Суперсиметрична теорија поља на некомутативним просторима

Биљана Д. Николић

Физички факултет

Универзитет у Београду

Дисертација је поднета ради стицања научног степена

Доктора физичких наука

Београд, 2019. год.

Supersymmetric field theory on noncommutative spaces

Biljana D. Nikolić

Faculty of physics
University of Belgrade

This dissertation is submited for the degree of
Doctor of philosophy in physics

Belgrade, 2019

Ментор:

Проф. др Воја Радовановић, редовни професор, Физички факултет, Универзитет у Београду

Комисија:

Проф. др Воја Радовановић, редовни професор, Физички факултет, Универзитет у Београду

Проф. др Марија Димитријевић Ћирић, ванредни професор, Физички факултет, Универзитет у Београду

Проф. др Бранислав Саздовић, научни саветник, Институт за физику, Универзитет у Београду

Резиме

У раду је проучаван утицај деформације суперпростора на ренормализабилност Вес-Зумино модела формулисаног на њему. Дат је преглед познатих резултата за недеформисани Вес-Зумино модел, тј. показана је његова ренормализабилност на нивоу једне петље, коришћењем методе позадинског поља, технике суперграфова и димензионе редукције. Након тога, показано је како се формализам деформационе квантизације може применити за добијање деформисаног суперпростора. Применом Дринфелдове теореме о твистовању на Хопфову алгебру униваразално обавијајуће алгебре суперсиметричних трансформација $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ добија се деформисана Хопфова алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$, где је $\mathcal{F}$ којединични 2-коцикл за алгебру $\mathcal{U}(\mathcal{S})$. Твистована Хопфова алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$ на алгебри суперпоља, A, индукује нови, деформисани производ, такозвани $\star$-производ, тако да је алгебра A са новим множењем, $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$-модул алгебра. Описани формализам деформисања алгебре суперпоља примењен је за два конкретна избора твиста.

Први разматрани пример је такозвана D-деформација, за коју је твист нехермитски и изражен је само преко суперковаријантних извода D_{α}. Деформисана универзално обавијајућа алгебра суперсиметрије није се променила, што значи да је пуна суперсиметрија очувана. Применом ове деформације и бозонски и фермионски сектор суперпростора претрпео је промену у (анти)комутационим релацијама. Очуван копроизвод при твистовању, обезбедио је непромењено Лајбницово правило при деловању суперсиметричних трансформација на $\star$-производ суперпоља. Формулисан је деформисан Вес-Зумино модел, заменом обичног множења у тачки $\star$-множењем и коришћењем киралних пројектора. Добијени модел је инваријантан на пуну суперсиметрију и поред чланова добијених деформацијом чланова из недеформисаног Вес-Зумино модела укључена су и два такозвана неминимална члана. Размотрена је ренормализабилност добијеног модела, рачунањем ефективног дејства на нивоу једне петље до петог степена по класичном суперпољу. Као и у недеформисаном Вес-Зумино моделу, нема "пуноглавац"-дијаграма, а масени члан се не ренормализује директно, што је у складу са теоремом о нерeнормализовању. Добијене су дивергенције трећег и четвртог степена по класичном суперпољу. Нађен је специјални избор параметара модела за који је он ренормализабилан, као и случај у коме се све редефиниције изражавају преко ренормализације јачине суперпоља.

Друга деформација разматрана у раду, остварена је применом хермитског твиста који зависи од фермионских извода ∂_α и $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$. Деформисана Хопфова алгебра универзално обавијајуће алгебре суперсиметричних трансформација, претрпела је промене у копроизводима за суперсиметричне генераторе Q_α и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Уведени $\star$-производ променио је само структуру фермионског дела суперпростора. Добијен је деформисани Вес-Зумино модел заменом обичног множења $\star$-множењем и применом киралних пројектора. Како је деформисано Лајбницово правило за деловање суперсиметричних трансформација на $\star$-производ два суперпоља промењено, деформисано дејство има само твистовану суперсиметрију. Добијено дејство је нелокално, због употребе киралних пројектора. Израчуната је корекција ефективног дејства на нивоу једне петље, закључно са члановима квадратичним по класичним суперпољима и добијено је мноштво дивергентних чланова који нису присутни у полазном дејству, па хермитски деформисани Вес-Зумино модел није ренормализабилан. Твистована суперсиметрија је недовољна за поништавање добијених дивергенција.

Кључне речи: не(анти)комутативни простори, суперсиметрија, деформисани Вес-Зумино модел, Хопфова алгебра, квантна теорија поља, ренормализабилност

Научна област: Физика

Ужа научна област: Теоријска физика високих енергија

УДК број: 539.120(043.3)

Abstract

In this dissertation, the impact of deformation of the superspace on renormalizability of the Wess-Zumino model, formulated on it, is studied. The review of known results for the undeformed Wess-Zumino model is given, i.e. renormalizability of the Wess-Zumino model is demonstrated by calculating the one-loop effective action using the background field method, supergraph technique and dimensional reduction. Further, it has been shown how the deformation quantization formalism can be used for obtaining the deformed superspace. Applying the Drinfeld twisting theorem on the Hopf algebra of universal enveloping algebra of supersymmetric transformations $\mathcal{U}(S)$, the deformed Hopf algebra $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$ is obtained, where $\mathcal{F}$ is counital 2-cocycle for the algebra $\mathcal{U}(\mathcal{S})$. The twisted Hopf algebra $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$ induces the new deformed product - $\star$-product on the algebra of superfields A. The algebra A with the new product is a $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$-algebra. The described formalism of deforming the superfield algebra is applied for two different choices of the twist.

The first considered example is so-called D-deformation, with non-hermitian twist, which is expressed only in terms of the supercovariant derivatives D_α. The deformed universal enveloping algebra of supersymmetric transformations remains the same, which means that the full supersymmetry is preserved. Applying this deformation, the (anti)commutation relations for both the bosonic and fermionic sector of the superspace are changed. The Leibniz rule for the action of supersymmetric transformations on the $\star$-product of superfields remains unchanged due to the preserved coproduct. The deformed Wess-Zumino model is formulated by replacing the usual product with $\star$-product and applying the chiral projectors. The obtained model is invariant under full supersymmetry and beside the terms obtained by deformation of the terms present in the undeformed Wess-Zumino model, two additional so-called non-minimal terms are included. The renormalizability of the obtained model was considered, by calculating the one-loop effective action up to the fifth power in the classical superfield. As in the case of the undeformed Wess-Zumino model, there is no "tadpole"-diagrams, and the mass-term is not directly renormalized, which is in accordance with the non-renormalization theorem. The divergences of the third and fourth power in the classical superfield are obtained. The special choice of the parameters of the model which renders it renormalizable is found, so is the case in which all the redefinitions are expressed in terms of the superfield strength renormalization.

The second deformation examined in this work, is defined by the hermitian twist, which depends on the fermionic derivatives ∂_α and $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$. The deformed universal enveloping algebra of supersymmetric transformations is changed, particularly the coproducts of the supersymmetry generators Q_α and $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. The defined $\star$-product alters only the structure of the fermionic part of the superspace. By replacing the usual product with $\star$-product and using the chiral projectors, the deformed Wess-Zumino model is obtained. The deformed action has only the twisted supersymmetry due to the changes in the deformed Leibniz rule for the the action of the supersymmetry transformations on the $\star$-product of two superfields. The one-loop effective action correction is calculated up to the terms quadratic in the classical superfields. Many divergent terms, absent from the starting action, arise, so deformed Wess-Zumino model with hermitian twist is not renormalizable. The twisted supersymmetry is not enough to cancel the obtained divergences.

Key words: non(anti)commutative spaces, supersymmetry, deformed Wess-Zumino model, Hopf algebra, quantum field theory, renormalization

Scientific field: Physics

Research area: Theoretical high energy physics

UDC number: 539.120(043.3)

Садржај

Глава 1

Увод

Два угаона камена теоријске физике постављена почетком двадесетог века, квантна теорија и специјална теорија релативности, омогућила су њен развој и формирање квантне теорије поља као оквира за опис фундаменталних интеракција. То је довело до формулисања калибрационих теорија електрослабе и јаке интеракције као ренормализабилних квантних теорија поља. Изван овог оквира остала је гравитациона интеракција, описана општом теоријом релативности, која је дала потпуно нови поглед на природу простора и времена. За разлику од осталих теорија, код којих је простор-време Минковског арена за одигравање интеракција, у општој теорији релативности гравитационо поље манифестује се закривљеношћу простор-времена, па је потребно квантовати само простор-време.

При покушајима да се гравитација придружи осталим фундаменталним интеракцијама у теоријском опису, настају бројне тешкоће. Директном применом техника квантне теорије поља на гравитационо поље добијају се бесконачности које се не могу уклонити из теорије, тако да општа теорија релативности није ренормализабилна. Да би се ти проблеми превазишли, развијени су разни приступи попут теорије струна [1] и квантне гравитације петаља [2]. Како је у општој теорији релативности присуство материје извор закривљености простор-времена, мерења растојања реда Планкове дужине, укључивала би честице маса толико великих, да би закривљеност коју оне производе била већа од растојања која се мере. Из тих разлога, јасно је да се мора одбацити концепт простор-времена као континуума.

Још тридесетих година двадесетог века, Хајзенберг [3] је предложио увођење ненултих комутационих релација за координате, као начина за уклањање ултраљубичастих бесконачности у квантној теорији поља. Време за Хајзенбергову идеју није било сазрело па је, развојем техника регуларизације и ренормализације, она пала у заборав, док Снидер [4] није нашао дискретно решење за простор-време које је инваријантно на Лоренцове трансформације. У добијеном решењу координате међусобно не комутирају, док за координате и импулсе важе модификоване Хајзенбергове релације неодређености. Тако је настао некомутативни простор, а идеје некомутативности математички су уобличене у теорију некомутативне геометрије [5; 6; 7; 8].

Интерес за развој теорија поља на некомутативним просторима интензивиран је открићем везе некомутативности са М-теоријом и теоријом струна. Кон, Даглас и Шварц [9] су увели некомутативне просторе као могуће компактификације многострукости простор-времена, док су Сајберг и Витен [10] показали да координате крајева отворене бозонске струне који се налазе на D-брани у присуству константног Ниве-Шварц B-поља не комутирају. На тај начин, теорија поља на некомутативном простору може се интерпретирати као нискоенергетски лимес теорије отворене струне.

Значајна идеја теоријске физике, настала седамдесетих година двадесетог века је суперсиметрија - релативистичка симетрија између бозона и фермиона. Откриће суперсиметрије остварено је радовима Рамона [11], Нивеа и Шварца [12] у контексту теорије струна. Паралелно су Гољфанд и Лихтман [13] разматрали екстензије Поенкареове групе и дефинисали суперсиметричну алгебру укључивањем генератора фермионских транслација.

Чувена теорема Колемана и Мандуле [14] давала је ограничење за групу симетрије S-матрице четвородимензионе квантне теорије поља. По њој, једини валидни облик групе симетрије био је директни производ Поенкареове групе и групе унутрашње симетрије. Да би се превазишла ограничења те теореме, Хаг, Лопушански и Зонијус [15] су разматрали уместо Лијевих алгебара градиране Лијеве алгебре и показали да се на тај начин Поенкареова алгебра проширује до суперсиметричне алгебре. Увођење новог алгебарског концепта, омогућило је тако проширење симетрије.

Изузетно важан корак у развоју суперсиметрије, учинили су Вес и Зумино [16; 17]. Они су конструисали линеарну репрезентацију суперсиметрије, ренормализабилни суперсиметрични лагранжијан - такозвани Вес-Зумино модел и демонстрирали неренормализовање масе и константе интеракције. Следећи природни корак било је проширивање појма простор-времена на суперпростор, укључивањем фермионских координата и увођење суперпоља као функција на суперпростору [18; 19]. Формулација Вес-Зумино модела преко суперпоља омогућила је елегантно рачунање пертурбативних корекција у ефективном дејству и доказ теореме о неренормализовању [20].

Суперсиметрија сврстава честице различитог спина у мултиплете дегенерисане по маси, тако да сваки феримон има два суперсиметрична партнера, бозона исте масе (јер је број степени слободе фермиона два). Теорије инваријантне на суперсиметрију имају задивљујуће својство да су мање ултраљубичасто дивергентне од одговарајућих теорија без суперсиметрије. Та особина је последица поништавања дивергенција које потичу од бозонских и фермионских петаља. Међутим, на тренутно експериментално доступним енергијама не опажа се постојање фермиона и бозона дегенерисаних по маси, па се на суперсиметрију мора посматрати у контексту нарушења симетрије. У стандардном моделу електрослабих интеракција при спонтаном нарушењу симетрије преносиоци слабе интеракције, $W^{\pm}$ и Z^0 бозони, добијају велике масе, пропорционалне маси Хигсовог бозона, док фотон остаје безмасен, захваљујући резидуалној симетрији. На сличан начин, могуће је нарушити суперсиметрију тако да разлике у масама између суперсиметричних партнера буду велике, али да особине неренормализовања остану на снази [21]. Радијативне корекције у том случају нису егзактно нула, већ могу да имају коначне износе, реда енергија нарушења суперсиметрије. У таквом сценарију, и маса Хигсовог бозона би се ренормализовала, али само за коначни износ. На тај начин, суперсиметрија решава битан проблем хијерархије при конструисању теорије великог уједињења (Grand Unified Theory). Ако постоји таква теорија, она је спонтано нарушена до групе симетрије стандардног модела, која је опет нарушена до групе симетрије електромагнетне интеракције. У несуперсиметричној теорији, маса Хигсовог бозона би се ренормализовала за бесконачни износ што би нарушило стабилност спонтаног нарушења у ова два сектора. У случају суперсиметричне теорије, тај проблем не постоји, пошто са маса Хигсовог бозона ренормализује за коначни износ[1].

Како би се искористиле предности суперсиметрије при ренормализацији, могуће је конструисати супергравитацију, теорију која се добија локализацијом суперсиметрије [23]. Она природно садржи општу теорију релативности, јер је Лоренцова група подгрупа суперсиметричне групе. Суперсиметрија, заиста, побољшава ренормализабилност гравитације, међутим не чини је ренормализабилном [24].

Да би се превазишли проблеми које квантна теорија поља има на малим растојањима, потребно је, на неки начин, додатно проширити симетрију. Један од приступа је конструисање теорија које комбинују некомутативност са суперсиметријом [25; 26; 27; 28]. У таквим теоријама деформисан је суперпростор, па у општем случају, фермионске координате не антикомутирају или међусобно не комутирају фермионске и бозонске координате. Слично као у случају некомутативности бозонских координата, некомутативност суперкоордината може се добити из теорије суперструна [26; 29; 30].

Веома елегантан метод за конструисање некомутативних суперпростора је деформисање Хопфове алгебре суперсиметричних трансформација увођењем твиста. Деформисана Хопфова алгебра делује на алгебру функција на суперпростору, тако што деформише обично множење у тачки у не(анти)комутативно $\star$-множење. Теорију твистовања развио је Дринфелд у радовима [31; 32; 33]. Ова теорија омогућава сагледавање симетрија некомутативних простора као твистованих симетрија

---

[1] Детаљније излагање аргумената у вези са решењем проблема хијерархије, може се наћи у чланку Веса у књизи посвећеној историјату суперсиметрије [22].

[34; 35; 36; 37; 38; 39; 40; 41]. То је приступ који ће бити примењен и у овом раду.

Најпре ћемо у другој глави дати преглед основних појмова суперсиметрије: дефинисаћемо суперпростор и функције на њима - такозвана суперпоља. Затим ћемо размотрити иредуцибилне репрезентације суперсиметричне алгебре на простору суперпоља, па полазећи од киралних суперпоља, конструисаћемо суперсиметричну ренормализабилну теорију поља - Вес-Зумино модел. Овај модел биће полазиште за истраживање у овом раду.

У трећој глави ћемо дефинисати Хопфову алгебру и показати као се суперсиметрична алгебра може формулисати на језику Хопфових алгебара. Метод деформационе квантизације, омогућиће нам деформисање суперсиметричне алгебре и њеног дејства на простору функција на суперпростору.

Главни резултати тезе налазе се у четвртој и петој глави. Користећи два специфична примера твиста - D-деформацију и хермитску деформацију, добићемо два различита не(анти)комутативна суперпостора. Укључивањем инваријанти у односу на твистовану суперсиметрију, добићемо два твистовано суперсиметрична Вес-Зумино модела и размотрићемо њихову ренормализабилност. У последњој глави дискутовани су добијени резултати, док су конвенције које се користе у раду, детаљи рачуна и докази важних теорема деформационе квантизације сабрани у додацима A-D.

Глава 2

Суперсиметрични простор

У овој глави даћемо преглед основних појмова суперсиметрије. Неке од стандарних књига које обрађују ову област су [42; 43; 44]. На почетку ћемо дефинисати суперсиметричну алгебру, суперсиметрични простор и на њему суперпоља. Такође, формулисаћемо ренормализабилну теорију поља, базирану на киралним суперпољима, такозвани Вес-Зумино модел. Ова теорија представља полазиште за даље конструисање деформисаног не(анти)комутативног суперсиметричног Вес-Зумино модела, што је предмет наредних глава.

2.1 Суперсиметрична алгебра

Суперсиметрична алгебра дефинисана је релацијама:

$$\begin{aligned} &[P_m, P_n] = [P_m, Q_\alpha] = [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0 \ , && \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \ , \\ &[M_{mn}, P_r] = i(\eta_{nr}P_m - \eta_{mr}P_n) \ , && \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}P_m \ , \\ &[M_{mn}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{mn})_\alpha^{\ \beta}Q_\beta \ , && [M_{mn}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = -i(\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \ , \end{aligned} \qquad (2.1)$$

где грчки индекси $\alpha, \dot{\alpha}, \dots$ узимају вредности 1 и 2 и пребројавају компоненте Вајлових спинора Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, а латинични индекси m, n, r узимају вредности од 0 до 3 и пребројавају компоненте Лоренцових четворовектора. Компоненте метричког тензора су $\eta_{mn} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)^1$. Елементи алгебре P_m и M_{mn} представљају генераторе транслација и Лоренцових трансформација и припадају Поенкареовој алгебри, док су Q_α i $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ генератори суперсиметричних трансформација. То су нови објекти којима је проширена Поенкареова алгебра.

Добијена алгебарска структура назива се $\mathbb{Z}_{/2}$ градирана Лијева алгебра или супералгебра. Векторски простор супералгебре дат је у облику:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1, \tag{2.2}$$

где је $\mathcal{S}_0$ парни (комутирајући, бозонски) део алгебре, а $\mathcal{S}_1$ непарни (антикомутирајући, фермионски) део. Елементи супералгебре који припадају или $\mathcal{S}_0$ или $\mathcal{S}_1$ називају се хомогеним. Парност елемента $x \in \mathcal{S}_0$ је $|x| = 0$, а елемента $y \in \mathcal{S}_1$ је $|y| = 1$. Уместо комутатора у Лијевој алгебри, у градираној Лијевој алгебри уводи се уопштени комутатор $\{,] : \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ који задовољава:

$$\{\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j] \subset \mathcal{S}_{(i+j)_{mod\ 2}} \ , \tag{2.3}$$

$$\{x, y] = (-1)^{|x||y|+1}\{y, x] \ , \tag{2.4}$$

$$\{x, \{y, z]] + (-1)^{|x|(|y|+|z|)}\{y, \{z, x]] + (-1)^{|z|(|x|+|y|)}\{z, \{x, y]] = 0 \ . \tag{2.5}$$

Релација (2.4) је уопштена особина антисиметричности, а (2.5) представља уопштени Јакобијев идентитет. Ознака $\{,]$ тумачи се као комутатор ако је бар један од аргумената бозонски, а као антикомутатор, ако су оба аргумента фермионска.

Минимална подалгебра алгебре (2.1) којој припадају супесиметрични генератори Q_α и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, састоји се још само од генератора транслација P_m, јер је антикомутатор Q_α и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ пропорционалан са P_m, док су остали (анти)комутатори ових генератора нула. Ми ћемо под суперсиметричном алгебром подразумевати ову минималну подалгебру:

$$\mathcal{S} = \mathrm{span}\{P, Q, \bar{Q}\} \ . \tag{2.6}$$

Поред алгебре (2.1) која представља најмање уопштење Поенкареове алгебре, могуће је дефинисати и проширену суперсиметричну алгебру, која има додатне

---

[1] Конвенције које се користе у раду су у складу са књигом [42] и сабране су у додатку А.

фермионске генераторе, а такође је конзистентна са релативистичком квантном теоријом поља [42].

2.2 Суперпростор и суперпоља

Суперсиметрични простор је генерисан координатама x^m, θ_α и $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, $m = 0, 1, 2, 3$, $\alpha = 1, 2$, $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$. Координате x^m представљају координате четвородимензионог простора Минковског и њих ћемо звати бозонским координатама, док су θ_α и $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ Вајлови спинори чије су компоненте Грасманови, антикомутирајући бројеви и њих ћемо звати фермионским координатама. Заједно $(x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ представљају суперкоординате. Метрика у простору Минковског је дата са $x^2 = \eta_{mn} x^m x^n = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$.

Суперкоординате задовољавају следеће (анти)комутационе релације:

$$[x^m, x^n] = [x^m, \theta_\alpha] = [x^m, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}] = \{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\} = 0 \ . \tag{2.7}$$

Произвољна функција на суперпростору $F(x, \theta, \bar{\theta})$ назива се (скаларно) суперпоље[2] и може да се развије у ред по θ и $\bar{\theta}$. Како су компоненте спинора θ и $\bar{\theta}$ Грасманови бројеви, овај развој има коначно много чланова:

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) =& f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta} v_m(x) \\ &+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\varphi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} d(x) \ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

У развоју (2.8) поља $f(x)$, $m(x)$, $n(x)$ и $d(x)$ су скаларна, поље $v_m(x)$ је векторско поље, док су поља $\phi(x)$, $\bar{\chi}(x)$, $\bar{\lambda}(x)$ и $\varphi(x)$ Вајлови спинори. Масене димензије ових поља су редом $[F(x)] = [f(x)]$, $[\phi(x)] = [\bar{\chi}(x)] = [f(x)] + \frac{1}{2}$, $[m(x)] = [n(x)] = [v_l(x)] = [f(x)] + 1$, $[\bar{\lambda}(x)] = [\varphi(x)] = [f(x)] + \frac{3}{2}$ и $[d(x)] = [f(x)] + 2$. Масена димензија фермионских координата θ и $\bar{\theta}$ очигледно је $-\frac{1}{2}$.

---

[2] У зависности од тога како се при Лоренцовим трансформацијама трансформише најнижа компонента суперпоља, оно може бити скаларно, спинорско, векторско, тензорско итд. У овом раду разматрају се само скаларна суперпоља, па ћемо их краће звати само суперпоља.

Суперсиметричне трансформације могу се дефинисати као трансформације тачака суперпростора. За произвољну групу G која има подгрупу H групно множење дефинише једно пресликавање на простору фактор групе G/H. Лоренцова група Λ је подгрупа суперсиметричне групе S, па можемо увести елементе фактор групе S/Λ као косете Лоренцове групе. Елемент суперсиметричне групе, написан у експоненцијалној параметризацији има облик: $\mathrm{e}^{i(-aP+\frac{1}{2}\lambda^{mn}M_{mn}+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q})}$, где су a, λ, ξ и $\bar{\xi}$ параметри који одговарају редом транслацијама, Лоренцовим трансформацијама и суперсиметричним генераторима. Произвољни елемент фактор групе S/Λ је косет који одговара супертранслацији $g(x,\theta,\bar{\theta}) = \mathrm{e}^{i(-aP+\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q})}$. Множењем косета $[g(x,\theta,\bar{\theta})\Lambda]$ супертранслацијом $g(a,\xi,\bar{\xi})$ са лева, коришћењем Хаусдорфове формуле $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$, добија се:

$$g(a,\xi,\bar{\xi})g(x,\theta,\bar{\theta}) = g(x+a+i\theta\sigma\bar{\xi}-i\xi\sigma\bar{\theta},\theta+\xi,\bar{\theta}+\bar{\xi}) \ . \tag{2.9}$$

Одавде се види да дејство елемента $g(a,\xi,\bar{\xi})$ узрокује кретање у суперпростору, тако да се суперкординате трансформишу као:

$$\delta x^m = a + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta} \ , \qquad \delta\theta = \xi \ , \qquad \delta\bar{\theta} = \bar{\xi} \ . \tag{2.10}$$

Деловањем елементом који одговара Лоренцовој трансформацији $\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\lambda^{mn}M_{mn}}$, добија се Лоренцова трансформација координата x, θ и $\bar{\theta}$.

При трансформацијама $x \to x - \delta x$, $\theta \to \theta - \delta\theta$, $\bar{\theta} \to \bar{\theta} - \delta\bar{\theta}$ класично скаларно суперпоље се трансформише на следећи начин:

$$F'(x-\delta x,\theta-\delta\theta,\bar{\theta}-\delta\bar{\theta}) = F(x,\theta,\bar{\theta}) \ . \tag{2.11}$$

Како је

$$\begin{aligned}\delta F &= F'(x,\theta,\bar{\theta}) - F(x,\theta,\bar{\theta}) = F(x+\delta x,\theta+\delta\theta,\bar{\theta}+\delta\theta) - F(x,\theta,\bar{\theta}) \\ &= \mathrm{e}^{-i(-ap+\xi q+\bar{\xi}\bar{q})}F(x,\theta,\bar{\theta}) \ , \end{aligned} \tag{2.12}$$

то можемо одредити диференцијалне операторе који репрезентују импулс и генераторе суперсиметрије, p, q и $\bar{q}$ у репрезентацији класичног скаларног суперпоља:

$$p_m = -i\partial_m \ , \qquad q_\alpha = i\partial_\alpha + \sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \ , \qquad \bar{q}_{\dot{\alpha}} = -i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - \theta^\alpha\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m \ . \tag{2.13}$$

Оператори (2.13) очигледно задовољавају антикомутационе релације суперсиметричне алгебре (2.1).

Закон трансформације суперпоља $F(x, \theta, \bar{\theta})$ при суперсиметричним инфинитезималним трансформацијама одређеним параметрима ξ и $\bar{\xi}$, добијен из једначина (2.12) је:

$$\delta_{\xi} F = -i\xi q - i\bar{\xi}\bar{q} = \left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right) F \ , \tag{2.14}$$

где су Q^{α} и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ нови диференцијални оператори[3] дефинисани релацијама:

$$Q_{\alpha} = \partial_{\alpha} - i\sigma^{m}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{m} \ , \tag{2.15}$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^{\alpha}\sigma^{m}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{m} \ . \tag{2.16}$$

Оператори (2.15) и (2.16) задовољавају антикомутационе релације:

$$\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} = 0 \ , \qquad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \ , \qquad \{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{m} \ . \tag{2.17}$$

Комутатор две суперсиметричне трансформације припада суперсиметричној алгебри и пропорционалан је импулсу:

$$[\delta_{\xi}, \delta_{\eta}] = 2i(\xi\sigma^{m}\bar{\eta} - \eta\sigma^{m}\bar{\xi})\partial_{m} \ . \tag{2.18}$$

Суперсиметрична трансформација производа два суперпоља може се због линеарности суперсиметричних генератора написати на следећи начин:

$$\delta_{\xi}(F \cdot G) = (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})(FG) = (\delta_{\xi}F) \cdot G + F \cdot (\delta_{\xi}G) \ . \tag{2.19}$$

Претходна једнакост представља Лајбницово правило за деловање суперсиметричних трансформација.

Из линеарности диференцијалних оператора (2.15) и (2.16) следи да се произвољна лиеарна комбинација суперпоља, као и производ суперпоља (множење је уобичајено множење вредности функција у тачки) трансформише по (2.14), тј.

---

[3] Ови оператори нису исто што и апстрактни генератори суперсиметричних трансформација. Пошто ће се у даљем тексту, искључиво користити диференцијални оператори, без опасности да дође до забуне, њих ћемо означавати са Q_{α} и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$.

представља суперпоље. Исто важи и за извод суперпоља F, $\partial_m F$, зато што ∂_m комутира са Q и $\bar{Q}$. Међутим, спинорски изводи не комутирају са генераторима суперсиметричних трансформација, па величине $\partial_\alpha F$ и $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} F$ нису суперпоља. Зато је потребно дефинисати спинорске коваријантне изводе, такозване суперковаријантне изводе, D_α и $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ тако да важи $\delta_\xi D_\alpha F = D_\alpha \delta_\xi F$ и $\delta_\xi \bar{D}_{\dot{\alpha}} F = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \delta_\xi F$. Суперковаријантни изводи могу се дефинисати као:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \ , \tag{2.20}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_m \ . \tag{2.21}$$

Оператори D и $\bar{D}$[4] антикомутирају са генераторима Q и $\bar{Q}$ и задовољавају следеће антикомутационе релације:

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = 0 \ , \qquad \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \ , \qquad \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_m \ . \tag{2.22}$$

Дејство суперковаријантних извода на производ два суперпоља F и G дато је следећим изразима:

$$D_\alpha(FG) = (D_\alpha F)G + (-1)^{|F|} F(D_\alpha G) \ , \tag{2.23}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(FG) = (\bar{D}_{\dot{\alpha}} F)G + (-1)^{|F|} F(\bar{D}_{\dot{\alpha}} G) \ , \tag{2.24}$$

што значи да за њих важи Лајбницово правило.

Ако се једначина (2.14) развије у ред по θ и $\bar{\theta}$ можемо да очитамо законе трансформација компонентних поља:

$$\delta_\xi f = \xi\phi + \bar{\xi}\bar{\chi} \ , \tag{2.25}$$

$$\delta_\xi \phi_\alpha = 2m\xi_\alpha + (\sigma^m \bar{\xi})_\alpha (v_m + i(\partial_m f)) \ , \tag{2.26}$$

$$\delta_\xi \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = 2n\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} + (\bar{\sigma}^m \xi)^{\dot{\alpha}} (-v_m + i(\partial_m f)) \ , \tag{2.27}$$

$$\delta_\xi m = \bar{\xi}\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m(\partial_m \phi) \ , \tag{2.28}$$

$$\delta_\xi n = \xi\varphi + \frac{i}{2}\xi\sigma^m(\partial_m \bar{\chi}) \ , \tag{2.29}$$

---

[4] У додатку В су наведене неке корисне релације које важе за суперковаријантне изводе, а коришћене су у овом раду.

$$\delta_\xi v_m = -\xi\sigma_m\bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}_m\varphi + \frac{i}{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^n\sigma_m(\partial_n\bar{\chi}) - \frac{i}{2}\xi\sigma^n\bar{\sigma}_m(\partial_n\phi) \ , \tag{2.30}$$

$$\delta_\xi\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = 2d\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} + i(\bar{\sigma}^l\xi)^{\dot{\alpha}}(\partial_l m) + \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^l\sigma^m\bar{\xi})^{\dot{\alpha}}(\partial_m v_l) \ , \tag{2.31}$$

$$\delta_\xi\varphi^\alpha = 2d\xi_\alpha + i(\sigma^l\bar{\xi})_\alpha(\partial_l n) - \frac{i}{2}(\sigma^l\bar{\sigma}^m\xi)_\alpha(\partial_m v_l) \ , \tag{2.32}$$

$$\delta_\xi d = \frac{i}{2}\xi\sigma^m(\partial_m\bar{\lambda}) + \frac{i}{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m(\partial_m\varphi) \ . \tag{2.33}$$

Из једначина (2.25-2.33) види се да се при суперсиметричним трансформацијама компоненте суперпоља трансформишу једне у друге, па је простор суперпоља затворен на деловање суперсиметричних трансформација и представља линеарну репрезентацију суперсиметричне алгебре. Ова репрезентација је редуцибилна. Иредуцибилне репрезентације могу се добити наметањем веза које су коваријантне на деловање суперсиметричних трансформација. Један начин за добијање таквих веза је коришћењем диференцијалних оператора D і $\bar{D}$, јер они антикомутирају са операторима Q и $\bar{Q}$, па комутирају са суперсиметричним трансформацијама (2.14), што значи да су везе изражене преко њих очуване при деловању суперсиметричних трансформација.

2.3 Иредуцибилна суперпоља

Као што је речено у поглављу посвећеном суперпољима, општа суперпоља су редуцибилна при деловању суперсиметричних трансформација. Применом суперковаријантних извода можемо добити неке иредуцибилне репрезентације суперсиметрије на простору суперпоља. Примери иредуцибилних суперпоља значајних за овај рад су кирално и антикирално суперпоље.

2.3.1 Кирално суперпоље

Размотримо најпре случај киралног суперпоља. Нека је Φ суперпоље за које важи:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \ . \tag{2.34}$$

Такво суперпоље назива се кирално суперпоље. Веза (2.34) се лако може решити ако се са просторних координата x^m пређе се на киралне координате $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$. Ове координате очигледно задовољавају везу (2.34): $\bar{D}_{\dot{\alpha}}y^m = \bar{D}_{\dot{\alpha}}(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}) = 0$. Поред киралних координата услов (2.34) задовољава и координата θ: $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0$. Одавде закључујемо да је произвољна функција променљивих y^m и θ задовољава услов (2.34). Да је то најопштије решење везе (2.34) може се видети, ако се коваријантни извод $\bar{D}$ напише преко y^m, θ и $\bar{\theta}$: $\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$, што значи да кирално суперпоље зависи од $\bar{\theta}$ само кроз зависност од y^m. Развој по θ и $\bar{\theta}$ киралног суперпоља има следећи облик:

$$\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)\\ &= A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x)\\ &+ \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x)\ .\end{aligned} \tag{2.35}$$

За разлику од најопштијег суперпоља које у мултиплету садржи девет различитих поља (четири скаларна, четири спинорска и једно векторско) у киралном мултиплету налазе се само три поља: два комплексна скаларна $A(x)$ и $F(x)$ и један леви Вајлов спинор $\psi(x)$. Одавде је јасно да је кирално поље иредуцибилно у односу на деловање суперсиметричних трансформација, јер произвољно суперпоље које није константно мора садржати бар једну бозонску и једну фермионску компоненту.

Веома је погодно изразити компонентна поља као суперковаријантне изводе суперпоља рачунате при $\theta = \bar{\theta} = 0$. У случају киралног суперпоља компонентна поља се могу изразити на следећи начин:

$$A(x) = \Phi(x,\theta,\bar{\theta})|_{\theta=\bar{\theta}=0}\ , \tag{2.36}$$

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}D_\alpha\Phi(x,\theta,\bar{\theta})|_{\theta=\bar{\theta}=0}\ , \tag{2.37}$$

$$F(x) = -\frac{1}{4}D^2\Phi(x,\theta,\bar{\theta})|_{\theta=\bar{\theta}=0}\ . \tag{2.38}$$

Овакав запис омогућава једноставно рачунање закона трансформације компонентних поља, заменом оператора Q и $\bar{Q}$ операторима D и $\bar{D}$ и коришћењем релација (2.22). На пример, за поље ψ_α се на овај начин добија: $\sqrt{2}\delta\psi_\alpha = \delta D_\alpha \Phi| = (\xi^\beta D_\beta + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}}) D_\alpha \Phi| = (\xi^\beta \frac{1}{2}\epsilon_{\beta\alpha} D^2 - \bar{\xi}^{\dot{\beta}}(\{\bar{D}_{\dot{\beta}}, D_\alpha\} - D_\alpha \bar{D}_{\dot{\beta}}))\Phi| = 2i\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}(\partial_m A) + 2\xi_\alpha F$.

При суперсиметричним трансформацијама компоненте киралног поља се трансформишу на следећи начин:

$$\delta_\xi A(x) = \sqrt{2}\xi\psi \ , \tag{2.39}$$

$$\delta_\xi \psi_\alpha = i\sqrt{2}(\sigma^m \bar{\xi})_\alpha (\partial_m A) + \sqrt{2}\xi_\alpha F \ , \tag{2.40}$$

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m(\partial_m \psi) \ . \tag{2.41}$$

Из закона трансформације компонентних поља киралног мултиплета, види се да је овај мултиплет затворен на деловање суперсиметричних трансформација, па чини иредуцибилну репрезентацију суперсиметричне алгебре. Највиша компонента киралног мултиплета у развоју по θ и $\bar{\theta}$, која није извод другог поља је $F(x)$. Поље $F(x)$ се трансформише при суперсиметричним трансформацијама као тотална дивергенција, што значи да варијација тог поља под интегралом по простору може да се претвори у интеграл на граници, а такав интеграл је нула уз погодно изабране граничне услове. То је важно при конструисању лагранжијана инваријантних на суперсиметричне трансформације.

2.3.2 Антикирално суперпоље

Аналогно са киралним пољем, може се дефинисати и антикирално поље (десно кирално поље). Оно задовољава везу:

$$D_\alpha \Phi^+ = 0 \ . \tag{2.42}$$

Преласком са координата $(x^m, \theta, \bar{\theta})$ на координате $(y^{+m}, \theta, \bar{\theta})$, где је $y^{+m} = x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, веза (2.42) се може преписати као: $D_\alpha \Phi^+ = \partial_\alpha \Phi^+ = 0$, па је најопштије антикирално поље следећег облика:

$$\begin{aligned}\Phi^+(x,\theta,\bar\theta) &= A^*(y^+) + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi(y^+) + \bar\theta\bar\theta F^*(y^+)\\ &= A^*(x) - i\theta\sigma^m\bar\theta\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box A^*(x)\\ &+ \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^m\partial_m\bar\psi(x) + \bar\theta\bar\theta F^*(x)\ .\end{aligned} \tag{2.43}$$

Развој (2.43) се може добити конјуговањем развоја (2.35). Компоненте антикиралног мултиплета су два комплексна скаларна поља $A^*(x)$ и $F^*(x)$ и један десни Вајлов спинор $\bar\psi(x)$.

Компонентна поља антикиралног суперпоља, изражена као суперковаријантни изводи суперпоља рачунати при $\theta = \bar\theta = 0$ имају следећи облик:

$$A^*(x) = \Phi^+(x,\theta,\bar\theta)|_{\theta=\bar\theta=0}\ , \tag{2.44}$$

$$\bar\psi_{\dot\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar D_{\dot\alpha}\Phi^+(x,\theta,\bar\theta)|_{\theta=\bar\theta=0}\ , \tag{2.45}$$

$$F^*(x) = -\frac{1}{4}\bar D^2\Phi^+(x,\theta,\bar\theta)|_{\theta=\bar\theta=0}\ . \tag{2.46}$$

При суперсиметричним трансформацијама компоненте антикиралног поља се трансформишу на следећи начин:

$$\delta_\xi A^*(x) = \sqrt{2}\bar\xi\bar\psi\ , \tag{2.47}$$

$$\delta_\xi\bar\psi_{\dot\alpha} = -i\sqrt{2}(\xi\sigma^m)_{\dot\alpha}(\partial_m A^*) + \sqrt{2}\bar\xi_{\dot\alpha}F^*\ , \tag{2.48}$$

$$\delta_\xi F^* = i\sqrt{2}\xi\sigma^m(\partial_m\bar\psi)\ . \tag{2.49}$$

Слично као у случају киралног мултиплета, највиша компонента антикиралног мултиплета у развоју по θ и $\bar\theta$, која није извод другог поља, $F^*(x)$, се трансформише при суперсиметричним трансформацијама као тотална дивергенција, што значи да и такав члан може да се користи у конструисању лагранжијана инваријантних на суперсиметричне трансформације.

2.3.3 Кирални пројектори

Произвољно суперпоље је редуцибилна репрезентација суперсиметрије, па је потребно наћи његово разлагање на иредуцибилне делове. То се може учинити помоћу диференцијалних оператора који пројектују произвољно суперпоље редом на његов антикирални, кирални и трансверзални део:

$$P_1 = \frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box} \ , \qquad P_2 = \frac{\bar{D}^2 D^2}{16\Box} \ , \qquad P_T = -\frac{D\bar{D}^2 D}{8\Box} \ . \tag{2.50}$$

Директним рачуном може се проверити да за ове операторе важи $P_1 + P_2 + P_T = 1$.

Ако се уведу два додатна оператора:

$$P_+ = \frac{D^2}{4\Box^{\frac{1}{2}}} \ , \qquad P_- = \frac{\bar{D}^2}{4\Box^{\frac{1}{2}}} \ , \tag{2.51}$$

може се показати је скуп оператора P_1, P_2, P_+, P_- и P_T затворен на множење (композицију оператора) и задовољава таблицу множења 2.1. Директним рачуном,

$\circ$	P_1	P_2	P_+	P_-	P_T
P_1	P_1	0	P_+	0	0
P_2	0	P_2	0	P_-	0
P_+	0	P_+	0	P_1	0
P_-	P_-	0	P_2	0	0
P_T	0	0	0	0	P_T

Слика 2.1: Таблица множења киралних пројектора

може се проверити да за кирално суперпоље Φ важи $P_2\Phi = \Phi$, слично и за антикирално суперпоље Φ^+ важи $P_1\Phi^+ = \Phi^+$. Применом оператора (2.50) на произвољно суперпоље F, чији је компонентни развој дат изразом (2.8), можемо добити иредуцибилне компоненте суперпоља F. На тај начин добијамо кирални део суперпоља

F:

$$\begin{aligned}
P_2F = \frac{\bar{D}^2D^2}{16\Box}F = \frac{1}{\Box}\left(d - \frac{i}{2}(\partial_m v^m) + \frac{1}{4}\Box f\right) \\
+ \sqrt{2}\theta^\alpha\left(\frac{i}{\sqrt{2}\Box}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}(\partial_m\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\phi_\alpha\right) + \theta\theta m \\
+ i\theta\sigma^l\bar{\theta}\partial_l\left(\frac{1}{\Box}d - \frac{i}{2\Box}(\partial_m v^m) + \frac{1}{4}f\right) \\
+ \frac{1}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}(\partial_m\phi_\alpha)\right) \\
+ \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(d - \frac{i}{2}(\partial_m v^m) + \frac{1}{4}\Box f\right)\ .
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Добијено суперпоље (2.52) представља кирални мултиплет са компонентама A_{ch}, ψ_{ch} и F_{ch}:

$$A_{ch} = \frac{1}{\Box}\left(d - \frac{i}{2}(\partial_m v^m) + \frac{1}{4}\Box f\right)\ , \tag{2.53}$$

$$\psi_{ch,\alpha} = \frac{i}{\sqrt{2}\Box}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}(\partial_m\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\phi_\alpha\ , \tag{2.54}$$

$$F_{ch} = m\ . \tag{2.55}$$

Слично, добијамо антикирални део суперпоља F:

$$\begin{aligned}
P_1F = \frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box}F = \frac{1}{\Box}\left(d + \frac{i}{2}(\partial_m v^m) + \frac{1}{4}\Box f\right) \\
+ \sqrt{2}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\left(\frac{i}{\sqrt{2}\Box}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}(\partial_m\varphi_\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right) + \bar{\theta}\bar{\theta}n \\
- i\theta\sigma^l\bar{\theta}\partial_l\left(\frac{1}{\Box}d + \frac{i}{2\Box}(\partial_m v^m) + \frac{1}{4}f\right) \\
+ \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_\alpha + \frac{i}{2\sqrt{2}}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}(\partial_m\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})\right) \\
+ \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(d + \frac{i}{2}(\partial_m v^m) + \frac{1}{4}\Box f\right)\ .
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Суперпоље (2.56) је антикирално суперпоље са компонентама A^*_{ach}, $\bar{\psi}_{ach}$ и F^*_{ach}:

$$A^*_{ach} = \frac{1}{\Box}\left(d + \frac{i}{2}(\partial_m v^m) + \frac{1}{4}\Box f\right)\ , \tag{2.57}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_{ach} = \frac{i}{\sqrt{2}\Box}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}(\partial_m\varphi_\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\ , \tag{2.58}$$

$$F^*_{ach} = n\ . \tag{2.59}$$

Иако киралним пројекторима можемо добити кирално, односно антикирално суперпоље полазећи од произвољног суперпоља, због нелокалног оператора $\Box^{-1}$ у киралним пројекторима, не може се аутоматски тврдити да се $\theta\theta$, односно $\bar{\theta}\bar{\theta}$ компонента добијеног киралног, односно антикиралног дела датог суперпоља трансформише као тотална дивергенција при суперсиметричним трансформацијама, већ се то мора у сваком појединачном случају посебно проверити.

Затвореност киралних пројектора на множење омогућава инвертовање оператора изражених преко њих. Нека је X оператор дат изразом:

$$X = AP_1 + DP_2 + BP_+ + CP_- + EP_T \ , \tag{2.60}$$

где су A, B, C, D и E инвертибилни оператори (сем ако их нема у развоју оператора X), тада је његов инверз дат изразом:

$$\begin{aligned} X^{-1} = &(A - BD^{-1}C)^{-1}P_1 + (D - CA^{-1}B)^{-1}P_2 + E^{-1}P_T \\ &- A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}P_+ - D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}P_- \ . \end{aligned} \tag{2.61}$$

Примена киралних пројектора биће значајна код налажења пропагатора за суперпоља у теоријама које се разматрају у овом раду.

2.4 Конструкција Вес-Зумино модела

Пошто смо дефинисали кирално и антикирално суперпоље, можемо да конструишемо лагранжијан који од њих зависи и при том је инваријантан на суперсиметричне трансформације и ренормализабилан. Тај лагранжијан представља Вес-Зумино модел и уведен је уведен у раду [17].

2.4.1 Суперсиметричне иваријанте

При конструисању суперсиметирчног лагранжијана, потребно је да размотримо производе киралних и антикиралних суперпоља. Производи киралних суперпоља су поново кирална суперпоља. Исто важи и за антикирална суперпоља. То следи из линеарности суперковаријантних извода. Производи два кирална и три кирална суперпоља, записани преко киралних координата y^m и θ имају облик:

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j &= A_i(y)A_j(y) + \sqrt{2}\theta[\psi_i(y)A_j(y) + \psi_j(y)A_i(y)] &(2.62)\\ &+ \theta\theta[A_i(y)F_j(y) + A_j(y)F_i(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)]\ , &(2.63)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j\Phi_k = {} & A_i(y)A_j(y)A_k(y)\\ &+ \sqrt{2}\theta[\psi_i(y)A_j(y)A_k(y) + \psi_j(y)A_k(y)A_i(y) + \psi_k(y)A_i(y)A_j(y)]\\ &+ \theta\theta[F_i(y)A_j(y)A_k(y) + F_j(y)A_k(y)A_i(y) + F_k(y)A_i(y)A_j(y)\\ &- \psi_i(y)\psi_j(y)A_k(y) - \psi_j(y)\psi_k(y)A_i(y) - \psi_k(y)\psi_i(y)A_j(y)]\ . \qquad (2.64)\end{aligned}$$

Као што смо видели у одељку о киралном суперпољу, $\theta\theta$ члан киралног суперпоља се трансформише као тотална дивергенција при суперсиметричним трансформацијама. У случају производа два и три суперпоља ти чланови су:

$$\Phi_i\Phi_j|_{\theta\theta} = A_i(x)F_j(x) + A_j(x)F_i(x) - \psi_i(x)\psi_j(x) \qquad (2.65)$$

и

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j\Phi_k|_{\theta\theta} \;\; = \;\; & F_i(x)A_j(x)A_k(x) + F_j(x)A_k(x)A_i(x) + F_k(x)A_i(x)A_j(x)\\ & -\psi_i(x)\psi_j(x)A_k(x) - \psi_j(x)\psi_k(x)A_i(x) - \psi_k(x)\psi_i(x)A_j(x)\ . \quad (2.66)\end{aligned}$$

Да бисмо формирали кинетички члан за елементе киралног мултиплета, размотримо производ антикиралног и киралног суперпоља:

$$\begin{aligned}\Phi_i^+\Phi_i = {} & A_i^*(x)A_i(x) + \sqrt{2}\theta\psi_i(x)A_i^*(x) + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi_i(x)A_i(x)\\ &+ \theta\theta A_i^*(x)F_i(x) + \bar\theta\bar\theta F_i^*(x)A_i(x)\\ &+ i\theta\sigma^m\bar\theta[A_i^*(x)\partial_m A_i(x) - \partial_m A_i^*(x)A_i(x) - i\bar\psi_i(x)\bar\sigma_m\psi_i(x)]\\ &+ \theta\theta\bar\theta\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\bar\sigma^m\left(\partial_m\psi_i(x)A_i^*(x) - \psi_i(x)\partial_m A_i^*(x)\right) + \sqrt{2}\bar\psi_i(x)F_i(x)\right]\\ &+ \bar\theta\bar\theta\theta\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m\left(\partial_m\bar\psi_i(x)A_i(x) - \bar\psi_i(x)\partial_m A_i(x)\right) + \sqrt{2}\psi_i(x)F_i^*(x)\right]\\ &+ \theta\theta\bar\theta\bar\theta\left[F_i^*(x)F_i(x) + \frac{1}{4}A_i^*(x)\Box A_i(x) + \frac{1}{4}\Box A_i^*(x)A_i(x) - \frac{1}{2}\partial_m A_i^*(x)\partial^m A_i(x)\right.\\ &\left.+ \frac{i}{2}\partial_m\bar\psi_i(x)\bar\sigma^m\psi_i(x) - \frac{i}{2}\bar\psi_i(x)\bar\sigma^m\partial_m\psi_i(x)\right]\ . \qquad (2.67)\end{aligned}$$

Суперопоље (2.67) није ни кирално ни антикирално, оно задовољава услов $(\Phi_i^+\Phi_i)^+ = \Phi_i^+\Phi_i$, па је оно такозвано векторско суперпоље. Чланови уз $\theta\theta$ и $\bar{\theta}\bar{\theta}$ произвољног суперпоља не трансформишу се при суперсиметричним трансформацијама као тоталне дивергенције. То важи и за векторска суперпоља, па се у лагранжијан може ставити само највиша компонента суперпоља (2.67)[5]:

$$\begin{aligned}\Phi_i^+\Phi_i|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= F_i^*(x)F_i(x) + \frac{1}{4}A_i^*(x)\Box A_i(x) + \frac{1}{4}\Box A_i^*(x)A_i(x) - \frac{1}{2}\partial_m A_i^*(x)\partial^m A_i(x) \\ &+ \frac{i}{2}\partial_m\bar{\psi}_i(x)\bar{\sigma}^m\psi_i(x) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_i(x)\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_i(x)\ . \qquad (2.68)\end{aligned}$$

2.4.2 Суперсиметрични ренормализабилни лагранжијан

Пошто смо дефинисисали суперсиметричне инварјанте формиране од киралних и антикиралних поља, можемо да напишемо општи суперсиметрични лагранжијан као:

$$\mathcal{L} = \sum_i \Phi_i^+\Phi_i|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + (W(\Phi)|_{\theta\theta} + h.c.)\ . \qquad (2.69)$$

Овај лагранжијан су добили Вес и Зумино у раду [17]. Величина $W(\Phi)$ представља полином по киралним суперпољима Φ_i и назива се суперпотенцијал. Ренормализабилност лагранжијана (2.69) зависи од облика суперпотенцијала. Да би лагранжијан био ренормализабилан константе интеракције морају да имају ненегативну масену димензију, па суперпотенцијал може бити највише трећег степена по киралним суперпољима[6]. Општи облик суперпотенцијала који је садржи највише треће степене суперпоља је:

$$W(\Phi) = \lambda_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\ , \qquad (2.70)$$

---

[5] Тај члан очигледно није тотална дивергенција, па даје нетривијалан допринос лагранжијану.

[6] Кирална суперпоља имају масену димензију 1, а θ и $\bar{\theta}$ $-\frac{1}{2}$, па је масена димензија од $\Phi_i\Phi_j\Phi_k|_{\theta\theta}$ четири.

где су m_{ij} и g_{ijk} симетрични на замену индекса. Заменом суперпотенцијала у (2.69) добијамо:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \Phi_i^+\Phi_i|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + (\lambda_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{g_{ijk}}{3}\Phi_i\Phi_j\Phi_k|_{\theta\theta} + h.c.)\\ &= i\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_i + A_i^*\Box A_i + F_i^*F_i\\ &+ \left[\lambda_iF_i + m_{ij}\left(A_iF_j - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j\right) + g_{ijk}\left(A_iA_jF_k - A_i\psi_j\psi_k\right) + h.c.\right] \ . \end{aligned} \tag{2.71}$$

Лагранжијан (2.71) садржи кинетичке чланове за поља ψ_i и A_i, док су поља F_i помоћна поља која се могу елиминисати коришћењем Ојлер-Лагранжевих једначина:

$$F_i + \lambda_i^* + m_{ij}^*A_j^* + g_{ijk}^*A_j^*A_k^* = 0 \ . \tag{2.72}$$

Лагранжијан изражен само преко динамичких поља има облик:

$$\mathcal{L} = i\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_i + A_i^*\Box A_i - (\frac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j + g_{ijk}\psi_i\psi_jA_k + h.c.) - \mathcal{V}(A_i, A_j^*) \ , \tag{2.73}$$

где је:

$$\mathcal{V} = F_i^*(A_j)F_i(A_k) = |\lambda_i + m_{ij}A_j + g_{ijk}A_jA_k|^2 \ . \tag{2.74}$$

Потенцијал $\mathcal{V}$ је очигледно позитивно дефинитан.

Овим смо дефинисали класични лагранжијан који зависи од киралних поља и има ненегативне константе интеракције. Потребно је проверити понашање ове теорије на квантном нивоу. Да бисмо то урадили израчунаћемо ефективно дејство на нивоу једне петље и потврдити ренормализабилност Вес-Зумино модела. Ради једноставности, разматраћемо случај једног киралног поља.

2.5 Ренормализација Вес-Зумино модела

Размотримо једноставан Вес-Зумино модел са једним киралним пољем Φ и без линеарног члана по Φ. Његово дејство је по (2.71) дато следећим изразом:

$$S = \int d^4x \left[\Phi^+\Phi\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left(\left(\frac{m}{2}\Phi\Phi + \frac{\lambda}{3}\Phi\Phi\Phi\right)\Big|_{\theta\theta} + h.c.\right)\right] \ . \tag{2.75}$$

Пошто је теорија коју разматрамо суперсиметрична, могуће је све прорачуне обављати на нивоу суперпоља. На тај начин у исто време рачунамо чланове који потичу од свих поља у супермултиплету, што битно скраћује рачун. Ова техника се зове техника суперграфова. Како су суперпоља функције суперкоордината, потребно је интеграл у (2.75) превести у интеграл по целом суперпростору. У следећем одељку ће бити демонстрирано како се то ради.

2.5.1 Интеграција по суперпростору

Пре него што уведемо интеграцију по целом суперпростору, потсетимо се интеграције по једној Грасмановој променљивој, θ. При дефинисању ингеграла по θ желимо, по аналогији са интегралом реалне функције реалне променљиве по целој реалној оси, да он буде инваријантан на транслације, тј. да важи: $\int d\theta f(\theta) = \int d\theta f(\theta+\alpha)$. Овај услов можемо да задовољимо, ако дефинишемо интеграле $\int d\theta = 0$ и $\int d\theta\theta = 1$[7].

Спинорске координате суперпростора θ_α и $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ су Вајлови спинори, па имају по две независне компоненте[8]. Ако елементе запремине у спинорском делу суперпростора дефинишемо као:

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta_\alpha \ , \qquad d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \ , \qquad d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta} \ , \tag{2.76}$$

лако се види да важи:

$$\int d^2\theta\theta^\alpha\theta_\alpha = \int d^2\theta\theta^2 = 1 \ , \qquad \int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}^2 = 1 \ . \tag{2.77}$$

Такође, једноставно се показује да је интеграција по Грасмановим променљивим еквивалентна диференцирању, па важе следећи изрази:

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4}\partial^\alpha\partial_\alpha = \frac{1}{4}\partial^2 \ , \qquad \int d^2\bar{\theta} = \frac{1}{4}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{4}\bar{\partial}^2 \ . \tag{2.78}$$

---

[7] То је довољно јер је најопштија функција једне Грасманове променљиве линеарна по θ. Сви виши степени θ једнаки су нули.

[8] Конвенције и резултати у вези са Вајловим спинорима дати су у додатку А.

Под интегралом по простор-времену диференцијални оператори ∂^2 и $\bar{\partial}^2$ могу се заменити операторима $-D^2$ и $-\bar{D}^2$, јер интеграле функција које су тотална дивергенција, такозване површинске чланове, можемо да занемаримо. Тако важи:

$$\begin{aligned}\int d^6s &= \int d^4x \left(\frac{1}{4}\partial^2\right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}D^2\right) \ , \\ \int d^6\bar{s} &= \int d^4x \left(\frac{1}{4}\bar{\partial}^2\right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}\bar{D}^2\right) \ , \\ \int d^8z &= \int d^4x \left(\frac{1}{16}D^2\bar{D}^2\right) = \int d^4x \left(\frac{1}{16}\bar{D}^2D^2\right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{16}D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha\right) = \int d^4x \left(\frac{1}{16}\bar{D}_{\dot{\alpha}}D^2\bar{D}^{\dot{\alpha}}\right) = \dots \ , \end{aligned} \tag{2.79}$$

где смо увели ознаке за запреминске елементе делова суперпростора и целог суперпростора: $d^6s = d^4xd^2\theta$, $d^6\bar{s} = d^4xd^2\bar{\theta}$ и $d^8z = d^4xd^4\theta$.

Због важења Лајбницовог правила за суперковаријантне изводе (2.23), (2.24) и чињенице да је интеграл по целом суперпростору суперковаријантног извода произвољне функције једнак нули, може се вршити парцијална интеграција на следећи начин:

$$\int d^8z(D_\alpha F)G = -(-1)^{|F|}\int d^8zF(D_\alpha G) \ , \tag{2.80}$$

$$\int d^8z(\bar{D}_{\dot{\alpha}}F)G = -(-1)^{|F|}\int d^8zF(\bar{D}_{\dot{\alpha}}G) \ . \tag{2.81}$$

Могу се извести и друга правила парцијалне интеграције за суперковаријантне изводе. Нека од њих, која су често коришћена у овом раду, сабрана су у додатку B.2.

Значајна примена релација (2.79) је у записивању интеграла по делу суперпростора као интеграла по целом суперпростору. На пример, нека су Φ_1 и Φ_2, два кирална суперпоља, тада важи:

$$\begin{aligned}\int d^6s\Phi_1\Phi_2 &= \int d^6s \left(\frac{\bar{D}^2D^2}{16\Box}\Phi_1\right)\Phi_2 = \int d^6s\Phi_1 \left(\frac{\bar{D}^2D^2}{16\Box}\Phi_2\right) \\ &= \int d^8z\Phi_1 \left(-\frac{D^2}{4\Box}\Phi_2\right) = \int d^8z \left(-\frac{D^2}{4\Box}\Phi_1\right)\Phi_2 \ . \end{aligned} \tag{2.82}$$

У претходном извођењу искоришћена је особина $P_2\Phi_1 = \Phi_1$, $P_2\Phi_2 = \Phi_2$, где је P_2 кирални пројектор из једначине (2.50) и парцијална интеграција за суперковаријантне изводе. Потпуно аналогно, могу се добити следеће релације за два антикирална суперпоља Φ_1^+ и Φ_2^+:

$$\begin{aligned}\int d^6s\Phi_1^+\Phi_2^+ &= \int d^6\bar{s}\left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box}\Phi_1^+\right)\Phi_2^+ = \int d^6\bar{s}\Phi_1^+\left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box}\Phi_2^+\right) \\ &= \int d^8z\Phi_1^+\left(-\frac{\bar{D}^2}{4\Box}\Phi_2^+\right) = \int d^8z\left(-\frac{\bar{D}^2}{4\Box}\Phi_1^+\right)\Phi_2^+ \ . \qquad (2.83)\end{aligned}$$

Делта функција у спинорском делу суперпростора дефинише се на следећи начин:

$$\begin{aligned}\delta^2(\theta-\theta') &= (\theta-\theta')^\alpha(\theta-\theta')_\alpha = (\theta-\theta')^2 \ , \\ \delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}') &= (\bar{\theta}-\bar{\theta}')_{\dot{\alpha}}(\bar{\theta}-\bar{\theta}')^{\dot{\alpha}} = (\bar{\theta}-\bar{\theta}')^2 \ , \\ \delta^4(\theta-\theta') &= \delta^2(\theta-\theta')\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}') \ . \qquad (2.84)\end{aligned}$$

Из претходних дефиниција лако се показује важење следећих релација:

$$D_\alpha\delta^8(z-z') = -D'_\alpha\delta^8(z-z') \ , \qquad (2.85)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\delta^8(z-z') = -\bar{D}'_{\dot{\alpha}}\delta^8(z-z') \ . \qquad (2.86)$$

Друге корисне релације у вези са деловањем суперковаријантних извода на делта функције наведене су у додатку B.3.

2.5.2 Генеришући функционал и фиксирање калибрације

Пошто смо дефинисали интеграцију по суперпростору, запишимо дејство (2.75) као интеграл по целом суперпростору:

$$\begin{aligned}S &= \int d^8z\Phi^+\Phi + \left(\int d^6s\left(\frac{m}{2}\Phi\Phi + \frac{\lambda}{3}\Phi\Phi\Phi\right) + h.c.\right) \\ &= \int d^8z\left[\Phi^+\Phi + \left(-\frac{m}{8}\Phi\left(\frac{D^2}{\Box}\Phi\right) - \frac{\lambda}{12}\Phi^2\left(\frac{D^2}{\Box}\Phi\right) + h.c\right)\right] \ . \qquad (2.87)\end{aligned}$$

Да бисмо формулисали квантну теорију у формализму функционалних интеграла, потребно је да дефинишемо генеришући функционал за дејство (2.87). При томе, неопходно је да водимо рачуна о чињеници да суперпоља Φ и Φ^+ нису произвољна, већ задовољавају диференцијалне услове (2.34) и (2.42). Решење проблема нашао је Сривастава у раду [45]. Он је изразио суперпоља Φ и Φ^+ преко произвољних суперпоља Σ и Σ^+ као:

$$\Phi = -\frac{1}{4}\bar{D}^2\Sigma \ , \qquad\qquad \Phi^+ = -\frac{1}{4}D^2\Sigma^+ \ , \tag{2.88}$$

што је омогућило формулисање генеришућег функционала као функционалног интеграла по произвољним суперепољима Σ и Σ^+ [46].

Суперпоља Φ и Φ^+ се не мењају при трансформацијама суперпоља Σ и Σ^+:

$$\Sigma \to \Sigma^{\Lambda^+} = \Sigma + \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{\Lambda}^{\dot\alpha} \ , \qquad\qquad \Sigma^+ \to \Sigma^{+\Lambda} = \Sigma^+ + D^\alpha\Lambda_\alpha \ , \tag{2.89}$$

па дејство (2.87) изражено преко суперпоља Σ и Σ^+ има калибрациону слободу, која мора да буде фиксирана, да би се интегралило само по независним степенима слободе.

Услови који фиксирају калибрацију могу се изабрати као:

$$G_\alpha(\Sigma) = D_\alpha\Sigma - F_\alpha \ , \qquad\qquad G^+_{\dot\alpha}(\Sigma^+) = \bar{D}_{\dot\alpha}\Sigma^+ - F^+_{\dot\alpha} \ , \tag{2.90}$$

где су F_α и $F^+_{\dot\alpha}$ произвољна суперпоља. Уведимо и калибрационо инваријантне функционале $\Delta[\Sigma]$ и $\Delta^+[\Sigma^+]$ на следећи начин:

$$\Delta[\Sigma] = \int \mathcal{D}\Lambda^+\delta[G_\alpha(\Sigma^{\Lambda^+})] \ , \qquad \Delta^+[\Sigma^+] = \int \mathcal{D}\Lambda\delta[G^+_{\dot\alpha}(\Sigma^{+\Lambda})] \ . \tag{2.91}$$

Сменом промењљивих у изразима (2.91) са Λ^+ и Λ на G и G^+ лако се добијају вредности калибрационо инваријантних функционала:

$$\Delta[\Sigma] = \det\left(\frac{\delta\Lambda^+}{\delta G}\right)\Bigg|_{G=0} \ , \qquad \Delta^+[\Sigma^+] = \det\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta G^+}\right)\Bigg|_{G^+=0} \ . \tag{2.92}$$

Генеришући функционал $Z[J, J^+]$ се стандардно дефинише као:

$$Z[J, J^+] \propto \int \mathcal{D}\Sigma\mathcal{D}\Sigma^+ e^{iS+i\int d^8z(J\Sigma+J^+\Sigma^+)} \ , \tag{2.93}$$

где су J и J^+ извори за суперпоља Σ и Σ^+. Процедура фиксирања калибрације се врши тако што се генеришући функционал помножи са:

$$\begin{aligned} 1 &= \Delta[\Sigma](\Delta[\Sigma])^{-1}\Delta^+[\Sigma^+](\Delta^+[\Sigma^+])^{-1} \\ &= \int \mathcal{D}\Lambda^+\delta[G_\alpha(\Sigma^{\Lambda^+})]\det\left(\frac{\delta G(\Sigma^{\Lambda^+})}{\delta\Lambda^+}\right) \int \mathcal{D}\Lambda\delta[G^+_{\dot\alpha}(\Sigma^{+\Lambda})]\det\left(\frac{\delta G^+(\Sigma^{+\Lambda})}{\delta\Lambda}\right) \end{aligned} \tag{2.94}$$

У добијеном генеришућем функционалу може се прећи са интеграција по Σ и Σ^+ на интеграције по Σ^{Λ^+} и $\Sigma^{+\Lambda}$ и на тај начин могу се издвојити интеграције по калибрационим параметрима као константе које улазе у нормирање генеришућег функционала. Тако добијамо:

$$\begin{aligned} Z[J,J^+] \propto \int &\mathcal{D}\Sigma\mathcal{D}\Sigma^+ e^{iS+i\int d^8z(J\Sigma+J^+\Sigma^+)} \\ &\delta[G_\alpha(\Sigma)]\mathrm{det}\left(\frac{\delta G}{\delta\Lambda^+}\right)\delta[G^+_{\dot\alpha}(\Sigma^+)]\mathrm{det}\left(\frac{\delta G^+}{\delta\Lambda}\right) , \end{aligned} \tag{2.95}$$

Функционални изводи калибрационих услова G и G^+ по калибрационим параметрима Λ^+ и Λ очигледно не зависе од суперпоља Σ и Σ^+, па Фадејев-Поповљеве функционалне детерминанте могу да се апсорбују у нормирање генеришућег функционала[9].

Генеришући функционал можемо помножити изразом који зависи од произвољних суперпоља F_α и $F^+_{\dot\alpha}$ из калибрационих услова (2.90) и извршити интеграцију по тим суперпољима. На тај начин ће се само променити нормирање генеришућег функционала. За генеришући функционал добијамо:

$$\begin{aligned} Z[J,J^+] &\propto \int \mathcal{D}\Sigma\mathcal{D}\Sigma^+\mathcal{D}F\mathcal{D}F^+ e^{iS+i\int d^8z(J\Sigma+J^+\Sigma^+)-i\xi\int d^8zF^+_{\dot\alpha}M^{\dot\alpha\alpha}F_\alpha} \\ &\propto \int \mathcal{D}\Sigma\mathcal{D}\Sigma^+ e^{iS+i\int d^8z(J\Sigma+J^+\Sigma^+)-i\xi\int d^8z(\bar D_{\dot\alpha}\Sigma^+)M^{\dot\alpha\alpha}(D_\alpha\Sigma)} , \end{aligned} \tag{2.96}$$

где је $M^{\dot\alpha\alpha}$ диференцијални оператор дат изразом $M^{\dot\alpha\alpha} = \frac{1}{4}D^\alpha\bar D^{\dot\alpha} + \frac{3}{16}\bar D^{\dot\alpha}D^\alpha$, а ξ произвољна константа. На овај начин смо добили додатак дејству (2.87), који фиксира калибрацију:

$$S_{GF} = -\xi\int d^8z(\bar D_{\dot\alpha}\Sigma^+)(\frac{3}{16}\bar D^{\dot\alpha}D^\alpha + \frac{1}{4}D^\alpha\bar D^{\dot\alpha})(D_\alpha\Sigma) . \tag{2.97}$$

Коришћењем антикомутаионих релација за суперковаријантне изводе и парцијалне интеграције, дејство које фиксира калибрацију може се лако записати у следећем облику:

$$S_{GF} = \xi\int d^8z\Sigma^+\Box(1-P_1)\Sigma . \tag{2.98}$$

---

[9] Функционалне детерминате могу да се запишу као функционални интеграли по новим Грасмановим пољима - пољима духова. У нашем случају, поља духова не интерагују са суперпољима Σ и Σ^+.

Укупно дејство са фиксираном калибрацијом је:

$$\tilde{S} = S + S_{GF} \ . \tag{2.99}$$

2.5.3 Ефективно дејство на нивоу једне петље

Пошто смо дефинисали дејство Вес-Зумино модела преко уопштених суперпоља Σ и Σ^+ у коме је фиксирана калибрациона симетрија, уведимо и ефективно дејство.

Из генеришућег функционала (2.96) може се дефинисати генеришући функционал повезаних Гринових функција $iW[J, J^+] = \ln Z[J, J^+]$. Класична поља Σ_{cl} и Σ_{cl}^+ се дефинишу на следећи начин:

$$\Sigma_{cl} = \frac{\delta W[J, J^+]}{\delta J} \ , \qquad\qquad \Sigma_{cl}^+ = \frac{\delta W[J, J^+]}{\delta J^+} \ . \tag{2.100}$$

Из дефиниције класичних поља, рачунањем варијационих извода, види се да класична поља представљају вакумске очекиване вредности поља Σ и Σ^+ у присутству извора J и J^+.

Ефективно дејство је функционал класичних поља и дефинише се као Лежандрова трансформација генеришућег функционала повезаних Гринових функција $W[J, J^+]$:

$$\Gamma[\Sigma_{cl}, \Sigma_{cl}^+] = W[J, J^+] - \int d^8z (J\Sigma_{cl} + J^+\Sigma_{cl}^+) \ . \tag{2.101}$$

Да бисмо израчунали прву квантну корекцију ефективног дејства у односу на класично дејство, можемо да искористимо метод позадинског поља [47]. Скицираћемо овде укратко метод позадинског поља и навести резултат.

Кренимо од израза:

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[\Sigma_{cl},\Sigma_{cl}^+]} &= e^{i(W[J,J^+]-\int d^8z(J\Sigma_{cl}+J^+\Sigma_{cl}^+))} \\ &= \int \mathcal{D}\Sigma\mathcal{D}\Sigma^+ e^{i\left\{\tilde{S}[\Sigma,\Sigma^+]+\int d^8z\left[J\left(\Sigma-\Sigma_{cl}\right)+J^+(\Sigma^+-\Sigma_{cl}^+\right)\right]\right\}} \ . \end{aligned} \tag{2.102}$$

Ако суперпоља Σ и Σ^+ разложимо на њихов класични и квантни део:

$$\Sigma = \Sigma_{cl} + \Sigma_q \ , \qquad\qquad \Sigma^+ = \Sigma_{cl}^+ + \Sigma_q^+ \ , \tag{2.103}$$

интеграцију по Σ и Σ^+ у (2.102) можемо заменити интеграцијом по Σ_q и Σ_q^+. После развоја дејства $\tilde{S}$ око класичних суперпоља Σ_{cl} и Σ_{cl}^+, функционални интеграл у (2.102) постаје интеграл Гаусовог типа који се може решити.

Напишимо део дејства квадратичан по квантним пољима Σ_q и Σ_q^+ као:

$$\tilde{S}^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^8z \begin{pmatrix} \Sigma_q & \Sigma_q^+ \end{pmatrix} (\mathcal{M}+\mathcal{V}) \begin{pmatrix} \Sigma_q \\ \Sigma_q^+ \end{pmatrix} . \tag{2.104}$$

Ефективно дејство до нивоа једне петље је дато изразом:

$$\Gamma = S + \frac{i}{2}\mathrm{Trln}(1+\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}) \; , \tag{2.105}$$

где матрица $\mathcal{M}$ потиче од кинетичког и масеног члана из дејства (2.87), као и дејства које фиксира калибрацију (2.98), док матрица $\mathcal{V}$ потиче од интеракционог члана из дејства (2.87). Иако је ефективно дејство изражено преко класичних суперпоља Σ_{cl} и Σ_{cl}^+, можемо се вратити на класична суперпоља Φ_{cl} и Φ_{cl}^+, користећи везе:

$$\Phi_{cl} = -\frac{1}{4}\bar{D}^2\Sigma_{cl} \; , \qquad\qquad \Phi_{cl}^+ = -\frac{1}{4}D^2\Sigma_{cl}^+ \; . \tag{2.106}$$

На овај начин, матрце $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}$ зависе искључиво од киралног поља Φ_{cl} и антикиралног поља Φ_{cl}^+, па је резултат (2.105) такође изражен преко поља Φ_{cl} и Φ_{cl}^+.

Директним рачуном добијамо израз за матрицу $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -m\Box^{1/2}P_- & \Box(P_2+\xi(P_1+P_T)) \\ \Box(P_1+\xi(P_2+P_T)) & -m\Box^{1/2}P_+ \end{pmatrix} \; , \tag{2.107}$$

док матрица је матрица $\mathcal{V}$ дијагонална и има следећи облик:

$$\mathcal{V} = \mathrm{diag}\left(F,\bar{F}\right) = \mathrm{diag}\left(-\frac{\lambda}{2}\Phi_{cl}\bar{D}^2, -\frac{\lambda}{2}\Phi_{cl}^+D^2\right) \; . \tag{2.108}$$

Корекцију ефективног дејства на нивоу једне петље можемо да израчунамо развијајући логаритам у изразу (2.105) у ред:

$$\Gamma_1 = \frac{i}{2}\mathrm{Trln}(1+\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}) = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_1^{(n)} \; . \tag{2.109}$$

Да бисмо могли да рачунамо чланове из развоја (2.109) потребно је да инвертујемо матрицу $\mathcal{M}$. То можемо учинити применом киралних пројектора, јер је матрица $\mathcal{M}$ облика (2.60). Користећи формулу (2.61) добијамо:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{mD^2}{4\Box(\Box - m^2)} & \frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box(\Box - m^2)} + \frac{\bar{D}^2D^2 - 2\bar{D}D^2\bar{D}}{16\xi\Box^2} \\ \frac{\bar{D}^2D^2}{16\Box(\Box - m^2)} + \frac{D^2\bar{D}^2 - 2D\bar{D}^2D}{16\xi\Box^2} & \frac{m\bar{D}^2}{4\Box(\Box - m^2)} \end{pmatrix} .\end{aligned} \tag{2.110}$$

Израчунајмо сада дивергентне делове корекције ефективног дејства на нивоу једне петље Γ_1. Да бисмо израчунали те дивергенције, потребно је да користимо неку регуларизациону процедуру. У радовима [48; 49] развијена је методологија димензионе редукције која омогућава очување суперсиметрије у квантним корекцијама. У додатку B.4 је дат пример рачунања дивергенције из (2.109) техником суперграфова и димензионом редукцијом.

Први члан у развоју (2.109) је:

$$\Gamma_1^{(1)} = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\big(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}\big) = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\big[AF + \bar{A}\bar{F}\big] = 0 \ , \tag{2.111}$$

што значи да допринос такозваних "пуноглавац" дијаграма ефективном дејству ишчезава.

Други члан у развоју (2.109) садржи два класична суперпоља[10] и дат је изразом:

$$\Gamma_1^{(2)} = -\frac{i}{4}\mathrm{Tr}\big(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}\big)^2 = -\frac{i}{4}\mathrm{Tr}\big[AFAF + \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F} + 2B\bar{F}\bar{B}F\big] \ . \tag{2.112}$$

Једини ненулти сабирак у претходном изразу је $\mathrm{Tr}(B\bar{F}\bar{B}F)$ и његов дивергентни део износи:

$$\mathrm{Tr}(B\bar{F}\bar{B}F)\Big|_{dp} = \frac{i\lambda^2}{2\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+(z)\Phi(z) \ . \tag{2.113}$$

---

[10] Надаље нећемо писати ознаку "cl" да означимо да се ради о класичним суперпољима. После инеграције по квантним пољима у методу позадинског поља, једино што остаје су класична суперпоља.

Трећи члан у развоју (2.109) је:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{(3)} &= \frac{i}{6}\mathrm{Tr}\big(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}\big)^3 \\ &= \frac{i}{6}\mathrm{Tr}\big[AFAFAF + \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F} + 3AFB\bar{F}\bar{B}F + 3\bar{A}\bar{F}\bar{B}FB\bar{F}\big]\ .\end{aligned} \tag{2.114}$$

Директним рачунањем трагова у изразу (2.114) добија се да је дивергентни део од $\Gamma_1^{(3)}$ једнак нула.

Можемо израчунати и члан који садржи четири класична суперпоља:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{(4)} &= -\frac{i}{8}\mathrm{Tr}\big(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}\big)^4 \\ &= -\frac{i}{8}\mathrm{Tr}\big[AFAFAFAF + \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F} + 2B\bar{F}\bar{B}FB\bar{F}\bar{B}F \\ &\quad + 4AFAFB\bar{F}\bar{B}F + 4\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{B}FB\bar{F} + 4AFB\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{B}F\big]\ .\end{aligned} \tag{2.115}$$

Сви чланови у претходном изразу су или једнаки нули или коначни, па дивергентни део поправке ефективног дејства која садржи четири класична суперпоља ишчезава. Може се показати да су и остали чланови из (2.109) коначни [17].

Дивергентни део корекције ефективног дејства на нивоу једне петље је:

$$\Gamma_1\big|_{dp} = \Gamma_1^{(2)}\Big|_{dp} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+(z)\Phi(z)\ . \tag{2.116}$$

Једини дивергентни члан, добијен у поправци ефективног дејства, пропорционалан је кинетичком члану полазног дејства (2.87), што значи да је Вес-Зумино модел ренормализабилан.

2.5.4 Ренормализовање дејства

Погледајмо сада како се ренормализује полазно дејство (2.87).

Уведимо такозвано "голо" суперпоље Φ_0. Оно је са ренормализованим суперпољем Φ повезано релацијом:

$$\Phi_0 = \sqrt{Z}\Phi\ , \tag{2.117}$$

где је Z ренормализација јачине суперпоља.

Такозвано "голо" дејство S_B представља дејство (2.87) при чему је суперпоље од кога дејство зависи "голо" суперпоље (2.117), а маса и константа интракције такође имају "голе" вредности:

$$\begin{aligned} S_B &= \int d^8 z \left[\Phi_0^+ \Phi_0 + \left(-\frac{m_0}{8} \Phi_0 \left(\frac{D^2}{\Box} \Phi_0 \right) - \frac{\lambda_0}{12} \Phi_0^2 \left(\frac{D^2}{\Box} \Phi_0 \right) + h.c \right) \right] \\ &= \int d^8 z \left[Z \Phi^+ \Phi + \left(-\frac{Z m_0}{8} \Phi \left(\frac{D^2}{\Box} \Phi \right) - \frac{Z^{3/2} \lambda_0}{12} \Phi^2 \left(\frac{D^2}{\Box} \Phi \right) + h.c \right) \right] \ . \end{aligned} \tag{2.118}$$

Додавањем дивергентног дела величине $\Gamma_1[\Phi]$ голом дејству добијамо ренормализовано дејство (2.87):

$$S = S_B + \Gamma_1 |_{dp} \ . \tag{2.119}$$

Из претходне једначине можемо очитати вредност параметра Z, као и везе између "голих" и ренормализованих вредности масе и константе интеракције:

$$Z = 1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \epsilon} \ , \qquad m = Z m_0 \ , \qquad \lambda = Z^{\frac{3}{2}} \lambda_0 \ . \tag{2.120}$$

Из претходних израза види се да се све редефиниције изражавају преко ренормализације јачине суперпоља, Z. Ово је важан резултат који представља теорему о нherенормализовању [50]. Како се у рачунању поправке ефективног дејства интеграли по целом суперпростору, у ефективном дејству се као контрачланови не могу појавити чланови написани као интеграли само по делу суперпростора. Масени и интеракциони члан у Вес-Зумино моделу су интеграли само по делу суперпростора, те се они не могу директно ренормализовати, већ само преко ренормализације јачине суперпоља.

Глава 3

Деформациона квантизација

Веома моћан начин за увођење не(анти)комутативног простора је твист формализам или деформациона квантизација. Ако се на суперсиметричној алгебри, дефинисаној у поглављу 2.1, дефинишу додатне структуре, она постаје Хопфова алгебра. Дринфелд је у радовима [31; 32; 33] развио теорију твистовања која омогућава добијање нових Хопфових алгебара из постојећих. Применом тог формализма на суперсиметричну алгебру, добија се деформисана суперсиметрична алгебра, док се применом твиста на производ функција на суперпростору добија деформисани производ функција на суперпростору - $\star$-производ. На овај начин се комутативна алгебра функција на суперпростору деформише у не(анти)комутативну.

3.1 Хопфова алгебра

У овом поглављу дефинисаћемо основне појмове неопходне за рад са Хопфовим алгебрама. Неке од стандардних књига у којима се обрађује ова тема су [51; 52; 53; 54].

3.1.1 Алгебра

Алгебра $(A, +, \cdot; k)$ над пољем k је векторски простор $(A, +; k)$ на коме је дефинисан производ који је компатибилан са сабирањем и множењем скаларом из k.

Другим речима, производ дефинише линеарно пресликавање $\cdot : A \otimes A \to A$.

За асоцијативну алгебру додатно је задовољена и аксиома асоцијативности, која је дата следећим изразом:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ , \tag{3.1}$$

за произвољне елементе $a, b, c \in A$

Ако у алгебри постоји јединични елемент за алгебарско множење $\cdot$, 1_A, такву алгебру зовемо алгебром са јединицом. Аксиома јединичног елемента дата је са:

$$1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a \ , \tag{3.2}$$

за свако $a \in A$.

Јединични елемент може се представити пресликавањем $\eta : k \to A$, $\eta(\lambda) = \lambda 1_A$, где $\lambda \in k$. У том случају, аксиоме асоцијативности и јединчног елемента могу се приказати комутативним дијаграмима датим на слици 3.1, где је са id означено идентично пресликавање.

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \otimes A \arrow[dl, "\cdot \otimes id"'] \arrow[dr, "id \otimes \cdot"] & \\
A \otimes A \arrow[dr, "\cdot"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\cdot"] \\
& A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[dr, "\cdot"] & \\
k \otimes A \arrow[u, "\eta \otimes id"] \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[dr, "\cdot"] & \\
A \otimes k \arrow[u, "id \otimes \eta"] \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Слика 3.1: Асоцијативност и јединични елемент

Асоцијативну алгебру са јединицом, представљеном пресликавањем η, над пољем k, означаваћемо са $(A, +, \cdot, \eta; k)$. У даљем тексту ћемо под алгебром подразумевати управо оваку алгебру.

Алгебарско пресликавање $f : A \to B$ је линеарно пресликавање између две алгебре, A и B, које чува стурктуру алгебре:

$$f(ab) = f(a)f(b), \qquad\qquad f(1_A) = 1_B, \tag{3.3}$$

за све $a, b \in A$.

Леви (десни) идеал у алгебри A је векторски потпростор који је затворен за множење елементима алгебре са лева (десна). У случају да је потпростор I затворен за множење елементима алгебре A са обе стране, кажемо да је I обострани идеал у алгебри A и тада је квоцијентни простор A/I такође алгебра. Произвољан скуп елемената алгебре генерише идеал, а квоцијентна алгебра добијеног идеала добија се тако што се у полазној алгебри сви елементи идеала изједначе са нулом.

3.1.2 Коалгебра

Из графичке дефиниције алгебре добијамо дефиницију коалгебре, ако обрнемо смерове стрелица на слици 3.1. Коалгебра $(C, +, \Delta, \varepsilon; k)$ над пољем k је векторски простор $(C, +; k)$ на коме је дефинисано линеарно пресликавање $\Delta : C \to C \otimes C$ - копроизвод и линеарно пресликавање $\varepsilon : C \to k$ - којединица. Копроизвод мора да буде коасоцијативан:

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \ . \tag{3.4}$$

Којединица задовољава аксиому:

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(c) = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(c) = c \ , \tag{3.5}$$

за свако $c \in C$.

Често се за копроизвод користи погодна Свидлерова нотација:

$$\Delta(c) = \sum_i c_{i(1)} \otimes c_{i(2)} \ , \tag{3.6}$$

у којој је копроизвод елемента $c \in C$ представљен као формална сума елемената из $C \otimes C$. Ради краткоће писања обично се изоставља и знак суме и индекс i, па се пише:

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \ . \tag{3.7}$$

Аксиома коасоцијативности записана у Свидлеровој нотацији гласи:

$$c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} = c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} \equiv c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}, \tag{3.8}$$

за $c \in C$. Ова аксиома говори о томе да при поновном раздељивању $\Delta(c)$ није битно који ће део бити раздељен.

Аксиома којединице у Свидлеровој нотацији има следећи облик:

$$\varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}) = c, \tag{3.9}$$

где је c произвољан елемент коалгебре C.

Аксиоме коалгебре изражене преко комутативних дијаграма дате су на слици 3.2.

$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \otimes C & \\
C \otimes C \arrow[ur, "\Delta \otimes id"'] & & C \otimes C \arrow[ul, "id \otimes \Delta"'] \\
 & C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "\varepsilon \otimes id"'] & \\
k \otimes C \arrow[r, equal] & C \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "id \otimes \varepsilon"'] & \\
C \otimes k \arrow[r, equal] & C \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Слика 3.2: Коасоцијативност и којединица

Коалгебарско пресликавање $f : C \to D$ је линеарно пресликавање између две коалгебре C и D које чува стурктуру коалгебре:

$$(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta \circ f, \qquad\qquad \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C\ . \tag{3.10}$$

3.1.3 Биалгебра и Хопфова алгебра

Биалгебра $(H, +, \cdot, \eta, \Delta, \varepsilon; k)$ над пољем k је векторски простор $(H, +; k)$ над пољем k који је у исто време и алгебра $(H, +, \cdot, \eta; k)$ и коалгебра $(H, +, \Delta, \varepsilon; k)$, тако да су задовољене релације компатибилности:

$$\Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g), \qquad \Delta(1) = 1 \otimes 1, \tag{3.11}$$

$$\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g), \qquad \varepsilon(1) = 1\ . \tag{3.12}$$

Релације компатибилности значе да су копроизвод $\Delta : H \to H \otimes H$ и којединица $\varepsilon : H \to k$ алгебарска пресликавања. Ове релације су еквивалентне услову да су производ $\cdot : H \otimes H \to H$ и јединица $\eta : k \to H$ коалгебарска пресликавања, па важи:

$$(\cdot \otimes \cdot) \circ \Delta(h \otimes g) = \Delta(hg), \qquad \varepsilon(hg) = \varepsilon(h \otimes g)\ , \tag{3.13}$$

што се може записати у Свидлеровој нотацији као:

$$(hg)_{(1)} \otimes (hg)_{(2)} = (h_{(1)}g_{(1)}) \otimes (h_{(2)}g_{(2)})\ . \tag{3.14}$$

Ако се на биалгебри дефинише линеарно пресликавање $S : H \to H$ - антипод, које задовољава аксиому:

$$\cdot(S \otimes id) \circ \Delta = \cdot(id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon, \tag{3.15}$$

добија се алгебарска структура која се назива Хопфова алгебра $(H, +, \cdot, \eta, \Delta, \varepsilon, S; k)$ над пољем k. Антипод има сличну улогу у Хопфовој алгебри као инверз у групи. Међутим, за пресликавање S се не захтева инвертибилност, тј. постојање инверзног пресликавања S^{-1}, нити идемпотетнтност (не мора да важи $S^2 = id$). Може се доказати да је антипод у Хопфовој алгебри јединствен и представља и антиалгебарско пресликавање и антикоалгебарско пресликавање, тј. задовољава следеће релације:

$$S(hg) = S(g)S(h), \qquad S(1) = 1, \tag{3.16}$$

$$(S \otimes S) \circ \Delta h = \tau \circ \Delta \circ S(h), \qquad \varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h), \tag{3.17}$$

где је $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$, транспозиција дефинисана релацијом $\tau(h \otimes g) = g \otimes h$.

Додатне аксиоме компатибилности за биалгебре, представљене преко комутативних дијаграма, дате су на слици 3.3, док је аксиома антипода, која биалгебру претвара у Хопфову алгебру, дата преко комутативног дијаграма на слици 3.4.

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\Delta \otimes \Delta"] & H \arrow[r, "\Delta"] & H \otimes H \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "id \otimes \tau \otimes id"] & & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[u, "\cdot \otimes \cdot"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\varepsilon"'] & k \\
H \otimes H \arrow[u, "\cdot"] \arrow[ur, "\varepsilon \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta \otimes \eta"'] & H \arrow[d, "\Delta"'] \\
& H \otimes H
\end{tikzcd}$$

Слика 3.3: Релације компатибилности за биалгебру

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"] & k \arrow[r, "\eta"] & H \\
H \otimes H \arrow[rr, "{id \otimes S,\ S \otimes id}"] & & H \otimes H \arrow[u, "\cdot"']
\end{tikzcd}$$

Слика 3.4: Аксиома антипода у Хопфовој алгебри

Две биалгебре H и G су изоморфне, ако постоји пресликавање $f : H \to G$, које је истовремено и алгебарско и коалгебарско пресликавање биалгебара H и G. Ако су у биалгебрама H и G дефинисани антиподи, редом S_H и S_G, тада су Хопфове алгебре H и G изоморфне, ако су изоморфне као биалгебре и важи:

$$f(S_H(h)) = S_G(f(h)) \ . \tag{3.18}$$

3.1.4 Универзално обавијајућа Хопфова алгебра

Тензорска алгебра над пољем k може се конструисати полазећи од произвољног векторског простора $(V, +; k)$. Тензорским множењем векторског простора V са самим собом, добијају се тензорски степени полазног векторског простора V, $V^{\otimes n}$, где је $n \in \mathbb{N}_0$. Тензорски векторски простор $(T(V), +; k)$ добија се директним сабирањем свих тензорских степена векторског простора V и носећег поља k: $T(V) = k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus V \otimes V \otimes V \oplus \ldots$. Елементи овог простора су линеарне комбинације коначних тензорских производа елемената простора V. Дефинисањем производа елемената $T(V)$ као тензорског производа, векторски простор добија структуру тензорске алгебре $(T(V), +, \otimes; k)$ над пољем k.

Нека је g Лијева алгебра над пољем k. Универзално обавијајућа Хопфова алгебра алгебре g је некомутативна алгебра $U(g)$, која представља квоцијент тензорске алгебре $T(g)$ и идеала генерисаног елементима облика $[\xi, \eta] - \xi \otimes \eta + \eta \otimes \xi$, где су $\xi, \eta, [\xi, \eta] \in g$. Копроизвод, којединица и антипод за елементе $\xi \in g$ дати су релацијама[1]:

$$\Delta\xi = \xi \boxtimes 1 + 1 \boxtimes \xi, \qquad \varepsilon(\xi) = 0, \qquad S(\xi) = -\xi, \tag{3.19}$$

док се копроизвод, којединица и антипод за произвољне елементе из $U(g)$ добијају проширењем дејства Δ и ε као алгебарских пресликавања, а S као антиалгебарског пресликавања. Тако, на пример, копроизвод делује на елемент $\xi \otimes \eta \in U(g)$ као:

$$\Delta(\xi \otimes \eta) = \Delta(\xi) \otimes \Delta(\eta) = (\xi \boxtimes 1 + 1 \boxtimes \xi) \otimes (\eta \boxtimes 1 + 1 \boxtimes \eta) \tag{3.20}$$

$$= (\xi \otimes \eta) \boxtimes 1 + \xi \boxtimes \eta + \eta \boxtimes \xi + 1 \boxtimes (\xi \otimes \eta)\ . \tag{3.21}$$

Из претходне једначине добија се за $\Delta([\xi, \eta])$:

$$\Delta([\xi, \eta]) = \Delta(\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi) = [\xi, \eta] \boxtimes 1 + 1 \boxtimes [\xi, \eta], \tag{3.22}$$

што значи да је проширивање копроизвода као алгебарског пресликавања компатибилно са структуром Лијеве алгебре. Којединица на тензорски производ делује на следећи начин:

$$\varepsilon(\xi \otimes \eta) = \varepsilon(\xi) \otimes (\eta) = \varepsilon(\xi)\varepsilon(\eta) = 0, \tag{3.23}$$

па је компатибилност Лијеве алгебре са којединицом тривијално остварена. Што се тиче антипода, на тензорски производ он делује као:

$$S(\xi \otimes \eta) = S(\eta) \otimes S(\xi) = \eta \otimes \xi, \tag{3.24}$$

---

[1] Треба обратити пажњу да поред такозваног унутрашњег тензорског производа $\otimes$, који представља множење у тензорској алгебри и алгебри $U(g)$, постоји други - спољњи тензорски производ $\boxtimes$ који се појављује при дефинисању копроизвода. У литератури је обично јасно из контекста да је множење у $U(g)$ тензорско, па се знак за то множење или у потпуности изоставља или се пише $\cdot$, тако ознака $\otimes$ остаје слободна за спољњи тензорски производ. Овде је ради јасноће писан и један и други тензорски производ, међутим у наредним главама ће се користити манир уобичајен у литератури, тј. означаваће се само спољњи тензорски производ са $\otimes$.

па важи:

$$S([\xi,\eta]) = S(\xi\otimes\eta - \eta\otimes\xi) = \eta\otimes\xi - \xi\otimes\eta = -[\xi,\eta]\ . \tag{3.25}$$

На овај начин је дефинисан копроизвод, којединица и антипод за сваки елемент $U(g)$, тако да су очуване релације Лијеве алгебре.

Лако се може проверити да су задовољене аксиоме Хопфове алгебре за $U(g)$.

3.1.5 Дејство Хопфове алгебре

Веома значајно у раду са Хопфвим алгебрама је њихово деловање на друге структуре. Дејством елемената Хопфове алгебре на елементе неког векторског простора добија се репрезентација те алгебре.

Лево дејство или репрезентација алгебре H је пар (α, V), где је V векторски простор, а $\alpha : H\otimes V \to V$ линеарно пресликавање за које важи $\alpha(hg\otimes v) = \alpha(h\otimes\alpha(g\otimes v))$ и $\alpha(1\otimes v) = v$. Аксиоме левог дејства приказане су на слици 3.5. За сваки елемент алгебре h дефинисано је тако једно линеарно пресликавање векторског простора V на себе: $\rho(h)(v) = \alpha(h\otimes v)$. Из аксиома левог дејства јасно је да је пресликавање $\rho : H \to Lin(V)$ алгебарско пресликавање ($Lin(V)$ алгебра линеарних пресликавања на векторском простору V са композицијом пресликавања као производом). У овом раду ћемо користити скраћену нотацију за дејство елемената алгебре, па

$$\begin{tikzcd}
 & H\otimes H\otimes V \arrow[dl, "\cdot\otimes id"'] \arrow[dr, "id\otimes\alpha"] & \\
H\otimes V \arrow[dr, "\alpha"'] & & H\otimes V \arrow[dl, "\alpha"] \\
 & V &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H\otimes V \arrow[dr, "\alpha"] & \\
k\otimes V \arrow[u, "\eta\otimes id"] \arrow[r, equal] & V
\end{tikzcd}$$

Слика 3.5: Аксиоме левог дејства Хопфове алгебре на векторски простор ћемо уместо $\rho(h)(v)$ писати просто $h(v)$ подразумевајући при том пресликавање из $Lin(V)$ које одговара елементу Хопфове алгебре h. У овој скраћеној нотацији аксиоме левог дејства Хопфове алгебре имају следећи облик:

$$(hg)(v) = h(g(v)) \ , \qquad\qquad 1(v) = v \ . \tag{3.26}$$

Када говоримо о репрезентацији Хопфове алгебре H на векторском простору V, ако желимо да ставимо нагласак на простор на коме алгебра делује, кажемо да је векторски простор V леви H-модул.

Интересантан је случај када Хопфова алгебра H делује на векторском простору који има и неку додатну структуру. Тада је потребно да дејство Хопфове алгебре у одговарајућем смислу поштује ту додатну структуру. Тако кажемо да је алгебра, A, H-модул алгебра, ако је A леви H-модул и важи:

$$h(ab) = \cdot\,(\Delta(h)(a \otimes b)) = h_{(1)}(a) \cdot h_{(2)}(b), \qquad\qquad h(1) = \varepsilon(h)1 \ . \tag{3.27}$$

За дефинисање H-модул алгебре неопходно је да H буде биалгебра или Хопфова алгебра, а не само обична алгебра, тј. на H мора да буде дефинисан копроизвод и којединица. Додатне аксиоме H-модул алгебре, представљене помоћу комутативних дијаграма, приказане су на слици 3.6. Значај H-модул алгебре биће очигледан при деформисању суперпростора твист формализмом.

$$\begin{tikzcd}
H \otimes A \otimes A \arrow[r, "id \otimes \cdot"] \arrow[d, "\Delta \otimes id \otimes id"] & H \otimes A \arrow[r, "\alpha"] & A & A \otimes A \arrow[l, "\cdot"'] \\
H \otimes H \otimes A \otimes A \arrow[rrr, "id \otimes \tau \otimes id"] & & & H \otimes A \otimes H \otimes A \arrow[u, "\alpha \otimes \alpha"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\eta"] & k \arrow[r, "\eta"] & A \\
H \otimes A \arrow[urr, "\alpha"] & &
\end{tikzcd}$$

Слика 3.6: Додатне аксиоме H-модул алгебре

3.2 Формализам твистовања

Структура Хопфове алгебре или биалгебре може се успоставити на многим Лијевим алгебрама дефинисањем одговарајућег копроизвода, којединице и, у случају

Хопфове алгебре, антипода. Међутим, нове Хопфове алгебре (или само биалгебре) систематски се могу дефинисати деформимисањем познатих алгебара. Ову процедуру, такозвано твистовање, развио је Владимир Дринфелд[2].

Генерисање нових Хопфових алгебара твистовањем, остварује се увођењем 2-коцикла - такозваног Дринфелдовог твиста, зато ћемо најпре дефинисати коцикле у Хопфовој алгебри.

3.2.1 Коланци и коцикли

Нека је H биалгебра или Хопфова алгебра. Проширимо деловање копроизвода Δ на $H^{\otimes n}$ на следећи начин:

$$\Delta_i : H^{\otimes n} \to H^{\otimes n+1}, \qquad \Delta_i = \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{i-1} \otimes \Delta \otimes \underbrace{id \ldots id}_{n-i} \,, \tag{3.28}$$

где $(i = 1, \ldots, n)$. Ова дефиниција може се употпунити случајевима $i = 0$ и $i = n+1$ на следећи начин:

$$\Delta_0 a = 1 \otimes a, \qquad \Delta_{n+1} = a \otimes 1 \,, \tag{3.29}$$

где $a \in H^{\otimes n}$.

Дефинишимо сада n-коланац χ као произвољни инвертибилни елемент из $H^{\otimes n}$, а његову когранmicу $\partial\chi$ као инвертибилни елемент из $H^{\otimes n+1}$ дат релацијом:

$$\partial\chi = \left(\prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \Delta_{2i}\chi \right) \left(\prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Delta_{2i+1}\chi^{-1} \right) \,, \tag{3.30}$$

где се производи у заградама рачунају у растућем поретку по вредности индекса i. Инвертибилни елемент из $H^{\otimes n}$, χ, за који важи $\partial\chi = 1$ назива се n-коцикл Хопфове алгебре H. Уколико је за неки коланац или коцикл χ задовољено $\varepsilon_i\chi = 1$, за све $\varepsilon_i = \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{i-1} \otimes \varepsilon \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{n-i}$, где $i = 1, \ldots, n$, кажемо да је тај коланац или коцикл којединичан.

---

[2] Твистовањем се могу деформисати Хопфове алгебре, али Дринфелдова теорија развијена је и за специјалне случајеве такозваних квазитриангуларних Хопфових алгебара, као и за квази Хопфове алгебре, тако да се при твистовању очувавају додатне алгебарске структуре [31; 32; 33].

У теорији твистовања Хопфових алгебара значајни су 1-коцикли и 2-коцикли[3]. Ако се општа дефиниција n-коцикла запише у овим специјалним случајевима, пребацивањем инверзних чланова на десну страну једнакости, добијамо следеће дефиниције за 1 и 2-коцикле.

Инвертибилни елемент χ из H је 1-коцикл, ако за њега важи:

$$\chi \otimes \chi = \Delta\chi \ . \tag{3.31}$$

Лако је видети да је 1-коцикл увек којединичан.

Инвертибилни елемент χ из $H \otimes H$ је 2-коцикл, ако за њега важи:

$$(1 \otimes \chi)(id \otimes \Delta)\chi = (\chi \otimes 1)(\Delta \otimes id)\chi \ . \tag{3.32}$$

Може се показати да је χ којединичан ако је задовољено $(\varepsilon \otimes id)\chi = 1$ или еквивалентно $(id \otimes \varepsilon)\chi = 1$, тј. из једног услова за којединичност следи други.

3.2.2 Кохомологија Хопфових алгебара

Појам важан при генерисању нових Хопфових алгебара из познатих твистовањем је кохомологија. Групе кохомологије могу се дефинисати у случају Хопфове алгебре $k(G)$ која представља комутативну алгебру функција са вредностима у k на групи G чији је јединични елемент e. Структура ове Хопфове алгебре је дата на следећи начин. Векторски простор је одређен сабирањем функција у датој тачки и множењем скаларом из k, алгебарско множење је производ функција у тачки. Копроизвод, којединица и антипод су дати следећим изразима:

$$(\Delta\phi)(u,v) = \phi(uv) \ , \quad \varepsilon(\phi) = \phi(e) \ , \quad (S(\phi))(u) = \phi(u^{-1}) \ , \quad u,v \in G \ . \tag{3.33}$$

Дефиниције из претходног одељка за n-коланац и n-коцикл се у случају Хопфове алгебре $k(G)$ своде на уобичајене дефиниције групних коцикала: n-коланац је функција $\chi : \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n} \to k - \{0\}$. Когранича функције χ је:

$$(\partial\chi)(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}) = \prod_{i=0}^{n+1} \chi(u_1, \ldots, u_i u_{i+1}, \ldots, u_{n+1})^{(-1)^i} \ , \tag{3.34}$$

---

[3] У теорији квази Хопфових алгебара битни су и 3-коцикли.

где је по дефиницији први чинилац, за $i = 0$, $\chi(u_2, \ldots, u_{n+1})$, а последњи, за $i = n+1$, $\chi(u_1, \ldots, u_n)^{(-1)^{n+1}}$. Ако за n-коланац χ важи $\partial\chi = 1$, онда је он n-коцикл. Лако се може показати да важи $\partial^2\chi = 1$, за произвољан n-коланац χ, па се може, за свако n, дефинисати група кохомологије $\mathcal{H}^n(G, k)$, као фактор група групе нормираних n-коцикала и подгрупе елемената који су кограница. За n-коланац, χ, кажемо да је нормиран ако задовољава релације $\chi(e, u_1, \ldots, u_n) = \chi(u_1, e, \ldots, u_n) = \ldots \chi(u_1, \ldots, u_{n-1}, e) = 1$ за све $u_1, u_2, \ldots, u_n \in G$.

Ова конструкција, може се пренети и на произвољну комутативну Хопфову алгебру, међутим за некомутативне Хопфове алгебре не мора да важи релација $\partial^2\chi = 1$ за произвољан n-коланац χ, па се не могу дефинисати групе кохомологије $\mathcal{H}^n$ као у комутативном случају. Ипак, за сваку биалгебру или или Хопфову алгебру добро су дефинисани простори $\mathcal{H}^1$ и $\mathcal{H}^2$.

Простор $\mathcal{H}^1$ садржи све 1-коцикле (они су аутоматски којединични) пошто су контраничне...

Што се тиче простора $\mathcal{H}^2(k, H)$ за произвољну Хопфову алгебру или биалгебру H, когранице 1-коланаца нису увек једнаке 1, па простор $\mathcal{H}^2(k, H)$ не садржи све којединичне 2-коцикле у H. Нека је $\gamma \in H$ инвертибилни којединични елемент, тада се лако може показати да је $\partial\gamma$ којединичан 2-коцикл у H. Важи и општије тврђење. Ако је χ којединичан 2-коцикл у H, тада је

$$\chi^\gamma = (\gamma \otimes \gamma)\chi\Delta\gamma^{-1} \ , \tag{3.35}$$

такође којединичан 2-коцикл у H. Кажемо да је 2-коцикл χ^γ кохомологан са χ [4]. Простор $\mathcal{H}^2(k, H)$ се састоји од свих међусобно некохомологних којединичних 2-коцикала.

3.2.3 Твистована Хопфова алгебра

Пошто су дефинисани коланци и коцикли, можемо да наведемо основни резултат из теорије твистовања или деформационе квантизације.

---

[4] Доказ овог тврђења налази се у додатку D.3.

Нека је H биалгебра или Хопфова алгебра и χ којединичан 2-коцикл, који ћемо звати твист. Тада постоји нова биалгебра или Хопфова алгебра H_χ са истим алгебарским множењем, јединицом и којединицом као H, али са деформисаним (или твистованим) копроизводом Δ_χ и антиподом S_χ, дефинисаним релацијама:

$$\Delta_\chi h = \chi(\Delta h)\chi^{-1}\ , \qquad\qquad S_\chi(h) = U(S(h))U^{-1}\ , \tag{3.36}$$

где је h произвољан елемент алгебре H, а $U = \cdot(id \otimes S)\chi$ инвертибилни елемент алгебре H.

Претходно тврђење је Дринфелдова теорема о твистовању, чији доказ је дат у додатку D.1. Два елемента ове теореме су независна, тако да полазећи од биалгебре (без дефинисаног антипода) твистовањем добијамо поново биалгебру, а ако кренемо од Хопфове алгебре, твистовањнем добијамо нову Хопфову алгебру.

Нека је γ инвертибилни којединични елемент из H, он тада дефинише унутрашњи аутоморфизам биалгебре или Хопфове алгебре H, тј. пресликавање $f : H \to H$, $f(h) = \gamma^{-1}h\gamma$ је и алгебарско и коалгебарско бијективно пресликавање биалгебре H на себе. Нека су χ и ψ два 2-коцикла. Ако су χ и ψ кохомологни, тј. важи $\psi = \chi^\gamma$ по (3.35), може се лако показати да су онда Хопфове алгебре које се добијају твистовањем алгебре H помоћу њих изоморфне преко унутрашњег аутоморфизма f. Специјално за $\chi = 1 \otimes 1$ добијамо да се твистовањем 2-коциклом $\partial\gamma$ добија Хопфова алгебра повезана са полазном унутрашњим аутоморфизмом[5]. То значи да се твистовањем добија нова Хопфова алгебра, која није изоморфна са полазном, само ако се користи 2-коцикл који је кохомологно нетривијалан, тј. није облика $\partial\gamma$. На пример, ако је простор $\mathcal{H}^2$ тривијалан за Хопфову алгебру, онда су сви твистови алгебре међусобно изоморфни. Међутим, таква ситуација се у пракси не дешава често, тако да се твистовањем добијају нове Хопфове алгебре из постојећих.

---

[5] Доказ претходног тврђења дат је у додатку D.3.

3.2.4 Твистована H-модул алгебра и $\star$-производ

При твистовању Хопфове алгебре потребно је твистовати и друге структуре које су на њој дефинисане или са којима је она у вези да би се међу њима задржали односи анлогни оним пре твистовања. Веома значајан пример за примену у конструкцији некомутативних простора је дејство Хопфове алгебре на алгебру функција на датом простору.

Може се доказати следеће важно тврђење[6]. Нека је χ којединичан 2-коцикл за биалгебру или Хопфову алгебру H, тј. χ је твист за алгебру H. Ако је A H-модул алгебра са производом $\cdot : A \otimes A \to A$, тада се може дефинисати нова асоцијативна алгебра A_χ са производом $\star : A_\chi \otimes A_\chi \to A_\chi$ датим изразом:

$$a \star b = \cdot(\chi^{-1}(a \otimes b)) \ , \tag{3.37}$$

где су $a, b \in A$. Добијена алгебра A_χ је H_χ-модул алгебра, где је H_χ Хопфова алгебра добијена твистовањем Хопфове алгебре H твистом χ као у одељку 3.2.3.

Чињеница да је A_χ H_χ-модул алгебра значи да елемент $h \in H_\chi$ на производ елемената $a, b \in A_\chi$ и јединични елемент алгебре A_χ делује на следећи начин:

$$h(a \star b) = \star(\Delta_\chi(h)(a \otimes b)) \ , \qquad\qquad h(1) = \varepsilon(h)1 \ . \tag{3.38}$$

То значи да је дејство елемента h на производ елемената деформисане алгебре A_χ потпуно истог облика као дејство на производ елемената полазне алгебре A (3.27), с тим што је $\cdot$-производ замењен $\star$-производом, а копроизвод Δ копроизводом Δ_χ.

3.3 Деформисање супералгебре

У овом поглављу ћемо уопштити дефиницију Хопфове алгебре на случај универзално обавијајуће алгебре градиране Лијеве алгебре. Метод добијања нових Хопфових алгебара из постојећих твистовањем може се применити и на супералгебре. Применом твиста на множење функција на суперпростору добија се $\star$-производ суперпоља и деформисани суперпростор.

---

[6] Доказ је дат у додатку D.2.

3.3.1 Хопфова супералгебра

Полазећи од Лијеве алгебре g у одељку 3.1.4 дефинисали смо универзално обавијајућу Хопфову алгебру $U(g)$ као тензорску алгебру над пољем k генерисану елементима Лијеве алгебре g модуло релације Лијеве алгебре g. Додатно смо дефинисали копроизвод, којединицу и антипод, тако да су задовољене аксиоме Хопфове алгебре. Ову процедуру треба уопштити на случај у коме полазна алгебра није Лијева, већ градирана Лијева алгебра (2.1).

Простор универзално обавијајуће алгебре $U(\mathcal{S})$, суперсиметричне алгебре $\mathcal{S}$ добија се као и у случају обичне Лијеве алгебре. Он је тензорска алгебра $T(\mathcal{S})$ модуло релације суперсиметричне алгебре (2.1). Оно што је различито код градираних Лијевих алгебара је уопштени комутатор (2.3), зато се при множењу мора водити рачуна да ли фермионски генератори мењају места.

Структура Хопфове алгебре на $U(\mathcal{S})$ се уводи дефинисањем копроизвода, којединице и антипода за произвољни елемент из $a \in \mathcal{S}$:

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \ , \qquad \varepsilon(a) = 0 \ , \qquad S(a) = -a \ . \tag{3.39}$$

Дејства копроизвода и којединице се проширују на алгебру $U(\mathcal{S})$ као алгебарска пресликавања: $\Delta : U(\mathcal{S}) \to U(\mathcal{S}) \otimes U(\mathcal{S})$ и $\varepsilon : U(\mathcal{S}) \to k$, а дејство антипода проширује се на елементе $U(\mathcal{S})$ као градирано антиалгебарско пресликавање $S : U(\mathcal{S}) \to U(\mathcal{S})$:

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \ , \tag{3.40}$$

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) \ , \tag{3.41}$$

$$S(ab) = (-1)^{|a||b|} S(b)S(a) \ , \tag{3.42}$$

где су a и b хомогени елементи из $\mathcal{S}$. При рачунању производа два елемента из $U(\mathcal{S}) \otimes U(\mathcal{S})$ треба водити рачуна да ли долази до замене места непарних елемената алгебре $\mathcal{S}$. Нека су a, b, c и d четири хомогена елемента из $U(\mathcal{S})$, тада важи:

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|} ac \otimes bd \ . \tag{3.43}$$

Уместо генератора Q и $\bar{Q}$ можемо користити суперсиметричне трансформације δ_ξ (2.14) као елементе алгебре. Копроизвод, којединица и антипод од δ_ξ су:

$$\Delta\delta_\xi = \delta_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \delta_\xi \ , \qquad \varepsilon(\delta_\xi) = 0 \ , \qquad S(\delta_\xi) = -\delta_\xi \ . \tag{3.44}$$

Директном провером може се показати да дефинисана пресликавања задовољавају аксиоме Хопфове супералгебре.

3.3.2 Деформисани суперпростор и супералгебра

Уведимо скраћене ознаке за координате суперпростора уведене у поглављу 2.2: $Z^A = (x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$. Парцијални изводи по координатама суперпростора су: $\partial_A = (\partial_m, \partial^\alpha, \bar{\partial}_{\dot{\alpha}})$. Комутационе релације које задовољавају суперкоординате (2.7), могу се компактно записати као: $\{Z^A, Z^B] = 0$, где се ознака $\{,]$ тумачи као комутатор или антикомутатор у зависности од тога да ли су кординате фермионске или бозонске. Парцијални изводи, ∂_A, и координате, Z^B, задовољавају: $\partial_A Z^B = \delta_A^B$.

Нека је A алгебра суперпоља (2.8). Деривација је линеарно пресликавање $X : A \to A$ које задовољава Лајбницово правило:

$$X(ab) = X(a)b + (-1)^{|X||a|} a X(b) \ , \tag{3.45}$$

где су $a, b \in A$. Очигледно је да су парцијални изводи ∂_A деривације алгебре A. Линеарне комбинације $f^A(Z)\partial_A$, где су f^A функције суперкоордината, такође задовољавају (3.45), па представљају деривације алгебре A. Посматрајмо скуп деривација $\{X_I\} = \{X_a^{(0)}, X_b^{(1)}\}$, где су $X_a^{(0)}$ парне, а $X_b^{(1)}$ непарне деривације (горњи индекс у загради означава парност), и нека деривације задовољавају следеће (анти)комутационе релације:

$$[X_a^{(0)}, X_b^{(0)}] = 0 \ , \qquad [X_a^{(0)}, X_b^{(1)}] = 0 \ , \qquad \{X_a^{(1)}, X_b^{(1)}\} = 0 \ . \tag{3.46}$$

Алгебра дефинисана (анти)комутационим релацијама (3.46), Ξ, је градирана Лијева алгебра, па се из ње може конструисати универзално обавијајућа Хопфова алгебра $U\Xi$, као што је то учињено за супералгебру у одељку 3.3.1.

У раду [55] доказано је да парни елемент $\mathcal{F} \in U\Xi \otimes U\Xi$ облика:

$$\mathcal{F} = e^{\sigma^{IJ} X_I \otimes X_J} = e^{\sigma^{ab}_{(0)} X^{(0)}_a \otimes X^{(0)}_b + \sigma^{cd}_{(1)} X^{(1)}_c \otimes X^{(1)}_d} \ , \tag{3.47}$$

где су $\{\sigma^{IJ}\} = \{\sigma^{ab}_{(0)}, \sigma^{cd}_{(1)}\}$ произвољне константе, којединични 2-коцикл Хопфове алгебре $U\Xi$, тј. он је твист. Да $\mathcal{F}$ задовољава услов за 2-коцикил, следи из идентитета: $\mathcal{F} \otimes 1 = e^{\sigma^{IJ} X_I \otimes X_J \otimes 1}$, $1 \otimes \mathcal{F} = e^{\sigma^{IJ} 1 \otimes X_I \otimes X_J}$, $(\Delta \otimes id)\mathcal{F} = e^{\sigma^{IJ} \Delta(X_I) \otimes X_J}$, $(id \otimes \Delta)\mathcal{F} = e^{\sigma^{IJ} X_I \otimes \Delta(X_J)}$ и (анти)комутационих релација за X_I. Којединичност твиста $\mathcal{F}$ следи из $\varepsilon(X_I) = 0$.

Избором твиста $\mathcal{F}$ може се деформисати Хопфова алгебра $U\Xi$ у Хопфову алгебру $U\Xi_{\mathcal{F}}$, на начин приказан у одељку 3.2.3. Хопфова алгебра $U\Xi_{\mathcal{F}}$ има исти производ и којединицу као $U\Xi$, али су јој промењени копроизвод и антипод у:

$$\Delta_{\mathcal{F}}(\xi) = \mathcal{F}\Delta(\xi)\mathcal{F}^{-1} \ , \qquad S_{\mathcal{F}}(\xi) = US(\xi)U^{-1} \ , \tag{3.48}$$

где је U инвертибилни елемент из $U\Xi$, дефинисан на следећи начин:

$$U = \mathcal{F}^{\alpha} S(\mathcal{F}_{\alpha}) \ , \qquad U^{-1} = S(\bar{\mathcal{F}}^{\alpha})\bar{\mathcal{F}}_{\alpha} \ , \tag{3.49}$$

а ξ произвољан елемент из $U\Xi$[7].

Директном провером може се показати да је $U\Xi^{\mathcal{F}} = (U\Xi, \cdot, \eta, \Delta_{\mathcal{F}}, \varepsilon, S_{\mathcal{F}})$ заиста Хопфова алгебра, међутим, то је последица важења Дринфелдове теореме о твистовању дате у D.1.

Размотримо сада како елементи Хопфове алгебре $U\Xi$ делују на суперпоља из алгебре A. Нека су $\xi, \eta \in U\Xi$ и $f(Z) \in A$, тада је, очигледно, задовољено:

$$(\xi\eta)(f(Z)) = \xi(\eta(f(Z))) \ , \tag{3.50}$$

па је релацијом (3.50) дефинисано једно лево дејство Хопфове алгебре $U\Xi$ на алгебри A. Како је још задовољено и:

$$\xi(f(Z)g(Z)) = \xi(f(Z))g(Z) + (-1)^{|f||\xi|} f(Z)\xi(g(Z)) = \cdot\,(\Delta(\xi)(f(Z) \otimes g(Z))) \ , \tag{3.51}$$

---

[7] За произвољан инвертибилни 2-коланац Хопфове алгебре H, χ, користимо нотацију $\chi = \chi^{\alpha} \otimes \chi_{\alpha}$ и $\chi^{-1} = \bar{\chi}^{\alpha} \otimes \bar{\chi}_{\alpha}$.

то је A $U\Xi$-модул алгебра. Релација (3.51) представља Лајбницово правило, које по дефиницији мора да важи за деривације.

У одељку 3.2.4 је показано, да се помоћу твиста $\mathcal{F}$ може дефинисати нова асоцијативна алгебра $A_{\mathcal{F}}$, са производом:

$$f(Z) \star g(Z) = \cdot(\mathcal{F}^{-1}(f(Z) \otimes g(Z))) \ , \tag{3.52}$$

где су $f, g \in A$. Алгебра $A_{\mathcal{F}}$ је $U\Xi_{\mathcal{F}}$-модул алгебра. То значи да је задовољено:

$$\xi(f(Z) \star g(Z)) = \star(\Delta_{\mathcal{F}}(\xi)(f(Z) \otimes g(Z))) \ . \tag{3.53}$$

Релација (3.53) представља деформисано Лајбницово правило.

Деформисањем алгебре функција на суперпростору A у алгебру $A_{\mathcal{F}}$, деформисан је и сам суперпростор. Конкретно, (анти)комутатори суперкоордината прелазе у $\star$-(анти)комутаторе, који више не морају да буду једнаки нули.

У наредна две главе размотрићемо два модела, конструисана деформисањем суперпростора управо описаним техникама, помоћу два различита твиста.

Глава 4

D-деформисан Вес-Зумино модел

Пошто смо дали преглед резултата за недеформисани Вес-Зумино модел и начин конструисања деформисаних суперпростора методом деформационе квантизације, можемо формулисати примере теорија поља на не(анти)комутативним просторима.

Разматраћемо деформације Вес-Зумино модела са једним киралним суперпољем (2.87). У одељку 2.5.3 израчунали смо ефективно дејство до нивоа једне петље за недеформисани Вес-Зумино модел и у одељку 2.5.4 показали да је он ренормализабилан. Формализам деформационе квантизације, приказан у глави 3, омогућава модификовање Хопфове алгебре суперсиметричних трансформација увођењем одговарајућег 2-коцикла или твиста. Таква модификована Хопфова алгебра делује на елементе алгебре суперпоља на деформисан начин, заменом обичног тачкастог производа $\star$-производом. Деформисан производ индукује промене у структури суперпростора, па добијамо не(анти)комутативан суперпростор.

Деформација Вес-Зумино модела је сада праволинијска, производе суперпоља у дејству (2.87) претварамо у $\star$-производе. Да бисмо очували суперсиметричност добијеног дејства користимо киралне пројекторе, дефинисане у одељку 2.3.3. Пошто је конструисан деформисани Вес-Зумино модел на не(анти)комутативном простору, можемо да размотримо његову ренормализабилност, рачунањем ефективног дејства до нивоа једне петље. Резултати који следе прате радове [56; 57].

4.1 D-деформисана Хопфова суперсиметрична алгебра

Као што смо видели у поглављима 3.2 и 3.3, основна величина при деформационој квантизацији је којединични 2-коцикл - твист. За твист ћемо одабрати:

$$\mathcal{F} = e^{\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}D_\alpha \otimes D_\beta} \ , \tag{4.1}$$

где су $C^{\alpha\beta} = C^{\beta\alpha} \in \mathbb{C}$ константе, а D_α су суперковаријантни изводи (2.20). Константе $C^{\alpha\beta}$ представљају константе не(анти)комутативности, јер твист $\mathcal{F}$ при $C^{\alpha\beta} = 0$ постаје тривијалан. За одабрани твист, очигледно, важи $\mathcal{F}^* \neq \mathcal{F}$, тј. он није хермитски.

Твист (4.1) је очигледно облика (3.47), уколико суперсиметричну алгебру (2.6) проширимо суперковаријантним изводима D_α. У том случају твист припада $\mathcal{U}(\mathcal{S})$, где је векторски простор $\mathcal{S} = \text{span}\{P, Q, \bar{Q}, D\}$. За суперковаријантне изводе, као и за остале елементе $\mathcal{S}$ дефинишемо копроизвод, којединицу и антипод као:

$$\Delta D_\alpha = D_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes D_\alpha \ , \qquad \epsilon(D_\alpha) = 0 \ , \qquad S(D_\alpha) = -D_\alpha \ . \tag{4.2}$$

Проширујући дефиниције копроизвода и којединице као алгебарских пресликавања и антипода као антиалгебарског пресликавања, добијамо структуру Хопфове алгебре на простору $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ проширеном суперковаријантним изводима D_α.

При твистовању алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ у алгебру $\mathcal{U}(\mathcal{S})_\mathcal{F}$ алгебарско множење, јединица и којединца остају исти. Оно што се потенцијално мења је копроизвод и антипод (3.48). Како генератори D_β антикомутирају са генераторима Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ и D_α, а комутирају са генераторима P_m, то деформисани копроизвод и антипод за Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, P_m и D_α остају исти као у недеформисаном случају:

$$\begin{aligned}
\Delta_\mathcal{F}(Q_\alpha) &= Q_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes Q_\alpha \ , & S_\mathcal{F}(Q_\alpha) &= -Q_\alpha \ , \\
\Delta_\mathcal{F}(\bar{Q}_{\dot{\alpha}}) &= \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \ , & S_\mathcal{F}(\bar{Q}_{\dot{\alpha}}) &= -\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \ , \\
\Delta_\mathcal{F}(P_m) &= P_m \otimes 1 + 1 \otimes P_m \ , & S_\mathcal{F}(P_m) &= -P_m \ , \\
\Delta_\mathcal{F}(D_\alpha) &= D_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes D_\alpha \ , & S_\mathcal{F}(D_\alpha) &= -D_\alpha \ .
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Овим је дефинисана деформисана Хопфова алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$.

4.2 Деформисани суперпростор и алгебра суперпоља

Пошто смо видели на који начин изабрани твист деформише суперсиметричну алгебру, потребно је да размотримо на који начин се деформација преноси на објекте на које елементи Хопфове алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ делују. У одељку 3.3.2 показано је како се помоћу одабраног твиста може деформисати алгебра суперпоља A са производом $\cdot$ у алгебру $A_{\mathcal{F}}$ са производом $\star$ (3.52). У случају твиста (4.1) $\star$-производ има следећи облик:

$$\begin{aligned} F(x,\theta,\bar{\theta})\star G(x,\theta,\bar{\theta}) &= \star(F\otimes G) = \cdot\big(\mathcal{F}^{-1}(F\otimes G)\big) = \cdot\Big(e^{-\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}D_\alpha\otimes D_\beta}F\otimes G\Big) \\ &= FG - \frac{1}{2}(-1)^{|F|}C^{\alpha\beta}(D_\alpha F)(D_\beta G) \\ &- \frac{1}{8}C^{\alpha\beta}C^{\gamma\delta}(D_\alpha D_\gamma F)(D_\beta D_\delta G)\ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

где су F и G два произвољна суперпоља. У развоју $\star$-производа (4.4) има коначно много чланова, јер су суперковаријантни изводи Грасманови оператори. Овако уведен $\star$-производ је по конструкцији асоцијативан, некомутативан, тј. $F\star G \neq G\star F$ у општем случају, и своди се на обично тачкасто множење када не(анти)комутативне константе $C_{\alpha\beta}$ ишчезавају.

Размотримо сада на који начин $\star$-производ (4.4) мења стуктуру суперпростора (2.7). Заменом уобичајеног производа, $\star$-производом добијају се следће $\star$-не(анти)комутационе релације између координата суперпростора $(x,\theta,\bar{\theta})$:

$$\begin{aligned} &\{\theta^\alpha \overset{\star}{,} \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}\ , && \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \overset{\star}{,} \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0\ , && \{\theta^\alpha \overset{\star}{,} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\} = 0\ , \\ &[x^m \overset{\star}{,} x^n] = -C^{\alpha\beta}(\sigma^{mn}\varepsilon)_{\alpha\beta}\bar{\theta}\bar{\theta}\ , && [x^m \overset{\star}{,} \theta^\alpha] = -iC^{\alpha\beta}\sigma^m_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\ , && \big[x^m \overset{\star}{,} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\big] = 0\ . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Из релација (4.5) види се да је и бозонски и фермионски део суперпростора деформисан.

Лево дејство Хопфове алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$[1] на алгебри суперпоља $A_{\mathcal{F}}$ дефинисано је

---

[1] Како се при твистовању множење у Хопфовој алгебри не мења, исто је дејство и алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{S})$

релацијом:

$$\delta^\star_\xi F = \left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right) F \ , \tag{4.6}$$

јер очигледно важи:

$$(\delta^\star_\xi \delta^\star_\eta)(F(x,\theta,\bar{\theta})) = \delta^\star_\xi(\delta^\star_\eta F) \ . \tag{4.7}$$

Множење у алгебри $A_\mathcal{F}$ је дефинисано тако она буде $\mathcal{U}(\mathcal{S})_\mathcal{F}$-модул алгебра, па у складу са (3.53), суперсиметрична трансформација на $\star$-производ суперпоља F и G делује на следећи начин:

$$\begin{aligned} \delta^\star_\xi(F \star G) &= \star\left(\Delta_\mathcal{F}(\delta^\star_\xi)(F \otimes G)\right) \\ &= \star\left(\left(\delta^\star_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \delta^\star_\xi\right)(F \otimes G)\right) \\ &= (\delta^\star_\xi F) \star G + F \star (\delta^\star_\xi G) \ , \end{aligned} \tag{4.8}$$

одакле следи да је деформисано Лајбницово правило истог облика као у недеформисаном случају [2].

4.3 Конструкција D-деформисаног дејства

Пошто смо дефинисали деформисани суперпростор, можемо да приступимо деформисању дејства Вес-Зумино модела (2.75). Сви чланови у том дејству су инваријантни у односу на суперсиметричне трансформације и ту особину желимо да сачувамо и код деформисаног модела. Зато ћемо најпре размотрити на који начин можемо да деформишемо чланове у (2.75) тако да очувамо суперсиметричност.

4.3.1 $\star$-производи киралних и антикиралних суперпоља

У одељку 2.4.1 разматрали смо чланове који су инваријантни на деловање суперсиметричних трансформација, а добијају се из производа киралних и антикиралних

и алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{S})_\mathcal{F}$. Ознаку $\delta^\star_\xi$ ћемо користити за елементе из Хопфове алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{S})_\mathcal{F}$, да нагласимо да они делују на деформисаној алгебри суперпоља $A_\mathcal{F}$.

[2] То је директна последица чињенице да је копроизвод генератора суперсиметричних трансформација остао недеформисан (4.3).

суперпоља. Како сада радимо са деформисаном алгебром суперпоља $A_{\mathcal{F}}$, желимо да инваријантне чланове добијемо из $\star$-производа киралних и антикиралних суперпоља.

Размотримо $\star$-производ два кирална суперпоља:

$$\begin{aligned}\Phi \star \Phi &= \Phi\Phi - \frac{1}{8} C^{\alpha\beta} C^{\gamma\delta} D_\alpha D_\gamma \Phi D_\beta D_\delta \Phi \\ &= \Phi \cdot \Phi - \frac{C^2}{32} (D^2\Phi)(D^2\Phi) \ ,\end{aligned} \tag{4.9}$$

где смо увели ознаку $C^2 = C^{\alpha\beta}C^{\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}$. Како $\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi \star \Phi) \neq 0$, то $\star$-производ два кирална суперпоља није кирално суперпоље. То значи да се $\theta\theta$ компонента од (4.9) не трансформише као тотална дивергенција при суперсиметричним трансформацијама. Зато је потребно да применимо киралне пројекторе (2.50) и добијемо иредуцибилне компоненте суперпоља $\Phi \star \Phi$. Оне су дате изразима:

$$P_1(\Phi \star \Phi) = -\frac{C^2}{32}(D^2\Phi)(D^2\Phi) \ , \qquad P_2(\Phi \star \Phi) = \Phi\Phi \ , \qquad P_T(\Phi \star \Phi) = 0 \ . \tag{4.10}$$

Што се тиче $\star$-производа киралног и анткиралног суперпоља, он остаје исти као и у недеформисаном случају:

$$\Phi \star \Phi^+ = \Phi\Phi^+ \ . \tag{4.11}$$

Суперпоље (4.11) представља векторски мултиплет, који је иредуцибилна репрезентација суперсиметричне алгебре.

Израчунајмо сада $\star$-производ три кирална суперпоља:

$$\begin{aligned}\Phi \star \Phi \star \Phi &= \Big(\Phi\Phi - \frac{C^2}{32}(D^2\Phi)(D^2\Phi)\Big) \star \Phi \\ &= \Phi\Phi\Phi - \frac{C^2}{32} D^2(\Phi\Phi)(D^2\Phi) - \frac{C^2}{32}(D^2\Phi)(D^2\Phi)\Phi \\ &= P_2(P_2(\Phi \star \Phi) \star \Phi) + P_1(P_2(\Phi \star \Phi) \star \Phi) + P_1(\Phi \star \Phi) \star \Phi \ .\end{aligned} \tag{4.12}$$

У претходном изразу добили смо три сабирка од којих су прва два иредуцибилна суперпоља - кирално и антикирално, док је трећи сабирак производ киралног и антикиралног суперпоља.

Овим су исцрпљене комбинације суперпоља присутних у дејству (2.75). Међутим, када будемо анализирали ренормализабилност модела, испоставиће се да је за конструкцију D-деформисаног ренормализабилног Вес-Зумино модела, неопходно укључивање и чланова који нису деформација чланова из дејства (2.75). Такви чланови не постоје у комутативном лимесу. Напишимо $\star$-производ два кирална и једног антикиралног суперпоља:

$$\begin{aligned}\Phi\star\Phi\star\Phi^+ &= \Phi\Phi\Phi^+ - \frac{C^2}{32}(D^2\Phi)(D^2\Phi)\Phi^+\\ &= P_2(\Phi\star\Phi)\star\Phi^+ + P_1(\Phi\star\Phi)\star\Phi^+\ .\end{aligned} \tag{4.13}$$

У изразу (4.13) први сабирак је производ киралног и антикиралног суперпоља, док је други сабирак антикирално суперпоље.

Следећи корак у конструкцији суперсиметричног D-деформисаног Вес-Зумино модела је идентификовање суперсиметричних чланова добијених из $\star$-производа киралних и антикиралних суперпоља.

4.3.2 Дејство D-деформисаног Вес-Зумино модела

Формирањем $\star$-производа два или три кирална и антикирална суперпоља добили смо кандидате за чланове инваријантне при суперсиметричним трансформацијама, међутим потребно је и експлицитно проверити њихову инваријантност због нелокалности киралних пројектора.

Директном провером добија се да су суперсиметрични чланови добијени из $\star$-производа два или три кирална и антикирална суперпоља следећи:

$$I_1 = \Phi\star\Phi^+\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} = \Phi\Phi^+\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \tag{4.14}$$

$$I_2 = P_2(\Phi\star\Phi)|_{\theta\theta} = \Phi\Phi|_{\theta\theta} \tag{4.15}$$

$$I_3 = P_1(\Phi\star\Phi)|_{\bar\theta\bar\theta} = -\frac{C^2}{32}(D^2\Phi)(D^2\Phi)|_{\bar\theta\bar\theta} \tag{4.16}$$

$$I_4 = P_2(P_2(\Phi\star\Phi)\star\Phi)|_{\theta\theta} = \Phi\Phi\Phi|_{\theta\theta} \tag{4.17}$$

$$I_5 = P_1(P_2(\Phi\star\Phi)\star\Phi)|_{\bar\theta\bar\theta} = -\frac{C^2}{32}D^2(\Phi\Phi)(D^2\Phi)\bigg|_{\bar\theta\bar\theta} \tag{4.18}$$

$$I_6 = P_1(\Phi\star\Phi)\star\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} = -\frac{C^2}{32}(D^2\Phi)(D^2\Phi)\Phi\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \tag{4.19}$$

$$I_7 = P_1(\Phi\star\Phi)\star\Phi^+\big|_{\bar\theta\bar\theta} = -\frac{C^2}{32}(D^2\Phi)(D^2\Phi)\Phi^+\Big|_{\bar\theta\bar\theta} \tag{4.20}$$

$$I_8 = \bar C^2 P_2(\Phi\star\Phi)\star\Phi^+\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} = \bar C^2\Phi\Phi\Phi^+\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \tag{4.21}$$

Деловањем антикиралним, односно киралним пројектором на суперпоља $\Phi\star\Phi^+$, $P_1(\Phi\star\Phi)\star\Phi$ и $\bar C^2P_2(\Phi\star\Phi)\star\Phi^+$ и узимањем $\theta\theta$, односно $\bar\theta\bar\theta$ члана, не добијају се суперсиметричне инваријанте, што се може проверити директним рачуном. То је последица нелокалности киралних пројектора. Зато као суперсиметричне инваријанте узимамо највише компоненте у развоју по θ, $\bar\theta$ ових суперпоља. Експлицитним рачуном може се проверити да добијени чланови I_1, I_6 и I_8 нису тоталне дивергенције и инваријантни су на суперсиметричне трансформације.

У инваријанту I_8, која је добијена из неминималне деформације Вес-Зумино модела, укључили смо руком константу $\bar C^2 = (C^2)^+$ да бисмо у лимесу $C^{\alpha\beta} = 0$ могли да реконструишемо недеформисани Вес-Зумино модел.

Узимајући у обзир све добијене инваријанте, (4.14-4.21), можемо да напишемо дејство D-деформисаног суперсиметричног Вес-Зумино модела:

$$\begin{aligned} S = \int d^4x\Big\{ & \Phi^+\star\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + \Big[\frac{m}{2}\left(P_2(\Phi\star\Phi)|_{\theta\theta} + 2a_1\, P_1(\Phi\star\Phi)|_{\bar\theta\bar\theta}\right) \\ & + \frac{\lambda}{3}\Big(P_2(P_2(\Phi\star\Phi)\star\Phi)|_{\theta\theta} + 3a_2\, P_1(P_2(\Phi\star\Phi)\star\Phi)|_{\bar\theta\bar\theta} \\ & + 2a_3\,(P_1(\Phi\star\Phi)\star\Phi)|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + 3a_4\, P_1(\Phi\star\Phi)\star\Phi^+\big|_{\bar\theta\bar\theta} \\ & + 3a_5\bar C^2\, P_2(\Phi\star\Phi)\star\Phi^+\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}\Big) + \text{h.c.}\Big]\Big\}\ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Уведени коефицијенти a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 су реалне константе које представљају параметре модела.

Пошто је дефинисано класично дејство D-деформисаног Вес-Зумино модела (4.22), можемо да размотримо његове квантне особине, рачунајући поправке ефективног дејства до нивоа једне петље.

4.4 Ренормализација D-деформисаног Вес-Зумино модела

4.4.1 Ефективно дејство на нивоу једне петље

Као и у случају недеформисаног Вес-Зумино модела, при рачунању корекција ефективног дејства, користићемо технику суперграфова. Зато морамо најпре написати дејство (4.22) као интеграл по целом суперпростору. Раздвојимо дејство (4.22) на део квадратичан по суперпољима, S_0, и интеракциони део, S_{int}:

$$S = S_0 + S_{int} \ . \tag{4.23}$$

Написани као интеграли по целом суперпростору изрази за S_0 и S_{int} постају:

$$S_0 = \int d^8z \Big\{ \Phi^+\Phi + \Big[-\frac{m}{8}\Phi\frac{D^2}{\Box}\Phi + \frac{ma_1C^2}{8}(D^2\Phi)\Phi + h.c. \Big] \Big\} \ , \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} S_{int} = \lambda \int d^8z \Big\{ & -\Phi^2\frac{D^2}{12\Box}\Phi + \frac{a_2C^2}{8}\Phi\Phi(D^2\Phi) - \frac{a_3C^2}{48}(D^2\Phi)(D^2\Phi)\Phi \\ & + \frac{a_4C^2}{8}\Phi(D^2\Phi)\Phi^+ + a_5\bar{C}^2\Phi\Phi\Phi^+ + h.c. \Big\} \ . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Дејство (4.22) зависи од суперпоља Φ и Φ^+, која задовољавају редом диференцијалне услове (2.34) и (2.42), што се мора узети у обзир при дефинисању генеришућег функционала. Поступак је идентичан као у недеформисаном случају: са суперпоља Φ и Φ^+ прећићемо на произвољна суперпоља Σ и Σ^+ (2.88), дејство (4.22) има калибрациону симетрију (2.89), која се може фиксирати додавањем чланова који фиксирају калибрацију (2.98):

$$\begin{aligned} S_{GF} &= -\xi \int d^8z(\bar{D}_{\dot\alpha}\Sigma^+)(\frac{3}{16}\bar{D}^{\dot\alpha}D^\alpha + \frac{1}{4}D^\alpha\bar{D}^{\dot\alpha})(D_\alpha\Sigma) \\ &= \xi \int d^8z\Sigma^+\Box(1-P_1)\Sigma \ . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Укупно дејство са фиксираном калибрацијом је:

$$\tilde{S} = S_0 + S_{int} + S_{GF} \ . \tag{4.27}$$

Даље се, као у одељку 2.5.3, примењује метод позадинског поља: суперпоља Φ и Φ^+ се раздвајају на класични и квантни део:

$$\Phi = \Phi_{cl} - \frac{1}{4}\bar{D}^2\Sigma_q \;, \qquad\qquad \Phi^+ = \Phi^+_{cl} - \frac{1}{4}D^2\Sigma^+_q \;, \tag{4.28}$$

па се после интеграције по квантним пољима Σ_q и Σ^+_q добија ефективно дејство на нивоу једне петље.

Део дејства $S_0 + S_{GF}$ квадратичан по квантним пољима Σ_q и Σ^+_q је:

$$S_0^{(2)} + S_{GF}^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^8z \begin{pmatrix} \Sigma_q & \Sigma^+_q \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \Sigma_q \\ \Sigma^+_q \end{pmatrix} \;, \tag{4.29}$$

док је део дејства S_{int} квадратичан по квантним пољима:

$$S_{int}^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^8z \begin{pmatrix} \Sigma_q & \Sigma^+_q \end{pmatrix} \mathcal{V} \begin{pmatrix} \Sigma_q \\ \Sigma^+_q \end{pmatrix} \;. \tag{4.30}$$

Ефективно дејство на нивоу једне петље, дато је изразом (2.105):

$$\Gamma = S + \frac{i}{2}\mathrm{Trln}(1 + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}) \;. \tag{4.31}$$

Развојем дејства $S_0 + S_{GF}$ по квантним пољима, добијамо израз за матрицу $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -m\Box^{1/2}(1 - a_1C^2\Box)P_- & \Box(P_2 + \xi(P_1 + P_T)) \\ \Box(P_1 + \xi(P_2 + P_T)) & -m\Box^{1/2}(1 - a_1\bar{C}^2\Box)P_+ \end{pmatrix} \;, \tag{4.32}$$

док матрица $\mathcal{V}$ има облик:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} F & G \\ \bar{G} & \bar{F} \end{pmatrix} \;, \tag{4.33}$$

где су матрични елементи F, G, $\bar{F}$ и $\bar{G}$ дати изразима:

$$\begin{aligned} F = {} & -\frac{\lambda}{2}\Phi\bar{D}^2 + \frac{\lambda a_2 C^2}{2}\Phi\Box\bar{D}^2 + \frac{\lambda a_2 C^2}{4}(\Box\Phi)\bar{D}^2 - \frac{\lambda a_3 C^2}{128}\overleftarrow{\bar{D}^2}(D^2\Phi)D^2\bar{D}^2 \\ & + \frac{\lambda a_4 C^2}{64}\overleftarrow{\bar{D}^2}(\Phi^+)D^2\bar{D}^2 + \frac{\lambda a_5}{8}\bar{C}^2(\bar{D}^2\Phi^+)\bar{D}^2 \;, \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$G = \frac{\lambda a_4}{64}\overleftarrow{\bar{D}^2}\Big[C^2(D^2\Phi) + \bar{C}^2(\bar{D}^2\Phi^+)\Big]D^2 + \frac{\lambda a_5}{8}\overleftarrow{\bar{D}^2}\Big[C^2\Phi^+ + \bar{C}^2\Phi\Big]D^2 \;, \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}\bar{F} &= -\frac{\lambda}{2}\Phi^+ D^2 + \frac{\lambda a_2 \bar{C}^2}{2}\Phi^+\Box D^2 + \frac{\lambda a_2 \bar{C}^2}{4}(\Box\Phi^+)D^2 - \frac{\lambda a_3 \bar{C}^2}{128}\overleftarrow{D^2}(\bar{D}^2\Phi^+)\bar{D}^2 D^2 \\ &+ \frac{\lambda a_4 \bar{C}^2}{64}\overleftarrow{D^2}(\Phi)\bar{D}^2 D^2 + \frac{\lambda a_5}{8}C^2(D^2\Phi)D^2 \ , \qquad (4.36)\\ \bar{G} &= \frac{\lambda a_4}{64}\overleftarrow{D^2}\Big[\bar{C}^2(\bar{D}^2\Phi^+) + C^2(D^2\Phi)\Big]\bar{D}^2 + \frac{\lambda a_5}{8}\overleftarrow{D^2}\Big[\bar{C}^2\Phi + C^2\Phi^+\Big]\bar{D}^2 \ . \qquad (4.37)\end{aligned}$$

Потребно је да инвертујемо матрицу $\mathcal{M}$, што можемо учинити применом киралних пројектора. По формули (2.61) добијамо:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m(1-a_1\bar{C}^2\Box)D^2}{4\Box f(\Box)} & \frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box f(\Box)} + \frac{\bar{D}^2 D^2 - 2\bar{D}D^2\bar{D}}{16\xi\Box^2} \\ \frac{\bar{D}^2 D^2}{16\Box f(\Box)} + \frac{D^2\bar{D}^2 - 2D\bar{D}^2 D}{16\xi\Box^2} & \frac{m(1-a_1 C^2\Box)\bar{D}^2}{4\Box f(\Box)} \end{pmatrix} \ , \qquad (4.38)\end{aligned}$$

где је:

$$f(\Box) = \Box - m^2 + m^2 a_1(C^2 + \bar{C}^2)\Box \ . \qquad (4.39)$$

Корекцију ефективног дејства на нивоу једне петље можемо да израчунамо користећи се развојем (2.109). Први члан у том развоју садржи једно класично суперпоље и дат је следећим изразом:

$$\Gamma_1^{(1)} = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\big(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}\big) = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\big[AF + \bar{A}\bar{F} + B\bar{G} + \bar{B}G\big] = 0 \ , \qquad (4.40)$$

Као и у случају недеформисаног Вес-Зумино модела, добијамо $\Gamma_1^{(1)} = 0$, па нема доприноса од "пуноглавац" дијаграма у ефективном дејству.

Део поправке ефективног дејства који је квадратичан по класичним пољима, дат је следећим изразом[3]:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{(2)} &= -\frac{i}{4}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}\right)^2 \\ &= -\frac{i}{4}\mathrm{Tr}[AFAF + \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F} + 2AFB\bar{G} + 2\bar{A}\bar{F}\bar{B}G \\ &\quad +2AG\bar{B}F + 2\bar{A}\bar{G}B\bar{F} + 2B\bar{F}\bar{B}F\Big] \ . \qquad (4.41)\end{aligned}$$

---

[3] Како су матрични елементи G и $\bar{G}$ квадратични по константи не(анти)комутативности, то у свим изразима задржавамо само чланове линеарне по G или $\bar{G}$, јер желимо да добијемо водећу поправку ефективног дејства по малим величинама C, $\bar{C}$.

Рачунањем дивергентних делова чланова из (4.41) добијају се следећи резултати:

$$\mathrm{Tr}(AFAF)\Big|_{dp} = \frac{im^2\lambda^2C^2}{4\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi\Big[a_3D^2\Phi - 2a_4\Phi^+\Big]\ , \tag{4.42}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F})\Big|_{dp} = \frac{im^2\lambda^2\bar{C}^2}{4\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Big[a_3\bar{D}^2\Phi^+ - 2a_4\Phi\Big]\ , \tag{4.43}$$

$$\mathrm{Tr}(AFB\bar{G})\Big|_{dp} = \mathrm{Tr}(AG\bar{B}F)\Big|_{dp} = -\frac{im\lambda^2C^2}{16\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi\Big[a_4D^2\Phi + 8a_5\Phi^+\Big]\ , \tag{4.44}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{A}\bar{F}\bar{B}G)\Big|_{dp} = \mathrm{Tr}(\bar{A}\bar{G}B\bar{F})\Big|_{dp} = -\frac{im\lambda^2\bar{C}^2}{16\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Big[a_4\bar{D}^2\Phi^+ + 8a_5\Phi\Big]\ , \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(B\bar{F}\bar{B}F)\Big|_{dp} &= \frac{i\lambda^2(1-2(a_1+a_2)m^2(C^2+\bar{C}^2))}{2\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Phi\\ &- \frac{i\lambda^2a_5}{8\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Big[C^2\Phi D^2\Phi + \bar{C}^2\Phi^+\bar{D}^2\Phi^+\Big]\\ &- \frac{i\lambda^2a_2(C^2+\bar{C}^2)}{4\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Box\Phi\ .\end{aligned} \tag{4.46}$$

Заменом резултата (4.42-4.46) у израз за $\Gamma_1^{(2)}$, (4.41), добијамо:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{(2)}\Big|_{dp} &= \frac{\lambda^2(1-(2(a_1+a_2)+\frac{a_4}{2}+\frac{2a_5}{m})m^2(C^2+\bar{C}^2))}{4\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Phi\\ &+ \frac{\lambda^2(m^2a_3-ma_4-a_5)}{16\pi^2\varepsilon}\int d^8z\left[C^2\Phi D^2\Phi + h.c.\right]\\ &- \frac{\lambda^2a_2(C^2+\bar{C}^2)}{8\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Box\Phi\ .\end{aligned} \tag{4.47}$$

У претходном изразу се поред чланова облика $\int d^8z\Phi^+\Phi$, $\int d^8z\Phi D^2\Phi$ и $\int d^8z\Phi^+\bar{D}^2\Phi^+$ који постоје у полазном дејству (4.22) појављује и нови члан облика $\int \Phi^+\Box\Phi$. Коефицијент уз тај члан је пропорционалан са a_2, па уколико желимо да конструишемо ренормализабилно дејство, неопходно је да коефицијент a_2 буде једнак нули. То је, рачунањем ефективног дејства по компонентама суперпоља, показано у раду [56]. Како је ренормализабилност особина коју желимо да сачувамо при деформацији Вес-Зумино модела, у даљем раду ћемо користити услов:

$$a_2 = 0\ . \tag{4.48}$$

Нађимо сада дивергентну поправку ефективног дејства на нивоу једне петље, која је трећег степена по класичним суперпољима, користећи услов (4.48). Трећи члан у развоју (2.109) је:

$$\Gamma_1^{(3)} = \frac{i}{6}\mathrm{Tr}\big(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}\big)^3 = \frac{i}{6}\mathrm{Tr}\big[AFAFAF + \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F} + 3AFAFB\bar{G} \\ + 3\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{B}G + 3AFAG\bar{B}F + 3\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{G}B\bar{F} + 3AFB\bar{F}\bar{B}F + 3\bar{A}\bar{F}\bar{B}FB\bar{F} \\ + 3AFB\bar{F}\bar{A}\bar{G} + 3\bar{A}\bar{F}\bar{B}FAG + 3B\bar{G}B\bar{F}\bar{B}F + 3\bar{B}G\bar{B}FB\bar{F}\big] \ . \tag{4.49}$$

Рачунањем трагова у изразу (4.49), добијамо следеће дивергенције:

$$\mathrm{Tr}(AFB\bar{F}\bar{B}F)\bigg|_{dp} = \frac{im\lambda^3}{2\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi\Phi^+\Big[2a_1\bar{C}^2\Phi - a_3C^2D^2\Phi + 2a_4C^2\Phi^+\Big] \ , \tag{4.50}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{A}\bar{F}\bar{B}FB\bar{F})\bigg|_{dp} = \frac{im\lambda^3}{2\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi\Phi^+\Big[2a_1C^2\Phi^+ - a_3\bar{C}^2\bar{D}^2\Phi^+ + 2a_4\bar{C}^2\Phi\Big] \ , \tag{4.51}$$

$$\mathrm{Tr}(B\bar{G}B\bar{F}\bar{B}F)\bigg|_{dp} = \mathrm{Tr}(\bar{B}G\bar{B}FB\bar{F})\bigg|_{dp} \\ = \frac{i\lambda^3}{8\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Big[C^2\Phi\Phi^+\left(a_4D^2\Phi + 8ma_5\Phi^+\right) + h.c.\Big] \ . \tag{4.52}$$

Остали чланови из (4.49) су конвергентни. На тај начин добијамо дивергентни део од $\Gamma_1^{(3)}$:

$$\Gamma_1^{(3)}\bigg|_{dp} = -\frac{\lambda^3(ma_1 + ma_4 + 2a_5)}{2\pi^2\varepsilon}\int d^8z\left[\bar{C}^2\Phi\Phi\Phi^+ + h.c.\right] \\ + \frac{\lambda^3(2ma_3 - a_4)}{8\pi^2\varepsilon}\int d^8z\left[C^2\Phi\Phi^+D^2\Phi + h.c.\right] \ . \tag{4.53}$$

Из резултата (4.53) види се да интеракциони члан уз константу a_1 производи дивергенцију која је облика интеракционог члана уз константу a_5, док интеракциони члан уз константу a_3 производи дивергенцију облика интеракционог члана уз константу a_4, што значи да је немогуће конструисати ренормализабилан D-деформисани Вес-Зумино модел, само деформишући постојеће чланове у (2.75). Због ренормализабилности нужно је укључити и неминималну деформацију, која је у нашем моделу присутна преко интеракционих чланова пропорционалних константатма a_4 и a_5.

Израчунајмо и дивергентни део поправке ефективног дејства на нивоу једне петље који је четвртог степена по класичним суперпољима:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{(4)} &= -\frac{i}{8}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}\right)^4 = -\frac{i}{8}\mathrm{Tr}\left[AFAFAFAF + \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F} + 2B\bar{F}\bar{B}FB\bar{F}\bar{B}F\right] \\ &- \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[AFAFB\bar{F}\bar{B}F + \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{B}FB\bar{F} + AFB\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{B}F + AFAFAFB\bar{G}\right. \\ &+ \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{B}G + AFAFB\bar{F}\bar{A}\bar{G} + \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{B}FAG + AFAFAG\bar{B}F \\ &+ \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{G}B\bar{F} + AFB\bar{G}B\bar{F}\bar{B}F + \bar{A}\bar{F}\bar{B}G\bar{B}FB\bar{F} + AFB\bar{F}\bar{B}FB\bar{G} \\ &+ \bar{A}\bar{F}\bar{B}FB\bar{F}\bar{B}G + AFB\bar{F}\bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{G} + \bar{A}\bar{F}\bar{B}FAFAG + AFB\bar{F}\bar{B}G\bar{B}F \\ &\left.+\bar{A}\bar{F}\bar{B}FB\bar{G}B\bar{F} + B\bar{F}\bar{B}FB\bar{F}\bar{A}\bar{G} + \bar{B}FB\bar{F}\bar{B}FAG\right] \ . \end{aligned} \tag{4.54}$$

Једини дивергентни члан у (4.54) је:

$$\mathrm{Tr}(B\bar{F}\bar{B}FB\bar{F}\bar{B}F)\bigg|_{dp} = \frac{i\lambda^4}{\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Big[\bar{C}^2\Phi\Phi\Phi^+\left(a_3\bar{D}^2\Phi^+ - 2a_4\Phi\right) + h.c.\Big] \ . \tag{4.55}$$

Дивергентни део ефективног дејства који је четвртог степена по класичним суперпољима сада је:

$$\Gamma_1^{(4)}\bigg|_{dp} = \frac{\lambda^4}{8\pi^2\varepsilon}\int d^8z\left[\bar{C}^2\Phi\Phi\Phi^+\left(a_3\bar{D}^2\Phi^+ - 2a_4\Phi\right) + h.c.\right] \ . \tag{4.56}$$

Дивергенције у $\Gamma_1^{(4)}$ потичу од интеракционих чланова у дејству (4.22) пропорционалних константама a_3 и a_4, што значи да за добијање ренормализабилног D-деформисаног Вес-Зумино модела морамо наметнути два додатна услова на параметре дејства:

$$a_3 = 0 \ , \tag{4.57}$$

$$a_4 = 0 \ . \tag{4.58}$$

Директним рачуном може се проверити да је $\Gamma_1^{(5)}$ конвергентно.

Коначно, добијамо израз за дивергентни део корекције ефективног дејства на нивоу једне петље, уз услове $a_2 = a_3 = a_4 = 0$:

$$\begin{aligned}\Gamma_1\Big|_{dp} &= \Gamma_1^{(2)}\Big|_{dp} + \Gamma_1^{(3)}\Big|_{dp} \\ &= \frac{\lambda^2(1-(2a_1+\frac{2a_5}{m})m^2(C^2+\bar{C}^2))}{4\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Phi \\ &- \frac{\lambda^2 a_5}{16\pi^2\varepsilon}\int d^8z\big[C^2\Phi D^2\Phi + h.c.\big] \\ &- \frac{\lambda^3(ma_1+2a_5)}{2\pi^2\varepsilon}\int d^8z\big[\bar{C}^2\Phi\Phi\Phi^+ + h.c.\big]\ . \end{aligned} \tag{4.59}$$

Све дивергенције у (4.59) су облика чланова постојећих у дејству (4.22). У наредном одељку ћемо испитати да ли је модел дат дејством (4.22), уз услове (4.48), (4.57), (4.58), заиста ренормализабилан.

4.4.2 Ренормализовање дејства

Дејство D-деформисаног Вес-Зумино модела, уз услове $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, дато је изразом:

$$\begin{aligned} S = \int d^8z\Big\{\Phi^+\Phi + \Big[-\frac{m}{8}\Phi\frac{D^2}{\Box}\Phi + \frac{ma_1C^2}{8}(D^2\Phi)\Phi \\ - \lambda\Phi^2\frac{D^2}{12\Box}\Phi + \lambda a_5\bar{C}^2\Phi\Phi\Phi^+ + h.c.\Big]\Big\}\ . \end{aligned} \tag{4.60}$$

Напишимо "голо" дејство S_B, заменом суперпоља Φ "голим" суперпољем $\Phi_0 = Z\Phi$, и заменом констаната интеракције λ, a_1, a_5, C^2 и $\bar{C}^2$ и масе m њиховим "голим" вредностима λ_0, a_1^0, a_5^0, C_0^2, $\bar{C}_0^2$ и m_0:

$$\begin{aligned} S_B = \int d^8z\Big\{\Phi_0^+\Phi_0 + \Big[-\frac{m_0}{8}\Phi_0\frac{D^2}{\Box}\Phi_0 + \frac{m_0a_1^0C_0^2}{8}(D^2\Phi_0)\Phi_0 \\ - \lambda_0\Phi_0^2\frac{D^2}{12\Box}\Phi_0 + \lambda_0a_5^0\bar{C}_0^2\Phi_0\Phi_0\Phi_0^+ + h.c.\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{4.61}$$

Додавањем дивергентног дела величине Γ_1 (4.59) "голом" дејству S_B добијамо ренормализовано дејство (4.60):

$$S = S_B + \Gamma_1\Big|_{dp}\ . \tag{4.62}$$

Из претходне једначине можемо очитати вредност параметра Z, као и везе између "голих" и ренормализованих вредности масе и констаната интеракције:

$$Z = 1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon}\Big[1 - 2m(C^2 + \bar{C}^2)(ma_1 + a_5)\Big] \ , \tag{4.63}$$

$$m = Zm_0 \ , \tag{4.64}$$

$$a_1^0 C_0^2 = a_1 C^2 \Big[1 + \frac{\lambda^2 a_5}{2\pi^2\varepsilon m a_1}\Big] \ , \tag{4.65}$$

$$\lambda = Z^{\frac{3}{2}}\lambda_0 \ , \tag{4.66}$$

$$a_5^0 \bar{C}_0^2 = a_5 \bar{C}^2 \Big[1 + \frac{\lambda^2(ma_1 + 2a_5)}{2\pi^2\varepsilon a_5}\Big] \ . \tag{4.67}$$

Из једначина (4.63-4.67) видимо да је конструисани D-деформисани Вес-Зумино модел (4.60) ренормализабилан.

Размотримо ситуацију у којој постоји веза између констаната a_1 и a_5, као и њихових "голих" вредности a_1^0 и a_5^0:

$$a_5 = \alpha m a_1 \ , \qquad\qquad a_5^0 = \alpha m_0 a_1^0 \ , \tag{4.68}$$

где је α коефицијент пропорционалности. Да би обе релације (4.65) и (4.67) биле задовољене, коефицијент α мора да узима тачно одређене вредности. Заменом веза (4.68) у релације (4.65) и (4.67), добијамо:

$$a_1^0 C_0^2 = a_1 C^2 \Big[1 + \frac{\alpha\lambda^2}{2\pi^2\varepsilon}\Big] \ , \tag{4.69}$$

$$\alpha m_0 a_1^0 C_0^2 = \alpha m a_1 C^2 \Big[1 + \frac{\lambda^2(1 + 2\alpha)}{2\alpha\pi^2\varepsilon}\Big] \ . \tag{4.70}$$

Користећи везу (4.64), из једнакости (4.70) следи:

$$a_1^0 C_0^2 = a_1 C^2 \Big[1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon}\Big(1 - \frac{2(1 + 2\alpha)}{\alpha}\Big)\Big] \ . \tag{4.71}$$

Из услова непротивречности релација (4.69) и (4.71) добијамо једначину по коефицијенту α: $2\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$. Решења ове једначине су: $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$.

Размотримо посебно случај $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Тада је веза између констаната a_1 и a_5: $a_5 = -\frac{1}{2}ma_1$, па дивергентни део ефективног дејства трећег степена по класичним суперпољима ишчезава. То значи да се све редефиниције могу изразити преко ренормализације јачине суперпоља Z:

$$m = Zm_0 \ , \qquad \lambda = Z^{\frac{3}{2}}\lambda_0 \ , \qquad a_1^0 C_0^2 = a_1 C^2 Z \ . \tag{4.72}$$

Ови резултати су слични ренормализацији недеформисаног Вес-Зумино модела, међутим у деформисаном случају се рернормализује деформисани масени члан $\int d^8 z \Phi D^2 \Phi$, а не само кинетички члан $\int d^8 \Phi^+ \Phi$. Оваква ситуација не противречи теореми о неренормализовању, јер по тој теореми могу бити ренормализовани чланови који су интеграли по целом суперпростору.

Глава 5

Хермитски деформисан Вес-Зумино модел

У претходној глави деформисали смо Вес-Зумино модел са једним киралним суперпољем (2.75) користећи такозвану D-деформацију (4.1). Добијени $\star$-производ био је не(анти)комутативан и нехермитски. У овој глави изабраћемо други твист, који доводи до хермитског $\star$-производа.

Следићемо план успостављен у глави 4: најпре ћемо размотрити на који начин изабрани твист мења Хопфову алгебру суперсиметричних трансформација, затим ћемо деформисати алгебру суперпоља A са обичним множењем у тачки у алгебру $A_{\mathcal{F}}$ са $\star$-множењем и испитати структуру деформисаног суперпростора. Коришћењем киралних пројектора, конструисаћемо суперсиметрично дејство деформисаног Вес-Зумино модела и на крају, испитати ренормализабилност добијене теорије, рачунањем поправке ефективног дејства квадратичне по класичним пољима до нивоа једне петље. Резултати који следе базирани су на радовима [58; 59].

5.1 Хермитски деформисана Хопфова суперсиметрична алгебра

Да бисмо деформисали Хопфову алгебру суперсиметричних трансформација, неопходно је да дефинишемо којединични 2-коцикл - твист. За твист бирамо:

$$\mathcal{F} = e^{\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}\partial_\alpha\otimes\partial_\beta + \frac{1}{2}\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\otimes\bar{\partial}^{\dot{\beta}}} \ . \tag{5.1}$$

где су $C^{\alpha\beta} = C^{\beta\alpha} \in \mathbb{C}$ и $\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \bar{C}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \in \mathbb{C}$ константе не(анти)комутативности, а $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ и $\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}$. Константе $C_{\alpha\beta}$ и $\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ су међусобно повезане комплексним конјуговањем: $(C_{\alpha\beta})^* = \bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$.

Твист (5.1) не припада универзално обавијајућој суперсиметричној алгебри $\mathcal{U}(\mathcal{S})$, где је $\mathcal{S}$ дефинисано у (2.6). Зато је неопходно да алгебру $\mathcal{S}$ проширимо генераторима ∂_α и $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$. Дефинишимо копроизвод, којединицу и антипод за парциајлне изводе ∂_α и $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$ као:

$$\Delta\partial_\alpha = \partial_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \partial_\alpha \ , \qquad \varepsilon(\partial_\alpha) = 0 \ , \qquad S(\partial_\alpha) = -\partial_\alpha \ , \tag{5.2}$$

$$\Delta\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \ , \qquad \varepsilon(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}) = 0 \ , \qquad S(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}) = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \ . \tag{5.3}$$

Структуру Хопфове алгебре на $\mathcal{U}(\mathcal{S})$, где је $\mathcal{S} = \mathrm{span}\{\partial_m, Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \partial_\alpha, \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\}$, добијамо проширујући дефиниције копроизвода и којединице као алгебарских пресликавања и антипода као антиалгебарског пресликавања. Твист (5.1) сада припада $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ и има облик (3.47).

Пошто смо дефинисали твист и утврдили да је он заиста којединични 2-коцикл, можемо да деформишемо алгебру $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ у алгебру $\mathcal{U}(\mathcal{S})_\mathcal{F}$. Како смо видели у одељку 3.3.2, при твистовању алгебарско множење, јединица и којединица остају исти. На основу једначнина (3.48) можемо да израчунамо деформисане копроизводе и антиподе за генераторе суперсиметричне алгебре, проширене Грасмановим изводима ∂_α

и $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$. За деформисане копроизводе добијамо:

$$\Delta_{\mathcal{F}}(Q_\alpha) = Q_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes Q_\alpha + \frac{i}{2}\bar{C}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}(\partial_m \otimes \bar{\partial}_{\dot{\beta}} - \bar{\partial}_{\dot{\beta}} \otimes \partial_m) \ , \tag{5.4}$$

$$\Delta_{\mathcal{F}}(\bar{Q}_{\dot{\alpha}}) = \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}C^{\alpha\beta}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}(\partial_m \otimes \partial_\beta - \partial_\beta \otimes \partial_m) \ , \tag{5.5}$$

$$\Delta_{\mathcal{F}}(\partial_m) = \partial_m \otimes 1 + 1 \otimes \partial_m \ , \tag{5.6}$$

$$\Delta_{\mathcal{F}}(\partial_\alpha) = \partial_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \partial_\alpha \ , \tag{5.7}$$

$$\Delta_{\mathcal{F}}(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}) = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \ , \tag{5.8}$$

док су деформисани антиподи дати изразима:

$$\begin{aligned} &S_{\mathcal{F}}(Q_\alpha) = -Q_\alpha \ , \qquad && S_{\mathcal{F}}(\bar{Q}_{\dot{\alpha}}) = -\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \ , \qquad && S_{\mathcal{F}}(\partial_m) = -\partial_m \ , \\ &S_{\mathcal{F}}(\partial_\alpha) = -\partial_\alpha \ , && S_{\mathcal{F}}(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}) = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \ . && \end{aligned} \tag{5.9}$$

Овим је дефинисана хермитски деформисана Хопфова алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$. Видимо да се при хермитској деформацији копроизводи генератора суперсиметричних трансформација Q_α и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ мењају, што ће узроковати промене у Лајбницовом правилу (3.53).

5.2 Деформисани суперпростор и алгебра суперпоља

У претходном поглављу деформисали смо Хопфову алгебру суперсиметричних трансформација увођењем твиста (4.1). Деформисана Хопфова алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$ делује на алгебри суперпоља $A_{\mathcal{F}}$ са $\star$-производом дефинисаним помоћу твиста $\mathcal{F}$ (3.52), чиме алгебра $A_{\mathcal{F}}$ постаје $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$-модул алгебра. За твист (5.1) $\star$-производ два супрерпоља F и G је:

$$\begin{aligned}
F(x,\theta,\bar{\theta})\star G(x,\theta,\bar{\theta}) &= \star\,(F\otimes G) = \cdot\,\big(\mathcal{F}^{-1}(F\otimes G)\big) = \cdot\,\Big(e^{-\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}\partial_\alpha\otimes\partial_\beta-\frac{1}{2}\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\otimes\bar{\partial}^{\dot{\beta}}}F\otimes G\Big)\\
&= FG-\frac{1}{2}(-1)^{|F|}C^{\alpha\beta}(\partial_\alpha F)(\partial_\beta G)-\frac{1}{2}(-1)^{|F|}\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}F)(\bar{\partial}^{\dot{\beta}}G)\\
&-\frac{1}{8}C^{\alpha\beta}C^{\gamma\delta}(\partial_\alpha\partial_\gamma F)(\partial_\beta\partial_\delta G)-\frac{1}{8}\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{C}_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}(\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\gamma}}F)(\bar{\partial}^{\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\delta}}G)\\
&-\frac{1}{4}C^{\alpha\beta}\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\partial_\alpha\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}F)(\partial_\beta\bar{\partial}^{\dot{\beta}}G)\\
&+\frac{1}{16}(-1)^{|F|}C^{\alpha\beta}C^{\gamma\delta}\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}F)(\partial_\beta\partial_\delta\bar{\partial}^{\dot{\beta}}G)\\
&+\frac{1}{16}(-1)^{|F|}C^{\alpha\beta}\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{C}_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}(\partial_\alpha\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\gamma}}F)(\partial_\beta\bar{\partial}^{\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\delta}}G)\\
&+\frac{1}{64}C^{\alpha\beta}C^{\gamma\delta}\bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{C}_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}(\partial_\alpha\partial_\gamma\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\gamma}}F)(\partial_\beta\partial_\delta\bar{\partial}^{\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\delta}}G)\ . \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Развој $\star$-производа (5.10) се завршава после коначно много чланова, јер су трећи степени Грасманових извода ∂_α и $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}$ једнаки нули. Добијени $\star$-производ је хермитски, тј. важи: $(F\star G)^* = G^*\star F^*$, за произвољна два суперпоља исте парности F и G, некомутативан $F\star G\neq G\star F$ у општем случају, асоцијативан по конструкцији, и при $C_{\alpha\beta}=0$ се своди на обчно множење суперпоља у тачки.

Израчунајмо сада $\star$-(анти)комутаторе суперкоордината x^m, θ_α и $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$:

$$\begin{aligned}
&\{\theta^\alpha \overset{\star}{,} \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}\ , &&\{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \overset{\star}{,} \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\ , &&\{\theta^\alpha \overset{\star}{,} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\} = 0\ ,\\
&[x^m \overset{\star}{,} x^n] = 0\ , &&[x^m \overset{\star}{,} \theta^\alpha] = 0\ , &&\big[x^m \overset{\star}{,} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\big] = 0\ . \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

Релације (5.11) дефинишу деформисан суперпростор. Бозонске координате x^m $\star$-комутирају са свим координатама суперпростора, док се деформација огледа у $\star$-неантикомуирању фермионских координата θ_α и $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$.

Елементи Хопфове алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{S})_\mathcal{F}$ делују на суперпоља из $A_\mathcal{F}$ на следећи начин:

$$\delta^\star_\xi F = (\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q})F\ . \qquad (5.12)$$

Како је алгебра $A_\mathcal{F}$ конструисана као $\mathcal{U}(\mathcal{S})_\mathcal{F}$-модул алгебра, суперсиметричне трансформације делују на $\star$ производ два суперпоља из $A_{\mathcal{F}}$ као:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi^\star(F\star G) &= (\xi Q+\bar\xi\bar Q)(F\star G) = \star\big(\Delta_{\mathcal{F}}(\delta_\xi^\star)(F\otimes G)\big)\\
&= \star\left\{\left(\delta_\xi^\star\otimes 1 + 1\otimes\delta_\xi^\star + \frac{i}{2}C^{\alpha\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\left(\bar\xi^{\dot\alpha}\partial_\mu\otimes\partial_\beta + \partial_\beta\otimes\bar\xi^{\dot\alpha}\partial_m\right)\right)(F\otimes G)\right\}\\
&= (\delta_\xi^\star F)\star G + F\star(\delta_\xi^\star G)\\
&+ \frac{i}{2}(-1)^{|F|}C^{\alpha\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\left(\bar\xi^{\dot\alpha}(\partial_m F)\star(\partial_\beta G) + (\partial_\beta F)\star\bar\xi^{\dot\alpha}(\partial_m G)\right)\\
&+ \frac{i}{2}(-1)^{|F|}\bar C^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\left(\xi^{\alpha}(\partial_m F)\star(\bar\partial_{\dot\beta} G) + (\bar\partial_{\dot\beta} F)\star\xi^{\alpha}(\partial_m G)\right)\ . \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Једанакости (5.13) представљају деформисано Лајбницово правило. За разлику од D-деформације, када је деформисано Лајбницово правило (4.8) било истог облика као недеформисано (2.19), у случају хермитског твиста (5.1) у деформисаном Лајбницовом правилу постоје додатни чланови, што је последица промена у деформисаном копроизводу за суперсиметричне генераторе Q_α и $\bar Q_{\dot\alpha}$.

5.3 Хермитски деформисано дејство

Дефинисање $\star$-производа (5.10) и деформисање алгебре суперпоља A у алгебру $A_{\mathcal{F}}$, омогућава нам да, као у глави 4, деформишемо дејство Вес-Зумино модела (2.75). Простом заменом множења у тачки $\star$-множењем у члановима овог дејства, добијају се величине које нису све инваријантне на суперсиметричне трансформације. Да бисмо формирали суперсиметрично деформисано дејство, користићемо киралне пројекторе (2.50). При томе ћемо се ограничити на минималну деформацију, тј. у дејство ћемо укључити само чланове који су присутни у недеформисаном Вес-Зумино моделу.

Кинетички члан $\Phi^+\Phi|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}$ деформишемо тако што обично множење заменимо $\star$-множењем. Највиша компонента добијеног суперпоља $\Phi^+\star\Phi$ у развоју по θ, $\bar\theta$ се не мења:

$$\begin{aligned}\Phi^+ \star \Phi\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} &= \Phi^+\Phi\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \\ &= F^*F + \frac{1}{4}A^*\Box A + \frac{1}{4}\Box A^* A - \frac{1}{2}\partial_m A^*\partial^m A + \frac{i}{2}\partial_m\bar\psi\bar\sigma^m\psi - \frac{i}{2}\bar\psi\bar\sigma^m\partial_m\psi \\ &= A^*\Box A + i(\partial_m\bar\psi)\bar\sigma^m\psi + F^*F\ . \qquad (5.14)\end{aligned}$$

У последњој једнакости искоришћена је парцијална интеграција. При деформисаним суперсиметричним трансформацијама овај члан се трансформише као:

$$\begin{aligned}\delta^\star_\xi\Big(\Phi^+ \star \Phi\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}\Big) &= ((\xi Q + \bar\xi\bar Q)(\Phi^+ \star \Phi))|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \\ &= \partial_m\Big[(\xi\sigma^m)_{\dot\alpha}\Big(\frac{1}{2\sqrt{2}}\big[(\bar\sigma^n\psi)^{\dot\alpha}\partial_n A^* - (\bar\sigma^n\partial_n\psi)^{\dot\alpha}A^*\big] + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\psi^{\dot\alpha}F \\ &+ \frac{i}{4\sqrt{2}}\bar C^{\dot\alpha\dot\beta}\big[\bar\psi_{\dot\beta}\Box A + (\partial_p\bar\psi\bar\sigma^p\sigma^n)_{\dot\beta}\partial_n A + 2i(\partial_n\psi\sigma^n)_{\dot\beta}F^*\big]\Big) \\ &+ (\bar\xi\bar\sigma^m)^\alpha\Big(\frac{1}{2\sqrt{2}}\big[(\sigma^n\bar\psi)_\alpha\partial_n A - (\sigma^n\partial_n\bar\psi)_\alpha A\big] + \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_\alpha F^* \\ &- \frac{i}{4\sqrt{2}}C_{\alpha\beta}\big[\psi^\beta\Box A^* + (\partial_n\psi\sigma^n\bar\sigma^p)^\beta\partial_p A^* + 2i(\partial_n\bar\psi\bar\sigma^n)^\beta F\big]\Big)\Big]\ . \qquad (5.15)\end{aligned}$$

Из релација (5.15) видимо да је кинетички члан (5.14) инваријантан на деформисане суперсиметричне трансформације. Треба обратити пажњу на то да, иако је члан (5.14), записан преко компонентних поља A, A^*, ψ, $\bar\psi$, F и F^* киралног и антикиралног суперпоља, идентичан недеформисаном кинетичком члану $\Phi^+\Phi|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}$, његов деформисани закон трансформације морамо да рачунамо из мултиплета коме припада, а не користећи законе трансформација за компонентна поља (2.39)-(2.41) и (2.47-2.49). То је разлика између недеформисаних и деформисаних суперсиметричних трансформација. У овом случају, члан (5.15) је инваријантан и на деформисане и на недеформисане суперсиметричне трансформације.

Да бисмо деформисали масени члан $\Phi\Phi|_{\theta\theta}$, није довољно да само заменимо обичан производ $\star$-производом. Како смо видели у поглављу 2.3, у недеформисаном случају кирална суперпоља чине подалгебру алгебре суперпоља A, међутим то није случај у деформисаној алгебри $A_{\mathcal{F}}$, што значи да $\star$-производ два кирална суперпоља није кирално суперпоље. Применом формуле (5.10) на производ два кирална суперпоља, Φ, са компонентним развојем (2.35), добијамо:

$$\begin{aligned}\Phi\star\Phi &= A^2-\frac{C^2}{2}F^2+\frac{1}{4}C^{\alpha\beta}\bar{C}^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\sigma^n_{\beta\dot\beta}(\partial_mA)(\partial_nA)+\frac{1}{64}C^2\bar{C}^2(\Box A)^2\\ &+\theta^\alpha\Big(2\sqrt{2}\psi_\alpha A-\frac{1}{\sqrt{2}}C^{\gamma\beta}\bar{C}^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha}(\partial_m\psi^\delta)\sigma^m_{\delta\dot\beta}\sigma^n_{\beta\dot\alpha}(\partial_nA)\Big)\\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}C^2\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}(\partial_m\psi_\alpha)F+\theta\theta\Big(2AF-\psi\psi\Big)\\ &+\bar\theta\bar\theta\Big(-\frac{C^2}{4}\big(F\Box A-\frac{1}{2}(\partial_m\psi)\sigma^m\bar\sigma^n(\partial_n\psi)\big)\Big)\\ &+i\theta\sigma^m\bar\theta\Big((\partial_mA^2)+\frac{1}{4}C^{\alpha\beta}\bar{C}^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma_{m\alpha\dot\alpha}\sigma^n_{\beta\dot\beta}(\Box A)(\partial_nA)\Big)\\ &+i\sqrt{2}\theta\theta\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}\big(\partial_m(\psi_\alpha A)\big)+\frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta(\Box A^2)\ ,\end{aligned}\tag{5.16}$$

где је $C^2=C^{\alpha\beta}C^{\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}$ и $\bar{C}^2=\bar{C}_{\dot\alpha\dot\beta}\bar{C}_{\dot\gamma\dot\delta}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\beta\dot\delta}$. Из израза (5.16) очигледно је да $\Phi\star\Phi$ није кирално суперпоље. У развоју произвољног киралног суперпоља одсуствују чланови пропорционални $\bar\theta_{\dot\alpha}$, $\bar\theta\bar\theta$ и $\theta_\alpha\bar\theta\bar\theta$, што за суперпоље $\Phi\star\Phi$ не важи, оно има ненулте $\bar\theta_{\dot\alpha}$ и $\bar\theta\bar\theta$ чланове.

Да бисмо нашли кирални део суперпоља $\Phi\star\Phi$, користићемо формулу (2.52):

$$\begin{aligned}P_2(\Phi\star\Phi) &= A^2-\frac{C^2}{8}F^2+\frac{1}{256}C^2\bar{C}^2(\Box A)^2\\ &+\frac{1}{16}C^{\alpha\beta}\bar{C}^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\sigma^n_{\beta\dot\beta}\Big((\partial_mA)(\partial_nA)+\frac{2}{\Box}\partial_m((\Box A)(\partial_nA))\Big)\\ &+\sqrt{2}\theta^\alpha\Big(2\psi_\alpha A-\frac{1}{4}C^{\gamma\beta}\bar{C}^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha}(\partial_m\psi^\delta)\sigma^m_{\delta\dot\beta}\sigma^n_{\beta\dot\alpha}(\partial_nA)\Big)+\theta\theta\big(2AF-\psi\psi\big)\\ &+i\theta\sigma^k\bar\theta\partial_k\Big[A^2-\frac{C^2}{8}F^2+\frac{1}{256}C^2\bar{C}^2(\Box A)^2\\ &+\frac{1}{16}C^{\alpha\beta}\bar{C}^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\sigma^n_{\beta\dot\beta}\Big((\partial_mA)(\partial_nA)+\frac{2}{\Box}\partial_m((\Box A)(\partial_nA))\Big)\Big]\\ &+i\sqrt{2}\theta\theta\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\sigma^{k\dot\alpha\alpha}\partial_k\Big(\psi_\alpha A-\frac{1}{8}C^{\gamma\beta}\bar{C}^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha}(\partial_m\psi^\rho)\sigma^m_{\rho\dot\beta}\sigma^n_{\beta\dot\alpha}(\partial_nA)\Big)\\ &+\frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box\Big[A^2-\frac{C^2}{8}F^2+\frac{1}{256}C^2\bar{C}^2(\Box A)^2\\ &+\frac{1}{16}C^{\alpha\beta}\bar{C}^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\sigma^n_{\beta\dot\beta}\Big((\partial_mA)(\partial_lA)+\frac{2}{\Box}\partial_m((\Box A)(\partial_nA))\Big)\Big]\ ,\end{aligned}\tag{5.17}$$

Члан уз $\theta\theta$ у развоју киралног суперпоља $P_2(\Phi\star\Phi)$ је:

$$P_2(\Phi\star\Phi)\Big|_{\theta\theta}=2AF-\psi\psi\ .\tag{5.18}$$

При деформисаним супресиметричним трансформацијама он се трансформише као:

$$\begin{aligned}\delta^\star_\xi\Big(P_2(\Phi\star\Phi)|_{\theta\theta}\Big) &= \Big((\xi Q+\bar\xi\bar Q)(P_2(\Phi\star\Phi))\Big)\Big|_{\theta\theta}\\ &= i\sqrt{2}(\bar\xi\bar\sigma^m)^\alpha\partial_m\Big(2\psi_\alpha A-\frac{1}{4}C^{\gamma\beta}\bar C^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha}\partial_m(\psi\sigma^m)_{\dot\beta}\sigma^l_{\beta\dot\alpha}(\partial_l A)\Big)\end{aligned}\tag{5.19}$$

Видимо да масени члан (5.18) остаје исти као у недеформисаном случају, и инваријантан је и на деформисане и недеформисане суперсиметричне трансформације.

Деформишимо, на крају, и интеракциони члан ΦΦΦ. У овом случају можемо да поступимо на више начина. Уколико бисмо, просто, множење заменили $\star$-множењем и онда искористили кирални пројектор, добили бисмо члан $P_2(\Phi\star\Phi\star\Phi)$, међутим, због нелокалности киралних пројектора, $\theta\theta$ компонента овог суперпоља није инваријантна на деформисане суперсиметричне трансформације. Зато ћемо интеракциони члан деформисати у члан $P_2(\Phi\star P_2(\Phi\star\Phi))$. Компонента уз $\theta\theta$ овог суперпоља има следећи облик:

$$\begin{aligned}P_2(\Phi\star P_2(\Phi\star\Phi))\Big|_{\theta\theta} &= 3(A^2F-(\psi\psi)A)-\frac{C^2}{8}F^3+\frac{1}{256}C^2\bar C^2F(\Box A)^2\\ &+\frac{1}{16}C^{\alpha\beta}\bar C^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\sigma^n_{\beta\dot\beta}F\Big((\partial_m A)(\partial_n A)+\frac{2}{\Box}\partial_m((\Box A)(\partial_n A))\Big)\\ &+\frac{1}{4}C^{\alpha\beta}\bar C^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^n_{\beta\dot\beta}F\psi_\alpha(\partial_m\psi^\gamma)\sigma^m_{\gamma\dot\alpha}(\partial_n A)\\ &+\frac{1}{2}\bar C_{\dot\alpha\dot\beta}(\bar\sigma^{nm})^{\dot\beta}{}_{\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\alpha}(\partial_m A)\partial_n\Big[A^2-\frac{C^2}{8}F^2\\ &+\frac{1}{16}C^{\alpha\beta}\bar C^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^s_{\alpha\dot\alpha}\sigma^p_{\beta\dot\beta}F\Big((\partial_s A)(\partial_p A)+\frac{2}{\Box}\partial_s((\Box A)(\partial_p A))\Big)\Big]\ .\end{aligned}\tag{5.20}$$

Величина (5.20) се при деформисаним суперсиметричним трансформацијама трансформише као:

$$\begin{aligned}\delta^\star_\xi\Big(P_2(\Phi\star P_2(\Phi\star\Phi))\Big|_{\theta\theta}\Big) &= \Big((\xi Q+\bar\xi\bar Q)P_2(\Phi\star P_2(\Phi\star\Phi)\Big)\Big|_{\theta\theta}\\ &= i\sqrt{2}(\bar\xi\bar\sigma^p)^\gamma\partial_p\Big(\frac{1}{8}C^{\alpha\beta}\bar C^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\sigma^n_{\beta\dot\beta}\psi_\gamma\frac{1}{\Box}\partial_m((\partial_n A)(\Box A))+\dots\Big)\ .\end{aligned}\tag{5.21}$$

У изразу (5.21) изостављени су локални чланови, који под интегралом дају површинске чланове. Нелокални члан у (5.21), може се трансформисати на следећи начин:

$$\int d^4x \bar{\sigma}^{p\dot{\gamma}\gamma} \partial_p \Big(\psi_\gamma \frac{1}{\Box} \partial_m ((\partial_n A)(\Box A)) \Big) = \int d\Sigma_p \bar{\sigma}^{p\dot{\gamma}\gamma} \Big(\psi_\gamma \frac{1}{\Box} \partial_m ((\partial_n A)(\Box A)) \Big) \ . \tag{5.22}$$

Уколико је граница интеграције у претходном изразу у бесконачности, а поља довољно брзо опадају, тада овај интеграл ишчезава, па је члан (5.20) инваријантан на деформисане суперсиметричне трансформације. Очигледно је да није инваријантан и на недеформисане трансформације, па интеракциони члан нарушава недеформисану суперсиметрију.

Сада можемо да напишемо дејство хермитски деформисаног суперсиметричног Вес-Зумино модела:

$$S = \int d^4x \Big\{ \Phi^+ \star \Phi \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Big[\frac{m}{2} P_2 \big(\Phi \star \Phi \big) \Big|_{\theta\theta} + \frac{\lambda}{3} P_2 \Big(\Phi \star P_2 \big(\Phi \star \Phi \big) \Big) \Big|_{\theta\theta} + h.c. \Big] \Big\} \ , \tag{5.23}$$

где су m и λ реалне константе.

Увешћемо следећу нотацију која скраћује компонентни запис дејства (5.23):

$$C_{\alpha\beta} = K_{ab} (\sigma^{ab} \varepsilon)_{\alpha\beta} \ , \qquad \bar{C}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = K^*_{ab} (\varepsilon \bar{\sigma}^{ab})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \ , \tag{5.24}$$

где је $K_{ab} = -K_{ba}$ антисиметрична комплексна константна матрица. Важе идентитети:

$$C^2 = 2K_{ab}K^{ab} \ , \qquad \bar{C}^2 = 2K^*_{ab}K^{*ab} \ , \qquad K^{ab}K^*_{ab} = 0 \ , \tag{5.25}$$

$$K^*_{cd}K_{ab} \big(\sigma^n \bar{\sigma}^{cd} \bar{\sigma}^m \sigma^{ab} \big)_\alpha^{\ \ \beta} = -4\delta^\beta_\alpha K^{ma} K^{*n}{}_a + 8K^{ma}K^{*nb} (\sigma_{ba})_\alpha^{\ \ \beta} \ , \tag{5.26}$$

$$C^{\alpha\beta} \bar{C}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}} \sigma^l{}_{\beta\dot{\beta}} = 8K^{am}K^*{}_a{}^l \ . \tag{5.27}$$

Користећи претходне релације, дејство (5.23) написано преко компонентних поља има следећи облик:

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \Big\{ & A^* \Box A + i(\partial_m \bar{\psi}) \bar{\sigma}^m \psi + F^* F + \Big[\frac{m}{2} \big(2AF - \psi\psi \big) + \lambda \big(FA^2 - A\psi\psi \big) \\ & - \frac{\lambda}{3} \Big(K^m{}_a K^{*na} \psi (\partial_n \psi) - 2K^m{}_a K^{*n}{}_b (\partial_n \psi) \sigma^{ba} \psi \Big) (\partial_m A) \\ & - \frac{\lambda}{12} K^{mn} K_{mn} F^3 + \frac{\lambda}{6} K^m{}_a K^{*na} F (\partial_m A)(\partial_n A) + \frac{\lambda}{3} K^m{}_a K^{*na} F \frac{1}{\Box} \partial_m \Big((\partial_n A) \Box A \Big) \\ & + \frac{\lambda}{192} K^{ab} K_{ab} K^{*cd} K^*_{cd} F (\Box A)^2 + h.c. \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

У компонентном запису дејства (5.28) присутни су сви чланови из (5.23), међутим, у даљем раду ћемо се зауставити на квадратичним члановима по константама некомутативности.

Овим је дефинисано класично дејство некомутативног Вес-Зумино модела са хермитском деформацијом. У следећем поглављу израчунаћемо поправку ефективног дејства квадратичну по класичним пољима, на нивоу једне петље.

5.4 Ренормализабилност модела

У овом поглављу испитаћемо ренормализабилност хермитски деформисаног Вес-Зумино модела. Као и у случају D-деформације, рачунаћемо ефективно дејство деформисане теорије на нивоу једне петље и до другог степена по параметрима некомутативности.

Да бисмо применили технику суперграфова, потребно је да дејство (5.28) изразимо преко суперпоља и то као интеграл по целом суперпростору. Искористићемо везе између компонентних поља кирланог мултиплета и киралног суперпоља (2.36-2.38). Издвајање одговарајућег члана из суперпоља, остварујемо множењем Грасмановим суперкоординатама. На тај начин добијамо:

$$
\begin{aligned}
S = \int d^8z \Big\{ & \Phi^+\Phi + \Big[-\frac{m}{8}\Phi\frac{D^2}{\Box}\Phi - \lambda\Phi^2\frac{D^2}{12\Box}\Phi \\
& + \lambda\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Big(\frac{1}{768}K^{mn}K_{mn}(D^2\Phi)^3 - \frac{1}{6}K^m{}_a K^{*na}(D^\alpha\Phi)(\partial_n D_\alpha\Phi)(\partial_m\Phi) \\
& + \frac{1}{3}K^m{}_a K^{*n}{}_b(\partial_n D^\alpha\Phi)(\sigma^{ba})_\alpha{}^\beta(D_\beta\Phi)(\partial_m\Phi) \\
& - \frac{1}{24}K^m{}_a K^{*na}(D^2\Phi)(\partial_m\Phi)(\partial_n\Phi) \\
& - \frac{1}{12}K^m{}_a K^{*na}(D^2\Phi)\frac{1}{\Box}\partial_m\Big((\partial_n\Phi)(\Box\Phi)\Big) + h.c.\Big]\Big\} \ ,
\end{aligned}
\qquad (5.29)
$$

У дејству (5.29) појавила су се два спурионска поља $U^{mn}_{(1)\ ab} = K^m{}_a K^{*n}{}_b\theta\theta\bar\theta\bar\theta$ и $U_{(2)} = K^{mn}K_{mn}\theta\theta\bar\theta\bar\theta$ приликом преписивања дејства (5.28) као интеграла по целом суперпростору. Присутство спурионских поља указује на нарушење симетрије. У нашем случају, ради се о нарушеној инваријантности на недеформисане суперсиметричне трансформације. Симетрија дејства која остаје је деформисана суперсиметрија.

Дејство (5.29) изражено је преко киралног суперпоља Φ и антикиралног суперпоља Φ^+, која задовољавају редом диференцијалне услове $\bar{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0$ и $D_\alpha\Phi^+ = 0$. Преласком на општа суперпоља Σ и Σ^+ (2.88), ове везе прелазе у калибрациону слободу за суперпоља Σ и Σ^+ (2.89). Како је показано у одељку 2.5.2, калибрациона слобода може се фиксирати додавањем у дејство (5.29) дејства које фиксира калибрацију:

$$\begin{aligned} S_{GF} &= \xi \int d^8z \Sigma^+ \Box (1 - P_1)\Sigma \\ &= -\xi \int d^8z (\bar{D}_{\dot\alpha}\Sigma^+)(\frac{3}{16}\bar{D}^{\dot\alpha}D^\alpha + \frac{1}{4}D^\alpha\bar{D}^{\dot\alpha})(D_\alpha\Sigma)\ . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Укупно дејство са фиксираном калибрацијом је:

$$\tilde{S} = S_0 + S_{int} + S_{GF}\ , \tag{5.31}$$

где је S_0 део дејства (5.29) квадратичан по суперпољима, а у делу S_{int} сабрани су интеракциони чланови.

Сада можемо да применимо метод позадинског поља. Суперпоља Φ и Φ^+ раздвојимо на класични и квантни део:

$$\Phi = \Phi_{cl} - \frac{1}{4}\bar{D}^2\Sigma_q\ , \qquad\qquad \Phi^+ = \Phi^+_{cl} - \frac{1}{4}D^2\Sigma^+_q\ . \tag{5.32}$$

Пошто се изврши интеграција по квантним пољима Σ_q и Σ^+_q у (2.102) добија ефективно дејство на нивоу једне петље (2.105).

Развимо део дејства $S_0 + S_{GF}$ по квантним пољима Σ_q и Σ^+_q. Квадратични део у развоју може се записати на следећи начин:

$$S_0^{(2)} + S_{GF}^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^8z \begin{pmatrix} \Sigma_q & \Sigma^+_q \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \Sigma_q \\ \Sigma^+_q \end{pmatrix}\ . \tag{5.33}$$

Матрица M дата је изразом:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -m\Box^{1/2}P_- & \Box(P_2 + \xi(P_1 + P_T)) \\ \Box(P_1 + \xi(P_2 + P_T)) & -m\Box^{1/2}P_+ \end{pmatrix}\ . \tag{5.34}$$

Урадимо исто и са интеракционим дејством S_{int}. Његов део квадратичан по квантним пољима има облик:

$$S_{int}^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^8z \begin{pmatrix} \Sigma_q & \Sigma_q^+ \end{pmatrix} \mathcal{V} \begin{pmatrix} \Sigma_q \\ \Sigma_q^+ \end{pmatrix} , \tag{5.35}$$

где је матрица $\mathcal{V}$ дата је са:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \bar{F} \end{pmatrix} . \tag{5.36}$$

Матрични елемент F садржи два типа чланова: локалне, сабране у F_1, и нелокалне, сабране у F_2:

$$F(z,z') = F_1(z)\delta(z-z') + F_2(z,z') . \tag{5.37}$$

Локални чланови дати су изразом:

$$\begin{aligned}
F_1(z) &= \sum_{i=0}^{10} F^{(i)} \\
&= -\frac{\lambda}{2}\Phi\bar{D}^2 - \frac{\lambda}{48}K^m{}_aK^{*na}\overleftarrow{\bar{D}^2D^\alpha}(\partial_m\Phi)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_nD_\alpha\bar{D}^2 \\
&- \frac{\lambda}{48}K^m{}_aK^{*na}\overleftarrow{\bar{D}^2D^\alpha}(\partial_mD_\alpha\Phi)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_n\bar{D}^2 \\
&- \frac{\lambda}{48}K^m{}_aK^{*na}\overleftarrow{\partial_m\bar{D}^2}(D^\alpha\Phi)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_nD_\alpha\bar{D}^2 \\
&+ \frac{\lambda}{24}K^m{}_aK^{*n}{}_b\overleftarrow{\bar{D}^2D^\alpha}(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta(\partial_m\Phi)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_nD_\beta\bar{D}^2 \\
&+ \frac{\lambda}{24}K^m{}_aK^{*n}{}_b\overleftarrow{\partial_m\bar{D}^2}(D^\alpha\Phi)(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_nD_\beta\bar{D}^2 \\
&+ \frac{\lambda}{24}K^m{}_aK^{*n}{}_b\overleftarrow{\partial_m\bar{D}^2}(\partial_nD^\alpha\Phi)(\sigma^{ba})_\alpha{}^\beta\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D_\beta\bar{D}^2 \\
&- \frac{\lambda}{512}K^{mn}K_{mn}\overleftarrow{\bar{D}^2D^2}\Phi\bar{\theta}\bar{\theta}D^2\bar{D}^2 \\
&- \frac{\lambda}{96}K^m{}_aK^{*na}\overleftarrow{\partial_m\bar{D}^2}(\partial_n\Phi)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D^2\bar{D}^2 \\
&- \frac{\lambda}{192}K^m{}_aK^{*na}\overleftarrow{\partial_m\bar{D}^2}(D^2\Phi)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_n\bar{D}^2 \\
&+ \frac{\lambda}{96}K^m{}_aK^{*na}\overleftarrow{\Box\bar{D}^2}\Big(\int d^8z'(\partial_mD^2\Phi)(z')\frac{1}{\Box_{z'}}\delta(z'-z)\Big)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_n\bar{D}^2 ,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

док је нелокални део дат изразом:

$$\begin{aligned} F_2(z,z') &= \sum_{i=11}^{12} F^{(i)} \\ &= \frac{\lambda}{96} K^m{}_a K^{*na} \overleftarrow{\partial_m \bar{D}^2 D^2} \frac{1}{\Box_{z'}} \delta(z'-z)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}((\partial_n\Phi)\Box\bar{D}^2)(z') \\ &+ \frac{\lambda}{96} K^m{}_a K^{*na} \overleftarrow{\partial_m \bar{D}^2 D^2} \frac{1}{\Box_{z'}} \delta(z'-z)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(\Box\Phi\partial_n\bar{D}^2)(z'). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Да бисмо могли да рачунамо поправку ефективног дејства (2.105), треба да инвертујемо матрицу $\mathcal{M}$. Применом формуле (2.61) добијамо:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{mD^2}{4\Box(\Box-m^2)} & \frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box f(\Box)} + \frac{\bar{D}^2D^2-2\bar{D}D^2\bar{D}}{16\xi\Box^2} \\ \frac{\bar{D}^2D^2}{16\Box f(\Box)} + \frac{D^2\bar{D}^2-2D\bar{D}^2D}{16\xi\Box^2} & \frac{m\bar{D}^2}{4\Box(\Box-m^2)} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{5.40}$$

Користећи се развојем корекције ефективног дејства на нивоу једне петље:

$$\Gamma_1 = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}) \ , \tag{5.41}$$

можемо да добијемо поправке одговарајућег степена по класичним суперпољима.

Први члан у овом развоју је дат изразом:

$$\Gamma_1^{(1)} = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}(AF+\bar{F}\bar{A}) = 0 \ , \tag{5.42}$$

што значи да, исто као у случају недеформисаног и D-деформисаног Вес-Зумино модела, нема доприноса од "пуноглавац" дијаграма у ефективном дејству.

Израчунајмо сада део поправке ефективног дејства који садржи два класична поља:

$$\Gamma_1^{(2)} = -\frac{i}{4}\mathrm{Tr}\big(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{V}\big)^2 = -\frac{i}{4}\mathrm{Tr}\big[AFAF + \bar{A}\bar{F}\bar{A}\bar{F} + 2B\bar{F}\bar{B}F\big] \ . \tag{5.43}$$

Дивергентни део првог сабирка из израза (5.43) је:

$$\mathrm{Tr}(AFAF)\Big|_{d.p.} = \mathrm{Tr}(AF^{(0)}AF^{(0)})\Big|_{d.p.} + 2\sum_{i=1}^{12}(AF^{(i)}AF^{(0)})\Big|_{d.p.} . \tag{5.44}$$

Ненулти сабирци у (5.44) су:

$$\mathrm{Tr}(AF^{(1)}AF^{(0)})\Big|_{d.p.} = -\frac{im^2\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{6\pi^2\varepsilon}\int d^4x \partial_m A \partial_n A \ , \tag{5.45}$$

$$\mathrm{Tr}(AF^{(7)}AF^{(0)})\Big|_{d.p.} = -\frac{im^2\lambda^2 K^{mn} K_{mn}}{8\pi^2\varepsilon}\int d^4x F^2 \ , \tag{5.46}$$

$$\mathrm{Tr}(AF^{(8)}AF^{(0)})\Big|_{d.p.} = \frac{im^2\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x \partial_m A \partial_n A \ . \tag{5.47}$$

Заменом чланова (5.45-5.47) у (5.44), добијамо:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AFAF)\Big|_{d.p.} &= -\frac{im^2\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{6\pi^2\varepsilon}\int d^4x \partial_m A \partial_n A \\ &- \frac{im^2\lambda^2 K^{mn} K_{mn}}{4\pi^2\varepsilon}\int d^4x F^2 \ . \end{aligned}\tag{5.48}$$

Дивергентни део члана $\bar{B}F\bar{B}\bar{F}$ може се записати као:

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}FB\bar{F})\Big|_{d.p.} = \mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(0)}B\bar{F}^{(0)})\Big|_{d.p.} + 2\sum_{i=1}^{12}(\bar{B}F^{(i)}B\bar{F}^{(0)})\Big|_{d.p.} \ , \tag{5.49}$$

где су ненеулти сабирци из (5.49) дати изразима:

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(0)}B\bar{F}^{(0)})\Big|_{d.p.} = \frac{i\lambda^2}{2\pi^2\varepsilon}\int d^8z \Phi^+\Phi \ , \tag{5.50}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(1)}B\bar{F}^{(0)})\Big|_{d.p.} = -\frac{i\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x A^*(\Box - 4m^2)\partial_m\partial_n A \ , \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(2)}B\bar{F}^{(0)})\Big|_{d.p.} &= -\frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{36\pi^2\varepsilon}\int d^4x \bar{\psi}\bar{\sigma}^l\partial_l\partial_m\partial_n\psi \\ &+ \frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x \bar{\psi}\bar{\sigma}_n\left(m^2 - \frac{\Box}{6}\right)\partial_m\psi \ , \end{aligned}\tag{5.52}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(3)}B\bar{F}^{(0)})\Big|_{d.p.} = \frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{72\pi^2\varepsilon}\int d^4x \bar{\psi}\bar{\sigma}^l\partial_l\partial_m\partial_n\psi \ , \tag{5.53}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(4)}B\bar{F}^{(0)})\bigg|_{d.p.} = -\frac{i\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{2\pi^2\varepsilon}\int d^4x A^*(m^2-\frac{\Box}{6})\partial_m\partial_n A \ , \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(5)}B\bar{F}^{(0)})\bigg|_{d.p.} &= -\frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*n}{}_b}{72\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar{\psi}(\bar{\sigma}^b\partial^a-\bar{\sigma}^a\partial^b+i\varepsilon^{abcd}\bar{\sigma}_d\partial_c)\partial_m\partial_n\psi \\ &+ \frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar{\psi}\bar{\sigma}_n\bigg(m^2-\frac{\Box}{6}\bigg)\partial_m\psi \ ,\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(6)}B\bar{F}^{(0)})\bigg|_{d.p.} &= -\frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*n}{}_b}{36\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar{\psi}(\bar{\sigma}^b\partial^a-\bar{\sigma}^a\partial^b+i\varepsilon^{abcd}\bar{\sigma}_d\partial_c)\partial_m\partial_n\psi \\ &- \frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar{\psi}\bar{\sigma}_n\bigg(m^2-\frac{\Box}{6}\bigg)\partial_m\psi \ ,\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(8)}B\bar{F}^{(0)})\bigg|_{d.p.} = \frac{im^2\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x\partial_m A^*\partial_n A \ , \tag{5.57}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(9)}B\bar{F}^{(0)})\bigg|_{d.p.} = \frac{i\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{72\pi^2\varepsilon}\int d^4x F^*\partial_m\partial_n F \ , \tag{5.58}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(10)}B\bar{F}^{(0)})\bigg|_{d.p.} = \frac{im^2\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x d^4y\partial_m\partial_n F(x)\Box_x^{-1}\delta(x-y)F^*(y) \ , \tag{5.59}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(11)}B\bar{F}^{(0)})\bigg|_{d.p.} = -\frac{im^2\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x\partial_m A^*\partial_n A \ , \tag{5.60}$$

$$\mathrm{Tr}(\bar{B}F^{(12)}B\bar{F}^{(0)})\bigg|_{d.p.} = -\frac{i\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{36\pi^2\varepsilon}\int d^4x A^*\partial_m\partial_n\Box A \ . \tag{5.61}$$

Враћањем резултата (5.50-5.61) у (5.49), добијамо:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\bar{B}F B\bar{F})\bigg|_{d.p.} &= \frac{i\lambda^2}{2\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Phi \\ &- \frac{i\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{3\pi^2\varepsilon}\int d^4x A^*\bigg(m^2+\frac{\Box}{6}\bigg)\partial_m\partial_n A \\ &- \frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*n}{}_b}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar{\psi}(\bar{\sigma}^b\partial^a-\bar{\sigma}^a\partial^b+i\varepsilon^{abcd}\bar{\sigma}_d\partial_c)\partial_m\partial_n\psi \\ &+ \frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{6\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar{\psi}\bar{\sigma}_n\partial_m\bigg(m^2-\frac{\Box}{6}\bigg)\psi \\ &- \frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{36\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar{\psi}\bar{\sigma}^l\partial_l\partial_m\partial_n\psi \\ &+ \frac{i\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{36\pi^2\varepsilon}\int d^4x F^*\partial_m\partial_n F \\ &+ \frac{im^2\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{6\pi^2\varepsilon}\int d^4x d^4y\partial_m\partial_n F(x)\Box_x^{-1}\delta(x-y)F^*(y) \ .\end{aligned} \tag{5.62}$$

Коначно, заменом (5.48) и (5.62) у (5.43) добијамо дивергентни део поправке ефективног дејства која садржи два класична поља:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{(2)}\Big|_{d.p.} &= -\frac{m^2\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{24\pi^2\varepsilon}\int d^4x(\partial_m A\partial_n A + \partial_m A^*\partial_n A^*) \\
&- \frac{m^2\lambda^2 K^{mn}K_{mn}}{16\pi^2\varepsilon}\int d^4xF^2 \\
&- \frac{m^2\lambda^2 K^{*mn}K^*_{mn}}{16\pi^2\varepsilon}\int d^4xF^{*2} \\
&+ \frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Phi \\
&- \frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{6\pi^2\varepsilon}\int d^4xA^*\Big(m^2 + \frac{\square}{6}\Big)\partial_m\partial_n A \\
&+ \frac{i\lambda^2 K^m{}_a K^{*n}{}_b}{24\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar\psi(\bar\sigma^b\partial^a - \bar\sigma^a\partial^b + i\varepsilon^{abcd}\bar\sigma_d\partial_c)\partial_m\partial_n\psi \\
&- \frac{i\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar\psi\bar\sigma_n\partial_m\Big(m^2 - \frac{\square}{6}\Big)\psi \\
&+ \frac{i\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{72\pi^2\varepsilon}\int d^4x\bar\psi\bar\sigma^l\partial_l\partial_m\partial_n\psi \\
&+ \frac{\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{72\pi^2\varepsilon}\int d^4xF^*\partial_m\partial_n F \\
&+ \frac{m^2\lambda^2 K^m{}_a K^{*na}}{12\pi^2\varepsilon}\int d^4xd^4y\partial_m\partial_n F(x)\square_x^{-1}\delta(x-y)F^*(y)\ . \qquad (5.63)
\end{aligned}$$

Из израза (5.63) види се да се у поправци ефективног дејства на нивоу једне петље појављују дивергентни чланови који су друкчијег облика од оних присутних у класичном дејству. На пример, у (5.63) постоје дивергенције квадратичне по класичним пољима, а класично дејство (5.28) деформацију садржи само у интеракционим члановима који су трећег степена по класичним пољима. То значи да се добијене дивергенције не могу утопити у класично дејство, самим тим, хермитски деформисан Вес-Зумино модел је нееренормализабилан.

У покушају да модел учинимо ренормализабилним, размотримо и неминималну хермитску деформацију Вес-Зумино модела. Приликом D-деформисања Вес-Зумино модела, сусрели смо се са сличном ситуацијом: минимално деформисан модел није био ренормализабилан, зато смо укључили додатне интеракционе чланове који нису деформација чланова постојећих у дејству. При том смо захтевали инваријантност при деформисаним суперсиметричним трансформацијама. У случају хермитски деформисаног Вес-Зумино модела, да бисмо отклонили дивергенције у (5.63), потребно је да у дејство додамо неминималне чланове који су квадратични по суперпољима Φ и Φ^+ и инваријантни су на деформисану суперсиметрију. Једини такав члан је:

$$\begin{aligned} I_1 =& \int d^4x P_1(\Phi \star \Phi)\Big|_{\bar\theta\bar\theta} \\ =& \frac{1}{2}K^{ab}K_{ab}\int d^4x\Big(\frac{1}{2}(\partial_m\psi)\sigma^m\bar\sigma^n(\partial_n\psi) - F\Box A\Big) \ , \end{aligned} \tag{5.64}$$

међутим, он не може да апсорбује дивергенције из (5.63). Додавање инваријанти у односу на деформисане суперсиметричне трансформације које су трећег степена по суперпољима Φ и Φ^+, не може да помогне у поништавању дивергенција у $\Gamma_1^{(2)}$, већ само да произведе нове, због додатних интеракционих чланова који би се појавили у дејству. Из тога произилази да хермитски деформисан Вес-Зумино модел остаје нерeнормализабилан и са неминималном деформацијом.

У случају D-деформисаног дејства, додавање неминмалних чланова у дејство, омогућило нам је конструисање ренормализабилног деформисаног модела, што у случају хермитске деформације није могуће. Оно што представља кључну разлику између ова два модела је чињеница да је D-деформисани модел и после деформације задржао пуну недеформисану суперсиметрију, док је хермитска деформција произвела дејство инваријантно само на деформисане суперсиметричне трансформације.

Глава 6

Закључак

Значајна идеја модерне теоријске физике, настала у жељи за превазилажењем проблема дивергенција које у квантној теорији поља настају на малим растојањима, је некомутативна геометрија. Међу разним правцима који су развијени у оквиру те велике области [7; 8], у овом раду коришћен је приступ деформационе квантизације [31; 32; 33]. Главна тема овог рада била је испитивање утицаја деформисања простора на ренормализабилност теорије поља на њему. Суперсиметричне теорије поља имају боље ренормализационе особине од несуперсиметричних теорија које им одговарају. Зато је полазиште за деформацију био суперпростор и ренормализабилна теорија поља на њему - Вес-Зумино модел.

Након уводне главе, у другој глави рада дат је преглед основних појмова суперсиметрије. Најпре је дефинисана суперсиметрична алгебра као $\mathbb{Z}_{/2}$ градирана Лијева алгебра. Затим је уведен суперпростор као екстензија простора Минковског додавањем Грасманових Вајлових спинора θ_α, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Дефинисана су суперпоља као функције суперкоордината x_m, θ_α и $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Опште суперпоље није иредуцибилна репрезентација суперсиметрије, па су дефинисане две иредуцибилне репрезентације - кирално и антикирално суперпоље. Показано је како се применом киралних пројектора из произвољног суперпоља могу издвојити његов кирални и антикирални део. Коришћењем киралних суперпоља могуће је на елегантан начин формулисати теорију поља која је инваријантна на суперсиметричне трансформације и ренормализабилна [17]. Демонстирарана је ренормализабилност ове теорије на нивоу једне петље, рачунањем корекције ефективног дејства применом метода позадинског поља [47], технике суперграфова [43] и димензионе редукције [48; 49; 60]. Показано је како се све редефиниције параметара теорије изражавају само преко ренормализације јачине суперпоља. Наиме, маса и константа интеракције се не ренормализују директно, већ само преко ренормализације јачине суперпоља. Овај исказ је садржај теореме о нееренормализовању [50].

Трећа глава рада посвећена је деформационој квантизацији као начину за деформисање суперпростора. Наведена је дефиниција Хопфове алгебре и њене репрезентације, као дејства елемената Хопфове алгебре на неком векторском простору. Специјално, у случају када векторски простор има и структуру алгебре, дата је дефиниција H-модул алгебре, као простора на коме Хопфова алгебра H коваријантно делује: $h(ab) = \cdot(\Delta(h)(a \otimes b))$. Затим је наведен најзначајнији резултат у деформационој квантизацији - Дринфелдова теорема о твистовању. Она омогућава да се из неке Хопфове алгебре избором 2-коцикла, такозваног твиста, дефинише нова, деформисана Хопфова алгебра. У случајевима када су твистови међусобно кохомологни, твистовањем се не добијају фундаментално различите Хопфове алгебре. То је садржај теореме о кохомологији Хопфових алгебара. Даље је наведено како се деформација Хопфове алгебре одражава на структуру H-модул алгебре, индукујући ново алгебарско множење - $\star$-производ[1]. На крају је теорија деформационе квантизације уопштена и примењена на случај Хопфове алгебре универазално обавијајуће алгебре суперсиметричних трансформација $\mathcal{U}(\mathcal{S})$. Како $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ делује на алгебри суперпоља, A, то A представља $\mathcal{U}(\mathcal{S})$-модул алгебру. Избором твиста $\mathcal{F}$, може се деформисати Хопфова алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ у Хопфову алгебру $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$, а $\mathcal{U}(\mathcal{S})$-модул алгебра A у $\mathcal{U}(\mathcal{S})_{\mathcal{F}}$-модул алгебру $A_{\mathcal{F}}$ са производом $f \star g = \cdot(\mathcal{F}^{-1}(f \otimes g))$, где $f, g \in A$. Овим је дата теоријска основа за дефинисање не(анти)комутативних суперпростора и деформисаних Вес-Зумино модела на њима, што је урађено у наредне две главе

---

[1] Теореме деформационе квантизације наведене у овој глави сабране су и доказане у додатку D.

за два специјална избора твиста.

У четвртој глави разматрана је такозвана D-деформација која се остварује избором нехермитског твиста $\mathcal{F} = e^{\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}D_\alpha \otimes D_\beta}$, где су $C^{\alpha\beta} = C^{\beta\alpha} \in \mathbb{C}$ константе, а $D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m$ суперковаријантни изводи. Коришћењем метода описаног у претходној глави, деформисана је Хопфова алгебра универзално обавијајуће алгебре суперсиметричних трансформација, проширене суперковаријантним изводима D_α. Деформисана Хопфова алгебра није се променила. Даље је деформисана алгебра суперпоља увођењем $\star$-производа, чиме је деформисан суперпростор. Деформисане (анти)комутационе релације које су претрпеле промену су $\{\theta^\alpha \overset{\star}{,} \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}$, $[x^m \overset{\star}{,} x^n] = -C^{\alpha\beta}(\sigma^{mn}\varepsilon)_{\alpha\beta}\bar{\theta}\bar{\theta}$ и $[x^m \overset{\star}{,} \theta^\alpha] = -iC^{\alpha\beta}\sigma^m_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}$, тако да је деформисан и бозонски и фермионски сектор суперпростора. Чињеница да је Хопфова алгебра остала иста као пре деформације, резултује недеформисаним Лајбницовим правилом при деловању суперсиметричних трансформација на $\star$-производ суперпоља.

Дефинисани $\star$-производ омогућава деформисање дејства Вес-Зумино модела заменом обичног множења у тачки $\star$-множењем. При овој конструкцији, мора се обратити пажња на чињеницу да кирална суперпоља нису затворена при $\star$-множењу, па се суперсиметричне инваријанте из $\star$-производа киралних суперпоља добијају применом киралних пројектора. У раду су размотрене различите суперсиметричне инваријанте, највише трећег степена по суперпољима, при чему су укључена и два неминимална члана, који нису деформација чланова из недеформисаног дејства. Ово проширење учињено је у жељи да се омогући ренормализабилност деформисаног Вес-Зумино модела. Сабирањем свих суперсиметричних инваријанти формирано је дејство деформисаног Вес-Зумино модела. Да би оно било реално, поред чланова добијених деформацијом, укључени су и њима комплексно конјуговани чланови.

Применом метода позадинског поља, технике суперграфова и димензионе редукције, израчуната је корекција ефективног дејства на нивоу једне петље, до петог степена по класичном суперпољу. Испоставило се да нема "пуноглавац"-дијаграма и да се масени члан не ренормализује директно, што је у складу са теоремом о неренормализовању. Добијени су дивергентни чланови у $\Gamma_1^{(2)}$, $\Gamma_1^{(3)}$ и $\Gamma_1^{(4)}$, док је члан у ефективном дејству петог степена по суперпољима коначан. Све бесконачности у $\Gamma_1^{(2)}$ су облика постојећих у полазном дејству, изузев члана $-\frac{\lambda^2 a_2 (C^2+\bar{C}^2)}{8\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+\Box\Phi$. Члан таквог облика не постоји у дејству деформисаног Вес-Зумино модела, што значи да је модел са $a_2 \neq 0$ неренормализабилан. Из тог разлога је у осталим разматрањима узет услов $a_2 = 0$. Што се тиче бесконачности у $\Gamma_1^{(3)}$, оне су све облика чланова постојећих у полазном дејству. Како је модел конструисан тако да буде трећег степена по суперпољима, дивергенције у $\Gamma_1^{(4)}$ су неприхватљиве у ренормализабилној теорији. Из тог разлога, додатни услови за ренормализабилан модел су $a_3 = a_4 = 0$. Испитана је ренормализабилност модела под условима $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, и испоставило се да је модел тада заиста ренормализабилан. Као у недеформисаном Вес-Зумино моделу, маса и константа интеракције, λ, се ренормализују само преко ренормализације јачине суперпоља, док се константе a_1 и a_5 независно ренормализују. Нађен је и специјални случај, када су константе a_1 и a_5 повезане релацијом $a_5 = -\frac{1}{2}a_1$. Тада нестају дивергенције у $\Gamma_1^{(3)}$ и све редефиниције се могу изразити само преко ренормализације јачине суперпоља, што је ситуација која је присутна код недефоримисаног Вес-Зумино модела.

Овај тип деформације разматран је у литератури [28], међутим деформисање Вес-Зумино модела у том раду остварено је на друкчији начин. Наиме, интеракциони члан који је предложен у [28] је $\Phi^{\star 3}|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$. Овај члан представља суперсиметричну инваријанту I_6 (4.19), међутим, како је демонстрирано у нашем раду, само овакав члан, поред мањкавости што не даје у комутативном лимесу недеформисани Вес-Зумино модел, не може да обезбеди ренормализабилност деформисаног модела. Други начин за увођење деформације, који се предлаже у [28], је посредством члана $\Phi^{\star 3}|_{\theta\theta} = -\frac{C^2}{2}F^3$, међутим овај члан нарушава половина суперсиметричних генератора $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. У нашем раду, захтевали смо инваријантност у односу на деформисане суперсиметричне трансформације, па овакав члан није укључен у деформисано дејство.

Ренормализабилност деформисаног Вес-Зумино модела, са нарушеном половином суперсиметричних генератора, при чему је једини ефекат деформације додавање члана F^3 у дејство недеформисаног Вес-Зумино модела [30], детаљно је разматрано у литератури [61; 62; 63]. Иако је разматрани модел несуперсиметричан, показано је да на нивоу произвољно много петљи модел остаје ренормализабилан, ако му се дода коначно много контрачланова. Принцип усвојен у нашем раду, био је да се све суперсиметричне инваријанте укључе у дејство од почетка. Испоставило се да је за конкретан избор параметара модела, ово било довољно да обезбеди ренормализабилност D-деформисаног Вес-Зумино модела.

У петој глави разматрана је још једна деформација суперпростора, увођењем хермитског твиста: $\mathcal{F} = e^{\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}\partial_\alpha\otimes\partial_\beta+\frac{1}{2}\bar{C}_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\partial^{\dot\alpha}\otimes\bar\partial^{\dot\beta}}$, где су $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ и $\bar{C}_{\dot\alpha\dot\beta} = \bar{C}_{\dot\beta\dot\alpha}$ комплексне константе, међусобно повезане комплексним конјуговањем: $\bar{C}_{\dot\alpha\dot\beta} = (C_{\alpha\beta})^*$, а ∂_α и $\bar\partial_{\dot\alpha}$ изводи по фермионским координатама. Применом изабраног твиста, деформисана је Хопфова алгебра суперсиметричних трансформација, проширена фермионским изводима ∂_α и $\bar\partial_{\dot\alpha}$. Једини ефекат твистовања представља промењен копроизвод за суперсиметричне генераторе Q_α и $\bar{Q}_{\dot\alpha}$. Деформисана Хопфова алгебра на алгебри суперпоља делује заменом обичног множења, $\star$-множењем, што доводи до деформисаних (анти)комутационих релација за координате суперпростора. Конкретно, хермитска деформација једино деформише фермионски део суперпростора, док сви $\star$-комутатори који укључују бозонске координате остају непромењени. Нове $\star$-антикомутационе релације су: $\{\theta^\alpha \overset{\star}{,} \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}$ и $\{\bar\theta_{\dot\alpha} \overset{\star}{,} \bar\theta_{\dot\beta}\} = \bar{C}_{\dot\alpha\dot\beta}$. Деформисани копроизвод суперсиметричних генератора доводи до деформисаног Лајбницовог правила за деловање суперсиметричних трансформација на $\star$-производ два суперпоља (5.13).

Као у четвртој глави, дејство деформисаног Вес-Зумино модела добили смо разматрањем инваријанти у односу на деформисане суперсиметричне трансформације, које конструишемо из $\star$-приоизвода киралних и антикиралних суперпоља уз коришћење киралних пројектора. У разматрању хермитске деформације, ограничили смо се на минималну деформацију, па смо деформисали само чланове који су присутни у дејству недеформисаног Вес-Зумино модела. Коришћење киралних пројектора, довело је до нелокалности деформисаног дејства. Рачуната је корекција ефективног дејства квадратична по класичним суперпољима на нивоу једне петље. Коришћен је метод суперграфова и димензиона редукција. Већ на нивоу квадратичном по класичним суперпољима, у ефективном дејству се појавило мноштво дивергентних чланова који нису присутни у полазном дејству, што значи да хермитски деформисани Вес-Зумино модел није ренормализабилан.

У раду су размотрена два типа деформације Вес-Зумино модела - D-деформација и хермитска деформација. У случају D-деформације, видели смо да је за погодан избор параметара модела могуће добити ренормализабилан модел, док се у случају хермитске деформације добија неренормализабилан модел већ на нивоу квадратичном по класичним суперпољима. Основна разлика између ова два модела састоји се у чињеници да је деформисана суперсиметрија у првом случају уједно и пуна суперсиметрија, док је у другом случају једино присутна инваријантност на твистовану суперсиметрију. Суперсиметричност, иако у многоме поправља ренормализабилност теорија, недовољна је у свом твистованом облику да обезбеди поништавање дивергенција које се добијају.

Један од даљих праваца истраживања могао би да буде генерализовање теорије са интеракцијом киралног суперпоља и векторског суперпоља на не(анти)комутативни случај. Међутим, испоставило се да је формулисање таквог модела, повезано са озбиљним тешкоћама које су последица немогућности да се истовремено конзистентно дефинишу деформисане градијентне и суперсиметричне трансформације.

Други правац даљег рада представља конструисање теорије супергравитације на не(анти)комутативном суперпростору. У радовима [64; 65; 66] показано је да се Ајнштајнова општа теорија релативности може формулисати као теорија нарушене градијентне $SO(2,3)$ симетрије. Полазећи од такве формулације гравитације, прелаз на некомутативни простор остварује се увођењем некомутативних поља и Мојал-Вејловог $\star$-производа. Помоћу Сајберг-Витеновог пресликавања [10] некомутативна поља се могу изразити помоћу њихових комутативних партнера, а добијена теорија у сваком реду по константама некомутатаивности има $SO(2,3)$ градијентну симетрију. После њеног спонтаног нарушења добијамо некомутативну деформацију

Ајнштајнове теорије гравитације [67; 68; 69]. Следећи природан корак је уопштавање описаног поступка на случај супергравитације. Градирањем $SO(2,3)$ локалне групе симетрије, увођењем фермионских генератора Q_α и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ добија се $OSp(1,4)$ група. Прелазом на $\star$-производ и не(анти)комутативна поља и применом Сајберг-Витеновог пресликавања може се, после спонтаног нарушења симетрије, добити не(анти)комутативно уопштење супергравитације[2].

---

[2] Ово је предмет рада који је у току.

Додаци

Додатак A

Вајлови спинори и σ-матрице

У овом додатку навешћемо конвенције у вези са означавањем Вајлових спинора и Паулијевих σ-матрица, као и идентитете који за њих важе, а коришћени су у добијању резултата у овом раду.

A.1 Дефиниције

Метрика простора Минковског је: $\eta_{mn} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

У Вајловој репрезентацији γ-матрице имају следећи облик:

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} , \tag{A.1}$$

где је:

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , & \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{A.2}$$

и важи $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0$ и $\bar{\sigma}^{1,2,3} = -\sigma^{1,2,3}$.

Дираков спинор $\psi_D(x)$ се у овој репрезентацији разлаже на два Вајлова спинора[1]:

$$\psi_D(x) = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} . \tag{A.3}$$

Закон трансформације Дираковог спинора ψ_D при Лоренцовим трансформацијама је:

$$\psi'_D(x') = e^{-\frac{i}{4}\omega_{mn}\Sigma^{mn}}\psi_D(x) . \tag{A.4}$$

Генератори Лоренцових трансформација у спинорској репрезентацији Σ^{mn} су:

$$\frac{1}{2}\Sigma^{mn} = -\frac{i}{4}[\gamma^m, \gamma^n] = -i \begin{pmatrix} \sigma^{mn} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{mn} \end{pmatrix} , \tag{A.5}$$

где су матрице σ^{mn} и $\bar{\sigma}^{mn}$ дефинисане следећим изразима:

$$\sigma^{mn} = \frac{1}{4}(\sigma^m\bar{\sigma}^n - \sigma^n\bar{\sigma}^m) , \qquad \bar{\sigma}^{mn} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^m\sigma^n - \bar{\sigma}^n\sigma^m) . \tag{A.6}$$

Из релације (A.4) види се да се леви Вајлов спинор, ψ_α, трансформише као:

$$\psi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta\psi_\beta , \tag{A.7}$$

где је $M = e^{-\frac{1}{2}\omega_{mn}\sigma^{mn}} \in SL(2, \mathbf{C})$, док се десни Вајлов спинор $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ трансформише као:

$$\bar{\chi}'^{a} = (M^+)^{-1\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}} , \tag{A.8}$$

где је $(M^+)^{-1} = e^{-\frac{1}{2}\omega_{mn}\bar{\sigma}^{mn}} \in SL(2, \mathbf{C})$.

Уведимо константан антисиметричан тензор ранга 2, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, и његов инверз, $\varepsilon^{\alpha\beta}$, тако да важи $\varepsilon_{21} = \varepsilon^{12} = 1$ и $\varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = -1$. За овако дефинисане тензоре ε и ε^{-1} важи контракција: $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma$. Тензор ε је инваријантан у односу на Лоренцове трансформације јер је $\det M = 1$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = M_\alpha{}^\gamma M_\beta{}^\delta\varepsilon_{\gamma\delta} . \tag{A.9}$$

---

[1] Компоненте спинора су Грасманови бројеви.

Подизање и спуштање индекса α остварује се помоћу тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon^{\alpha\beta}$, па можемо дефинисати и леви Вајлов спинор са горњим индексом:

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \ . \tag{A.10}$$

Он се при Лоренцовим трансформацијама трансформише на следећи начин:

$$\psi'^\alpha = (M^T)^{-1\alpha}{}_\beta \psi^\beta \ . \tag{A.11}$$

Потпуно аналогно, могу се дефинисати и тензори за спуштање и подизање индекса $\dot\alpha$:

$$\bar\xi_{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\xi^{\dot\beta} \ , \qquad\qquad \bar\xi^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\xi_{\dot\beta} \ , \tag{A.12}$$

при чему важи: $\varepsilon_{\dot2\dot1} = \varepsilon^{\dot1\dot2} = 1$ и $\varepsilon_{\dot1\dot2} = \varepsilon^{\dot2\dot1} = -1$, као и контракција: $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma} = \delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}$. При Лоренцовим трансформацијама спинор $\bar\xi_{\dot\alpha}$ се трансформише као:

$$\bar\chi'_{\dot\alpha} = M^*{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\bar\chi_{\dot\beta} \ . \tag{A.13}$$

Из једначина (A.7) и (A.8) види се да је индексна структура Паулијевих матрица слећа:

$$\sigma^m{}_{\alpha\dot\alpha} \ , \qquad \bar\sigma^{m\alpha\dot\alpha} \ , \qquad \sigma^{mn}{}_\alpha{}^\beta \ , \qquad \bar\sigma^{mn\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \ . \tag{A.14}$$

Помоћу тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$ могу да се повежу компоненте матрица σ^m и $\bar\sigma^m$:

$$\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^m{}_{\beta\dot\beta} \tag{A.15}$$

За производе Вајлових спинора и σ-матрица користи се следећа скраћена нотација:

$$\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha \ , \tag{A.16}$$

$$\bar\psi\bar\chi = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} \ , \tag{A.17}$$

$$\psi\sigma^m\bar\chi = \psi^\alpha\sigma^m{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} \ , \tag{A.18}$$

$$\bar\chi\bar\sigma^m\psi = \bar\chi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}\psi_\alpha \ , \tag{A.19}$$

$$\psi\sigma^{mn}\chi = \psi^\alpha\sigma^{mn}{}_\alpha{}^\beta\chi_\beta \ , \tag{A.20}$$

$$\bar\psi\bar\sigma^{mn}\bar\chi = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{mn\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\bar\chi^{\dot\beta} \ . \tag{A.21}$$

Комплексно конјуговање Вајлових спинора претвара индексе без тачке у индексе са тачком и обрнуто:

$$(\psi_\alpha)^* = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \ . \tag{A.22}$$

При конјуговању производа два спинора мења се њихов поредак, па важи:

$$(\chi\psi)^+ = (\chi^\alpha\psi_\alpha)^+ = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \ . \tag{A.23}$$

За парцијалне изводе по компонентама Вајлових спинора користићемо следеће скраћене ознаке:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \ , \qquad \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \ , \tag{A.24}$$

$$\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \ , \qquad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \ . \tag{A.25}$$

Како су компоненте Вајлових спинора Грасманови бројеви, то су и парцијални изводи по тим компонентама антикомутирајући диференцијални оператори:

$$\partial_\alpha\partial_\beta = -\partial_\beta\partial_\alpha \ , \qquad \partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\beta}} = -\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\partial_\alpha \ , \qquad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\beta}} = -\bar{\partial}_{\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \ . \tag{A.26}$$

Уведимо ознаке за контракције парцијалних извода по θ_α и $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$:

$$\partial^2 = \partial^\alpha\partial_\alpha \ , \qquad \bar{\partial}^2 = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \ . \tag{A.27}$$

У наредном поглављу навешћемо неке корисне идентитете са Вајловим спинорима и σ-матрицама, који су често коришћени у овом раду.

А.2 Идентитети са Вајловим спинорима и σ-матрицама

Матрице σ^m, $\bar{\sigma}^m$, σ^{mn} и $\bar{\sigma}^{mn}$ задовољавају следеће идентитете:

$$\sigma^m\bar{\sigma}^n + \sigma^n\bar{\sigma}^m = -2\eta^{mn} \ , \qquad \bar{\sigma}^m\sigma^n + \bar{\sigma}^n\sigma^m = -2\eta^{mn} \ , \tag{A.28}$$

$$\sigma^m\bar{\sigma}^n = 2\sigma^{mn} - \eta^{mn} \ , \qquad \bar{\sigma}^m\sigma^n = 2\bar{\sigma}^{mn} - \eta^{mn} \ , \tag{A.29}$$

$$\mathrm{Tr}(\sigma^m\bar{\sigma}^n) = -2\eta^{mn} \ , \qquad \mathrm{Tr}\,\sigma^{mn} = 0 \ , \tag{A.30}$$

$$\varepsilon^{abcd}\sigma_{cd} = -2i\sigma^{ab} \ , \qquad \varepsilon^{abcd}\bar{\sigma}_{cd} = 2i\bar{\sigma}^{ab} \ , \tag{A.31}$$

$$\sigma^m{}_{\alpha\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta}\varepsilon_{\beta\alpha} \ , \qquad \varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^m{}_{\beta\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\alpha} \ , \tag{A.32}$$

$$\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_m{}^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \ . \tag{A.33}$$

За Вајлове двокомпоненетне спиноре важе следеће релације:

$$\theta_\alpha\theta_\beta = \frac{1}{2}\theta\theta\varepsilon_{\alpha\beta} \ , \qquad \theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\theta\theta\varepsilon^{\alpha\beta} \ , \tag{A.34}$$

$$\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \ , \qquad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \ , \tag{A.35}$$

$$(\theta\phi)(\theta\psi) = -\frac{1}{2}(\phi\psi)(\theta\theta) \ , \qquad (\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) = -\frac{1}{2}(\bar{\phi}\bar{\psi})(\bar{\theta}\bar{\theta}) \ , \tag{A.36}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta = -\partial^\alpha \ , \qquad \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{\beta}} = -\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \ , \tag{A.37}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\theta\theta = 4 \ , \qquad \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial^{\dot{\alpha}}\partial^{\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} = 4 \ , \tag{A.38}$$

$$\chi\sigma^n\bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\chi \ , \qquad (\chi\sigma^m\bar{\psi})^+ = \psi\sigma^m\bar{\chi} \ , \tag{A.39}$$

$$\chi\sigma^m\bar{\sigma}^n\psi = \psi\sigma^n\bar{\sigma}^m\chi \ , \qquad (\chi\sigma^m\bar{\sigma}^n\psi)^+ = \bar{\psi}\bar{\sigma}^n\sigma^m\bar{\chi} \ , \tag{A.40}$$

$$\theta\sigma^m\bar{\theta}\theta\sigma^n\bar{\theta} = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{mn} \ . \tag{A.41}$$

Додатак В

Суперковаријантни изводи

У овом додатку сабраћемо идентитете који важе за суперковаријантне изводе и демонстрираћемо како се њиховом применом могу рачунати интеграли по суперпростору који зависе од суперпоља. На тај начин се рачун врши за све елементе мултиплета који припадају датом суперпољу истовремено, што је битно техничко поједностављење. Ова техника назива се техника суперграфова.

В.1 Општи идентитети

Кренимо од релација које дефинишу суперковаријантне изводе:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma^m{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_m \ , \qquad \bar D_{\dot\alpha} = -\bar\partial_{\dot\alpha} - i\theta^\alpha\sigma^m{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_m \ . \tag{В.1}$$

Коришћењем тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$ и њихових инверза, можемо да подижемо и спуштамо индексе на суперковаријантним изводима:

$$D^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}D_\beta = -\partial^\alpha - i\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}\partial_m \ , \qquad \bar D^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar D_{\dot\beta} = \bar\partial^{\dot\alpha} + i\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_m \ . \tag{В.2}$$

Суперковаријантни изводи задовољавају антикомутационе релације:

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = 0 \ , \qquad \{\bar D_{\dot\alpha}, \bar D_{\dot\beta}\} = 0 \ , \qquad \{D_\alpha, \bar D_{\dot\alpha}\} = -2i\sigma^m{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_m \ . \tag{В.3}$$

Из релација (В.1-В.3) лако се добијају следећи корисни идентитети:

$$D^2 = D^\alpha D_\alpha = -\partial^2 + 2i\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial^\alpha\partial_m - \bar{\theta}^2\Box \ , \tag{В.4}$$

$$\bar{D}^2 = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}^2 - 2i\theta^\alpha\sigma^m{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\beta}}\partial_m - \theta^2\Box \ , \tag{В.5}$$

$$D_\alpha D_\beta = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}D^2 \ , \qquad D^\alpha D^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}D^2 \ , \tag{В.6}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{D}^2 \ , \qquad \bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{D}^2 \ , \tag{В.7}$$

$$[D_\alpha, \bar{D}^2] = -4i\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\partial_m \ , \qquad [\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D^2] = 4i\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}D^\alpha\partial_m \ , \tag{В.8}$$

$$D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}}D^2\bar{D}^{\dot{\alpha}} \ , \qquad D^2\bar{D}^2D^2 = 16\Box D^2 \ , \qquad \bar{D}^2D^2\bar{D}^2 = 16\Box\bar{D}^2 \ . \tag{В.9}$$

В.2 Парцијална интеграција

Интеграли по простор-времену тоталних дивергенција представљају површинске чланове, које ћемо занемаривати. У том случају, важи:

$$\int d^8z D_\alpha F = 0 \ , \qquad \int d^8z\bar{D}_{\dot{\alpha}}F = 0 \ . \tag{В.10}$$

Релације (В.10) и Лајбницово правило за суперковаријантне изводе, омогућавају нам да изведемо следећа правила парцијалне интеграције:

$$\int d^8z(D_\alpha F)G = -(-1)^{|F|}\int d^8zF(D_\alpha G) \ , \tag{В.11}$$

$$\int d^8z(\bar{D}_{\dot{\alpha}}F)G = -(-1)^{|F|}\int d^8zF(\bar{D}_{\dot{\alpha}}G) \ , \tag{В.12}$$

$$\int d^8z(D^2F)G = \int d^8zF(D^2G) \ , \tag{В.13}$$

$$\int d^8z(\bar{D}^2F)G = \int d^8zF(\bar{D}^2G) \ , \tag{В.14}$$

$$\int d^8z(D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha F)G = \int d^8zF(D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha G) \ , \tag{В.15}$$

$$\int d^8z(\bar{D}_{\dot{\alpha}}D^2\bar{D}^{\dot{\alpha}}F)G = \int d^8zF(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^2\bar{D}^{\dot{\alpha}}G) \ . \tag{В.16}$$

В.3 Деловање на δ-функцију

На целом суперпростору δ-функција се дефинише као:

$$\delta^8(z-z') = \delta^4(x-x')\delta^2(\theta-\theta')\delta^2(\bar\theta-\bar\theta') \ , \tag{В.17}$$

где су δ-функције у спинорском делу суперпростора $\delta^2(\theta-\theta') = (\theta-\theta')^2$ и $\delta^2(\bar\theta-\bar\theta') = (\bar\theta-\bar\theta')^2$.

При деловању суперковаријантнх извода на δ-функције, важе следећи идентитети:

$$D_\alpha\delta^8(z-z') = -D'{}_\alpha\delta^8(z-z') \ , \tag{В.18}$$

$$\bar D_{\dot\alpha}\delta^8(z-z') = -\bar D'_{\dot\alpha}\delta^8(z-z') \ , \tag{В.19}$$

$$D^2\delta^8(z-z') = D'^2\delta^8(z-z') \ , \tag{В.20}$$

$$\bar D^2\delta^8(z-z') = \bar D'^2\delta^8(z-z') \ , \tag{В.21}$$

$$D^2\delta^8(z-z') = -4e^{-i(\theta-\theta')\sigma^m\bar\theta\partial_m}\delta^4(x-x') \ , \tag{В.22}$$

$$\bar D^2\delta^8(z-z') = -4e^{i\theta\sigma^m(\bar\theta-\bar\theta')\partial_m}\delta^4(x-x') \ , \tag{В.23}$$

$$\bar D^2 D^2\delta^8(z-z') = 16e^{i(\theta\sigma^m\bar\theta+\theta'\sigma^m\bar\theta'-2\theta\sigma^m\bar\theta')\partial_m}\delta^4(x-x') \ , \tag{В.24}$$

$$D^2\bar D^2\delta^8(z-z') = 16e^{-i(\theta\sigma^m\bar\theta+\theta'\sigma^m\bar\theta'-2\theta\sigma^m\bar\theta')\partial_m}\delta^4(x-x') \ . \tag{В.25}$$

У следећем поглављу, показаћемо како се идентитети наведени у овом додатку, могу искористити при рачунању трагова у поправци ефективног дејства (2.109).

В.4 Пример рачуна применом технике суперграфова

Као демонстрацију технике суперграфова, израчунаћемо траг (2.113). Користићемо правила парцијалне интеграције за суперковаријантне изводе D и $\bar D$, сабране у В.2, као и идентитете који важе за деловање суперковаријантних извода на делта функције из В.3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(B\bar{F}\bar{B}F) =& \int \prod_{i=1}^{3} d^8 z_i \left(\frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box(\Box - m^2)} + \frac{\bar{D}^2 D^2 - 2\bar{D}D^2\bar{D}}{16\xi\Box^2} \right)_1 \delta^8(z_1 - z_2) \left(-\frac{\lambda}{2}\Phi^+ D^2 \right)_2 \\
&\cdot \left(\frac{\bar{D}^2 D^2}{16\Box(\Box - m^2)} + \frac{D^2\bar{D}^2 - 2D\bar{D}^2 D}{16\xi\Box^2} \right)_2 \delta^8(z_2 - z_3) \left(-\frac{\lambda}{2}\Phi\bar{D}^2 \right)_3 \delta^8(z_3 - z_1) \\
=& \frac{\lambda^2}{4} \int \prod_{i=1}^{3} d^8 z_i \left(\frac{\bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2}{16\Box(\Box - m^2)} \right)_1 \delta^8(z_1 - z_2)\Phi^+(z_2) \\
&\cdot \left(\frac{D^2\bar{D}^2 D^2}{16\Box(\Box - m^2)} \right)_2 \delta^8(z_2 - z_3)\Phi(z_3)\delta^8(z_3 - z_1) \\
=& \frac{\lambda^2}{4} \int \prod_{i=1}^{2} \left(\frac{\bar{D}^2}{\Box - m^2} \right)_1 \delta^8(z_1 - z_2)\Phi^+(z_2) \left(\frac{D^2}{\Box - m^2} \right)_2 \delta^8(z_2 - z_1)\Phi(z_1) \\
=& \frac{\lambda^2}{4} \int \prod_{i=1}^{2} \left(\frac{\bar{D}^2 D^2}{\Box - m^2} \right)_1 \delta^8(z_1 - z_2)\Phi^+(z_2) \left(\frac{1}{\Box - m^2} \right)_2 \delta^8(z_2 - z_1)\Phi(z_1) \\
=& 4\lambda^2 \int \prod_{i=1}^{2} d^8 z_i \left(\frac{1}{\Box - m^2} \right)_1 e^{-i(\theta_1\sigma^m\bar{\theta}_1 + \theta_2\sigma^m\bar{\theta}_2 - 2\theta_1\sigma^m\bar{\theta}_2)\partial_m} \delta^4(x_1 - x_2)\Phi^+(z_2) \\
&\cdot \left(\frac{1}{\Box - m^2} \right)_2 \delta^8(z_2 - z_1)\Phi(z_1) \\
=& 4\lambda^2 \int d^4\theta \prod_{i=1}^{2} d^4 x_i \left(\frac{1}{\Box - m^2} \right)_1 \delta^4(x_1 - x_2)\Phi^+(x_2, \theta, \bar{\theta}) \\
&\cdot \left(\frac{1}{\Box - m^2} \right)_2 \delta^4(x_2 - x_1)\Phi(x_1, \theta, \bar{\theta}) \ .
\end{aligned} \tag{B.26}$$

У другој једнакости искоришћена је особина (B.20), парцијална интеграција за пребацивање оператора $\bar{D}^2$ на почетак израза и чињеница да трећи степени суперковаријантних извода ишчезавају. Затим је, у трећој једнакости, примењена особина (B.9). У четвртој једнакости је употребљена особина (B.21) и парцијална интеграција да се оператор D^2 пребаци на почетак израза. У петој је искоришћена особина (B.24) и у последњој је извршена интеграција по Грасмановим променљивим θ_2 и $\bar{\theta}_2$, те су преостале Грасманове променљиве преименоване у θ и $\bar{\theta}$. На тај начин добили смо израз (B.26) у коме постоји само једна интеграција по фермионском делу суперпростора.

Добијени интеграл је ултравиолетно дивергентан, и потребно је израчунати његов дивергентни део. Да бисмо то учинили, применићемо технику димензионе редукције [48; 49]. У тој методи, регуларизација се врши преласком са интеграла у 4 димензије на интеграл у $4-\varepsilon$ димензија, при чему се дивергенције параметризују као полови параметра ε. Треба обратити пажњу да се ово смањење броја димензија врши само у бозонском делу суперпростора, док фермионски део остаје све време четdatabasedимензион. У додатку C показано је како се применом димензионе регуларизације одређује дивергентни део интеграла. Коришћењем формуле (C.17), добијамо дивергентни део израза (B.26)

$$\mathrm{Tr}(B\bar{F}\bar{B}F)\Big|_{d.p.} = \frac{i\lambda^2}{2\pi^2\varepsilon}\int d^8z\Phi^+(z)\Phi(z)\ . \tag{B.27}$$

На потпуно аналоган начин, могу се, применом идентитета који важе за суперковаријантне изводе и формула за димензиону регуларизацију из додатка C, израчунати сви трагови који се добијају у развоју поправке ефективног дејства.

Додатак C

Димензиона регуларизација

Техника димензионе регуларизације [60; 70] остварује се коришћењем димензије простор-времена као регуларизационог параметра. Тако се дивергентни интеграли не рачунају у 4 димензије, већ у $4-\varepsilon$ димензија, а дивергенције се појављују као полови по параметру ε.

У следећем поглављу демонстрираћемо на примеру једног интеграла, како се примењује техника димензионе регуларизације.

C.1 Рачунање дивергентног дела интеграла

Израчунајмо дивергентни део следећег интеграла:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(KfKg) = \int\prod_{i=1}^{2} d^4x_i \left(\frac{1}{\Box - m^2}\right)_1 \delta(x_1-x_2)f(x_2)\\ \left(\frac{1}{\Box - m^2}\right)_2 \delta(x_2-x_1)g(x_1)\ ,\end{aligned} \tag{C.1}$$

где је $K = (\Box - m^2)^{-1}$.

Заменимо δ-функције у претходном изразу њиховим развојем у импулсном простору: $\delta(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}$. Добијамо:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(KfKg) &= \int\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{d^4x_id^4p_i}{(2\pi)^4}\right)\frac{e^{-ip_1(x_1-x_2)}}{p_1^2+m^2}f(x_2)\frac{e^{-ip_2(x_2-x_1)}}{p_2^2+m^2}g(x_1)\\ &= \int\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}\right)\frac{\tilde{f}(p_1-p_2)\tilde{g}(p_2-p_1)}{(p_1^2+m^2)(p_2^2+m^2)}\\ &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)}\ ,\end{aligned}\tag{C.2}$$

где су $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ Фуријеове амплитуде функција $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{f}(p)e^{-ipx}\ ,\qquad\qquad g(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{g}(p)e^{-ipx}\ .\tag{C.3}$$

Интеграл по k у изразу (C.2) је ултравиолетно дивергентан. Да бисмо га регуларизовали, уместо у 4 димензије, радићемо у $D=4-\varepsilon$ димензија:

$$\mathcal{I}=\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)}\ .\tag{C.4}$$

Извршимо Фејнманову параметризацију: $\frac{1}{AB}=\int_0^1dx\frac{1}{[(1-x)A+xB]^2}$ у интегралу (C.4), затим смену са k на $l=k+px$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_0^1dx\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{[x(k^2+m^2)+(1-x)((k+p)^2+m^2)]^2}\\ &= \int_0^1dx\int\frac{d^Dl}{(2\pi)^D}\frac{1}{(l^2+m^2+xp^2-x^2p^2)^2}\ .\end{aligned}\tag{C.5}$$

Пређимо сада на еуклидски простор сменом: $l^0=il_E^0$, $l^{1,2,3}=l_E^{1,2,3}$. Квадрат норме векора l се не мења, јер је еуклидска метрика: $\eta_E^{mn}=\mathrm{diag}(1,1,1,1)$, па за интеграл $\mathcal{I}$ добијамо:

$$\mathcal{I}=i\int_0^1dx\int\frac{d^Dl_E}{(2\pi)^D}\frac{1}{(l_E^2+\Delta)^2}\ ,\tag{C.6}$$

где је $\Delta=m^2+p^2(x-x^2)$. Инеграл по l_E можемо да решавамо у сферним координатама. Интеграција у угловном делу даје константу $\Omega_D=\frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}$, а интеграл по дужини вектора l_E своди се на бета-функцију [71], тако добијамо:

$$\mathcal{I}=\frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1dx\left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\ .\tag{C.7}$$

Гама-функција задовољава релацију:

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - o(\varepsilon) \ , \tag{C.8}$$

где је $\varepsilon \ll 1$, а γ Ојлер-Маскеронијева константа. Користећи развој гама-функције око нуле (C.8), добијамо дивергентни део интегала $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}\Big|_{d.p.} = \frac{i}{8\pi^2\varepsilon} \ . \tag{C.9}$$

Заменимо добијени резултат (C.9) у (C.2) и извршимо инверзну Фуријеову трансформацију функција $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$. Коначно, добијамо дивергентни део величине $\mathrm{Tr}(KfKg)$:

$$\mathrm{Tr}(KfKg)\Big|_{d.p.} = \frac{i}{8\pi^2\varepsilon}\int d^4x \ f(x)g(x) \ . \tag{C.10}$$

На описани начин може се израчунати дивергентни део сваког трага који се појављује у овом раду. При рачунању доприноса у корекцији ефективног дејства који садржи више од два пропагатора, потребно је применити уопштену Фејнманову параметризацију:

$$\frac{1}{A_1A_2\dots A_n} = \underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n}\prod_{i=1}^{n} d^4x_i\frac{\delta(x_1+x_2+\cdots x_n-1)}{(x_1A_1+x_2A_2+\cdots x_nA_n)^n} \ , \tag{C.11}$$

да би се дивергентни интеграл превео у облик на који се могу применити формуле за димензиону регуларизацију:

$$\int d^Dk\frac{1}{(k^2+2pk+m^2)^n} = \frac{i\pi^{D/2}\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)(m^2-p^2)^{n-D/2}} \ , \tag{C.12}$$

$$\int d^Dk\frac{\partial}{\partial p^l}\frac{1}{(k^2+2pk+m^2)^n} = \frac{\partial}{\partial p^l}\frac{i\pi^{D/2}\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)(m^2-p^2)^{n-D/2}} \ , \tag{C.13}$$

$$\dots$$

У следећем поглављу навешћемо резултате за дивергентне делове трагова који се појављују у овом раду.

C.2 Формуле за димензиону регуларизацију

Уведимо ознаку $K = (\Box - m^2)^{-1}$. Важе следеће једнакости:

$$\mathrm{Tr}(Kf)\Big|_{d.p.} = \frac{i}{8\pi^2\varepsilon} m^2 \int d^4x \; f(x) \;, \tag{C.14}$$

$$\mathrm{Tr}(\Box Kf)\Big|_{d.p.} = \frac{im^4}{8\pi^2\varepsilon} \int d^4x \; f(x) \;, \tag{C.15}$$

$$\mathrm{Tr}(\Box^2 Kf)\Big|_{d.p.} = \frac{im^6}{16\pi^2\varepsilon} \int d^4x \; f(x) \;, \tag{C.16}$$

$$\mathrm{Tr}(KfKg)\Big|_{d.p.} = \frac{i}{8\pi^2\varepsilon} \int d^4x \; f(x)g(x) \;, \tag{C.17}$$

$$\mathrm{Tr}(\partial_n KfKg)\Big|_{d.p.} = \frac{i}{16\pi^2\varepsilon} \int d^4x \; \partial_n f(x)g(x) \;, \tag{C.18}$$

$$\mathrm{Tr}(\Box KfKg)\Big|_{d.p.} = \frac{im^2}{4\pi^2\varepsilon} \int d^4x \; f(x)g(x) \;, \tag{C.19}$$

$$\mathrm{Tr}(\partial_n Kf\partial_m Kg)\Big|_{d.p.} = \frac{i}{96\pi^2\varepsilon} \int d^4x \; f(x) \left(6\eta_{mn}m^2 - 2\partial_n\partial_m - \eta_{mn}\Box\right) g(x) \;, \tag{C.20}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\partial_n Kf\partial_m\partial_p Kg)\Big|_{d.p.} = &\frac{i}{192\pi^2\varepsilon} \int d^4x \; f(x) \left[-2\partial_n\partial_m\partial_p\right.\\ &\left.+(\eta_{np}\partial_m + \eta_{nm}\partial_p - \eta_{mp}\partial_n)(6m^2 - \Box)\right] g(x) \;,\end{aligned} \tag{C.21}$$

$$\mathrm{Tr}(\Box KfKgKh)\Big|_{d.p.} = \frac{i}{8\pi^2\varepsilon} \int d^4x f(x)g(x)h(x) \;, \tag{C.22}$$

$$\mathrm{Tr}(\Box Kf\Box KgKhKl)\Big|_{d.p.} = \frac{i}{8\pi^2\varepsilon} \int d^4 f(x)g(x)h(x)l(x) \;. \tag{C.23}$$

Додатак D

Теореме деформационе квантизације

У овом додатку навешћемо доказе главних теорема из теорије деформационе квантизације.

D.1 Основна теорема деформационе квантизације

Теорема 1. *Нека је H Хопфова алгебра, а $\chi = \chi^\alpha \otimes \chi_\alpha$ којединични 2-коцикл. Тада постоји нова Хопфова алгебра H_χ дефинисана истим производом, јединицом и којединицом док су нови копроизвод и антипод дати са:*

$$\Delta_\chi(h) = \chi\Delta(h)\chi^{-1} \ , \qquad\qquad S_\chi(h) = US(h)U^{-1} \ ,$$

за све $h \in H_\chi$. Инвертибилни елемент $U \in H_\chi$ дат је изразом $U = \chi^\alpha S(\chi_\alpha)$.

Доказ. Да би H_χ била Хопфова алгебра, потребно је да дефинисиано пресликавање Δ_χ буде коасоцијативно и да представља алгебарско пресликавање, којединица ε мора да задовољи аксиоме којединице у односу на нови копроизвод Δ_χ. Такође, дефинисано пресликавање S_χ мора да задовољи аксиоме антипода.

Покажимо најпре коасоцијативност пресликавања Δ_χ:

$$\begin{aligned}(\Delta_\chi\otimes id)\Delta_\chi(h) &= (\Delta_\chi\otimes id)\chi\Delta(h)\chi^{-1}\\ &= (\chi\otimes 1)\Big((\Delta\otimes id)(\chi\Delta(h)\chi^{-1})\Big)(\chi^{-1}\otimes 1)\\ &= (\chi\otimes 1)((\Delta\otimes id)\chi)((\Delta\otimes id)\Delta(h))((\Delta\otimes id)\chi^{-1})(\chi^{-1}\otimes 1)\\ &= (1\otimes \chi)((id\otimes\Delta)\chi)((id\otimes\Delta)\Delta(h))((id\otimes\Delta)\chi^{-1})(1\otimes\chi^{-1})\\ &= (1\otimes\chi)\Big((id\otimes\Delta)(\chi\Delta(h)\chi^{-1})\Big)(1\otimes\chi^{-1})\\ &= (id\otimes\Delta_\chi)\Delta_\chi(h)\ , \qquad\qquad (\mathrm{D}.1)\end{aligned}$$

где је h произвољан елемент Хопфове алгебре H. Овим је доказано да је Δ_χ коасоцијативно. У доказу је најпре искоришћена чињеница да је Δ алгебарско пресликавање, затим дефинициони услов за 2-коцикл χ, па поново чињеница да је Δ алгебарско пресликавање.

Докажимо да је ε којединица:

$$\begin{aligned}(id\otimes\varepsilon)\Delta_\chi(h) &= (id\otimes\varepsilon)(\chi\Delta(h)\chi^{-1})\\ &= ((id\otimes\varepsilon)\chi)((id\otimes\varepsilon)\Delta(h))((id\otimes\varepsilon)\chi^{-1}) =\\ &= (id\otimes\varepsilon)\Delta(h) = h\ , \qquad\qquad (\mathrm{D}.2)\\ (\varepsilon\otimes id)\Delta_\chi(h) &= (\varepsilon\otimes id)(\chi\Delta(h)\chi^{-1})\\ &= ((\varepsilon\otimes id)\chi)((\varepsilon\otimes id)\Delta(h))((\varepsilon\otimes id)\chi^{-1}) =\\ &= (\varepsilon\otimes id)\Delta(h) = h\ . \qquad\qquad (\mathrm{D}.3)\end{aligned}$$

У овом доказу употребљена је особина алгебарског пресликавања ε, којединичност 2-коцикла χ и аксиома којединице у Хопфовој алгебри H.

Доказ да је Δ_χ алгебарско пресликавање следи из једнакости:

$$\Delta_\chi(hg) = \chi\Delta(hg)\chi^{-1} = \chi\Delta(h)\Delta(g)\chi^{-1} = \chi\Delta(h)\chi^{-1}\chi\Delta(g)\chi^{-1} = \Delta_\chi(h)\Delta_\chi(g)\ . \quad (\mathrm{D}.4)$$

Покажимо сада инвертибилност елемента $U\in H_\chi$. Уведимо величину $U^{-1} =$

$S(\bar{\chi}^\alpha)\bar{\chi}_\alpha$, при чему користимо нотацију $\chi^{-1} = \bar{\chi}^\alpha \otimes \bar{\chi}_\alpha$. Важи:

$$\begin{aligned} UU^{-1} &= \chi^\alpha S(\chi_\alpha) S(\bar{\chi}^\beta)\bar{\chi}_\beta \\ &= \bar{\chi}^\gamma \varepsilon(\bar{\chi}_\gamma)\chi^\alpha S(\chi_\alpha) S(\bar{\chi}^\beta)\bar{\chi}_\beta \\ &= \bar{\chi}^\gamma \chi^\alpha S(\chi_\alpha) S(\bar{\chi}^\beta) S(\bar{\chi}_{\gamma(1)})\bar{\chi}_{\gamma(2)}\bar{\chi}_\beta \\ &= \bar{\chi}^\gamma \chi^\alpha S(\bar{\chi}_{\gamma(1)}\bar{\chi}^\beta \chi_\alpha)\bar{\chi}_{\gamma(2)}\bar{\chi}_\beta \\ &= \bar{\chi}^\gamma_{(1)} S(\bar{\chi}^\gamma_{(2)})\bar{\chi}_\gamma = \varepsilon(\bar{\chi}^\gamma)\bar{\chi}_\gamma = 1 \ . \end{aligned} \tag{D.5}$$

У претходном извођењу, у другој једнакости смо искористили инвертовану особину којединичности, у трећој аксиому антипода, у четвртој чињеницу да је антипод S антиалгебарско пресликавање, док смо у петој искористили услов за 2-коцикл у облику:

$$(\Delta \otimes id)\chi^{-1} = ((id \otimes \Delta)\chi^{-1})(1 \otimes \chi^{-1})(\chi \otimes 1) \ , \tag{D.6}$$

што по компонентама гласи:

$$\bar{\chi}^\gamma_{(1)} \otimes \bar{\chi}^\gamma_{(2)} \otimes \bar{\chi}_\gamma = \bar{\chi}^\gamma \chi^\alpha \otimes \bar{\chi}_{\gamma(1)}\bar{\chi}^\beta \chi_\alpha \otimes \bar{\chi}_{\gamma(2)}\bar{\chi}_\beta \ . \tag{D.7}$$

У претпоследњој једнакости у (D.5) употребљена је аксиома антипода и на крају аксиома којединице.

На сличан начин се доказује и релација $U^{-1}U = 1$:

$$\begin{aligned} U^{-1}U &= S(\bar{\chi}^\alpha)\bar{\chi}_\alpha \chi^\beta S(\chi_\beta) \\ &= S(\chi^\gamma \varepsilon(\chi_\gamma)) S(\bar{\chi}^\alpha)\bar{\chi}_\alpha \chi^\beta S(\chi_\beta) \\ &= S(\chi^\gamma) S(\bar{\chi}^\alpha)\bar{\chi}_\alpha \chi^\beta \varepsilon(\chi_\gamma) S(\chi_\beta) \\ &= S(\chi^\gamma) S(\bar{\chi}^\alpha)\bar{\chi}_\alpha \chi^\beta \chi_{\gamma(1)} S(\chi_{\gamma(2)}) S(\chi_\beta) \\ &= S(\bar{\chi}^\alpha \chi^\gamma)\bar{\chi}_\alpha \chi^\beta \chi_{\gamma(1)} S(\chi_\beta \chi_{\gamma(2)}) \\ &= S(\chi^\alpha_{(1)})\chi^\alpha_{(2)} S(\chi_\alpha) = \varepsilon(\chi^\alpha) S(\chi_\alpha) \\ &= S(\varepsilon(\chi^\alpha)\chi_\alpha) = S(1) = 1 \end{aligned} \tag{D.8}$$

У претходном доказу коришћене су основне особине антипода и којединице, којединчност 2-коцикла χ и услов за 2-коцикл:

$$(\Delta \otimes id)\chi = (\chi^{-1} \otimes 1)(1 \otimes \chi)(id \otimes \Delta)\chi \tag{D.9}$$

у компнентном облику:

$$\chi^{\alpha}_{(1)} \otimes \chi^{\alpha}_{(2)} \otimes \chi_{\alpha} = \bar{\chi}^{\alpha}\chi^{\gamma} \otimes \bar{\chi}_{\alpha}\chi^{\beta}\chi_{\gamma(1)} \otimes \chi_{\beta}\chi_{\gamma(2)} \ . \tag{D.10}$$

Пошто смо доказали инвертибилност елемента U и одредили његов инверз, U^{-1}, можемо да докажемо да S_{χ} задовољава аксиоме антипода:

$$\begin{aligned}
\cdot(S_{\chi} \otimes id)\Delta_{\chi}(h) &= \cdot(S_{\chi} \otimes id)\chi\Delta(h)\chi^{-1} \\
&= S_{\chi}(\chi^{\alpha}h_{(1)}\bar{\chi}^{\beta})\chi_{\alpha}h_{(2)}\bar{\chi}_{\beta} = US(\chi^{\alpha}h_{(1)}\bar{\chi}^{\beta})U^{-1}\chi_{\alpha}h_{(2)}\bar{\chi}_{\beta} \\
&= US(\bar{\chi}^{\beta})S(h_{(1)})S(\chi^{\alpha})S(\bar{\chi}^{\gamma})\bar{\chi}_{\gamma}\chi_{\alpha}h_{(2)}\bar{\chi}_{\beta} \\
&= US(\bar{\chi}^{\beta})S(h_{(1)})h_{(2)}\bar{\chi}_{\beta} \\
&= US(\bar{\chi}^{\beta})\varepsilon(h)\bar{\chi}_{\beta} = UU^{-1}\varepsilon(h) = \varepsilon(h) \ ,
\end{aligned} \tag{D.11}$$

при чему смо користили особине антипода за S, којединичност ε, као и релацију:

$$\chi\chi^{-1} = \chi^{\alpha}\bar{\chi}^{\beta} \otimes \chi_{\alpha}\bar{\chi}_{\beta} = 1 \otimes 1 \ . \tag{D.12}$$

Потпуно аналогно, се доказује и друга аксиома антипода за S_{χ}:

$$\begin{aligned}
\cdot(id \otimes S_{\chi})\Delta_{\chi}(h) &= \cdot(id \otimes S_{\chi})\chi\Delta(h)\chi^{-1} \\
&= \chi^{\alpha}h_{(1)}\bar{\chi}^{\beta}S_{\chi}(\chi_{\alpha}h_{(2)}\bar{\chi}_{\beta}) = \chi^{\alpha}h_{(1)}\bar{\chi}^{\beta}US(\chi_{\alpha}h_{(2)}\bar{\chi}_{\beta})U^{-1} \\
&= \chi^{\alpha}h_{(1)}\bar{\chi}^{\beta}\chi^{\gamma}S(\chi_{\gamma})S(\chi_{\alpha}h_{(2)}\bar{\chi}_{\beta})U^{-1} \\
&= \chi^{\alpha}h_{(1)}\bar{\chi}^{\beta}\chi^{\gamma}S(\chi_{\alpha}h_{(2)}\bar{\chi}_{\beta}\chi_{\gamma})U^{-1} \\
&= \chi^{\alpha}h_{(1)}\bar{\chi}^{\beta}\chi^{\gamma}S(\bar{\chi}_{\beta}\chi_{\gamma})S(h_{(2)})S(\chi_{\alpha})U^{-1} \\
&= \chi^{\alpha}h_{(1)}S(h_{(2)})S(\chi_{\alpha})U^{-1} = \varepsilon(h)UU^{-1} = \varepsilon(h) \ .
\end{aligned} \tag{D.13}$$

Овим је доказано да је H_{χ} Хопфова алгебра. □

D.2 Теорема о деформисању H-модул алгебре

Теорема 2. *Нека је χ којединчни 2-коцикл за Хопфову алгебру H, и нека је асоцијативна алгебра, A, са производом $\cdot$, H-модул алгебра, тј. важи $h(a \cdot b) =$*

$\cdot(\Delta(h)(a \otimes b))$ и $h(1) = \varepsilon(h)1$, за све $a, b \in A$ и $h \in H$, где је 1 јединица у алгебри A (ако постоји), тада производ:

$$a \star b = \cdot(\chi^{-1}(a \otimes b)) \ , \tag{D.14}$$

за све $a, b \in A$, дефинише нову асоцијативну алгебру A_χ. Алгебра A_χ је H_χ-модул алгебра, где је H_χ Хопфова алгебра дефинисана у теореми 1 помоћу којединичног 2-коцикла χ.

Доказ. Да би алгебра A_χ са производом $\star$ била H_χ-модул алгебра, потребно је да важи следећа релација:

$$h(a \star b) = \star(\Delta_\chi(h)(a \star b)) \ . \tag{D.15}$$

Трансформишимо леву страну израза (D.15):

$$\begin{aligned} h(a \star b) &= h(\cdot(\chi^{-1}(a \otimes b))) \\ &= \cdot(\Delta(h)\chi^{-1}(a \otimes b)) \\ &= \cdot(\chi^{-1}\chi\Delta(h)\chi^{-1}(a \otimes b)) \\ &= \cdot(\chi^{-1}\Delta_\chi(h)(a \otimes b)) \\ &= \star(\Delta_\chi(h)(a \otimes b)) \ , \end{aligned} \tag{D.16}$$

чиме смо добили десну страну релације (D.15).

Докажимо још асоцијативност дефинисаног $\star$-производа (D.14):

$$\begin{aligned} (a \star b) \star c &= \cdot(\chi^{-1}(\cdot(\chi^{-1}(a \otimes b))) \otimes c) \\ &= \cdot(\chi^{-1}(\cdot \otimes id)(\chi^{-1} \otimes id)(a \otimes b \otimes c)) \\ &= \cdot((\cdot \otimes id)((\Delta \otimes id)(\chi^{-1} \otimes id))(\chi^{-1} \otimes id)(a \otimes b \otimes c)) \\ &= \cdot((\cdot \otimes id)((id \otimes \Delta)(id \otimes \chi^{-1}))(id \otimes \chi^{-1})(a \otimes b \otimes c)) \\ &= \cdot((id \otimes \cdot)((id \otimes \Delta)(id \otimes \chi^{-1}))(id \otimes \chi^{-1})(a \otimes b \otimes c)) \\ &= \cdot(\chi^{-1}(id \otimes \cdot)(id \otimes \chi^{-1})(a \otimes b \otimes c)) \\ &= \cdot(\chi^{-1}(a \otimes \cdot(\chi^{-1}(b \otimes c)))) \\ &= a \star (b \star c) \ . \end{aligned} \tag{D.17}$$

У претходном доказу користили смо: у трећој једнакости чињеницу да је A H-модул алгебра, затим у четвртој услов да је χ 2-коцикл, потом смо у следећем реду искористили асоцијативност производа $\cdot$, па у наредном поново услов да је A H-модул алгебра. □

D.3 Теореме о кохомологији Хопфових алгебара

Теорема 3. *Нека је H-Хопфова алгебра. Ако је $\gamma \in H$ инвертибилни којединични елемент и χ којединични 2-коцикл, тада је изразом*

$$\chi^\gamma = (\gamma \otimes \gamma)\chi\Delta\gamma^{-1} \tag{D.18}$$

дефинисан нови којединични 2-коцикл χ^γ. Каже се да је χ^γ кохомологно са χ.

Доказ. Да бисмо доказали да је χ^γ 2-коцикл, проверићемо да ли оно задовољава релацију (3.32):

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \chi^\gamma)(id \otimes \Delta)\chi^\gamma &= (1 \otimes (\gamma \otimes \gamma)\chi\Delta\gamma^{-1})(id \otimes \Delta)((\gamma \otimes \gamma)\chi\Delta\gamma^{-1}) \\
&= (1 \otimes \gamma \otimes \gamma)(1 \otimes \chi)(1 \otimes \Delta\gamma^{-1})(\gamma \otimes \Delta\gamma)((id \otimes \Delta)\chi)(id \otimes \Delta)\Delta\gamma^{-1} \\
&= (\gamma \otimes \gamma \otimes \gamma)(1 \otimes \chi)((id \otimes \Delta)\chi)(id \otimes \Delta)\Delta\gamma^{-1} \\
&= (\gamma \otimes \gamma \otimes \gamma)(\chi \otimes 1)((\Delta \otimes id)\chi)(\Delta \otimes id)\Delta\gamma^{-1} \\
&= (\gamma \otimes \gamma \otimes 1)(\chi \otimes 1)(\Delta\gamma^{-1} \otimes 1)(\Delta\gamma \otimes \gamma)((\Delta \otimes id)\chi)(\Delta \otimes id)\Delta\gamma^{-1} \\
&= ((\gamma \otimes \gamma)\chi\Delta\gamma^{-1} \otimes 1)(\Delta \otimes id)((\gamma \otimes \gamma)\chi\Delta\gamma^{-1}) \\
&= (\chi^\gamma \otimes 1)(\Delta \otimes id)\chi^\gamma \; . \qquad \text{(D.19)}
\end{aligned}$$

Овим је показано да χ^γ јесте 2-коцикл. У доказу смо користили чињеницу да је Δ алгебарско пресликавање, услов 2-коцикла за χ и коасоцијативност.

Докажимо сада којединичност 2-коцикла χ^γ:

$$\begin{aligned}(\varepsilon\otimes id)\chi^\gamma &= (\varepsilon\otimes id)((\gamma\otimes\gamma)\chi\Delta\gamma^{-1})\\ &= \varepsilon(\gamma)\gamma((\varepsilon\otimes id)\chi)((\varepsilon\otimes id)\Delta\gamma^{-1})\\ &= \gamma\gamma^{-1} = 1\ , \qquad (D.20)\\ (id\otimes\varepsilon)\chi^\gamma &= (id\otimes\varepsilon)((\gamma\otimes\gamma)\chi\Delta\gamma^{-1})\\ &= \varepsilon(\gamma)\gamma((id\otimes\varepsilon)\chi)((id\otimes\varepsilon)\Delta\gamma^{-1})\\ &= \gamma\gamma^{-1} = 1\ . \qquad (D.21)\end{aligned}$$

У претходном извођењу коришћена је којединичност 2-коцикла χ и елемента γ, аксиома којединице и чињеница да је којединица алгебарско пресликавање. □

Теорема 4. *Нека су χ и ψ два којединична 2-коцикла за Хопфову алгебру H. Тада су Хопфове алгебре H_χ и H_ψ, добијене твистовањем 2-коцикилима редом χ и ψ као у теореми 1, међусобно изоморфне преко унутрашњег аутоморфизма, ако су χ и ψ међусобно кохомологни. У специјалном случају, када је $\psi = \partial\gamma$, где је $\gamma \in H$ којединични инвертибилни елемент, тада се твистовањем помоћу 2-коцикла $\partial\gamma$ добија Хопфова алгебра која је унутрашње аутоморфна са полазном Хопфовом алгебром H.*

Доказ. Како су ψ и χ кохомологни, они су повезани релацијом: $\psi = (\gamma\otimes\gamma)\chi\Delta\gamma^{-1}$. Дефинишимо пресликавање $f : H_\psi \to H_\chi$ као: $f(h) = \gamma^{-1}h\gamma$, за свако $h \in H_\psi$. Покажимо да је f изоморфизам Хопфових алгебри H_ψ и H_χ.

Како важи $f(hg) = \gamma^{-1}hg\gamma = \gamma^{-1}h\gamma\gamma^{-1}g\gamma = f(h)f(g)$ и $f(1) = \gamma^{-1}1\gamma = 1$, то је пресликавање f алгебарско пресликавање алгебре H_ψ на алебру H_χ.

Покажимо да је пресликавање f, такође, коалебарско пресликавање H_ψ на H_χ. Израчунајмо најпре:

$$\begin{aligned}\Delta_\psi(h) &= \psi\Delta(h)\psi^{-1}\\ &= (\gamma\otimes\gamma)\chi\Delta(\gamma^{-1})\Delta(h)\Delta(\gamma)\chi^{-1}(\gamma^{-1}\otimes\gamma^{-1})\\ &= (\gamma\otimes\gamma)\chi\Delta(\gamma^{-1}h\gamma)\chi^{-1}(\gamma^{-1}\otimes\gamma^{-1})\\ &= (\gamma\otimes\gamma)\Delta_\chi(\gamma^{-1}h\gamma)(\gamma^{-1}\otimes\gamma^{-1})\ . \qquad (D.22)\end{aligned}$$

Да би пресликавање f било коалгебарско пресликавање, треба да важи: $(f \otimes f)\Delta_\psi(h) = \Delta_\chi(f(h))$ и $\varepsilon_\chi(f(h)) = \varepsilon_\psi(h)$. Покажимо прву релацију:

$$\begin{aligned} (f \otimes f)\Delta_\psi(h) &= (\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1})\Delta_\psi(h)(\gamma \otimes \gamma) \\ &= (\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1})(\gamma \otimes \gamma)\Delta_\chi(\gamma^{-1}h\gamma)(\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1})(\gamma \otimes \gamma) \\ &= \Delta_\chi(f(h)) \ . \end{aligned} \tag{D.23}$$

Друга релација коалгебарског пресликавања следи из:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\chi(f(h)) &= \varepsilon(\gamma^{-1}h\gamma) \\ &= \varepsilon(\gamma^{-1})\varepsilon(h)\varepsilon(\gamma) \\ &= \varepsilon(h) = \varepsilon_\psi(h) \ . \end{aligned} \tag{D.24}$$

Још је потребно доказати да пресликавање f чува антипод, тј. да важи: $f(S_\psi(h)) = S_\chi(f(h))$. Антиподи S_ψ и S_χ су по теореми 1 дати изразима:

$$S_\psi(h) = U_\psi S(h) U_\psi^{-1} \ , \qquad S_\chi(h) = U_\chi S(h) U_\chi^{-1} \ , \tag{D.25}$$

где су $U_\psi = \psi^\alpha S(\psi_\alpha)$ и $U_\chi = \chi^\alpha S(\chi_\alpha)$. Нађимо везу између U_ψ и U_χ:

$$\begin{aligned} U_\psi &= \psi^\alpha S(\psi_\alpha) = \cdot(id \otimes S)\psi \\ &= \cdot(id \otimes S)((\gamma \otimes \gamma)\chi\Delta(\gamma^{-1})) \\ &= \cdot(id \otimes S)(\gamma\chi^\alpha\gamma^{-1}_{(1)} \otimes \gamma\chi_\alpha\gamma^{-1}_{(2)}) \\ &= \gamma\chi^\alpha\gamma^{-1}_{(1)}S(\gamma\chi_\alpha\gamma^{-1}_{(2)}) \\ &= \gamma\chi^\alpha\gamma^{-1}_{(1)}S(\gamma^{-1}_{(2)})S(\chi_\alpha)S(\gamma) \\ &= \gamma\chi^\alpha\varepsilon(\gamma^{-1})S(\chi_\alpha)S(\gamma) \\ &= \gamma U_\chi S(\gamma) \ . \end{aligned} \tag{D.26}$$

У претходном извођењу искористили смо дефиниције U_ψ и U_χ, везу ψ и χ, чињеницу да је антипод антиалгебарско пресликавање, аксиому антипода и којединичност инвертибилног елемента γ. Покажимо сада да пресликавање f чува антипод:

$$\begin{aligned} f(S_\psi(h)) &= \gamma^{-1}S_\psi(h)\gamma \\ &= \gamma^{-1}U_\psi S(h)U_\psi^{-1}\gamma \\ &= \gamma^{-1}\gamma U_\chi S(\gamma)S(h)S(\gamma^{-1})U_\chi^{-1}\gamma^{-1}\gamma \\ &= U_\chi S(\gamma^{-1}h\gamma)U_\chi^{-1} \\ &= S_\chi(f(h)) \ . \end{aligned} \tag{D.27}$$

Специјални случај $\psi = \partial\gamma$, добија се узимањем $\chi = 1 \otimes 1$, тада је: $\chi^\gamma = (\gamma \otimes \gamma)\Delta(\gamma^{-1}) = \partial\gamma = \psi$. $\square$

Литература

[1] B. Zwiebach, *A first course in string theory* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006).

[2] C. Rovelli, *Quantum gravity*Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Univ. Pr., Cambridge, UK, 2004).

[3] A. Hermann and K. V. Meyenn, *Wolfgang Pauli: Scientific Correspondence with Bohr, Einstein, Heisenberg* (Springer, New York, 1979).

[4] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).

[5] Yu. I. Manin, Commun. Math. Phys. **123**, 163 (1989).

[6] A. Connes, *Noncommutative geometry* (Academic Press, Boston, MA, 1994).

[7] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001), hep-th/0106048.

[8] R. J. Szabo, Phys. Rept. **378**, 207 (2003), hep-th/0109162.

[9] A. Connes, M. R. Douglas, and A. S. Schwarz, JHEP **02**, 003 (1998), hep-th/9711162.

[10] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **09**, 032 (1999), hep-th/9908142.

[11] P. Ramond, Phys. Rev. **D3**, 2415 (1971).

[12] A. Neveu and J. H. Schwarz, Phys. Rev. **D4**, 1109 (1971).

[13] Yu. A. Golfand and E. P. Likhtman, JETP Lett. **13**, 323 (1971).

[14] S. R. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159**, 1251 (1967).

[15] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, Nucl. Phys. **B88**, 257 (1975).

[16] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. **B70**, 39 (1974).

[17] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. **49B**, 52 (1974).

[18] A. Salam and J. A. Strathdee, Nucl. Phys. **B76**, 477 (1974).

[19] S. Ferrara, J. Wess, and B. Zumino, Phys. Lett. **51B**, 239 (1974).

[20] K. Fujikawa and W. Lang, Nucl. Phys. **B88**, 61 (1975).

[21] J. Iliopoulos and B. Zumino, Nucl. Phys. **B76**, 310 (1974).

[22] G. L. Kane and M. Shifman, editors, *The supersymmetric world: The beginning of the theory* (World Scientific, Singapore, 2000).

[23] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, Phys. Rev. **D13**, 3214 (1976).

[24] S. Deser, J. H. Kay, and K. S. Stelle, Phys. Rev. Lett. **38**, 527 (1977), 1506.03757.

[25] P. Kosinski, J. Lukierski, P. Maslanka, and J. Sobczyk, J. Phys. **A27**, 6827 (1994), hep-th/9405076.

[26] C.-S. Chu and F. Zamora, JHEP **02**, 022 (2000), hep-th/9912153.

[27] D. Klemm, S. Penati, and L. Tamassia, Class. Quant. Grav. **20**, 2905 (2003), hep-th/0104190.

[28] S. Ferrara, M. A. Lledo, and O. Macia, JHEP **09**, 068 (2003), hep-th/0307039.

[29] J. de Boer, P. A. Grassi, and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. **B574**, 98 (2003), hep-th/0302078.

[30] N. Seiberg, JHEP **06**, 010 (2003), hep-th/0305248.

[31] V. G. Drinfeld, Leningrad Math. J. **1**, 1419 (1990).

[32] V. G. Drinfeld, Leningrad Math. J. **2**, 829 (1991).

[33] V. G. Drinfeld, Funct. Anal. Appl. **26**, 63 (1992).

[34] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima, and A. Tureanu, Phys. Lett. **B604**, 98 (2004), hep-th/0408069.

[35] M. Chaichian, P. Presnajder, and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **94**, 151602 (2005), hep-th/0409096.

[36] B. M. Zupnik, Phys. Lett. **B627**, 208 (2005), hep-th/0506043.

[37] M. Ihl and C. Saemann, JHEP **01**, 065 (2006), hep-th/0506057.

[38] P. Aschieri *et al.*, Class. Quant. Grav. **22**, 3511 (2005), hep-th/0504183.

[39] P. Aschieri, M. Dimitrijevic, F. Meyer, S. Schraml, and J. Wess, Lett. Math. Phys. **78**, 61 (2006), hep-th/0603024.

[40] P. Matlock, Phys. Rev. **D71**, 126007 (2005), hep-th/0504084.

[41] D. V. Vassilevich, Mod. Phys. Lett. **A21**, 1279 (2006), hep-th/0602185.

[42] J. Wess and J. Bagger, *Superymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983).

[43] P. P. Srivastava, *Supersymmetry, superfields and supergravity: an introduction* (Adam Hilger, Bristol, 1986).

[44] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory* (Taylor Francis Group, New York, 1994).

[45] P. P. Srivastava, Phys. Lett. **132B**, 80 (1983).

[46] P. P. Srivastava, Phys. Lett. **149B**, 135 (1984).

[47] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, Reading, USA, 1995).

[48] W. Siegel, Phys. Lett. **84B**, 193 (1979).

[49] W. Siegel, Phys. Lett. **94B**, 37 (1980).

[50] M. T. Grisaru, W. Siegel, and M. Rocek, Nucl. Phys. **B159**, 429 (1979).

[51] M. E. Sweedler, *Hopf algebras* (W. A. Benjamin Inc., New York, 1969).

[52] E. Abe, *Hopf algebras* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).

[53] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

[54] S. Majid, *Foundations of quantum group theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[55] P. Aschieri, M. Dimitrijevic, F. Meyer, and J. Wess, Class. Quant. Grav. **23**, 1883 (2006), hep-th/0510059.

[56] M. Dimitrijevic and V. Radovanovic, JHEP **04**, 108 (2009), 0902.1864.

[57] M. Dimitrijevic, B. Nikolic, and V. Radovanovic, Phys. Rev. **D81**, 105020 (2010), 1001.2654.

[58] M. Dimitrijevic, V. Radovanovic, and J. Wess, JHEP **12**, 059 (2007), 0710.1746.

[59] M. Dimitrijevic, B. Nikolic, and V. Radovanovic, Phys. Rev. **D83**, 065010 (2011), 1101.5023.

[60] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972).

[61] M. T. Grisaru, S. Penati, and A. Romagnoni, JHEP **08**, 003 (2003), hep-th/0307099.

[62] A. Romagnoni, JHEP **10**, 016 (2003), hep-th/0307209.

[63] R. Britto and B. Feng, Phys. Rev. Lett. **91**, 201601 (2003), hep-th/0307165.

[64] S. W. MacDowell and F. Mansouri, Phys. Rev. Lett. **38**, 739 (1977), [Erratum: Phys. Rev. Lett.38,1376(1977)].

[65] P. K. Townsend, Phys. Rev. **D15**, 2795 (1977).

[66] K. S. Stelle and P. C. West, Phys. Rev. **D21**, 1466 (1980).

[67] M. Dimitrijević and V. Radovanovic, Phys. Rev. **D89**, 125021 (2014), 1404.4213.

[68] M. Dimitrijević Ćirić, B. Nikolić, and V. Radovanović, Phys. Rev. **D96**, 064029 (2017), 1612.00768.

[69] M. Dimitrijević Ćirić, B. Nikolić, and V. Radovanović, EPL **118**, 21002 (2017), 1609.06469.

[70] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Nuovo Cim. **B12**, 20 (1972).

[71] V. Radovanovic, *Problem book in quantum field theory* (Springer, Berlin, Germany, 2008).

Биографија

Биљана Николић рођена је у Београду, 9. децембра 1982. године. По завршетку Математичке гимназије 2001. године, уписала је Физички факултет Универзитета у Београду. У октобру 2006. године дипломирала је са просечном оценом 9.85. Исте године уписала је мастер студије на Физичком факултету, и завршила их у јуну 2008. године са просечном оценом 10.

Од маја 2009. године запослена је на Физичком факултету на пројекту Министарства науке, а у јуну 2010. изабрана је први пут у звање асистента на Физичком факултету. Држи вежбе на смеру теоријска и експериментална физика из предмета Физичка механика, Молекуларна физика и термодинамика, Електродинамика 1 и 2 и Теорија елементарних честица.

Објавила је као коаутор 6 радова у међународним часописима. Истраживачке теме којима се у тим радовима бавила су из области некомутативних теорија поља. Разматране су суперсиметричне некомутативне теорије, гравитација на некомутативном простору и некомутативна квантна електродинамика.

Говори енглески и руски језик.

Удата је, мајка је троје деце.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Биљана Д.Николић

број уписа D5/2008

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Суперсиметрична теорија поља на некомутативним просторима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 24.12.2018.

Биљана Николић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Биљана Николић

Број уписа D5/2008

Студијски програм Квантна поља,честице и гравитација

Наслов рада Суперсиметрична теорија поља на некомутативним просторима

Ментор проф.др Воја Радовановић

Потписани Биљана Николић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 24.12.2018.

Биљана Николић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Суперсиметрична теорија поља на некомутативним просторима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе свi који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

[✓ 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде]

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 24.12.2018.

Биљана Николић

1. **Ауторство** - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство - некомерцијално** – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство - некомерцијално** – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прераде**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство** - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.