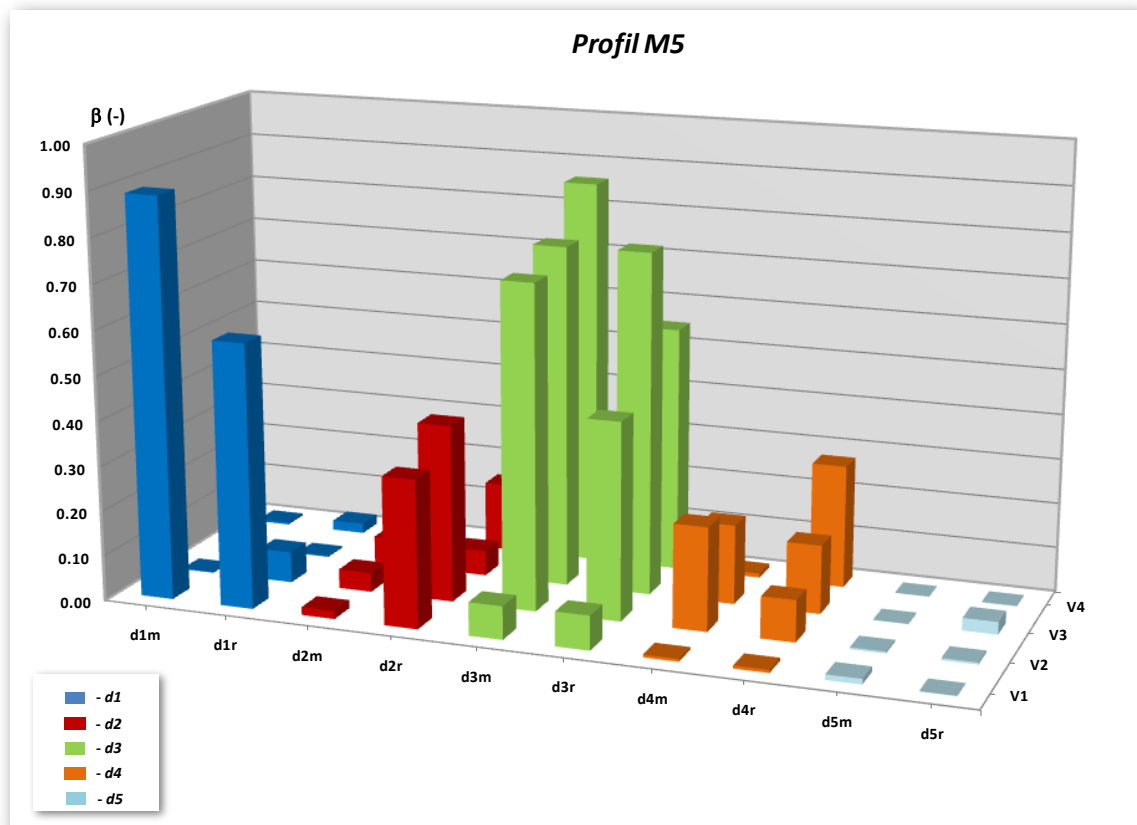
Prilog 26 Poređenje sračunatih koncentracija suspendovanog nanosa po frakcijama sa merenim vrednostima za Profile M8, M10, i M11 - reka Atchafalaya

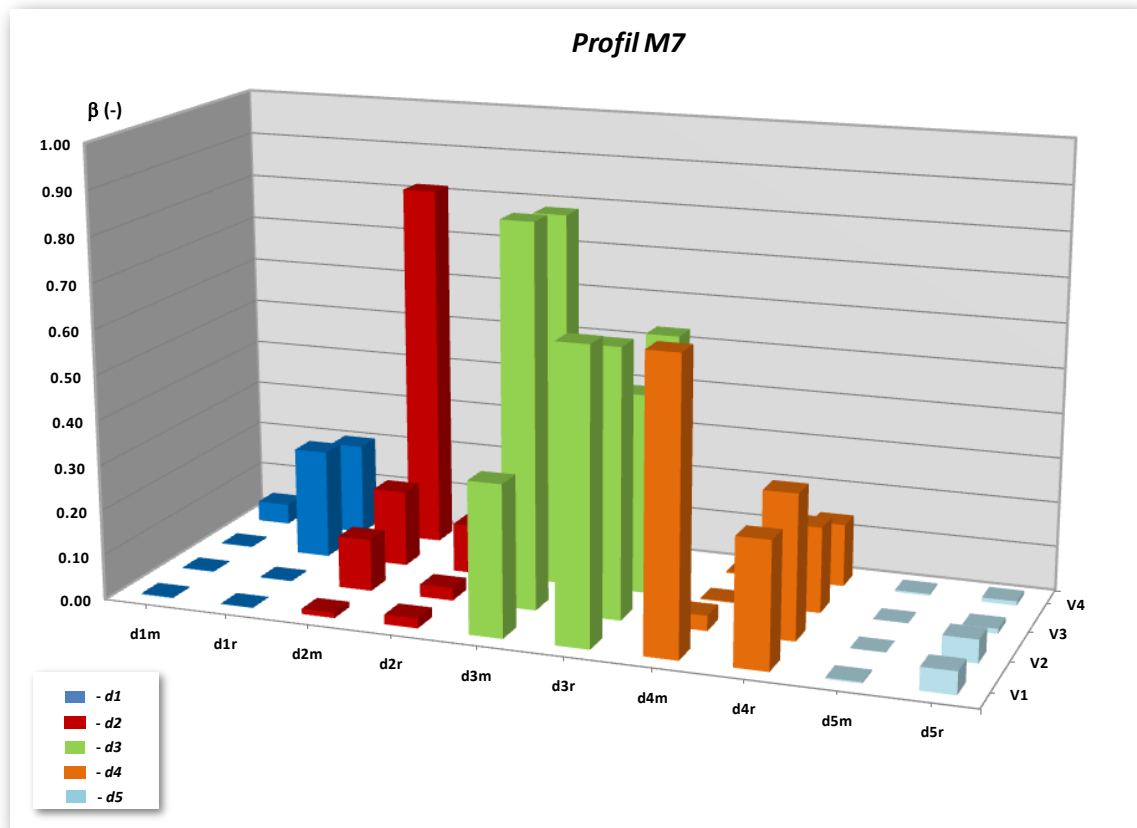
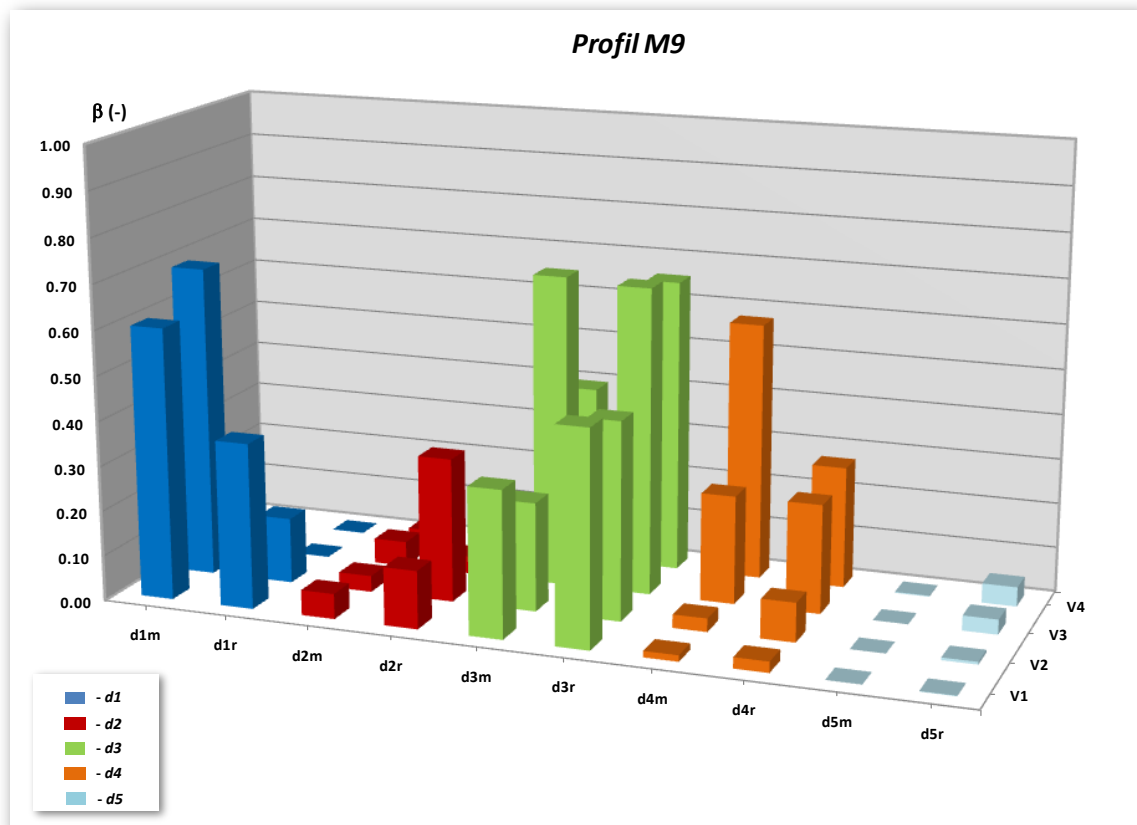


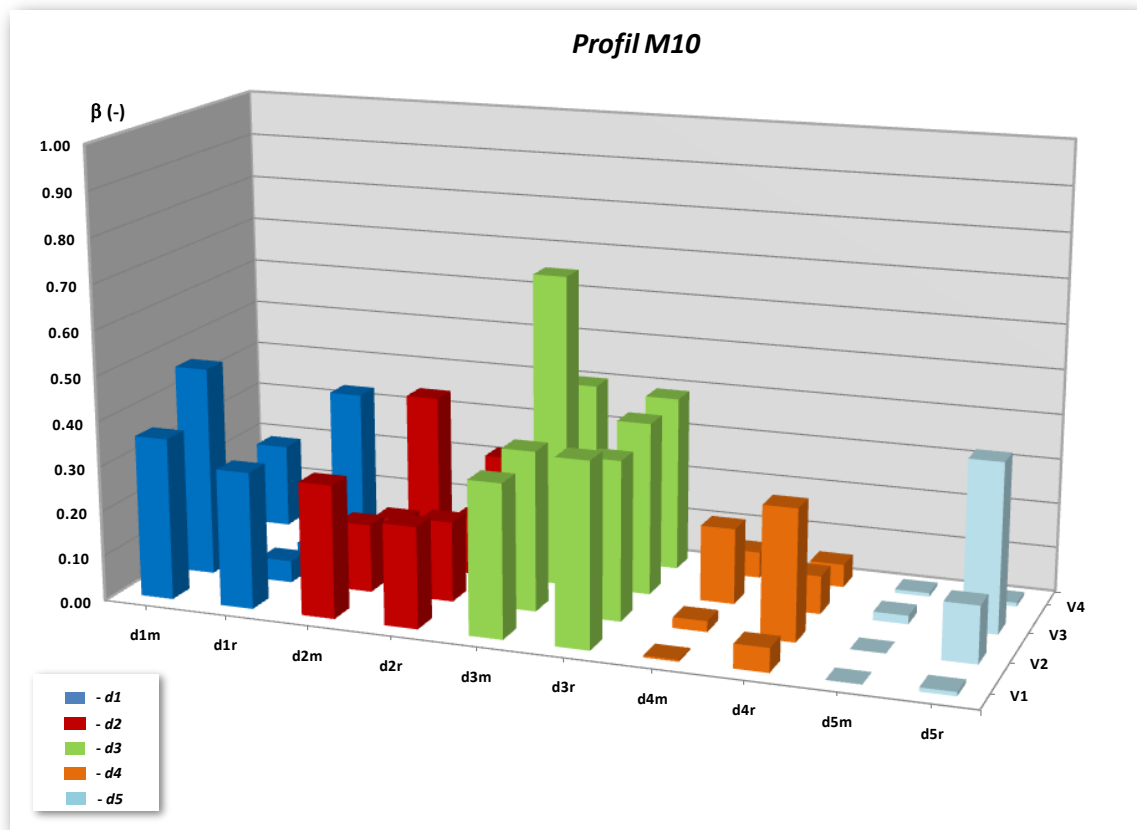
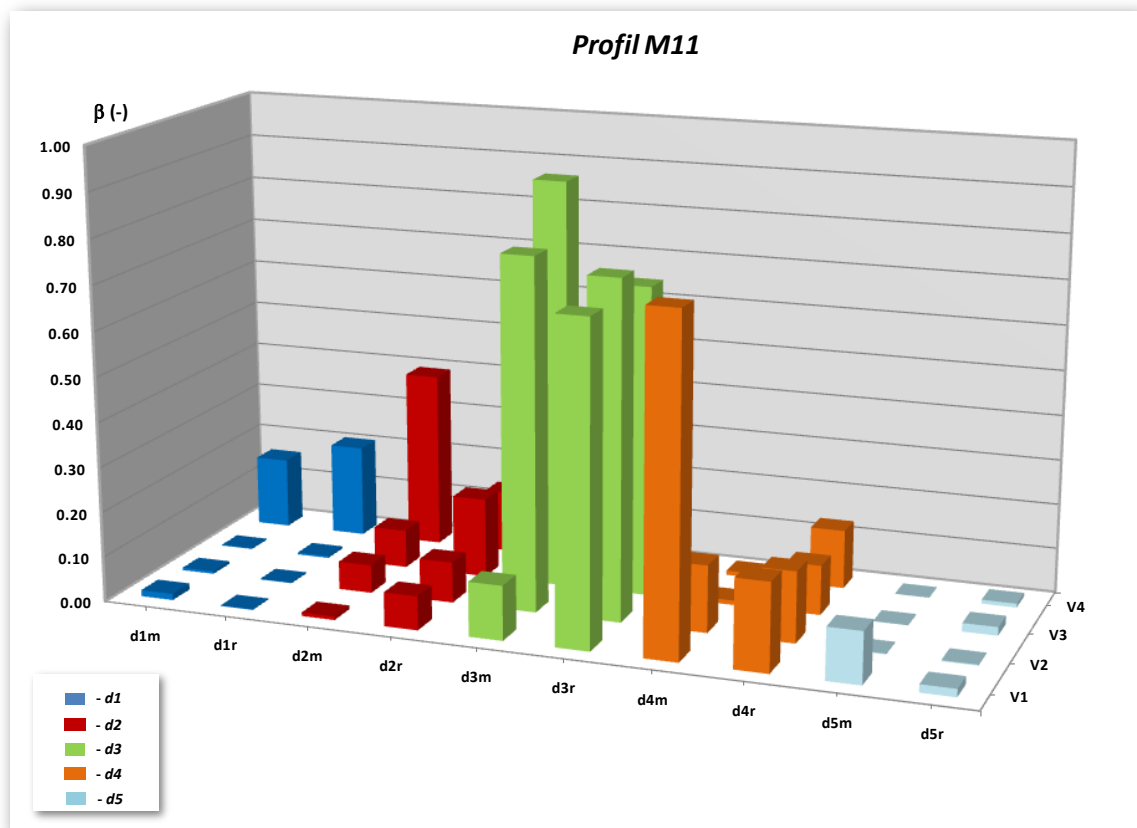
Prilog 27 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile M1, M2, M5 i M7 - reka Atchafalaya

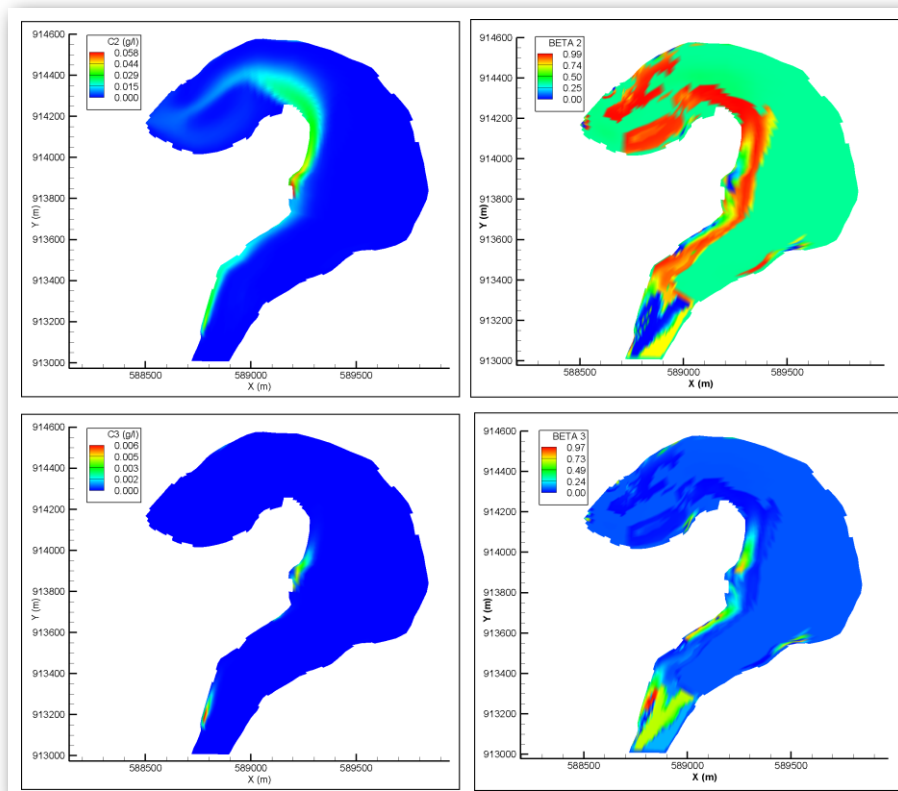


Prilog 28 Poređenje sračunate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa po frakcijama i pri uniformnom prečniku d_{50} sa merenim vrednostima za Profile M8, M10, i M11 - reka Atchafalaya

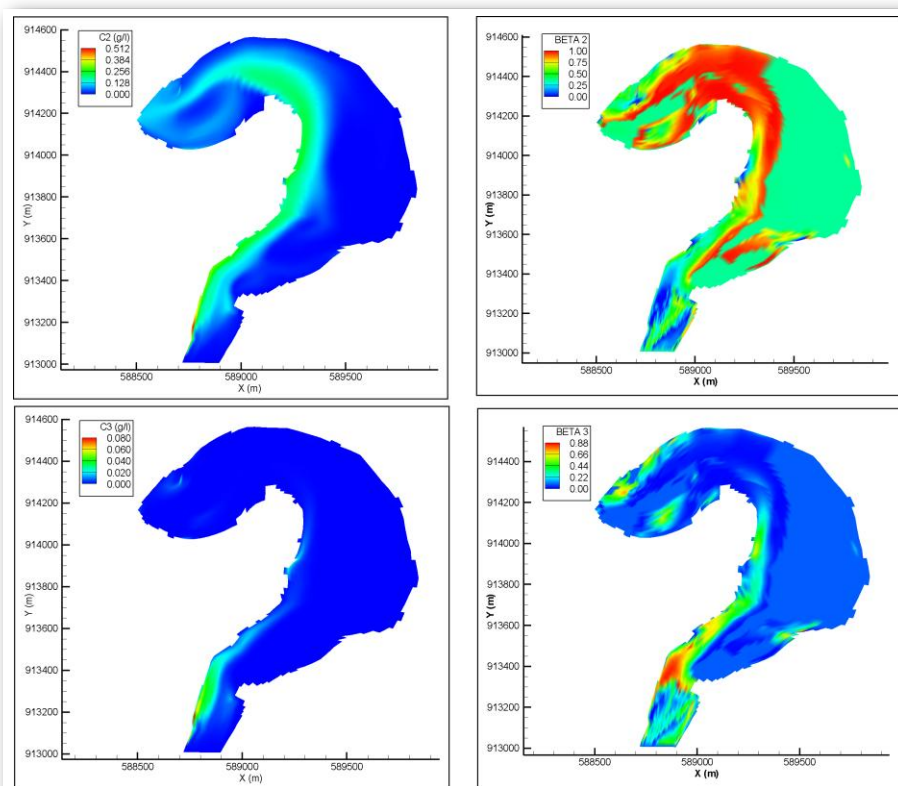
Prilog 29 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M4 - AtchafalayaPrilog 30 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M5 - Atchafalaya

Prilog 31 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M7 - AtchafalayaPrilog 32 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M9 – Atchafalaya

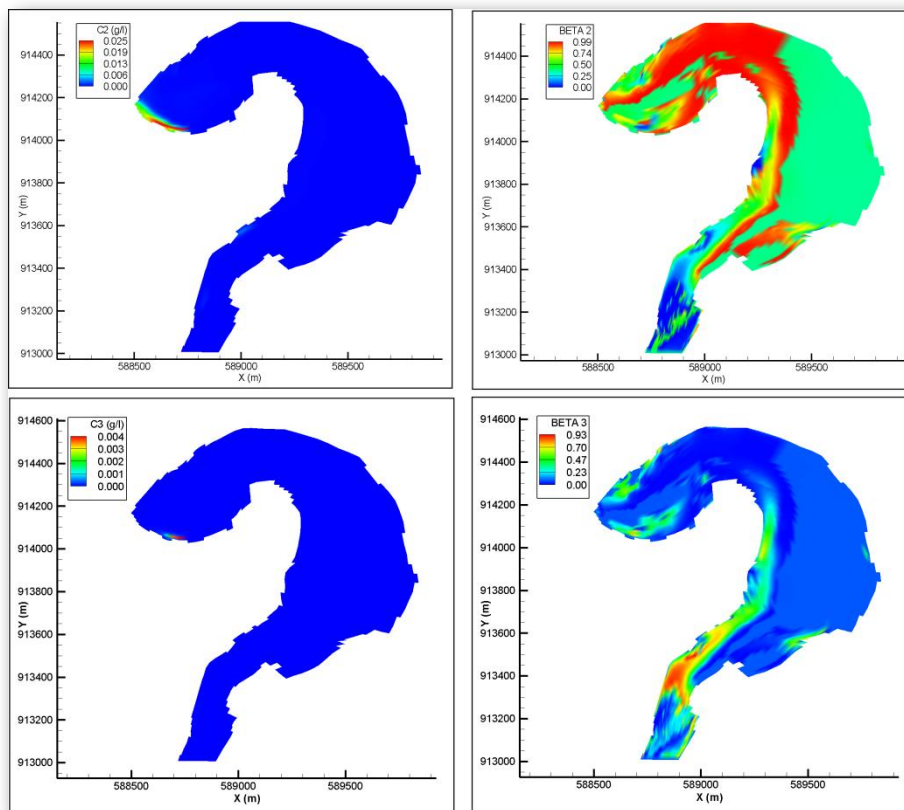
Prilog 33 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M10 – AtchafalayaPrilog 34 Poređenje sračunatih i izmerenih vrednosti parametra β_k za profil M11 – Atchafalaya



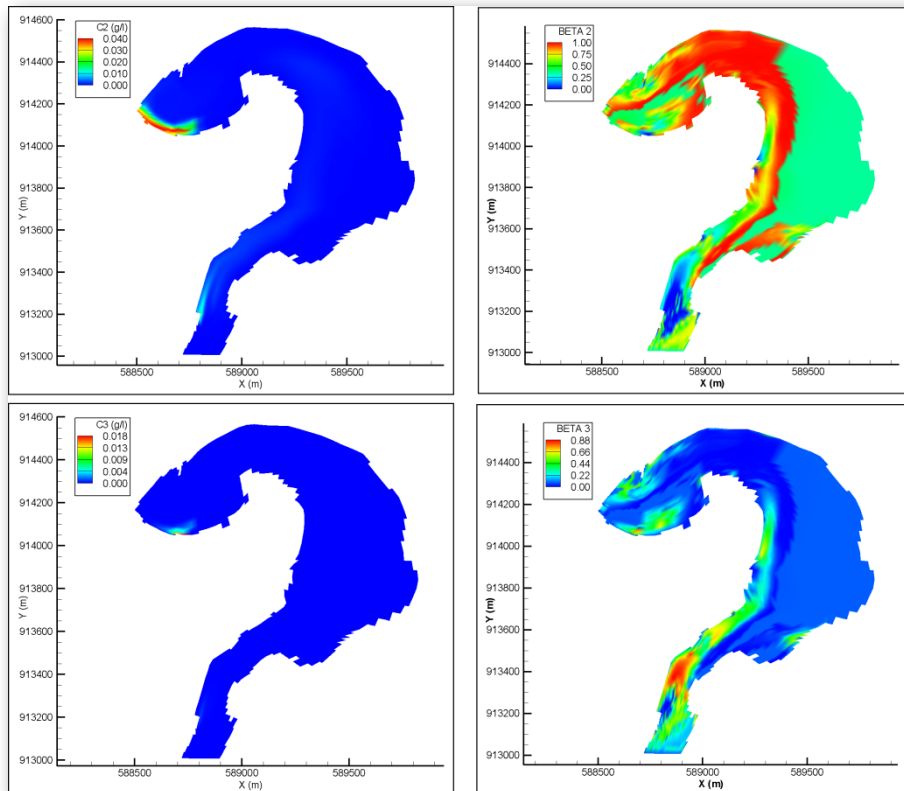
Prilog 35 Dobijeni rasporedi koncentracija i granulometrijske zastupljenosti (β)
za frakcije d_2 i d_3 (početno – ustaljeno stanje) - HE "Zvornik"



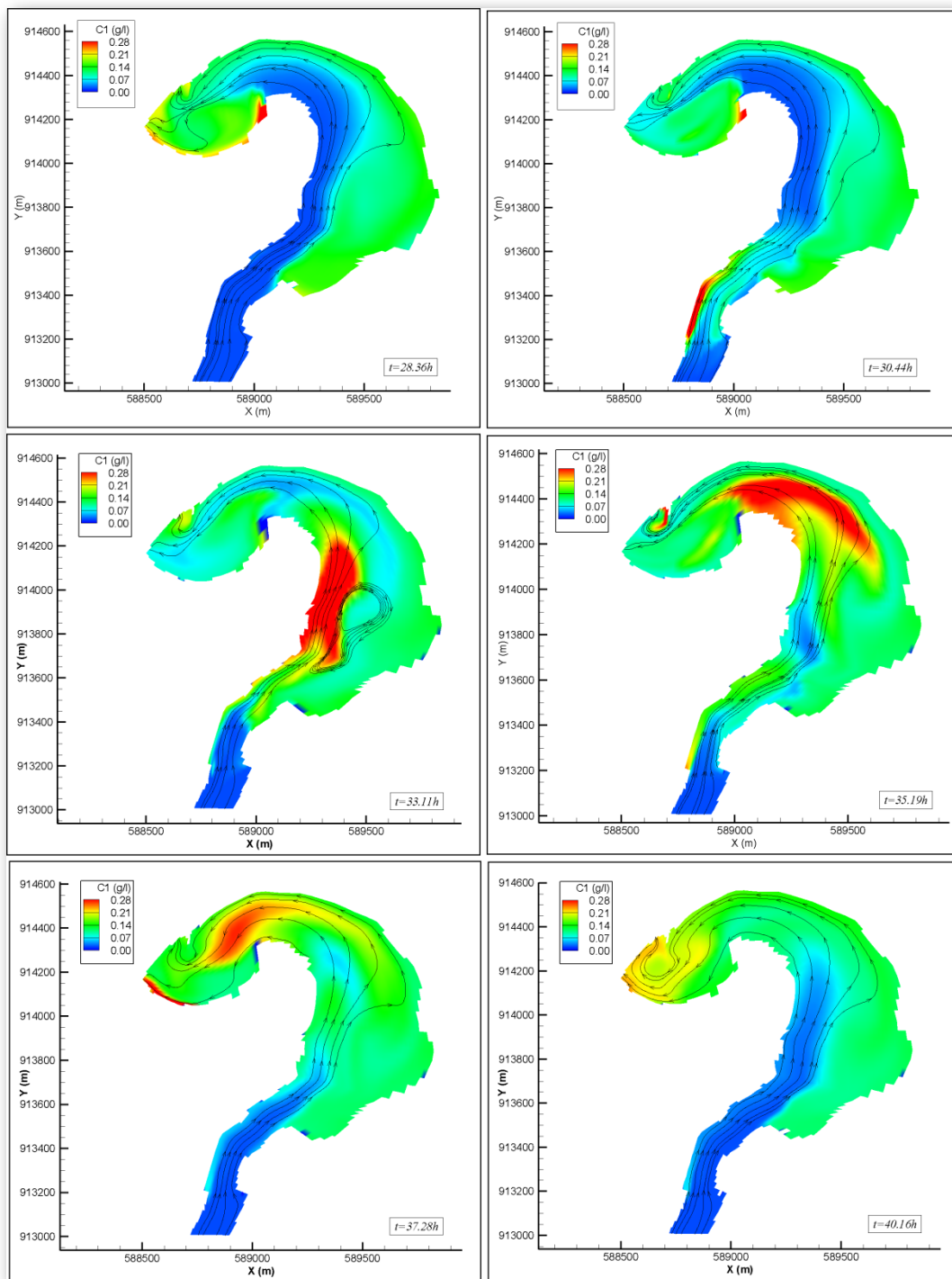
Prilog 36 Dobijeni rasporedi koncentracija i granulometrijske zastupljenosti (β)
frakcija d_2 i d_3 za vremenski presek $t=16h$ - HE "Zvornik"



Prilog 37 Dobijeni rasporedi koncentracija i granulometrijske zastupljenosti (β)
frakcija d_2 i d_3 za vremenski presek $t=28.36h$ - HE "Zvornik"



Prilog 38 Dobijeni rasporedi koncentracija i granulometrijske zastupljenosti (β)
frakcija d_2 i d_3 za vremenski presek $t=40.16h$ - HE "Zvornik"



Prilog 39 Dobijeni rasporedi koncentracija C_1 između analiziranih vremenskih preseka $t=28.36h$ ($Z_v=155.02\text{ mm}$) i $t=40.16h$ ($Z_v=154.00\text{ mm}$) - HE "Zvornik"

Literatura

1. Bagnold, R.A., (1973), "*The Nature of Salitation and 'Bed-Load' Transport in Water*", Proc. R. Soc. Lond., A. 332, pp. 473-504.
2. Bagnold, R.A., (1974), "*Fluid Forces on a Body in Shear-Flow; Experimental Use of 'Stacionary Flow'*", Proc. R. Soc. Lond., A. 340, pp. 147-171.
3. Batinić, B., Milanović, T.,(1997), *Problemi pri skretanju burnog toka - kosi stojeći talas*, Vodoprivreda, Beograd, p. 307- 314.
4. Benque, J.P., Hauguel, A., and Viollet, P.L., (1982), Numerical Models in Enviromental Fluid Mechanics, Engineering Applications of Computational Hydraulics, Vol. II, Pitman Publishing Inc.
5. Benqué, J.P., Cunge, J. A., Feuillet, A., Haguel, A., and Holly, F. M. Jr., (1982), "New Method for Computation of Tidal Currents," *Journal of the Waterways and Harbors Division*, ASCE, Vol. 108, No. WW3, Aug., pp. 396-417.
6. Bouchut, F., Bourdarias, Ch., Perthame, B.,(1996), "*A MUSCL method satisfying all the numerical entropy inequalities*", *Mathematics of Computation*, pp. 1439-1461.
7. Boer, A., van der Schoot, M.S., Bijl H., (2007), "*Mesh deformation based on radial basis function interpolation*", *Computers and Structures*, Vol. 85, Issue 11-14, pp. 784-795.
8. Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O., (1969), Applied Numerical Methods, J. Wiley and Sons.
9. Camenen, B., Larson, M., (2005)," *A general formula for non-cohesive bed load sediment transport*", *Estuarine, Coastal and Shelf Science* 63, pp. 249-260.
10. Cao, Z. X., Wei, L. Y., and Xie, J. H. (1995). "*Sediment-laden flow in open channels from two phase flow viewpoint*", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 121, No. 10, pp. 725–735.
11. Celik, I. and Rodi, W., (1984), "*A deposition-entrainment model for suspended sediment transport*" *Report. SFB 210/T/6*, University of Karlsruhe, Karlsruhe, FRG, 1984.
12. Champman, R.S. and Johnson, B.H. (1996), "*User's Guide for the Sigma Stretched Version of CH3D-WES – a Three Dimensional Hydrodynamic, Salinity, and Temperature Model*", *Hydraulics Laboratory, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS, USA*.
13. Chau, K.W., (1990),"*Application of the Preissmann scheme on flood propagation in river systems in difficult terrain*", *Hydrology in Mountainous Regions. I - Hydrological Measurements; the Water Cycle*, IAHS, Publ. no. 193.

14. Duc, B. M., Rutschmann, P., (2006), "A 3D NUMERICAL MODEL OF GRADED SEDIMENT TRANSPORT IN NONEQUILIBRIUM CONDITION", The 7th Int. Conf. on Hydrosience and Engineering (ICHE-2006), Sep 10 – Sep 13, Philadelphia, USA.
15. Duan, J.G., Nanda, S.K., (2005), "Two-dimensional depth-averaged model simulation of suspended sediment concentration distribution in a groyne field", Journal of Hydrology 327, pp. 426–437.
16. Drew, D.A., Aquino, L.J., (2002), "MOMENTUM BASED MODEL FOR SEDIMENT TRANSPORT", 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York, June.
17. Drew, D.A., (1983), "Mathematical modeling of two-phase flow", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15: 261-291.
18. Elghobashi, S.E., (1994), "On predicting particle-laden turbulent flows", *Appl. Sci. Res.*, 52: 309-329.
19. Ferziger, J.H. and Peric, M., (2002), *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd Edition, Springer, New York.
20. Ferziger, J.H., *Numerical Methods for Engineering Application*, 2nd Edition, Wiley-Interscience, New York.
21. Fletcher, C.A.J., (1991), *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vol. I, Springer, Berlin.
22. Flokstra, C. (1977), "The Closure Problem for Depth-Averaged Two-Dimensional Flow", Waterloopkundig Laboratorium, Delft Hydraulics Laboratory, Publicatio No. 190, November.
23. Garcia, M., ed, (2008), *Sedimentation Engineering: Theories, Measurements, Modeling, and Practice*, ASCE Manuals and Reports of Engineering Practice No. 110, Garcia, M., ed, American Society of Civil Engineers.
24. Garcia, R., Kahawita, R.A., (1986), "Numerical Solution of the St. Venant Equations with MacCormack Finite-Difference Scheme", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.6.
25. Glass, J. and Rodi, W., (1982), "A Higher Order Numerical Scheme for Scalar Transport", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 31, pp. 337-358.
26. Gessler, D., Hall, B., Spasojević, M., Holly, F.M., Pourtaheri, H., Rappelt, N.K., (1999), "Application of 3-Dimensional Mobile Bed, Hydrodynamics Model", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 7, July, pp.737-749.
27. Golub, G.H., van Loan, C., (1990), *Matrix computations*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore.

28. Greimann, B.P., Muste, M., and Holly, F.M. Jr., (1999), "*Two-phase formulation of suspended sediment transport*", Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 37, No. 4, pp. 479-500.
29. Hajdin, G., (2002), *Mehanika Fluida. Knj. 1, Osnove*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.
30. Hayter, E. J., (2006), "*Evaluation of the State-of-the-Art Contaminated Sediment Transport and Fate Modeling System*", U.S. Environmental Protection Agency Office of Research and Development Washington, DC 20460.
31. Helenbrook, B.T.,(2000), "Mesh deformation using the biharmonic operator", Int J Numer Methods Eng., v56. 1007-1021.
32. Holly, F. M., and Preissmann, A., (1977), "Accurate calculation of transport in two dimensions," *J. Hydr. Div.*, ASCE, 103(11).
33. Holly, F.M. Jr. and Rahuel, J.L. (1990), "*New Numerical/Physical Framework for Mobile-Bed Modelling Part I - Numerical and Physical Principles*", Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 27, No. 4, pp. 401-416.
34. Holly, F.M. Jr. and Spasojević, M., (1999), "*Three-dimensional mobile-bed modeling of the Old River Complex, Mississippi River*", *Proc. XXVIIIth IAHR Congress in Graz*, 22-27 August.
35. Holly, F. M. Jr., and Usseglio-Polatera, J. M., (1984), "*Dispersion Simulation in Two Dimensional Tidal Flow*", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, No. 7, July, pp.905-926.
36. Hong-Yuan LEE and Hui-Ming HSIEH, (2003), "*NUMERICAL SIMULATIONS OF SCOUR AND DEPOSITION IN A CHANNEL NETWORK*", International Journal of Sediment Research, Vol. 18, No. 1, 2003, pp. 32-49.
37. Hung, M. C., Hsieh, T. Y., Wu, C. H., and Yang, J. C., (2009), "*Two-Dimensional Nonequilibrium Noncohesive and Cohesive Sediment Transport Model*" *J. Hydr. Engrg.*, Volume 135, Issue 5, pp. 369-382, May 2009.
38. Hsieh, T. Y., and Yang, J. C., (2004), "*Implicit two-step split-operator approach for modelling two-dimensional open channel flow*" *J. Hydrosoci. Hydr. Eng.*, 22(2), 113–139.
39. Ishii, M., (1975), *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, Eyrolles, Paris.
40. Jang, J.H., Ho, H.Y., Yen, C.L.,(2006),"*EFFECT OF LIFT ON BED-SURFACE SEDIMENT SIZE DISTRIBUTION IN CHANNEL BEND*", Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 29, No. 4, pp. 565-579.
41. Jovanović, M., (1998), *Osnove numeričkog modeliranja ravanskih otvorenih tokova*, Građevinski fakultet – Beograd, Beograd.
42. Jovanović, M., (2002), *Regulacija reka*, Građevinski fakultet – Beograd, Beograd.

43. Jia, Y. and Wang, S.Y., (1999), "Numerical model for channel flow and morphological change studies," *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 9, September, pp.737-749.
44. Jie, L., Hesse, M., Ziegler, J , Woods, A. W. , (2005), "An arbitrary Lagrangian Eulerian method for moving-boundary problems and its application to jumping over water", *Journal of Computational Physics*, pp. 289-314, BP Institute, University of Cambridge, Cambridge, February.
45. Kapor, R., (1998), "Matematički model tečenja vode u plitkim oblastima strujanja sa osnovnim jednačinama osrednjenim po prostoru", Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu Građevinski Fakultet, Beograd, Januar.
46. Karim, M.F., Holz, F.M., Jr., and Yang, Y.C., (1987), "IALUVIAL : Numerical Simulation of Mobil-Bed Rivers; Part I, Theoretical and Numerical Principles," Iowa Institute of Hydraulic Research Report No. 309, April 1987, University of Iowa, Iowa City, Iowa.
47. Karim, M. F., Holly, F. M., and Kennedy, J. F. (1983). "Bed armoring procedures in IALLUVIAL and application to Missouri River" *IIHR Rep. No. 269*, Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa.
48. Kassem, A., and Chaudhry, M. H., (2005), "Effect of Bed Armoring on Bed Topography of Channel Bends", *J. Hydr. Engrg.*, Volume 131, Issue 12, pp. 1136-1140, December 2005.
49. Keh-Chia, Y. and Chih-Tsung, H., (2003), "Depth-averaged modeling for channel degradation and aggradation", *Study*, National Science Council of the Republic of China.
50. KOLDAHOZA, M., Falconer, R.A., (2003), "THREE-DIMENSIONAL GEOMORPHOLOGICAL MODELLING OF ESTUARINE WATERS", *International Journal of Sediment Research*, Vol. 18, No. 1, 2003, pp. 1-16.
51. Kostić, S., Parker G., (2003), "PHYSICAL AND NUMERICAL MODELING OF DELTAIC SEDIMENTATION IN LAKES AND RESERVOIRS", XXX International Association of Hydraulic Research Congress Thessaloniki, Greece, August 24-29.
52. Kos'yan, R.D., Divinskiy, B.V., Krylenko, M.V., Vincent, C.E.,(2007), "Modelling of the vertical distribution of suspended sediment concentration under waves with a group structure", Russian Foundation of Basic Research, grant № 05-05-64145 and grant NATO CLG98/587, March.
53. Khosronejad, A., Rennie, C.D., Neshabouri, A.A. s. , Townsend, R.,(2006), "3D NUMERICAL MODELLING OF FLOW AND SEDIMENT TRANSPORT IN CHANNEL BEND", 7th International Conference on Hydroinformatics, Nice, FRANCE.

54. Kubatko, E.J., Westerink, J.J., Dawson, C., (2004), "AN UNSTRUCTURED GRID MORPHODYNAMIC MODEL WITH A DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR BED EVOLUTION", The 3rd International Workshop on Unstructured Grid Numerical Modelling of Coastal Shelf and Ocean Flows, Toulouse, France, September 20-22.
55. Kurganov, A., Levy, D., (2000), "A THIRD-ORDER SEMIDISCRETE CENTRAL SCHEME FOR CONSERVATION LAWS AND CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS", SIAM J. Sci. Comput., pp. 1461–1488.
56. Kurganov, A., Tadmor, E., (2000), "New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations", J. Comput. Phys., pp. 241–282.
57. Leonard, B.P., (1979), "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, pp. 59-98.
58. Lin, B. and Falconer, R.A., (1996), "Numerical modeling of three-dimensional suspended sediment for estuarine and coastal waters", Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 34, No. 4, pp. 435-456.
59. Liang, B., Li, H., Lee, D., (2007), "Numerical study of three-dimensional suspended sediment transport in waves and currents", Ocean Engineering 34, pp. 1569–1583.
60. Lynch, D., O'Neill, K., "Elastic grid deformation for moving boundary problems in two space dimensions", In : Wang S, editor, Finite elements in water resources, 1980.
61. Marella, S., Krishnan, S., Liu H., Udaykumar, H.S., (2005), "Sharp interface Cartesian grid method I: An easily implemented technique for 3D moving boundary computations", Journal of Computational Physics, pp. 1-31, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Iowa, Iowa City, March.
62. Marion, A., Boxall, J.B., Guymer, I., (2003), "Transverse mixing in sinuous natural open channel flows", Journal of Hydraulic Research Vol. 41, No. 2, pp. 153–165.
63. Minh Duc, B., Wenka, Th., and Rodi, W, (1998), "Depth-average numerical modeling of flow and sediment transport in the Elbe River," *Proc. 3rd Int. Conf. on Hydrosience and Engineering*, Cottbus/Berlin, Aug. 31-Sept. 3.
64. Muste, M., Yu, K., and Spasojevic, M., (2004a), "Practical aspects of ADCP data use for quantification of mean river flow characteristics; Part I: moving-vessel measurements," *Flow Measurement and Instrumentation*, 15 (2004), pp. 1–16
65. Ni, H.Q., Huang, Z.C., Zhou, L.X., and Zhou, J.Y., (1996), "Numerical simulation of Sedimentation using a two-fluid model of turbulent liquid solid flows", Flow Modeling and Turbulence Measurements VI, Chen, Hih, Lienau, and Kund eds., Balkema, Rotterdam, 781-788.
66. Obušković, Z. (odgovorni projektant), (2007), "HIDRAULIČKO-MORFOLOŠKO-PSAMOLOŠKE KARAKTERISTIKE AKUMULACIJE ZVORNIK", ENERGOPROJEKT – HIDROINŽENJERING, A.D. Beograd.

67. Papa, M., Egashira, S., Itoh, T., (2004), "Critical conditions of bed sediment entrainment due to debris flow", *Natural Hazards and Earth System Sciences* 4, pp. 469–474.
68. Prasad, R.S., Svendsen, I.A., (2003), "Moving shoreline boundary condition for nearshore models", *International Journal for Coastal, Harbour and Offshore Engineering*, pp. 239-261, Department of Civil Engineering, College of Engineering, CACR, University of Delaware, Newark, June.
69. Preissmann, A., (1961), "Propagation des intumescences dans les canaux et rivières", First Congress of the French Association for Computation, Grenoble, France.
70. Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., *Numerical recipes*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
71. Radojković, M., Klem, N., (1989), *Primena računara u hidraulici*, Građevinska knjiga, Beograd.
72. Rastogi, A.K., Rodi, W., (1986), "Predictions of Heat and Mass Transfer in Open Channels", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 112, No.5.
73. Richmond, M.C., Chen, H.C. and Patel, V.C., (1986), "Equations of Laminar and Turbulent Flows in General Curvilinear Coordinates", IIHR Report No. 300, Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa City, Iowa, U.S.A.
74. Roache, P.J., (1972), *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico.
75. Rodi, W., (1980), "Turbulence Models and their Application in Hydraulics", IAHR.
76. Rodi, W. (1993), *Turbulence models and their application in hydraulics*, 3rd edition, A.A. Balkema, Rotterdam, The Netherlands
77. Saad, Y., Shultz, M.H., (1986), "GMRES: a generalized residual algorithm for solving non-symmetric linear systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, pp. 856-869.
78. Shimizu, Y., Yamaguchi, H., and Itakura, T., (1990), "Three-dimensional computation of flow and bed deformation", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 9, September, pp. 1090-1108.
79. Simmonds, J.G., (1994), *A Brief on Tensor Analysis*, Springer, New York.
80. Spasojević, M., (1988), "Numerical Simulation of Two-Dimensional (Plan-View) Unsteady Water and Sediment Movement in Natural Watercourses", Ph.D. Thesis, University of Iowa, Iowa City, Iowa.
81. Spasojević, M. and Holly, F.M. Jr., (1990a), "2-D bed evolution in natural watercourses - New simulation approach", *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 4, July/August, pp. 425-443.

82. Spasojević, M. and Holly, F.M. Jr., (1990b), "*MOBED2 - Numerical simulation of two-dimensional mobile-bed processes*", Iowa Institute of Hydraulic Research Technical Report No. 344, The University of Iowa, Iowa City, Iowa, October.
83. Spasojević, M. and Holly, F.M., Jr., (1993), "*Three-dimensional numerical simulation of mobile-bed hydrodynamics*", Iowa Institute of Hydraulic Research Technical Report No. 367, The University of Iowa, Iowa City, Iowa; December, also as *Contract Report HL-94-2*, Waterways Experimental Station, Vicksburg, August, 1994.
84. Spasojević, M. and Holly, F.M., Jr., (2000), "*Field data and 3D mobile-bed modeling: Help or hindrance?*", Proc. Hydroinformatics 2000, Fourth International Conference on Hydroinformatics, Iowa City, 23-27 July.
85. Spasojevic, M., Muste, M., and Holly, F.M. Jr., (2001), "*3-D modeling of the Missouri River at Leavenworth Bend*" ,IIHR Limited Distribution Report No. 298, The University of Iowa, Iowa City, Iowa, November.
86. Spasojević, M. and Muste, M., (2002), "*Numerical model study of Berwick Harbor, Morgan City, Louisiana*" ,IIHR Technical Report No. 422, The University of Iowa, Iowa City, Iowa, April.
87. Spasojević, M., and Holly, F.M., (2007), "Two- and Three-Dimensional Numerical Simulation of Mobile-Bed Hydrodynamics and Sedimentation," Chapter 15 in Sedimentation Engineering: Theories, Measurements, Modeling, and Practice, ASCE Manuals and Reports of Engineering Practice No. 110, Garcia, M., ed, American Society of Civil Engineers.
88. Spasojević, M. and Holly, F.M., Jr., (1997), "*Improvements in the CH3D non-cohesive sediment-processes modeling*", Draft Report, The University of Iowa, Iowa City, Iowa, February.
89. Spasojević, M., (2001), "*NUMERICAL STABILITY OF THE HYDRODYNAMIC COMPUTATIONS IN THE CH3D-SED CODE*", Limited distribution Report No. 297, The University of Iowa, Iowa City, Iowa, November.
90. Spasojević, M., (2001), "*CH3D-SED PROGRAM ENHANCEMENTS-Simulation of a Submerged-Dredge System Dredging-Related Source Term A Space-Variable Friction Coefficient*", Limited distribution Report No. 298, The University of Iowa, Iowa City, Iowa, November.
91. Spasojević, M., (1998), "*CH3D-SED COMPUTATIONAL MODELING OF THE OLD RIVER CONTROL COMPLEX*", Draft report, The University of Iowa, Iowa City, Iowa, February.
92. Spasojevic, M., (1996), *Numerička Hidraulika*, Građevinski fakultet u Subotici Univerzitet u Novom Sadu, Subotica.
93. Soulis, J.V., (2002), "*A fully coupled numerical technique for 2D bed morphology calculations*", International Journal for Numerical Methods in Fluids, John Wiley & Sons, Ltd., Vol.38, pp. 71-98.

94. Sonnenveld, P., (1989), “ *CGS, a fast Lanczos type solver for non symmetrical linear systems*”,SIAM J.Sci. Stat. Comput., pp. 36-52.
95. Soulsby, R. L., Damgaard, J.S., (2005),” *Bedload sediment transport in coastal waters*”, Coastal Engineering 52 , pp. 673–689.
96. Simpsona, G., Castellort, S.,(2006),” *Coupled model of surface water flow, sediment transport and morphological evolution*”, Computers & Geosciences 32, pp. 1600–1614.
97. Slavić, M.(odgovorni projektant), (1991), ”ISTRAŽNI RADOVI ZASUTOSTI I ISPIRANJA AKUMULACIJE HE ZVORNIK“, ENERGOPROJEKT – HIDROINŽENJERING”, Beograd.
98. Tilston, M.,(2005), “*Three-dimensional flow structure, turbulence and bank erosion in a 180° meander loop*”, Thesis, Université de Montréal, Département de Géographie Faculté d’Arts et Sciences, Juin.
99. Thonon, I., Jong, K., Perk, M., Middelkoop, H., (2007),” *Modelling floodplain sedimentation using particle tracking*”, HYDROLOGICAL PROCESSES 21, John Wiley & Sons, Ltd., pp. 1402–1412.
100. Thomas, M. Ravens, A., Richard, A. J., (2006),” *Computational Fluid Dynamics Analysis of Flow in a Straight Flume for Sediment Erodibility Testing*, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol. 132, No. 6, November 1, ASCE, pp. 457–461.
101. van den Vorst, H.A., (1992), BI-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BI-CGfor the solution of non-symmetric linear systems, SIAM J.Sci. Stat. Comput., pp. 631-644.
102. van Rijn, L.C., (1984a), "*Sediment transport, Part I: Bed load transport*", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, No. 10, pp. 1431-1456.
103. van Rijn, L.C., (1984b), "*Sediment transport, Part II: Suspended load transport*" ,*Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 110, No. 11, pp. 1613-1641.
104. van Rijn, L. C. (1986), "*Mathematical modeling of suspended sediment in nonuniform flow* " ,*Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 112, No.6, June, pp. 433–455.
105. van Rijn, L. C. (1987), "*Mathematical modeling of morphological processes in the case of suspended sediment transport*" ,Delft Hydraulics Communication No. 382, June.
106. Vincent, S., Caltagirone, J.P., Bonneton, P., (2001), “ *Numerical modeling of bore propagation and run up on sloping beaches using a McCormack TVD scheme*”, *Journal of hydraulic research*, vol. 39, br. 1
107. Villaret, C. and Davies, A.C., (1995), "*Modeling sediment-turbulent flow interactions*", *Appl.Mech. Res.*, 48(9), 601-609.

108. Wu, W., Rodi, W., and Wenka, T, (2000), "*3D numerical modeling of flow and sediment transport in open channels*", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 126, No. 1, January, pp. 4-15
109. Yongjun, L., Guoren, D., Longxi, H., Xuejun, S., Xianghua, Y., (2004), "*3D mathematical model for suspended load transport by turbulent flows and its applications*", Science in China Ser. E Engineering & Material Science ,Vol.47 , No.2, pp. 237-256.
110. ZHANG, H., NAKAGAWA, H., ISHIGAKI, T., MUTO, Y., BABA, Y.,(2005), "*Three-dimensional mathematical modeling of local scour*", Journal of Applied Mechanics, Vol.8, pp. 803-812.
111. Zeng, J., Constantinescu, G., Weber, L.,(2005), "*A FULLY 3D NON-HYDROSTATIC MODEL FOR PREDICTION OF FLOW, SEDIMENT TRANSPORT AND BED MORPHOLOGY IN OPEN CHANNELS*", Civil & Environmental Engineering, IIHR-Hydroscience and Engineering, The University of Iowa, Stanley Hydraulics Laboratory, Iowa City.
112. Zhang, H., Nakagawa, H., Ishigaki, T., Muto, Y., (2005), "*PREDICTION OF 3D FLOW FIELD AND LOCAL SCOURING AROUND SPUR DYKES*", Annual Journal of Hydraulic Engineering, JSCE, Vol.49, 2005, February pp.1003-1008.
113. Ya si, M., (2006), "*UNCERTAINTIES IN THE SIMULATION OF BED EVOLUTION IN RECIRCULATING FLOW AREA BEHIND GROYNES*", Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering, Vol. 30, No. B1.
114. Yanenko, N. N., (1971), "*The Method of Fractional Steps*", Springer-Verlag, New-York.

Apendiks A

Aproksimacijom izvoda u jednačini (4.11) delimičnom *Crank-Nicholson*-ovom šemom oko računске tačke i,j , dobija se kao rezultat izraz (4.17) gde su odgovarajući koeficijenti definisani kao :

$$A_{i,j} = -\frac{I}{\Delta t},$$

$$B1k_{i,j} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{I \cdot \Delta x}{h \cdot \Delta \xi}\right)_{i,j} \cdot \left(-\left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J}\right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J}\right)_{i-1,j} \right) \right] -$$

$$-\left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{I \cdot \Delta y}{h \cdot \Delta \xi}\right)_{i,j} \cdot \left(-\left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J}\right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J}\right)_{i-1,j} \right) \right],$$

$$C1k_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{I \cdot \Delta x}{h \cdot \Delta \xi}\right)_{i-1,j} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{I \cdot \Delta y}{h \cdot \Delta \xi}\right)_{i-1,j} \right],$$

$$D1k_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{I \cdot \Delta x}{h \cdot \Delta \xi}\right)_{i+1,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \eta}\right)_{i,j} - \left(\frac{I \cdot \Delta y}{h \cdot \Delta \xi}\right)_{i+1,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \right],$$

$$F1k_{i,j} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{I \cdot \Delta x}{h \cdot \Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \left(-\left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J}\right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J}\right)_{i-1,j} \right) \right] -$$

$$-\left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{I \cdot \Delta y}{h \cdot \Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \left(-\left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J}\right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J}\right)_{i-1,j} \right) \right],$$

$$G1k_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{I \cdot \Delta x}{h \cdot \Delta \eta}\right)_{i-1,j} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{I \cdot \Delta y}{h \cdot \Delta \eta}\right)_{i-1,j} \right],$$

$$H1k_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{I \cdot \Delta x}{h \cdot \Delta \eta}\right)_{i+1,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \eta}\right)_{i,j} - \left(\frac{I \cdot \Delta y}{h \cdot \Delta \eta}\right)_{i+1,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \eta}\right)_{i,j} \right],$$

$$B2k_{i,j} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(- \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \right)_{i,j-1} \right) \right] -$$

$$- \left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(- \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \right)_{i,j-1} \right) \right],$$

$$C2k_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j-1} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j-1} \right],$$

$$D2k_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j+1} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} - \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j+1} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \right],$$

$$F2k_{i,j} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(- \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \right)_{i,j-1} \right) \right] -$$

$$- \left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(- \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \right)_{i,j-1} \right) \right],$$

$$G2k_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j-1} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j-1} \right],$$

$$H2k_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j+1} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} - \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j+1} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{11}}{J} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \right],$$

$$Ik_{i,j} = - \left\{ \bar{U}_{i,j}^a \cdot \bar{A}_{i,j}^{\bar{u}} + \frac{(1-\theta)}{\theta} \cdot \left(\begin{array}{l} \bar{U}_{i,j}^a \cdot \bar{B}I_{i,j}^{\bar{u}} + \bar{U}_{i-1,j}^a \cdot \bar{C}I_{i,j}^{\bar{u}} + \bar{U}_{i+1,j}^a \cdot \bar{D}I_{i,j}^{\bar{u}} + \\ + \bar{V}_{i,j}^a \cdot \bar{F}I_{i,j}^{\bar{u}} + \bar{V}_{i-1,j}^a \cdot \bar{G}I_{i,j}^{\bar{u}} + \bar{V}_{i+1,j}^a \cdot \bar{H}I_{i,j}^{\bar{u}} + \\ + \bar{U}_{i,j}^a \cdot \bar{B}2_{i,j}^{\bar{u}} + \bar{U}_{i,j-1}^a \cdot \bar{C}2_{i,j}^{\bar{u}} + \bar{U}_{i,j+1}^a \cdot \bar{D}2_{i,j}^{\bar{u}} + \\ + \bar{V}_{i,j}^a \cdot \bar{F}2_{i,j}^{\bar{u}} + \bar{V}_{i,j-1}^a \cdot \bar{G}2_{i,j}^{\bar{u}} + \bar{V}_{i,j+1}^a \cdot \bar{H}2_{i,j}^{\bar{u}} \end{array} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{J^2} \cdot \left[- \left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j-1} \right) \right] -$$

$$\left[\left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i-1,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j-1} \right) \right] \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{I}{J^2} \cdot \left[- \left(\frac{\Delta y}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j-1} \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j-1} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j-1} \right) \right] + \\
 & + \frac{I}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j-1} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i-1,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j-1} \right) \right] + \\
 & + \frac{I}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j-1} \cdot \left(\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j-1} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{I}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{I}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j-1} \right) \right] \Bigg\} .
 \end{aligned}$$

Takođe, na sličan način, aproksimacijom izvoda u jednačini (4.12) dobija se izraz (4.18), u kome se koeficijenti uz zavisno promenljive formulišu kao :

$$A_{i,j} = -\frac{I}{\Delta t},$$

$$\begin{aligned}
 Ble_{i,j} = & \left(-\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{I}{h} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(-\left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \right)_{i-1,j} \right) - \right. \\
 & \left. - \left(-\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{I}{h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(-\left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \right)_{i-1,j} \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$Cle_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(-\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{I}{h} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i-1,j} - \left(-\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \frac{I}{h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i-1,j} \right],$$

$$Dle_{i,j} = \frac{\theta}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{I}{h} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i+1,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \left(-\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \right) - \left(\frac{I}{h} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i+1,j} \cdot \left(\frac{h\nu_u G_{22}}{J} \cdot \left(-\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 Ie_{i,j} = & - \left\{ \bar{V}_{i,j}^a \cdot A_{i,j}^{\bar{v}} + \frac{(1-\theta)}{\theta} \cdot \left(\begin{aligned} & \bar{U}_{i,j}^a \cdot BI_{i,j}^{\bar{v}} + \bar{U}_{i-1,j}^a \cdot CI_{i,j}^{\bar{v}} + \bar{U}_{i+1,j}^a \cdot DI_{i,j}^{\bar{v}} + \\ & + \bar{V}_{i,j}^a \cdot FI_{i,j}^{\bar{v}} + \bar{V}_{i-1,j}^a \cdot GI_{i,j}^{\bar{v}} + \bar{V}_{i+1,j}^a \cdot HI_{i,j}^{\bar{v}} + \\ & + \bar{U}_{i,j}^a \cdot B2_{i,j}^{\bar{v}} + \bar{U}_{i,j-1}^a \cdot C2_{i,j}^{\bar{v}} + \bar{U}_{i,j+1}^a \cdot D2_{i,j}^{\bar{v}} + \\ & + \bar{V}_{i,j}^a \cdot F2_{i,j}^{\bar{v}} + \bar{V}_{i,j-1}^a \cdot G2_{i,j}^{\bar{v}} + \bar{V}_{i,j+1}^a \cdot H2_{i,j}^{\bar{v}} \end{aligned} \right) \right\} + \\
 & + \frac{1}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j-1} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i-1,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j-1} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{J^2} \cdot \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j-1} \cdot \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j-1} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j-1} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{J^2} \cdot \left[\left(-\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j-1} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i-1,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j-1} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{J^2} \cdot \left[\left(-\frac{\Delta x}{\Delta \xi} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j} \cdot \left(\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{h\nu_u G_{12}}{J} \right)_{i,j-1} \cdot \left(\left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i,j-1} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta \xi} \frac{1}{h} \bar{U}^a + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \frac{1}{h} \bar{V}^a \right)_{i-1,j-1} \right) \right] \Bigg\} .
 \end{aligned}$$

Apendiks B

Razvijanjem dinamičkih jednačina (4.23) i (4.24) u *Taylor*-ov red, dobija se sistem od dve linearizovane jednačine :

$$\bar{U}^{n+1} = \alpha_u \frac{\partial \Delta h}{\partial \xi} + \beta_u \Delta h + \gamma_u, \quad (\text{B.1})$$

$$\bar{V}^{n+1} = \alpha_v \frac{\partial \Delta h}{\partial \eta} + \beta_v \Delta h + \gamma_v, \quad (\text{B.2})$$

gde su odgovarajući koeficijenti predstavljeni kao :

$$C_1 = 1 + \frac{\Delta t \theta C_\tau}{(h^2)^n} \left(\sqrt{\bar{U}^2 G_{11} + 2\bar{U}\bar{V}G_{12} + \bar{V}^2 G_{22}} \right)^d, \quad (\text{B.3})$$

$$C_2 = 1 + \frac{\Delta t (1-\theta) C_\tau}{(h^2)^n} \left(\sqrt{\bar{U}^2 G_{11} + 2\bar{U}\bar{V}G_{12} + \bar{V}^2 G_{22}} \right)^d, \quad (\text{B.4})$$

$$\alpha_u = -\frac{\Delta t \theta g G_{22}}{C_1 J^2} h^n, \quad (\text{B.5})$$

$$\beta_u = \frac{\Delta t \theta g}{C_1 J^2} \left[\begin{array}{l} -G_{22} \left(\theta \frac{\partial Z_d^{n+1}}{\partial \xi} + (1-\theta) \frac{\partial Z_d^n}{\partial \xi} + \frac{\partial h^n}{\partial \xi} \right) + \\ + G_{12} \left(\theta \frac{\partial Z_d^{n+1}}{\partial \eta} + (1-\theta) \frac{\partial Z_d^n}{\partial \eta} + \frac{\partial h^n}{\partial \eta} \right) \end{array} \right], \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma_u = \frac{C_2}{C_1} \bar{U}^d + \beta_u h^n, \quad (\text{B.7})$$

$$\alpha_v = -\frac{\Delta t \theta g G_{11}}{C_1 J^2} h^n, \quad (\text{B.8})$$

$$\beta_v = \frac{\Delta t \theta g}{C_1 J^2} \left[\begin{array}{l} -G_{11} \left(\theta \frac{\partial Z_d^{n+1}}{\partial \eta} + (1-\theta) \frac{\partial Z_d^n}{\partial \eta} + \frac{\partial h^n}{\partial \eta} \right) + \\ + G_{12} \left(\theta \frac{\partial Z_d^{n+1}}{\partial \xi} + (1-\theta) \frac{\partial Z_d^n}{\partial \xi} + \frac{\partial h^n}{\partial \xi} \right) \end{array} \right], \quad (\text{B.9})$$

$$\gamma_v = \frac{C_2}{C_1} \bar{V}^d + \beta_v h^n. \quad (\text{B.10})$$

Zamenom ovih linearizovanih dinamičkih jednačina u jednačinu kontinuiteta i potom njenom diskretizacijom na smaknutoj računskoj mreži dobija se izraz oblika :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta h_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{J_{i,j}} \theta \left\{ J_{i+1/2,j} \left[\alpha_{u_{i+1/2,j}}^n \left(\frac{\Delta h_{i+1,j} - \Delta h_{i,j}}{\Delta \xi} \right) + \beta_{u_{i+1/2,j}}^n (\psi \Delta h_{i,j} + (1-\psi) \Delta h_{i+1,j}) + \gamma_{u_{i+1/2,j}}^n \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{J_{i,j}} \theta \left\{ J_{i-1/2,j} \left[\alpha_{u_{i-1/2,j}}^n \left(\frac{\Delta h_{i,j} - \Delta h_{i-1,j}}{\Delta \xi} \right) + \beta_{u_{i-1/2,j}}^n (\psi \Delta h_{i,j} + (1-\psi) \Delta h_{i-1,j}) + \gamma_{u_{i-1/2,j}}^n \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{J_{i,j}} \theta \left\{ J_{i,j+1/2} \left[\alpha_{v_{i,j+1/2}}^n \left(\frac{\Delta h_{i,j+1} - \Delta h_{i,j}}{\Delta \eta} \right) + \beta_{v_{i,j+1/2}}^n (\psi \Delta h_{i,j} + (1-\psi) \Delta h_{i,j+1}) + \gamma_{v_{i,j+1/2}}^n \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{J_{i,j}} \theta \left\{ J_{i,j-1/2} \left[\alpha_{v_{i,j-1/2}}^n \left(\frac{\Delta h_{i,j} - \Delta h_{i,j-1}}{\Delta \eta} \right) + \beta_{v_{i,j-1/2}}^n (\psi \Delta h_{i,j} + (1-\psi) \Delta h_{i,j-1}) + \gamma_{v_{i,j-1/2}}^n \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{J_{i,j}} (1-\theta) \left(J_{i+1/2,j} \bar{U}_{i+1/2,j}^n - J_{i-1/2,j} \bar{U}_{i-1/2,j}^n + J_{i,j+1/2} \bar{V}_{i,j+1/2}^n + J_{i,j-1/2} \bar{V}_{i,j-1/2}^n \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

gde se za prostorno osrednjavanje koristi težinski koeficijent ψ . Takođe, bitno je navesti da su preuzeti jedinični proticaji iz koraka difuzije definisani u tačkama osnovne računске mreže, zbog čega je potrebno ove vrednosti interpolovati na računске tačke smaknutih mreža, kako bi se formirali odgovarajući fluksevi na graničnim površinama elementarne zapremine. Sređivanjem izraza (B.11) i grupisanja članova uz priraštaj dubine Δh , dolazi se do jednostavnijeg oblika diskretizovane jednačine kontinuiteta :

$$\begin{aligned}
 b_{i,j} \Delta h_{i,j} + a l_{i,j} \Delta h_{i-1,j} + b l_{i,j} \Delta h_{i,j} + c l_{i,j} \Delta h_{i+1,j} + \\
 + a 2_{i,j} \Delta h_{i,j-1} + b 2_{i,j} \Delta h_{i,j} + c 2_{i,j} \Delta h_{i,j+1} = d_{i,j},
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

gde su koeficijenti uz nepoznate priraštaje i slobodni članovi formulisani kao :

$$\begin{aligned}
 b_{i,j} &= \frac{1}{\Delta t}, \\
 a l_{i,j} &= \frac{\theta}{J_{i,j}} \left[J_{i-1/2,j} \left(\alpha_{u_{i-1/2,j}}^n - \beta_{u_{i-1/2,j}}^n (1-\psi) \right) \right], \\
 b l_{i,j} &= \frac{\theta}{J_{i,j}} \left[J_{i+1/2,j} \left(-\alpha_{u_{i+1/2,j}}^n + \beta_{u_{i+1/2,j}}^n \psi \right) + J_{i-1/2,j} \left(-\alpha_{u_{i-1/2,j}}^n - \beta_{u_{i-1/2,j}}^n \psi \right) \right], \\
 c l_{i,j} &= \frac{\theta}{J_{i,j}} \left[J_{i+1/2,j} \left(\alpha_{u_{i+1/2,j}}^n + \beta_{u_{i+1/2,j}}^n (1-\psi) \right) \right], \\
 a 2_{i,j} &= \frac{\theta}{J_{i,j}} \left[J_{i,j-1/2} \left(\alpha_{v_{i,j-1/2}}^n - \beta_{v_{i,j-1/2}}^n (1-\psi) \right) \right], \\
 b 2_{i,j} &= \frac{\theta}{J_{i,j}} \left[J_{i,j+1/2} \left(-\alpha_{v_{i,j+1/2}}^n + \beta_{v_{i,j+1/2}}^n \psi \right) + J_{i,j-1/2} \left(-\alpha_{v_{i,j-1/2}}^n - \beta_{v_{i,j-1/2}}^n \psi \right) \right], \\
 c 2_{i,j} &= \frac{\theta}{J_{i,j}} \left[J_{i,j+1/2} \left(\alpha_{v_{i,j+1/2}}^n + \beta_{v_{i,j+1/2}}^n (1-\psi) \right) \right], \\
 d_{i,j} &= -\frac{\theta}{J_{i,j}} \left[J_{i+1/2,j} \gamma_{u_{i+1/2,j}}^n - J_{i-1/2,j} \gamma_{u_{i-1/2,j}}^n + J_{i,j+1/2} \gamma_{v_{i,j+1/2}}^n - J_{i,j-1/2} \gamma_{v_{i,j-1/2}}^n \right] - \\
 &\quad - \frac{(1-\theta)}{J_{i,j}} \left[J_{i+1/2,j} \bar{U}_{i+1/2,j}^n - J_{i-1/2,j} \bar{U}_{i-1/2,j}^n + J_{i,j+1/2} \bar{V}_{i,j+1/2}^n + J_{i,j-1/2} \bar{V}_{i,j-1/2}^n \right].
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Na način kako je to rađeno u koraku difuzije, rešavanje izraza (B.12) se sastoji iz dva osnovna koraka. Prvi korak podrazumeva rastavljanje jednačine na dva računska pravca (*ADI metoda*) :

- ξ -pravac

$$\begin{aligned}
 b_{i,j}^n \Delta h_{i,j}^{m+1/2} + a l_{i,j}^n \Delta h_{i-1,j}^{m+1/2} + b l_{i,j}^n \Delta h_{i,j}^{m+1/2} + c l_{i,j}^n \Delta h_{i+1,j}^{m+1/2} = \\
 = d_{i,j}^n - \left[a 2_{i,j}^n \Delta h_{i,j-1}^m + b 2_{i,j}^n \Delta h_{i,j}^m + c 2_{i,j}^n \Delta h_{i,j+1}^m \right],
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

- η -pravac

$$\begin{aligned}
 b_{i,j}^n \Delta h_{i,j}^{m+1} + a 2_{i,j}^n \Delta h_{i,j-1}^{m+1} + b 2_{i,j}^n \Delta h_{i,j}^{m+1} + c 2_{i,j}^n \Delta h_{i,j+1}^{m+1} = \\
 = d_{i,j}^n - \left[a l_{i,j}^n \Delta h_{i-1,j}^{m+1/2} + b l_{i,j}^n \Delta h_{i,j}^{m+1/2} + c l_{i,j}^n \Delta h_{i+1,j}^{m+1/2} \right],
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

da bi se zatim na osnovu strukture koeficijenata koji formiraju tridijagonalnu matricu, u drugom koraku dobijeni sistem rešavao primenom „double-sweep“ procedure. Ovaj postupak koristi algoritam dvostrukog prolaza, gde se u prvom prolazu duž ξ pravca računaju koeficijenti :

$$E_i = -\frac{cI_{i,j}^n}{aI_{i,j}^n E_{i-1} + b_{i,j}^n + bI_{i,j}^n}, \quad (i = 2, \dots, N) \quad (\text{B.16})$$

$$F_i = \frac{d_{i,j}^n - [a2_{i,j}^n \Delta h_{i,j-1}^m + b2_{i,j}^n \Delta h_{i,j}^m + c2_{i,j}^n \Delta h_{i,j+1}^m] - aI_{i,j}^n F_{i-1}}{aI_{i,j}^n E_{i-1} + b_{i,j}^n + bI_{i,j}^n}$$

dok se u drugom prolazu računaju nepoznati priraštaji dubine po izrazu :

$$\Delta h_i = E_i \Delta h_{i+1} + F_i. \quad (\text{B.17})$$

Posle završetka proračuna u ξ pravcu, kompletan postupak se koristeći izraz (B.15) ponavlja za η pravac.

Kako je navedeno u Poglavlju 4, isti ovaj postupak se primenjuje i za korak difuzije, s'tim što se u tom slučaju duž ξ -pravca umesto jedne jednačine (B.14) javlja sistem jednačina (4.19-4.20), dok se duž η -pravca umesto izraza (B.15) rešava sistem (4.21-4.22). Izrazi koji se pritom javljaju će se zbog svog obima i složenosti ovde izostaviti.

Apendiks C

Diskretizacijom jednačine difuzije suspendovanog nanosa definisane izrazom 4.48, dobija se kao rezultat jednačina 4.49 u kojoj su odgovarajući koeficijenti dati kao :

$$A_{i,j} = -\frac{1}{\Delta t},$$

$$B1_{i,j} = \frac{\theta}{hJ} \cdot \left[-\left(\frac{hDG_{22}}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{hDG_{22}}{J} \right)_{i-1,j} \right],$$

$$C1_{i,j} = \frac{\theta}{hJ} \cdot \left(\frac{hDG_{22}}{J} \right)_{i-1,j},$$

$$D1_{i,j} = \frac{\theta}{hJ} \cdot \left(\frac{hDG_{22}}{J} \right)_{i,j},$$

$$B2_{i,j} = \frac{\theta}{hJ} \cdot \left[-\left(\frac{hDG_{11}}{J} \right)_{i,j} - \left(\frac{hDG_{11}}{J} \right)_{i,j-1} \right],$$

$$C2_{i,j} = \frac{\theta}{hJ} \cdot \left(\frac{hDG_{11}}{J} \right)_{i,j-1},$$

$$D2_{i,j} = \frac{\theta}{hJ} \cdot \left(\frac{hDG_{11}}{J} \right)_{i,j},$$

$$I_{i,j} = - \left\{ A_{i,j} (C_k \rho_m)_{i,j}^a + \frac{(1-\theta)}{\theta} \cdot \left((C_k \rho_m)_{i-1,j}^a \cdot C1_{i,j} + (C_k \rho_m)_{i,j}^a \cdot B1_{i,j} + (C_k \rho_m)_{i+1,j}^a \cdot D1_{i,j} + \right. \right. \\ \left. \left. + (C_k \rho_m)_{i,j-1}^a \cdot C2_{i,j} + (C_k \rho_m)_{i,j}^a \cdot B2_{i,j} + (C_k \rho_m)_{i,j+1}^a \cdot D2_{i,j} \right) \right\}.$$

Apendiks D

Izvodi vezani za izraz (4.55) :

$$\left[\frac{\partial F I_k}{\partial Z_d} \right]_m^{n+1} = \frac{\partial F I_k}{\partial E_m} \frac{\partial E_m}{\partial Z_d} + \frac{\partial F I_k}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial Z_d} + \frac{\partial F I_k}{\partial S_{p_k}} \frac{\partial S_{p_k}}{\partial Z_d} = \frac{\rho_s (1-p)}{\Delta t} {}^m \beta^{n+1} \frac{\partial E_m}{\partial Z_d} + \theta \frac{\partial S_k}{\partial Z_d} - \theta \frac{\partial S_{p_k}}{\partial Z_d},$$

$$\left[\frac{\partial F I_k}{\partial \beta_1} \right]_m^{n+1} = \frac{\partial F I_k}{\partial E_m} \frac{\partial E_m}{\partial \beta_1} + \frac{\partial F I_k}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial \beta_1} + \frac{\partial F I_k}{\partial S_{p_k}} \frac{\partial S_{p_k}}{\partial \beta_1} = \frac{\rho_s (1-p)}{\Delta t} {}^m \beta^{n+1} \frac{\partial E_m}{\partial \beta_1} + \theta \frac{\partial S_k}{\partial \beta_1} - \theta \frac{\partial S_{p_k}}{\partial \beta_1},$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F I_k}{\partial \beta_k} \right]_m^{n+1} &= \frac{\rho_s (1-p)}{\Delta t} {}^m E_m^{n+1} + \frac{\partial F I_k}{\partial E_m} \frac{\partial E_m}{\partial \beta_k} + \frac{\partial F I_k}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial \beta_k} + \frac{\partial F I_k}{\partial S_{p_k}} \frac{\partial S_{p_k}}{\partial \beta_k} = \\ &= \frac{\rho_s (1-p)}{\Delta t} {}^m E_m^{n+1} + \frac{\rho_s (1-p)}{\Delta t} {}^m \beta^{n+1} \frac{\partial E_m}{\partial \beta_k} + \theta \frac{\partial S_k}{\partial \beta_k} - \theta \frac{\partial S_{p_k}}{\partial \beta_k}, \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial F I_k}{\partial \beta_K} \right]_m^{n+1} = \frac{\partial F I_k}{\partial E_m} \frac{\partial E_m}{\partial \beta_K} + \frac{\partial F I_k}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial \beta_K} + \frac{\partial F I_k}{\partial S_{p_k}} \frac{\partial S_{p_k}}{\partial \beta_K} = \frac{\rho_s (1-p)}{\Delta t} {}^m \beta^{n+1} \frac{\partial E_m}{\partial \beta_K} + \theta \frac{\partial S_k}{\partial \beta_K} - \theta \frac{\partial S_{p_k}}{\partial \beta_K}.$$

Izvodi vezani za izraz (4.57) :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F 2}{\partial Z_d} \right]_m^{n+1} &= \frac{\rho_s (1-p)}{\Delta t} + \frac{\partial F 2}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial Z_d} + \dots + \frac{\partial F 2}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial Z_d} + \dots + \frac{\partial F 2}{\partial S_K} \frac{\partial S_K}{\partial Z_d} = \\ &= \frac{\rho_s (1-p)}{\Delta t} + \theta \frac{\partial S_1}{\partial Z_d} + \dots + \theta \frac{\partial S_k}{\partial Z_d} + \dots + \theta \frac{\partial S_K}{\partial Z_d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F 2}{\partial \beta_1} \right]_m^{n+1} &= \frac{\partial F 2}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_1} + \dots + \frac{\partial F 2}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial \beta_1} + \dots + \frac{\partial F 2}{\partial S_K} \frac{\partial S_K}{\partial \beta_1} = \\ &= \theta \frac{\partial S_1}{\partial \beta_1} + \dots + \theta \frac{\partial S_k}{\partial \beta_1} + \dots + \theta \frac{\partial S_K}{\partial \beta_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F_2}{\partial \beta_k} \right]_m^{n+1} &= \frac{\partial F_2}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_k} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial \beta_k} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial S_K} \frac{\partial S_K}{\partial \beta_k} = \\ &= \theta \frac{\partial S_1}{\partial \beta_k} + \dots + \theta \frac{\partial S_k}{\partial \beta_k} + \dots + \theta \frac{\partial S_K}{\partial \beta_k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F_{1_k}}{\partial \beta_K} \right]_m^{n+1} &= \frac{\partial F_2}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \beta_K} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial \beta_K} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial S_K} \frac{\partial S_K}{\partial \beta_K} = \\ &= \theta \frac{\partial S_1}{\partial \beta_K} + \dots + \theta \frac{\partial S_k}{\partial \beta_K} + \dots + \theta \frac{\partial S_K}{\partial \beta_K}. \end{aligned}$$