УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
УЧИТЕЉСКИ ФАКУЛТЕТ

Мика М. Ракоњац

ЕФЕКТИ ХОРИЗОНТАЛНЕ УНУТАРПРЕДМЕТНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ У РАЗРЕДНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

докторска дисертација

Београд, 2018.

UNIVERSITY OF BELGRADE
TEACHER'S TRAINING FACULTY

Мика М. Ракоњац

EFFECTS OF WITHIN SUBJECT HORIZONTAL INTEGRATION IN THE CONTEXT OF THE MATHEMATIC'S TEACHING

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2018.

Ментор:

Проф. др Јасмина Милинковић, ванредни професор, Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Чланови комисије:

Проф. др Александар Липковски, редовни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

Проф. др Маријана Зељић, ванредни професор, Универзитет у Београду, Учитељски факултет

др Оливера Ђокић, доцент, Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Датум одбране:

Ефекти хоризонталне унутарпредметне интеграције у разредној настави математике

Резиме

Истраживање у оквиру овог рада заснива се на уверењу да математичко мишљење подразумева проналажење веза, које су од суштинског значаја за изградњу математичког разумевања. На епистемолошком нивоу, рад има за циљ да допринесе бољем разумевању односа између алгебарског и геометријског размишљања. На развојном нивоу, овде се истражује први сусрет ученика узраста 10 година са логичком структуром математике, као и питање о границама и могућностима увођења алгебарског и геометријског моделовања путем решавања сврсисходних задатака у млађим разредима основне школе поштујући принципе теорије развијајуће наставе. Општи циљ истраживања је експериментална провера теоријског становишта о ефикасности интеграције геометријских и алгебарских садржаја у разредној настави, тј. утврђивање њене ефикасности у усвајању наставних садржаја, као и нивоа квалитета, обима и трајности знања ученика у односу на усвајање истих наставних садржаја традиционалним начином рада.

Дескриптивном методом истраживања и статистичком анализом квантитативних података потврђена је хипотеза да је интегративни приступ математичким садржајима у позитивној корелацији са математичким способностима и знањем ученика. Резултати истраживања указују на то да повезивање геометријских са алгебарским садржајима омогућава да се математичко мишљење развија у правцу откривања математичких веза и појмова, а не у правцу формализма, који се заснива на синтаксичким прорачунима. Потврђено је да се кретањем између геометријских и алгебарских репрезентација математичких објеката: 1) алгебарски појмови, са посебним акцентом на еквивалентност и променљивост, могу апстраховати из особина и међусобних односа геометријских објеката; 2) подстиче разматрање геометријских објеката са релацијског аспекта и омогућава прелазак са конкретних представа на апстрактно размишљање, тј. напредовање ка вишим нивоима, у правцу изградње формалне математике.

Резултати истраживања указују на то да повезивање алгебарских и геометријских знања у целовит систем представља један од услова развоја способности истраживања заједничких релација између података различитог значења, односно развоја методолошке оригиналности код ученика.

Кључне речи: *интеграција, алгебарски садржаји, геометријски садржаји, моделовање, репрезентација, математички задаци, полупрограмирана настава*.

Научна област: Дидактичко – методичке науке

Ужа научна област: Методика наставе математике

УДК: 371.3::51(043.3)
371.311.5:37.026(043.3)

Effects of within subject horizontal integration in the context of the mathematic's teaching

Abstract

The research of this paper is based on the belief that mathematical thinking involves to find of connections which are essential for the construction of mathematical understanding. According to the epistemological level the aim of this paper is to contribute of better understanding relationship between the geometric and algebraic thinking. At the developmental level, this paper explores the first encounter of pupils age of 10 years old with the logical structure of mathematics, as well as the question about limits and possibilities of introducing algebraic and geometric modeling. These is based by solving meaningful tasks in the elementary grades while respecting principles of the theory of developmental teaching.The overall objective of the research is experimental verification of theoretical perspectives about efficiency of the integration of geometric and algebraic content in teaching. Further, the determination its effectiveness in the adoption of educational contents, as well as levels of the quality, scope and sustainability of pupil's knowledge in relation to the adoption of the same contents by the traditional way of teaching.

The hypothesis of this paper that the integrative approach of mathematical contents is in positive correlation with mathematic skills and knowledge of pupils is confirmed. This confirmation of the hypothesis has been based on descriptive method of research and statistical analysis of quantitative data. The research results indicate that the connection of geometry and algebraic amenities makes it possible to develop mathematical thinking towards discovering mathematical relationships and concepts, but not in the direction of formalism, which is based on syntactic conversion. Also, it has been confirmed that by movement between the geometric and algebraic representations of mathematical objects: 1) the algebraic notations with special emphasis on equivalence and variability can be abstracted from the properties and relationships of geometric objects; 2) to encourage the consideration of geometric objects with the relational aspect and to allow the transition from concrete to abstract way of thinking. In the same time it allows the progression to the higher levels towards to construction the formal mathematics.

The results of the research indicated that connecting of algebraic and geometric knowledge into an integrated system is one of the conditions for the capabilities research development, as well as joint relations between data of different meanings, respectively of the development methodological originality of pupils.

Key words: *integration, algebraic contents, geometric content, modeling, representation, mathematical tasks, semi-programmed teaching*

Scientific field: Didactic-methodical sciences
Scientific subfield: Teaching Mathematics

UDC number: 371.3::51(043.3)
371.311.5:37.026(043.3)

Садржај

III Резултати и анализа истраживања

IV Импликације и закључци

Увод

Настанком теорије скупова у XIX веку, која даје општу карактеристику појма математике, показано је да су математичке дисциплине јединице једног система. У складу с тим, ово истраживање се заснива на уверењу да математичко мишљење подразумева проналажење веза, које су од суштинског значаја за изградњу математичког разумевања.

Кратак осврт на историјски развој математике (поглавље 1), који представља основу за усмеравање на конкретне аспекте проблема проучавања, покренуо је идеје од суштинског значаја за ово истраживање, а то су: 1) ученици треба да посматрају математику не као готов производ, већ као систем знања који се континуирано мења и расте у чему и они сами могу дати допринос; 2) учење усмерити на успостављање веза између математичких тема; 3) познавање развоја математичке теме олакшава разумевање њеног садржаја; 4) индивидуално проучавање математике (психогенеза) прати пут историјског развоја саме математике (онтогенеза). У складу с тим, циљ овог рада је да помогне наставницима разредне наставе да разумеју природу наставе математике у овом приступу и да их усмери у планирању, примени и процени интегрисаног програма за математику.

Поред поседовања математичког знања, у интелектуалном развоју појединца, неопходна је и способност коришћења математичке методе у изучавању процеса и појава, а њени основни видови су алгебарска и геометријска метода. Повезивање садржаја наведеним методама омогућава формирање математичких појмова. Те методе укључују активности које се односе на геометријски приказ појма и на његово алгебарско тумачење, што омогућава тумачење појмова на геометријском и алгебарском језику истовремено. Основне карактеристике геометријске методе су визуелне представе математичких закона и особина објеката, које геометрију чине најмање апстрактном формом математике. На пример, ако би се геометријске слике користиле као визуелна компонента у проучавању апстрактних алгебарских структура, когнитивни распон, са аспекта геометрије, простирао би се од израде цртежа до математичког размишљања о комбинацијама и трансформацијама геометријских облика, чиме би се спречило да ученици алгебру посматрају само као средство за решавање проблема, који се могу моделовати у облику једначине.

Општи циљ повезивања математичких садржаја је да се помогне ученицима да развијају математичко знање, као и свест о везама између математичких области, јер је способност повезивања далеко значајнија од способности рачунања и манипулације симболима. Због тога, задатак наставника је: а) да одреди математичке активности, у којима ће ученици користити садржаје из различитих области, б) да одреди садржаје из различитих области, које ученици могу повезати кроз одговарајуће активности. Како је математички задатак предмет мисаоних делатности, основна активност у интеграцији алгебарских и геометријских садржаја је решавање задатака. Један од начина развоја способности повезивања је проучавање математике у интеракцији са проблемском ситуацијом, која омогућава стваралачки развој и проналажење решења без прописаног поступка, чиме се спречава перцепција да математику чине бројна правила и формуле, које треба запамтити. Развој математичких знања указује на то да математичка делатност подразумева активан процес откривања нових чињеница и закона. Решавање проблема, у овом раду, који су сувише сложени да би се решили усмено без оловке и папира, засновано је на изради, развоју, интеграцији и могућој генерализацији алгебарских и геометријских стратегија, које подразумевају систематичан начин рада (образложење корака, извођење низа узастопних трансформација), тј. активно укључује све ученике и промовише успостављање и коришћење веза. Задатак наставника је да усмери и обезбеди структуру процеса учења, тј. да формулише такве проблемске ситуације које ће ученицима помоћи у самосталној изградњи знања. Задаци, на којима ученици раде да би научили математику, треба да буду одговарајући и да ангажују ученика у идентификовању проблема и откривању решења. Решавање задатака подразумева интерпретацију, анализу, математичку аргументацију, формирање модела и генерализацију. Ово подразумева активности размишљања, изградње односа, проширења и примене математичког знања. Да би се подстакао развој концептуалног разумевања нагласак је на успостављању односа између математичких појмова и примени постојећих знања у новим ситуацијама, што се омогућава ангажовањем ученика у раду на полупрограмираном материјалу са инструкцијама, које их усмеравају да ангажују мисаоне активности неопходне за развој разумевања. Дидактички материјал намењен за самосталан рад ученика промовише активно учење и подучавање усмерено на индивидуално истраживање проблемских ситуација праћено од стране наставника, при чему су ученици активно укључени у истраживање, верификацију, уопштавање, примену, доказивање, евалуацију и излагање математичких идеја, чиме је омогућено да цео разред резимира резултате активности, који се анализирају и примењују у формирању математичких идеја и принципа. Питања у материјалу имају функцију усмеравања пажње ученика, подстичу ученика на анализирање онога што посматра и указују на везе између особина посматраног објекта, чиме се одвија свестан и усмерен процес, са одређеним циљем и планом. Кораци се повезују у једну мисао, изражену у скраћеном начину записивања. Целокупан процес учења је као динамично сажимање под свеобухватнија значења, чиме се постиже да се ученици не везују за појединачне случајеве, већ да се у први план доводе општи појмови. Тако долази до интегрисања претходног искуства у уопштен облик и његовог уклапања у когнитивну структуру ученика. Полупрограмирани материјал не само да омогућава организован начин писања могућих одговора, већ подстиче и структуриран начин размишљања, како у хоризонталном (нпр, изградњом различитих репрезентација) тако и у вертикалном правцу (нпр, кретањем од конкретних ка апстрактним формама). Циљ је да се подстакне радозналост ученика у истраживању сложенијих математичких односа, да их инспирише да апстрактно размишљају, да их охрабри да размотре и открију алтернативне приступе у решавању проблема, да развијају своје способности уочавања предности једног приступа решавања у односу на друге и да повећају своју истрајност у решавању проблема. Решавањем задатака, у овом раду, обухваћене су следеће активности: 1) коришћење разних аналогона - репрезентација и модела математичких појмова, са уверењем да ће олакшати изградњу и разумевање математичких појмова, 2) алгебарска или геометријска формулација проблемске ситуације, 3) математичка активност унутар и између репрезентација и 4) интерпретација резултата у погледу оригиналне ситуације. Наиме, одговори ученика само у симболичкој форми наставнику не дају довољно информација да процени способност ученика за изградњу веза између математичких идеја, јер одговори ученика могу указивати на то да је реч о меморисаним чињеницама или алгебарским правилима која се користе као алати који воде ка решењу.

У овом раду је посебна пажња посвећена структурном развоју математичког мишљења. Према истраживањима (Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006) ученици млађег узраста имају могућност да науче да генерализују и да развију апстрактне математичке способности, које одражавају математичку структуру. Наиме, све је више доказа да је свест о математичкој структури од кључног значаја за развој математичких способности ученика. Истраживања показују да ученици, који препознају структуру математичких процеса и репрезентација, стичу дубоко концептуално разумевање (Pitta-Pantazzi, Gray & Christou, 2004; Gray, Pitta, & Tall, 2000; Thomas & Mulligan, 1995). Значај конкретне репрезентације је да одсликава структуру концепта. Дете би требало да буде у стању да користи структуру репрезентације да изгради ментални модел концепта. Математичко моделовање омогућава ученицима да, наглашавањем структурних карактеристика одређеног објекта преко изабраног модела, уоче односе и успоставе везе између његових елемената. На пример, да ученици алгебру не би посматрали само са процедуралног (оперативног) аспекта (који има аритметичку позадину), геометријским моделовањем алгебарских израза, где се изрази посматрају као објекти, истиче се структурни карактер алгебре, јер су визуелне способности у позитивној корелацији са математичким постигнућима и најчешће подразумевају препознавање образаца и структура. Оперативно – структурни приступ у процесу учења може се видети на примерима илустрованих линеарних образаца, који су погодни за комбиновани аритметичко – геометријски приступ у почетном изучавању алгебре.

Геометријско моделовање омогућава да се односи између величина, укључујући појмове „однос” и „еквивалентност”, могу посматрати и развијати у контексу геометрије. Наиме, геометријско моделовање омогућава развој способности за: 1) упоређивање величина: геометријске методе решавања проблема омогућавају ученицима да о односима расуђују са квалитативног аспекта (генерализујући их, размишљајући о променљивим вредностима); 2) опажање и разумевање различитих форми појма „однос” - као процедура или статични објекат (нпр, табела са паровима бројева (2,8), (3,12), (4,16) је форма односа статичног карактера, док репрезентација O=4a омогућава да ученик осмисли нови пар бројева који задовољава овај услов, што однос између две променљиве чини динамичним, те ова репрезентација има процедурални карактер и наводи ученике да уоче да однос између промењљивих не представља само скуп дискретних тачака приказаних паровима у табели, већ представља континуирану узајамну зависност величина); 3) препознавање значења симбола: геометријске методе решавања проблема омогућавају ученицима да схвате различите улоге и значења алгебарских симбола, који означавају процесе или упућују на статичне описе; 4) истраживање еквивалентних израза: доживљавајући еквивалентне изразе као врсту описа стања подударних геометријских фигура омогућено је да се два еквивалентна израза схвате као два еквивалентна објекта, чиме се наглашава њихов структурни карактер, за разлику од процедуралне интерпретације израза која се односи на резултат. Дакле, истраживање геометријских модела може бити усмерено на развој алгебарског размишљања, као што је неформално увођење појма промењљиве, формирање еквивалентних израза или уопштавање особина низа бројева. Правац и начин трансформације геометријског модела одређени су проблемском ситуацијом (захтевима задатка) и личним расуђивањем ученика. Резултат трансформација, које чувају основна својства објекта (услове задатка), су нове слике које откривају квалитативне особине објекта. Геометријски модели су средства за подстицање оперативно-структурног начина размишљања. На пример, геометријске репрезентације линеарних образаца (поглавље 4.2.1) нису инертне, већ одсликавају динамичну природу алгебарских образаца. Такође, геометријски модел једначине (поглавље 4.2.3) чини кораке њеног решавања континуирано видљивим, чиме се истиче њена структурна природа.

У зависности од тога да ли се користе у контексту уопштавања бројева, истраживања процедура за решавање проблема или проучавања односа између величина, алгебарски симболи могу имати више различитих значења, која су фиксирана у крутим конвенционалним оквирима. Међутим, како се наставни приступ заснива на принципу „од познатог ка непознатом”, не треба стартовати са готовим симболичким језиком. Наиме, алгебарско проучавање треба да се заснива на проблемским ситуацијама, које доводе до симболизације. На пример, описивање релација између геометријских објеката коришћењем симбола ученике води ка извођењу образаца, које, затим, сматрају производом сопствених математичких активности. Слова *a, b, O, P,* позивајући на контекст геометрије, могу да помогну у разумевању значења алгебарских једнакости (нпр, задатак испитивања зависности две промењиве дате формулом *О=4а*, уместо *y=4x*, упућује ученике на геометријско расуђивање). Форма симболичког приказа (израз, табела) треба да буде у контексту активности, које захтевају расположивост симболичког алата. На пример, за испитивање зависности вредности обима од странице квадрата, на овом узрасту, користи се табеларни приказ, који ученицима даје простор да истражују идеју промењивости пре саме употребе конкретних промењивих. Табеле омогућавају ученицима да открију обрасце, које би иначе тешко могли уочити. Наиме, односи између величина могу бити испитани путем рачунања, које само по себи може бити средство за развијање свести о општим изразима..

Циљ овог истраживања је да се одговори на два главна питања: 1) Да ли и на који начин ученици могу да превазиђу когнитивну препреку између алгебре и геометрије? и 2) Који су ефекти повезивања алгебарских и геометријских садржаја? Прво питање обухвата следећа потпитања: Које наставне активности омогућавају повезивање алгебарских и геометријских садржаја? Које математичке репрезентације ученици користе у приказивању и решавању проблемских ситуација? Да ли ученици препознају алгебарску репрезентацију еквивалентну геометријској и обрнуто? Да ли ученици препознају исту идеју у различитим приказима? Које активности омогућавају интеграцију изучавања садржаја са процедуралног и са структурног аспекта? У којој мери и на који начин ученици постају свесни различитог значења симбола? Да ли постоји корелација између форме репрезентације, коју ученик користи, и нивоа његовог математичког размишљања, са посебним освртом на процедурално и релационо размишљање? На који се начин ученици могу укључити у активно стицање знања? У оквиру другог питања истражују се ефекти интегрисаног приступа, који се односе на: 1) развој концептуалног разумевања код ученика, 2) развој способности расуђивања о односима између величина, 3) развој способности примене геометријских модела, 4) развој способности формирања и решавања линеарних једначина, 5) трајност знања. Учење повезивањем алгебарских и геометријских садржаја у овом раду је разматрано кроз анализу: 1) успостављања веза између математичких идеја, 2) решавања проблемских задатака, 3) средстава за повезивање садржаја, 4) мисаоних активности, које доводе до повезивања знања: изградња односа, проширивање и примена знања.

Из циља проистичу главни задаци истраживања:

1) Утврдити психолошко-педагошке основе за реализацију унутарпредметне интеграције у настави математике путем решавања проблема

2) Размотрити теоријске основе изградње методичких модела, који омогућавају реализацију унутарпредметне интеграције

3) Изградити конкретне методичке моделе и применити их у реализацији експерименталне наставе

Постављени задаци решени су помоћу следећих метода истраживања:

1) теоријска, 2) емпиријска и 3) статистичка

Теоријске основе истраживања су:

-теорија унутарпредметног повезивања у настави математике (R. Skemp, M. Atiyah, Ј. Милинковић, Р. Антонијевић, Е. Сухаревская, J. Kaput)

-методика повезивања наставних садржаја (P.A.House, A.F.Coxford,T.R. Hodgson)

-примена различитих репрезентација (C. Laborde, T. P.Yildirim)

-учење у динамичном окружењу (генерализација, контраст, фузија и сепарација) (J. Bowden, F. Marton, A.B.M.Tsui)

-идеја „сврсисходних задатака“ (С. И. Шохор-Троцкий, М. Дејић)

-теорија развијајуће наставе (С.Л. Выготский, Д. Б. Эльконин, В.В. Давыдов)

Радови наведених аутора поред тога што одражавају став да је повезивање наставних садржаја услов квалитета и трајности усвојених знања, дају одговоре на методичка питања, којима се бави овај рад, као што су: Како процес генерализације повезати са конкретним активностима ученика? Како може да се контролише активност ученика? Како наставник може да усмерава ученика ка повезивању наставних садржаја?

Реализација наставе, за потребе овог истраживања, подразумева да се, на основу резултата теоријског истраживања, обезбеде најповољнији услови за усвајање наставних садржаја. Једна од метода подстицања интелектуалног развоја и ефективног откривања ученичких потенцијалних могућности је рад на сврсисходно формираном полупрограмираном материјалу са задацима који подстичу усвајање садржаја и њихову примену у новим условима, где је акценат на проучавању својства формула и једначина, а не на њиховој примени као алата у решавању проблема. Садржај наставног материјала обезбеђује континуитет развоја логичког размишљања, као и развој способности успостављања узрочно-последичних веза.

Неколико појмова (нпр, аритметички низ, НЗД, НЗС) и задатака (нпр, изградња квадрата бинома, решавање система једначина), који су обрађивани у раду, нису на листи задатака Наставног програма за четврти разред, али су имплицитно укључени у развој способности ученика, реализацију задатака или разумевање појмова предвиђених планом и програмом.

.

I Теоријске основе истраживања

1. Осврт на везу алгебре и геометрије кроз историју

Разлоге повезивања наставних садржаја највећим делом налазимо у природи саме науке. „Суштинску основу повезаности знања у настави, која се изражава у виду постојања система знања и појмова, проналазимо у структури саме науке, у систему знања, фонду знања које одређене научне дисциплине поседују управо у оквиру постојећег модела повезаности знања који је карактеристичан за науку уопште и за посебне научне дисциплине." (Антонијевић, 2006:95).

Веза између алгебре и геометрије позната је још код древних математичара. На значај геометрије, као основе за развој алгебре, указали су још стари Грци који су „под математиком подразумевали оно што ми данас називамо геометријом, док су аритметику, тј. теорију рачунања сматрали више занатом него науком. Геометрија је такође замењивала у то време непостојећу теорију реалних бројева" (Липковски, 2007:9). Бројни су примери који указују на то да је линија између алгебре и геометрије веома танка. Грци су геометрију примењивали у приказивању израза. Египћани су за конструкцију правог угла користили троугао са страницама 3,4 и 5 јединица мере. На основу Еудоксове (408-355.п.н.е) теорије размера, реалан број представља размеру две истородне величине (дужине, површине, запремине), па је за исти број постојало бесконачно много различитих ознака. Основна својства једнакости, која је Еуклид (315-255п.н.е) изложио у делу „Елементи", иако се односе на геометријске објекте, примењују се и на бројеве: *Број је део броја, мањи од већег, ако мери већи. Делови су, када га не мери. Већи број је вишеструк од мањег кад је мерен мањим. Паран број је онај који је дељив у два једнака дела.*

Еуклидска геометрија је била општи модел изградње математичке теорије, која је била „чврсто" геометријска, све до увођења Декартовог координатног система, који је променио карактер математике. „То је био покушај да се геометријско размишљање редукује на алгебарске манипулације" (Atiyah, 2001:657).

Наиме, Рене Декарт (1596-1650) је учинио прелаз од појединачних ка општим математичким истраживањима. Он је у свом делу „Геометрија“ (1637.год) описао универзални метод превођења геометријских проблема на језик алгебре и анализе, што је касније утицало на развој математичке анализе. Декарт је у геометрију увео аритметичке појмове, а аритметичке операције дефинисао као геометријске форме пропорције. Тако је добијен један геометријски модел, којим се реални бројеви представљају дужима (а касније и тачкама). „Интуитивно схватање реалних бројева тесно је повезано са геометријским схватањем броја као дужине еуклидске дужи, те се реални бројеви често интерпретирају тачкама реалне осе - еуклидске праве на којој је фиксирана тачка, дефинисана оријентација и дата јединична дуж.“(Рашковић, 2010: 87).

Полазећи од тога да се сви геометријски задаци могу свести на одређивање дужине одсечака и да се цела аритметика састоји само од четири операције, Декарт геометријским конструкцијама интерпретира рачунске операције. Он дужину траженог одсечка одређује додавањем или одузимањем других одсечака, што је еквивалентно сабирању и одузимању. Користећи пропорцију $1:a=b:x$ Декарт је конструисао дуж x која представља производ $a \cdot b$, где су a и b дати одсечци, а ради боље везе са бројевима произвољан одсечак проглашава јединицом. Слично, користећи пропорцију b:1=a:x, геометријски приказује операцију еквивалентну дељењу. Те геометријске конструкције, схваћене као операције, имале су за резултат опет дуж. Затвореност Декартовог модела у односу на операције множења и сабирања је и учинило његов начин спајања геометрије и алгебре успешним.

Декарт је увођењем координата спојио геометрију са алгебром, где су реални позитивни бројеви интерпретирани као односи једне дужи према другој, која је одабрана за јединицу мере. Појавом Декартовог координатног система омогућено је да се геометријски објекти и операције изучавају помоћу бројева и алгебарских операција. Увођењем алгебре као симболичког апарата геометрије, пар бројева (x,y) можемо назвати тачком, при чему Декарт не посматра x и y као непознате, чију фиксну вредност треба одредити из једначине, већ као променљиве[1] (нешто што варира, има више вредности), а једначина изражава зависност између променљивих. Настанком идеје о променљивој многи геометријски појмови добијају свој кореспондентан алгебарски појам. Тачки одговара уређени пар (x,y) бројева у алгебри, правој одговара скуп уређених парова, који задовољавају једначину облика $ax+b=c$ ($a,b,$c су реални бројеви), пресечној тачки две линије одговара скуп уређених парова, који задовољавају одговарајуће једначине, а геометријским трансформацијама одговарају функције. С друге стране, методом координата омогућена је и геометријска интерпретација алгебарских и аналитичких чињеница. На пример, операције над реалним бројевима, као подврсте функција, могу се графички представити тачкама у правоуглом координатном систему. Идеја Декарта о увођењу појма променљиве и конструктивно-аналитичка метода решавања алгебарских проблема отворили су простор за изучавање функције и до развоја посебне гране математике - аналитичке геометрије, која се заснива на кореспонденцији између тачака n-димензионалног еуклидског простора и n-торки реалних бројева. Дакле, спајањем алгебре и геометрије и настанком појма променљиве изникао је нови метод, чији се општи задатак састоји у томе да једначину са две променљиве представи линијом у равни и да, на основу алгебарских својстава једначине, истражи геометријска својства одговарајуће линије и обрнуто, да на основу геометријских услова задатих линијом нађе одговарајућу једначину и да опет, на основу алгебарских својстава једначине, испита геометријска својства дате линије.

Све до XVIII века алгебра се изучавала коришћењем идеја из других области математике, посебно геометрије (Katz, 1995:20)[2]. Како је за Њутна (1643 -1727) геометрија била математички начин приказивања природних закона, он је

---

[1] Схватања појма променљиве мењала су се током времена. „Променљива је словна репрезентација броја, која може да има две или више вредности у току одређене дискусије“ (Hart,1951:91, цитирано у Usiskin,1988:8). „Грубо речено, променљива је симбол, који је замена за имена неких објеката, обично бројева у алгебри. Променљива се увек повезује са низом објеката чија имена могу бити замењена њом. Ови објекти се називају вредности променљиве“ (May and Van Engen,1959:70, цитирано у Usiskin,1988:8). Променљива је симбол за елемент одређеног скупа (Usiskin,1988:8).

[2] „Алгебра је општи метод рачунања помоћу одређених знакова и симбола који су измишљени за те сврхе” (Maclaurin, 1756:1, цитирано у Katz, 1995:20). Алгебра је „наука која нас учи како се одређују непознате величине помоћу оних које су познате” (Leonhard Euler, 1767:186, цитирано у Katz, 1995:20). „Алгебра је метод истраживања величина помоћу општих карактера који се зову симболи” (Brooks, 1871:19, цитирано у Katz, 1995:20).

користећи геометријске аргументе формирао обрасце, који ће у физичком смислу бити што ближи ономе што стоји иза њих. Лајбниц (1646 -1716) је, с друге стране, имао за циљ да целу математику „претвори“ у алгебарску машину. Лајбницова нотација је превагнула, али се после дужег времена вратио Њутнов дух гометрије. Наиме, XIX век обележили су Поенкаре (1854 -1912) и Хилберт (1862-1943). Док је Поенкареова мисао била више у духу геометрије, Хилберт је сматрао да је алгебарско размишљање најсигурнији вид математичког размишљања, те појам еуклидског простора генерализује замењујући дотадашње Еуклидове аксиоме сетом тзв. Хилбертових аксиома. Atiyah (1982) сматра да је геометрија људска активност, која одсликава природу људског разумевања и указује на способност ума да након тренутне визуелне радње апсорбује и анализира велику количину информација. С друге стране, алгебарско размишљање подразумева низ мисли које се одвијају једна за другом док изводимо тврђење корак по корак. Дакле, алгебра се бави манипулацијом у времену, јер низ корака (операција) који се изводе један за другим захтева време. Atiyah истиче да у статичном свемиру не можемо замислити алгебру, док је геометрија у суштини статична. „Ја могу једноставно да седим овде и гледам и ништа се не може променити, али још увек могу да видим. Алгебра се, међутим, тиче времена,...“ (Atiyah, 2001:658). Имајућу у виду речи Usiskin (2004): „Душа математике можда лежи у геометрији, али је алгебра њено срце“ (цитирано у Jones, 2010:213) или Atiyaha да је питање: „Да ли сте за геометрију или алгебру?“ аналогно питању: „Да ли бисте радије били глуви или слепи?“, закључујемо да је рад на интеграцији алгебарских и геометријских задатака неопходан. Такав приступ подржава Giaquinto (2007:240), који са сазнајног становишта сматра да су „алгебра и геометрија далеко од тога да су одвојене, већ представљају нешто више налик спектру“, а посебно када је реч о хармоничном математичком размишљању кроз повезивање геометрије и алгебре. Он истиче да не постоји оперативан критеријум за поделу мишљења на алгебарско и геометријско. „Уопштено говорећи, геометрија је део математике, у коме је визуелна мисао доминантна, док је алгебра онај део, у коме је секвенцијална мисао доминантна. Ову разлику можда најбоље описују речи ‚схватање’ насупрот ‚строгоћи’, при чему и једна и друга имају важну улогу у реалним математичким проблемима. Образовне импликације овога су јасне. Треба да се усмеримо на неговање и развијање оба начина мишљења. Грешка је да се пренагласи један на штету другог. ... Суштина коју сам покушао да истакнем је да геометрија није толико грана математике, колико је начин размишљања који прожима све гране“ (Atiyah,1982:183-184)

Геометрија и алгебра су од централног значаја за математику и то су њена „два основна стуба“ (Atiyah, 2001:50). Atiyah истиче да је просторна интуиција или просторна перцепција врло моћан алат и то је разлог зашто је геометрија заправо тако моћан део математике - не само за ствари које су очигледно геометријске, већ и за ствари које то нису. Зато треба настојати да се ствари изразе у геометријском облику, јер то нам омогућава да користимо нашу интуицију. Један од основних задатака наставе математике је решавање проблема, где алгебра и геометрија, као комплементарне дисциплине, имају важну улогу.

Алгебарско размишљање је у суштини симболичко, а геометријско је просторно, при чему нису међусобно искључива. Штавише, алгебарске операције зависе од просторних карактеристика унетих симбола и обављају се независно од семантичког значења симбола. „Алгебра се бави операцијама у времену, а геометрија се бави простором. То су два ортогонална аспекта света и представљају два различита гледишта у математици.“ (Atiyah, 2001:50). Са полазишта истинског открића није довољно да истине буду очигледне. Док геометрија омогућава да се идеја „види“, алгебра је развија и генерализује трансформишући изразе по одређеним правилима. Док алгебра обезбеђује моћне технике, Atiyah види опасност да „када пређемо у алгебарски рачун“, у суштини ми престанемо размишљати, престанемо мислити геометријски, престанемо размишљати о значењу. Atiyah алгебру назива „фаустовском понудом“ математичару од стране ђавола, где ђаво каже: „Ја ћу вам дати ову моћну машину, која ће вам одговорити на свако питање. Све што треба да урадите је да ми дате своју душу: Одрекните се геометрије и имаћете ту чудесну машину.“ Atiyah у алгебри види опасност. Он сматра да „када пређемо на алгебарски рачун ми, у суштини, престајемо размишљати, престанемо да мислимо геометријски, престанемо размишљати о значењу … ,јер је основни циљ алгебре увек био произвести формулу која се може ставити у машину, окренути ручицу и добити одговор. Узмете нешто што има значење, претворите га у фомулу и изађе вам одговор. Изгубите увид, а то може бити од великог значаја у другим фазама. Морате имате увид у потпуности, јер ће можда бити потребно да се вратите на то касније“ (Atiyah, 2002:42-43)

2. Појам интеграције у настави математике

Идеја о јединству научних знања огледа у делима древних мислилаца. Према речима Хераклита, мудрост је знати све као једно, тј. увидети „јединство у мноштву“. Идеја интеграције наставних садржаја разматрана је још у време Коменског, а систематско изучавање интегративне наставе почело је крајем XX века.

Савремена кретања у образовном процесу одликују се систематским приступом различитим научним дисциплинама. У савременим дефиницијама појма образовања акценат је на интеграцији знања, на повезивању знања у систем. Образовање је „педагошки процес у коме се стичу и усвајају знања, системи знања, вредности и системи вредности, изграђују навике и умења, развијају сазнајне способности, оспособљава за самообразовање, ствара основа за формирање сопственог погледа на свет“ (*Педагошки лексикон*,1996:332).

Један од актуелних проблема наставе математике је проблем интеграције математичких знања, формирање целовитог погледа на математику као науку. „Неопходно је да се у наставном процесу интегришу садржаји из различитих математичких области (истовремено или додатно). Полазећи од истих искустава, проблемских ситуација или активности, знања у вези величина, аритметике, геометрије, алгебре, статистике и вероватноће могу бити заједно разрађена“ (CECJA, 2002:146-147). Појам „интеграције“ (лат. integratio - обнављање, допуњавање; integer – цео) има значење обједињавања делова у целину, повезаности појединачних делова у једно цело. Потреба формирања целовитих математичких знања условљена је не само логичким развојем науке, већ и потребом професионалног знања појединца, од кога се захтева обједињење различитих компоненти научног знања и његова примена. Посебно је важно да се тај проблем реши у основној школи, где се изучавају алгебра и геометрија. У том смислу, Jacobs и сарадници (2007) сматрају да је нагласак на математичким садржајима и структури од фундаменталног значаја за образовање наставника. Саранцев (2001:110-112) сматра да процес интеграције није везан само за процедуралну страну наставе, већ „реконструише идеју и о садржају наставе“ и истиче да садржај наставе математике упоредо са дефиницијама, теоремама, аксиомама, треба да обухвати и активности адекватне фазама формирања математичких појмова, изучавања теорема, методама решавања проблема. Ове активности су омогућене интеграцијом наставе алгебре и геометрије.

Adler, Pournara и Graven (2000:3) разликују три нивоа интеграције: „интеграција различитих компоненти математике, између математике и познавања свакодневног реалног света и, где је то могуће, наставних области“. Под интеграцијом математичких дисциплина подразумева се њихово узајамно прожимање и повезивање њихових садржаја. У оквиру интеграције математичких тема може се разликовати: „а) интеграција путем обједињујућег концепта, као што је функција или математичко моделовање, б) интеграција спајањем математичких области“ (Milinković, 2011:137). Међутим, Колягин (1990:28-32) наводи: „Не може се сваки спој различитих дисциплина на једном часу аутоматски сматрати интегрисаном наставом. Неопходна је идеја водиља, чије спровођење омогућава нераскидиву везу и целовитост одређене лекције“. Дакле, показатељ степена интеграције није механичка синтеза наставних материјала из различитих дисциплина, већ обим проблема, који се могу решити захваљујући интеграцији.

У оквиру унутарпредметне интеграције Сухаревская (2006) разликује средњи и високи степен интеграције. Средњи степен интеграције остварује се у вертикалном начину повезивања садржаја, који се одликује спиралном структуром по принципу концентричности, тако што се свака математичка структура уздиже на развојно виши ниво у односу на ниво који јој претходи. Вертикална интеграција укључује елементе проспективног[3] и ретроспективног[4] учења. Садржај се прогресивно обогаћује новим информацијама, везама и зависностима, чиме се знање у вези одређеног предмета шири и продубљује. При таквој организацији знања се могу стицати „од појединачног ка општем“ или „од општег ка појединачном“ у зависности од нивоа когнитивног развоја ученика. Висок степен интеграције остварује се хоризонталним интегрисањем

---

[3] Freudenthal (1991) је, предлажући „повезано” учење, истакао значај проспективног учења, познатог као „антиципаторно учење”

[4] Подсећање и разматрање раније научене материје јача корене и чини темељ за нову материју.

наставних садржаја, тј. изградњом једне целине прожимањем знања из различитих дисциплина. Дисциплине се уједињују не само на основу заједничких тема, већ и на основу начина размишљања. Другим речима, поред тога што су повезане основним идејама попут функције или анализе података, повезане су и путем умних активности, као што су: визуелно мишљење, рекурзивно мишљење, откривање и описивање образаца, израда и провера претпоставке, расуђивање са више начина приказивања, пружање убедљивих аргумената. Интегрисање алгебре са геометријом омогућава ученику да примени математичко знање у различитим контекстима[5] и даје му осећај кохерентности математике, односно има за циљ да код ученика развије способност тумачења алгебарских односа између величина представљајући их у геометријском контексту и обрнуто, чиме се омогућава расуђивање о односима како са квантитативног, тако и са квалитативног аспекта.

3. Дидактичко-методичке карактеристике повезивања математичких садржаја

На дидактичку организацију наставе математике свакако утичу епистемолошка и когнитивна знања. Епистемолошка знања односе се на историјски развој математике из кога проистиче широк спектар математичког садржаја, док су когнитивна знања структурирана око следећих тема: односи између математичких дисциплина, симболички систем математике и односи између различитих семиотичких репрезентација, које се користе у математици.

У складу са Пијажеовом и Брунеровом теоријом[6] когнитивног развоја, Tall (2004) разликује три света математике: први се базира на перцепцији, други

---

[5] Према DoE (2006:27), контексти су „ситуације или услови у којима се подучава, учи и процењује садржај“. У овом раду контексти проистичу из природе области, које се изучавају (алгебре и геометрије) и примењују се у њиховој интеграцији

[6] Брунер сматра да до краја седме године дете открива значење и својства предмета кроз своју моторно-манипулативну активност. Зато је ову фазу назвао акционом, где се мисао диференцира кроз праксу. Пијаже је овај период назвао фазом интуитивне и ситуационе интелигенције, коју карактерише преоперационо мишљење. У периоду од 7. до 11. године појмовни садржај се, материјалним извођењем, трансформише у перцептивни, што омогућава да се „види“ садржај будуће мисаоне радње. Због начина презентовања одређених односа (путем слика), Брунер је ову фазу назвао иконичком. Пијаже је овај период назвао фазом конкретно-операторне интелигенције, где ученик закључује логички, али је његова мисао још увек везана за конкретне ситуације. После 11. године ученик више није везан за конкретно. Због изражене

је свет симбола (аритметичких и алгебарских) и трећи се базира на особинама израженим у смислу формалних дефиниција. У складу с тим, развој математичког мишљења почиње са перцепцијом, која води ка виузелно-просторној и симболичкој репрезентацији. Визуелизација подразумева не само менталну перцепцију реалних објеката, већ и интерно поимање, које се односи, како на концептуални развој еуклидске геометрије, тако и на развој других математичких концепата, који могу да се замисле у визуелно-просторном виду. Наглашавајући улогу визуелног приступа разним математичким темама Tahta (1980) истиче да су најапстрактнији математички објекти описани коришћењем геометријске метафоре, наводећи пример Дедекинда за кога је скуп био торба и Кантора, за кога је скуп био бездан. У складу са тим, недостатак сигурности у раду са бројевима на елементарном нивоу Tahta (1980) види у чињеници да ученици немају никакву одговарајућу менталну слику о бројевима на којима се захтева да раде, те инсистира на таквом изучавању геометрије, које омогућава да се она „уклопи" у математику у ширем смислу, а нарочито са алгебром. У том смислу Tahta (1980:6) цитира Caleb Gattegno - „геометрија је свест о сликама", док је алгебра формализација те свести, чиме наглашава повезаност алгебре са просторним расуђивањем. Наиме, фокусирајући се на аспекте чулног искуства, који омогућавају да се „виде" концепције, које реално не постоје, ученици могу да визуелизују апстрактне математичке објекте укључујући и алгебарске изразе. Дакле, цртањем се отелотворује значење појма и везује се за визуелне перцепције. С друге стране, на вишим нивоима општости ученик мора да користи апстрактне симболе и да прекине везу са просторним искуством, што захтева активности које повезују математичке објекте, знакове и значење (Santi, 2011). Свет симбола почиње са акцијама (нпр, бројање), које се помоћу симбола инкапсулирају у објекте, који омогућавају да се са процеса (где се математика ради) пребацимо на концепте (о којима се размишља), због чега га Tall (2004:285) назива још и „процептуални свет". Трећи свет се заснива на особинама, израженим у облику формалних дефиниција, које се користе као

симболичке активности и појмовног мишљења, Брунер је ову фазу назвао симболичком Пијаже истиче да у овој фази долази до потпуног ослобађања од деловања перцептивних механизама и изражена је способност решавања свих сложених случајева, због чега је овај период назвао фазом хипотетичко-дедуктивне интелигенције. С друге стране, Presmeg (2006b) истиче да не постоје докази о општем развојном кретању и да Брунерове фазе сазнавања треба схватити као метафоре за врсте размишљања, а не као развојну хијерархију.

аксиоме за дефинисање математичких структура (као што су групе, поља, векторски простор, тополошки простор), због чега га Tall назива „формално-аксиоматски“ свет.

.Когнитивна структура елементарног математичког мишљења добија карактер успешног математичког начина размишљања када се концептуалне слике у когнитивној структури преобразе у концептуалне дефиниције и користе за изградњу формалних концепата, који су део систематског тела општег математичког знања. У складу с тим, намера овог рада је да уједини свет алгебарских симбола са светом геометријских објеката, јер је математика дрво са много повезаних и испреплетаних грана, које позива на „пењање и истраживање” (Thurston, 1990, цитирано у Romberg & Kaput,1999:5). Алгебарски и геометријски садржаји, у овом раду, уједињени су по питању заједничких тема (променљивост, репрезентација) и мисаоних активности (визуелно размишљање, рекурзивно размишљање, расуђивање коришћењем различитих повезаних репрезентација). На пример, чињеница да мерење дужи не може да се ради без интегрисања са бројем (одакле примећујемо да је интеграција унутар области мерења аутоматска), сугерише на то да је повезивање геометријских и алгебарских садржаја у настави неизбежна активност. Кључне чињенице које омогућавају интеграцију алгебре и геометрије у настави су: 1) и у алгебри и у геометрији се настоји да се открију релације и обрасци, 2) алгебра и геометрија су засноване на међусобно зависним сазнањима, 3) имају сличне наставне процесе, као што су истраживање и решавање проблема. Наведене чињенице могу се потврдити и предлозима изнетим у *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), где се истиче да ученицима треба омогућити да у области алгебре: разумеју обрасце, релације и функције; представљају и анализирају математичке ситуације и структуре коришћењем алгебарских симбола; користе математичке моделе да представљају и разумеју квантитативне односе; анализирају промене у различитим контекстима; а у области геометрије: анализирају карактеристике и особине дводимензионалних и тродимензионалних геометријских облика и развијају математичке аргументе о геометријским односима; примењују трансформације за анализу математичке ситуације; примењују визуелизацију, просторно резоновање и геометријско моделовање за решавање проблема (Steen, 2003). Оно што је кључно је да се ученицима омогући приступ интегративним поступцима, којима ће успоставити везе између различитих појмова и области знања.

Да би ученици алгебру научили са разумевањем Kaput (1999) предлаже да треба: 1) рано почети са изградњом алгебарских знања користећи неформална знања ученика, 2) интегрисати учење алгебре са учењем других области (проширењем и применом математичког знања), 3) развијати више различитих облика алгебарског размишљања (применом математичких знања), 4) алгебарска знања градити користећи говорни језик и когнитивне моћи ученика (подстичући их у исто време да размишљају о томе шта уче и да примењују оно што знају), 5) подстицати активно учење (и изградњу односа), којим се постиже разумевање. Алгебра је много више од самог овладавања техником одређивања вредности *x* и *y*; алгебра је начин размишљања (Cai и др, 2005). Истраживања (English, 2002; English and Watters, 2005) показују да деца млађег узраста могу и треба да решавају ситуације, које подразумевају више од самог рачунања и мерења. Потребно је да се деца више суочавају са ситуацијама где се истражују идеје о односима и трансформисању величина, о величинама које се не могу видети (а самим тим ни директно мерити) и сл.(Jones, Langrall, Thornton and Nisbet, 2002). На основу Наставног плана и програма Давидова, у коме изучавању аритметике претходи изучавање алгебре (Cai и др,2005), може се закључити да је аритметика само конкретна примена алгебарске генерализације. Разматрајући проблем: „Како припремити ученике млађих разреда да алгебарски мисле?“, Давидов закључује да односе између величина деца прво треба да моделирају геометријски, а затим помоћу симбола, без придруживања нумеричких вредности датим величинама, тако да и након увођења броја, који је резултат мерења, навике алгебарског начина размишљања и даље остају и проширују се континуираном анализом математичких релација на аспстрактном нивоу (Cai и др,2005:11). Дакле, према Давидову, ученицима треба омогућити анализу појмова на апстрактном нивоу, јер држање детета на нивоу емпиријских размишљања исувише дуго кочи развој теоријског мишљења.

С друге стране, Cai сматра, ако би ученици и наставници редовно првих шест година у основној школи истовремено развијали аритметичко и алгебарско размишљање, аритметика и алгебра би се посматрале као нераскидиво повезане, те би проучавање алгебре у средњој школи било природно продужење математике основне школе (Cai и др, 2005). Како се алгебарско размишљање може посматрати као генерализовано аритметичко или као генерализовано квантитативно расуђивање (Kaput, 1995b), у овом раду у проучавању садржаја о бројевима (које обухвата разумевање месних вредности цифара, начин представљања бројева, као и односе између бројева) акценат је на врсти разумевања, које је уграђено у (касније развијено) алгебарско размишљање. Међутим, како алгебра као наука о структурама, апстрахована из дела аритметичких прорачуна и упоређивања, има тенденцију да се развија у правцу формализма, који се заснива на синтаксичким прорачунима, ученицима треба омогућити да открију да се алгебарске структуре, са посебним акцентом на еквивалентност и променљивост, могу апстраховати и из особина и међусобних односа геометријских објеката, а са намером да се развије разумевање система из ког су апстраховане. У складу са наведеним, алгебарски садржаји, обухваћени овим радом, односе се на: променљиве, обрасце, релације, еквивалентне изразе, решавање једначина, промене и моделовање.

У интегрисаном приступу нагласак треба да буде на концептуалној основи коришћењем различитих представа, јер интеграција у настави може бити оправдана само ако подстиче развој концептуалног разумевања (Lonning and DeFranco,1997). Будући да, према теорији когнитивног развоја Kevin Collis[7], која се надовезује на теорију Брунера и Пијажеа[8], комбинација сензомоторних интеракција и визуелно-просторних идеја чини основу математичког развоја, разумевање математичких појмова може се развијати, са једне стране, у правцу геометрије са нагласком на својства објекта, а са друге стране, у правцу активности над алгебарским објектима, при чему се појмови уводе на индуктиван начин уз примену развојно-откривајућих метода, тј. метода у којима ученици имају активну улогу. „С обзиром на то да се све математичке активности одвијају посредством спољних репрезентација” (Laborde, 2010:3), процес изградње појма подразумева употребу различитих репрезентација тог

---

[7] Према теорији Kevin Collis (Biggs & Collis, 1982), когнитивни развој се одвија кроз следеће узастопне фазе: сензомоторна, иконичка, конкретно-симболичка, формална и пост-формална, при чему свака фаза обухвата претходне.

[8] У основи Пијажеове теорије је тростепена теорија апстракције: 1) емпиријска апстракција, са нагласком на начин изградње значења особина објеката, 2) псеудо-емпиријска апстракција, са нагласком на изградњи значења особина поступака над објектима, 3) рефлективна апстракција, са нагласком на то како поступци и операције постају мисаони објекти (Piaget, 1985:49)

појма, као и кретање између њих. Дакле, развој концептуалног разумевања може да се одвија у оквиру семиотичког посредовања, у коме геометријски модели, као семиотички посредници стварају нова значења, и инструменталне генезе, у којој се геометријски модели, као технички алати, трансформишу или интернализују у психолошки алат (Vygotsky, 1978). Суштина је у интегрисаном сагледавању разноврсних аритметичко-алгебарско-геометријских приступа при објашњавању математичких појмова.

Ученике треба оспособити за оригиналну синтезу знања из различитих математичких области, за откривање нових битних идеја и релација у различитим математичким садржајима, чиме је омогућено разумевање, јер „разумевање као процес представља откривање веза и односа у оквиру предмета сазнавања, а само знање се може сматрати исходом процеса откривања веза и односа“ (Антонијевић**,** 2006/2:100). Развоју разумевања могу допринети менталне активности као што су: успостављање релација између величина, структурирано проширивање математичког знања, изградња математичког знања путем самосталног рада, формулисање сазнања (Carpenter & Lehrer,1999). Како разумевање подразумева активно стицање знања коришћењем сопствених способности (Carpenter & Lehrer, 1999), настава, која се заснива на учењу са разумевањем, подразумева активну улогу ученика у наставном процесу. У смислу дубине, квалитета и примене стечених знања, по мишљењу Антонијевића, од великог је значаја да се ученицима у настави омогући да до знања долазе самостално, „уз адекватну помоћ наставника, да знања у настави откривају сопственим напором, уз правилно организовану активност. ... Уколико је омогућено ученицима самостално откривање ових знања ... може се обезбедити већа међусобна повезаност тих знања...“ (Антонијевић, 2006:233). По програму и образовним стандардима NCTM (1989) потребно је да ученици повезују математичке идеје и појмове, при чему су математичке везе окарактерисане као алати за решавање проблема. „Ученици, који су у стању да исту проблемску ситуацију или математички концепт прикажу различитим представама, имаће један моћан флексибилан скуп алатки за решавање проблема“ (NCTM,1989:146). Такође, у NCTM (2000) се истиче да у настави математике треба омогућити ученицима да граде ново математичко знање путем решавања проблема у математичким и другим контекстима. С друге стране, како је одлика разумевања могућност проширивања и примене знања (тј.

способност рефлексије и артикулације), може се закључити: што је више релевантног знања и што је већи опсег појмова, које ученик разуме, већа је и могућност за ангажовање у решавању широког спектра проблемских ситуација и за развој математичког разумевања. Такође, познавање и разумевање појмова омогућава ученицима да повезују елементе знања, који би, иначе, памтили као изоловане чињенице. Тиме се омогућава проширење постојећег знања, процена тачности математичких исказа и метода и формирање математичких репрезентација (Mullis и др, 2009). Без располагања знањем, које омогућава позивање на нумеричке, симболичке и просторне репрезентације, математичко размишљање ученика не би било сврсисходно. Репрезентација идеја, као и способност формирања еквивалентних репрезентација, чини суштину математичког мишљења, због чега су проблемске ситуације, у овом раду, засноване на принципу да „настава математике мора да помогне ученицима да науче како се на адекватан начин користе различите репрезентације и, ако је потребно, како се креће између њих“ (Laborde, 2010:218). У NCTM (2000) се, такође, истиче да у настави математике треба омогућити ученицима да: формирају и користе репрезентације за уређивање, записивање и саопштавање математичких идеја; одаберу и примене математичке репрезентације за решавање проблема, као и да прелазе са једне репрезентације на другу; користе репрезентације за моделовање и интерпретацију физичких, друштвених и математичких појава. С обзиром на то да су геометријски модели вид подршке у напредовању од неформалних до апстрактних активности, њихов карактер се мења од улоге известиоца садржаја проблемске ситуације до улоге предмета проучавања. Према мишљењу Yildirim и сарадника (2010) модели у наставном процесу омогућавају: 1) интеграцију знања, 2) утврђивање стечених појмова, 3) откривање идеја, које тек треба да буду формално уведене. English истиче да се током моделовања ученици могу ангажовати у следећим активностима: *а*) формирају (развијају) модел - индукција, *б*) примењују модел на проблем који је структуриран на исти начин као и модел, али у другом контексту – истраживање, *в*) прилагођавају свој модел на неки начин да реше нови проблем – прилагођавање (English, 2006). Дакле, математичко моделовање захтева да ученици граде и развијају своје математичке идеје и концепте, као и да формирају систем генерализованих односа. Решавање проблема методом моделовања омогућава ученицима стицање и интеграцију когнитивних и метакогнитивних стратегија за откривање и примену знања (Collins, 1987).

Геометријско моделовање у овом раду омогућава да се, у циљу истраживања проблема, проблемска ситуација прикаже са аспекта квантитативних или просторних односа. Fischbein (1993), Tall и Vinner (1981) истичу улогу визуелизације у настави геометрије указујући на комплексну везу између визуелних стимуланса и формирања појмова (према Lee и др, 2015:10). По речима Fischbein и Nachlieli (1998) геометријска фигура је ментална апстракција (концептуална компонента), чије је значење одређено дефиницијом, док је слика чулна компонента, која поседује обим, површину, облик и величину (према Lee и др,2015:10). Да би се омогућио логичан ток математичког процеса у геометријском расуђивању ове две категорије особина треба спојити. Фокусирајући се на односе између просторног искуства и геометријске концепције Duval (1995) је, у циљу развоја геометријског размишљања, објаснио како се може радити са геометријским фигурама указавши на „четири когнитивна разумевања: чулно, секвенцијално, дискурзивно и оперативно”, што асоцира на модел геометријског размишљања, према van Hiele (1986), који подразумева напредовање у математизацији, тј. визуелни ниво - „просторно размишљање“, дескриптивни ниво - „геометријско просторно размишљање“, неформални дедуктивни ниво - „математичко геометријско размишљање“, аксиоматски дедуктивни ниво - „логичко математичко мишљење“ и структурни ниво (према Lee и др, 2015:11). Тиме је истакнута природа апстракције визуелног и просторног искуства, која резултира генерализацијом особина и односа и форми теоријских објеката, који се могу ментално обрађивати у различите сврхе као што је расуђивање и решавање проблема. Један од начина да се премости просторно размишљање и геометријско расуђивање је повезивање емпиријског и математичког аспекта геометријских слика, што се може постићи у динамичном геометријском окружењу, у коме слике имају двоструку улогу: као посебан цртеж и као репрезентација потенцијално неограничене, али (због своје динамичне природе) ипак повезане конфигурације. Дакле, цртеж може бити статичан и посебан, али се може посматрати и као динамична непрекидна конфигурација са тенденцијом преласка из емпиријског у математичко подручје. Како разумевање геометријских појмова произилази из расуђивања о инваријантности (Lee и др, 2015), од кључног значаја за развој концептуалног знања је да ученици, док се баве конкретним објектима (сликама) у динамичном окружењу, идентификују, а затим генерализују инваријантне геометријске особине. На пример, посматрајући цртеж као један модел квадрата који континуирано мења величину, чувајући при том свој идентитет, долазе до изражаја његове инваријантне особине помоћу којих је дефинисан (у поглављу 4.2.1. пример 6). Дакле, динамично окружење не подржава само издвајање података из појединачних фигура, већ одражава инваријантност геометријских особина приликом мењања услова и доприноси постепеној промени значења података у уопштене описе, који могу да се користе у математичком расуђивању. Визуелним представљањем геометријских инваријантности у динамичном геометријском окружењу, у коме геометријске особине ученици доживљавају као резултат сопствене перцепције, ученицима се може омогућити нови образац расуђивања, који одступа од традиционалног дедуктивог начина размишљања у статичном окружењу. Описи геометријских објеката у динамичном окружењу су просторно-нумеричке природе, јер је сваки податак (нпр, уређени пар у табели) нумеричка репрезентација одређеног геометријског објекта из низа. Самим тим и задаци из оквира динамичног геометријског окружења су просторно-нумеричког карактера, јер поред просторног расуђивања пружају могућност и за квантитативну анализу, која подразумева нумеричке информације о промени фигуре. Формирање геометријских модела динамичне природе од ученика захтева истовремено две когнитивне активности, које су епистемолошка суштина динамичног окружења: с једне стране, формирање геометријског модела и индуктивно расуђивање могу довести до формирања појма, док с друге стране, ученик формира геометријски модел са предвиђеном геометријском структуром, која репрезентује математички појам. Начин на који доживљава геометријске моделе одређује и врсту знања које ученик стиче путем њих (Leung & Lee, 2013), а на који начин ће доживљавати геометријска својства зависи од тога које делове фигуре и које њихове односе може разликовати и фокусирати се на њих истовремено. Док геометријски модели статичне природе само илуструју геометријска својства, модели динамичне природе демонстрирају, не само особине, већ и појављивање и нестајање одређених особина у зависности од трансформације појединих делова фигуре. То је разлог што се задаци истраживачке природе решавају у динамичном геометријском окружењу. Дакле, модели статичне, односно динамичне природе омогућавају препознавање релација посматрањем конкретних објеката, односно генерализацијом преко појединачних примера.

Централно месту у разматрању услова учења и доношењу одлука у наставном процесу су нацрти, које су формулисали Marton и Tsui (2004): 1) учење се може посматрати као промена у квалитативно различитом начину посматрања и доживљавања предмета изучавања, 2) различити начини доживљаја произилазе из расуђивања о кључним аспектима предмета изучавања, 3) у наставном процесу може да се омогући ученицима да разматрају моделе варијација и инваријантности, што је неопходно за учење. Како су у основи динамичне геометрије варијације, учење у динамичном окружењу може се схватити као разматрање и повезивање различитих променљивих аспеката онога што се учи. Ослањајући се на чињеницу да „без варијација нема расуђивања”[9] (Bowden & Marton, 1998:7), у овом раду су примењене варијације особина геометријских фигура (дужина страница, површина) у различитим фазама истраживања подстичући, при том, различите обрасце варијација: 1) генерализација – препознавање различитих примера као варијација у једном аспекту (у 4.2.1. у примерима 6, 7 приказана је генерализација зависноти обима квадрата од дужине странице и генерализација броја одређених елемената фигуре у зависности од промене броја других елемената исте фигуре; у 4.2.2. у примеру 13 генерализован је алгебарски приказ три узастопна парна броја), 2) контраст – разликовање примера и контрапримера (у 4.2.1. у примеру 8 геометријским приказом промене површине правоугаоника илустрован је однос између броја дана (1,2,3,...,n,...,30) и површине језера ($1/2^{29}$, $1/2^{28}$,...,$1/2^{30-n}$,…,1), који се супротставља линеарним односима изложеним у примерима 1-7 у истом поглављу) и 3) фузија – фокусирање на више аспеката истовремено (у 6. пример 1) и 4) сепарација – разликовање једног аспекта од осталих (у 5.1. пример 1).

Разумевање геометрије захтева свест о инваријантности у динамичном геометријском окружењу, јер „геометрија се заснива на променљивости и непроменљивости, иако изгледа да се бави теоремама” (Sinclair et al, 2012a, цитирано у Lee и др, 2015:8). Чињеница да „можемо да препознамо само оно што доживимо да варира” (Marton & Tsui, 2004:20) указује на то да

---

[9] Код кинеских наставника математике „учење са варијацијама“ сматра се ефикасном и установљеном наставном стратегијом (Jones & Herbst, 2012, цитирано у Lee и др, 2015:24)

препознавање особина не подразумева једноставно уочавање, него и свест о могућим варијацијама делова објекта (којим је илустрован појам или општост) и односа међу деловима. Поред тога, имајући у виду да је „перцепција (је) начин размишљања о свету“ (Noë, 2004:189), може се закључити да визуелна природа динамичног геометријског окружења омогућава ученику да својом геометријском перцепцијом, као начином размишљања о односима између облика и простора преко доживљаја варијација визуелних података, открије инваријантну структуру геометријске фигуре, а самим тим и кључне карактеристике које дефинишу или генерализују појаву репрезентовану у геометријском окружењу. Перцепцијом низа дозвољених промена, где се фигуре не посматају као непроменљиве целине, већ као синтеза могућих особина, омогућава се идентификација особина у смислу уопштеног описа. На пример, ученик може да закључи да се прави унутрашњи углови (као особина правоугаоника) могу одржати варирањем страница по дужини. Испитивањем могућих варијација страница развија се свест о распону дозвољених промена, тј. о препознавању и очувању кључних особина, којим је дефинисан појам. Другим речима, промене у дужини страница могу указати на остале скривене варијабле, тј. на промене у величини углова, а самим тим и на егзистенцију или нестанак појединих особина правоугаоника. Чињеницу да ученици могу „видети” да се особине не „јављају” паралелно, већ да једна особина може бити последица друге, Tall (2013) сматра кључном одликом „структуралне апстракције” (Lee и др, 2015:182). Ову врсту активности подржава динамично геометријско окружење. Променљивост, као „математички сарадник” (Laborde и др, 2006:286) динамичних фигура, пружа могућност за стварање и повезивање низа примера, који се односе на откривање битних и небитних особина.

Успостављањем односа између делова једне фигуре или између фигура као целина, ученици откривају одговарајуће геометријске особине и односе међу особинама. Особине постају објекти размишљања, те разматрањем да ли ће се одређена особина увек (понекад или никад) појавити приликом трансформације или изградње друге геометријске фигуре ученик откривене особине генерализује и инкапсулира у добро познате теореме. (Sinclair et al, 2012a, према Lee и др, 2015:8). Слично, Mason (2003) истиче да успостављање односа захтева три компоненте: два „објекта” и одређени квалитет који их повезује, а покушавањем да се схвати геометријска ситуација (циљ активности) односи постају особине које поседују одређени парови делова, а када се одвоје од појединачног примера на путу су да постану дефиниције или аксиоме, што је суштина математичке структуре. Праћењем овог пута генерализације у процесу учења обезбеђује се да математичко расуђивање буде засновано на претходно оправданим тврђењима. Због тога су задаци у овом раду формулисани на такав начин да се решавају путем формирања и трансформација геометријских фигура, које ученицима пружају доживљај променљивости и инваријантности. Визуелна основа геометријских модела може да обезбеди перцептивни приступ и алгебарским садржајима. Дакле, улога геометријских модела у овом раду није ограничена на демонстрацију и визуелизацију геометријских садржаја, већ је проширена на репрезентацију алгебарских објеката и односа. Како дуална статично-динамична перцепција симболичких израза ствара препреку у учењу алгебре, потребно је пронаћи приступ који омогућава да алгебарски изрази буду резултат природног напредовања од аритметике до алгебре, чиме ће се истовремено спречити статично-динамично неслагање алгебре и аритметике. Геометрија може допринети настави алгебре преко низа геометријских метода, које имају улогу посрденика у прелазу из аритметике на алгебру. Динамична концепција израза може се постићи у динамичном геометријском окружењу, у коме се увођење општих алгебарских израза заснива на динамичној перцепцији величина и односа између њих. Наиме, у окружењу динамичне геометријске структуре може се изградити стуктура алгебарских објеката. На пример, полазећи од дужи, ученици могу проћи кроз богат процес стварања, проширивања и модификовања примера, што омогућава не само структурну изградњу знања, већ и одсликава знање ученика о математичкој ситуацији. Оно што је битно је да пажња није усмерена само на појединачне примере, већ на низ повезаних примера у којима особине објеката варирају (или се одржавају) самостално или са једном или више особина, чиме је омогућено да се истраже различите врсте односа, при чему је основна идеја да примери са имплицитно повезаним особинама не буду засновани на дефиницијама и правилима (у 5.1. пример 2). Пружајући геометријски приступ читавој класи повезаних појмова, истиче се не само фигуративна, већ и стваралачка природа геометријских модела, који обезбеђују путању прогресивне формализације.

Савремене образовне реформе (NCTM, 1989,1991,1995,1998) подржавају интердисциплинарни приступ у настави математике, где основу интеграције чине процеси истраживања и решавања проблема, који подразумевају „укључивање ученика у активности” (Bybee и др,1997:328). Ученици учење посматрају као решавање проблема у циљу стицања нових знања. Они откривају односе из којих могу произаћи нове идеје и примењују стечено знање у потрази за новим везама, јер „да би се идеја разумела, она мора бити повезана са другим идејама“ (Carpenter & Lehrer, 1999:23). Такође, у NCTM (2000) се истиче да у настави математике треба омогућити ученицима да: препознају и користе везе између математичких идеја; разумеју како се математичке идеје повезују и изградњом једне помоћу друге стварају кохерентну целину; препознају и примењују математику у контексту изван математике. С обзиром на то да повезивање математичких идеја подразумева: 1) израду веза унутар и између математичких области, 2) интеграцију информација, 3) примену одговарајућих математичких способности потребних за решавање нестандардних проблема (Shafer & Romberg,1999), везе између математичких идеја ученици формирају тако што користе постојећа знања у светлу нових информација и ситуација и том приликом граде односе између нових идеја и постојећих знања. Сличан став заступа и Huntley (2000), који тврди да повезане математичке идеје, које су уграђене у проблем, воде изградњи низа повезаних репрезентација, које омогућавају ефикаснију примену знања од оног које је стечено углавном у симболичкој форми. Ако ученици до идеја долазе кроз истраживање, тј. решавање проблема, они испитивањем односа међу подацима проналазе начине да односе у стуктури проблема изразе користећи различите репрезентације. На пример, табеларним[10] приказивањем података о дужини странице и обиму квадрата, ученици представљају одређене аспекте проблемске ситуације и откривајући линеаран однос између дужине странице и обима усмеравају се на разумевање линеарне зависности, а у осмом разреду ће научити израз који карактерише општи случај. Користећи идеје, развијене на овом примеру, ученици могу да истражују различите контекстуалне проблеме засноване на линеарној зависности две варијабле. Како се појам линеарне зависности „провлачи“ кроз све разреде, фокусирајући се на алгебарске идеје ученици их могу повезати у једну целину, која представља истраживачку базу за даље

---

[10] Улога табеларне репрезентације у аритметици и алгебри се разликује. У аритметици се табела посматра као средство, које пружа подршку у рачунању и структурном приказивању информација. У алгебри се табела користи за решавање проблема, као што је препознавање односа и њихово уопштено описивање преко образаца.

расуђивање. Такође, решавање проблемских ситуација подразумева не само примену знања и формирање репрезентација, већ и способност интуитивног и индуктивног расуђивања у процесу извођења и откривања образаца и правила, који се могу користити у решавању проблема, као и способност изградње претпоставки, на основу којих се изводи логичко закључивање, што су, уједно, и препоруке NCTM (2000). Дакле, значајну улогу у проучавању образаца има индуктивно закључивање, које се заснива на уопштавању инваријантних односа у коначном узорку конкретних случајева (у 4.2.2. пример 13). Формирањем образаца путем индукције ученици развијају осећај значаја доказивања одређеног тврђења. Наиме, NCTM (2000) препоручује да у математичком образовању треба омогућити свим ученицима још од предшколског узраста да препознају образложење и доказе, као основне аспекте математике, као и да дају и испитују математичке претпоставке. Sowder и Harel (1998), тим поводом, сматрају да је одлагање математичког расуђивања до 12. године и очекивање да у том тренутку ученици буду у могућности да расуђују о сложеним проблемима неразумно очекивање, чиме истичу значај доказивања више са образовног него са математичког аспекта.

Како се у NCTM (2000), такође, истиче да у настави математике треба омогућити ученицима да користе језик математике за прецизно изражавање математичких идеја, ученике треба ангажовати и у решавању проблема, који омогућавају развој математичке писмености. То подразумева развој способности читања и интерпретације података приказаних у домену садржаја (проблемске ситуације) и њихово приказивање помоћу разних репрезентација у циљу проналажења одговора на питање, које је подстакло разматрање података (поглавље 6.). Ученици треба да буду у могућности да упореде карактеристике података и да, на основу тога, извуку закључке, што се постиже интеграцијом геометријских и алгебарских метода, која омогућава развој способности превазилажења синтаксних и семантичких препрека у преласку са алгебре на геометрију и обрнуто.

С обзиром на то да настава, која не указује на различите начине размишљања, „није подесна за савремени свет” (Lamon, 2003:436), у овом раду је предложено ангажовање ученика у решавању отворених задатака, јер дају више информација о могућностима и концептуалном разумевању ученика, него (затворени) задаци од којих се очекују незнатне варијације у ученичким одговорима (поглавље 5.2.). Решавање проблема треба да буде процес у коме ученик има могућност да користи различите поступке решавања. Истицање нестандардног решавања проблема, као кључне компоненте математике, утиче на развој креативног талента ученика (Chamberlin & Moon,2005).

Како процену знања ученика треба посматрати као процес, који је интегрисан са наставом, неопходно је обезбедити методе које пружају информације о знању и развоју когнитивних способности ученика у погледу математичког образовања. Према Mullis и сарадницима (2009), под когнитивним способностима ученика подразумева се: 1) познавање чињеница, појмова и процедура (познавање својстава бројева и геометријских објеката, препознавање математички еквивалентних објеката, познавање рачунских процедура на скупу природних бројева, читање података из табеларних и других приказа, коришћење мерних инструмената, класификација објеката, облика, бројева и израза према заједничким својствима), 2) примена, која се односи на способности ученика да примене знања и концептуално разумевање за решавање проблема или за одговарање на питања (избор одговарајуће познате процедуре (ако постоји) за решавање проблема, приказивање математичких информација употребом разних репрезентација, моделовање, решавање познатих стандардних проблема), 3) расуђивање, које превазилази решавање рутинских проблема и односи се на решавање непознатих и сложених проблемских ситуација у различитим контекстима (анализа - одређивање, опис или употреба веза између варијабли или објеката у математичким ситуацијама и извођење ваљаног закључка из датих информација; генерализација – проширивање домена уочених односа путем решавања проблема и уопштавања нађених резултата; интеграција - повезивање различитих елемената знања, повезивање репрезентација, повезивање математичких појмова; образложење – позивање на познате математичке резултате или својства; решавање проблемских ситуација). Процена наведених знања и способности, предложена у овом раду, заснива се на информацијама из писаних радова ученика, организованих у облику материјала намењеног за полупрограмирану наставу, који захтева ангажовање перцептивних, мисаоних и акционих способности (поглавље 5.1.).

4. Средства за повезивање садржаја

Ова студија се заснива на теоријској претпоставци Скемпа (1987) да математичке везе, укључујући везе између различитих математичких појмова, њихових особина и представа, чине суштински део математичког разумевања. Далингер (1997:7) сматра да се реализација унутарпредметних веза не може одвијати „сама по себи“, већ захтева посебну организацију како наставног материјала, тако и самог процеса наставе усмерене на успостављање ових веза. У том смислу, овде ће бите разматране активности у оквирима постојећег наставног плана и програма. Другим речима, биће истакнут непосредан, методски осмишљен, рад са ученицима, који је у домену рада наставничког кадра.

Садржај наставних уџбеника математике указује на чињеницу да су садржаји у основној школи повезани на нивоу сродних тема проучавања, али није довољно заступљена повезаност садржаја између различитих дисциплина, као што су алгебра и геометрија. У настави математике значење појмова из области алгебре (израз, једнакост, неједнакост, једначина, неједначина, формула) открива се на одређеном нивоу и повезано је са изучавањем аритметике. У наставним уџбеницима алгебарски садржаји углавном су приказани у контексту броја, као генерализација бројевних прорачуна и превођење израза са вербалног на нумерички језик. Да ученици алгебарска знања не би доживљавали као манипулације симболима путем трансформације израза или решавањем једначина, уз познавање правила фокусираних на одређене стратегије за поједине врсте проблема, неопходно је да нагласак буде на структури израде задатака, а не на резултату рачунања. У процесу учења путем истраживања података, Lehrer (2007) истиче улогу стуктуре података и избора модела[11], који наглашава аспекте структуре. Ученицима је потребно пружити модел по коме ће математику учити са разумевањем, а то није само

---

[11] Модели су концептуални системи који се углавном изражавају употребом различитих интеракција репрезентативних средстава, као што су: писани симболи, говорни језик, дијаграми, графици или метафоре и користе се за изградњу, описивање или тумачење других система (Lesh and Harel,2003:158). Модели су „системи елемената, операција, односа и правила, који се могу користити за описивање, објашњавање или уочавање карактеристика неког другог познатог система“ (Doerr and English, 2003:112).

пука вештина решавања задатака, већ модел изучавања математике по угледу на старе Грке и Египћане, који омогућава опажање и уочавање.

У овом раду, методе повезивања наставних садржаја биће илустроване на примерима математичких задатака, јер је у методском приступу успостављања веза између алгебарских и геометријских садржаја акценат дат на изради задатака. Разлог за успостављање веза кроз израду задатака је тврђење методичара С.И.Шохор-Троцког (1853-1923), који наводи да је у настави математике неопходно применити „методу сврсисходних задатака“ (Крючкова, 2006:8), када математички садржаји и одређени поступци произилазе у току решавања специјално одабраних задатака (учење кроз задатке). У том смислу, математички задаци нису само циљ, већ и средство наставе. Други разлог је чињеница да је форма, изглед и тематика једног математичког проблема такорећи једини простор у оквиру кога се методика развија и мења у правцу савремених математичких захтева.

Имајућу у виду претходну констатацију и чињеницу да су предмет повезивања алгебарски и геометријски садржаји, задатак наставника је да се ангажује у изради веза и педагошких стратегија за подршку веза, тј. да одреди садржаје које ће ученици моћи да повежу кроз одговарајуће задатке и обрнуто, да одабере задатке, који ће имати функцију повезивања наставних садржаја из различитих области. Дакле, димензије својеврсног поља, у оквиру кога ученик обавља своје активности, одређује наставник на релацији наставни садржаји-представе-процедуре. У складу са наведеним, у овом раду су понуђени предлози у погледу начина на који наставници могу да изврше овај задатак у припреми ученика за успостављање и коришћење веза.

Методика рада, усмерена на повезивању наставних садржаја, заснована је на идеји Coxford (House & Coxford,1995), који истиче да постоје три аспекта повезаности садржаја: теме које се повезују, математички процеси и математички конектори (везе). Циљ је да се прошири ограничено поимање излагања алгебре и геометрије и интегришу објекти и продукти математичког расуђивања: језички елементи, концепти, својства, поступци и докази. Другим речима, у настави математике треба да се „бришу извесна вештачка раздвајања између неких тема у алгебри, геометрији и анализи података тако што ученици користе идеје из једне области математике да боље разумеју другу област математике“ (NCTM, 2000:26). У курикулуму NCTM (1989:161) наводи се да

„међусобни утицај геометрије и алгебре јача способност ученика да формулише и анализира проблемске ситуације унутар математике и ван ње”.

4.1. Геометријско и алгебарско моделовање

Према речима Hodgson (House & Coxford, 1995) настава треба да се фокусира на повезивање применом различитих представа. На пример, математичко моделовање[12] захтева од ученика да путем вербалних описа испитају проблемске ситуације, идентификују релевантне променљиве проблема и графички их приказују, идентификују алгебарске односе на визуелном приказу и интерпретирају резултате у односу на оригинални проблем. Дакле, активности моделовања усмеравају ученике да, између осталог, конструишу визуелне представе нумеричких израза, алгебарске представе визуелних приказа и контекстуалне интерпретације алгебарских или нумеричких израза.

Један од математичких поступака који је препоручен од стране Завода за унапређивање васпитања и образовања је да се изучавање геометријског градива повезује са другим садржајима наставе математике, да се користе геометријске фигуре у процесу формирања појма броја и операција с бројевима; и обратно, да се користе бројеви за изучавање својства геометријских фигура, као и да се задаци решавају „уз употребу дијаграма, схема и других средстава приказивања” (Наставни програм за четврти разред основног образовања и васпитања, 2012:103). Ови захтеви указују на неопходност повезивања алгебре и геометрије на два начина. Прво, веза између алгебарских и геометријских садржаја омогућава да се знања из алгебре користе за разумевање садржаја из геометрије и обрнуто. Друго, знања из алгебре и геометрије омогућавају ученицима да успостављају везе између нумеричког, геометријског, вербалног и симболичког домена математичких активности. Повезивање садржаја тесно је повезано са изградњом математичких модела и превођењем података из једног модела на други. Моделовање треба разматрати експлицитно, тј. треба да постоји циљ стварања модела. Објекат, који представља модел оригинала, формира се у циљу трансформације стечених знања и њихове примене у новој

---

[12] Моделовање је процес стварања концептуалних модела.

ситуацији за решавање постављеног проблема. Моделовање подстиче откривање својстава једног математичког објекта на основу својстава другог математичког објекта. Геометријски модели алгебарских законитости математику чине очигледном и разумљивом за млађе ученике.

Важна карактеристика математичког моделовања, коју ученици треба да схвате, је чињеница да се један математички модел (нпр, модел дужи, правоугаоника), као производ процеса моделовања, може поново користити за ситуације са сличним структурама, али у различитим контекстима. Дакле, формирани модел не односи се само на одређену ситуацију, већ мора бити употребљив у сличним ситуацијама. Другим речима, математичко моделовање указује на повезаност математичких садржаја.

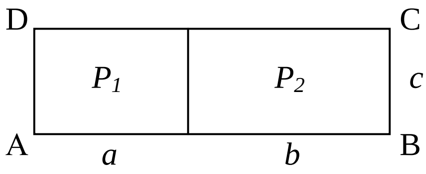
У настави усмереној ка реализацији веза између алгебре и геометрије, као и приликом формирања математичких задатака у ту сврху, поставља се питање: шта је полазна тачка за израду веза? Да ли ће се везе градити у смеру од геометрије ка алгебри или обрнуто зависи од структуре задатка. Дакле, у појединим ситуацијама геометријски модел се може посматрати као средство за изучавање алгебарских образаца[13], а у неким другим геометријски концепт је производ процеса алгебарског моделовања.

Један од разлога стављања акцента на повезивање геометрије и алгебре је препознавање улоге, коју геометријско размишљање има у математици, као и унапређење наставе математике кроз проналажење начина изградње просторне интуиције и просторне перцепције код ученика. Анализом школских уџбеника закључујемо да су визуелне представе широко распрострањене у настави математике у различитим темама и наставним методама. Међутим, перцептивни концепти имају више психолошку, него сазнајну вредност. Визуелне слике у контексту перцепције, које су илустрације дефиниција или дају опис проблемских ситуација, само помажу у разумевању, али не доприносе откривању сазнања. Визуелна слика нема значај, ако се не даје са намером да прикаже особине онога што представља. Међутим, геометријске представе не нарушавају сазнајне вредности и омогућавају поуздан и прихватљив метод

---

[13] Под математичким обрасцем подразумева се предвидива правилност, која се најчешће односи на нумеричке, просторне и логичке односе (Mulligan & Mitchelmore, 2009:34).Другим речима, математички образац је одређен својом структуром, која се најчешће испољава у облику генерализације - нумеричког, просторног или логичког односа, који је увек тачан у одређеном домену (исто).

стицања математичких знања. Ако моделе геометријских објеката посматрамо као епистемолошке објекте, онда је геометријски приступ доказивања комутативности, асоцијативности, дистрибутивности и других особина рачунских операција оправдан са аспекта дидактичког принципа научности. О „доказу без речи“ говорили су Alsina и Nelsen (2006). На полеђини своје књиге *Math Made Visual* (2006) Alsina и Nelsen пишу: „Да ли се могу осмислити математички цртежи који ће помоћи да разумемо математичке идеје, доказе и аргументе? Аутори ове књиге су убеђени да је одговор потврдан и предмет ове књиге је да покаже како визуелне технике и слике имају и математичку и педагошку вредност“, одакле се може закључити да језичка структура одражава скривену геометријску структуру. У том смислу, на пример, користећи геометријски модел производа, може се доказати дистрибутивни закон множења према сабирању.



Слика 1

Користећи својство површине (да је површина фигуре једнака збиру површина њених делова), следи да је $P=P_1+P_2$, односно $P=ac+bc$ (слика 1). С друге стране, како су странице правоугаоника *ABCD* дужина $a+b$ и c, следи да је $P=(a+b)c$. Из једнакости $P=ac+bc$ и $P=(a+b)c$, (на основу својства транзитивности релације „=“) следи да је $(a+b)c= ab+bc$, што представља модел дистрибутивног закона множења према сабирању. За напредније ученике можемо направити корак даље и (на основу својства симетричности) написати једнакост $ac+bc=(a+b)c$, чиме је представљено растављање збира $ac+bc$ на производ (простих чинилаца).

Формирање модела темељи се на анализи и разумевању односа који су садржани у структури задатка. Како сматра Chevallard (1997:54), „све математичке активности су у суштини саме по себи активности моделовања“. Дакле, моделовање (приказ односа у знаковно-симболичкој форми), трансформације модела и примена тог општег начина на решавање задатака су предуслов стицања знања и основа за развој теоријског мишљења ученика. Математичко моделовање није ограничено само на „математизирање“ нематематичких проблема. Унутарматематичко моделовање је суштински и неодвојиви аспект математике, средство реализације математичких веза. Алгебарско моделовање геометрије, односно геометријско представљање алгебарских и аритметичких израза су примери унутарматематичког моделовања. У општим категоријама као што су: формуле за израчунавање површине, запремине и сл, алгебарски докази геометријских теорема, график и др, ученици користе алгебру да нађу одговор на геометријски проблем или користе геометрију као темељ за решавање проблема алгебре и често су у дилеми шта је модел, а шта оригинал. Наиме, „релација ‚бити модел' је релација еквиваленције", тј. ако је *А* модел објекта *В*, онда је *В* модел објекта *А* (Подходова, 2011:34). Који ћемо објекат сматрати моделом у одређеној активности зависи од смера преноса података са једног објекта на други. Дакле, у основи моделовања је пренос својстава геометријских објеката и односа међу њима на алгебарске објекте и обрнуто, што доприноси процесу успостављања веза између алгебре и геометрије. Најједноставнији вид преноса својстава са геометријског објекта на алгебарски језик је мерење дужи[14] (упоређивање дужине дужи са јединицом мере), при чему се дужина дужи, као њено својство, приказује мерним бројем и јединицом мере.

Под појмом модел ученици често подразумевају замену објекта знаком или симболом, а не приказ односа у објекту. Често се сматра да цртеж има помоћну улогу у прелазу ка симболичним формама – формулама. То је због тога што форме модела, као што су цртежи и слике, указују на структуру и карактеристике објекта, на међусобне односе његових елемената, који преласком на алгебарски језик, тј. у модел облика формуле, најчешће указују на одређену активност над објектом. У том смислу, Skemp (1976) разликује два типа математичког разумевања: релационо и инструментално, која су овде од пресудног значаја. Релационо разумевање подразумева разумевање особина објеката, релација и операција, које је неопходно за успостављање веза између различитих математичких појмова и повезивање математичких идеја, а са циљем примене познатих појмова и процедура у новим ситуацијама, тј подразумева способности давања одговора на питања, као што су: „Како треба приступити проблему?", „Зашто би требало то урадити?". Инструментално разумевање је неопходно у примени одређених процедура за решавање проблема, тј. омогућава давање одговора на питање: „Који поступак треба

---

[14] Мерењем се успоставља веза између дужи и бројева, тј. између геометрије и алгебре. Веза између бројева и дужи је, уствари, одређена функција, код које је домен скуп дужи, а кодомен скуп бројева. Дакле, елементи домена и кодомена нису истородне величине (слично односу између пута и времена, силе и масе и сл.). Операција, којом се успоставља придруживање елемената међу овим скуповима, је мерење

користити за решавање проблема?“, без неопходног знања одговора на претходна два питања. У овом смислу, Smith (2008), такође, уочава два различита типа размишљања. Употребу система симбола за уопштавање довео је у везу са „репрезентативним начином размишљања“, а манипулације са симболима повезао са „симболичким начином размишљања“ (Smith,2008:133). „Репрезентација је најчешће знак или конфигурација знакова, карактера или објеката..., а ствар коју представља може да варира у зависности од контекста или употребе репрезентације“(Goldin & Shteingold, 2001:3). Goldin и Shteingold (2001) истичу да треба разликовати спољни систем репрезентације (нпр, цифре, алгебарски и геометријски модели) од унутрашњег (психолошког) репрезентативног система појединца (нпр, вербални систем, имагинарни систем).

У зависности од језика моделовања, сваки модел испољава карактеристике система у коме је описан (цртежи имају геометријски карактер, а формуле алгебарски). Сликовити модел се ослања на очигледне представе и, по својој форми, приказује природу објекта, док симболички приказ настаје мисаоним преображавањем објекта и самим тим излази из оквира чулних представа. Повезивање геометријских и алгебарских објеката може се остварити у процесу решавања проблема стварањем „ланца“ веза. Наиме, реални објекти се приказују геометријским објектима (први приказ), геометријски објекти се приказују геометријским сликама (други приказ), а геометријске слике записима у којима се користе симболи и бројеви за приказивање односа (трећи приказ), који наговештавају стварање новог, алгебарског, објекта. Овде је битно да ученици разумеју смену у којој средства „означавања“ постају предмети „означавања“, чиме се омогућава процес повезивања. Овај начин успостављања веза у сваком тренутку даје могућност „враћања“ на претходни приказ (ознаку). Имајући у виду да у ланцу веза свака нова ознака представља истовремено и све претходне ознаке (Presmeg, 2006), (тј. свака претходна је „уклопљена“ у наредну) у овом случају алгебарским објектима означене (представљене) су и геометријске слике, као и оно што оне представљају, тј. геометријски објекти, односно реални објекти. Модел „ланца“ није најбоља метафора за овај модел везивања, јер карике у ланцу не испољавају ово „уклапање“. Овај модел везивања Presmeg (2006:171) је упоредила са „руским уклопљеним луткама“. У таквом моделу повезивања сваки нови објекат у низу указује на „цикличну природу дијалектичког процеса у који је укључен“ (исто, 171).

Насупрот спољним репрезентативним системима, унутрашњи (интерни) системи представљају личну симболичку творевину ученика и давање значења математичким симболима, као и визуелну и просторну когнитивну конфигурацију („менталне слике“) и решавање проблема (Goldin & Shteingold, 2001). Самим тим, интерна репрезентација одсликава концептуално разумевање појединца. Од суштинског значаја за наставу математике је интеракција између интерне и екстерне репрезентације, која омогућава синтезу активности из оквира бихевиористичке и конструктивистичке психолошке школе[15] (Goldin & Shteingold, 2001). Према томе, један од основних циљева наставе треба да буде развој унутрашњег система репрезентације код ученика, који је у кореспонденцији и интеракцији са (спољним) конвенционално установљеним структурним системом математике. Повезивање математичких структура Halford (1988, 1992, према Boulton-Lewis, 1998:220) је идентификовао са „пресликавањем“ једне структуре на другу, што је описао у оквиру четири нивоа:

1) елементарно пресликавање, где се појединачни елементи једне структуре (на пример објекти или догађаји) пресликавају у појединачне елементе друге структуре (на пример у слике или речи) на основу сличности или договора

2) релацијско пресликавање, где се два елемента и однос између њих пресликавају из једне структуре на другу (нпр, однос између два неједнака скупа предмета пресликава се у однос „>” између бројева, репрезентован речима или симболима)

3) системско пресликавање, где се три елемента и односи међу њима пресликавају у другу структуру (нпр, унарна операција над скуповима може се пресликати у операцију сабирања над бројевима)

---

[15] Психолошка школа бихевиоризма, која је била утицајна током 1950-их и1960-их, процес учења приказује кроз спољашње, видљиве структуриране ситуације и одговоре, који подстичу жељене облике понашања, где је акценат на стицању вештина, правила и алгоритама. (Skinner 1953, 1974, цитирано у Goldin & Shteingold, 2001:7). Бихевиоризам оспорава идеје развојне психологије и когнитивне науке, у оквиру којих се током 1980-их издваја конструктивистичка школа, која знање посматра као конструкцију субјективног света појединца (исто). Док бихевиористи истичу значај основних математичких вештина и тачних одговора путем исправног начина расуђивања, а постигнуће ученика процењују путем објективних тестова, конструктивисти вреднују дечија сопствена открића путем задатака отвореног типа (који могу да имају више од једног одговора) и различитих дечијих концептуализација и тумачења (исто).

4) вишесистемско пресликавање

Према речима Halford (1988, 1992,), дете на узрасту од пет година па надаље треба да буде у могућности да спознаје математичке појмове на нивоу „системског пресликавања”.

Основа повезивања знања су управо знања о унутрашњим, суштинским односима и својствима. Како су везе између цртежа и симболичког приказа апстрактне, неопходно је укључити ученике у активности које захтевају да се оне конструишу у уму ученика и, када се укаже потреба, да се преузимају из меморије и примењују на решавање проблема. Те активности могу бити засноване на изради задатака у чијем су контексту алгебарски и геометријски садржаји и чије је решавање засновано на принципима математичког моделовања. Упоређивањем и повезивањем форми модела, кроз решавање задатака различитим стратегијама, својства објекта преводе се на симболички језик и обрнуто, значење симболичког приказа „враћа“ се на својство објекта. Овде долази до изражаја један важан аспект репрезентације, а то је њена двосмерна природа. На пример, у зависности од контекста, правоугаоник може да буде геометријски приказ операције множења, односно алгебарски израз $a \cdot b$ може да буде симболички приказ површине правоугаоника страница a и b. У овим поступцима рада употреба термина и симбола не нарушава структуру оригиналног објекта. Симболи имају улогу да премосте раскорак између оригинала и његовог модела и очувају неопходну структуру оригиналног објекта и његово значење. Cobb (2000), Sfard (2000) и D¨orfler (2000) истичу да су симболи од великог значаја за изградњу веза у математици. У терминологији Charles S. Peirce (1992) симболи су знакови и означавју активност – радњу или процес (према Colapietro,1993:178). Следећи тај став, Colapietro закључује да семиотика - „наука о знаковима“ има директан утицај на наставу и учење математике (Colapietro, 1993:179).

Проблеми, чије је решавање засновано на принципима геометријског и алгебарског моделовања, омогућавају да алгебра има функционалну форму (где је акценат алгебре на односима), насупрот активностима које јој дају формални карактер. Како је Usiskin (1988:18) описао алгебру као „средство којим се описују и анализирају односи“, својства геометријских објеката могу се истраживати преко основних принципа релација. Приказивање односа услова и захтева геометријског задатка алгебарским изразом (моделом), који се може тумачити као „формула“ и фокусирање на везе пре манипулације симболима, омогућава ученицима да схвате значење симбола. Интеракција између симбола и њиховог значења указује на потребу комбинованог развоја симболизације и расуђивања. Како симболи добијају своје значење њиховом применом у решавању проблемских ситуација (Freudenthal, 1983; Sfard, 2000, према Amerom, 2002:291), они могу имати значење непознате (чију вредност треба одредити) или променљиве величине, у зависности од тога да ли се у даљем решавању проблема захтева решавање једначине или испитивање функционалне зависности међу елементима. Дакле, значење алгебарских симбола зависи од врсте математичких активности. У процесу генерализације, у коме је нагласак на општим бројевима и истраживању структуираних ситуација, симболи означавају уопштене бројеве. У процесу решавање проблема, у коме је нагласак на непознатим величинама и примени једначина као стратегије за решавање проблема, симболи означавају величине, које треба одредити. У функционалним приступима, у којима је нагласак на променљивој величини и примени алгебарских образаца у описивању односа између променљивих, симболима се означавају променљиве величине. Наведене активности у настави алгебре нису узајамно искључиве и могу се приказати у геометријском контексту (од примера 1 на 53. стр. до примера 17 на 77. стр).

„Промене значења кроз која пролазе симболи, треба да се посматрају и упознају врло пажљиво током процеса учења. На овај начин развија се ниво дечијег математичких размишљања“ (Streefland, 1995:36). Један од оперативних задатака прописаних од стране Завода за унапређивање васпитања и образовања је да ученици четвртог разреда треба да „умеју да читају и записују помоћу слова основна својства рачунских операција“. Наведена изјава односи се на алгебарску компоненту, која указује на повезаност симболичких форми и математичких ситуација и структура. Kaput (2000) сматра да се без симболичке алгебре не може развијати математика, као ни неквантитативна наука, према томе ни савремена технологија. Сличан став заступају Jupri и сарадници (2014), који истичу да је за алгебру од посебног значаја симболички осећај. Симболички осећај се односи на могућност давања значења математичким симболима, алгебарским изразима, формулама и једначинама. Jupri (исто) истиче две компненте симболичког осећаја (које се односе на одређене структуре): способност читања и манипулације алгебарским изразима у циљу разумевања проблема и способност схватања неопходности провере значења симбола током реализације поступка решавања једначина или за време провере резултата. Због тога је неопходно обезбедити да алгебарски садржаји ученицима буду доступни и да их изучавају са разумевањем. У том циљу, Kaput (2000) предлаже следеће:

- раније почети на делимичној изградњи неформалних знања ученика
- интегрисати учење алгебре са учењем других дисциплина (проширивањем и применом математичког знања)
- обухватити више различитих форми алгебарског размишљања (примењујући математичко знање)
- надоградити лингвистичке и когнитивне способности ученика
- подстицати активно учење и повезивање

Kaput (2000) истиче да наведени предлози подразумевају генерализацију (која захтева коришћење симболичког језика), као и моделовање геометријских и других ситуација (које се примењује од млађих разреда основне школе), те, грубо речено, укључују „инфузију“ алгебре од самог почетка школовања. Дакле, алгебарско размишљање у млађим разредима подразумева развој начина размишљања у оквиру активности у којима се користе словно-симболички алгебарски изрази као алати, као и у оквиру оних алгебарских активности у којима словно-симболички изрази немају улогу алата, а то су: анализа односа између величина, уочавање структуре, изучавање промена, уопштавање, решавање проблема, моделовање (Kieran, 2004). У процесу преласка са аритметичког на алгебарски начин размишљања Kieran (2004) предлаже да је неопходно да се ученици усмере на одређене активности, које омогућавају прилагођавање алгебарском начину размишљања: 1) нагласак на односима, а не само на израчунавању, 2) нагласак на инверзним операцијама, 3) нагласак не само на решавању, већ и на репрезентацији проблема, 4) нагласак не само на бројевима, већ и на словима (што обухвата: рад са симболима, који могу бити непозната или променљива; прихватање алгебарских израза као одговора;

уочавање еквивалентних израза на основу својстава, а не на основу нумеричке вредности), 5) нагласак на релацијском значењу знака једнакости.[16]

4.2. Релације

Како се развој алгебарског разумевања посматра не само са аспекта способности симболичких манипулација, већ и са аспекта алгебарског размишљања (расуђивање о односима између величина, генерализација, развој појма променљиве), неопходно је обезбедити активности које подстичу алгебарско размишљање путем: генерализације, решавања проблема, моделовања и функција (Amerom,2002). У том смислу NCTM предлаже активности усмерене на „разумевање образаца, односа и функција“, „решавање проблема из релацијске перспективе“ (NCTM, 2000:6) и „развој функционалних интерпретација“ (NCTM, 2000:3), јер „појам функције представља значајну обједињујућу идеју у математици“ (NCTM,1989:154). Изучавање функција[17] код ученика развија способност да препознају, представљају и решавају проблеме, који се односе на односе између квантитативних варијабли. Појам функције није званично уведен у програм за млађе разреде, али је препорука да се идеја функције развија на конкретном и интуитивном нивоу. Наиме, идеја функције први пут се уводи у контексту бројања. Операција бројања (додавања по један) доводи нас до функције (унарне операције) „додељивања непосредног следбеника“ – функције међу бесконачним скуповима (функција s: N→N, тзв. „следбеник“, јесте „1-1“ функција и није „на“). Функционално размишљање је неопходно за разматрање односа између две величине, који се могу приказати помоћу разних репрезентација (геометријских модела, табела, формула). Изучавање функција није део алгебре, али функционални поглед на изразе и једначине огледа се у начелима и стандардима за наставу математике објављеним од стране NCTM (2000), у којима се истиче да ученици од трећег до

---

[16] Наведени предлози прилагођавања алгебарском начину размишљања односе се на ону наставу математике која почиње са учењем рачунања и усмерена је ка генерализацији структура и односа (Cai и др,2005:12). Руски Наставни план и програм користи свих пет Киеранових предлога од самог почетка првог разреда и не постоји прелаз од аритметичког ка алгебарском размишљању, јер је алгебарско размишљање развијено од најранијих дана школовања, а аритметика се развија као конкретна примена алгебарских генерализација (исто).

[17] Један од кључних елемената проучавања алгебре је могућност да се за одређену функцију $f(x)$ одреди: 1)$f(x)$ за $x = a$; 2) x тако да је $f(x)=a$; 3) x тако да $f(x)$ има максималну или минималну вредност (Fey and Good,1985:48)

петог разреда треба да откривају и истражују алгебарске идеје кроз следеће активности: а) идентификација или изградња нумеричких и геометријских образаца; б) представљање образаца вербално, табелама или симболима; в) уочавање и примена односа између различитих величина; г) извођење и објашњење генерализације; д) примена графикона за описивање образаца; ђ) истраживање нумеричких особина; е) употреба алгебарског језика за приказивање обрасца, генерализације или ситуације. Развој идеје функције има значајну улогу у проучавању алгебре у погледу истраживања односа између величина, где се алгебарски симболи посматрају као променљиве (Usiskin,1988).

Како су сабирање и множење функције (бинарне операције), тј. $+ : \mathrm{N}\times\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$ и $\cdot : \mathrm{N}\times\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$, једна од препорука Завода за унапређивање образовања и васпитања је „потпуније сагледавање својстава рачунских операција и функционалне зависности резултата операције од њених компонената“. Аритметика нуди разне могућности за увод у алгебарске активности, као што су развој разумевања бројевних својстава, симболизација, генерализација и алгебарско расуђивање. На основу истраживања, Carraher, Schliemann и Brizuela (2003) закључили су да аритметичке операције ученици (9-10 година) могу да науче као функције пре самог рачунања са појединим бројевима (Schliemann, 2003) и на тај начин могу се усмерити да мисле на много дубљем нивоу од оног који је потребан за учење вештина рачунања и аритметичких процедура. Ако функционалну зависност алгебарских објеката уградимо у геометријски контекст, ученици ће лакше схватити значење алгебарских симбола, које је неопходно у развијању стратегије решавања једначина засноване на инверзном односу операција. Намена функционалног приступа је да се омогући разумевање улога променљивих у линеарним односима, тј. да промена једне променљиве (независне) утиче на промену друге (зависне). Треба имати у виду да решавање проблема, који се односе на испитивање функционалне зависности, захтева одређене способности ученика, које су Lian и Idris (2006) сврстали у четири нивоа:

1) Моноструктурни ниво:

- способност коришћења доступних података са једног аспекта (примена само једне операције) у циљу решења проблема

2) Вишеструктурни ниво:

- уочавање нумеричких односа варијабли, формирање аритметичког израза за израчунавање вредности зависне променљиве и табеларно представљање вредности
- коришћење свих датих информација и примена више од једне операције у циљу проналажења решења

3) Релацијски:
- способност генерализације процеса успостављања линеарног односа између варијабли
- способност да се формира алгебарски израз, као и линеарна једначина, која приказује међусобни однос свих расположивих информација о ситуацији
- способност примене формуле

4) Проширење апстракције:
- способност испитивања међусобног односа (функционалних веза) свих расположивих информација у односу на одговарајуће апстрактне принципе
- способност испитивања структуре и разматрања могућности постојања више од једног решења проблемске ситуације

Lian и Idris (2006) истичу да се алгебарске способности ученика могу проценити, ако домен решавања задатака обухвата следеће садржаје: илустровани линеарни образац, директну пропорционалност, појам функције и аритметички низ. У складу са наведеним, следе примери који могу утицати на развој наведених способности неопходних за анализу функционалних односа између компонената рачунских операција. Односи компонената операција сабирања и множења, у примерима који следе, приказани су као релацијски односи страница и обима (површине) правоугаоника.

Пример 1: Испитати зависност обима (O) правоугаоника од странице a, при чему је друга страница (b) константна (b=1).

Решење: Модел $O=2a+2b$ је алгебарски приказ (формула) дефиниције појма обима, тј. односа између квантитативних варијабли (страница и обима) правоугаоника. Како већина ученика има искључиво оперативни поглед на знак „=“, у разматрању једнакости $O=2a+2\cdot 1$ од кључног значаја је схватање знака једнакости као знака релације. Са аритметичког аспекта, знак једнакости има улогу да најави нумерички исход рачунања, док у алгебри представља релацију еквиваленције. Дакле, у овом случају знак „=“ је показатељ односа између обима и странице (релацијски симбол, тј. „исто што и“), а не сигнал да се израчуна вредност израза (оперативни симбол, тј. „уради нешто“). У том контексту символи имају улогу променљиве – идеје која уједињује геометрију и алгебру. У овој ситуацији ученици могу разматрати функционалну зависност променљиве O - квантитативне особине објекта, која се мења у зависности од промене величине a, користећи геометријски, вербални или табеларни приказ промена варијабли, као средство за разумевање промена. Апстрактне квантитативне вредности одређене величине (без доделе нумеричких вредности) омогућавају квантитативно алгебарско расуђивање, које подразумева анализу и изражавање односа између величина. Међутим, овде ће се користити табеларни приказ односа величина, иако он одражава оперативни карактер алгебарских израза. Први разлог табеларног начина приказа парова података је тај што је то један од прецизнијих начина повезивања података на овом узрасту. Други разлог је што омогућава да ученици схвате симболе као замену за различите вредности броја, а не као ознаку за одређену вредност, која се не мења, тј. да обрасци за обим и површину имају динамичну природу. Посматрањем приказа (нпр. табеле вредности променљивих a и O) ученици стичу представу о промени вредности обима у зависности од странице, о домену и кодомену, о монотоности, што води проучавању елементарних својстава функције, која је темељ математичке анализе. Осим тога, развијају осећај за промену збира (O) у зависности од промене сабирка ($2a$). Овде долази до изражаја функционално размишљање, кога Smith (2008:143) дефинише као тип „представничког размишљања које се фокусира на однос између две или више различитих величина,..., које од специфичних односа индивидуалних случајева води до уопштавања тих односа”.

Пример 2: Испитати зависност странице (a) од обима (O), при чему је страница b константна (b=1).

У примеру 2 ученици истражују инверзну релацију релације из примера 1, где вредност променљиве a зависи од промељниве O. Да би табеларно приказали зависност, ученици у овом случају користе знања о решавању једначина. (Вредности променљиве O су из домена парних бројева.) Упоређујући табелу са табелом из примера 1, ученици уочавају да су a и O у релацијском односу заменили места. Истраживањем релацијских промена чине се први кораци ка појму инверзне функције. У овом примеру може се анализирати и промена разлике ($2a$) у зависности од промене умањеника (O).

Из претходна два примера ученици су могли закључити да се увећањем странице увећава и обим и обрнуто. У следећем примеру разматра се међусобни однос дужине и ширине правоугаоника константне вредности обима.

Пример 3: Испитати однос страница (a и b) правоугаоника обима O (O=10). Да би решили задатак, могуће вредности дужине. и ширине правоугаоника ученици одређују алгебарском методом, приказују их табеларно. Бројеви у табели, који описују узајамни однос страница правоугаоника фиксног обима, развијају интуитивне идеје домена и кодомена. Питање: „Која је највећа (најмања) дужина коју може имати правоугаоник фиксног обима?“, развија идеју о екстремним вредностима. (Вредности променљивих су из скупа природних бројева.) Ако једнакост a+b=5 замене еквивалентним обликом a=5-b, а вредности из табеларног приказа посматрају као вредности разлике и умањиоца, ученици могу уочити како се мења разлика у зависности од промене умањиоца.

Линеарна зависност променљивих може се илустровати и односом између дужине странице правоугаоника и његове површине, при чему је вредност ширине константна.

Пример 4: Испитати зависност површине (P) од странице a, при чему је друга страница (b) константна (b=2). Из табеларног приказа вредности променљивих a и P, ученици уочавају однос промена вредности површине и странице, као и зависност производа од чиниоца. Како су вредности променљивих из скупа природних бројева, овде се може оспорити често „тврђење“ ученика да „множење увећава“, тако што ће се за контрапример узети страница a чија је вредност дужине 1*cm*. Оспоравањем наведене (погрешне) хипотезе, ученици закључују да се из појединачних примера не може изводити општи суд и да тестирање претпоставке подразумева изградњу убедљиве аргументације да је претпоставка истинита или лажна, тј. да претпоставка може бити истинита ако и само ако је истинита за све могуће случајеве из неког одређеног домена. Другим речима, ако постоји контрапример, тј. бар један случај из домена за који претпоставка није истинита, онда кажемо да је лажна. При том, за ученике је важно не само да се испита да ли је претпоставка тачна, него и када је тачна, тј. да се одреди њен домен. У складу са наведеним, један од исправних начина закључивања, који се може применити на овом узрасту, је метода непотпуне индукције (у примеру 13 на 70. стр).

У следећем примеру, преводећи зависност дужине странице правоугаоника од вредности његове површине на језик алгебре, ученици могу размотрити зависност количника од дељеника.

Пример 5: Испитати зависност странице (*a*) од површине *P*, при чему је друга страница (*b*) константна (*b*=2). (Вредности промењиве *P* су из домена парних бројева.)

Многи истраживачи (Kaput, 2000; MacGregor,2004; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Warren, 2003) предлажу да се настава математике усмери ка повезивању процедуралних и структурних приступа алгебарским садржајима преко низа њених аспеката, што подразумева активности као што су извођење образаца (генерализација), учење путем решавања проблема или моделовање. Ученици обрасце прво траже у бројевима, објектима и табелама, а затим сазнају да могу да их представе користећи промењиве и изразе.

4.2.1. Илустровани линеарни обрасци

Постоје три главна разлога за истраживање илустрованих просторних образаца у настави математике: 1) могу да буду визуелне представе нумеричког обрасца, 2) могу се користити као неформални увод у појам промењиве, 3) могу се користити за генерисање еквивалентних израза. Један од циљева истраживања је да се идентификују и карактеришу активности које помажу ученицима основних школа да успоставе односе између скупова података, да продуже образац, као и да развију свест о повезаности између образаца и табела вредности.

Антонијевић (2004:321) је, на основу истраживања закључио, да су у млађим разредима основне школе „скоро у потпуности заступљени садржаји наставе који омогућавају усвајање емпиристичких знања, између којих се не могу успоставити чвршће везе. У таквој стуацији не постоји основа повезивања знања која су ученици усвојили и таква знања остају на нивоу површине и уопштене повезаности“. Међутим, Давидов и његов истраживачки тим верују да је стицање теоријског расуђивања могуће на узрасту од шест или седам година уколико су ученици ангажовани у одговарајућим активностима учења, које ученике усмеравају од апстрактног ка конкретном: „интелектуални капацитет деце у првим разредима је знатно опширнији и разноврснији од оног који је прихваћен од стране традиционално оријентисане наставе“ (El'konin & Davydov, 1975:8). Такође, Виготски у оквиру *теорије развијајуће наставе* истиче потребу да саставни део садржаја наставе од почетних разреда основне школе представљају научно-теоријска знања и да ученицима од самих почетака школовања треба омогућити да развијају научно-теоријско мишљење (Антонијевић, 2004). Давидов истиче да радећи са изразима на испитивању конкретних односа међу објектима, од самог почетка школовања, и апстраховањем њихових особина, деца стичу општи концепт основних квантитативних односа, као и способност да анализирају својства математичких односа. Прелазак са манипулација над објектом на изражавање особина тог објекта представља базу за наредне манипулације (Mason,1989). Визуелизацијом непроменљивих односа између елемената објекта ученицима се омогућава да их уочавају и „повезују своје симболе и променљиве у обрасце, који генеришу фигуре“ (Becker & Rivera, 2006:466). „Моћ математике лежи у односима и трансформацијама, које доводе до образаца и уопштавања. Апстраховање образаца је основа структурног знања, циљ учења математике” (Warren, 2005:305). Међутим, Wright (1997) је утврдио да многим ученицима недостаје стратегија за проналажење односа између променљивих и немају довољно развијено релацијско размишљање, тј. свест о томе како би такве односе могли представљати алгебарским симболима. Дакле, први задатак наставника би био да обезбеди математичке активности које ученицима омогућавају приступ процесу изградње алгебарских модела (образаца), а не активности у којима су обрасци одвојени од геометријских структура (из којих проистичу) и које се ослањају на меморисање повезаности између чулних особина ситуација и коришћења специфичних и локализованих поступака које воде ка „псеудо-идејној“ оријентацији према математици, где „идеје нису укључене“ (Vinner, 1997:101) и где се занемарује логичко расуђивање повезивања. Последица одвајања образаца од њиховог оригиналног контекста је што свако уопштено тврђење постаје „тврђење о резултату, а не о математичкој ситуацији из које произилази“ (Hewitt, 1992:7). У том смислу, потребно је упоређивати и повезивати особине тема или појмова који се обрађују, а не тражити сличности између ситуација и модела или између различитих задатих проблема и њихових поступака решавања. Примерима 6 и 7 илустрован је један од начина изградње алгебарског обрасца, који повезује нумеричке и геометријске објекте.

Други задатак наставника је да не сугерише ученицима на активности, које подразумевају употребу алгебарских образаца у функцији „машине“, јер би то био „псеудо-аналитички“ начин рада, који се не заснива на когнитивним активностима, већ подразумева реакције на сигнале (Vinner,1997:121). „Математичко изражавање, као основа за расуђивање, изгуби се када ученици вежбају многобројна правила за манипулацију симболима, при чему изгубе везу са квантитативним односима, које означавају симболи“ (Kaput, 2000:12). На основу истраживања, Kaput (2000) је закључио да за већину ученика не само што је облик низа симбола позив да обаве одређену процедуру, већ математику доживљавају као манипулацију низовима симбола (не повезујући их са значењем). За њих је, како Kaput наводи, „разумевање“ присећање правила, која се примењују на одређене низове симбола. „Нажалост, разумевање алгебре захтева способност повезивања знања о процедурама са знањем о појмовима“ (Kaput, 2000:13). Употреба образаца, без указивања на повезаност математичких објеката, може да смањи могућност самосталног решавања проблема, јер за ученике, који не препознају релацијске односе објеката, „погађање“ одговарајућих образаца представља једину могућност проналажења тачног одговора. Оријентација ка структури објекта у процесу решавања проблема омогућава одабир сврсисходних операција и доношење смислених одлука. Другим речима, погледе на математичке садржаје потребно је интегрисати са погледима на математичке поступке, тј. разматрање онога што ученици знају не треба одвајати од разматрања начина на који су они свесни тог знања и како га користе. У том циљу, алгебарске обрасце треба користити за изградњу мишљења ученика кроз процес решавања проблема, који повезује активности „у оквиру математичке културе у којој математика функционише као 'средство размене'“ (Schoenfeld, 1987:213).

Коначна фаза учења је фокусирање пажње на процес генерализације и на коначну форму изражавања, било речима или симболима. Деца треба да схвате да је генерализација важна математичка активност. Она је у средишту алгебарског мишљења. Lannin (2005:233) истиче да су истраживање и генерализација „у самој сржи математичке делатности“. Генерализација подразумева смислено проширење обима расуђивања изван предмета разматрања, откривање заједничког кроз појединачне случајеве и подизање образложења на ниво где акценат више није на самим предметима, већ на обрасцима, процедурама, структурама и односима између њих (који постају нови предмет разматрања на вишем нивоу) (Kaput, 2000). Истраживање односа и њихова генерализација, тј. откривање алгебарских образаца, представљају кључне компоненте у изградњи математичког знања, јер је математика „наука реда, образаца, структуре и логичких односа“ (Devlin, 2001:73).

Анализирајући Пијажеову (1970) структуралну теорију когнитивног развоја, која се темељи на анализи структуре одговора ученика, Mulligan и Mitchelmore (2009) су открили да у теорији нема довољно категорија за класификовање математичке структуре у одређеним областима математичког садржаја. Полазећи од тога да је за разумевање математичких структура од централног значаја просторно структурирање[18] и визуализација (Mulligan & Mitchelmore, 2009), Thomas и др. (2002) су у сарадњи са Goldin (1998)[19] описали структурне карактеристике дечијих репрезентација (фокусирајући се на њихове сликовне и симболичке карактеристике), које „дају јединствени објектив кроз који се види математички развој - објектив који се фокусира на дубоко разумевање, а не на процедуралне способности“, а могу да дају и „драгоцени увид у то како деца развијају почетно алгебарско размишљање“ (Mulligan & Mitchelmore, 2009:45-46). На основу анализе структурних карактеристика дечијих одговора, Mulligan и Mitchelmore (2009) извршили су поделу структуралног развоја на четири фазе:

1) ауто-структурна фаза, у којој репрезентације немају математичке карактеристике, тј. не приказују нумеричку ни просторну структуру
2) појавна (инвентивно-семиотичка) фаза, у којој репрезентације приказују неке релевантне елементе дате структуре, али није приказана њихова нумеричка ни просторни структура

---

[18] Разумевање просторног структурирања код ученика, Battista (1999) је дефинисао као „менталну операцију изградње организације или облика за објекат или скуп објеката. Просторно структурирање одређује природу, облик или композицију објекта идентификовањем његових просторних компонената, односа и комбинације ових компонената, и успоставља међусобне односе између компонената и новог објекта (Battista,1999:418).

[19] Према Goldin (1998) математички репрезентативни системи развијају се кроз три фазе:
1. инвентивна - семиотичка фаза, у којој значење дају ликови или конфигурације
2. проширена фаза структурног развоја
3. аутономна фаза, где нови систем репрезентације може да функционише у новим контекстима (Mulligan & Mitchelmore, 2009:38)

3) делимично структурна фаза, у којој репрезентације приказују најбитније аспекте нумеричке или просторне структуре, али репрезентација је непотпуна
4) фаза структурног развоја, у којој репрезентације интегришу нумеричке и просторне структурне карактеристике

Mulligan и Mitchelmore (2009) сматрају да деца, која су научила да траже математичке сличности и разлике унутар и између образаца (модела), имају могућност да развијају разумевање структуре тих образаца. Поред тога, они ће настојати да траже сличности и разлике у новим обрасцима и, у складу с тим, проширити своје структурно разумевање.

Једна од карактеристика школске математике је чињеница да се формуле ретко интерпретирају као функционални модели, преко којих би се могла изучавати својства моделираних објеката. У ствари, строга одвојеност школског алгебарског језика (затвореног у формулама) и функционалног језика је последица процеса дидактичког организовања, на основу кога се математика изучава у различитим блоковима садржаја и на тај начин отежава интеграција математичких објеката из различитих тема или домена (Chevallard 1985, Bosch & Gascón 2006, према Ruiz и др, 2007:3). Пример 6 је модел конструктивног увођења обрасца за обим квадрата путем истраживања односа странице и обима. Ради разумевања функционалних односа, у овом примеру истраживање је представљено у различитим контекстима (геометријски, табеларни и симболички). На примеру односа обима и странице квадрата биће илустрована два различита приступа функционалним односима.

Пример 6: Испитати зависност обима (*O*) квадрата од дужине странице *a*.

Да би ученици активно учествовали у истраживању функционалних односа, а затим и генерализацији зависности обима од странице, решавање примера 6 биће прилагођено приступу, кога описују Confrey и Smith. Наиме, Confrey и Smith (1994) разликују два приступа функционалним ситуацијама: „коваријација“ (рекурзивна генерализација[20]) и „кореспонденција“ (експлицитна

---

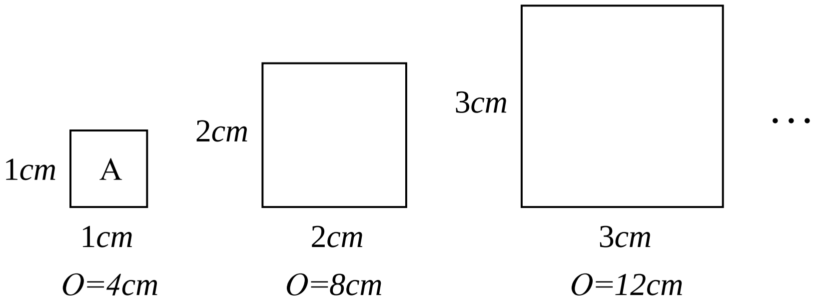
[20] Рекурзивна генерализација слична је генерализацији путем индукције.Наиме, у генерализацији путем индукције, на основу утврђених правила *f*(1), *f*(2), *f*(3) ..., уводи се претпоставка, тј. опште правило *f*(*n*) за природан број *n*; док се у случају рекурзивне генерализације правило *f*(2) добија помоћу правила *f*(1), затим *f*(3) помоћу *f*(2) ..., *f*(*n*) помоћу *f*(*n*-1) (Krygowska,1979, цитирано у Čadež and Kolar, 2015:29)

генерализација[21]). У току решавања задатка ученици ће прво користити коваријантни приступ, јер је „једноставнији и више интуитиван“ (Confrey and Smith, 1994:33). Kieran (1996) предлаже да се, уместо на систем симбола, ученици концентришу на алгебарско размишљање, које „подразумева такав приступ квантитативним ситуацијама, у којима се општи односи не морају приказивати симболичким представама, које у крајњој линији могу да се користе као когнитивна подршка за традиционално предавање школске алгебре“ (Kieran,1996, цитирано у Johanning, 2004:372). Међутим, Gordillo и Godino (2014) утврдили су, на основу истраживања, да наставници не признају спонтану генерализацију („квази-генерализацију“), јер је њихово поимање алгебарског резоновања засновано на два елемента: први је да алгебра подразумева употребу симбола и извршавање бројевних операција, а други је да се у уџбеницима не предлажу задаци за проналажење или доказивање образаца и правила. Без обзира на изложени став наставника, визуелна структура промена је неопходна за релационо разумевање. Иначе, извођење правила би се ослањало на инструментално разумевање – „правило без разлога“ (Skemp, 2002:2). У том циљу за решавање примера 6 користи се геометријски модел квадрата, при чему се квадрат приказује у складу са својом основном дефиницијом, чиме се показује примат геометрије у овом контексту. Међутим, квадрат се, такође, може приказати користећи број, којим је одређена његова страница. Мењање овог броја и опажање његовог утицаја на квадрат може бити важно у развоју идеје променљивости, док именовање броја (нпр, словом *a*) представља корак ка појму променљиве. Имајући у виду наведено, сам ток решавања примера 6 усклађен је према предлогу Lian и Idris (2006). Наиме, поступак решавања алгебарских задатака обухвата низ алгебарских процеса, који се састоји од три етапе: откривање обрасца прикупљањем нумеричких података, представљање и уопштавање обрасца у табели и примена правила у вези конкретне ситуације, примена алтернативног решења за новонасталу ситуацију (Lian and Idris, 2006). У том смислу, у решавању примера 6, ослањајући се на значење појма обима, ученици прелазе на нумерички приступ

---

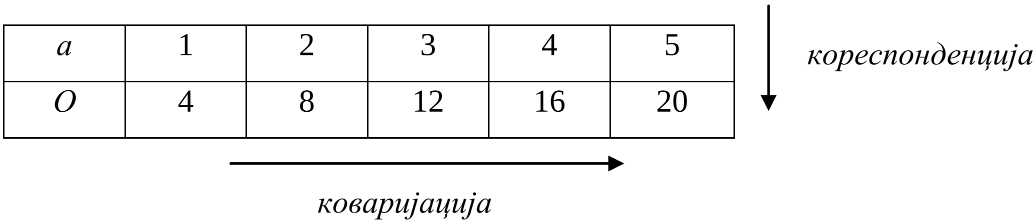
[21] Експлицитна генерализација подразумева уопштавање расуђивањем - уочено правило у једном случају важиће и у другом случају (Krygowska,1979, цитирано у Čadež and Kolar, 2015:29)

и формирају низ бројева, који представља мерне бројевне вредности обима низа квадрата, где је страница сваког следећег за 1*cm* дужа од претходног (слика 2).



Слика 2: Коваријантни приступ

Квантитативни подаци о објекту, који су у основи изградње математичких модела, омогућавају проучавање објекта са квантитативне стране. За коваријантни приступ карактеристично је да након разматрања квантитативних аспеката објекта, који варирају (дужина странице и вредност обима), ученици формирају низ, утврђују карактеристике промена између узастопних објеката у низу и уочавају да промене остају исте, тј. да је сваки следећи члан низа за 4*cm* већи од претходног (особина аритметичког низа). Рекурзивном генерализацијом утврђују: квадрат *A* има обим 4*cm* и обим сваког следећег, чија се дужина странице повећава за 1*cm*, је за 4*cm* већи од претходног. Однос између узастопних вредности променљивих (*O* и *a*) без освртања на функционалне зависности између њих, могу се описати и табелом вредности две променљиве.



a	1	2	3	4	5
O	4	8	12	16	20

Слика 3: Два приступа генерализацији функционалне зависности обима од дужине странице. (Дужине странице и обима изражене су истом јединицом мере)

Посматрањем вредности у табели (слика 3) из нове перспективе, не фокусирајући се на изоловане редове табеле, већ на функционални однос између две варијабле, тј. разматрањем уређених парова, ученици уочавају квантитативне односе између странице и обима квадрата, чиме се подржава функционално размишљање и кретање ка кореспондентном приступу: мерни број обима сваког квадрата је четири пута већи од мерног броја странице квадрата (експлицитна генерализација). Тиме се избегава опасност од усмеравања ученика на „развој алгебарског односа, а не на развој способности уопштавања“ (Thornton, 2001:252). Превођење функционалних веза између чланова парова у алгебарски симболички запис омогућава да се односи између променљивих генералишу приказом – $O=4\cdot a$, који ученицима пружа могућност да схвате инваријантност односа између две дате величине. На овом примеру ученици могу да схвате да, нпр, величине 24 и 6 задовољавају релације „4 пута више“ и „за 18 више“, као и да објасне зашто, када 24 и 6 смањимо/повећамо два пута, наставља да се одржи однос „4 пута више“, али не и однос „за 18 више“. Ради подстицања развоја функционалног и алгебарског размишљања, неопходно је формулисати питања на која одговор није конкретан број, већ однос између променљивих. На пример, питања могу да се односе на анализу односа између компонената конкретне функције, као и анализу тока уопштене функције: За које је вредности променљиве a вредност O већа од $100cm$? Шта представља константа 4? и сл. Такође, питање: „Да ли је тачно: ако је $O=4\cdot a$, онда је $a=O:4$?“ подразумева упоређивање величина, приказивање и тумачење односа између две величине из две различите перспективе, које су у међусобно инверзном односу (однос „4 пута веће” инверзан је односу „4 пута мање”). И на крају, чињеница да се питање „Шта се дешава са вредношћу $4\cdot a$ када се a повећава?” не може заменити питањем „Шта се дешава са вредношћу $4\cdot 3$ када се 3 повећава?” указује не на аритметичку, већ на алгебарску природу обрасца $O=4\cdot a$, чиме се прави разлика између „аритметичког и квантитативног расуђивања” (Kaput, 1995:48)[22]. Управо у том приступу Usiskin (1988) види важан аспект школске алгебре и сматра да прва алгебарска знања треба увести кроз употребу променљивих.

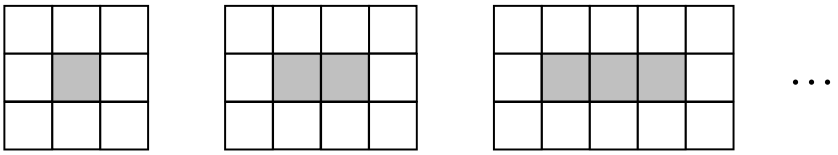
Визуелне способности често подразумевају препознавање образаца и структуре и повезане су са математичким успехом (Arcavi, 2003; Booth & Thomas, 2000, према Mulligan & Mitchelmore, 2009:33) и аналогним закључивањем (English, 2004, према Mulligan & Mitchelmore, 2009:33). Mulligan

---

[22] И аритметика и алгебра пружају формална средства за екстернализацију квантитативног размишљања. У случају аритметике, ова средства служе за рачунање или одређивање конкретне вредности величине, док се у случају алгебре, ова средства могу користити у двоструке сврхе: 1) за генерализацију и апстракцију квантитативних односа, 2) за расуђивање без доделе нумеричке вредности, већ преко спољних репрезентација квантитативних односа (Kaput,1995:49).

и Mitchelmore (2009) сматрају да свест о структури образаца може да допринесе процесу учења многих математичких појмова; нпр, опажање композитних јединица од пет или три квадрата од кључне је важности за настанак дводимензионалне структуре, док се израчунавање запремине заснива на сличној структури. У циљу развоја свести о структури обрасца могу се решавати проблеми као што је пример 7, где се квантитативни односи између компонената просторног структурног обрасца растуће функције могу описати симболичким приказом. Модел из примера 6 може да буде прототип (општа стратегија) за формирање модела са структурно сличном ситуацијом, као што је пример 7. Потребно је да ученици прво апстрахују однос из илустрованог приказа, а затим да га преведу у друге репрезентације, које наглашавају његове различите карактеристике. За превођење из једне у другу репрезентацију потребно је ангажовање различитих когнитивних активности, при чему је у основи сваке од њих разумевање датог односа. На пример, да би формирао табелу, која ће репрезентовати дати текстуални проблем, ученик прво мора одредити битне податке, односно променљиве.

Пример 7: Написати алгебарски образац за одређивање броја белих квадрата у зависности од броја сивих квадрата (слика 4).

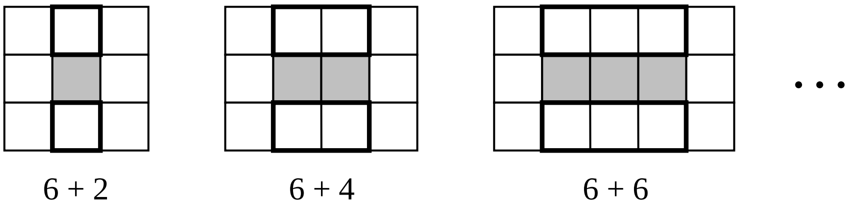


Слика 4

Решење:

Посматрањем низа правоугаоника на слици ученици треба да уоче њихову имплицитну структуру. Две колоне од по три подударна квадрата са бочних страна правоугаоника, узастопно „додавање“ колона, просторни односи (подударност, паралелност и нормалност) су битне структурне карактеристике овог модела.

Посматрањем низа правоугаоника са релацијског аспекта може се уочити да број (немаркираних) квадрата са бочних страна остаје константан (слика 5) и не утиче на раст низа броја белих квадрата, па се њихов број узима за константу у коначном обрасцу.



Слика 5

Узајамна зависнот броја сивих и маркираних белих квадрата може се приказати следећом табелом.

Број сивих квадрата	1	2	3
Број маркираних белих квадрата	2	4	6

кореспонденција

коваријација

Кореспондентним приступом може се закључити да је број маркираних белих квадрата два пута већи од броја сивих. Узимајући у обзир и константан број немаркираних белих (6), укупан број свих белих квадрата је $6 + 2 \cdot x$, где је x број сивих квадрата. Ако се алгебра посматра као генератор образаца, проблем је решен открићем општег обрасца. Генерализована су позната својства бројева, тако да ученици немају осећај „присуства” непознатих. Међутим, ако се дода захтев да се одреди број белих квадрата у 15. члану низа правоугаоника, алгебра се посматра са оперативног аспекта, где се заменом променљиве бројем омогућава приказивање односа у аритметичком окружењу.

Разумевање математичких структура и образаца, омогућава ученицима да:

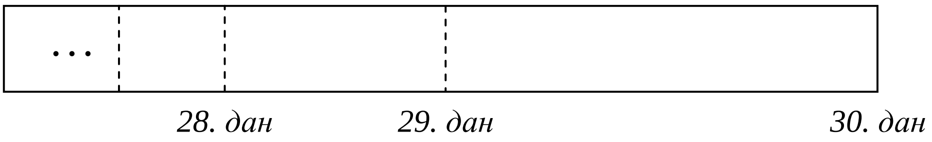
1) лакше науче основне нумеричке и просторне особине

2) имају мотивацију да истражују обрасце, као сличности и разлике међу њима, због чега би лакше изучавали нове структуре

3) одбацују небитне карактеристике када уче нове појмове (Mulligan & Mitchelmore, 2009)

Полазећи од чињенице „да би доживела нешто, особа мора доживети нешто друго са чим ће га упоредити” (Marton и др, 2004:16) Marton је закључио да је модел контраста од великог значаја у разматрању предмета изучавања. Према томе, да би ученици дубље разумели линеарне односе и развили свест о домену у коме су променљиве линеарно зависне, у следећим примерима ћемо приказати односе, који се супротстављају линеарним. Пример 8 илуструје развој математичког разумевања из неформалног дечијег знања.

Пример 8: Површину језера постепено прекривају локвањи. Сваки следећи дан локвањима буде прекривено двоструко више површине у односу на претходни. Цела површина језера прекривена је за 30 дана. За колико ће дана бити прекривено пола језера? У првој фази решавања задатка није циљ да се потенцира на математичком изражавању, већ на неформалном нивоу разумевања, где речи имају значење физичких операција, али још увек нису повезане са формалним математичким значењем. Да би решили задатак, неопходно је да ученици симболизују проблематичну ситуацију, тј. да преласком из неформалне у формалну семиотику (тзв. прогресивном формализацијом) преведу неформални модел у формални. У домену математичког знања задатак се може решити на више начина. Наравно, ученици ће логички закључити да ће половина језера бити прекривена за 29 дана. Како алгебарска метода подразумева знање о особинама геометријског низа, она ће изостати, али се претпоставља да ће ученици решавајући задатак геометријском методом развити осећај о геометријској прогресији (слика 6). Геометријска слика, која се односи на објекат, који означава, представља проблемску ситуацију и омогућава да ученици опишу проблем на формалном нивоу. Визуелизацијом процеса прекривања језера помоћу делова правоугаоника, ученици о проблему размишљају на апстрактан начин. Овај задатак подстиче анализу, јер подразумева интерпретацију и математизацију проблемске ситуације и омогућава ученицима да прошире геометријска знања.



Слика 6

Пример 9: Испитати однос страница (a и b) правоугаоника површине P (P=12cm^2). (Елементи домена, односно кодомена, су делиоци броја 12.) Циљ је да се ученици подстакну да, користећи табеле, одреде могуће вредности променљивих, односно да одреде вредности компонената у зависности од вредности операције, а на вишем нивоу апстракције то је еквивалентно са установљавањем пропорционалности промена појединих елемената операције.

Из табеларног приказа могућих вредности промењљивих a и b из скупа природних бројева, ученици могу закључити да величине a и b нису линеарно зависне, као у претходним примерима, и развијају свест о постојању других облика функционалне зависности, чиме се уводи идеја о обрнутој пропорционалности величина (обезбеђује се вертикално повезивање садржаја). Уочавање еквивалентности образаца $12=ab$ и $a=12/b$ (две форме истог обрасца) упућује ученике на повезивање операције множења са њеном инверзном операцијом (дељења) и на успостављање односа између компоненти операције дељења, као и на закључак да операција дељења „не умањује“ (нпр, делилац, чија је вредност 1, не утиче на промену количника).

Циљ претходних примера (од 1 до 6) је био да ученици уоче однос између страница и обима (површине) правоугаоника и закључе да одређена дужина и ширина не дају више од једног обима (или површине), односно да је вредност збира (или производа) бројева јединствена, што је једна од особина функције. Следећи примери ученицима пружају могућност да разматрају да ли одређена површина (или обим) захтева јединствену дужину и ширину и уочавају, нпр, да површине два правоугаоника различитих обима могу бити различите или једнаке. Ако то пренесу на језик алгебре, закључују: ако је $a+b>c+d$, то не значи да је $a \cdot b>c \cdot d$, a,b,c,d су природни бројеви (нпр, $1+7>3+3$, али није $1 \cdot 7>3 \cdot 3$). Другим речима, ученици могу закључити да доношење тврђења о односу величина на основу мишљења да једна врста операција доводи до веће вредности у односу на другу (на пример, множење производи већу вредност него сабирање) није поуздано. Истраживање следећих примера ученицима омогућава да прошире схватање појма функције на следећи начин: да би се одредила површина, односно обим, потребна су два податка: дужина и ширина, што доприноси развоју идеје о функцијама више промењљивих и коришћење симболичког записа облика $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, односно $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$.

Пример 10: Одредити правоугаоник максималне површине, ако је обим $12cm$. Одређивањем могућих вредности ширине и дужине правоугаоника (мерни бројеви су из скупа N), ученици могу закључити да више од једног правоугаоника има обим $12cm$. Ради лакшег упоређивања подаци се могу приказати табеларно. Израчунавањем површине сваког од њих и упоређивањем њихових вредности, ученици могу закључити да је правоугаоник који испуњава услове задатка квадрат.

Пример 11: Одредити правоугаоник минималног обима, ако је површина $16cm^2$.

Пример 12: Ако је обим једног правоугаоника већи од обима другог, упоредити њихове површине. Овај пример ученицима пружа могућност да размишљају о формулама са квалитативног аспекта. Полазећи од идеје да се не може утврдити која је величина већа, јер промељива може да узме више различитих вредности, приликом решавања овог задатка ученици могу изводити закључке на основу расуђивања за различите бројевне вредности. Како закључци варирају у зависности од испитиване вредности, може се уочити да задатак има више решења.

4.2.2. Бројевни низови

Једна од препорука Завода за унапређивање васпитања и образовања је да део наставног рада буду „разноврсна вежбања с бројевним низовима“, јер доприносе „откривању идеје функције“, као и да ученик „уме да примени својства природних бројева“. Ослањајући се на тврђење да се „историјат бројева може представити као дуг ланац транзиције од оперативних до структурних концепата...“ (Sfard, 1991:14), закључујемо да ученицима треба омогућити разматрање система бројева како са оперативног, тако и са структурног аспекта. Овај Сфардов опис развоја разумевања појма од оперативног до структурног нивоа одговара Фројденталовом опису промене у схватању појма од оперативне до предметне материје: „Активност на једном нивоу постаје предмет анализе на следећем нивоу, оперативна материја на једном нивоу постаје предметна материја на следећем нивоу” (Freudenthal, 1971, цитирано у Amerom, 2002:54).

Дугорочно гледано, развијање разумевања подразумева више него једноставно повезивање нових знања са претходним знањем једноставним додавањем нових појмова и процеса на постојећа знања. Развој разумевања подразумева стварање богатих, интегрисаних структура знања (Carpenter & Lehrer,1999). Ово структурирање знања је једна од карактеристика која чини учење стваралачким и омогућава да се ново знање повеже и угради у постојећу мрежу знања. Успостављање веза између садржаја који се разматрају у домену аритметичког и алгебарског изучавања „може помоћи наставницима да посматрају алгебру као начин размишљања, а не као листу процедура које треба спровести” (Stephens, 2008:45). Имајући у виду напред наведено, закључујемо да ученицима треба омогућити истраживање елементарне теорије бројева, као и анализу структуре бројевних низова, јер се за алгебру често каже да је „генерализована аритметика“ (Greenes, Cavanagh, Dacey, Findell & Small, 2001:1), која се обично представља у апстрактном симболичком облику. При том, треба имати у виду да решавање проблема из области аритметичког низа захтева низ способности, које су Lian и Idris (2006) разврстали по следећим нивоима:

1) Моноструктурни ниво:

- разумевање редоследа бројева низа на основу непосредног увида у дате информације

2) Вишеструктурни ниво:

- уочавање нумеричког односа варијабли, формирање аритметичког израза за израчунавање вредности зависне променљиве и табеларно представљање
- коришћење свих датих информација и више од једне операције у циљу проналажења решења

3) Релацијски:

- способност генерализације повезивањем свих датих информација са циљем формулисања алгебарског израза и формуле
- способност примене правила

4) Проширење апстракције:

- способност примене апстрактног општег принципа (концепта аритметичког низа) у циљу решавања проблема
- способност логичког закључивања

Интеграција способности, неопходних за концептуално разумевање структуре проблема и његово решавање, постиже се решавањем низа задатака са монотоним порастом сложености (Collins, 1987). Сама структура решавања проблема, који доприносе развоју наведених способности, илустрована је у примеру 13 и према Lian и Idris (2006) обухвата три нивоа сложености (моноструктурни, вишеструктурни и релацијски) док се четврти ниво (у примеру 13) односи на способност анализе обрасца општег члана низа преко ширег спектра случајева; односно, на примену особина бројевног (аритметичког) низа у формирању правила за нове линеарне односе. Тврђење да

„алгебарске ознаке нису предуслов за алгебарско размишљање” (Amerom, 2002:197) указује на то да се алгебарско размишљање и алгебарска симболизација могу посматрати као независне компетенције алгебарског образовања. Другим речима, за алгебарско размишљање, тј. за разумевање проблема који се баве односима између величина, није неопходна алгебарска симболизација, нити алгебарска репрезентација подразумева алгебарско расуђивање. У складу с тим, за решавање примера 13 користе се геометријски модели, који ће допринети генерализацији аритметике, што води ка вертикалној математизацији. Решавање задатака у геометријском окружењу омогућава прелазак са аритметике на елемантарну алгебру, а посебно на тему решавања једначина. Пример 13 илуструје како се на визуелно привлачан начин ученицима може приказати формирање низа узастопних парних бројева, успостављањем кореспонденције између парног броја и мерног броја површине правоугаоника. Наиме, у традиционалној наставној пракси ученици успешно рецитују низове бројева (нпр 2,4,6,... или 5,10,15,...), али занемарују својства чланова низа (нпр. дељивост). Међутим, разматрање својства бројева ученицима омогућава да их генерализују и формирају алгебарску репрезентацију структуре низа, на основу које могу, на пример, да одреде на којој позицији је жељени број и обрнуто. Како је изучавање својстава објеката у млађим разредима засновано на индуктивној методи (уопштавању својстава појединачних случајева), задатак наставника је да ученицима обезбеди да решавањем низа задатака, уз објашњења и помоћна питања, правилима логичког извођења долазе до одређених законитости, јер „свака математичка формула је заправо *реч* записана помоћу неког посебног алфабета (који садржи слова, заграде, ознаке за бројеве, ознаке за логичке операције), те поступак извођења последице из неке претпоставке можемо описати као низ преобликовања речи на основу некаквих дозвољених замена, које су, пак, у складу са *чиновима* логичког закључивања“ (Рашковић, Икодиновић, 2010:90).

Пример 13: Формирати алгебарски приказ три узастопна парна броја.

Решење: Како је структурни приступ појму напреднија фаза развоја појма[23], ради бољег разумевања структурне природе обрасца, његово извођење поред аритметичке компоненте бројевних односа подразумева и геометријску

---

[23] Према Сфардовој теорији реификације (Sfard, 1991:10), оперативна концепција претходи структурној перцепцији појма.

визуелизацију. Улога непрекидне геометријске конфигурације огледа се у томе што омогућава да жељена својства постану очигледна и очувана, чиме се подстиче развој разумевања код ученика. Како је сваки паран број дељив са 2 (тј. производ броја 2 и неког природног броја), његов општи модел кореспондентан је са мерним бројем површине правоугаоника произвољне дужине и ширине две мерне јединице. Решавање примера 13 подразумева и аритметичко расуђивање које је усмерено на стварање директне везе између података у проблему формирањем почетне ситуације помоћу конкретних бројевних вредности. Даље решавање подразумева расуђивање о проблему у целини имајући у виду његову структуру. Методом непотпуне индукције, применом геометријског модела производа, може се одредити општи члан низа и уочити структура низа узастопних парних бројева (слика 7). Решавање овог примера захтева од ученика високе когнитивне активности, као што су: претпоставити, доказати претпоставку и интерпретирати.

Решење: 1) Моноструктурни ниво - односи се на бројчано решавање проблема, које укључује конкретне случајеве:

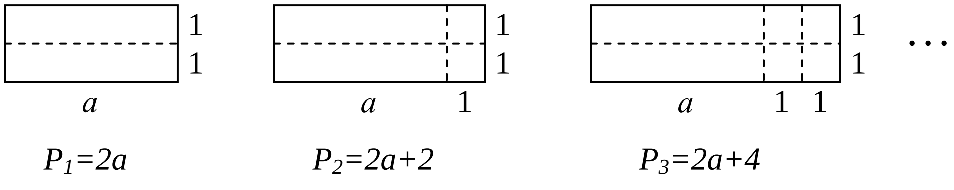
Мотивациони пример: 2, 4, 6, ... су узастопни парни бројеви

2) Вишеструктурни ниво - односи се на идентификацију рекурзивног односа између чланова низа:

Претпоставка : $2a$, $2a+2$, $2a+4$, ... су узастопни парни бројеви, при чему је a природан број

3) Релацијски ниво - односи се на генерализацију образаца узастопних чланова низа применом геометријског модела:

Потврда уоченог правила формирања низа универзалним геометријским моделом:



Слика 7: Просторни структурни образац низа узастопних парних бројева: 2a, 2a+2, 2a+4... („a“ је симбол уопштеног природног броја)

4) Проширење апстракције (највиши ниво способности алгебарског размишљања) -примена алтернативног решења на новонасталу ситуацију. Одговарајући на одређена питања ученик показује способност да прошири примену уочених правила на новонасталу ситуацију и препозна алтернативни приступ са апстрактним карактеристикама: „Продужити низ 10, 15, 20 ... Који ће број бити у низу на осмом (петнаестом) месту? Да ли је у датом низу број 45 (или 44)? На ком ће месту у датом низу бити број 55 (или 70)?“ Уједно, одговори на постављена питања представљају објашњење за валидност откривеног обрасца, тј. омогућавају ученицима да на конкретним примерима провере његову веродостојност, чиме се мотивишу за решавање проблема.

Способност тумачења слова као „било ког броја“ омогућава увођење у опште образлагање, које је одлика алгебарског разматрања. Поред тога, у формирању алгебарског приказа чланова низа нагласак је на односима бројева и њиховим својствима израженим уопштеним алгебарским моделом, што представља значајан корак ка преласку из аритметике у алгебру.

4.2.3. Једначине

Док је у претходном излагању о релацијским односима величина нагласак био на функционалним зависностима и генерализацији односа, у овом поглављу разматраћемо једнакосну формулу $ax+b=cx+d$ (где је x променљива, а бројеви a, b и c су параметри), тј. једначину[24] по променљивој x. Променљива, која учествује у једначини, зове се непозната.

Ослањајући се на тврђење (Sfard, 1991) да се апстрактни појмови могу схватити на два фундаментално различита начина: структурно - као објекти и оперативно - као процеси, једначине се могу посматрати са два аспекта: структурног и оперативног. „Ова два приступа, иако наводно неспојива, у ствари су комплементарна. (...) процеси учења и решавања проблема састоје се од сложених узајамних односа оперативних и структуралних концепција истог појма” (Sfard, 1991:1). На пример, са оперативног аспекта једначина $(x+3)\cdot 2=10$

---

[24] Cankoy (2003) је проблеме класификовао у три групе: симболичке једначине (нпр, (102-66)/6=?), једначине изражене речима (нпр, „Који број помножен са шест и сабран са 66 износи 102?“) и проблемска прича (нпр, „Имам 20 оловака и мајка ми је дала 30 оловака. Колико оловака имам?“).

се може посматрати као низ рачунских операција: додати 3 до одређене вредности, која када се помножи са 2 добија се 10; а у структурном погледу дата једначина представља еквивалентност два објекта (алгебарска израза): $(x+3)\cdot 2$ и 10. Могућност пребацивања тачке посматрања (алгебарских израза) са поља процеса на поље објекта и обрнуто указује на зрело математичко размишљање ученика (Drijvers, 2003). Сличан став заступа и Jupri (2014), који истиче да су за алгебру, у оквиру реификационе теорије, од посебног значаја како симболички, тако и структурни осећај. „Структурни осећај је способност идентификације еквивалентних облика алгебарских израза“ (Jupri и др, 2014:41). Међутим, Lewis (2000) истиче да ученици у школи уче правила, формуле, „механичке технике за решавање једначина“ и сматра да су то само „скеле“, од којих се има користи само ако се гради математичко разумевање укључујући способност размишљања, опажања, математичког анализирања. Иначе, саме по себи су бескорисне. „Површан рад ... личи на изградњу једне скеле“ (Lewis, 2000:1).

Интеграцијом оперативних и структурних концепција једначина ученицима се омогућава разумевање једначина са инструменталног и оперативног аспекта, као и развој релационог разумевања. У том циљу, решавање једначина може се разматрати у погледу преноса разумевања односа познатих и непознатих величина из једног концепта (геометријског) на други (алгебарски). Дакле, саставни део овог модела је превођење, где су објектима и операцијама из једначине дата значења у геометријском контексту. Ово превођење треба да функционише у оба смера, да ученици могу да идентификују операције и објекте како у геометријском тако и у алгебарском контексту. Иако Sutherland (1996:150, цитирано у Amerom, 2002:14) има примедбу да „... фиксација на моделу може да одложи изградњу алгебарске синтаксе, јер то захтева иступање из семантике конкретног модела“, предност геометријске методе је у њеној визуелизацији, јер разумевање односа између елемената геометријског модела „ученицима даје боље разумевање онога шта решење једначине значи“ (Ball & Stacey, 2001:4), што их спречава да изгубе из вида циљ решавања једначине. Успостављањем кореспонденције између дужи и познатих, односно непознатих, величина, линеарна једначина се може приказати геометријским моделом дужи, а одређивање непознате захтева познавање особина дужи (подударност дужи, дужина дужи једнака је збиру дужина њених делова). Преласком са алгебарског на геометријски модел, релација једнакости (два израза) прелази у кореспондентну релацију - релацију подударности (две дужи), што ученике наводи на то да знак једнакости посматрају не као знак операције, већ као знак релације (односа). Способност да се знак једнакости тумачи као знак релације Mayer и Land (2005:1) сматрају „прагом“ алгебре, кога дефинишу као „нов начин разумевања, тумачења или посматрања нечега“, без чега ученик не може да напредује. У том смислу, пример14 илуструје решавање једначине, не са оперативне, већ са релационе тачке гледишта, где се стратегија решавања ослања на њену структурну компоненту. Наиме, једначина се решава узастопним трансформацијама, при чему коначна трансформација резултира једначином, која изражава однос. Релациони поглед на знак једнакости је од суштинског значаја за разумевање тога како трансформације у процесу решавања једначине чувају еквивалентност (тј. трансформисане једначине су еквивалентне). Стандардни алгоритам решавања једначина користи идеју алгебарске еквиваленције, али је она скривена. У овом случају, геометријско решавање се базира на стратегији кореспондентној алгебарској стратегији равнотеже[25], која истиче идеју алгебарске еквиваленције. Геометријска метода наглашава статични карактер једначине, тј. током решавања једначине појам еквивалентности остаје у првом плану. Тиме се омогућава да се процедуре спроводе на концептуалном нивоу, где ученици једначине доживљавају као еквиваленцију два објекта (алгебарска израза). Наведеним начином решавања развија се квантитативно разумевање инверзних операција, које је важан темељ како за решавање једначина, тако и за изучавање аритметике. Разумевање инверзног односа између сабирања и одузимања, ($A+B-B=A$) омогућава ученицима, на пример, да приликом аритметичких операција уместо додавања броја 9 могу додати 10 и одузети 1. Дакле, за решавање једначина ученицима је неопходно указати на то да се додавањем (или одузимањем) истих вредности на обе стране једнакости не мења однос између израза са леве и десне стране (у поглављу 5.1, пример 2), јер приступ квантитативним ситуацијама са релацијског аспекта може бити когнитивна подршка за развој алгебарског размишљања. Сврха еквивалентних

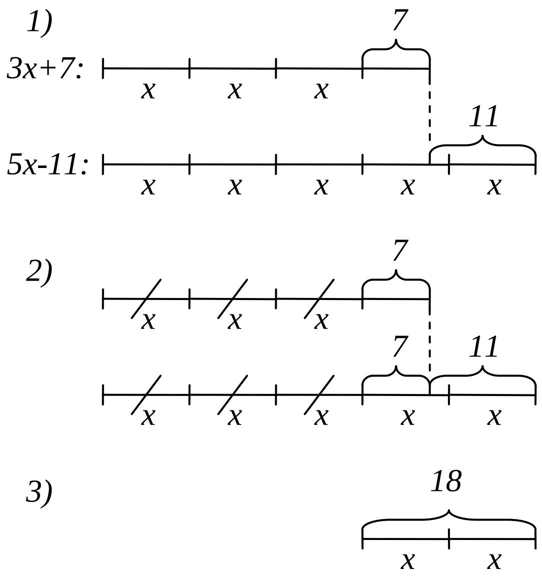
---

[25] Овај метод решавања линеарне једначине описан је око 1100. године у књизи *Al-jabr w'al Muqabala* аутора Omar Khayyam (Katz, 1995:20), у којој је Omar Khayyam написао: „једна од грана знања, потребних у делу филозофије познатом као математика, је наука *Al-jabr w'al Muqabala,* чији је циљ одређивање нумеричких и геометријских непознатих” (Kasir,1931:43)

односа је у поједностављивању приказа квантитативних односа. Ова еквиваленција може се генерализовати методом геометријских трансформација, јер је алгебарско размишљање „способност представљања квантитативних ситуација, тако да односи између варијабли буду очигледни” (Driscoll,1999:1). Кораци алгебарског решавања једначине у примеру 14 усклађени су са одговарајућим геометријским репрезентацијама. Да бисмо добили решење једначине, формираћемо низ парова подударних дужи - први у низу биће дата једначина, а последњи ће бити једначина из које се решење непосредно види. Геометријске репрезентације динамичне природе одражавају варијације математичких објеката (леве и десне стране једначине) и омогућавају константну „видљивост” међурезултата (промена). Овај модел се може користити за решавање линеарних једначина облика $ax+b=cx+d$.

Пример 14: Решити једначину: $3x+7=5x-11$.

Решење:



Једначина, тј. једнакост два израза са непознатом величином, приказана је моделом од две подударне дужи (које приказују збир познатих и непознатих величина). При том, истим симболима одговарају дужи једнаке дужине. У намери да успоставе најкраћу везу између непознате и познате, ученици могу визуелно упоређивати дужи и открити да x има вредност 9. Исправност решења може се проверити алгебарском методом: $3\cdot9+7=5\cdot9-11$.

Правилником о наставном програму за четврти разред предвиђено је да ученик решава задатке „најрационалнијим начином, уз употребу дијаграма, схема и других начина приказивања“ (Наставни програм за четврти разред основног образовања и васпитања). У том смислу, геометријска метода може се применити и у решавању погодних система линеарних једначина. Циљ је да се систем линеарних једначина реши у ситуацији познатој свим ученицима.

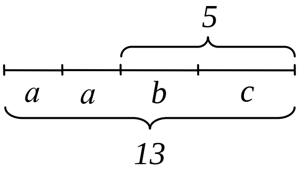
Пример 15: Одредити вредности непознатих из следећих једначина:

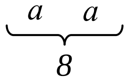
$2a+b+c=13$

$b+c=5$

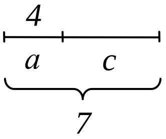
$a+c=7$

Решење:

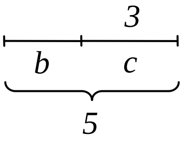
1) 

2) 

, одакле је $a=4$.

3) 

, одакле је $c=3$.

4) 

, одакле је $b=2$.

4.2.4. Еквивалентност израза

Разумевање многих математичких појмова (број, једнакост) и процеса (решавање линеарних једначина применом особина једнакости) засновано је на сазнању да математички објекти попут бројева, израза и једначина могу бити репрезентовани на различите начине без промене вредности, тј. са сачуваном еквиваленцијом. Такође, идеја еквивалентности повезује различите математичке стратегије у кохерентну целину. Тако, на пример, Завод за унапређивање васпитања и образовања предлаже да „уместо да ученици писмено израчунавају 8 x 39, много је брже и једноставније да усмено израчунавају 8 x 40, па да од тог привременог резултата одузму 8“. Предложена стратегија подразумева рачунање у еквивалентној репрезентацији, која користи познате чињенице са намером да се схвате непознате чињенице. У наставном процесу везе између еквивалентних стратегија, као и познавање врста промена у репрезентацијама, које чувају исту вредност или исто решење, требало би да се успоставе експлицитно. Због тога решавање алгебарских проблема треба да буде засновано на употреби просторних репрезентација[26] еквивалентних алгебарских израза.

---

[26] Сврсисходност визуелних репрезентација у приказивању једнакости два израза уочио је математичар Bruce,примењујући задатке тима *Connected Mathematics Project* (Hallagan,2006:114)

Пример 16, у коме се захтева геометријска репрезентација решења, је пример повезивања алгебарског израза са сликама. Решење садржи геометријске елементе, који омогућавају разматрање еквивалентности различитих облика израза. Како се у просторној представи све информације „виде“ истовремено, а не серијски, геометрија омогућава извлачење закључака из више података у исто време. У овим задацима се не сугерише на проналажењу нумеричког одговора, већ на визуелизацији статичног описа броја објеката израженог алгебарским изразом са променљивом. Статична концепција израза узрокована је коришћењем статичног контекста.

Пример 16: „Поделити (исећи) оквир” (ширине 1) датог квадрата (странице a) на три различита начина:

а) $4\ (a + 1)$

б) $a + a + a + a + 4$

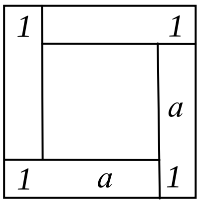
в) $2a + 2\ (a + 2)$

г) Објаснити зашто је сваки израз (*а*-*в*) еквивалентан са изразом $4a$+4.

(пример 16 је преузет из Hallagan, 2006:109)

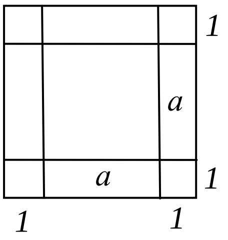
Решење:

а)



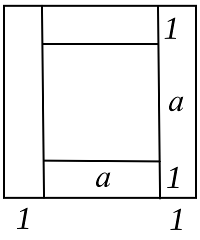
$4(a+1)$

б)



$a+a+a+a+4$

в)



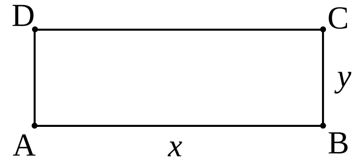
$2a+2(a+2)$

Геометријским моделом може се илустровати инваријантност операције множења, јер „није довољно да ученици само знају да производ двају бројева не мења вредност, ако се један од њих помножи неким бројем, а други подели тим истим бројем, већ то треба да умеју и да примене на конкретним примерима“ (Завод за унапређивање васпитања и образовања). У том смислу, дата је геометријска метода решавања примера 17, који захтева оперативан начин приказивања.

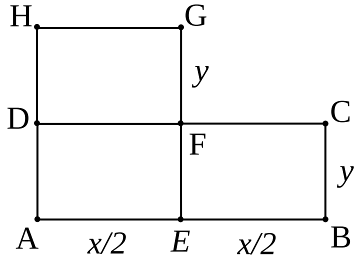
Пример 17: Да ли је тачан исказ: $x{\cdot}y=(x{:}2)\cdot(y\cdot 2)$?

Решење:

1)



2)



Потребно је показати да је $P_{ABCD}=P_{AEGH.}$ Из једнакости $P_{ABCD}=P_{AEFD}+P_{EBCF}$, $P_{AEGH}=P_{AEFD}+P_{DFGH}$ и $P_{EBCF}= P_{DFGH}$ следи да је $P_{ABCD}=P_{AEGH}$, тј. $x\cdot y=(x:2)\cdot(y\cdot 2)$.

4.3. Трансформације (промене)

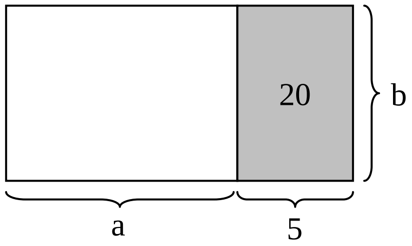
Визуелном анализом геометријских слика, њиховом трансформацијом[27] и комбинацијом, може се открити велики број прикривених информација, које нам могу послужити да се односи међу величинама сагледавају на нов и другачији начин, при чему се откривају нове релације и структурално-функционалне везе. Односи геометријских величина изражавају се алгебарским записом и тиме транспонују на симболички план. Овај начин преноса података са алгебарског на геометријски језик и обрнуто, карактеристичан је за задатке модела промене (задаци у којима се мењају услови). Овде није нагласак на геометријским моделима као епистемолошким објектима, већ на њиховој примени у концептуалном разумевању процеса решавања задатка. У том смислу, за структурирање објекта који се моделује, тј. за стварање прве слике (геометријског модела, који одсликава својства објекта селективно), која се ствара на нивоу чулне перцепције, основна ментална операција је анализа. За стварање друге слике основна операција је генерализација (створена помоћу меморије), док је трећа фаза трансформација слике. Дакле, визуелни приказ у процесу решавања примера 18 и 19 може се схватити као „формација унутрашњег приказа од спољашњег приказа“ (Gilbert и сар., 2008:4). Овде цртежи омогућавају визуелну представу појава које нису видљиве, тј. представу промене података. У том смислу, да бисмо уочили везе између датих и

---

[27] I.S.Yakimanskaya (1980) је открила три врсте трансформација слика: 1) промена просторног положаја слике, 2) промена структуре слике, 3) композиција прве две врсте трансформације (Gusev,2003:91)

тражених величина фигуру је потребно „доградити“, како би везе постале очигледне. На пример, зависност производа од промене чинилаца може се приказати методом правоугаоника, где је правоугаоник геометријски модел производа два броја. Трансформација правоугаоника, чије се дужине страница мењају према условима задатка, има улогу да омогући ученику да, издвајањем геометријских информација, идентификује скривене особине и односе.

Пример 18: Ако се већи од два чиниоца неког производа повећа за 5, производ ће се повећати за 20. Одреди чиниоце тог производа, ако се зна да им је разлика 4. Решавање задатка преноси се на „поље“ геометрије, при чему структура задатка остаје иста. Ако мерни број површине правоугаоника схватимо као производ, а дужине страница као чиниоце, производ два броја *a* и b може се представити у облику правоугаоника (чинилац *a* је дужина, а чинилац b је ширина).



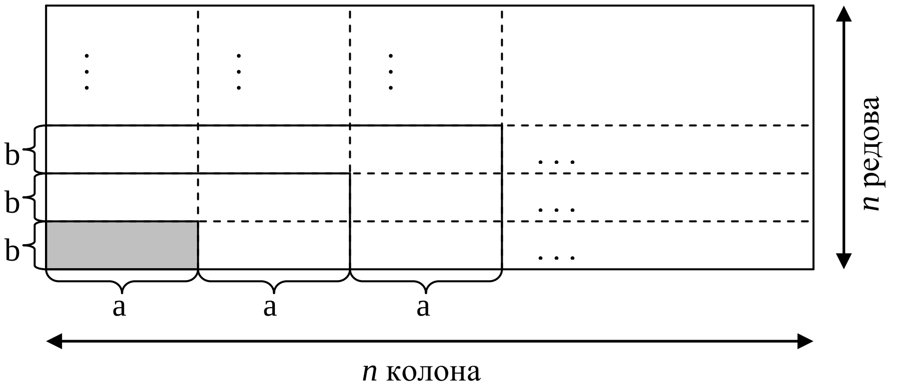
На слици је приказано да је већи чинилац *a* (тј. дужина правоугаоника) увећан за 5. Производ (тј. површина правоугаоника) увећао се према условима задатка за 20, што је представљено осенченим правоугаоником, чија је површина $b \cdot 5 = 20$, одакле је $b = 4$. Како се чиниоци (странице) разликују за 4, други (већи) чинилац је $a = 8$.

.

Проверу решења задатка ученици раде алгебарском методом, испитујући да ли крајњи резултати испуњавају услове задатка, чиме се враћају на алгебарске објекте.

Пример 19: Ако се оба чиниоца повећају 3 пута, колико пута ће се повећати производ? Задатак се може решити методом правоугаоника (странице кореспондирају чиниоцима), од кога ученици очекују да им исприча причу о односу између величина. Трансформацијом правоугаоника према условима задатка ученици закључују да је површина повећана 9 пута, односно производ повећан 9 пута.

Полазећи од чињенице да математичари „нису пасивни примаоци знања“ и да испитују „да ли се конкретни примери могу проширити или генерализовати“ (Schoenfeld, 2012:594), пример 19 може се узети као мотивациони у првој етапи индуктивног приступа доношења општег закључка о промени производа, ако се чиниоци увећају *n* пута. Друга етапа је исказивање тврђења: $na \cdot nb = n^2 \cdot ab$. Трећа етапа је потврда тачности уоченог тврђења универзалним геометријским моделом на слици 8. Другим речима, односе, који су приказани бројевима, ученици могу приказати геометријски и на тај начин их генерализовати.



Слика 8

Доношењем закључака методом непотпуне математичке индукције уважен је дидактички принцип научности наставног процеса. Истовремено, ученици развијају способност изградње ваљаних доказа математичких тврђења.

Упоређивањем различитих правоугаоника из примера 19, ученици закључују да се површине правоугаоника односе као квадрати њихових страница, што води развоју пропорционалног размишљања.

Решавањем примера 19 конструктивном геометријском методом, уводи се идеја размере, уочава се коефицијент увећања и чине први кораци ка изучавању хомотетије и сличности (обезбеђује се вертикално повезивање садржаја).

Наведени примери (од 1 до 19) могу се користити и у процени одређених способности ученика: 1) да препознају обрасце у бројевима и простору, 2) да генерализују на основу појединачних случајева, 3) да уоче да свака интуитивна генерализација не може бити истинита, 4) да извуку више суштински различитих закључака из датих хипотеза, 5) да виде да се неке чињенице могу закључити из других чињеница или из зависности једне чињенице од друге, 6) да инсистирају на прецизним дефиницијама и формулацијама проблема, 7) да имају развијену способност математичког моделовања и 8) способност симболизације. То су само неке од способности, које се по мишљењу Kapur (1990) могу узети као критеријум процене креативности ученика.

Говорећи са просторног аспекта математике, Bishop (1983:184) је истакао разлику између способности које се односе на интерпретацију геометријских података (на разумевање садржаја, који се односи на форму подстицајног материјала), тј. „разумевање визуелних репрезентација и просторног речника који се користи у геометријском раду, ...“ и способности које се односе на визуелне процесе, тј. „подразумевају визуелизацију и превођење апстрактних односа и нефигуративних информација у визуелни облик, … манипулације и трансформације визуелних репрезентација“. Дакле, један од аспеката резулата учења односи се на способност ученика да „представи”, јер коришћење одговарајућих представа чине садржај разумљивим и од централног су значаја за идејно разумевање. На пример, у домену геометрије, од ученика се захтева да су у могућности да опишу, представе и анализирају облик и простор у две и три димензије користећи различите приступе у геометрији, истовремено се осигуравајући у своју математичку писменост. За решавање проблема геометријском методом није довољно поседовати геометријска знања, већ и способност њиховог прерађивања и рекомбиновања. Мисаоним операцијама анализе и синтезе проблем се сагледава на нов начин. При анализи долази до рашчлањивања, повезивања и поновног састављања елемената слике, при чему се као резултат тог мисаоног процеса добија једна потпуно нова слика у којој су битне везе сачуване. Трансформација слике и другачији просторни распоред величина олакшава тражење односа њихове зависности. Успостављајући везе између величина уводимо ознаке (симболе) ради рационализације мишљења.

Речима „Геометрија је ризница богатија ... од било које друге гране математике“ (цитирано у Coxeter,1967:1) Bell указује на то да је геометрија богат извор идеја за наставу математике. Приказивање структуре оригинала геометријским моделом и решавање алгебарских проблема геометријском методом, указује не само на примену геометријских знања, већ и на геометријски начин размишљања у алгебри, који је сликовито-синтетичког карактера. Главни елементи креативног размишљања ученика - интуиција и машта, нераскидиво су повезани са геометријским појмовима и геометријском методом.

Геометријски проблеми не решавају се само методом заснованом на анализи геометријских односа, већ и конструктивном методом (график, дијаграм). Исте ове методе могу се користити у решавању алгебарских проблема. Док график и дијаграм омогућавају „видљиву“ везу између величина, скица (цртеж) омогућава дубље сагледавање суштине проблема. Решавајући алгебарске проблеме применом знања из области геометрије ученици извлаче податке, који нису непосредно садржани у условима задатка, чиме показују да се решавање алгебарског задатка не своди само на манипулацију симболима, већ и на геометријско расуђивање.

Геометријским моделовањем алгебарски задаци добијају геометријски карактер. Алгебарске релације између величина интерпретирају се као односи између геометријских објеката, где се, нпр, производ приказује као површина, збир и разлика као растојање итд. Примена геометријских знања у задацима укључује формирање низа алгебарских израза анализом и апстраховањем геометријских концепата и односа између класа геометријских фигура. Просторне представе и геометријска интуиција омогућавају низ аналитичких корака и синтетички начин размишљања, којим се постиже схватање целине.

5. Активности повезивања садржаја

Савремена кретања у настави подразумевају да ученик буде у центру образовног процеса, да систем наставних метода буде усмерен на самосталан рад ученика. Bruner (1986:72) истиче да подучавати ученика значи учити га да самостално математички мисли, да учествује у процесу сазнавања, јер „знање је процес, а не производ“. „Да би се садржаји, циљеви и задаци наставе математике успешно реализовали, потребно је да се деца све време сусрећу са израдом математичких задатака различитих типова. Знање да се реши математички задатак представља најбољу карактеристику математичког мишљења ученика, као и ниво њиховог математичког образовања. Између математичких способности и знања да се реши математички задатак често стоји знак једнакости” (Дејић, 2000:221). Успостављање математичких веза у настави заснива се на претпоставци да ће ученик играти главну улогу у стварању веза. „Тежиште учења у интегративној настави засновано је на (поновном) откривању и/или примени математичких идеја у активном односу ученика“ (Милинковић, 2011:55). Нагласак на кључним идејама има за циљ да се ученицима пружи знање, које „поклања интелектуална путовања изван дате информације“ (Bruner,1969:39). Из тог разлога, успостављање и разумевање веза би требало да проистекне из истраживања проблемских ситуација. Међутим, одређени проблеми су погодни за одређене везе, тако да ученици треба да науче да препознају ситуације, које позивају на успостављање веза и да примењују везе у тим ситуацијама. Наведени задаци реализују се решавањем одабраних сврсисходних задатака.[28] Адекватно осмишљени проблеми и истраживачке активности, које воде ка откривању идеја, су показатељи да се математички задаци у наставном процесу не користе само као допуна теоријском делу материјала са циљем његовог утврђивања, због чега ученици сматрају да се „математика вежба“, већ омогућавају дубље разумевање функционалне зависности и изградњу математичких знања, тј. омогућавају да се „математика учи“.

Једна од препорука NCTM (1989) је да се ученицима у наставном процесу омогући да:

- препознају еквивалентне репрезентације истог појма
- упоређују процедуру у једној репрезентацији са процедуром у еквивалентној репрезентацији
- препознају примену и вредност везе међу математичким темама

У наведеном саопштењу нагласак је дат на томе да се ученици баве „испитивањем математичких веза” тако да могу да „користе математичке идеје да унапреде своје разумевање других математичких идеја“ (NCTM, 1989: 84). Чињеница да решавање проблема обухвата: „примену различитих репрезентација и прелазак с једне на другу, коришћење симболичког, формалног и техничког језика и операција, прераду и подешавање математичких модела, комбиновање и интегрисање модела, аргументацију, генерализацију“ (PISA, 2006:96), указује на то да се нагласак даје на оне математичке активности које имају кључну улогу у изградњи веза унутар математике. Због тога, задатак не би требало да се фокусира само на идејама у једној области, него „да се пробије кроз вештачке баријере између математичких тема“ (Romberg & Kaput,1999:9). Дакле, задаци треба да се фокусирају на истраживању проблемских ситуација, где се идеје из одређене области могу развити у међусобној повезаности са идејама из друге области.

Начин стицања знања је основ за развој математичког разумевања. „Један од најважнијих когнитивних универзалних едукативних активности је способност решавања проблема... Решење проблема је и циљ и наставно

---

[28] Учење путем решавања проблема са уграђеним математичким идејама Lesh и Zawojewski називају „локални концептуални развој” (English, 2006:304)

средство. Способност формулисања и решавања проблема један је од основних показатеља развоја ученика“ (Асмолов, 2011:91). Задаци су, дакле, средство наставе, док је решавање задатака један од математичких поступака, који уједињује садржаје. Решавање задатака не треба да буде оријентисано ка оперативним техникама, него према структури и општости. Задаци треба да се користе за потпунију разраду садржаја, која је изван једноставног „знати садржај“. На пример, израчунавање површине правоугаоника разликује се од генерализације односа између дужине и површине правоугаоника. У првом случају захтева се само да се зна како се рачуна површина, а у другом се захтева способност анализирања односа између дужине и површине.

Централни проблем у математици је кретање математичких појмова између различитих репрезентација, често преко основних симболичких система (вербалног, нумеричког, геометријског и алгебарског), при чему сваки од њих има своја правила и унутрашњу логику (Schliemann и др, 2003). NCTM (2000:360) наводи да „различите репрезентације подржавају различите начине размишљања и манипулисање математичким објектима. Објекат се може боље разумети када се гледа кроз више објектива“. Зато је неопходно да у току решавања задатака ученици обављају различите активности: повезују разноврсне представе (геометријске, табеларне, симболичке), расуђују, повезују математичке идеје. Све те активности су повезане и представљају носиоце наставе математике. По речима Coxford (House&Coxford, 1995) то су активности, које обезбеђују могућност за више математичких приступа. Међутим, те активности нису у могућности да самостално обављају задатке, већ их ученици користе као помоћна средства за успостављање веза између математичких процеса и појмова. Везе нису физичке природе, већ су објекти у апстрактном смислу те речи, конструкције ума, које олакшавају решавање проблема. Да би се решио задатак коришћењем везе, прво се идентификују услови и захтеви, разматра се њихов однос, а онда се примењују везе на одговарајући начин. При том, ученик користи различите облике изражавања: вербалне, сликовите и симболичке.

Већина ученика ефикасније решава задатак који је у контексту, који омогућава широк опсег рада и коришћење личних способности.. Упоредном анализом наставе математике у САД, Немачкој и Јапану, Stigler и Hiebert (1999) су утврдили да се решавањем проблема на различите начине побољшава квалитет наставе. Решавање проблема на различите начине, поређење стратегија и повезивање различитих појмова подстичу изградњу математичког знања. Решавањем проблема различитим стратегијама од ученика се очекује да прошири способност представљања објеката и њихових односа на различите начине и да се слободно креће између представа. У „кретању” између вербалних, нумеричких, геометријских и симболичких представа евидентно је да постоје две врсте веза. Прво, постоји јака (унутрашња) веза између алгебре и геометрије, као домена математичког знања. Друго, знања алгебре и геометрије омогућавају ученицима да ефикасно раде са четири приказа активности: вербални, нумерички, геометријски и симболички. Везе између ове четири (спољашње) представе остварују се захваљујући знању алгебре и геометрије. Кључна веза уочава се у резултатима учења и односи се на повезивање алгебарских и геометријских појмова.

У настави математике задаци су незаменљиво средство стицања знања и развоја математичког мишљења. Л.Л.Гурова главну пажњу посвећује мисаоним активностима у току решавања задатка: „Задатак – објекат мисаоних активности, који захтева неку практичну трансформацију или одговор на теоријско питање трагајући за условима који омогућавају да се открију везе између познатих и непознатих елемената у њему“ (Валиуллина, 2014:7). Решавање задатака подстиче мисаоне активности, доприноси развоју истраживачких способности, као и развоју способности примене теорије у пракси. То су разлози што је већина часова у наставном процесу посвећена решавању математичких проблема. Зато је циљ да се пронађу начин и средства за повећање ефикасности повезивања садржаја решавањем задатака. Г.А.Балл сматра да задаци представљају систем: „Задатак је систем, чије су обавезне компоненте: а) предмет задатка у изворном стању, б) модел жељеног стања предмета задатка“ (Валиуллина, 2014:7-8). Bransford и Stein (1984) сматрају да процес решавања проблема обухвата пет фаза: идентификовање проблема, дефинисање циљева, истраживање могућих начина решавања, разматрање очекиваних резултата и преиспитивање решења (провера). На путу од разумевања проблема (уочавања услова и захтева) до преиспитивања решења, Arthur и Nance (2007) сматрају да је од највећег значаја фаза истраживања, која води откривању модела решавања проблема. Слично мишљење деле Francisco и Maher (2005), који истичу да је фаза истраживања или моделовања неопходна у процесу решавања проблема, јер води решавању аутентичног математичког проблема. Главни корак у истраживању представља идеја израде плана. Идеја може да има теоријску основу - разумевање појмова математичких објеката (нпр. алгебарских, геометријских) и односа међу њима, или практичну - трансформисање, тј. модификовање услова задатка (нпр. алгебарско моделовање геометрије, геометријско моделовање алгебре). Дакле, примена знања из различитих математичких области у решавању једног задатка доприноси откривању различитих идеја решавања, успостављању веза између различитих модела, као и генерализацији знања.

Током истраживања Hollingsworth, Lokan и McCrae (2003:21) приметили су да ће „ученици више користи имати од: а) излагања са мањим степеном понављања, б) проблема на вишем нивоу, в) више дискусија о алтернативним решењима, г) више могућности објашњења свог мишљења“. Истакли су да „постоји пренаглашеност 'исправне' употребе 'исправне' процедуре за добијање 'исправног' одговора. Могућности ученика да уоче везе између математичких идеја и да разумеју математику, која стоји иза проблема са којима раде, су веома мале“ (исто). Поменули су и „синдром плитке наставе, где се од ученика тражи да прате процедуре без разлога“. „Методе и процеси су једине ствари од значаја у настави математике, а не одговори који су обично у задњем делу књиге“ (Nagy, 2013:23).

Pogrow (1988:84) упозорава да пружајући ученицима „једноставан, досадан материјал“, наставник их спречава у развијању самопоуздања. Он тврди да једино путем успешног решавања сложених проблема ученик може постићи поверење у своје могућности. Наравно, ту је неизбежан период борбе са сложеним проблемима, али Pogrow тврди да је то „контролисано запињање“ од суштинског значаја за развој мишљења на вишим нивоима.

С обзиром на то да развој знања обухвата три корака активности: израду репрезентација, експериментисање са њима и уочавање резултата (Peirce, 1902, према Bussi и др, 2005:45), идеја овог рада је да се проблеми репрезентују геометријским цртежом (чија је функција да прикаже односе), над којим се експериментише употребом сопствених когнитивних средстава. Док решавају математичке проблеме, који су усмерени ка откривању веза између алгебарских и геометријских садржаја, од ученика се очекује да истраже математичке односе и да осмисле начин за решавање проблема, да користе различите стратегије, препознају и схватају начине међусобног повезивања „уграђених“ идеја и формирају „мрежу знања око појмова или идеја“ (Good&Brophy,1991:456). Такав начин рада омогућава да се формирање математичких појмова и решавање проблема реализује у јединству алгебарских и геометријских садржаја. У циљу повезивања садржаја, решавање проблемских задатака треба да буде засновано на геометријском и алгебарском моделовању и успостављању ланчаних веза између модела, које се може реализовати: а) паралелним решавањем задатака двема методама - алгебарском и геометријском, б) једном методом која подразумева комбинацију алгебарске и геометријске методе решавања проблема. Како, у когнитивном домену, моделовање подразумева екстернализацију углавном интерних објеката и процеса, способност коришћења модела зависи од разумевања начина на који је он уграђен у контекст проблемске ситуације.

Неки од главних елемената наставе путем решавања проблема, са циљем реализације њихове развојне функције, у смислу когнитивних и креативних способности ученика, су: а) пружање довољно информација ученицима да утврде позадину проблема, б) подстицање ученика да генерализују правила и појмове, в) смањење улоге наставника у пружању упутстава током процеса решавања проблема (Evan & Lappan, 1994). Наведени елементи захтевају посебну организацију наставног материјала, која подразумева структурирање информационо-предметног материјала (представљеног у облику текста) и огранизацију активности ученика усмерених на учење путем решавања задатака.

5.1. Полупрограмирани материјал

„Методски приступ увођења одређених математичких појмова и презентовања њихових међусобних веза ... директно условљава методу рада, а самим тим и преношење знања из области математике“ (Јешић, 2008:42). Одабиром методског приступа наставник у великој мери утиче на ток и квалитет наставног процеса. Ово је посебно важно у разредној настави где јединство алгебре и геометрије треба да дође до изражаја. Методски приступ заснован на комбинацији геометријског и алгебарског моделовања даје могућност разноврсних метода рада. У склопу оваквог приступа успешно се могу изводити облици рада који обезбеђују активну наставу. Активна настава подразумева активну улогу ученика у наставном процесу. Један од облика активне наставе је полупрограмирана настава.

Циљ истицања рада на полупрограмираном материјалу је да се укаже на неопходну помоћ ученицима од стране наставника, јер, на основу емпиријских истраживања, закључујемо да „не можемо очекивати да се способност математичког моделовања природно стекне у процесу учења математике, већ се мора посебно научити“ (Borromeo Ferri, 2013:30). Doerr и English (2003) истичу да су за математичко моделовање неопходне следеће активности: 1) познавање природе величина и операција, које се користе , 2) избор контекста, у ком ће се формирати модели, 3) развој и дораду модела на начин који је стваралачки. Решавање проблема путем моделовања захтева две међусобно зависне компоненте: 1) когнитивну - познавање структуре података и 2) метакогнитивну - тражење и анализу образаца (модела) (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Осим тога, неопходно је разумети како се концепти, процедуре и математички резултати у једној математичкој дисциплини користе за решавање проблема у другим математичким дисциплинама. Како активности моделовања подразумевају „... интерпретацију информација у задатку и интерпретацију тражених резултата“ (Zawojewski, 2010:239), прво се у процесу моделовања идентификују варијабле које су од кључног значаја за формирање модела. Затим, одабиром репрезентације за описивање релација између варијабли, тј. формирањем модела, ученицима се омогућава редефинисање проблема, чиме се наговештава стратегија, која упућује на познати контекст у коме могу самостално да истражују проблем, јер „ми разумемо нешто, ако видимо како се то се односи или како је повезано са другим стварима које знамо“ (Hiebert & Carpenter,1997:4), а „ниво разумевања је одређен према броју и јачини веза“ (Hiebert & Carpenter,1992:67). Провером и интерпретацијом резултата, у односу на полазни проблем, завршава се решавање проблема моделовањем. Разумевање математичких појмова, образлагање математичким аргументима и провера резултата омогућавају да ученици критички анализирају модел и његова ограничења (PISA, 2006). Током ових етапа моделовања ученици су укључени у низ активности неопходних за конфигурацију, структурирање и решавање проблема: претраживање информација, идентификација и избор варијабли, изградња хипотеза, прелаз са језика једног модела на други, примена претходног знања, упоређивање различитих идеја, генерализација чињеница, стицање знања из различитих области.

Материјал, намењен за активно учење, треба да буде структуриран по принципу „развојне помоћи“, јер ако активности „нису повезане са когнитивним процесима ученика и нису у складу са циљевима часа, можда неће много допринети у академском напретку ученика” (Cankoy,2014:221). Задаци треба да обезбеде поступност у раду. Сваки наредни корак треба да обухвати елементе претходних, а да садржи и нешто ново. Овакав рад се организује са циљем дубљег схватања градива и да се ученици оспособе да откривају везе између чињеница, односно да их систематизују и уопштавају. Путем узастопних упутстава ученици се подстичу у решавању проблема на смислен начин, а рад се усмерава у правцу постизања већег степена самосталности и активирања когнитивних способности ученика. Интеграција геометријских приказа са текстом има за циљ да омогући промену нивоа апстракције. Дата упутства омогућавају ученицима да постигну успешне резултате у обављању задатака и постепен прелазак на виши ниво размишљања и стварање зоне наредног развоја. Зона наредног развоја је „раздаљина између стварног развојног нивоа, који постоји независно од решавања проблема, и нивоа потенцијалног развоја одређеног путем решавања проблема уз смернице одрасле особе или у сарадњи са вршњацима, који су више способни“ (Vygotsky, 1978:86). Wells (1999, 2000) истиче да је настанак зоне наредног развоја условљен мисаоним активностима, а смернице не долазе само од осталих учесника, већ и посредством разних средстава.

Материјал треба да садржи инструкције и питања, која усмеравају когнитивне активности ученика и омогућавају да поред уобичајених радних корака у току решавања проблема, постаје видљив и начин размишљања који стоји иза процедура. Дакле, писане инструкције обезбеђују трајност исходишних размишљања тиме што ученицима омогућавају да се касније позову на иста. Такође, упоређивање индивидуалног рада ученика са датим инструкцијама је вид самоконтроле, која мотивише ученика у даљем раду.

Питања у материјалу треба да се ослањају на општа питања која укључују принципе развојне психологије, а која су предложили Biggs и Collis (1982). Biggs је утврдио да када ученици одговоре на питање, њихови се одговори развијају од фокусирања на једну ставку, до разматрања неколико релевантних ставки, а затим на упоређивање разнородних ставки до којих су дошли и, на крају, питање се разматра у ширем контексту увођењем материјала који се разликује од полазног.

Основ за израду дидактичког материјала у овом раду су идеје Drake (2014) (према Tyminski и др, 2014:469): 1) дечије математичке идеје и разумевања произилазе из решавања проблема, 2) наставници могу да користе питања, која ученике усмеравају ка развоју математичког разумевања и смисленог решавања проблема. Пратећи текст, односно питања, треба да усмери ученика да осмисли адекватне измене (трансформације) и активности повезивања алгебарских и геометријских садржаја, које воде решавању проблема. Тиме се истовремено постиже да читање постаје део процеса активног учења. Приликом решавања задатака од ученика се тражи да изграде везе између текста и геометријских представа и да прошире и примене математичко знање.

Материјал може да садржи две групе задатака, које се односе на две етапе изучавања садржаја**.** У првој етапи (пример 1) одговарајућа питања треба да омогуће ученицима да:

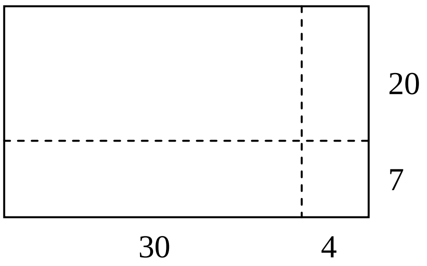
- податаке разматрају у целини, у кохерентној структури и значењу
- уочавају и примењују међусобне везе расположивих информација
- извлаче опште закључке у оквиру контекста расположивих података.

Задатак ученика је да протумачи математичке релације приказане у тексту, да идентификује симболичке приказе, који би одговарали односима, и тим приказима попуњава празнине, тако да исказ има смисла.

Пример 1 се односи на аритметичко – алгебарски део, јер се на нивоу школовања, које се овде разматра, специфична пажња посвећује могућности да се изрази разумеју како на оперативном тако и на структурном нивоу и могућности да се ученицима прилагоди алгебарска интерпретација, како би спроводили алгебарске активности. Рачунске процедуре градимо директно преко познавања појма броја и његових својстава. Било која процедура рачунања подразумева трансформацију постављеног задатка на један или више лакших подзадатака, који деца већ знају како да ураде. На пример, задатак да се израчуна производ бројева 34 и 27 може се заменити примером 1. Процес мењања задатка са еквивалентним, али лакшим подзадацима, подразумева: а) трансформацију бројева, б) трансформације датог рачунског задатка, в) израчунавање. Аритметичко и алгебарско тумачење збира „20 + 7“ води ка његовој динамичној процедуралној (оперативној) концепцији и статичној структурној перцепцији, респективно. Наиме, израз „20 + 7” је у аритметици процес, али у алгебри је готов производ.

Текст дидактичког материјала усмерен је на разматрање и увиђање значаја геометријских слика за решавање проблема.

Пример 1: Бројеве 34 и 27 раставити на збир месних вредности, а затим израчунати њихов производ применом дистрибутивности множења према сабирању.



Бројеви 34 и 27 могу се написати у облику збира месних вредности: 34= ___+___, 27= ___+___. Вредност производа бројева 34 и 27 представља мерни број површине правоугаоника са слике: 34·27=(30+4)·(20+7)=P. На основу особине да је површина правоугаоника једнака збиру површина његових делова, следи да је P=30·20+___·___+___·___+___·___.

Из последње две једнакости, на основу транзитивности релације једнакости, следи да је (30+4)·(20+7)=600+___+___+___, одакле следи: 34·27=___.

Овај модел множења двоцифрених бројева може да служи као референтна основа, коју ученици могу да користе као подршку у множењу вишецифрених бројева. Наиме, применом Мартоновог „модела сепарације“ наведени приступ у множењу можемо проширити и на остале бројеве. „Да би осетили одређени аспект нечега и да би тај аспект одвајали од других аспеката, он мора варирати док остали аспекти остају инваријантни” (Marton и др, 2004:16). Другим речима, да би примену дистрибутивног закона (са геометријским приступом) проширили на множење осталих бројева, после рада на задацима који се односе на множење двоцифрених бројева, ученици прелазе на разматрање материјала у контексту множења вишецифрених бројева, чиме се ученицима омогућава да:

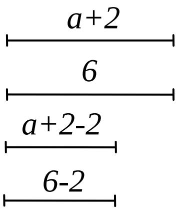
- користе међусобне односе свих доступних информација и да их испитују у оквиру одговарајућих теорија
- користе дедуктивно логичко закључивање
- генерализују хипотетичке ситуације
- препознају алтернативне приступе и комбиновано расуђивање
- проширују идеје за нове могућности

- претражују начине провере могућих вредности променљивих, као и везе између њих

За разумевање еквивалентних израза и једначина, за комбиновање и формирање нових израза, као и за откривање образаца промене и решавање једначина, користе се својства релације једнакости. „Један од предуслова за формирање и адекватно тумачење структурне репрезентације, као што је једначина, је разумевање симетричне и транзитивне природе једнакости, коју понекад називају 'лево-десна еквивалентност' у односу на знак једнакости“ (Kieran, 1992:398). Међутим, поред познавања основних особина (рефлексивност, симетричност и транзитивност), за решавање једначина је неопходно познавање следећих особина релације једнакости: 1) за сваки број c, из $a=b$ следи $a+c=b+c$, 2) за сваки број c мањи од a, из $a=b$ следи a-c=b-c, 3) за сваки број c различит од 0, из $a=b$ следи $a\cdot c=b\cdot c$, a:c=b:c. „На подесан визуелан начин или кроз пригодан језик треба истицати својства релације, захтевајући при томе да их ученици и сами уочавају, исправно представљају и у том смислу са њима активно раде. При томе је излишно прерано инсистирање на терминима који изражавају својства релација, као и на одређивању појмова путем дефиниција“ (Наставни програм за четврти разред основног образовања). Да ученици наведена својства не би прихватали као декларативна знања, тј. као скуп независних „ако-онда” правила, која упућују на низ дозвољених трансформација приликом решавања једначине, треба их репрезентовати и у другим семиотичким системима, чија правила повезују различите репрезентације једног објекта. У складу са тим, путања активног процеса изучавања особина релације једнакости и њихове примене илустрована је дидактичким полупрограмираним материјалом у примеру 2, који ученицима пружа листу описа односа између два израза са статичног и са оперативног аспекта, где је нагласак на трансферу са геометријске на симболичку репрезентацију и обрнуто. Овај процес испитивања алгебарских једнакости почиње геометријским репрезентацијама, а завршава се изградњом и решавањем линеарне једначине облика $ax+b=cx+d$. Решавању једначине претходи низ корака са директно видљивим особинама релације једнакости, тј. низ задатака са информацијама визуелизованим у геометријском окружењу. Решавање задатака захтева низ математичких активности, које подржавају везе унутар математичких садржаја. Полазећи од нивоа сложености задатака, ученици на првом нивоу (1, 2. и 3. задатак) репродукују своја знања, на другом нивоу (4. и 5. задатак) користе знања у новим ситуацијама, а на креативном нивоу (6. задатак) проблем решавају хеуристичком методом. Прогресија од нижих ка вишим нивоима способности није само хронолошког карактера, већ се огледа и унутар проблемских ситуација у различитим контекстима (у 1, 2, 3. и 4. задатку), које су структуриране у два корака - подзадатка 1) и 2). Процес решавања подзадатака са ознаком „1)“ је оперативног карактера - подразумева репрезентацију промена услова задатка комбинацијом геометријске трансформације и бројевних ознака, која, преко аритметичких прорачуна, води до решења; тј. представља почетну фазу интеракције активности упоређивања израза и употребе геометријских модела, која се односи на нумеричке вредности. Решавање подзадатака са ознаком „2)“ је релацијског карактера – подразумева репрезентацију промена услова задатка комбинацијом геометријске трансформације и алгебарских симбола, а затим релацијско расуђивање о томе да ли је трансформација изведена на другој од две дате једнакости сачувала квантитативни однос изражен у првој једнакости; тј. ученицима пружа могућност да предвиде однос између израза без рачунања са конкретним бројевима. Четврти задатак представља контрапример за трећи задатак. Активности у решавању 5. задатка интегришу скоро све алгебарске и геометријске способности коришћене у изради претходних задатака. Активности у решавању 6. задатка чине завршну фазу рада на овом садржају и подразумевају примену стечених способности на решавање једначине.

Пример 2:

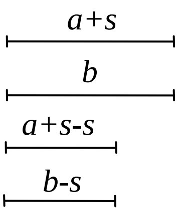
1.1)



а) Ако се дужина две подударне дужи (a+2 и 6) смањи за 2, да ли су дужине новодобијених дужи једнаке?

б) Ако је тачан исказ a+2 =6, да ли је тачан исказ a+2-2=6-2, тј. a=6-2?

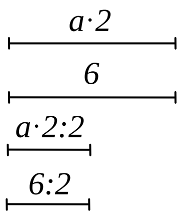
2)



а) Ако се дужина две подударне дужи ($a+s$ и b) смањи за s, да ли су дужине новодобијених дужи једнаке?

б) Ако је тачан исказ $a+s=b$, да ли је тачан исказ $a+s-s=b-s$, тј. $a=b-s$?

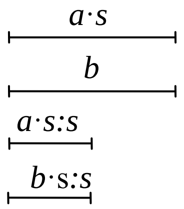
2.1)



а) Ако се дужина две подударне дужи ($a\cdot 2$ и 6) смањи 2 пута, да ли су дужине новодобијених дужи једнаке?

б) Ако је тачан исказ $a\cdot 2=6$, да ли је тачан исказ $a\cdot 2:2=6:2$, тј. $a=6:2$?

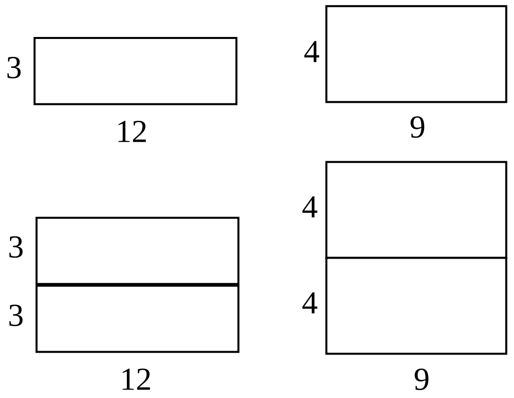
2)



а) Ако се дужина две подударне дужи ($a\cdot s$ и b) смањи s пута, да ли су дужине новодобијених дужи једнаке?

б) Ако је тачан исказ $a\cdot s=b$, да ли је тачан исказ $a\cdot s:s=b:s$, тј. $a=b:s$?

3. 1)



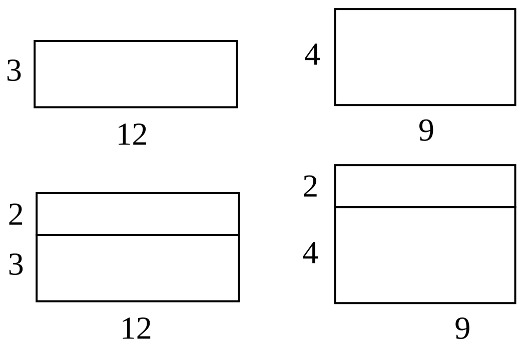
а) Ако се ширина два различита правоугаоника (12x3 и 9x4), који имају једнаке површине (36), повећа 2 пута, да ли су површине новодобијених правоугаоника једнаке?

б) Ако је тачан исказ $12\cdot 3=9\cdot 4$, да ли је тачан исказ $12\cdot(3\cdot 2)=9\cdot(4\cdot 2)$?

2) а) Ако се ширина два различита правоугаоника (axb и cxd), који имају једнаке површине, повећа s пута, да ли су површине новодобијених правоугаоника једнаке?

б) Ако је тачан исказ $a\cdot b=c\cdot d$, да ли је тачан исказ $a\cdot(b\cdot s)=c\cdot(d\cdot s)$?

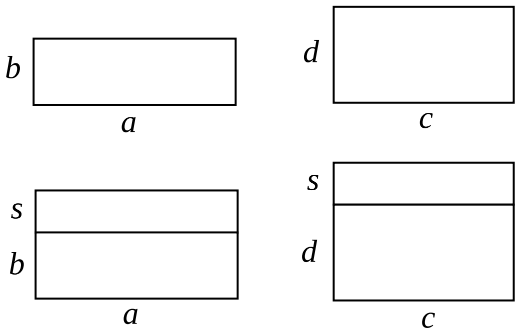
4. 1)



а) Ако се ширина два различита правоугаоника (12x3 и 9x4), који имају једнаке површине (36), повећа за 2, да ли су површине новодобијених правоугаоника једнаке?

б) Ако је тачан исказ $12\cdot 3=9\cdot 4$, да ли је тачан исказ $12\cdot(3+2)=9\cdot(4+2)$?

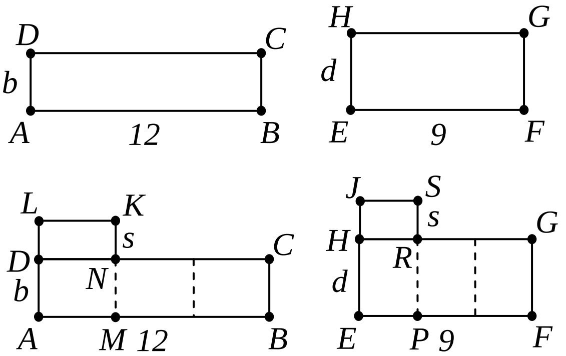
2)



а) Ако се ширина два различита правоугаоника (axb и cxd), који имају једнаке површине, повећа за s, да ли су површине новодобијених правоугаоника једнаке?

б) Ако је тачан исказ $a\cdot b= c\cdot d$, да ли је тачан исказ $a\cdot(b+s)= c\cdot(d+s)$?

5. а) Ако се дужина два различита правоугаоника (12xb и 9xd), који имају једнаке површине, смањи 3 пута, а ширина повећа за s, да ли су површине новодобијених правоугаоника једнаке?



Решење: а) Површине новодобијених правоугаоника *AMKL* и *EPSJ* једнаке су збиру површина правоугаоника_____ и _____, односно $P_{AMKL}=4b+$___ и $P_{EPSJ}=3d+$___. Упоређивање P_{AMKL} и P_{EPSJ} своди се на упоређивање израза $4b+4s$ и $3d+3s$.

Ако су површине правоугаоника *ABCD* и *EFGH* једнаке, тј. $12b=9d$, онда су једнаке и површине њихових трећина, тј. $4b=3d$, те се упоређивање израза $4b+4s$ и $3d+3s$ своди на упоређивање израза $4s$ и $3s$. Како је $4s$ различито од $3s$, закључујемо да се површине правоугаоника *AMKL* и *EPSJ* разликују.

б) Ако је тачан исказ: $12\cdot b= 9\cdot d$, да ли је тачан исказ: $(12:3)\cdot(b+s)= (9:3)\cdot(d+s)$?

6. Ако се дужина a правоугаоника (axb) смањи за 4, а ширина b повећа 3 пута, површина се неће променити. Колико износи дужина странице a?

Решење: Задатак се може преформулисати у следећи: „Два различита правоугаоника (axb) и ((a-4)x(3b)) имају једнаке површине. Колико износи дужина странице a?”, чија је геометријска интерпретација аналогна задатку 5.а). Однос између познатих и непознатих величина може се описати једначином, чије решавање захтева примену особина релације једнакости.

Наведени модел истраживања особина релације једнакости може бити увод у истраживање зависности између резултата и компонената операције. Другим речима, зависност збира од промене сабирака (у подзадатку 1.2)б)), зависност разлике од промене умањеника/умањиоца, зависност производа од промене чинилаца (у подзадатку 2.2)б)), могу се разматрати као примери примене особина релације једнакости на одговарајућим исказима; док се сталност збира, сталност разлике и сталност производа може истраживати у оквиру задатака аналогних задацима 5 и 6.

Рад на полупрограмираном материјалу је форма часа која омогућава да ученици сами себе контролишу док решавају проблеме. Сврха рада на полупрограмираном материјалу је да се ученици укључе у процес стварања и тестирања хипотеза о узрочно-последичним односима између варијабли. То је систематски процес који се фокусира на питање: „Шта ученици уче и како и зашто упутства утичу на то што уче?“ и састоји се од четири корака. Први корак је пружање инструкција ученицима, које им омогућавају постизање жељених циљева. Други корак је анализа одговора ученика на задатке у материјалу, на основу које се процењује да ли и у којој мери су наставни циљеви постигнути током часа. Трећи корак је анализа хипотезе, која се односи на оствареност наставних циљева. Четврти корак подразумева коришћење хипотезе за испитивање будућих часова (Hiebert и др, 2007). Дакле, рад ученика на полупрограмираном материјалу даје наставницима информације „да анализирају оно што они и њихови ученици раде и размотре како ти поступци утичу на учење ученика“ (NCTM, 2000:19).

5.2. Дивергентни задаци

Истраживачи попут Prouse (1964,1967), Balka (1974) и Kapur (1990) у оквиру критеријума за процену математичке креативности ученика предложили су и процену способности различитих начина размишљања. Balka (1974) је истакао два конвергентна и четири дивергентна критеријума, редом: 1) способност примене одређених образаца у математичким ситуацијама, 2) способност утврђивања одређеног начина рамишљања за решавање проблема, 3) способност формулисања математичке хипотезе, која приказује односе између узрока и последица у математичкој ситуацији, 4) способност да се размотре и оцене необичне математичке идеје, 5) способност да се осети оно што недостаје у датој математичкој ситуацији и да се поставе питања, која ће омогућити да се задатак допуни информацијама које недостају, 6) способност распарчавања општег математичког проблема на одређене субпроблеме. Један од критеријума процене креативности ученика је и „способност да се понуди више од једног прихватљивог решења за проблем“ (Prouse,1964,1967), односно „способност препознавања већег броја одговора на једно питање“ (Kapur,1990).

Конвергентни задаци доприносе развоју конвергентног мишљења. Конвергентни проблеми указују на постојање само једног (јединог тачног) одговора, који се може наћи путем строгог логичког закључивања применом одговарајућих правила и алгоритама. Поводом тога Тестов истиче: „Још један узрок формализма у настави математике је оријентација ученика да добију само један тачан одговор. Због тога је потребно систематски користити у настави проблеме који немају јединствен одговор“ (Тестов, 2012:16, цитирано у Гашаров, 2014:30). Настава подразумева употребу „распакованог“ математичког знања, које усмерава на развој способности расуђивања и идејног разумевања. Континуирана употреба иницијално успешног алгоритма у решавању проблема, чак и када то постаје неприкладно, по мишљењу Haylock (1987a, 1987b, 1997), може бити једна врста самоограничења у односу на општи садржај проблема, због чега он предлаже одбацивање фиксираног алгоритма и примену дивергентних задатака. Дивергентни задаци су веома ефикасна дидактичка средства за развој креативног (дивергентног) размишљања ученика, које је по мишљењу Рахимова „ ... највиши и најсложенији облик људског деловања, ... и неопходан услов његовог личног развоја“ (Рахимов, 2003:42, цитирано у Гашаров, 2014:30). Дивергентни проблеми, за разлику од конвергентних, карактеришу се већим бројем решења, који стварају повољне услове за развој креативног размишљања ученика. Задаци, који могу имати више од једног решења, омогућавају ученицима да изнесу разне претпоставке, идеје, судове, што проширује оквире могућности стварања веза и примене знања у новим нестандардним ситуацијама. Ситуације различитих степена неодређености решења, проузроковане дивергентним задацима, захтевају креативно размишљање и примену одређених хеуристичких стратегија да се проблем разуме и реши. Овакви задаци захтевају математичко расуђивање и разумевање, што подразумева проналажење различитих приступа, а самим тим и повезивање садржаја.

Конвергентни и дивергентни задаци често се називају задацима „затвореног и отвореног типа“ (Галиуллина, 2011:40). Структура дивергентних задатака може бити различита: а) задаци са подацима који недостају, б) задаци са захтевом да се формира задатак на основу датог решења или једнакости (Гашаров, Махмудов, 2014). Учење решавањем дивергентних задатака подразумева да ученици користе: 1) методу избора, када анализирају могуће варијанте одговора на захтев задатка, и искључују оне који не испуњавају услове задатка, 2) различите моделе у решавању задатка, 3) различите начине решавања задатка. Задаци су засновани на разумевању и повезивању садржаја, а не на примени образаца као алата за решавање проблема. Сваки задатак захтева интеракцију између идејног и релационог разумевања. „Решавање проблема на различите начине, као (мета-математичко) стање ума, истовремено захтева и негује напредно математичко мишљење“ (Leikin, 2007:2330). Leikin и Levav-Waynberg (2008:234) су истакли да „решавање проблема на више начина доприноси развоју креативности ученика и критичког мишљења“. У суштини, решавање математичких проблема на различите начине не показује само различите начине размишања ученика, већ им помаже у изградњи математичких веза. Истраживања показју да различити начини решавања могу олакшати повезивање различитих елемената знања, чиме се јача мрежа повезаних идеја (Silver и др, 2005). Имајући у виду да је изградња математичких веза између математичких концепата предуслов за концептуално (Hiebert & Lefevre,1986) и релационо разумевање (Skemp,1976), од пресудног значаја за наставу математике је да се ученицима омогући да користе различите начине за решавање математичких проблема. Значајну улогу у повезивању наставних садржаја могу имати и нерутински проблеми и отворена питања са више различитих решења, јер омогућавају ученицима да се ангажују у ситуацијама које захтевају да се формулишу хипотезе, стварају нови проблеми и изводе генерализације (Stenmark, 1989; Lajoie, 1995; Silver & Kenney, 1995). Истовремено, наведене активности су „едукативне за дете, а и информативне за наставника“ (Sullivan & Clarke, 1991, цитирано у Clarke, 1992:164). Истраживања су показала да се код ученика, који су учили математику путем решавања отворених проблема, развија концептуално разумевање, док је код ученика, који следе традиционални приступ, развијено „процедурално разумевање“ (Bingolbali, 2011:19).

Ситуације отворених питања представљају изазов за ученике, јер не захтевају утврђене процедуре и пружају им могућност да истражују структуру задатка и да, користећи знања о концептима и односима, доносе смислене одговоре. Задаци у отвореној форми ученицима дају слободу да постављају проблеме или дају више одговора, који одражавају ниво њиховог разумевања математике и показују колико је широк спектар техника, које користе у решавању проблема. Ови задаци могу да се користе као индикатори нивоа на коме су ученици схватили проблем. На основу ученичке формулације проблема може се проценити да ли је задатак протумачен на оперативном или релацијском нивоу. Општа структура отворених проблема усмерена је на три компоненте: а) компонента која обезбеђује садржај проблемске ситуације, б) информациона компонента, која даје податке из којих се изводи математички модел, в) истраживачка компонента, чији је главни задатак усмерен на решавање проблема (Gerofsky, 2004).

Настава математике, која се фокусира на употребу стандардизованих алгоритама, проузрокује то да ученици уче математику углавном без могућности да користе своје знање за решавање проблема у различитим или непознатим ситуацијама. Такву наставу Schoenfeld (1988) је окарактерисао на следећи начин: „Исувише често се фокусирамо на уске колекције добро дефинисаних задатака и обучавамо ученике да извршавају те задатке рутински, алгоритамским начином рада. ...У ствари, они ће моћи механички да користе такве технике, иако недостају неке најосновније способности размишљања. Овај начин рада, који им омогућава да и сами поверују у то да ‚разумеју' математику, је непоуздан и лажан“ (Schoenfeld,1988, цитирано у Thompson, 2008:96). Задаци, који од ученика захтевају „... да се сете чињенице, да изврше једноставну операцију или реше познату врсту проблема“ (Schmalz, 1973:619) захтевају способност „размишљања нижег реда” (Thompson,2008:97). У циљу подстицања „размишљања вишег реда“, Senk и др. (1997), између осталог, предлажу задатке са више од једног решења. Слично, Haylock (1987a, 1987b, 1997) је за процену математичке креативности предложио задатке: а) у којима се захтева да се формулишу могући проблеми који одговарају датим информацијама, б) који имају више различитих решења. Задатке, у којима се захтева „како формулација нових проблема, тако и преформулација датих проблема“ (Silver,1994:19), Silver сматра средствима за развој креативности. „Дечије представљање математичких идеја стварањем сопствених математичких проблема указује не само на њихово разумевање и степен концептуалног развоја, већ одражава њихову перцепцију о природи математике“ (Ellerton, 1988:281). „Формулација проблема је често битнија од свог решења, које може бити само ствар математичке или експерименталне вештине“ (Einstein and Infeld 1938:92). Milinković (2015:48) истиче да „постоје најмање два разлога за развој способности формулисања проблема код ученика: 1) формулисање математичких проблема који одражавају (не)математичке ситуације постаје важан део процеса моделовања који, заузврат, може да нас доведе до решења реалних животних проблема, 2) формулисање проблема подразумева разумевање садржаја материје“.

Задатке, у којима се захтева формулација проблема, Silver (1994) и Stoyanova (2000) су, на основу математичких активности, сврстали у пет категорија: а) слободна проблемска ситуација, б) проблем са датим одговором, в) проблем који садржи одређене информације, г) питања за проблемску ситуацију, д) проблем који одговара датом рачунању (Silver (1994) and Stoyanova (2000), према Cankoy, 2014:222). Формулисање проблема на основу датих информација Kar и Işık (2014:144) сматрају „алтернативним средством процене“ приликом утврђивања концептуалног разумевања ученика. С обзиром на то да ученици постављају сврсисходне проблеме када имају контекст у коме ће поставити проблем (Lowrie, 2002, према Cankoy, 2014:222), у примерима 1 и 2 захтева се формулација проблема на основу датих слика и једначина и, на основу тога, спадају у категорију структурираних проблемских ситуација.[29] У примерима 1 и 2 условима задатка одговара више решења, којима је илустровано „више представа повезаних истим проблемом“ (Swan, 2005:16). Другим речима, од ученика се тражи да опишу математичке релације којима би се могли приказати подаци из услова задатка. У наведеним примерима, захтев да се алгебарски модел презентује њему еквивалентном геометријском формом и обрнуто, резултира преуређењем елемената у структури проблема на начин који његову алгебарску природу мења у геометријску и обрнуто. Дакле, да би

---

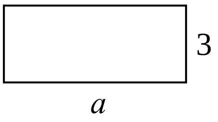
[29] Stoyanova (2003) је идентификовала три категорије формулисања проблема: а) слободне ситуације, у којима нема ограничења за фомулацију проблема, б) полуструктуриране ситуације, у којима ученик треба да истражи структуру дате отворене ситуације, в) структуриране проблемске ситуације, у којима ученици постављају проблеме преформулацијом већ решених проблема или мењањем услова датог проблема (Kılıc,2013:678).

ученици решили примере 1 и 2 није довољно да само преформулишу текст задатка, већ да га преведу у други контекст тако да структура остане непромењена. Другим речима, активности формулисања проблема омогућавају ученицима не само проналажење решења, већ истраживање структуре проблема и његовог решења (Stoyanova, 2003).

Пример 1: Формулисати геометријски задатак, чији је алгебарски модел: Реши једначину $4\cdot x=100$. Како је по својој природи задатак отворен за вишеструка тумачења, могуће формулације проблема у геометријском контексту су: 1)Одреди дужину странице квадрата обима $100cm$, 2) Одреди дужину странице правоугаоника површине $100cm^2$, 3) Одреди дужину странице правоугаоника обима $100cm$ (квадрат је правоугаоник).

Интерпретација односа датог у геометријском контексту, у примеру 2, огледа се у препознавању његове симболичке формулације. Уочавањем да једнакости $P=a\cdot 3$ и $a=P:3$ описују исти однос ученици развијају разумевање еквивалентних једнакости, односно инверзних односа.

Пример 2: Којом се алгебарском формулацијом може описати однос површине правоугаоника (P) и његове дужине (a) са слике 9?

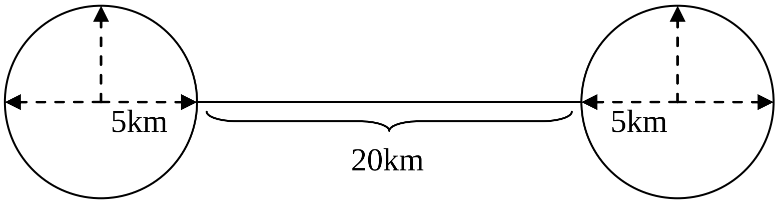


а) $P=a\cdot 3$, б) $P= a+3$, в) $a=P:3$, г) $a=P\cdot 3$, д) $a=P-3$

Слика 9

Истраживачка компонента проблема отвореног типа наглашена је и у примеру 3, у коме је више решења проузроковано неодређеним условима задатка.

Пример 3: Растојање између два места је $30km$. Из тих места истовремено су кренула два пешака крећући се брзином $5km/h$. На ком растојању ће они бити после $1h$? Визуелизацијом сценарија преко модела цртежа (слика 9) садржај задатка се уграђује у математичку структуру, у којој се могућа решења разматрају геометријском методом, тј. проблем се преноси на разматрање међусобног положаја тачака две кружнице (слика 10). Како је непознато у ком се смеру крећу пешаци, положај пешака (тачака на кружници) је неодређен, што проузрокује низ одговора (од $20km$ до $40km$).



Слика 10

Решавањем примера 3 ученици се упознају са континуираним величинама, код којих целина претходи деловима, насупрот дискретним величинама, код којих делови претходе целини. Осим тога, развијају осећај за бесконачност, непрекидност, интервал. Модификацијом примера 3 (променом растојања, времена или брзине) могу се разматрати положаји (растојања) тачака две кружнице у зависности од тога да ли се кружнице секу, додирују или немају заједничких тачака.

Анализом наставних уџбеника утврђено је да је мали број задатака усмерених на повезивање знања стечених из више математичких области и мали број питања усмерених на дубље расветљавање и сазнавање одређених веза између математичких појмова и операција, која би била усмерена на повезивање и систематизацију знања ученика. У уџбеницима су углавном заступљене линеарне форме задатака. То су задаци у којима се захтева израчунавање бројевне вредности израза или решавање проблема директном применом правила. Користећи једноставне квантитативне алгоритме ученици остају у оквирима расположивих података и не извлаче податке ван система разматрања. Захтеви у нелинеарној форми задатака подстичу на циклично повезивање садржаја, где је сваки решени проблем корак ка решавању већег проблема, чиме се ученицима пружа структурирана подршка у решавању сложенијих проблема. Однос услова и захтева у различитим нелинеарним формама истог задатка усмерава мисаони процес на дубоко изучавање самог задатка, на његове унутрашње услове, са циљем да се реши применом различитих метода. Трансформација форме задатка омогућава да се ученици ангажују у изградњи знања кроз разне процесе и да стичу нова знања кроз самоистраживање. Преласком са једне стратегије решавања на другу у оквиру једног проблема ученици уче да препознају када коју стратегију користити у новим ситуацијама или како могу градити нове стратегије. Тиме се постиже садржајно-методичка повезаност математичких дисциплина.

„Различитим формама захтева чији је основни циљ препознавање и разумевање математичких појмова и њихових односа, свим ученицима се пружа једнака могућност да не уче решавање математичких задатака, већ да уче математику коју у тим задацима треба да примене да би решили одређени проблем“ (Јешић, 2008:48). Представљање исте ситуације из потпуно другачије перспективе омогућава да се развије способност успостављања и примене широког спектра веза између садржаја, чиме се повећава вероватноћа откривања решења.

На основу еквивалентних структурних карактеристика може се формирати низ задатака који се могу односити на различите представе. Коришћењем различитих контекстуалних приступа наставници помажу ученицима да прелазе са једног на други проблем и упоређују њихову структуру. Различити прикази истог проблема омогућавају разматрање објеката са више аспеката и успостављање веза између различитих математичких појмова и поступака. Примери 4 и 5 илуструју проблеме, који се сматрају различитим, али у ствари су структурно еквивалентни и само се разликују по контексту у коме су формулисани, тј. по форми података и њихових односа који су описани на бази различитих репрезентација (геометријске и алгебарске). Варијација ситуација и репрезентација у примерима 4, 5 и 6, не захтева хијерархијске активности, већ се когнитивни развој односи на стицање способности разумевања повезаности алгебарских и геометријских садржаја. Како употреба алгебарских симбола не подразумева алгебарско расуђивање и обрнуто (Amerom, 2002), циљ ових задатака је да се њиховим решавањем процени ниво алгебарског расуђивања.

Пример 4: а) Израчунај квадрат броја, који је четири пута мањи од производа бројева 4 и 9.

б) Израчунај површину квадрата, коме је мерни број обима (изражен у центиметрима) једнак мерном броју површине правоугаоника димензија $4cm$ и $9cm$?

Пример 5: а) Ако се дужина правоугаоника повећа за 3 cm, површина ће му се повећати за $12cm^2$. Колике су биле првобитне странице правоугаоника, ако се зна да им је разлика 1 cm ?

б) Ако се већи чинилац повећа за 3, производ ће се повећати за 12. Колике су биле првобитне вредности чинилаца, ако се зна да им је разлика 1?

Креативном размишљању ученика доприносе и задаци формулисани у форми „тачно-нетачно“, у којима се захтева да се одреде различите форме задатка према условима. У примеру 6 од ученика се захтева да препознају исправну формулацију геометријског проблема према датом алгебарском моделу. У датој проблемској ситуацији ученици могу уочити квази-присуство непознате, али, на основу захтева задатка, треба да закључе да одређивање њене вредности није саставни део процеса решавања. Наиме, решавање задатка подразумева познавање особина правоугаоника, као и релација између странице и обима, односно странице и површине.

Пример 6: Који је од следећих проблема представљен једначином $25 \cdot x = 100$:

а) Израчунај страницу квадрата, ако је обим $100cm$

б) Израчунај страницу правоугаоника, ако је површина $100cm^2$

в) Израчунај страницу квадрата, ако је површина$100cm^2$?

Како примери (од 1 до 6) захтевају примену знања из више математичких дисциплина, њиховим решавањем ученици процењују своја знања и степен разумевања. Такви задаци могу се користити за процену следећих способности: превазилажење алгоритамског решавања проблема, формулација математичких проблема, решавање проблема са више различитих решења.

Из наведених примера може се закључити да дивергентни задаци, усмерени на повезивање алгебарских и геометријских садржаја, имају следеће карактеристике:

- захтевају способност математичког размишљања и примену основних знања и вештина из различитих области математике (нпр. аритметике, алгебре, геометрије) за њихово решавање
- развијају дубину разумевања великих математичких идеја, појмова, вештина и метода
- омогућавају тумачење математичких односа приказаних у текстуалним и другим репрезентацијама
- омогућавају експериментисање са различитим приступима у решавању

6. Утицај успостављања веза између репрезентација на развој математичке писмености

Проналажење одговарајућег алгебарског (геометријског) модела за геометријски (алгебарски) проблем, као и превођење из једног контекста у други, захтева разумевање односа између алгебарског и геометријског језика. Брунер истиче да је језик саставни део манипулативних активности у кретању од конкретног ка апстрактном мишљењу (Bruner, 1973). MacGregor и Price истичу да „разумевање језичких структура и способност манипулације тим структурама испољавају дубље когнитивне процесе, који су у основи разумевања алгебарског записа” (MacGregor & Price,1999:462). Дефиниција је језичка форма, која је од великог значаја у настави математике. Међутим, постоји много математичких концепата за чије разумевање није довољна једна формална дефиниција. Да би ученици разумели структуру дефиниције, неопходно је да је изграде у оквиру истраживања појмова, користећи математички језик у различитим језичким задацима.

Писменост има значајну улогу у настави математике, у којој ученици „читају, гледају, анализирају и тумаче математички представљен текст, слике, симболе, табеле, графиконе ... и комуницирају на различите начине - на пример, усмено, визуелно, електронски, симболично и графички“ (Queensland Studies Authority, 2004:5). Braselton и Decker (1994:276) сматрају да је неопходно да, пре него што примене математичке вештине, ученици разумеју математички текст, који представља „сложену мешавину речи, бројева, слова, симбола, а некад и графика“. Употреба знакова доводи људе до специфичне структуре понашања, које се одваја од биолошког развоја и ствара „нове облике културно-заснованог психолошког процеса” (Vygotsky,1987:64). Текст или систем знакова Vygotsky (1974:227) сматра „психолошким алатима“ (оријентисаним ка унутра), које Engestroem (1987:62) назива „секундарним предметима“ за употребу (док технички алат, као што је прибор за цртање, назива примарним предметима).

Језик математике је језик математичких односа приказаних у различитим семиотичким системима. Јединственост захтева математичке писмености, у поређењу са захтевима писмености других предмета, је што указује на потребу усмерености наставе на различите семиотичке системе. У семиотичким системима могућа је не само трансформација репрезентације у другу у истом семиотичком систему (процедура), већ и трансформација репрезентације у другу у другом семиотичком систему (конверзија), којој је Duval (2006, према Santi, 2011:287) дао централну улогу у односу на друге когнитивне процесе и сматра је когнитивним прагом концептуализације у математици. Задатак наставника је да омогући ученицима да се фокусирају на семиотичке системе, које чини математички текст, заједно са симболима и скраћеницама, визуелним приказима, писаним текстом и говором.

Разумевање језика математичких проблема и односа захтева јединствене когнитивние способности. Когнитивне способности, које воде ка успешном решавању текстуалних проблема, по мишљењу Davis (2013:20) односе се на „семантичко усклађивање“ и „аналогно закључивање“. Семантичко усклађивање односи се на усклађивање текста преформулацијом проблема у математичку структуру, која доводи до решења. Семантичко усклађивање подразумева одговарајуће активности ученика и њихове исходе: 1) читањем се ученик упознаје са проблемом, преузима информације из писаног текста, дијаграма, графикона, 2) писањем познатих и непознатих величина, ученик истиче познате информације и тражене (непознате) величине. Читање текста и записивање услова и захтева проблема биће сврсисходни само уколико ученици имају развијене семантичке способности за процес аналогног закључивања. Пратеће активности аналогног закључивања су: 1) израда и реализација плана решавања проблема, 2) верификација решења, којом се проверава разумевање семантичког усклађивања и аналогног закључивања. Аналогно закључивање у процесу учења, по мишљењу Пијажеа, подразумава извођење решења успостављањем односа између конкретне илустрације и апстрактних математичких појмова (Bassok, 2001). Процес аналогног закључивања темељи се на аналогонима (са којима је ученик раније упознат), са којих се знања преносе и усклађују према апстрактном појму у циљу разумевања (Fluellen, 2007; Gentner, 1983). Bassok (2001) истиче да је у процесу аналогног закључивања неопходно да ученици схвате однос „база – мета“. Наиме, проблемске ситуације захтевају конкретне илустрације проблема у контекстима који су познати ученицима. Учење је, у том случају, усредсређено на кораке потребне за стварање апстрактне математичке репрезентације познатог контекста, а циљ учења је разумевање релација између познатог контекста и апстракције. Насупрот томе, стицањем нових знања од ученика се очекује да их примењују у новим контексима, те улогу познате аналогне базе сада добијају математичке структуре. У овом случају, ученици треба да покажу разумевање контекста применом математичког знања (Bassok, 2001). Са становишта когнитивне науке процес аналогног закључивања је од фундаменталног значаја за решавање проблема и његова реализација зависи од способности ученика да разуме текст проблема.

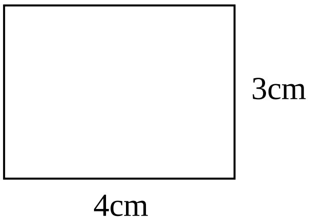
У намери да се подстакне развој способности ученика за разумевање текста и способности аналогног закључивања у решавању проблема неопходно је омогућити активности које истичу односе између текста и математичке струкуре. У примеру 1, где је писани текст повезан са визуелним представама, проблем се решава у интеграцији геометријских и алгебарских информација. Геометријска слика, која се налази поред текста, визуелно приказује структуру проблема. Вербалне и визуелне информације омогућавају ученику да формира ментални модел о томе како да приступи његовом решавању. Приступ у разматрању проблемске ситуације, који указује на неопходност сагледавања свих података истовремено, Marton је назвао „моделом фузије“ (Marton и др, 2004:16). „Ако постоји неколико критичних аспеката које ученик мора да разматра у истом тренутку, сви они морају да се доживе истовремено” (Marton и др, 2004:16). Ако се посматрају одвојено, ни слика ни текст не дају ученику довољно информација о садржају проблема. Да би разумео проблем, ученик мора да повеже слику са текстом. Анализа слике и њено повезивање са подацима од ученика захтева да се ослања на когнитивне способности. „Будући да наша радна меморија има ограничен прерађивачки капацитет, од кључног је значаја да информације буду приказане на начин који смањује когнитивно оптерећење“ (Bobis и др,1993:2)[30]. Bobis (1993) истиче да наставни материјал, који изискује ангажовање у когнитивним активностима ученика не због суштинске комплексности ситуације, већ искључиво због начина приказивања информација, ученицима намеће когнитивно оптерећење које је непотребно за суштински задатак који је пред њима, док материјал, који од ученика захтева

---

[30] Теорија когнитивног оптерећења (Sweller, 1988, 1989), која се бави начином на који наставни материјал одређује коришћење когнитивних ресурса, полази од претпоставке да се људски когнитивни систем састоји од релативно оскудне радне меморије и дугорочног памћења (Bobis и др,1993:2).

ангажовање у различитим активностима, може довести до постизања когнитивних циљева. У складу с тим, да би се у примеру 1 обрадила оба извора информација (геометријски и алгебарски) уз максимално смањење когнитивног оптерећења, неопходно је физичко интегрисање информација. Наиме, когнитивно оптерећење се може смањити постављањем нумеричких информација директно на геометријску слику, где је значење симбола одређено директним повезивањем са контекстом.

Пример 1: Одреди димензије правоугаоника, чија је површина једнака половини површине правоугаоника са слике 11. (Мерни бројеви су из скупа *N*)



Слика 11

У првој етапи решавања примера 1 од ученика се захтева да речи и слике приказују алгебарским симболима. У другој етапи записују израз, којим приказују структуру проблема – однос између услова и захтева, који се може тумачити као „формула“ или алгебарски модел. За трећу фазу је неопходно познавање алгебарских техника, које омогућавају манипулацију алгебарским изразима.

Разумети проблем значи разумети контекст и питање. Ово захтева тумачење математичких релација представљених математичким текстом. Математички текст је често комбинација различитих елемената (репрезентација), као што су писани текст, табеле, графикони и симболички записи. Ученике треба научити да се „крећу“ између наведених семиотичких система и интегришу значења из различитих делова текста. Комбинација различитих семиотичких система доприноси изградњи веза у настави математике. Текстуална питања су веома значајна средства у процесу стицања знања ученика и развоја концептуалног разумевања (Purdum-Cassidy, 2015). Основни теоријски темељ овог става је социјални конструктивизам, који се базира на уверењу да се знање стиче у друштвеном контексту путем семиотичких процеса (Виготски,1978).

Следећи задатак је пример комбинације семиотичких система у тексту. Циљеви овог модела рада су да се ученику омогући да разуме шта се захтева у проблему, да истражи кораке потребне за решавање проблема и да пронађе решење преформулисаног проблема. Потребно је да ученици интерпретирају табеларни приказ информација проблема, одреде величине пакета користећи аритметичка знања и упореде податке. Решавање задатка је пример прогресивне симболизације, где се на почетку користе неформални симболи који имају контекстуално значење, а касније се деконтекстуализују у апстрактне. На формалном нивоу, у једначини $S=a+b+c$, непознате a,b,c су ознаке за математичке објекте, где су слова сада величине. Веза између симбола (a,b,c) и контекста лако се може реконструисати, јер се симболи односе директно на карактеристике (дужина, ширина, висина) ситуационих предмета (пакета).

Пример 2: Поштанска компанија користи следећу формулу за израчунавање величине пакета:
S=дужина(a)+ширина(b)+висина(c).
Максимална дозвољена величина за пакете је 150*cm*. Потребно је доставити пакете, чије су димензије дате у следећој табели.
Да ли је неки од њих превелики? Објаснити.

a	b	c
50	32	65
37	64	51
42	39	71
44	85	33

У Наставном програму за четврти разред истиче се да „присутност алгебарске пропедевтике у програму омогућава да се дубље и на вишем нивоу изучавају предвиђени математички садржаји. Другим речима, користећи се елементима математичког језика, ученици усвајају знања с већим степеном уопштености.“ „Симболизам омогућава да видимо обрасце и генерализације, сличности и разлике, које не могу бити уочљиве, ако симболе посматрамо само као слова“ (Arianrhod, 2003:133). Наиме, разумевање симболичког језика често захтева читаву хијерархију претходног знања, а разматрање значења симбола подразумева комплексне говорне активности. Наставничка „склоност одређеним значењима без додатних објашњења или навођења показује известан степен непознавања сложене мреже веза концептуалног и процедуралног аспекта која карактерише алгебарско расуђивање“ (Blanton & Kaput, 2005:414, подвукла М. Ракоњац). У циљу бољег разумевања значења симбола треба решавати проблеме у којима је наглашена употреба симболичког језика. Симболи имају различита значења у различитим контекстима, који се односе на конкретну ситуацију која одређује семантички домен појма или концепта (Puig & Cerdán 1988, у Huerta, 2009).

Ако ученици не препознају вишеструко значење симбола, онда нису у могућности да пронађу одговарајућу интерпретацију, која је у складу са контекстом. У том смислу Margenau (1961) наводи да би рационалне бројеве требало изучавати у контексту проблема, јер постоји много више интерпретација броја ¾ од једноставног значења три четвртине једног целог. На пример, симбол ¼ може означавати операцију дељења 1 са 4, али посматрајући га у целини он може представљати: резултат дељења 1 са 4; однос (размеру) одређених величина; све разломке еквивалентне са ¼ итд. Дакле, размишљајући о оквирима могућег избора тумачења симбола, ученици проширују осећај о томе шта може представљати један симбол. Разумевање значења симбола у различитим контекстима омогућава да се премости јаз између чисто процедуралних приступа и идејног разумевања предмета математике.

С обзиром на то да контекстуалне структуре проблема приписују различита значења операцијама (Carpenter и др., 1999), анализа контекстуалне структуре проблема могла би да пружи информације о врстама значења, које се приписују операцијама разломака. Да ли ће се операција множења разломака посматрати као алгоритамски процес (који се креће од почетне вредности преко њених промена до крајње вредности) или као комбинација два различита броја, која могу да се трансформишу у целину, зависи од семантичке структуре задатка (Van de Walle, 2004). На пример, у симболичкој репрезентацији запис 1/2·1/3 указује на операцију множења, која има алгоритамску структуру, док се у геометријској репрезентацији посматра као једна целина (1/2 од 1/3).

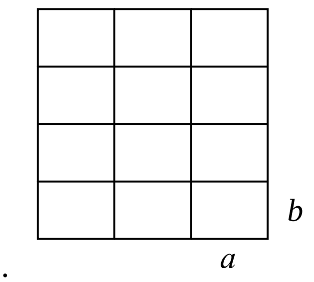
7. Интеграција алгебарских и геометријских садржаја у циљу разумевања и повезивања појмова

Концептуално разумевање се постиже приказивањем концепта у различитим математичким контекстима (геометријском, алгебарском, нумеричком). Према Sfard (1991:19) у процесу формирања концепта, у фази реификације, од ученика се захтева могућност уочавања познатог у потпуно новом светлу. Због тога је неопходно проширити концепт на нове ситуације превођењем из једног контекста у други (из алгебарског у геометријски и обрнуто).

Перцепција геометријских особина има важну улогу у фази разумевања геометријских појмова, што је и наглашено дефиницијом геометрије: „Геометрија је комплексна повезана мрежа појмова, начина размишљања и репрезентативног система, који се користи за концептуализацију и анализу физичког и имагинарног просторног окружења. У основи највише геометријске мисли је просторно расуђивање, тј. способност да се виде, истраже и схвате просторни објекти, слике, односи и трансформације“ (Battista, 2007, цитирано у Lee и др, 2015:9). Традиционално, развој способности истраживања природе односа између математичких појмова углавном остаје у сенци решавања рутинских проблема, који су на нумеричком нивоу. Геометријски задаци у уџбенику углавном су усмерени на примену правила и одређених поступака, те ученици често појмовно не разумеју дужину, површину и запремину, већ их сматрају формулама. На пример, разматрање површине у смислу одређивања њене вредности применом формуле, поред тога што код ученика проузрокује тенденцију да идентификује површину са њеном вредношћу, представља и препреку за разумевање процеса мерења. Један од разлога дечијег питања „зашто се за одређивање вредности дужине користи инструмент, а за одређивање вредности површине формула“ је чињеница да се не даје велики значај конкретном чину мерења површине, чиме се отежава разумевање значења и улоге квадратних јединица. Осим тога, разумевање појмова углавном се испитује исказивањем њиховог значења сопственим речима ученика или илустративним примерима. Критеријум за процену усвојености појмова није знање имена или знака, којим се појам именује, већ поступци, који омогућавају идентификацију битних својстава. Основни критеријум процене разумевања појма подразумева упоређивање и успостављање веза између различитих представа појма. У том смислу, процена разумевања површине подразумева успостављање везе између површина различитих фигура, као што су квадрат и правоугаоник, чиме се доприноси и развој разумевања мерења. У овом случају ученици нису усмерени на то да запамте формулу него да разумеју и примењују концепт (површине) изражен формулом, тј. да алгебарским изразима представљају односе између величина. Успостављајући односе имеђу величина ученици ангажују менталне активности које доприносе развоју разумевања

(Carpenter & Lehrer,1999). Средства за подстицање развоја и процену концептуалног разумевања и критичког мишљења (критичке анализе и примене идеја у контексту проблема) могу бити адекватно осмишљени математички проблеми (Afamasaga-Fuata'i, 2008), чијим се решавањем откривају математички концепти који стоје иза њих (пример 1).

Пример 1: а) Површину квадрата са слике 12 изразити у функцији површине правоугаоника страница *a* и *b*; б) Обим квадрата са слике изразити у функцији страница правоугаоника (*a* и *b*)



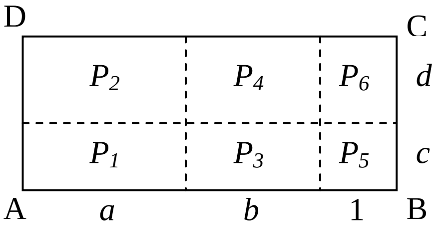
.*Слика 12*

Решење: а) Упоређивањем површина квадрата и правоугаоника може се закључити да је површина квадрата 12 пута већа од површине правоугаоника, тј. $P=12\cdot a\cdot b$; б) Слично, обим квадрата у функцији страница *a* и *b*, може се приказати у облику $O=6a+4b$

Традиционално, ученици решавају задатке у оквиру појединачних лекција. На пример, ученици одређеном серијом задатака увежбавају обим правоугаоника, а затим на сличан начин и његову површину итд. У том случају ученици мисле процедурално, усмерени су на алгоритме и правила и није им омогућено да разумеју везе између дужине, површине и запремине. Један од начина повезивања наведених концепата је геометријски приступ у изградњи алгебарских модела (нпр, множење полинома), где су површина и запремина у својству производа (примери 2 и 3). Међутим, на основу истраживања Simon и Blume (1994) примећују да у уџбеницима нема доказа о било ком повезивању разумевања множења и површине и да је нагласак стављен на коришћењу формула за израчунавање нумеричке вредности, а не на саму површину. У примерима 2 и 3, захтев „помножи два израза“ преокреће се у захтев „одреди површину правоугаоника, ако су му познате дужине страница“, а захтев „помножи три израза“ преокреће се у захтев „одреди запремину квадра, ако су му познате дужине ивица“. (Овај начин решавања може се применити на полиноме са позитивним коефицијентима.) Визуелним представљањем алгебарских манипулација ученицима се омогућава да схвате њихов геометријски смисао. Геометријским моделовањем множења два или три чиниоца (где су чиниоци приказани дужима), ученици уочавају да додавањем димензија (чиниоца) од једнодимензионог настаје дводимензиони, односно тродимензиони простор. Ова конструктивна активност омогућава ученицима разумевање појма простора различитих димензија хијерархијски уграђених у склоп система повезаних појмова, општег назива n-димензиони простор. Оваквим приступом ученицима је омогућено да развијају процедуралне способности, као и да прошире концептуално разумевање простора, односно да прошире своје видике и у хоризонталном и у вертикалном правцу.

Пример 2: Применом геометријског модела производа два чиниоца и применом својства површине, израз $(a+b+1)(c+d)$ написати у облику збира.

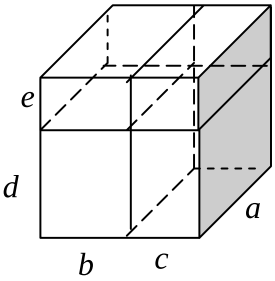
Решење:



Странице правоугаоника су геометријски модели израза $a+b+1$ и $c+d$. Површина правоугаоника $ABCD$ страница $a+b+1$ и $c+d$ је $P=(a+b+1)(c+d)$. На основу својства површине следи да је $P= P_1+ P_2+ P_3+ P_4+ P_5+ P_6$, тј. $P=ac+ad+bc+bd+c+d$. На основу прве и последње једнакости следи да је $(a+b+1)(c+d) =ac+ad+bc+bd+c+d$.

Пример 3: Применом геометријског модела производа три чиниоца и применом својства запремине, израз $a(b+c)(d+e)$ написати у облику збира.

Решење:

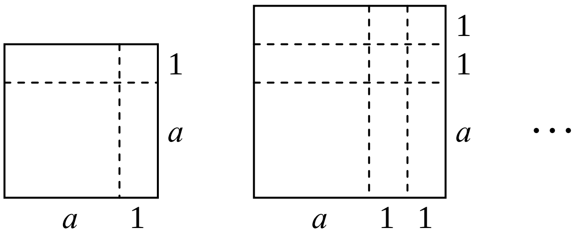


Ивице квадра су геометријски модели израза a, $b+c$ и $d+e$. Запремина квадра ивица a, $b+c$ и $d+e$ је $V=a(b+c)(d+e)$. На основу својства запремине следи да је $V=abd+abe+acd+ace$. На основу својства транзитивности, из последње две једнакости следи да је $a(b+c)(d+e) =abd+abe+acd+ace$.

Иако се појмови могу формално дефинисати, многе кључне нијансе њиховог значења највише се истичу кроз њихову примену у различитим проблемским ситуацијама (Collins, 1987). Следећи пример илуструје повезивање сазнајне и развојне функције решавања проблема. Његово решавање подразумева високе когнитивне захтеве, који се односе на добро разумевање и моделовање ситуације, односно препознавање промењљивих и односа међу њима. Решавање овог проблема не захтева преузимање научених модела из меморије ученика, већ анализу садржаја и његов пренос на новоформирану математичку репрезентацију, чиме ангажовање ученика постаје сврсисходно и смислено. Током решавања проблема ученици приказују алгебарски поступак истовремено са геометријским приказом. Дакле, њихов задатак није само да алгебарском методом одреде резултат, већ и да геометријском репрезентацијом објасне зашто је то тако, јер представљање проблемске ситуације геометријском сликом доводи до разумевања процеса генерализације. Наиме, у примеру 4 илустрована је примена геометријске методе за успостављање везе између одређених алгебарских израза. За решавање примера 4.б) ученици четвртог разреда не могу применити рутинску алгебарску методу, јер немају на располагању алгебарске алате, те је једини начин да се реши проблем анализа низа фигура са квантитативног аспекта. Kieran (1996) дефинише појам алгебарског размишљања као „коришћење било које од разноврсних представа које се баве квантитативним ситуацијама у релацијском смислу“ (Kieran, 1996:4-5). Наиме, разматрањем површине низа геометријских фигура омогућава се разумевање везе између одређених израза, а настављањем низа омогућава се препознавање везе између облика $(a+ b)^2$ и одговарајућег тринома и формирање прецизног математичког модела. Идеја, која стоји иза оваквих примера, је подстицање развоја способности идентификације и генерализације алгебарских образаца, користећи низ геометријских слика које одсликавају структуру проблема.

Пример 4: а) Формирати алгебарски приказ површине квадрата на два начина као што је започето (слика 13)

б) На основу решења из задатка а), уочити правило промене и формирати алгебарски приказ површине квадрата странице a+5 на оба начина.



$P_1=(a+1)(a+1)$ $P_2=(a+2)(a+2)$

$P_1=a^2+2a+1$ $P_2=a^2+4a+4$

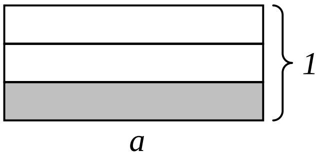
Слика 13

Анализом уџбеника утврђено је да су геометријски садржаји углавном усмерени ка геометрији мерења и подређени аритметичким прорачунима, а решавање геометријских и алгебарских задатака углавном се своди на израчунавање квантитативних својстава објеката. Међутим, неопходно је да ученици решавају и проблеме који захтевају квалитативну анализу, за коју су карактеристични подаци, који се по природи разликују од података неопходних за проучавање објекта са квантитативне стране. У таквим ситуацијама не постоје квантитативни подаци, из којих се може направити модел проблема, те ученици треба да буду усредсређени на значење података и анализу њиховог односа. Sfard & Linchevski (1994) тврде да су симболи неопходан, али не и довољан услов за стицање структурног начина размишљања: „Истина је да докле год су алгебарске идеје обучене у речи и само речи, тешко је замислити напреднији структурални приступ, где се рачунски процеси разматрају у својој целовитости са више тачака гледишта и где се оперативни и структурни зраци састају у истим представама“ (Sfard & Linchevski, 1994:93, цитирано у Amerom,2002:11). За разлику од аритметичког поступка, где операције корак по корак резултирају формирањем једног броја, који представља решење, у примеру 5 је изражено успостављање односа „више од” и „мање од“, који су карактеристични за елементарно алгебарско расуђивање, где је пажња ученика усмерена на односе између величина, а не на конкретне нумеричке вредности. Повећање когнитивних захтева и препознавање односа олакшаће касније рад са непознатим и променљивим величинама, а, такође, утицати и на развој просторног мишљења и геометријске интуиције.

Пример 5: Испитати истинитост исказа: а) Ако је обим квадрата *ABCD* већи од обима квадрата *EFGH*, онда је и површина квадрата *ABCD* већа од површине квадрата *EFGH*; б) Ако је обим правоугаоника *ABCD* већи од обима правоугаоника *EFGH*, онда је и површина правоугаоника *ABCD* већа од површине правоугаоника *EFGH*.

Истраживања, спроведена у последње две деценије (Işık, 2011; Işık & Kar, 2012; Işık et al., 2013; Kılıç, 2013; Luo, 2009; McAllister & Beaver, 2012), указују на то да у настави постоје потешкоће у операцијама са разломцима, а разлог за то је што наставници не истичу концептуалну димензију операција. На основу Пијажеове теорије когнитивног развоја Wadsworth (1996) закључује да су деца школског узраста или у конкретној оперативној фази (узраста 7-11) развоја или у фази формалних операција (узраста 11-16). Дете у конкретној фази „мора се бавити сваким проблемом изоловано“ (Wadsworth, 1996:112). Међутим, Margenau (1961:9-11) указује на то да ученик у фази конкретних операција не напредује далеко у „конструктивном домену“, али да је у могућности да повезује и разуме једноставније процесе. Lamon (1999) је, такође, на основу истраживања закључио: ако би се деци омогућило да бар три године развијају своје мисаоне способности без учења стандардних алгоритама за рад са разломцима дошло би до пораста њихових мисаоних способности укључујући и могућност пропорционалног размишљања, јер се алгебарско расуђивање и алгебарска симболизација развијају независно једно од другог, при чему деца већу склоност имају ка развоју способности расуђивања, него ка развоју способности симболизације (Amerom, 2002). Како се „истраживачки начин веома разликује од психометријске и развојне традиције“ (Krutetskii, 1976:262), намера је да се на овом нивоу путем неформалних стратегија за решавање проблема изгради јака основа разумевања разломака, која ће бити темељ за даљи формални приступ њиховом изучавању (Brown,Quinn, 2006). Charalambous (2010) је истакао да разумевање операција са разломцима зависи од разумевања појма разломка. У ту сврху могу се користити геометријске слике, које, иначе, помажу ученицима у разумевању апстрактних појмова. Да се прелаз са речи на симболе не би пребрзо одвијао у процесу учења (Beemer, 1997, према Amerom, 2002:122), могу се користити фигуративна „семиотичка средства објективизације” - скуп семиотичких посредника који усмеравају нашу намеру (Radford, 2006:56), чиме се појам разломка везује за перцептивно искуство ученика[31]. Док симболи означавају тачно одређене објекте или операције, визуелне репрезентације овде не приказују дословно оно што означавају симболи. На пример, користећи геометријске представе ученик може да одреди 1/2 од 1/3, чији је симболички запис $1/2 \cdot 1/3$, без познавања алгоритма множења разломака. Такође, питање: „Колико половина има у 2?” уз одговарајућу геометријску репрезентацију, представља увод у дељење разломака. Мислећи о проблемима на овај начин, ученици лакше прелазе на симболичке репрезентације решавања (Kosko & Wilkins, 2010). Дакле, употребом геометријских репрезентација може се омогућити коегзистенција различитих интерпретација појма разломка, као и континуирано кретање од његовог конкретног ка формалном значењу, тј. вертикална математизација. Истовремено, применом познатих алгоритама (у овом случају геометријске методе) у непознатим ситуацијама (као што је множење разломака) постиже се развој размишљања вишег реда, а то је „комплексно, неалгоритамско размишљање, за које је карактеристично да за решавање задатка не постоји предвидљив, добро увежбан приступ или пут на који јасно сугерише задатак ...“ (Stein and Lane, 1996:58). Овај приступ је, такође, припрема ученика за апстракције, које су неопходне у даљем изучавању алгебре, јер се проучавање разломака може проширити на проучавање пропорционалних односа и формирање алгебарских концепата. Задаци слични примеру 6 ученицима могу бити подстицај за откривање алгебарске методе множења разломака, где појам разломка представља статички опис односа правоугаоника и његових делова.

Пример 6: Површину осенченог дела правоугаоника (P_1) изразити у функцији: а) страница правоугаоника (1 и a); б) површине правоугаоника (P); в) упоредити изразе $a \cdot (1/3)$ и $a/3$.



Решење: а) $P_1 = a \cdot (1/3)$; б) $P_1 = P/3$ или $P_1 = (a \cdot 1)/3$, тј. $P_1 = a/3$; в) Из једнакости $P_1 = a/3$ и $P_1 = a \cdot (1/3)$ следи да је $a \cdot (1/3) = a/3$.

---

[31] С једне стране, семиотичка средства, која везују ученика за његово перцептивно и просторно искуство, ометају његов приступ вишим нивоима општости. С друге стране, ако занемаримо „отелотворено” порекло појма (помоћу семиотичких средстава објективизације), ученици губе директну везу са просторним искуством и проналазе његова различита неповезана значења (Santi, 2011:296-297).

Традиционално, када се уводе операције над разломцима ученици се суочавају са скоком, који их приморава да рачунање са разломцима прихвате у смислу процедуралне активности, која чини прекид са претходним значењем разломка објективизираног у геометрији. Да би се избегао несистематски приступ настави математике, који за последицу има немогућност ученика да повезује појмове и осети развој математике, редослед усвајања наставних садржаја треба да буде усклађен тако да се сваки нови појам „ослања“ на претходна знања. Формирање веза између симболичких операцијских процедура и геометријских репрезентација, које ученици већ разумеју, омогућава да се операције над разломцима схвате на вишем нивоу општости, као и њихов однос према геометрији.

Такође, по мишљењу Carpenter и сарадника (1999:51), сабирање и одузимање не треба приказивати као две повезане операције, већ као организоване номенклатуре структурно различитих текстуалних проблема, према којима ученици решавају проблеме на себи својствен начин, јер „када деца уписују школу, већина њих је у стању да реши низ основних текстуалних проблема моделовањем поступка или односа датих у проблемима“. Дакле, упознавање ученика са операцијама над разломцима може се реализовати по принципу „вођеног поновног откривања”[32], при чему се користе чулне стратегије, а не формалне методе рачунања. Временом се ове физичке стратегије моделовања апстрахују у симболичке поступке. Другим речима, учење вештина рачунања подржава развој способности разумевања уколико се ученицима омогући да их доживе као активности решавања проблема, а не као стицање утврђених правила и процедура. Поменуте активности долазе до изражаја у проблемима, чије решавање захтева вербалне репрезентације (физичких активности), као што су „придружити“, „додати“, „одвојити”. Успостављање веза између симболичке, вербалне и сликовне репрезентације, нпр, операције сабирања омогућава да се симбол „+“ доживљава као синоним за вербалну и сликовну репрезентацију. С обзиром на то да сабирање разломака подразумева спајање (придруживање) или комбиновање представа, док одузимање подразумева одвајање или упоређивање (Holmes, 1995; Cathcart et al., 2003, цитирано у Kılıc,2013:679), ове операције могу се приказати

---

[32] Принцип „вођеног поновног откривања” подразумева потребу да ученик доживи развој математике са аспекта њеног оригиналног развоја (Freudenthal, 1973)

геометријским репрезентацијама у контексту проблемских ситуација, које се односе на способности придруживања, одвајања и упоређивања (примери 7 и 8). Геометријски модели представљају прелазну фазу из неформалних истраживачких активности ка алгебарској симболизацији, јер могу бити „интернализовани" од стране ученика у процесу формирања појма разломка.

Пример 7: Јован је појео 1/8 чоколаде, а затим још 3/8. Колико је чоколаде Јован појео? (придруживање).

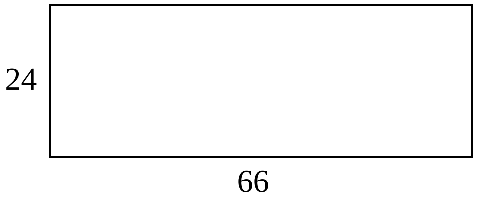
Концентришући се на односе, а не на израчунавања, могу се успоставити везе између аритметике и алгебре. На пример, ако сабирање бројева 1/8 и 3/8 посматрамо као сабирање 1 осмине и 3 осмине, онда се рачунање заснива на истим принципима као и сабирање $1x+3x$. У оба случаја основу за сабирање представља дистрибутивност множења према сабирању: $1/8+3/8=1\cdot 1/8+3\cdot 1/8=(1+3)\cdot 1/8=4\cdot 1/8$ и $1x+3x=(1+3)\cdot x=4\cdot x$.

Пример 8: Петар има 3/4 чоколаде, а Иван има 1/4 чоколаде. За колико Петар има више од Ивана? (упоређивање).

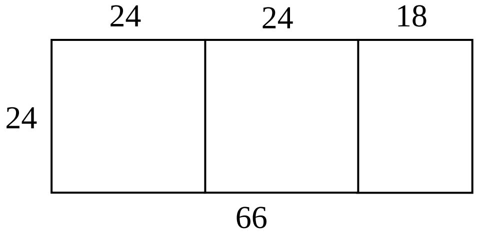
Множење разломака може да се посматра као понављање сабирања као што је то са целим бројевима ($4\cdot 1/2$) и као значење „од" ($1/2\cdot 1/4$), док дељење не треба повезивати са операцијом множења инверзним бројем, које доводи до меморисања правила без основе за разумевање, већ као поступак који подразумева мерење и „једнако подељене ситуације" (Kılıc,2013:679).

За усвајање рачунских операција на скупу рационалних бројева неопходно је постепено упознавање са појмовима дељивости, највећег заједничког делиоца (НЗД) и најмањег заједничког садржаоца (НЗС), а њихово погрешно разумевање произилази из традиционалне дидактичке праксе, која не подржава ученика у прелазу из геометријског контекста упоређивања објеката (одређивања заједничких мера два самерљива геометријска објекта) у аритметички (одређивање заједничких делилаца два природна броја). Наиме, приликом традиционалног одређивања НЗД и НЗС бројева користи се дедуктивни начин расуђивања (од општег ка појединачном), који се своди на факторизацију сваког од датих бројева, чиме се првенствено подстиче развој процедуралног размишљања. Да се не би изгубило порекло појмова НЗД и НЗС, које ученици углавном посматрају у склопу операција над разломцима, потребно је представити геометријску структурну интерпретацију одређивања НЗД и НЗС бројева. У преносу одређивања НЗД из аритметике у геометрију огледа се дидактички значај историје математике. Без контекстуализације Еуклидовог алгоритма[33] за одређивање НЗД и индуктивног пута његове изградње велика је вероватноћа да ће ученици алгоритам запамтити механички. Одређивање НЗД бројева применом Еуклидовог алгоритма у контексту геометрије, који не захтева њихову претходну факторизацију, истиче појам дељивости и његове особине. Уједињујући фактор који нам омогућава повезивање аритметичке и геометријске методе одређивања НЗД и НЗС је појам дељивости, који се у различитим математичким структурама ослања на релевантна семиотичка средства.

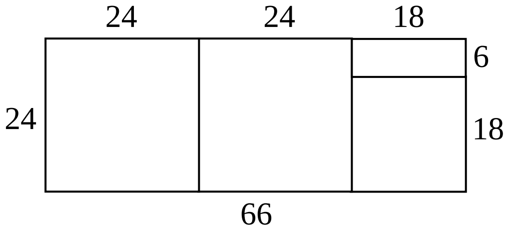
Пример 9: Правоугаоник димензија 66×24 „поплочати” највећим могућим подударним квадратима. Одредити димензије квадрата.



Дужина странице траженог квадрата представља НЗД за бројеве 66 и 24 и може се одредити применом Еуклидовог алгоритма.



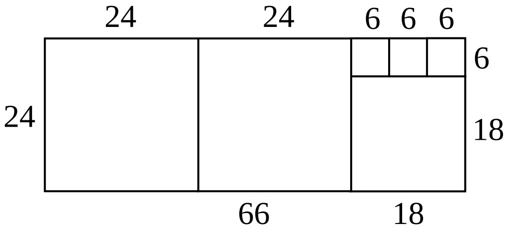
Први корак је да се одреди број подударних квадрата максималне површине, садржаних у правоугаонику (24×66).
Дужина дужи 66 може се написати у облику: 66=24·2+18



Други корак је да се одреди број подударних квадрата максималне површине, садржаних у остатку правоугаоника (24×18).
Дужина дужи 24 може се написати у облику: 24=18·1+6

---

[33] Еуклидов алгоритам за одређивање НЗД два природна броја први пут је описан у VII књизи Еуклидових „Елемената“ (око 300. год.п.н.е), а у X књизи је дата његова примена на дужи. Примена на правоугаоник: Нека су a и b дужине страница правоугаоника. Тада је НЗД(a,b) дужина странице (c) највећих могућих подударних квадрата, којима би се могао „поплочати” цео правоугаоник без празнина и преклапања. Ако је $a<b$, постоји један или више квадрата странице a, који се садрже у датом правоугаонику. Ако правоугаоник није потпуно „поплочан” квадратима $a×a$, остаје правоугаоник $r×a$, $r<a$. Правоугаоник $r×a$ може бити „поплочан“ једним или више $r×r$ квадрата потпуно итд. Поступак се понавља са циљем да се попуно „поплоча“ правоугаоник.



Трећи корак је да се одреди број подударних квадрата максималне површине, садржаних у остатку правоугаоника (18×6), што је у овом случају последњи корак. Дужина дужи 18 може се написати у облику: 18=6·3+0

Чињеницу да постоје и други, мањи квадрати (тј. мере) којима би се могао „поплочати” (измерити) дати правоугаоник (нпр,1×1, 2×2 или 3×3), ученици могу пренети у контекст дељивости бројева и закључити да бројеви 66 и 24 имају заједничке делиоце мање од броја 6 (1, 2 и 3).

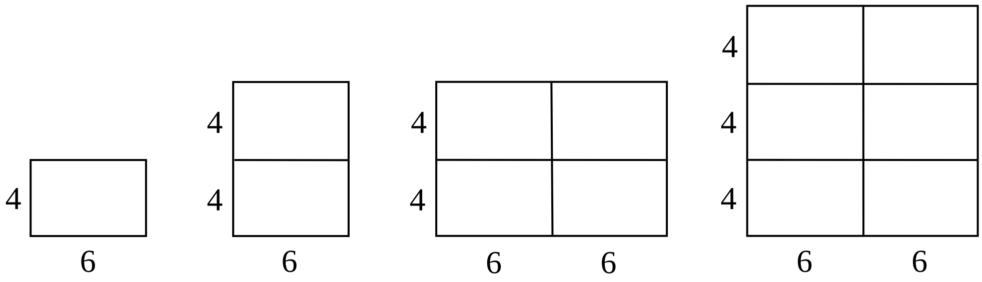
Генерализацијом задатка, који се односи на правоугаоник димензија a×b, и преносом релација из геометријског у алгебарски контекст, ученици могу открити особине дељивости, као што су:

1) За произвољна два природна броја a и b (a>b) постоје јединствени природни бројеви q и r, такви да је $a=bq+r$, q се зове количник, а r остатак

2) Сваки заједнички делилац бројева a и b је и делилац њихове линеарне комбинације a-bq

Пример 10: Одреди димензије најмањег квадрата, који би могао бити „поплочан” правоугаоницима димензија 6×4.

Одређивање димензија најмањег могућег квадрата, који се може „поплочати” (измерити) правоугаоницима димензија 6×4, без празнина и преклапања, представља геометријски метод одређивања НЗС(6,4). Метод се састоји у „слагању” правоугаоника 6×4 са циљем да се „формира” најмањи могући квадрат. Како је ширина (4) мања од дужине (6), додаје се ред од једног правоугаоника, чиме настаје правоугаоник димензија 6×8. Ширина (8) је сада већа од дужине (6), због чега се додаје колона од два правоугаоника и настаје правоугаоник димензија 12×8. Додавањем још једног реда од два правоугаоника настаје квадрат димензија 12×12. Дужина странице (12) „формираног” квадрата, који је „поплочан” правоугаоницима димензија 6×4 представља НЗС(6,4) (слика 14)



Слика 14

У традиционалној настави нагласак је на овладавању појмовима и процедурама по одређеном редоследу. Ова слојевита структура приступа настави математике, налик на „слојевиту торту”, подразумева испуњење предуслова за сваки наредни ниво знања. Међутим, на циљеве овог истраживања утицао је савет James Fey (1995:64): ако бисмо прихватили само неке од предлога Kaput (1995), као што је да „филоване (слојевите) торте заменимо испреплетаним нитима”, помогли бисмо ученицима да развију такву врсту повезаног знања, које ће лакше да задрже и да примене у реалним проблемским контекстима ван формалне школске математике, а активностима, које прате вертикални континуитет, омогућили бисмо ученицима да током свог образовања повезују корене математике са њеним гранама.

II Методологија истраживања

1. Проблем и предмет истраживања

У традиционалној настави математике однос између геометрије и алгебре није у довољној мери осмишљен како би се разоткрила њихова логичка међузависност – геометрија је остала неискоришћена као основ за формирање многих појмова из алгебре и тиме су ова знања одвојена од једне органске целине којој припадају. Процес усвајања геометријских и алгебарских знања треба објединити у целовит систем, јер изолованост и неповезаност знања отежава њихову практичну примену. Знања уклопљена у целовит систем математичких садржаја остају трајна и примењива, па се јавља потреба да се ученици оспособе да истражују заједничке релације између података различитог значења, чиме се развија методолошка оригиналност. Систем знања заснован на генерализованим релацијама омогућава ученицима да повезују различите ситуације.

Предмет овог истраживања су активности повезивања математичких садржаја у разредној настави, које су углавном засноване на решавању проблема (који имају за циљ да ученицима омогуће откривање веза и односа), и њихов образовни ефекат. Акценат је на интегративном приступу кроз унутарпредметно повезивање садржаја, конкретно у овом случају алгебарских и геометријских, у четвртом разреду основне школе. Како знања, која ученици стичу, у највећој мери зависе од методичког обликовања наставног процеса, успостављање математичких веза у експерименталној настави заснива се на претпоставци да ће ученик играти главну улогу у стварању веза. Стицање математичких знања треба да буде активан истраживачки поступак, такав да сваки образац (формула) треба да буде схваћен као део једног комплексног система знања, који служи за повезивање математичких дисциплина у једну логичку целину.

Због адекватне селекције дидактичког материјала, треба знати да многа математичка знања имају порекло у индуктивним методама истраживања, чији је основни циљ проналажење повезаности и општих закона међу појавама (Поља, 1956). Шимлеша (1980) наводи да је за елементарну наставу математике неопходно коришћење индуктивне методе истраживања, а темељ индукције је опажај. У складу с тим, у овом истраживању геометријске слике су се користиле и као средство за уочавање законитости, средство за упознавање општег на конкретном, помажући ученицима да лакше следе логичка извођења и закључке, при чему главну улогу имају мисаоне операције (анализа, синтеза, генерализација).

Учење математичких садржаја у овом истраживању заснива се на чињеници да одлучујућу улогу за увиђање функционалних односа између делова неке целине имају операције комбиновања, груписања, трансформације и сл. Проучавањем процеса трансформисања геометријских особина (облика, величине, положаја) могу се открити законитости по којима је трансформација извршена, при чему су најважнија она својства која остају инваријантна. Изражавањем једне величине преко друге слика се преводи на алгебарски језик. Приликом успостављања веза између величина уводе се симболи ради рационализације мишљења, чиме се ученику омогућава да схвати значај превођења односа између величина на алгебарски језик. Односи између геометријских елемената, изражени у скраћеном и симболичком облику, представљају основ алгебарских израза, чиме се омогућава целовито схватање функционалног система.

2. Циљ и задаци истраживања

На основу постављеног проблема истраживања одређени су циљ и задаци истраживања. Општи циљ истраживања је експериментална провера теоријског становишта о ефикасности интеграције геометријских и алгебарских садржаја у разредној настави, тј. утврђивање њене ефикасности у усвајању наставних садржаја, као и нивоа квалитета, обима и трајности знања ученика у односу на усвајање истих наставних садржаја традиционалним начином рада. Намера истраживања је да се испита у којој мери експериментална настава утиче на формирање менталних веза код ученика и како их ученици, ако се укаже потреба, преузимају из меморије и примењују на решавање проблема. На основу анализе садржаја програма за млађе разреде основне школе утврђено је да садржаји математике за четврти разред пружају најбоље могућности за реализацију постављеног проблема, циља и задатака истраживања.

Како поступак управљања наставом обухвата планирање, извођење и евалуацију изведене наставе, истраживање захтева следеће активности:

-проучавање одговарајуће литературе која се односи на интегративни приступ математичким садржајима у настави математике

-утврђивање облика активности ученика и наставника, као и наставних садржаја, који омогућавају повезивање алгебарских и геометријских садржаја

-писање сценарија по коме се спроводи експериментални програм, који прати динамику планиране редовне наставе у школи и израда конкретних модела часова за обраду и утврђивање планираних наставних садржаја у четвртом разреду основне школе

-формулисање предмета истраживања, постављање циља, задатака и хипотезе истраживања, дефинисање варијабли, избор узорка истраживања

- иницијално тестирање – утврђивање стартне вредности паралелних група

- статистички приказ резултата иницијалног теста и њихова анализа

- уједначавање експерименталне (Е) и контролне (К) групе

- извођење експерименталног програма у непосредној настави (у непосредном раду са ученицима)

- тестирање (испитивање квалитета знања усвојених у првом делу експерименталног програма)

- статистички приказ резултата провере знања и анализа добијених резултата

- ретестирање (испитивање квалитета знања усвојених током експерименталног програма)

- статистички приказ резултата ретеста и њихова анализа

-извођење закључака за унапређење теорије и праксе образовања и васпитања

3. Хипотезе истраживања

Основна хипотеза:

H_1: Алгебарско-геометријски интегративни приступ у настави математике је ефикасан у односу на обим, дубину и квалитет знања ученика у млађим разредима основне школе, тј. постоји разлика у постигнутом успеху између ученика Е и К групе у корист ученика Е-групе.

Ефикасност повезивања алгебарских и геометријских садржаја може се показати у односу на дефинисане индикаторе ефикасности, на основу којих се могу формулисати помоћне хипотезе:

Након примене унутарпредметне интеграције у настави математике:

H_2: ученици су изградили боље концептуално разумевање

H_3: ученици су развили већу способност формирања и решавања линеарних једначина

H_4: ученици су развили већу способност расуђивања о односу између величина

H_5: ученици су развили већу способност примене геометријских модела

H_6: ученици имају већу трајност знања

4. Варијабле у истраживању

У складу са методолошким приступом, који подразумева примену дескриптивно-аналитичке методе истраживања, изабране су следеће варијабле истраживања:

а) Независна варијабла: примена унутарпредметног интегративног приступа у настави математике

б) Зависна варијабла: постигнуће ученика на тесту

5. Методе, технике и инструменти истраживања

Постављени задаци решени су помоћу следећих метода истраживања:

а) метода теоријске анализе (примењена на проучавање досадашњих сазнања о интегративној настави математике)

б) дескриптивна метода (подразумева статистичку анализу квантитативних података, анализу садржаја квалитативних података, извођење закључака на основу анализе сређених дескрипција, анализу садржаја уџбеника и програма математике)

в) метода педагошког експеримента са паралелним групама

г) каузална метода (подразумева контролисано посматрање и проверавање ефикасности увођења експерименталног фактора)

д) компаративна метода

Ове методе истраживања могу се објединити у оквиру три методе:

1) теоријска (изучавање и анализа психолошко-педагошке, методичке и математичке литературе, која се односи на реализацију унутарпедметне интеграције у настави математике)

2) емпиријска (експериментални рад који се реализује на бази изграђеној у теоријском истраживању, праћење активности ученика у току наставе)

3) статистичка (обрада и упоређивање резултата рада Е и К групе)

У настојању да се измере ефекти интегративног приступа коришћена је техника тестирања. Емпиријски доказ о ефикасности интеграције представљају подаци из Иницијалног теста (Прилог 1) и два теста знања (Прилог 2 и Прилог 3) формираних у складу са потребама овог истраживања, који представљају објективан и довољно информативан извор података. Тестови, као примарни извор информација на којима се базирају резултати истраживања, и, у извесној мери, рад ученика на часовима омогућили су да се процени ефекат експерименталне наставе. Самим тим, тестови су се користили за процену наставних активности (планираних од стране истраживача пре експеримента), тј. да испитају валидност формулисаних претпоставки, као и да дају одговор на формулисана истраживачка питања. Нагласак на упоређивању карактеристика алгебре и геометрије резултирао је формулисањем одређених претпоставки, које су усмеравале анализу рада ученика и које су омогућиле да се одговори на истраживачка питања..

Полазна тачка за анализу резултата је постигнуће ученика на тестирању са циљем да се установи у којој су мери ученици успели да превазиђу препреке између алгебре и геометрије, а самим тим, и који су ефекти повезивања алгебарских и геометријских садржаја у погледу квалитета и трајности знања. Како се ниво разумевања не испољава само преко успешног (или неуспешног) решавања задатака, већ и преко стратегија решавања, пажња истраживања усмерена је не само на идентификацију тачних и нетачних одговора, већ и на анализу процедуралног и концептуалног разумевања математичких садржаја путем анализе решавања проблема, који захтевају комбинацију процедуралних (познавање процедура, правила и алгоритама) и концептуалних знања (познавање одређених математичких појмова и њихових односа)[34], при чему

---

[34] Процедурални проблеми су они који захтевају чисто процедурална знања за њихово решавање, тј. решавање проблема више је фокусирано на познавању формалног математичког

задаци захтевају више концептуално, него процедурално разумевање. Дакле, тест даје увид, не само у одговоре ученика, већ и у то како ученици раде и зашто, односно увид у успостављање веза између решења и услова проблема, као и однос између процедура, које се користе у решавању, и математичких појмова, тј. њихових репрезентација.

С обзиром на наведено, када се говори о математичком знању, мисли се на повезане концептуалне садржаје и процедуре, укључујући алгоритме решавања проблема и хеуристику. Како интеграција може бити оправдана само ако је математичко знање и разумевање код ученика побољшано, за потребе квалитативне анализе резултата овог истраживања дефинисани су следећи дескриптори (који су уједно и критеријуми за процену нивоа ефикасности повезивања алгебарских и геометријских садржаја):

-концептуално разумевање

-способност расуђивања о односима између величина

-способност примене геометријских модела

-способност формирања и решавања линеарних једначина

-трајност знања

Како се наведене способности одликују структуром решавања проблема, која указује на облике расуђивања (нпр. процедурално, релационо), за њихово испитивање коришћене су подгрупе задатака из тестова, да би се за сваког ученика утврдио квалитет стеченог знања, а затим је извршено поређење резултата Е-групе са резултатима К-групе. Решења задатака анализирана су са неколико аспеката: одговори (исправан, неисправан), стратегија решавања, коришћење репрезентација (геометријских, симболичких, табеларних). Ученичким одговорима су додељене квантитативне оцене (бодови од 0 до 5) на основу исправности (тачно, делимично тачно, нетачно) и потпуности (са/без прорачуна или објашњења). Тестовима знања обухваћене су следеће области: Скуп *N*, Мерење и мере, Геометрија, Разломци.

језика, процедурама, правилима и алгоритмима; док решавање концептуалних проблема захтева познавање одређених математичких појмова и њихових односа (Čadež and Kolar, 2015:29-30).

6. Узорак, организација и ток истраживања

Истраживање је спроведено на узорку од 130 ученика четвртог разреда, од којих је 65 ученика Осн. школе „Светозар Марковић“ у Београду радило под утицајем експерименталног фактора (Е-група), а 65 ученика Осн. школе „Краљ Петар II Карађорђевић“ у Београду радило је традиционалном наставом (К-група). У Е-групи процес усвајања геометријских и алгебарских знања обједињује се у целовит систем. У К-групи алгебарска и геометријска знања усвајају се традиционалним приступом (изоловано једна од других).

Динамика извођења експерименталног програма:

Октобар 2013. – моделовање сценарија за часове и тестова знања

Новембар 2013. –формирање уједначених група

Децембар 2013/Јануар 2014. – реализација првог дела експерименталне наставе (у оквиру 17 наставних часова) на наставним јединицама: *Површина правоугаоника и квадрата, Сабирање и одузимање у скупу N, Читање, писање и упоређивање разломака*.

Фебруар 2014. – прва провера експерименталног програма (Тест *А*)

Април – мај 2014. – реализација другог дела експерименталне наставе (у оквиру 15 наставних часова) на наставним јединицама: *Особине операције множења, Узајамна зависност производа од чинилаца, Решавање једначина, Површина квадра и коцке*.

Мај 2014. – друга провера експерименталног програма (Тест *Б*)

Суштина експерименталног програма је у интегрисаном сагледавању разноврсних аритметичко-алгебарско-геометријских приступа у схватању наставних појмова. Експериментална настава организована је са циљем дубљег схватања градива, да се ученици оспособе да откривају везе између чињеница, односно да их систематизују и уопштавају.

Часови наставе математике у Е-групи реализовани су према Наставном плану и програму за четврти разред основне школе, са већим делом идеја заснованих на препорукама Завода за унапређивање васпитања и образовања, са интегративно-оријентисаним приступом у изучавању наставних садржаја математике за који се претпоставља да подстиче развој способности ученика да решавају проблемске ситуације, да користе моделе за приказивање и анализу квантитативних односа, као и да манипулишу датим односима у симболичкој форми и да се приликом успостављања веза код ученика формирају основе теоријског сазнања и мишљења.

Математички план и програм за четврти разред структуриран је као низ следећих области: Природни бројеви и операције са њима, Геометрија, Разломци и Мерење и мере. Експериментална настава заснована је на обједињавању наставних садржаја, чиме је омогућено повезивање знања у целовит систем. Активност повезивања математичких знања углавном је заснована на решавању задатака. Задаци су усмерени на тумачење и формирање репрезентација статичне и динамичне природе и успостављање веза између њих. Паралелно са израдом сваког задатка предвиђене су одговарајуће активности, као на пример: упоређивање величина, препознавање образаца и расуђивање о односима између бројева, симболизација, примена геометријских модела, тумачење и примена формула, трансформација алгебарских и геометријских модела у еквивалентне форме.

У току експеримента истраживач је преузео улогу наставника. Посебно тежиште је било на припреми часа (32 модела часова). Наставни часови, намењени ученицима са којима се спроводи експериментални програм, су интегративног карактера. Свака наставна јединица усмерена је на активности које подстичу ученике на успостављање веза између тема у алгебри (односно геометрији), као и успостављање веза између алгебре и геометрије. Како интегрисана настава кореспондира са активним методама учења, часови су осмишљени са циљем да се ученици активно укључе у рад и дају смисао проблематичним ситуацијама, да учествују у изградњи важних математичких концепата и метода, у уопштавању и доказивању математичких односа. Ученицима је омогућено самостално стицање знања у оквиру поступака решавања различитих задатака, који су усмерени на повезивање наставних садржаја, што води откривању нових чињеница, којима се потврђују нова тврђења. Ученици истражују нестандардне проблеме са акцентом на њиховим структурама. У току часова пажња је усредсређена на различите акције ученика, које су идентификоване за сваки час унапред: очекиване репрезентације, образложење, очекиване грешке, питања и ставови. У уводном делу часа наставник води дискусију о проблемској ситуацији и повезаним питањима наводи ученике на размишљање. Циљ дискусије је да заинтересује ученике, као и да пружи могућност наставнику да процени знања ученика и да појасни смернице за рад на часу. Наставник активност преноси на ученике, усмеравајући их на истраживање задатих проблема. По завршетку самосталног рада на материјалу час се усмерава у правцу сарадње, тј. у дискусијама вођеним од стране наставника ученици образлажу и сумирају своје идеје решавања проблема, чиме се пружа могућност за изградњу заједничког разумевања битних концепата, метода и приступа. Међусобно упоређивање одговора ученика омогућава развој способности слушања другог и разумевања туђег начина решавања проблема. Ова расправа доводи до заједничких закључака и важних идеја. Ради провере и јачања разумевања, ученици у завршном делу часа могу решавати додатне задатке. Задаци намењени за самостални рад ван наставе (задаци за домаћи рад) осмишљавају се са циљем да укључе ученике у примену, повезивање и њихово преиспитивање развоја математичког знања. Примери модела часова дати су у Прилогу 4.

7. Статистичка обрада података

На основу података добијених истраживањем извршена је статистичка обрада података квалитативном и стандардном квантитативном анализом у складу са педагошким експериментом са паралелним групама. За статистичку обраду података добијених тестирањем коришћен је *Microsof Excel* и *SPSS Windows* (верзија 15)[35]. За обраду примарних података коришћена је дескриптивна статистичка анализа: аритметичка средина-просек *(Mean),* медијана (*Median),* минимум и максимум, стандардна девијација, варијанса, као и одређивање групног интервала (*i*) и број група (*K*). За одређивање броја група коришћено је Стургесово правило[36]: K=1+3,3 logN. Поред ове у *Excel* програм је унета и формула за израчунавање величине групног интервала: i=(X_{max}-X_{min})/K. Из разлога што је величина узорка при мерењу била различита, имаћемо различит број интервала, као и ширину групног интервала. Због даље обраде података у свим табелама су приказане дистрибуције фреквенција за интервалне серије –„f“(*Frequency),* док су вредности „x“ заправо израчунате средине групних интервла (*intervali*). У свакој о радних табела за Е и К групу приказана

---

[35] Пратећа интернет презентација приручника за овај програм налази се на интернет страници: www.allenandunwin.com⁄spss

[36] Жижић М, Ловрић М, Павличић Д. (2000): *Методи статистичке анализе*, Економски факултет, Београд, стр.18.

је вредност „кумулатив фреквенција испод“ (*Cumulativ %*). У обради и тумачењу добијених резултата успеха ученика у оквиру Е и К групе коришћена је дистрибуција апсолутних и кумулативних фреквенција, док је поређење фреквенција са кривом расподеле успеха ученика приказано хистограмом фреквенција паралелно за Е и К групу. Провера и сагласност са нормалном расподелом вршена је уз помоћ Колмогоров-Смирновог теста. С обзиром на нормалну дистрибуцију расподела ферквенција на свим спроведеним тестовима за потребе овог рада *t*-тестом извршено је тестирање значајности разлике између аритметичких средина (просека) ученика Е и К групе.

III Резултати и анализа истраживања

1. Анализа резултата иницијалног тестирања

Један од разлога за ово тестирање је био да се добију повратне информације о знању ученика у следећим областима: нумеричко, симболичко и визуелно приказивање математичких информација, давање претпоставке када информације недостају, расуђивање и израчунавање са неодређеним вредностима. Ове информације су омогућиле да се:

- одреди полазни ниво знања ученика у четвртом разреду основне школе
- одреде ученици, који ће учествовати у експерименту
- одаберу контексти и ситуације за нове математичке активности
- процене способности и активности потребне за изводљивост експеримента
- испита ниво алгебарског и геометријског расуђивања

На основу резултата иницијалног тестирања може се закључити да су ученици упознати са различитим врстама репрезентација. Проблемске ситуације су приказивали користећи бројеве, алгебарске симболе и геометријске слике, мада су најчешће користили бројевну нотацију. Успешно су користили и табеле. Може се закључити да ученици Е и К групе поседују алгебарске и геометријске могућности довољне за извођење експеримента.

За посматрану Е и К групу за оцењивање Иницијалног теста број јединица посматрања (ученика) износио је 65 (N=65). У циљу креирања интервалне варијационе серије коришћено је Стургесово правило: K=1+3,3logN, чиме је одређен број интервала у интервалној серији, а интервални размак је одређен по формули $i=(X_{max}–X_{min})/К$, што је величина групног интервала. Код обе групе (Е и К) је K=7,79≈8, а $i= (65-5)/8≈8$.

Табела 1: *Интервална варијациона серија за Е и К групу са нормалном расподелом за Иницијални тест*

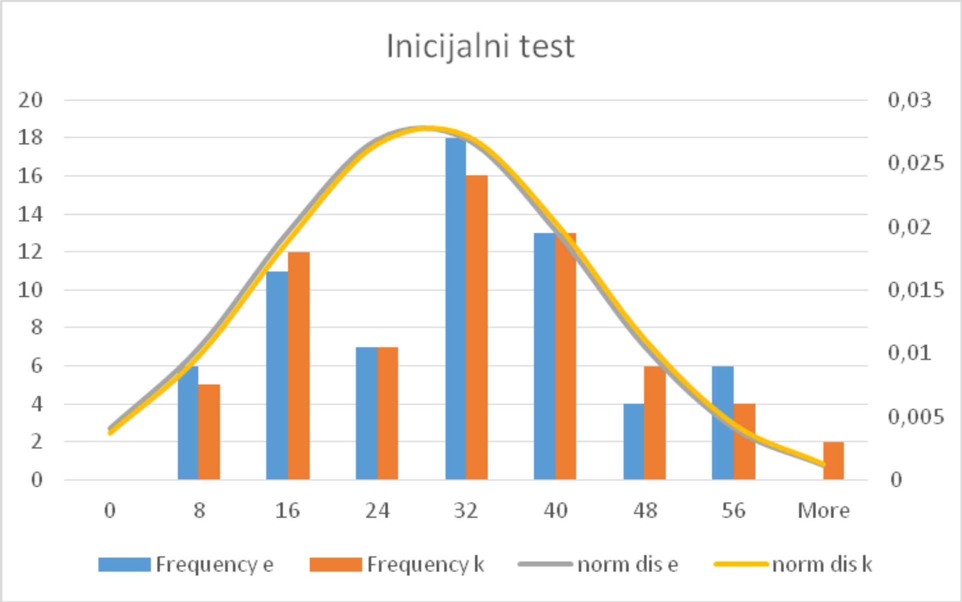
interval	intervali	norm dis E	norm dis K
0	0	0,004075	0,003738
0-8	8	0,010459	0,009841
8-16	16	0,01961	0,018916
16-24	24	0,02686	0,026544
24-32	32	0,026876	0,027194
32-40	40	0,019645	0,02034
40-48	48	0,01049	0,011107
48-56	56	0,004092	0,004428
56-64	64	0,001166	0,001289

Напомена: Прва колона према Excel програму почиње од „0“ и као таква се не рачуна, већ се креће од следеће, па је К=8 , што указује на број интервала (колона) у посматраној интервално варијационој серији

Табела 2: *Дистрибуција фреквенција Е и К групе за Иницијални тест*

Е - група			К - група		
interval	*Frequency e*	*Cumulative %*	*interval*	*Frequency k*	*Cumulative %*
0	0	0,00%	0	0	0,00%
8	6	9,23%	8	5	7,69%
16	11	26,15%	16	12	26,15%
24	7	36,92%	24	7	36,92%
32	18	64,62%	32	16	61,54%
40	13	84,62%	40	13	81,54%
48	4	90,77%	48	6	90,77%
56	6	100,00%	56	4	96,92%
More	0	100,00%	More	2	100,00%

На слици 1 може се видети да је расподела фреквенција паралелних група симетричног облика.



Слика 1: *Хистограм поређења фреквенција са кривом расподеле успеха ученика (нормална дистрибуција фреквенција) за Е и К групу на иницијалном тестирању*

Табела 3: *Дескриптивна статистичка анализа за Е и К групу за Иницијални тест*

Иницијални тест	N	Minimum	Maximum	Mean		Std. Deviation	Variance	Median
	Stat.	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Statistic	Statistic
Е-група	65	4,00	56,00	28,0154	1,77082	14,27683	203,828	30
К-група	65	2,00	58,00	28,6154	1,76908	14,26281	203,428	30

Провера и сагласност са нормалном расподелом добијена је преко Колмогоров-Смирновог теста, чији су резултати приказани у наредној табели. Имајући у виду не велико одступање од вредности просека (аритметичке средине и исте вредности медијане), постављамо нулту хипотезу: Не постоји значајна разлика у постигнутом успеху између ученика Е и К групе.

Табела 4: *Колмогоров-Смирнов тест*

		Е-група	К-група
N		65	65
Normal Parameters(a,b)	Mean	28,0154	28,6154
	Std. Deviation	14,27683	14,26281
Most Extreme Differences	Absolute	0,082	0,077
	Positive	0,082	0,076
	Negative	-0,071	-0,077
Kolmogorov-Smirnov Z		0,661	0,622
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,775	0,834

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

Пошто је констатована нормална дистрибуција фреквенција на свим спроведеним тестовима за потребе овог рада, *t*-тестом извршено је тестирање значајности разлике између аритметичких средина (просека) ученика Е и К групе.

Табела 5: Коефицијент корелације између Е и К групе

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	E & K	65	0,994	0,000

Добијени резултати показују коефицијент корелације (табела 5) и вредности, који се упоређују при прихватању или одбијању постављене хипотезе. У овом случају коефицијент корелације је 0,994 или 99,4% слагања између Е и К групе. Постављамо нулту хипотезу, коју тестирамо: H_0: $\mu_{к} \approx \mu_{е}$ (где су $\mu_{к}$ и $\mu_{е}$ аритметичке средине К и Е групе).

Табела 6: t-тест за испитивање значајности разлике између Е и К групе за иницијални тест (Paired Samples Test)

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pair 1	E - K	-0,60000	1,53907	0,19090	-0,98136	-0,21864	-3,143	64	0,003

Sig. (2-tailed)-је тражена вероватноћа доношења погрешног закључка

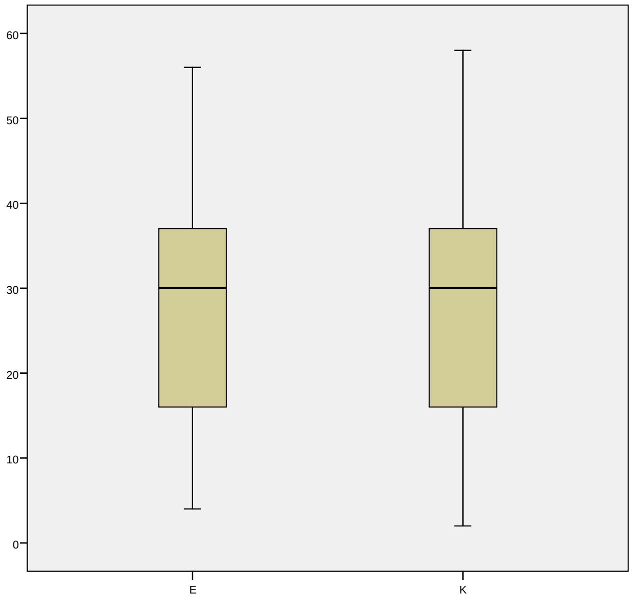
Може се закључити да не постоји значајна разлика између постигнутих резултата Е и К групе. Овде је задовољен услов: Ho: $\mu_{к} \approx \mu_{е}$. Забележене вредности: $|t|$= 3,143 и број степени слободе df=64. Просечан успех у оба узорка минимално се разликује – за 0,6 бода, а интервал 95-процентне поузданости протеже се од доње границе – 0,98136 до горње -0,21864. Просечан успех Е-групе на иницијалном тестирању износи 28,0154, а К-групе 28,6154, што наводи на закључак да је незнатна разлика у успеху Е и К групе на иницијалном тестирању, чиме се потврђује нулта хипотеза (H_0), тј. Е-група и К- група су уједначене у погледу знања, које ученици носе из прва три разреда. Наведени резултати могу се сумарно приказати:

Е-група: μ=28,0154, δ=13,11786, M=30,

К-група: μ=28,61546 , δ=12,57042, M=30

$|t|(64)= 3,143$; стварна вероватноћа - $p<0,05$, просечан успех у Е и К групи разликује се за 0,6 бода у корист ученика К-групе, интервал поверења 95% протеже се од границе – 0,98136 до -0,21864.

Закључујемо да не постоји значајна разлика у успеху ученика између Е и К групе на Иницијалном тесту.



Слика 2: *Графички приказ узорачких дисперзија за успех ученика на иницијалном тестирању* (*Бокс дијаграм за успех ученика на Иницијалном тесту*)

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Е-гр.	28,0154	65	14,27683	1,77082
	К-гр.	28,6154	65	14,26281	1,76908

На графикону се може уочити да су резултати ученика код обе групе, приближно исти (просечан успех). Тиме се додатно потврђује нулта хипотеза да се резултати ученика у Е и К групи значајно не разликују.

2. Анализа резултата првог тестирања (Тест *А*)

За посматрану Е и К групу за оцењивање Теста *А* број јединица посматрања износио је 65 (N=65). Према Стургесовом правилу $K=1+3,3\log N$ следи да је $K=7,79\approx8$, чиме је одређен број интервала у интервалној серији. Величина групног интервала, тј. интервални размак је $i=(X_{max}–X_{min})/K$, одакле је $i=(65-5)/8\approx8$.

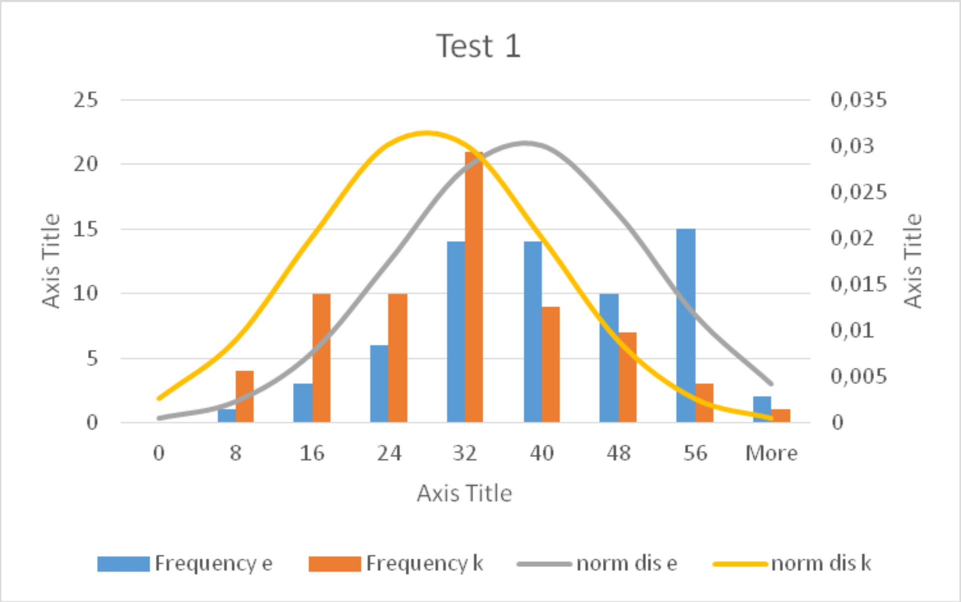
Табела 7: Интервална варијациона серија за Е и К групу са нормалном расподелом за Тест А

interval	intervali	norm dis e	norm dis k
0	0	0,000470582	0,002663
0-8	8	0,002273152	0,008968
8-16	16	0,00757003	0,020146
16-24	24	0,017379704	0,030182
24-32	32	0,027508242	0,030158
32-40	40	0,030016423	0,020099
40-48	48	0,02258035	0,008934
48-56	56	0,011710571	0,002648
56-64	64	0,004186982	0,000524

Табела 8: Дистрибуција фреквенција Е и К групе за Тест А

Е - група			К - група		
interval	*Frequency e*	*Cumulative %*	*interval*	*Frequency k*	*Cumulative %*
0	0	0,00%	0	0	0,00%
8	1	1,54%	8	4	6,15%
16	3	6,15%	16	10	21,54%
24	6	15,38%	24	10	36,92%
32	14	36,92%	32	21	69,23%
40	14	58,46%	40	9	83,08%
48	10	73,85%	48	7	93,85%
56	15	96,92%	56	3	98,46%
More	2	100,00%	More	1	100,00%

На слици 3 може се видети да је расподела фреквенција паралелних група симетричног облика.



Слика 3: Хистограм поређења фреквенција са кривом расподеле успеха ученика (нормална дистрибуција фреквенција) за Е и К групу на Тесту А

Табела 9: Дескриптивна статистичка анализа за Е и К групу за Тест А

Тест А	N	Minimum	Maximum	Mean		Std. Deviation	Variance	Median
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Statistic	Statistic
Е-група	65	6,00	57,00	37,8769	1,62707	13,11786	172,078	40
Кгрупа	65	5,00	58,00	27,9846	1,55917	12,57042	158,015	27

Провера и сагласност са нормалном расподелом добијена је преко Колмогоров-Смирновог теста, чији су резултати приказани у наредној табели.

Табела 10: Колмогоров-Смирнов тест

		Е-група	К-група
N		65	65
Normal Parameters(a,b)	Mean	37,8769	27,9846
	Std. Deviation	13,11786	12,57042
Most Extreme Differences	Absolute	0,106	0,129
	Positive	0,072	0,129
	Negative	-0,106	-0,092
Kolmogorov-Smirnov Z		0,858	1,037
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,453	0,232

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data

Имајући у виду да је констатована нормална дистрибуција фреквенција на свим спроведеним тестовима за потребе овог рада *t*-тестом извршено је тестирање значајности разлике између аритметичких средина (просека) и медијане ученика Е и К групе на Тесту *А*.

Добијени резултати показују коефицијент корелације (табела 11) и вредности, који се упоређују при прихватању или одбијању постављене хипотезе.

Постављамо хипотезу H_1: Постоји разлика у постигнутом успеху између ученика Е и К групе у корист ученика Е групе.

Табела 11: Коефицијент корелације између Е и К групе

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	E & K	65	0,967	0,000

Табела 12: t-тест за испитивање значајности разлике између Е и К групе за Тест А

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pair 1	E - K	9,89231	3,33131	0,41320	9,06685	10,71776	23,941	64	0,000

Sig. (2-tailed)-је тражена вероватноћа доношења погрешног закључка

Пошто је вредност Sig. (2-tailed) мања од 0,05 може се закључити да постоји значајна разлика између два резултата. У овом примеру вероватноћа је 0,000 што значи да је стварна вероватноћа мања од 0,05. Закључује се да постоји значајна разлика у резултатима Е и К групе. Забележене вредности: t=23,941 и број степени слободе df=64. Интервал 95-процентне поузданости протеже се од доње границе 9,06685 до горње 10,71776. Просечан успех у Е-групи износи 37,8769, а у контролној 27,9846. На разлике у постигнутом успеху између Е и К групе утицао је различит приступ изучавању математичких садржаја. Интегративни приступ у настави код ученика Е-групе допринео је бољим резултатима.

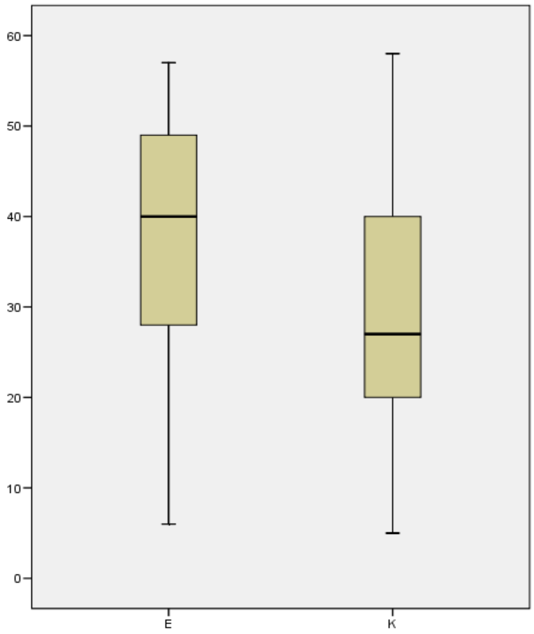
Наведени резултати могу се сумарно приказати:

Е-група: μ =37,8769, δ =13,11786; М=40

К-група: μ =27,9846 , δ=12,57042; М=27

t(64)=23,941; стварна вероватноћа - p<0,05, просечан успех у Е и К групи разликује се за 9,89231 бода у корист ученика Е-групе, интервал поверења 95% протеже се од границе 9,06685 до 10,71776.

Закључујемо да постоји значајна разлика у успеху ученика између Е и К групе. Ученици Е-групе показали су бољи успех на Тесту *А*, чиме је потврђена хипотеза H_1.



Слика 4: *Графички приказ узорачких дисперзија за успех ученика на Тесту А* (*Бокс дијаграм за успех ученика на Тесту А*)

Paired Samples Statistics

		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Е-гр.	37,8769	13,11786	1,62707
	К-гр.	27,9846	12,57042	1,55917

На графикону се може уочити да су резултати ученика код обе групе распоређени тако да је код Е-групе уочљиво да се просечан резултат креће испод 40 (просек износи 37,88 бода), а код контролне око 30, а то је просечан успех од око 27,98 бодова. Тиме се додатно потврђује хипотеза да се резултати ученика у Е и К групи разликују, тако што је у овом случају успех ученика у Е-групи бољи.

3. Анализа резултата другог тестирања (Тест *Б*)

За посматрану Е и К групу за оцењивање Теста *Б* број јединица посматрања износио је 65 (N=65). Према Стургесовом правилу K=1+3,3logN следи да је K=7,79≈8, чиме је одређен број интервала у интервалној серији. Величина групног интервала, тј. интервални размак је $i=(X_{max}–X_{min})/К$, одакле је: $i=(65-5)/8≈8$.

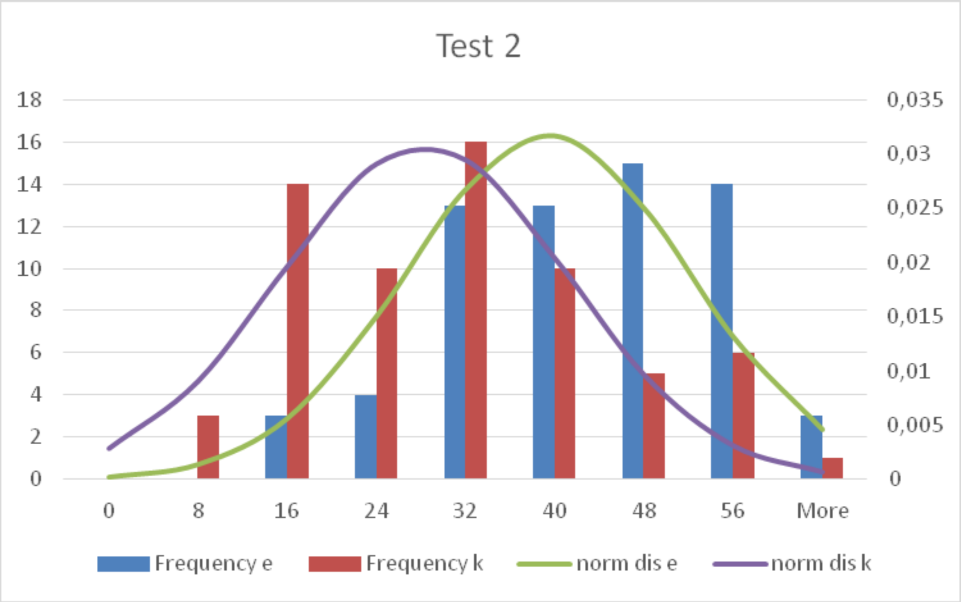
Табела 13: Интервална варијациона серија за Е и К групу са нормалном расподелом за Тест Б

interval	intervali	norm dis e	norm dis k
0	0	0,000236237	0,002871
0-8	8	0,001415791	0,009088
8-16	16	0,005657231	0,019673
16-24	24	0,015071697	0,029125
24-32	32	0,026771584	0,029489
32-40	40	0,031705863	0,02042
40-48	48	0,02503564	0,00967
48-56	56	0,013180486	0,003132
56-64	64	0,004626556	0,000694

Табела 14: Дистрибуција фреквенција Е и К групе за Тест Б

Е - група			К - група		
interval	*Frequency e*	*Cumulative %*	*interval*	*Frequency k*	*Cumulative %*
0	0	0,00%	0	0	0,00%
8	0	0,00%	8	3	4,62%
16	3	4,62%	16	14	26,15%
24	4	10,77%	24	10	41,54%
32	13	30,77%	32	16	66,15%
40	13	50,77%	40	10	81,54%
48	15	73,85%	48	5	89,23%
56	14	95,38%	56	6	98,46%
More	3	100,00%	More	1	100,00%

На слици 5 може се видети да је расподела фреквенција паралелних група симетричног облика.



Слика 5: Хистограм поређења фреквенција са кривом расподеле успеха ученика (нормална дистрибуција фреквенција) за Е и К групу на Тесту Б

Табела 15: Дескриптивна статистичка анализа за Е и К групу за Тест Б

Тест Б	N	Minimum	Maximum	Mean		Std. Deviation	Variance	Median
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Statistic	Statistic
Е-група	65	10,00	59,00	39,3385	1,55852	12,56518	157,884	40
К-група	65	3,00	57,00	28,2615	1,60981	12,97868	168,446	28

Просек и медијана крећу се приближно исто, што иде у прилог чињеници да је у питању нормална расподела. Провера и сагласност са нормалном расподелом врши се преко Колмогоров-Смирновог теста, чији су резултати приказани у наредној табели.

Табела 16: Колмогоров-Смирнов тест

		Е-група	К-група
N		65	65
Normal Parameters(a,b)	Mean	39,3385	28,2615
	Std. Deviation	12,56518	12,97868
Most Extreme Differences	Absolute	0,109	0,108
	Positive	0,066	0,108
	Negative	-0,109	-0,077
Kolmogorov-Smirnov Z		0,875	0,873
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,428	0,431

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

С обзиром да је констатована нормална дистрибуција фреквенција, t-тестом вршимо тестирање значајности разлике између аритметичких средина (просека) и медијане ученика Е и К групе на тесту *Б* и тиме тестирамо хипотезу, која гласи H_1: Постоји разлика у постигнутом успеху између ученика Е и К групе у корист ученика Е групе.

Табела 17: *Коефицијент корелације између Е и К групе*

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	E & K	65	0,954	0,000

У табели 17 приказани резултати коефицијента корелације и вредности, које се упоређују при прихватању или одбијању постављене хипотезе.

Табела 18: *t-тест за испитивање значајности разлике између Е и К групе за Тест Б*

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
E - K	11,07692	3,88630	0,48204	10,11394	12,03990	22,979	64	0,000

Пошто је вредност Sig. (2-tailed) мања од 0,05 може се закључити да постоји значајна разлика између два резултата. У овом примеру вероватноћа је 0,000 што значи да је стварна вероватноћа мања од 0,05. Закључује се да постоји значајна разлика у резултатима Е и К групе у Тесту *Б*. Забележене вредности**:** t=22,979 и број степени слободе df=64. Интервал 95-процентне поузданости протеже се од доње границе 10,11394 до горње 12,03990. Просечан успех у Е-групи износи 39,3385, а у контролној 28,26154. Бољи успех показали су ученици Е-групе, који су наставне садржаје изучавали применом интегративног приступа.

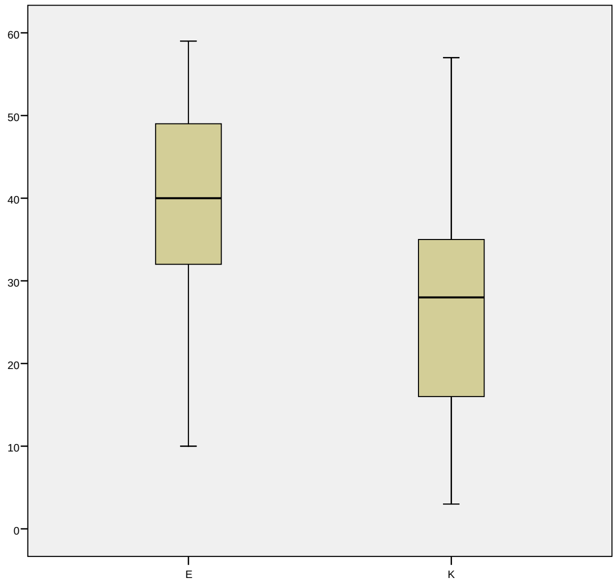
Наведени резултати могу се сумарно приказати:

Е-група: μ =39,3385, δ=12,56518; M=40

К-група: μ =28,2615 , δ=12,97868; M=28

t(64)= 22,979; стварна вероватноћа - p<0,05, просечан успех у Е и К групи разликује се за 11,07692 бода у корист ученика Е-групе, интервал поверења 95% протеже се од границе 10,11394 до 12,03990.

Закључујемо да постоји значајна разлика у успеху ученика између Е и К групе. Ученици Е-групе показали су бољи успех на Тесту *Б*, чиме је потврђена хипотеза H_1.



Слика 6: *Бокс дијагрма за успех ученика на Тесту Б* (*Графички приказ узорачких дисперзија за успех ученика*)

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	E	39,3385	65	12,56518	1,55852

4. Поређење успеха ученика на Иницијалном, Тесту *А* и Тесту *Б*

Табела 19: *Поређење успеха ученика Е-групе на Иницијалном тесту, Тесту А и Тесту Б*

	Просек	Стандардна девијација	Просек	Стандардна девијација	т-вреднсост	р-вредност
Иницијални тест/Тест А	28,0154	14,27683	37,8769	13,11786	-22,807	0,000
Иницијални тест/Тест Б	28,0154	14,27683	39,33851	12,56518	-23,046	0,000
Тест А/ТестБ	37,8769	13,11786	39,33851	12,56518	-7,693	0,000

Из табеле 19 може се закључити да просечан успех код ученика Е-групе расте (видети просек за Иницијални тест, Тест *А* и Тест *Б*.). Ученици су у Тесту *Б* остварили 11 поена више него у Иницијалном тесту, што је условљено применом интегративног приступа у настави математике.

На нивоу значајности од 0,05 постигнута је значајна разлика између постигнутих резултата на Иницијалном тесту и Тесту *Б* (поредимо вредности у табели), док је у поређењу Е-групе на Иницијалном тесту и Тесту *А* постигнута статистички незначајна разлика.

Табела 20: *Поређење успеха ученика К-групе на Иницијалном тесту, Тесту А и Тесту Б*

	Просек	Стандардна девијација	Просек	Стандардна девијација	т-вреднсост	р-вредност
Иницијални тест/ТестА	28,6154	14,26281	27,9846	12,57042	1,859	0,068
Иницијални тест/Тест Б	28,6154	14,26281	28,2615	12,97868	1,154	0,253
Тест А/ТестБ	27,9846	12,57042	28,2615	12,97868	-0,956	0,343

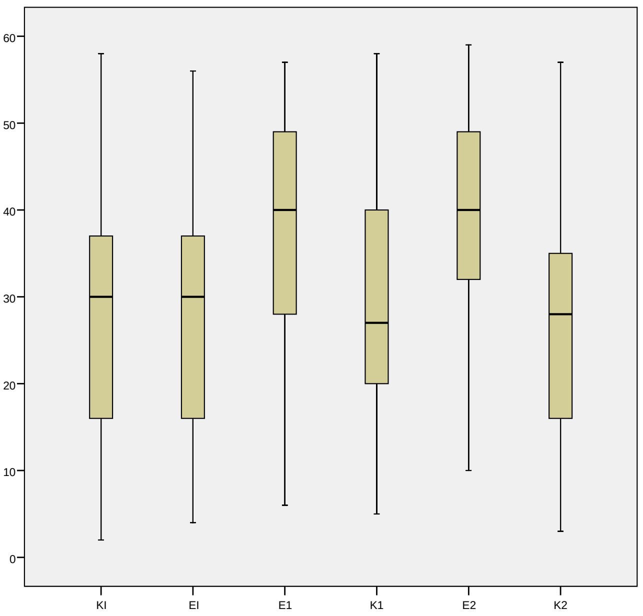
На основу табеле 20 може се закључити да су ученици К-групе најбоље резултате освојили на Иницијалном тесту (у просеку 28,62 бодова), док су резлтати Теста *А* били најлошији, али не значајно мањи (у просеку око 1,5 бод) него на Иницијалном тесту и Тесту *Б*.

При поређењу успеха на Тесту *А* и Тесту *Б* код ученика К-групе је статистички незначајна разлика, па закључујемо да су ученици имали сличан успех на ова два теста. Резултати указују на то да су ученици на Иницијалном тесту имали боље, али не статистички много значајно различите резултате у односу на Тест *А* и Тест *Б*.

Табела 21: *Просечан успех ученика Е и К групе на Иницијалном тесту, Тесту А и Тесту Б*

	Е група		К група		t-вредност са вероватноћом	
	Просек	Стандардна девијација	Просек	Стандардна девијација	т-вредност	р-вредност
Иницијални тест	28,0154	14,27683	28,6154	12,57042	-3,143	0,03
Тест А	37,8769	13,11786	27,9846	12,57042	23,941	0,00
Тест Б	39,33851	12,56518	28,2615	12,97868	22,979	0,00

На основу податка закључујемо да је Е-група остварила боље резултате у односу на К-групу. Иницијални тест није показао значајну разлику у успеху између Е и К група, али код Теста *А* и Теста *Б*, разлика је евидентна и статистички значајна, што се може закључити и преко просечног успеха, медијане и додатном провером преко вредности *t*-теста.



Слика 7: *Графички приказ узорачких дисперзија за успех ученика К и Е групе за: Иницијални тест, Тест А и Тест Б (Бокс дијагарм за успех ученика на сва три теста)*

Из графика се види да су незначајне разлике у успеху ученика између Е и К групе остварене само на Иницијалнм тесту, док су код Теста *А* и Теста *Б* забележене значајне разлике у успеху ученика Е и К групе.

5. Анализа концептуалног разумевања

У задацима A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 акценат је на препознавању геометријских и алгебарских појмова. Разлика у начину решавања задатака проузрокована је концептуалним (појмовним) разумевањем, због кога су одговори дати на различитим нивоима: 1) 57% ученика Е-групе, односно 29% ученика К- групе, расуђивало је на уопштеном нивоу, 2) 40% ученика Е-групе, односно 66% ученика К-групе, изводило је закључке на основу конкретног случаја, тако што су једну од променљивих заменили произвољним бројем и изводили прорачуне. Другим речима, већина ученика Е-групе има исправну концептуализацију обима и површине фигура у равни. Они препознају/откривају (инваријантни) визуелни приказ фигуре, који омогућава да се са аспекта квантитативног односа између геометријских објеката одреди вредност жељене величине.

Најјаснији сигнал недостатка релацијског и концептуалног разумевања код ученика К-групе је њихова оперативна перцепција проблема статичне природе, што се огледа кроз тумачење статично-динамичне дуалности симбола. (Наиме, исти се симбол може односити на објекат и на квалитет објекта, као што нпр, симболи a и b могу означавати и странице правоугаоника и њихове дужине.) Већина ученика Е-групе показала је да симболе може тумачити као статичне производе (објекте), док решавање проблема код ученика К-групе одражава углавном процедурални приступ, што указује на размишљање на конкретном нивоу, усмерено на вредност мерења. Наглашена динамична наспрам статичне концепције симбола, код ученика К-групе, показана је њиховим покушајима да:

а) у задацима A_4, A_5 напишу нумеричке вредности (а поједини ученици и све комбинације) страница a и b (док је неколико ученика тврдило да је немогуће извести закључак на основу датих услова), иако се од ученика не захтева аритметичка представа слова a и b, нити је одређивање њихове вредности саставни део процеса решавања. Дакле, већина ученика слова a и b тумачи као вредност објекта, уместо као саме објекте и нема свест о томе које су величине представљене изразима $a+b$ и $a{\cdot}b$. Наиме, уместо да размишљају са аспекта значења појма (обима, површине), ученици размишљају у смислу саме процедуре. Симболичке представе довеле су ученике до тога да су изгубили контакт са геометријским објектима које оне представљају, а самим тим и са значењем обрасца, те изразе $a+b$ и $a{\cdot}b$ тумаче као процес, тј. као позив на активности, које се заснивају на прорачунима, а не као објекат, тј. готов производ, што указује на то да алгебарске изразе ученици К-групе доживљавају као сигнал за акцију и не формализују их у (прогресивном) смеру да постану ознаке за објекат.

б) у задацима A_1,$A_{2а)}$,$A_{3а)б)}$ одређују нумеричку вредност странице „квадратића", што указује на перцепцију квази-присуства непознате (која постоји у проблемској ситуацији, али решавање задатка не подразумева одређивање њене вредности). Другим речима, однос између квадрата и осенчене фигуре посматрају са аспекта нумеричке вредности њихове површине, односно обима. Ако се проблеми тако посматрају (као ученици К-групе), они захтевају комплексан низ корака у којима су ученици правили грешке или, изгубивши поверење у свој приступ задатку, решење нису доводили до крајњег резултата. Међутим, овај приступ свакако није била намера истраживача. У ствари, сврха тих задатка била је да се расуђивањем о проблему, у коме је статични однос између геометријских објеката описан визуелно, подстакне примена геометријског модела, који би, откривајући везу између услова и захтева задатка, уместо на динамичну, указао на статичну природу активности потребних за њихово решавање и тиме их олакшао. Дакле, намена задатака је да ученицима пруже могућност да испитају ситуацију расуђивањем о квантитативним односима између геометријских објеката без додељивања конкретних нумеричких вредности, тј. враћањем у контекст изворног значења симбола.

Упркос низу структурираних задатака A_1,A_2,A_3 три ученика Е-групе и шест ученика К-групе нису схватили суштину проблема и нису били мотивисани да дају одговор на први део задатака, што је аутоматски значило да не могу да дају одговор ни на други део.

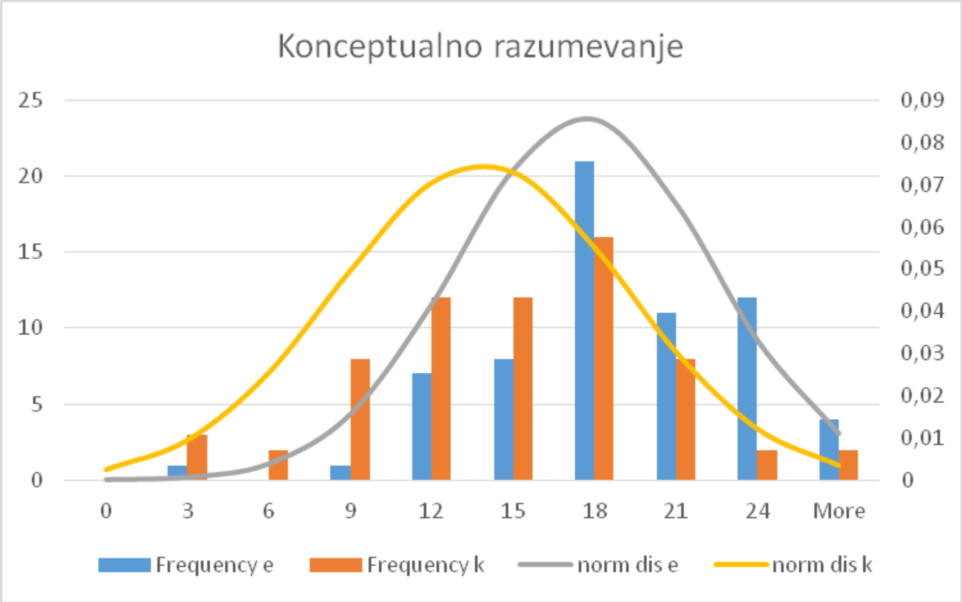
За посматрану Е и К групу за оцењивање концептуалног разумевања број јединица посматрања износио је 65 (N=65). Према Стургесовом правилу K=1+3,3logN, следи да је K=7,79≈8. Величина групног интервала (интервални размак) $i=(X_{max}–X_{min})/K$, одакле је $i=(25-2)/8=2,875≈3$

Табела 22: Интервална варијациона серија за Е и К групу са нормалном расподелом за групу задатака A_1,A_2,A_3,A_4,A_5

interval	intervali	norm dis e	norm dis k
0	0	6,66477E-05	0,002635
0-3	3	0,000622902	0,009602
3-6	6	0,003837231	0,025541
6-9	9	0,015580433	0,049605
9-12	12	0,041696967	0,07034
12-15	15	0,073551713	0,072822
15-18	18	0,085515432	0,055045
18-21	21	0,065532928	0,030378
21-24	24	0,033100765	0,01224
24-27	27	0,011019956	0,003601

Табела 23: Дистрибуција фреквенција Е и К групе за групу задатака A_1,A_2,A_3,A_4,A_5

Е-група			К-група		
interval	*Frequency e*	*Cumulative %*	*interval*	*Frequency k*	*Cumulative %*
0	0	0,00%	0	0	0,00%
3	1	1,54%	3	3	4,62%
6	0	1,54%	6	2	7,69%
9	1	3,08%	9	8	20,00%
12	7	13,85%	12	12	38,46%
15	8	26,15%	15	12	56,92%
18	21	58,46%	18	16	81,54%
21	11	75,38%	21	8	93,85%
24	12	93,85%	24	2	96,92%
More	4	100,00%	More	2	100,00%



Слика 8: Хистограм поређења фреквенција са кривом расподеле успеха ученика (нормална дистрибуција фреквенција) за Е и К групу на задацима A_1,A_2,A_3,A_4,A_5

На слици 8 може се видети да је расподела фреквенција паралелних група симетричног облика. Да распоред има нормалну дистрибуцију фреквенција можемо да закључимо поређењем просечне вредности серија и медијане.

Табела 24: Дескриптивна статистичка анализа за Е и К групу за задатке A_1,A_2,A_3,A_4,A_5

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance	Median
E	65	2,00	25,00	17,5846	4,64655	21,590	18
K	65	2,00	25,00	13,8308	5,34898	28,612	14

Упоређујемо вредности аритметичке средине и медијане код оба узорка (Е и К групе) и пошто се ове вредности крећу у приближно истом односу закључујемо да распоред има нормалну расподелу..

Табела 25: Колмогоров-Смирнов тест

		E	K
N		65	65
Normal Parameters(a,b)	Mean	17,5846	13,8308
	Std. Deviation	4,64655	5,34898
Most Extreme Differences	Absolute	0,105	0,088
	Positive	0,055	0,056
	Negative	-0,105	-0,088
Kolmogorov-Smirnov Z		0,847	0,711
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,471	0,692

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

Додатна провера расподеле фреквенција утврђена је преко Колмогоров-Смирновог теста, чији су резултти приказани у претходној табели.

Табела 26: Коефицијент корелације између Е и К групе
(Paired Samples Correlations)

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	E & K	65	0,973	0,000

Коефицијент вредности од 0,973 користи се за упоређивање вредности оба узорка при прихватању или одбијању постављене хипотезе. Постављамо хипотезу и тестирамо је *t*-тестом. H_2: Након примене унутарпредметне интеграције у настави математике ученици су изградили боље концептуално разумевање.

Табела 27: t-тест за испитивање значајности разлике између Е и К групе за задатке A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 (Paired Samples Test)

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pair 1	E - K	3,75385	1,34665	0,16703	3,42016	4,08753	22,474	64	0,000

С обзиром да је вероватноћа у табели Sig. (2-tailed)= 0,00<0,05 закључујемо да постоји разлика у резултатима Е и К групе.

Забележене вредности: $t=22,474$ и број степени слободе $df=64$.

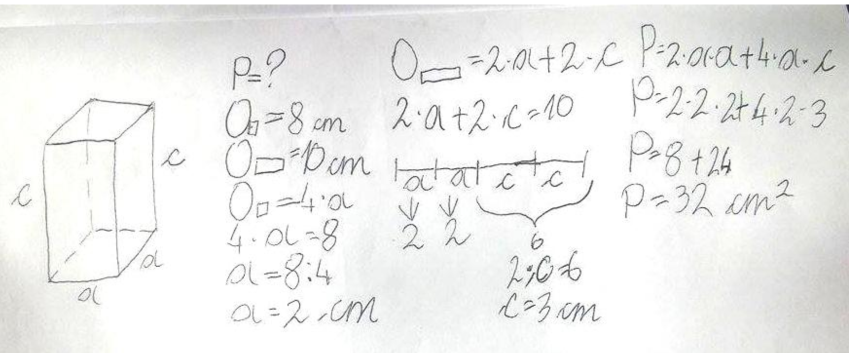
Наведени резултати могу се сумарно приказати:

У Е-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: $\mu=17,5846$, $\delta=4,64655$; М=18. Једна половина ученика у овом узорку није остварила више, а друга не мање од 18 поена. У К-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: $\mu=13,8308$, $\delta=5,34898$; М=14. $t(64)= 22,474$; стварна вероватноћа - $p<0,0005$, просечан успех ученика Е-групе је за 3,75385 бода већи од просечног успеха ученика К-групе, интервал поверења 95% протеже се од границе 3,42016 до 4,08753.

Закључујемо да постоји разлика у успеху ученика између Е и К групе. Ученици Е-групе показали су бољи успех на задацима $А_1$,$А_2$,$А_3$,$А_4$,$А_5$, чиме је потврђена хипотеза H_2.

6. Анализа способности формирања и решавања линеарних једначина

Намена задатака $Б_1$,$Б_3$,$Б_4$,$Б_6$,$Б_7$ је да се процени способност примене линеарних једначина уграђених у геометријски контекст. Већина ученика из обе групе решавали су проблеме комбинујући геометријско и алгебарско знање: прво су нацртали слику, а затим податке са слике превели на синтаксички ниво, који обезбеђује прецизан пренос информација и алгебарске трансформације, које воде до решења. Примена директног закључивања (*modus ponens*) хипотетичко-дедуктивног карактера (општег правила у конкретном случају), тј. примена формуле (за обим и површину) у контексту доводи до формирања линеарних једначина, којима ученици репрезентују односе и структурирају геометријске проблеме и које у даљем раду посматрају као апстрактне објекте ослобођене од контекстуалног значења. 86% ученика К-групе једначине је решавало применом инверзних односа, а од тога њих 68% је погрешним трансформисањем формуле, при чему зависна варијабла постаје независна и обрнуто, указало на погрешно тумачење односа (нпр, из $64=4a$ пишу $a=64-4$). 49% ученика Е-групе показало је да сам поступак решавања једначина подразумева познавање особина релације једнакости (нпр, из $64=4a$ пишу $64:4=4:4\cdot a$). Наиме, поступак решавања једначина код ученика Е-групе осмишљен је као низ статичних корака са пратећим геометријским репрезентацијама, те су информације тумачили из различитих перспектива (слика 9). Дакле, решавање једначина није засновано на симболичким манипулацијама, већ на дечијој перцепцији једначине као еквиваленције два израза и на поједностављивању односа између та два израза, тј. на препознавању трансформација, које, када се изводе на једначини, чувају еквивалентност. Како стратегија препознавања еквивалентности експлицитно захтева релационо разумевање знака једнакости, овај начин решавања указује на релационо размишљање.



Слика 9: *Поступак решавања задатка Б*$_4$ *ученика Е-групе*

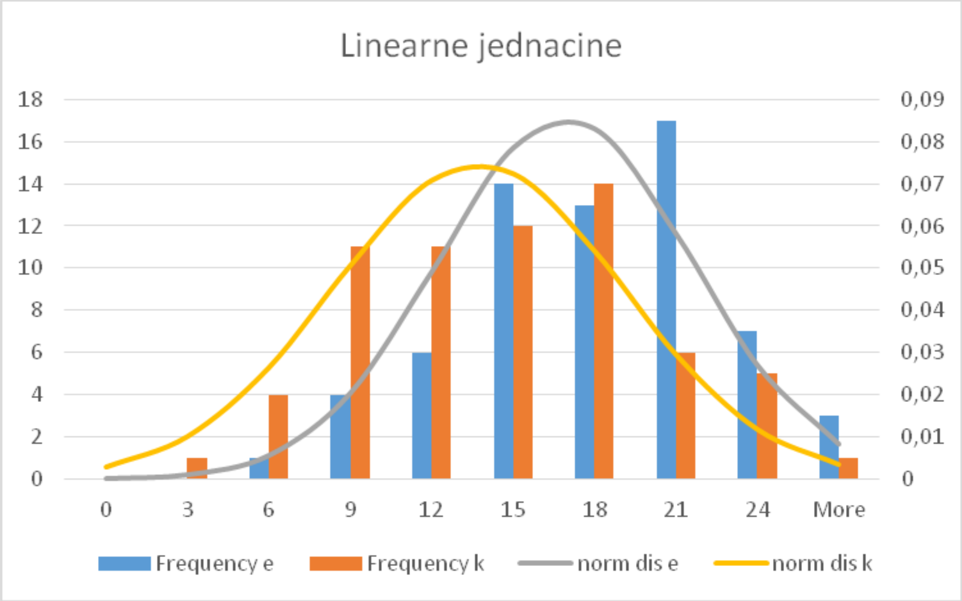
За посматрану Е и К групу за оцењивање успеха на задацима Б$_1$,Б$_3$,Б$_4$,Б$_6$,Б$_7$ број јединица посматрања износио је 65 (N=65). Према Стургесовом правилу K=1+3,3logN, следи да је K=7,79≈8. Величина групног интервала (интервални размак) је i=(X$_{max}$–X$_{min}$)/K, одакле је i=(25-3)/8=2,75≈3.

Табела 28: *Интервална варијациона серија за Е и К групу са нормалном расподелом за групу задатака Б*$_1$,*Б*$_3$,*Б*$_4$,*Б*$_6$,*Б*$_7$

interval	intervali	norm dis e	norm dis k
0	0	0,000123	0,002806
0-3	3	0,001018	0,010076
3-6	6	0,005599	0,026427
6-9	9	0,020392	0,050626
9-12	12	0,049182	0,070837
12-15	15	0,078549	0,072395
15-18	18	0,083074	0,05404
18-21	21	0,058182	0,029463
21-24	24	0,026983	0,011733
24-27	27	0,008287	0,003413

Табела 29: *Дистрибуција фреквенција Е и К групе за групу задатака* $Б_1$,$Б_3$,$Б_4$,$Б_6$,$Б_7$

Е-група			К-група		
interval	*Frequency e*	*Cumulative %*	*interval*	*Frequency k*	*Cumulative %*
0	0	0,00%	0	0	0,00%
3	0	0,00%	3	1	1,54%
6	1	1,54%	6	4	7,69%
9	4	7,69%	9	11	24,62%
12	6	16,92%	12	11	41,54%
15	14	38,46%	15	12	60,00%
18	13	58,46%	18	14	81,54%
21	17	84,62%	21	6	90,77%
24	7	95,38%	24	5	98,46%
More	3	100,00%	More	1	100,00%



Слика 10: *Хистограм поређења фреквенција са кривом расподеле успеха ученика (нормална дистрибуција фреквенција) за Е и К групу на задацима* $Б_1$,$Б_3$,$Б_4$,$Б_6$,$Б_7$

На основу слике 10 може се закључити да је расподела фреквенција паралелних група симетричног облика. Да је распоред нормалне дистрибуције фреквенција закључујемо и поређењем просечне вредности серија и медијане.

Табела 30: *Дескриптивна статистичка анализа за Е и К групу за задатке* $Б_1$,$Б_3$,$Б_4$,$Б_6$,$Б_7$

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance	Median
E	65	6,00	25,00	16,9077	4,67280	21,835	17
K	65	3,00	25,00	13,7077	5,35234	28,648	14

Следећи корак је поређење вредности аритметичке средине и медијане код обе групе. С обзиром да се ове вредности крећу у приближно истом односу закључујемо да распоред има нормалну расподелу и код Е и и код К групе.

Табела 31: *Колмогоров-Смирнов тест*

		E	K
N		65	65
Normal Parameters(a,b)	Mean	16,9077	13,7077
	Std. Deviation	4,67280	5,35234
Most Extreme Differences	Absolute	0,102	0,085
	Positive	0,056	0,072
	Negative	-0,102	-0,085
Kolmogorov-Smirnov Z		0,820	0,682
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,512	0,741

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

У табели је уз помоћ Колмогоров-Смирновог теста извршена додатна провера расподеле фреквенција за обе групе, чиме је потврђена нормална расподела.

Табела 32: *Коефицијент корелације између Е и К групе*

(Paired Samples Correlations)

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	E & K	65	0,986	0,000

Коефицијент вредности од 0,986 се користи за упоређивање степена слагања вредности оба узорка при прихватању или одбијању постављене хипотезе. Постављамо хипотезу и тестирамо је *t*-тестом. *H_3*: Након примене унутарпредметне интеграције у настави математике ученици су развили већу способност формирања и решавања линеарних једначина.

Табела 33: *t-тест за испитивање значајности разлике између Е и К групе за задатке $Б_1$,$Б_3$,$Б_4$,$Б_6$,$Б_7$ (Paired Samples Test)*

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pair 1	E - K	3,20000	1,07819	0,13373	2,93284	3,46716	23,928	64	0,000

С обзиром да је вероватноћа у табели Sig.(2-tailed)= 0,00<0,05 закључујемо да постоји разлика у резултатима Е и К групе. Забележене вредности: t=23,928 и број степени слободе df=64.

Наведени резултати могу се сумарно приказати:

У Е-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: μ=16,9077, δ=4,67280; M=17. Једна половина ученика у овом узорку није остварила више, а друга не мање од 17 поена. У К-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: μ=13,7077, δ=5,35234; M=14. t(64)= 23,928; стварна вероватноћа - p<0,05, разлика у просечном успеху између ученика Е и К групе 3,2 бода у корист ученика Е-групе, интервал поверења 95% протеже се од границе 2,93284 до 3,46716.

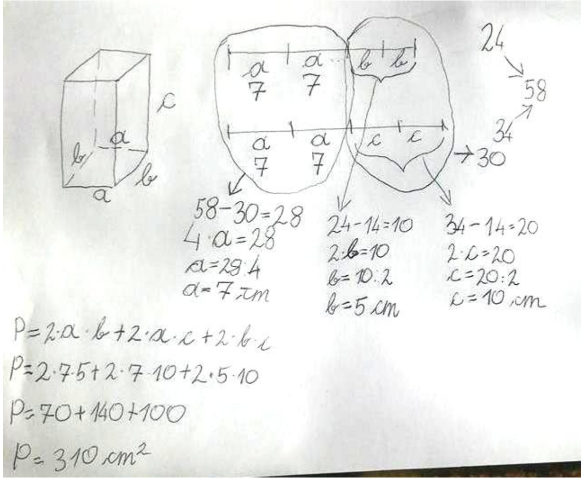
Закључујемо да постоји разлика у успеху ученика између Е и К групе. Ученици Е-групе показали су бољи успех на задацима $Б_1$,$Б_3$,$Б_4$,$Б_6$,$Б_7$, чиме је потврђена хипотеза H_3.

7. Анализа способности расуђивања о односима између величина

Разумевање алгебарске концепције величина и односа између њих анализирано је помоћу две групе задатака. Одговори дати на следеће две групе задатака односе се и на разумевање променљивих, односно на доношење претпоставке о непознатој: када је променљива фиксни број одређен условима задатка и када варира (мења своју вредност), што резултира одговарајућим тумачењем алгебарских симбола, где се један симбол може тумачити као једна вредност (у задацима $Б_2$,$Б_5$,$Б_9$,$Б_{11}$) или вишеструка вредност (у задацима $А_6$,$Б_8$).

1) Задаци $Б_2$,$Б_5$,$Б_9$,$Б_{11}$, служе за процену способности расуђивања ученика у погледу упоређивања величина, које могу имати тачно једну нумеричку вредност. Циљ задатака је да се утврди како ученици описују односе између величина преводећи речи као што су „мање/више пута“, „за колико мање/више“, „веће/мање од”, „једнако” на алгебарски и геометријски језик, као и начин структурирања и приказивања услова, који омогућава расуђивање о односима између величина и додељивање нумеричких вредности непознатим. (Због присуства система једначина, који има улогу да само структурира проблем, ниво захтева може изгледати висок, али формално алгебарско решавање система није део процеса решавања проблема. Овде се званично не користи

термин „систем једначина“, већ се једначине посматрају као релације између величина.) Ученици Е-групе (60%) у процесу решавања ослонили су се на структурну компоненту проблема и визуелни ефекат геометријског приступа (визуелизацијом појма непознате и односа између величина помоћу дужи). Наиме, они су, користећи геометријске репрезентације, односе између величина учинили очигледним и изразили општу идеју да знак једнакости значи „исто што и“, те проблеме нису решавали са оперативне, већ са релационе тачке гледишта. Ученици Е-групе били су у могућности да расуђују алгебарски без коришћења алгебарских процедура за решавање система једначина, што значи да њихов успех на тесту није резултат познавања алгебарских процедура, већ способности репрезентације релација између величина у геометријском контексту из кога, упоређивањем дужи, откривају нови линеарни однос, што резултира формирањем једначине са једном непознатом.



Слика 11: *Поступак решавања задатка Б$_5$ ученика Е-групе*

Индиректно, ученик (слика 11) успешно примењује формалну алгебарску методу (методу елиминисања непознатих) за решавање система, док је његова алгебарска симболизација на неформалном нивоу. 28% ученика К-групе и 17% ученика Е-групе није разумело наведене задатке, јер њихова решења (ситуације) најчешће немају значење „два пута већи”, „разликују се за 2”. 54% ученика К-групе односе између величина је посматрало са динамичног аспекта, што одговара аритметици. Они су користили алгебарску симболизацију, али су ментални процеси на аритметичком нивоу, тј. расуђују на основу нумеричких вредности, без непознатих и променљивих. Наиме, они су презентацију проблема и процес решавања третирали као одвојене делове, тј. правилно су поставили однос између величина, али су рад наставили на аритметичком нивоу методом покушаја и погрешака испитујући претпоставке решења додељивањем произвољних нумеричких вредности непознатим. Тиме су указали на процедуралну концепцију односа и изразили општу идеју да знак једнакости значи „додати бројеве“ или „одговор“. На основу начина рада може се закључити да употреба алгебарских симбола не подразумева способност алгебарског расуђивања. Рад ученика К-групе, који нумеричким комбинацијама не приказују јасан циљ, указује на то да аритметички приступ не подржава алгебарско расуђивање, а самим тим не гарантује успех. На основу стратегије решавања задатка Б$_2$,Б$_5$,Б$_9$,Б$_{11}$ може се закључити да је 60% ученика Е-групе знак једнакости посматрало са релацијског аспекта, док је 54% ученика К-групе знак једнакости посматрало са оперативног аспекта. Резултати тестирања указују на то да није неопходно да се способност решавања система једначина развија у синхронизацији са алгебарском симболизацијом и алгебарским методама. Наиме, превођењем алгебарске ситуације у контекст геометрије омогућава се да алгебарско расуђивање буде на нивоу изнад алгебарске симболизације, у чему се огледа позитиван ефекат геометријских модела на развој алгебарског расуђивања.

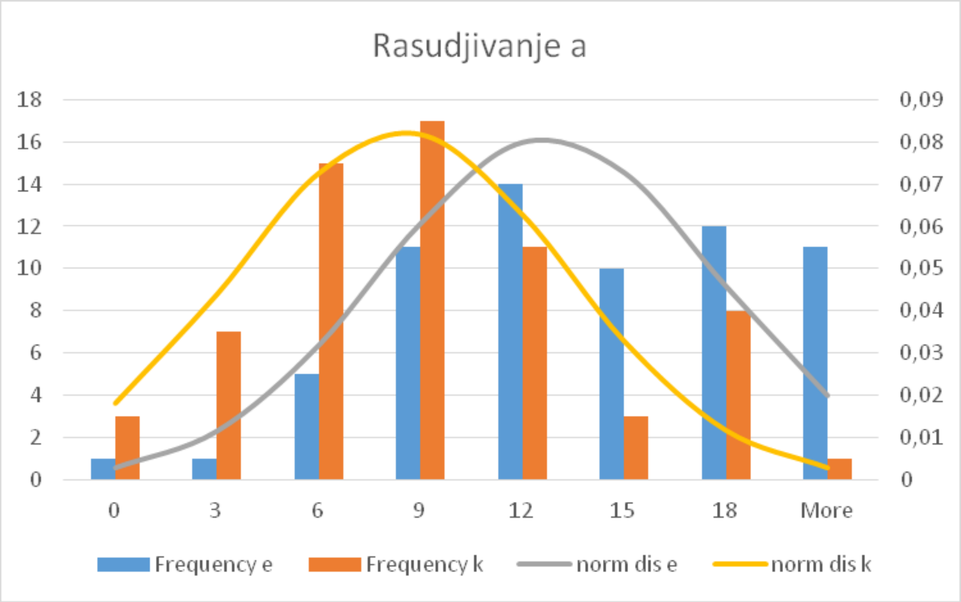
За посматрану Е и К групу за оцењивање успеха на задацима Б$_2$,Б$_5$,Б$_9$,Б$_{11}$ број јединица посматрања износио је 65 (N=65). Према Стургесовом правилу K=1+3,3logN следи да је K=7,79≈8. Величина групног интервала (интервални размак) је i=(X$_{max}$–X$_{min}$)/K, одакле је i=(20-0)/8≈3

Табела 34: *Интервална варијациона серија за Е и К групу са нормалном расподелом за групу задатака Б$_2$,Б$_5$,Б$_9$,Б$_{11}$*

interval	intervali	norm dis e	norm dis k
0	0	0,002931	0,018137
0-3	3	0,01162	0,043939
3-6	6	0,031894	0,072575
6-9	9	0,06061	0,081732
9-12	12	0,079742	0,062757
12-15	15	0,072636	0,032855
15-18	18	0,045807	0,011728
18-21	21	0,02	0,002854

Табела 35: *Дистрибуција фреквенција Е и К групе за групу задатака Б$_2$,Б$_5$,Б$_9$,Б$_{11}$*

Е-група			К-група		
interval	*Frequency e*	*Cumulative %*	*interval*	*Frequency k*	*Cumulative %*
0	1	1,54%	0	3	4,62%
3	1	3,08%	3	7	15,38%
6	5	10,77%	6	15	38,46%
9	11	27,69%	9	17	64,62%
12	14	49,23%	12	11	81,54%
15	10	64,62%	15	3	86,15%
18	12	83,08%	18	8	98,46%
More	11	100,00%	More	1	100,00%



Слика 12: *Хистограм поређења фреквенција са кривом расподеле успеха ученика (нормална дистрибуција фреквенција) за Е и К групу на задацима Б$_2$,Б$_5$,Б$_9$,Б$_{11}$*

На основу слике 12 може се закључити да је расподела фреквенција паралелних група симетричног облика. Да је распоред нормалне дистрибуције фреквенција закључујемо и поређењем просечне вредности серија и медијане.

Табела 36: *Дескриптивна статистичка анализа за Е и К групу за задатке Б$_2$,Б$_5$,Б$_9$,Б$_{11}$*

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance	Median
E	65	0,00	20,00	12,7385	4,94746	24,477	13
K	65	0,00	20,00	8,4308	4,84758	23,499	8
Valid N (listwise)	65						

У наредном кораку вршимо поређење вредности аритметичке средине и медијане код обе групе. С обзиром да се ове вредности крећу у приближно истом односу, закључујемо да распоред има нормалну расподелу и код Е и код К групе за задатке Б$_2$,Б$_5$,Б$_9$,Б$_{11}$

Табела 37: *Колмогоров-Смирнов тест*

		E	K
N		65	65
Normal Parameters(a,b)	Mean	12,7385	8,4308
	Std. Deviation	4,94746	4,84758
Most Extreme Differences	Absolute	0,099	0,105
	Positive	0,071	0,105
	Negative	-0,099	-0,079
Kolmogorov-Smirnov Z		0,798	0,844
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,547	0,475

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

Уз помоћ Колмогоров-Смирновог теста извршена је додатна провера расподеле фреквенција за обе групе, чиме је потврђена нормална расподела.

Табела 38: Коефицијент корелације између Е и К групе
(Paired Samples Correlations)

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	E & K	65	0,957	0,000

Коефицијент вредности од 0,957 користи се за упоређивање степена слагања вредности оба узорка при прихватању или одбијању постављене хипотезе. Постављамо хипотезу и тестирамо је t-тестом. *H_4:* Након примене унутарпредметне интеграције у настави математике ученици су развили већу способност расуђивања о односу између величина.

Табела 39: *t-тест за испитивање значајности разлике између Е и К групе за задатке Б$_2$,Б$_5$,Б$_9$,Б$_{11}$ (Paired Samples Test)*

Paired		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pair 1	E - K	4,30769	1,44615	0,17937	3,94935	4,66603	24,015	64	0,000

С обзиром да је вероватноћа у табели Sig.(2-tailed)= 0,00<0,05 закључујемо да постоји разлика у резултатима Е и К групе.

Забележене вредности: t=24,015 и број степени слободе df=64.

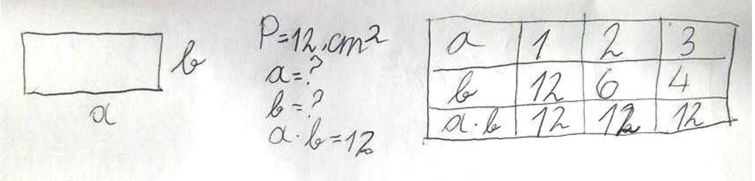
Наведени резултати могу се сумарно приказати:

У Е-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: μ=12,7385, δ=4,94746; M=13. Једна половина ученика у овом узорку није остварила више, а друга не мање од 13 поена. У К-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: μ=8,4308, δ=4,84758; M=8. t(64)=24,015; стварна вероватноћа - $p<0{,}05$, просечан успех ученика Е-групе је за 4,30769 бода већи од просечног успеха ученика К-групе, интервал поверења 95% протеже се од границе 3,94935 до 4,66603.

Закључујемо да постоји статистички значајна разлика у успеху ученика између Е и К групе. Ученици Е-групе показали су бољи успех на задацима $Б_2$,$Б_5$,$Б_9$,$Б_{11}$, чиме је потврђена хипотеза H_4.

2) Намена задатака $А_6$,$Б_8$, у којима су две непознате и један однос, је да ученици покажу како расуђују о односима између величина, које могу имати вишеструке вредности. Задаци представљају погодне „дидактички припремљене ситуације које дају значење операцијама и бројевима уз истицање непромењивости резултата“ (Завод за унапређивање васпитања и образовања). Начин интерпретације односа између величина огледа се у тумачењу њихове симболичке формулације. Начин решавања задатака код већине ученика К-групе (75%) не подразумева алгебарско расуђивање о односима између две величине, као ни вишеструка решења, што је проузроковано конфликтима садржаним у перцепцији алгебарских симбола, тј. непрепознавањем њихове динамичне природе. Наведене задатке решавају као аритметичке проблеме, код којих је приступ решавању заснован на директном коришћењу одређених бројева који воде ка једном одговору. Овај аритметички поглед на однос између две величине доводи до погрешне интерпретације проблемске ситуације и активности са познатим бројевима уместо непознатим величинама. Значајан број ученика Е-групе (51%) показао је виши ниво размишљања, јер су задатке решили алгебарским расуђивањем изразивши идеју да „постоји само неки одређени број вредности слова које задовољавају постављени услов“ (Завод за унапређивање васпитања и образовања), при чему је 5 ученика пронашло све могуће комбинације вредности, које дају жељени износ, у оба задатка, а док је то у К-групи успео само један ученик. Наиме, они су, препознавши динамичну симболичну формулацију, непознате величине посматрали са аспекта

промењљивих, чије вредности могу бити у распону дозвољених (слика 13). Пут до алгебарског начина расуђивања о односима они су пронашли независно од алгебарских репрезентација дајући нумеричке примере, који задовољавају однос, при чему полазе од било које промењљиве и формирају табелу могућих вредности, чиме су показали способност превођења алгебарског описа односа (из перспективе вредности објеката) у табеларни приказ.



a	1	2	3
b	12	6	4
a·b	12	12	12

Слика 13: *Поступак решавања задатка $А_6$ ученика Е-групе*

Од могућих 650, Е-група је на задацима $А_6$,$Б_8$ остварила 382 бода, а К-група 278 бодова, одакле се може закључити да је код ученика Е-групе веће постигнуће у начину размишљања о односима између величина (са две непознате и једним односом) него код ученика К- групе.

На основу претходне анализе може се закључити да је способност расуђивања о односима између величина у тесној вези са способношћу визуелизације проблема. Као једно од основних мерила способности визуелизације проблема може се анализирати способност примене геометријских модела.

8. Способност примене геометријских модела

Посебна пажња је посвећена сагледавању ефекта примене геометријских модела на ученичко постигнуће. Знатно већи број ученика Е-групе (72%) у односу на ученике К-групе (48%) препознало је улогу датих геометријских модела у задацима $А_1$,$А_2$,$А_3$,$А_9$,$А_{10}$, који су их водили до решења. Задаци не захтевају да процес решавања почне алгебарском нотацијом облика $P=a\cdot b$ или $O=2(a+b)$, већ да ученици успостављањем везе између геометријских објеката формирају одговарајућу алгебарску једнакост, чиме је омогућено да слова доживљавају као представе геометријских објеката. Чак неколико ученика Е-групе у задацима $А_1$,$А_2$,$А_3$ превело је визуелни приказ на статичну симболичку формулацију, тј. било је у могућности да исправно изрази однос између геометријских величина алгебарском симболичком нотацијом.

Ученици Е-групе су у процесу решавања задатка A_1,A_2,A_3,A_9,A_{10} геометријску репрезентацију посматрали са двоструког аспекта: квалитативног и квантитативног. Наиме, геометријску репрезентацију користили су не само у идеографском смислу (као илустрацију геометријских објеката истичући њихова својства), већ и у номографском смислу (у својству објекта на коме се ради), који упућује на упоређивање геометријских објеката са квантитативног аспекта, тј. на алгебарску интерпретацију односа уочених на слици. За разлику од њих, ученици К-групе геометријску репрезентацију користили су углавном у идеографском смислу, а мање као приказ квантитативног односа између објеката.

29% ученика К-групе задатке A_9,A_{10} су решавали применом процедура за решавање једначина, што није најпогоднији начин, јер га разломци чине сложеним, док је 32% ученика К-групе безуспешно покушавало да реши наведене проблеме посматрајући делове целине као засебне делове, чије вредности треба одредити, а затим сабрати. За разлику од њих, 54% ученика Е-групе открило је да је потребно прво да одреде нумеричку вредност највеће заједничке мере целине и њеног дела (у задатку A_9 да одреде вредност стотог дела целине, у A_{10} вредност петине), а затим пребацивање пажње са делова на целину и квантитативно упоређивање заједничке мере и целине доводи их до решења. Дакле, ученици Е-групе су уочили да решавање задатака може бити крајње независно од познавања процедура, које су ученици К- групе користили у својству алата који подржавају поступак решавања једначина. Они су били су у могућности да расуђују о непознатој вредности без коришћења алгебарске симболизације и без познавања алгебарске процедуре решавања једначине. Истовремено, показали су да су у могућности да разликују алгебарски објекат од његове геометријске репрезентације, тиме што пишу да целина има сто стотих делова, иако је цртеж непрецизан (задатак A_9).

За посматрану Е и К групу за оцењивање групе задатака A_1,A_2,A_3,A_9,A_{10} број јединица посматрања износио је 65 (N=65). Према Стургесовом правилу $K=1+3,3\log N$, следи да је $K=7,79\approx 8$. Величина групног интервала (интервални размак) је $i=(X_{max}–X_{min})/K$, одакле је $i=(25-2)/8=2,875\approx 3$

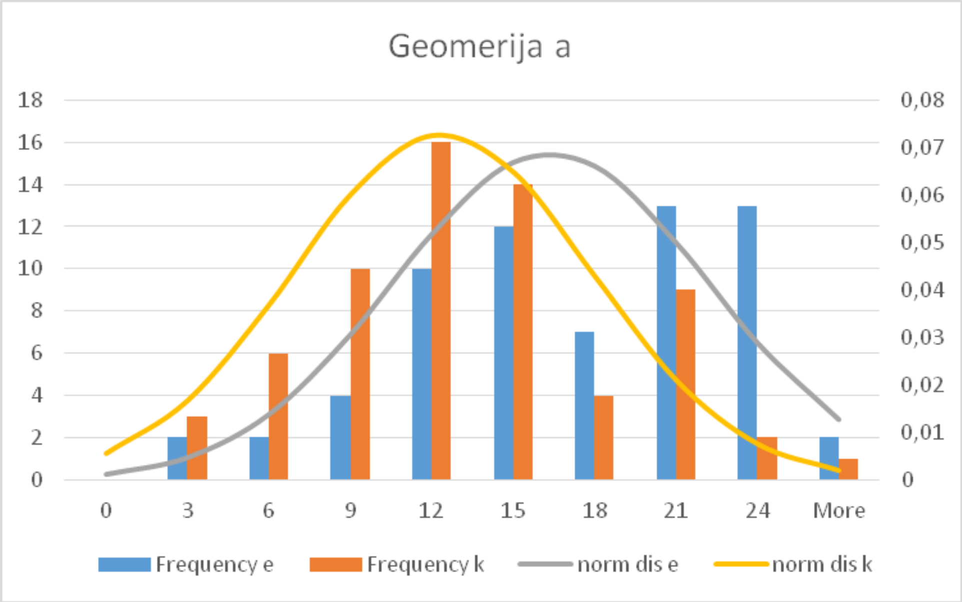
Табела 40: Интервална варијациона серија за Е и К групу са нормалном расподелом за групу задатака A_1,A_2,A_3,A_9,A_{10}

interval	intervali	norm dis e	norm dis k
0	0	0,001278	0,00566
0-3	3	0,004819	0,016795
3-6	6	0,0139	0,036928
6-9	9	0,030678	0,060164
9-12	12	0,0518	0,072631
12-15	15	0,06692	0,064971
15-18	18	0,066143	0,043064
18-21	21	0,050018	0,021151
21-24	24	0,028939	0,007697
24-27	27	0,01281	0,002076

Табела 41: Дистрибуција фреквенција Е и К групе за групу задатака A_1,A_2,A_3,A_9,A_{10}

Е-група			К-група		
interval	*Frequency e*	*Cumulative %*	*interval*	*Frequency k*	*Cumulative %*
0	0	0,00%	0	0	0,00%
3	2	3,08%	3	3	4,62%
6	2	6,15%	6	6	13,85%
9	4	12,31%	9	10	29,23%
12	10	27,69%	12	16	53,85%
15	12	46,15%	15	14	75,38%
18	7	56,92%	18	4	81,54%
21	13	76,92%	21	9	95,38%
24	13	96,92%	24	2	98,46%
More	2	100,00%	More	1	100,00%

На слици 14 може се видети да је расподела фреквенција паралелних група симетричног облика.



Слика 14: Хистограм поређења фреквенција са кривом расподеле успеха ученика (нормална дистрибуција фреквенција) за Е и К групу на задацима A_1,A_2,A_3,A_9,A_{10}

Да распоред има нормалну дистрибуцију фреквенција можемо да закључимо поређењем просечне вредности серија и медијане.

Табела 42: Дескриптивна статистичка анализа за Е и К групу за задатке A_1,A_2,A_3,A_9,A_{10}

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance	Median
E	65	2,00	25,00	16,3692	5,79755	33,612	17
K	65	2,00	25,00	12,3846	5,47920	30,022	12
Valid N (listwise)	65						

Како се вредност аритметичке средине и медијане и код Е и код К групе креће у приближно истом односу, закључујемо да распоред има нормалну расподелу. Додатну проверу расподеле фреквенција утврђујемо и преко Колмогоров-Смирновог теста, чији су резултати приказани у наредној табели.

Табела 43: Колмогоров-Смирнов тест

		E	K
N		65	65
Normal Parameters(a,b)	Mean	16,3692	12,3846
	Std. Deviation	5,79755	5,47920
Most Extreme Differences	Absolute	0,106	0,132
	Positive	0,089	0,132
	Negative	-0,106	-0,071
Kolmogorov-Smirnov Z		0,853	1,066
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,461	0,206

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

С обзиром да је константована нормална дистрибуција распореда фреквенција, значајност разлике између аритметичких средина (просека) и медијане ученика Е и К групе на задацима A_1,A_2,A_3,A_9,A_{10} утврђујемо *t*-тестом.

Табела 44: Коефицијент корелације између Е и К групе
(Paired Samples Correlations)

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	E & K	65	0,959	0,000

Добијени резултати у табели 44 показују коефицијент вредности, који се упоређује при прихватању или одбијању постављене хипотезе (просечан успех ученика и медијане у обе групе). Постављамо хипотезу H_5: Након примене унутарпредметне интеграције у настави математике ученици су развили већу способност примене геометријских модела.

Табела 45: *t-тест за испитивање значајности разлике између Е и К групе за задатке A_1,A_2,A_3,A_9,A_{10} (Paired Samples Test)*

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pair 1	E - K	3,98462	1,65352	0,20509	3,57489	4,39434	19,428	64	0,000

Пошто је вредност Sig. (2-tailed) мања од 0,05 може се закључити да постоји разлика између ова два узорка. У случају теста за задатке A_1,A_2,A_3,A_9,A_{10}, вероватноћа је 0,000 што значи да је стварна вероватноћа мања од 0,05. Закључује се да постоји разлика у резултатима Е и К групе. Забележене вредности: t=19,428 и број степени слободе df=64. Интервал 95-процентне поузданости протеже се од доње границе 3,57489 до горње 4,39434. Просечан успех у Е-групи износи 16,3692, а у контролној 12,3846.

Наведени резултати могу се сумарно приказати:

Е-група: μ =16,3692, δ=5,79755; M=17

К-група: μ =12,3846, δ=5,47920; M=12

t(64)= 19,428; стварна вероватноћа - $p<0,05$, просечан успех у Е и К групи разликује се за 3,98462 бода у корист ученика Е-групе, интервал поверења 95% протеже се од границе 3,57489 до 4,39434.

Закључујемо да постоји разлика у успеху ученика између Е и К групе. Ученици Е-групе показали су бољи успех на задацима $А_1$,$А_2$,$А_3$,$А_9$,$А_{10}$.

Циљ задатака са променом услова ($А_{11}$,$А_{12}$,$Б_{10}$,$Б_{12}$), који захтевају алгебарско расуђивање, је да их ученици репрезентују геометријским моделом, из кога се непосредно могу уочити односи између услова и захтева задатка. Иако је намена задатака била да се проблеми представе визуелно, само је 31% ученика К-групе задатке решавало геометријским приступом, док је 60% ученика Е-групе схватило да се проблем односи на откривање информација скривених у геометријском приказу и већина њих исправно трансформисала изјаву на говорном језику у геометријску репрезентацију. Резултати указују на то да је већина ученика Е-групе препознала исту структуру задатака, тј. да су се одређени проблеми поново појавили, али само у новом окружењу.

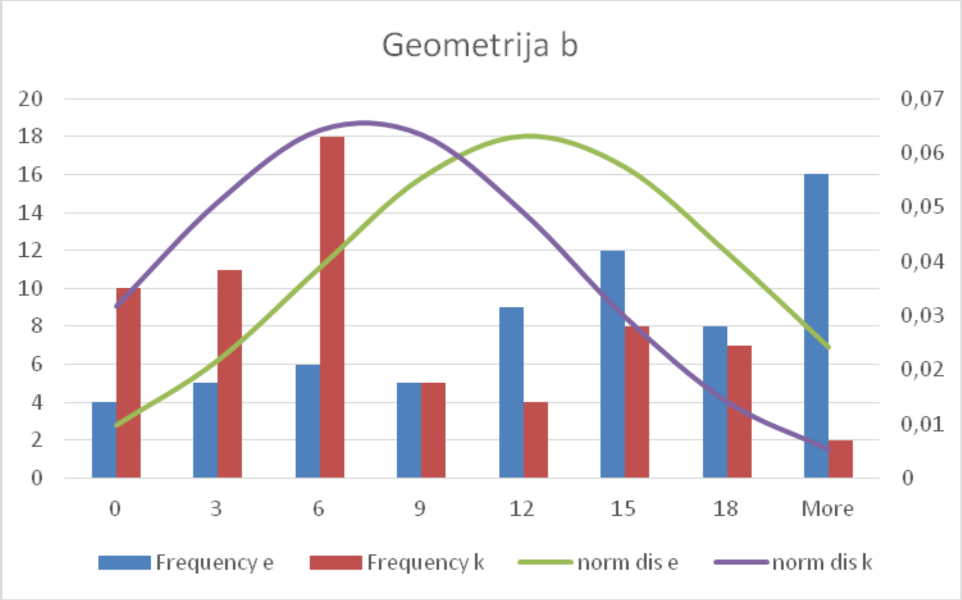
За посматрану Е и К групу за оцењивање задатака $А_{11}$,$А_{12}$,$Б_{10}$,$Б_{12}$ број јединица посматрања износио је 65 (N=65). Према Стургесовом правилу K=1+3,3logN следи да је K=7,79≈8. Величина групног интервала (интервални размак) је i=(X_{max}–X_{min})/K, одакле је i= (20-0)/8≈3

Табела 46: *Интервална варијациона серија за Е и К групу са нормалном расподелом за групу задатака A_{11},A_{12},$Б_{10}$,$Б_{12}$*

interval	intervali	norm dis e	norm dis k
0	0	0,009689	0,031655
0-3	3	0,021712	0,050896
3-6	6	0,038828	0,064113
6-9	9	0,055414	0,063276
19-2	12	0,063116	0,048928
12-15	15	0,057371	0,029642
15-18	18	0,041618	0,01407
18-21	21	0,024094	0,005232

Табела 47: Дистрибуција фреквенција Е и К групе за групу задатака $A_{11},A_{12},Б_{10},Б_{12}$

Е-група			К-група		
interval	*Frequency e*	*Cumulative %*	*interval*	*Frequency k*	*Cumulative %*
0	4	6,15%	0	10	15,38%
3	5	13,85%	3	11	32,31%
6	6	23,08%	6	18	60,00%
9	5	30,77%	9	5	67,69%
12	9	44,62%	12	4	73,85%
15	12	63,08%	15	8	86,15%
18	8	75,38%	18	7	96,92%
More	16	100,00%	More	2	100,00%



Слика 15: Хистограм поређења фреквенција са кривом расподеле успеха ученика (нормална дистрибуција фреквенција) за Е и К групу на задацима $A_{11},A_{12},Б_{10},Б_{12}$

На основу хистограма фреквенција закључујемо да је расподела фреквенција паралелних група симетричног облика. Да распоред фреквенција има нормалну дистрибуцију фреквенција можемо да закључимо на више начина, од којих и поређењем просечне вредности серија и медијане.

Табела 48: Дескриптивна статистичка анализа за Е и К групу за задатке $A_{11},A_{12},Б_{10},Б_{12}$

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance	Median
E	65	0,00	20,00	12,2308	6,31657	39,899	13
K	65	0,00	20,00	7,3385	6,07319	36,884	6

С обзиром да се вредности аритметичке средине и медијане и код Е и код К узорка крећу у приближно истом односу, закључујемо да распоред има нормалну расподелу. Додатну проверу расподеле фреквенција утврђујемо и преко Колмогоров-Смирновог теста, чији су резултати приказани у наредној табели.

Табела 49: *Колмогоров-Смирнов тест*

		Е	К
N		65	65
Normal Parameters(a,b)	Mean	12,2308	7,3385
	Std. Deviation	6,31657	6,07319
Most Extreme Differences	Absolute	0,127	0,187
	Positive	0,109	0,187
	Negative	-0,127	-0,113
Kolmogorov-Smirnov Z		1,025	1,509
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,244	0,021

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

На основу Колмогоров-Смирновог теста је додатно константована нормална дистрибуција распореда фреквенција. Значајност разлике између аритметичких средина (просека) и медијане ученика Е и К групе на задацима $А_{11}$,$А_{12}$,$Б_{10}$,$Б_{12}$, утврђујемо *t*-тестом.

Табела 50: *Paired Samples Correlations*

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	E & K	65	0,920	0,000

Постављамо хипотезу.H_5: Након примене унутарпредметне интеграције у настави математике ученици су развили већу способност примене геометријских модела.

Табела 51: *t-тест за испитивање значајности разлике између Е и К групе за задатке $А_{11}$,$А_{12}$,$Б_{10}$,$Б_{12}$ (Paired Samples Test)*

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pair 1	E - K	4,89231	2,48195	0,30785	4,27731	5,50731	15,892	64	0,000

С обзиром да је вероватноћа у табели Sig. (2-tailed)= 0,00<0,05 закључујемо да постоји разлика у резултатима Е и К узорка. Забележене вредности: t=15,892 и број степени слободе df=64.

Наведени резултати могу се сумарно приказати:

У Е-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: μ=12,2308, δ=6,31657; M=13. Једна половина ученика у овом узорку није остврила више, а друга не мање од 13 поена. У К-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: μ=7,3385, δ=6,07319; M=6. t(64)=15,892; стварна вероватноћа - p<0,0005, просечан успех у Е и К групи разликује се за 4,89231 бода у корист ученика Е-групе, интервал поверења 95% протеже се од границе 4,27731 до 5,50731.

Закључујемо да постоји значајна разлика у успеху ученика између Е и К групе. Ученици Е-групе показали су бољи успех на задацима $А_{11}$,$А_{12}$,$Б_{10}$,$Б_{12}$, чиме је потврђена хипотеза H_5.

Иако се задаци $А_7$,$А_8$ могу решити чисто аритметичком методом, већина ученика Е-групе успела је да пронађе геометријску ситуацију изоморфну датим задацима. Геометријском репрезентацијом односа између величина датих статичним симболичким описом показали су да познавање операција над разломцима није предуслов за решавање ових проблема. С друге стране, из начина решавања и представљања корака, може се закључити да већина ученика К-групе упоређивање вредности види као процедуру (као нпр: 3/5kg=3·(1000:5)g=3·200g=600g, итд.). Међутим, визуелном репрезентацијом датих вредности и њихових односа, са циљем да се истраже релације или да се провери решење, задаци постају изоморфни геометријским проблемима, који им дају други смисао и чине их крајње независним од познавања рачунских операција, чиме се смањује вероватноћа примене алгоритамске стратегије решавања. Код неких ученика, који нису тачно написали алгебарску репрезентацију односа (у задатку $А_8$), на основу анализе може се утврдити да грешке нису исте природе. Наиме, код ученика Е-групе, на основу геометријске репрезентације која је исправна, може се закључити да су ученици правилно интерпретирали однос, те да су грешке проузроковане непознавањем значења симбола „>“, „<“. За разлику од тога, ученици К-групе нису приказали однос путем геометријске репрезентације, што указује на то да су њихове грешке проузроковане погрешним расуђивањем или процедуралном концепцијом симболичких приказа (разломака). Ученици Е-групе су на задацима $А_7$,$А_8$

освојили 397 од могућих 650 бодова, при чему је већина њих препознала да геометријски модели подржавају решавање датих проблема. С друге стране, већина ученика К-групе, који су освојили 327 бодова, користи чисто аритметички приступ, без цртања геометријских слика.

На недовољно развијену способност разумевања разлике између процедуралне концепције (као поступка) и статичне перцепције (као готовог производа) израза, код ученика К-групе, указују честе грешке приликом записивања међурезултата у облику a=60cm:4=15cm·5=75cm (задатак $А_{10}$) или 1000g:5=200g·3=600g (задатак $А_8$), чиме се крше својства симетричности и транзитивности релације једнакости.

9.Трајност знања

За процену трајности знања коришћени су задаци: $Б_{10}$,$Б_{11}$,$Б_{12}$, који се односе на наставне јединице: Обим правоугаоника и квадрата, Површина правоугаоника и квадрата.

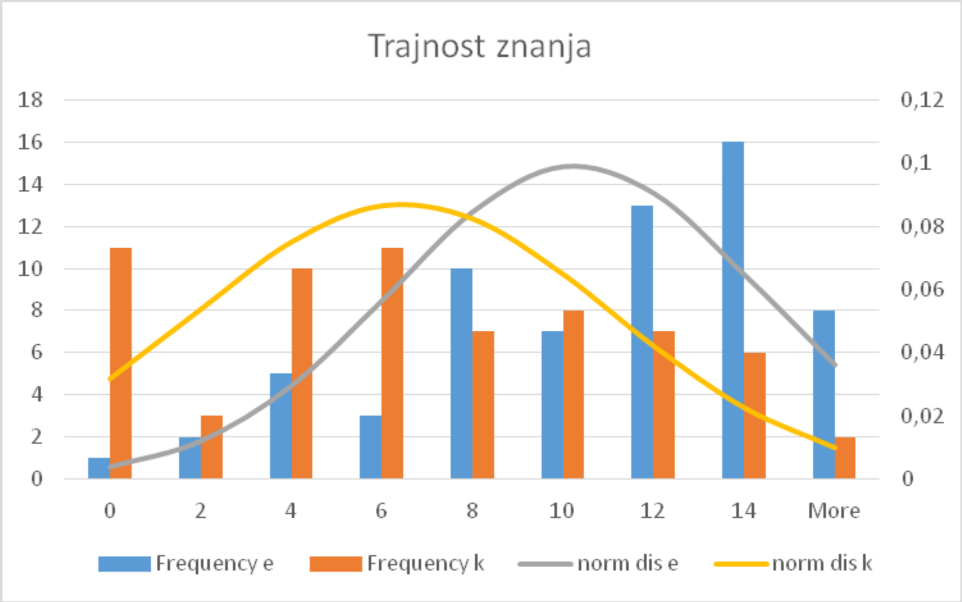
За посматрану Е и К групу за оцењивање успеха на задацима $Б_{10}$,$Б_{11}$,$Б_{12}$ број јединица посматрања износио је 65 (N=65). Према Стургесовом правилу K=1+3,3logN следи да је K=7,79≈8. Величина групног интервала (интервални размак) је i=(X_{max}–X_{min})/K, одакле је i=(15-0)/8≈2

Табела 52: Интервална варијациона серија за Е и К групу са нормалном расподелом за групу задатака $Б_{10}$,$Б_{11}$,$Б_{12}$

interval	intervali	norm dis e	norm dis k
0	0	0,003828	0,031891
0-2	2	0,012005	0,053844
2-4	4	0,029424	0,075122
4-6	6	0,056367	0,086611
6-8	8	0,084401	0,082518
8-10	10	0,098779	0,064967
10-12	12	0,09036	0,042267
12-14	14	0,064608	0,022724
14-16	16	0,036107	0,010096

Табела 53: Дистрибуција фреквенција Е и К групе за групу задатака $Б_{10}$,$Б_{11}$,$Б_{12}$

Е-група			К-група		
interval	*Frequency e*	*Cumulative %*	*interval*	*Frequency k*	*Cumulative %*
0	1	1,54%	0	11	16,92%
2	2	4,62%	2	3	21,54%
4	5	12,31%	4	10	36,92%
6	3	16,92%	6	11	53,85%
8	10	32,31%	8	7	64,62%
10	7	43,08%	10	8	76,92%
12	13	63,08%	12	7	87,69%
14	16	87,69%	14	6	96,92%
More	8	100,00%	More	2	100,00%



Слика 16: Хистограм поређења фреквенција са кривом расподеле успеха ученика (нормална дистрибуција фреквенција) за Е и К групу на задацима $Б_{10}$,$Б_{11}$,$Б_{12}$

На основу слике 16 може се закључити да је расподела фреквенција паралелних група симетричног облика. Да је распоред нормалне дистрибуције фреквенција закључујемо и поређењем просечне вредности серија и медијане.

Табела 54: Дескриптивна статистичка анализа за Е и К групу за задатке $А_{11}$,$А_{12}$,$Б_{10}$,$Б_{12}$

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance	Median
E	65	0,00	15,00	10,2769	4,02922	16,235	11
K	65	0,00	15,00	6,4923	4,57958	20,973	6

С обзиром да се вредности аритметичке средине и медијане код обе групе крећу у приближно истом односу, закључујемо да распоред има нормалну расподелу и код Е и код К групе за задатке $Б_{10}$,$Б_{11}$,$Б_{12}$.

Табела 55: *Колмогоров-Смирнов тест*

		E	K
N		65	65
Normal Parameters(a,b)	Mean	10,2769	6,4923
	Std. Deviation	4,02922	4,57958
Most Extreme Differences	Absolute	0,142	0,091
	Positive	0,121	0,091
	Negative	-0,142	-0,085
Kolmogorov-Smirnov Z		1,149	0,734
Asymp. Sig. (2-tailed)		0,143	0,654

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

Уз помоћ Колмогоров-Смирновог теста извршена је додатна провера расподеле фреквенција за обе групе, чиме је потврђена нормална расподела.

Табела 56: *Paired Samples Correlations*

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	E & K	65	0,943	0,000

Коефицијент вредности од 0,943 се користи за упоређивање степена слагања вредности обе групе при прихватању или одбијању постављене хипотезе. Постављамо хипотезу и тестирамо је t-тестом. H_6: Након примене унутарпредметне интеграције у настави математике ученици имају већу трајност знања.

Табела 57: *t-тест за испитивање значајности разлике између Е и К групе за задатке* $А_{11}$,$А_{12}$,$Б_{10}$,$Б_{12}$ *(Paired Samples Test)*

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
		Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
Pair 1	E - K	3,78462	1,54609	0,19177	3,40151	4,16772	19,735	64	0,000

С обзиром да је вероватноћа у табели Sig. (2-tailed)= 0,00<0,05 закључујемо да постоји разлика у резултатима Е и К групе. Забележене вредности: t=19,735 и број степени слободе df=64.

Наведени резултати могу се сумарно приказати:

У Е-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: $\mu=10,2769$, $\delta=4,02922$; M=11. Једна половина ученика у овом узорку није оствbooрила више, а друга, не мање од 11 поена. У К-групи просечан успех и одступање од просечног успеха: $\mu=6,4923$, $\delta=4,57958$; M=6. t(64)= 19,735; стварна вероватноћа - $p<0,05$, просечан успех у Е и К групи разликује се за 3,78462 бода у корист ученика Е-групе, интервал поверења 95% протеже се од границе 3,40151 до 4,16772. Закључујемо да постоји статистички значајна разлика у успеху ученика између Е и К групе. Ученици Е-групе показали су бољи успех на задацима $Б_{10}$,$Б_{11}$,$Б_{12}$, чиме је потврђена хипотеза H_6.

У погледу критеријума (дескриптора) за процену квалитета знања, ученици Е-групе показали су значајно виши квалитет знања у односу на ученике К-групе. Закључци су изведени на основу добијених резултата и упоређивања са основним методичко-дидактичким поставкама о значају интегрисане наставе. Резултати истраживања показали су да је током експерименталног програма остварен значајан напредак у постигнућу ученика Е-групе у односу на К-групу. Уочене разлике су статистички значајне и указују на неопходност повезивања геометријских и алгебарских садржаја, као једног од основних предуслова за већа очекивања од ученичке популације у смислу вишег нивоа знања. Решавање задатака намењених за тестирање углавном је засновано на активностима перцепције, акције и размишљања. Увидом у математички когнитивни развој током истраживања може се закључити да је већина ученика К-групе остала у отелотвореном свету перцепција и акција, везана за процедурална размишљања, док су неки ученици Е-групе достигли ниво формалног математичког размишљања.

На постојање когнитивних препрека између алгебре и геометрије код ученика К-групе указују резултати (оба) тестирања у следећим доменима:

1) Примена алгебарске симболизације као средства за математичко расуђивање: Ученици аутоматски трагају за ефикасним алгебарским процедурама решавања без коришћења визуелне подршке, не успевајући да виде праве разлоге њихове примене, а самим тим нису ни у могућности да поново формирају алгебарске обрасце.

2) Алгебарска симболизација непознатих величина и операције над њима: Недостатак визуелизације неодређених непознатих величина и њихових

операција указује на когнитивни раскорак између алгебарске и геометријске реперезентације

3) Тумачење бројева и односа између њих: Процедурална (оперативна), а не структурна, перцепција бројева и њихових односа указује на недостатак визуелне компоненте, што резултира тумачењем статичних израза као динамичних, а једна од последица таквог тумачења може бити нарушавање симетричности и транзитивности релације једнакости.

4) Разумевање различитих значења алгебарских симбола: Ученицима није очигледна повезаност симбола и процедура са основним математичким концептима. Наиме, ученици имају различите перцепције симбола (објекти, непознате, промењиве), али њихова геометријска интерпретација указује на недостатак разумевања њиховог значења.

С друге стране, потврда претпоставке о позитивној корелацији између квалитета знања и повезивања наставних садржаја указује на то да раскорак између алгебре и геометрије може да се савлада путем избора адекватних наставних активности, које утичу на развој теоријског мишљења. Резултати указују на чињеницу да успостављање веза између алгебарских и геометријских садржаја представља основу за разумевање основних математичких појмова и релација. Наиме, анализом резултата рада ученика Е-групе, може се закључити да су ученици млађих разреда, уз примену интегративног приступа у изучавању математичких садржаја, у могућности да се ангажују у следећим активностима: 1) користе вишеструке репрезентације математичких концепата (појмова, функционалних односа), које су од кључног значаја за разумевање и обједињавање математичких садржаја у целину, 2) успешно се „крећу“ између репрезентација, односно препознају алгебарску репрезентацију еквивалентну геометријској и обрнуто, 3) препознају исту идеју у различитим репрезентацијама, 4) решавају проблеме применом алгебарске и њој еквивалентне геометријске репрезентације, 5) препознају различита значења алгебарских симбола приказујући алгебарске изразе, обрасце или једначине у геометријском контексту, 6) представљају и анализирају релације између квантитативних варијабли (где промењиве нису слова која означавају непознате бројеве, већ квантитативне особине објеката, које се мењају у зависности од промене других величина)

На основу савремених научних истраживања, изнетих у теоријском делу овог рада, може се закључити да горе наведене активности подстичу ученике у остваривању следећих циљева и задатака: 1) стицање способности за анализу и примену различитих репрезентација, 2) изучавање садржаја истовремено и са оперативног и са структурног аспекта, чиме се подстиче развој не само процедуралног, већ и релационог расуђивања, 3) откривање линеарних веза између варијабли приказаних вербалним, табеларним, геометријским или симболичким моделима, 4) трансформисање алгебарских израза и геометријских модела у алтернативне еквивалентне облике, 5) успостављање везе између аритметике и алгебре фокусирањем на односе, а не на израчунавања, тј. примена особина бројева и операција у математичким трансформацијама, а не просто рачунање уз прописан редослед поступака, 6) самостално повезивање различитих математичких појмова и операција уз примену адекватног дидактичког материјала (сврсисходних проблема), 7) стицање различитих увида у математичке проблеме, 8) изучавање математичких садржаја доживљава се као активност решавања проблемских ситуација, 9) примена стечених способности у широком спектру математичких ситуација ученике води у свет формалног математичког размишљања. Резултати тестирања подржавају и став да су ученици у могућности да науче геометрију више од основних појмова и препознавања једноставних фигура. Према (van Hiele,1986) моделу развоја геометријског разумевања (који има пет хијерархијских нивоа), ниво геометријског разумевања, који поседују ученици после примене експерименталног фактора, подразумевао је напредовање од нивоа 0 (препознавање) до нивоа 2 (неформални доказ - образложење). Наиме, у активностима током реализације екперименталног програма, ученици су превазишли ниво препознавања фигура и њихових особина. Напредак од нивоа 1 (опис и анализа) до нивоа 2 подразумева активности, које од ученика захтевају да идући даље од појединачних фигура активно испитују особине на сродним фигурама.

Из наведеног се може закључити да су когнитивне препреке између алгебре и геометрије, које су последица стицања алгебарских и геометријских знања изоловано једна од других (која теже да остану инертна у њима одговарајућим ситуацијама), у негативној корелацији са квалитетом знања.

IV Импликације и закључци

1. Методичке импликације резултата истраживања

На основу теоријског и емпиријског истраживања могу се дати одређене препоруке, које се односе на саму реализацију наставног процеса:

1. *Ученицима омогућити активно стицање знања* (поглавље 5): Повезивање наставних садржаја промовише активно учење и подучавање усмерено на индивидуално истраживање проблемских ситуација праћено од стране наставника, при чему је успостављање веза усмерено на откривање унутрашње зависности у оквиру самог задатка. Ученицима треба омогућити самостално откривање закључака употребом разних стратегија и метода, које им помажу да стекну различите увиде у математичке проблеме. Подстицање ученика да сами развијају и формулишу правила, да проналазе поступке решавања проблема, може у знатној мери умањити опасност од примене шаблонских алгоритама. У свакој конкретној ситуацији, у циљу повезивања математичких дисциплина, задатке треба решавати применом различитих математичких модела, као што су геометријски, аритметичко-логички, логичко-комбинаторни и други. Овим приступом се омогућава да се настава математике не своди на учење појмова, формула и процедура напамет, већ се изучава из перспективе решавања проблема, са већим нагласком на расуђивање и повезивање са осталим темама.

2. *Решавати дивергентне задатке* (поглавље 5.2): Истраживање је показало да су дивергентни задаци веома ефикасна дидактичка средства за развој креативног размишљања ученика. Задаци, који могу имати више од једног решења, проширују оквире могућности стварања веза и примене знања у новим нестандардним ситуацијама, док ситуације различитих степена неодређености решења захтевају примену одређених хеуристичких стратегија да се проблем реши, а самим тим захтевају и повезивање садржаја.

3. *Решавати проблеме, који се односе на својства бројева и чланова бројевних низова*: Како би се смањио когнитивни раскорак између аритметике и алгебре, резултати истраживања указују на то да је неопходно да наставници обезбеде активности, које ће ученицима омогућити разумевање и приказивање квантитативних односа, односно развој алгебарског начина размишљања

(генерализација, апстракција, аналитичко размишљање, моделовање). Пример генерализације односа између бројева дат је у поглављу 4.2.2. (пример 13). Наставне јединице, погодне за коришћење наведеног примера, су: Скуп природних бројева, Парни и непарни бројеви.

4. *Решавати проблеме, који се односе на релације, операције, узајамну зависност величина*: Решавањем проблема, који се односе на релације (једнакост, подударност) и узајамну зависност величина, код ученика се развија способност да препознају и опишу важне обрасце, који се односе на квантитативне варијабле, развија се способност коришћења података из табеле, графикона, текста и симбола у представљању односа, као и способност решавања проблемских ситуација, које подразумевају промене. Примери функционалног приступа геометријским проблемима дати су у поглављу 4.2. (примери од 1 до 12). Примери решавања једначина применом особина релације еквиваленције дати су у поглављу 4.2.3. (примери 14 и 15) и Прилогу 4. Пример примене дистрибутивности множења према сабирању дат је у поглављу 5.1. (пример 1). Пример испитивања својства релације једнакости дат је у поглављу 5.1. (пример 2). Наставне јединице, погодне за коришћење наведених примера, су: Обим правоугаоника и квадрата, Површина правоугаоника и квадрата, Површина квадра и коцке, Решавање једначина, Множење збира бројем, Множење вишецифреног броја вишецифреним бројем, Зависност разлике од промене умањеника/умањиоца, Зависност производа од промене чинилаца, Сталност збира, Сталност разлике, Сталност производа.

5. *Користити различите репрезентације са циљем развоја математичке писмености и концептуалног разумевања* (поглавље 6 и 7): Рад на часовима интегрисане наставе подразумева анализу наставних садржаја из различитих позиција, уочавање битног и решавање проблема извршавањем операција над величинама у новом аспекту, чиме се испуњава задатак креативног начина размишљања. Акценат треба да буде на проналажењу односа, а не на коришћењу формула и процедура. Вежбање формалних процедура и употреба апстрактних симбола не даје смисао операцијама и концептима. Овај проблем не може се превазићи вежбањем одређене процедуре, већ употребом различитих репрезентативних облика (вербалних, геометријских, алгебарских, табеларних), који повезују симболичке форме концепата са њиховим значењем. Због тога пажњу ученика треба усмерити на различите врсте приказа односа варијабли,

који су својствени за проблемске ситуације. Модели немају улогу алата, који одређеном процедуром воде до одговора, већ се посматрају као средства за решавање проблема са разумевањем. Решавање моделовањем омогућава различите активности израде модела, тј. различите приступе у стварању математичких идеја, које су уграђене у математички проблем, те се може применити за испитивање индивидуалног когнитивног развоја ученика. Наиме, когнитивна способност ученика испољава се у процесу решавања проблема, у домену конкретног садржаја, где усмеравањем пажње на проблем, ученици користе сопствене стратегије.

6. *Алгебарске проблеме решавати геометријском методом*: У погледу дидактичко-методичке вредности, геометријска знања и модели омогућавају развој способности за: 1) упоређивање величина, 2) опажање и разумевање статичне/динамичне природе односа, 3) препознавање значења алгебарских симбола, 4) истраживање еквивалентних израза. Поред тога, геометријски модели и њихове трансформације могу се користити и у решавању задатака са променом услова. Геометријски модели, такође, могу успоставити равнотежу између прихватања неформалне симболике, с једне стране, и усмеравања ка формалној идеји симболизације, с друге стране. У том погледу, употреба геометријских модела води ка вертикалној математизацији. Примери примене геометријских модела кореспондентних алгебарским објектима у решавању проблема дати су у поглављу 4.3. (примери 18 и 19) и Прилогу 4. Наставне јединице, погодне за коришћење наведених примера, су: Зависност производа од промене чинилаца, Сталност производа.

7. *Подстицати стварање 'зоне наредног развоја'*: Решавањем задатака, који од ученика не захтевају да се ослања искључиво на опажање и искуство, већ и на дедуктивно логичко закључивање и генерализацију хипотетичке ситуације, резултат самог учења добија један додатни квалитет. Примери задатака структурираних по принципу „развојне помоћи“, који су покретач развоја на узрасту четвртог разреда, дати су у поглављу 4.2.1.(пример 9), у поглављу 4.3. (пример 19), у поглављу 4.2.4. (примери 16 и 17) и у поглављу 7. (примери 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10). Наведени примери омогућавају откривање унутрашњих, суштинских, особина одређеног објекта, а затим откривање односа између тих особина и особина других објеката са циљем изградње система знања.

Поред хоризонталне, у наставном процесу је неопходна и вертикална интеграција. Применом и проширењем постојећег знања, ученицима се омогућава да оно што уче повезују са раније стеченим знањем, чиме се пружа могућност да изграде структурирано знање.

Полазећи од тога да се математичко образовање може посматрати из перспективе Наставног плана и програма, наставних активности и сазнајних могућности ученика, неопходно је да се питање интегративног приступа у настави математике размотри са сва три наведена гледишта. Иако Наставни план и програм ученицима основне школе пружа могућност да стекну целовито математичко знање, највећи утицај на то шта и како ученици уче имају наставници. Другим речима, успех у настојању да се развије математичко размишљање у великој мери зависи од способности наставника да подстакне начин размишљања ученика. У том смислу, потребно је:

1) испитати однос између (предметног, педагошког) знања наставника и садржаја наставних активности неопходних за реализацију интегрисане наставе математике, тј. у којој мери знања наставника доприносе настави математике у погледу интеграције и које врсте способности и која знања наставника су предуслов за њено успешно спровођење

2) урадити додатна емпиријска истраживања, која се односе на проблеме у спровођењу интегративног приступа, јер као препрека спровођења унутарпредметне интеграције у оквиру наставе математике може бити недостатак адекватног дидактичког материјала, стручне литературе и детаљних смерница за њену реализацију

Међутим, сопствено разумевање и посвећеност наставника интегративном приступу не гарантује његову успешну примену. Наиме, како когнитивне могућности ученика могу значајно утицати на успех или неуспех интегративног приступа, неопходно је испитати да ли њихове способности подржавају интегративни приступ. Предуслови примене интегративног приступа у настави математике подразумевају да ученици: 1) познају репрезентације математичких појмова и односа у вербалном, геометријском и алгебарском семиотичком систему, 2) имају способност да структурирају проблем (да идентификују услове и захтеве и односе између њих), 3) користе неформалне поступке у решавању проблема.

Савремена научна истраживања у области дидактичко-методичких делатности указују на велике могућности да се, путем избора адекватних наставних садржаја и метода, утиче на стицање целовитог математичког знања и развој математичког мишљења код ученика. У овом раду, испитивањем могућности и ефеката примене унутарпредметне интеграције у настави математике, може се закључити да је интегративни приступ у изучавању алгебре и геометрије у позитивној корелацији са интелектуалним развојем ученика у млађим разредима основне школе. У складу са овим истраживањем, које се односи на ефекте уједињења света (геометријских) слика са светом (алгебарских) симбола, потребно је додатно истраживање да се испита који интегративни приступ у оквиру математичких дисциплина унапређује развој разумевања трећег - „формално-аксиоматског“ света математике.

2. Закључак

Један од захтева у наставном процесу је усвајање повезаних знања, а не појединачних чињеница, јер систем математичких знања чини јединствену целину. Математички садржаји, које ученици усвајају, треба да чине интегрисану мрежу знања формирану око кључних идеја, а не да свака тема буде скуп информација, који треба запамтити. Повезивање геометријских са алгебарским садржајима је неопходно, јер геометрија као наука представља логички уређен систем знања, те самим тим омогућава овладавање логичком структуром математике. Значај познавања геометријских садржаја огледа се у структури математичког мишљења, у коју улази способност визуелне анализе геометријске слике, уочавање релација између елемената геометријске слике, способност трансформисања, комбиновања, чиме је омогућено сагледавање проблема на нов начин и откривање структурно-функционалне везе између елемената. С обзиром на наведено, циљ овог рада је двострук. Прво, на епистемолошком нивоу, има за циљ да допринесе бољем разумевању односа између алгебарског и геометријског размишљања. Друго, на развојном нивоу, овде се истражује први сусрет ученика узраста 10 година са логичком структуром математике, као и питање о границама и могућностима увођења алгебарског и геометријског моделовања путем решавања сврсисходних задатака у млађим разредима основне школе поштујући принципе теорије развијајуће наставе. Анализом резултата истраживања потврђена је хипотеза да је интегративна настава математике у позитивној корелацији са математичким способностима и знањем ученика, чиме је успостављена дијалектичка веза између теоријских основа истраживања и њихове примене у наставној пракси.

Логичка веза између геометрије и алгебре огледа се у њиховом историјском развоју. Геометријски садржаји су реална, чулно-практична и сазнајна основа знања, која су у току историјског развоја науке добила теоријску форму. Мерењем разних величина (дужина, површина и запремина предмета) настала је потреба за њиховим упоређивањем и утврђивањем односа између целине и њених делова, чиме је подстакнута изградња система бројева, као средства за изражавање количинских односа, међу којима су и они нумерички односи без могућности емпиријског увида (однос обима круга и пречника, странице и дијагонале квадрата). Дакле, настанак разломака, као средства изражавања квантитативних односа међу мереним величинама, као и откриће несамерљивих величина, које је водило открићу ирационалних бројева, указују на чињеницу да се реалан извор нумеричких односа налази у процесу мерења, које омогућава кретање од појединачних конкретних ка уопштеним апстрактним формама односа. Због тога, геометријске фигуре не треба користити само као придодата очигледна средства за објашњење односа између величина, већ их схватити као основу из којих односи (и обрасци) проистичу. Како се алгебарски изрази могу посматрати као резултат уопштавања односа између геометријских величина, у теоријском делу рада указано је на неопходност геометријског моделовања и геометрије, као исходишне основе, за развој алгебре. У складу с тим, дати су и примери дидактичког материјала погодног за обраду интегрисаних геометријских и алгебарских садржаја, у којима, на основу очигледних и непосредних односа и зависности између геометријских величина, ученици изводе алгебарске изразе и правила. За рад са изложеним материјалом потребна су елементарна знања о геометријским фигурама, њиховим својствима и односима. Једнозначне и недвосмислене формулације захтева у материјалу омогућавају да свака нова информација, настала надградњом на ранијој основи, представља карику у ланцу извођења закључка и тиме чине композицију корака једне целине и омогућавају не само целовито, већ и самостално схватање функционалног система.

Резултати истраживања указују на то да у настави математике нагласак треба да буде на различитим репрезентацијама математичких објеката. На пример, различите представе генерализације омогућавају ученицима да повежу алгебарски образац са његовом просторном структуром и уређеним паровима промењљивих приказаних табеларно. Генерализација се јавља као резултат повезивања две различите врсте објеката – просторних и нумеричких. Различити приступи просторно-нумеричким везама, кретањем од рекурзивне до експлицитне генерализације, ученицима пружају могућност да истражују функционалне односе у различитим контекстима, као што су просторне конфигурације, табеле и бројевни низови, што доводи до уопштавања односа између промењљивих. На тај начин акценат се ставља на релационо разумевање обрасца, а не само на способност коришћења правила и процедура. Иако примена алгебарских процедура води до тачног одговора, она се ослања на инструментално разумевање, док визуелна (просторна) структура обрасца подстиче разумевање релација између промењљивих. Самим тим, различите стратегије решавања код ученика одражавају разумевање математике (релационо и инструментално).

У традиционалној настави алгебра се фокусира на правила или посебне стратегије за решавање стандардних типова проблема: појендоставити или комбиновати изразе или решити једначине, те ученици најчешће без разумевања и на кратко време памте обрасце и правила алгебарских трансформација. Настава алгебре треба да има за циљ да прошири погледе ученика ван алгебарских трансформација и да им понуди могућности да примењују алгебарско расуђивање у различитим контекстима. Геометријско моделовање алгебарских концепата не ставља нагласак на формални симболизам, већ на просторна истраживања, анализу и синтезу, односно на релационо разумевање, које подразумева изградњу концептуалних структура из којих ученик извлачи правила, која примењује у одговарајућим ситуацијама. Да алгебарско размишљање не подразумева употребу алгебарских симбола и обрнуто, показали су резултати емпиријског истраживања. Наиме, ученици су током решавања задатака користили одређена правила, која нису подразумевала употребу алфанумеричких знакова, већ геометријских слика, што указује на то да способност представљања проблема у различитим контекстима пружа могућност развоја алгебарског размишљања. Резултати истраживања указују на то да ученици са недовољним познавањем симболичког стандардног алгебарског језика могу да размотре функционални однос између промењљивих користећи визуелне репрезентације, што је потврђено решавањем задатака, који захтевају одређивање вредности једне или више непознатих величина. Дакле, применом геометријских модела ученици трансформишу оригиналан проблем у проблем који могу решити користећи постојеће знање о непознатим величинама. Повезивањем алгебарских и геометријских садржаја развијају се способности ученика да представљају и анализирају релације између квантитативних варијабли „читањем" информација из разних проблемских ситуација, при чему односе између величина представљају различитим математичким моделима и смислено манипулишу алгебарским изразима. Значајну улогу у интеграцији има изградња појма промењљиве не строго у алгебарском, већ у интеракцији са геометријским семиотичким контекстом. На пример, у изјави „нека је *ABCD* квадрат", промењљива је квадрат *ABCD* и представља класу правоугаоника. Из ове перспективе, промењљиве нису слова која означавају непознате бројеве, већ објекти, који се мењају у зависности од промена одговарајућих величина (нпр, дужине страница). Најважнији циљеви математичке анализе у таквим ситуацијама су разумевање и предвиђање образаца промене варијабли.

Геометријским моделовањем алгебарских концепата ученицима се пружа могућност да се ангажују у истраживању геометријских проблема напредујући ка вишим нивоима у van Hiele хијерархији. За реализацију ове могућности потребно је да наставници подстичу ученике на адекватно структурирање проблемске ситуације, као и на истраживање у правцу изградње формалне математике. Истраживање је показало да су ученици у могућности не само да идентификују визуелно представљен геометријски објекат (ниво 0, тј. визуелни ниво), већ њихово истраживање карактеристика геометријског објекта и успостављање односа између његових делова указује на то да схватају појам објекта експлицитно (ниво 2, тј. неформални дедуктивни ниво). Међутим, ово не значи да су геометријска знања ученика сведена на активности на конкретним објектима. Ове активности ученици интернализују, тј. апстрахују одговарајуће геометријске концепте. Прелазак са конкретних представа геометријских објеката на апстрактно размишљање подстиче се разматрањем објеката са релацијског аспекта.

Интегративна настава кореспондира са активним методама учења, које подстичу развој менталних процеса као што су креативност, повезивање знања, примена знања, као и слободу изражавања ученика. Активне методе имају за циљ да подстакну ученика да самостално повезује математичке садржаје и различите области математике. На тај начин настава се не своди на саопштавање и стицање готових знања, чиме би се ограничило разумевање и њихова примена, већ тежи ка упознавању пута њиховог настанка и оспособљавању ученика да сами проналазе нова уопштавања, поступке, методе рада и операције. Методе усвајања знања заснивају се на повезивању различитих података и откривању релација између чињеница различитог значења, чиме знања постају функционална. Овакав начин усвајања знања мотивише ученика, развија методолошку флексибилност, као важну когнитивну особину код ученика. Дакле, настава мора бити истраживачка при чему се ученик постепено усмерава ка откривању суштинских веза међу објектима које проучава, чиме се омогућава систематско усвајање знања, које не води ка формализму и механичкој примени у пракси. При решавању задатака пажња се усредсређује на анализу услова задатака и састављање плана његовог решавања, на повезивању одређених података у систем који омогућава да се проблем реши. У структури решавања задатка сваки корак треба да обезбеђује поступност у раду. Наставник помоћу питања треба да подстиче ученика на анализирање онога што посматра и указује на везе између особина посматраног објекта.

Образовни циљеви интеграције наставе математике подразумевају: усвајање система математичких знања, умења и навика; развој способности примене моделовања у различитим математичким проблемима (приликом решавања једначина иситема једначина, извођења образаца, решавања геометријских и текстуалних задатака); генерализација и систематизација алгебарских и геометријских знања; темељније проучавање често занемарених тема, као и истраживање тема, које се не проучавају у млађим разредима основне школе (нпр, примена геометријских трансформација у решавању алгебарских проблема омогућава да визуелне представе помогну ученицима у разумевању еквивалентних алгебарских израза, у решавању система једначина). Васпитни циљеви су: формирање научног погледа на свет разматрањем идеја из више перспектива, као и коришћењем разних алата и приступа са циљем да разумеју нове теме или да реше проблеме; рационализација мисаоних активности ученика; развој естетских способности (упоређивањем различитих начина решавања задатка ученици бирају најпогодније и оригиналне методе); развој стваралачког мишљења и математичких спсобности, као што су: способност промене усмерености мишљења, као и способност прилагођавања мишљења измењеним и новим околностима, апстраховање квантитативних и просторних односа, ослобађање од конкретних представа од којих се полази у сазнајном процесу, уопштавање математичких података и издвајање релација у чистом виду, способност оперисања симболима, способност комбиновања просторних података и изналажење нових односа међу подацима, способност уочавања инваријантности приликом трансформација геометријских фигура. С обзиром на наведено, током планирања наставних часова, формулисања адекватних математичких проблема, непосредног разговора са ученицима и вредновања њиховог рада, неопходно је осмислити такав приступ изучавању наставних садржаја, који ће подстицати активности од суштинског значаја у настави, као што су: изградња веза између математичких појмова, представљање математичких ситуација у ширем математичком контексту, избор одговарајуће репрезентације, очување битних карактеристика математичких објеката посматраних из различитих перспектива.

Конкретни предлози активности (177-179.стр), које омогућавају повезивање алгебарских и геометријских садржаја, указују на практичан значај датог истраживања. Резултати истраживања указују на то да је могуће разрадити наставне јединице у различитим математичким дисциплинама (чиме се омогућава повезивање различитих области), као и на могућност реализације интегративног приступа математичким садржајима у млађим разредима.

Проширивање наставних јединица у више апстрактне форме, које омогућавају вертикално повезивање, може да буде предмет будућих истраживања. У складу с тим, могу се испитати ефекти повезивања алгебре и геометрије на успешност увођења следећих садржаја у млађе разреде: 1) елементарна својства функција - домен, кодомен, монотоност; појам инверзне функције (пример 1 на 53.стр, пример 2 на 54.стр), 2) метода непотпуне математичке индукције (пример 13 на 70. стр, пример 19 на 79. стр), 3) појам аритметичког низа (пример 13 на 70. стр), 4) појам директне/обрнуте пропорционалности (пример 4 на 55. стр, пример 9 на 66. стр), 5) идеја о функцијама више промењљивих (пример 10 на 67. стр, примери 11 и 12 на 68. стр), 6) еквивалентност израза (примери 16 и 17 на 77. стр, примери 2 и 3 на 113.стр, пример 4 на 114. стр), 7) идеја размере, елементи хомотетије и сличности (пример 19 на 79.стр), 8) идеја о непрекидности и интервалу (пример 3 на 101. стр), 9) сабирање и множење на скупу Q^+ (116.стр), 10) основна својства дељивости, одређивање НЗД и НЗС два броја (пример 9 на 120. стр. и пример 10 на 121.стр).

Научни значај дисертације је у давању одговора на методичка питања кроз: сагледавање психолошко-педагошке основе за реализацију унутарпредметне интеграције у настави математике, разматрање теоријске основе за изградњу методичких модела и њихову примену у настави, емпиријско истраживање и потврђивање претпоставки статистичком методом.

Литература:

.

1) Adler J, Pournara C & Graven M (2000). Integration within and across mathematics. *Pythagoras*, 53, 2-13.

2) Alsina, C. & Nelsen, B. R. (2006). *Math made visual: creating images for understanding mathematics.* Washington DC: Mathematical Association of America.

3) Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: developmental research on the transition from arithmetic to algebra.*, http://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/874/full.pdf?sequence=18

4) Антонијевић, Р. (2004). *Природа и ниво повезаности знања у настави*, докторска дисертација, Филозофски факултет, Београд

5) Антонијевић, Р. (2006). Повезаност знања у наставном програму и процесу наставе. *Сазнавање и настава*, (3-4), 230-240.

6) Антонијевић, Р. (2006). Појам „знање" и облици знања у настави. *Иновације у настави*, *XIX* (2006/2), 94-104.

7) Arianrhod, R. (2003). Einstein's Heroes: Imagining the Worldthrough the Language of Mathematics. Brisbane: University of Queensland Press.

8) Arthur, JD, & Nance, RE. (2007). Investigating the use of software requirements and engineering techniques in simulation modeling. *Journal of Simulation,1*(3), 159–174.

9)Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А. (2011). *Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе*: *от действия к мысли: Пос. для учителя* / Под ред. А.Г. Асмолова, Преузтео из: http://n-shkola.ru/storage/archive/1403686243-1429335600.pdf, страна 1.

10) Atiyah, M. (1982). What is geometry? *The Mathematical Gazette*, Vol.66, No.437, 179-184, Mathematical Institute, University of Oxford

11) Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century,*American Mathematical Monthly*, 108(7), 654-666.

12) Atiyah, M. (2002). Las matemáticas en el siglo XX. Traducción *en Números. Revista de didáctica de las matemáticas,* 50, 35-55

13) Afamasaga-Fuata'i, K. (2008). Students' conceptual understanding and critical thinking. *Australian Mathematics Teacher.* Vol. 64 Issue 2, p8-17.

14) Balka, D. S. (1974): Creative ability in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *21* (7), 633–636.

15) Ball, L. & Stacey, K. (2001). New literacies for mathematics: A new view of solving equations.*The Mathematics Educator*, *6*(1), 55–62.

16) Bassok, M. (2001). Semantic alignments in mathematical word problems. In D. Gentner, K. J. Holyoak & B. N. Kokinov (Eds), The analogical mind: Perspectives from cognitive science (pp. 199–253). Cambridge, MA US: The MIT Press.

17) Battista, M. C. (1999). Spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics, 6,* 171-177.

18) Becker, J. R. & Rivera, F. (2006). Establishing and Justifying Algebraic Generalization at the Sixth Grade Level. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4,* pp. 465-472. Prague: PME

19) Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning*. Academic Press: New York.

20) Bingolbali, E. (2011). Multiple Solutions to Problems in Mathematics Teaching: Do Teachers Really Value Them?, *Australian Journal of Teacher Education,36*(1),18-30.

21) Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquistion of mathematical concepts and processes* (pp. 175–203).) New York: Academic Press.

22) Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446

23) Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68

24) Blum, W., & Ferri, R.B.(2009). Mathematical modeling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modeling and Applications*, *1*(1), 45–58

25) Bobis, J., Sweller, J., & Cooper, M. (1993). Cognitive load effects in a primary-school geometry task. *Learning and Instruction*, *3*(1), 1-21.

26*)* Borromeo Ferri, Rita (2013). Mathematical Modeling—The Teacher's Responsibility, *Journal of Mathematics Education at Teachers College* Преузето 12.8.2015. из: file:///C:/Documents%20and%20Settings/Admin/My%20Documents/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B7%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D1%9A%D0%B0/1069-3194-1-SM.pdf

27) Bosch, M., Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition, *ICMI Bulletin*, 58, 51-63.

28) Bowden, J., & Marton, F. (1998). *The university of learning: Beyond quality and competence.* London: Kogan Page

29) Bransford,JD, & Stein, BS. (1984). *The ideal problem solver. A guide for improving thinking, learning, and creativity.* New York, NY: Freeman

30) Braselton, S., & Decker, B. C. (1994). Using graphic organizers to improve the reading of mathematics. *The Reading Teacher, 48*, 276-281.

31) Brooks, Edward (1871). *The Normal Elementary Algebra: Containing the First Principles of the Science, Developed with Conciseness and Simplicity, for Common Schools, Academies, Seminaries and Normal Schools.* Philadelphia: Sower, Potts & Co.

32) Brown, G. Quinn, R. J.(2006). Algebra students' difficulty with fractions. *Australian Mathematics Teacher*. Vol. 62 Issue 4, p28-40.

33) Bruner, J. (1969). *On knowing*: *essays for the left hand.* Athaneum: New York

34) Bruner, J. (1973). *Beyond the information given*. New York: W.W. Norton & Company Inc.

35) Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Cambridge , MA: Harvard University.

36) Burrill, G.(1995). Algebra in the K-12 Curriculum. In Carole B. Lacampagne, William Blair and Jim Kaput (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium* (pp.56-59).U.S. Department of Education Office of Educational Research and Improvement National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment, http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf#page=37

37) Bussi, M. G. B., Mariotti, M. A., & Ferri, F. (2005). Semiotic mediation in the primary school. In *Activity and Sign* (pp. 77-90). Springer US.

38) Bybee, R. W., Ferrini-Mundy, J., & LoucksHorsley, S. (1997). National standards and school science and mathematics. *School Science and Mathematics, 97*(7), 325-334

39) Bybee, RW. (2014). NGSS and the next generation of science teachers. *Journal of Science Teacher Education, 25* (2), 211–221. doi:10.1007/s10972-014-9381-4.

40) Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and midddle school mathematics (fifth edition).* Virginia Commonwealth University press.

41) Валиуллина, А.Р (2014). *Задачи в обучении математике*, Институт математики и механики им. Н. И Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, http://kpfu.ru/portal/docs/F1632877614/VKR_Valiullina.A..ruk..Shakirova.K.B.pdf

42) Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 97-129.

43) Vygotsky, L. S. (1974). Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti. Firenze: Giunti.

44)Vygotsky, L.S.(1978). *Mind in Society*: *The Development of Higher Psychological Processes*, M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner and E. Souberman, (eds.), Harvard University Press, Cambridge.

45)Vygotsky, L.S.(1986). *Thought and Language*, A. Kozulin, (ed.), M.I.T. Press, Cambridge

46) Vygotsky, L. S. (1987). *Ilprocesso cognitivo*. Torino: Boringhieri.

47) Галиуллина Е.Н.(2011). Открытые задачи в начальной школе, *Начальная школа, No 2,* 40-44.

48) Гашаров, Н.Г, Махмудов,Х.М. (2104). Дивергентные задачи — средство развития творческого мышления младших школьников, *Начальная школа, No 2,* 29-33.

49) Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science, 7*(2), 155–170. doi: 10.1207/s15516709cog0702_3

50) Gerofsky, S. (2004). *A man left Albuquerque heading east: word problem as genre in mathematics education* (Vol. 5). New York, NY: Peter Lang.

51) Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics* (Oxford: Oxford University Press)

52) Gilbert, J., Reiner, M. & Nakhleh, M. (2008). *Visualization: theory and practice in science education.* Dordrecht, The Netherlands: Springer

53) Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts.*The roles of representation in school mathematics*, *2001*, 1-23.

54) Good, T.L. & Brophy, J.E (1991). *Looking in classrooms*. New York: Harper Collins.

55) Gordillo, W.F.C.& Godino, J.D. (2014). Preservice Elementary Teacher's Thinking about Algebraic Reasoning, *Mathematics Education, 9*(2), 147-162

56) Greenes, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C., & Small, M. (2001). *Navigating through algebra in prekindergarten_Grade 2*. Reston , VA : National Council of Teachers of Mathematics.

57) Greer, B, Verschaffel, L, & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. In W Blum, P Galbraith, HW Henn, & M Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI Study* (pp. 89–98). New York, NY: Springer

58) Gusev,V.A, Safuanov, I.S.(2003). *Thinking in images and its role in learning mathematics*, (pp.87-94), In Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., & Peled, I. (Ed.), Algebra in elementary school 1.International group for the psychology of mathematics education.

59) Davis, J. (2013). Student understandings of numeracy problems: Semantic alignment and analogical reasoning. *Australian Mathematics Teacher.* Vol. 69 Issue 2, p.19-26

60) Далингер В.А.(1997). *Метод аналогии как средство обучения учащихся стереометрии*: *Учебное пособие*. Омск: Изд-во ОмГПУ

61) Devlin, K. (2001). *The Maths Gene*: *Why Everyone Has it, but Most People Don't Use It*. London: Orion Books

62) Дејић, М. (2000). *Методика наставе математике*, Учитељски факултет, Јагодина

63) Department of Education (2006). *National Curriculum Statement Grades R-9 Orientation Programme — Grades 8 and 9*: *Part b*: *Mathematics facilitator's manual*. Pretoria: Government Printer.

64) Doerr, H.M. and English, L.D.(2003). 'A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data', *Journal for Research in Mathematics Education 34*, 110–136.

65) Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment*: *Design research on the understanding of the concept of parameter*. Dissertation. Utrecht, the Netherlands: CD-B Press.

66) Driscoll, M.. (1999). Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6–10. Portsmouth , NH : Heinemann.

67) Duschl, RA, & Bybee, RW. (2014). Planning and carrying out investigations: an entry to learning and to teacher professional development around NGSS science and engineering practices. *International Journal of STEM Education, 1*(1), 12. doi:10.1186/s40594-014-0012-6.

68) Evan, R, & Lappan, G. (1994). Constructing meaningful understanding of mathematics content. In D Aichele & A Coxford (Eds.), *Professional development for teachers of mathematics* (pp. 128–143). Reston, VA: NCTM.

69) Einstein, A. and Infeld, L. (1938). *The Evolution of Physics*. New York: Simon and Schuster.

70) Ellerton, N. F. (1988). Exploring children's perception of mathematics through letters written by children. In A. Borbas(Ed.), *Proceedings of the Twelfth International Conference for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1*, (pp.280–287). Veszprem (Hungary): International Group for the Psychology of Mathematics Education.

71) El'konin, D.B. & Davydov, V.V. (1975). Learning capacity and age level: Introduction. In L. P.Steffe (Ed.). *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics, Volume 7, Children's capacity for learning mathematics* (pp. 1-11). Chicago , University of Chicago.

72) Engestroem, Y. (1987). *Learning by Expanding*: *an Activity Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki: Orienta - Konsultit Oy.

73) English, L.D.(2002). 'Development of 10-year-olds' mathematical modeling', in A. Cockburn and E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th International PME Conference*, University of East Anglia, Norwich, pp. 329–336

74) English, L.D. and Watters, J.J.(2005). 'Mathematical modeling in third-grade classrooms', *Mathematics Education Research Journal 16*, 59–80

75) English, L. D. (2006). Mathematical Modeling in the Primary School: Children's Construction of a Consumer Guide. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 303-323.

76) Euler, Leonhard (1984). *Elements of Algebra*, translated by John Hewlett. New York: Springer-Verlag.

77) Eurydice. (2012). *Developing key competencies at school in Europe: challenges and opportunities for policy – 2011/12* (pp. 1–72).

78) Zawojewski, J. (2010). Problem solving versus modeling. In R.Lesh, P.L.Galbraith, C.R.Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp.237–243), New York: Springer.

79) Işık, C. (2011). Conceptual analysis of multiplication and division in fractions posed by pre-service elementary mathematics teachers. *Haccettepe University Journal of Education Faculty, 41*, 231-243.

80) Işık, C., & Kar, T. (2012). An error analysis in division problems in fractions posed by preservice elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice, 12*(3), 2289-2309

81) Işık, C., Öcal, T., & Kar, T. (2013). Analysis of pre-service elementary teachers' pedagogical content knowledge in the context of problem posing. *Paper presented at the meeting of Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Turkey.*

82) Jacobs, V., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children´s algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288.

83) Јешић, С, Мишић, Д.(2008). *Савремене методе и нови приступи наставе математике у основној школи*, Герундијум, Београд

84) Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. and Nisbet, S.(2002). 'Elementary school children's access to powerful mathematical ideas', in L.D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Erlbaum, Mawah, NJ, pp. 113–141.

85) Jones, K. (2010). *Linking geometry and algebra in the school mathematics curriculum.* In Z. Usiskin, K. Andersen & N. Zotto (Eds) Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry. Charlotte, NC: Infoage. pp203-215. ISBN: 97816075 24724, http://eprints.soton.ac.uk/157017/1/Jones_linking_geometry_algebra_2010.pdf

86) Johanning, D. I. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: A closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 371–388.

87) Jupri, A., Drijvers, P. & Heuvel-Panhuizen, M.(2014). Student Difficulties in Solving Equations from an Operational and a Structural Perspective, *Mathematics Education, 9*(1), 39-55.

88) Kapur, J.N. (1990). Some thoughts on creativity in mathematics education. In J.N.Kapur (Ed.), *Fascinating world of mathematical sciences* (pp. 131–138). New Delhi: Mathematical Sciences Trust Society.

89) Kaput, J. J. (1995). Long-term algebra reform: Democratizing access to big ideas. In Carole B. Lacampagne, William Blair and Jim Kaput (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium* (pp.37-53).U.S. Department of Education Office of Educational Research and Improvement National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment, http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf#page=37

90) Kaput, J. J. (1995b). A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform?. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED389539.pdf

91) Kaput, J.J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In Fennema, E., & Romberg, T. A. (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp.133-155). Routledge

92) Kaput, J. (2000). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.Office of Educational Research and Improvement (ED), Washington, DC.; National Science Foundation, Arlington, VA. Преузето 17.8.2015. из: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441662.pdf

93) Kar, T. & Işık, C. (2014). Analysis of Problems Posed by Pre-service Primary Teachers about Adding Fractions in terms of Semantic Structures, *Mathematics Education, 9*(2), 135-146

94) Kasir, Daoud S. (1931). *The Algebra of Omar Khayyam*. New York: Teachers College of Columbia University.

95) Katz, V.J.(1995). The Development of Algebra and Algebra Education.In Carole B. Lacampagne, William Blair and Jim Kaput (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium* (pp.19-36).U.S. Department of Education Office of Educational Research and Improvement National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment, http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf#page=37

96) Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. – In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, p. 390-419

97) Kieran, C.. (1996, July). *The changing face of school algebra*. Invited lecture for Eighth Congress of the International Congress in Math Education, Seville, Spain

98) Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

99) Kılıc, C. (2013). Pre-Service Primary Teachers' Free Problem-Posing Performances in the Context of Fractions: An Example from Turkey, *The Asia-Pacific Education Researcher*, Volume 22,Issue 4 ,677–686

100) Колягин Ю.М., Алексеенко О.Л. (1990). Интеграция школьного обучения, *Начальная школа. № 9*. С. 28–32

101) Kosko, K. W. & Wilkins, J. L. M.(2010). Mathematical Communication and Its Relation to the Frequency of Manipulative Use, *International Electronic Journal of Mathematics Education*,Vol.5, No.2

102) Köhler, A. D. A. (2002). The dangers of mathematical modeling. *The Mathematics Teacher*, *95*(2), 140–145.

103) Крючкова, В.В (2006). *Прием обобщения в циклах взаимосвязанных задач*, Электронный информационный спутник газеты „Математика“, #4 (16—31 мая 2006 г.), http://mat.1september.ru/download/e-mat04.pdf

104) Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Edited by J. Kilpatrick & I. Wirszup. Chicago: University of Chicago Press

105) Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strasser, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* Rotterdam: Sense Publisher.

106) Laborde, C. (2010). Linking geometry and algebra through dynamic and interactive geometry. In Z. Usiskin, K. Andersen, & N. Zotto (Eds.), *Future curricular trends in school algebra and geometry: Proceedings of a conference*, 217-230. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

107) Lajoie, S.P.(1995). A Framework for Authentic Assessment in Mathematics. In

T.A. Romberg(Ed.) *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment* (pp.19-37.).Albany, State University of New York Press.

108) Lamon, S. J. (1999). Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Knowledge and Instructional Strategies for Teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

109) Lamon, S. (2003). Beyond constructivism: An improved fitness metaphor for the acquisition of mathematical knowledge. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 435–448). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

110) Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231–258.

111) Lee, M. S., & 李文生 (2015). Developing a dynamic geometry task platform for accessing students' perceptions of geometric properties through analysis of example spaces. *HKU Theses Online (HKUTO)*

112) Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. *Paper presented in the Working Group on Advanced Mathematical Thinking*—CERME-5, Cyprus.

113) Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution Spaces of Multiple-Solution Connecting Tasks as a Mirror of the Development of Mathematics Teachers' Knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(3), 233 -251.

114) Lesh, R. and G. Harel, (2003). *Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development*. Mathematical Thinking & Learning, 5(2/3): p. 157–189.

115) Leung Allen & Lee Arthur Man Sang (2013). Students' geometrical perception on a task-based dynamic geometry platform, Educ Stud Math (2013) 82:361–377 DOI 10.1007/s10649-012-9433-7

116) Lehrer, R. (2007). Introducing students to data representation and statistics. In K. Milton, H. Reeves, & T. Spencer (Eds.), *Mathematics*: *Essential for learning, essential for life* (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart, Vol. 1, pp. 22-41). Adelaide: AAMT.

117) Lewis, R. H. (2000). *Mathematics*: *The most misunderstood subject.* Accessed 4 February 2009 at http://www.fordham.edu/mathematics/whatmath.html

118) Lian, L.H. and Idris, N. (2006). Assessing Algebraic Solving Ability Of Form Four Students, *International Electronic Journal of Mathematics Education,* Volume 1, Number 1,55-76

119) Липковски, А (2007). *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*, ЗУНС, Београд

120) Lonning, R. A, &DeFranco,T. C. (1997). Integration of science and mathematics: A theoretical model. *School Science and Mathematics, 97*(4), 212-215.

121) Lowrie, T. (2002). Designing a framework for problem posing: Young children generating open-ended tasks. *Contemporary Issues in Early Childhood, 3*(3), 354–364

122) Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction multiplication. *Journal of Mathematics Education, 2*(1), 83–98

123) Margenau, H. (1961, reprint 1983). *Open Vistas*. Woodbridge, CT: Ox Bow Press.

124) Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2004). The space of learning. In F. Marton and A. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3-40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, INC Publishers

125) Marton, F. & Tsui, A.B.M. (2004). *Classroom Discourse and the Space of Learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

126) Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics, 9* (2), 2–8.

127) Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental Constructs in Mathematics Education*. London: RoutledgeFalmer.

128) MacGregor, M., & Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 449-467.

129) Maclaurin, Colin (1756). *A Treatise of Algebra in Three Parts,* 2d ed. London: Millar and Nourse.

130) May, Kenneth O., and Henry Van Engen (1959). "Relations and Functions." In *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K–12*, Twenty-fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 65-110. Washington, D.C.: NCTM.

131) Mayer, J. & Land, R. (2005). Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning.*Higher Education, 49*(3), 373–388.

132) Milinkovic, J (2009). Pupils active learning in integrated mathematics and technical education class: a case study. In I. Radovanovic and Z. Zaclona (Eds): *Student in Contemporary Learning and Teaching,* 97-109. Beograd: Učiteljski fakultet.

133) Милинковић, J. (2011). *Елементи интегративног приступа у уџбеницима*, Иновације у настави XXIV, 2011/1, стр. 53-63, Учитељски факултет, Београд

134) Milinković, J,Bogavac, D(2011). *Montessori method as a basis for intergated mathematics learning,* Metodički obzori 11, vol. 6(2011)1

135) Milinković J.(2015). Conceptualizing Problem Posing via Transformation, In Singer, F.M., Ellerton, N.F., Cai, J.(Ed.), *Mathematical Problem Posing From Research to Effective Practice*, pp 47-70 , Research in Mathematics Education, http://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-6258-3

136) Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal,21*(2), 33-49.

137) Mullis, I. V., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.

138) McAllister, C. J., & Beaver, C. (2012). Identification of error types in preservice teachers' attempts to create fraction story problems for specified operations. *School Science and Mathematics 112*(2), 88;98.

139) Nagy, R. (2013). Building a solid foundation from which to launch our future mathematicians *Australian Mathematics Teacher.* Vol. 69 Issue 3, p. 20-25.

140) *Наставни програм математике за основну школу у РС*, Службени гласник–Просветни гласник, број 10/2004, 1/2005. Београд

141) *Наставни програм за четврти разред основног образовања и васпитања* (2015), Београд: Завод за унапређивање васпитања и образовања.
(Преузето13.6.2015,из
http://www.zuov.gov.rs/dokumenta/CRPU/Osnovne%20skole%20PDF/Prvi%20ciklu

s%20osnovnog%20obrazovanja%20i%20vaspitanja/4%20Nastavni%20program%20za%20cetvrti%20razred%20osnovnog%20obrazovanja%20i%20vaspitanja.pdf)

142) National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

143) National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Professional Standards for TeachingMathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

144) National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM

145) Nelsen, B. R. (1993). *Proofs without words*: *Exercises in visual thinking*. Washington DC: Mathematical Association of America

146) Nelsen, B. R. (2000). *Proofs without words*: *More exercises in visual thinking*. Washington DC: Mathematical Association of America

147) Noë, A. (2004). *Action in perception.* Cambridge: MIT Press

148) *Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – математика* (2011). Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.

149) Osborne, J. (2014). Teaching scientific practices: meeting the challenge of change. *Journal of Science Teacher Education, 25* (2), 177–196. doi:10.1007/s10972-014-9384-1.

150) *Педагошка енциклопедија* 1-2 (1989), ЗУНС, Београд

151) *Педагошки лексикон* (1996), ЗУНС, Београд

152) Пијаже, Ж. (1983). *Порекло сазнања*. Нолит, Београд

153) Piaget, J. (1985). *The Equilibration of Cognitive Structures*. Cambridge MA: Harvard.

154) PISA (2006). Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA. Publisher: OECD.

155) Pogrow, S. (1988). Teaching thinking to at-risk elementary students. *Educational Leadership*, *45*(7), 79–85.

156) Подходова, Н.С. (2011). Моделирование как универсальное учебное действие при изучении математики, *Начальная школа*, № 9, Министерство образования Российской Федераци, Москва

157) Поља, Ђ.(1956). *Како ћу решити математички задатак*, Школска књига, Загреб.

158) Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Lawrence Erlbaum

159) Presmeg, N. (2006). Semiotics and the “Connections” Standard: Significance of Semiotics for Teachers of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, Volume 61, Issue 1-2, pp 163-182. Преузето из: http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-3365-z

160) Presmeg, N. C. (2006b). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), ′ *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205–235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers

161) Prouse, H. L. (1964). The construction and use of a test for the measurement of certain aspects of creativity in seventh grade mathematics. *Dissertation Abstracts International, 26*(1), 394.

162) Prouse, H. L. (1967). Creativity in mathematics. *The Mathematics Teacher, 60*, 876–879.

163) Puig, L. & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

164) Purdum-Cassidy, B., Nesmith, S., D. Meyerand, R.& Cooper, S. (2015). What are they asking? An analysis of the questions planned by prospective teachers when integrating literature in mathematics, *Journal of Mathematics Teacher Education,18*(1), 79-99.

165) Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 39–65

166) Ракоњац, М. (2016). Ефекти геометријског моделовања алгебарских проблема у разредној настави, *Зборник радова Учитељског факултета у Ужицу, XIX*(18), стр. 167-178.

167) Ракоњац, М. (2017). Ефекат геометријске репрезентације особина релације једнакости на успешност решавања једначина у млађим разредима, *Настава математике,* LXII2-3, стр. 21-28, Друштво математичара Србије

168) Рашковић, М, Икодиновић, Н (2010). *Приче о малим и великим бројевима,* ЗУНС, Београд

169) Romberg, T.A. & Kaput, J.J. (1999). Mathematics Worth Teaching, Mathematics Worth Understanding. In Fennema, E., & Romberg, T. A. (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp.3-17). Routledge

170) Ruiz, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2007). The functional algebraic modelling at secondary level. In *Comunicación presentada en el 5º Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática. Lárnaca (Chipre)* (pp. 22-26).

171) Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 285-311.

172) Саранцев Г.И (2001). *Методология методики обучения математике*. Саранск

173) Senk, S. L., Beckmann, C. E., & Thompson, D. R. (1997). Assessment and grading in high school mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 187-215

174) Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28

175) Silver, E.A. & Kenney, P.A. (1995). Sources of Assessment Information for Instructional Guidance in Mathematics. In T.A. Romberg (Ed.) *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment* (pp. 38-68), Albany, State University of New York Press..

176) Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., & Font Strawhun, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 287–301

177) Силобрчић, В. (1989). *Како саставити, објавити и оцијенити знанствено дјело*. Загреб: Медицинска наклада.

178) Simon, M. A., & Blume, G. W. (1994). Building and Understanding Multiplicative Relationships: A Study of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 472-494

179) Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

180) Skemp,R.R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates

181) Skemp, R. (2002). Instrumental and relational understanding. In D. Tall & M. Thomas (Eds.),*Intelligence, learning and understanding in mathematics*: *A tribute to Richard Skemp.* Flaxton, QLD: Post Pressed.

182) Skinner, B. F. *Science and Human Behavior*. New York: Free Press, 1953. *About Behaviorism*. New York: Alfred A. Knopf, 1974

183) Славская К.А. (1966). Детерминация процесса мышления, *Исследование мышления в советской психологии.* - М.: Наука, стр.175 - 224.

184) Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. L. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.133–160). New York: Taylor & Francis Group

185) Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher, 91*(8), 670–675.

186) Steen, L. A. (2003). Data, shapes, symbols: Achieving balance in school mathematics. http://www.asclegg.co.uk/downloads/maths/pisa/Data%20Steen.pdf

187) Stein M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50-80

188) Stenmark, J.K. (1989). *Assessment Alternatives in Mathematics*, EQUALS publications, University of Californioa.

189) Stephens, A. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *Journal of Mathematical Behavior, 27*, 33-47

190) Стошић-Миљковић, Д, Маринковић, Б.(2007). *Математички практикум*, КММ, Архимедес, Београд

191) Stoyanova, E. (2000). Empowering students' problem solving via problem posing: The art of framing "good" questions. *Australian Mathematics Teacher, 56*(1), 33–37

192) Stoyanova, E. (2003). Extending students' understanding of mathematics via problem posing. *Australian Mathematics Teacher, 59*(2), 32–40.

193) Streefland, L. (1995). Zelf algebra maken [Making algebra yourself]. *Nieuwe Wis-krant, 15*(1), 33-37

194) Sullivan, P., & Clarke, D. (1991). The Assessment Implications of Open-ended Tasks in Mathematics. In M. Stephens &J. Izard (Ed.) *Reshaping Assessment Practices*: *Assessment in the Mathematical Sciences Under Challenges*, Victoria, National Library of Australia.

195) Сухаревская, Е. (2006). Особенности интегрированного обучения в начальных классах, *Начальная школа* №1/2006, издательского дома „Первое сентября", http://nsc.1september.ru/article.php?ID=200600101

196) Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36.

197) Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

198) Shafer, M.C. & Romberg,T.A. (1999). Assessment in Classrooms That Promote Understanding. In Fennema, E., & Romberg, T. A. (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp.159-184). Routledge

199) Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., & Peled, I. (2003). Algebra in Elementary School. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 127-134.

200) Schmalz, R. (1973): Categorization of questions that mathematics teachers ask. *Mathematics Teacher,* 66(7). Reston, VA: NCTM

201) Schoenfeld, AH. (1987). What's all the fuss about metacognition? In AH Schoenfeld (Ed.),*Cognitive science and mathematics education* (pp. 189–215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
202) Schoenfeld, A.H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of 'well-taught' mathematics courses. *Educational Psychologist*, 23(2), 145-166.
203) Schoenfeld, A. (2012). *Problematizing the didactic triangle. ZDM, 44* (5), 587-599.
204) Swan, M. (2005). *Improving Learning in Mathematics: Challenges and Strategies*.Retrieved September 3, 2014, from: https://www.asms.sa.edu.au/wpcontent/uploads/2013/04/Improving_learning_in_maths-UK.pdf
205) Tall, D. (2004, July). Thinking through three worlds of mathematics. InProceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 281-288).
206) Tahta, D. (1980). About geometry. *For the Learning of Mathematics*, *1*(1), 2–9.
207) Thomas, N. & Mulligan, J. T. (1995). Dynamic imagery in children's representations of number. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 5-26
208) Thompson, T. (2008). Mathematics Teachers' Interpretation of Higher-Order Thinking in Bloom's Taxonomy, *International Electronic Journal of Mathematics Education* ,Volume 3, Number 2
209) Thornton, S. (2001). A picture is worth a thousand words. In A. Rogerson (Ed.), *New ideas in mathematics education*: *Proceedings of the International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project* (pp. 251–256).
210) Tyminski,A. M., Zambak, V. S., Drake, C.& Land, T.J. (2014). Using representations, decomposition, and approximations of practices to support prospective elementary mathematics teachers' practice of organizing discussions, *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(5), 463-487.
211) Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte(Eds.), *The ideas of algebra, K-12*: *NCTM 1988 Yearbook* (pp. 8–19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics..
212) Usiskin, Z. (2004). *Should all students study a significant amount of algebra*?Keynote at the Dutch National Mathematics Days (NWD) [keynote also in *Nieuw Archief voor Wiskunde*, June 2004, 147-151]
213) Fennema, E., & Romberg, T. A. (Eds.). (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
214) Fey, James T., and Richard A. Good (1985). Rethinking the Sequence and Priorities of High School Mathematics Curricula. In *The Secondary School Mathematics Curriculum*, 1985 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 43–52. Reston, Va.: NCTM
215) Fey, J.(1995). What Is the Appropriate K-12 Algebra Experience for Various Students? In Carole B. Lacampagne, William Blair and Jim Kaput (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium* (pp.63-66).U.S. Department of Education Office of Educational Research and Improvement National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment, http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf#page=37
216) Fluellen, J. (2007). *Algebra and analogy for kids. A teacher inquiry plan occasional paper #4*. Retrieved from http://www.eric.ed.gov.ezp01.library.qut.edu.au/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED497836
217) Francisco, JM, & Maher, CA. (2005). Conditions for promoting reasoning in

problem solving: insights from a longitudinal study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3), 361–372.

218) Hallagan, J. E. (2006). The case of Bruce: a teacher's model of his students' algebraic thinking about equivalent expressions. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 103-123.

219) Hart, Walter W. (1951). *A Second Course in Algebra.* 2d ed., enlarged. Boston: D. C. Heath & Co.

220) Haylock, D. W. (1987a). Mathematical creativity in school children. *The Journal of Creative Behavior*, *21*(1), 48–59.

221) Haylock, D. W. (1987b). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 59–74.

222) Haylock, D. W. (1997). Recognizing mathematical creativity in school children. *International Reviews on Mathematical Education, 29* (3), 68–74.

223) Hewitt, D. (1992). Train spotters' paradise. *Mathematics Teaching*, *140*, 6–8.

224) Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge*: *The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

225) Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws. New York: Macmillan. 65-97.

226) Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

227) Hiebert, J., Morris, A., K., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, 58(1), 47-61. doi: 10.1177/0022487106295726

228) Hollingsworth, H., Lokan, J. & McCrae, B. (2003). *Teaching mathematics in Australia: Results from the TIMSS video study* (TIMSS Australia Monograph No. 5). Camberwell, Vic.: Australian Council for Educational Research.

229) House, P. A. & Coxford, A. F. (1995). *Connecting Mathematics across the Curriculum*, 1995 Yearbook. NCTM.

230) Huerta, M. P. (2009). On Conditional Probability Problem Solving Research – Structures and Contexts, *International Electronic Journal of Mathematics Education,* Volume 4, Number 3

231) Huntley, M. A., Rasmussen, C. L., Villarubi, R. S., Sangtong, J., & Fey, J. T. (2000). Effects of Standards-Based Mathematics Education: A Study of the Core-Plus Mathematics Project Algebra and Functions Strand. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(3), 328-361.

232) Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F., & Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(1), 5-15.

233) Cankoy, O. (2003). Perceptions of preservice elementary teachers in Turkish Republic of Northern Cyprus about difficulty level of mathematical problems. *Hacettepe University Journal of Education Faculty, 25*, 26–30.

234) Cankoy, O.(2014). Interlocked problem posing and children's problem posing performance in free structured situations, *International Journal of Science and Mathematics Education,* Volume 12, Issue 1, pp 219-238.

235) Carpenter, T.P. & Lehrer, R. (1999). Mathematics Worth Teaching, Mathematics Worth Understanding. In Fennema, E., & Romberg, T. A. (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp.19-32). Routledge

236) Carpenter,T.P., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Piet Human, P., Murray, H., Olivier, A. &Wearne, D. (1999). Learning Basic Number Concepts and Skills as Problem Solving. In Fennema, E., & Romberg, T. A. (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp.45-61). Routledge.

237) Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). Children's mathematics: Cognitively guided instruction. Portsmouth, NH: Heinemann

238) Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*, 87-115

239) CECJA(2002). Decreto 148/2002 por el que se establecen las ensenanzas correspondientes a la Educacion Secundarion Obligatoria en Andalucia. *Boletin Oficial de la Junta de Andalucia*. 75.June 27.2002.

240) Clarke, D. (1992). The role of assessment in determining mathematics performances. In G.C.Leder (Ed.) *Assessment and Learning of Mathematics* (pp.145-168). Australian Council for Educational Research, Victoria, Australia.

241) Collins, A. (1987). Cognitive Apprenticeship: Teaching the Craft of Reading, Writing, and Mathematics. Technical Report No. 403.

242) Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit.*Educational Studies in Mathematics*, *26*(2/3), 135–164.

243) Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry revisited*. New York: Mathematical Association of America

244) Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-Eliciting Activities as a Tool to Develop and Identify Creatively Gifted Mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 37-47).

245) Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12,* 117–151.

246) Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage. (2d edition: 1991)

247) Chevallard, Y, Bosch, M.&Gascon, J.(1997). *Estudior matematicas*. El eslabon perdido entre la ensenanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE/Horsori.(Преузето 15.6.2015, из https://curriculares.files.wordpress.com/2011/09/el_eslabon_perdido.pdf)

248) Čadež, T.H. and Kolar, V.M (2015). *Understanding of mathematically gifted students' approaches to problem solving* , in Kolar-Begović,Kolar-Šuper,Đurđević-Babić (eds.),*Higher Goals in Mathematics Education***,** Josip Juraj Strossmayer University of Osijek**,**pp. 27-39.(http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED557785.pdf)

249) Шамић, М. (1984). *Како настаје научно дјело*. Свјетлост ООУР Издавачка дјелатност, Сарајево

250) Шимлеша, П. (1980). *Дидактика*, Педагошко-књижевни збор, Загреб.

251) Queensland Studies Authority (2004). *Mathematics Years 1 to 10 Syllabus*. Springhill, Qld: Author. Retrieved from http://www.qsa.qld.edu.au/downloads/p_10/kla_maths_syll.pdf

252) Wadsworth, B. J. (1996). *Piaget's Theory of Cognitive and Affective Development (5th ed.).*White Plain, NY: Longman Publishers.

253) Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference*

of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 305- 312). Melbourne: Program Committee.

254) Wells, G.(1999). *Dialogic Inquiry in Education*: *Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education*, Cambridge University Press, New York.

255) Wells, G.(2000). 'Dialogic inquiry in education', in C.D. Lee and P. Smagorinsky (eds.),*Vygoskian Perspectives on Literacy Research*: *Constructing Meaning through Collaborative Inquiry*,Cambridge University Press, New York, pp. 51–85

256) Wright, V. (1997). *Assessing mathematical processes in algebra*. Unpublished Research dissertation. University of Waikato.

257) Whitson, J.A.(1997). 'Cognition as a semiosic process: From situated mediation to critical reflective transcendance', in D. Kirshner and J.A. Whitson (eds.), *Situated Cognition*: *Social, Semiotic, and Psychological Perspectives,* Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah,New Jersey, pp. 97–149.

258) Yildirim, T. P., Shuman, L., Besterfield-Sacre, M., & Yildirim, T. P. (2010). Model eliciting activities: assessing engineering student problem solving and skill integration processes. *International Journal of Engineering Education,26*(4), 831-845.

Прилог 1

Иницијални тест

1. Израчунај:
а) 145 + 639 = _____ б) 785 – 419 = _____ в) 665 : 7 =_____ г) $459 \cdot 2 =$ _______

2. Попуни табелу:

$a-1$		99		
a	200			
$2 \cdot a$				900
$a:2$			25	

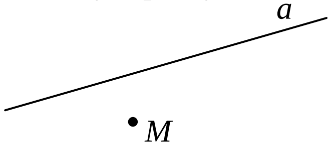
3. Израчунај:
а) $300 - 90:3 =$ ____________________ б) $192 \cdot 5 - 726:6 =$ ____________________

4. Јелена има 38 сличица, а Саша за 9 мање. Колико сличица имају Јелена и Саша заједно?

5. Збир два броја је 1000. Ако је један сабирак 38, колики је други?

6. Упиши број који недостаје тако да једнакост буде тачна.
а) ___ $-25=46$ б) $92-$ ___ $=34$ в) ___ $:4=0$ г) $9\cdot$ ___ $=189$

7. Нацртај праву *p*, која садржи тачку *M* и паралелна је правој *a*.



8. Нацртај две нормалне праве, које се секу у тачки *S*.

9. Нацртај дуж $AB = 1dm2cm$. Дуж AB подели на шестине.

Допуни: $\frac{1}{6}AB =$ ___ cm

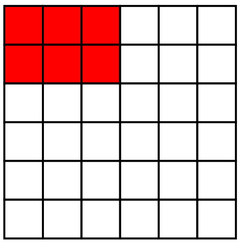
10. Марко је висок $1m2dm$, Јован $117cm$, а Петар $1m23cm$. За колико је центиметара највиши дечак виши од најнижег?

11. Израчунај обим правоугаоника, чија је ширина $2cm$, а дужина пет пута већа од ширине.

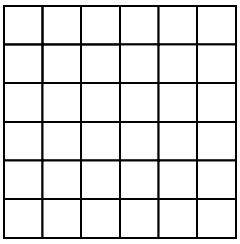
12. Нацртај квадрат, чији је обим $8cm$. Обој $\frac{1}{4}$ квадрата.

Прилог 2 – **Тест А**

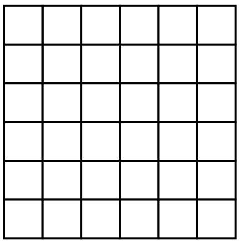
Име и презиме ___________________________ Број бодова:______



A$_1$. Површина највећег квадрата на слици је $144cm^2$. Колика је површина осенчене фигуре?



A$_2$. а) На датој слици обој шест "квадратића" тако да чине фигуру најмањег могућег обима.
б) Ако је обим највећег квадрата $48cm$, израчунај обим обојене фигуре.



A$_3$. а) На датој слици обој шест "квадратића" тако да чине фигуру највећег могућег обима.
б) Ако је O_1 обим обојене фигуре и O обим највећег квадрата на слици, које је тврђење тачно: $O_1 < O$, $O_1 = O$, $O_1 > O$? (подвуци тачно тврђење)

в) Ако је површина једног "квадратића" $16cm^2$, израчунај обим обојене фигуре и обим највећег квадрата.

A$_4$. Колики је обим правоугаоника, код кога је збир две суседне странице $26cm$?

A$_5$. Колика је површина правоугаоника, ако половина његове површине износи $6cm^2$?

A$_6$. Одреди странице правоугаоника површине $12cm^2$, при чему су мерни бројеви дужина страница природни бројеви. (Написати сва решења.)

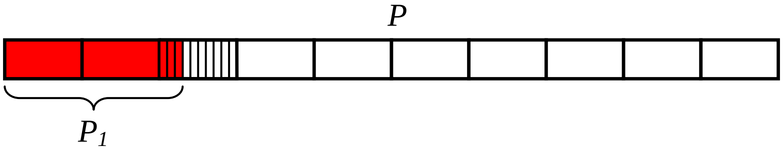
A$_7$. Колико осмина има у: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$?

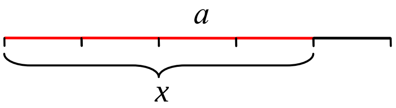
A$_8$. У празна поља упиши знак >,< или =.

а) $\frac{3}{5}kg$ _____ $400g$　　б) $22минута$ ______ $\frac{3}{5}сата$　　в) $\frac{7}{10}km$ _____ $710m$

г) $8сати15минута$ ____ $\frac{3}{8}дана$　　д) $750kg$ _____ $\frac{3}{4}t$　　ђ) $\frac{4}{5}m$ ____ $8dm$

A₉. Површина P_1 осенченог правоугаоника са слике износи $\frac{23}{100}$ површине P већег правоугаоника. Ако је $P_1 = 2300mm^2$, израчунај P.





A₁₀. Попуни празно поље: Дужина дужи x са слике износи $\frac{}{5}$ дужине дужи a.
Ако дужина дужи x износи $60cm$, колика је дужина дужи a?

A₁₁.Ако се ширина правоугаоника повећа за $5cm$, површина ће му се повећати за $35cm^2$. Колике су биле странице првобитног правоугаоника, ако се зна да му је обим $16cm$?

A₁₂. Ако се мањи од два чиниоца неког производа смањи за 2, производ ће се смањити за 30. Одреди чиниоце тог производа, ако се зна да им је збир 25.

Прилог 3 - **Тест Б**

Име и презиме:______________________________ Број бодова:_____

$Б_1$. Израчунај површину коцке, чија страна има обим $64cm$.

$Б_2$. Збир свих ивица квадра је $100cm$, а висина је $7cm$. Израчунај остале ивице:
а) ако су дужина и ширина квадра једнаке
б) ако се дужина и ширина разликују за $2cm$
в) ако је дужина два пута већа од ширине

$Б_3$. Четири стране квадра су подударни правоугаоници, чија је једна страница два пута дужа од друге, а укупна површина тих правоугаоника износи $72cm^2$. Израчунај ивице квадра.

$Б_4$. Израчунај површину квадра, чије су две стране квадрати обима $8cm$, а обим стране, која је правоугаоник, износи $10cm$.

$Б_5$. Обими страна квадра износе $24cm$, $34cm$ и $30cm$. Израчунај површину квадра.

$Б_6$. Две стране квадра су квадрати, а висина квадра износи $7cm$. Израчунати површину квадра, ако је збир свих ивица $68cm$.

$Б_7$. Израчунај дужине ивица квадра, чије су две стране квадрати површине $9cm^2$, а укупна површина осталих страна $48cm^2$.

$Б_8$. Израчунај дужине ивица квадра, чије су две стране квадрати, а збир свих ивица $28cm$. (Мерни бројеви димензија су природни бројеви.) Колико има решења?

$Б_9$. Збир свих ивица квадра је $36cm$, а висина износи $3cm$. Израчунај дужину и ширину, ако је дужина два пута већа од ширине.

$Б_{10}$. За колико треба смањити две наспрамне странице квадрата површине $49cm^2$ тако да се добије правоугаоник површине $35cm^2$?

$Б_{11}$. Колико хектара има њива облика правоугаоника чији је обим $740m$, а дужина за $130m$ већа од ширине?

$Б_{12}$. Ширина правоугаоника износи $11cm$. Ако се она умањи за $3cm$, а дужина повећа за $6cm$, површина правоугаоника се не мења. Колика је дужина правоугаоника?

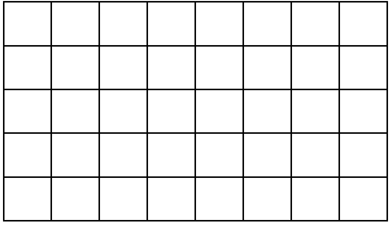
Прилог 4

Методички подаци о часу	
Наставна тема	Површина
Наставна јединица	**Површина правоугаоника**
Претходна наставна јединица	Својства операције одузимања
Наредна наставна јединица	Површина правоугаоника
Тип часа	Обрада
Облици рада	Фронтални
Циљеви и задаци часа	-Упознавање ученика са појмом површине правоугаоника -Упоређујући мерне бројеве страница са мерним бројевима површине правоугаоника, закључити да се до мерног броја површине правоугаоника долази множењем мерних бројева страница правоугаоника. -Повезивање мерног броја површине правоугаоника са производом; повезивање страница дужина a и b са чиниоцима производа -Успостављање везе између зависности површине од димензија правоугаоника и зависности производа од чинилаца -Једнакосну формулу $P = a \cdot b$ схватити као једначину, у којој је потребно нагласити које је од слова a, b и P променљива (тј. непозната), а која су параметри
Наставне методе	Дијалошка, илустративна
Наставна средства и потребан материјал	1.Дејић, М, Милинковић, М, Ђокић, О. (2012). *Математика: уџбеник за четврти разред основне школе.* Београд: Креативни центар. 2.*Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – математика* (2011). Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања. Креда, табла
Ток часа:	
Уводни део часа- 5 минута	-Нацртати на табли правоугаоник са страницама a и b -Обновити својства правоугаоника -Обновити јединице за мерење површине
Главни део часа- 35 минута	Сваки правоугаоник има површину. Мерење површине правоугаоника је упоређивање његове површине са јединицом за површину (јединичним квадратом). Коначан

резултат мерења је *број* – мерни број величине, који показује са колико је јединичних квадрата потпуно прекривен правоугаоник. Дакле, мерењем се успоставља веза између правоугаоника и бројева, тако што се сваком правоугаонику придружује број – мерни број.

Пример 1.

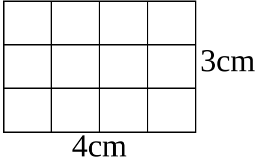
Ако је јединични квадрат $1cm^2$, одреди површину датог правоугаоника.



Решење: Колико се јединичних квадрата налази у датом правоугаонику? У правоугаонику се налази 5 редова, а у сваком реду по 8 квадрата ($1cm^2$); укупно $5 \cdot 8$ квадрата , тј. $40 \cdot 1cm^2$, односно $40cm^2$. Дакле, површина правоугаоника је $P = 40cm^2$.

Пример 2.

Одреди површину правоугаоника са слике.



Решење: Колико квадрата $1cm^2$ има у правоугаонику? У једном реду има 4 квадрата, а како има 3 реда, укупно је 12 квадрата. Дакле, површина правоугаоника је $P = 12cm^2$.

На основу примера закључујемо да је мерни број површине једнак производу мерних бројева страница правоугаоника.

Наставник на табли црта правоугаоник са страницама a и b.

Наставник: Слова a и b су променљиве. Ако не знамо бројну вредност дужина страница правоугаоника, да ли можемо написати како се израчунава површина? Можемо, користећи променљиве. Једнакосна формула за површину правоугаоника је $P = a \cdot b$. Променљиве су уведене да би генерализовали сличне проблеме, што нам даје предност да проблем решимо једном, а онда то решење користимо да би решили групу сличних проблема. $a \cdot b$ је израз са променљивом (алгебарски израз). Израчунавањем алгебарског израза $a \cdot b$ за дате вредности променљивих израчунавамо површину правоугаоника.

Задаци:

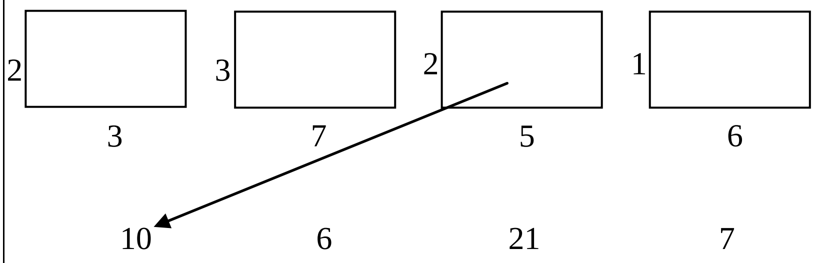
1.Испитај тачност следећих исказа:

а) Подударни правоугаоници имају једнаке површине.

б) Правоугаоници једнаких површина су подударни.

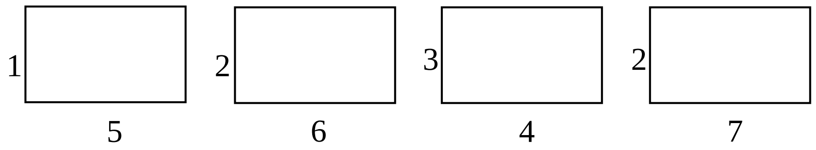
2. Површина правоугаоника је $12cm^2$. Одреди странице,

	чији су мерни бројеви дужина природни бројеви. (Написати сва решења) Решење: Како је мерни број површине једнак производу мерних бројева страница, проблем можемо формулисати на следећи начин: Производ два природна броја (a и b) је 12. Који су то бројеви? Дакле, у алгебарском тврђењу $a \cdot b = 12$ потребно је одредити промењливе a и b ($a, b \in N$). Како је $1 \cdot 12 = 12$, $2 \cdot 6 = 12$ и $3 \cdot 4 = 12$, а знамо да су чиниоци мерни бројеви дужина страница правоугаоника, добијамо да су тражени правоугаоници са страницама $1cm$ и $12cm$, $2cm$ и $6cm$, $3cm$ и $4cm$. 3. Испитај тачност следећих исказа: а) Мерењем површине правоугаоника сваком правоугаонику придружује се тачно један број (мерни број површине). б) Сваком природном броју P може се придружити тачно један правоугаоник, чији је мерни број површине једнак броју P. 4. Да ли ће се променити површина правоугаоника и како, ако се једна страница увећа три пута? Решење: Како је $P = a \cdot b$, задатак је аналоган следећем: Да ли ће се променити производ (бројева a и b) и како, ако се један чинилац увећа три пута? Ако у изразу $a \cdot b$ промењливу a увећамо 3 пута, тј. симбол a заменимо са $3 \cdot a$, добићемо израз $3 \cdot a \cdot b$, тј. $3P$, одакле закључујемо да је површина увећана 3 пута. 5. Ако површина правоугаоника износи $24cm^2$, а једна страница $4cm$, одреди другу страницу. Решење: Користећи формулу $P = a \cdot b$, где су слова P и a познате величине, а b непозната, задатак се своди на решавање једначине $24cm^2 = 4cm \cdot b$.
Завршни део часа- 5 минута	Домаћи задатак: 1.Датим правоугаоницима придружи мерни број површине, као што је започето.

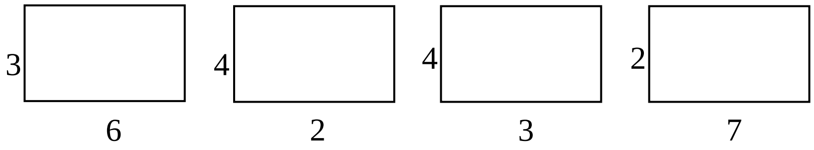


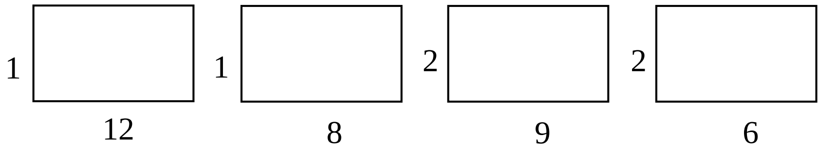
2. Датим бројевима придружи правоугаонике, тако да су ти бројеви мерни бројеви површине датих правоугаоника.

12 14 5



3. Правоугаонике једнаких површина обој истом бојом.





4. Површина правоугаоника је $36cm^2$, а једна страница дужине $9cm$. Израчунај дужину друге странице.

Методички подаци о часу	
Наставна тема	Скуп *N*
Наставна јединица	**Узајамна зависност производа и чинилаца**
Претходна наставна јединица	Зависност производа од чинилаца
Наредна наставна јединица	Особине квадра и коцке
Тип часа	Утврђивање
Облици рада	Индивидуални, фронтални
Циљеви и задаци часа	-Утврђивање како промене чинилаца утичу на проивод повезивањем мерног броја површине правоугаоника са производом, односно страница дужина a и b са чиниоцима производа -Успостављање везе између зависности површине од димензија правоугаоника и зависности производа од чинилаца - Решавање једначина
Наставне методе	Дијалошка, илустративна
Наставна средства и потребан материјал	1.Дејић, М, Милинковић, М, Ђокић, О. (2012). *Математика: уџбеник за четврти разред основне школе.* Београд: Креативни центар. 2.Дејић, М, Милинковић, М, Ђокић, О. (2012). *Математика: радна свеска за четврти разред основне школе.* Београд: Креативни центар. 3.*Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – математика* (2011). Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања. Креда, табла, дидактички материјал намењен за самосталан рад ученика
Ток часа:	
Уводни део часа- 5 минута	-Обновити појам површине правоугаоника -Обновити зависност производа од промене чинилаца -Поделити ученицима материјал за самосталан рад

Главни део часа – 30 минута:

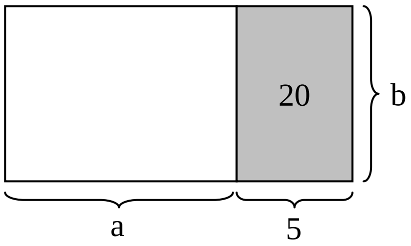
Ученици самостално раде на приложеном материјалу.

1. Ако се већи од двају чинилаца неког производа повећа за 5, производ ће се повећати за 20. Одреди чиниоце тог производа, ако се зна да им је разлика 4.

Решење:

Тражене чиниоце означићемо са a и b.

Производ два броја a и b може се представити у облику правоугаоника (чинилац a је дужина, а чинилац b је ширина) на слици. Производ бројева a и b записујемо ________, што је уједно и мерни број површине правоугаоника страница a и b са слике.



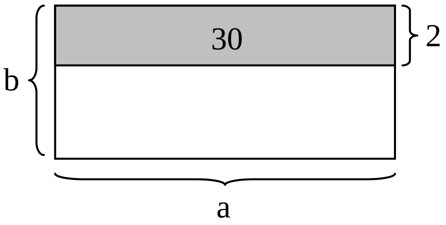
На слици је приказано да је већи чинилац a (тј. дужина правоугаоника) увећан за 5. Производ (тј. површина правоугаоника) увећао се према условима задатка за ____, што је представљено осенченим правоугаоником, чија је површина $b\cdot\_=20$, одакле је $b=$____. Како се чиниоци (странице) разликују за 4, други (већи) чинилац је $a=$____________

Провера: Производ бројева a и b износи __________. Ако се већи чинилац a увећа за 5, онда производ износи __________ Дакле, производ је увећан за _____

2. Ако се мањи од двају чинилаца неког производа смањи за 2, производ ће се смањити за 30. Одреди чиниоце тог производа, ако се зна да им је збир 25.

Решење:

Као у претходном примеру, користићемо метод правоугаоника.



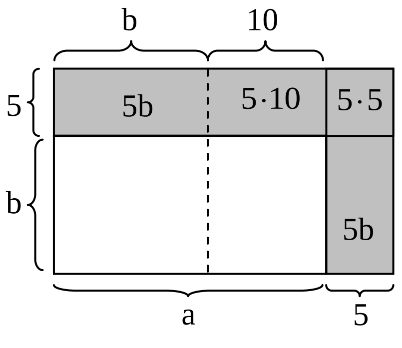
Непознати чиниоци a и b графички су приказани као странице правоугаоника. Мањи чинилац b (краћа страница) умањен је за 2, а према условима задатка производ умањен за ____, што је представљено осенченим правоугаоником, чија је површина $a\cdot\_=30$. Из услова да је збир чинилаца (страница) једнак 25 следи да је $b=$___.

Провера: Производ бројева a и b износи _________. Ако се мањи чинилац b смањи за 2, онда производ износи _________. Дакле, производ је умањен за __________.

3. Ако се сваки од двају чинилаца неког производа повећа за 5, производ ће се повећати за 115. Разлика чинилаца је 10. Израчунај чиниоце.

Решење:

На слици је приказан правоугаоник са страницама a и b, при чему је a за 10 веће од b.



Повећањем чинилаца (страница) за 5 повећава се и производ (површина правоугаоника) за осенчени део, чија површина према условима задатка износи __________.

„Разрезивањем“ повећања површине (тј. осенченог дела) добићемо делове чија укупна површина износи 115. Са слике закључујемо да је: $5\cdot b+5\cdot 10+5\cdot 5+5\cdot b=115$

Решење једначине је $b=4$. Из услова задатка закључујемо да је $a=$_____.

Провера: Производ бројева *a* и *b* износи ___________. Ако се чиниоци увећају за 5, онда производ износи ________. Дакле, производ је увећан за ____________.

4. Ако се први од двају чинилаца једног производа повећа за 7, а други за 3, њихов производ ће се повећати за 133. Одредити чиниоце, ако је њихова разлика 4.

Решење:

Слично претходним задацима, да би графички илустровао услове задатка нацртај правоугаоник са страницама *a* и *b*, при чему је *a* за 4 веће од *b*.

Увећање чинилаца за 7, односно 3, прикажи увећањем страница правоугаоника. Осенчи део који представља увећање површине правоугаоника. Површина осенченог дела износи _________.

„Разрежи" осенчени део на одговарајуће мање делове и означи њихове димензије.

Према подацима са слике записаћемо одговарајућу једначину: $3\cdot b+3\cdot 4+3\cdot 7+7\cdot b=133$

Решење једначине је $b=$ ______. Како је *a* за 4 веће од *b*, закључујемо да је $a=$ __________.

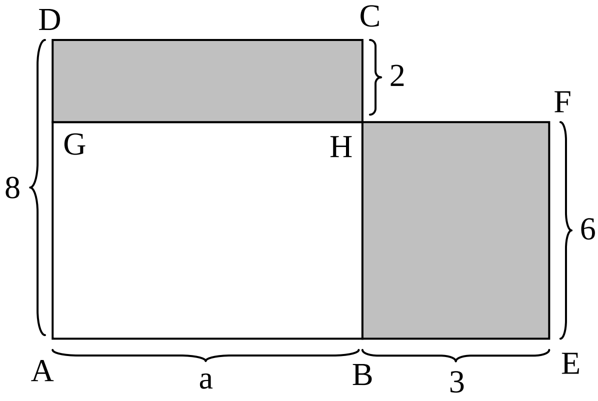
Провера:

Производ бројева *a* и *b* износи __________. Ако се чинилац *a* повећа за 7, а чинилац *b* за 3, производ ће износити __________. Дакле, производ се повећао за _________.

5. Један од чинилаца у производу два броја износи 8. Ако се он умањи за 2, а други чинилац повећа за 3, производ се не мења. Колико износи други чинилац?

Решење:

На слици је приказан правоугаоник ABCD са страницама 8 и *a*.



Смањењем чиниоца 8 (ширине правоугаоника) за 2 и повећањем чиниоца *a* (дужине правоугаоника) за 3, добићемо правоугаоник AEFG чија је површина према условима задатка једнака површини правоугаоника ABCD.

Како је $P_{ABCD}=P_{AEFG}$, закључујемо да је $P_{GHCD}=P_{BEFH}$, тј. $2\cdot a=\_\cdot\_$, одакле је $a=\_\_$, што је и требало одредити.

6. Ако се један број увећа за 5, његов квадрат (производ броја са самим собом) повећа се за 125. Који је то број?

7. Разлика два броја је 16. Ако се сваки од тих бројева повећа за 6, њихов производ ће се повећати за 396. Који су то бројеви?

Завршни део часа – 10 минута:

-У разговору, вођеном од стране наставника, ученици саопштавају и проверавају резултате, постављају питања и износе своје ставове.

- Домаћи задатак: *Математика: радна свеска за четврти разред основне школе*, страна 120, задаци: 6, 8, 10.

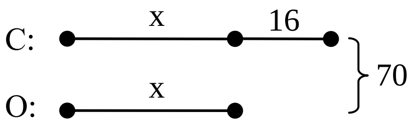
Методички подаци о часу	
Наставна тема	Скуп *N*
Наставна јединица	**Примена једначина**
Претходна наставна јединица	Решавање једначина
Наредна наставна јединица	Решавање неједначина
Тип часа	Утврђивање
Облици рада	Индивидуални, фронтални
Циљеви и задаци часа	Да би се задаци разумели и превели на математички језик користе се геометријски модели (дужи), који одражавају основне математичке релације и наводе на алгебарски пут решења проблема (путем једначина). Модели успостављају везу између конкретног и апстрактног, чиме поједностављују формирање једначина. Задатак је оспособити ученике да за решавање задатака користе геометријске моделе, тј. податке из услова задатка „записују“ дужима, одакле ће лакше уочити односе између величина и исте превести на алгебарски језик (формирати једначину и решити)
Наставне методе	Дијалошка, илустративна
Наставна средства и потребан материјал	1.Дејић, М, Милинковић, М, Ђокић, О. (2012). *Математика: радна свеска за четврти разред основне школе.* Београд: Креативни центар. 2.*Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – математика* (2011). Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.

	Креда, табла, полупрограмиран дидактички материјал
Ток часа:	
Уводни део часа- 5 минута	-Обновити решавање једначина у којима је непознат сабирак, умањеник, умањилац, чинилац и дељеник. -Ученицима дати материјал за рад.

Главни део (30 мин): Ученици самостално обрађују материјал допуњавајући празнине у тексту.

1. Маја је платила свеску и оловку укупно 70 динара. Колико кошта свеска, а колико оловка, ако је свеска за 16 динара скупља од оловке?

Решење:



Дужима смо „записали“ да је оловка за 16 дин. скупља од свеске.

Са слике закључујемо да је: 2x+16=70, одакле је $2x=$______, тј. $x=$_____

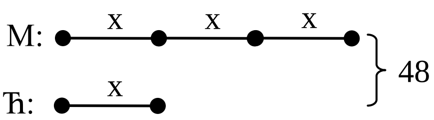
Цена оловке износи_____, а свеске____.

Провера:

Оловка и свеска коштају укупно _________________.

2. Мајка је 3 пута старија од ћерке, а заједно имају 48 година. Колико година има мајка, а колико ћерка?

Решење:



Методом дужи приказано је да је мајка 3 пута старија од ћерке.

Одговарајућа једначина је:____________,

одакле је $4x=$______ , тј. $x=$_________

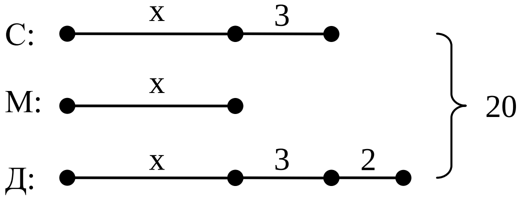
Ћерка има _____ година, а мајка _______ година.

Провера:

Мајка и ћерка имају укупно _____________________ година.

3. Сара је за месец дана прочитала 3 књиге више него Марија и 2 књиге мање него Душан. Укупно су сви прочитали 20 књига. Колико је прочитао свако од њих?

Решење:



Користећи слику можемо формирати једначину: _______________, одакле је $3x=$__________, тј. $x=$_________

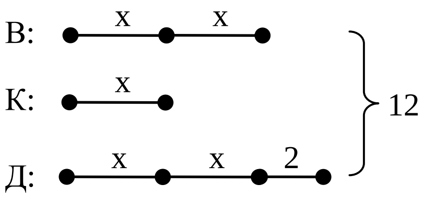
Марија је прочитала ______ књиге, Сара ________, а Душан ______ књига.

Провера:

Сара, Марија и Душан прочитали су укупно _______________________ књига.

4. Васа, Која и Драган појели су 12 поморанџи. Васа је појео 2 пута више него Која и 2 поморанџе мање од Драгана. Колико је појео свако од њих?

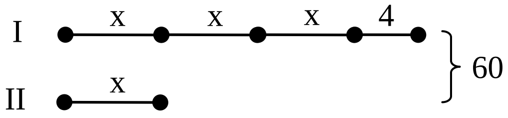
Решење:



Користећи методу дужи формираћемо једначину: ___________________, одакле је $5x=$________________, тј. $x=$________
Која је појео ______ поморанџе, Васа ________, а Драган ___________поморанџи.

Провера:
Која, Васа и Драган појели су укупно _______________________ поморанџи.

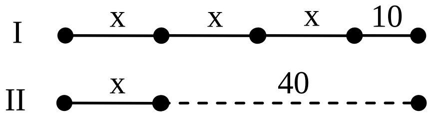
5. Збир два броја је 60, њихов количник је 3 и остатак 4. Који су то бројеви?
Решење:



Количник бројева (3) указује на то да је један број 3 пута већи од другог, а остатак (4) да је већи за још 4. То се може приказати дужима.
Са слике закључујемо да је одговарајућа једначина: _________________, одакле је $4x=$___________, тј. $x=$_________
Тражени бројеви су ______ и _____.

Провера:
Збир добијених бројева износи ________, количник _______, а остатак _______.

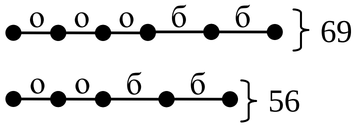
6. Разлика два броја је 40, њихов количник је 3 и остатак 10. Који су то бројеви?
Решење:



Одговарајућа једначина је:__________, одакле је $2x=$________, тј. $x=$______
Тражени бројеви су _________ и _______

Провера:
Разлика добијених бројева износи ______, количник ______, а остатак _______

7. Три оловке и две бојице коштају 69 динара, а две оловке и две бојице 56 динара. Колико кошта оловка, а колико бојица?
Решење:



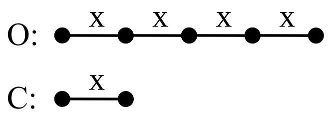
Цена оловке приказана је помоћу дужи *о* , а цена бојице помоћу дужи *б*.
Са слике уочавамо да цену једне оловке можемо израчунати ако од суме 69 одузмемо суму 56, те је цена оловке ___________ динара. Како 2 оловке и 2 бојице коштају 56 дин, закључујемо да 2 бојице коштају_________, односно једна бојица кошта _______дин.

Провера:
Три оловке и две бојице коштају ______________ динара, а две оловке и две бојице _______________ динара.

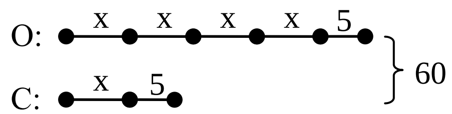
8. Отац и син сада имају заједно 60 година. Пре 5 година отац је био 4 пута старији од сина. Колико је сада година оцу, а колико сину?

Решење:

Пре пет година:



Сада:



На првој слици су приказане године оца и сина пре 5 година, када је отац био ____________ пута старији од сина. На другој слици су приказане садашње године оца и сина, када имају укупно _______________ година, одакле се може формирати једначина _________________________.

Решавањем једначине добићемо да је $5x =$ ______________, тј. $x =$ _________

Син има _______ година, а отац _____.

Провера:

Отац и син сада имају заједно _____________________ година.

9. Јован има 36 кликера: белих, жутих и плавих. Белих кликера има 2 пута више него жутих, а плавих колико белих и жутих заједно. Колико има белих, колико жутих, а колико плавих кликера?

Решење:

Б:

Ж:

П:

Као у претходним задацима, методом дужи прикажи однос белих, жутих и плавих кликера.

Одговарајућа једначина је: $6x = 36$

Решење једначине је $x =$ ___________

Јован има ____ жутих кликера, ______ белих и ___________ плавих.

Провера:

Укупан број кликера је __________________________.

10. У три бурета има 68 литара воде. Ако се у другом бурету налази 3 литра више него у првом, а у трећем два литра више него у другом, колико има воде у сваком бурету?

Решење:

I

II

III

Методом дужи прикажи однос количине воде у сва три бурета.

Одговарајућа једначина је:

$3x + 3 + 3 + 2 = 68$

Решавањем једначине добијамо да је $3x =$ ________________, тј. $x =$ _________

У првом бурету има _______ литара воде, у другом ________, а у трећем ___________ литара.

Провера:

У три бурета има укупно _______________________ литара воде.

11. Збир три узастопна броја је 2904. Одреди те бројеве.
Решење:

I

II

III

Методом дужи прикажи три узастопна природна броја (сваки следећи је за 1 већи од претходног).
Збир тражених бројева је 2904, одакле следи једначина: $3x+1+1+1=2904$
Решавањем једначине добијамо да је
$3x=$_____________, тј. $x=$________
Тражени бројеви су ________, _______ и ________.

Провера:
Збир добијених бројева је ____________________________.

12. У једном магацину било је за 108kg више јабука него у другом магацину. Колико је јабука било у сваком магацину, ако се зна да је у другом било 4 пута мање јабука него у првом?
Решење:

I

II

Методом дужи прикажи да је у првом магацину 4 пута више јабука него у другом.
Са слике закључујемо да је разлика између дужи једнака $3x$, а то је према услову задатка једнако _____kg,
одакле је $3x=108$, тј. $x=$_________
У другом магацину је ________ јабука, а у првом __________

Провера:
У првом магацину је за ______ kg више јабука него у другом, тј. ____пута више.

Завршни део (10 мин):

-У разговору, вођеном од стране наставника, ученици саопштавају и проверавају резултате, постављају питања и износе своје ставове.

- Домаћи задатак: *Математика: радна свеска за четврти разред основне школе*, страна 154, задатак 8; страна 157, задаци 17, 18; страна 159, задатак 3.

Прилог 5

Примери задатака решаваних на часовима експерименталне наставе

1. Које дужине могу бити странице квадрата да би вредност обима била мања од $18cm$?

2. Ако је a дужина странице, O вредност обима и P површина квадрата, попунити табелу.

a	2			8	
O		16			
P			25		81

3. За колико је страница квадрата површине $25cm^2$ мања од обима тог квадрата?

4.Одреди мерне бројеве обима и површине квадрата, код кога је мерни број странице највећи паран број прве десетице.

5. Одреди мерне бројеве обима и површине правоугаоника, код кога су мерни бројеви страница два највећа узастопна непарна броја прве десетице.

6. Колико ари има плац облика правоугаоника, чија је ширина $10m$, а дужина два пута већа од ширине?

7. Израчунати обим и површину правоугаоника, чија је дужина $13cm$, а ширина за $5cm$ мања од дужине.

8. Колико ари има њива облика правоугаоника, чији је обим $100m$, а дужина за $10m$ већа од ширине?

9. Израчунати обим квадрата, чија је површина једнака површини правоугаоника страница $9cm$ и $4cm$.

10. Израчунати површину квадрата, чији је обим два пута већи од обима правоугаоника страница $5cm$ и $4cm$.

11. Израчунати обим правоугаоника површине $243cm^2$, чија је дужина 3 пута већа од ширине.

12. Од свих правоугаоника површине $18cm^2$ пронаћи онај чији је обим највећи. (Мерни бројеви дужина страница су природни бројеви.)

13. Израчунати површину правоугаоника, чији је обим $42cm$, а збир две наспрамне странице $18cm$.

14. Од свих правоугаоника обима $14cm$ пронаћи онај чија је површина највећа. (Мерни бројеви дужина страница су природни бројеви.)

15. Израчунати обим и површину правоугаоника, код кога је збир две суседне странице $19cm$, а разлика $11cm$.

16. Испитати тачност следећих исказа:

а) Подударни правоугаоници имају једнаке површине.

б) Правоугаоници једнаких површина су подударни.

в) Правоугаоници једнаких обима имају једнаке површине.

г) Правоугаоници једнаких површина имају једнаке обиме.

д) Квадрати једнаких обима имају једнаке површине.

ђ) Квадрати једнаких површина имају једнаке обиме.

17. Правоугаоник дужине $132mm$ и ширине $76mm$ разрезати на што веће квадрате међу којима може бити једнаких.

18. Квадрат има површину $64cm^2$. За колико треба продужити две наспрамне странице квадрата тако да се добије правоугаоник површине $88cm^2$?

19. За колико треба смањити две наспрамне странице квадрата површине $81cm^2$ тако да се добије правоугаоник површине $63cm^2$?

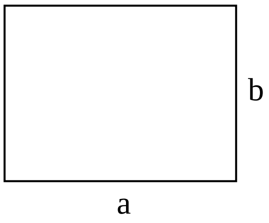
20. Зидне новине правоугаоног облика димензија $90cm \times 84cm$ треба облепити (без остатка и преклапања) највећим могућим сличицама квадратног облика и једнаких димензија. Одредити број потребних сличица и њихове димензије.

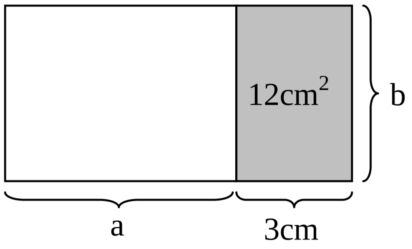
21. Сличицама димензија $8cm \times 6cm$ треба облепити зидне новине, које би биле квадратног облика и са утрошком најмањег могућег броја сличица. Одредити најмањи број потребних сличица и димензије добијених зидних новина.

22. Ако се дужина правоугаоника повећа за $3cm$, површина ће му се повећати за $12\,cm^2$. Колике су биле првобитне странице правоугаоника, ако се зна да им је разлика $1\,cm$?

Решење:

Нацртаћемо произвољан правоугаоник.



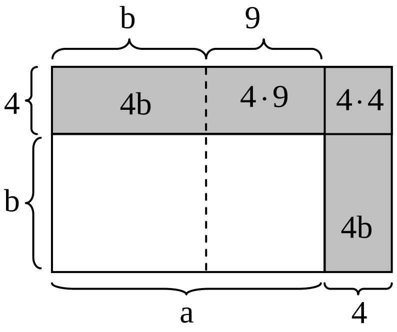


Да ли су у задатку познате странице правоугаоника?_______. Странице правоугаоника нису познате, па ћемо их на слици означити са a и b. Страницу a продужићемо за______. Тиме ће се површина правоугаоника повећати за_______. Осенчићемо део за који је повећан правоугаоник. Осенчени део је правоугаоник, чија површина износи________, једна страница износи______, а другу (b) можемо израчунати. Како је $3cm \cdot b = 12cm^2$, следи да је $b =$ ______, што је уједно и страница полазног правоугаоника. Странице a и b разликују се за________, одакле закључујемо да је $a =$ ______ или $a =$ ______.

23. Ако се сваки од два чиниоца неког производа повећа за 4, производ ће се повећати за 92. Разлика чинилаца је 9. Израчунати чиниоце.

Решење:

На слици је приказан правоугаоник са страницама a и b, при чему је a за 9 веће од b.



Повећањем чинилаца (страница) за 4 повећава се и производ (површина правоугаоника) за осенчени део, чија површина према условима задатка износи __________.

„Разрезивањем“ повећања површине (тј. осенченог дела) добићемо делове чија укупна површина износи 92. Са слике закључујемо да је: $4\cdot b+4\cdot b+4\cdot 9+4\cdot 4=92$

Решење једначине је $b=$____. Из услова задатка закључујемо да је $a=$______.

Провера: Производ бројева a и b износи ___________. Ако се чиниоци увећају за 5, онда производ износи ________. Дакле, производ је увећан за ____________.

24. Ако странице квадрата умањимо три пута, добиће се квадрат површине $16cm^2$. Израчунај обим полазног квадрата.

25. Колико пута треба смањити дужину странице квадрата да би се добио квадрат, чија је површина четири пута мања од површине полазног квадрата?

26. Ако се дужина правоугаоника смањи три пута, а ширина повећа три пута добиће се правоугаоник, код кога је (заокружи тачан исказ):

а) обим једнак обиму полазног правоугаоника

б) површина већа од површине полазног правоугаоника

в) површина једнака површини полазног правоугаоника

27. Ако се дужина правоугаоника смањи три пута, колико пута треба да се повећа ширина да би површина добијеног правоугаоника била два пута већа од површине полазног правоугаоника?

28. Заокружи тачне исказе:

а) Ако се страница квадрата повећа три пута, онда се површина повећа девет пута

б) Ако се обим квадрата повећа три пута, онда се површина повећа девет пута

в) Ако се страница квадрата повећа три пута, онда се обим повећа три пута

г) Ако се страница квадрата повећа три пута, онда се површина повећа три пута

29. Шта је веће: обим квадрата странице 2/7*cm* или обим квадрата странице 2/9*cm*?

30. Шта је веће: површина квадрата странице 5/7*cm* или површина квадрата странице 6/7*cm*?

31. Дужина странице мањег квадрата износи $\frac{1}{4}$ дужине странице већег квадрата. Колико пута је површина мањег квадрата мања од површине већег квадрата?

32. Израчунај обим квадрата, ако $\frac{2}{5}$ његове површине износи $40cm^2$.

33. Ширина правоугаоника је $5cm$. Ако дужину правоугаоника продужимо за његове $\frac{2}{3}$, површина ће се повећати за $30cm^2$. Израчунај обим полазног правоугаоника.

34. Израчунај обим квадрата, чија површина износи 3/8 површине правоугаоника димензија $12cm \times 2cm$.

35. Израчунај површину правоугаоника, ако 3/7 његове површине износи $42cm^2$.

36. Ако квадрат и правоугаоник имају једнаке површине, који од исказа је тачан?

а) 5/8 површине квадрата веће је од 5/7 површине правоугаоника

б) ¾ површине квадрата једнако је ¾ површине правоугаоника

в) 3/8 површине квадрата мање је од 5/8 површине правоугаоника

г) Ако се две наспрамне странице квадрата смање два пута и две наспрамне странице правоугаоника смање два пута, површине добијених правоугаоника су једнаке

37. Ако је површина квадрата шест пута већа од површине правоугаоника, који од исказа је тачан?

а) ¾ површине квадрата једнако је ¾ површине правоугаоника

б) 1/6 површине квадрата једнака је површини правоугаоника

в) 2/6 површине квадрата мање је од 5/6 површине правоугаоника

г) 2/3 површине квадрата једнако је 4 површине правоугаоника

38. Израчунај површину квадра, чије су све стране правоугаоници, а збир свих ивица $28cm$. (Мерни бројеви димензија су природни бројеви.)

39. Обими страна квадра износе $6cm$, $8cm$ и $10cm$. Израчунати површину квадра.

40. Израчунати дужине ивица квадра површине $56cm^2$, ако површине две наспрамне стране износе по $8cm^2$. (Мерни бројеви димензија су природни бројеви.)

41. Нацртати мрежу коцке, чија страна има обим $20mm$.

42. Израчунати збир свих ивица коцке, ако површина коцке износи $96cm^2$.

43. Две стране квадра су квадрати обима $12cm$, а укупна површина осталих страна је $60cm^2$. Израчунати дужине ивица квадра.

44. Две стране квадра су квадрати површине $4cm^2$, а обим једне стране $6cm$. Нацртати мрежу квадра.

45. Збир свих ивица квадра износи $20cm$, а две стране су квадрати површине $1cm^2$. Израчунати површину квадра.

46. Колико је пута површина коцке мања од површине квадра, код кога су две стране подударне са странама коцке, а четири ивице четири пута дуже од ивица коцке?

47. Две стране квадра су квадрати, чија укупна површина представља половину површине квадра. Израчунати површину квадра, ако је површина једне правоугаоне стране $8cm^2$.

48. Укупна површина две стране квадра, које су квадрати, представља петину површине квадра и износи $50cm^2$. Колика је површина једне правоугаоне стране квадра?

49.Ако је $a \cdot b = 15cm^2$, $a \cdot c = 6cm^2$, $b \cdot c = 10cm^2$, где су a, b и c дужине ивица квадра, израчунати површину квадра.

50.Ако је $a^2 = 10cm^2$, где је a дужина ивице коцке, израчунати површину коцке.

51.Аkо је $a+b+c=15cm$, где су a, b и c дужине ивица квадра, израчунати збир свих ивица квадра.

52. Ако се свака ивица коцке смањи три пута, колико је пута површина добијене коцке мања од површине полазне коцке?

53. Колико је сличица квадратног облика потребно да се облепи коцка (без остатка и преклапања), ако је површина сваке сличице девет пута мања од површине једне стране коцке?

54. Једна страна квадра, код кога су две стране квадрати, може се облепити са 15 сличица димензија $2cm \times 3cm$. Одредити дужине ивица квадра.

55. Колико пута је површина стране коцке мања од површине целе коцке?

56. За колико је површина коцке ивице $3cm$ већа од површине једне њене стране?

57. Ако је површина коцке K четири пута већа од површине коцке K_1, онда је (заокружи тачан исказ):

а) површина стране коцке K четири пута већа од површине стране коцке K_1

б) дужина ивице коцке K два пута већа од дужине ивице коцке K_1

в) обим стране коцке K два пута већи од обима стране коцке K_1

г) збир дужина свих ивица коцке K два пута већи од sбира ивица коцке K_1

58. Шта је веће: површина коцке ивице $4/9cm$ или површина коцке ивице $5/9cm$?

59. Формулисати геометријски задатак, који одговара задатку: Реши једначину $4 \cdot x^2 = 100$.

60. Којом се алгебарском формулацијом може описати однос између површине коцке (P) и површине једне њене стране (S)?

а) $6 \cdot S = P$; *б*) $P:6 = S$; *в*) $P \cdot S = 6$; *г*) $6 \cdot P = S$; *д*) $P = 6 + S$

61. Путник је првог дана прешао $\frac{2}{3}$ пута, а другог дана преосталих $80km$. Колика је дужина пута?

62. Радници сваки дан мече фасаду зграде, тако да је сваки следећи дан три пута више окречене површине у односу на претходни дан. Целу фасаду окречили су за 4 дана. За колико је дана било окречено 1/9 фасаде?

63. Здравко сваки дан једе јагоде, тако да сваки следећи дан поједе два пута више него претходни дан. Ако је четвртог дана појео 16 јагода, колико је појео другог дана?

64. Петар је прочитао једну шестину књиге, а затим још 30 страница. Испоставило се да је то чинило половину књиге. Колико страница има књига?

65. Збир два броја је 40, а разлика 10. Који су то бројеви?

66. Разлика два броја је 5. Ако један број повећамо 4 пута, а други 3 пута, њихова разлика ће тада бити 6. Који су то бројеви?

67. Три дужи имају укупну дужину $24cm$. Најдужа од њих је 3 пута дужа од најкраће, а најкраћа је 2 пута краћа од дужи средње по дужини. Колика је дужина сваке од њих?

68. У четири кутије налази се 41 бомбона. У првој кутији је 3 бомбоне више него у другој, а 14 мање него у трећој и четвртој кутији заједно, а које садрже једнак број бомбона. Колико се бомбона налази у свакој кутији?

Изјава о ауторству

Изјављујем да је докторска дисертација под насловом „Ефекти хоризонталне унутарпредметне интеграције у разредној настави математике“

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршила ауторска права и користила интелектуалну својину других лица.

У Београду, 2018.год. Аутор,

Мика Ракоњац

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада под насловом „Ефекти хоризонталне унутарпредметне интеграције у разредној настави математике“ истоветна електронској верзији, коју сам предала за објављивање на порталу Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду,   2018.год.   Аутор,

Мика Ракоњац

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом „Ефекти хоризонталне унутарпредметне интеграције у разредној настави математике“, која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предала сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, која је у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду, могу да користе сви који поштују одредбе садржане у типу лиценце *Ауторство – некомерцијално – без прераде* Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучила.

У Београду, 2018.год. Аутор,

Мика Ракоњац

Биографија аутора

Ракоњац (Милун) Мика рођена је 1972. год. у Новој Вароши, где је завршила основну школу и гимназију. Дипломирала је 1995. год. на Природно – математичком факултету Универзитета у Крагујевцу на смеру *теоријска математика и примене* са средњом оценом 8,2. Докторске академске студије на Учитељском факултету Универзитета у Београду уписала је први пут 2007. год, а други пут 2016. год. Положила је све испите предвиђене планом и програмом докторских студија за научну област *методика наставе математике*.

Радови:

1.Лазић, Б, Ракоњац, М.(2011): Избор и структурирање аритметичких задатака. *Норма,16* (1), 89-102.

2.Lipkovski, A, Rakonjac, M, Lazic, B. (2012). The connection of geometric and algebraic content in the sixth and seventh grade of primary school, In N. Brankovic (Eds.),*Theory and practice of connecting and integrating in teaching and learning process,* 137 – 157. Sombor: Pedagoški fakultet.

3.Ракоњац, М.(2013): Учење математичких појмова. *Норма*, XVIII,2/2013, 305-316, Сомбор: Педагошки факултет.

4. Ракоњац, М. (2016): Ефекти геометријског моделовања алгебарских проблема у разредној настави, *Зборник радова Учитељског факултета у Ужицу, XIX*(18), стр. 167-178.

5. Ракоњац, М. (2017): Ефекат геометријске репрезентације особина релације једнакости на успешност решавања једначина у млађим разредима, *Настава математике,* LXII2-3, стр. 21-28, Друштво математичара Србије.

6. Ракоњац, М. (2018): Утицај испитивања функционалне зависности између величина на успешност у решавању математичких проблема , *Зборник радова Учитељског факултета у Ужицу,* у штампи

7. Ракоњац, М. (2018): Значај повезивања алгебарских и геометријских садржаја у почетној настави математике, саопштење на Научном скупу *Савремени приступи у професионалном развоју и раду васпитача и учитеља,* зборник резимеа, Учитељски факултет, Београд