

DOKTORSKA DISERTACIJA

Kandidat:

Mr. Mirjana Đurić

N O M E N K L A T U R A

- A - površina, dužina
B - dužina, magnetna indukcija
C - konstanta, kapacitet kondenzatora
D - rastojanje, kapacitet kondenzatora
E - suma brojeva, jačina polja
F - faktor oblika
H - visina, jačina magnetnog polja
L - dužina
M - koeficijent međusobne magnetne indukcije
Q - radijaciona energija, količina elektriciteta
R - radius, električni otpor
S - entropija
T - apsolutna temperatura
U - unutrašnja energija, potencijal (napon)
V - zapremina, funkcija fluksa
X - bezdimenzioni odnos, dužina, koordinata
Y - bezdimenzioni odnos, dužina, koordinata
Z - bezdimenzioni odnos, dužina, koordinata
- a - dužina, realna poluosa hiperbole
b - dužina, imaginarna poluosa hiperbole
c - brzina propagacije elektromagnetnih talasa, rastojanje
e - emisferična emisivna snaga, žičina daljina
f - lokalni faktor oblika
h - Planck-ova konstanta, visina
i - intenzitet radijacije, jačina struje
k - Boltzmann-ova konstanta, električna provodljivost
l - dužina, kosinus ugla α
m - kosinus ugla β

S A D R Ź A J

strana

1. <u>U V O D</u>	1
1.1. FUNDAMENTALNI ZAKONI ZRAČENJA.....	2
1.1.1. Lambert-ov zakon - emisivnost crnog tela.....	5
1.1.2. Wien-ov i Rayleigh-Jeansen-ov zakon - aprok- simacija spektralne emisivne raspodele.....	10
1.1.3. Planck-ov zakon - spektralna raspodela emisivne snage.....	11
1.1.4. Stefan-Boltzmann-ov zakon - totalna, hemisferična emisivna snaga površine.....	16
1.1.5. Kirchoff-ov zakon - emisivnost i apsorbtivnost.....	22
1.2. RAZMENA TOPLOTE ZRAČENJEM IZMEDJU CRNIH IZOTERMSKIH POVRŠINA I POJAM FAKTORA OBLIKA.....	27
1.2.1. Razmena toplote zračenjem između dve diferencijalne površine.....	28
1.2.2. Razmena toplote između diferencijalne i konačne površine.....	31
1.2.3. Razmena toplote između dve konačne površine.....	34
1.3. METODE ODREĐIVANJA FAKTORA OBLIKA.....	36
1.3.1. Površinska integracija.....	37
1.3.2. Konturna integracija.....	44
1.3.3. Algebra faktora oblika.....	57
1.3.4. Odredjivanje faktora oblika dvodimenzionih radijacionih sistema.....	59
1.3.5. Monte Carlo metod primenjen na odredjivanje faktora oblika.....	62
1.3.6. Eksperimentalne (analogne) metode odredjivanja faktora oblika.....	77
1.4. ZAKLJUČAK U VEZI STANJA NAUKE DANAS.....	81

2.	<u>RAZVIJANJE GEOMETRIJSKIH ANALOGIJA</u>	88
2.1.	INTEGRATOR SA DURBINOM.....	88
2.2.	INTEGRATOR SA RAVNOM PLOČOM.....	85
2.3.	INTEGRATOR SA LAMBINOM.....	86
2.4.	OBRTNI INTEGRATOR.....	89
2.5.	INTEGRATOR ZA NELAMBERTOVSKJE PCVRČINE.....	90
2.6.	PROSTORNI USIGMENI.....	93
2.7.	MOGUĆNOSTI DALJEG RAZVOJA.....	97
3.	<u>POLJE TOPLOTNOG ZRAČENJA</u>	98
3.1.	DOKAZ VEKTORSKE PRIRODE POLJA ZRAČENJA.....	98
3.2.	ANALIZA POSEBNIH (SIMETRIČNIH) POLJA.....	101
3.2.1.	Dvodimenziono radijaciono polje.....	101
3.2.2.	Radijaciono polje beskrajnog cilindra.....	107
3.2.3.	Radijaciono polje kruga.....	108
3.2.4.	Radijaciono polje sfere.....	109
4.	<u>ZAKONI ELEKTROMAGNETNOG POLJA</u>	111
4.1.	MAXWELL-OVI ZAKONI.....	111
4.2.	ELEKTROSTATIČKO POLJE JEDNOSMERNIH STRUJA.....	112
4.3.	ELEKTROKONDUKTIVNO POLJE JEDNOSMERNIH STRUJA.....	119
4.4.	MAGNETNO POLJE JEDNOSMERNIH STRUJA.....	123
5.	<u>ANALOGIJA ELEKTROMAGNETNOG I RADIJACIONOG POLJA</u>	130
6.	<u>EKSPERIMENTALNI DEO RADA</u>	138
6.1.	REALIZACIJA DVODIMENZIONOG ELEKTROKONDUKTIVNOG POLJA I ODREĐIVANJE NJEGOVIH KARAKTERISTIKA.....	138
6.1.1.	Bipolno polje.....	140
6.1.2.	Polje između dve koaksijalne polubeskrajne linije odvojene koaksijalnom segmentnom linijom.....	139
6.1.3.	Segmentno polje.....	140
6.1.4.	Polje između dve koaksijalne polubeskrajne linije razdvojene adijabatskom linijom.....	140
6.1.5.	Odredjivanje parametara vektora polja.....	141

primenljivost ograničena samo na Lambertovske površine, jedna od površina obavezno je infinitezimalna i sl.

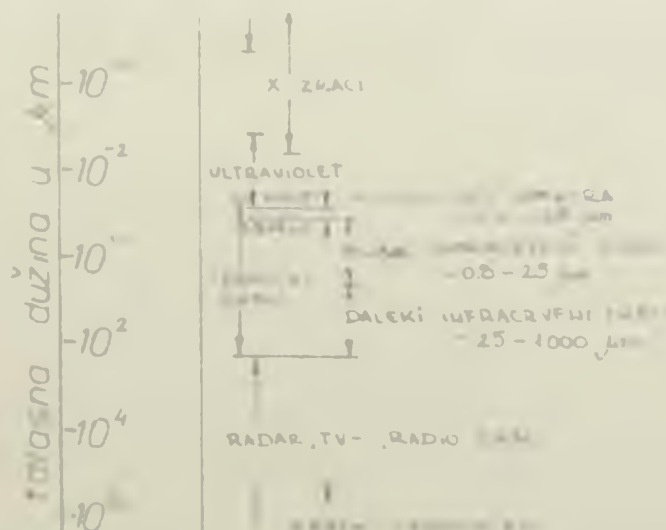
Od velikog praktičnog i teorijskog značaja je generalna analiza primenljivosti fizičkih analogija, u koje se osim geometrijskih ubrajaju i analogije sa električnim i magnetnim poljima.

Ovaj istraživački rad je preduzet sa zadatkom da detaljnije i potpunije, nego što je to do sada učinjeno, analizira analogije između zračenja i ostalih fizičkih pojava. To podrazumeva detaljno ispitivanje i proširivanje geometrijskih analogija, kao i utvrđivanje analogija između zračenja i elektromagnetnih pojava.

1.1. FUNDAMENTALNI ZAKONI ZRAČENJA

Sve supstance kontinualno emituju elektromagnetne talase, usled kretanja molekula, atoma i subatomske čestice, vezanog za unutrašnju energiju materijala. U stanju ravnoteže unutrašnja energija je direktno srazmerna temperaturi supstance.

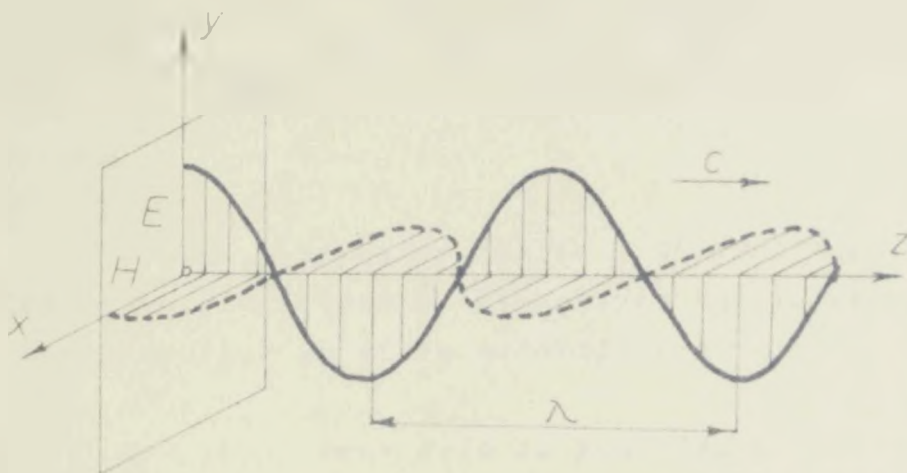
Limitovana radijaciona energija se kreće od radio talasa, do kosmičkih zraka, čije su talasne dužine manje od 10^{-11} m (Sl.1.) /1/.



Sl.1. Spektar elektromagnetnog zračenja

Ono što nazivamo: infracrveno zračenje samo je manji deo elektromagnetnog spektra, koji uključuje toplotne i svetlosne talase ($0,4 - 1000 \mu\text{m}$).

Elektromagnetna radijacija sledi zakone transverzalnih talasa, koji osciluju normalno na pravac kretanja (Sl. 2.).



Sl. 2. Propagacija elektromagnetnih talasa

Brzina propagacije elektromagnetne radijacije jednaka je brzini kretanja svetlosti, odnosno $2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ u vakuumu, a u nekom drugom medijumu ovu brzinu je potrebno umanjiti deljenjem sa indeksom refrakcije.

Teorija propagacije radijacione energije se može tumačiti sa stanovišta klasične teorije elektromagnetnih talasa i kvantne mehanike. Uz nekoliko izuzetaka, termalna radijacija može biti tretirana kao fenomen baziran na klasičnom konceptu transporta energije elektromagnetnim talasima, a samo u izvesnim slučajevima neophodno je sagledati diskretnu prirodu energije.

Termička interakcije tela i zračne energije zavisi od osobina njegove površine, ali, takodje, i od fizičke prirode materije ispod površine. Radijacija, koja padne na homogeno telo, cešom se reflektuje, a delom prolazi kroz njegovu masu. Ova druga frakcija se deli na absorbovanu (zadržanu u materiji) i propuštenu radijaciju (proslu kroz telo).

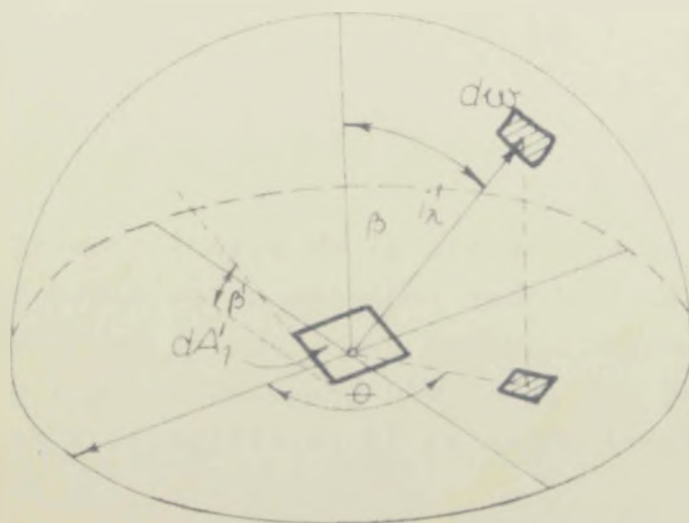
Ovi zakoni su izvedeni sa apsolutno crno telo, još dosta davno, i osim eksperimentalne potvrde dokazani su pomoću osnovnih principa klasične termodinamike, teorije elektromagnetnih talasa, a samo izuzetno kvantne mehanike.

Oni se sa uspehom primenjuju i na realne površine, ali tada trpe izvesne promene jer se modifikuju uvođenjem novih kvaliteta koji karakterisu osobine "sivih" te-

1.1.1. Lambert-ov zakon - emisivnost crnog tela

Pre upoznavanja sa jednim od najstarijih zakona zračenja (ustanovljenog još 1760. god.) potrebno je definisati neke osnovne pojmove, kao i krenuti u unutrašnji sistem unutar kojeg se posmatra fenomen radijacije.

Spektralni ϵ_λ $(\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{nm}^{-1})$ predstavlja emisiju emitovanu, u jedinici vremena, u obliku talasa, u valnu talasnih duzina λ do $\lambda + d\lambda$, po jedinici projekcije emisione površine normalne na pravac β , ϵ_λ unutar elementarnog prostornog ugla centriranog oko pravca β . Sve velicine pomenute u ovoj definiciji grafički su prikazane na slici 3.



Sl. 3. Ilustracija Lambert-ovog zakona

U druge strane, u stanju termičke ravnoteže, ista energija mora biti usmerena sa površine dA_1 ka dA_2 . U tom slučaju će se akceptujuća površina dA_2 videti pod prostornim uglom: $dA_2 \cos \beta' = dA_1 \cos \beta$ pa će toplotni fluks biti:

$$E_{\lambda} = i_{\lambda, n} \frac{dA_2 \cos \beta}{dA_1}$$

gde $i_{\lambda, n}$ označava spektralni intenzitet u pravcu normale

koju dobijamo izjednačavanjem jednačina (1) i (2) proizilazi:

$$E_{\lambda} = i_{\lambda, n} \quad (3)$$

čime je tvrdnja da intenzitet radijacije crnog tela ne zavisi od ugla emisije dokazana.

Kada se izvrši integracija u celom intervalu talasnih dužina od $0 \leq \lambda \leq \infty$ spektralni intenzitet postaje totalni:

$$E = \int_0^{\infty} i_{\lambda} d\lambda$$

a jednačina (3) se modifikuje u

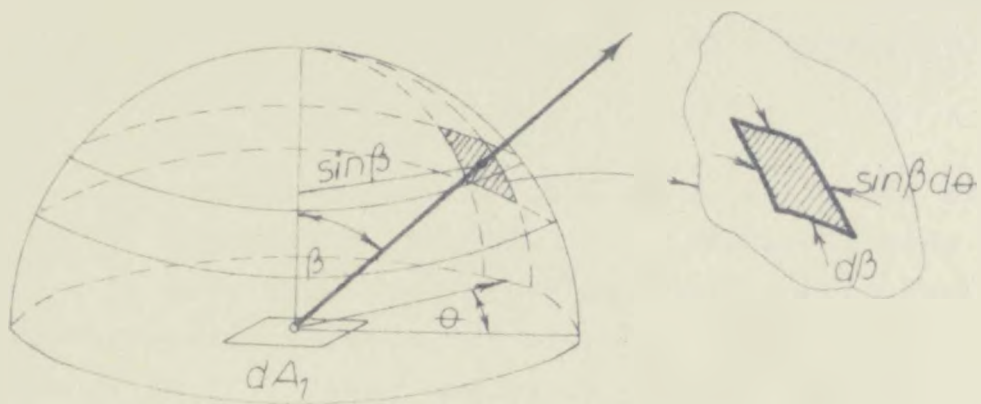
$$E_{\lambda} = i_{\lambda}$$

Kada bi intenzitet bio izrazen po jedinici zračne površine menjao bi se sa kosinusom ugla β ; na to ukazuje definicija projekcije površine, a o tome govori i Lambert-ov kosinusni zakon.

Uvedimo u razmatranje nov pojam: spektralnu emisivnu snagu crne površine u jednom pravcu (E_{λ}), koja

predstavlja važan podatak za analizu radijacione razmene.

ϵ_λ zapravo, predstavlja energiju emitovanu u jedinici vremena u pravcu β , θ po jedinici emisivne površine, u intervalu talasnih dužina oko vrednosti λ , unutar elementarnog prostornog ugla $d\omega$, centriranog oko pravca β . Oznake su ilustrovane slikom 4.



Slika 4. Ilustracija prostornog ugla

Izrazimo sada toplotni fluks sa dA_1 ka $d\omega$ u proizvoljnom pravcu pomoću novog kvaliteta ϵ_λ :

$$d\dot{Q}_\lambda = \epsilon_\lambda dA_1 d\omega d\lambda \quad (4)$$

Poredjenjem relacije (4) sa jednačinom (1), koja emitovanu energiju izražava u funkciji intenziteta radijacije, može se ustanoviti sledeća veza između fundamentalnih pojmova: emisivne snage i intenziteta zračenja:

$$\epsilon_\lambda = \lambda \cos \beta \quad (5)$$

Poslednja jednačina predstavlja matematičku formulaciju Lambert-ovog zakona, koji je izveden za apsolutno crno telo, ali važi i za mnoge realne (tzv. difuzno emitujuće) površine. Sve ostale sive površine odstupaju od Lambert-ovog kosinusnog zakona u smislu drugačije promene emisivne

snage tela sa menjanjem ugla radijacije. Sama funkcija $e'(\beta)$ zavisi od vrste materijala i izražava se u obliku proizvoda: $e'(\beta) = \epsilon \cdot \beta$, problem se rešava uvođenjem novog parametra $\epsilon \cdot \beta$, koji zavisi od ugla, a za difuzne površine jednak je jedinici.

Eksperimentalna merenja raspodele po pravcu emisije za niz metala i nemetala vršio je Eckert [2]. Totalna radijacija je merena pod različitim uglovima i upoređivana sa crnim telom.

Zapaženo je da metali slede kosinusni zakon za uglove do 50° u odnosu na normalu na površinu. Za veće uglove emisivnost je veća nego što iz Lambert-ovog zakona proizilazi. Na nemetalne površine kosinusni zakon se može striktno primeniti za uglove do 70° . Iznad ove vrednosti β emisivnost se znatno smanjuje.

Kako je za $\beta = \cos\theta$ to se emisivnost (emisivna snaga) i intenzitet radijacije u pravcu normale na izvor sračunaju izjednačavaju:

$$\lambda, n \quad \lambda, n \quad = \quad \lambda \quad (6)$$

Intenzitet radijacije je vektor i uvek ga, pored ostalog, karakteriše određeni pravac. Da bi se, međutim, odredila emisivna snaga neke površine veoma je pogodno izvršiti integraciju emisivne snage unutar celog hemisferičnog prostornog ugla od 2π steradijana.

Kako se dotiča nov kvalitet: emisivna snaga e_λ . Ona predstavlja toplotni fluks sa jedinice radijacione površine u intervalu talasnih dužina oko λ , u poluloptu prostora. Odnosno:

$$e_\lambda = \int_0^\pi \dots \quad (7)$$

Elementarna površina na polulopti opisanoj iznad izvora dA_1 može da se izrazi u funkciji uglova β i θ (Sl. 1.) kao:

$$d\omega = \sin\beta \, d\beta d\theta \quad (8)$$

Zamjenom jednačina (8) u (7) nastaje:

$$M = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \cos\beta \sin\beta \, d\beta d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \cos\beta \sin\beta \, d\beta d\theta \quad (9)$$

ili nakon integracije:

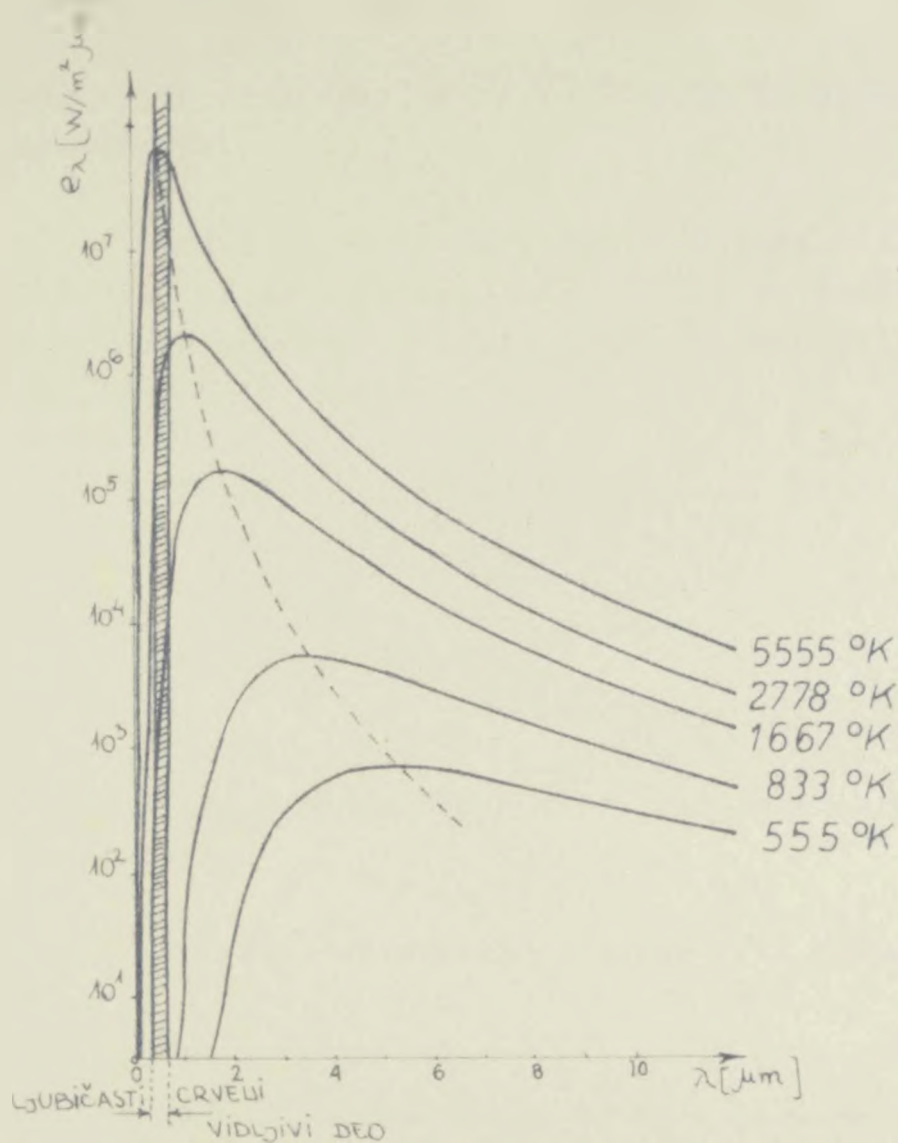
$$M = \pi i_{\lambda} = \pi \cdot i_{\lambda, n}$$

Hemisferična spektralna emisijska snaga neke površine je njena emisijska snaga u pravcu normale uvećana za π puta, odnosno, intenzitet radijacije uvećan za π .

2.1.2. Wien-ov i Rayleigh-Jeans-ov zakon - aproximacija spektralne emisijske raspodjele

U definiciji apsolutno crnog tela naglašena je njegova savršena absorptivnost, a također i emisijsnost, koja sledi Lambert-ov kosinusni zakon (kao što je upravo dokazano), i funkcija je isključivo temperature.

Sledjucim, jednako je važno odrediti intenzitet emisije za svaku talasnu duzinu posebno, koje zajedno konstitušu radijacioni spektar tela na određenoj temperaturi. Na osnovu Maxwell-ovog zakona distribucije brzina, Wien je 1896. godine formulisao jednačinu /3/:



Sl. 5. Spektralna emisivna snaga
u funkciji talasnih dužina

Da porastom temperature povećava se ukupno emitovana energija svih talasnih dužina. Takođe, se sa povišenjem temperature pomera maksimum spektralne emisivne snage ka područjima kratkih talasa. Ove talasne dužine pri kojima je emisivna snaga na datoj temperaturi najveća označimo sa λ_{max} . (Naglašavamo da matematičku relaciju između λ_{max} i temperature tela definiše Wien-ov zakon pomeranja, koji će kasnije biti objašnjen).

Imajući u vidu da vidljiva svetlost u elektromagnetnom spektru zauzima interval talasnih dužina od 4000 do 8000

Na sa slike 5. je očigledno da je radijacija na nižim temperaturama nevidljiva.

Tela visokih temperatura emituju vidljive talase i to ukoliko je temperatura visa utoliko su izvori emisije topliji, a njihovo zračenje postaje kompleks svih talasnih dužina iz vidljivog dela spektra.

Površina ispod svake izoterme dobijena integracijom:

$$e = \pi \int_0^{\infty} i'_{\lambda} d\lambda$$

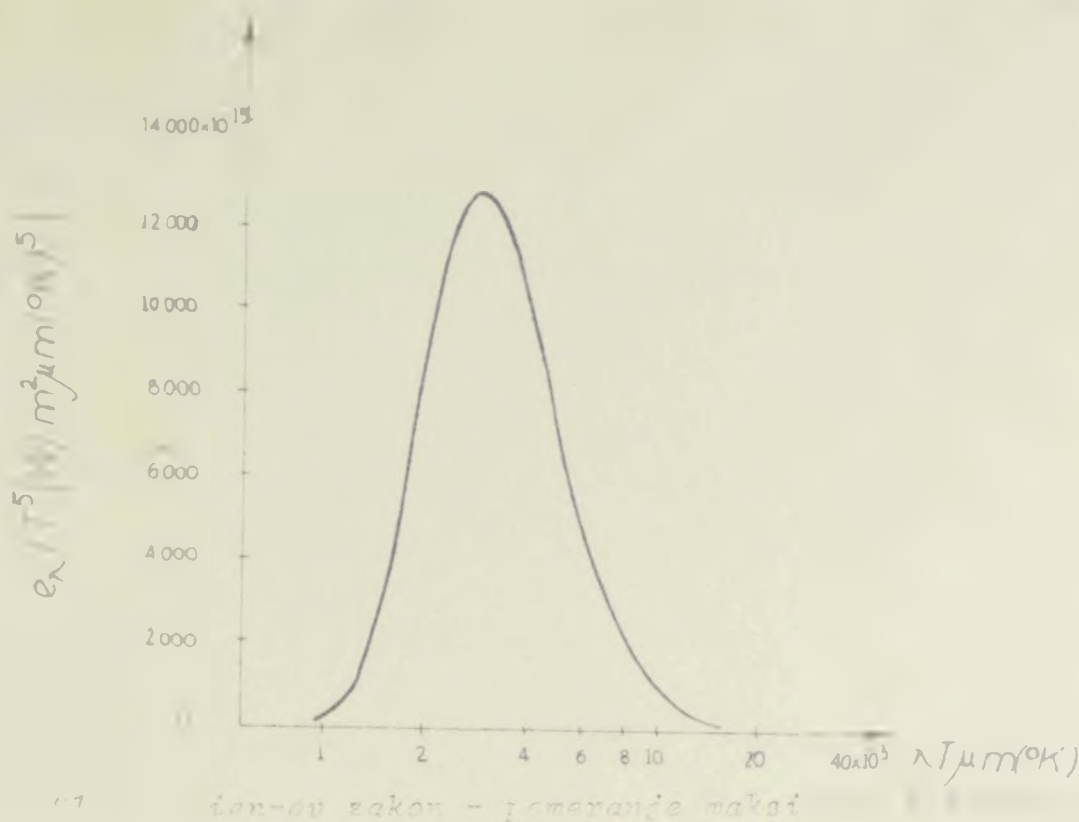
odgovara totalnoj, hemisferičnoj emisijskoj snazi crnog tela na datoj temperaturi.

Ukoliko se Planck-ov zakon (13) izrazi na sledeći način:

$$e_{\lambda} = \frac{\pi i'_{\lambda}}{(\lambda T)^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (14)$$

može se posmatrati kvantitet: $\frac{e_{\lambda}}{T^5}$ u funkciji proizvoda (λT) kao promenljive veličine.

Graficka interpretacija relacije (14) (Slika 6.) zamenjuje seriju krivih sa prethodne slike.



Ovaj zakon definisan 1893. godine / formuliše vezu između talasne dužine maksimuma emitovane energije i temperature radijacione površine na sledeći način:

$$\lambda_{max} T = C_3 = 0,2898$$

gde C_3 označava konstantu.

Vrlo jednostavan način izvođenja Wien-ovog zakona je određivanje maksimuma funkcije radijacione energije uz pomoć uslova: $d e_\lambda / d \lambda = 0$

$$e_\lambda = \frac{2 C_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$$

dobije se:

$$d e_\lambda = \left(\frac{-5 C_1}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} + \frac{2 C_1 C_2 e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}}{\lambda^7 T^2 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)^2} \right) d \lambda = 0$$

Da ove relacije moguće je doći integracijom spektralne emisivne snage u intervalu talasnih dužina od 0 do ∞ iz razene relacijom (13):

$$e = \pi \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda} d\lambda = \pi \int_0^{\infty} \frac{2C}{\lambda^5 (e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1)} d\lambda$$

Uvodjenjem spene:

$$\frac{c}{\lambda T} = x$$

u poslednju jednačinu, uz usvajanje

$$\lambda = \frac{c}{Tx} \quad ; \quad d\lambda = -\frac{c}{Tx^2} dx$$

nastaje:

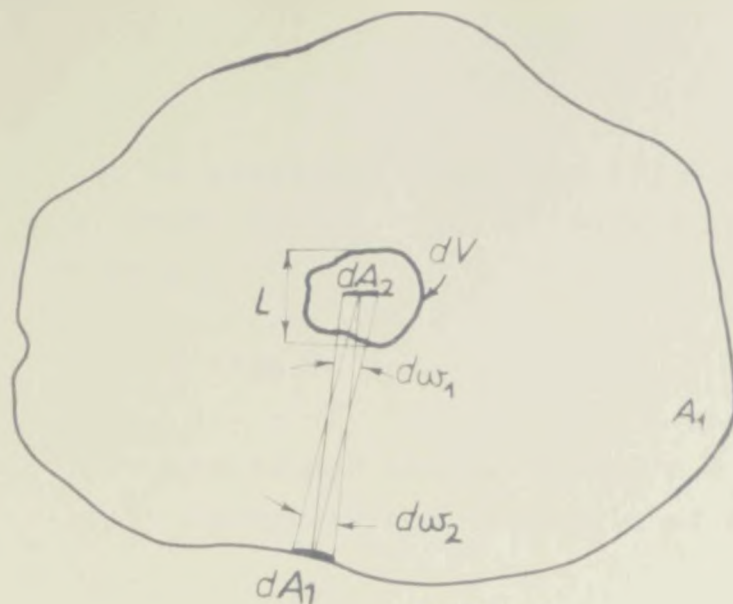
$$= \pi \int_{\infty}^0 \frac{2C_1 T^4}{C_2} \frac{-x^5}{e^x - 1} dx = \frac{2C_1}{C_2} \pi \int_0^{\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} dx$$

Rešavanjem integrala dobija se relacija identična sa izrazom (18):

$$e = \frac{2C_1 T^4 \pi^5}{15C_2^4} = \sigma T^4$$

Ukoliko se usvoji sledeća vrednost za konstantu:

$$\sigma = \frac{2C_1 \pi^5}{15C_2^4} = 5,6693 \cdot 10^{-12} \text{ W/cm}^2 (\text{OK})^4$$



1. 7. Gustina energije u radijacionom polju

Ako se zadržimo samo na infinitezimalnoj površini dA_1 i prostorni ugao, unutar kojeg se prostire snop srotovanih zraka, obeležimo sa: dA_2, R tada se energija dW uneta u cilindričnu zapreminu $L dA_2$, tokom vremena, (u dinamičkoj ravnoteži ona je jednaka sa energijom koja napušta isti prostor) može izraziti kao proizvod iz radijacionog fluksa i vremena:

$$dW = \tau d'Q = \tau i' \frac{dA}{R} dA_1$$

Kako se vreme, τ , kojeg energija "boravi" u zapremini $L dA_2$, može izraziti pomoću brzine propagacije talasa (c) i prostornog puta (L) odnosno:

$$\tau = \frac{L}{c}$$

to se gornja jednačina transformiše u:

$$dW = \frac{L}{c} i' \frac{dA}{R} dA_1$$

Integracijom za celu zapreminu nastaje

$$W = \frac{i' c A_2}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} dA_1 dV$$

odnosno

$$\frac{1}{T} \frac{dn}{dT} = \frac{4}{3} \frac{1}{T} \frac{dn}{dT} - \frac{4}{3} \frac{n}{T}$$

ili nakon sredjivanja:

$$\frac{dn}{n} = 4 \frac{dT}{T}$$

Integracijom poslednje jednacine nastaje:

$$\ln n = 4 \ln T + C$$

gde C označava integracionu konstantu.

Ako se usvoji sledeći oblik konstante: $C = \ln \frac{4\sigma}{c}$ (σ je Stefan-Boltzmann-ova konstanta, a c brzina svetlosti) može se formulirati gustina radijacione energije u cilindru u obliku:

$$n = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

Ukoliko se poslednja jednacina uvrsti u izraz (13) i ona reši po emisivnoj snazi e dobiće se matematička formulacija Stefan-Boltzmann-ovog zakona:

$$e = \sigma T^4$$

što je trebalo i dokazati.

1.1.5. Kirchoff-ov zakon - emisivnost i absorbtivnost

Kratak pregled fundamentalnih zakona zračenja, izvedenih za apsolutno crno telo, završićemo Kirchoff-ovim, koji definiše odnos između emisivne i absorbtivne sposobnosti nekog sistema. Formulisan je 1859 i 1860. godine, a jednostavno intepetiran glasi: emisivnost nekog tela jednaka je njegovoj

apsorbtiwnosti, onoliko koliko je neki sistem sposoban da apsorbuje energije, toliko će biti u stanju i da emituje.

Kompleksnije posmatrano, ovaj zakon može biti dat na više različitih načina, u odnosu na to kakav se kvalitet posmatra: spektralni u jednom pravcu, totalni u jednom pravcu, spektralni hemisferični, ili totalni hemisferični.

Definišimo spektralnu emisivnost realne površine e'_{λ} , u jednom pravcu, kao odnos emisivne snage te površine i emisivne snage apsolutno crnog tela na istoj temperaturi (što važi i za odnos intenziteta):

$$e'_{\lambda} = \frac{e_{\lambda,r}}{i'_{\lambda}} = \frac{i_{\lambda,r}}{i'_{\lambda}} \quad (25)$$

Spektralnu apsorbtivnost realne površine, u jednom pravcu α_{λ} , formuliramo kao odnos apsorbovane energije $dW_{\lambda,\alpha}$ energije naišle na element površine iz β , θ pravca, u jedinici vremena, unutar jedinичnog prostornog ugla, u intervalu talasnih dužina $\lambda - \lambda + d\lambda$:

$$\alpha_{\lambda} = \frac{dW_{\lambda,\alpha}}{i'_{\lambda} dA \cos\beta d\omega d\lambda}$$

Obe velicine $e_{\lambda,r}$ i $\alpha_{\lambda,r}$ predstavljaju funkciju talasne dužine, pravca radijacije i temperature površine.

Usvajanjem navedenih kvaliteta (emisivnosti i apsorbtivnosti) moguće je formulirati Kirchoff-ov zakon u najopštijoj formi:

$$e_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \quad (26)$$

koji važi bez ikakvih ograničenja.

Totalna emisivna snaga realne površine e'_{r} u jednom pravcu, određuje se integracijom u opsegu talasnih dužina $0 - \infty$:

$$r = \int_0^{\infty} e_{\lambda} e'_{\lambda} d\lambda$$

gde e_{λ} označava spektralnu emisivnost površine, u jednom pravcu, definisanu jednačinom (25), a e'_{λ} spektralnu emisivnu snagu crnog tela, u jednom pravcu.

U skladu sa jednačinom (25) totalna emisivnost realne površine, u jednom pravcu, predstavlja odnos totalne emisivne snage realne i totalne emisivne snage crne površine na istoj temperaturi, ili:

$$\frac{\int_0^{\infty} e_{\lambda} e'_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} e'_{\lambda} d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} e_{\lambda} e'_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} e'_{\lambda} \cos \beta d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} e_{\lambda} \lambda d\lambda}{\cos \beta v}$$

$$\frac{\int_0^{\infty} e_{\lambda} \lambda \cos \beta d\lambda}{\cos \beta \frac{6T^3}{\pi}} = \frac{\pi \int_0^{\infty} e'_{\lambda} v_{\lambda} d\lambda}{6}$$

Totalna apsorbtivnost sive površine, u jednom pravcu, u odnosu na talasnih dužina λ (u jednom pravcu) iznosi:

$$\alpha' = \frac{\int_0^{\infty} \alpha'_{\lambda} i'_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} i'_{\lambda} d\lambda}$$

U skladu sa jednačinom (26) i (27) možemo napisati: $\alpha' = \alpha'$ na sledeći način:

$$e' = \alpha'$$

vazi ukoliko:

- a) Radijacija prispela na površinu ima spektralnu raspodelu proporcionalnu raspodeli crnog tela;
- b) Emisivnost i apsorbtivnost ne zavise od talasne duzine zracenja;

Povrsine koje poseduju ove osobine nazivaju se *sive u pravcu*.

Formulišimo pojam spektralne hemisferične emisivnosti realne površine kao odnos emisivne snage realne površine, prema snazi crne površine na istoj temperaturi:

$$\epsilon_{\lambda} = \frac{e_{\lambda, r}}{e_{\lambda, c}} = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon_{\lambda} \cos \beta d\lambda d\omega}{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \beta d\lambda d\omega}$$

S druge strane, hemisferična spektralna apsorbtivnost predstavlja frakciju apsorbirane od ukupno prispele energije na realnu površinu:

$$\alpha_{\lambda} = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_{\lambda} \cos \beta d\lambda d\omega}{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \beta d\lambda d\omega}$$

Pomoću hemisferičnih spektralnih parametara ϵ_{λ} i α_{λ} izražen Kirchoff-ov zakon glasi:

$$\epsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \quad (28)$$

Poslednja zakonitost vazi u slučaju kada:

- a) Naisla radijacija ne zavisi od ugla;
- b) Spektralna emisivnost i apsorbtivnost u jednom pravcu nisu funkcije ugla.

Takve površine nazivaju se *difuzno - spektralne*.

Totalne hemisferične kvalitete ϵ i α potrebno je definisati pre formulacije poslednje alternative Kirchoff-ovog zakona.

Nazovimo odnos totalne spektralne emisivne snage realne površine i istog parametra apsolutno crnog tela emisivnošću:

$$\epsilon = \frac{e_r}{\sigma T^4} \frac{\int_0^\infty \left(\int \alpha_\lambda' \lambda d\lambda \right) \cos\beta dw}{\int_0^\infty \left(\int \lambda d\lambda \right) \cos\beta dw} = \frac{1}{\pi} \int \alpha' \cos\beta dw$$

a frakciju ukupno apsorbovane energije od totalne, hemisferične, naišle na sivu površinu apsorbivnošću:

$$\alpha = \frac{a' \alpha}{\sigma T^4} \frac{\int_0^\infty \left(\int \alpha_\lambda' \lambda d\lambda \right) \cos\beta dw}{\int_0^\infty \left(\int \lambda d\lambda \right) \cos\beta dw} = \frac{\int_0^\infty \left(\int \alpha_\lambda' \lambda d\lambda \right) \cos\beta dw}{\sigma T^4}$$

U svetlu definisanih kvaliteta Kirchoff-ov zakon glasi:

$$\epsilon = \alpha \quad (29)$$

Poslednja jednačina nema opšti karakter i primenljiva je samo u sledecim slučajevima:

- a) Naišla radijacija ne zavisi od ugla i ima spektralnu raspodelu proporcionalnu raspodeli crnog tela;
- b) Površina ima osobine sive koja emituje u pravcu;
- c) Površina ima osobine difuzne-sive.

Jednacine (26), (27), (28) i (29) predstavljaju različite alternative Kirchoff-ovog zakona, u zavisnosti od posmatranog sistema i kvaliteta koji ga karakterišu.

strane akceptujuće površine. Ovaj kvalitet autori nazivaju različitim imenima: ugaoni faktor, shape factor, konfiguracijski faktor i faktor oblika. Mi ćemo se odlučiti za poslednji.

Naipogodnije definicije i relacije za faktore nalaze se u tekstovima Eckerta i Dracke-a /2/, Hottel-a /13/, Jakob-a /14/, Kreith-a /15/, Hamilton-a i Morgan-a /16/, Leutenegger-a i Pearson-a /17/ i Siegel-a i Howell-a /1/.

Veoma je pogodno (i uobicajeno) da se faktori oblika za pojedine geometrije daju tabelarno, čime se stedi vreme potrebno za rešavanje problema. O metodama određivanja ovog izuzetno važnog podatka biće kasnije više reči.

1.2.1. Razmena toplote između dve diferencijalne površine

Definisimo na početku analize koordinatni sistem i oznake koje se tokom razmatranja biti korišćene. Zamislimo dve izotermske površine, svaku na svojoj temperaturi, (T_1 odnosno T_2) i dva diferencijalna elementa dA_1 i dA_2 koji predstavljaju njihove delove (Sl. 8.).



Sl. 8. Razmena toplote radijacijom između dve diferencijalne površine

Uočimo normale n_1 i n_2 na dA_1 i dA_2 , respektivno, a uglove između pravca radijacije (koji spaja površine) i odgovarajuće normale na površinu označimo sa β_1 i β_2 . Predpostavimo da najkraće rastojanje između infinitezimalnih površina iznosi r jedinica.

Toplotni fluks po jedinici površine dA_1 koji kreće u pravcu r i pada na površinu dA_2 , izražen u funkciji emisivne snage dA_1 i prostornog ugla, pod kojim se sa zračeće "vidi" akceptujuća površina, definiše relacija:

$$d^2Q'_{d1 \rightarrow d2} = e_1 dA_1 d\omega_2 \cos \beta_1 \quad (30)$$

Kako prostorni ugao predstavlja projekciju površine dA_2 na sferu poluprečnika r to u steradijanima može da se izrazi kao:

$$d\omega_2 = \frac{dA_2 \cos \beta_2}{r^2}$$

Zamenom u jednacini za toplotni fluks i uvrštavanjem hemisferične emisivnosti umesto intenziteta u pravcu dobija se:

$$d^2Q'_{d1 \rightarrow d2} = \frac{e_1}{\pi} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_1 dA_2 = \frac{e_1}{\pi} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_1 dA_2}{r^2}$$

Poslednja jednačina daje definitivni oblik fluksu toplote usmerene od diferencijalne površine "1" ka diferencijalnoj površini "2" (na što ukazuje oznaka u indeksu $d1-d2$). Dvostruki diferencijal ("eksponent" 2) nagoveštava zavisnost od dva diferencijalna parametra dA_1 i dA_2 .

Kako su obe površine, i emisiona i akceptujuća, crne to poslednji izraz predstavlja (definiše) energiju emitovanu sa jedne površine ka drugoj, ali istovremeno i energiju absorbovanu od strane akceptujuće površine.

Analogno prethodnom izvodjenju toplotni fluks sa površine dA_2 ka dA_1 može se izraziti u obliku:

$$d^2Q_{d2 \rightarrow d1} = \sigma \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_1 dA_2}{r^2 \pi} \quad (31)$$

Neto razmenjena toplota između diferencijalnih površina u jedinici vremena i pravcu r , jednaka je razlici flukseva formulisanih prethodnim jednačinama. Odnosno:

$$d^2Q'_{d1 \rightarrow d2} = d^2Q_{d1 \rightarrow d2} - d^2Q_{d2 \rightarrow d1} = \sigma \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 dA_2 \quad (32)$$

U uvodu o razmeni toplote zračenjem navodi se pojam faktora oblika, koji u radijacioni transfer unosi geometrijske relacije između posmatranih površina.

Polazeći od definicije faktora oblika, koji predstavlja apsorbovanu frakciju od ukupno emitovane toplote, za smer $1 \rightarrow 2$ dobiće se:

$$d^2F_{d1 \rightarrow d2} = \frac{d^2Q'_{d1 \rightarrow d2}}{\sigma T_1^4 dA_1} = \frac{\sigma T_1^4 \cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_1 dA_2}{\sigma T_1^4 dA_1} = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_2}{r \pi} \quad (33)$$

a takođe, i za smer $2 \rightarrow 1$:

$$d^2F_{d2 \rightarrow d1} = \frac{d^2Q_{d2 \rightarrow d1}}{\sigma T_2^4 dA_2} = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_1}{r \pi} \quad (34)$$

Jednačine (30) i (31) izražene pomoću faktora oblika glase:

$$d^2Q'_{d1 \rightarrow d2} = \sigma F_{d1 \rightarrow d2} dA_1$$

odnosno

$$d2 \rightarrow d1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d1 \rightarrow d2}{d1} + \frac{d2 \rightarrow d1}{d2} \right) dA_1 dA_2$$

Napominjemo da je faktor oblika, za difuzne površine, čisto geometrijski kvantitet.

Može se je, poređenjem izraza (33) i (34) dokazati da između faktora oblika koji karakterišu radijacioni transfer u smeru $1 \rightarrow 2$ i $2 \rightarrow 1$ postoji reciprocitet u smislu:

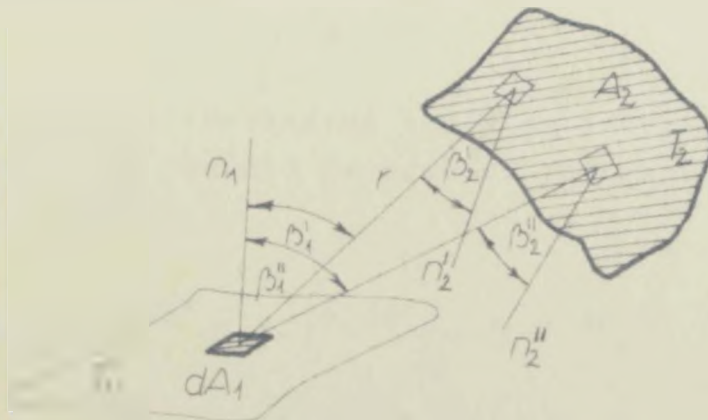
$$dA_1 F_{1 \rightarrow 2} = dA_2 F_{2 \rightarrow 1}$$

Neto jluks se, konačno, može napisati u obliku

$$q_{net} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d1} + \frac{1}{d2} \right) \left(\frac{1}{d1} + \frac{1}{d2} \right) dA_1 \left(\frac{1}{d1} + \frac{1}{d2} \right) dA_2$$

1.2.2. Razmena toplote između diferencijalne i konačne površine

Posmatrajmo diferencijalni element dA_1 površine na temperaturi T_1 i konačnu površinu A_2 na temperaturi T_2 (Sl. 9.).



Sl. 9. Razmena toplote radijacijom između diferencijalne i konačne površine

Razmena toplote zračenjem izmedju dA_1 i konačne površine odvija se tako što diferencijalni izvor razmenjuje toplotu sa svakim elementom dA_2 površine A_2 . To znači da se svakog trenutka menja ugao β_1 izmedju normale n_1 i pravca radijacije r , jer se i pravac emisije neprestalno menja. Isto se odnosi na ugao β_2 s ~~isto kao~~ pravac normale n_2 po površini A_2 varira istovremeno sa promenom pravca razmene toplote.

Koristeći predložene oznake može se izraziti toplotni fluks koji sa dA_1 odlazi na sve delove (dA_2) konačne površine u obliku:

$$dQ'_{d1 \rightarrow 2} = \int_A d^2Q'_{d1 \rightarrow dA_2} = \int_{A_2} \frac{\sigma T_1^4 \cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_1 dA_2}{r^2 \pi} -$$

$$dA_1 \sigma T_1^4 \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_2}{r^2 \pi} \quad (35)$$

S druge strane toplota emitovana sa konačne površine A_2 ka diferencijalnoj dA_1 može da se napiše u obliku:

$$dQ'_{2 \rightarrow d1} = dA_2 \sigma T_2^4 \int_{A_1} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 \quad (36)$$

Neto razmenjena toplota izmedju diferencijalne i konačne površine jednaka je razlici flukseva definisanih relacijama (35) i (36):

$$dQ'_{d1 \rightarrow 2} - dQ'_{2 \rightarrow d1} = dA_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_2}{r^2 \pi} \quad (37)$$

Na osnovu definicije faktora, kao frakcije akceptovane radijacije od ukupno emitovane, može se doći do njegove matematičke formulacije. U slučaju razmene $dA_1 \rightarrow A_2$ faktor iznosi:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{dQ'_{d1 \rightarrow 2}}{\sigma T_1^4 dA_1} = \frac{\sigma T_2^4 A_2 \int \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_2}{\sigma T_1^4 dA_1}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_2 \quad (38)$$

a za suprotan smer:

$$aF_{A_2 \rightarrow d1} = \frac{dQ'_{2 \rightarrow d1}}{\int \sigma T_2^4 dA_2} = \frac{dA_1 \sigma T_2^4 \int \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_2}{\int \sigma T_2^4 dA_2}$$

$$= \frac{dA_1}{A_2} \int \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_2$$

Izražene pomoću faktora oblika jednačine (35) i (36) glase:

$$dQ'_{d1 \rightarrow 2} = \sigma T_1^4 F_{d1 \rightarrow 2} dA_2$$

$$dQ'_{2 \rightarrow d1} = \sigma T_2^4 dF_{2 \rightarrow d1} dA_2$$

Na osnovu reciprociteta faktora oblika važi

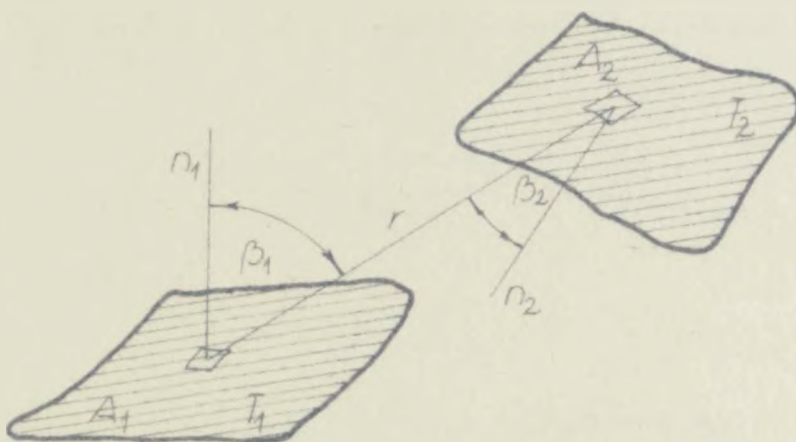
$$F_{d1 \rightarrow 2} dA_1 = dF_{2 \rightarrow d1} A_2$$

Radijacijom razmenjena toplota može se izraziti u obliku jednačine:

$$Q_{12} = \sigma T_1^4 A_1 F_{12} = \sigma T_2^4 A_2 F_{21} \quad 2 \rightarrow dA_1 dA_2$$

1.2.3. Razmena toplote izmedju dve konačne površine

Razmotrimo na kraju problem razmene toplote izmedju dve konačne površine A_1 i A_2 (Sl. 10.).



Sl. 10. Razmena toplote zračenjem izmedju dve konačne površine

U skladu sa ranije usvojenim oznakama fluksevi usmereni od jedne ka drugoj konačnoj površini, i obratno, imaju oblik:

$$Q_{12} = -\sigma T_1^4 \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 dA_2 \quad (39)$$

$$Q_{21} = \sigma T_2^4 \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 dA_2 \quad (40)$$

toplota razmenjena radijacijom jednaka je razlici:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \sigma T_1^4 A_1 - \sigma T_2^4 A_2 - \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 dA_2$$

Ako se podje od diferencijalnih izraza za faktore dobiće se sledeće jednačine:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma T_1^4 \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 dA_2}{\sigma T_1^4 A_1} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 dA_2 \quad (41)$$

odnosno:

$$Q_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma T_2^4 \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 dA_2}{\sigma T_2^4 A_2} = \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 dA_2 \quad (42)$$

Izražene pomoću faktora oblika jednačine (39) i (40) mogu biti formulisane na sledeći način:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \sigma T_1^4 F_{1 \rightarrow 2} A_1$$

$$Q_{2 \rightarrow 1} = \sigma T_2^4 F_{2 \rightarrow 1} A_2$$

I u slučaju konačnih površina važi jednačina reciprocity u smislu:

$$F_{1 \rightarrow 2} A_1 = F_{2 \rightarrow 1} A_2$$

pa je neto fluks:

$$Q_{1 \rightleftharpoons 2} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) F_{1 \rightarrow 2} A_1 = \sigma (T_2^4 - T_1^4) F_{2 \rightarrow 1} A_2$$

1.3. METODE ODREĐJIVANJA FAKTORA OBLIKA

Uvodjenje pojma faktora oblika unosi olakšice u matematički tretman radijacionog transfera između pojedinih površina. Za apsolutno crne površine, koje emituju i apsorbuju difuzno, faktor oblika predstavlja čisto geometrijski kvantitet, a njegovo uvođenje u integracione jednacine za toplotne flukseve uključuje međusobni položaj površina koje razmenjuju energiju. Faktor oblika je proporcionalan prostornom uglu pod kojim se sa jedne površine "vidi" druga.

Uobičajeno je da se jednačine faktora oblika za neke često sretane sisteme prikazuju grafički i tabelarno, što olakšava i ubrzava rešavanje problema radijacione razmene toplote.

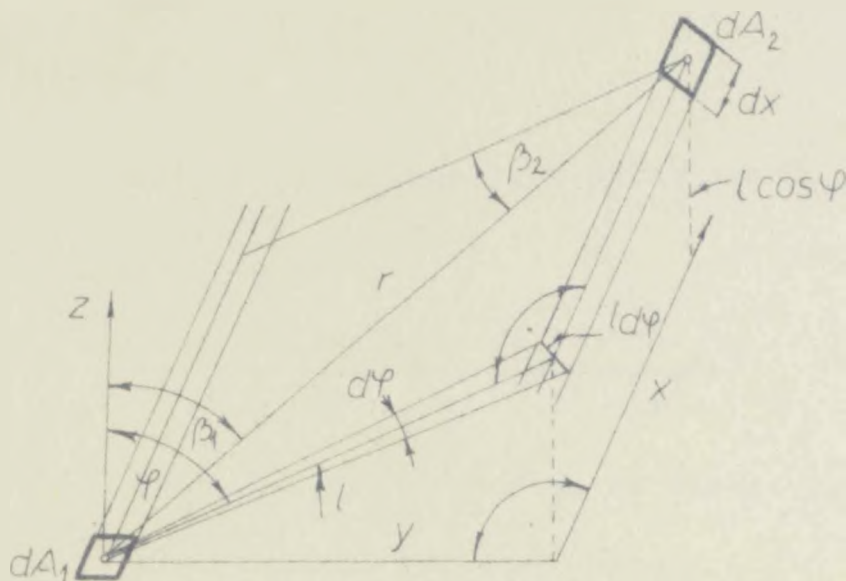
Zbog složenih oblika definicionih integralnih jednačina za mnoge geometrije, a naročito sisteme sastavljene od konačnih površina, postoje velike teškoće u njihovom direktnom određivanju. Zato je dragocena primena skraćених i pojednostavljenih metoda kad god je to moguće.

Faktor oblika se određuje:

1. Analitičkim metodama,
2. Numeričkim metodama i
3. Eksperimentalnim (analognim) metodama.

1.3.1. Površinska integracija

Pre izlaganja površinske integracije zadržimo se na primeru određivanja faktora oblika za dve infinitezimalne površine (Sl. 11), koje leže na paralelnim nekoplanarnim trakama /1/.



Sl. 11. Razmena toplote između dve diferencijalne površine

Označimo ih sa dA_1 i dA_2 , a rastojanje između njih sa r . Ostale oznake su navedene na slici 11.

Faktor oblika definiše jednačina:

$$k_{f_{d1}} = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_2}{r^2} = \frac{\cos \beta_1 d\omega_2}{\pi}$$

u skladu sa našim oznakama može se napisati

$$r = \sqrt{l^2 + x^2}$$

$$\cos \beta_1 = \frac{l \cos \varphi}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

Prostorni ugađ pod kojim se sa emisione površine dA_1 vidi akceptujuća površina dA_2 je po definiciji projekcija dA_2 na sferu radijusa r izražen u steradijanima.

Kako je:

$$dA_2 \cos \beta_2 = dx \, dy$$

to je projekcija:

$$(dA_2)_{proj} = dA_2 \cos \beta_2 = dx \, dy \cos \beta_2$$

Konačno je prostorni ugađ:

$$\frac{dA_2 \cos \beta_2}{r^2} = \frac{dx \, dy \cos \beta_2}{l^2 + x^2}$$

Kosinus ugla β_2 može da se izrazi kao: $\cos \beta_2 = \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}$,
pa je:

$$d\omega = \frac{dx \, dy}{l^2 + x^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

Zamenom u izraz sa faktor oblika dobiće se:

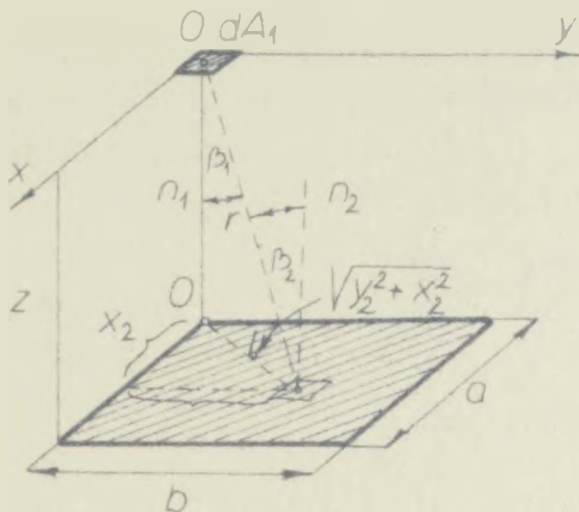
$$dF_{d1 \rightarrow d2} = \frac{1}{\pi} \frac{l \cos \varphi}{\sqrt{l^2 + x^2}} \cdot \frac{dx \, dy \, l}{l^2 + x^2} = \frac{l \cos \varphi \, dx \, dy}{\pi (l^2 + x^2)^{3/2}}$$

ili nakon sredjivanja:

$$dF_{d1 \rightarrow d2} = \frac{1}{\pi} \frac{l \, dx \, dy \, \cos \varphi}{(l^2 + x^2)^{3/2}}$$

Uobičajeno je da se faktori oblika za odredjen položaj infinitezimalnih površina prikazu tabelarno (tab. 1.).
/1/ u prilogu 1.

Konfiguracija koja se u inženjerstvu često sreće je ravna diferencijalna površina dA_1 prema jednom od temena pravougaonika A_2 paralelnog sa dA_1 , (Sl. 12.) /18/:



Sl. 12. Razmena toplote izmedju pravougaonika i diferencijalne površine naspram jednog od temena pravougaonika

Obelezimo normale na površine sa n_1 i n_2 , a uglove izmedju pravca radijacije (koji spaja konačnu sa infinitezimalnom površinom) i odgovarajućih normala sa β_1 i β_2 . Za datu konfiguraciju vazi: $\beta_1 - \beta_2$

Ukoliko se odabere koordinatni sistem kako to slika pokazuje, tada je:

$$r = \sqrt{y_2^2 + x_2^2}$$

a rastojanje izmedju dA_1 i dA_2 biće:

$$r^2 = y_2^2 + x_2^2 + z^2 \quad (43)$$

Kosinusi odgovarajućih uglova su:

Ako usvojimo sledeće oznake: n_1 i n_2 za normale na dA_1 i dA_2 , a β_1 i β_2 za uglove između dA_1 i dA_2 itd., tada se može napisati:

$$r^2 = h^2 + a^2 \quad (46)$$

pri čemu je:

$$r^2 = l^2 + \rho^2 - 2l\rho (\cos 180^\circ - \theta) = b^2 + \rho^2 + 2\rho l \cos \theta$$

(kosinusna teorema za kosougli trougao).

Kosinusi odgovarajućih uglova su:

$$\cos \beta_1 = \frac{l + \rho \cos \theta}{r} \quad (47)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{h}{r} \quad (48)$$

a diferencijalna površina prema krugu iznosi:

$$dA_2 = \rho d\rho d\theta \quad (49)$$

Zamenom relacija (46), (47), (48) i (49) u izraz za faktor oblika nastaje:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{\pi} \int \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_2 = \frac{1}{\pi} \int \frac{(l + \rho \cos \theta) h}{r^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{h}{\pi} \int_{\rho=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{(l + \rho \cos \theta) \rho}{(h^2 + \rho^2 + l^2 + 2\rho l \cos \theta)} d\theta d\rho \end{aligned}$$

Ako se poslednja jednačina dovede u bezdimenzi-
oni oblik deljenjem svih veličina sa l^4 i uvođenjem oznaka:
 $h/l = H$, $r/l = R$, $S/l = X$ dobiće se:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{\gamma l}{\kappa} \int_{\lambda=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{X (1+X \cos \theta)}{(H^2 + X^2 + 1 + 2X \cos \theta)^{3/2}} d\theta dX$$

pri čemu je izvršena integracija u intervalu $0 \leq \theta \leq \pi$ i dobije-
na vrednost pomnožena sa dva (iz razloga simetrije).

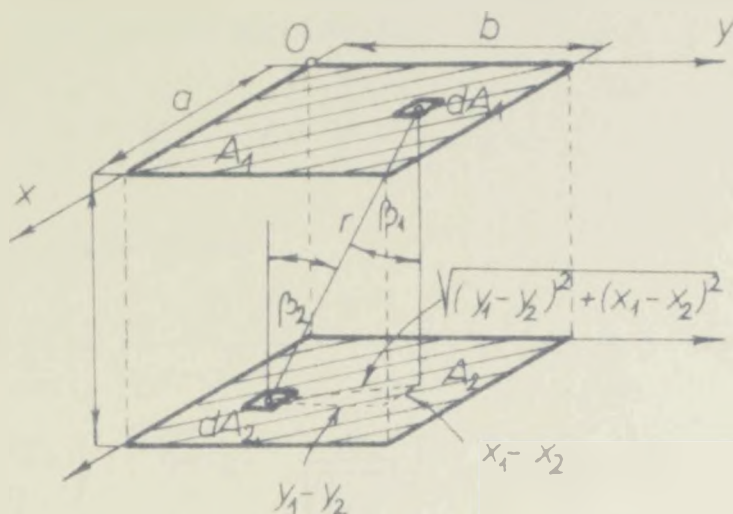
Konačno se dobija relacija za faktor oblika dife-
rencijalne dA_1 površine prema krugu A_2 u obliku:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{H}{2} \left(\frac{H^2 + R^2 + 1}{(H^2 + R^2 + 1)^2 - 4R^2} - 1 \right)$$

Faktori oblika za neke geometrijski pravilne sis-
teme $dA_1 \rightarrow A_2$ navedeni su u tabeli 2. /1/, /12/, /13/, /14/, /15/,
/16/, /17/, /9/ u prilogu 1.

Uredjivanje faktora oblika za dve konačne povr-
sine zahteva dve površinske integracije i često predstavlja oz-
biljan problem.

Uzmimo kao primer /18/ nalaženje faktora za dve
ravne pravougaone površine istih dimenzija postavljene jedna
naspram druge (Sl.14).



Sl. 14. Razmena toplote zračenjem između dva paralelna pravougaonika

Oznake koje će biti korišćene istovetne su sa onim iz predhodnog primera. I u ovom slučaju će biti: β_1 , $-\beta_2$, z a je:

$$\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = \frac{z}{r}$$

$$dA_1 = dx_1 dy_1, \quad dA_2 = dx_2 dy_2$$

Zamenom prethodnih izraza u jednačinu za faktor oblika dobiće se:

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{A_1} \iint_{A_1} \iint_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_1 dA_2 = \frac{1}{ab} \int_{x_1=0}^{x_1=a} \int_{y_1=0}^{y_1=b} \int_{x_2=0}^{x_2=a} \int_{y_2=0}^{y_2=b} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dx_2 dy_2 dx_1 dy_1$$

$$\frac{dx_1 dy_1 dx_2 dy_2}{\pi (z^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^2}$$

rezultat integracije u bezdimenzionom obliku može se dobiti uvođenjem kolicnika:

$$X = \frac{a}{r} \quad , \quad Y = \frac{b}{r}$$

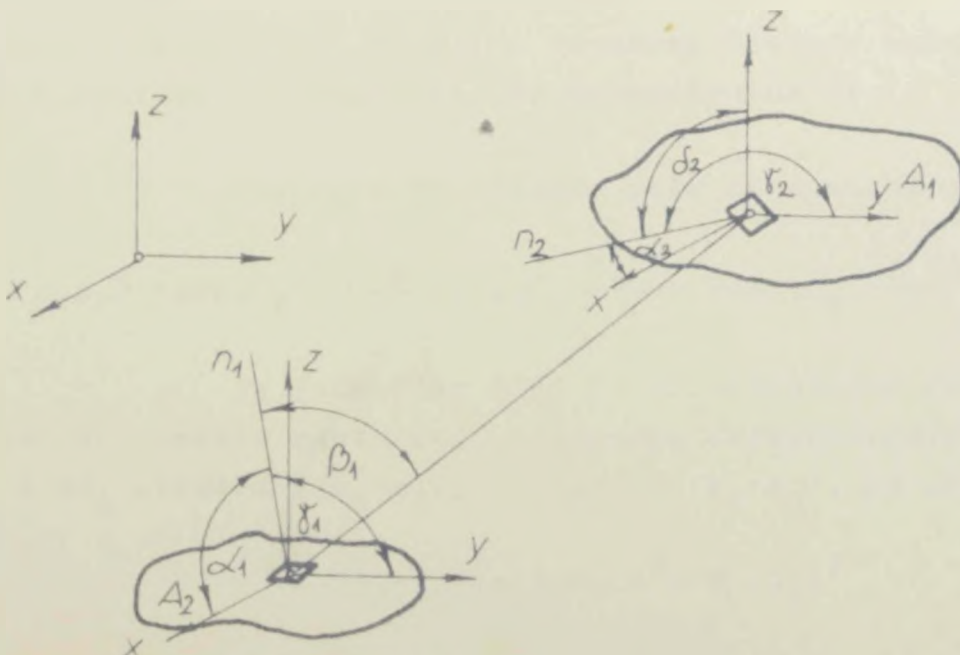
kada dobija sledeću formu:

$$I_{2 \rightarrow 2} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{XY} \ln \frac{(1+X)(1+Y)^2}{(1+X+Y)} - \frac{2}{X} \operatorname{tg}^{-1} Y - \frac{2}{Y} \operatorname{tg}^{-1} X + 2 \sqrt{1+\frac{Y^2}{X^2}+Y^2} \right. \\ \left. \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} + \sqrt{1+\frac{Y^2}{X^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right)$$

Faktori oblika za konačne površine sistematizovani su u tabeli br. 5 u prilogu 1 /1/, /17/, /19/.

1.3.2. Konturna integracija

Za dobijanje numeričkih rezultata iz bilo koje od definicionih jednačina faktora oblika (33), (38) i (41) potrebno je izraziti $\cos \beta_1$, $\cos \beta_2$ i r u funkciji X , Y i Z koordinata u usvojenom koordinatnom sistemu (Sl.15).



Sl. 15. Primena konturne integracije na određivanje faktora oblika između dif.površina

Označimo uglove između normale na dA_1 površinu i koordinatnih osa sa: $\alpha_1, \gamma_1, \delta_1$, a između normale na dA_2 i x, y, z ose sa: α_2, γ_2 i δ_2 . Usvajanjem ovakvih oznaka kosinusi uglova se mogu obeležiti sa:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= l_1 & \cos \alpha_2 &= l_2 \\ \cos \gamma_1 &= m_1 & \cos \gamma_2 &= m_2 \\ \cos \delta_1 &= n_1 & \cos \delta_2 &= n_2 \end{aligned}$$

Takođe je potrebno uočiti uglove (α, γ, δ) između radius vektora r i koordinatnih osa, odnosno njihove kosinuse (l, m i n).

Kosinus ugla između dva vektora ($\overrightarrow{dA_1}$ i \overrightarrow{r}) može da se definiše zbirom:

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 &= l_1 l + m_1 m + n_1 n \\ &= \cos \alpha_1 \frac{x_2 - x_1}{r} + \cos \gamma_1 \frac{y_2 - y_1}{r} + \cos \delta_1 \frac{z_2 - z_1}{r} \end{aligned} \quad (50)$$

gde količnik oblika: $(x_2 - x_1)/r$ označava kosinus ugla između radius vektora r i odgovarajuće koordinatne ose.

Analogno prethodnom može se napisati:

$$\cos \beta_2 = \cos \alpha_2 \frac{x_1 - x_2}{r} + \cos \gamma_2 \frac{y_1 - y_2}{r} + \cos \delta_2 \frac{z_1 - z_2}{r} \quad (51)$$

Iz jednačina (50) i (51) očigledno je da su usvojene komponente rastojanja r između diferencijalnih površina dA_1 i dA_2 sledeće: $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ i $(z_2 - z_1)$, pa je:

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (52)$$

U cilju jednostavnijeg odredjivanja faktora oblika F_{d1-2} ~~ili F_{1-2}~~ , koje podrazumeva integraciju oko jedne ili dve konačne površine, primenjuje se Stokes-ova teorema za transformaciju integrala po površini (dvostrukog) u linijski integral (jednostruki) po konturi.

Na ispitivanju i usavršavanju ovog metoda konturne integracije naročito mnogo su radili Moon /20/, Sparrow i Cess /12/, Sparrow /22/ i Siegel i Howell /1/.

U trodimenzionom koordinatnom sistemu Stokes-ova teorema glasi:

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_A \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dA \quad (53)$$

gde su P , Q i R dva puta diferencijabilne funkcije po x , y i z .

Iokažimo na primeru faktora oblika F_{d1-2} ~~rešavanje~~ nje jednačine (38) metodom konturne integracije. Zamenom izraza (50) i (51) u relaciju (38) dobija se:

$$d1-2 = \int \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2 \pi} dA_2 = \frac{1}{\pi} \int \frac{((x_2 - x_1) \cos \alpha_1 + (y_2 - y_1) \cos \beta_1 + (z_2 - z_1) \cos \gamma_1) ((x_1 - x_2) \cos \alpha_2 + (y_1 - y_2) \cos \beta_2 + (z_1 - z_2) \cos \gamma_2)}{r^4} dA_2$$

odnosno:

$$d1-2 = \frac{1}{\pi} \int \frac{((x_2 - x_1)l_1 + (y_2 - y_1)m_1 + (z_2 - z_1)n_1) ((x_1 - x_2)l_2 + (y_1 - y_2)m_2 + (z_1 - z_2)n_2)}{r^4} dA_2$$

Ako se uvede izraz:

$$f = \frac{(x_2 - x_1)l_1 + (y_2 - y_1)m_1 + (z_2 - z_1)n_1}{r^4 \pi}$$

tada faktor oblika postaje:

$$d\Omega = \int_{A_2} ((z_1 - z_2)l_2 + (y_2 - y_1)m_1 + (x_1 - x_2)n_2) dA_2$$

Ako se poslednja jednačina uporedi sa desnom stranom Stokes-ove teoreme može se zaključiti da primena relacije (53) zahteva sledeće uslove:

$$\frac{\partial R}{\partial y_2} - \frac{\partial Q}{\partial z_2} = (x_1 - x_2)f$$

$$\frac{\partial P}{\partial z_2} - \frac{\partial R}{\partial x_2} = (y_1 - y_2)f$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_2} - \frac{\partial P}{\partial y_2} = (z_1 - z_2)f$$

Rešenja ove tri jednačine /22/ imaju oblik

$$P = \frac{-n_2(z_2 - z_1) + n_1(y_2 - y_1)}{2r^2\pi}$$

$$Q = \frac{l_1(z_2 - z_1) - n_1(x_2 - x_1)}{2r^2\pi}$$

$$R = \frac{-l_1(y_2 - y_1) + m_1(x_2 - x_1)}{2r^2\pi}$$

Supstitucijom funkcija P, Q i R u konturni integral:

$$d\Omega = \oint_{C_2} (P dx_2 + Q dy_2 + R dz_2)$$

dobija se transformisana jednačina za faktor oblika:

$$F_{d1-2} = l_1 \oint_{C_2} \frac{(z_2 - z_1) dz_2 - (y_2 - y_1) dy_2}{2r^2 \pi} + m_1 \oint_{C_2} \frac{(x_2 - x_1) dz_2 - (z_2 - z_1) dx_2}{2r^2 \pi} + n_1 \oint_{C_2} \frac{(y_2 - y_1) dx_2 - (x_2 - x_1) dy_2}{2r^2 \pi} \quad (54)$$

Tako se dvostruka integracija (po površini) zamjenjuje sabiranjem tri linijska integrala

Kosinusi l_1 , m_1 i n_1 kao i koordinate površine $dA_1 (x_1, y_1, z_1)$ su veličine konstantne tokom integracije. Koordinate (x_2, y_2, z_2) se odnose na bilo koju tačku na konturi, a r je rastojanje između dA_1 i tačke na konturi. To su parametri koji variraju za vreme integracije.

Pogodno je (pri izboru koordinatnog sistema) orijentisati diferencijalnu površinu dA_1 u pravcu jedne od osa, kada dva od tri kosinusa ugla postaju jednaki nuli, tj. dva od tri sabirka u jednačini (55) izostaju.

Izraz za faktor oblika (54) može da se posmatra kao zbir međusobno nezavisnih faktora:

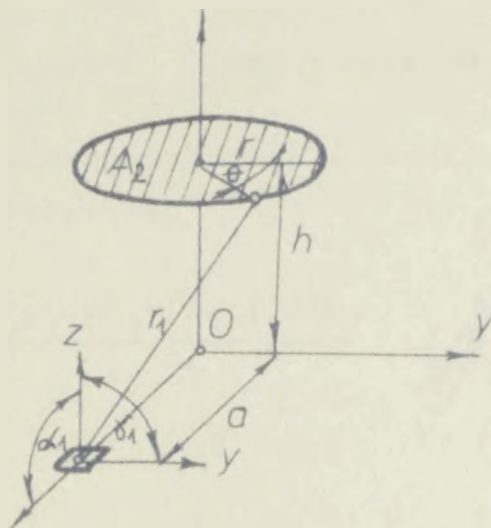
$$F_{d1-2} = l_1 (F_{d1-2})_x + m_1 (F_{d1-2})_y + n_1 (F_{d1-2})_z \quad (55)$$

Proizvod kosinusa ugla između koordinatne ose i normale na dA_1 (na pr. l_1) i faktora (odgovarajući je $(F_{d1-2})_x$) predstavlja faktor oblika između površine dA_1 orijentisane u pravcu x ose i konačne površine A_2 .

Jednačina (55) predstavlja matematičku formulaciju principa superpozicije /22/. U literaturi /16, 1, 19/ se mogu naći faktori za diferencijalne elemente orijentisane u prav-

cu koordinatnih osa, a zatim se primenom principa superpozicije, na jednostavan način, rešava algebarska jednačina (55).

Ilustrujemo metod konturne integracije, za sistem diferencijalna površina prema konačnoj površini, primerom /23/ prikazanim na slici 16. Usvojimo koordinatni sistem koji će omogućiti što jednostavnije rešavanje problema.



sl. 16. primena konturne integracije na sistem diferencijalna površina prema krugu, koji ne leži na istoj osi

Označimo radius kruga sa r , rastojanje kruga od koordinatnog početka sa h , a rastojanje dA_1 od koordinatnog početka sa a .

Pogodan izbor koordinata poništava kosinuse uglova:

$$x_1 = \cos \alpha_1 - \cos \pi/2 = 0$$

$$y_1 = \cos \beta_1 - \cos \pi/2 = 0$$

$$z_1 = \cos \sigma_1 - \cos 0 = 1$$

Takodje je:

$$x_2 = a, \quad y_2 = z_2 = 0, \quad z_1 = h$$

odnosno:

$$r_2^2 = (x_2 - a)^2 + y_2^2 + h^2$$

Ako se uvedu polarne koordinate tada se može napisati:

$$\begin{aligned} x_2 &= r \cos \theta & dx_2 &= -r \sin \theta d\theta \\ y_2 &= r \sin \theta & dy_2 &= r \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Zamenom prethodnih jednačina u izraz za konturnu integraciju (54) dobiće se:

$$dI_{2 \rightarrow 2} = n_1 \oint_{C_1} \frac{(y_2 - y_1) dx_2 - (x_2 - x_1) dy_2}{2r_1^2 \pi} = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{y_2 (-r \sin \theta d\theta) - (x_2 - a) (r \cos \theta d\theta)}{(x_2 - a)^2 + y_2^2 + h^2}$$

$$= \frac{(r \cos \theta - a) (r \cos \theta d\theta)}{(x_2 - a)^2 + y_2^2 + h^2}$$

ili nakon sredjivanja:

$$dI_{2 \rightarrow 2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta - \frac{a}{r}}{a^2 + r^2 + h^2 - 2ar \cos \theta} a d\theta$$

Poslednja jednačina integracijom daje:

$$I_{2 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \frac{r - \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}{2 \sqrt{\left(2a\left(\frac{a}{r}\right) + \left(\frac{l}{r}\right)^2\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2}}$$

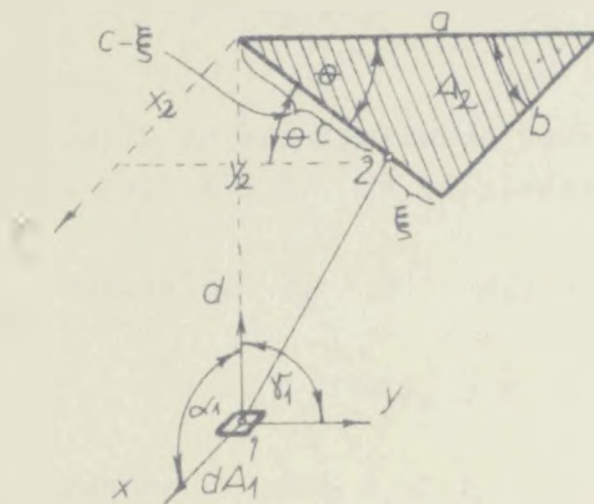
Uvodjenjem bezdimenzionih parametara:

$$R = \frac{r}{a}, \quad H = \frac{h}{a}, \quad Z = 1 + \frac{l^2}{a^2} + \frac{h^2}{a^2}$$

dobiće se:

$$F = \frac{1 + H^2 - R^2}{\sqrt{Z^2 - 4R}}$$

Primenom konturne integracije odredićemo faktor oblika između elemenata dA_1 naspram jednog temena pravouglog trougla A_0 (Sl. 17). /1/:



Sl. 17. primena konturne integracije na određivanje faktora oblika između diferencijalne površine i pravouglog trougla

Postavimo koordinatni sistem onako kako pokazuje slika 17. Zaključujemo da vazi:

$$n_1 = \cos \alpha_1 = \cos \pi/2 = 0$$

$$m_1 = \cos \gamma_1 = \cos \pi/2 = 0$$

$$n_2 = \cos \delta = \cos 0 = 1$$

Rastojanje između proizvoljne tačke na konturi trougla A_0 i tačke $1(x_1, y_1, z_1)$ od diferencijalnog izvora dA_1 , tj. tačke $1(x_1, y_1, z_1)$ je:

$$r^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + d^2$$

jer je:

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

Konačno se zamenom odgovarajućih izraza u relaciji (54) dobija:

$$dI \rightarrow z = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{y_2 dx_2 - x_2 dy_2}{x_2^2 + y_2^2 + a^2}$$

Integraciju je sada potrebno voditi duž tri strane pravouglog trougla. Sa slike 17. je očigledno:

duž stranice a: $x_2 = 0 \quad dx_2 = 0$

$$0 \leq y_2 \leq a$$

duž stranice b: $0 \leq x_2 \leq b$

$$y_2 = a \quad dy_2 = 0$$

Duž hipotenuze c integracija se vodi od $\xi = 0$ do c, pri čemu je sa ξ obeležena koordinata tačke na hipotenuzi, pa je:

$$x_2 = (c - \xi) \sin \theta \quad dx_2 = -\sin \theta d\xi$$

$$y_2 = (c - \xi) \cos \theta \quad dy_2 = -\cos \theta d\xi$$

Ako se sada integracija po zatvorenoj liniji izvede na sledeći način:

$$\oint_{C_1} = \int_a + \int_b + \int_c$$

Dobiće se:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{I}{2\pi} \int_0^c \frac{adX}{x_2^2 + a^2 + d^2} + \int_0^c \frac{-(c-\xi) \cos\theta \sin\theta d\xi + (c-\xi) \sin\theta \cos\theta d\xi}{(c-\xi)^2 \sin^2\theta + (c-\xi)^2 \cos^2\theta + d^2} = 0$$

Odnosno, nakon sređjivanja ostaje:

$$d1 \rightarrow 2 = \frac{I}{2\pi} \int_0^b \frac{adX_2}{x_2^2 + a^2 + d^2}$$

Rešavanje gornjeg integrala je vrlo jednostavno. konačni oblik faktora za diferencijalnu površinu dA_1 prema pravouglom trouglu A_2 glasi:

$$d1 \rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

Uobičajena je formulacija faktora oblika pomoću bezdimenzionih parametara. U ovom slučaju uvode se varijable:

$$x = \frac{a}{d}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$$

kada faktor postaje:

$$d1 \rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

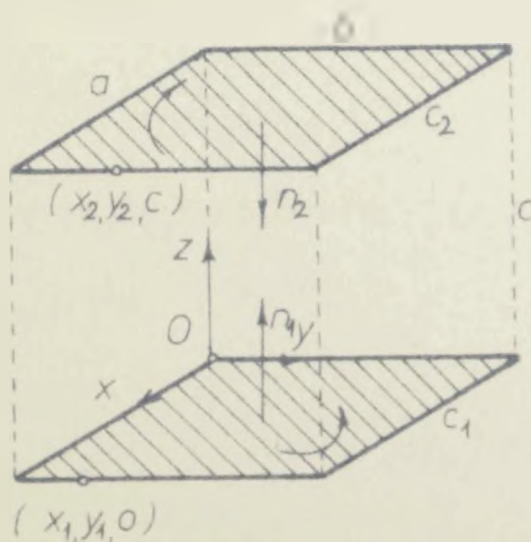
Metod konturne integracije primenjen na dve konačne površine /24/, četverostruki integral (dva površinska) transformiše u dvostruki (dva linijska).

Primenom Stokes-ove teoreme dolazi se do izraza, koji u konačnoj formi glasi:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = \frac{1}{4\pi A} \left(\oint \oint \ln r dX_1 dX_2 + \ln r dy_1 dy_2 + \right. \\ \left. + \ln r dz_1 dz_2 \right) \end{aligned} \quad (56)$$

Γ_1 i Γ_2 označavaju konture konačnih površina A_1 i A_2 koje razmenjuju toplotu radijacijom, a r predstavlja rastojanje između tačaka konture.

Pokažimo primenu poslednje jednačine na konfiguraciju: dva paralelna pravougaonika, jedan naspram drugog /1/ (Sl. 18.):



Sl. 18. Primena konturne integracije na određivanje faktora oblika dva paralelna pravougaonika

Za obe ploče z je konstantno, a dz je jednako nuli ($dz = 0$), pa se jednačina (56) transformiše u:

$$1 \rightarrow 2 \quad \frac{1}{2\pi A_1} \left(\oint_{C_1} \oint_{C_2} \ln r dX_1 dX_2 + \ln r dy_1 dy_2 \right) \quad (57)$$

Koordinate tačaka na konturama su: $(x_1, y_1, 0)$ na C_1 odnosno (x_2, y_2, c) na C_2 .

Integracija (prema jednačini (56)) izvodi se kretanjem duž konture C_1 iz jedne odabrane tačke na konturi C_1 , a zatim duž konture C_2 iz referentne tačke na konturi C_2 . Sa slike 18. je ožigledno:

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2\pi A_1} \oint_{C_1} \left(\int_{y_2=0}^b \ln(r_b)_1 dy_1 dy_2 + \int_{x_2=0}^a \ln(r_a)_1 dx_1 dx_2 + \int_{x_2=0}^a \ln(r_b)_1 dy_1 dy_2 + \int_{x_2=a}^0 \ln(r_a)_2 dx_1 dx_2 \right)$$

ili nakon sredjivanja:

$$\frac{1}{2\pi A_1} \oint_{C_1} \left(\int_{y_2=0}^b \ln(r_b)_1 dy_2 + \int_{y_2=b}^0 \ln(r_b)_2 dy_2 \right) dy_1 + \frac{1}{2\pi A_1}$$

$$\oint_{C_1} \left(\int_{x_2=0}^a \ln(r_a)_1 dx_2 + \int_{x_2=a}^0 \ln(r_a)_2 dx_2 \right) dx_1$$

Nakon zamene odgovarajućih radius vektora dobiće se:

$$I_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2\pi ab} \oint_{C_1} \left(\int_{y_2=0}^b (\ln \sqrt{x_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + c^2}) dy_2 + \right.$$

$$\left. \int_{y_1=b}^0 (\ln \sqrt{(a-x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + c^2}) dy_2 \right) dx_1$$

$$- \frac{1}{2\pi ab} \oint_{C_1} \left(\int_{x_2=0}^a (\ln \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (b - y_1)^2 + c^2}) dx_2 + \right.$$

$$\left. \int_{x_2=a}^0 (\ln \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1)^2 + c^2}) dx_2 \right) dy_1$$

Konačno se integracija poslednje jednačine vodi duž konture C_2 , kada se definitivno dobija izraz:

$$I_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2\pi ab} \int_{y_1=1}^b \int_{y_2=0}^b \ln \left(\frac{a^2 + (y_2 - y_1)^2 + c^2}{(y_2 - y_1)^2 + c^2} \right) dy_2 dy_1 +$$

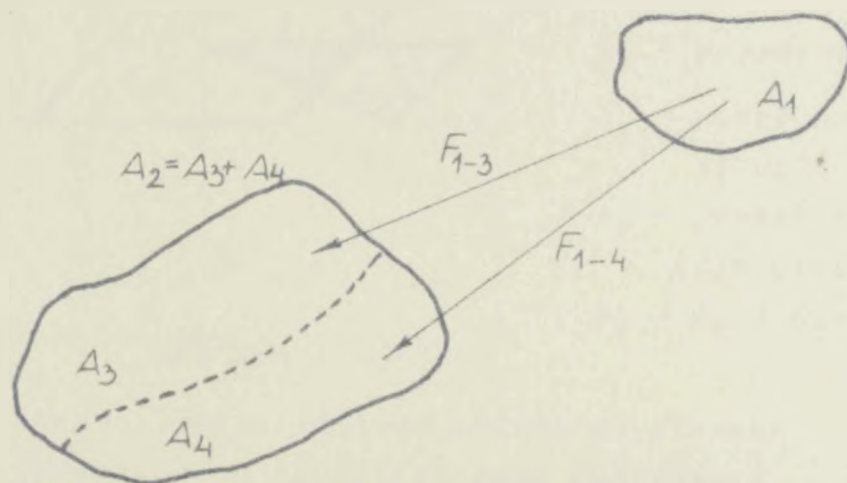
$$+ \int_{x_1=0}^a \int_{y_1=0}^b \ln \left(\frac{(x_2 - x_1)^2 + b^2 + c^2}{(x_2 - x_1)^2 + c^2} \right) dx_2 dx_1$$

Tako se faktor oblika dobija kao zbir dva integrala, koji se mogu analitički rešiti i koji daju faktor oblika (u bezdimenzionoj formi) u vidu jednačine (U Tabeli 3. jednačina broj: 1.).

1.5.3. Algebra faktora oblika

Ranije je rečeno da se faktor oblika za neke konfiguracije često sretane i korišćene obično prikazuju tabelarno. Algebra faktora oblika je metod odredjivanja nepoznatog iz poznatih faktora (njihovim pogodnim kombinacijama), a svodi se na rešavanje vrlo jednostavnih algebarskih jednačina.

Naprimera, zamislimo konfiguraciju na slici 19. Faktor oblika između konačne površine A_1 i $A_2 = A_3 + A_4$ pred-



Sl. 19. Metoda odredjivanja faktora oblika primenom algebre faktora

stavlja frakciju energije emitovane sa A_1 , koju obuhvata površina A_2 . I ako se A_2 podeli na dva dela, tada zbir delova zračenja obuhvaćenih od strane A_3 i A_4 mora biti jednak prvobitnom faktoru. Odnosno:

$$k_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 3} + F_{1 \rightarrow 4}$$

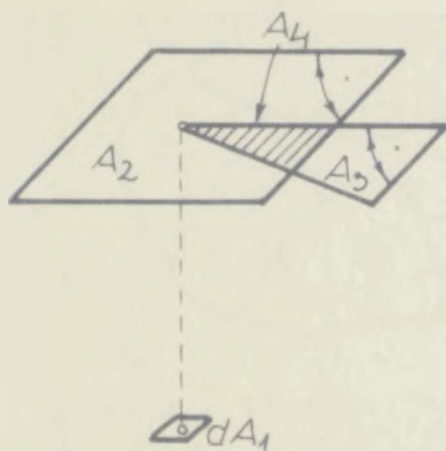
Iz poslednje jednačine je moguće odrediti, pomoću poznatih faktora (na pr. $F_{1 \rightarrow 2}$ i $F_{1 \rightarrow 3}$) nepoznati:

$$F_{1 \rightarrow 4} = F_{1 \rightarrow 2} - F_{1 \rightarrow 3}$$

Ili ukoliko nas zanima faktor u suprotnom smeru, primenom pravila reciprociteta, može se dobiti:

$$A_1 F_{1 \rightarrow 4} = A_4 F_{4 \rightarrow 1} \quad F_{4 \rightarrow 1} = \frac{A_1}{A_4} F_{1 \rightarrow 4} = \frac{A_1}{A_4} (F_{1 \rightarrow 2} - F_{1 \rightarrow 3})$$

Za konfiguraciju na slici 20. može se napisati



A_2 - površina kvadrata

A_3 - površina pravouglog trougla

A_4 - presek A_2 i A_3 (takođe pravougli trougao)

$$A_4 = A_2 + A_3 - A_4$$

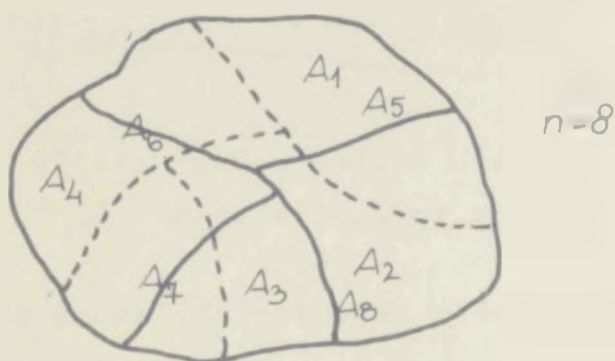
Sl. 20. Primena algebre faktora oblika na sistem: diferencijalna površina prema kvadratu i pravouglom trouglu koji se delimično preklapaju

$$F_{d1 \rightarrow 6} = F_{d1 \rightarrow 2} + F_{d1 \rightarrow 3} - F_{d1 \rightarrow 4}$$

U odgovarajućim tabelama moguće je naći podatke o faktorima oblika za sistem: diferencijalna površina prema kvadratu, postavljena tako da normala na dA_1 prolazi kroz jedno teme trougla A_3 i istovremeno predstavlja njegovu normalu. Na osnovu poznatih faktora određuje se nepoznati.

Dakle, suština algebre faktora oblika je raščlanjavanje geometrijski složenih sistema na pojedinačne, pravilne konfiguracije, za koje su faktori oblika utvrđeni, a zatim određivanje nepoznatih faktora pogodnom kombinacijom (sadržavanjem ili oduzimanjem) poznatih.

Često se pojavljuje potreba definisanja faktora oblika za sistem od n površina, koje formiraju zatvorenu celinu (Sl.21.). U tom slučaju, energija emitovana sa ma koje povr-



Sl.21. Algebra faktora oblika primenjena na šupljinu od n površina

šine unutar šupljine pogadja sve ostale, a ako je emisiona površina konkavna, tada i nju samu.

Kako izlaza iz celine nema, to zbir svih frakcija obuhvaćene energije, od strane n površina koje okružuju emisiju k , mora biti jedan, odnosno:

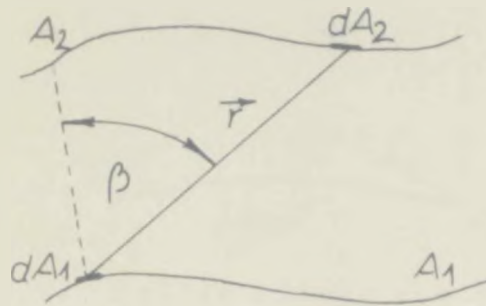
$$\sum_{j=1}^n F_{kj} = 1$$

1.3.4. Određivanje faktora oblika dvodimenzionih radijacionih sistema

Kada površine, koje razmenjuju toplotu, imaju jednu dimenziju beskonačno dugu u odnosu na druge dve, faktor

oblika je moguće odrediti na vrlo jednostavan način.

U slučaju dve diferencijalne površine (Sl.22), koje predstavljaju delove konačnih površina A_1 i A_2 beskonačne



Sl.22. Faktor oblika dve dvodimenzione, diferencijalne površine (trake)

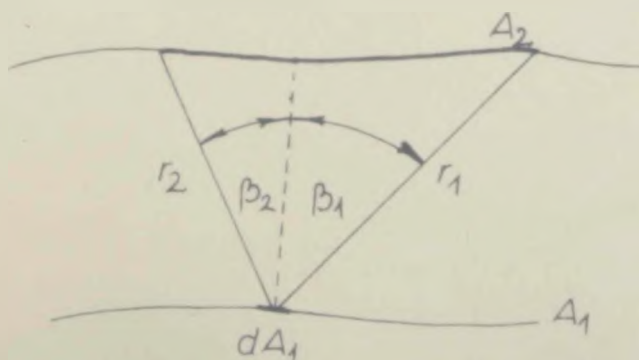
dužine u pravcu z-ose (normalne na ravan hartije), faktor oblika glasi /23/:

$$F_{d1-d2} = \frac{1}{2} d \sin(\beta)$$

U skladu sa ranije korišćenim oznakama β je ugao između normale na površinu dA_1 i pravca vektora \vec{r} , koji spaja diferencijalne površine dA_1 i dA_2 .

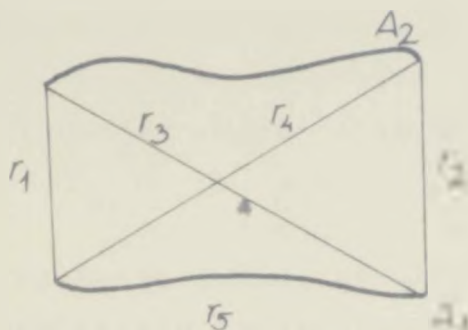
Za dvodimenzioni sistem: diferencijalna površina dA_1 , prema konačnoj površini A_2 (kao slici 23.) faktor oblika glasi /23/:

$$F_{d1-2} = \frac{1}{2} (\sin(\beta_1) + \sin(\beta_2))$$



Sl.23. Faktor oblika diferencijalne i konačne dvodimenzione površine (trake)

Ukoliko dve dvodimenzione konačne površine (na slici 24.) razmenjuju toplotu zračenjem, faktor oblika je moguće odrediti primenom Hottel-ove CROSED STRING metode /13/.



Sl. 24. Faktor oblika dve konačne dvodimenzione površine

U skladu sa oznakama na slici 24. faktor oblika glasi:

$$1 \rightarrow 2 = \frac{(r_3 + r_4) - (r_1 + r_2)}{2 \cdot r_5} \quad (58)$$

Na isti način može se odrediti faktor oblika između konačne i beskonačne površine (trake).

Na pr. u slučaju da beskonačna traka A_2 zahvati $1/3$ emitovane energije (zatvara strujne cevi kroz koje "teče" $1/3$ energije) sa beskrajne trake A_1 , tada će u slučaju kada je emisiivna površina A_1 iste širine kao u predhodnom primeru, a konačne duzine, njena akceptujuća beskrajna površina A_2 zatvarati iste strujne cevi.

Dakle, faktor oblika u oba slučaja biće isti i određen jednačinom (58).

1.3.5. Monte-Carlo metod primenjen na odredjivanje faktora oblika

Ovaj metod "eksperimentalne matematike", koja je naročitu ekspanziju doživela od 1950-te godine na ovamo, sastoji se u rešavanju problema uzimanjem niza nasumično odabranih brojeva, i nalaženjem odgovora za ovako zadate vrednosti.

Kako se Monte Carlo tehnika sastoji u pogadjanju vrednosti, odnosno odabiranju brojeva, odredjivanju funkcije tih brojeva, a zatim njihovom usvajanju, odnosno odbacivanju, to se dobijaju toliko tačniji rezultati ukoliko je veći broj pokušaja odredjivanja. Ovo je uzrok što je metoda /32/ naišla na naročito veliku primenu sa razvojem digitalnih računara. Naravno, pri svemu tome, potrebno je da Monte Carlo tehnika daje istovetne rezultate kao i fizički proces, koji pokušavamo da simuliramo.

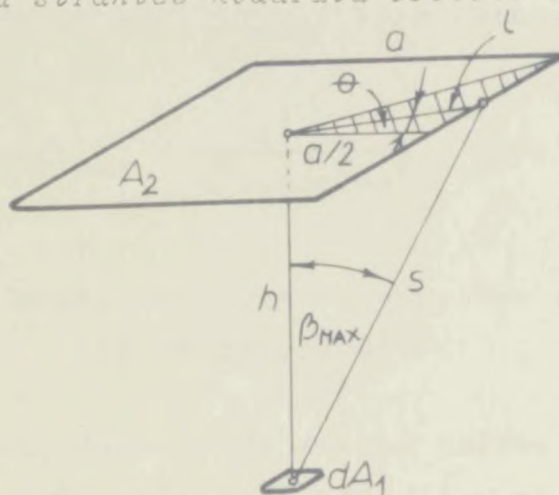
Ključni termin, koji podrazumeva Monte Carlo metoda je Markov lanac, sastavljen iz sekvenci, međusobno potpuno nezavisnih. On se vrlo uspešno upoređuje sa šetnjom čoveka, kroz nepoznat grad, koji nasumce bira ulice. Ovakav tip setnje nasumce je odgovarajući model za izvesne probleme prenosa toplote.

Teškoće u rešavanju jednačina koje formulišu prenos toplote uglavnom su posledica činjenice da one u matematičkoj formi opisuju procese vezane za transformaciju unutrašnje energije materijala. Razmena toplote radijacijom tipičan je primer.

Model radijacione razmene zasniva se na odredjivanju iznosa energije obuhvaćene od strane jedne površine u zračnom polju druge, koja generiše elektromagnetne talase u skladu sa Lambert-ovim kosinusnim zakonom. Dobra ilustracija metode je

jednostavan primer razmene toplote zračenjem izmedju diferencijalne površine dA_1 i kvadrata A_2 naspram nje, na istoj osi (Sl.25.).

Autori su se odlučili za sledeći, originalan način, rešavanja problema određivanja faktora za opisan sistem. Ako se dužina stranice kvadrata obeleži sa a , -



Sl.25. Diferencijalna površina prema kvadratu

nje od emisione površine do centra kvadrata sa h , tada je

$$\cos \theta = \frac{h}{l} \quad l = \frac{a}{2 \cos \theta}$$

odnosno:

$$\sin \beta_{\max} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$$

Kako je faktor oblika za sistem diferencijalna površina prema konačnoj /34/:

$$d_{1 \rightarrow 2} = \frac{\int_0^{\beta(\theta)} d(\sin^2 \beta)}{\int_0^{\pi/2} d(\sin^2 \beta)}$$

očigledno je potrebno sumirati, za svaki proizvoljno dat ugao teta, kvadrate $\sin(\theta)$.

Postupak rešavanja problema sastoji se u nasumičnom biranju vrednosti za ugao θ , a nakon toga, takodje nasumične vrednosti za $\sin \beta_{max}$. Poređenje poslednje sa prethodno izračunatom vrednošću za $\sin \beta_{max}$ koja iznosi:

$$\sin \beta_{max} = \frac{a}{a^2 + 4\cos^2 \theta u^2}$$

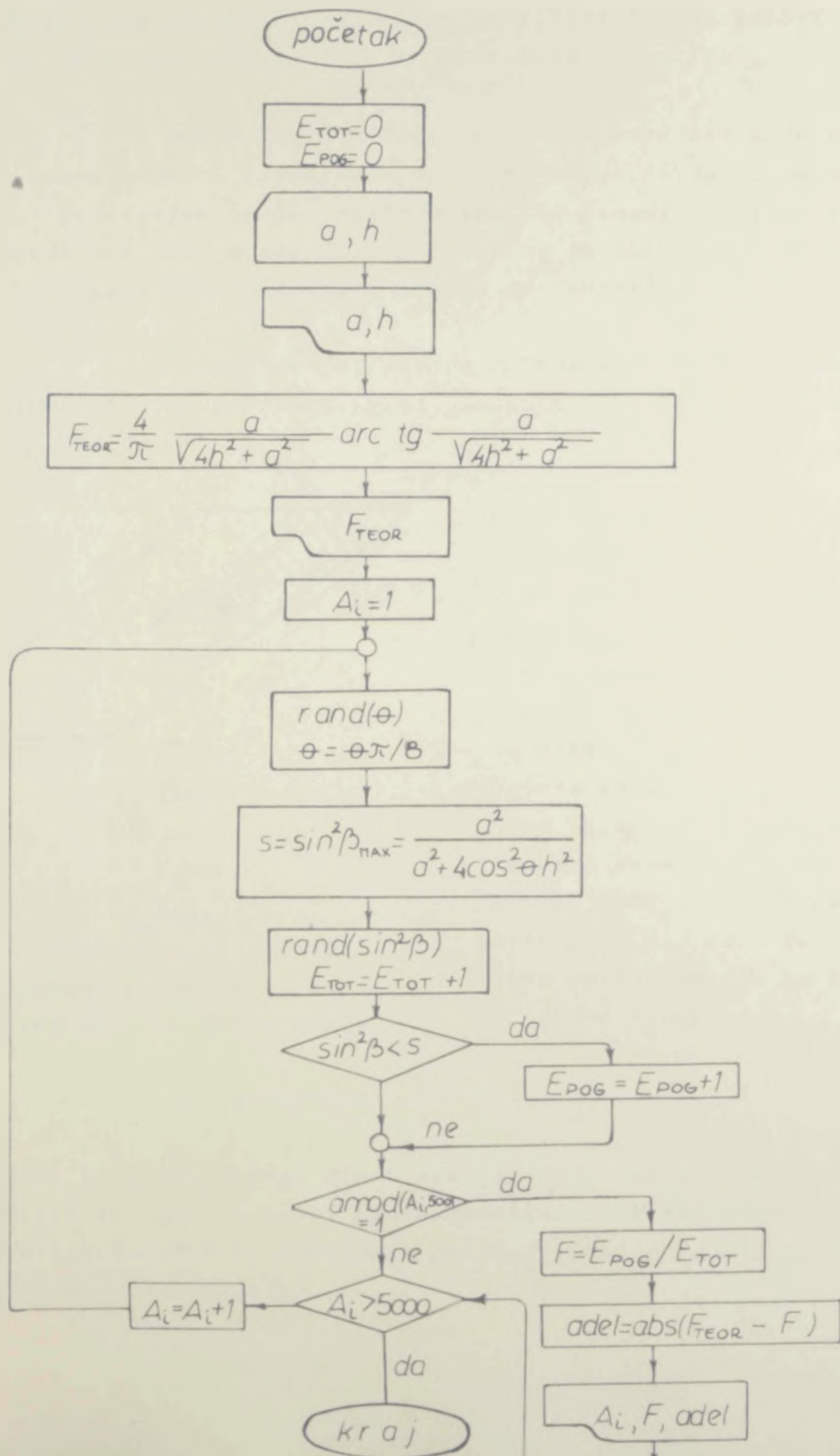
pokazuje da li će zrak, emitovan sa površine dA_1 pod uglom $\beta(\theta)$ pogoditi kvadrat, ili će ga promašiti.

Zaključuje se da faktor oblika nije ništa drugo do odnos sume brojeva zraka koji pogadjaju površinu (EPOG) prema ukupnom broju pokušaja određivanja (ETOT). Potrebno je naglasiti da je (zbog simetrije) dovoljno posmatrati jednu osminu kvadrata, a faktor glasi:

$$r = EPOG/ETOT$$

Algoritam rešavanja problema je sledeći:

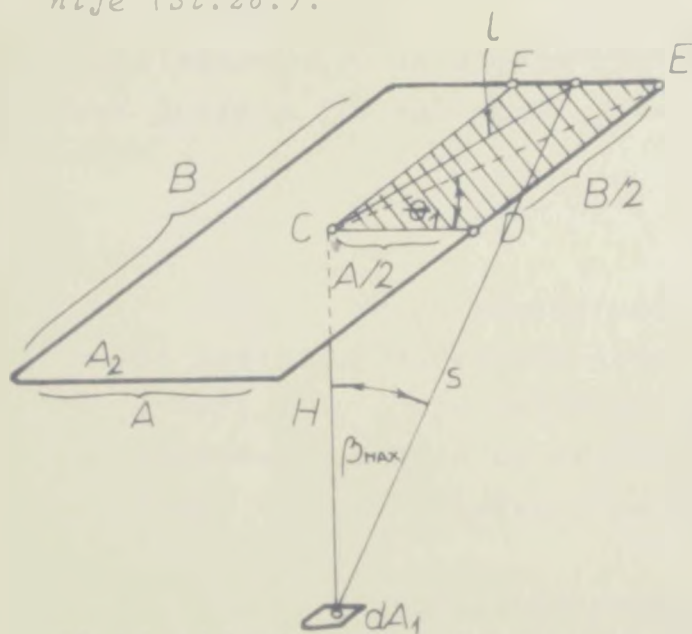
ALGORITAM ODREĐJIVANJA FAKTORA OBLIKA ZA DIFERENCIJALNU
POVRŠINU PREMA KVADRATU, METODOM MONTE CARLO



Program je propušten kroz računar VARIAN 73 sa podacima: $a = 80$, $i h = 120$. Teorijska vrednost faktora oblika za ovaj slučaj iznosi: $\dots = 0,1233177$. Nasumični brojevi su generisani na osnovu SUBROUTINE RAND (PSB).

Monte Carlo metoda je davala vrednost koje se, već u samom početku određivanja, veoma mnogo slazu sa teorijskom. S povećanjem broja pokušaja razlika između teorijske i vrednosti dobijene Monte Carlo postupkom se smanjuje. Nakon 50.000 određivanja relativna greška je iznosila: 0,65%.

Određivanje faktora oblika metodom Monte Carlo za diferencijalnu površinu prema pravougaoniku nešto je ~~...~~ nije (Sl.26.).



Sl.26. Određivanje faktora između dif.površine i pravougaonika metodom Monte Carlo

Potrebno je, u ovom slučaju, uočiti jednu četvrtinu površine pravougaonika (zbog simetrije date konfiguracije) i nju podeliti na dva trougla: $\triangle CDE$ i $\triangle CEF$. Uzvajanjem oznaka na slici 26. i učitavanjem podataka za dimenzije pravougaonika (A, B) i rastojanje (H) između diferencijalne površine dA_1 i dA_2 , moguće je odrediti ugao θ_1 , koji deli četvrtinu pravougaonika na karakteristične trouglove:

$$\theta_1 = \arctg(B/A)$$

Postupak koji nakon toga sledi sastoji se u nasumičnom biranju vrednosti za ugao (u ravni pravougaonika) θ . Poredjenje dobijenog sa izračunatim θ_1 određuje položaj (unutar jednog od dva karakteristična trougla).

na osnovu toga bira se odgovarajuća jednačina za kvadrat sinusa najvećeg ugla β_{max} kojim se dA_1 "pola-zi zrak" i "pogadja" konturu pravougaonika

Za interval $0 \leq \theta \leq \pi/4$ jednačina glasi:

$$\sin^2 \beta_{max} = \frac{a^2}{a^2 + 4H^2 \cos^2 \theta}$$

a za interval: $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ ima oblik:

$$\sin^2 \beta_{max} = \frac{b^2}{b^2 + 4H^2 \cos^2 \theta}$$

Treba napomenuti da u ovom slučaju ugao koji figuriše u jedna-
cini predstavlja razliku:

$$\theta' = \pi/4 - \theta$$

Nakon odredjivanja kvadrata sinusa maksimalnog ug-
la (po jednoj od navedenih jednačina) izbacuje se jedan "random"
broj, koji se pridaje veličini: $\sin^2 \beta$. Poredjenjem poslednjeg
sa izracunatim brojem za $\sin^2 \beta_{max}$ zaključuje se da zrak pogadja
površinu, ili je promašuje, pa se prihvata, odnosno odbacuje.

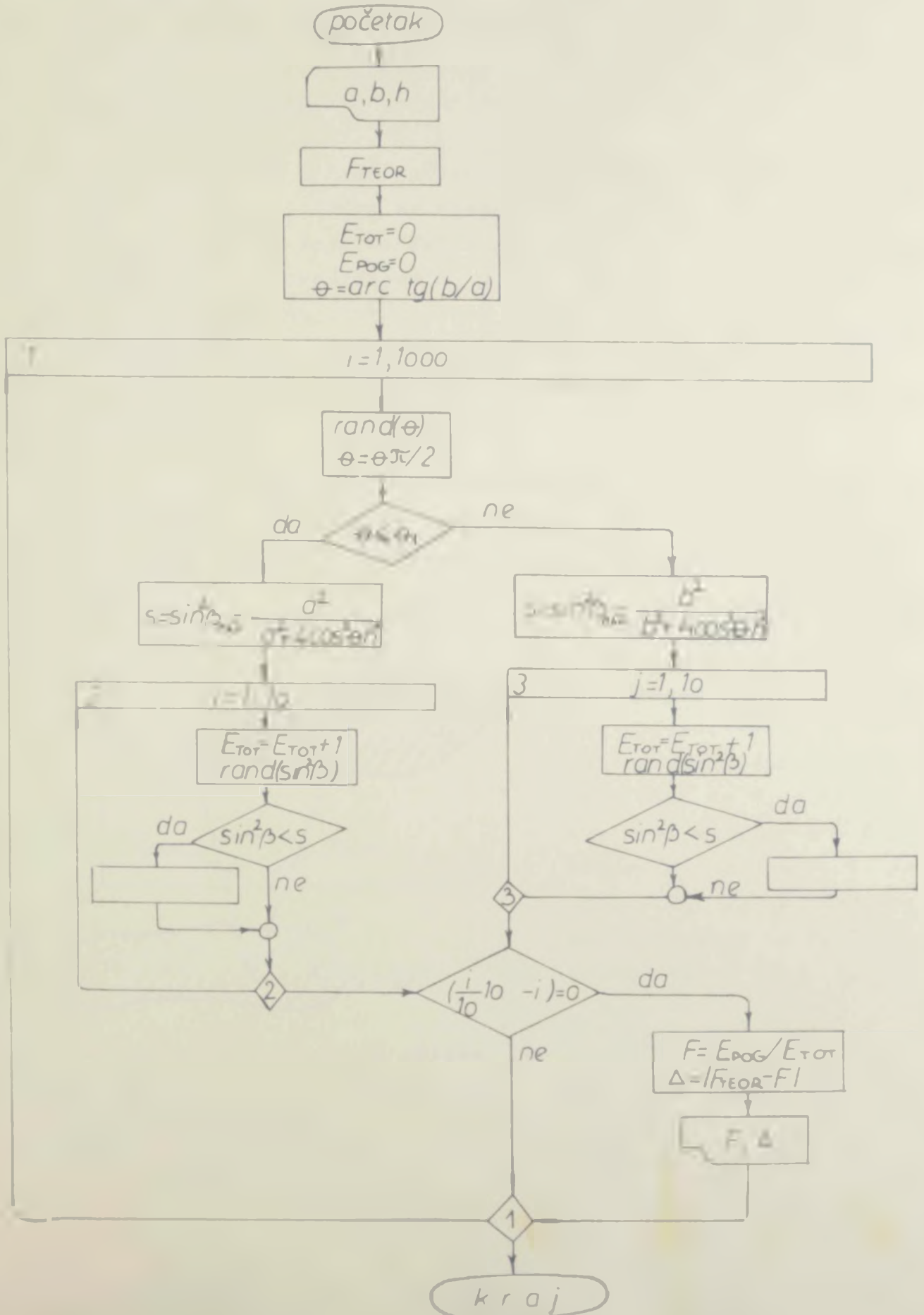
ponavljanje postupka mnogo puta i sabiranje bro-
jeva ("zraka") koji pogadjaju površinu (a u skladu sa donjom jed-
načinom omogućava odredjivanje faktora oblika kao frakcije "zraka"
(brojeva) koji pogode površinu, prema ukupnom broju pokušaja, na
osnovu relacije:

$$F = E_{pog} / E_{tot}$$

Algoritam odredjivanja faktora oblika za pravouga-
onik prema diferencijalnoj površini smeštenoj naspram njegovog
centra i FORTRAN program, dati su u nastavku.

Testiranje programa je izvršeno na primeru za koji su podaci bili: $A = 80$, $B = 140$ i $H = 120$. Teorijska vrednost faktora oblika za ove dimenzije iznosi: $F_{\text{teor}} = 0,1917$. Relativno odstupanje faktora oblika dobijenog Monte Carlo metodom od teorijske vrednosti iznosilo je: $0,5\%$ nakon 10.000 pokušaja.

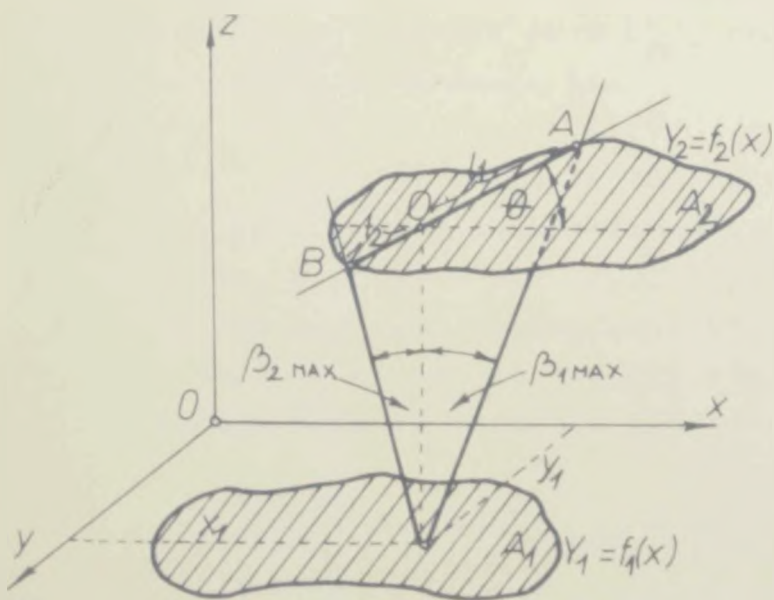
ALGORITAM ZA ODREĐJIVANJE FAKTORA OBLIKA IZMEDJU DIFERENCIJALNE
POVRŠINE I PRAVOUGAONIKA METODOM MONTE CARLO



Primenom Monte Carlo metode na razmenu toplote zračenjem između dve međusobno paralelne površine na rastojanju z , čije su jednačine konture poznate ($Y_1 = f_1(x)$ i $Y_2 = f_2(x)$) — velikog je praktičnog značaja zbog čestog sretanja ovakvih konfiguracija u inženjerskoj praksi (Sl. 27.).

Na početku određivanja generišu se proizvoljni brojevi za x_1 i y_1 (čime se nasumice biraju koordinate tačke u XOY ravni). Nakon toga iz funkcije $Y_1 = f_1(x)$ se određuju dve vrednosti za y . Poredjenjem y_1 generisanog proizvoljno sa izračunatim vrednostima utvrđuje se da li tačka leži u oblasti ograničenoj krivom $y_1 = f_1(x)$, tj. na površini A_1 . Ako leži postupak se vodi dalje. U protivnom nasumični brojevi se odbacuju i postupak ponavlja.

Sledeći korak u rešavanju problema je utvrđivanje da li tačka sa koordinatama (random x_1 , random y_1) leži u oblasti ograničenoj linijom $y = f_2(x)$, tj. da li se nalazi na



Sl. 27. Određivanje faktora oblika dve površine, nepravilnog oblika metodom Monte Carlo rešenja određuje dužina rastojanja OA , odnosno OB kao:

površini A_2 . Ako je odgovor potvrđan računanje se vodi jednim putem (a), u protivnom drugim (b). Postupak (a): pod pretpostavkom da tačka sa nasumice odabranim koordinatama leži na A_2 generiše se nov broj za ugao θ u toj ravni (videti sliku 27.). Kroz tačku (x_1, y_1) povlači se prava sa nagibom $\tan \theta$, čija je jednačina:

$$y - y_1 = \tan \theta (x - x_1)$$

Nalazi se presek ove linije sa krivom $y_2 = f_2(x)$ i tačka

$$l_1 = \sqrt{(x_A - x_1)^2 + (y_A - y_1)^2}$$

odnosno:

$$l_1 = \sqrt{(x_A - x_1)^2 + (y_A - y_1)^2}$$

Na tom dužinom izračunava se sinus kvadrata maksimalnog ugla zračenja koje obuhvata površinu A_1

$$\sin^2 \beta_{1max} = \frac{l_1^2}{l_1^2 + z^2}$$

odnosno za dužinu l_2

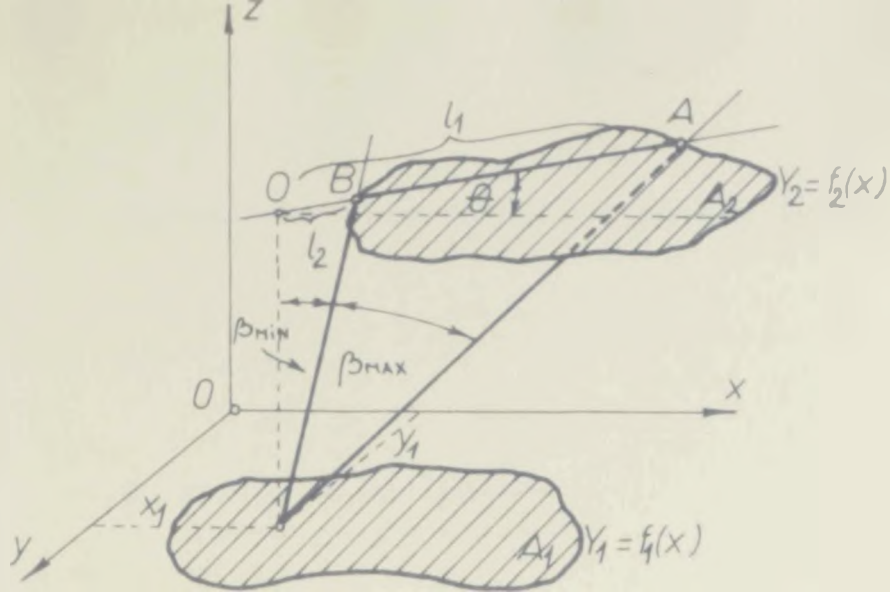
$$\sin^2 \beta_{2max} = \frac{l_2^2}{l_2^2 + z^2}$$

Konačno se formira četvrti nasumični broj za $\sin^2 \beta$ u intervalu od 0-1 i proverava da li je manji ili veći od upravo izračunatog maksimalnog. Ukoliko je manji ili jednak $\sin^2 \beta$ ubraja se u A_1 (zrak pogadja površinu) u suprotnom slučaju odbacuju se.

Postupak (b): ukoliko tačka sa kordinatama (x_1, y_1) proizvoljno odabranim ne lezi u oblasti ograničenoj krivom A_1 ($Y_1 = f(x)$) (Sl. 28.), bira se proizvoljan ugao θ i određuje (za taj ugao) rastojanje OA , odnosno OB , tj. l_1 i l_2 . Izračunavaju se sinusi na kvadrat minimalnog i maksimalnog ugla radijacije koja bi ozračila površinu A_2 .

$$\sin^2 \beta_{max} = \frac{l_1^2}{l_1^2 + z^2} \quad \sin^2 \beta_{min} = \frac{l_2^2}{l_2^2 + z^2}$$

Na kraju se generiše poslednji proizvoljan broj za $\sin^2 \beta$. Ukoliko je on između $\sin^2 \beta_{max}$ i $\sin^2 \beta_{min}$ usvaja se i ubraja u A_2 u protivnom se odbacuje.



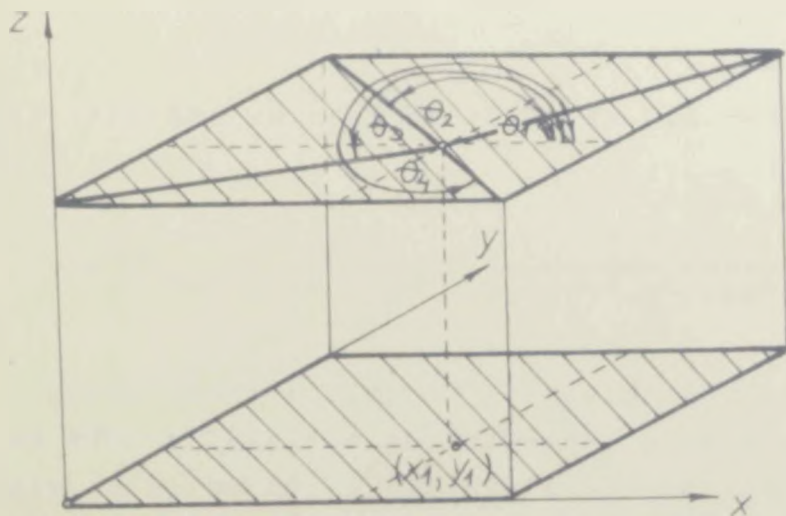
Sl.28. Odredjivanje faktora oblika dve paralelne nepravilne površine metodom Monte Carlo

Konačno se faktor oblika dobija kao odnos

$$F = \frac{N_{\text{pog}}}{N_{\text{tot}}}$$

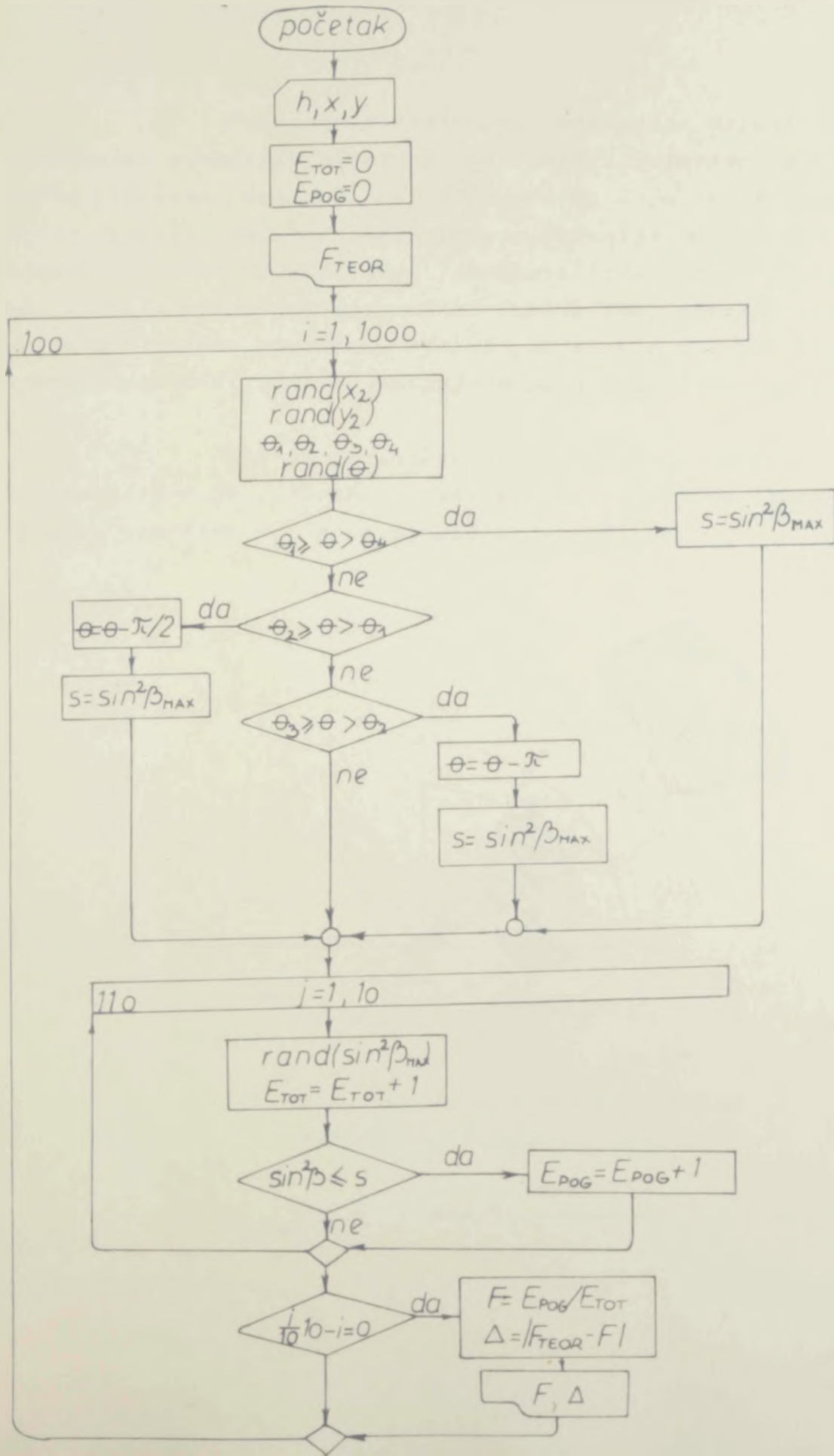
gde je N_{tot} ukupan broj pokušaja odredjivanja.

Uzmimo primer primene Monte Carlo metode na odredjivanje faktora oblika za dva paralelna pravougaonika (istih dimenzija $X \times Y$), na međusobnom rastojanju h (Slika 29.)



Sl.29. Odredjivanje faktora oblika za dva paralelna pravougaonika istih dimenzija metodom Monte Carlo

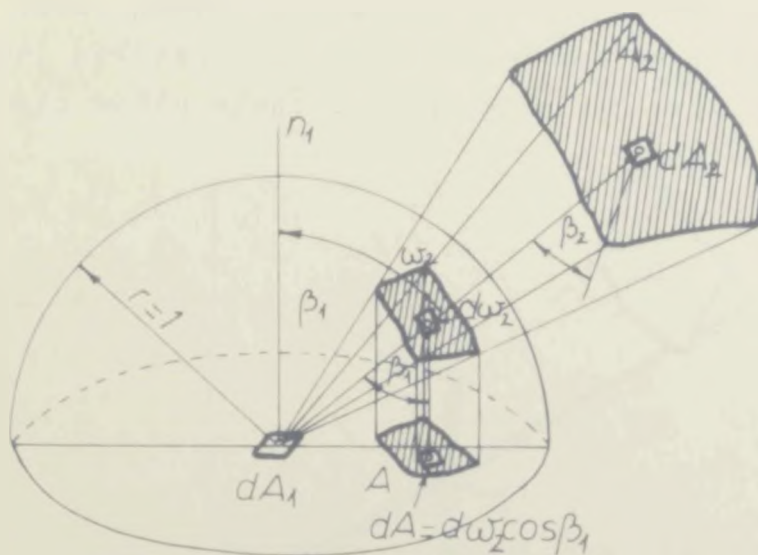
ALGORITAM ODREĐJIVANJA FAKTORA OBLIKA IZMEĐJU DVA
PARALELNA PRAVUGAONIKA METODOM MONTE CARLO



1.5.6. Eksperimentalne (analogne) metode određivanja faktora oblika

Primenom geometrijske analogije moguće je eksperimentalno odrediti faktor oblika između diferencijalne i konačne površine, metodom jedinične sfere, koju je 1928. god. predložio Nusselt /25/. Niz integratora, kasnije razvijenih i primenjenih u praksi određivanja faktora oblika /26, 27, 19, 28, 16, 29, 30, 31/ podrazumevaju, nekad implicitno, a nekad eksplicitno primenu sferične površine, sferne projekcije ili pak kretanje po sfernoj površini, dakle, oslanjaju se na Nusseltov metod.

Ako se jedinična hemisfera konstruiše nad emisiivnom površinom dA_1 (Sl. 30.), tada se faktor oblika između ove i konačne površine A_2 može izraziti jednačinom:



Sl. 30. Ilustracija Nusseltovog načina određivanja faktora oblika

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \int_A \cos \beta_1 \frac{\cos \beta_2 dA}{r^2} = \int_{\omega_2} \cos \beta_1 d\omega_2$$

Primenom geometrijske analogije može se zaključiti da integral u gornjoj jednacini predstavlja projekciju sferične površine na bazi hemisfere, odnosno:

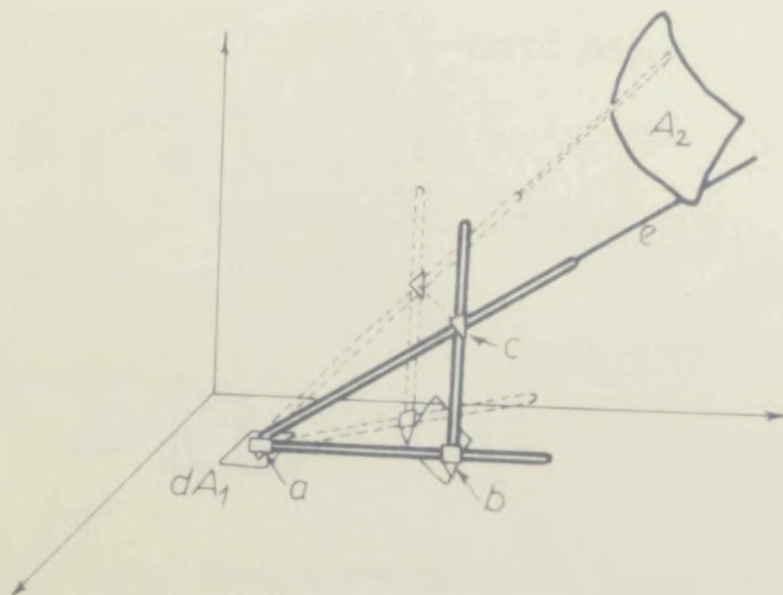
$$\int \cos \beta_1 d\omega_1 = A$$

Zamenom poslednje jednacine u izraz (59) dobiće se ključna relacija za eksperimentalno određivanje faktora oblika:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{A}{\pi r^2} \quad \text{za } r = 1$$

Faktor oblika, u svetlu geometrijske analogije, predstavlja, dakle, odnos površine projekcije prostornog ugla na emisionu ravan i površine kruga jedinaenog radiusa.

1930. godine Hottel [26, 27] je predložio mehanički integrator, prikazan na slici 31. u dva različita položaja, koji ilustruju način njegovog kretanja prilikom merenja.



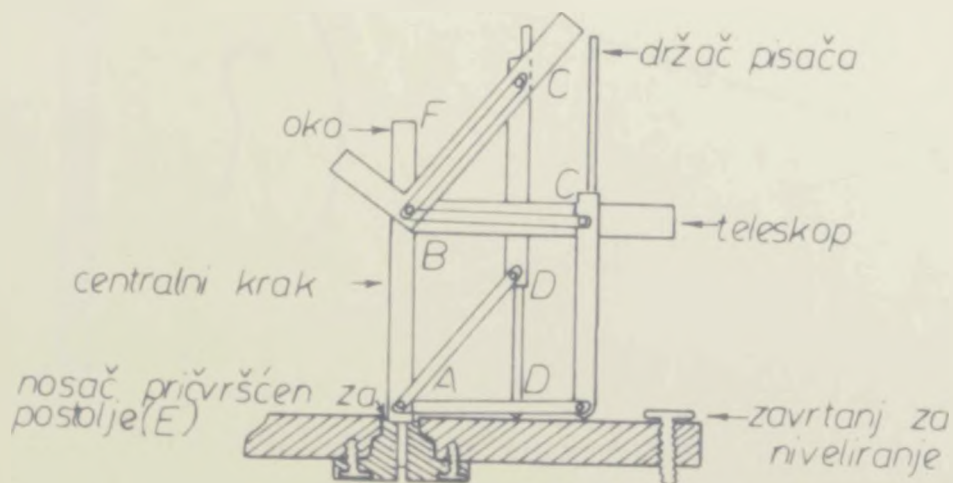
Sl. 31. Hottel-ov mehanički integrator

Konačna površina se modeluje od pogodnog materijala i postavlja na željeno mesto u odnosu na emisivnu diferencijalnu površinu dA . u centar dA , (stoscer instrumenta) postavlja se teme A pravouglog trougla $\triangle ABC$ načinjenog od tankih žipki. Produžetak hipotenuze, konstantne dužine, D klizi po konturi A_2 , pri čemu olovka pričvršćena za teme B opisuje figuru u ravni osnove instrumenta.

Faktor oblika, u ovom slučaju, se dobija kao odnos površine uertanog lika i površine kruga radiusa \overline{AC} .

Hamilton je 1943. godine, a zatim sa Morganom zajedno /19, 10/ 1952. godine razvio instrument za određivanje faktora oblika, čiji je šematski prikaz dat na slici 32.

Integrator ima kružnu osnovu na koju je zalepljena hartija. Krak AB je pričvršćen za podlogu, tako da se može okretati u lezistu E .



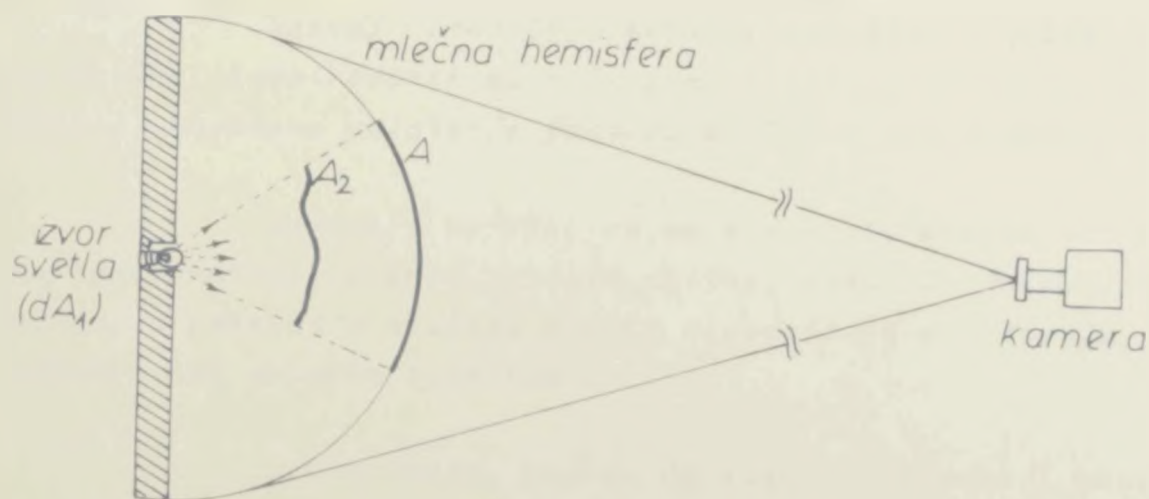
Sl. 32. Hamilton-Morganov integrator

Krak sa pisačem je snabdeven sa dva vodiča, koja omogućavaju slobodno kretanje nosača pisača duž centralne linije instrumenta

Praci \overline{BC} i AD , zajedno sa međusobno paralelnim pravcima CD i BA cine paralelogram. Dođatak integratoru je teleskop koji omogućava određivanje faktora oblika osvetljenih površina. Linija vida kreće se ka ogledalu B , a zatim paralelno sa \overline{BC} prema konačnoj površini A_2 . Diferencijalna površina dA_1 nalazi se ispod temena B u centru oko kojeg se obrće ceo integrator.

Radius jedinaene sfere jednak je rastojanju BC , a način određivanja faktora oblika identičan je prethodno opisanom (u vidu odnosa ucrtane površine i jediničnog kruga).

Eckert je 1935. godine [28] predložio instrument sa hemisferom od mlečnog stakla i diferencijalnom površinom dA_1 u obliku malog svetlosnog izvora koji obasjava model konačne površine A_2 (Slika 33.).



Sl. 33. Eckert-ov integrator

Iz beskonačnosti (iz velike daljine) fotografiše se senka modela površine A_2 i planimetrom određuje njena površina. Odnos dobijene vrednosti i površine baze hemisfere, jediničnog radiusa, daje podatak o faktoru oblika.

1.4. ZAKLJUČAK U VEZI STANJA NAUKE DANAS

Zračenje toplote je, naročito u poslednjih nekoliko decenija, predmet živog interesovanja niza naučnika širom sveta. Mnogi instituti, Univerziteti i druge naučne, vojne, stručne itd. organizacije, bave se analizom i proučavanjem fenomena termičke radijacije.

Analitičke metode određivanja faktora oblika (naročito konturna integracija) veoma su detaljno razradjivane u seriji radova za sisteme različitih konfiguracija /1/, /19/, /16/. One su omogućile nalaženje analitičkih rešenja za faktore oblika niza, uglavnom geometrijski pravilnih sistema. Ona su data u obliku algebarskih izraza, tabelarno, ili su tabele prikazane grafički. Čak i geometrijski nepravilne konfiguracije mogu se svesti na neke poznate oblike, čime se problem nalaženja faktora znatno pojednostavljuje.

Razvoj numeričkih metoda, naročito algebre faktora oblika, kombinovanih sa rešenjima analitičkih određivanja, takodje, omogućava nalaženje faktora za čitav niz geometrija.

Najmanje uspešno su se razvijale eksperimentalne (analogne) metode merenja faktora oblika, mada su od izuzetnog značaja, a ponekad u slučaju sasvim nepravilnih geometrija, u prednosti nad ostalim tehnikama.

Ova merenja, pomoću do sada u literaturi navedenih integratora, zasnivaju se na geometrijskoj analogiji, i omogućavaju nalaženje faktora samo za sistem: diferencijalna površina prema konačnoj, i to pod pretpostavkom da se emisija radijacije sa površine pokorava Lambert-ovom zakonu.

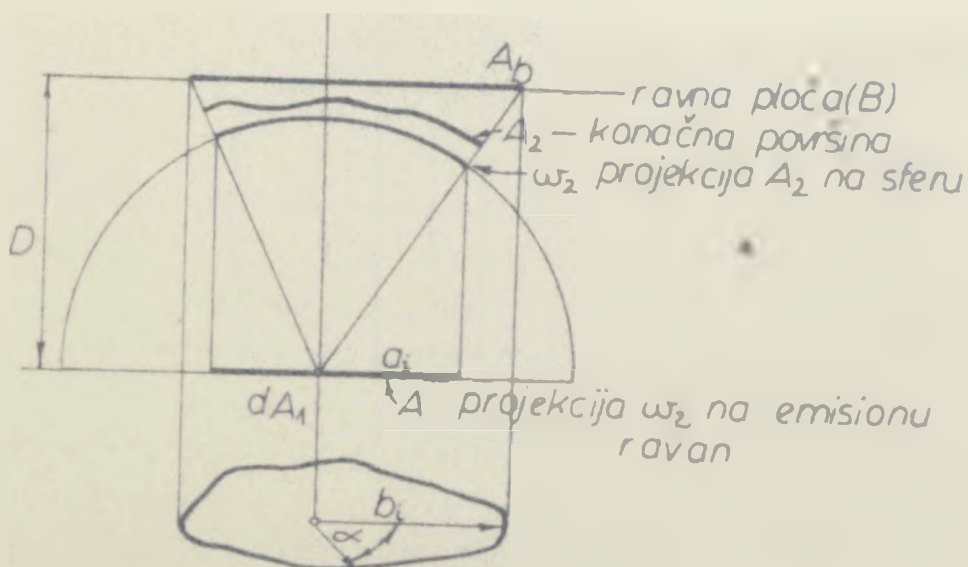
Nije poznata primena analogije između zračenja i nekog drugog fenomena. Proširivanje analogije između zračenja i drugih pojava i fizičkih fenomena može biti vrlo korisno za eksperimentalno određivanje toplote razmenjene radijacijom.

2. RAZVIJANJE GEOMETRIJSKIH ANALOGIJA

ii. Novakovic je 1971. /33/ godine u Georgia Institute of Technology koncipirao i konstruisao integrator sa durbinom za merenje faktora oblika, čime je iniciran istra-
 zivački rad na daljem usavršavanju i razvijanju integratora zračenja na bazi geometrijske analogije u okviru Tehnološkog fakulteta i Instituta "Boris Kidrič" u Vinči.

2.1. INTEGRATOR SA DURBINOM

Ovaj aparat omogućava merenja faktora oblika na bazi ravne projekcije konačne površine na vertikalnu ravan fiksno udaljenu od tačkastog izvora (Sl.34.). U polarnim koor-
 dinatama površina A se može odrediti pomoću integrala po kon-
 turi:



Sl.34. Ilustracija principa integracije

$$A = \int_0^{\pi/2} a^2(\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{2} a^2$$

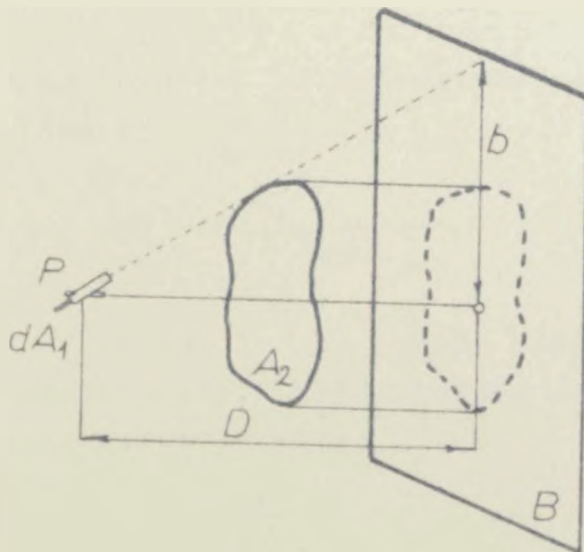
Faktor oblika može da se odredi, u ovom slučaju, kao:

$$F_{d1} = \frac{A}{i^2 \pi} \frac{1}{D^2} \sum_{i=0}^n \frac{r_i^2}{D^2}$$

Sa slike 34. je očigledno da između radius vektora u emisionoj ravni a i radius vektora b , na ravnoj ploči B postoji relacija:

$$b^2 = \frac{t^2}{i^2}$$

Podaci o radiusima (b) koncentričnih krugova, nanih na vertikalnu ravan B , dobijeni kretanjem izvornice iz infinitezimalnog izvora dA_1 (u koji je smešten durbin (P) sa unakrsnim nitima) po kontrui konačne površine A_2 i poznato rastojanje (D) između vertikalnice i izvora (Slika 35.) omogućava nalaženje radius vektora (a) projekcije prostornog ugla ω_2 na ra-



Sl. 35. Integrator sa durbinom

van diferencijalne površine. Srednja vrednost kvadrata n - radius vektora daje traženi faktor oblika.

2.2. INTEGRATOR SA RAVNOM PLOČOM

Ideja primenjena na realizaciju opisanog integratora sa durbinom, usavršena, a istovremeno i pojednostavljena, poslužila je za konstrukciju aparata sa horizontalnom plocom /29/, koji su 1976. godine predložili Anastasijević, Ujurić i Novaković.

Pri realizaciji instrumenta takodje se počlo od činjenice da dvostruko projektovanje (na sferu i ravan) može biti zamenjeno jednostrukom ravnom projekcijom (Sl.34.).

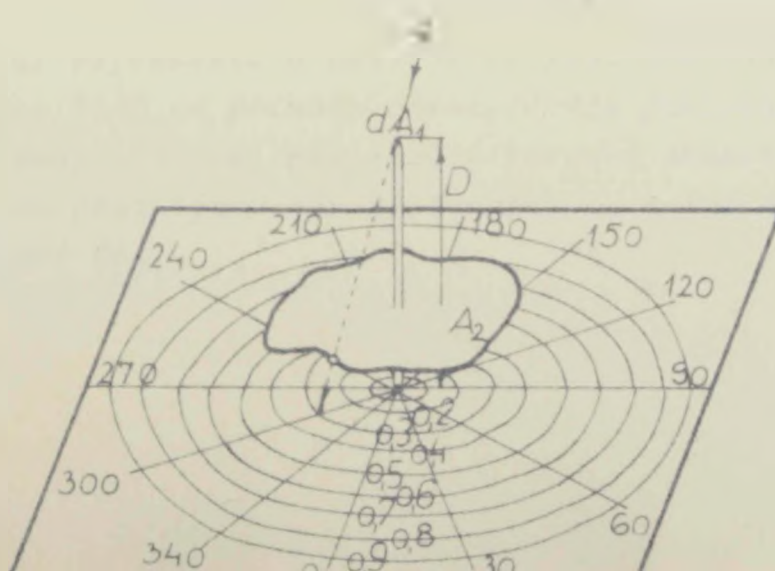
U skladu sa prethodnim razmatranjima, fundamentalna jednačina određivanja faktora oblika diskretnom metodom glasi:

$$dI = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(b_i^2 + D)} \quad \left(\frac{b_i}{D}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f$$

gde f zamenjuje kvadrat bezdimenzionog radiusa, koji izražen pomoću b_i iznosi:

$$\frac{b_i}{(b_i^2 + D)} \quad (60)$$

Integrator sa ravnom plocom (na slici 36.) sastoji se od ravne ploče B, vertikalnog vretena V i zavrtnja za pričvršćivanje merne površine A



Sl.36. Integrator sa ravnom pločom

Na horizontalnu ravan naneti su koncentrični krugovi, koji predstavljaju geometrijsku interpretaciju relacije (60), numerisani prema vrednostima radiusa f i meridijani u pravcu kojih se vrše merenja.

Diferencijalna površina predstavljena je samim vrhom vretena, a konačna površina čiji se faktor oblika određuje, realizovana je isecanjem čvrstog kartona, tanke ploče stiropora ili aluminijuma.

Pomoću vretena dugog D mm i oznaka na ploči moguće je jednostavno očitavati radius vektora a_i ravne projekcije površine, merenjem vektora položaja b_i geometrijski sličnih tacaka na ravni B .

Ako se pretpostavi da je apsolutna greška očitavanja $0,5$ mm, a visina vretena, na čijem vrhu je diferencijalni izvor, 400 mm, tada će maksimalna relativna greška sa kojom se može odrediti faktor oblika za krug, ukoliko je dužina na ravnoj ploči 100 mm (polovina mernog opsega), iznositi $0,8\%$, što je vrlo dobro, i tačno.

Nedostatak predloženog instrumenta je ograničen opseg merenja, uok mu je prednost izuzetna jednostavnost konstrukcije i toka samog određivanja faktora oblika.

2.3. INTEGRATORSA LENJIROM

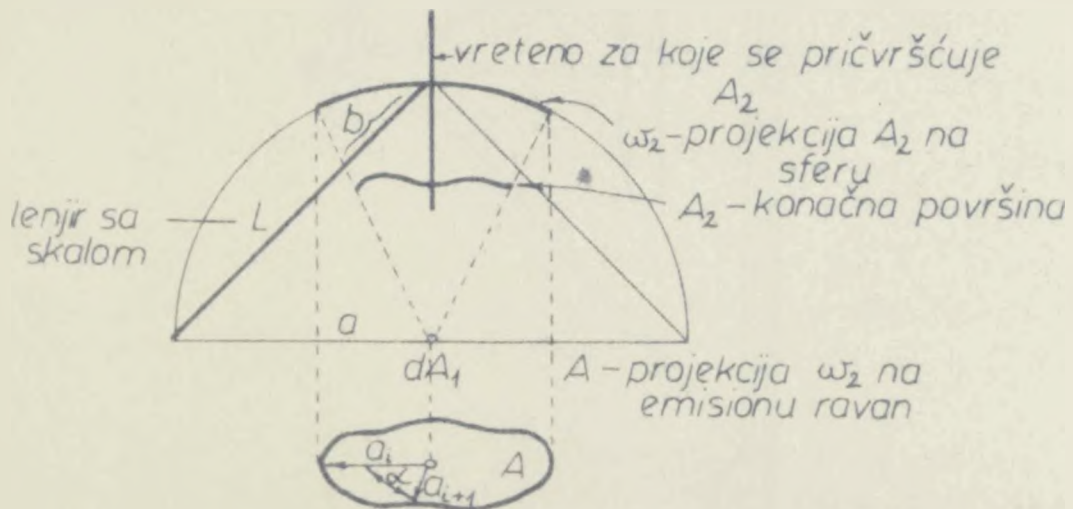
Djurić, Launović i Novaković su 1977. godine /30/ referisali u *Letters in Heat and Mass Transfer* o integratoru čiji se princip određivanja faktora oblika zasniva na jednoj optičkoj projekciji konture akceptujuće površine A_2 na kosu graduisanu osu koplanarnu sa normalom na infinitezimalni izvor dA_1 .

Slično odredjivanju faktora pomoću instrumenta sa ravnom pločom fundamentalna jednačina glasi:

$$f_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{r^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f$$

gde je f - bezdimenzioni količnik $(a/r)^2$.

Na slici 37. je prikazan presek integratora sa skalom, njegovi najvažniji delovi i način odredjivanja faktora



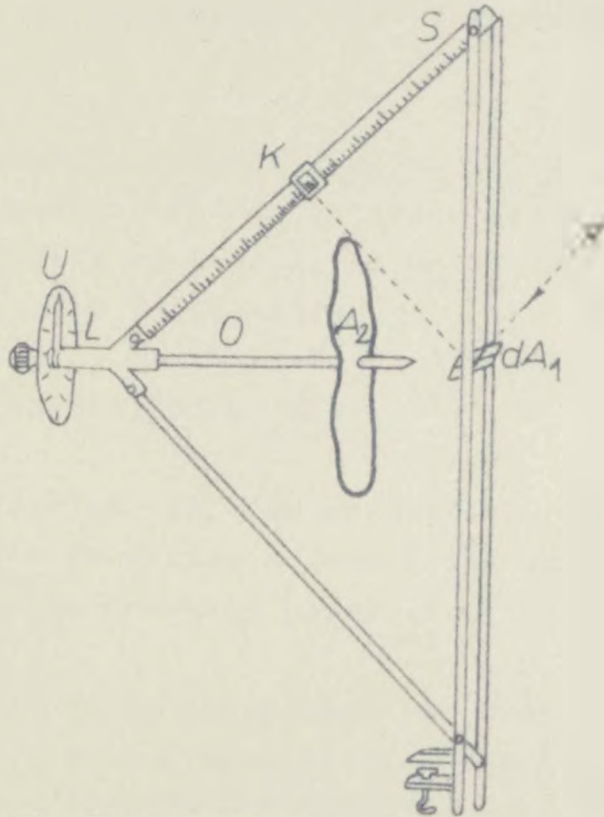
Slika 37. Presek integratora sa lenjirom i princip merenja

Konačna površina A_2 se projektuje na koničnu površinu (predstavljenu lenjirom L). Skala instrumenta gradivana je tako da se na njoj direktno očitavaju vrednosti bezdimenzionog kvadrata radiusa f , prema relaciji koja postoji između f i b parametara:

$$f = \frac{b^2}{1 + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}} \quad (61)$$

Na ovaj način eliminisana je potreba za sferom, a tačkasti izvor može biti realizovan na više načina (na primer, kao svetlosni izvor, ogledalo sa unakrsnim nitima, durbin i sl.)

Na slici 38. prikazana je šema instrumenta napravljenog u obliku jednakokrakog pravouglog trougla od aluminijskih cevi povezanih pokretnim zglobovima, tako da se može jednostavno sklopiti.



Sl. 38. Integrator sa skalom

Prav ugao polovi osovina O na koju se pričvršćuje konačna površina A_2 . Ona se obrće u ležištu, a ugao očitava na uglomeru U . Na sredini hipotenuze trougla nalazi se pokretno metalno ogledalo V sa unakrsnim nitima, čiji presek simulira tačkasti izvor. Na jednoj od kateta nalazi se lenjir L sa skalom i klizačem K , tako da je moguće jednostavno merenje, na način kako to slika 38. pokazuje. Druga kateta samo fiksira konstrukciju, a ceo instrument se može pričvrstiti za bilo koju ploču.

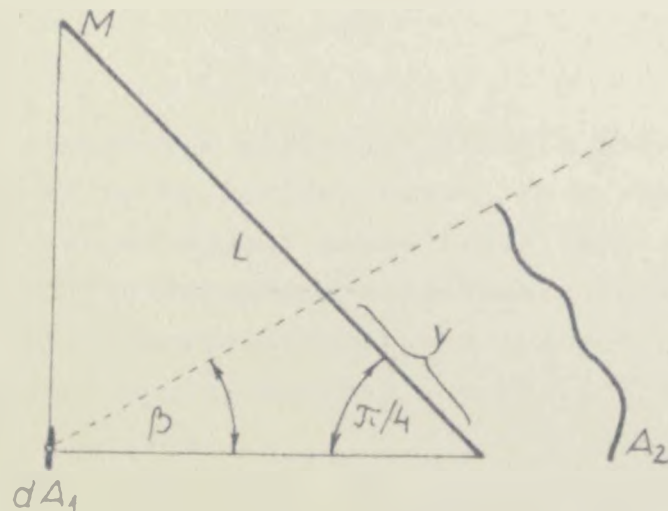
$$i'(\beta, \theta) = (\sigma T^4 / \pi) e'(\beta, \theta)$$

Primenom numeričke polarne integracije jednačina (62) se redukuje u:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\int_0^{(2\pi i/n)} e'(\beta) d(\sin^2 \beta)}{\int_0^{\pi/2} e'(\beta) d(\sin^2 \beta)} \quad (63)$$

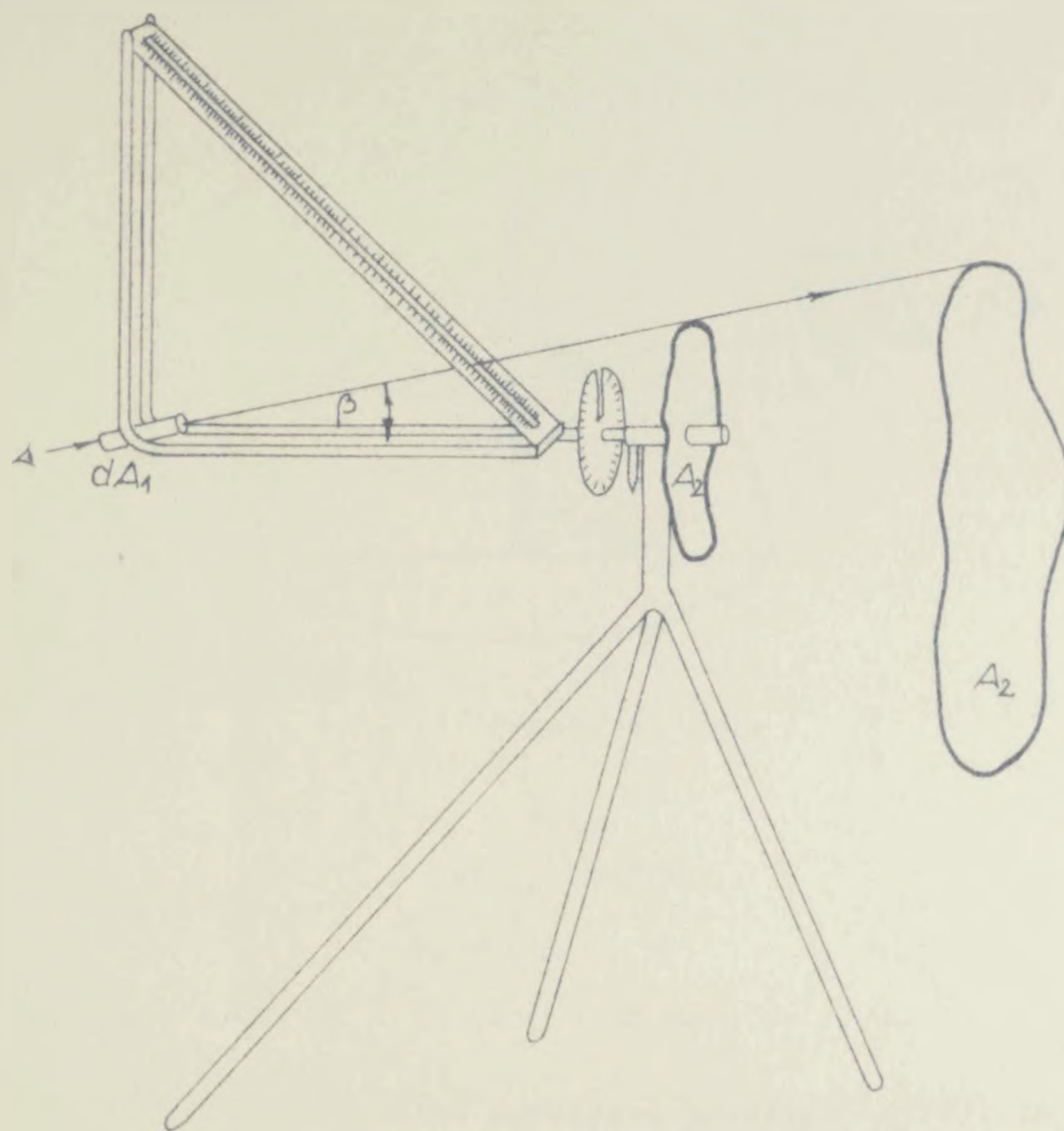
Merenje se, dakle, sastoji iz očitavanja parametara duž konture konačne površine A_2 . Na slici 39. je prikazan šematski princip određivanja. Zrak t sa izvora dA_1 tangira konturu konačne površine A_2 , i preseca skalu instrumenta, koja je građena u y/L vrednostima, linearno od 0 do L .

Do podataka o bezdimenzionom "lokalnom" faktoru dolazi se na osnovu relacije:



Sl. 39. Princip određivanja faktora oblika pomoću integratora za neLambertovske površine

$$\frac{\int_0^{\pi/2} e'(\beta) d(\sin^2 \beta)}{\int_0^{\pi/2} e'(\beta) d(\sin^2 \beta)} \quad (64)$$



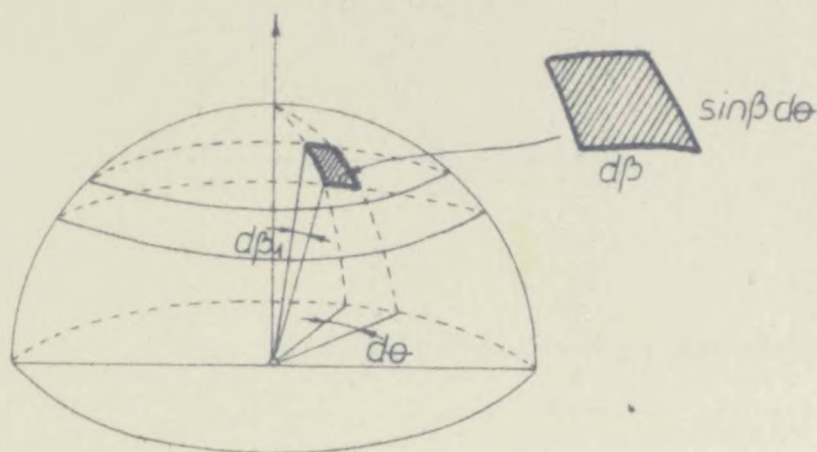
Sl. 40. Integrator za neLambertovske površine

2.6. PROSTORNI UGLOMER

Ideja o diskretnoj polarnoj integraciji, koja se proteže kroz koncept svakog od pomenutih integratora, iskorišćena je za realizaciju prostornog uglomera.

Kormiranjem odgovarajuće skale omogućeno je merenje prostornog ugla pomoću adaptiranog integratora na slici 38. /35/.

Po definiciji, prostorni ugao (Sl.41.) predstavlja dvostruki integral:



Sl.41. Prostorni ugao

$$\omega = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\beta(\theta)} \sin\beta d\beta$$

gde se θ kreće od 0 do 2π , a β od 0 do $\pi/2$.

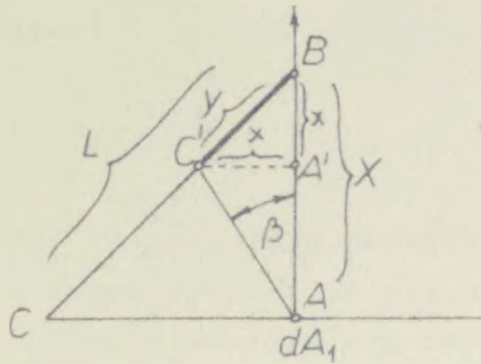
Za jedan odredjeni položaj β ($\beta = \beta(\theta)$), te se može napisati:

$$(\omega)_{\theta} = 2\pi(1 - \cos\beta) \quad \text{sterad} \quad (65)$$

Kako se određivanje prostornog ugla, zapravo izvodi diskretno, to se skala može formirati na osnovu poslednje jednačine.

Š druge strane relaciju između dužine y na skali (Sl.43) i ugla β između normale na emisivnu površinu i posmatranog pravca moguće je izvesti na osnovu sličnosti trouglova ΔABC i $\Delta A'b'c'$, odakle sledi:

$$\frac{y}{L} = \frac{X}{L} \quad (66)$$



Sl. 43. i princip odredjivanja prostornog ugla

kako je:

$$\cos \beta = \frac{x}{L}$$

odatle je:

$$x = \frac{L \cos \beta}{\cos \beta}$$

Zamenom poslednjeg izraza u jednačinu (63) dobiće se:

$$y = \frac{L \sin \beta}{\cos \beta} \cdot L \quad (67)$$

Ako se podje od poslednje jednačine i izraza za "lokalni" prostorni ugao β , dobiće se relacija između dužine y na lenjiru i odgovarajućeg prostornog ugla, koja predstavlja osnovu za formiranje skale. Iz jednačine (65) dobiće se:

$$\cos \beta = \frac{2\pi - w}{2\pi} \quad (68)$$

Poznata trigonometrijska relacija između tangensa i kosinusa ugla glasi:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}}{\cos \beta} \quad (69)$$

Zamenom (66) i (67) dobiće se:

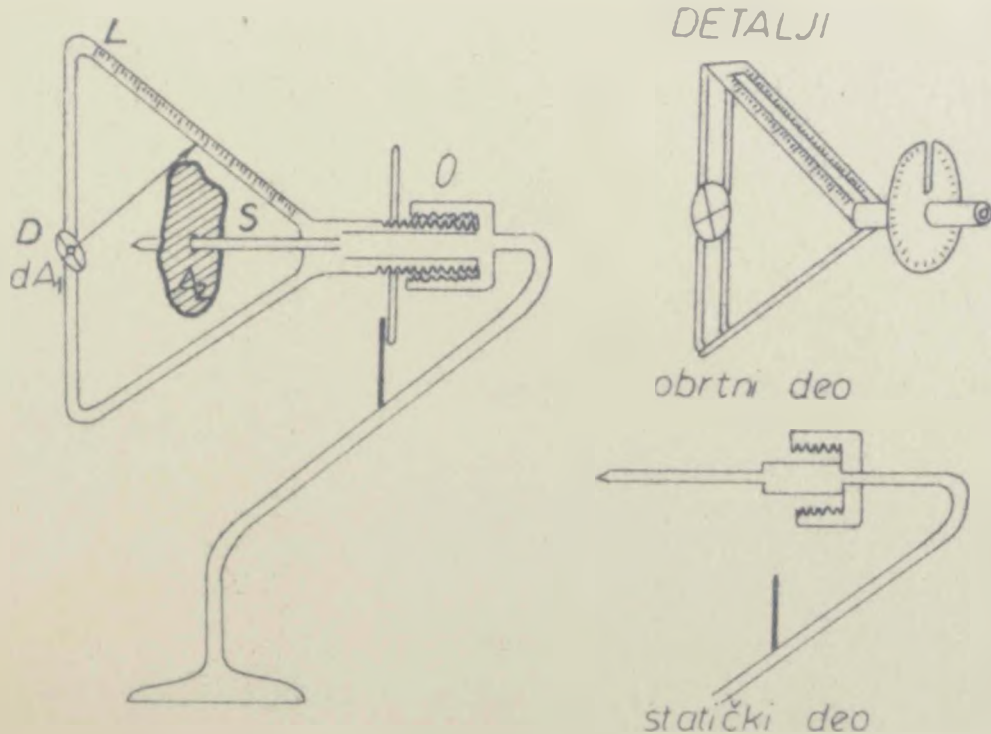
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{4\pi w - w^2}}{2\pi - w} \quad (70)$$

Konacno se poslednja jednačina, koja definiše tangens ugla između normale na dA_1 i pravca posmatranja u funkciji od prostornog ugla zamenjuje u relaciju (66), kada se dobija:

$$y = \frac{\sqrt{4\pi w - w^2}}{2\pi - w + \sqrt{4\pi w - w^2}}$$

Na osnovu poslednje jednačine formirana je skala prostornog uglomera prikazanog na slici 44. Instrument je napravljen u obliku ravnoubranog trougla sa durbinom D za posmatranje smeštenim u sredinu hipotenuze. Konstrukcija aparata omogućava njegovo okretanje oko ose O koplanarne sa normalom na diferencijalnu emisionu površinu dA_1 i snimanje prostornog ugla svake konkretne površine, ali isto tako i određivanje prostornog ugla modela površine (pričvršćenog za osovinu S).

Određivanje prostornog ugla pomoću opisanog aparata svodi se na očitavanje odgovarajućih vrednosti "lokalnog"



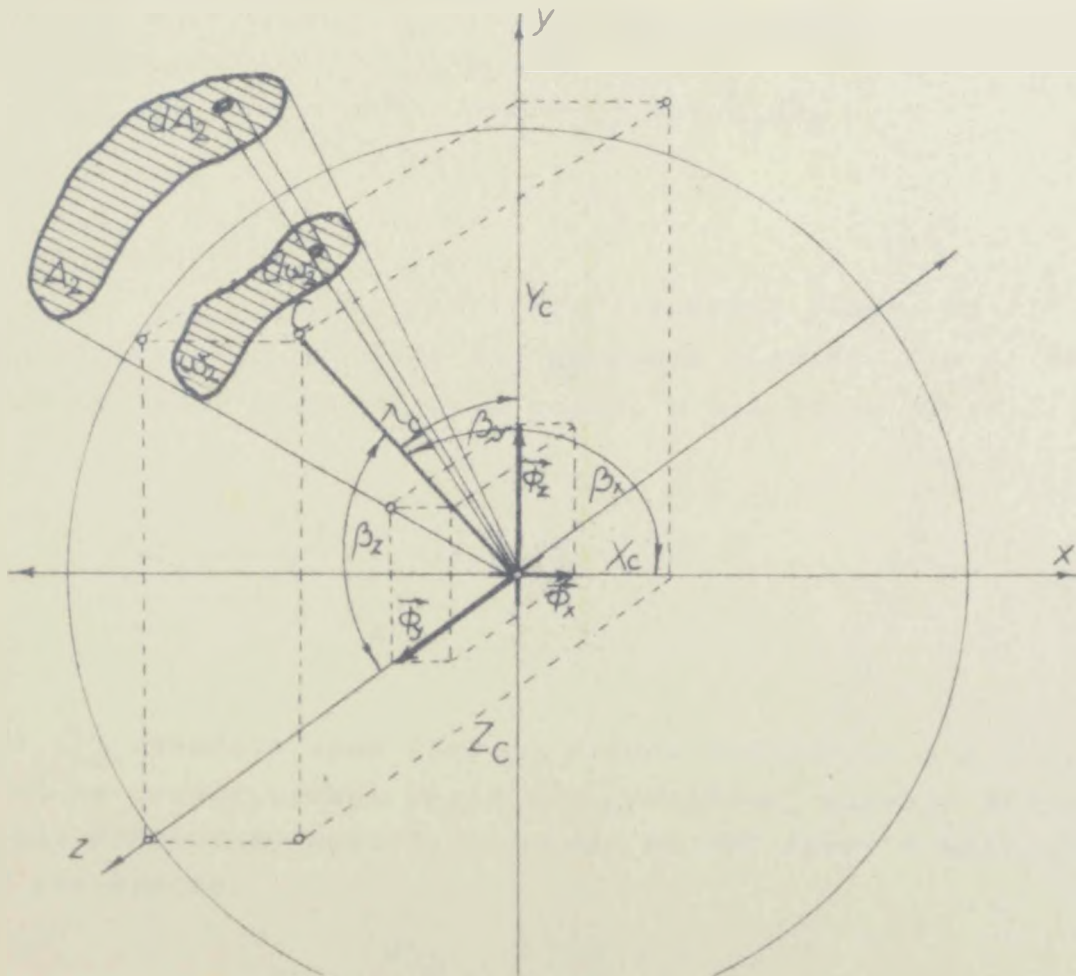
Sl. 44. Prostorni uglomer

3. POLJE TOPLOTNOG ZRAČENJA

3.1. DOKAZ VEKTORSKE PRIRODE POLJA ZRAČENJA

Dokaz o tome da je radijaciono polje vektorsko dat je u radu Novaković, Anastasijević /36/ 1976. godine. Zbog njegove velike važnosti za dalju analizu, koja je predmet ovog rada, liče detaljno interpretiran, sa manjim izmenama u nomenklaturi.

Predpostavimo da se diferencijalna emisijska površina nalazi u centru x, y, z koordinatnog sistema (Slika 45.). Opišimo oko nje sferu.



Sl. 45. Dokaz da je radijaciono polje vektorsko

Na osnovu jednačine (35) može se napisati sledeći izraz za toplotni fluks usmeren od emisione površine dA_1 ka konačnoj A_2 :

$$dQ'_{a1 \rightarrow 2} = \int_{\omega} i'_{1} \cos \beta_1 dA_1 \frac{\cos \beta_2 dA_2}{r^2} - dA_1 \int_{\omega} i'_{1} \cos \beta_1 d\omega_2 =$$

$$dA_1 \int_{\omega} \frac{e'_{1}}{\pi} \cos \beta_1 d\omega_2 = \frac{dA_1 \bar{e}'_{1}}{\pi} \int_{\omega} \cos \beta_1 d\omega_2$$

odnosno, za gustinu fluksa:

$$aQ' = \frac{dQ'_{a1 \rightarrow 2}}{dA_1} = \frac{\bar{e}'_{1}}{\pi} \int_{\omega} \cos \beta_1 d\omega_2$$

Analiza zavisnosti gustine fluksa od "1" ka "2" od orijentacije površine dA_1 pokazuje sledeće. Ako je diferencijalni izvor orijentisan u pravcu x ose fluks će biti:

$$aQ'_x = \frac{e'_{1x}}{\pi} \int_{\omega} \cos \beta_x d\omega_2$$

gde β_x označava ugao između pravca radijacije i x ose. Integral na desnoj strani poslednje jednačine, zapravo definiše moment prostornog ugla ω_2 u odnosu na XOZ ravan i može se zaminiti proizvodom:

$$aQ'_x = \frac{e'_{1x}}{\pi} \omega_{2x} \quad (71)$$

U poslednjoj jednačini r_c predstavlja x -koordinatu težišta (centra) C površine ω_2 na sferi.

Analogno relaciji (71) može se napisati za tro-dimenzioni prostor:

$$\varphi'_y = \frac{e'_2}{r_c} \omega_2 \quad (72)$$

$$\varphi'_z = \frac{e'_1}{r_c} \omega_2$$

Najkrace rastejanje centra prostornog ugla ω_2 od koordinatnog početka (dA_1) (intenzitet vektora položaja tačke C u predloženom koordinatnom sistemu) iznosi:

$$r_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2}$$

Ako je diferencijalna površina dA_1 orijentisana u pravcu težišta prostornog ugla (kolinearno sa pravcem λ_c) tada je, očigledno, gustina fluksa maksimalna i jednaka:

$$\varphi'_\lambda = \frac{e'_2}{r_c} \lambda_c \omega$$

Za svaku drugu orijentaciju emisivne površine gustina fluksa će biti jednaka proizvodu:

$$\varphi' = \varphi'_\lambda \cos \beta$$

gde β označava ugao između normale na dA_1 i pravca radijacije. To jednostavno znači da se oko svake površine koja emituje toplotu formira vektorsko polje, takvo da skalarni proizvod vektora površine $\overline{dA_1}$ i vektora zračenog fluksa $\overline{\varphi}$ definiše emitovanu toplotnu energiju:

$$Q = \int \overline{\varphi} \cdot \overline{dA} \quad (73)$$

Jednčina (73) je dokaz da je radijaciono polje vektorsko.

3.2. ANALIZA POSEBNIH SIMETRIČNIH POLJA

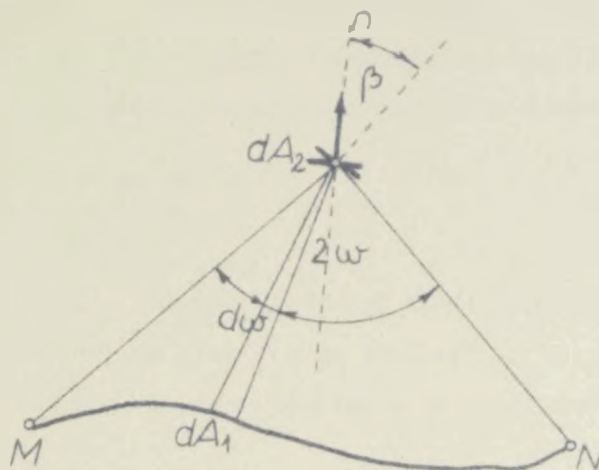
3.2.1. Dvodimenziono radijaciono polje

U slučaju zračenog polja beskonačne ravne trake sve veličine polja mogu se izraziti u funkciji dve varijable (koordinate). Ako se z -osa usmeri u pravcu paralelnom beskonačnoj dimenziji slika polja u svim XOY ravnima biće identična, kada se sistem može svesti na samo dve dimenzije. Ovakav slučaj ima veliki značaj, jer se niz pojava iz domena prenosa toplote u inženjerstvu može svesti na rešavanje dvo-dimenzionog problema. Takodje, ovako pojednostavljen model pruža mogućnost sagledavanja nekih elementarnih i bitnih principa radijacione geometrije.

Zamislimo dvodimenziono radijaciono polje realizovano pomoću trake A_1 beskonačne dužine (u pravcu normale na ravan hartije) (na slici 46) u cilju odredjivanja intenziteta zračenja u tački (liniji) A_2 u prostoru /37/.

Ako se oko zamišljene linije A_2 opiše koaksijalni cilindar, jediničnog radijusa, tada će udeo u totalnom radijacionom toplotnom fluksu svake elementarne trake dA_1 biti proporcionalan (dvodimenzionom) prostornom uglu $d\omega$ pod kojim se diferencijalna površina "vidi" tačka A_2 .

Vektor elementarnog zračnog fluksa u tački A_1 ima smer linije koja diferencijalnu površinu dA_1 spaja sa A_2 . Totalni radijacioni fluks toplote na mestu A_2 u zračnom polju trake A_1 proporcionalan je ukupnom (dvodimenzionom) prostornom uglu 2ω , pod kojim se sa A_1 vidi linija A_2 . On je vektorska veličina, formirana sabiranjem elementarnih vektora.



Sl. 11. Dvodimenziono radijaciono polje nad beskrajnom trakom

Očigledno je, zbog simetrije, da se pravac rezultantne (totalne) radijacije poklapa sa pravcem simetrale n ugla $2w$.

kada se u tačku dA_1 postavi infinitezimalna površina dA_2 orijentisana koaksijalno sa simetralom ugla $2w$, tada će intenzitet radijacije imati vrednost jednaku:

$$i = e \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos w \, dw = 2e \sin w \quad (74)$$

gde je e -emisivna snaga površine koja zrači (po Stefan-voltzamn-ovom zakonu srazmerna četvrtom stepenu apsolutne temperature).

Radijacioni fluks kroz elementarnu površinu dA_2 , postavljenu normalno na simetralu ugla $2w$ bice jednak:

$$dQ = i \, dA_2$$

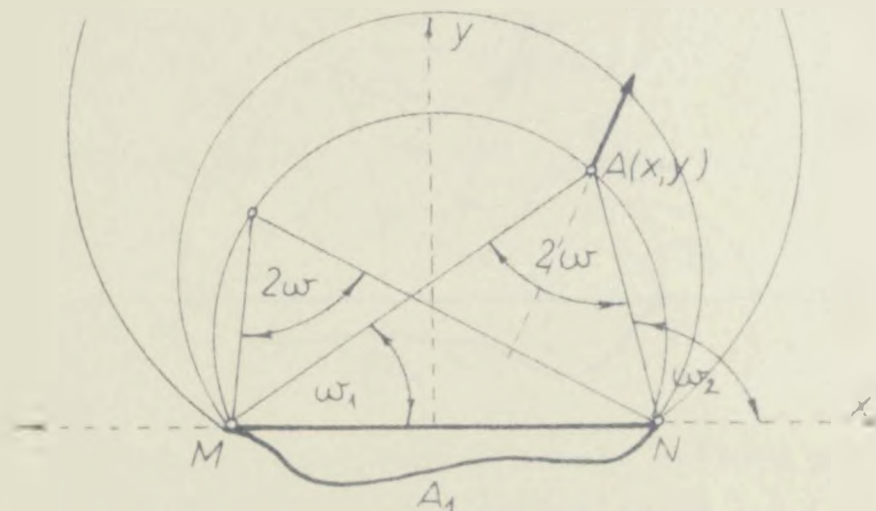
U poslednjoj jednačini izraz: $i \, dA_2$, predstavlja:

skalarni proizvod vektora intenziteta \vec{i} i vektora elementarne površine $d\vec{A}_2$, dok je β - ugao između njih. Za konačnu crnu površinu akceptovana radijaciona energija iznosi:

$$Q = \int \vec{i} \cdot d\vec{A}$$

Konfiguracija takvog radijacionog polja jednostavno se može ustanoviti analizom položaja u prostoru karakteriziranim jednakim vektorima intenziteta u odgovarajućem pravcu.

Zamislimo radijaciono polje nad trakom A_1 (na slici 47.). Intenzitet radijacije u svim tačkama koje leže na



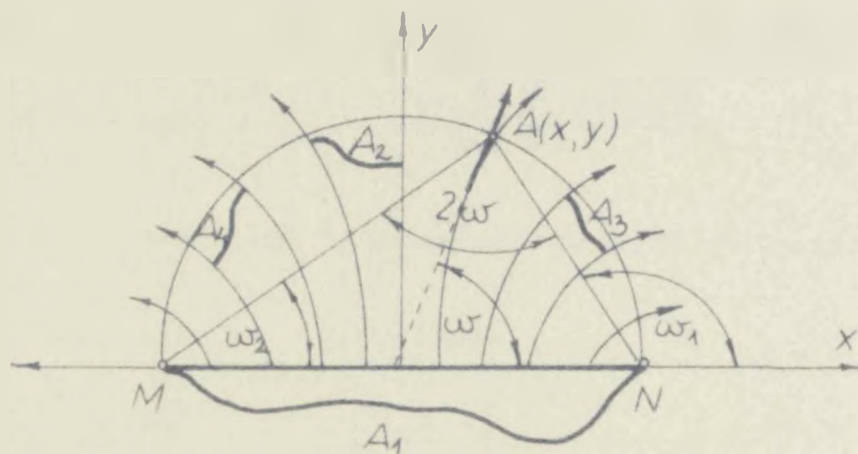
Sl. 47. Linije istog intenziteta u radijacionom polju beskrajnje trake

krugu konstruisanom nad linijom \overline{MN} je konstantan, kao što je konstantan ugao ω , pod kojim se iz tačke na krugu "vidi" emisijsku površinu (Dokaz: svi periferni uglovi nad istom tetivom u jednom krugu međusobno su jednaki). Tačke M i N označavaju ivicu radijacione trake.

Kao što je rečeno, pravac vektora \vec{i} je identičan sa pravcem simetrale ugla 2ω , a njegova orijentacija je od emisione trake ka okolini.

Pravac intenziteta radijacije \vec{i} u ma kojoj tacki zracenog polja predstavlja tangente na strujnice. Linije radijacionog polja su kofokalne hiperbole sa fokusima u tačkama M i N. Dokaz ove tvrdnje je činjenica da su hiperbole jedine linije čije su tangente u svim tačkama kooaksijalne sa simetralama ugla ugla pod kojim se iz tih tačaka "vide" dve fiksne tačke - fokusi.

Ubeležimo polovinu rastojanja izmedju ivica trake M i N sa e , a sa $2a$ vrednost realne ose (rastojanje izmedju dva temena). (Sl.48...)



Sl.48. Strujnice i pravac vektora polja beskrajne zračne trake

Jednačina familije hiperbola, koje predstavljaju strujnice radijacionog polja, glase:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{e^2 - a^2} = 1 \quad (75)$$

Dokaz da se propagacija radijacione energije vrši u vidu strujnih cevi oblika kofokalnih hiperboličnih površina baziran je na jednostavnim relacijama i teoremama analitičke geometrije.

Iz jednačine hiperbole (75) moguće je izraziti funkciju:

$$y = \frac{a}{2} \sqrt{(e^2 - a^2)(x^2 - a^2)}$$

Nagib tangente u proizvoljnoj tački A (x, y) je prvi izvod funkcije:

$$\operatorname{tg} w = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{e^2 - x^2}{x^2 - a^2}} \quad (76)$$

Sa slike 48. je očigledno:

$$\operatorname{tg} w_1 = \frac{y}{x-e} = \frac{\sqrt{(e^2 - a^2)(x^2 - a^2)}}{a(x-e)} \quad (77)$$

$$\operatorname{tg} w_2 = \frac{y}{x+e} = \frac{\sqrt{(e^2 - a^2)(x^2 - a^2)}}{a(x+e)} \quad (78)$$

Potrebno je pokazati da važi relacija:

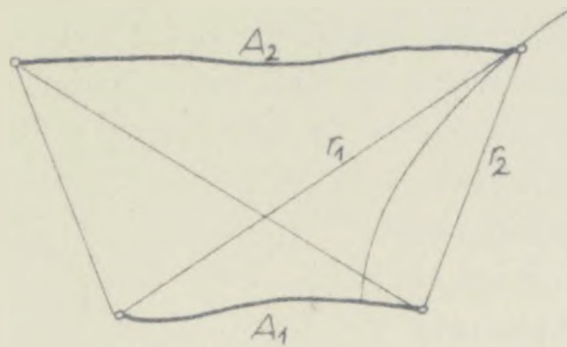
$$\operatorname{tg}(w_1 + w_2) = \operatorname{tg}(2w)$$

odnosno:

$$\frac{\operatorname{tg} w_1 + \operatorname{tg} w_2}{1 - \operatorname{tg} w_1 \cdot \operatorname{tg} w_2} = \frac{2 \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg}^2 w} \quad (79)$$

Zamenom jednačina (76), (77) i (78) u izraz (79) dokazuje se da tangenta u proizvoljnoj tački A predstavlja simetralu ugla između te tačke i tačke M i N, što je osobina hiperbole.

Sve što je navedeno potpuno je u saglasnosti sa *CROSSED-STRING* metodom za dvodimenziono radijaciono polje. Naime, ako se na sistem sastavljen od dve beskrajne trake (emisione A_1 konstantne i akceptujuće A_2 varijabilne) širine i odstojanja sa zajedničkom centralnom normalom (Sl.49.) primeni *crossed-string* metoda dobija se faktor oblika u vidu jednačine.



Sl. 19. Crossed-string metoda primenjena na sistem dve beskrajne trake

$$r_{1,2} = \frac{r_1 - r_2}{2}$$

odnosno:

$$r_{1,2} A_1 = r_1 - r_2$$

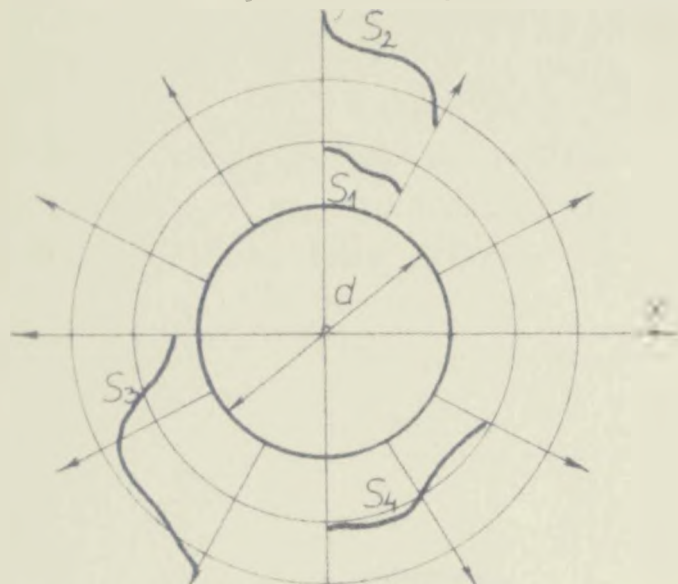
Kako je širina trake konstantna veličina, gornja relacija se za različite vrednosti faktora oblika pretvara u jednačinu familije hiperbola sa zajedničkim žižama lociranim na ivicama emisione površine. Za konstantan faktor oblika ivice akceptujuće površine opisuju cilindrične hiperboloide.

Na osnovu koncepcije vektorskog polja proizilazi da svaka površina koja obuhvata dve, na pr. susedne strujnice, akceptuje isti iznos energije, bez obzira na položaj (površine A_1 i A_2) (na slici 48.), tj. ima isti faktor oblika.

Potrebno je naglasiti da svaka familija krivih ima svoju familiju ortogonalnih krivih. Za krugove koji reprezentuju mesta ozračenja istim intenzitetom ortogonalne trajektorije su, takodje krugovi, a na kofokalne hiperbole, koje predstavljaju linije polja, normalne su elipse.

3.2.2. Radijaciono polje beskrajnog cilindra

Zračno polje cilindra prečnika d i beskonačne dužine (u pravcu Z -ose, normalne na ravan hartije) ima isti izgled u svim XOY ravninama (time se svodi na dvodimenzionu geometriju), prikazano je na slici 50. Strujnice cilindrične emisi-



Sli. 50. Radijaciono polje beskrajnog cilindra

one površine leže u ravninama koplanarnim sa osom cilindra i zrakasto polaze sa njegove ravni. Ekvipotencijalne ravni su cilindri koaksijalni sa emisi-
onim valjkom (na slici 50.). U dvodimenzionom polju beskonačnog cilindra (u XOY) ravnima jednačina strujnice je, zapravo, jednačina prave koja prolazi kroz koordinatni početak:

$$y=kx$$

Strujnice su usmerene ka beskonačnosti. Istovremeno, ekvipotencijalne linije (u XOY ravni) su krugovi, čije jednačine glase:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Pri svemu ovome, strujnice su normalne na ekvipotencijalne linije, sa kojima zajedno čine ortogonalnu mrežu zračnog cilindričnog polja.

Isti faktor oblika imaju površine "razapete" između istih strujnica (na pr. površine S_1 i S_2 na slici 50.), odnosno strujnih cevi kroz koje se emituje isti iznos zračne energije (površine S_3 i S_4 na slici 50.).

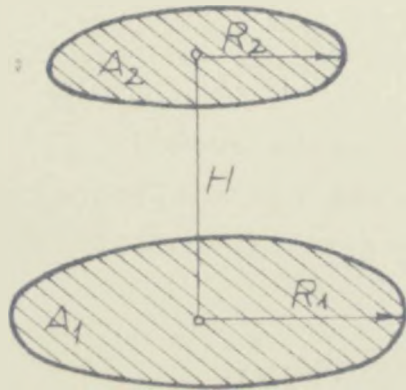
U ovom slučaju, tačke koje primaju radijacionu energiju istog intenziteta leže, takođe, na kružno cilindričnim površinama (krugovima) i poklapaju se sa ekvipotencijalnim linijama.

3.2.3. Radijaciono polje kruga

U radu [30] je analitički određeno polje zračenja kruga na osnovu analize prenosa toplote između dva paralelna kruga, različitih prečnika, sa zajedničkom normalom koja prolazi kroz njihove centre (sl. 51.).

Faktor oblika za ovu konfiguraciju glasi

$$F = \frac{(H^2 + R_2^2 + R_1^2 - \sqrt{4R_2^2 H^2 + H^4 - 4R_1^2 H^2})}{2H R_1}$$



gde su: R_1 i R_2 radijusi krugova A_1 i A_2 a H rastojanje među njima.

Variranjem rastojanja između krugova i poluprečnika jednog od njih (na pr. R_1), tako da radijacijom razmenjena toplota bude konstantna, moguće je odrediti polje kruga A_1 .

Sl. 51. Radijaciona razmena toplote između dva kruga, na istoj normali

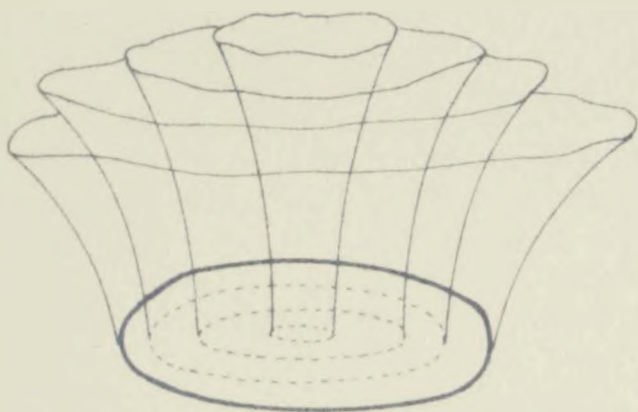
Gornja jednačina se može dovesti u oblik:

$$\frac{R_2^2}{(R_1^2 F) - H^2} = \frac{H^2}{R_1^2 (1 - F)} \quad (80)$$

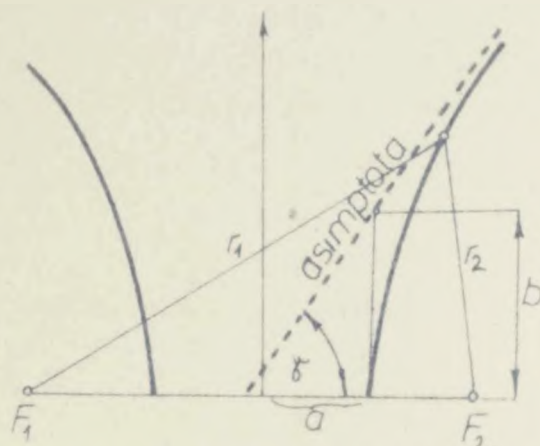
Za promenljivi parametar F jednačina (80) predstavlja familiju kružnih hiperbola, čija je žiža ivica emisivne površine A_1 (na slici 52.). U bezdimenzionom obliku napisan izraz (80) glasi:

$$\frac{X}{Y} = \frac{r}{R_2} \quad (81)$$

gde je: $X = \sqrt{1 - F}$ a $Y = H/R_2$. Svaka površina koja se unutar polja kruga nalazi u jednoj istoj strujnoj cevi prima istu količinu zračenja, tj. ima isti faktor oblika.



Sl. 52. Strujnice u zračnom polju kruga



Sl. 53. Parametri strujnih hiperboloida u zračnom polju kruga

Pomoću slike 53. moguće je definisati realnu (a) i imaginarnu poluosu (b) hiperbole, vizinu daljinu (e) i poluugao konične asimptotske površine (γ). Ovi parametri su:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{F} \\ b &= \sqrt{1 - F} \\ e &= \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \end{aligned}$$

3.2.1. Radijaciono polje sfere

Izglea radijacionog polja sfere dat je na slici 54. Strujnice su linije koje spajaju centar sfere sa svakom proizvoljnom tačkom na njenoj površini (imaju pravac radiusa) i usmerene su ka beskonacnosti.



Sl. 24. Zračno polje sfere

Ekvipotencijalne površine su, također, sfere opisane oko centrične sferične površine. Zbog simetrije problema polje ima isti izgled u svim dijagonalnim ravninama.

4.1. MAXWELLOVI ZAKONI

Između električnih i magnetnih pojava postoji veza do te mere neraskidiva da je jedan fenomen bez drugog ne-
 moguće zamisliti. Veza je našao Maxwell još 1873. godine.

„avećimo, ukratko, relacije koje je definisao.

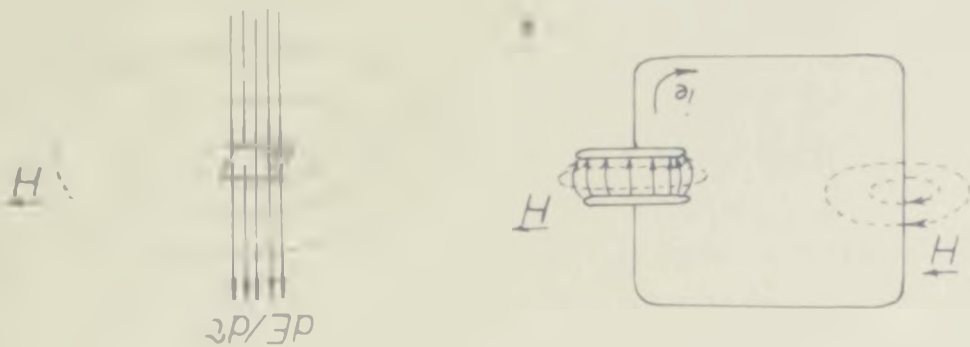
„Između električnih i magnetnih pojava postoji neraskidiva veza. Svaka električna ili magnetna pojava, posma-
 trana u celini, uvek predstavlja elektromagnetnu pojavu“. (ci-
 tat /36/ - Nojman-Kalantarov).

jednu od najvažnijih veza između električne stru-
 je i jačine magnetnog polja H definisao je Maxwell u obliku:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \dots$$

Odnosno, integral vektora jačine magnetnog polja
 po ma kojoj zatvorenoj konturi jednak je ukupnoj struji koja pro-
 lazi kroz površinu ograničenu tom konturom.

Primenljivo električno polje okruženo je zatvore-
 nim kružnim linijama magnetnog polja (Sl. 55./39/.

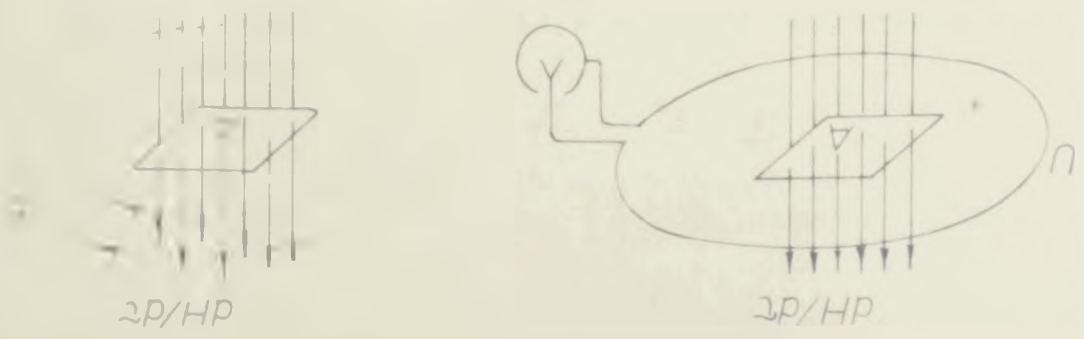


Sl. 55. Indukcija magnetnog polja oko provodnika

Ovo polje se formira u prostoru (dielektriku) oko koje miruje, a posjeduje električna opterećenja konstantna u toku vremena. U opisanom sistemu nema elektricne struje, odnosno vektor gustine struje $\vec{j} = 0$.

4.2. ELEKTROSTATIČKO POLJE JEDNOSMERNIH STRUJA

4.2.56. indukcija električnog polja u promjenljivoj magnetnom polju



Naime, svaka promena magnetnog polja u vremenu indukuje u posmatranom prostoru elektricno polje tj. promena magnetnog polja okruženo je zatvorenim tokom struje.

$\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$

ell-ova relacija predstavlja zakon elektromagnetne indukcije, koji električnom struju I duž neke konture izaziva na integralom vektora gustine elektricnog polja \vec{E} duž konture:

Ukoliko u sistemu nema namagnetisanih tela, tada ne postoji ni magnetno polje, pa se može napisati:

$$\underline{B} = 0 \quad \text{t} \quad \underline{H} = 0$$

gde \underline{B} - označava magnetnu indukciju, a \underline{H} - jačinu magnetnog polja.

Osim toga za elektrostatičko polje vaze sledeće jednačine:

$$\text{rot } \underline{E} = 0 \quad (82)$$

$$\underline{D} = \underline{q} \underline{E} \quad (83)$$

$$\text{div } \underline{D} = \rho \quad (84)$$

$$\int \underline{D} \cdot d\underline{A} = q_{\text{un}} \quad (85)$$

U ovim relacijama je: \underline{E} - električno polje, \underline{D} - električni potencijal, ρ - električna gustina, a S je srednja zapreminska gustina elektriciteta.

Jednačina (82) predstavlja formulu bezvrtložnog karakterna elektrostatičkog polja.

Potencijal elektrostatičkog polja u nekoj tački A do izvesne fiksirane (referentne) tačke B, u kojoj je potencijal nula (referentna tačka u beskonačnosti):

$$V_A = \int_B^A \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

Kada se uvede vektor gradijent električnog potencijala (grad V) mora biti:

$$\underline{E} = - \text{grad } V$$

Utvrđivanje slabljenja potencijala i jačine polja sa udaljavanjem od sistema naelektrisanih tela veoma je važno za poznavanje važnih osobina elektrostatičkog polja.

Ako se posmatra tačkasto električno opterećenje tada potencijal i jačina njegovog polja na rastojanju r , u homogenoj i izotropnoj sredini, iznose:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (86)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (87)$$

Potrebno je naglasiti da se poslednje dve jed-

nacine mogu primeniti i na sistem tela čije je zbirno ~~elektri-~~no opterećenje različit od nule, ukoliko se posmatraju tačke u polju na rastojanjima mnogo većim od dimenzija tela (u tom slu-

vaju tela se mogu posmatrati kao tačkasta električna opterećenja). Na osnovu jednačina (86) i (87) zaključuje se da u elektrostatičkom polju tačkastog naelektrisanja ~~tit~~ tela čije je sumarno naelektrisanje različit od nule (dovoljno daleko od tela) potencijal opada obrnuto srazmerno kvadratu rastojanja

U istog zaključka se može doći i posmatranjem polja vrlo dugaćkih paralelnih provodnika, čija je gustina elektriciteta po jedinici duzine $\sigma = dq/dl$. Ako se rastojanje između dva provodnika obeleži sa d , pod uslovom da je $r \gg d$ (za velika ras-

$$U = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \cos\theta$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{r}{r^2}$$

gde je θ ugao između r i a .

Kada u elektrostatičkom polju ne postoje zapre-
ninska električna opterećenja, tada se ono definiše Laplace-ovom
jedačinom:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Planparalelno električno polje određuju jedna

vrste tipa:

$$U(x, y) = \text{const}$$

$$V(x, y) = \text{const}$$

(Poslednju veličinu nazivamo funkcijom fluksa) ili:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

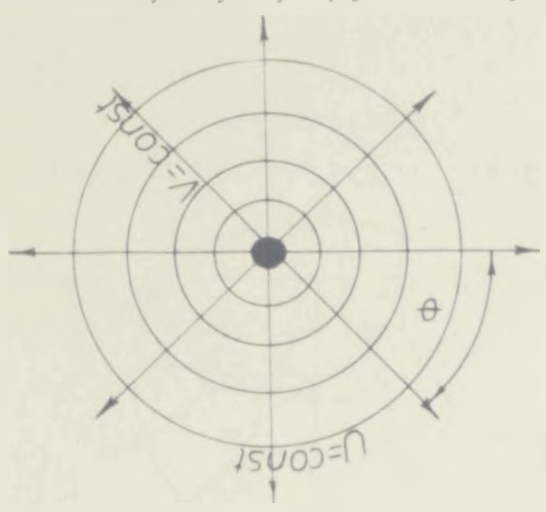
Iz dimenzionog električnog polja u neprovodnoj sredini
je polje usamljenog provodnika na slici 57. Jednačine ekvipoten-

cijalnih linija (koje su u
ovom slučaju krugovi) imaju
oblik:

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r = \text{const}, \quad (88)$$

tz. $r = \text{const}$, gde su ra-
dijsi ekvipotencijalnih kru-
govova menjaju geometrijskom pro-
gresijom. Jednačine linija erli-

1.57. Polje beskrajnog
linijskog provodnika



$$V = \text{const}.$$

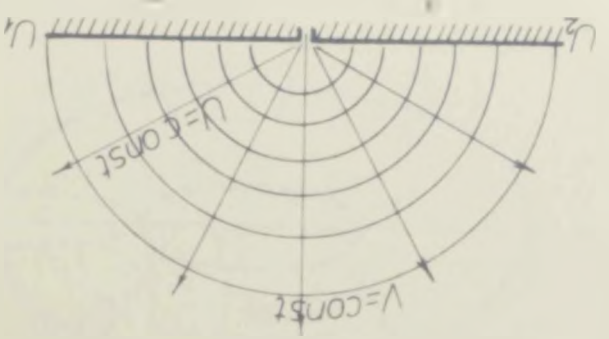
$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \theta - \text{const} \quad (89)$$

(radijalne prave) glase:

II PRIMER Polje komplementarno prethodnom formira se iznad dve ravni suprotno naelektrisane (Sl. 8.) koje se medjusobno nalaze pod uglom θ .

U ovom slucaju karakteristične veličine su:

$$V = \frac{-\tau \sigma \theta}{2 \ln r}$$



Sl. 8. Polje dve beskrajne suprotno naelektrisane trake

između dve ravni i obratno.

odnosno, direktno suprotne relacije su ekvipotencijalne linije u polju usamljenoc provodnika linije polja

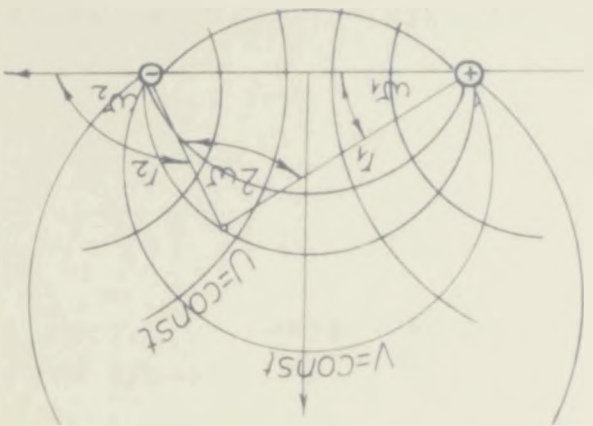
III PRIMER Oko dvozičnog električnog voda (Sl. 9.) sa paralelnim suprotno naelektrisanim provodnicima formira se elektrostatičko polje. I u ovom slucaju ekvipotencijalne linije su krugovi (karakteristične jednačine):

$$U = \frac{\tau}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} = \text{const}$$

tj. $r_2/r_1 = \text{const}$, sa centralnim tačkama na OX liniji.

Jednačina ma koje linije ima oblik

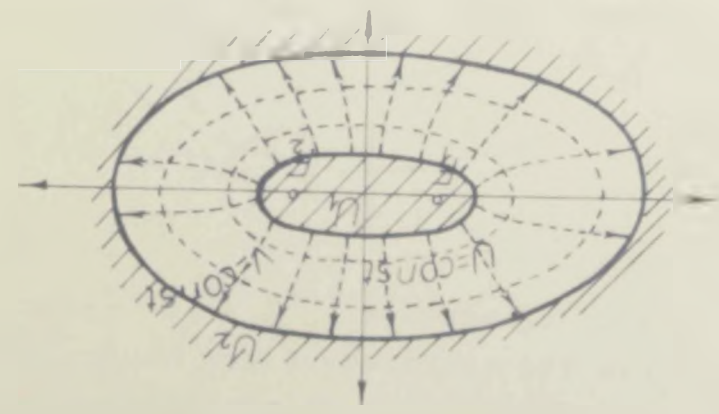
$$w = \frac{\tau \sigma \theta}{2} (w^2 - w_1^2) = \text{const} \quad (90)$$



Sl. 9. Polje dva paralelna provodnika

jeanostavnije $w = \text{const}$.

IV PRIMER Polje između eliptičnih cilindara prikazano je na slici 60. Ekvipotencijalne linije u polju koje se formira između cilindara (na pr. kondenzatora čije se ploče poklapaju sa površinama eliptična cilindara) definišu familiju kofokalnih elipsi i imaju matematički oblik



60. Polje eliptičkih cilindara između površina

$$\frac{2 \ln \frac{a}{b}}{2 \ln \frac{a}{c}} = 1$$

gde je b - konstanta izražena pomoću opteređenja unutrašnje ploče kondenzatora i njene dužine l :

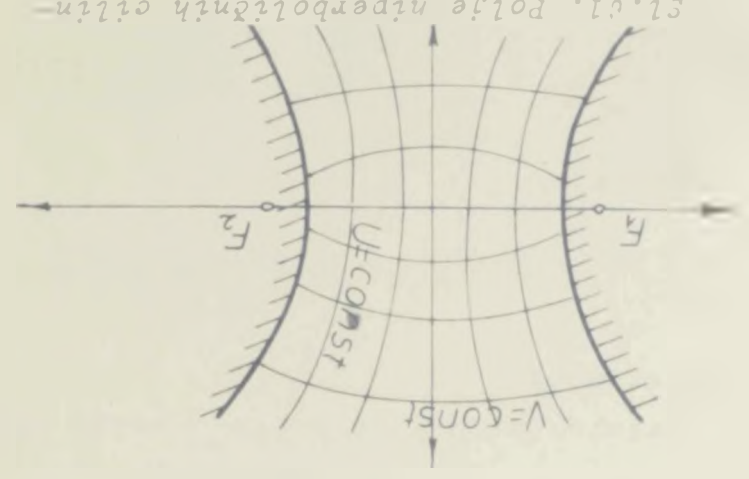
$$b = - \frac{2 - \epsilon}{2}$$

Linije polja predstavljaju hiperbole, koje definiše jednačina:

$$\frac{y^2}{a^2 \cos^2 \frac{\pi}{V}} = \frac{e^2 \sin^2 \frac{\pi}{V}}{y} = 1$$

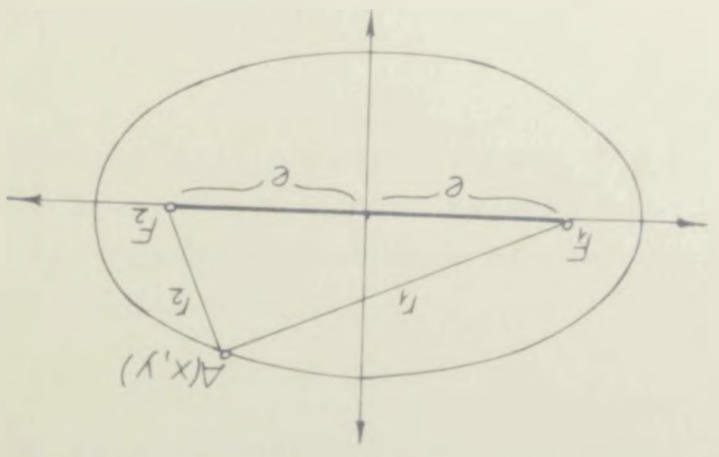
V PRIMER Između dva naelekttrisana hiperbolična cilindara formira se polje komplementarno pret-

hodno pomenutoj (slici 61) Naima, ekvipotencijalne linije su kofokalne hiperbole, a strujnice predstavljaju kofokalne elipse.



61. Polje hiperboličnih cilindara između površina

VI PRIMER Sva do sada navedena polja odnose se na dvodimenzionalne slučajeve. Kada se elektrostatičko polje menja u pravcu i smeru sve tri koordinatne ose potrebno je da se radi o polje u prostoru. Tražiti rešenje.



Sl. 62. Polje tanke niti duzine \$2e\$

za tačku \$A(x, y)\$ se može izraziti jednadžbom.

$$r_1 - r_2 = 2e \ln \frac{x + e + \sqrt{(x+e)^2 - e^2}}{x - e + \sqrt{(x-e)^2 - e^2}}$$

odnosno, izraz za ekvipotencijalnu liniju u takvom polju ima oblik:

$$-\frac{x + e + \sqrt{(x+e)^2 - e^2}}{x - e + \sqrt{(x-e)^2 - e^2}} = \text{const}$$

ko jednostavan način se može pokazati da je zbir rastojanja ma koje tačke u polju od dve stalne tačke (fokusa) konstantan:

$$r + r' = 2e = \frac{k-1}{k+1} = \text{const}$$

gde je:

$$\kappa = \frac{x_1 + r_1}{x_2 + r_2}$$

što znači da su ekvipotencijalne linije kofokalne elipse u ravni XOY sa žizama u tačkama F_1 i F_2 . Ekvipotencijalne površine predstavljaju elipsoide, koji se formiraju obrtanjem ovih elipsi oko x - ose.

Kako su strujnice uvek ortogonalne trajektorije na putanje konstantnog napona, to linije V - const u meridijalnim ravnima ovog polja predstavljaju hiperbole sa žizama u F_1 i F_2 , odnosno hiperboloide u trodimenzionom prostoru.

4.3. ELEKTROKONDUKTIVNO POLJE JEDNOSMERNIH STRUJA

Jednosmerna struja, konstanta u toku vremena, može da teče kroz nepokretne provodnike, usled čega se na krajevima javlja pad napona, a u dielektriku koji ih okružuje, kao i u njima samima, izaziva kako magnetno, tako i električno polje /38/

Kada su polja konstantna (stacionarna) izvan izvora elektromotorne sile će biti:

$$\text{rot } E = 0$$

što sledi o tome da je elektrokonduktivno polje, kao i elektrostatičko (jednosmernih struja) bezvrtložno-potencijalno polje, odnosno i ovde važi:

$$E = - \text{grad } U$$

Uopšte, između elektrostatičkog polja u neprovodnoj sredini i stacionarnog električnog polja u konduktivnoj sredini postoji analogija, se zaključuje poredjenjem karakterističnih jednačina.

Dovoljno je vektor električnog pomeranja \vec{D} za-
 mentiti vektorom gustine struje \vec{j} , količinu elektriciteta
 strujom i , a dielektričnu konstantu ϵ električnom provodnoš-
 ću σ , pa da se fundamentalne relacije elektrostatičkog polja
 (82), (83), (84) i (85) transformišu u definicione jednačine
 elektrokonduktivnog polja:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

(91)

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

(92)

$$\int_{\vec{D}} d\vec{A} = i$$

(93)

Prva jednačina formuliše vezu između gustine

struje, provodnosti i jačine polja u homogenoj, izotropnoj,

elektrokonduktivnoj sredini. Strujne linije u ovaqvom polju

imaju takav oblik da su vektori gustine struje u svim njihovim

tačkama tangente na strujnice. Skup strujnih linija u prostoru

određuje strujnu cev. Linije električne struje imaju istu ori-

jentaciju kao i linije sile električnog polja, a ako je sredina

na homogena ($\epsilon = \text{const}$) tada je i gustina struje proporcionalna

gustini linija u električnom polju.

Prostorna raspodela struje u masivnim provodnim

sredinama (metalnim provodnicima, elektrolitima, na konduktiv-

noj hartiji i sl.) veoma je značajna za rešavanje niza praktič-

nih problema. Veliku pomoć pri tome pruža metod elektrostatičke

analogije.

VII PRIMER Ako se posmatra provodnik (na sl. 63.) kroz koji

protice jednosmerna struja i zanemari pad napona po jedinici

dužine, a (u skladu sa uslovima) izolacija, takodje posmatra kao

elektrokonduktivna sredina, onda se unutar izolatora formira

električno polje analogno elek-
trostatičkom polju oko usamlje-
nog provodnika (primer 1 u pog-
lavju o elektrostatičkim polji-
ma).
Na primer, između provodnika se
formiraju ekvipotencijalne sli-
nične površine (problem je dvo-
dimenzionalan) čije se jednačine
u meridijalnim ravnima mogu dobi-
ti integracijom relacije:

$$U_1 - U_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr$$

Kako je vektor jačine polja:

$$\vec{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

to se zamenom u prvu jednačinu dobija:

$$U_1 - U_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Ako se sa ψ označi (linearna gustina

struje po jedinici dužine provodnika), i granični uslovi izme-

ne u smislu udaljavanja povratnog provodnika u beskonačnost pos-

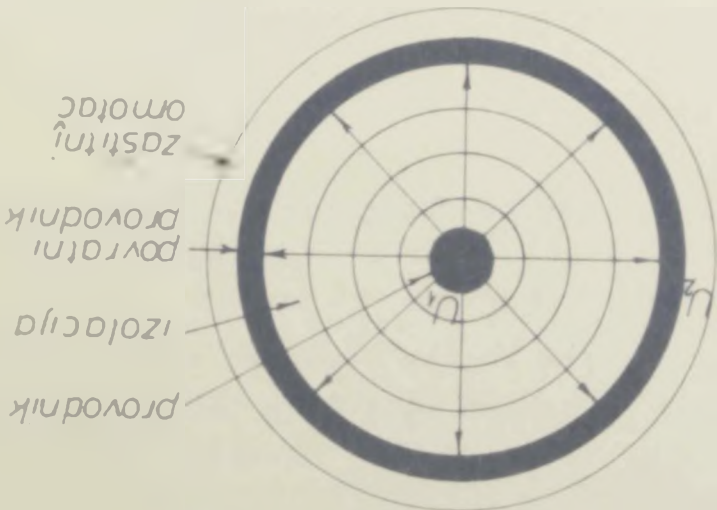
lednja jednačina se transformiše u izraz za ekvipotencijalne li-

nije (krugove):

$$U - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln r = \text{const}$$

(94)

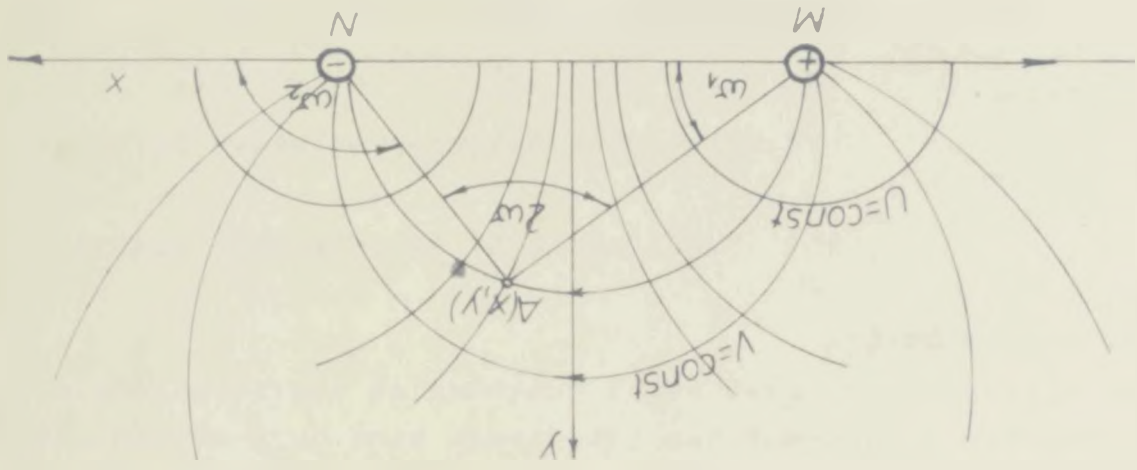
odnosno, $r = \text{const}$.



Sl. 03. Polje usamljenog
masivnog provodnika

zaklapaju sa pozitivnim smerom x-ose:
 uglova ω_1 i ω koje nadjusevektori iz naelektrianskih tačaka
 kasta naelektriansnja. Gradjent V je proporcionalan razlici

Sl. 64. Polje na konduktivnoj površini



Naime, na slici 64. prikazano je elektrokonduktiv-
 no polje formirano u dvodimenzionom medijumu pomoću suprotno na-
 elektrianskih punjenja. Iste se jednostavno pokazati da linije
 $V = const$ reprezentuju familiju krugova koji prolaze kroz

VIII PRIMER: elektrokonduktivnog planparalelnog polja analogan
 je elektrostatičkom polju između vaskrajnih medjusobno para-
 lelnih provodnika (primer III u poglavlju o elektrostatičkim
 poljima).

$$\Delta \theta = const.$$

Foređenje jednačina (94) i (88) ukazuje na
 potpunu analogiju ovog elektrokonduktivnog sa elektrostatič-
 kim poljem, ukoliko su zadovoljeni potrebni granidni uslovi.
 Linije sile elektrinog polja orijentisane su
 duz poluprednika. Njihova jednačina bi bila:

... (koja izaziva magnetno polje) i gustinu magnetnog ...

(38) $\vec{B} = 0$

(37) $\vec{B} = \mu \vec{H}$

(96) $\vec{H} = \vec{\sigma}$

oblik:

Jednačine koje definišu magnetno polje imaju

... MAGNETNO POLJE JEDNOSMERNIH STRUJA

statičkim poljima.

... i elektrokonduktivna polja analogna sa ranije opisanim elektro- ...

$$U = \frac{\psi}{\pi r} \ln r = \text{const}$$

liku:

Moguće je definisati jednačine ekvipotencijalnih linija u ob-

... se metodom elektrostatike analogije

uglom ...

... stanina vrednost gradijenta V karakteriše ... sa konstantnim ...

rižala.

... a ρ specifičnu provodnost konduktivnog mate-

gde ψ predstavlja linearnu gustinu struje koja napušta tačke

(95)
$$V = \frac{\psi}{\pi r} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\psi}{\pi r} \ln \frac{r_2}{r_1} = \text{const}$$

Da bi magnetno polje bilo bezvrtložno potreb-
 no je da se posmatra u delu prostora gde je gustina struje
 jednaka nuli ($\rho = 0$). I tom slučaju ono postaje potencijalno,
 tj. važi:

$$\text{grad } U^m = - \vec{H}$$

Parametar U^m predstavlja skalarni potencijal
 magnetnog polja i sve jeanajine oblika:

$$U^m(x, y, z) = 0$$

izražavaju opšti oblik jednačine površina istog magnetnog po-
 tencijala.

Magnetni fluks, koji prolazi kroz površinu A ,
 može da se definiše pomoću površinskog integrala gustine fluks-
 a:

$$\Phi^m = \int \vec{H} \cdot d\vec{A}$$

Između planarnih i sferičnih (elektrosta-
 tičkih i elektrokonduktivnih) i magnetnih polja postoji saglas-
 nost, koja se sastoji u sledećem /38/ (citiraj): "Slika magnetnog
 polja linijskih struja podudara se sa slikom električnog polja
 linijskih električnih opteređenja ako su struje i opteređenja
 u prostoru podjednako raspoređeni. Razlika između ovih slika
 sastoji se jedino u tome, što se na mestu linija sile električ-
 nog polja pojavljuju linije istog magnetnog potencijala a na me-
 stima linija istog električnog potencijala nalaze se linije sile
 magnetnog polja."

Kada se, dakle, konstruiše slika jednog polja
 (električnog ili magnetnog) drugo se jednostavno dobija na os-
 novu izloženog stava. Nekoliko primera potvrdiće npravo formuli-
 sano pravilo.

IX PRIMEK Magnetno polje formirano oko usamljenog linijskog provodnika (Sl. 65.), kroz koji teče jednosmerna struja, određuje se pomoću zakona totalne struje $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i$ na osnovu simetrije polja prema osovini provodnika.



Sl. 65. Polje usamljenog linijskog provodnika

Ekvipotencijalne linije su ekvidistantne radijalne pravce čije jednačine imaju oblik

$$V_m = \frac{-i}{2\pi} \theta - \text{const} \quad (92)$$

ili $\theta = \text{const}$, a strujnice odgovaraju koncentričnim krugovima, u matematičkoj formi datim kao:

$$V_m = - \frac{i}{2\pi} \ln r \quad (100)$$

tj. $r/r_1 = \text{const.}$, čiji radijusi rastu po geometrijskoj progresiji.

Ovakav izgled polja analogan je elektrostatičkom polju (primer I u poglavlju o elektrostatičkim poljima) i elektrokonduktivnom polju (primer VII u poglavlju o elektrokonduktivnim poljima) što u potpunosti potvrđuje poredjenje odgovarajućih jednačina (88) i (94) sa (100) i (89) sa (99), uz zamenu mesta linija sila električnog sa ekvipotencijalnim linijama magnetnog polja i obratno.

X PRIMEK Magnetno polje dvožičnog električnog voda istovetno je sa električnim poljem dva naelektrisana linijska provodnika (Sl. 64.) kada se na slici polja strujnice zamene linijama istog magnetnog potencijala i obratno. To možemo da uradimo na osnovu principa o saglasnosti električnih i magnetnih polja.

izrazi za potencijal i funkciju fluksa glase:

$$U_m = \frac{I}{2\pi} (\omega_2 - \omega_1) - \frac{I}{2\pi} \omega$$

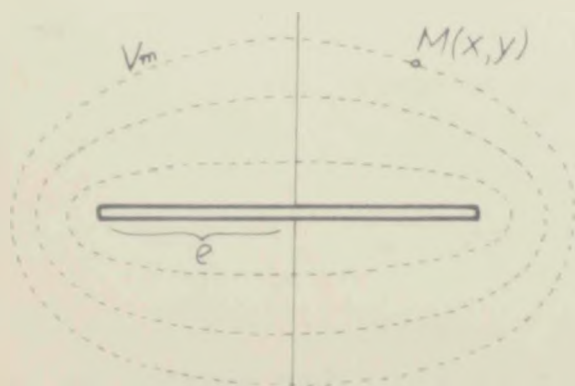
$$V_m = - \frac{I}{2\pi} \left(\ln \frac{r}{r_1} \right)$$

Obe jednačine definišu krugove. Prva kružne lukke koji prolaze kroz osovine dva provodnika, a druga krugove čiji centri leže na X-osi.

11 PRIMER U slučaju usamljene pravougaone šine zanemarljive debljine i širine mnogo manje u odnosu na dužinu formira se magnetno polje čiji je izgled prikazan na slici 66.

Jednačina linije sila glasi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \ln \left((x - e)^2 + y^2 \right) - 2y \cdot \arctg \frac{x - e}{y} - \\ & - \frac{1}{2} \ln \left((x + e)^2 + y^2 \right) - 2y \cdot \arctg \frac{x + e}{y} - \\ & 2(x + e) = \text{const} \end{aligned}$$

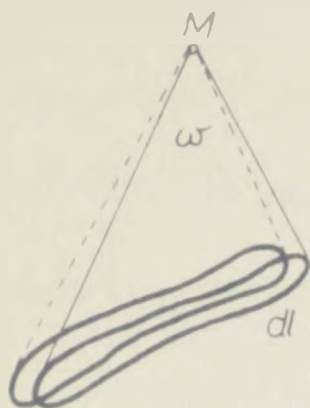


Krive jednakog magnetnog potencijala, zajedno sa strujnicama, čine ortogonalnu mrežu ovakvog magnetnog polja.

Mnogi drugi primeri mogu se realizovati na osnovu principa "slaganja" električnih i magnetnih polja, podešavanjem potrebnih granicnih uslova.

Sl. 66. Polje pravougaone šine

Magnetni potencijal φ_m koji predstavlja skalaru velicinu, u proizvoljnoj tacki M magnetnog polja, izraženog nad zatvorenom konturom kroz koju prolazi struja i proporcionalan je prostornom uglu ω pod kojim se iz odabrane tacke "vidi" strujna kontura (Sl. 67.).



Sl. 67. Magnetno polje nad konturom

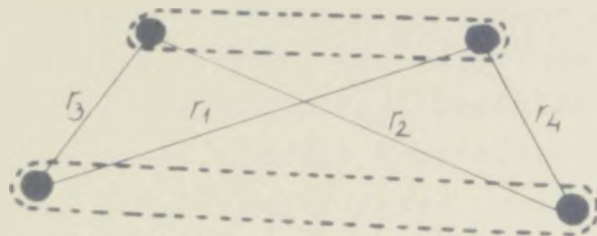
U cilju nalazenja vrednosti magnetnog napona u nekoj tacki polja polazi se od promene φ_m izazvane pomerenjem konture paralelno samoj sebi za duzinu dl , tj.:

$$dU_m = - \vec{i} \cdot d\vec{l} \quad (101)$$

Zamenom izraza za jacinu magnetnog polja u gornju relaciju integracijom jednačine (101) dobija se:

$$U_m = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \omega \quad (102)$$

Sistem od posebnog interesa predstavljaju strujne konture načinjene od paralelnih provodnika duzine (u pravcu normalnom na ravan) mnogo puta veće od njihovog medjusobnog rastojanja (Sl. 68.).



Sl. 68. Polje dve strujne konture

Oko obavijenih provodnika formira se paralelno magnetno polje i one deluju uzajamno (jedna na drugu). Naime, oko svake se obrazuje polje koje prouzrokuje struja u omći i polje indukovano prisustvom (blizinom) druge konture.

Koeficijent medjusobne indukcije po jedinici dužine definiše relacija:

$$k = \frac{\mu I_1 I_2}{r_1 r_2} \quad (103)$$

gde μ označava magnetnu permeabilnost sredine, I_1 , I_2 , r_1 i r_2 rastojanja prikazana na slici 68.

„najvecu moguću induktivnost imaju dve konture skoro iste površine i dužine, pod uslovom da su navučene jedna na drugu, tako da ceo fluks prve prolazi kroz drugu. Može se reći da uzajamna induktivnost predstavlja frakciju magnetnog fluksa jedne konture koju obuhvata druga.

Jeđnačina koja formuliše koeficijent medjusobne magnetne indukcije (103) po jedinici dužine u razloženom obliku glasi:

5. ANALOGIJA ELEKTROMAGNETNOG I RADIJACIONOG POLJA

U mnogim naučnim disciplinama veoma se često dešava da pojedine fenomene definišu iste jednačine, kada se apstrahuje fizički smisao veličina koje u njima figurišu (na pr. nestacionarna kondukcija toplote analogna je sa nestacionarnim strujanjem nestišljivih tečnosti kroz poroznu sredinu; fenomen vibracije analogan je sa oscilacijama u električnom polju; polje naprezanja može se dovesti u vezu sa deformacijom membrana i filmova; pojave termičke i električne kondukcije su analogne itd.).

Često se pojave ispituju na analognim modelima, naročito ako to pruža mogućnost jednostavnije realizacije eksperimenta i daje pouzdane i precizne rezultate merenja. Svakako, da posmatrane pojave postanu analogne potrebno je obezbediti i odgovarajuće granične uslove.

Većina problema u nauci o prenosu toplote izražava se i rešava parcijalnim diferencijalnim jednačinama koje u suštini opisuju vektorska i potencijalna polja. U ovakvom tretmanu fenomena fundamentalni procesi su definisani lokalnim vrednostima polja u elementarnoj zapremini.

Kako, na osnovu klasične teorije, slične diferencijalne jednačine opisuju pojave i definišu relacije u elektrostatičkim, elektrokonduktivnim i elektromagnetnim poljima, to se ova polja primenjuju u analognim istraživanjima i određivanjima parametara za oblast prenosa toplote. Metod analogije naročito je podesan s obzirom na relativno jednostavnu realizaciju električnih polja i lako i precizno eksperimentalno određivanje (merenje) parametara. Zbog toga se odavno primenjuje sa uspehom na rešavanje problema termičke kondukcije, pri čemu se analogna polja formiraju na elektrokonduktivnim jolijama (teletelos) u elektrolitima i sl.

Diferencijalnu jednačinu koja daje vezu između termičke i električne kondukcije metalnog provodnika u strujnom kolu, čiji se krajevi nalaze na temperaturama t_1 i t_2 , a pad napona na istom rastojanju iznosi U , prvi je definisao još 1872. i 1898 godine Kolrausch /40, 41/ u obliku:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + k_e \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) = 0$$

gde je λ termička a k_e električna provodljivost.

Medjutim, tek su 1913. godine Langmir, Adams i Meikle /42/ zapazili su sličnost između temperaturnog i električnog polja iste geometrijske konfiguracije, i primenili je na praktično rešavanje problema.

Jakob je 1914. godine (objavljeno 1922.god.) /43/ primenio sličnost između toplotnog i magnetnog polja za testiranje izolacionog materijala, a Nusselt je 1915. godine /44/ pokazao kako se na osnovu analogije između toplotnog i elektrostatičkog polja, merenjem električnih parametara, može odredjivati termička provodljivost materijala.

Fundamentalne jednačine koje definišu stacionarno temperaturno (konduktivno) i električno polje ukazuju na analogiju posmatranih fenomena:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

odnosno:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Jednačina električnog punjenja Q može se uporediti sa Fourier-ovom relacijom za toplotni fluks Q :

$$Q = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial U}{\partial n} d\Lambda$$

$$Q = -\lambda \int \frac{\partial t}{\partial n} d\Lambda$$

gde je k dielektrična konstanta, a n normala na površinu.

Linearni nestacionarni tok toplote definiše Fourier-ova parcijalna diferencijalna jednačina:

$$\frac{\partial t}{\partial t} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

dok za električno kolo promenljivog napona važi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{R_e C_e} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

U gornjim jednačinama a predstavlja temperaturnu provodljivost, a R_e i C_e električni otpor i kapacitet kondenzatora u električnom kolu.

Navedene relacije su samo deo velikog broja jednačina koje vezuju elektromagnetne i termičke parametre i ukazuju na analogiju između fenomena kondukcije toplote i pojava u električnim i magnetnim poljima. Prva merenja na analognim delima, kao što je navedeno, realizovana su još krajem prošlog veka, a do danas je predložen i usavršen veliki broj metoda zasnovanih na ovoj sličnosti.

Međutim, nije poznato da je električna analogija iskorišćena za analizu prenosa toplote zračenjem. Treba svakako naglasiti da između radijacije toplote sa jedne strane i prenosa toplote kondukcijom i analognih elektromagnetnih pojava s druge strane postoji suštinska razlika. Naime, u zračnom polju se može uočiti "akcija na rastojanju", odnosno, stanje u uođenom

elementu prostora definisano je vrednostima lokalnih parametara, ali i stanjem na proizvoljnom rastojanju u 4π steradiana, što nameće ograničenja u analogiji između radijacionog i elektromagnetnog polja.

Dokaz o analogiji zračnog i elektromagnetnih polja pruža analiza fundamentalnih jednačina karakterističnih za pomenuta polja. Nakon apstrahovanja fizičkog smisla parametara koji u njima figurišu ove jednačine se poistovećuju što se postize dovođenjem u bezdimenzioni oblik. Tvrdnja će odmah biti dokazana navođenjem identičnih relacija.

Oko svake površine koja zrači toplotu formira se vektorsko polje, čije se emitovana toplotna energija može formulirati relacijom /36/:

$$Q = \int_A \vec{\phi} \cdot d\vec{A} \quad (106)$$

S druge strane dve vrlo važne relacije dobijene razmatranjem električnog i magnetnog polja glase /38/:

$$Q = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad (107)$$

$$\phi_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (108)$$

Veličine koje figurišu u ovim relacijama su: Q - količina elektriciteta, \vec{D} - električni pomeraj, ili gustina fluksa, ϕ_m - magnetni fluks i \vec{B} gustina magnetnog fluksa. Može se reći da fluks vektora električnog pomeraja \vec{D} kroz bilo koju zatvorenu površinu, predstavlja merilo količine elektriciteta Q sadržanog u prostoru ograničenom konturom površine. Takođe je integral vektora magnetnog fluksa \vec{B} po površini jednak magnetnom fluksu kroz tu površinu.

Poredjenje jednačina (106), (107) i (108) ukazuje na analogiju između parametara zračnog i elektromagnetnih polja.

Komparacijom dvodimenzionog radijacionog polja (beskrajne trake) sa analognim elektrostatičkim poljem (primeri na slici 47. i slici 59.) uočava se da linije vektora gustine struje u električnom polju ($V = \text{const.}$ odgovaraju linijama konstantnog intenziteta ozračenja ($i = \text{const.}$) u analognom radijacionom polju. Odnosno, zaključujemo da je primenom adekvatnih graničnih uslova moguće, preko merenja električnih veličina, doći do podataka o parametrima analognog zračnog polja.

Dakle, familija krugova u zračnom polju beskrajne trake analogna je strujnicama električnog polja koje se formira između dva cilindrična, međusobno paralelna, provodnika u vazduhu naelektrisana suprotnom vrstom elektriciteta. Irovodnici odgovaraju konturi površine trake (izvora zračenja), a rastojanje između njih najkraćoj širini površine unutar definisane konture.

Izrazavanjem ugla w iz jednačine linije sile u elektrostatičkom polju (90) i zamenu w izraz za intenzitet radijacije beskrajne trake (74) uspostavlja se veza između veličina zračnog polja i odgovarajućih parametara elektrostatičkog polja:

$$\frac{z}{\epsilon} = 2 \sin \left(\frac{V \sqrt{\epsilon} e}{\tau} \right) \quad (109)$$

Ako se izvrši poredjenje zračnog polja beskrajne trake sa analognim elektrokonduktivnim poljem (primeri na slici 47, i 64.) formiranim u konduktivnom medijumu između dva tačkasta naelektrisanja (suprotne vrste) na rastojanju koje odgovara širini trake zaključuje se da su linije vektora gustine struje $V = \text{const}$ analogne linijama konstantnog intenziteta radijacije.

Zamenom ugla w iz relacije (95) u jednačinu (74) dobija se izraz koji definiše vezu između termičkih i električnih veličina:

$$\frac{i}{\psi} = 2 \sin \left(\frac{\sqrt{r} \pi}{\psi} \right) \quad (110)$$

Ako se, s druge strane, zamisli dvodimenziono električno polje (primer na slici 73.) sa takvim graničnim uslovima da jedna ekvipotencijalna linija (na maksimalnom naponu) odgovara emisivnoj traci, a druga (na naponu nula) beskonačnosti, tada familija ekvipotencijalnih linija između njih predstavlja sistem kofokalnih elipsi sa fokusima u krajnjim tačkama emisivne trake.

Linije konstantne gustine struje su kofokalne hiperbole koje odgovaraju krivim linijama čije se tangente u svakoj tački poklapaju sa pravcem lokalnih vektora zračenja (na slici 75.)

Oba pomenuta električna polja imaju svoja inverzna polja (na slikama 71. i 75.) u kojima linije gustine struje odgovaraju ekvipotencijalnim linijama.

Prema principu o saglasnosti planparalelnih električnih i magnetnih polja zaključuje se da je radijacionom polju beskrajne trake analogno magnetno polje koje se formira oko dva suprotno naelektrisana provodnika (primer X). Treba samo imati u vidu da linijama $i = \text{const}$ u zračnom polju odgovaraju linije $\psi = \text{const}$, gde je i - intenzitet radijacije, a ψ - magnetni potencijal.

Potreban uslov da polja budu analogna je da rastojanje između provodnika bude jednako rastojanju između ivica emisivne trake. Poredjenjem jednačina za magnetni potencijal i intenzitet radijacije dolazi se do izraza koji povezuje veličine magnetnog polja sa parametrima radijacionog polja:

$$\frac{z}{e} = 2 \sin \left(\frac{m \cdot \lambda}{z} \right) \quad (111)$$

Toplotni fluks sa jedne diferencijalne površine koji obuhvata druga diferencijalna površina u posmatranom radijacionom polju proporcionalan je prostornom uglu pod kojim se sa zračeće vidi akceptujuća površina (30).

•
 S druge strane, magnetni napon U u proizvoljnoj tački magnetnog polja (102) proporcionalan je prostornom uglu w pod kojim se iz date tačke vidi kontura, pa se može povući paralela između radijacionog fluksa i magnetnog napona.

Poredjenjem jednačine za faktor oblika dvodimenzionih sistema definisan primenom *CROSSED STRING* metode (58) sa izrazom za međusobnu magnetnu indukciju (104) zaključujemo da su pomenute jednačine slične.

U izrazu za faktor oblika od rastojanja između unakrsnih ivica beskrajnih traka koje razmenjuju toplotu (r_3 i r_4) oduzimaju se rastojanja između saglasnih ivica traka (r_1 i r_2). Koefficient međusobne magnetne indukcije, međutim, obično se kada se od zbira logaritama unakrsnih grana između kontura oduzme zbir logaritama rastojanja između saglasnih grana, što pokazuje da su duzinama u radijacionom polju analogni logaritmi rastojanja u magnetnom polju.

Za faktore oblika važi relacija:

$$F_{1,2} \cdot A_1 = F_{2,1} \cdot A_2$$

$$A_{ef\ 1,2} = A_{ef\ 2,1} \quad (112)$$

gde su $A_{ef\ 1,2}$ i $A_{ef\ 2,1}$ efektivne površine za izmenu toplote zračenjem.

Poredjenjem poslednje jednačine sa izrazom (58) za dvodimenzioni sistem dobija se:

$$A_{ef\ 1,2} = r_5 F_1,$$

Kada se izvrši komparacija relacije (104) za međusobnu magnetnu induktivnost vidi se da je efektivna površina za izmenu toplote između dve beskrajne trake proporcionalna koeficijentu uzajamne induktivnosti između dve beskrajne konture.

Analogija je zadovoljena kada su dimenzije emisivnih traka proporcionalne logaritmima odgovarajućih dimenzija konture.

Konačno poredjenjem izraza o jednakosti efektivnih površina (112) sa jednakošću koeficijenata međusobne magnetne indukcije (105) zaključuje se da postoji analogija između A_{ef} i M .

6. EKSPERIMENTALNI DEO RADA

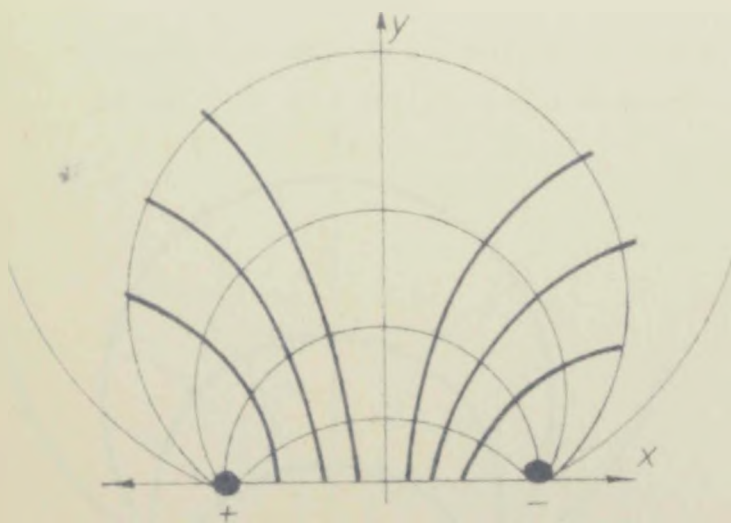
6.1. REALIZACIJA DVODIMENZIONOG ELEKTROKONDUKTIVNOG POLJA I ODREĐJIVANJE NJEGOVIH KARAKTERISTIKA

Vrlo pogodan način realizacije dvodimenzionog elektrokonduktivnog polja, analognog sa radijacionim, iste geometrije, je simulacija polja toplotnog zračenja na elektrokonduktivnoj (teledeltos) hartiji. Ogledi koji su u toku ispitivanja isvedeni ukazali su na mogućnost formiranja nekoliko različitih polja.

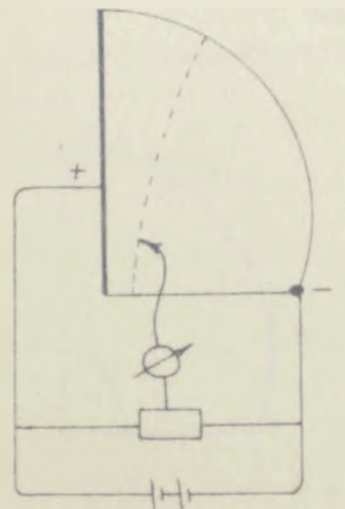
6.1.1. Bipolno polje

Kada se polovi postave tako da odgovaraju tačkama na ivici emisione površine - trake (kada su ekvipotencijalne linije krugovi ortogonalni na linije konstantnog intenziteta izrađenja) dobija se bipolno polje prikazano na slici 69.

Uz prikaz konfiguracije polja data je i šema po kojoj je vršeno snimanje. Zbog simetrije (u odnosu na Y osu) bilo je dovoljno analizirati polovinu polja (radijacionog prostora). Konduktivna hartija je isečena na način kako pokazuje



Sl. 70. Bipolno polje



Sl. 69. Uredjaj za snimanje ekvipotencijalnih linija na teledeltos hartiji

slika 70., čime su zadovoljeni potrebni granični uslovi, tako da električno polje bude analogno radijacionom istu geometrije. Nanošenjem sloja srebra na y - osu i u tačku na "ci" emisione trake i vezivanjem za izvor jednosmerne struje realizuju se polovi izmedju kojih se uspostavlja potencijalska razlika, a na provodnoj hartiji formira se polje.

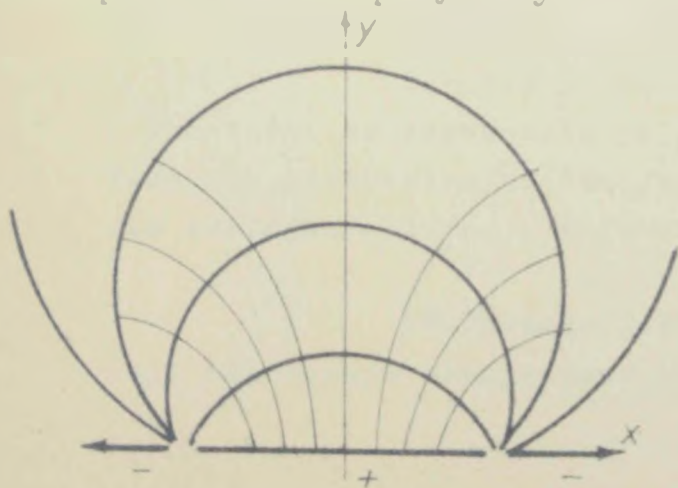
Konačno se na uspostavljenom polju ucrtavaju ekvipotencijalne linije (u obliku krugova).

U.1.2. Polje izmedju dve koaksijalne polubeskrajne linije odvojene koaksijalnom segmentnom linijom

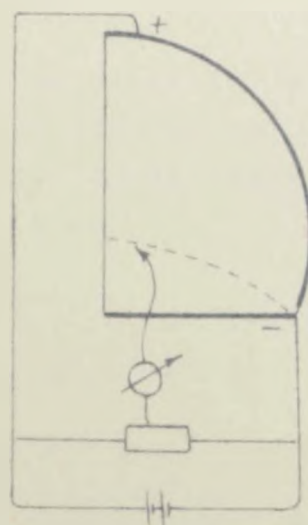
Izgled polja je dat na slici 71., a shema po kojoj je polje realizovano na slici 72.

Širinu radijacione trake predstavlja segmentna linija. Zbog simetrije polja (u odnosu na Y osu) bilo dovoljno posmatrati polovinu radijacionog prostora. Nanošenjem hartije i nanošenjem srebra podešeni su potrebni granični uslovi, a zatim odredjivane ekvipotencijalne linije. One su imale oblik krugova formiranih nad segmentnom linijom kao tetivom.

Uobijene ekvipotencijalne linije normalne su na krugove u bipolnom polju (predstavljaju ortogonalne trajektorije), pa se ova dva polja mogu smatrati komplementarnim.



Sl. 71. Polje komplementarno bipolnom polju

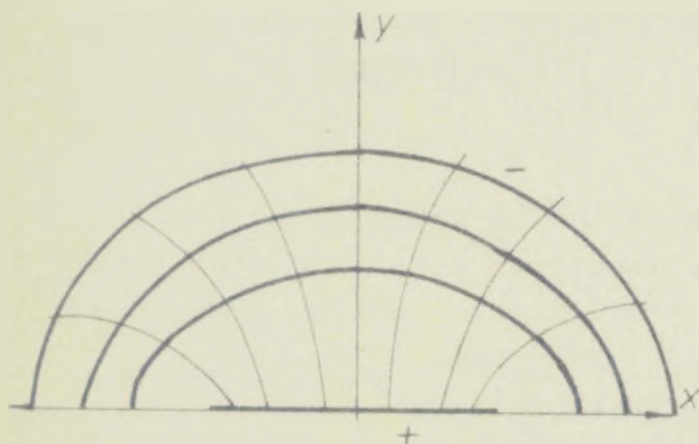


Sl. 72. Realizacija polja komplementarnog bipolnog polju

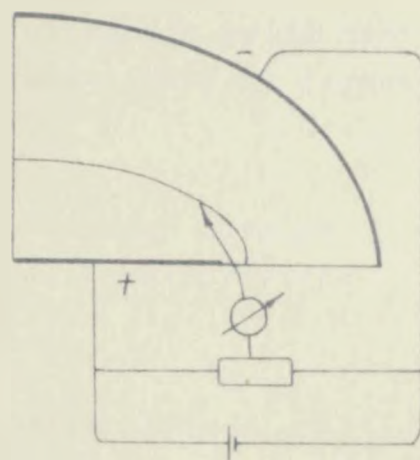
5.1. Segmentno polje

Ovo polje se formira nad segmentnom linijom koja odgovara najkraćoj emisijskoj traci unutar zadate konture. Ekvipotencijalne linije ovog polja su kofokalne elipse normalne na ostrujnice. Elektroda na nultom potencijalu (u beskonačnosti) je krug, odnosno u blizini emisijske linije elipsa.

Izgled polja prikazan je na slici 73., a njegova realizacija na slici 74.



Sli. 73. Segmentno polje

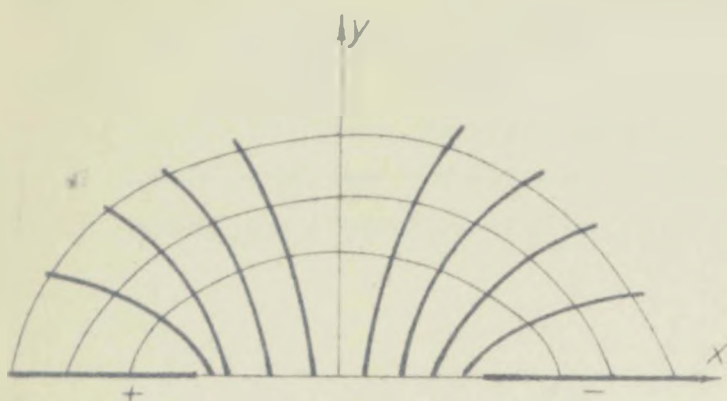


Sli. 74. Realizacija segmentnog polja

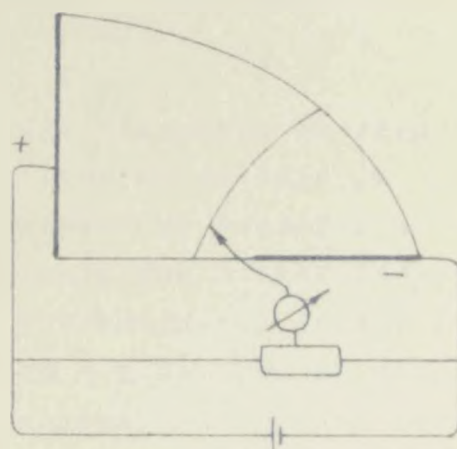
5.1.4. Polje između dve koaksijalne polubeskrajne linije razdvojene adijabatskom linijom

Konačno je realizovano polje na slici 75. komplementarno sa segmentnim poljem. Adijabatska linija, koja odvajava dve polubeskrajne linije, odgovara sirini trake (najkraćem rastojanju između tačaka na ivicama konture).

Ekvipotencijalne linije ovog polja su hiperbole, koje odgovaraju strujnicama dvodimenzionog zračnog polja.



Sl. 75. Polje komplementarno sa segmentnim



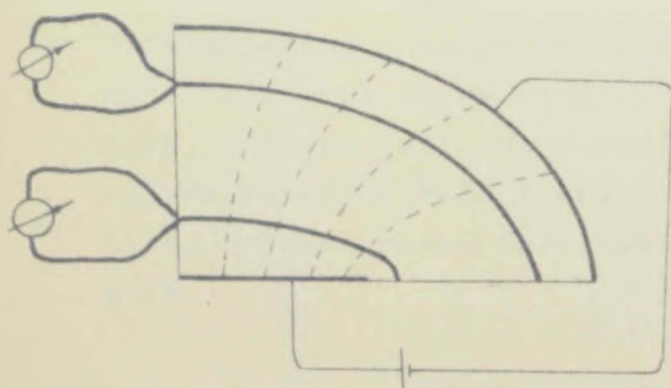
Sl. 76. Realizacija polja komplementarnog sa segmentnim

Sema po kojoj je eksperiment izveden data je na slici 76. Nakon realizacije ispitivane su karakteristike sobijenih polja.

6.1.3. Određivanje parametara polja:

Ogledom (na slici 77.) dokazano da kroz jednu strujnu cev protiče ista količina elektriciteta u toku vremena.

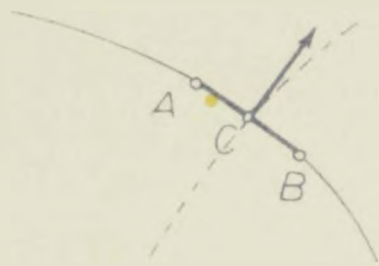
Luz ekvipotencijalnih linija rascčena je konduktivna hartija na dva različita mesta unutar jedne strujne cevi. Na oba preseka, prethodno prevučena slojem srebra, instrument je pokazivao istu jacinu struje. Tako je dokazano da svaka konačna površina postavljena izmedju dve iste linije zračnog fluksa obuhvata istu frakciju (ima isti faktor oblika) radijacione energije



Sl. 77. Ispitivanje parametara elektrokonduktivnog polja

Osim toga, potvrđena je pretpostavka da sece nje nartije auz linije strujanja ne remeti polje.

Pravac vektora gustine struje (tangente na strujnicu, odnosno normale na ekvipotencijalnu liniju) takodje je odredjen eksperimentalno (Sl. 78.).



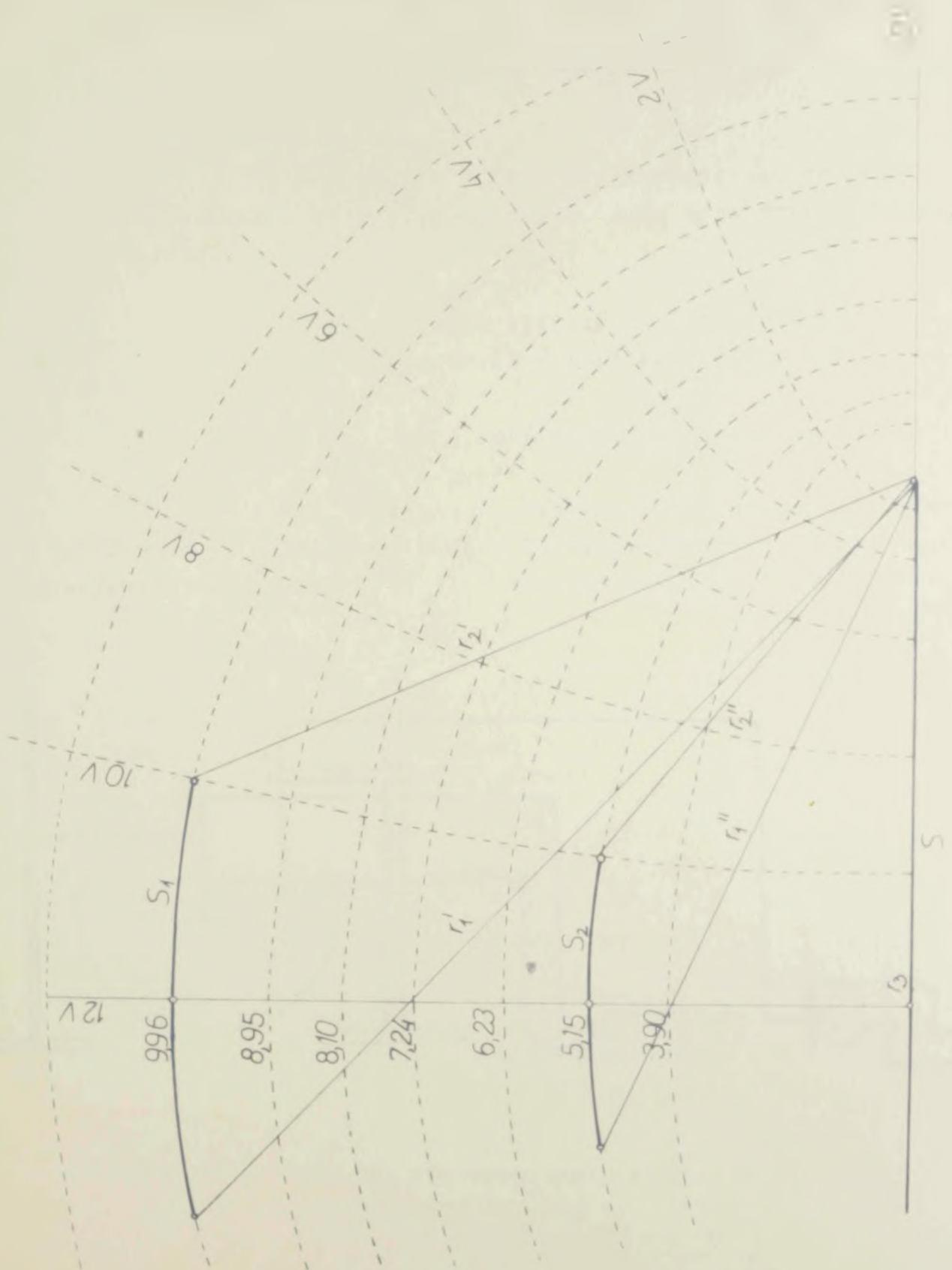
78. Odredjivanje smera vektora polja

odredjivanju dve bliske tačke na ekvipotencijalnoj liniji (na pr. tačka A i B). One su međusobno spojene. Na sredini intervala u tački C podignuta je normala na duž AB, koja odredjuje pravac vektora polja na mestu C u zračnom polju. Ona je, istovremeno, tangenta na strujnicu koja prolazi kroz tačku C.

Na slici 79. dat je prikaz eksperimentalnog odredjivanja ekvipotencijalnih linija segmentnog polja i polja između dve koaksijalne i klubeskrajne linije razdvojene adijabatskom pregradom, koje imaju oblik elipse u prvom, odnosno hiperbola u drugom slučaju.

Ustanovljena analogija između radijacionog i elektrokonduktivnog polja ukazuje na to da osim iste frakcije struje koja teče kroz jednu strujnu cev, takodje kroz jednu strujnu cev biva emitovan isti iznos radijacione energije. Tako, svaka akceptujuća površina koja zahvata istu strujnu cev ima isti faktor oblika, odnosno prima isti iznos (frakciju) ukupno emitovane energije.

Ko se unutar jedne strujne cevi, eksperimentalno odredjene, postavie dve površine (S_1 i S_2), kako to slika 79. pokazuje, i primenom *CROSSED STRING* metode odredi njihov faktor oblika dobiće se:



Sl. 79, komparacija dvodimenzionog elektrokonduktivnog
sa radijacionim poljem

$$\text{za površinu } S_1: i_1 = \frac{2r_1' - 2r_2'}{2r_3'} = \frac{17,8 - 13,3}{18} = 0,25$$

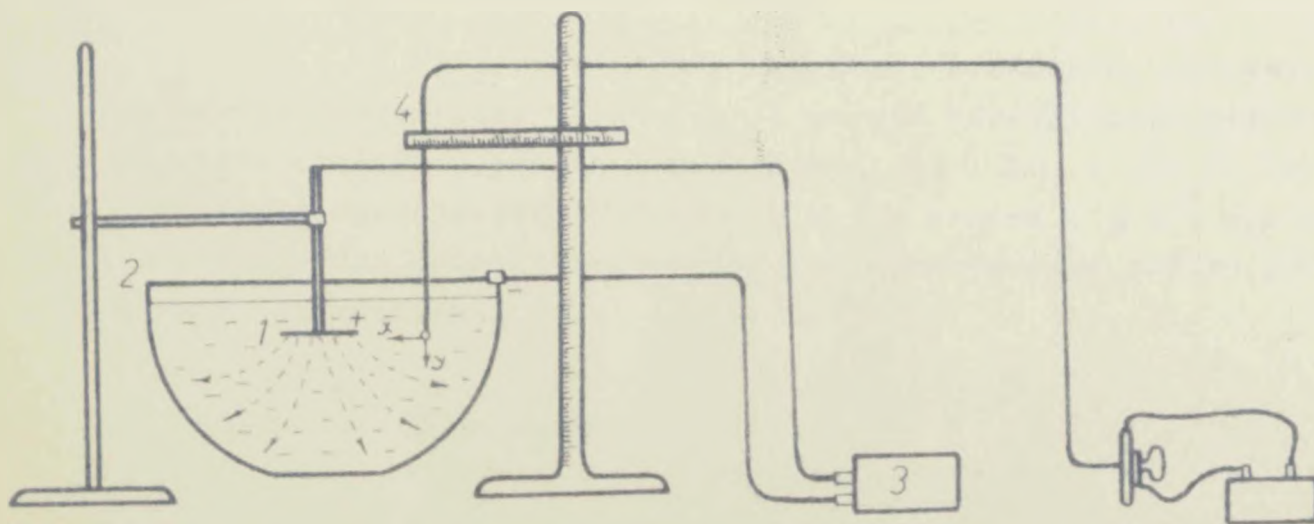
$$\text{za površinu } S_2: i_2 = \frac{2r_1'' - 2r_2''}{2r_3''} = \frac{12,75 - 8,3}{18} = 0,247$$

S druge strane kroz ovu strujnu cev protiče 1,1 - električne struje, odnosno, takođe ista frakcija kroz oba preseka.

5.2. EKSPERIMENTALNA REALIZACIJA TRODIMENZIONOG ELEKTRIČNOG POLJA U ELEKTROLITIČKOJ KADI

5.2.1. Uredjivanje jačine i nagiba vektora polja

Trodimenziono električno polje kruga i kvadrata ispitivano u elektrolitičkoj kadi, polusferičnog oblika, ispunjenoj elektrolitom (kiselim rastvorom CuSO_4) na slici 80.



... 80. Elektrolitička kađa

bakarna pločica (1) iskrojena je u obliku kruga (kvadrata i sl.) i prevučena slojem neprovodnog materijala sa gornje strane i zaronjena u metalnu, polusferičnu kadu (2) ispunjenu rastvorom CuSO_4 . Spajanjem pločice za pozitivnu, a kade za negativnu elektrodu jednosmernog izvora struje (3) uspostavlja se potencijalska razlika među njima, a u elektrolitu formira elektrokonduktivno polje.

U cilju odredjivanja jačine polja u pojedinim tačkama u rastvor je uronjena sonda (4) napravljena od tri provodnika. Jedan je orijentisan u pravcu x , drugi u pravcu y , a oči se treći nalazi u koordinatnom početku ovog Decart-ovog sistema.

Sonda je pričvršćena za prostorni koordinator napravljen od dve čelične (graduisane) šipke, tako da je moguće pomeranje u $x - y$ ravni, i vrlo precizno očitavanje koordinata. Treba naglasiti da se za nulu koordinatnog sistema uzima sam centar kruga, odnosno kvadrata površine na anodi.

Provodnici sonde su, preko prekidača, spojeni sa mernim instrumentom, tako da je moguće odredjivanje potencijalske razlike u pravcu koordinatnih osa (ΔU_x i ΔU_y). Deljenjem sa rastojanjem (dužinom) u x i y pravcu ($\Delta x - \dots$ cm, $\Delta y - 0,0$ cm) dolazi se do podatka o komponentama jačine polja u smeru koordinatnih osa:

$$E_x = \frac{\Delta U_x}{\Delta x}$$

$$E_y = \frac{\Delta U_y}{\Delta y}$$

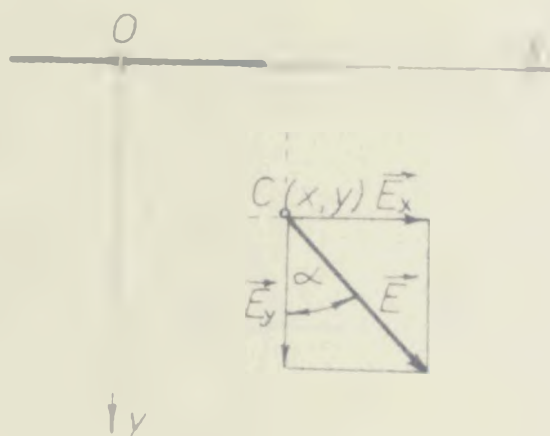
odnosno, o rezultatnoj jačini polja (Sl. 81.) u proizvoljnoj tački C sa koordinatama (x, y):

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

nagib vektora polja u odnosu na y osu iz eksperimentalnih podataka može se odrediti kao tangens ugla:

$$\alpha = \frac{\Delta E}{\Delta L}$$

Ovako dobijenu vrednost moguće je uporediti sa teorijskom za polja koja su analitički određena (cije su jednačine strujnica poznate).



Sl. 81. Eksperimentalno određivanje nagiba vektora polja

U polju kruga (Sl. 81.), u jednoj dijametralnoj ravni, strujnica je hiperbola, čija jednačina u tački $C(x, y)$ glasi:

$$a - \frac{y}{e - a} = 1$$

a - realna osa, koja se određuje na osnovu jednačine:

$$2a = -$$

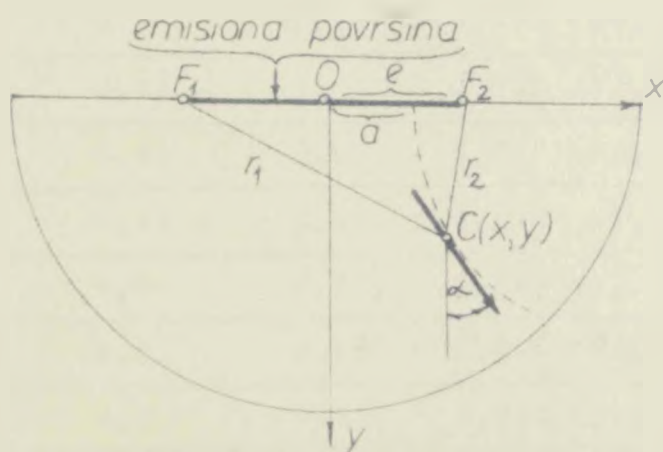
dok je uzlina daljina e za krug jednaka njegovom radijusu ($e=r$)

U jednačina hiperbole rešena po (x) kao zavisno promenljivoj od (y) kao varijabli glasi:

$$x = \frac{ay}{\sqrt{e^2 - a^2}} \sqrt{e^2 - a^2 + y^2}$$

Nagib tangente na hiperbolu u tački $C(x,y)$ je prvi izvod funkcije $x = x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{ay}{\sqrt{(e^2 - a^2)(e^2 - a^2 + y^2)}}$$



Sl. 82. Teorijsko određivanje naciba vektora polja

Kako se sa slike 82. vidi rastojanja izmedju uočene tačke u polju i zisa (F_1 i F_2) iznose i

$$r_1 = \sqrt{(e + x)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(e - x)^2 + y^2}$$

te je vrednost realne ose:

$$a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(e+x)^2 + y^2} - \sqrt{(e-x)^2 + y^2} \right)$$

Prvi eksperiment izveden u elektrolitičkoj kadi (na slici 80) imao je za cilj "snimanje", odnosno određivanje jačine polja kruga, radiusa $r = 2,15$ cm. Rezultati merenja su dati u tabeli 4.

TABELA 4.

Koordinate tačke		Potencijalska razlika		Komponente jačine polja		Jačina polja
$x/\text{cm}/$	$y/\text{cm}/$	$\Delta U_x/V/$	$\Delta U_y/V/$	$E_x/\frac{V}{m}/$	$E_y/\frac{V}{m}/$	$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$
8,7	0	0,24	0,002	26,666	0,25	26,667
4,9	0,45	1	0,050	111,111	6,25	111,286
5,9	0,45	0,64	0,020	71,111	2,5	71,155
6,9	0,45	0,44	0,010	48,888	1,25	48,904
6,4	4,8	0,20	0,046	22,222	5,75	22,954
5,4	4,8	0,23	0,066	25,555	8,25	26,854
4,4	4,8	0,17	0,022	18,888	2,75	19,088
7,4	1,8	0,34	0,038	37,777	4,75	38,075
6,4	1,8	0,44	0,059	48,888	7,375	49,442
5,4	1,8	0,59	0,090	65,555	11,25	66,513
5,4	6,8	0,038	0,055	4,222	6,875	7,089
6,4	6,8	0,024	0,030	2,666	3,75	4,601
7,4	6,8	0,066	0,00	7,333	75	75,357

U tabeli 5. izolovane su uporedo vrednosti merenog i teorijskog smera polja zračenja kruga, izražene u obliku ugla

koji vektor polja zaklapa sa y osom.

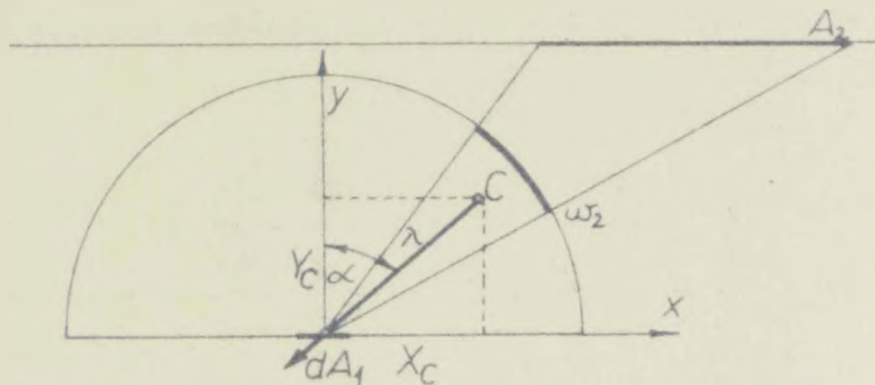
T A B E L A 5.

koordinate tačke		Mereni nagib	Mereni ugao	Parametri strujnice			Teorijski nagib	Teorij- ski ugao	Relativno odstup. %
$x/cm/$	$y/cm/$	$E = \frac{U}{y}$	α°	$/cm/$ v_x	$/cm/$ v_y	$/cm/$ v_z	$\frac{dv_z}{dy} = \tan \alpha_1$	α_2°	$\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha} \cdot 100$
0,45	20	87,13	7,064	2,786	2,14	8,67	83,41	6,83	
5,9	0,45	32	88,2	8,062	3,772	2,142	11,13	84,96	3,78
6,9	0,45	44	88,69	9,061	4,771	2,145	13,46	85,75	3,51
0,4	1,8	6,55	81,32	7,762	3,715	2,023	2,82	70,49	13,53
0,4	1,8	7,46	82,22	8,737	4,615	2,061	3,10	72,61	11,69
7,4	1,8	8,95	83,02	9,718	5,55	2,084	3,74	75,03	10,27
0,4	6,8	0,70	34,99	10,16	7,393	1,383	0,8175	39,26	12,17
0,4	6,8	0,80	38,65	10,16	8,02	1,45	0,8896	41,65	7,76

Kao što se iz tabele 5. vidi relativno odstupanje merene vrednosti ugla vektora polja od teorijske kreće se oko 10%.

Poređenje eksperimentalnih sa teorijskim vrednostima moguće je za polja koja su definisana, odnosno, čije su jednačine strujnica poznate. U protivnom, ovakav način verifikacije merenjem odredjenih podataka nije moguć. Međutim, iz dokaza o vektorskoj prirodi radijacionog polja proizilazi još jedna mogućnost teorijskog utvrdjivanja nagiba vektora polja.

Naime, zaključak poglavlja je da se pravac vektora polja u nekoj tački (infinitesimalnoj površini) dA_1 u radijacionom polju konačne površine A_2 poklapa sa pravcem koji spaja težište C prostornog ugla ω_2 površine A_2 sa dA_1 (Sl. 83.)



Sl. 83. Određivanje nagiba vektora polja

U XOY ravni intenzitet vektora položaja tačke C iznosi:

$$r_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

gde su x_c i y_c koordinate težišta.

Nagib ovog vektora u odnosu na y osu iznosi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_c}{y_c}$$

Ako se koordinate centra prostornog ugla izraze iz relacija (71) i (72) nakon skraćivanja dobije se:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q_x}{Q_y}$$

gde Q_x i Q_y označavaju gustinu radijacionog fluksa a Q_x' i Q_y' fluks usmeren od dA_1 ka dA_2 u slučaju kada je elementarna površina orijentisana u pravcu x , odnosno y ose, respektivno. Isti odnos važi i za toplotni fluks.

Kako je faktor oblika frakcija obuhvaćene energije od ukupno emitovane, to se poslednja jednačina može izraziti na sledeći način:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{F_{12}}{dA_1}}{\frac{Q_y'}{Q_x'}} = \frac{F_{12}}{F_{21}} \quad (113)$$

Treba napomenuti da F_{12} i F_{21} predstavljaju faktore oblika diferencijalne površine dA_1 prema konačnoj u slučaju kada je dA_1 orijentisano u pravcu x i y ose.

Ispravnost jednačine (113) može biti dokazana na primeru određivanja nagiba vektora polja, u nekoj proizvoljnoj tački u polju kruga, čija je teorijska vrednost poznata.

Za primer na slici 84. nagib vektora polja u tački dA_1 biće jednak (izražen pomoću faktora oblika u bezdimenzionoj formi za dve različite orijentacije površine):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{H}{\sqrt{Z^2 - 4R^2}} (1 - \frac{H}{\sqrt{Z^2 - 4R^2}})}{\frac{1}{2} (1 - \frac{1 + H^2 - Z^2}{\sqrt{Z^2 - 4R^2}})} \quad (114)$$

gde su:

$$H = \frac{h}{a}, \quad R = \frac{r}{a}, \quad Z = 1 + \frac{h^2}{a^2} + R^2$$

izvršimo proveru poslednje relacije za tačku sa koordinatama $a = 6,4$ i $h = 2,8$ dok je $r = 2,15$. Bezdimenzioni parametri su:

$$u = \frac{1,8}{6,4} = 0,28125$$

$$\bar{a} = \frac{2,15}{0,4} = 0,3359375$$

$$Z = 1 + 0,0791 + 0,112854 = 1,191955$$

Nakon zamene u izraz (114) dobiće se

$$\operatorname{tg} \alpha = 3,0556$$



Sl. 84. Određjivanje nagiba vektora polja za konkretan primer

Teorijska vrednost nagiba određena pomoću jednačine hiperbole koja prolazi kroz tačku $(6,4; 2,8)$ iznosi $\operatorname{tg} \alpha = 3,10$ (Tabela 5.), što ukazuje na visok stepen slaganja i potvrđuje mogućnost (do sada nepoznatu u literaturi) nalazenja nagiba vektora polja pomoću odgovarajućih faktora oblika.

U elektrolitičkoj kadi "snimano" je i polje kvadrata stranice $a = 5$ cm u meridijalnoj ravni (koja kvadrat deli na dva jednaka pravougaonika (Tabela 6.)).

T A B E L A 6.

Koordinatne tačke		Potencijalska razlika		Komponente jačine polja		Jačina polja
$x/cm/$	$y/cm/$	$\Delta U_x/V/$	$\Delta U/V/$	$E_x/V/m/$	$E_y/V/m/$	$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$
4	0	1,880	0,0219	208,88	2,733	208,898
5	0	1,099	0,0140	122,22	1,75	122,23
6	0	0,750	0,0200	83,33	2,5	83,367
7	0	0,540	0,0160	60,00	2	60,033
0	3,65	0,320	0,1683	35,55	23,54	42,637
7	3,65	0,260	0,1343	28,88	10,79	33,406
5	3,65	0,200	0,0601	22,22	7,51	23,455
6	6,65	0,120	0,1838	17,37	22,98	26,566
5	6,65	0,051	0,0552	5,66	6,9	8,93
4	6,65	0,054	0,0493	6,00	6,06	8,53
4	7,65	0,029	0,0429	3,22	5,3667	6,23

Poredjenje teorijski određjenih nagiba (pomoću faktora oblika) sa izmerenim dato je u tabeli 7.

T A B E L A

Koordinate tačke		Mereni nagib	Mereni ugao	Teorijski nagib	Teorijski ugao	Relativno odstupanje
x/cm/	y/cm/	$\operatorname{tg}\alpha$	α°	$\operatorname{tg}\alpha_0$	α_0°	$\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha}\right) \cdot 100$
4	0	76,42	89,25	∞	90	0,04%
5	0	69,84	89,18	∞	90	0,02%
6	0	33,33	88,28	∞	90	1,05%
7	0	30	88,10	∞	90	2,16%
6	3,05	1,01	56,465	1,396	54,4	3,7%
7	3,65	1,72	59,83	1,681	59,3	0,87%
8	5,05	0,6	71,33	1,970	70	1,8%
6 ⁺	6,05	0,08	30,11	0,528	30,9	2,6%
5	6,05	0,82	39,35	0,67	37,0	4,45%
4	6,05	0,09	44,71	0,816	43,6	2,49%
4	7,65	0,6	30,964	0,47	28	9,57%

Ulaganje izmerenih sa izračunatim vrednostima veoma je veliko (relativno odstupanje se kreće u aranicama od 0,84 do 9,57%).

7. ZAKLJUČAK

U ovom istraživačkom radu detaljno je analiziran prenos toplote zračenjem između površina u neapsorbujućem medijumu. Posebna pažnja je posvećena razmatranju svojstva zračnog polja formiranog nad površinama koje emituju toplotnu energiju.

Pri izmeni toplote između tela u neapsorbujućem medijumu osnovni problem predstavljaju geometrijski odnosi, koji uslovljavaju usajamno prihvatanje zračnog fluksa, definisanog teorijskim i eksperimentalnim relacijama za emisiju i akceptovanje (obuhvatanje) zračenja.

Problem intercepcije zračenja se u klasičnoj i modernoj literaturi izražava faktorom oblika ili uglovnim koeficijentom, čijem je određivanju u slučaju proizvoljnog (opšteg) odnosa površina u ovom radu posvećena posebna pažnja.

Analitički metod rešavanja faktora oblika je poznat za jednostavne geometrije površina i njihove simetrične uzajamne odnose. Ovaj postupak određivanja teško je primenljiv na opšte slučajeve zbog složenog rešavanja dvostrukog integrala po dvema površinama, koje podrazumeva sumaciju četvorodimenzionalnih matrica. Znatno pojednostavljenje analitičkog rešavanja postiže se primenom teoreme Stockesa (Green-Ostrograđski), kojom se dva površinska integrala svode na dva linijska integrala po konturama površina.

Uvođenje digitalnih računara velike memorije i brzine rešavanja (računanja) omogućila je primenu izvesnih tehnika statističke matematike (u prvom redu metode Monte Carlo) na termičku emisiju.

U ovom istraživanju razvijen je metod Monte Carlo na poseban način, koji omogućava rešavanje faktora oblika u slučaju zračenja Lambertovskih površina. Takođe je analizirana mogućnost primene razvijene metode na Nelambertovske materijale. Ovo predstavlja skroman doprinos numeričkom modelovanju toplotne radijacije.

U (dosadašnjoj) literaturi faktor oblika je često određivan eksperimentalno, primenom integratora zračenja, koji omogućavaju procenu razmenjene toplote između površina, polazeći od Lambertovog zakona uglovne distribucije emisivne snage. Pomenuti integratori su ograničeni na Lambertovske - crne površine, od kojih je jedna infinitezimalna.

Tokom ovog istraživanja proučeni su postojeći integratori zračenja i uočeni njihovi nedostaci. Nakon toga razvijen je originalan pristup eksperimentalnoj integraciji. Umesto dvostrukog projektovanja na sferu i ravan predložen je metod jednostrukog projektovanja na ravan. Pored niza prednosti u odnosu na ranije predložene tehnike ova metoda je pružila mogućnost analize i određivanja toplote izmenjene zračenjem između nelambertovskih površina, odnosno u slučaju proizvoljne uglovne distribucije. Ineko čitavog niza integratora koji su razvijeni, realizovani i objavljeni metod geometrijske analogije je usavršen i doveden na viši nivo. Takođe, kao rezultat ovog istraživanja realizovan je i prostorni uglomer namenjen određivanju prostornih uglova pod kojim se sa jedne vidi druga površina.

Usavršenje geometrijske analogije predstavlja doprinos nauci i tehnici razmene energije mehanizmom radijacije, koji je od trajne vrednosti.

U klasičnu nauku o prenosu toplote rano su unete fizičke analogije između elektromagnetnih, reoloških i dru-

gin pojava i fenomena transporta toplote. Ove su analogije, međutim, bile vezane isključivo za kondukciju toplote. S obzirom na specifičnu prirodu fenomena zračenja, koji je funkcija kvaliteta površina i njihovih uzajamnih položaja (odnosa), on nije bio analogno predstavljen elektromagnetnim pojavama u međijumima, sa lokalno definisanim poljima i transportima.

Tokom ovog rada uočena je analogija između radijacionog i elektromagnetnih polja i izvršena njihova uporedna analiza. Utvrđeno je da postoji analogija, na osnovu koje su izvedena radijaciona polja i ustanovljena analogna električna konduktivna i elektrostatička, kao i magnetna polja.

Metod električne analogije primenjen je na dvodimenziona zračna polja i kako teorijski tako i eksperimentalno utvrđen je odnos između navedenih fenomena, što je pružilo mogućnost određivanja zračnog polja u okolini dvodimenzionog emitera i toplote izmenjene zračenjem energije između cilindričnih površina. Ovo je postignuto izborom i realizacijom graničnih uslova za elektromagnetna polja, koja uvek (kako je pokazano) zavise od jedne zračne površine. Pokazano je da ista tehnika eksperimenta korišćena u slučaju analognog ispitivanja kondukcije, na elektroprovodnoj hartiji, može biti primenjena i na zračenje.

Kod trodimenzionih polja dokazano je da izvesna analogija između magnetnih i električnih polja sa jedne strane i polja zračenja sa druge strane postoji. Ona je eksperimentalno realizovana u elektrolitičkoj kadi, gde je jedna elektroda predstavljala jednu zračnu površinu, a druga je predstavljena površinom koja simulira beskonačnost. Pokazano je da se smer električnog polja u elektrolitičkoj kadi poklapa sa smerom zračnog polja. Međutim, gustina realizovane struje između površina nije analogna gustini zračnog fluksa, kao što je to bio slučaj kod dvodimenzionog polja. Svi ovi rezultati proučavanja ana-

8. L I T E R A T U R A

1. Siegel, R., Howell, J., *Thermal Radiation Heat Transfer*, Mc Graw Hill, 1972.
2. Eckert, E.R.G., Drake, R.M., *Heat and Mass Transfer*, Mc Graw Hill, New York, 1959
3. Wien, W., *Über die Energievertheilung in Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers*, *Ann. Physik*, Ser. 3., Vol. 58, pp 662-669, 1896
4. Rayleigh, *The Law of Complete Radiation*, *Phil. Mag.*, Vol. 49, pp 539-540, 1900
5. Jeans, J., *On the Partition of Energy between Matter and Ether*, *Phil. Mag.*, Vol. 10., pp. 91-97, 1905
6. Planck, M., *Distribution of Energy in the Spectrum*, *Ann. Physik*, Vol. 4., No. 3., pp 553-563, 1901
7. Wien, W., *Temperatur und Entropie der Strahlung*, *Ann. Physik*, Ser. 2., Vol. 4., No. 3., pp 132-165, 1894
8. Jakob, M., *Heat Transfer*, Vol. 1., Wiley, New York, 19
9. Stefan, J., *Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur*, *Sitzber. Akad. Wiss., Wien*, Vol. 79., pp 391-428, 1879
10. Boltzmann, L., *Ableitung des Stefanischen Gesetzes betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie*, *Ann. Physik*, Ser. 2., Vol. 22., pp 291-294, 1884
11. Francois D' Aguillon, *Opticorum Libri Sex*, Antwerp, 1613
12. Cess, R.D., *The Interaction of Thermal Radiation with Conduction and Convection Heat Transfer*, *Advan. Heat Transfer*, Vol. 1, 1963
13. Hottel, H.C., *Radiant Heat Transmission*, *Heat Transmission* (W.H. Mc Adams ed.), 3rd ed., Chapt. 3., Mc. Graw Hill, New York, 1954
14. Jakob, M., *Heat Transfer*, Vol 2., Wiley, New York, 1957

15. Kreith, F., *Radiation Heat Transfer, International Textbook*, Carauton, Pennsylvania, 1962
16. Hamilton, D.C., Morgan, W.R., *Radiant Interchange Configuration Factors*, NASA TN 2836, 1952
17. Leuenberger, H., Pearson, R.A., *Compilation of Radiation Shape Factors for Cylindrical Assemblies*, ASME, Ann. Meeting, New York, 1956, ASME Paper No 56-A-144, 1955
18. Chapman, A., *Heat Transfer, Sec. ed.*, Macmillan Comp., 1967
19. Hamilton, D.C., *Radiation Interchange Configuration Factors*, Doctor's Thesis, Purdue University, 1949
20. Moon, I., *The Scientific Basis of Illuminating Engineering*, Rev. ed., Dover Publications, Inc., New York, 1961
21. Sparrow, E.M., Cess, R.D., *Radiation Heat Transfer*, Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, Calif., 1966
22. Sparrow, E.M., *A New and Simpler Formulation for Radiative Angle Factors*, *J. Heat Transfer*, Vol. 85, pp 81-88, 1962
23. Sparrow, E.M., *Advances in Heat Transfer*, Vol. 2., pp. 399, New York, 1965
24. Sparrow, E.M., *A New and Simpler Formulation for Radiative Angle Factors*, *J. Heat Transfer*, C 85, 73-81, 1962
25. Nusselt, W., *Graphische Bestimmung des Winkelverhältnisses bei der Warmestrahlung*, *V D I Z*, Vol. 72., p.673, 1928
26. Nottel, H.C., *Second World Power Conf.*, Vol. 18., Sect. 32., No. 243., 1930
27. Nottel, H.C., *Mech. Eng.*, 52, 699, 1930
28. Eckert, E.Z., *Ver. Deut. Ing.*, 79, 1495, 1935
29. Anastasijević, F., Djurić, M., Novaković, M., *Integrator za odredjivanje faktora oblika pri razmeni toplote zračenjem*, *Termotehnika* 3-4, 1976
30. Djurić M., Faunović R., Novaković M., *Radiation Shape Factor Integrator with an Oblique Scale*, *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol. 4., pp 103-110, 1977
31. Djurić M., *Obrtni integrator za merenje faktora oblika kod zračenja toplote*, *Saopštenje u Skoplju 1977*, prihvaćeno za štampu u listu *Termotehnika* 1977

32. Buslenko, N.P., Golenko, D.I., Shreider, Y.A., Sobol, I.M., Dragovich, V.G., *The Monte Carlo Method*, Pergamon Press, 1966
33. Novaković M., *Radiation Shape Factor Determination by Plane Projection*, *The Review of Scientific Instruments*, Vol. 42., No. 7., 1971
34. Djurić M., Novaković M., Anastasijević P., *Shape Factor Determination for Non-Lambert Surfaces*, 6-th International Conferens of Heat Transfer, Toronto 1978
35. Djurić M., *Stereoglomer*, Ekspozat na izložbi RAST YU-77, Rijeka, 1977
36. Novaković M., Anastasijević P., *Udredjivanje prenosa toplote zračenjem pomoću vektorskog polja*, *Termotehnika* 3-4, 1976
37. Djurić M., Novaković M., *Electroconductive Analogy Twodimensional Thermal Radiation Vector Field*, *International Congress for Applied Mathematic and Mechanic*, Copenhagen, 1977, ZAMM 1978
38. Nojman, L.R., Kalantarov, I.L., *Teorijski osnovi elektrotehnike - teorija elektromagnetnog polja*, Naučna knjiga, Beograd, 1952
39. Novaković M., *Fizički osnovi elektrotehnike*, Tehnička knjiga, Beograd, 1968
40. Kohlrausch, F., *Annalen d Physik* (4), 2, 200 ; 1872
41. Kohlrausch, F., *Zeitschrift fur Instrumentenkunde*, 18, 139, 1898
42. Langmuir, J., Adams, L.C., Meikle, G.S., *Trans. Am. Elektromem. Soc.*, 24, 53, 1913
43. Jakob, H., *Zeitschrift for die ges. Kaelte-Ing.*, 29, 83, 1922
44. Nusselt, W., *Zeitschrift for die ges. Kaelte-Ind.*, 1915

9. P R I L O G 1.

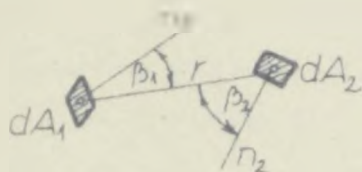
TABELA BR. 1

FAKTORI OBLIKA ZA DVE DIFERENCIJALNE
POVRŠINE

G E O M E T R I J A

FAKTOR OBLIKA

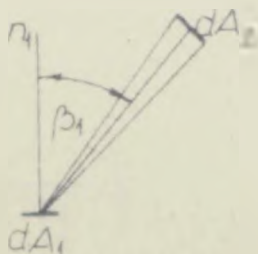
Dve elementarne površine
okrenute jedna prema dru-
gog



$$dF_{d1 \rightarrow d2} = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_1 dA_2$$

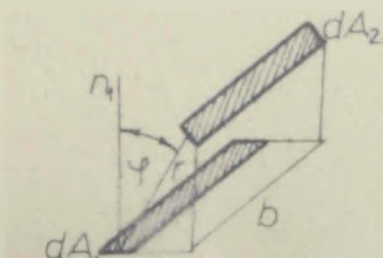
Površina dA_1 diferencijalne
širine i proizvoljne dužine,
prema traci beskonačne duži-
ne dA_2 sa generatrisom para-
lelnom sa dA_1 .

$$dF_{d1 \rightarrow d2} = \frac{1}{r^2} dA_1 dA_2 (\sin \beta_1)$$



Traka diferencijalne širine,
uzine b , prema traci iste
širine i i dužine sa paralel-
nim generatrisama

$$dF_{d1 \rightarrow d2} = \frac{1}{r^2} \varphi d\varphi \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{i}$$

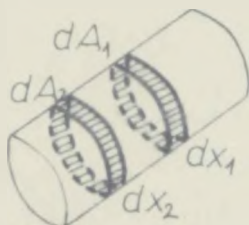


4. Dve elementarne površine u unutrašnjosti sferne šupljine



$$dF_{d1 \rightarrow d2} = \frac{dA}{4r^2}$$

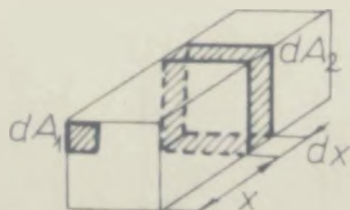
5. Dva elementarna prstena u unutrašnjosti kruznog cilindra



$$dF_{d1 \rightarrow d2} = \left(1 - \frac{dx_1 dx_2}{r^2}\right) dx$$

$$x = \frac{r}{a}$$

6. Elementarna površina dA_1 u uglu kvadratne šupljine prema elementarnoj površini dA_2 u unutrašnjosti kanala

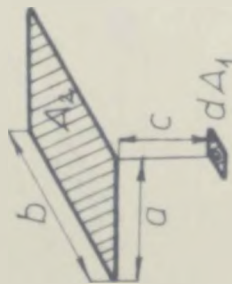


$$dF_{d1 \rightarrow d2} = \frac{xdx}{\pi(1+x^2)^{3/2}} \left(\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} \right) \right)$$

$$x = \frac{a}{r}$$

TA TO JE OBLIK ZA DIFERENCIJALNE PLOŠINE POVRŠI PRAMA

1. Ravna elementarna površina dA_1 prema paralelnom pravougaoniku A_2 . Ormala na dA_1 prolazi ro-
tme pravougaonika.



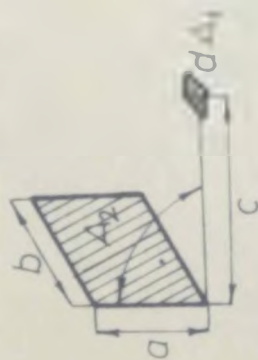
$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \right) \frac{1}{1+x} \frac{1}{1+y} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

gde $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+y^2}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+x^2}$$

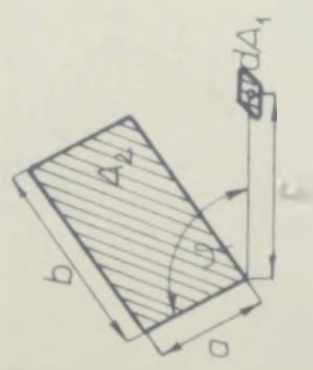
2. Ravna elementarna površina dA_1 prema pravougaoniku A_2 i ormalni na A_2 i normalnoj na A_1 .



$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

gde $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$

3. Ravnina elementarna površina A_1 i površina pravougaonika A_2 koji se nalazi pod uglom φ u odnosu na ravan dA_1



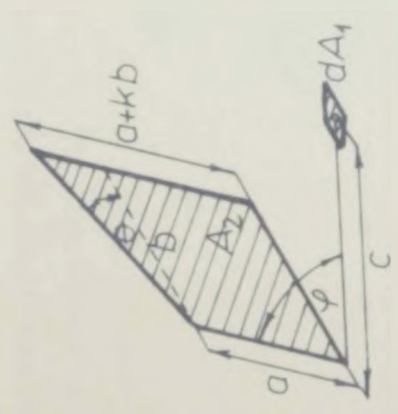
$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{Y} \right) \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{Y \cos^2 \varphi}{Y^2} \quad (1)$$

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{X - Y \cos \varphi}{R^2} \cdot \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y \cos \varphi}{H}$$

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{Y} \right) \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{Y \cos^2 \varphi}{Y^2} \quad (1)$$

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{Y} \right) \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{Y \cos^2 \varphi}{Y^2} \quad (1)$$

konfiguraciji a ista kao i sadaju... dodatok trougaone površine... ravnougaonik A_2 .

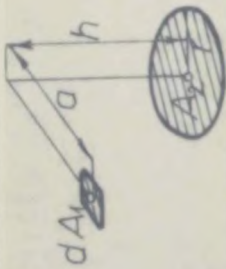


$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{Y} \right) \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{Y \cos^2 \varphi}{Y^2} \quad (1)$$

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{Y} \right) \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{Y \cos^2 \varphi}{Y^2} \quad (1)$$

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{Y} \right) \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{Y \cos^2 \varphi}{Y^2} \quad (1)$$

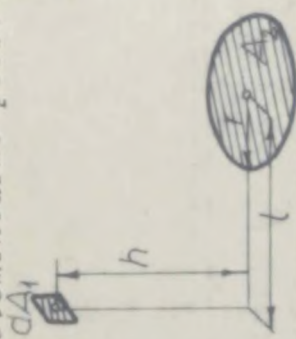
7. Ravna elementarna površina dA_1 prema krugu A_2 paralelnom sa dA_1 .



$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1+H^2-R^2}{\sqrt{Z^2-4R^2}} \right)$$

gde je: $H = \frac{b}{a}$, $R = \frac{r}{a}$, $Z = 1+H^2+R^2$

8. Ravna elementarna površina dA_1 prema krugu A_2 . Ravan kruga normalna je na ravan elementarne površine dA_1 .



$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{H}{2} \left(\frac{Z}{\sqrt{Z^2-4R^2}} - 1 \right)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{H^2+2}{\sqrt{H^2+4}} - H \right)$$

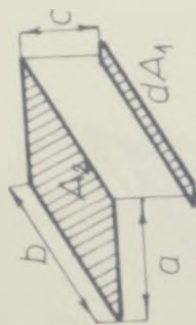
gde je: $H = \frac{h}{l}$, $R = \frac{r}{l}$, $Z = 1+H^2+R^2$

9. Ravna elementarna površina dA_1 prema eliptičnoj ploči A_2 paralelna sa dA_1 . Ko-mala na dA_1 prolazi kroz centar elipse.



$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{ab}{\sqrt{r^2+a^2} \sqrt{r^2+b^2}}$$

14) a) na čem intarna traka df_1 prema
 p a ale norm pravou aor ku h_2 . T aka
 je post v je a naspram i i e pra o
 ugaonika.



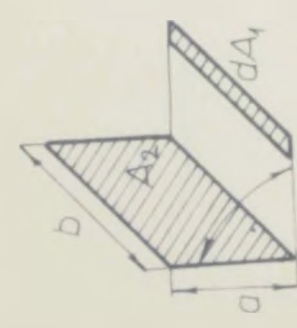
$$i \rightarrow \frac{1}{1+X} = g^{-1} = \frac{1}{1+X} = t^{-1} + \frac{1}{(1+X)} = -1$$

$$\frac{1}{1+X} \quad \text{gde } i = \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

$$i \rightarrow \frac{1}{1+X} = \frac{1}{1+X}$$

$$i \rightarrow \frac{1}{1+X} = \frac{1}{1+X} + \frac{1}{1+X} = \frac{2}{1+X}$$

14) Raona lementarna traka
 p a ougaonik i aavn no ma'no
 na spaku

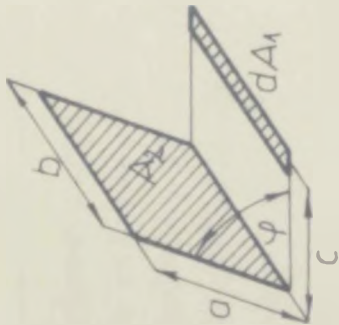


$$i \rightarrow \frac{1}{1+X} = \frac{1}{1+X} = \frac{1}{1+X} = \frac{1}{1+X}$$

$$i \rightarrow \frac{1}{1+X} = \frac{1}{1+X} = \frac{1}{1+X}$$

$$\text{gde } i = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

12. (av a eleme tarna t aka dA_1 prema pravougao i u A_2 , ko i za i a ugao φ u o nosu n rava pov sine dA .



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{y^2 - 2xy \cos \varphi + 1 + x^2}{(1+y^2)(y^2 - 2xy \cos \varphi + x^2)} \right) = \frac{y^2 \sin^2 \varphi}{2} \ln \left(\frac{y^2 - 2xy \cos \varphi + 1 + x^2}{(1+y^2)(y^2 - 2xy \cos \varphi + x^2)} \right) -$$

$$y \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \cos \varphi \sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi} \right) \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \cos \varphi \sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi} \right) -$$

$$\frac{(X - Y \cos \varphi)}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi}} -$$

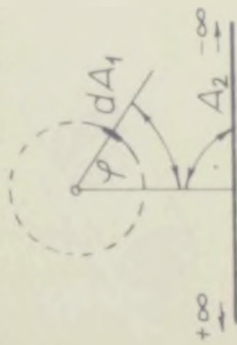
$$g = e^{-1}, \quad x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{c}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{y^2 - 2xy \cos \varphi + 1 + x^2}{(1+y^2)(y^2 - 2xy \cos \varphi + x^2)} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi}} -$$

$$+ \frac{1 + y^2 \sin^2 \varphi}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) \right)$$

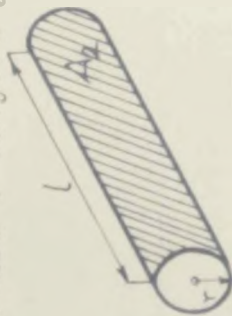
$$\lim_{x \rightarrow 0} F_{d1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} F_{d1} = 2 \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - X - Y \cos \varphi}{Y \sin \varphi} \right) + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + Y^2 \sin^2 \varphi}} -$$

13. Napišite elementa na tlo d na ci in-
 cnu, proizvoljne dužine pr ma raen A_2
 besonačne širine i dužine



$$\rightarrow 2 = \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi)$$

14. Ravna elementarna površina d_1 pr ma
 kružnom cilindru dužine l i sa
 normala na d_1 je istovremeno
 mala na osu cilindra i tangira jedan
 njegov kraj



$$F_{d_1 \rightarrow 2} = \frac{1}{r_1 H} \int \cos^2 \varphi \, dA_1 = \frac{L}{H^2 - 1} \int \frac{(1 - \cos 2\varphi)}{2} \, d\varphi = \frac{L}{H} \int \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{L}{H} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{L}{H} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{L\pi}{2H}$$

$$- \frac{L}{2H} \int_0^\pi \cos 2\varphi \, d\varphi = - \frac{L}{2H} \left[\frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^\pi = - \frac{L}{2H} \left[\frac{\sin 2\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2} \right] = 0$$

gde je $d = \frac{L}{r_1}$, $h = \frac{L}{r_1}$, $X = (1 + H^2)^{1/2}$, r^2

$$Y = \sqrt{L^2 - r^2} + \frac{r^2}{L}$$

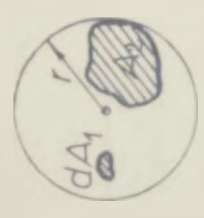
16. Ravna elementarna površina u obliku
 postana sa unutrašnje strane cilindrične
 d₁ prema kružnici d₂ na krajevima cilindrične



$$dA_1 = \frac{dA_2}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

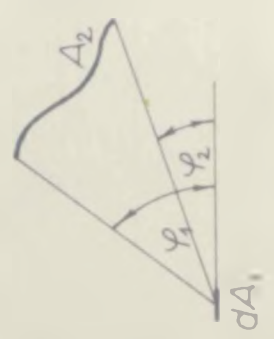
de $dA_1 = \frac{x}{r}$

17. Ravna diferencijalna površina d₁
 prema konačnoj površini d₂ unutar
 sferične šupljine



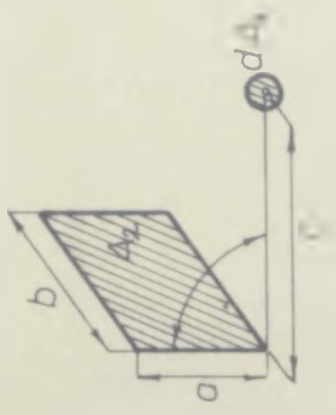
$$F_{d1 \rightarrow d2} = \frac{A_2}{4r^2}$$

18. Ravna elementarna površina d₁ i
 konačna d₂ nastala kretanjem
 krajnje linije paralelne samo
 svi i površini dA₁



$$d1 \rightarrow 2 = \frac{1}{2} \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1$$

18. Sferična elementarna površina dA_1 prepravougaoniku A_2 , postavljena naspram njemu i njegovog temena. Ugao između pravougaonika i sferične je prav.



$$F_{d \rightarrow 2} = \frac{dA_1}{r^2} \cos \theta = \frac{dA_1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{3/2}} \cdot \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} F_{d \rightarrow 2} = \frac{dA_1}{c^3} \cdot \frac{bc}{c} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{bc}{c}$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} F_{d \rightarrow 2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{bc}{c} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{bc}{c}$$

$$\text{de } \lim_{c \rightarrow \infty} F_{d \rightarrow 2} = \frac{b}{c}, \quad Y = \frac{a}{c}$$

19. Sferična elementarna površina dA_1 prepravougaoniku A_2 , postavljena naspram njemu i njegovog temena. Ugao između sferične i pravougaonika je φ .



$$F_{d \rightarrow 2} = \frac{dA_1}{r^2} \cos \theta = \frac{dA_1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{3/2}} \cdot \frac{bc \cos \varphi}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2 - 2XY \cos \varphi}}$$

$$\left(\frac{bc \cos \varphi}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2 - 2XY \cos \varphi}} \right)$$

$$\text{de } \lim_{c \rightarrow \infty} F_{d \rightarrow 2} = \frac{b}{c}, \quad Y = \frac{a}{c}$$

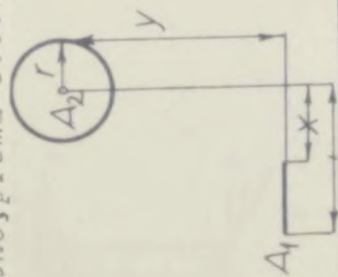
20. Elementarna površina dA_1 i dA_2 na unutrašnjosti i vanjskoj strani cilindrične površine, prema centru površine A_1 .
 Unutrašnja površina se naziva manjom površinom, a površina dA_2 se naziva vanjskom površinom.



$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dA_1 dA_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dA_1 dA_2}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta)^{3/2}}$$

gde je: $X = \frac{R}{r_2}, Y = \frac{r}{r_2}$

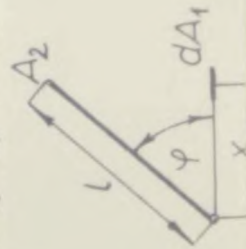
21. Ravna elementarna traka dA_1 proizvoljne dužine, prema cilindru bez konačne dužine.



$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{Y}{X^2 + Y^2}$$

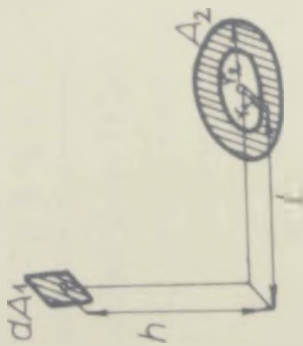
gde je: $X = \frac{x}{r}, Y = \frac{y}{r}$

22. Ravna elementarna traka dA_1 prema beskrajnjoj traci A_2 .



$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos \phi - \chi}{2 \sqrt{(X^2 + h^2 - 2X \cos \phi)}}$$

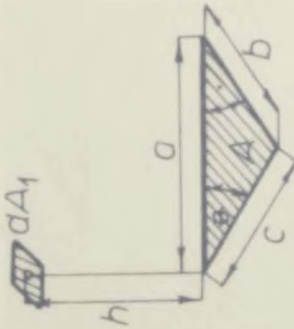
23. Ravna elementarna površina dA_1 prema prostenu Σ



$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{H}{z^2} \left(\frac{H^2 + R_2^2 + l^2}{\sqrt{(H^2 + R_2^2 + l^2)^2 - R_1^2}} - \frac{2 + R_2^2}{\sqrt{(H^2 + R_1^2 + l^2)^2 - 4R_2^2}} \right)$$

gdje $j_1 = \frac{h}{l}$, $j_2 = \frac{r_1}{l}$, $R_2 = \frac{r_2}{l}$

24. Ravna elementarna površina dA_1 prema pravouglom trouglu A_2 . Normalna na dA_1 prolazi kroz jedno teme trougla.



$$dF_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{A}{2\pi} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\tan^{-1} x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

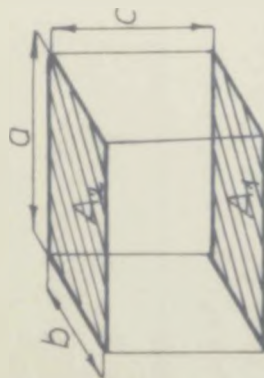
gdje $\tan^{-1} x = \frac{a}{b}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$

FAKTORI OLLIAA ZA KONČEL IOŠIN.

G E O E T R I J A

T O R O B

3. Kvadratični parabolni pravougaoni i
 A_1 i A_2 e an naspram drugo



$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{2}{\pi \lambda} \left(n \sqrt{\frac{1 + \lambda^2 - \lambda + 1}{1 + 2 + 1}} + \sqrt{1 + \lambda^2} \right) + \frac{1}{1 + \lambda^2} + Y$$

$$\sqrt{1 + X^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + X^2}} - X \operatorname{tg}^{-1} (-\operatorname{tg}^{-1} \lambda)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda = \frac{a}{c}, \quad Y = \frac{b}{c}$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} F_{1 \rightarrow 2} = \sqrt{\frac{1 + X^2}{2}} - \frac{1}{Y}$$

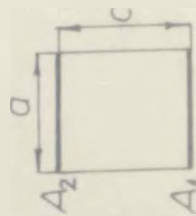
$$\lim_{Y \rightarrow \infty} F_{1 \rightarrow 2} = \sqrt{\frac{1}{X^2}} - \frac{1}{Y}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} F_{1 \rightarrow 2} = 1$$

$$X \rightarrow \infty$$

$$Y \rightarrow \infty$$

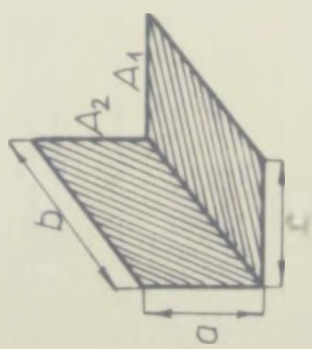
4. U a pravougaonika A_1 i A_2 esko-
 na ne u line a iste konačne širin



$$F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1} - \sqrt{1 + X^2} - Y$$

$$g e e e = \frac{c}{a}$$

3. Dva pravougaonika A_1 i A_2 iste konačne širine, pod ravnom uglom θ jedan u odnosu na drugi.



$$1 \rightarrow 2 = \frac{2}{\pi Y} \int \sqrt{1 + X^2}^{-1} \frac{1}{Y} + X \sqrt{1 + X^2}^{-1} \frac{1}{X} - \sqrt{1 + X^2} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{(1+Y^2)(1+X^2)}{+X^2+Y^2} \right) - \left(\frac{2(1+X^2+Y^2)}{+X^2+Y^2} \right)^2$$

g e l e: $X = \frac{a}{Y} = \frac{1}{2}$

$\lim_{Y \rightarrow 2} = 0$

$\lim_{X \rightarrow \infty} F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+X^2}{1+Y^2} \right) - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+X^2}{2} \right)$

4. Dve beskonačne površine iste, konačne širine koje zaklapaju međusobno ugao teta

$F_{1 \rightarrow 2} = F_2 \sin \theta = \frac{\theta}{2}$



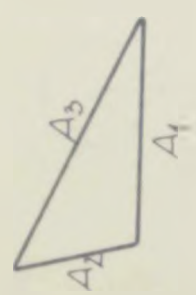
6. Ure beskonačni ravne površine, razvijene
 jedna na drugu, nekad ako si ina.



$$\frac{1}{2} (1 + X) - \sqrt{1 + X^2}$$

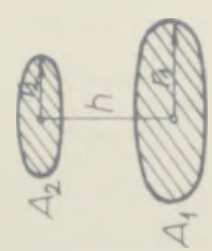
-de je $X = \frac{a}{r}$

7. u slično duhu šupljinu imirana od
 tri ravne površine A_1, A_2 i A_3 .



$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{A_1 A_2 \cos \theta}{R^2} + \frac{A_1 A_3 \cos \theta}{R^2} - \frac{A_2 A_3 \cos \theta}{R^2}$$

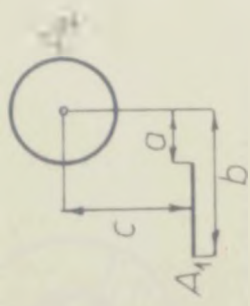
7. slično duhu šupljinu imirana od
 normalom a različitim površinama



$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} (1 + X) - \sqrt{1 + X^2}$$

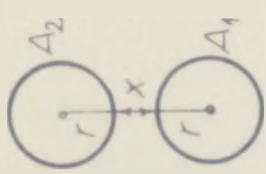
gde je $R_1 = \frac{r_1^2}{h}, R_2 = \frac{r_2^2}{h}, X = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 R_2} \right)$

8. Rana poršna \$A_1\$ konačne \$i\$-ne, eskonačne šužie poma b skonačno cilindru



$$\rightarrow \frac{1}{b-a} \left(\text{tg}^{-1} \frac{b}{c} - \text{tg}^{-1} \frac{a}{c} \right)$$

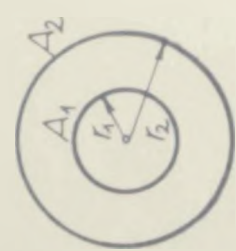
9. Dva eskrajna aralelna cilindra is- tog prani a



$$1 \rightarrow i = F_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{b} \left(\sqrt{r^2 - x} + \sin^{-1} \frac{x}{r} \right)$$

gde je: $x = \dots$

10. Koncentrični cilindri b skonačn- dužine



$$1 \rightarrow i = F_{2 \rightarrow 1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$F_{2 \rightarrow 2} = 1 - \frac{r_1}{r_2}$$

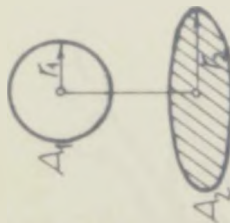
1. Koncentrični sfera



1 → 2

2 → 1

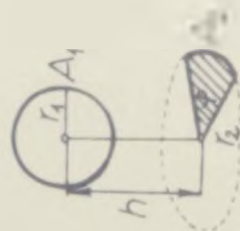
2. Sfera radiusa r_1 prema krugu radiusa r_2 . Normala iz centra kruga prolazi kroz centar sfere



$$r_1 \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

$$g = e = r_2 = \frac{r_2}{h}$$

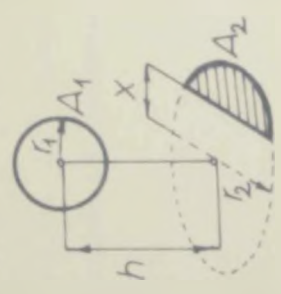
3. Sfera radiusa r_1 prema isečku kruga. Normala iz centra kruga, prolazi kroz centar sfere.



$$r_1 \rightarrow \frac{r_2}{h} = \frac{r_2}{\sqrt{1 + R_2^2}}$$

$$g = e = r_2 = \frac{r_2}{h}$$

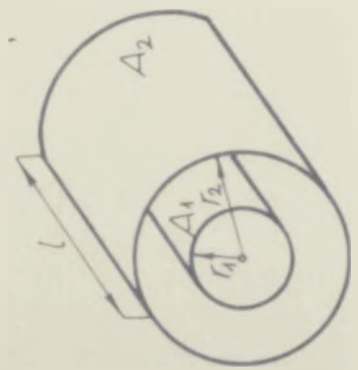
17. Dva kruha prema segmentu kruga



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} - \frac{1}{x}$$

gde je $\frac{r_2}{h} = x = \frac{x}{n}$

18. Dva konca tetiva u istom kruhu



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{2r_2} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{x \lambda}{2}$$

gde je $R = \frac{2}{\lambda}$, $L = \frac{2}{\lambda}$, $Y = \sqrt{2-R^2}$

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{R} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2}{L} \sqrt{\frac{2-R^2}{L}} \right) - \frac{2}{2\pi R} \left(\frac{\sqrt{R^2+L^2}}{L} \sin^{-1} \right)$$

$$\left(\frac{R^2}{2+R^2} \sqrt{1-L^2-R^2} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{R^2-L^2}{R^2+L^2} \right) + \pi \frac{R^2+L^2}{R^2+L^2}$$

Prilikom argumentiranja $-\pi/2 \leq \sin^{-1} \varphi \leq \pi/2$

$$0 \leq \cos^{-1} \varphi \leq \pi$$

16. Deskmalni pilindar paralelan sa
 Deskmnačnim pravougaonikom širi-
 ne $l-x$

$$F_{T \rightarrow} = \frac{L - X}{L}$$

$$F_{T \leftarrow} = \frac{L - X}{L}$$

$$\text{gde je } Y = \frac{L}{r}, \quad X = \frac{r}{r}, \quad L = \frac{L}{r}$$

$$2a X = 0$$

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{L}{Y} \right)$$

10. P R I L O G 2.

```

PROGRAM MONTE CARLO ZA DIFERENCIJALNU PLOVRSINU PREMA KVADRATU
SIN2MX(TETA)=A**2/(A**4+H**H**COS(TETA)*COS(TETA))
ETOT=0.
EPOG=0.
READ(4,1)A,H
FORMAT(2(2X,F10.4))
WRITE(5,2)A,H
FORMAT(1H',A=',F10.4,2X,'H=',F10.4)
B=A/SQRT(4*H*H+A*A)
FTEOR=(4./3.14159)*B*ATAN(B)
WRITE(5,1)FTEOR
FORMAT(1H',FTEOR=',F10.4)
WRITE(5,5)
FORMAT(1H',IOX',1',IOX,'F',IOX,'ADEL')
AI=1.
CALL RAND(TETA)
TETA=TETA*(3.14159/4.)
C=SIN2MX(TETA)
CALL RAND(SINB2)
ETOT=ETOT+1.
IF(SINB2.LE.C)EPOG=EPOG+1.
IF(AMOD(AI,500).EQ.1)GO TO 10
GO TO 3
F=EPOG/ETOT
ADEL=ABS(FTEOR-F)
WRITE(5,4)AI,F,ADEL
FORMAT(1H',3(5X,F10.4)
IF(AI.GT.50000)GO TO 99
AI=AI+1.
GO TO 92
STOP
END
10
4
3
99

```



```

SUBROUTINE RAND(PSB)
GENERATOR PSEUDOSLUCAJNIH BROJEVA
VERZUA 64
PERIOD 67 100 672
BRZINA GENERISANJA 400 BR/S
TEST FREKVENCIJALNOSTI 0,5
TEST SEKVENCIJALNOSTI 0,2
VARIJAN 73
DATA M/507, N/32465, JPERIOD/11, LA/181, LAI/125 /
N=N*LA I
M=M*LA
IF(JPERIOD.LT.8192)GO TO 2330
JPERIOD=1
GO TO 2260
JPERIOD=JPERIOD+1
B= AINT(FLOAT(M)/32768)*4.M4.
A=0,25+B
RI=FLOAT(N)/32768.
PSB= A*RI+B - B*RI
RETURN
END

```

2250
2260

2330

C
C
C
C
C
C
C

PROGRAM MONTE CARLO ZA DIFERENCIJALNU POVRŠINU PREMA PRAVOUGAONIKU

```

1  ETOT=0.
   EPOG=0.
   READ(4,1)A,H,B
   FORMAT(3(F10.4))
2  WRITE(5,2)A,H,B
   FORMAT(1H,'A=',F10.4,2X,'H=',F10.4,2X,'B=',F10.4)
   X=A/(2.*H)
   Y=B/(2.*H)
   D=Y/SQRT(1.+X.*X)
   E=X/SQRT(1.+Y.*Y)
   G=X/SQRT(1.+X.*X)
   S=Y/SQRT(1.+Y.*Y)
   FTEOR=(2./3.14159)*(G*ATAN(D)+S*ATAN(E))
17  WRITE(5,1)FTEOR
   FORMAT(1H,'FTEOR',F10.4)
   WRITE(5,5)
5   FORMAT(1H,'BROJ POKUSA',10X,'F',10X,'ADEL')
   C=B/A
   TETA= ATAN(C)
   DO 80 I=1,50
   CALL RANDITE I)
   TETA= TET. (3.14159/2.)
   WRITE(5,6) TET,TETA
61  FORMAT(1H,2(5X,F10.4))
   IF(TETA.GT.TETA)GO TO 110
   SIMX2=A.*2/(A.*A+4.*H.*H*cos(TETA))*COS(TETA)
   DO 30 J=1,10
   ETOT= ETOT+T.
   CALL RAND(SINBT)
   IF(SINBT.LE.SIMX2)EPOG=EPOG+T.

```

```
30 CONTINUE
50 TO 3
  TETA = (3.14159/2.)
  S12MX2 = B**2/(B*B + 4.*H*H*COS(TETA))*COS(TETA)
  DO 40 J=1,10
    ETOT = ETOT + 1.
    CALL RAND(SINB2)
    IF(SINB2.LE.S12MX2)EPOG = EPOG + 1.
  CONTINUE
40 IF((I/I0)*10) - 1).EQ.0)GO TO 10
  GO TO 80
10 F = EPOG/ETOT
  ADEL = ABS(FTEOR - F)
  K = 10 * I
  WRITE(5,4)K,F,ADEL
  FORMAT(1H,5X,15,2(5X,F10.4))
  CONTINUE
  STOP
  END
```

30

110

40

3

10

4

80

```

C
PROGRAM MONTE CARLO ZA DVA PRAVOUGAONIKA
10 REAL(4, 10)H, X, Y
   FORMAT(3(5X, F10.4))
   ETOT=0.
   FPOG=0.
   B=X/H
   C=Y/H
   FTEOR=(1./3.14159)*(1/(B*C))*ALOG((1.+B*B+C*C)+B*B*C*C)/(
   1.+B*B+C*C)-(2./B)*ATAN(C)+(2./C)*SQRT(1.+C*C)*ATAN(B/SQRT(1.+
   C*C))-(2./C)*ATAN(B)+(2./B)*SQRT(1.+B*B)*ATAN(C/SQRT(1.+B*B))
   WRITE(5, 20)FTEOR, B, C
   FORMAT(1H, 5X, FTEOR=, F10.4, 2X, B=, F10.4, 2X, C=, F10.4)
20 DO 100 I=1,1000
   CALL RAND(X2)
   X1=X*X2
   CALL RAND(Y2)
   Y1=Y*Y2
   TETA1=ATAN((Y-Y1)/(X-X1))
   TETA2=(3.14159/2.)*ATAN(X1/(Y-Y1))
   TETA3=3.14159+ATAN(Y1/X1)
   TETA4=(13.*3.14159/2.)*ATAN((X-X1)/Y1)
   CALL RAND(TET)
   TETA=2.*3.14159*TET
   IF(TETA.LE.TETA1)GO TO 1
   IF(TETA.LE.TETA2)GO TO 2
   IF(TETA.LE.TETA3)GO TO 3
   IF(TETA.LE.TETA4)GO TO 4
   S12MX=(X-X1)**2/((X-X1)**2+H*H*COS(TETA))*COS(TETA)
   GO TO 50
2  TETA=TETA-(3.14159/2.)
   S12MX=(Y-Y1)**2/((Y-Y1)**2+H*H*COS(TETA))*COS(TETA)

```

```

3  TETA= TETA- J.14159
   S12MX=(X1•X1)/(X1•X1+ H•H•COS(TETA)+COS(TETA))
   GO TO 50
4  TETA= TETA- ((3. • 3.14159)/2.)
   S12MX=(Y1• Y1)/(Y1• Y1+ H•H•COS(TETA)+COS(TETA))
50  CONTINUE
   DO 110 J=1,10
   ETOT= ETOT+I.
   CALL RAND( SIN2B)
   IF( SIN2B.LE.S12MX) EPOG= EPOG +I.
   CONTINUE
   IF(((1/10)•10) - I).EQ.0) GO TO 7
   GO TO 100
7  E= EPOG/ETOT
   ADEL= ABS(FTEOR - F)
   K=1•10
   WRITE(5,30)K,F,ADEL
   FORMAT(1H ,3(5X,F10.4))
100 CONTINUE
   STOP
   END

```

11. FRILOG 3

T A B E L A

β	f_{Lamb}	$\Delta \sin^2 \beta$	$a(\beta)$	$z_0(\beta) \Delta \sin^2 \beta$	f_i	y/L	$\frac{f_i - f_{\text{Lom}}}{f_L}$	$\frac{f_i - f_{\text{Lom}}}{f - f_L}$
2	.00122	.0048	.9466	.004606	.0053	.0337	.76869	.004069
6	.01093	.0145	.9466	.018335	.0209	.0951	.47869	.010033
10	.03015	.0238	.9466	.040918	.0468	.1499	.35537	.016623
14	.5853	.0327	.9466	.071918	.0822	.1995	.28812	.023687
18	.09549	.0410	.9466	.110730	.1265	.2452	.24562	.031091
22	.14033	.0484	.9466	.156602	.1790	.2877	.21613	.038692
26	.19217	.0549	.9466	.208630	.2385	.3278	.19425	.046329
30	.25000	.0604	.9466	.265805	.3038	.3660	.17725	.053858
34	.312697	.0647	.9310	.326010	.3727	.4028	.16102	.095669
38	.37904	.0677	.9310	.389047	.4447	.4386	.14774	.118333
42	.44774	.0694	.9300	.453640	.5185	.4737	.13647	.146960
46	.51745	.0697	.9259	.518129	.5923	.5437	.12638	.183608
50	.58682	.0687	.9197	.581292	.6645	.5437	.11691	.231568
54	.65451	.0663	.9080	.641529	.7334	.5792	.10754	.295781
58	.719185	.0627	.8850	.697018	.7968	.6154	.09742	.382000
62	.77959	.0578	.8570	.746578	.8535	.6528	.08654	.504046
66	.83456	.0518	.8155	.788854	.9017	.6919	.07454	.684474
70	.88302	.0448	.7500	.822476	.9402	.7331	.06084	.956973
74	.92402	.0369	.6829	.847723	.9691	.7771	.04649	1.457550
78	.95677	.0284	.6000	.864751	.9886	.8247	.03215	2.775878
82	.98063	.0192	.4200	.872825	.9978	.8767	.01718	7.727662
86	.99513	.0097	.2000	.874766	1.0000	.9346	.00486	-
90	1.00000	.0000	.0000	.874766	1.0000	1.0000	.00000	-

Podaci dati za staklo

(Osnova za formiranje skale integratora za realne površine)