UNIVERZITET U NOVOM SADU
**FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA**

Danijela Karaklić

# Prostori sa fazi rastojanjem i primena u obradi slike

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2019

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

## КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

| | |
|---|---|
| Редни број, **РБР**: | |
| Идентификациони број, **ИБР**: | |
| Тип документације, **ТД**: | Монографска документација |
| Тип записа, **ТЗ**: | Текстуални штампани материјал |
| Врста рада, **ВР**: | Докторска дисертација |
| Аутор, **АУ**: | Данијела Караклић |
| Ментор, **МН**: | Проф. др Небојша Ралевић, проф. др Љиљана Гајић |
| Наслов рада, **НР**: | Простори са фази растојањем и примена у обради слике |
| Језик публикације, **ЈП**: | Српски |
| Језик извода, **ЈИ**: | Српски, Енглески |
| Земља публиковања, **ЗП**: | Република Србија |
| Уже географско подручје, **УГП**: | Војводина |
| Година, **ГО**: | 2019 |
| Издавач, **ИЗ**: | Ауторски репринт |
| Место и адреса, **МА**: | Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6 |
| Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога) | 5/98/51/0/8/1/0 |
| Научна област, **НО**: | Примењена математика |
| Научна дисциплина, **НД**: | Фази математика, Теорија непокретне тачке |
| Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**: | Вероватносни метрички простори, контракција, фази филтрирање, функција растојања |
| **УДК** | |
| Чува се, **ЧУ**: | Библиотека Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад |
| Важна напомена, **ВН**: | |
| Извод, **ИЗ**: | Мерење квалитета слике коришћењем индекса за квалитет слике, не мора да одражава и практични квалитет слике, односно није базиран на HVS (Human visual system) моделу. Формирање разматраних функција, које се користе у алгоритму филтрирања за одређивање растојања међу пикселима, може се вршити на различите начине, што се може видети у радовима из области филтрирања слике, даје широк спектар могућности да се испита утицај фази растојања нпр. фази Т-метрике или фази S-метрике могу имати на сам процес филтрирања слике. Циљ је побољшање квалитета слике у односу на медијански филтер. У оквиру теоријских разматрања простора са фази растојањем добијени су и резултати из теорије непокретне тачке који пружају могућност даље примене ових простора у техници. |
| Датум прихватања теме, **ДП**: | |
| Датум одбране, **ДО**: | |

| Чланови комисије, **КО**: | | | |
|---|---|---|---|
| | Председник: | др Мила Стојаковић, редовни професор | |
| | Члан: | др Дејан Илић, редовни професор | |
| | Члан: | др Татјана Дошеновић, редовни професор | |
| | Члан: | | Потпис ментора |
| | Члан, ментор: | др Љиљана Гајић, редовни професор | |
| | Члан, ментор: | др Небојша Ралевић, редовни професор | |

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

## КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

| | | |
|---|---|---|
| Accession number, **ANO**: | | |
| Identification number, **INO**: | | |
| Document type, **DT**: | Monographic publication | |
| Type of record, **TR**: | Textual printed material | |
| Contents code, **CC**: | PhD thesis | |
| Author, **AU**: | Danijela Karaklić | |
| Mentor, **MN**: | Professor Nebojša Ralević, PhD, Professor Ljiljana Gajić, PhD | |
| Title, **TI**: | Spaces with fuzzy distances and application in image processing | |
| Language of text, **LT**: | Serbian | |
| Language of abstract, **LA**: | Serbian, English | |
| Country of publication, **CP**: | Republic of Serbia | |
| Locality of publication, **LP**: | Province of Vojvodina | |
| Publication year, **PY**: | 2019 | |
| Publisher, **PB**: | Author's reprint | |
| Publication place, **PP**: | Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6 | |
| Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes) | 5/98/51/0/8/1/0 | |
| Scientific field, **SF**: | Applied Mathematics | |
| Scientific discipline, **SD**: | Fuzzy Mathematics, Fixed point theory | |
| Subject/Key words, **S/KW**: | Distance function, contraction mapping, fuzzy filtering, probabilistic metric space | |
| **UC** | | |
| Holding data, **HD**: | Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad | |
| Note, **N**: | | |
| Abstract, **AB**: | Measuring the image quality using a given image quality index does not necessarily reflect the practical quality of the image, that is, it is not based on the HVS (Human Visual System) model. The formation of given functions, which are used in the filtering algorithm for determining the distance between the pixels, can be done in different ways, which can be seen in works in the field of image filtering, provides a wide range of possibilities to examine the effect of fuzzy distance, for example, of the fuzzy T-metric or the fuzzy S-metric can have on the image filtering process itself. The goal is to improve image quality in relation to a vector median filter. Within the theoretical considerations of space with fuzzy distance, results from the fixed point theory have been obtained which provide the possibility of further application of these spaces in the technique. | |
| Accepted by the Scientific Board on, **ASB**: | | |
| Defended on, **DE**: | | |
| Defended Board, **DB**: President: | Mila Stojaković, PhD, full professor | |
| Member: | Dejan Ilić, PhD, full professor | |
| Member: | Tatjana Došenović, PhD, full professor | |
| Member: | | Menthor's sign |
| Member, Mentor: | Ljiljana Gajić, PhD, full professor | |
| Member, Mentor: | Nebojša Ralević, PhD, full professor | |

Obrazac **Q2.HA.06-05-** Izdanje 1

# Zahvalnica

*Suprugu i sinu*

*se zahvaljujem na pruženom strpljenju i razumevanju.*
*Roditeljima, sestri i bratu se zahvaljujem na beskonačnoj podršci i rečima ohrabrenja.*

*Srednjoškolskom profesoru Maksimu Lekiću se zahvaljuem na upoznavanju sa neverovatnim svetom matematike.*

*Zahvaljujem se profesoru Nebojši Raleviću i profesorki Ljiljani Gajić na dugogodišnjoj podršci.*

*Ministarstvo prosvete, nauke i tehnolosškog razvoja Vlade Republike Srbije, u okviru projekta finansijski je podržalo ovo istraživanje.*

# Predgovor

U ovoj tezi je izložena problematika konstruisanja preslikavanja koja se mogu koristiti u algoritmu za filtriranje slike. Uporedo sa tim posmatrani su i odgovarajući prostori, ispitivanje njihove osobine i u njima razvijana teorija nepokretne tačke koja je jedna od najznačajnijih oblasti moderne matematike i predstavlja mešavinu analize, topologije i geometrije. Na sledeći način je disertacija izložena po glavama:

- Operacije na $[0,1]$;
- Fazi skupovi;
- Verovatnosni metrički prostori i uopštenja;
- Fazi prostori;
- Filtriranje.

Prva glava je uvodna i u njoj su navedeni pojmovi, $t-$normi, $t-$konormi, agregacije i njihove osobine koje su neophodne za dokazivanje teorema iz glave 4., koje su originalni doprinosi rada. Posebno mesto u ovoj glavi zauzimaju fazi komplementi, kao klasa veoma važnih preslikavanja u teoriji fazi skupova. U ovom odeljku, teoreme i definicije su iz [21], [22].

U drugoj glavi izložena je teorija fazi skupova. Još 1964. godine Zadeh [51] je uveo pojam rasplinutog, fazi (fuzzy) skupa za koji pripadnost nije određena samo vrednostima 0 (ne pripada) i 1 (pripada) nego sa nekim brojem iz intervala $[0,1]$ koji pokazuje stepen pripadnosti. U drugom poglavlju ove glave razmatran je pojam rastojanja nad apstraktnim nepraznim skupom $X$. U klasičnom smislu rastojanje dva objekta definiše se pomoću funkcije $d : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$ koja zadovoljava neke uslove, tj. ima neke lepe osobine. U zavisnosti od tih osobina su dobile različita imena: metrika, pseudometrika, semi-metrika, kvazi-metrika, sličnost itd. Međutim, rastojanje, udaljenost između dva objekta ne mora biti nenegativan broj nego to, na primer, može da bude i fazi skup, o čemu će biti rečiu sledećoj glavi.

Treća glava posvećena je verovatnosnim metričkim prostorima i njihovoj generalizaciji. U prvom poglavlju dat je pregled razvoja pojma statističkih metričkih prostora, koje danas nazivamo verovatnosnim metričkim prostorima. Ovaj pojam uveo je Karl Menger, u radu [29] iz 1942. godine. Posle kritičkih radova A. Walda [46, 47, 48], Menger je korigovao svoju definiciju i tako su nastali Mengerovi verovatnosni metrički prostori, ili kraće Mengerovi prostori, kakve mi danas poznajemo. U svojim kasnijim radovima on je nastavio sa razvojem ove teorije i njegove primene, na šta su se uspešno nadovezali radovi B. Schweizer-a i A. Sklar-a [37]. Šezdesetih godina prošlog veka radovima [39, 40] započeo je razvoj teorije nepokretne tačke u Mengerovim prostorima i od tada se uspešno razvija [18, 32]. Nastoji se da se i u Mengerovim prostorima dokažu analogoni teorema nepokretne tačke u klasičnim metričkim prostorima koje su izložene i u [19]. U drugom poglavlju ove glave uvedena je nova klasa verovatnosnih metričkih prostora koja je nazvana jakim verovatnosnim metričkim prostorima [12]. Ispitivane su pre svega osobine ovih prostora, a zatim pokazano da je ta struktura, iako slabija od strukture Mengerovih prostora, dovoljno bogata da se u njoj razvija teorija nepokretne tačke. Tako je pre svega dokazana verovatnosna verzija Banahovog principa kontrakcije, a zatim i odgovarajući rezultati za Ćirićevu kvazi-kontrakciju. Ovi rezultati su originalni i dokazani su u radu [20]. U ovom delu dokazan je još jedan originalan rezultat, koji je uopštenje rezultata iz [18], a to je teorema o nepokretnoj tački Sehgal-Gusemanovog tipa.

Četvrta glava sadrži teoriju fazi metričkih prostora i prostora sa fazi rastojanjem koji su zapravo generalizacija fazi metričkih prostora. Kramosil i Michalek su 1975. godine proširili koncept Mengerovih verovatnosnih metričkih prostora i time prvi definisali pojam fazi metričkog prostora. Ovaj pristup je privukao veliku pažnju kako matematičara teoretičara, tako i inženjera u raznim oblastima tehnike. Prvobitna definicija doživela je i različite izmene [1], sve u cilju što šire primene. Tako su u drugom poglavlju razmatrana rastojanja koja su fazi $T-$metrike i fazi $S-$metrike [34]. Dokazana je teorema o dualnosti tih fazi metričkih prostora u odnosu na fazi komplement i veza među njima. Navedeno je nekoliko primera fazi $T-$metrika i fazi $S-$metrika, koje će kasnije biti iskorišćene u primenama. Predstavljen je način na koji se od fazi $T-$metrika i fazi $S-$ metrika može generisati standardna metrika. Pokazan je postupak kako se iz više fazi $T-$metrika u odnosu na istu normu može definisati nova fazi $T-$metrika. Dokazano je i analogno tvrdjenje za fazi $S-$metriku. Ovi rezultati su originalni i obrađeni su [34].

Treće i poslednje poglavlje posvećeno je prostorima sa fazi rastojanjem, koje je generalizacija fazi metrike. Naime, korišćenje fazi metrika u tehnici delom je ograničeno relativno malim brojem poznatih fazi metrika. Fazi rastojanja su šira klasa funkcija, jednostavnija za proveru, a takođe daju lepe rezultate u primeni. Koristeći vezu ovih novodobijenih prostora sa jakim verovatnosnim metričkim prostorima dobijeni su odgovarajući rezultati iz teorije nepokretne tačke sada u fazi konceptu.

U poslednjoj petoj glavi su data objašnjenja vezana za filtriranje šuma na slici i načina formiranja fazi $T-$metrike koja će biti korišćena pri filtriranju slike. Razmatrane su konkretne fazi $T-$metrike koje se koriste pri filtriranju. Dati su i konkretni indeksi kvaliteta slike filtrirane metodom za filtriranje predstavljene u ovom radu i medijanskim filterom. Poređenjem ovih indeksa kvaliteta, napravljen je zaključak o učinku ovih algoritama. Cilj rada je modifikovati algoritam za filtriranje slika, prikazan u [16] koristeći definisanu fazi $T-$ metriku, koja ima neke predefinisane karakteristike. Svojstva definisanih fazi $T-$ metrika, koje se koriste u uklanjanje šuma slike, su prikazani u drugom poglavlju četvrte glave [34]. Do razvoja fazi filtera je došlo zbog tendencije da se na slici razlikuju informacije o šumu od informacija o ivicama na slici.

# Abstract

In this thesis the problem of constructing mappings that could be used in image filtering algorithms is exposed. Along with that, corresponding spaces were observed, their characteristics were examined and in them was evolving fixed point theory which stands for very important field of modern mathematics and represents the mixture of analysis, topology and geometry. Organization of the paper is given in next order:

- Operations on $[0, 1]$;
- Fuzzy sets;
- Probabilistic metric spaces and generalizations;
- Fuzzy spaces;
- Filtering.

The first chapter is introductory and contains the terms, $t-$ norm, $t-$ conorms, aggregations, and their properties that are necessary for proving theorems from chapter 4., that are original contributions of the paper. Special place in this chapter take fuzzy complement, as a class of very important mappings in theory of fuzzy sets. In this section, theorems and definitions are from [21], [22].

In second chapter is presented theory of fuzzy sets. In 1964. Zadeh [51] introduced the notion of scattered, fuzzy set for which membership function isn't determined only by values 0 (doesn't belong) and 1 (belongs), but any number from interval $[0, 1]$ could show the degree of belonging. In the second section of this chapter the notion of distance over nonempty abstract set $X$. In classical sence distance between two objects is defined by function $d : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$ that satisfies some conditions, ie. it has some desirable properties. Depending on those properties, they got different names: metrics, pseudometrics, semi-metrics, quasy-metrics, similarities etc. However, distance between two objects needn't be a non-negative number, it could be, for example, some fuzzy set, which will be discussed in next chapter.

Third chapter is devoted to probabilistic metric spaces and their generalization. In first section is given development of paradigm of statistical metric spaces, which are today known as probabilistic metric spaces. This term was introduced by Karl Menger, in the work of [29] from 1942. After critical papers A. Walda [46, 47, 48], Menger corrected his definition and that is how the Menger probabilistic metric spaces formed, or shorter Menger's spaces, as we now them today. In his later works he continued with development of this theory and its application, on what papers of B. Schweizer and A. Sklar [37] successfully concatenated. In the sixties of last century, papers [39, 40] started development of fixed point theory in Menger's spaces and since then it continued to evolve successfully [18, 32]. There has been a tendency to prove theorems in Menger's spaces that would be analoguous to the theorems of fixed point theory, which could be found in [19]. In the second section of this chapter was introduced new class of probabilistic metric spaces [12]. The characteristics of these spaces were examined, it is shown that this structure, even though weaker than structure Menger's spaces, rich enough to develop fixed point theory in it. So first of all, there was proven probabilistic version of Banach principle of contraction, and after that corresponding results for Ćirić's quasy contraction. These results are original and are proven in paper [20]. In this section is proven another original result, which is the generalization of results from [18], and that is the theorem of fixed point of Sehgal-Guseman's type.

The fourth chapter contains the theory of fuzzy metric spaces and spaces with fuzzy distance that are actually generalization of fuzzy metric spaces. Kramosil and Michalek in 1975. extended the concept of Menger's probabilistic metric spaces and by doing that, for the first time they defined the notion of fuzzy metric space. This approach has attracted great attention not just to theoretical mathematicians, also to engineers in various fileds of engineering. The original definition has expirienced various of changes [1], in order to have wider application. Therefore in second section were considered distances that were fuzzy $T-$metrics and fuzzy $S-$metrics [34]. The theorem of duality of those fuzzy metric spaces regarding fuzzy complement is proven. Also, the connection between them was observed and proven. Examples of few fuzzy $S-$metrics fuzzy and $T-$metrics are introduced. Some of those examples will be later used in applications. The means in which from fuzzy $T-$metrics and fuzzy $S-$ metrics a standard metric could be generated is represented. The means of generating one fuzzy $T-$metric from a few fuzzy $T-$metrics is shown. Analoguos theorem for fuzzy $S-$metric is proven. These results are original and were processed in [34]. Third and the last section is devoted to spaces with fuzzy distance, which is the generalization of fuzzy metric. The application of fuzzy metrics is partially bounded by a relatively small number of fuzzy metrics. Fuzzy distances are wider class of functions, easier to check, and they give good results in application. Using connection of these new spaces with strong probabilistic metric spaces, there were obtained corresponding results from the fixed point theory only now in fuzzy concept.

In the last, fifth chapter were given explanations related to image noise filtering and the means of creating fuzzy $T-$metric that will be applied during image filtering. There were considered concrete fuzzy $T-$metric that were applied during filtering. There were given concrete indices of image quality of image filtered by the method presented in thid paper. By comparing these quality indices, there was made a conclusion about the impact of these algorithms. Modification of algorithm for the filtering of images, that is introduced in [16], is the main purpose of the paper. That is achieved by using defined fuzzy $T-$metric, that has some characteristics predefined. Properties of defined fuzzy $T-$ metric, utilized in noise image removal, are shown in second section of fourth chapter [34]. Tendency to distinguish information about noise from information about edges in image led to development of fuzzy filtering.

# Sadržaj

# Glava 1

# Operacije na $[0, 1]$

U ovoj glavi su predstavljene neke operacije čiji su operandi realni brojevi iz intervala $[0, 1]$, kao što su binarne operacije $t$-norme i $t$-konorme, unarna operacija fazi komplement i $n-$arna operacija agregacije. Ove operacije se koriste u različitim kontekstima. Jedna od njihovih glavnih primena je u definisanju operacija sa fazi skupovima. Stoga se u tom kontekstu često i nazivaju fazi operacije.

## 1.1 Norme

Među prvima koji su uveli pojam trougaone norme, u opštoj formi, je bio austrijski (američki) matematičar Karl Menger [29] sa ciljem da se generalizuje nejednakost trougla kod metričkih prostora. Sadašnji pojam $t$-norme i dualne operacije $t$-konorme je rezultat istraživanja Schveizer-a i Sklar-a [38], koji su dodali osobine asocijativnosti i neutralnog elementa. Primenjuju se i u verovatnosnim metričkim prostorima, teoriji fazi skupova, fazi logici, neaditivnim merama i integralima, itd. Za više detalja pogledati [4], [8], [10], [21], [22], [25], [27] [36], [43], [38], [37], [50].

U ovom poglavlju će biti predstavljeni pojmovi triangularne norme i konorme i neke njihove osobine.

**Definicija 1.1.1** *[22] Triangularna norma (kraće $t-$norma) $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ je binarna operacija koja zadovoljava sledeće aksiome za svako $a_1, a_2, a_3, b_1 \in [0, 1]$:*

1. *$T(a_1, 1) = a_1$ (granični uslov);*

2. $a_2 \leq b_1 \Rightarrow T(a_1, a_2) \leq T(a_1, b_1)$ *(monotonost);*

3. $T(a_1, a_2) = T(a_2, a_1)$ *(komutativnost);*

4. $T(a_1, T(a_2, a_3)) = T(T(a_1, a_2), a_3)$ *(asocijativnost).*

*Arhimedova $t-$norma je $t-$norma za koju su osim prethodnih aksioma validne još dve aksiome:*

5. *neprekidno je preslikavanje*

6. $\forall a_1 \in (0, 1),\ T(a_1, a_1) < a_1$ *(subidempotentnost).*

**Napomena 1.1.1** *Za proizvoljnu $t-$normu $T$, iz njene monotonosti i graničnog uslova je $a_1 \leq 1 \Rightarrow T\,(a_1, a_1) \leq T\,(a_1, 1) = a_1$, tj. važi*

$$(\forall a_1 \in [0, 1])\ T(a_1, a_1) \leq a_1.$$

**Napomena 1.1.2** *Iz uslova datih u definiciji $t-$norme sledi monotonost po koordinatama, tj. za sve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$ važi*

$$x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \Rightarrow T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2).$$

*Zamenom datog uslova sa aksiomom monotonosti u definiciji $t-$norme, dobija se ekvivalentna definicija $t-$norme.*

Ako u definiciji $t-$norme, umesto aksiome monotonosti važi striktna monotonost, tj.

$$x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \Rightarrow T(x_1, y_1) < T(x_2, y_2),$$

za sve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$, kažemo da je $t-$norma *striktna.*

Može se pokazati da je 0 *anihilator* za $t-$normu, tj. za svako $a_1 \in [0, 1]$ važi

$$T(a_1, 0) = T(0, a_1) = 0.$$

**Definicija 1.1.2** *[22] Stepen $t-$norme je dat sa:*
$T^1(a_1, a_2) = T(a_1, a_2), \quad T^n(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) = T(T^{n-1}(a_1, ..., a_n), a_{n+1}).$

**Napomena 1.1.3** *Zbog asocijativnosti je*
$T^n(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) = T(a_1, T^{n-1}(a_2, ..., a_n, a_{n-1})).$

**Lema 1.1.1** *[34] Za stepen* $t-$*norme važi:*

$$T^{n-1}(a_1,...,a_n)=T^{n-1}(a_{i_1},...,a_{i_n}),$$

*gde je* $a_{i_1},...,a_{i_n}$ *proizvoljna permutacija elemenata* $a_1$, ..., $a_n$.

**Napomena 1.1.4** *Ako je* $T-$ $t-$*norma, tada je:*

$$T(a_1,a_2)=1 \Leftrightarrow\ a_1=a_2=1,$$

$$T^n(a_1,a_2,...,a_{n+1})=1 \Leftrightarrow\ a_1=...=a_{n+1}=1.$$

*Zaista,* $a_1\le 1\Rightarrow 1=T(a_1,a_2)\le T(1,a_2)=a_2$ *i* $a_2\le 1\Rightarrow 1=T(a_1,a_2)\le T(a_1,1)=a_1$ *, tj.* $a_1=a_2=1$.
*Obrnuto sledi direktno iz aksiome graničnog uslova, tj.* $T(a_1,a_2)=T(1,1)=1$.

*Dokaz za* $T^n$ *je indukcijom.*

**Definicija 1.1.3** *[22] Funkcija* $f(a_1,...,a_n)$ *je striktna ako važi:*

$$a_1<b_1\wedge...\wedge a_n<b_n\Rightarrow\ f(a_1,...,a_n)<f(b_1,...,b_n).$$

**Lema 1.1.2** *[34] Ako je* $T$ *striktna triangularna norma, tada je i* $T^n$ *striktno rastuća funkcija.*

**Napomena 1.1.5** *Ako je* $T-$*striktna* $t-$*norma, tada je:*

$$T(a_1,a_2)=0\Leftrightarrow\ a_1=0\vee a_2=0,$$

$$T^n(a_1,a_2,...,a_{n+1})=0\Leftrightarrow\ a_1=0\vee...\vee a_{n+1}=0.$$

*Pretpostavimo suprotno, da iz* $T(a_1,a_2)=0$ *sledi* $\neg(a_1=0\vee a_2=0)\Leftrightarrow a_1>0\wedge a_2>0$. *No, tada iz striktne monotonije imamo* $0<a_1\wedge 0<a_2\Rightarrow T(0,0)<T(a_1,a_2)=0$, *što je kontradikcija.*

*Obrnuto sledi jer je 0 anihilator za* $t-$*normu.*

*Dokaz za* $T^n$ *je indukcijom.*

**Definicija 1.1.4** *[22]* $T$ *je idempotentna t-norma ako i samo ako važi* $T(a_1,a_1)=a_1$..

**Teorema 1.1.1** *[22] Jedina idempotentna t-norma je standardni fazi presek* min.

Lako je verifikovati da je min $t-$norma. Kako je $\min(a_1, a_1) = a_1$ za svako $a_1 \in [0,1]$ ona je i idempotentna. Pretpostavimo da postoji još neka idempotentna $t-$norma $T$.

Za $a_1, a_2 \in [0,1]$, $a_1 \leq a_2$ iz monotonije i graničnog uslova, kao i idempotentnosti od $T$, sledi

$$a_1 = T(a_1, a_1) \leq T(a_1, a_2) \leq T(a_1, 1) = a_1,$$

tj. $T(a_1, a_2) = a_1 = \min(a_1, a_2)$. Analogno za $a_2 \leq a_1$, sledi

$$a_2 = T(a_2, a_2) \leq T(a_1, a_2) \leq T(1, a_2) = a_2,$$

tj. $T(a_1, a_2) = a_2 = \min(a_1, a_2)$.

Stoga je, $T(a_1, a_2) = \min(a_1, a_2)$, za svako $a_1, a_2 \in [0,1]$. □

**Definicija 1.1.5** *[22] Opadajući generator $g$ je funkcija koja preslikava interval $[0,1]$ u $\mathbb{R}$, koja ima osobine da je strogo opadajuća, neprekidna i zadovoljava uslov $g(1) = 0$. Pseudo-inverzna funkcija za opadajući generator $g$, u oznaci $g^{(-1)}$, je funkcija iz $\mathbb{R}$ u $[0,1]$ definisana sa*

$$g^{(-1)}(a_1) = \begin{cases} 1, & a \in (-\infty, 0) \\ g^{-1}(a_1), & a_1 \in [0, g(0)] \\ 0, & a_1 \in (g(0), +\infty) \end{cases},$$

*gde je sa $g^{-1}$ definisano uobičajeno inverzno preslikavanje za $g$.*

Za opadajući generator $g$ i njegovu pseudo-inverznu funkciju $g^{(-1)}$, važe jednakosti $g^{(-1)}(g(a_1)) = a_1$, za svako $a_1 \in [0,1]$ i

$$g(g^{(-1)}(a_1)) = \begin{cases} 0, & a_1 \in (-\infty, 0) \\ a_1, & a_1 \in [0, g(0)] \\ g(0), & a_1 \in (g(0), +\infty) \end{cases}.$$

**Teorema 1.1.2** *[[22]] Arhimedova t-norma je preslikavanje iz $[0,1]^2$ u $[0,1]$ (u oznaci $T : [0,1]^2 \to [0,1]$)za koje postoji opadajući generator $g$ tako da važi*

$$T(a_1, a_2) = g^{(-1)}(g(a_1) + g(a_2)), \quad a_1, a_2 \in [0,1].$$

**Primer 1.1.1** *Triangularne norme koje se najčešće koriste su:*

1. *Standardni presek: $T_M(a_1, a_2) = \min(a_1, a_2)$;*

2. *Algebarski proizvod:* $T_P(a_1, a_2) = a_1 a_2$;

3. *Lukašievičeva* $t-$*norma:* $T_L(a_1, a_2) = \max(a_1 + a_2 - 1, 0)$;

4. *Drastični presek:* $T_D(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1, & a_2 = 1 \\ a_2, & a_1 = 1 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$.

**Teorema 1.1.3** *[22] Neka su* $T_M$*,* $T_P$*,* $T_O$ *i* $T_D$ *t-norme definisane u primeru 1.1.1. Tada je:*

*1)* $T_D \leq T_O \leq T_P \leq T_M$,

*2) Ako je t-norma* $T$ *Arhimedovska, važi da je*

$$T_D \leq T \leq T_M.$$

b) Monotonost i granični uslov daju $T(a_1, a_2) \leq T(a_1, 1) = a_1$. Zbog komutativnosti je $T(a_1, a_2) = T(a_2, a_1) \leq T(a_2, 1) = a_2$. Tako dobijamo $T(a_1, a_2) \leq \min(a_1, a_2)$.

Ako je $a_1 = 1$, tada je $T_D(a_1, a_2) = a_2 = T(a_1, a_2)$, dok za $a_2 = 1$ važi $T_D(a_1, a_2) = a_1 = T(a_1, a_2)$, što sledi iz definicije norme $T_D$ i graničnog uslova za $T$.

Ukoliko je $a_1 \neq 1$ i $a_2 \neq 1$, tj. $a_1, a_2 \in [0, 1)$, tada je $T_D(a_1, a_2) = 0$. Za proizvoljnu $t-$normu $T$ je $1 \geq T(a_1, a_2) \geq 0$, tj. $T(a_1, a_2) \geq T_D(a_1, a_2)$. □

.

Važi teorema o reprezentaciji neprekidne $t-$norme kao ordinalne sume [21]:

**Teorema 1.1.4** *[21]Preslikavanje* $T$ *koje je* $t-$*norma je neprekidna ako i samo ako je* $T$ *ordinalna suma neprekidnih arhimedovskih* $t-$*normi, tj. postoji jedinstvena po parovima disjunktna prebrojiva familija* $\{(a_j, b_j)\}_{j \in J}$ *otvorenih podintervala intervala* $[0, 1]$ *i jedinstvena familija neprekidnih arhimedovskih* $t-$*normi* $\{T_j\}_{j \in J}$ *takva da je* $T$ *ordinalna suma od* $\{(a_j, b_j), S_j\}_{j \in J}$*, tj.*

$$T(x, y) = \begin{cases} a_j + (b_j - a_j) T_j\left(\frac{x - a_j}{b_j - a_j}, \frac{y - a_j}{b_j - a_j}\right), & x, y \in (a_j, b_j) \\ \min(x, y), & \textit{inače} \end{cases}.$$

Navešćemo neke važnije $t$-norme, koje se primenjuju u velikoj meri u različitim inženjerskim oblastima. .

**Primer 1.1.2** *[22] Schweizer-Sklar familija t-normi*

$$T_{SS,p}(x,y)=\max(0,x^p+y^p-1)^{\frac{1}{p}}$$

*je familija Arhimedovskih t-normi, za sve* $p\neq 0$. *Opadajući generatori su* $f_p(a_1)=1-a_1^p,\quad a_1\in[0,1]$, *Za* $p\to 0$ *dobija se* $T_P$ *norma, za* $p=1$ *se dobija* $T_O$ *norma, za* $p\to\infty$ *se dobija* $T_D$ *norma, za* $p\to-\infty$ *se dobija* $T_M$ *norma, a za* $p=-1$ *norma* $T(a_1,a_2)=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2-a_1a_2}$.

**Primer 1.1.3** *[22] Yagerova familija (1980):*

$$T_{Y,\omega}(a_1,a_2)=1-\min\left(1,((1-a_1)^\omega+(1-a_2)^\omega)^{\frac{1}{\omega}}\right),$$

*za svako* $\omega\in(0,\infty)$ *je familija Arhimedovskih t-normi, čiji su opadajući generatori* $f_\omega(a_1)=(1-a_1)^\omega,\ \ a_1\in[0,1]$. *Za* $\omega\to 0$ *dobija se* $T_D$ *norma, za* $\omega=1$ *se dobija* $T_O$ *norma, za* $\omega\to-\infty$ *se dobija* $T_M$ *norma.*

**Primer 1.1.4** *[22] Hamacher-ova familija (1978):*

$$T_{H,r}(a_1,a_2)=\frac{a_1a_2}{r+(1-r)(a_1+a_2-a_1a_2)},$$

*za svako* $r>0$ *je familija Arhimedovskih t-normi, čiji su opadajući generatori* $f_r:[0,1]\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $f_r(a_1)=\begin{cases}\infty & ,\ \ x=0\\ -\ln\frac{a_1}{r+(1-r)a_1} & ,\ \ a_1\in(0,1]\end{cases}$ *Za* $r\to 0$ *dobija se t-norma* $T(a_1,a_2)=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2-a_1a_2}$, *za* $r=1$ *se dobija* $T_P$ *norma, za* $r\to\infty$ *se dobija* $T_D$ *norma.*

**Primer 1.1.5** *[22] Frank-ova familija (1979):*

$$T_{F,s}(a_1,a_2)=\log_s\left(1+\frac{(s^{a_1}-1)(s^{a_2}-1)}{s-1}\right),$$

*za svako* $s>0,\ s\neq 1$ *je familija Arhimedovskih t-normi, čiji su opadajući generatori* $f_s:[0,1]\to\mathbb{R}\cup\{\infty\},\ f_s(a_1)=\begin{cases}\infty & ,\ \ a_1=0\\ -\ln\frac{s^{a_1}-1}{s-1} & ,\ \ a_1\in(0,1]\end{cases}$. *Za* $s\to 0$ *dobija se* $T_M$ *norma, za* $s\to 1$ *se dobija* $T_P$ *norma, za* $s\to-\infty$ *ili* $s\to\infty$ *se dobija* $T_O$ *norma.*

**Definicija 1.1.6** *[22] Triangularna konorma (kraće* $t-$*konorma) je binarna operacija* $S:[0,1]^2\to[0,1]$ *koja zadovoljava sledeće aksiome za sve* $a_1,a_2,a_3,b_1\in[0,1]$*:*

1. $S(a_1, 0) = a_1$ *(granični uslov);*
2. $a_2 \leq b_1 \Rightarrow S(a_1, a_2) \leq S(a_1, b_1)$ *(monotonost);*
3. $S(a_1, a_2) = S(a_1, a_2)$ *(komutativnost);*
4. $S(a_1, S(a_2, a_3)) = S(S(a_1, a_2), a_3)$ *(asocijativnost).*

*Za* $t-$*konormu se kaže da je Arhimedova* $t-$*konorma, ako važe pored prethodnih aksioma još dve aksiome:*

5. *neprekidna je funkcija;*
6. $\forall a \in (0,1),\ S(a_1, a_1) > a_1$ *(superidempotentnost).*

**Napomena 1.1.6** *Analogno, kao kod* $t-$*normi, za svaku* $t-$*konormu* $S$ *važi*

$$(\forall a_1 \in [0,1])\, S\,(a_1, a_1) \geq a_1.$$

**Napomena 1.1.7** *Iz uslova datih u definiciji* $t-$*konorme sledi monotonost po koordinatama, tj. za sve* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0,1]$ *važi*

$$a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2 \Rightarrow S(a_1, b_1) \leq S(a_2, b_2).$$

*Zamenom datog uslova sa uslovom monotonosti u definiciji* $t-$*konorme, dobija se ekvivalentna definicija* $t-$*konorme.*

Ako u definiciji $t-$konorme, umesto aksiome monotonosti važi *striktna monotonost*, tj.

$$a_1 < a_2 \wedge b_1 < b_2 \Rightarrow S(a_1, b_1) < S(a_2, b_2),$$

za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0,1]$, kažemo da je $t-$konorma *striktna*.

Može se pokazati da je 1 *anihilator* za $t-$konormu, tj. za svako $a_1 \in [0,1]$ važi

$$S(a_1, 1) = S(1, a_1) = 1.$$

**Definicija 1.1.7** *[34] Stepen* $t-$*konorme je dat sa:*
$S^1(a_1, a_2) = S(a_1, a_2), \qquad S^n(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) = S(S^{n-1}(a_1, ..., a_n), a_{n+1}).$

**Napomena 1.1.8** *Zbog asocijativnosti je*
$S^n(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) = S(a_1, S^{n-1}(a_2, ..., a_n, a_{n-1})).$

**Lema 1.1.3** *[34] Za stepen $t-$konorme važi:*

$$S^{n-1}(a_1, ..., a_n) = S^{n-1}(a_{i_1}, ..., a_{i_n}),$$

*gde je $a_{i_1}, ..., a_{i_n}$ proizvoljna permutacija elemenata $a_1$, ..., $a_n$.*

**Lema 1.1.4** *[34] Ako je $S$ striktna triangularna konorma, tada je i $S^n$ striktno rastuća funkcija.*

**Napomena 1.1.9** *Ako je $S-$ $t-$konorma, tada je:*

$$S(a_1, a_2) = 0 \Leftrightarrow \ a_1 = a_2 = 0.$$

$$S^n(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \ a_1 = ... = a_{n+1} = 0.$$

*Zaista $0 \leq a_1 \Rightarrow a_2 = S(0, a_2) \leq S(a_1, a_2) = 0$ i $0 \leq a_2 \Rightarrow a_1 = S(a_1, 0) \leq S(a_1, a_2) = 0$, tj. $a_1 = a_2 = 0$.*
*Obrnuto sledi direktno iz aksiome graničnog uslova, tj. $S(a_1, a_2) = S(0, 0) = 0$.*

*Dokaz za $S^n$, indukcijom.*

**Napomena 1.1.10** *Ako je $S-$striktna $t-$konorma, tada je:*

$$S(a_1, a_2) = 1 \Leftrightarrow \ a_1 = 1 \vee a_2 = 1.$$

$$S^n(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow \ a_1 = 1 \vee ... \vee a_{n+1} = 1.$$

*Pretpostavimo suprotno, da iz $S(a_1, a_2) = 1$ sledi $\neg(a_1 = 1 \vee a_2 = 1) \Leftrightarrow a_1 < 1 \wedge a_2 < 1$. No, tada iz striktne monotonije imamo $a_1 < 1 \wedge a_2 < 1 \Rightarrow S(a_1, a_2) < S(1, 1) = 1$, što je kontradikcija.*

*Obrnuto sledi jer je 1 anihilator za $t-$konormu.*

*Dokaz za $S^n$, indukcijom.*

**Teorema 1.1.5** *[22] Jedina idempotentna t-konorma je standardna fazi unija $S_M = \max$.*

**Definicija 1.1.8** *[22] Rastući generator $g$ je neprekidna i strogo rastuća funkcija iz $[0, 1]$ u $\mathbb{R}$, takva da je $g(0) = 0$. Pseudo-inverzna funkcija za rastući generator $g$, u oznaci $g^{(-1)}$, je funkcija iz $\mathbb{R}$ u $[0, 1]$ definisana sa*

$$g^{(-1)}(a_1) = \begin{cases} 0, & a_1 \in (-\infty, 0) \\ g^{-1}(a_1), & a_1 \in [0, g(1)] \\ 1, & a_1 \in (g(1), +\infty) \end{cases},$$

*gde je $g^{-1}$ uobičajena inverzna funkcija za $g$.*

Za rastući generator $g$ i njegovu pseudo-inverznu funkciju $g^{(-1)}$, važe jednakosti $g^{(-1)}(g(a_1)) = a_1$, za svako $a_1 \in [0,1]$ i

$$g(g^{(-1)}(a_1)) = \begin{cases} 0, & a_1 \in (-\infty, 0) \\ a_1, & a_1 \in [0, g(1)] \\ g(1), & a_1 \in (g(1), +\infty) \end{cases} .$$

**Teorema 1.1.6** *[22] Funkcija* $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *koja je Arhimedovska* $t-$*konorma ako i samo ako postoji rastući generator* $g$ *tako da je* $S(a_1, a_2) = g^{(-1)}(g(a_1) + g(a_2))$, $a_1, a_2 \in [0, 1]$.

**Primer 1.1.6** *Triangularne konorme koje se najčešće koriste su:*

1. *Standardna unija:* $S_M(a_1, a_2) = \max(a_1, a_2)$*;*
2. *Algebarski zbir:* $S_Z(a_1, a_2) = a_1 + a_2 - a_1a_2$*;*
3. *Ograničena suma:* $S_O(a_1, a_2) = \min(1, a_1 + a_2)$*;*
4. *Drastična unija:* $S_D(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1, & a_2 = 0 \\ a_2, & a_1 = 0 \\ 1, & \textit{inače} \end{cases}$

I za $t$-konorme, kao i za $t$-norme važi teorema o poretku.

**Teorema 1.1.7** *[22] Neka su* $S_M$, $S_Z$, $S_O$ *i* $S_D$ $t$*-konorme definisane u primeru 1.1.6. Važi*

*1)* $S_M \leq S_Z \leq S_O \leq S_D$.

*2) Za svaku Arhimedovsku* $t$*-konormu* $S$ *je*

$$S_{\max} \leq S \leq S_D.$$

U primenama su bitne $t$-konorme koje zavise i od parametara. Navedimo neke primere

**Primer 1.1.7** *[22] Schweizer-Sklar familija* $t$*-konormi (1963):*

$$S_{SS,p}(a_1, a_2) = 1 - \max(0, (1-a_1)^p + (1-a_2)^p - 1)^{\frac{1}{p}},$$

*za svako* $p \neq 0$ *je familija Arhimedovskih* $t$*-konormi. Rastući generatori* $g_p a_1 = 1 - (1-a_1)^p$, $a_1 \in [0,1]$*. Za* $p \to 0$ *dobija* $S_Z$ *konorma, za* $p = 1$ *se dobija* $S_O$ *konorma, za* $p \to \infty$ *se dobija* $S_D$ *konorma, za* $q \to -\infty$ *se dobija* $S_M$ *konorma.*

**Primer 1.1.8** *[22] Yager-ova familija (1980):*

$$S_{Y,\omega}(a_1, a_2) = \min\left(1, (a_1^{\omega} + a_2^{\omega})^{\frac{1}{\omega}}\right)$$

*za svako* $\omega \in (0, \infty)$ *je familija Arhimedovskih t-konormi, čiji su rastući generatori* $g_{\omega}(a_1) = a_1^{\omega}, \quad a_1 \in [0, 1]$. *Za* $\omega \to 0$ *dobija* $S_D$ *konorma, za* $\omega = 1$ *se dobija* $S_O$ *konorma, za* $\omega \to -\infty$ *se dobija* $S_M$ *konorma.*

**Primer 1.1.9** *[22] Hamacher-ova familija (1978):*

$$S_{H,r}(a_1, a_2) = \frac{a_1 + a_2 + (r-2)a_1 a_2}{1 + (r-1)a_1 a_2}$$

*za svako* $r > 0$ *je familija Arhimedovskih t-konormi, čiji su rastući generatori* $g_r : [0, 1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $g_r(a_1) = \begin{cases} -\ln \frac{1-a_1}{r+(1-r)(1-a_1)} & , \quad x \in [0, 1) \\ \infty & , \quad a_1 = 1 \end{cases}$. *Za* $r \to 0$ *dobija se t-konorma* $S(a_1, a_2) = \frac{a_1+a_2-2a_1a_2}{1-a_1a_2}$, *za* $r = 1$ *se dobija* $S_Z$ *konorma, za* $r \to \infty$ *se dobija* $S_D$ *konorma.*

**Primer 1.1.10** *[22] Frank-ova familija (1979):*

$$S_s(a_1, a_2) = 1 - \log_s\left(1 + \frac{\left(s^{1-a_1} - 1\right)\left(s^{1-a_2} - 1\right)}{s - 1}\right)$$

*za svako* $s > 0$, $s \neq 1$, *je familija Arhimedovskih t-konormi, čiji su rastući generatori* $g_s : [0, 1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $g_s(a_1) = \begin{cases} -\ln \frac{s^{1-a_1}-1}{s-1} & , \quad a_1 \in [0, 1) \\ \infty & , \quad a_1 = 1 \end{cases}$. *Za* $s \to 0$ *dobija* $S_M$ *konorma, za* $s \to 1$ *se dobija* $S_Z$ *konorma, za* $s \to -\infty$ *ili* $s \to \infty$ *se dobija* $S_O$ *konorma.*

Važi teorema o reprezentaciji neprekidne $t-$konorme kao ordinalne sume [21]:

**Teorema 1.1.8** *[21] S je neprekidna* $t-$*konorma ako i samo ako je S ordinalna suma neprekidnih arhimedovskih* $t-$*konormi, tj. postoji jedinstvena po parovima disjunktna prebrojiva familija* $\{(a_j, b_j)\}_{j \in J}$ *otvorenih podintervala intervala* $[0, 1]$ *i jedinstvena familija neprekidnih arhimedovskih* $t-$*konormi* $\{S_j\}_{j \in J}$ *takva da je S ordinalna suma od* $\{(a_j, b_j), S_j\}_{j \in J}$, *tj.*

$$S(x, y) = \begin{cases} a_j + (b_j - a_j)S_j\left(\frac{x-a_j}{b_j-a_j}, \frac{y-a_j}{b_j-a_j}\right), & x, y \in [a_j, b_j] \\ \max(x, y), & \textit{inače} \ . \end{cases}$$

## 1.2 Fazi komplement

**Definicija 1.2.1** *[22]* ***Fazi-komplement*** *(***u širem smislu***) je preslikavanje $c$ koje jedinični interval preslikava u jedinični interval, tj. $c : [0,1] \to [0,1]$ za koje važe:*

$c_1$*) granični uslovi:* $c(1) = 0, \;\; c(0) = 1,$

$c_2$*) monotonost:* $(\forall a_1, a_2 \in [0,1]) \quad a_1 \leq a_2 \; \Rightarrow \; c(a_1) \geq c(a_2).$

*Ako sem navedenih, fazi-komplement ima i sledeće dodatne osobine:*

$c_3$*) $c$ je neprekidna funkcija,*

$c_4$*) $c$ je involutivna, tj.* $(\forall x \in [0,1]) \quad c(c(x)) = x,$

*zovemo ga* ***fazi komplement u užem smislu****.*

Fazi komplement u širem smislu je podrazumevani fazi komplement, ako se drugačije ne kaže. Ako je fazi komplement definisan na pomenuti način, tada se skupovni fazi-komplement može definisati na sledeći način.

Iz [22] imamo sledeće tvrđenje koje kaže da uslovi iz definicije fazi komplementa nisu nezavisni.

**Teorema 1.2.1** *[22]Ako je $c : [0,1] \to [0,1]$ involutivna, monotono nerastuća funkcija, tada je $c$ neprekidna bijektivna funkcija koja zadovoljava granične uslove.*

Dokaz. Za vrednosti $c(x)$, $x \in [0,1]$ znamo da pripadaju intervalu $[0,1]$, pa je $0 \leq c(1)$ i $c(0) \leq 1$. Sada zbog monotonosti od $c$ dobijamo da je

$$c(0) \geq c(c(1)), \quad c(c(0)) \geq c(1).$$

Sada iz involutivnosti dobijamo

$$c(0) \geq 1, \quad 0 \geq c(1),$$

pa kako $c(0), c(1) \in [0,1]$, mora biti

$$c(0) = 1, \quad 0 = c(1).$$

Za sirjektivnost treba da je ispunjeno

$$(\forall a_2 \in [0,1])(\exists a_1 \in [0,1]) a_2 = c(a_1).$$

To je tačno, jer za svako $b$ postoji $c(b) = a$ zato što je $c$ funkcija, pa zbog involutivnosti imamo $b = c(c(b)) = c(a)$.

Za injektivnost treba da bude

$$(\forall a_1, a_2 \in [0,1]) c(a_1) = c(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2,$$

što lako sledi iz involutivnosti $a_1 = c(c(a_1)) = c(c(a_2)) = a_2$.

Pokazali smo da je funkcija bijektivna, a kako je i monotona ne može imati tačaka prekida.

Pretpostavimo suprotno da je $a_0$ tačka prekida funkcije $c$. Tada je $c(a_0) < \lim\limits_{a \to a_0-} c(a) = b_0$, te mora postojati $b_1 \in [0,1]$ tako da je $b_0 > b_1 > c(a_0)$ za koje ne postoji $a_1 \in [0,1]$ tako da je $c(a_1) = b_1$, što je kontradikcija sa bijektivnošću funkcije. □

**Definicija 1.2.2** *[22] Za $e \in [0,1]$ kažemo da je* ***ekvilibrijum*** *za fazi-komplement $c : [0,1] \to [0,1]$ ako je validan uslov $c(e) = e$.*

**Teorema 1.2.2** *[22] Ako je preslikavanje $c$ fazi komplement, tada $c$ može da ima najviše jedan ekvilibrijum.*

**Teorema 1.2.3** *[22] Ako je fazi-komplement $c$ neprekidna funkcija, tada $c$ ima jedinstven ekvilibrijum.*

Jedan ili nijedan ekvilibrijum može da bude prisutan kod fazi komplementa $c$. Ako ekvilibrijum postoji, za njega važi sledeća teorema:

**Teorema 1.2.4** *[22] Ako fazi-komplement $c$ ima ekvilibrijum $e$, tada za sve $a_1 \in [0,1]$ važi*

*i)* $a_1 \leq e \;\Rightarrow\; a_1 \leq c(a_1)$,

*ii)* $a_1 \geq e \;\Rightarrow\; a_1 \geq c(a_1)$.

Sledeće dve teoreme daju karakterizacije fazi-komplemenata pomoću kojih možemo konstruisati neograničeno mnogo razli"itih fazi-komplemenata (vidi primer 1.2.1).

**Teorema 1.2.5** *[22] Fazi komplement $c : [0,1] \to [0,1]$ je involutivan akko postoji neprekidno strogo monotono rastuće preslikavanje $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ takvo da je*

$$g(0) = 0, \qquad (\forall a_1 \in [0,1]) \quad c(a_1) = g^{-1}(g(1) - g(a_1)).$$

*Preslikavanje $g$ je* ***rastući generator*** *fazi-komplementa $c$.*

**Teorema 1.2.6** *[22] Fazi komplement* $c : [0,1] \to [0,1]$ *je involutivan akko postoji neprekidno strogo monotono opadajuće preslikavanje* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *takvo da je*

$$f(1) = 0, \qquad \forall a_1 \in [0,1], \quad c(a_1) = f^{-1}(f(0) - f(a_1)).$$

*Preslikavanje* $f$ *je* ***opadajući generator*** *fazi-komplementa* $c$*.*

Kažemo da su trougaona norma $T$ i trougaona konorma $S$ *dualne* s obzirom na fazi komplement $c$ ako i samo ako je

$$c(T(a_1, a_2)) = S(c(a_1), c(a_2)) \quad \text{i} \quad c(S(a_1, a_2)) = T(c(a_1), c(a_2)).$$

$(T, S, c)$ je *dualna trojka.*

Data trougaona norma $T$ i involutivni fazi komplement $c$, binarna operacija $S$ na $[0,1]$ definisana sa

$$S(a_1, a_2)) = c(T(c(a_1), c(a_2)))$$

za svako $a_1, a_2 \in [0,1]$ je trougaona konorma $S$ takva da je $(T, S, c)$ dualna trojka.

**Napomena 1.2.1** *Ako je za fazi-komplementa* $c$ *rastući generator funkcija* $g$*, tada*

$$f(a_1) = g(1) - g(a_1), \quad a_1 \in [0,1]$$

*definiše opadajući generator fazi-komplementa* $c$*. Ako je za fazi-komplement* $c$ *opadajući generator funkcija* $f$*, tada* $g(a_1) = f(0) - f(a_1)$*,* $a_1 \in [0,1]$ *definiše rastući generator fazi-komplementa* $c$*.*

Neki od fazi komplemenata su navedeni u sledećem primeru [22].

**Primer 1.2.1** *[22]*

1) *Fazi komplement definisan sa*

$$c(a_1) = 1 - a_1, \quad a_1 \in [0,1]$$

*se naziva standardnim fazi komplementom i on je involutivan i neprekidan fazi komplement, čiji je rastući generator* $g(a_1) = a_1$*,* $a_1 \in [0,1]$*, a ekvilibrijum* $e = 0.5$*.*

*2) Neka je* $t_0 \in [0,1]$. *Threshold funkcija:*

$$c(a_1) = \begin{cases} 1 & , \quad a_1 \le t_0 \\ 0 & , \quad a_1 > t_0 \end{cases}$$

*je primer fazi komplementa koji nije ni involutivan ni neprekidan.*

*3) Funkcije*

$$c(a_1) = \frac{1+\cos \pi a_1}{2}, \quad a_1 \in [0,1], \quad c(a_1) = 1 - \sin \frac{\pi a_1}{2}, \quad a_1 \in [0,1]$$

*su primeri fazi komplemenata koji nisu involutivni, ali su neprekidni.*

*4) Funkcija*

$$c(a_1) = 1 - {a_1}^2, \quad a_1 \in [0,1]$$

*je primer neprekidnog fazi komplementa, a koji nije involutivan. Ekvilibrijum datog fazi komplementa je* $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

*5) Funkcija*

$$c(a_1) = \sqrt{1 - {a_1}^2}, \quad a_1 \in [0,1]$$

*je neprekidan i involutivan fazi komplement, čiji je ekvilibrijum* $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Funkcija* $g(a_1) = {a_1}^2$, $a_1 \in [0,1]$ *je njen rastući generator.*

*6) Sugeno-ova klasa fazi komplemenata je formirana na sledeći način za proizvoljno* $\lambda \in (-1, \infty)$

$$c_{S,\lambda}(a_1) = \frac{1-a_1}{1+\lambda a_1}, \quad a_1 \in [0,1].$$

*Za svako* $\lambda \in (-1,\infty)$ *je* $c_\lambda$ *involutivan i neprekidan fazi-komplement, čiji je ekvilibrijum* $e = \begin{cases} 0.5 & , \quad \lambda = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+\lambda}-1}{\lambda} & , \quad \lambda \ne 0 \end{cases}$, *i rastući generator* $g_\lambda(a_1) = \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda a_1)$, $a_1 \in [0,1]$; *za* $\lambda \ne 0$, *i opadajući generator* $f_\lambda(a_1) = \ln(1+a_1) - \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda a_1)$, $a_1 \in [0,1]$ *za* $\lambda \ne 0$.

*7) Yager-ova klasa fazi komplemenata,za proizvoljno* $\omega \in (0,\infty)$, *definisana sa*

$$c_{Y,\omega}(a_1) = \left(1 - a_1^{\omega}{}^{\frac{1}{\omega}}\right).$$

*Za sve* $\omega \in (0,\infty)$ *je* $c_{Y,\omega}$ *involutivan i neprekidan fazi komplement, čiji je ekvilibrijum* $e_{c_{Y,\omega}} = \dfrac{1}{\sqrt[\omega]{2}}$, *i rastući generator* $g_\omega(a_1) = {a_1}^{\omega}$, $a_1 \in$

$[0,1]$, *i opadajući generator* $f_\omega(a_1) = 1 - {a_1}^\omega$, $a_1 \in [0,1]$. *Primetimo da za* $\omega = 1$ *dobija fazi-komplement koji je standardan iz primera pod 4).*

8) *Za* $\lambda \in (-1, \infty)$ *i* $\omega \in (0, \infty)$ *je sa*

$$c_{\lambda,\omega}(a_1) = \left(\frac{1 - {a_1}^\omega}{1 + \lambda {a_1}^\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}}, \quad a_1 \in [0,1]$$

*definisana klasa fazi komplemenata sa rastućim generatorom* $g_{\lambda,\omega}(a_1) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda {a_1}^\omega),\ a_1 \in [0,1] & , \quad \lambda \neq 0 \\ {a_1}^\omega,\ a_1 \in [0,1] & , \quad \lambda = 0 \end{cases}$. *Za* $\omega = 1$ *je to Sugeno-ova klasa, a za* $\lambda = 0$ *Yager-ova klasa fazi komplemenata.*

5) *Za* $\gamma \in (0, \infty)$ *je sa*

$$c_\gamma(a_1) = \frac{\gamma^2(1 - a_1)}{a_1 + \gamma^2(1 - a_1)}, \quad a_1 \in [0,1]$$

*definisana klasa fazi komplemenata koje imaju rastući generator* $g_\gamma(a_1) = \frac{a_1}{\gamma + (1-\gamma)a_1}$, $a_1 \in [0,1]$.

☑

## 1.3 Agregacije

U mnogim sistemima zasnovanim na znanju, agregiranje podataka odnosno informacija ili njihovih delova je često puta potrebno, u cilju donošenja bitnih zaključka ili odluka. Operatori agregacije se koriste u teorijskoj matematici i njenim primenama, informatici, inženjerstvu, ekonomiji itd.

Problem agregacije sastoji se u agregiranju $n$-torki objekata posmatranog skupa u jedan objekat iz tog skupa. Operatori agregacije u matematičkim modelima su u funkciji redukovanja skupa brojeva na jedinstveni smisleni broj. U ovom radu, objekti koje razmatramo su fazi skupovi, te operacije agregacije više fazi skupova kombinuju, na poželjan način, u jedan fazi skup. Detaljnije o agregacionim funkcijama pogledati na primer Grabish, Marichal, Mesiar i Pap [13].

Agregacijski operatori se definišu aksiomatski i obično se tumače se kao logički veznici (npr. $t-$norme i $t-$konorme) ili kao operatori uopštene sredine.

**Definicija 1.3.1** *[22] Operacija agregacije je funkcija* $A : \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]^n$ *koja poseduje sledeće karakteristike.*

*a1) Za sve* $n \geq 2$*, i svaku n-torku* $(0,0,\ldots,0)$ *i* $(1,1,\ldots,1)$ *validni su*

$$A(0,0,\ldots,0) = 0 \ \wedge \ A(1,1,\ldots,1) = 1$$

*koji predstavljaju granične uslove.*

*a2) Preslikavanje A je monotono neopadajuće po svim koordinatama, tj. za sve* $n \geq 2$ *i sve* $(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in [0,1]^n$ *važi*

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\},\ x_j \leq y_j \Rightarrow A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq A(y_1,y_2,\ldots,y_n).$$

*a3) Funkcija A je idempotentna za* $n = 1$ *i svako* $x \in [0,1]$ *važi*

$$A(x) = x.$$

*Funkciji A se mogu dodati još neke osobine.*

*a4) Preslikavanje A je neprekidno.*

*a5) Preslikavanje A je simetrično po svim koordinatama, tj. za svako* $n \geq 2$*, svaku n-torku* $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in [0,1]^n$*, i za svaku permutaciju q skupa* $\{1,\ldots,n\}$ *važi*

$$A(x_1,x_2,\ldots,x_n) = A(x_{q(1)},x_{q(2)},\ldots,x_{q(n)}).$$

*a6) Preslikavanje A je idempotentno, tj. za sve* $n \geq 2$ *i sve n-torke* $(x,x,\ldots,x) \in [0,1]^n$ *važi*

$$A(x,x,\ldots,x) = x.$$

Osobina $a5$) je uopštenje asocijativnosti i komutativnosti binarnih operacija.

**Primer 1.3.1** *Navešćemo neke poznate primere operacija agregacije.*

1) $WAM(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_{i_n} x_i$ *ponderisana aritmetička sredina sa vektorom težina* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, $w_i \in [0,1]$.
*Ponderisana aritmetička sredina je neprekidna, idempotentna, linearna, aditivna funkcija agregacije.*

2) *Kvazi-aritmetička sredina*

$$M_f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^{-1}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Big)$$

*(gde je* $f : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ *neprekidno i striktno monotono preslikavanje); specijalno stepena sredina*

$$M_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$p \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. *Tako imamo aritmetičku sredinu*

$$M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

*koja je idempotentna, neprekidna i simetrična operacija agregacije. Harmonijsku sredinu*

$$M_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = H = \begin{cases} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, & \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ x_j \neq 0 \\ 0, & \exists j \in \{1, \ldots, n\},\ x_j = 0 \end{cases}$$

*koja je idempotentna, neprekidna i simetrična operacija agregacije.*

*Marginalni članovi ovih klasa su:*

*Geometrijska sredina* $M_{\log x}$*:*

$$M_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G = (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

*koja je idempotentna, neprekidna i simetrična operacija agregacije. Operacija* max*:*

$$M_\infty(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

*koja je simetrična,neprekidna i idempotentna operacija agregacije. Operacija* min

$$M_{-\infty}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

*koja je idempotentna,neprekidna i simetrična operacija agregacije.*

3) *Stepen t-norme $T^n$ i stepen t-konorme $S^n$, kao i naravno same t-norme i t-konorme, koje imaju i dodatne osobine, ako ih imaju i same norme. Simetrične su, zbog njihove osobina komutativnosti i asocijativnosti. Neprekidne triangularne norme i konorme, na primer Archimede-ove trougaone norme, na taj način definišu neprekidne agregacione funkcije*

**Teorema 1.3.1** *[13] Neka je $A_n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^+$ monotona funkcija koja zadovoljava granične uslove, i za koju važi*

$$A_n(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = A_n(x_1, ..., x_n) + A_n(y_1, ..., y_n), \tag{1.1}$$

*gde je $x_i, y_i, x_i + y_i \in [0,1]$ za sve $i \in \{1, ..., n\}$. Tada je*

$$A_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i, \tag{1.2}$$

*gde $w_i > 0$, $i \in \{1, ..., n\}$.*

[13] Dokaz. Posmatrajmo funkciju $A^{(i)}(x_i) = A_n(0, ...0, x_i, 0, ..., 0)$ za bilo koje fiksirano $i \in \{1, ..., n\}$. Tada zbog (1.3)

$$A^{(i)}(x + y) = A^{(i)}(x) + A^{(i)}(y), \tag{1.3}$$

za svako $x, y, x + y \in [0,1]$. Ovo je poznata Košijeva funkcionalna jednačina, čije je rešenje

$$A^{(i)}(y) = w_i y, \quad y \in [0,1],$$

za neko $w_i > 0$.

$$A_n(y_1, ..., y_n) = A_n(y_1, 0, ..., 0) + A_n(0, y_2, 0, ..., 0) + A_n(0, ..., 0, y_n) =$$

$$A^{(1)}(y_1) + A^{(2)}(y_2) + ... + A^{(n)}(y_n) = w_1 y + w_2 y + ... + w_n y = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i.$$

$\square$

**Teorema 1.3.2** *[13] Neka je $A_n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^+$ neprekidna funkcija koja zadovoljava granične uslove, i za koju važi*

$$A_n(\max\{x_1, y_1\}, ..., \max\{x_n, y_n\}) = \max\{A_n(x_1, ..., x_n), A_n(y_1, ..., y_n)\}, \tag{1.4}$$

$$A^{(i)}(A^{(i)}(x_i)) = A^{(i)}(x_i), \tag{1.5}$$

*gde* $A^{(i)}(x_i) = A_n(0,...0,x_i,0,...,0)$*,* $i \in \{1,...,n\}$*. Tada je*

$$A_n(x_1,...,x_n) = \max\{\min\{w_1,x_1\},...,\min\{w_n,x_n\}\}. \tag{1.6}$$

*za neke* $w_i \in [0,1]$*,* $i \in \{1,...,n\}$*.*

**Teorema 1.3.3** *[13] Neka je preslikavanje* $A_n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^+$ *neprekidno i neka zadovoljava granične uslove, i za koju važe*

$$A_n(\min\{x_1,y_1\},...,\min\{x_n,y_n\}) = \min\{A_n(x_1,...,x_n), A_n(y_1,...,y_n)\}, \tag{1.7}$$

$$A^{(i)}(x \cdot y) = A^{(i)}(x) \cdot A^{(i)}(y), \tag{1.8}$$

*gde* $A^{(i)}(x_i) = A_n(1,...1,x_i,1,...,1)$*,* $i \in \{1,...,n\}$*. Tada je*

$$A_n(x_1,...,x_n) = \min\{x_1^{w_1},...,x_n^{w_n}\}. \tag{1.9}$$

*za neke* $w_i \in [0,1]$*,* $i \in \{1,...,n\}$*.*

# Glava 2

# Fazi skupovi

## 2.1 Fazi skupovi

Osnove teorije fazi skupova je postavio Lotf A. Zadeh 1965. godine. Teorija fazi skupova je od samog svog nastanka pronalazila veliku primenu, najviše u inženjerskim naukama, pri čemu se nije zapostavljao i razvoj strogog matematičkog aparatainicirala. Fazi skupovi su uopštenje teorije skupova i posmatraju se objekti kojima se može meriti stepen pripadnosti skupu. Mera pripadnosti skupu može se posmatrati iz sledećih aspekata:

(i) Uslovi koji karakterišu posmatrani pojam ne mogu generisati jedinstveni kvantitativni rezultat. Stoga se za takve pojave u sam proces razmatranja uključuje teorija verovatnoće;

(ii) Intervalna matematika je pogodna u situacijama kada se posmatrane vrednosti ne mogu precizno odrediti.

(iii) Teorijom fazi skupova se modeluju neodređenosti koje nastaju zbog nedovoljnih informacija u komunikaciji među ljudima.

Fazi skupova se koriste pri modeliranju pojmova neizvesnosti koji ne mogu biti potpuno utvrđeni teorijom verovatnoće. Ljudska percepcija je značajan faktor koji doprinosi neizvesnosti koju je teško kvantifikovati koristeći samo teoriju verovatoće. Rešavanje kompleksnih problema pronalazi idealnu potporu u teoriji fazi skupova, jer su dati skupovi dobar okir za modelovanje takvih problema. Primena teoriju fazi skupova je smislena kod sledećih scenarija:

(i) Kada nema dovoljno podataka koji su potrebni za kvantitativnu analizu;

(ii) Kada su relacija između podataka neodređene ili neprecizne i njihova procena u velikoj meri zavisi od subjektivne procene onoga ko eksperimente nad datim podacima i izvodi;

(iii) Kada je znanje koje ekspert poseduje o posmatranom problemu nepotpuno;

(iv) Kada su neke veličine unutar posmatranog problema nejasno definisane;

(v) Kada se uslovi stalno menjaju, te je nemoguće stohastički opisati posmatranu veličinu .

Fazi skupovi definišu da li neki elemenat pripada nekom skupu ili ne, takođe izražavaju stepen pripadnosti određenim kvantitativnim veličinama. Fazi skup kvantifikuje meru pripadnosti određenim skupovima koristeći fazi funkciju pripadnosti.

U ovom poglavlju navode se neke osnovne definicije i svojstva fazi skupova, sa naglaskom na pojmove i njihove karakteristike koji će biti od velike koristi u nastavku disertacije, dok se više može pročitati u [22], ....

### 2.1.1 Pojam fazi skupa i osobine

Za razliku od klasičnog skupa podskup $A$ od zadatog univerzalnog skupa $X$, koji je univerzalan skup, koji je određen karakterističnom funkcijom,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases},$$

koja je mogla uzimati samo vrednosti 0 i 1, fazi skup $A$ je potpuno određen funkcijom pripadanja

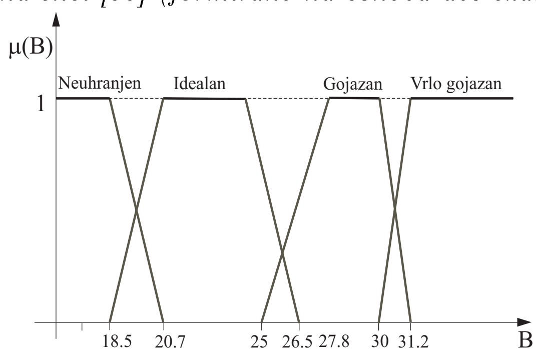
$$\mu_A : X \to [0,1].$$

Glavna razlika između fazi skupa i klasičnog skupa je u tome da kod fazi skupa element $x \in X$ pripada nekom fazi skupu $A$ sa određenim stepenom između 0 i 1. Postoje razna uopštenja fazi skupova gde su vrednosti funkcije

$\mu$ zatvoreni podintervali intervala $[0, 1]$, fazi skupovi definisani nad $[0, 1]$, ili elementi uređenog skupa npr Bulove mreže, itd.

U primenama najčešće korišćeni fazi skupovi su oni tzv. standardni fazi skupovi, sa vrednostima funkcije pripadanja u $[0, 1]$. Od njih se posebno razmatraju trougaoni i trapezoidni fazi skupovi definisani nad $\mathbb{R}$.

**Primer 2.1.1** *Neka je B indeks telesne mase čoveka "Body Mass Index", BMI. Posmatrajmo fazi skupove, zadate odgovarajućim funkcijama pripadnosti datim kao na slici [33] (formirane na osnovu dve skale BMI)*




*Slika Indeks telesne mase*

*Razmatramo četiri fazi skupa : neuhranjen $B_1$, idealan $B_2$, gojazan $B_3$, vrlo gojazan $B_4$.*

Opštepoznato je da se stepen neodređenosti može modelirati i odgovarajućom verovatnoćom koja je preslikavanje čije vrednosti se kreću u intervalu $[0, 1]$. Kako bi se uočila glavna razlika u primeni između funkcije pripadnosti i verovatnoće, navodimo sledeći primer koji je izvorno dat od strane Bezdeka u [6].

**Primer 2.1.2** *[6] Neka je $X$ skup svih tečnosti. Uočimo njegov fazi podskup $A$ : "tečnosti pogodnih za piće". Tako će tečnosti kao što je čista voda imati vrednost funkcije pripadnosti 1, a npr. vino će imati stepen 0,60, voćni sok 0,80, rakija 0,20, a sona kiselina 0. Zamislimo da imamo situaciju u kojoj je žedni putnik u pustinji i da nailazi na dve flaše sa tečnostima gde na prvoj flaši piše vrednost funkcije pripadanja $\mu_A = 0,92$, a na drugoj flaši verovatnoća da je pitka tečnost 0,92. Koju flašu bi putnik trebalo da izabere? Ako je funkcija pripadnosti 0.92 to znači da se u flaši nalazi tečnost između* *vode i soka, što je prihvatljivo u velikoj meri. Za razliku od prve flaše, ako putnik izabere drugu flašu može da dobije i pitku vodu, ali takođe tako može da dobije i otrov. Najlogičniji izbor je prva flaša.*

Skup svih fazi skupova definisanih nad univerzalnim skupom $X$ označavamo sa $\mathcal{F}(X)$.

**Definicija 2.1.1** *[22]Neka je $A$ fazi skup definisan nad univerzalnim skupom $X$.*
1°) *Nosač fazi skupa $A$, je takav klasičan skup koji sadrži sve elemente skupa $X$ koji imaju nenula stepen pripadanja, tj.*

$$\mathrm{supp}A = \{x \in X \,|A\,(x) > 0\,\}\,.$$

2°) *Jezgro fazi skupa $A$ definisano je kao*

$${}^{1}A = \{x \in X \,|A(x) = 1\,\}\,.$$

3°) *Visina fazi skupa $A$ je supremum stepena pripadnosti svih elemenata tog skupa, tj.*

$$h\,(A) = \sup_{x \in X} A\,(x)\,.$$

*Za fazi skup $A$ se kaže de je normalan, ako mu je visina 1, a subnormalan ako je $h(A) < 1$.*
4°) *Nivo skup fazi skupa $A$, definisan je sa*

$$\Lambda\,(A) = \{\,A\,(x)\,|x \in X\,\}\,.$$

U nastavku će od velikog interesa biti operacije na fazi skupovima koje na prirodan način uopštavaju operacije sa klasičnim skupovima. Formule za operacije sa klasičnim skupovima koje su iskazane sa karakterističnim funkcijama prirodno se prenose na funkcije pripadnosti. Tako se dobijaju formule za standardnu uniju, presek i komplement:

$$(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x)),$$

$$(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)),$$

$$\overline{A}(x) = 1 - A(x).$$

Vazi većina osobina kao i kod skupovnih operacija za klasične skupove. Ne važe npr.

$$A \cup \overline{A} = X, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Uopštenja pomenutih standardnih operacija fazi skupova su data preko $t-$norme $T$, $t-$konorme $S$ i fazi komplementa $c$. Tako imamo

$$(A \cup B)(x) = S(A(x), B(x)),$$

$$(A \cap B)(x) = T(A(x), B(x)),$$

$$\overline{A}(x) = c(A(x)).$$

Prve dve operacije su komutativne i asocijativne jer su $T$ i $S$ takve. Ako želimo da one zadovoljavaju i neke druge skupovne osobine, $T$ i $S$ moraju imati odgovarajuce osobine.

Kažemo da su fazi skupovi $A$ i $B$ jednaki $A(x) = B(x)$ za sve $x \in X$, tj ako imaju iste funkcije pripadanja.

Za fazi skup $B$ je se kaže da je podskup fazi skupa $A$ ako je $B(x) \leq A(x)$ za proizvoljno $x \in X$.

Važan pojam fazi skupova je njihov $\alpha$-presek. Za fazi podskup $A$ definišemo njegov $\alpha$-presek, $\alpha \in [0, 1]$, kao klasičan skup

$${}^{\alpha}A = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\},$$

a strogi $\alpha$-presek sa

$${}^{+\alpha}A = \{x | A(x) > \alpha\}.$$

**Teorema 2.1.1** *[22]Neka su $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Tada sledeće osobine važe:*

*(i)* ${}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha}A$

*(ii)* $\alpha \leq \beta \Rightarrow {}^{\alpha}A \geq {}^{\beta}A, \quad {}^{\alpha+}A \geq {}^{\beta+}A;$

*(iii)* ${}^{\alpha}(A \bigcap B) = {}^{\alpha}A \bigcap {}^{\alpha}B, \quad {}^{\alpha}(A \bigcup B) = {}^{\alpha}A \bigcup {}^{\alpha}B;$

*(iv)* ${}^{\alpha+}(A \bigcap B) = {}^{\alpha+}A \bigcap {}^{\alpha+}B, \quad {}^{\alpha+}(A \bigcup B) = {}^{\alpha+}A \bigcup {}^{\alpha+}B;$

*(v)* ${}^{\alpha}(\overline{A}) = {}^{(1-\alpha)+}\overline{A},$

*(vi)* $\alpha \leq \beta \Rightarrow {}^{\beta}A \subset {}^{\alpha}A, \ {}^{\beta+}A \subset {}^{\alpha+}A.$

*za sve* $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

Dokaz. (iii) Za $x \in {}^{\alpha}(A \bigcap B)$ važi $(A \bigcap B)(x) \geq \alpha$ tj. $\min[A(x), B(x)] \geq \alpha$. To znači da je $A(x) \geq \alpha$ i $B(x) \geq \alpha$. Odavde dobijamo da je $x \in {}^{\alpha}A \bigcap {}^{\alpha}B$. Time smo pokazali da je ${}^{\alpha}(A \bigcap B) \subseteq {}^{\alpha}A \bigcap {}^{\alpha}B$. Dalje, za $x \in {}^{\alpha}A \bigcap {}^{\alpha}B$ imamo $x \in {}^{\alpha}A$ i $x \in {}^{\alpha}B$ tj. $A(x) \geq \alpha$ i $B(x) \geq \alpha$. Odakle je $x \in {}^{\alpha}(A \bigcap B)$. Pokazali smo i drugu inkluziju ${}^{\alpha}A \bigcap {}^{\alpha}B \subseteq {}^{\alpha}(A \bigcap B)$.

Svaki fazi podskup se može rekonstruisati pomoću svojih $\alpha$-preseka, tj. preko specijalnih fazi podskupova $\alpha\ {}^{\alpha}A$. Važe sledeće teoreme o dekompoziciji fazi skupa.

**Teorema 2.1.2** *[22] Za proizvoljan fazi podskup A važi:*

$$i) \quad A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}A = \bigcup \alpha\ {}^{\alpha}A,$$

$$ii) \quad A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}A = \bigcup \alpha\ {}^{\alpha+}A,$$

$$iii) \quad A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda(A)} {}_{\alpha}A = \bigcup \alpha\ {}^{\alpha}A,$$

*gde je* $\bigcup$ *standardna unija fazi skupova.*

*Dokaz.* i) Neka je $x$ proizvoljan fiksan elemenat iz $X$. Označimo $A(x) = \alpha_0$. Tada je

$$(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}A)(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}A(x) = \max(\sup_{\alpha \in [0,\alpha_0]} {}_{\alpha}A(x), \sup_{\alpha \in (\alpha_0,1]} {}_{\alpha}A(x)).$$

Kako je za $\alpha \in [0, \alpha_0]$ uvek $A(x) = \alpha_0 \geq \alpha$, to je ${}_{\alpha}A(x) = \alpha$, a za $\alpha \in (\alpha_0, 1]$ uvek je $A(x) = \alpha_0 < \alpha$, pa je ${}_{\alpha}A(x) = 0$, te važi

$$(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}A)(x) = \sup_{\alpha \in [0,\alpha_0]} \alpha = \alpha_0 = A(x).$$

□

Za fazi podskup $A$ skupa $\mathbb{R}^n$ kažemo da je konveksan ako su svi njegovi $\alpha$-preseci, $\alpha \in (0, 1]$, konveksni skupovi u klasičnom smislu. Specijalno, fazi podskup $A$ od $\mathbb{R}$ je konveksan ako i samo ako je

$$\mu_A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)),$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in [0, 1]$.

Mnoge operacije sa realnim brojevima se mogu preneti na fazi skupove korišćenjem tzv. principa ekstenzije. Naime, neka je data funkcija $f$ koja preslikava klasičan skup $X$ u klasičan skup $Y$. Tada definišemo funkciju $f$ sa skupa svih fazi podskupova $A$ od $X$, tj. skupa svih odgovarajućih funkcija pripadanja, u skup svih fazi podskupova od $Y$ na sledeći način

$$[f(A)](y) = \sup\{\mu_A(x)|x \in X, y = f(x)\}.$$

### 2.1.2 Fazi brojevi i fazi aritmetika

Fazi broj $A$ je specijalni fazi podskup nekog podskupa proširenog skupa realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}$. Postoje razne definicije fazi broja, a mi ćemo ovde posmatrati samo fazi brojeve na $\overline{\mathbb{R}}$ u smislu sledeće definicije.

**Definicija 2.1.2** *[22] Fazi skup $A$ definisan nad $\overline{\mathbb{R}}$ je* **fazi broj** *ako je normalizovan, tj. $\mu_A(x) = 1$ za neko $x \in \mathbb{R}$, svaki njegov $\alpha-$presek, $\alpha \in (0,1]$, je zatvoren interval i nosač mu je ograničen skup.*

Neka $*$ obeležava bilo koju od četiri aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima: *sabiranje* $+$, *oduzimanje* -, *množenje* $\cdot$, i *deljenje*. Onda je,

$$[a_1, a_2] * [b_1, b_2] = \{f * g|a_1 \leq f \leq a_2, b_1 \leq g \leq b_2\}, \qquad (2.1)$$

opšta osobina svih aritmetičkih operacija na zatvorenim intervalima, izuzev da $[a_1, a_2]/[b_1, b_2]$ nije definisano kad $0 \in [b_1, b_2]$. To jest, rezultat aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima je opet zatvoren interval.

Četiri aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima su definisane na sledeći način:

1. $[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$
2. $[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$
3. $[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2]$
   $= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)]$, i $0 \notin [b_1, b_2]$,
4. $[a_1, a_2]/[b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1]$
   $= [\min(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2), \max(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2)]$.

Primetimo da se realan broj $r$ može takođe posmatrati kao specijalni (degenerisani) interval $[r,r]$. Kad je jedan od intervala u 1-4 degenerisan, upotrebljavamo specijalne operacije; kad su oba degenerisana, upotrebljavamo standardnu aritmetiku realnih brojeva [22].

Aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima zadovoljavaju neke korisne osobine. Neka su $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2], C = [c_1, c_2], 0 = [0, 0], 1 = [1, 1]$. Koristeći ove simbole, osobine su formulisane kao:

o1) $A + B = B + A$; $A \cdot B = B \cdot A$ *(komutativnost)*,

o2) $(A+B)+C = A+(B+C)$; $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (*asocijativnost*),

o3) $A = 0 + A = A + 0$; $A = 1 \cdot A = A \cdot 1$ *(neutralni element)*

o4) $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$ *(poddistributivnost)*.

o5) Ako $b \cdot c \geq 0$ za svaki $b \in B$ i $c \in C$, onda $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *(distributivnost)*
Šta više, ako je $A = [a, a]$, onda $a \cdot (B + C) = a \cdot B + a \cdot C$.

o6) $0 \in A - A$ i $1 \in A/A$.

o7) Ako je $A \subseteq E$ i $B \subseteq F$, onda:
$A + B \subseteq E + F$,
$A - B \subseteq E - F$,
$A \cdot B \subseteq E \cdot F$,
$A/B \subseteq E/F \;\; , 0 \notin B, 0 \notin F$ *(uključenje monotonosti)*

**Primer 2.1.3** *Dokaz osobine poddistributivnosti i distributivnosti. Prvo, imamo*

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= \{a \cdot (b + c) | a \in A, b \in B, c \in C\} \\ &= \{a \cdot b + a \cdot c | a \in A, b \in B, c \in C\} \\ &\subseteq \{a \cdot b + a^{'} \cdot c | a, a^{'} \in A, b \in B, c \in C\} \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned}$$

*Dakle,* $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$.

*Sada predpostavimo, bez umanjenja opštosti, da* $v_1 \geq 0$ *i* $c_1 \geq 0$. *Tada, moramo da uzmemo u obzir sledeća tri slučaja:*

1. *Ako* $a_1 \geq 0$, *onda*

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= [a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2)] \\ &= [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2] + [a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2] \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned}$$

2. *Ako* $a_1 < 0$ *i* $a_2 \leq 0$, *onda* $-a_2 \geq 0, (-A) = [-a_2, -a_1]$, *i* $(-A) \cdot (B + C) = (-A) \cdot B + (-A) \cdot C$, *pa je* $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
3. *Ako* $a_1 < 0$ *i* $a_2 > 0$, *onda*

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= [a_1 \cdot (b_2 + c_2), a_2 \cdot (b_2 + c_2)] \\ &= [a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_2] + [a_1 \cdot c_2, a_2 \cdot c_2] \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned}$$

*Da bi pokazali da distributivnost (ne važi uvek), neka je* $A = [0, 1], B = [1, 2], C = [-2, -1]$. *Tada,* $A \cdot B = [0, 2], A \cdot C = [-2, 0], B + C = [-1, 1]$, *i* $A \cdot (B + C) = [-1, 1] \subset [-2, 2] = A \cdot B + A \cdot C$.

Fazi aritmetiku možemo razviti na dva načina, preko aritmetike intervala i koristeći princip ekstenzije. Pretpostavimo da su fazi brojevi $A$ i $B$ predstavljeni neprekidnom funkcijom pripadnosti i neka je $*$ bilo koja od četiri osnovne aritmetičke operacije. Tada, definišemo fazi skup $A*B$ nad $\mathbb{R}$, preko njegovog $\alpha$-preseka ${}^{\alpha}(A * B)$, kao

$$ {}^{\alpha}(A * B) = {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B \tag{2.2}$$

za bilo koje $\alpha \in (0, 1]$ (za $* \in \{+, -, \cdot, /\}$, $0 \notin {}^{\alpha}B$).
U skladu sa teoremom 2.1.2, $A * B$ se može napisati kao

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}_{\alpha}(A * B).$$

Kako je ${}^{\alpha}(A * B)$ zatvoren interval za svako $\alpha \in (0, 1]$ i $A, B$ su fazi brojevi, $A * B$ je takođe fazi broj.
Prema drugoj metodi zasnovanoj na principu ekstenzije, standardne aritmetičke operacije nad $\mathbb{R}$ proširuju se na fazi brojeve, pa se $A * B$ nad $\mathbb{R}$ može napisati kao

$$(A * B)(c) = \sup_{c = a * b} \min\{A(a), B(b)\} \tag{2.3}$$

za sve $c \in \mathbb{R}$.

Uobičajene operacije sa fazi brojevima se mogu definisati preko principa ekstenzije na sledeći način:

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{z=x-y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$

$$\mu_{A\cdot B}(z) = \sup_{z=x\cdot y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$

$$\mu_{A:B}(z) = \sup_{z=x/y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$

**Teorema 2.1.3** *[22]Neka su $A$ i $B$ neprekidni fazi brojevi. Tada je fazi skup $A * B$, $* \in \{+, -, \cdot, /\}$, takođe fazi broj.*

## 2.2 Fazi rastojanja

### 2.2.1 Rastojanja

U klasičnom smislu rastojanja su se najčešće definisala pomoću funkcija koja su bila metrike, pseudo-metrike, semi-metrike i sličnosti, a definisale su se na sledeći način.

**Definicija 2.2.1** *Ako je $X \neq \emptyset$, funkciju $d : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$ za koju važe sledeće osobine:*

1. $\forall x \in X,\ d(x, x) = 0,$
2. $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x),$

*kažemo da je rastojanje, a uredjeni par $(X, d)$ prostor sa rastojanjem. Ako važi samo osobina 1. u pitanju je kvazi-rastojanje. Ako važe i*

3. $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y,$
4. $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$

*$d$ je metrika, a uredjeni par $(X, d)$ metrički prostor. Ako važe samo osobine 1., 2. i 4. za $d$ kažemo da je pseudo-metrika. Ako važe samo osobine 1., 3. i 4. za $d$ kažemo da je kvazi-metrika. Ukoliko važe 1., 2. i 3. preslikavanje $d$ nazivamo semi-metrikom. Za semi-metriku kod koje umesto nejednakosti trougla (osobina 4.) važi jedna od nejednakosti:*

*4.'* $\forall x, y, z \in X,\ d(x,z) \geq T(d(x,y), d(y,z))$,

*4."* $\forall x, y, z \in X,\ d(x,z) \leq S(d(x,y), d(y,z))$,

*($T$ je $t-$norma, a $S$ je $t-$konorma) kažemo da je sličnost.*

Neka je $S$ metrički prostor, a $d$ funkcija rastojanja. Neka su $U$ i $V$ podskupovi od $S$, najkraće rastojanje između $U$ i $V$ je definisano sa

$$d(U,V) = \inf_{\substack{x \in U \\ y \in V}} d(x,y).$$

Hauzdorfovo rastojanje između običnih skupova $U$ i $V$ je definisano na sledeći način:

$$L^*(U,V) = \max\{L(U,V), L(V,U)\},$$

gde su $T^\lambda$ i $L(U,V)$ dati formulama:

$$T^\lambda = \{x \in S | (\exists y \in T)\ d(x,y) \leq \lambda\}$$

$$L(U,V) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ | U^\lambda \supseteq V\}$$

Detaljnije o rastojanju između skupova se može videti u [35].

### 2.2.2 Rastojanja između fazi skupova

U skupu svih fazi objekata, definisanih nad nekim univerzalnim skupom, može se dati pojam rastojanja koje može biti metrika ili ne. Sva rastojanja koja razmatramo su dakle, oblika $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{I}$, gde je $\mathcal{F}$ skup fazi objekata definisanih nad univerzalnim skupom $X$ (različiti tipovi fazi skupova, fazi tačke,...), a $\mathcal{I}$ je podinterval (proširenog) skupa realnih brojeva, skup nenegativnih fazi brojeva,... Primene u različitim oblastima kao što su teorija slike, prepoznavanje oblika, diktiraju nam kakve osobine ta rastojanja treba da zadovoljavaju. Najčešće, ta rastojanja su semimetrike odnosno tzv. pseudometrike kod kojih ne važi nejednakost trougla. Obično je ona zamenjena nejednakošću u kojoj figurišu $t$-(ko)norme. U primeni su najčešće rastojanja između fazi objekata definisana samo preko njihovih funkcija pripadanja, a postoje i definicije koje kombinuju standardno definisana rastojanja sa funkcijama pripadanja odgovarajućih objekata.

Rastojanje između dva fazi skupa na $S$ se može definisati kao fazi podskup na $\mathbb{R}^+$ na sledeći način:

$$\bar{d}_{\mu,\nu}(r) = \sup_{\substack{x,y \\ d(x,y)=r}} [\inf(\mu(x), \nu(y))].$$

Na ovaj način definisano rastojanje $\bar{d}_{\mu,\nu}(r)$ nije uopštenje najkraćeg rastojanja između dva obična (crisp) skupa, već predstavlja skup rastojanja između dva skupa.

Definicija Hauzdorfovog rastojanja između crisp skupova se uopštava na fazi skupove na $S$. Za proizvoljan fazi podskup $\tau$ na $S$ i proizvoljno $\lambda$ definišemo: $\tau^{\lambda}(x) = \sup\{\tau(y) | d(x,y) \leq \lambda\}$. Hauzdorfovo rastojanje između dva fazi skupa $\mu$ i $\nu$ je

$$L^*(\mu,\nu) = \max\{L(\mu,\nu), L(\nu,\mu)\},$$

gde je $L(\mu,\nu) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ | \mu^{\lambda} \geq \nu\}$.

Fazi podskup $\Delta_{\mu,\nu}$ od $\mathbb{R}^+$, definisan za sve $r \in \mathbb{R}^+$ sa

$$\Delta_{\mu,\nu}(r) = \sup_{\substack{x,y \\ d(x,y) \leq r}} [\inf(\mu(x), \nu(y))],$$

predstavlja rastojanje između dva fazi skupa $\mu : S^2 \to [0,1]$ i $\nu : S^2 \to [0,1]$.

Ova definicija se od $\bar{d}_{\mu,\nu}(r)$ razlikuje samo po tome što je $=$ zamenjeno sa $\leq$ .

Srednje rastojanje između dva fazi podskupa $\mu$ i $\nu$ od $S$ se definiše formulom:

$$\frac{\sum\sum_{x,y \in S} d(x,y) \inf\{\mu(x), \nu(y)\}}{\sum\sum_{x,y \in S} \inf\{\mu(x), \nu(y)\}}.$$

Ako su parovi najvećih vrednosti funkcija pripadanja udaljeni, dato rastojanje je veće nego kada su na manjoj udaljenosti.

U [5] je dato uopštenje Hauzdorfovog rastojanja između crisp skupova na fazi skupove. Hauzdorfovo rastojanje između fazi skupova se može uopštiti tako da bude metrika u klasičnom smislu. Neka su sa $\tau_1, ..., \tau_n$ definisani fazi skupovi na nosaču $S$ koji se sastoji od konačnog broja tačaka u metričkom prostoru. Neka svaki fazi podskup ima konačan broj različitih vrednosti funkcije pripadanja. Sa $t_1, ..., t_m$ je označen skup svih različitih vrednosti funkcije pripadanja svih fazi podskupova. Neka je sa $\tau_{i,max}$ označen maksimum funkcije pripadanja fazi skupa $\tau_i$. Neka svi fazi podskupovi imaju isti maksimum $\tau_{max}$.

Neka je $t_k$-presek od $\tau_i$ u oznaci $S_{ik}$, koji nije fazi skup na $S$. Tačka $p$ pripada skupu $S_{ik}$ akko je $u_i(p) \geq t_k$. Između skupova $S_{ik}$ i $S_{jk}$ se može izračunati Hauzdorfovo rastojanje. Ovo rastojanje ćemo označiti $h(S_{ik}, S_{jk})$. Definišemo rastojanje između fazi skupova formulom:

$$H(\tau_i, \tau_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k h(S_{ik}, S_{jk})}{\sum_{k=1}^{m} t_k}.$$

$H$ je metrika, jer je $h$ metrika, $t_k$ je konstantna za svako $k$, a imenilac na desnoj strani ne zavisi od $\tau_i$ i $\tau_j$.

Problem sa datom definicijom nastaje kada nemaju svi dati fazi podskupovi isti maksimum (funkcije pripadanja nemaju isti maksimum), jer će neki od $\alpha-$preseka biti prazan skup. Hauzdorfovo rastojanje se ne može definisati ako je bar jedan od skupova prazan. Stoga se ne može računati Hauzdorfovo rastojanje između odgovarajučih $\alpha-$preseka data dva fazi podskupa u opšem slučaju.

$H$ se može definisati na sledeći način, tako da bude pseudometrika: date fazi podskupove $\tau_1, ..., \tau_n$ predefinišemo tako da dobijemo normirane fazi podskupove. Predefinisanje fazi podskupova vršimo tako što u onim tačkama nosača u kojima je funkcija pripadanja dostigla maksimum, dati maksimum zamenimo jedinicom. Na ovaj način dobijene fazi podskupove označimo sa $\tau_i'$. Na novodobijene fazi skupove može se primeniti prethodna formula za računanje rastojanja. Na ovaj način definisano rastojanje nije metrika jer ne važi aksioma separacije, tj. ne važi $H(\tau_i, \tau_j) = 0$ akko $\tau_i = \tau_j$. Data osobina nije ispunjena za one fazi skupove koji su jednaki u svim tačkama nosača, osim u onim tačkama u kojima funkcija pripadanja dostiže maksimum. Dva predefinisana fazi skupa $\tau_i$ i $\tau_j$ su jednaka, prvobitni skupovi $\tau_i$ i $\tau_j$ su različiti. Da bi $H$ postala metrika, posmatra se sledeća funkcija:

$$e(\tau_i, \tau_j) = \varepsilon \frac{\sum_{q\in S} |\tau_i(q) - \tau_j(q)|}{|S|},$$

gde je $\varepsilon$ mala pozitivna konstanta, a $|S|$ broj tačaka u $S$. Data funkcija se računa na polaznim fazi skupovima, a ne na modifikovanim. Data funkcija $e$ je metrika. Krajnji izgled Hauzdorfovog rastojanja između dva fazi skupa je sledeći:

$$H(\tau_i, \tau_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k h(S_{ik}, S_{jk})}{\sum_{k=1}^{m} t_k} + \varepsilon \frac{\sum_{q\in S} |\tau_i(q) - \tau_j(q)|}{|S|}.$$

Vrednost $\varepsilon$ treba birati tako da odražava relativnu važnost dva izraza u datom domenu problema. Data formula se može definisati i kada je nosač beskonačan skup. Jedino što se mora pretpostaviti da je $S$ kompaktan skup i da su funkcije pripadanja fazi skupova $\tau_i$ neprekidne. Hauzdorfovo rastojanje se predstavlja u obliku:

$$H(\tau_i, \tau_j) = \int_0^1 \mu h(S_{i\mu}, S_{j\mu}) d\mu + \varepsilon \frac{\int_S |\tau_i(s) - \tau_j(s)| ds}{\int_S ds}.$$

U opštem slučaju kod predefinisanih fazi podskupova se može umesto jedinice koja se postavlja na mestu maksimuma funkcije pripadanja postaviti neka od vrednosti iz intervala $[t_{max}, 1]$, gde je $t_{max} = \max\{\tau_{i\,max} | i \in \{1, ..., n\}\}$. Ako se ne uzme vrednost iz datog intervala, $H$ ne bi zadovoljavalo nejednakost trougla.

U [7] su data rastojanja na sledeći način.

**Definicija 2.2.2** *[7] Metrika je pozitivna funkcija $d$ takva da važe sledeće četiri osobine:*

1. $\forall \mu \in \mathcal{F}, d(\mu, \mu) = 0,$
2. $\forall (\mu, \nu) \in \mathcal{F}^2, d(\mu, \nu) = 0 \Rightarrow \mu = \nu,$
3. $\forall (\mu, \nu) \in \mathcal{F}^2, d(\mu, \nu) = d(\nu, \mu),$
4. $\forall (\mu, \nu, \xi) \in \mathcal{F}^3, d(\mu, \nu) \leq d(\mu, \xi) + d(\xi, \nu).$

Pseudometrika je funkcija koja zadovoljava refleksivnost, simetričnost, nejednakost trougla. Semi-metrika zadovoljava sve osobine osim nejednakosti trougla, a Semi-pseudometrika zadovoljava samo refleksivnost i simetričnost. Rastojanja se mogu izvesti i iz mera sličnosti.

**Definicija 2.2.3** *[7] Relacija sličnosti je funkcija $s$ koja uzima vrednosti u intervalu $[0, 1]$, takva da zadovoljava sledeće osobine:*

1. $(\forall \mu \in \mathcal{F}) s(\mu, \mu) = 1,$
2. $(\forall (\mu, \nu) \in \mathcal{F}^2)\ s(\mu, \nu) = s(\nu, \mu)$
3. $(\forall (\mu, \nu, \xi) \in \mathcal{F}^3)\ T(s(\mu, \xi), s(\xi, \nu)) \leq s(\mu, \nu)$, *gde je $T$ $t-$norma.*

Ako za $d$ uzmemo $d = 1 - s$, dobijamo da je $d$ semi-pseudometrika. Ako je $T$ Lukašievičeva $t-$norma $t(a_1, a_2) = \max(0, a_1 + a_1 - 1)$, tada $d$ zadovoljava nejednakost trougla i pseudometrika je. Ako je $f$ aditivni generator, $d = f \circ s$ je pseudometrika akko je $t-$norma generisana sa $f$ manja od $T$. Veoma je važna primena rastojanja u upoređivanju oblika. Stoga, u velikoj meri je bitno da se rastojanja izvode iz sličnosti. U obradi slike, posebno u primenama gde se objekti slike upoređuju sa modelima, nejednakost trougla nije od koristi, pošto argumenti funkcije rastojanja pripadaju različitim skupovima. Kod takvih primena, dovoljne su semi-metrike ili semi-pseudometrike.

Pošto su objekti koje posmatramo fazi skupovi (neprecizno definisani), sasvim je očekivano da i rastojanje između njih bude takođe neodređeno, tj. fazi skup ili fazi broj (konveksan nagore polu-neprekidan fazi skup na $\mathbb{R}^+$ sa ograničenim nosačem).

Funkcionalni aspekt se zasniva na $L_p$ normi između $\mu$ i $\nu$. Dobijamo sledeće generičke definicije:

$$d_p(\mu,\nu) = \left[\int_{x\in\mathcal{L}} |\mu(x)-\nu(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$d_\infty(\mu,\nu) = \sup_{x\in\mathcal{L}} |\mu(x)-\nu(x)|.$$

Na ovaj način definisana rastojanja su pseudometrika ($d_p$) i metrika ($d_\infty$). Dato $d_p$ ne konvergira ka $d_\infty$ kad $p$ teži beskonačnosti, već konvergira ka $d_{Ess\,Sup}(\mu,\nu) = \inf\{k \in \mathbb{R}^\lambda : \{x, |\mu(x)-\nu(x)| > k\} = 0\}$, gde je $\lambda$ Lebegova mera na $\mathcal{L}$. $d_{Ess\,Sup}$ je pseudometrika, naziva se esencijalni supremum, povezana je sa $d_\infty$ relacijom $d_{Ess\,Sup} \leq d_\infty$.

Jednakost ne važi u opštem neprekidnom slučaju. U konačnom diskretnom slučaju date definicije su u obliku:

$$d_p(\mu,\nu) = \left[\sum_{x\in\mathcal{L}} |\mu(x)-\nu(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty(\mu,\nu) = \max_{x\in\mathcal{L}} |\mu(x)-\nu(x)|.$$

Data rastojanja su u ovom slučaju metrike. Pseudometrika se može definisati preko fazi entropije $E(\mu)$ na sledeći način:

$$d(\mu,\nu) = |E(\mu)-E(\nu)|,$$

gde je $E$ definisano na sledeći način:

$$E(\mu) = -K\sum_{x\in\mathcal{L}}[\mu(x)\log(\mu(x)+(1-\mu(x))\log(1-\mu(x))],$$

$K$ je konstanta normalizovanja.

Neka je rastojanje definisano na sledeći način:

$$d(\mu,\nu) = \frac{1}{\mathcal{L}}\sum_{x\in\mathcal{L}}[D_x(\mu,\nu)+D_x(\nu,\mu)],$$

gde je $D_x(\mu,\nu) = \mu(x)\log\frac{\mu(x)}{\nu(x)} + (1-\mu(x))\log\frac{1-\mu(x)}{1-\nu(x)}$, gde je po konvenciji $0/0 = 1$.
Dato rastojanje je pozitivno, simetrično, ne zadovoljava nejednakost trougla i jednako je 0 za crisp skupove.

Rastojanje se može posmatrati i kao skup funkcija različitosti zasnovanih na uniji i preseku. Osnovna ideja je u tome da će rastojanje između skupova biti veće ako se skupovi slabo presecaju. Date mere su najčešće u obliku:

$$\frac{f(A\cap B)}{f(A\cap B) + \alpha f(A\cap \bar{B}) - \beta f(B\cap \bar{A})},$$

gde je $f(X)$ kardinalnost od $X$, a $\alpha, \beta$ su parametri koji određuju različite vrste mera.

Rastojanje između fazi skupova se može definisati i sa

$$d(\mu,\nu) = 1 - \frac{\sum_{x\in\mathcal{L}} \min[\mu(x),\nu(x)]}{\sum_{x\in\mathcal{L}} \max[\mu(x),\nu(x)]},$$

i ono je semi-metrika i uvek je jednako jedinici ako data dva skupa imaju disjunktne nosače.

Za fazi skupove koji su normirani se može definisati semi-metrika:

$$d(\mu,\nu) = \max_{x\in\mathcal{L}} \min[\mu(x),\nu(x)].$$

‘

# Glava 3

# Verovatnosni metrički prostori i uopštenja

## 3.1 Verovatnosni metrički prostori

Koncept apstraktnog metričkog prostora, koji je uveo M. Frechet 1906. godine [11], daje zajedničku prezentaciju velikog broja matematičkih, fizičkih i drugih naučnih konstrukcija u kojima se pojavljuje pojam "rastojanja". Objekti koji se razmatraju mogu biti najrazličitiji, na primer tačke, funkcije, čak i subjektivna iskustva senzacija. To otvara mogućnost povezivanja nenegativnog realnog broja sa svakim uređenim parom elemenata razmatranog skupa uz određene uslove.

Međutim, u brojnim slučajevima u kojima se primenjuje teorija metričkih prostora povezivanje jednog broja sa parom elemenata je, realistično govoreći, preterana idealizacija. To je čak i u slučaju običnog merenja dužine, gde je broj koji je predstavlja često rezultat ne samo jednog već prosečna vrednost više merenja. Zaista, u ovoj i mnogim sličnim situacijama je prikladno da pogled na koncept rastojanja bude statistički, a ne deterministički. Tačnije, umesto povezivanja broj - udaljenost $d(p,q)$, sa svakim parom elemenata $p,q$, treba povezati funkciju raspodele $F_{pq}$ i, za bilo koju pozitivni broj $x$, interpretira $F_{pq}(x)$ kao verovatnoću da je rastojanje od $p$ do $q$ manje od $x$. Kada se ovo uradi dobija se generalizacija koncepta metričkog prostora. Generalizaciju koju je prvi put uveo K. Menger 1942. [29] i sledeći ga, nazivali su je prvo statističkim a kasnije verovatnosnim (probabilističkim) metričkim prostorom. Istorija verovatnosnih metričkih prostora je kratka. U originalnom radu, Menger je dao postulate za funkcije raspodele $F_{pq}$. Oni su uključivali generalizovanu nejednakost trougla. On je konstruisao teoriju i ukazao moguće oblasti primene. Godine 1943., ubrzo posle pojave Mengerovog rada, A. Wald je objavio rad [46] u kojem je kritikovao Mengerovu generalizovanu nejednakost trougla i predložio alternativu. Na osnovu ove nove nejednakosti Wald je konstruisao teoriju rastojanja sa određenim prednostima. Godine 1951. Menger je nastavio svoju studiju o verovatnosnim metričkim prostorima i u radu [30] posvećenom rezimeu ranijeg rada, konstruisao nekoliko konkretnih primera i dalje razmatrao moguće primene ove teorije. U ovom radu Menger je prihvatio Waldovu verziju.

Kao što je uobičajeno, realnu funkciju zovemo funkcija raspodele, ako je neopadajuća, neprekidna sa leve strane, ima infimum 0 i supremum 1. Koristićemo različite simbole za funkciju raspodele. Međutim, u nastavku, $H$ će uvek označavati specifičnu funkciju raspodele definisanu sa

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Takođe, po dogovoru uzimamo da za proizvoljnu funkciju raspodele $F$, i svako $x > 0$, važi $F(x/0) = 1$, dok je $F(0/0) = 0$. U cilju poređenja navodimo aksiome običnog metričkog prostora, date originalno od strane Frechet-a

Metrički prostor je uređeni par $(S, d)$, gde je $S$ neprazan apstraktan skup i $d$ je preslikavanje iz $S \times S$ u skup realnih brojeva, tj. realan broj $d(p, q)$ je pridružen paru $(p, q)$ elemenata iz $S$. Preslikavanje $d$ po pretpostavci zadovoljava sledeće uslove:

i) $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ (identitet);

ii) $d(p, q) \geq 0$ (pozitivnost);

iii) $d(p, q) = d(q, p)$ (simetričnost);

iv) $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ (nejednakost trougla).

**Definicija 3.1.1** *[37] Verovatnosni metrički prostor je uređen par $(S, \mathcal{F})$, gde je $S$ neprazan skup (čije ćemo elemente s zvati tačke) i $\mathcal{F}$ je funkcija iz $S \times S$ u skup funkcija raspodele $\mathcal{F}$. Označićemo funkciju raspodele $\mathcal{F}(p, q)$ sa $\mathcal{F}_{pq}$, odakle će simbol $\mathcal{F}_{pq}(x)$ označavati vrednost od $\mathcal{F}_{pq}$ za realni argument $x$. Funkcije $F_{pq}$ po pretpostavci zadovoljavaju sledeće uslove:*

*I)* $F_{pq}(x) = 1$ *za sve* $x > 0$ *ako i samo ako je* $p = q$;

*II)* $F_{pq}(0) = 0$;

*III)* $F_{pq} = F_{qp}$;

*IV) Ako* $F_{pq}(x) = 1$ *i* $F_{qr}(y) = 1$, *onda* $F_{pr}(x + y) = 1$.

S obzirom na uslov II), koji očigledno implicira da $F_{pq}(x) = 0$ za sve $x < 0$, uslov I) je ekvivalentan tvrđenju:

$$p = q \Leftrightarrow F_{pq} = H.$$

Svaki metrički prostor se može smatrati verovatnosnim metričkim prostorom posebne vrste. Treba samo staviti $F_{pq}(x) = H(x - d(p, q))$ za svaki par tačaka $(p, q)$ iz metričkog prostora. Osim toga, tumačenje $F_{pq}(x)$ kao verovatnoće da je udaljenost od $p$ do $q$ manja od $x$, jasno pokazuje da su uslovi I), II), i III) generalizacije odgovarajućih uslova i), ii), iii).

Uslov IV) je "minimalna" generalizacija nejednakosti trougla iv) koja može biti tumačena na sledeći način:

Ako je sigurno da je udaljenost između $p$ i $q$ manje od $x$, i takođe, ako je sigurno da je udaljenost između $q$ i $r$ manje od $y$, onda je sigurno i da je udaljenost između $p$ i $r$ manje od $x + y$.

Uslov IV) je uvek zadovoljen u metričkim prostorima, gde se svodi na običnu nejednakost trougla. Međutim, u onim verovatnosnim metričkim prostorima u kojima jednakost $F_{pq}(x) = 1$ nije ispunjena za $p \neq q$ za bilo koji konačno $x$, uslov IV) će biti zadovoljen. Stoga je potrebno da postoje "jače" verzije generalizovane nejednakosti trougla. Razmotrićemo dve takve verzije detaljno. Pre nego što to uradimo zgodno je uraditi sledeće:

**Definicija 3.1.2** *[37] Za nejednakost trougla kažemo da važi univerzalno u verovatnosnom metričkom prostoru ako i samo ako važi za sve trojke tačaka, različite ili ne, u tom prostoru.*

U njegovoj originalnoj formulaciji [29], Menger je dao kao nejednakost trougla sledeću nejednakost

IVm) $$F_{pr}(x + y) \geq T(F_{pq}(x), F_{qr}(y)),$$

za sve $x, y \geq 0$, gde je $T$ funkcija dve promenljive na jediničnom kvadratu koja zadovoljava:

(a) $0 \leq T(a, b) \leq 1$,

(b) $a \leq c$, $b \leq d \ \Rightarrow\ T(a, b) \leq T(c, d)$

(c) $T(a,b) = T(b,a)$,

(d) $T(1,1) = 1$,

(e) $T(a,1) > 0$, $a > 0$.

S obzirom na uslov (d), sledi da IVm) sadrži IV) kao poseban slučaj. Zbog prilično opšte prirode funkcija $T$, skoro sve što se može dati kao tumačenje za IVm) je tvrđenje: Treća strana trougla simetrično zavisi od našeg poznavanja druge dve strane i povećava se, ili bar ne smanjuje, kako se naše znanje o ove dve strane povećava.

Međutim, tumačenje se može precizirati biranjem da $T$ bude specifična funkcija. Postoje brojni mogući izbori za $T$. Ovde navodimo šest najjednostavnijih:

T1: $T(a,b) = Max(a+b-1,0)$,

T2: $T(a,b) = ab$,

T3: $T(a,b) = Min(a,b)$,

T4: $T(a,b) = Max(a,b)$,

T5: $T(a,b) = a+b-ab$,

T6: $T(a,b) = Min(a+b,1)$.

Šest funkcija su navedene po rastućem redosledu rasta snage, gde se kaže da je $T''$ jače od $T'$ (i $T'$ slabije od $T''$) ako je

$$T''(a,b) \geq T'(a,b),$$

za sve $(a,b)$ na jediničnom kvadratu, sa strogom nejednakošću za najmanje jedan par $(a,b)$.

Očigledno, ako IVm) važi za bilo koje dato $T$, on će važiti apriori za sve slabije $T'$.

Za $T$ proizvod, IVm) može biti interpretirano na sledeći način:

Verovatnoća da je rastojanje između $p$ i $r$ manje od $x+y$ nije manja od zbira verovatnoća da, nezavisno, udaljenost između $p$ i $q$ jeste manja od $x$, a udaljenost između $q$ i $r$ je manja od $y$.

Kada za $T$ uzmemo $T = Min(Max)$, interpretacija je sledeća:

Verovatnoća da je udaljenost između $p$ i $r$ manja od $x+y$ nije manja od manje od većih verovatnoća da je udaljenost između $p$ i $q$ manje od $x$ i udaljenost između $q$ i $r$ je manje od $y$. Slične interpretacije se mogu dati drugim izborima $T$. Međutim kao što pokazuju sledeće leme, tri funkcije - $T_4$, $T_5$, $T_6$ su zapravo "prejake" za većinu namena

**Lema 3.1.1** *[37] Ako verovatnosni metrički prostor sadrži bar dve različite tačke, onda IVm) ne može univerzalno da važi u prostoru sa $T = Max$ i niže.*

Dokaz. Neka su $p$ i $q$ dve različite tačke prostora, a $x$ i $y$ zadovoljavaju $0 < y < x$. Pretpostavimo da važi IVm univerzalno gde $T = Max$. Tada,

$$F_{pq}(x) \geq Max(F_{pq}(x-y), F_{qq}(y)) = 1.$$

Ali $x$ može biti bilo koji pozitivan broj, koji prema uslovu I) znači $p = q$ i protivreči pretpostavci $p \neq q$. $\square$

**Lema 3.1.2** *[37] Ako verovatnosni metrički prostor nije metrički prostor, i ako IVm) važi univerzalno u prostoru za neki izbor $T$ koji zadovoljava (a)-(e), onda je fukcija $T$ sa osobinom da postoji broj $a$, $0 < a < 1$, tako da $T(a, 1) \leq a$.*

Dokaz. Ako verovatnosni metrički prostor nije metrički prostor, onda postoji barem jedan par $p, q$ (nužno različitih) tačaka za koje $F_{pq}$ uzima i neke vrednosti osim 0 ili 1. Zbog neprekidnosti sa leve strane i monotonosti $F_{pq}$, sledi da postoji, ne samo jedna tačka već i otvoreni interval $(x, y)$ na kome imamo $0 < F_{pq} < 1$. Pretpostavimo sada da je $T(a, 1) = a + \varphi(a)$, gde $\varphi(a) > 0$ za $0 < a < 1$. Neka je $z$ proizvoljna tačka iz $(x, y)$. Tada je

$$F_{pq}(z+t) \geq T(F_{pq}(z), F_{qq}(t)) = T(F_{pq}(z), 1) = F_{pq}(z) + \varphi(F_{pq}(z)).$$

Tada uzimajući $t \to 0+$, dobijamo:

$$F_{pq}(z+) \geq F_{pq}(z) + \varphi(F_{pq}(z)) > F_{pq}(z).$$

Tako imamo da je $F_{pq}$ prekidna u $z$, i odavde u proizvoljnoj tački intervala $(x, y)$. Ali ovo je kontradikcija, pošto neopadajuća funkcija može biti prekidna samo u prebrojivo mnogo tačaka i stoga ne i u svakoj tački intervala $(x, y)$. $\square$

**Lema 3.1.3** *Ako IVm) važi univerzalno u verovatnosnom metričkom prostoru i ako je $T$ neprekidno, tada, za bilo koje $x > 0$, važi da je*

$$T(F_{pq}(x), 1) \leq F_{pq}(x).$$

Dokaz. Neka su $p, q$ i $x > 0$ dati. Izaberimo $y$ tako da je $0 < y < x$. Tada

$$F_{pq}(x) \geq T(F_{pq}(x-y), F_{qq}(y)) = T(F_{pq}(x-y), 1).$$

Uzimajući $y \to 0+$, dobijamo $F_{pq}(x) \geq \lim\limits_{y \to 0+} T(F_{pq}(x-y), 1)$. Ali uz pretpostavku o neprekidnosti od $T$,

$$\lim_{y \to 0+} T(F_{pq}(x-y), 1) = T(\lim_{y \to 0+} F_{pq}(x-y), 1),$$

dok iz neprekidnosti sa leve strane od $F_{pq}$, sledi

$$\lim_{y \to 0+} F_{pq}(x-y) = F_{pq}(x).$$

Ovim se završava dokaz. $\square$

Motivisani ovim lemama, primetimo da tri najslabije funkcije $T$ na našoj listi zadovoljavaju uslov $T(a, 1) = a$, što dovodi do toga da se zamene uslovi (a), (d) i (e) sa uslovom

$$(a') \quad T(a, 1) = a, \quad T(0, 0) = 0.$$

Ova nova situacija implicira da je $T \leq Min$, ako važe nejednakost

$$\begin{gathered} T(a, b) \leq T(a, 1) = a, \\ T(a, b) = T(b, a) \leq T(b, 1) = b, \end{gathered}$$

tj. $T(a, b) \leq Min(a, b)$, odnosno $Min$ postaje najjače moguće univerzalno $T$. Slično tome, najslabija moguća funkcija $T$ koja zadovoljava (a'), (b) i (c) je funkcija data sa

$$T_w(x, y) = \begin{cases} a, & x = a, y = 1 \,\text{ili}\, y = a, x = 1, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Međutim, ne sme se tumačiti da za funkcijama koje su jače od $Min$ ili slabije od $T_w$ gubi svaki interes; de fakto u više navrata, naći ćemo da vredi odrediti pod koji uslovima, tj. za koje tačke $p, q, r$ i za koje brojeve $x$, $y$, osobina IVm) važi, za funkcije $T$ jače od $Min$ ili slabije od $Tw$.

Za razmatrano $T$ dodajemo i uslov asocijativnosti,

$$(d') \quad T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c)),$$

što dozvoljava proširenje uslova IVm) na poligonalnu nejednakost.

**Definicija 3.1.3** *[37] Mengerov prostor je verovatnosni metrički prostor u kome važi IVm) univerzalno za neki izbor za $T$ koje zadovoljava uslove $(a')$, $(b)$, $(c)$ i $(d')$.*

Sledeća lema pokazuje da, u određivanju da li je ili ne, neki verovatnosni metrički prostor Mengerov prostor, samo trojke različitih tačaka treba proveriti.

**Lema 3.1.4** *[37] Ako tačke $p, q, r$ nisu sve različite, onda IVm) važi za trojku $(p, q, r)$ i bilo koji izbor za $T$, koje zadovoljava uslove (a'), (b), (c) i (d').*

Dokaz. Dovoljno je razmatrati za $T = Min$. Ako je $p = r$, tada $F_{pr} = H$ i zaključak je neposredan. Ako $p = q \neq r$, onda za $x, y \geq 0$,

$$Min\,(F_{pq}(x), F_{qr}\,(y)) = Min\,(H\,(x)\,, F_{qr}\,(y))$$

$$\leq F_{qr}\,(y) \leq F_{qr}\,(x+y) = F_{pr}\,(x+y)\,.$$

□

Navedimo sada i neke jednostavne, a važne primere verovatnosnih metričkih prostora.

Najjednostavniji metrički prostori su ekvidistantni sa metrikom

$$d\,(p,q) = \begin{cases} a, & p \neq q \\ 0, & p = q \end{cases}$$

za neko $a$.

Shodno tome, verovatnosni metrički prostor je ekvidistantni verovatnosni metrički prostor, ako za neku funkciju raspodele $G$ koja zadovoljavauslov $G(0) = 0$, je

$$F_{pq}\,(x) = \begin{cases} G\,(x)\,, & p \neq q \\ H\,(x)\,, & p = q \end{cases}$$

gde je $H$ poznata funkcija raspodele. Iz same definicije sledi da su zadovoljeni uslovi I-IV koji definišu verovatnosni metrički prostor.

**Teorema 3.1.1** *Sredine, medijane itd., verovatnosnog rastojanja u ekvidistantnom verovatnosnom metričkom prostoru, daju ekvidistantan metrički prostor.*

Dokaz. Svaka od ovih veličina je nula kada je $p = q$ i fiksni pozitivni broj za bilo koje $p, q$ kada je $p \neq q$. $\square$

**Teorema 3.1.2** *[37] U ekvidistantnom verovatnosnom metričkom prostoru Mengerova nejednakost trougla IVm važi za svaku trojku različitih tačaka za $T = Max$, i univerzalno za $T = Min$.*

Dokaz. Budući da je funkcija $G$ neopadajuća,

$$G(x+y) \geq Max(G(x), G(y)) \geq Min(G(x), G(y))$$

i

$$G(x+y) \geq Min(G(x), 1)$$

$\square$

**Primer 3.1.1**

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x. \end{cases}$$

*Za svaku trojku različitih tačaka ovog prostora, IVm važi uz $T = Min(Sum, 1)$, budući da u svim slučajevima imamo $G(x+y) \geq Min(G(x) + G(y), 1)$.*

**Primer 3.1.2**

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

*Za svaku trojku tačaka u ovom prostoru, IVm važi za $T = Sum - Product$. To sledi direktno.*

*Međutim, kako pokazuju Primeri 1 i 2, postoje ekvidistantni verovatnosni metrički prostori u kojima generalizovana nejednakost trougla IVm važi i za jače $T$ od $Max$.*

U tom smislu interesantan je i sledeći primer.

**Primer 3.1.3**

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ a, & 0 < x \leq k \\ b, & k < x \leq 3k \\ 1, & 3k < x, \end{cases},$$

*gde $0 < a < b < 1$ i $k$ je proizvoljan pozitivan broj. Tada za $0 < x \leq k$, $k < y \leq 2k$, imamo $G(x+y) = b = Max(a, b)$, a odavde IVm ne može da važi za svaki izbor $T$ koji je jači od $Max$.*

Klasa verovatnosnih metričkih prostora, zanimljivija od ekvidistantnih, može se dobiti na sledeći način:

Neka je $(S, d)$ metrički prostor i $G$ funkcija raspodele, različita od $H$, koja zadovoljava $G(0) = 0$. Za svaki par tačaka $p, q$ iz $S$, definišemo funkciju raspodele $F_{pq}$ na sledeći način:

$$F_{pq}(x) = \begin{cases} G(x/d(p,q)), & p \neq q \\ H(x), & p = q \end{cases} \tag{3.1}$$

**Definicija 3.1.4** *[37] Za verovatnosni metrički prostor $(S, \mathcal{F})$ kažemo da je prost prostor ako i samo ako postoji metrika $d$ na $S$ i funkcija raspodele $G$ koja zadovoljava $G(0) = 0$, tako da, za svaki par tačaka $p, q$ u $S$, $\mathcal{F}(p,q) = F_{pq}$ je dat sa (3.1). Dalje, kažemo da je $(S, \mathcal{F})$ prost prostor generisan metričkim prostorom $(S, d)$ i funkcijom raspodele $G$.*

**Teorema 3.1.3** *Prost prostor je Mengerov prostor za bilo koji izbor $T$ koje zadovoljava (a'), (b), (c) i (d').*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da se IVm važi univerzalno za $T = Min$, jer je to najjači mogući izbor od $T$. Dakle, s obzirom na lemu 3.1.4, moramo samo da pokažemo da za različite $p, q, r$ važi,

$$G\left(\frac{x+y}{d(p,r)}\right) \geq Min\left(G(x/d(p,q)), G(y/d(q,r))\right). \tag{3.2}$$

Sada, kako je $d$ obična metrika,

$$d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r).$$

$$\frac{x+y}{d(p,r)} \geq \frac{x+y}{d(p,q)+d(q,r)}. \tag{3.3}$$

Nadalje, kako su $d(p,q)$ i $d(q,r)$ pozitivni, imamo

$$Max\left(x/d(p,q), y/d(q,r)\right) \geq \frac{x+y}{d(p,q)+d(q,r)}$$

$$\geq Min\left(x/d(p,q), y/d(q,r)\right), \tag{3.4}$$

gde jednakost važi ako i samo ako je $x/d(p,q) = y/d(q,r)$.

Sledi da kombinovanjem (3.3) i desne strane nejednakosti u (3.4) imamo, $\frac{x+y}{d(p,r)} \geq Min\left(x/d(p,q), y/d(q,r)\right)$ iz kojeg budući da je $G$ neopadajuća, proizilazi (3.2), što kompletira dokaz. $\square$

**Posledica 3.1.1** *Ekvidistantan metrički prostor generiše ekvidistantan verovatnosni metrički prostor.*

**Posledica 3.1.2** *Ako je $G(x) = H(x-1)$, generisani verovatnosni metrički prostor se svodi na metrički prostor koji ga generiše.*

Dokaz.
$$F_{pq}(x) = H(\frac{x}{d(p,q)} - 1) = H(x - d(p,q)). \tag{3.5}$$

□

U većini prostih prostora $T = Max$ će biti prejako budući da leva strana nejednakosti (3.4) pokazuje da, za trojku različitih tačaka $p, q, r$, to ne mora da važi. □

Kao i u metričkim prostorima gde je pojam okoline uveden i definisan pomoću funkcije rastojanja, analogno se to može uraditi i u verovatnosnim metričkim prostorima. zapravo, to se ovde može uraditi na više neekvivalentnih načina. Mi ćemo navesti i razmatrati onaj pristup iz kojeg slede osobine najsličnije onima u klasičnoj teoriji metričkih prostora

**Definicija 3.1.5** *[37] Neka je $p$ proizvolna tačka verovatnosnog metričkog prostora $(S, \mathcal{F})$, $\varepsilon > 0$ i $0 < \lambda < 1$. Skup*

$$N_p(\varepsilon, \lambda) = \{q : F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$$

*naziva se $(\varepsilon, \lambda)-$okolina tačke $p$.*

Napomena. U prostim prostorima $N_p(\varepsilon, \lambda)$ je uobičajena otvorena lopta sa centrom u tački $p$, s obzirom na metriku koja generiše taj jednostavan verovatnosni metrički prostor.

**Lema 3.1.5** *Iz $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ i $\lambda_1 \leq \lambda_2$ sledi da je*

$$N_p(\varepsilon_1, \lambda_1) \subseteq N_p(\varepsilon_2, \lambda_2).$$

Dokaz. Pretpostavimo $q \in N_p(\varepsilon_1, \lambda_1)$ tako da

$$F_{pq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1.$$

Onda,

$$F_{pq}(\varepsilon_2) \geq F_{pq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1 \geq 1 - \lambda_2,$$

a odavde, po definiciji,

$$q \in N_p(\varepsilon_2, \lambda_2).$$

□

**Teorema 3.1.4** *Ako je $(S, \mathcal{F})$ Mengerov prostor i $T$ je neprekidna funkcija, onda je $(S, \mathcal{F})$ Hausdorfov prostor sa topologijom induciranom familijom $(\varepsilon, \lambda)-$okolina $\{N_p | p \in S, \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1)\}$.*

Dokaz. Moramo pokazati da su sledeća četiri svojstva zadovoljena

*A*. Za svaki $p$ u $S$, postoji najmanje jedna okolina, $N_p$ od $p$ i svaka okolina od $p$ sadrži $p$.

B. Ako $N_p^1$ i $N_p^2$ su okoline od $p$, tada postoji okolina $N_p^3$ takva da

$$N_p^3 \subset N_p^1 \cap N_p^2.$$

C. Ako $Np$ je okolina od $p$, i $q \in N_p$, tada postoji okolina od $q$, $Nq$, takva da

$$N_q \subset N_p.$$

D. Ako $p \neq q$, onda postoje disjunktne okoline, $Np$ i $Nq$, takve da $p \in N_p$ i $q \in N_q$.

Dokaz A. Za svako $\varepsilon > 0$ i svako $\lambda > 0$, $p \in N_p(\varepsilon, \lambda)$ budući da je

$$F_{pp}(\varepsilon) = 1$$

za svako $\varepsilon > 0$.

Dokaz B. Neka su

$$N_p^1(\varepsilon_1, \lambda_1) = \{q : F_{pq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1\}$$

$$N_p^2(\varepsilon_2, \lambda_2) = \{q : F_{pq}(\varepsilon_2) > 1 - \lambda_2\}$$

date okoline od $p$, i posmatramo

$$N_p^3 = \{q : F_{pq}(\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) > 1 - \min(\lambda_1, \lambda_2)\}.$$

Jasno, $p \in N_p^3$, a odavde zbog $Min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq \varepsilon_1$ i $Min(\lambda_1, \lambda_2) \leq \lambda_1$ , koristeći lemu 3.1.5 sledi:

$$N_p^3 \subset N_p^1.$$

Slično,

$$N_p^3 \subset N_p^2,$$

odavde

$$N_p^3 \subset N_p^1 \cap N_p^2.$$

.

Dokaz C. Neka je

$$N_p = \{r; F_{pr}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1\}$$

data okolina od $p$. Budući da je $q \in N_p$,

$$F_{pq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1.$$

Sada, kako je $F_{pq}$ neprekidna sa leve strane po $\varepsilon$, postoje $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ i $\lambda_0 < \lambda_1$, tako da je

$$F_{pq}(\varepsilon_0) > 1 - \lambda_0 > 1 - \lambda_1.$$

Neka je $N_q = \{r : F_{qr}(\varepsilon_2) > 1 - \lambda_2\}$, gde je $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 - \varepsilon_0$, i $\lambda_2$ je izabrano da je

$$T(1 - \lambda_2, 1 - \lambda_2) > 1 - \lambda_1$$

takvo $\lambda_2$ postoji, budući da je $T$ neprekidna, $T(a, 1) = a$ i $1 - \lambda_0 > 1 - \lambda_1$.

Sada se lako proverava da je $N_q \subset N_p$.

Dokaz D. Neka $p \neq q$. Tada postoje $x > 0$ i $a \in [0, 1)$ takvi da je $F_{pq}(x) = a$. Biramo $b \in (0, 1)$ takvo da je $T(b, b) > a$ i $N_p = \{r : F_{pr}(\frac{x}{2}) > b\}$ i $N_q = \{r : F_{qr}(\frac{x}{2}) > b\}$. Iz $s \in N_p \cap N_q$ dobija se da je $a = F_{pq}(x) \geq T(F_{ps}(\frac{x}{2}), F_{qs}(\frac{x}{2})) \geq T(b, b) > a$, što je kontradikcija. $\square$

Dobro je poznata teorema koja kaže da je funkcija rastojanja $d$ neprekidna na metričkom prostoru, što znači, ako $p_n \to p$ i $q_n \to q$, onda

$$d(p_n, q_n) \to d(p, q).$$

Dokaz ove teoreme bazira se na nejednakosti trougla. Pošto smo za definisanje okoline u verovatnosnim metričkim prostorima prirodno je razmotriti gore navedeno tvrđenje u ovom daleko opštijem slučaju.

Pođimo od definicije granične vrednosti niza u topologiji koju smo uveli.

**Definicija 3.1.6** *Za niz tačaka $\{p_n\}$ u verovatnosnom metričkom prostoru kažemo da konvergira ka tački $p$ iz $S$, i pišemo*

$$p_n \to p$$

*ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ i svako $\lambda > 0$, postoji prirodan broj $M_{\varepsilon,\lambda}$, takav da $p_n \in N_p(\varepsilon, \lambda)$, tj. $F_{p_n p}(\varepsilon) > 1 - \lambda$, kada je $n > M_{\varepsilon,\lambda}$.*

**Lema 3.1.6** *Ako*

$$p_n \to p,$$

*onda* $F_{pp_n} \to F_{pp} = H$ *, tj. za svako* $x$, $F_{pp_n}(x) \to F_{pp}(x) = H(x)$ *, i obrnuto, tj.*

$$p_n \to p \text{ akko je } \lim_{n\to\infty} F_{p_n p}(x) = 1, \text{ za sve } x \geq 0.$$

Dokaz. (a) Ako je $x > 0$, onda za svako $\lambda > 0$, postoji prirodan broj $M_{\varepsilon,\lambda}$ takav da $F_{pp_n}(x) > 1 - \lambda$, kada $n > M_{x,\lambda}$.

Ali to znači $\lim_{n\to\infty} F_{pp_n}(x) = 1 = F_{pp}(x)$.

(b) Ako je $x = 0$, onda je za sve $n$,

$$F_{pp_n}(0) = 0$$

i odatle $\lim_{n\to\infty} F_{pp_n}(0) = 0 = F_{pp}(0)$.

Obrnuto sledi direktno. □

**Posledica 3.1.3** *Konvergencija je uniformna na svakom zatvorenom intervalu* $[a, b]$ *takvom da je* $a > 0$, *tj.* $M_{x,\lambda}$ *je nezavisan od* $x$ *za sve* $a \leq x \leq b$.

Dokaz. Za sve $x, a \leq x \leq b$, važi $F_{pp_n}(x) \geq F_{pp_n}(a)$. □

**Teorema 3.1.5** *[37] Ako je* $(S, \mathcal{F})$ *Mengerov prostor i* $T$ *neprekidna norma, tada je verovatnosna funkcija rastojanja,* $\mathcal{F}$, *od dole poluneprekidna funkcija, tj., za svako fiksirano* $x$, *ako* $q_n \to q$ *i* $p_n \to p$, *onda,*

$$\liminf_{n\to\infty} F_{p_n q_n}(x) = F_{pq}(x).$$

Dokaz. Ako je $x = 0$, sledi direktno, jer za svako $n$,

$$F_{p_n q_n}(0) = 0 = F_{pq}(0).$$

Pretpostavimo da je $x > 0$ i $\epsilon > 0$ zadat. Budući da je $F_{pq}$ neprekidna sa leve strane u tački $x$, i $\epsilon > 0$, postoji $h$, $0 < 2h < x$, tako da je

$$F_{pq}(x) - F_{pq}(x - 2h) < \varepsilon/3.$$

Neka je $F_{pq}(x - 2h) = a$. Sa obzirom da je $T$ neprekidna, i $T(a, 1) = a$, postoji broj $t$, $0 < t < 1$, takav da je

$$T(a, t) > a - \varepsilon/3$$

i

$$T(a-\varepsilon/3,t) > a-2\varepsilon/3.$$

Iz $q_n \to q$ i $p_n \to p$, na osnovu leme 3.1.6 postoji prirodan broj $M_{h,t}$ da je

$$F_{qq_n}(h) > t$$

i

$$F_{pp_n}(h) > t,$$

za sve $n > M_{h,t}$.

Sada je

$$F_{p_nq_n}(x) \geq T\left(F_{p_nq}(x-h), F_{qq_n}(h)\right)$$

i

$$F_{p_nq}(x-h) \geq T\left(F_{pq}(x-2h), F_{pp_n}(h)\right)$$

Tako, kombinujući ove nejednakosti, imamo

$$F_{p_nq}(x-h) \geq T(a,t) > a-\varepsilon/3,$$

a odavde

$$F_{p_nq_n}(x) \geq T(a-\varepsilon/3,t) > a-2\varepsilon/3 > F_{pq}(x)-\varepsilon.$$

□

**Posledica 3.1.4** *Neka je $p$ fiksirana tačka i neka $q_n \to q$. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty}\inf F_{pq_n}(x) = F_{pq}(x).$$

**Teorema 3.1.6** *[37] Neka je $(S,\mathcal{F})$ Mengerov prostor. Pretpostavimo da je $T$ neprekidna i barem jednako jaka kao Lukašievičeva $t-$norma ili u skraćenom obliku $Max(Sum-1,0)$. Takođe neka $q_n \to q$ i $p_n \to p$, i $F_{pq}$ je neprekidna u $x$. Tada*

$$F_{p_nq_n}(x) \to F_{pq}(x),$$

*tj. funkcija rastojanja $\mathcal{F}$ je neprekidna funkcija tačaka $(p,q,x)$, odnosno niz funkcija $\{F_{p_nq_n}\}$ konvergira slabo ka $F_{pq}$.*

Kao što smo videli verovatnosni metrički prostori, a posebno Mengerovi prostori imaju puno lepih osobina koje su analogne osobinama metričkih prostora. To dopušta razvoj i u drugim pravcima, pa i u teoriji nepokretne tačke.

Neka je $(M, d)$ metrički prostor i $f : M \to M$. Ako postoji $q \in (0, 1)$ tako da je

$$d(fz, fy) \leq qd(x, y), \text{ za svako } x, y \in M,$$

onda je $f$ $q-$kontrakcija.

Iz dobro poznate Banahove teoreme o fiksnoj tački, sledi da svaka $q-$kontrakcija $f : M \to M$ na kompletnom metričkom prostoru $(M, d)$ ima jedinstvenu fiksnu tačku.

V. M. Sehgal i A. T. Bharucha-Reid su 1972. uveli pojam $q-$kontrakcije u verovatnosnom metričkom prostoru $(S, \mathcal{F})$ [39], [40].

**Definicija 3.1.7** *[40] Funkcija $f : S \to S$ je $q-$kontrakcija, $q \in (0, 1)$, ako je*

$$F_{fp_1, fp_2}(x) \geq F_{p_1, p_2}\left(\frac{x}{q}\right) \tag{3.6}$$

*za svako $p_1, p_2 \in S$ i svako $x \in \mathbb{R}$.*

Pokažimo da je (3.6) uopštenje nejednakosti

$$d(fp_1, fp_2) \leq qd(p_1, p_2) \tag{3.7}$$

u metričkom prostoru $(M, d)$.

Svaki metrički prostor $(M, d)$ je i Mengerov prostor $(M, \mathcal{F}, t_{min})$, gde je $\mathcal{F}$ definisana sa

$$F_{p_1, p_2}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad d(p_1, p_2) < x \\ 0 & , \quad d(p_1, p_2) \geq x. \end{cases}$$

Dokažimo da iz pretpostavke da za $f : M \to M$ važi (3.7) sledi i (3.6), tj. za sve $x > 0$ iz $F_{p_1, p_2}\left(\frac{x}{q}\right) = 1$ sledi $F_{fp_1, fp_2}(x) = 1$.

Ako je $F_{p_1, p_2}\left(\frac{x}{q}\right) = 1$, mora biti $d(p_1, p_2) < \frac{x}{q}$, a odatle na osnovu (3.7) sledi $d(fp_1, fp_2) < q \cdot \frac{x}{q} = x$, a time i $F_{fp_1, fp_2}(x) = 1$.

**Definicija 3.1.8** *[40] Neka je $(S, \mathcal{F})$ verovatnosni metrički prostor. Niz $\{x_n\}$ je Košijev u $S$ ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \lambda \in (0, 1))(\exists n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})$$

$$n \geq n_0(\varepsilon, \lambda) \Rightarrow \; F_{x_{n+p}, x_n}(\epsilon) > 1 - \lambda.$$

Ako svaki Košijev niz $\{x_n\}$ u verovatnosnom metričkom prostoru $(S, \mathcal{F})$ konvergira u $S$, tada je taj prostor kompletan.

U [40] je dokazana prva teorema o fiksnoj tački u verovatnosnim metričkim prostorima.

**Teorema 3.1.7** *[40] Neka je $(S, \mathcal{F}, T_{min})$ Mengerov prostor koji je kompletan i neka je preslikavanje $f : S \to S$ $q-$kontrakcija. Tada za preslikavanje $f$ postoji jedinstvena fiksna tačka.*

Prirodno, odmah se pojavilo pitanje šta se može reći u slučaju neke druge $t-$norme. Nažalost tada su nam potrebni i neki dodatni uslovi. Da bi naveli dalje uopštenje prethodnog rezultata potrebni su nam sledeći pojmovi.

Neka je $x_0$ proizvoljna tačka iz $S$. Tada skup

$$O(x_0, f) = \{f^n x_0; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

zovemo orbita od $f$ u tački $x_0$.

Preslikavanje $D_{O(x_0,f)} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definisano sa

$$D_{O(x_0,f)}(x) = \sup_{s<x} \inf_{u,v \in O(x_0,f)} F_{u,v}(s),$$

zovemo dijametar orbite $O(x_0, f)$.

Ako je $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} D_{O(x_0,f)}(x) = 1$, kažemo da je orbita $O(x_0, f)$ verovatnosno ograničena.

Orbita $O(x_0, f)$ je verovatnosno ograničena ako i samo ako $D_{O(x_0,f)}(x) \in \Delta^+$, tj. $D_{O(x_0,f)}(x)$ je funkcija raspodele verovatnoća.

Prvo uopštenje dao je Sherwood.

**Teorema 3.1.8** *[41] Neka je $(S, \mathcal{F}, t)$ kompletan Mengerov prostor, gde je $t$ neprekidna $t-$norma i $f : S \to S$ $q-$kontrakcija. Ukoliko je orbita $O(x_0, f)$ verovatnosno ograničena za neko $x_0 \in S$, tada postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja $f$.*

Dalji razvoj ove teorije može se naći u [18], [32], [24].

## 3.2 Jaki verovatnosni metrički prostori

### 3.2.1 Definicija i osnovne osobine

U poglavlju 3.1 definisani su i analizirani verovatnosni metrički prostori koji su dobili i ime slabi verovatnosni (probabilistički) metrički prostori. Radi poređenja, prisetimo se da je sa $\Delta^+$ označen skup svih funkcija raspodele $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ (neopadajuće, neprekidne sa leve strane sa $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}} F(u) = 1$ tako da je $F(0) = 0$).

**Definicija 3.2.1** *[37] Uređeni par $(S, \mathcal{F})$, gde je $S$ neprazan skup i $\mathcal{F} : S \times S \to \Delta^+$ je* **slabi verovatnosni metrički prostor** *(skraćeno engleski wPM space) ako su sledeći uslovi zadovoljeni:*

$F_1$) $(\forall p, q \in S)\ \mathcal{F}_{p,q} = \mathcal{F}_{q,p}$;

$F_2$) $(\forall u \in \mathbb{R}^+)\ \mathcal{F}_{p,q}(u) = 1 \Leftrightarrow p = q$;

$F_3$) $(\forall p, q, r \in S)(\forall u, v > 0)\ \ \mathcal{F}_{p,r}(u) = 1, \mathcal{F}_{r,q}(v) = 1 \Rightarrow \mathcal{F}_{p,q}(u + v) = 1$.

Za $\mathcal{F}_{p,q}(u)$ koristimo $\mathcal{F}(p, q, u)$, ili $\mathcal{F}(p, q; u)$.

*Napomena.* Očigledno je da je svaki Mengerov probabilistički metrički propstor i slabi verovatnosni metrički prostor.

Sada, za svaki $p \in S$ definisaćemo skup

$$\mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p) = \{\{p_n\} \in S^{\mathbb{N}}\ :\ \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,p}(u) = 1, \forall u > 0\}.$$

*Napomena.* Skupovi $\mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p)$, $p \in S$, su neprazni jer za $p_n = p$, $n \in \mathbb{N}$, $\{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p)$.

**Definicija 3.2.2** *[12] Uređeni par $(S, \mathcal{F})$, je* **jak probabilistički metrički prostor** *ako je $(S, \mathcal{F})$ slab probabilistički prostor i ako $\mathcal{F}$ zadovoljava uslov*

$F_4$) *postoji $C > 0$ tako da važi*

$$(\forall p, q \in S)\ \{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p)\ \Rightarrow\ \mathcal{F}_{p,q}(u) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q}(\frac{u}{C}),\ \forall u > 0.$$

**Primer 3.2.1** *Svaki Mengerov probabilistički metrički prostor $(S, \mathcal{F}, T)$ sa neprekidnom $t-$normom $T$ je jaki probabilistički metrički prostor.*

Jedino moramo dokazati da je $F_4$) zadovoljeno za neko $C > 0$. Neka su $p, q \in S$ i $\{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p)$. Iz $\mathcal{F}_{p,q}(u) \geq T(\mathcal{F}_{p,p_n}(\frac{u}{2}), \mathcal{F}_{p_n,q}(\frac{u}{2}))$, za svako $n \in \mathbb{N}$, svako $u > 0$, i neprekidnosti $t-$norme $T$ sledi da je

$$\mathcal{F}_{p,q}(u) \geq \liminf_{n\to\infty} T(\mathcal{F}_{p,p_n}(\frac{u}{2}), \mathcal{F}_{p_n,q}(\frac{u}{2}))$$

$$\geq T(1, \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q}(\frac{u}{2})) = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q}(\frac{u}{2}),$$

za svako $u > 0$, te je $F_4$) zadovoljeno za $C = 2$.

**Primer 3.2.2** *Svaki (Mengerov) probabilistički $b-$metrički prostor je jaki probabilistički metrički prostor.*

Podsetimo se da je (Mengerov) probabilistički $b-$metrički prostor [28] uređena četvorka $(S, \mathcal{F}^b, T, s)$, gde je $S$ neprazan skup, $\mathcal{F}^b$ je funkcija iz $S \times S$ u $\Delta^+$, $T$ je neprekidna $t-$norma, $s \geq 1$ je realan broj, a sledeći uslovi su zadovoljeni za sve $p, q, r \in S$.

$F_1^b$) $\mathcal{F}_{p,q}^b(u) = 1$, for all $u > 0 \Leftrightarrow p = q$;

$F_2^b$) $\mathcal{F}_{p,q}^b(u) = \mathcal{F}_{q,p}^b(u)$ za sve $u > 0$ ;

$F_3^b$) $\mathcal{F}_{p,q}^b(s(u+v)) \geq T(\mathcal{F}_{p,r}^b(u), \mathcal{F}_{r,q}^b(v)$, za sve $u, v > 0$.

Moramo samo da dokažemo da $\mathcal{F}^b$ zadovoljava uslov $F_4$). Neka $p \in S$ i $\{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p)$. Za sve $q \in S$, iz osobine $F_3^b$), imamo da važi

$$\mathcal{F}_{p,q}^b(u) \geq T(\mathcal{F}_{p,p_n}^b(\frac{u}{2s}), \mathcal{F}_{p_n,q}^b(\frac{u}{2s})),$$

za svaki prirodan broj $n$ i svako $u > 0$.

Stoga, imamo

$$\mathcal{F}_{p,q}^b(u) \geq T(1, \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q}^b(\frac{u}{2s})) = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q}^b(\frac{u}{2s}).$$

Osobina $F_4$) je zadovoljena za $C = 2s$.

Za $s = 1$ Mengerov probabilistički $b-$metrički prostor postaje Mengerov prostor i ponovo sledi da je $F_4$) zadovoljena za $C = 2$.

**Primer 3.2.3** *Neka je $S = \mathbb{R}_0^+$. Za sve $p, q \in S$ funkcije*

$$\mathcal{F}_{p,q}^{(1)}(u) = \begin{cases} \frac{\min\{p,q\}+u}{\max\{p,q\}+u}, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases},$$

$$\mathcal{F}_{p,q}^{(2)}(u) = \begin{cases} \frac{\sqrt[m]{\frac{p^m+q^m}{2}}+u}{\max\{p,q\}+u}, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases} \qquad (m > 0),$$

*su u $\Delta^+$ i očigledno su uslovi $F_1$), $F_2$) i $F_3$) zadovoljeni.*

*Sada, neka je dat niz $\{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}^{(1)}, p)$. To znači da je*

$$\mathcal{F}_{p_n,p}^{(1)}(u) \to 1, \ n \to \infty, \quad \textit{za sve } u > 0, \textit{pa je}$$

$$1 - \mathcal{F}_{p_n,p}^{(1)}(u) = \frac{\max\{p_n, p\} - \min\{p_n, p\}}{\max\{p_n, p\} + u} \to 0, \ n \to \infty, \quad \textit{za sve } u > 0.$$

*Ali, tada $p_n \to p$, $n \to \infty$, u uobičajenoj toplogiji na $\mathbb{R}$ tako da za bilo koje $q \in S$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q}^{(1)}(u) = \mathcal{F}_{p,q}^{(1)}(u), \ , \ \forall u > 0,$$

*i $F_4$) je zadovoljeno za $C = 1$.*

*Dokazali smo da je $(S, \mathcal{F})$ jaki probabilistički metrički prostor za $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(1)}$.*

*Slično, može se pokazati da je $(S, \mathcal{F})$ za $\mathcal{F}_{p,q}(u) = \mathcal{F}_{p,q}^{(2)}(u)$, $u \in \mathbb{R}$, jaki probabilistički metrički prostor.*

*Napomena.* U opštem slučaju, u bilo kom netrivijalnom jakom probabilističkom metričkom prostoru $(S, \mathcal{F})$, je konstanta $C \geq 1$.

Neka su $p$ i $q$ dve različite tačke iz $S$. Niz $p_n = p$, $n \in \mathbb{N}$, pripada $C(S, \mathcal{F}, p)$, pa iz $F_4$) sledi da je za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ i sve $u > 0$

$$\mathcal{F}_{p,q}(u) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q}(\frac{u}{C}) = \mathcal{F}_{p,q}(\frac{u}{C}) \geq ...\mathcal{F}_{p,q}(\frac{u}{C^k}),$$

odakle se za $C < 1$ dobija da je $p = q$ što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

**Definicija 3.2.3** *[12] Neka je $(S, \mathcal{F})$ jaki probabilistički metrički prostor. Neka je $\{p_n\}$ niz u $S$ i $p \in S$. Kažemo da $\{p_n\}$ $\mathcal{F}-$***konvergira** *ka $p$ ako je*

$$\{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p).$$

**Teorema 3.2.1** *[20] Neka je $(S, \mathcal{F})$ jaki probabilistički metrički prostor i $(p,q) \in S^2$. Ako $\{p_n\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka $p$ i $\{p_n\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka $q$, tada je $p = q$.*

*Dokaz.* Neka je $\{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p)$ i $\{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, q)$. Iz osobine $F_4$)

$$\mathcal{F}_{p,q}(u) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q}(\frac{u}{C}) = 1, \ \forall u > 0,$$

tj. $\mathcal{F}_{p,q}(u) = 1$, za svako $u > 0$, odakle sledi, iz osobine $F_1$), da je $p = q$.

Dakle, granica $\mathcal{F}-$konvergentnog niza je jedinstvena. □

**Definicija 3.2.4** *[20] Neka je $(S, \mathcal{F})$ probabilistički metrički prostor. Kažemo za $\{p_n\}$ da je $\mathcal{F}-$**Košijev niz** ako važi*

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,p_m}(u) = 1, \ \forall u > 0.$$

*Takođe, kažemo da je $(S, \mathcal{F})$ $\mathcal{F}-$**kompletan probabilistički metrički prostor** ako je svaki $\mathcal{F}-$Košijev niz u $S$, i $\mathcal{F}-$konvergentan.*

U daljem radu koristićemo i sledće pojmove.

Neka je $(S, \mathcal{F})$ verovatnosni metrički prostor i neka je $f : S \to S$. Neka je za bilo koje $p_0 \in S$

$$\mathcal{O}(p_0; f) \in \{f^n p_0 : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

gde je $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$. Skup $\mathcal{O}(p_0; f)$ je **orbita** od $f$ u $p_0$.

Neka je $\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)} : \mathbb{R} \to [0,1]$ (**dijametar** od $\mathcal{O}(p_0; f)$)definisan sa

$$\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(u) = \sup_{v<u} \inf_{p,q\in\mathcal{O}(p_0;f)} F_{p,q}(v).$$

Ako je $\sup_{u\in\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(u) = 1$, kažemo da je orbita $\mathcal{O}(p_0; f)$ **probabilistički ograničen skup**. Stoga, $\mathcal{O}(p_0; f)$ je probabilistički ograničena ako i samo ako je $\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)} \in \Delta^+$, tj. $\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}$ je funkcija raspodele verovatnoće.

### 3.2.2 Teorija nepokretne tačke u jakim verovatnosnim metričkim prostorima

V. H. Sehgal je uveo pojam kontraktivnkog preslikavanja ($B-$kontrakcija) u verovatnosnim metričkim prostorima [39]. Time je otvoren put za razvoj teorije nepokretne tačke u takvim prostorima.

**Definicija 3.2.5** *[39] Neka je $(S, \mathcal{F})$ verovatnosni metrički prostor i neka je $f : S \to S$. Preslikavanje $f$ je $\lambda-$***kontrakcija***, $\lambda \in (0,1)$, ako je*

$$\mathcal{F}_{fp_1,fp_2}(u) \geq \mathcal{F}_{p_1,p_2}(\frac{u}{\lambda}),$$

*za sve $p_1, p_2 \in S$ i $u > 0$.*

Sada ćemo da dokažemo generalizaciju rezultata iz teorije fiksne tačke koju je u Mengerovim verovatnosnim metričkim prostorima dokazao Šervud [42].

**Teorema 3.2.2** *[12] Neka je $(S, \mathcal{F})$ $\mathcal{F}-$kompletan jaki verovatnosni metrički prostor i $f : S \to S$ je $\lambda-$kontrakcija. Ako je $\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)} \in \Delta^+$, za neko $p_0 \in S$, tada postoji jedinstvena fiksna tačka $p$ od $f$ i niz $\{f^n p_0\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka $p$. Štaviše, $\{f^n q\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka $p$ za svako $q \in X$.*

*Dokaz.* Neka je $p_n = f^n p_0$, $n \in \mathbb{N}$. Pokazaćemo da je $\{p_n\}$ $\mathcal{F}-$Košijev niz. Za $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$,

$$\mathcal{F}_{p_n,p_m}(u) = \mathcal{F}_{f^n p_0, f^m p_0}(u) \geq \mathcal{F}_{f^{n-1}p_0, f^{m-1}p_0}(\frac{u}{\lambda}) \geq ... \geq \mathcal{F}_{p_0, f^{m-n}p_0}(\frac{u}{\lambda^n})$$

$$\geq \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{u}{\lambda^n}) \to 1,\ n \to \infty,\ \forall u > 0.$$

Stoga, $\{p_n\}$ je $\mathcal{F}-$Košijev niz u $S$, i pošto je $S$ $\mathcal{F}-$kompletan, sledi da postoji $p \in S$ tako da $\{p_n\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka $p$. Dokažimo da je $fp = p$. Pošto

$$\mathcal{F}_{f^{n+1}p_0, fp}(u) \geq \mathcal{F}_{f^n p_0, p}(\frac{u}{\lambda}) \to 1,\ n \to \infty,\ \forall u > 0,$$

$\{p_n\}$ je $\mathcal{F}-$konvergentan ka $fp$. Sada iz Teoreme 3.2.1, sledi da je $fp = p$. Dokažimo da je $p$ jedinstvena fiksna tačka od $f$ Ako pretpostavimo da je $fq = q$, za neko $q \in S$, tada je

$$\mathcal{F}_{p,q}(u) = \mathcal{F}_{fp,fq}(u) \geq \mathcal{F}_{p,q}(\frac{u}{\lambda}) \geq ... \geq \mathcal{F}_{p,q}(\frac{u}{\lambda^n}) \to 1,\ n \to \infty, \forall u > 0,$$

te je $\mathcal{F}_{p,q}(u) = 1$, za svako $u > 0$, i posledično je $q = p$.

Sada za bilo koje $q \in X$ i svako $n \in \mathbb{N}$ važi da je

$$\mathcal{F}_{f^n q, p}(u) = \mathcal{F}_{f^n q, f^n p}(u) \geq ... \geq \mathcal{F}_{q,p}(\frac{u}{\lambda^n})$$

te $\mathcal{F}_{f^n q, p}(u) \to 1$, $n \to \infty$, za svako $u > 0$ što znači da $\{f^n q\}$ takođe $\mathcal{F}-$konvergira ka $p$. $\square$

Tokom godina, u literaturi se pojavio veliki broj proširenja i generalizacija Banahovog principa kontrakcije. Lj. Ćirić je uveo pojam kvazikontrakcije kao jedan od najopštijih tipova kontraktivnog preslikavanja. Dokazao je da kvazikontrakcija u kompletnom metričkom prostoru ima jedinstvenu fiksnu tačku [9].

Dokazujemo teoremu fiksne tačke za kvazikontrakcijska preslikavanja u jakom verovatnosnom metričkom prostoru. Pre toga definisaćemo verovatnosnu kvazikontrakciju.

**Definicija 3.2.6** *[20] Neka je $(S, \mathcal{F})$ (jaki) verovatnosni metrički prostor i $k \in (0,1)$. Za preslikavanje $f : S \to S$ se kaže da je verovatnosna Ćirićeva kvazikontrakcija ako za svako $p, q \in S$ i svako $t > 0$, važi sledeće:*

$$\mathcal{F}_{fp,fq}(kt) \geq \min\{\mathcal{F}_{p,q}(t), \mathcal{F}_{p,fp}(t), \mathcal{F}_{q,fq}(t), \mathcal{F}_{p,fq}(t), \mathcal{F}_{fp,q}(t)\}.$$

**Teorema 3.2.3** *[20] Neka je $(S, \mathcal{F})$ $\mathcal{F}-$kompletni jaki verovatnosni metrički prostor i neka je $f : S \to S$ verovatnosna Ćirićeva kvazikontrakcija za neko $k \in (0,1)$. Ako postoji $p_0 \in S$ takvo da je $\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)} \in \Delta^+$ i $Ck < 1$, tada $\{f^n p_0\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka jedinstvenoj fiksnoj tački $\omega$ od $f$ na $S$.*

*Dokaz.* Neka je $n \in \mathbb{N}$. Pošto je $f$ verovatnosna Ćirićeva kvazikontrakcija za sve $i, j \in \mathbb{N}_0$ i $t > 0$

$$\mathcal{F}_{f^{n+i}p_0, f^{n+j}p_0}(t) \geq \min\{\mathcal{F}_{f^{n+i-1}p_0, f^{n+j-1}p_0}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{f^{n+i-1}p_0, f^{n+i}p_0}(\frac{t}{k}),$$

$$\mathcal{F}_{f^{n+j-1}p_0, f^{n+j}p_0}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{f^{n+i-1}p_0, f^{n+j}p_0}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{f^{n+i}p_0, f^{n+j-1}p_0}(\frac{t}{k})\}$$

što implicira da je

$$\mathcal{D}_{\mathcal{O}(f^n p_0;f)}(t) \geq \mathcal{D}_{\mathcal{O}(f^{n-1}p_0;f)}(\frac{t}{k}) \geq ... \geq \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{k^n}), \ \ \forall t > 0.$$

Koristeći gornju nejednakost, imamo da je

$$\mathcal{F}_{f^n p_0, f^{n+m}p_0}(t) \geq \mathcal{D}_{\mathcal{O}(f^n p_0;f)}(t) \geq \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{k^n})$$

za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Stoga,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{f^n p_0, f^{n+m}p_0}(t) = 1,$$

za svako $t > 0$ što znači da je $\{f^n p_0\}$ $\mathcal{F}-$Košijev niz u $\mathcal{F}-$kompletnom verovatnosnom metričkom prostoru. Neka $\{f^n p_0\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka nekom $\omega \in S$. Štaviše, iz osobine $F_4$) sledi da je

$$\mathcal{F}_{f^n p_0,\omega}(t) \geq \liminf_{m\to\infty} \mathcal{F}_{f^n p_0, f^{n+m} p_0}(\frac{t}{C}) \geq \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{Ck^n})$$

za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i $t > 0$. Sada

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{fp_0,f\omega}(t) &\geq \min\{\mathcal{F}_{p_0,\omega}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{p_0,fp_0}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{\omega,f\omega}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{p_0,f\omega}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{fp_0,\omega}(\frac{t}{k})\}\\ &\geq \min\{\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{Ck}), \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{\omega,f\omega}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{p_0,f\omega}(\frac{t}{k})\}\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{f^2 p_0,f\omega}(t) \geq \min\{\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{Ck^2}), \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{k^2}), \mathcal{F}_{\omega,f\omega}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{p_0,f\omega}(\frac{t}{k^2})\}.$$

Indukcijom dobijamo

$$\mathcal{F}_{f^n p_0,f\omega}(t) \geq \min\{\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{Ck^n}), \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{k^n}), \mathcal{F}_{\omega,f\omega}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{p_0,f\omega}(\frac{t}{k^n})\}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, tako da je

$$\mathcal{F}_{\omega,f\omega}(t) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{f^n p_0,f\omega}(\frac{t}{C}) \geq \mathcal{F}_{\omega,f\omega}(\frac{t}{Ck}) \geq ... \geq \mathcal{F}_{\omega,f\omega}(\frac{t}{(Ck)^j}),$$

za svako $j \in \mathbb{N}$. Pošto je $Ck < 1$, imamo $\mathcal{F}_{\omega,f\omega}(t) = 1$, za svako $t > 0$. Stoga je $\omega = f\omega$. Pretpostavimo da je $fu = u$ za neko $u \in S$. Tada

$$\mathcal{F}_{u,\omega}(t) = \mathcal{F}_{fu,f\omega}(t) \geq \min\{\mathcal{F}_{u,\omega}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{u,fu}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{\omega,f\omega}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{u,f\omega}(\frac{t}{k}), \mathcal{F}_{\omega,fu}(\frac{t}{k})\}$$

$$= \mathcal{F}_{u,\omega}(\frac{t}{k}) \geq ... \geq \mathcal{F}_{u,\omega}(\frac{t}{k^m})$$

za svako $m \in \mathbb{N}$. Sledi da je $\mathcal{F}_{u,\omega}(t) = 1$, za svako $t > 0$ te je $u = \omega$, i $\omega$ je jedinstvena fiksna tačka od $f$ na $S$. □

*Napomena.* Lako je dokazati da, ako je

$$\mathcal{F}_{fp,fq}(kt) \geq \min\{\mathcal{F}_{p,q}(t), \mathcal{F}_{p,fq}(t), \mathcal{F}_{fp,q}(t)\}$$

za svako $p, q \in S$ i $t > 0$, uslov $Ck < 1$ u Teoremi 3.2.3 se može oslabiti sa $k < 1$.

Sada, ćemo predstaviti jednu interesantnu podklasu jakih verovatnosnih metričkih prostora.

**Definicija 3.2.7** *[20] Uređeni par $(S, \mathcal{F})$ je* **m−jaki verovatnosni metrički prostor** *ako $\mathcal{F}$ zadovoljava uslove $F_1$), $F_2$), $F_3$) i*

$$F_4^*) \quad \textit{postoji } C > 0 \textit{ tako da za sve } p, q \in S,$$

$$\{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p),\ \{q_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, q) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{p,q}(t) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q_n}(\frac{t}{C}),$$

*za svako $t > 0$.*

*Napomena.* Pošto je niz $p_n = p$, za svako $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}-$konvergira ka $p$, svaki $m-$jaki verovatnosni metrički prostor je jaki verovatnosni metrički prostor.

**Primer 3.2.4** *Svaki Mengerov verovatnosni metrički prostor (sa neprekidnom $t-$normom $T$) je $m-$jaki verovatnosni metrički prostor.*
*Naime, za $\{p_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, p)$ i $\{q_n\} \in \mathcal{C}(S, \mathcal{F}, q)$ u Mengerovom verovatnosnom metričkom prostoru je za sve $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathcal{F}_{p,q}(t) \geq T(\mathcal{F}_{p,p_n}(\frac{t}{2}), \mathcal{F}_{p_n,q}(\frac{t}{2})) \geq T(\mathcal{F}_{p,p_n}(\frac{t}{2}), T(\mathcal{F}_{p_n,q_n}(\frac{t}{4}), \mathcal{F}_{q_n,q}(\frac{t}{4}))),$$

*za svako $t > 0$, te je*

$$\mathcal{F}_{p,q}(t) \geq T(1, T(\liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q_n}(\frac{t}{4}), 1)) = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}_{p_n,q_n}(\frac{t}{4}),\ t > 0,$$

*i za $C = 4$ uslov $F_4^*$) je zadovoljen.*

**Primer 3.2.5** *Slično, može se pokazati da je svaki (Mengerov) verovatnosni $b-$metrički prostor je $m-$jaki verovatnosni metrički prostor.*

**Primer 3.2.6** *Prostori iz Primera 3.2.3 su takođe $m-$jaki verovatnosni metrički prostori.*

U ovoj klasi prostora može se pokazati sledeća generalizacija verovatnosnog principa kontrakcije, koji je ujedno i uopštenje Teoreme 2.3 iz [18].

**Definicija 3.2.8** *[20] Neka je $(S, \mathcal{F})$ PM prostor i $f : S \to S$. Preslikavanje $f$ je* **preslikavanje sa kontrakcijskom iteracijom u tački** *ako je za neko $\lambda \in (0, 1)$ i svako $p \in S$, postoji $n(p) \in \mathbb{N}$ tako da za bilo koje $q \in S$ i svako $t > 0$ važi da je*

$$\mathcal{F}_{f^{n(p)}p, f^{n(p)}q}(\lambda t) \geq \mathcal{F}_{p,q}(t).$$

**Teorema 3.2.4** *[20] Neka je $(S, \mathcal{F})$ $\mathcal{F}-$kompletan $m-$jaki verovatnosni metrički prostori i $f : S \to S$ preslikavanje sa kontrakcijskom iteracijom u tački. Ako za neko $p_0 \in S$, $\mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)} \in \Delta^+$, tada postoji jedinstvena fiksna tačka $u$ od $f$ i $u = \lim\limits_{k\to\infty} f^k p_0$.*

*Dokaz.* Neka je $p_1 = f^{n(p_0)}p_0$, $p_2 = f^{n(p_1)}p_1$, ... $p_{k+1} = f^{n(p_k)}p_k$, $k \in \mathbb{N}$. Za svako $m, k \in \mathbb{N}$ i $j = n(p_{k+m-1}) + n(p_{k+m-2}) + \cdots + n(p_k)$, važi

$$\mathcal{F}_{p_k,p_{k+m}}(t) = \mathcal{F}_{f^{n(p_{k-1})}p_{k-1}, f^{j+n(p_{k-1})}p_{k-1}}(t) \geq \mathcal{F}_{p_{k-1}, f^j p_{k-1}}(\frac{t}{\lambda}) \geq \dots$$

$$\mathcal{F}_{p_0, f^j p_0}(\frac{t}{\lambda^k}) \geq \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{\lambda^k}) \to 1, \; k \to \infty,$$

za svako $t > 0$ pa je $\{p_k\}$ $\mathcal{F}-$Košijev u $\mathcal{F}-$kompletnom $m-$jakom verovatnosnom metričkom prostoru. Neka $\{p_k\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka $u \in S$. Dokazujemo da je $f^{n(u)}u = u$. Iz nejednakosti

$$\mathcal{F}_{f^{n(u)}u, f^{n(u)}p_k}(t) \geq \mathcal{F}_{u,p_k}(\frac{t}{\lambda}) \to 1, \; k \to \infty,$$

za svako $t > 0$, sledi da $\{f^{n(u)}p_k\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka $f^{n(u)}u$. Sa druge strane važi

$$\mathcal{F}_{p_k, f^{n(u)}p_k}(t) \geq \mathcal{F}_{p_{k-1}, f^{n(u)}p_{k-1}}(\frac{t}{\lambda}) \geq \dots \mathcal{F}_{p_0, f^{n(u)}p_0}(\frac{t}{\lambda^k}) \geq$$

$$... \geq \mathcal{D}_{\mathcal{O}(p_0;f)}(\frac{t}{\lambda^k}) \to 1, \; k \to \infty,$$

za svako $t > 0$.

Sada, iz uslova $F_4^*$):

$$\mathcal{F}_{u, f^{n(u)}u}(t) \geq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}_{p_k, f^{n(u)}p_k}(\frac{t}{C}) \to 1, \;\; k \to \infty,$$

za svako $t > 0$. Odavde sledi da je $u = f^{n(u)}u$. Dokažimo da $f^{n(u)}\omega = \omega$, za neko $\omega \in S$, implicira da je $\omega = u$. Pošto je

$$\mathcal{F}_{u,\omega}(t) = \mathcal{F}_{f^{n(u)}u, f^{n(u)}\omega}(t) \geq \mathcal{F}_{u,\omega}(\frac{t}{\lambda}) \geq ... \geq \mathcal{F}_{u,\omega}(\frac{t}{\lambda^k})$$

za svako $k \in \mathbb{N}$ i svako $t > 0$, imamo da je $\mathcal{F}_{u,\omega}(t) = 1$, za svako $t > 0$, pa iz osobine $F_1$) sledi da je $u = \omega$. Dakle, $f^{n(u)}$ ima jedinstvenu fiksnu tačku. Sada $fu = ff^{n(u)}u = f^{n(u)}fu$ implicira da je $fu = u$.

Na kraju dokažimo da je $u = \lim_{k\to\infty} f^k p_0$. Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}, k \geq n(u)$, postoje $m \in \mathbb{N}$ i $0 \leq r < n(u)$ takve da je $k = m \cdot n(u) + r$. Tada, imamo da je

$$\mathcal{F}_{f^k p_0, u}(t) = \mathcal{F}_{f^{m\cdot n(u)+r} p_0, f^{n(u)} u}(t) \geq ... \geq \mathcal{F}_{f^r p_0, u}(\frac{t}{\lambda^m}),$$

za svako $t > 0$. Ako $k \to \infty$, tada i $m \to \infty$ te

$$\mathcal{F}_{f^k p_0, u}(t) \to 1,\ \ k \to \infty,$$

za svako $t > 0$, i $\{f^k p_0\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka $u$. Dokaz je ovim završen. Štaviše, lako se proverava da $\{f^k q\}$ $\mathcal{F}-$konvergira ka $u$ za svako $q \in S$. $\square$

# Glava 4

# Fazi prostori

## 4.1 Fazi metrički prostori

Kao što smo već rekli 1964. godine Zadeh [51] je uveo pojam rasplinutog fazi (fuzzy) skupa za koji pripadnost nije određena samo vrednostima 0 (ne pripada) i 1 (pripada) nego sa nekim brojem iz intervala $[0,1]$ koji pokazuje stepen pripadnosti. Da se podsetimo

**Definicija 4.1.1** *Fazi skup, tj. fazi podskup od $X$ je funkcija $\mu_A : X \to [0,1]$ i ona se poistovećuje sa skupom $A$.*

Kramosil i Michalek su 1975. godine proširili koncept Mengerovih verovatnosnih metričkih prostora na fazi koncept i time prvi definisali pojam fazi metričkog prostora.

Neka je $X$ proizvoljan skup, a $*$ neprekidna $t$-norma.

**Definicija 4.1.2** *[23] Neka je $M$ fazi skup na $X^2 \times [0,\infty)$ koji za sve $x, y, z \in X$ i $s, t > 0$, zadovoljava sledeće uslove:*

*(KM1)* $\quad M(x,y,0) = 0$;

*(KM2)* $\quad M(x,y,t) = 1$, *za sve* $t > 0$, *ako i samo ako je* $x = y$;

*(KM3)* $\quad M(x,y,t) = M(y,x,t)$;

*(KM4)* $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$;

*(KM5)* $M(x, y, \cdot) : [0, \infty) \to [0, 1]$ *je neprekidna sa leve strane.*

*Tada je* $(X, M, *)$ *fazi metrički prostor a* $(M, *)$ *fazi metrika na skupu* $X$.

**Napomena** Može se pokazati da je pod navedenim uslovima $M(x, y, \cdot)$ neopadajuća funkcija, za proizvoljne $x, y \in X$.

Lako se uočava da sa $\mathcal{F}_{x,y}(t) = M(x, y, t)$ svaki fazi metrički prostor postaje uopštenje Mengerovog verovatnosnog metričkog prostora, te da su Mengerovi verovatnosni metrički prostori specijalni slučaj fazi metričkih prostora. Samim tim i metrički prostori (u uobičajenom smislu) su fazi metrički prostori.

Fazi metrika ima niz prednosti u odnosu na klasičnu metriku što motiviše ispitivanje mogućnosti njene primene u problemima iz prakse. Naime, ona po svojoj definiciji uključuje i parametar $t$ koji omogućava bolju prilagodljivost koja je od velike koristi u poboljšanju performansi. Iz tog razloga ovaj pristup je vrlo brzo privukao veliku pažnju ne samo naučnika teoretičara nego i inžinjera u različitim granama tehnike. Između mnogobrojnih rezultata, modifikovanih pristupa fazi konceptu, značajno mesto zauzimaju rezultati koje su objavili Valentin Gregori i Almanzar Sapena sa saradnicima [44], [14], [15], [17], [16], [45], a polaze od nešto izmenjene definicije fazi metričkog prostora, koju su uveli George i Veramani [1], [2], [3].

Topologija, konvergencija nizova, itd. se u fazi metričkim prostorima definišu po analogiji sa tim pojmovima u Mengerovim verovatnosnim metričkim prostorima.

Neka je $(X, M, *)$ fazi metrički prostor. Za $x \in X$, $r \in (0, 1)$ i $t > 0$ skup

$$B(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}$$

nazivamo otvorena lopta sa centrom u tački $x$.

**Teorema 4.1.1** *[1] Neka je* $(X, M, *)$ *fazi metrički prostor. Familija*

$\tau = \{A \subseteq X : x \in A$ *akko postoje* $t > 0$ *i* $r \in (0, 1)$ *takvi da je* $B(x, r, t) \subseteq A\}$,

*je topologija na* $X$.

**Napomena.** Kako je familija $\{B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ lokalna baza u tački $x$, topologija $\tau$ zadovoljava I aksiomu prebrojivosti.

**Teorema 4.1.2** *[2] Fazi metrički prostor $(X, M, *)$ sa topologijom $\tau$ je Hausdorfov prostor.*

**Teorema 4.1.3** *[2] Neka je $(X, M, *)$ fazi metrički prostor sa topologijom $\tau$. Tada $\{x_n\} \to x$ akko $M(x_n, x, t) \to 1$, $n \to \infty$, za sve $t > 0$.*

Košijevi nizovi se uvode na očekivani način.

**Definicija 4.1.3** *Niz $\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}}$ u fazi metričkom prostoru $(X, M, *)$ je Košijev ako je $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} M(x_n, x_m, t) = 1$, za sve $t > 0$.*

*Fazi metrički prostor u kome je svaki Košijev niz i konvergentan naziva se kompletan fazi metrički prostor.*

## 4.2 Fazi $T-$metrike i fazi $S-$metrike

U ovom poglavlju ćemo se ograničiti na rastojanja koja su fazi $T$-metrike i fazi $S$-metrike, a skupovi nad kojima se vrši određivanje rastojanja su "crisp" skupovi.

**Definicija 4.2.1** *[34] Fazi $S-$metrički prostor je uređena trojka $(X, \boldsymbol{s}, S)$ takva da je $X$ neprazan skup, $S$ je neprekidna t-konorma i $\boldsymbol{s}$ je fazi skup na $X \times X \times (0, +\infty)$ koji zadovoljava sledeće uslove za sve $x, y, z \in X, \alpha, \beta > 0$:*

1. $\boldsymbol{s}(x, y, \alpha) \in [0, 1)$;
2. $\boldsymbol{s}(x, y, \alpha) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $\boldsymbol{s}(x, y, \alpha) = \boldsymbol{s}(y, x, \alpha)$;
4. $S(\boldsymbol{s}(x, y, \alpha), \boldsymbol{s}(y, z, \beta)) \geq \boldsymbol{s}(x, z, \alpha + \beta)$;
5. $\boldsymbol{s}(x, y, \_) : (0, +\infty) \to [0, 1]$ *je neprekidna funkcija.*

*Fazi skup $\boldsymbol{s}$ zovemo fazi $S-$metrika u odnosu na $t-$konormu $S$. Ako umesto 1. važi $\boldsymbol{s}(x, y, \alpha) \in [0, 1]$, za fazi skup $\boldsymbol{s}$ kažemo da je fazi $S-$metrika u širem smislu, a $(X, \boldsymbol{s}, S)$ fazi $S-$metrički prostor u širem smislu.*

**Definicija 4.2.2** *[34] Fazi $T-$metrički prostor je uređena trojka $(X, \boldsymbol{t}, T)$ takva da je $X$ neprazan skup, $T$ je neprekidna t-norma i $\boldsymbol{t}$ je fazi skup na $X \times X \times (0, +\infty)$ koji zadovoljava sledeće uslove za sve $x, y, z \in X, \alpha, \beta > 0$:*

*1.* $\boldsymbol{t}(x, y, \alpha) \in (0, 1]$;

*2.* $\boldsymbol{t}(x, y, \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = y$;

*3.* $\boldsymbol{t}(x, y, \alpha) = \boldsymbol{t}(y, x, \alpha)$;

*4.* $T(\boldsymbol{t}(x, y, \alpha), \boldsymbol{t}(y, z, \beta)) \leq \boldsymbol{t}(x, z, \alpha + \beta)$;

*5.* $\boldsymbol{t}(x, y, \_) : (0, +\infty) \to [0, 1]$ *je neprekidna funkcija.*

*Fazi skup* $\boldsymbol{t}$ *zovemo fazi* $T-$*metrika. Ako umesto 1. važi* $\boldsymbol{t}(x, y, \alpha) \in [0, 1]$, *za fazi skup* $\boldsymbol{t}$ *kažemo da je fazi* $T-$*metrika u širem smislu, a* $(X, \boldsymbol{t}, T)$ *fazi* $T-$*metrički prostor u širem smislu.*

**Definicija 4.2.3** *[34] Fazi* $S-$ *metrika* $\boldsymbol{s}$ *(*$T-$ *metrika* $\boldsymbol{t}$*) je stacionarna na* $X$ *ako* $\boldsymbol{s}$ *(*$\boldsymbol{t}$*) ne zavisi od* $\alpha$*, tj. ako je za sve fiksirane* $x, y \in X$, *funkcija* $\boldsymbol{s}_{x,y}(\alpha) = \boldsymbol{s}(x, y, \alpha) = \boldsymbol{s}(x, y)$ *(*$\boldsymbol{t}_{x,y}(\alpha) = \boldsymbol{t}(x, y, \alpha) == \boldsymbol{t}(x, y)$*) konstantna.*

**Teorema 4.2.1** *[34] Ako je* $(X, \boldsymbol{s}, S)$ *fazi* $S-$*metrički prostor i* $T$ $t-$*norma dualna sa* $t-$*konormom* $S$ *u odnosu na neprekidni i involutivni fazi komplement* $c$, *tada je* $(X, c \circ \boldsymbol{s}, T)$ *fazi* $T-$*metrički prostor.*

*Ako je* $(X, \boldsymbol{t}, T)$ *fazi* $T-$*metrički prostor i* $S$ $t-$*konorma dualna sa normom* $T$ *u odnosu na neprekidni i involutivni fazi komplement* $c$, *tada je* $(X, c \circ \boldsymbol{t}, S)$ *fazi* $S-$*metrički prostor.*

Dokaz. Primetimo najpre da je $c$ injektivna (bijektivna), a time i striktno monotona.

1. $0 \leq \boldsymbol{s}(x, y, \alpha) < 1$
$\Rightarrow 1 = c(0) \geq c(\boldsymbol{s}(x, y, \alpha)) > c(1) = 0.$

2. $x = y \Leftrightarrow \boldsymbol{s}(x, y, \alpha) = 0$
$\Leftrightarrow\ c(\boldsymbol{s}(x, y, \alpha)) = c(0) = 1.$

3. $\boldsymbol{s}(x, y, \alpha) = \boldsymbol{s}(y, x, \alpha)$
$\Rightarrow\ c(\boldsymbol{s}(x, y, \alpha)) = c(\boldsymbol{s}(y, x, \alpha)).$

4. $S(\boldsymbol{s}(x, y, \alpha), \boldsymbol{s}(y, z, \beta)) \geq \boldsymbol{s}(x, z, \alpha + \beta)$
$\Rightarrow\ c(S(\boldsymbol{s}(x, y, \alpha), \boldsymbol{s}(y, z, \beta))) \leq c(\boldsymbol{s}(x, z, \alpha + \beta))$
$\Leftrightarrow\ T(c(\boldsymbol{s}(x, y, \alpha)), c(\boldsymbol{s}(y, z, \beta))) \leq c(\boldsymbol{s}(x, z, \alpha + \beta)).$

5. $c : [0, 1] \to [0, 1]$ je neprekidna i $\boldsymbol{s}(x, y, \_) : (0, +\infty) \to [0, 1]$ je neprekidna, pa je i složena funkcija $c \circ \boldsymbol{s}(x, y, \_) : (0, +\infty) \to [0, 1]$ neprekidna.

Za drugi deo teoreme, dokaz je analogan. $\square$

Tvrđenje važi i kada su u pitanju fazi metrički prostori u širem smislu.

**Primer 4.2.1** *Preslikavanje* $\mathbf{t} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *definisano sa* $\mathbf{t}(x,y) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K}$, *gde je* $K > 0$, *je fazi* $T$*-metrika u odnosu na množenje, a* $\mathbf{s}(x,y) = \frac{|x-y|}{\max(x,y)+K}$ *je fazi* $S$*-metrika u odnosu na algebarski zbir* $S(x,y) = 1-(1-x)(1-y) = x+y-xy$, *je njoj dualna u odnosu na standardni fazi komplement.*

1. $x, y \in \mathbb{R}^+, K > 0 \Rightarrow 0 < \min\{x,y\} + K \leq \max\{x,y\}$
   $\Rightarrow 1 \geq \mathbf{t}(x,y) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} > 0.$

2. $\mathbf{t}(x,y) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} = 1 \Leftrightarrow \min\{x,y\} + K = \max\{x,y\} + K \Leftrightarrow \min\{x,y\} = \max\{x,y\} \Leftrightarrow x = y$

3. $\mathbf{t}(x,y) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} = \frac{\min\{y,x\}+K}{\max\{y,x\}+K} = \mathbf{t}(y,x)$

4. *Imamo šest slučajeva:* 1) $x \leq y \leq z$, 2) $x \leq z \leq y$, 3) $y \leq x \leq z$, 4) $z \leq y \leq x$, 5) $z \leq x \leq y$, 6) $y \leq z \leq x$, *dovoljno je ispitati prva tri jer menjanjem mesta* $x$ *i* $z$, *zbog* $\mathbf{t}(x,y) \cdot \mathbf{t}(y,z) \leq \mathbf{t}(x,z) \Leftrightarrow \mathbf{t}(z,y) \cdot \mathbf{t}(y,x) \leq \mathbf{t}(z,x)$ *slede ostala tri.*
   *1)* $\mathbf{t}(x,y) \cdot \mathbf{t}(y,z) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} \cdot \frac{\min\{y,z\}+K}{\max\{y,z\}+K} = \frac{x+K}{y+K} \cdot \frac{y+K}{z+K} = \frac{x+K}{z+K} = \frac{\min\{x,z\}+K}{\max\{x,z\}+K} = \mathbf{t}(x,z)$,
   *2)* $\mathbf{t}(x,y) \cdot \mathbf{t}(y,z) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} \cdot \frac{\min\{y,z\}+K}{\max\{y,z\}+K} = \frac{x+K}{y+K} \cdot \frac{z+K}{y+K} \leq \frac{x+K}{z+K} \cdot \frac{z+K}{z+K} = \frac{\min\{x,z\}+K}{\max\{x,z\}+K} = \mathbf{t}(x,z)$,
   *3)* $\mathbf{t}(x,y) \cdot \mathbf{t}(y,z) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} \cdot \frac{\min\{y,z\}+K}{\max\{y,z\}+K} = \frac{y+K}{x+K} \cdot \frac{y+K}{z+K} \leq \frac{x+K}{x+K} \cdot \frac{x+K}{z+K} = \frac{\min\{x,z\}+K}{\max\{x,z\}+K} = \mathbf{t}(x,z)$.

5. *Po parametru* $K$ *je* $\mathbf{t}$ *očigledno neprekidna funkcija.*

**Primer 4.2.2** *Preslikavanje* $\mathbf{t} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *definisano sa* $\mathbf{t}(x,y) = \frac{\frac{x+y}{2}+K}{\max\{x,y\}+K}$, *gde je* $K > 0$, *je fazi* $T$*-metrika u odnosu na množenje, a* $\mathbf{s}(x,y) = \frac{|x-y|}{2(\max(x,y)+K)}$ *je fazi* $S$*-metrika u odnosu na algebarski zbir, je njoj dualna u odnosu na standardni fazi komplement.*

1. $x, y \in \mathbb{R}^+, K > 0$. *Bez umanjenja opštosti, neka je* $x \leq y$. *Tada je*
   $x + y \leq y + y = 2y = 2\max\{x,y\}$
   $\Rightarrow \frac{x+y}{2} \leq \max\{x,y\}$
   $\Rightarrow 0 < \frac{x+y}{2} + K \leq \max\{x,y\} + K$
   $\Rightarrow 1 \geq \mathbf{t}(x,y) = \frac{\frac{x+y}{2}+K}{\max\{x,y\}+K} > 0.$

*2.* ($\Leftarrow$) $x=y \Rightarrow \mathbf{t}(x,y)=\frac{\frac{x+x}{2}+K}{\max\{x,x\}+K}=\frac{x+K}{x+K}=1$

($\Rightarrow$) $\mathbf{t}(x,y)=\frac{\frac{x+y}{2}+K}{\max\{x,y\}+K}=1 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2}+K=\max\{x,y\}+K \Leftrightarrow x+y=2\max\{x,y\}:$

$x \geq y \Rightarrow x+y=2x \Rightarrow y=x,$

$x \leq y \Rightarrow\ x+y=2y \Rightarrow x=y.$

*3.* $\mathbf{t}(x,y)=\frac{\frac{x+y}{2}+K}{\max\{x,y\}+K}=\frac{\frac{y+x}{2}+K}{\max\{y,x\}+K}=\mathbf{t}(y,x).$

*4. Ispitajmo slučajeve:* 1) $x \leq y \leq z$, 2) $x \leq z \leq y$, *i* 3) $y \leq x \leq z$, *Zbog jednostavnosti ispisivanja uvodimo smene:* $X=x+K, Y=y+K, Z=z+K.$

*1)* $\mathbf{t}(x,y)\cdot\mathbf{t}(y,z)=\frac{1}{2}\frac{X+Y}{Y}\cdot\frac{1}{2}\frac{Y+Z}{Z}\leq\frac{1}{2}\frac{X+Z}{Z}=\mathbf{t}(x,z)$

$\Leftrightarrow\ (X+Y)(Z+Y)\leq 2(X+Z)Y$

$\Leftrightarrow\ Y^2+XY+ZY+XZ\leq 2XY+2ZY$

$\Leftrightarrow\ Y^2-(X+Z)Y+XZ\leq 0$

$\Leftrightarrow\ (Y-X)(Y-Z)\leq 0$

$\Leftrightarrow \top.$

*Data nejednakost je tačna jer je:* $X\leq Y$ *i* $Y\leq Z.$

*2)* $\mathbf{t}(x,y)\cdot\mathbf{t}(y,z)=\frac{1}{2}\frac{x+K+y+K}{y+K}\cdot\frac{1}{2}\frac{y+K+z+K}{y+K}\leq\frac{1}{2}\frac{x+K+z+K}{z+K}=\mathbf{t}(x,z)$

$\Leftrightarrow \frac{X+Y}{Y}\cdot\frac{Y+Z}{Y}\leq 2\frac{X+Z}{Z}$

$\Leftrightarrow\ \big(Y^2+(X+Z)Y+XZ\big)Z\leq 2(X+Z)Y^2$

$\Leftrightarrow (X+Z)ZY+XZ^2\leq 2XY^2+ZY^2$

$\Leftrightarrow\ XZY+Z^2Y+XZ^2\leq XY^2+XY^2+ZY^2.$

*Data nejednakost je tačna jer važi:*

$Z\leq Y\Rightarrow XZY\leq XY^2,$

$Z\leq Y\Rightarrow XZ^2\leq XY^2,$

$Z\leq Y\Rightarrow Z^2Y\leq ZY^2.$

*3)* $\mathbf{t}(x,y)\cdot\mathbf{t}(y,z)=\frac{1}{2}\frac{X+Y}{X}\cdot\frac{1}{2}\frac{Y+Z}{Z}\leq\frac{1}{2}\frac{X+Z}{Z}=\mathbf{t}(x,z)$

$\Leftrightarrow (X+Y)(Y+Z)\leq 2X\cdot(X+Z).$

*Data nejednakost je tačna jer je:*

$Y\leq X\Rightarrow X+Y\leq 2X,\ \ Y\leq X\Rightarrow Y+Z\leq X+Z.$

*5. Po parametru* $K$ *je* $\mathbf{t}$ *očigledno neprekidna funkcija.*

**Primer 4.2.3** *Preslikavanje* $\mathbf{t}:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $p>0$ *definisano sa* $\mathbf{t}(x,y)=\frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}}{\max\{x,y\}}$, *je fazi* $T$*-metrika u odnosu na množenje.*

*1.* $x,y\in\mathbb{R}^+$. *Bez umanjenja opštosti, neka je* $x\le y$. *Tada je* $x^p\le y^p\Rightarrow x^p+y^p\le 2y^p\Rightarrow \frac{x^p+y^p}{2}\le y^p\Rightarrow \sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}\le \sqrt[p]{y^p}=y=\max\{x,y\}$, *odnosno* $1\ge \mathbf{t}(x,y)=\frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}}{\max\{x,y\}}>0$.

*2.* $(\Leftarrow)$ $x=y\Rightarrow\ \mathbf{t}(x,y)=\frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+x^p}{2}}}{\max\{x,x\}}=\frac{\sqrt[p]{\frac{2x^p}{2}}}{x}=1.$

$(\Rightarrow)$ $\mathbf{t}(x,y)=1\Rightarrow \sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}=\max\{x,y\}$

$x\le y\Rightarrow \sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}=y\Rightarrow \frac{x^p+y^p}{2}=y^p\Rightarrow x^p=y^p\ (x,y>0)\Rightarrow x=y,$

$y\le x\Rightarrow \sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}=x\Rightarrow \frac{x^p+y^p}{2}=x^p\Rightarrow y^p=x^p\ (x,y>0)\Rightarrow y=x.$

*3.* $\mathbf{t}(x,y)=\frac{\frac{\sqrt[p]{x^p+y^p}}{2}}{\max\{x,y\}}=\frac{\frac{\sqrt[p]{y^p+x^p}}{2}}{\max\{y,x\}}=\mathbf{t}(y,x).$

*4. Ispitajmo slučajeve:* 1) $x\le y\le z$, 2) $x\le z\le y$, 3) $y\le x\le z$.

*1)* $\mathbf{t}(x,y)\cdot\mathbf{t}(y,z)=\frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}}{y}\cdot\frac{\sqrt[p]{\frac{y^p+z^p}{2}}}{z}$

$\le \frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+z^p}{2}}}{z}=\mathbf{t}(x,z)$

$\Leftrightarrow\ (x^p+y^p)(y^p+z^p)\le 2y^p(x^p+z^p)$

$\Leftrightarrow\ (y^p)^2+x^pz^p\le y^px^p+y^pz^p$

$\Leftrightarrow\ 0\le y^p(z^p-y^p)-x^p(z^p-y^p)$

$\Leftrightarrow\ 0\le (y^p-x^p)(z^p-y^p)$

$\Leftrightarrow\ \top.$

*2)* $\mathbf{t}(x,y)\cdot\mathbf{t}(y,z)=\frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}}{y}\cdot\frac{\sqrt[p]{\frac{y^p+z^p}{2}}}{y}\le\frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+z^p}{2}}}{\max\{x,z\}}=\mathbf{t}(x,z)$

$\Leftrightarrow\ z^p(x^p+y^p)(y^p+z^p)\le 2(y^p)^2(x^p+z^p)$

$\Leftrightarrow\ z^px^py^p+x^p(z^p)^2+(z^p)^2y^p\le 2(y^p)^2x^p+(y^p)^2z^p$

$\Leftrightarrow\ 0\le (y^p)^2x^p-x^pz^py^p+(y^p)^2x^p-x^p(z^p)^2+(y^p)^2z^p-y^p(z^p)^2$

$\Leftrightarrow\ 0\le y^px^p(y^p-z^p)+x^p(y^p+z^p)(y^p-z^p)+y^pz^p(y^p-z^p)$

$\Leftrightarrow\ 0\le (y^p-z^p)(2y^px^p+x^pz^p+y^pz^p)$

$\Leftrightarrow \top.$

*3)* $\mathbf{t}(x,y)\cdot\mathbf{t}(y,z)=\frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}}{x}\cdot\frac{\sqrt[p]{\frac{y^p+z^p}{2}}}{z}$

$\le \frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+z^p}{2}}}{z}=\mathbf{t}(x,z)$

$\Leftrightarrow\ (x^p+y^p)(y^p+z^p)\le 2x^p(x^p+z^p)$

$\Leftrightarrow\ x^py^p+(y^p)^2+y^pz^p\le 2(x^p)^2+x^pz^p$

$\Leftrightarrow\ 0\le (x^p)^2-(y^p)^2+(x^p)^2-x^py^p+x^pz^p-y^pz^p$

$\Leftrightarrow\ 0\le (x^p-y^p)(2x^p+y^p+z^p)$

$\Leftrightarrow \top.$

*5. U pitanju je stacionarna fazi metrika, tj. po parametru $\alpha$ je konstantna funkcija, pa time i neprekidna.*

**Primer 4.2.4** *Ako je $(X, d)$ metrički prostor, tada je preslikavanje $\mathbf{t} : X \times X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definisano sa*

$$\mathbf{t}(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)},$$

*fazi $T$-metrika u odnosu na množenje i njoj dualna (u odnosu na standardni fazi komplement) $\mathbf{s}(x, y, t) = 1 - \mathbf{t}(x, y, t) = \frac{d(x,y)}{t+d(x,y)}$ fazi $S$-metrika u odnosu na algebarski zbir.*

*Dokažimo samo 4. osobinu jer se prostale tri dokazuju direktno pomoću osobina standardne metrike.*
$\mathbf{t}(x, y, t_1) \cdot \mathbf{t}(y, z, t_2) = \frac{t_1}{t_1+d(x,y)} \cdot \frac{t_2}{t_2+d(y,z)} \leq \frac{t_1+t_2}{t_1+t_2+d(x,z)} = \mathbf{t}(x, z, t_1 + t_2)$
$\Leftrightarrow t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2 + t_1 t_2 d(x, z) \leq t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2 + t_2(t_1 + t_2) d(x, y) + t_1(t_1 + t_2) d(y, z) + (t_1 + t_2) d(x, y) d(y, z)$
$\Leftrightarrow t_1 t_2 d(x, z) \leq t_1 t_2 (d(x, y) + d(y, z)) + t_2^2 d(x, y) + t_1^2 d(y, z) + (t_1 + t_2) d(x, y) d(y, z)$
$\Leftrightarrow \top$.

**Teorema 4.2.2** *[34] Neka je $\boldsymbol{s}$ stacionarna fazi $S-$metrika (u širem smislu) u odnosu na $t-$konormu $S$. Ako je $S$ Arhimedova $t-$konorma i $g$ njoj odgovarajući rastući generator, tada je $d = g \circ \boldsymbol{s}$ standardna metrika.*

Dokaz.

1. Kako je $g$ strogo rastuća, iz $1 > \boldsymbol{s}(x, y) \geq 0$ sledi $g(1) > d(x, y) = g(\boldsymbol{s}(x, y)) \geq g(0) = 0$. Za fazi $S-$metriku u širem smislu važi $g(1) \geq d(x, y) \geq 0$.

2. Iz striktne monotonosti funkcije $g$ sledi njena injektivnost te je $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$, a zbog uslova 2. fazi metrike, imamo: $d(x, y) = g(\boldsymbol{s}(x, y)) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

3. $\boldsymbol{s}(x, y) = \boldsymbol{s}(y, x) \Rightarrow$
   $d(x, y) = g(\boldsymbol{s}(x, y)) = g(\boldsymbol{s}(y, x)) = d(y, x)$.

4. Iz uslova 4. definicije fazi $S-$metrike $\boldsymbol{s}$ i Teoreme o reprezentaciji $t-$konorme $S$ je $S(\boldsymbol{s}(x, y), \boldsymbol{s}(y, z)) = g^{(-1)}(g(\boldsymbol{s}(x, y)) + g(\boldsymbol{s}(y, z)) \geq \boldsymbol{s}(x, z)$, a kako je $g$ rastući generator imamo

   $g(g^{(-1)}(g(\boldsymbol{s}(x, y)) + g(\boldsymbol{s}(y, z))) \geq g(\boldsymbol{s}(x, z))$.

Za $g(\boldsymbol{s}(x,y))+g(\boldsymbol{s}(y,z)) \in [0, g(1)]$ je $g(\boldsymbol{s}(x,y)) + g(\boldsymbol{s}(y,z)) \geq g(\boldsymbol{s}(x,z))$, tj. za $d$ važi nejednakost trougla. U slučaju da je $g(\boldsymbol{s}(x,y)) + g(\boldsymbol{s}(y,z)) \geq g(1)$, a zbog $1 > \boldsymbol{s}(x,z)$ je $g(1) > g(\boldsymbol{s}(x,z))$, odnosno važi nejednakost trougla.

□

**Teorema 4.2.3** *[34] Neka je $\boldsymbol{t}$ stacionarna fazi $T-$metrika (u širem smislu) u odnosu na $t-$normu i $T$. Ako je $T$ Arhimedova $t-$norma i $g$ njoj odgovarajući opadajući generator, tada je $d = g \circ \boldsymbol{t}$ standardna metrika.*

Dokaz.

1. Kako je $g$ strogo opadajuća, iz $1 \geq \boldsymbol{t}(x,y) > 0$ sledi $0 = g(1) \leq d(x,y) = g(\boldsymbol{t}(x,y)) < g(0)$. Za fazi $T-$metriku u širem smislu važi $0 \leq d(x,y) \leq g(0)$.

2. Iz striktne monotonosti funkcije $g$ sledi njena injektivnost te je $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$, a zbog uslova 2. fazi metrike, imamo: $d(x,y) = g(\boldsymbol{t}(x,y)) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{t}(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

3. $\boldsymbol{t}(x,y) = \boldsymbol{t}(y,x) \Rightarrow$ $d(x,y) = g(\boldsymbol{t}(x,y)) = g(\boldsymbol{t}(y,x)) = d(y,x)$.

4. Iz uslova 4. definicije fazi $T-$metrike $\boldsymbol{t}$ i Teoreme o reprezentaciji $t-$norme $T$ je $T(\boldsymbol{t}(x,y), \boldsymbol{t}(y,z)) = g^{(-1)}(g(\boldsymbol{t}(x,y))+g(\boldsymbol{t}(y,z)) \leq \boldsymbol{t}(x,z)$, a kako je $g$ opadajući generator imamo

   $g(g^{(-1)}(g(\boldsymbol{t}(x,y)) + g(\boldsymbol{t}(y,z))) \geq g(\boldsymbol{t}(x,z))$.

   Za $g(\boldsymbol{t}(x,y))+g(\boldsymbol{t}(y,z)) \in [0, g(0)]$ je $g(\boldsymbol{t}(x,y)) + g(\boldsymbol{t}(y,z)) \geq g(\boldsymbol{t}(x,z))$, tj. za $d$ važi nejednakost trougla. U slučaju da je $g(\boldsymbol{t}(x,y))+g(\boldsymbol{t}(y,z)) > g(0)$, a zbog $0 < \boldsymbol{t}(x,z)$ je $g(0) > g(\boldsymbol{t}(x,z))$, odnosno važi nejednakost trougla.

□

**Teorema 4.2.4** *Ako su $\boldsymbol{s}_1 : X \times X \times (0,+\infty) \to [0,1)$ i $\boldsymbol{s}_2 : X \times X \times (0,+\infty) \to [0,1)$ fazi $S-$metrike, u odnosu striktnu triangularnu konorm $S$, tada je i preslikavanje $\sigma(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) : X \times X \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definisano sa*

$$\sigma(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)(x,y,\alpha) = S(\boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha), \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha))$$

*fazi $S-$metrika u odnosu na konormu $S$. Ako $S$ nije striktna, onda je $\sigma(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)$ fazi $S-$metrika u širem smislu.*

Dokaz.

1. Iz osobine 1. za $\boldsymbol{s}_1$ i $\boldsymbol{s}_2$ je $\boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha), \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha) \in [0,1]$, pa kako je $S$ $t-$konorma sledi
   $S(\boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha), \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha)) \in [0,1]$.
   Ako je $S$ striktna, onda iz $\boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha), \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha) \in [0,1)$ iz Remark 1.1.10, sledi $S(\boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha), \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha)) \in [0,1)$.

2. Iz osobine $S(a_1, a_2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$, iznete u Remark 1.1.9, sledi $S(\boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha), \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha) = \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

3. Triangularna konorma $S$ je dobro definisana, te važi
   $\boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha) = \boldsymbol{s}_1(y,x,\alpha) \wedge \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha) = \boldsymbol{s}_2(y,x,\alpha)$
   $\Rightarrow\ S(\boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha), \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha))$
   $= S(\boldsymbol{s}_1(y,x,\alpha), \boldsymbol{s}_2(y,x,\alpha))$.

4. Zbog jednostavnijeg zapisa, uvodimo oznake:
   $a_1 = \boldsymbol{s}_1(x,y,\alpha), a_2 = \boldsymbol{s}_2(x,y,\alpha), b_1 = \boldsymbol{s}_1(y,z,\beta), b_2 = \boldsymbol{s}_2(y,z,\beta), c_1 = \boldsymbol{s}_1(x,z,\alpha+\beta), c_2 = \boldsymbol{s}_2(x,z,\alpha+\beta)$.

   Iz aksiome 4. metrika $\boldsymbol{s}_1$ i $\boldsymbol{s}_2$ imamo
   $$S(a_1,b_1) \leq c_1, \quad S(a_2,b_2) \leq c_2,$$
   pa zbog monotonosti po koordinatama sledi:
   $$S(S(a_1,b_1), S(a_2,b_2)) \leq S(c_1,c_2). \tag{4.1}$$
   Iz asocijativnosti i komutativnosti od $S$ imamo
   $S(S(a_1,b_1), S(a_2,b_2)) = S(a_1, S(b_1, S(a_2,b_2))) =$
   $S(a_1, S(S(b_1,a_2),b_2)) = S(a_1, S(S(a_2,b_1),b_2)) =$
   $S(a_1, S(a_2, S(b_1,b_2))) = S(S(a_1,a_2), S(b_1,b_2))$, pa zbog (4.1) važi
   $$S(S(a_1,a_2), S(b_1,b_2)) \leq S(c_1,c_2).$$

5. Funkcije $\boldsymbol{s}_1(x,y,\_)$ i $\boldsymbol{s}_2(x,y,\_)$ kao i $t-$konorma $S$ su neprekidne, pa je i $\sigma(\boldsymbol{s}_1(x,y,\_), \boldsymbol{s}_2(x,y,\_))$ neprekidna funkcija.

□

**Teorema 4.2.5** *[34] Ako su* $\boldsymbol{t}_1 : X \times X \times (0,+\infty) \to (0,1]$ *i* $\boldsymbol{t}_2 : X \times X \times (0,+\infty) \to (0,1]$ *fazi* $T-$*metrike u odnosu na striktnu triangularnu normu* $T$, *tada je i preslikavanje* $\tau(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2) : X \times X \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *definisano sa*

$$\tau(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2)(x,y,\alpha) = T(\boldsymbol{t}_1(x,y,\alpha), \boldsymbol{t}_2(x,y,\alpha))$$

*fazi $T-$metrika u odnosu na normu $T$. Ako $T$ nije striktna, onda je $\tau(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)$ fazi $T-$metrika u širem smislu.*

**Teorema 4.2.6** *Ako su $\boldsymbol{t}_i : X_i \times X_i \to (0,1]$ fazi $T-$metrike u odnosu na striktnu triangularnu normu $T$, tada je $\boldsymbol{t} : X^2 \to [0,1]$, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ data sa*

$$\boldsymbol{t}(x,y) = T^{n-1}(\boldsymbol{t}_1(x_1,y_1), \boldsymbol{t}_2(x_2,y_2), ..., \boldsymbol{t}_n(x_n,y_n)),$$
$$x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n),$$

*fazi $T-$metrika u odnosu na triangularnu normu $T$. Ako $T$ nije striktna, onda je $\boldsymbol{t}$ fazi $T-$metrika u širem smislu.*

Dokaz. 1. $\boldsymbol{t}_i(x_i, y_i) \in (0,1]$
$\Rightarrow \boldsymbol{t}(x,y) = T^{n-1}(\boldsymbol{t}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{t}_n(x_n,y_n)) \in [0,1]$.

Ako je $T$ striktna triangularna norma, onda je i $T^{n-1}$ striktno monotona funkcija, pa iz $\boldsymbol{t}_i(x_i, y_i) \in (0,1]$, na osnovu Remark 1.1.5 sledi
$\boldsymbol{t}(x,y) = T^{n-1}(\boldsymbol{t}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{t}_n(x_n,y_n)) \in (0,1]$.

2. Iz Remark 1.1.4 je
$\boldsymbol{t}(x,y) = T^{n-1}(\boldsymbol{t}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{t}_n(x_n,y_n)) = 1$
$\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ \boldsymbol{t}_i(x_i, y_i) = 1$
$\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ x_i = y_i \Leftrightarrow x = y$.

3. $\boldsymbol{t}(x,y) = T^{n-1}(\boldsymbol{t}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{t}_n(x_n,y_n))$
$= T^{n-1}(\boldsymbol{t}_1(y_1,x_1), ..., \boldsymbol{t}_n(y_n,x_n)) = \boldsymbol{t}(y,x)$.

4. Iz 4. aksiome za fazi $T-$metrike $\boldsymbol{t}_i$ je
$T(\boldsymbol{t}_i(x_i,y_i), \boldsymbol{t}_i(y_i,z_i)) \le \boldsymbol{t}_i(x_i,z_i),\ i \in \{1, ..., n\}$, pa je
$T(\boldsymbol{t}(x,y), \boldsymbol{t}(y,z))$
$= T(T^{n-1}(\boldsymbol{t}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{t}_n(x_n,y_n)),$
$T^{n-1}(\boldsymbol{t}_1(y_1,z_1), ..., \boldsymbol{t}_n(y_n,z_n)))$
$= T^{2n-1}(\boldsymbol{t}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{t}_n(x_n,y_n),$
$\boldsymbol{t}_1(y_1,z_1), ..., \boldsymbol{t}_n(y_n,z_n))$
$= T^{2n-1}(\boldsymbol{t}_1(x_1,y_1), \boldsymbol{t}_1(y_1,z_1), ...,$
$\boldsymbol{t}_n(x_n,y_n), \boldsymbol{t}_n(y_n,z_n))$
$= T^{n-1}(T(\boldsymbol{t}_1(x_1,y_1), \boldsymbol{t}_1(y_1,z_1)), ...,$
$T(\boldsymbol{t}_n(x_n,y_n)), \boldsymbol{t}_n(y_n,z_n))$
$\le T^{n-1}(\boldsymbol{t}_1(x_1,z_1)), ..., \boldsymbol{t}_n(x_n,z_n)) = \boldsymbol{t}(x,z)$.

5. Pošto su fazi $T-$metrike, kao konstantne funkcije po parametru $\alpha$ neprekidne i $T$ je neprekidna $t-$norma, onda je i njihova kompozicija neprekidna funkcija.

$\square$

**Teorema 4.2.7** *Ako su* $\boldsymbol{s}_i : X_i \times X_i \to [0,1)$ *fazi* $S-$*metrike u odnosu na striktnu triangularnu konormu* $S$, *tada je* $\boldsymbol{s} : X^2 \to [0,1]$, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ *data sa*

$$\boldsymbol{s}(x,y) = S^{n-1}(\boldsymbol{s}_1(x_1,y_1), \boldsymbol{s}_2(x_2,y_2), ..., \boldsymbol{s}_n(x_n,y_n)),$$

$$x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n),$$

*fazi* $S-$*metrika u odnosu na triangularnu konormu* $S$. *Ako* $S$ *nije striktna, onda je* $\boldsymbol{s}$ *fazi* $S-$*metrika u širem smislu.*

Dokaz. 1. $\boldsymbol{s}_i(x_i,y_i) \in [0,1)$
$\Rightarrow \boldsymbol{s}(x,y) = S^{n-1}(\boldsymbol{s}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{s}_n(x_n,y_n)) \in [0,1]$.

Ako je $S$ striktna triangularna konorma, onda je i $S^{n-1}$ striktno monotona funkcija, pa iz $\boldsymbol{s}_i(x_i,y_i) \in [0,1)$, sledi
$\boldsymbol{s}(x,y) = S^{n-1}(\boldsymbol{s}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{s}_n(x_n,y_n)) \in [0,1)$.

2. $\boldsymbol{s}(x,y) = S^{n-1}(\boldsymbol{s}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{s}_n(x_n,y_n)) = 0$
$\Leftrightarrow\ (\forall i \in \{1, \dots, n\})\ \boldsymbol{s}_i(x_i,y_i) = 0$
$\Leftrightarrow\ (\forall i \in \{1, \dots, n\})\ x_i = y_i$
$\Leftrightarrow\ x = y$.

3. $\boldsymbol{s}(x,y) = S^{n-1}(\boldsymbol{s}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{s}_n(x_n,y_n))$
$= S^{n-1}(\boldsymbol{s}_1(y_1,x_1), ..., \boldsymbol{s}_n(y_n,x_n))$
$= \boldsymbol{s}(y,x)$.

4. Iz 4. aksiome za fazi $S-$metrike $\boldsymbol{s}_i$ je
$S(\boldsymbol{s}_i(x_i,y_i), \boldsymbol{s}_i(y_i,z_i)) \geq \boldsymbol{s}_i(x_i,z_i),\ i \in \{1, ..., n\}$, pa je
$S(\boldsymbol{s}(x,y), \boldsymbol{s}(y,z))$
$= S(S^{n-1}(\boldsymbol{s}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{s}_n(x_n,y_n)),$
$S^{n-1}(\boldsymbol{s}_1(y_1,z_1), ..., \boldsymbol{s}_n(y_n,z_n)))$
$= S^{2n-1}(\boldsymbol{s}_1(x_1,y_1), ..., \boldsymbol{s}_n(x_n,y_n),$
$\boldsymbol{s}_1(y_1,z_1), ..., \boldsymbol{s}_n(y_n,z_n))$
$= S^{2n-1}(\boldsymbol{s}_1(x_1,y_1), \boldsymbol{s}_1(y_1,z_1), ...,$
$\boldsymbol{s}_n(x_n,y_n), \boldsymbol{s}_n(y_n,z_n))$
$= S^{n-1}(S(\boldsymbol{s}_1(x_1,y_1), \boldsymbol{s}_1(y_1,z_1)),$
$..., S(\boldsymbol{s}_n(x_n,y_n)), \boldsymbol{s}_n(y_n,z_n))$
$\geq S^{n-1}(\boldsymbol{s}_1(x_1,z_1)), ..., \boldsymbol{s}_n(x_n,z_n))$
$= \boldsymbol{s}(x,z)$.

5. Pošto su fazi $S-$metrike, kao konstantne funkcije po parametru $\alpha$ neprekidne i $S$ je neprekidna triangularna norma, onda je i njihova kompozicija neprekidna funkcija. $\square$

**Primer 4.2.5** *Ako su* $\boldsymbol{t}_i : X_i \times X_i \to (0,1]$ *fazi* $T-$*metrike u odnosu na proizvod, tada je* $\boldsymbol{t} : X^2 \to (0,1]$, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ *dato sa*

$$\boldsymbol{t}(x,y) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{t}_i(x_i,y_i), \;\; x = (x_1,...,x_n), \; y = (y_1,...,y_n),$$

*fazi* $T-$*metrika u odnosu na proizvod.*

## 4.3 Prostori sa fazi rastojanjem

Sadašnja istraživanja pokazuju da fazi metrike imaju mogućnost primene u različitim oblastima tehnike. Specijalno, u postupku fultriranja slike one daju bolje rezultate od neke uobičajene klasične metrike.

Nažalost, korišćenje fazi metrika u inženjerskim metodama ozbiljno je ograničeno relativno malim brojem fazi metrika koje su do danas poznate u literaturi.

Kao što smo u prethodnom poglavlju videli, nije baš uvek jednostavno pokazati da za neku funkciju postoji neka neprekidna t-norma sa kojom ona postaje fazi metrika. To je razlog za dalje izučavanje i širenje teorije fazi metričkih prostora uopšte, kao i specijalno, razlog, motivacija, za ova naša istraživanja.

Svaki specijalan tip verovatnosnog metričkog prostora $(X, \mathcal{F})$ nastao nekom promenom uslova na $\mathcal{F}$ sa $M(x,y,t) = \mathcal{F}_{x,y}(t)$ vodi do novog specijalnog tipa fazi metričkog prostora $(X, M)$.

Neka je $(X, \mathcal{F})$ jaki verovatnosni metrički prostor i neka je

$$M(x,y,t) = \mathcal{F}_{x,y}(t), \; x,y \in X, \; t \in \mathbb{R}.$$

Iz definicije prostora $(X, \mathcal{F})$ sledi da funkcija $M$ ima sledeće osobine:

(M1) $M(x,y,0) = 0$ za sve $x,y \in X$;

(M2) $M(x,y,t) = M(y,x,t)$ za sve $x,y \in X$ i sve $t > 0$;

(M3) $M(x,y,t) = 1$, za sve $t > 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(M4) Postoji $C > 0$ tako da za svaki niz $\{x_n\} \subset X$ za koji je $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$, za sve $t > 0$ i sve $y \in X$ važi da je

$$M(x, y, t) \geqslant \liminf_{n\to\infty} M\left(x_n, y, \frac{t}{C}\right) \text{ za sve } t > 0;$$

(M5) Funkcija $M(x, y, \cdot) : \mathbb{R}_0^+ \to [0, 1]$ je neopadajuća i neprekidna sa leve strane;

(M6) $\lim_{t\to\infty} M(x, y, t) = 1$ za sve $x, y \in X$;

(M7) Iz $M(x, y, t) = 1$ i $M(y, z, s) = 1$ sledi da je i $M(x, z, s + t) = 1$.

Ovaj spisak osobina funkcije $M$ pomoći će nam da uvedemo pojam slabog fazi metričkog prostora.

**Definicija 4.3.1** *Ako je $X$ neprazan skup i $M : X^2 \times [0, \infty) \to [0, 1]$ fazi skup sa osobinama (M1)-(M6), onda par $(X, M)$ zovemo slabi fazi metrički prostor a funkciju $M$ fazi rastojanje na skupu $X$.*

**Napomena 4.3.1** *Podsetimo se da je u prvobitnoj definiciji fazi metričkog prostora Kramosila i Michaleka takođe bio uslov (M6) , da je kasnije nestao iz definicije, ali da se danas pojavljuje u tvrđenjima kao dodatni uslov na prostor.*

**Napomena 4.3.2** *Za fazi rastojanje $M$ ne zahtevamo da zadovoljava uslov (M7) iz jednostavnog razloga što je to vrlo često tautologija kao što je to slučaj i u primerima koje ćemo koristiti u radu.*

**Teorema 4.3.1 ([26])** *Svaki fazi metrički prostor $(X, M, *)$ u smislu Kramosil Michalek u kome je $\lim_{t\to\infty} M(x, y, t) = 1$ za sve $x, y \in X$, je slabi fazi metrički prostor.*

Dokaz. Treba samo proveriti osobinu (M4).
Neka su $x, y \in X$ i neka je $\lim_{t\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$, za neki niz $\{x_n\}$ u $X$.
Iz nejednakosti

$$M(x, y, t) \geqslant M\left(x, x_n, \frac{t}{2}\right) * M\left(x_n, y, \frac{t}{2}\right)$$

i neprekidnosti t-norme $*$ sledi da je

$$M(x,y,t) \geqslant \liminf_{n\to\infty} M\left(x_n, y, \frac{t}{2}\right), \text{ za sve } t>0,$$

što znači da je za $C=2$ ispunjen uslov (M4). Dakle, $(X,M,*)$ je slabi fazi metrički prostor, a $M$ fazi rastojanje na $X$. Može se takođe pokazati da je u netrivijalnim slučajevima uvek $C \geqslant 1$. $\square$

Prema tome fazi rastojanje je generalizovana fazi metrika, a slabi fazi metrički prostor je generalizovani fazi metrički prostor.

**Primer 4.3.1** *Prostor $(\mathbb{R}_0^+, M)$ sa funkcijom*

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \frac{\min\{x,y\}+t}{\max\{x,y\}+t} & t>0 \\ 0 & t \leqslant 0, \end{cases}$$

*je slabi fazi metrički prostor.*

U poglavlju (3.2 ) smo proverili da funkcija $M$ zadovoljava uslov (M4) i time direktno pokazali da je $M$ fazi rastojanje. Naravno, to smo mogli dobiti i kao posledicu prethodne teoreme, jer je $(\mathbb{R}_0^+, M, t)$ za $t(a,b)=a\cdot b$ fazi metrički prostor, a $(M,t)$ fazi metrika na $\mathbb{R}_0^+$.

**Primer 4.3.2** *Za $X=\mathbb{R}_0^+$ funkcija*

$$M_p(x,y,t) = \begin{cases} \frac{\sqrt[p]{\frac{x^p+y^p}{2}}+t}{\max\{x,y\}+t} & t>0 \\ 0 & t \leqslant 0, \end{cases}$$

*za $p>0$ je fazi rastojanje.*
*Poznato je da je za $p=1$ to jedna fazi metrika sa t-normom $t(a,b)=a\cdot b$, dok je u ostalim slučajevima pitanje otvoreno.*

*Pokažimo da je $M_p$, za $p=2$, fazi rastojanje.*
*Neka su $x,y\in\mathbb{R}$ i neka je niz $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}_0^+$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} M_2(x_n,x,t)=1$. To znači da*

$$1-M_2(x_n,x,t) = \frac{\max\{x_n,x\}-\sqrt{\frac{x_n^2+x^2}{2}}}{\max\{x_n,x\}+t} \to 0, n\to\infty.$$

*Za $0 \leqslant x_n < x$*

$$1-M_2(x_n,x,t)=\frac{(x-x_n)(x+x_n)}{2(x+t)(x+\sqrt{\frac{x_n^2+x^2}{2}})}\geqslant\frac{(x-x_n)x}{2(x+t)\cdot 2x}=const\cdot(x-x_n)>0,$$

*što po teoremi o uklještenim nizovima povlači da* $x_n\to x, n\to\infty$ *i u uobičajenoj topologiji na* $\mathbb{R}$.

*Za* $0<x\leqslant x_n$

$$1-M_2(x_n,x,t)=\frac{(x_n-x)(x_n+x)}{2(x_n+t)(x_n+\sqrt{\frac{x_n^2+x^2}{2}})}\to 0, n\to\infty.$$

*To pre svega znači da niz* $\{x_n\}$ *mora biti ograničen i sa gornje strane. Neka je, recimo,* $x_n\leqslant K$, *za sve* $n\in\mathbb{N}$. *Tada je*

$$1-M_2(x_n,x,t)\geqslant\frac{(x_n-x)\cdot 2x}{2(K+t)(K+\sqrt{\frac{K^2+x^2}{2}})}=(x_n-x)\cdot const>0$$

*te ponovo zaključujemo da* $x_n\to x, n\to\infty$ *i u uobičajenoj topologiji na* $\mathbb{R}$.

*Za* $0=x<x_n$

$$1-M_2(x_n,x,t)=\frac{x_n\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(x_n+t)}\to 0, n\to\infty.$$

*Iz toga prvo sledi da je niz* $\{x_n\}$ *ograničen i sa gornje strane, tj. da postoji* $K>0$ *takvo da je* $x_n\leqslant K$, *za sve* $n\in\mathbb{N}$.

*Sada iz*

$$1-M_2(x_n,x,t)=\frac{(\sqrt{2}-1)\cdot x_n}{\sqrt{2}(x_n+t)}\geqslant\frac{(\sqrt{2}-1)\cdot x_n}{\sqrt{2}(K+t)}=const\cdot x_n$$

*sledi da* $x_n\to 0=x$ *i u uobičajenoj topologiji.*

*I konačno možemo zaključiti da je*

$$M_2(x,y,t)=\lim_{n\to\infty}M_2(x_n,y,t),\ \text{za svako } t>0,$$

*te da je i uslov (M4) zadovoljen i to za* $C=1$.

Slično se dokazuje da je $M_p$, za sve $p \in \mathbb{N}$ ili $p = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, fazi rastojanje.

Na prostoru $(X, M)$ uvešćemo topologiju $M-$konveregencije.

**Definicija 4.3.2** *Neka je $(X, M)$ slabi fazi metrički prostor. Niz $\{x_n\}$ iz $X$ M-konvergira ka $x \in X$ ako je $\lim\limits_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$, za sve $t > 0$. Pišemo $\{x_n\} \xrightarrow{M} x$.*

**Teorema 4.3.2 ([26])** *Iz $\{x_n\} \xrightarrow{M} x$ i $\{x_n\} \xrightarrow{M} y$ sledi da je $x = y$.*

Dokaz. Iz osobine (M4) sledi da postoji $C > 0$ takvo da je

$$M(x, y, t) \geqslant \liminf_{n\to\infty} M\left(x_n, y, \frac{t}{C}\right), \text{ za sve } t > 0.$$

Sada iz pretpostavke da $\{x_n\} \xrightarrow{M} y$ sledi da je $M(x, y, t) = 1$, za sve $t > 0$, što na osnovu (M3) znači da je $x = y$. Dakle, granica $M-$konvergentnog niza je jedinstvena! □

**Definicija 4.3.3** *Neka je $(X, M)$ slabi fazi metrički prostor. Niz $\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}}$ je $M-$Košijev ako je $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} M(x_n, x_m, t) = 1$, za sve $t > 0$.*

*Ako je svaki $M-$Košijev niz i $M-$konvergentan u $X$, prostor $(X, M)$ je $M-$kompletan.*

Pojam fazi dijametra definisaćemo kao i u bilo kom drugom fazi metričkom prostoru.

**Definicija 4.3.4** *Neka je $(X, M)$ slab fazi metrički prostor i $A$ neprazan podskup od $X$. Funkcija*

$$D_A(t) = \sup_{s<t} \inf_{x,y\in A} M(x, y, s)$$

*naziva se fazi dijametar skupa $A$. Za $\sup\limits_{t>0} D_A(t) = 1$ kažemo da je skup $A$ fazi ograničen, za $0 < \sup\limits_{t>0} D_A(t) < 1$ da je semi-ograničen a za $\sup\limits_{t>0} D_A(t) = 0$ da je neograničen.*

Neposredno iz definicije dobijaju se sledeće osobine dijametra.

**Teorema 4.3.3** *Za proizvoljan neprazan podskup $A \subseteq X$ važi:*

1. *Funkcija $D_A$ je po $t$ neopadajuća i neprekidna sa leve strane;*
2. *Ako su $A$ i $B$ podskupovi od $X$, iz $A \subseteq B$ sledi da je $D_A \geqslant D_B$.*

Struktura slabog fazi metričkog prostora dovoljno je bogata da dozvoljava razvoj teorije nepokretne tačke. Rezultati iz teorije nepokretne tačke, koje smo dokazali u poglavlju (3.2.2) o jakim verovatnosnim metričkim prostorima sada dobijaju sledeći oblik.

Kao što je sve i krenulo u metričkoj teoriji nepokretne tačke polazimo od fazi koncepta $\lambda$-kontrakcije i fazi verzije Banahovog principa kontrakcije.

**Definicija 4.3.5** *Neka je $(X, M)$ slabi fazi metrički prostor i $f : X \to X$. Funkcije $f$ je $\lambda$-kontrakcija, $\lambda \in (0, 1)$, ako je*

$$M(fx, fy, t) \geqslant M\left(x, y, \frac{t}{\lambda}\right), \text{ za sve } t > 0 \text{ i sve } x, y \in X.$$

**Teorema 4.3.4** *Neka je $(X, M)$ $M-$kompletan slabi fazi metrički prostor i $f : X \to X$ $\lambda$-kontrakcija. Ako postoji $x_0 \in X$ takvo da je $\mathcal{O}(x_0; f)$ fazi ograničen skup, tada $f$ ima jedinstvenu nepokretnu tačku $\omega$ i $\{f^n x_0\} \xrightarrow{M} \omega$. Šta više, tada i $\{f^n x\} \xrightarrow{M} \omega$ za svako $x \in X$.*

Dokaz. Prostor $(X, \mathcal{F})$ sa $\mathcal{F}_{x,y}(t) = M(x, y, t)$, za sve $x, y \in X$ i sve $t > 0$, je jedan jaki verovatnosni metrički prostor te se može primeniti teorema 3.2.2. □

Naš poznati matematičar Lj. Ćirić, u svom poznatom radu iz 1974. [9] je uveo pojam kvazi-kontrakcije kao uopštenje pojma kontrakcije i izučavao nepokretne tačke za takva preslikavanja. U konceptu fazi metričkih prostora to dobija sledeći oblik.

**Definicija 4.3.6** *[9] Neka je $(X, M)$ slabi fazi metrički prostor. Funkcija $f : X \to X$ je kvazi-kontrakcija ako postoji broj $\lambda \in (0, 1)$ takav da je za sve $x, y \in X$ i $t > 0$*

$$M(fx, fy, t) \geqslant \min\{M\left(x, y, \frac{t}{\lambda}\right), M\left(x, fx, \frac{t}{\lambda}\right), M\left(y, fy, \frac{t}{\lambda}\right),$$
$$M\left(x, fy, \frac{t}{\lambda}\right), M\left(y, fx, \frac{t}{\lambda}\right)\}$$

**Teorema 4.3.5** *Neka je $(X, M)$ M-kompletan slabi fazi metrički prostor i $f : X \to X$ kvazi-kontrakcija za neko $\lambda \in (0,1)$. Ako postoji $x_0 \in X$ takvo da je $\mathcal{O}(x_0; f)$ fazi ograničen skup, za $C\lambda < 1$ $f$ ima jedinstvenu nepokretnu tačku $\omega$ i pri tome $\{f^n x_0\} \xrightarrow{M} \omega$. Šta više, tada $\{f^n x\} \xrightarrow{M} \omega$ za proizvoljno $x \in X$.*

Dokaz. Kao i u dokazu prethodne teoreme posmatrati prostor $(X, \mathcal{F})$ sa $\mathcal{F}_{x,y}(t) = M(x, y, t)$, za sve $x, y \in X$ i $t > 0$, i primeniti teoremu 3.2.3. $\square$

Sada ćemo posmatrati jedan važan podskup slabih fazi metričkih prostora u kojima umesto (M4) važi uslov

(M4*) Postoji $C > 0$ takvo da za proizvoljno $x, y \in X$ iz $\{x_n\} \xrightarrow{\mathrm{M}} x$ i $\{y_n\} \xrightarrow{\mathrm{M}} y$ sledi da je

$$M(x, y, t) \geqslant \liminf_{n\to\infty} M\left(x_n, y_n, \frac{t}{C}\right), \text{ za sve } t > 0.$$

**Napomena 4.3.3** *Pošto za svaki niz oblika $x_n = x$, za sve $n \in \mathbb{N}$, važi da $\{x_n\} \xrightarrow{M} x$ iz uslova (M4*) sledi uslov (M4).*

**Primer 4.3.3** *Svaki fazi metrički prostor $(X, M, *)$ u smislu Kramosil Michalek u kome je $\lim_{t\to\infty} M(x, y, t) = 1$, za sve $x, y \in X$ je slabi fazi metrički prostor sa osobinom (M4*).*

U slabim fazi metričkim prostorima sa osobinom (M4*) pokazaćemo teoremu o nepokretnoj tački Sehgal-Gusemanovog tipa.

**Teorema 4.3.6** *Neka je $(X, M)$ kompletan slabi fazi metrički prostor u kome važi osobina (M4*) i $f : X \to X$ koje zadovoljava uslov: postoji $\lambda$, $0 < \lambda < 1$ tako da za svako $x \in X$ postoji $n(x) \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $y \in X$*

$$M(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y, t) \geqslant M\left(x, y, \frac{t}{\lambda}\right), \text{ za sve } t > 0.$$

*Ako postoji $x_0 \in X$ takvo da je $\mathcal{O}(x_0; f)$ fazi ograničen skup onda $f$ ima jedinstvenu nepokretnu tačku $\omega \in X$ i pri tome $\{f^n x\} \xrightarrow{M} \omega$ za svako $x \in X$.*

Dokaz. Analogno dokazima prethodne dve teoreme posmatrati prostor $(X, \mathcal{F})$ sa $\mathcal{F}_{x,y}(t) = M(x, y, t)$, za sve $x, y \in X$ i $t > 0$, koji je $m-$jaki verovatnosni metrički prostor u kome važi teorema 3.2.4. $\square$

# Glava 5

# Filtriranje

## 5.1 Fazi filtriranje

U ovoj sekciji ćemo dati konkretne primere primene fazi rastojanja pri filtriranju slike u boji (RGB), koje daju bolji kvalitet slike u odnosu na filtriranje medijanskim filterom. Slika je određena pozicijom piksela na slici, uređenim parovima koji predstavljaju koordinate piksela, trodimenzionim vektorom koji je dodeljen svakom pikselu. Svaka od koordinata trodimenzionog vektora predstavlja vrednost boje koja je dodeljena datom pikselu, respektivno crvena, zelena, plava. Filtriranje vršimo koristeći pokretni prozor $W$, veličine $n \times n$, gde je $n$ neparan broj. Dve različite fazi metrike povezujemo u jednu koristeći jednu $t-$normu-množenje.

Vrednost srednjeg piksela u prozoru $W$ će biti određena vrednostima preostalih piksela unutar prozora, na koje će biti primenjeno jedinstveno rastojanje i postupkom koji će biti objašnjen u nastavku. Slika koja će biti obrađena označena je sa $J$. Piksel koji je trenutno u postupku obrade, označen je sa $J_t$, a koordinate trodimenzionog vektora boja označene su sa: $J_t = \{J_t^R, J_t^G, J_t^B\}$. Sa $\boldsymbol{\tau}$ je označena fazi $T-$metrika kojom se meri sličnost po bojama među pikselima. Ona je definisana na sledeći način:

$$\boldsymbol{\tau}(J_i, J_j) = \prod_{l=1}^{3} \frac{\frac{J_i^l + J_j^l}{2} + K}{\max\{J_i^l, J_j^l\} + K}. \tag{5.1}$$

Sa $\boldsymbol{t}$ je označena fazi $T-$metrika koja uzima u obzir prostorno rastojanje između piksela. Ona je definisana na sledeći način:

$$\boldsymbol{t}(J_i, J_j, t) = \frac{t}{t + |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2|}. \tag{5.2}$$

Za upoređivanje kvaliteta slika je korišćena metrika kvaliteta slike UIQI, koja je definisana u [49]. Neka su $\mathbf{x} = \{x_i | i = 1, 2, \cdots, N\}$ i $\mathbf{y} = \{y_i | i = 1, 2, \cdots, N\}$ signali originalne i test slike. Indeks kvaliteta slike je definisan sledećom formulom:

$$Q = \frac{4\sigma_{xy}\overline{x}\overline{y}}{\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right)\left[(\overline{x})^2 + (\overline{y})^2\right]},$$

gde su

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{y}\right)^2,$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right).$$

Dati indeks se može zapisati u obliku:

$$Q = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \cdot \frac{2\overline{x}\overline{y}}{(\overline{x})^2 + (\overline{y})^2} \cdot \frac{2\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Prva komponenta je koeficijent korelacije između $x$ i $y$. Druga komponenta pokazuje koliko su bliske srednje vrednosti osvetljenosti piksela $x$ i $y$. Treća komponenta meri koliko su slični kontrasti između $x$ i $y$. Metrika kvaliteta UIQI se zasniva na tome da se svako izobličenje slike posmatra kao kombinacija tri faktora: gubitak korelacije, izobličenja luminanse i izobličenja kontrasta. Kako su slike koje se filtriraju u boji (RGB), indeks kvaliteta slike UIQI se izračunava za svaku boju ponaosob. Tako dobijamo da je kvalitet slike izražen umesto jednom vrednošću trodimenzionim vektorom. Vrednost datog rastojanja za svaku boju može uzimati vrednosti iz intervala od -1 do 1. Kvalitet slike je bolji što je metrika kvaliteta slike bliža jedinici.

Dakle, konkretno u našem slučaju, kvalitet obrađene slike je bolji što je indeks svake boje bliži jedinici. Za određivanje kvaliteta slike UIQI se koristi pokretni prozor, koji prolazi kroz celu sliku. Za svaki od datih prozora se izračuna UIQI po formuli datoj u [49], zatim se na kraju vrednosti svih prozora saberu i podele sa brojem prozora. Konačan indeks kvaliteta je dat formulom:

$$Q = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} Q_j,$$

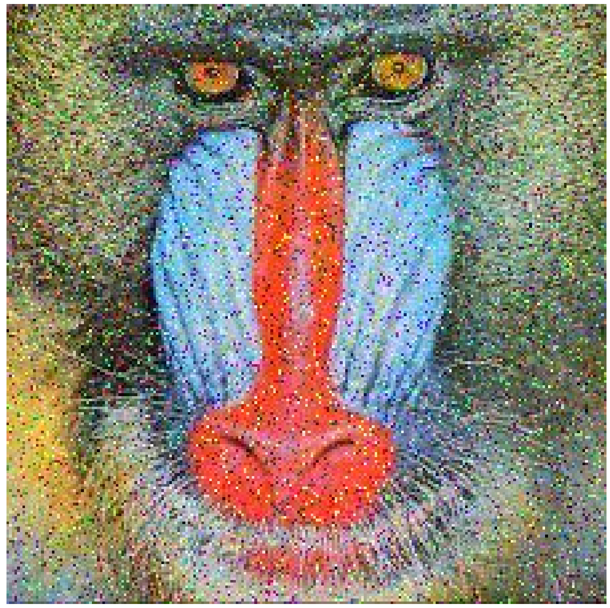
gde je $M$ broj prolaženja prozora kroz sliku. U narednim primerima primene metrike kvaliteta slike UIQI, odabrana veličina prozora je 3. Prednost datog kvaliteta u odnosu na neke druge je u njegovoj jakoj sposobnosti da izmeri strukturnu distorziju koja se dešava tokom procesa degradacije slike. Slika

Slika 5.1: Babun, 256x256

koja je data u nastavku, kontaminirana je sa 10% biber i so šuma, filtrirana je sa vektorskim medijanskim filterom i metodom za filtriranje slike, koja je predstavljena u disertaciji. Vrednosti metrike kvaliteta UIQI za svaku boju slike zašumljene sa 10% šuma iznose:

$$[0.4639, 0.4737, 0.5047].$$

Zaključeno je da za $t \in [2.6, 3.0]$ i $K \in [640, 896]$ rastojanje $\boldsymbol{c}$ koju smo definisali, daje bolji kvalitet slike u odnosu na sliku dobijenu filtriranjem medijanskim filterom, pri čemu je kvalitet slike poređen metrikom za kvalitet slike UIQI. Ovde je predstavljena slika filtrirana fazi metrikom $\boldsymbol{c}$ sa



Slika 5.2: Babun, 256x256, sa 10 % biber i so šuma

parametrima $t = 2.6$ i $K = 768$ i veličinom prozora 3. Vrednosti metrike kvaliteta UIQI za svaku boju za sliku filtriranu našom metodom iznose:

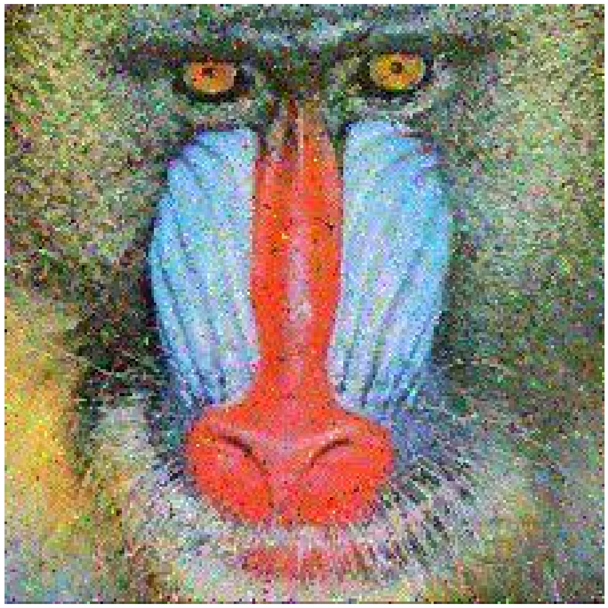
$$[0.5257, 0.5702, 0.5662].$$

Vrednosti metrike kvaliteta UIQI za svaku boju za filtriranu sliku medijanskim filterom sa veličinom prozora tri iznose:

$$[0.5033, 0.5649, 0.5447].$$

Upoređivanjem indeksa metrike za kvalitet slike UIQI za odgovajuće boje (respektivno, crvenu, zelenu, plavu), zaključujemo da su svi indeksi slike filtrirane našom metodom veći od odgovarajućih indeksa slike filtrirane medijanskim filterom. Kako su dati indeksi bliži jedinici, zaključujemo da je i kvalitet slike bolji.

Kod vektorskog medijanskog filtera se koristi "klizeći" prozor, koji je kvadrat sa neparnim brojem piksela koje obuhvata. Suština je da se srednji piksel zameni sa odgovarajućim pikselom nakon primene algoritma. Svakom od piksela sa dodeli neka skalarna veličina. Kako posmatramo RGB slike, svakom od piksela je dodeljen vektor, koji kao svoje koordinate ima luminanse odgovarajućih boja. Izračunavajući intenzitet datih vektora, koristeći



Slika 5.3: Babun, filtrirana slika, veličina prozora je 3, K=768, t=2.6

Slika 5.4: Babun, filtrirana medijanskim filterom, veličina prozora je 3

euklidsku normu, dobijamo skalar uz pomoć koga možemo da vršimo poređjenje vektora. Piksel koji je u procesu obrade, $J_t$, menjamo na kraju primene upoređivanja skalara koji predstavljaju vektore iz datog prozora sa pikselom $\bar{J}_t$. U skupu datih skalara, koji predstavljaju intenzitet vektora, određuje se medijana. Vektor čiji je intenzitet medijana je vektor $\bar{J}_t$. Analogno se postupa i sa ostalim prozorima.

Fazi $T-$metrike, fazi $S-$metrike i fazi rastojanja uopšte, definisane na način ovde prezentovan, pružaju široko polje mogućnosti za dalju primenu u obradi slike. U zavisnosti od vrste problema, tj. očekivanih performansi, mogu se izabrati odgovarajuće $t-$norme ili $t-$konorme koje doprinose ostvarivanju željenih performansi. Ovde je primenjen jedan tip fazi $T-$metrika, pri konstruisanju algoritma za filtriranje slike. Zaključili smo da je za parametre u određenom opsegu, korišćenjem metrike za kvalitet slike UIQI, kvalitet slike filtriran našim postupkom bolji od kvaliteta slike dobijene filtriranjem medijanskim filterom. Postoji tendencija da se u budućnosti fazi $T-$metrika korišćena pri filtriranju slike, zameni sa odgovarajućom fazi $S-$metrikom uz odabir domena parametara za dobijanje odgovarajućih razultata pri filtriranju.

U datom algoritmu, koji koristi $T-$metriku, relacija poretka se definiše uz pomoć funkcije $A$ i standardne relacije poretka.

$$A_{(\mathbf{k})} = \sum_{\mathbf{j}\in W, \mathbf{j}\neq \mathbf{k}} c\left(\mathbf{J_k}, \mathbf{J_j}, t\right).$$

Date vrednosti funkcije $A$ se sortiraju u opadajućem nizu:

$$A_{(0)} \geq A_{(1)} \geq \cdots \geq A_{(n^2-1)}$$

. Dati niz skalara indukuje na skupu vektora relaciju poretka:

$$\mathbf{J}_{(0)} \geq \mathbf{J}_{(1)} \geq \cdots \geq \mathbf{J}_{(n^2-1)}.$$

Za $\bar{J}_t$ uzimamo $\mathbf{J}_{(0)}$.

## 5.2 Filtriranje slike korišćenjem fazi rastojanja

U ovom odeljku ćemo razmatrati filtriranje slike u boji, sa komponentama boje crvena, zelena, plava (RGB). Pri filtriranju se koristi prozor, koji se najčešće označava sa $W$, veličine $n \times n$ gde je $n$ neparan broj. Pikseli u datom prozoru su označeni sa $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F_i})$, gde je $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2) \in I \times I$,

$I = \{0, 1, ..., n-1\}$, vektor sa prostornim koordinatama $i_1$, $i_2$ piksela (tačke sa ekrana sa celobrojnim koordinatama), a $\boldsymbol{F_i}$ je trodimenzioni vektor, takav da prva koordinata predstavlja kvantitet crvene boje, druga koordinata kvantitet zelene, a treća predstavlja kvantitet plave boje, tj. imamo da je $\boldsymbol{F_i} = (\boldsymbol{F_i^R}, \boldsymbol{F_i^G}, \boldsymbol{F_i^B})$ ili $\boldsymbol{F_i} = (\boldsymbol{F_i^1}, \boldsymbol{F_i^2}, \boldsymbol{F_i^3})$.

Suština filtriranja slike je u tome da se zameni piksel koji ima šum sa pikselom bez šuma, što se može postići zamenom središnjeg piksela u prozoru $W$ sa pikselom koji na neki način najbolje reprezentuje preostale piksele iz prozora $W$, tj. to je piksel koji je najsličniji svim ostalim pikselima iz $W$ po boji i prostornoj udaljenosti.

Od izuzetne važnosti je izabrati dobar kriterijum za odabir takvog piksela bez šuma, koji će zameniti piksel sa šumom u datom prozoru $W$, jer dati izbor piksela utiče na kvalitet slike, odnosno na stepen uklonjenog šuma.

U datom kriterijumu izbora će značajnu ulogu odigrati dobar odabir fazi rastojanja, konkretno u ovom slučaju fazi $T-$metrike $\boldsymbol{c}$. Uz pomoć fazi $T-$metrike $\boldsymbol{c}$ ćemo indukovati na skupu svih piksela u prozoru $W$ na određeni način relaciju poretka, koja služi da uporedimo piksele $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F_i})$ ("pozicija","boja") slike i izaberemo onaj od piksela koji se najmanje razlikuje od svih ostalih piksela u prozoru, tj. najsličniji je svim pikselima u $W$ (sa stanovišta boje i udaljenosti) i njime zamenimo dati središnji piksel u prozoru $W$.

Definišemo preslikavanje $\boldsymbol{c} : W \times W \to \mathbb{R}$, nad $W = \{(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F_i}) | \boldsymbol{i} \in I \times I\}$, sa

$$\boldsymbol{c}((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F_i}), (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{F_j})) = T(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{F_i}, \boldsymbol{F_j}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})), \tag{5.3}$$

gde su $\boldsymbol{\tau}$ i $\boldsymbol{t}$ fazi $T-$metrike u odnosu na triangularnu normu $T$. Da je $\boldsymbol{c}$ fazi $T-$metrika sledi iz teoreme 4.2.6.

Fazi $T-$metrika $\boldsymbol{\tau}$ je definisana sa

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{F_i},\ \boldsymbol{F_j}) = T^3(\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{F_i^1},\ \boldsymbol{F_j^1}), \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{F_i^2},\ \boldsymbol{F_j^2}), \boldsymbol{\tau}_3(\boldsymbol{F_i^3},\ \boldsymbol{F_j^3})),$$

i njom merimo sličnost odgovarajućih boja (jednakost kvantiteta boja) između dva piksela $\boldsymbol{F_i}$ i $\boldsymbol{F_j}$, odnosno sličnost $k-$te boje $(k = 1, 2, 3)$ merimo fazi $T-$metrikom $\boldsymbol{\tau}_k$. Da je $\boldsymbol{\tau}$ fazi $T-$metrika sledi iz teoreme 4.2.6.

Fazi $T-$metrikom $\boldsymbol{t}$ se meri prostorna udaljenost piksela $\boldsymbol{i}$ i $\boldsymbol{j}$. U njoj figuriše parametar $t$ koji utiče na osetljivost fazi $T-$metrike $\boldsymbol{t}$.

U radu [16] je korišćen specijalan slučaj fazi $T-$metrike $\boldsymbol{c}$. Umesto proizvoljne $t-$ norme, uzeta je uobičajeno definisana operacija množenja, odnosno fazi $T-$metrika $\boldsymbol{c}$ je definisana sa:

$$\boldsymbol{c}((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F_i}), (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{F_j})) = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{F_i},\ \boldsymbol{F_j}) \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}). \tag{5.4}$$

Fazi $T-$metrika $\boldsymbol{\tau}$ je određena sa:

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{F_i},\ \boldsymbol{F_j}) = \boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{F}^1_{\boldsymbol{i}},\ \boldsymbol{F}^1_{\boldsymbol{j}}) \cdot \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{F}^2_{\boldsymbol{i}},\ \boldsymbol{F}^2_{\boldsymbol{j}}) \cdot \boldsymbol{\tau}_3(\boldsymbol{F}^3_{\boldsymbol{i}},\ \boldsymbol{F}^3_{\boldsymbol{j}}).$$

gde su fazi $T-$metrike $\boldsymbol{\tau}_k$, $k = 1, 2, 3$ kao u primeru 4.2.1.

Fazi $T-$metrika $\boldsymbol{t}$ je kao u Primeru 4.2.4, gde je za $d$ uzeta euklidska metrika. Definisanjem fazi $T-$metrike $\boldsymbol{c}$, stvoren je još jedan metod za filtriranje slike u boji, pored od ranije već poznatog filtriranja pomoću medijanskog filtera (Vector median filter) koji pruža prilično uspešne rezultate jer uzima u obzir istovremeno kriterijum sličnosti boja i prostornu udaljenost.

## 5.3 Primene

U prethodnoj sekciji je navedena suština filtriranja slike. Različiti algoritmi za filtriranje slike daju različite kriterijume za izbor srednjeg piksela u klizećem prozoru, koji će zameniti srednji piksel.

U prethodnoj sekciji je definisana mera kvaliteta slike UIQI. UIQI je kompleksnija mera kvaliteta slike nego PSNR koji se obično koristi za merenje kvaliteta slike. PSNR je matematički definisana mera koju je lako izračunati i koja je nezavisna od ljudske percepcije kvaliteta slike. Jedan od kriterijuma za određivanje kvaliteta slike može biti oštrina slike. Oštrina je definisana granicama između zona različitih boja.

U prethodnoj sekciji je predstavljena primena funkcije metrike iz primera 3.2.3, za $m = 1$, na sliku Baboon. U datoj sekciji će biti primenjena na sliku Lena. Šum koji je primenjen na originalnu sliku je takođe 10% so i &biber šum. Za metriku koja razmatra sličnost u bojama primenjeno je rastojanje iz primera 3.2.3 za $m = 1$. Za metriku koja razmatra prostornu bliskost izabrano je rastojanje iz [16], za euklidsku normu je uzeta max norma.

U nastavku je upoređena slika filtrirana funkcijom koja je nalik na metriku sa slikom koja je filtrirana pomoću VMF (vektorski medijanski filter). Rezultat upoređivanja je da slika filtrirana našim algoritmom ima niže vrednosti za odgovarajući UIQI kvalitet slike, ali mnogo veću oštrinu. Ovo je veoma važno u slučajevima kada je potrebno reprodukovati detalje na slici. Za merenje oštrine slike korišćena je metrika kvaliteta uvedena u [31].

Za slike koje su filtrirane sa vektorskim medijanskim filterom, sa veličinom prozora 3, UIQI je jednak vektoru (izračunat za sve tri boje):

$$[0.546475813084152, 0.673989789093080, 0.525819221430506].$$

Oštrina slike koja je filtrirana sa VMF je

$$0.690730837789661.$$

Oštrina slike koja je filtrirana sa našom metrikom je

$$0.927492447129909.$$

Slika 5.5 Lena, $256 * 256$

Slika 5.6 Lena, $256 * 256$, sa 10% so&biber šuma

Slika 5.7 Lena, $256 * 256$, filtrirana sa VMF, veličina prozora je 3

Slika 5.8 Lena, filtrirana sa metodom iz rada sa parametrima $256 * 256$, $K = 384$, $t = 2.8$, veličina prozora je 3

## 5.4 Zaključak

Polazeći od već dobro poznatih $t$-normi i $t$-konormi, definisani su novi pojmovi fazi $T-$metrika, fazi $S-$metrika, a i fazi rastojanja generalno. Date klase preslikavanja imaju neke nove osobine u odnosu na $t$-normu i $t$-konormu. Videli smo da neke od $t-$normi daju dobre rezultate pri filtriranju slike. Od esencijalne važnosti su date $t-$norme pri formiranju relacije poretka kojom se upoređuju vektori luminansi koji su dodeljeni pikselima. Neke od datih $T-$normi imaju važnu ulogu u teoriji fiksne tačke za kvazikontrakcije u jakim probabilističkim metričkim prostorima.

# Bibliografija


[1] George A. and P. Veeramani P. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.*, (64):395–399, 1994.

[2] George A. and P. Veeramani P. Some theorems in fuzzy metric spaces. *J. Fuzzy Math.*, (3):933–940, 1995.

[3] George A. and P. Veeramani P. On some results of analysis for fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.*, (90):365–368, 1997.

[4] C. Alsina, M. J. Frank, and B. Schweizer. *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Hackensack, NJ, 2006.

[5] Chaudhuri B. B. and Rosenfeld A. On a metric distance between fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters*, (17):1157–1160, 1996.

[6] J.C. Bezdek. Fuzzy models-what are they, and why? *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(1):1–6, 1993.

[7] I. Bloch. On fuzzy distances and their use in image processing under. *Pattern Recognition Letters*, (32):1873–1895, 1999.

[8] G. Choquet. Theory of capacities. *Ann. Institut Fourier (U. Grenoble)*, 5:131–295, 1954.

[9] Lj. Ćirić. A generalization of banach's contraction principle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (45):267–273, 1974.

[10] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press, Boston, 1980.

[11] M. Frechet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti de Circolo Matematico di Palermo*, 22:1–74, 1906.

[12] Lj. Gajić, N. M. Ralević, and D. Karaklić. Fixed points in a new class of probabilistic metric spaces. *The Third Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, META 2018, Faculty of Technical Sciences*, (9):75–70, 2018.

[13] M. Grabish, J-L. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap. *Aggregation Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[14] V. Gregori, A. Lopez-Crevillen, S. Morillas, and A. Sapena. On convergence in fuzzy metric spaces. *Topology Appl.*, (156):3002–3006, 2009.

[15] V. Gregori, J. J. Minana, and S. Morillas. Some questions in fuzzy metric spaces. *Fuzzy sets and systems*, (204):71–85, 2012.

[16] V. Gregori, S. Morillas, and A. Sapena. Examples of fuzzy metrics and applications. *Fuzzy sets and systems*, (170, 1):95–111, 2011.

[17] V. Gregori and A. Sapena. On fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Fuzzy sets and systems*, (125):245–252, 2002.

[18] O. Hadžić. *Fixed point theory in probabilistic metric spaces*. Serbian Academy os Science and Arts, Branch in Novi Sad, University of Novi Sad, Institute of mathematics, Novi Sad.

[19] O. Hadžić. *Osnovi teorije nepokretne tačke*. Institut za matematiku,, Novi Sad, 1978.

[20] Danijela Karaklić, Ljiljana Gajić, and Nebojša M. Ralević. Some fixed point results in a strong probabilistic metric spaces. *FILOMAT*, 2018.

[21] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. Triangular norms. 2000.

[22] George J. Klir and Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[23] I. Kramosil and J. Michalek. Fuzzy metrics and statistical metric spaces. *Kybernetika*, 11:326–334, 1975.

[24] M. De la Sen and E. Karapinar. Some results on best proximity points of syclic contractions in probabilistic metric spaces. *Journal of Function Spaces*, 2015.

[25] B. Liu. *Uncertainty Theory*. Springer-Verlag, (2nd ed.), Berlin, 2007.

[26] D. Karaklić Lj. Gajić, N. Ralević. Prostori sa fazi rastojanjem. *The 4th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, META 2019, Faculty of Technical Sciences*, pages 85–90, 2019.

[27] R. Lowen. *Fuzzy Set Theory.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[28] A. Mbarki and R. Oubrahim. Probabilistic $b-$metric spaces and non-linear contractions, fixed point theory and applications. *Fixed Point Theory and Applications*, pages 1–15, 2017.

[29] K. Menger. Statistical metrics. *Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A.*, 28:535–537, 1942.

[30] K. Menger. Probabilistic theories of relations. *Ibid.*, 37:178–180, 1951.

[31] N. D. Narvekar and L. J. Karam. An improved no-reference sharpness metric based on the probability of blur detection.

[32] Hadžić Olga and Pap Endre. *Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces.* Kluwer Academic Publisher, Dordecht, 2001.

[33] Nebojša M. Ralević. *FaziMatematika.* Fakultet tehničkih nauka, Novi sad, 2019.

[34] Nebojša M. Ralević, Danijela Karaklić, and Neda Pištinjat. Fuzzy metric and its applications in removing the image noise. *Soft Computing*, 2018.

[35] A. Rosenfeld. Distances between fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters*, (3):229–233, 1985.

[36] T.J. Ross. *Fuzzy Logic with Engineering Applications.* Wiley, Third Edition, New York, 2010.

[37] B. Schweizer and A. Sklar. Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Math.*, 10(1):313–334, 1960.

[38] B. Schweizer and A. Sklar. *Probabilistic metric spaces.* Elsevier North-Hollandl, New York, 1983.

[39] V. M. Sehgal. *Some fixed points theorems in functional analysis and probabilitys.* Wayne State Univ., 1966.

[40] V. M. Sehgal and A. T. Bharucha-Reid. Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces. *Math. Syst. Theory*, (6):97–102, 1972.

[41] H. Sherwood. On the completion of probabilistic metric spaces. *Z. Wahrschein-lichkeitstheorie verw. Geb.*, (6):62–64, 1966.

[42] H. Sherwood. Complete probabilistic metric spaces. *Z. Wahr. verv. Geb*, (20):117–128, 1971.

[43] M. Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its applications.* PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[44] Gregori V. and Romaguera S. Some properties of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.*, (115):485–489, 2000.

[45] Gregori V. and Romaguera S. On completion of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.*, (130):399–404, 2002.

[46] A. Wald. On a statistical generalization of metric spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A.*, 29:196–197, 1943.

[47] A. Wald. On a statistical generalization of metric spaces. *Reports of a Mathematical Colloquium, Second Series*, 5-6:76–79, 1944.

[48] A. Wald. Reprinted in: Abraham wald:. *Selected Papers in Statistics and Probability, New York*, pages 413–416, 1955.

[49] Wang and Bovik A.C. A universal image quality index. *IEEE Signal Processing Letters*, 3(9):81–84, 2002.

[50] Z. Wang and G. J. Klir. *Fuzzy measure theory.* Springer science+Business media, LLC, New York, 1992.

[51] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.