УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Един Глогић

Границе за Кирхофов индекс графа

Докторска дисертација

Крагујевац, 2018.

Идентификациона страница докторске дисертације

Аутор

- Име и презиме: Един Глогић
- Датум и место рођења: 27.01.1988., Сјеница
- Запослење: асистент на Државном универзитету у Новом Пазару

Докторска дисертација

- Наслов: Границе за Кирхофов индекс графа
- Број страна: 86
- Број слика и табела: 6 слика, 0 табела
- Установа у којој је израђена: Природно-математички факултет, Крагујевац
- Научна област (УДК): Математика 51
- Ментор: др Игор Миловановић, редовни професор Електронског факултета Универзитета у Нишу

Оцена и одбрана

- Датум пријаве теме: 27.12.2017.
- Број одлуке и датум прихватања теме дисертације: IV-01-250/5, 11.04.2018.
- Комисија за оцену подобности теме и кандидата: број одлуке IV-01-1207/7, 11.01.2018.
    1. др Иван Гутман, професор емеритус Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, редовни члан САНУ (председник Комисије)
    2. др Игор Миловановић, редовни професор Електронског факултета Универзитета у Нишу
    3. др Бојана Боровићанин, доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу
- Комисија за оцену и одбрану дисертације: број одлуке IV-01-653/14, 12.09.2018.
    1. др Иван Гутман, професор емеритус Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, редовни члан САНУ (председник Комисије)
    2. др Марјан Матејић, доцент Електронског факултета Универзитета у Нишу
    3. др Бојана Боровићанин, доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу
- **Датум одбране докторске дисертације**:

Предговор

Теорија графова је релативно млада област математике. Највећи напредак постигнут је последњих деценија, захваљујући савременој рачунарској технологији. Граф је математичка структура која се користи при моделирању релација између објеката неког скупа.

Научна област којој припада ова дисертација је алгебарска теорија графова, тј. спектрална теорија графова. Спектрална теорија графова је нашла своју примену у решавању проблема у различитим научним и техничким дисциплинама, као што су, на пример, молекуларна хемија, физика, биоинформатика, теорија мрежа итд.

За теорију графова и примену од значаја су тополошки индекси (инваријанте) које су засноване на спектрима графа, метрици, степенима чворова и грана и слично. Први такав индекс, дефинисан као сума најкраћих путева између свих чворова, познат је под називом Винеров индекс. Њега је 1947. године дефинисао Харолд Винер (енг. Harold Wiener) [135]. Он је нашао значајну примену у другим научним дисциплинама, а нарочито у молекуларној хемији.

Инспирисани Винеровим индексом, а по аналогији са електричним мрежама, Клајн (енг. Klein) и Рандић су дефинисали Кирхофов индекс (енг. Kirchhoff index). Уместо најкраћих путева, у суми се користи растојање–отпорност (енг. resistance–distance) између чворова графа. Израчунавање ових величина веома је сложено, те је примена овако дефинисаног Кирхофовог индекса била веома ограничена. Решење овог проблема дошло је од стране Гутмана и Мохара који су 1996. године доказали да се Кирхофов индекс за повезане графове може израчунати као производ параметра n (број чворова) и суме реципрочних вредности Лапласових сопствених вредности графа [65](видети и [145]). Због добре оперативности ове формуле појавио се велики број радова у којима је проучаван Кирхофов индекс као и његова примена у проучавању молекуларних структура хемијских једињења. Са математичке тачке гледишта, највише су проучаване границе ове инваријанте које зависе од различитих параметара графа и других инваријанти, као и екстремне вредности на разним специјалним класама графова (стабло, уницикличнi, бициклични графови, итд).

Проучавање инваријанти графова, па самим тим и Кирхофовог индекса, је веома значајно за теорију графова, а ближе за спектралну теорију графова. Како се Кирхофов индекс може израчунати на основу Лапласовог спектра, увек је актуелно проучавати његов однос са другим инваријантама графа које су такође засноване на овом спектру. Веома је актуелно и проучавање односа Кирхофовог индекса и других тополошких индекса заснованих на степенима чворова и грана.

Предмет интересовања у овој дисертацији биће горње и доње границе за Кирхофов индекс. Границе ће бити систематизоване по класама у зависности од параметара и инваријанти од којих зависе. Циљ ће бити да се у свакој од класа установи оптимална граница, тј. до сада позната најбоља могућа граница. Затим би се приступило одређивању нових граница у зависности од других инваријанти, поготово тополошких индекса који су засновани на степенима чворова и грана. Биће урађена компарација нових резултата са познатим публикованим резултатима.

Доминантан метод који ће бити коришћен у дисертацији је аналитички. Поред доброг познавања особина Лапласовог спектра, као и других спектара графа, то захтева и добро познавање аналитичких неједнакости, поготово у реалном домену, и њихово комбиновање.

Дисертација садржи пет поглавља, од којих су нека подељена на известан број одељака.

У првом поглављу су наведене неке дискретне аналитичке неједнакости за реалне бројеве, које су неопходне за ову дисертацију.

У другом поглављу на почетку су уведени основни појмови који су везани за историјски развој теорије графова, затим су наведене основне формалне дефиниције и карактеристике из теорије графова, дефинисане одређене матрице које се могу придружити графу и дефинисан појам спектра графа. Наведени су неки тополошки индекси који су засновани на степенима чворова и грана, а који су од интереса за ову дисертацију. Затим, наведене су одређене графовске инваријанте које су засноване на Лапласовом спектру графа и на крају уведен појам Кирхофовог индекса и описане основне особине овог тополошког индекса.

У трећем поглављу су представљени резултати у вези са доњим границама за Кирхофов индекс графа. Наведени су познати резултати везани за добијање доњих граница за Кирхофов индекс, а затим су представљени нови резултати до којих се дошло у току рада на предложеној теми, од којих су неки публиковани у радовима [55, 98, 100, 105, 107, 109].

У четвртом поглављу су представљени резултати у вези са горњим границама за Кирхофов индекс графа. Наведени су познати резултати везани за добијање горњих граница за Кирхофов индекс, а затим су представљени нови резултати до којих се дошло у току рада на предложеној теми, од којих су неки публиковани у раду [105].

У петом поглављу су наведени резултати до којих се дошло у току рада на предложеној теми , а који се тичу релације између Кирхофовог индекса и Лапласове енергије графа, као и резултати који се односе на неке нове доње границе за Лапласову енергију графа, а који су проистекли из добијене релације [107].

Списак коришћене или цитиране литературе, који се састоји од 158 референци, дат је на крају дисертације.

⋆ ⋆ ⋆

Овом приликом посебно се захваљујем др Ивану Гутману, јер ми је сарадња са њим у току докторских студија била од велике помоћи. Велику захвалност дугујем свом ментору др Игору Миловановићу на несебичној помоћи и великој подршци коју ми је свакодневно пружао од почетка наше сарадње. Захваљујем се и др Бојани Боровићанин на великој помоћи и сарадњи током докторских студија. Такође захвалност дугујем и др Марјану Матејићу на корисним сугестијама и помоћи коју ми је пружао током писања докторске дисертације. Захвалност дугујем и др Ћемалу Долићанину, др Мирославу Петровићу и др Драгићу Банковићу на одличној сарадњи, помоћи и сугестијама при упису и током докторских студија.

На крају, најискреније се захваљујем својој породици, пријатељима и мени драгим људима који су од првог дана веровали у мене, на стрпљењу и пожртвованости коју су ми пружали свих ових година.

Крагујевац, октобар 2018. Един Глогић

Садржај

Листа слика

Глава 1

Аналитичке неједнакости за реалне низове

У овом одељку ће бити наведене неке дискретне аналитичке неједнакости за реалне бројеве, које су неопходне за ову дисертацију.

Лема 1.0.1. [111, 112] *Нека су* $a = (a_i)$ *и* $b = (b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *низови ненегативних реалних бројева, исте монотоности, и* $p = (p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *низ позитивних реалних бројева. Тада је*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i \, . \tag{1.1}$$

Ако су $a = (a_i)$ *и* $b = (b_i)$ *различитих монотоности у (1.1) важи супротна неједнакост.*
Једнакост у (1.1) важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ *или* $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ *.*

У раду [73](видети такође [111]) доказана је следећа генерализација неједнакости (1.1) .

Лема 1.0.2. [73] *Нека је* $p = (p_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *низ позитивних реалних бројева и нека су* $a = (a_i), b = (b_i), \ldots, c = (c_i)$, $i = 1, \ldots, n$, r *низова ненегативних реалних бројева исте монотоности. Тада је*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^{r-1} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \cdots c_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i \cdots \sum_{i=1}^{n} p_i c_i \, . \tag{1.2}$$

Једнакост важи ако и само ако су $r-1$ *низова константни.*

У поменутом раду [111] доказана је следећа генерализација неједнакости (1.1) .

Лема 1.0.3. [111] *Нека је* $p = (p_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *низ позитивних реалних бројева и* $a = (a_i)$, $b = (b_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *низови ненегативних реалних бројева исте монотоности. Тада је*

(1.3)
$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i \sum\limits_{i=1}^{n} p_i b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \geq \sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i b_i - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i a_i \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i} \geq \cdots \geq \frac{p_1 p_2 (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)}{p_1 + p_2} \geq 0\,.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ *или* $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Лема 1.0.4. [124] *Нека су* $a = (a_i)$ *и* $p = (p_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *низови позитивних реалних бројева, са особинама* $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ *и* $0 < r \leq a_i \leq R < +\infty$, $r, R \in \mathbb{R}$. *Тада је*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i + rR \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i} \leq r + R\,. \tag{1.4}$$

Једнакост важи ако и само ако је $R = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = r$ *или је за неко* k, $1 \leq k \leq n-1$, $R = a_1 = a_2 = \cdots = a_k \geq a_{k+1} = \cdots = a_n = r$.

Лема 1.0.5. [131] *Нека је* $a = (a_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *низ ненегативних реалних бројева, такав да је* $0 < r \leq a_i \leq R < +\infty$, $r, R \in \mathbb{R}$. *Тада је*

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \geq \frac{n}{2} (R - r)^2\,. \tag{1.5}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a_1 = R$, $a_n = r$ *и* $a_2 = \cdots = a_{n-1} = \frac{r+R}{2}$.

За два низа реалних бројева $a = (a_i)$ и $b = (b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, кажемо да су истог уређења ако и само ако за сваки пар (i, j), $i, j = 1, 2, \ldots, n$, важи да је $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$.

Нека су дати скупови $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $J_k \subset I$, $1 < i_1 < \cdots < i_k < n$, $0 \leq k \leq n-2$, $J_0 = \emptyset$, $I_{n-k} = I - J_k$, где је $I_n = I$, $I_2 = \{1, n\}$ и $I_1 = \{1\}$.

Нека су $a = (a_i)$ и $p = (p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, низови ненегативних реалних бројева. Тежинска средина реда r, низа $a = (a_i)$ у односу на низ $p = (p_i)$, дефинисана је са

$$M_r(a, p; I) = \left(\frac{\sum\limits_{i \in I} p_i a_i^r}{\sum\limits_{i \in I} p_i} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

У раду [69] доказана је следећа генерализација неједнакости (1.5).

Лема 1.0.6. [69] *Нека су* $a = (a_i)$ *и* $b = (b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *низови ненегативних реалних бројева исте монотоности и* $p = (p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *низ позитивних реалних бројева. Ако су парови* $M_1(a, p; I - I_2)$, $M_1(a, p; I_2)$ *и* $M_1(b, p; I - I_2)$, $M_1(b, p; I_2)$ *истог уређења, тада је*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i \geq \frac{p_1 p_n (a_1 - a_n)(b_1 - b_n)}{p_1 + p_n} \sum_{i=1}^{n} p_i \, . \tag{1.6}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = \frac{a_1+a_n}{2}$ *или* $b_2 = b_3 = \cdots = b_{n-1} = \frac{b_1+b_n}{2}$.

Лема 1.0.7. [76] *Нека су* $p = (p_i)$ *и* $a = (a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *низови позитивних реалних бројева са особинама* $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ *и* $0 < r \leq a_i \leq R < +\infty$, $r, R \in \mathbb{R}$. *Тада је*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i} \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{R}{r}} + \sqrt{\frac{r}{R}} \right)^2 \, . \tag{1.7}$$

Једнакост важи ако и само ако је $R = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = r$.

У раду [95] је доказана следећа генерализација неједнакости (1.7).

Лема 1.0.8. [95] *Нека је* $a = (a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *низ позитивних реалних бројева са особином* $0 < r \leq a_i \leq R < +\infty$, $r, R \in \mathbb{R}$. *Тада је*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq \left(1 + \alpha(n) \left(\sqrt{\frac{R}{r}} - \sqrt{\frac{r}{R}} \right)^2 \right) n^2 \, , \tag{1.8}$$

где је $\alpha(n) = \dfrac{1}{n} \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \left(1 - \dfrac{1}{n} \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \right) = \dfrac{1}{4} \left(1 - \dfrac{(-1)^{n+1} + 1}{2n^2} \right)$.
Једнакост важи ако и само ако је $R = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = r$ *или је* $R = a_1 = a_2 = \cdots = a_k \geq a_{k+1} = \cdots = a_n = r$, $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Лема 1.0.9. *Нека су* $p = (p_i)$ *и* $a = (a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *низови позитивних реалних бројева. Тада за свако* r, $r \leq 0$ *или* $r \geq 1$, *важи неједнакост*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right)^{r-1} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^r \geq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \right)^r \, . \tag{1.9}$$

За $0 \leq r \leq 1$ *у (1.9) важи супротна неједнакост.*
Једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Неједнакост (1.9) је позната под називом Јенсенова неједнакост (видети [112]).

У раду [25] доказан је већи број неједнакости између аритметичке и геометријске средине, као и између аритметичке и хармонијске средине позитивних реалних бројева. Биће наведене неке последице ових неједнакости, које су неопходне за ову дисертацију.

Лема 1.0.10. [25] *Нека су* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ *реални бројеви. Тада је*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - n\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n}\right)^2 . \tag{1.10}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = \sqrt{a_1 a_n}$.

Лема 1.0.11. [25] *Нека су* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ *реални бројеви. Тада је*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geq \left(\frac{\sqrt{a_1/a_n} + \sqrt{a_n/a_1}}{2}\right)^{\frac{2}{n}} . \tag{1.11}$$

Једнакост важи за $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Везе између аритметичке и геометријске средине позитивних реалних бројева разматране су у раду [81] (видети такође [148]) .

Лема 1.0.12. [81] *Нека је* $a = (a_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *низ позитивних реалних бројева. Тада је*

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i + n\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\frac{1}{n}} \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\Big)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i + n(n-1)\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\frac{1}{n}} . \tag{1.12}$$

Једнакости важе ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Лема 1.0.13. [122] *Нека су* $x = (x_i)$, *и* $a = (a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ *два низа позитивних реалних бројева. Тада за свако* $r \geq 0$ *важи неједнакост*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^{r+1}}{a_i^r} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right)^{r+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\right)} , \tag{1.13}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \cdots = \dfrac{x_m}{a_m}$.

Лема 1.0.14. [17] *Нека су* $a = (a_i)$, *и* $b = (b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *низови реалних бројева, са особинама* $r_1 \leq a_i \leq R_1 < +\infty$ *и* $r_2 \leq b_i \leq R_2 < +\infty$. *Тада је*

$$\left| n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \right| \leq n^2 (R_1 - r_1)(R_2 - r_2)\alpha(n), \tag{1.14}$$

где је

$$\alpha(n) = \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(1 - \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1} + 1}{2n^2}\right).$$

Једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ *или* $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

У раду [2] доказана је следећа генерализација неједнакости (1.14).

Лема 1.0.15. [2] *Нека су* $p=(p_i)$, $a=(a_i)$ *и* $b=(b_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, *низови позитивних реалних бројева, са особинама* $0<r_1\leq a_i\leq R_1<+\infty$ *и* $0<r_2\leq b_i\leq R_2<+\infty$. *Нека је* S *подскуп од* $I_n=\{1,2,...,n\}$ *за који се минимизира израз*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{i=1}^{n}p_ia_ib_i-\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\sum_{i=1}^{n}p_ib_i\right|\leq\beta(S)\,(R_1-r_1)(R_2-r_2)\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^2, \tag{1.15}$$

где је

$$\beta(S)=\frac{\sum\limits_{i\in S}p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\left(1-\frac{\sum\limits_{i\in S}p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\right).$$

Једнакост важи ако и само ако је $a_1=a_2=\cdots=a_n$ *или* $b_1=b_2=\cdots=b_n$.

Лема 1.0.16. [24] *Нека су* $p=(p_i)$ *и* $a=(a_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, *низови реалних бројева такви да је* $p_i\geq 0$, $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ *и* $r\leq a_i\leq R$. *Тада важи следећа неједнакост*

$$0\leq\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\right)^2\leq\frac{1}{2}(R-r)\sum_{i=1}^{n}p_i\left|a_i-\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\right|. \tag{1.16}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Глава 2

Основни појмови из теорије графова

2.1 Уводне напомене о скупу

За разумевање и усвајање основних појмова из теорије графова неопходна су предзнања из теорије скупова.

Фундаментални појмови у теорији скупова су скуп и елемент скупа и они се не дефинишу. Интуитивно се подразумева, мада интуиција може и да превари, да је скуп произвољна, лепо описана, свеукупност објеката који су тог тренутка предмет интересовања. Да би се поменута интуитивност у схватању појмова скуп и елемент скупа боље разумела, биће наведено размишљање немачког математичара Дедикинда (енг. Julius Wilhelm Dedikind), на ову тему:

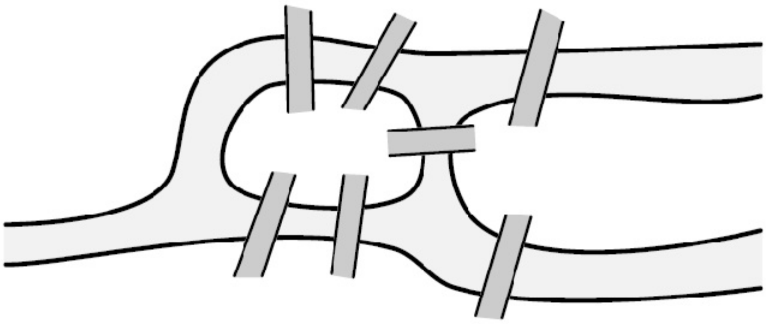
> ” Ствар је сваки предмет нашег размишљања. Да бисмо комотније говорили о стварима обележавамо их симболима, на пример словима. Када говоримо о a мислимо на ствар a, а не на слово a. Једна ствар је потпуно одређена свим оним што ће о њој бити речено и исказано. Често се дешава да се, из неког разлога, различите ствари $a, b, c, ...$, обухватају једним заједничким гледиштем, да се у уму оне удружују и тада се каже да оне образују један систем S, тј. скуп. Ствари $a, b, c, ...$, се зову елементима скупа S и они су садржани у S. Обрнуто, S се састоји од тих елемената. Један такав скуп је као предмет нашег размишљања такође нека ствар”.

Да би се појмовно граф разликовао од својих ”рођака”, неопходно је да се познаје разлика између скупа и његових сродника, бар од оних основних, колекције и фамилије. Важно је да у скупу нема понављања елемената. У противном би то била колекција. Такође, елемент скупа не може бити неки други скуп. У противном би то била фамилија.

Ако скуп A, или њему сродна структура, садржи коначан број елемената назива се коначним. У противном је бесконачан. Број елемената структуре A, ако је коначан, тј. кардиналност ако је бесконачан, означава се са $|A|$. Предмет интересовања у овом раду су коначни скупови.

2.2 Важни моменти у развоју теорије графова

Мотиви за настанак и развој неке математичке дисциплине могу бити веома различити. Тако, на пример, теорија бројева, чије порекло датира од самог зачетка људског рода, настала је због основне потребе човека да нешто изброји или измери. Нумеричка математика настанак и развој дугује развоју технике, јер за бројна неопходна израчунавања у класичној математици не постоји одговарајући апарат. Вероватноћа и статистика су настали као плод људске жеље за брзим богаћењем на лак начин. Свој настанак свакако дугују појави коцкарница, лутрија, игара на срећу и слично. За теорију графова, мада то важи и за топологију, може се рећи да свој зачетак, али и развој, дугују људској потреби за разонодом која укључује и решавање логичко-рекреативних задатака. Рађање теорије графова, а и топологије, јер су настале истовремено, директно је везано за, без премца највећег математичког генија, Леонарда Ојлера (енг. Leonhard Euler). Данашњи руски град Калињинград, који се у Ојлерово доба звао Кенигсберг и припадао Источној Пруској, смештен је на ушћу реке Прегел у Балтичко море. На реци се налазе два насељена острва, која су међусобно и са обалама, повезана са седам мостова. Прича се да се међу интелектуалцима појавило питање да ли је могуће у једној шетњи прећи преко свих седам мостова а да се при том ни један мост не прелази два или више пута. Овај проблем познат је у литератури под називом *Проблем Кенигсбершких мостова.*



Слика 2.1: Проблем Кенигсбершких мостова.

Постоје мишљења да је овај проблем измислио сам Ојлер, што није тако важно, али га је он решио. Одговор је *не*, али оно што је најбитније је начин на који је Ојлер дошао до овог одговора. Он је увео нови математички појам *ГРАФ* и разрадио математички апарат за рад са графовима. Своје решење је саопштио у Санкт Петерсбуршкој Академији наука 26. августа 1735. године. Овај дан је датум рођења две нове математичке дисциплине - теорије графова и топологије. Треба напоменути да су графови и рад са њима одушевили Ојлера, те им је посветио значајан део свог научног рада.

У развоју теорије графова значајну улогу имало је решавање различитих логичко-рекреативних задатака. Биће наведени само неки од њих.

Проблем осам дама
Проблем гласи овако: "На колико различитих начина може да се распореди осам дама (краљица) на шаховској табли (8×8), тако да се никоје две међусобно не угрожавају ". Решење овог задатка, које гласи 92 даме, дао је немачки математичар Наук(нем. Franz Nauck) 1850. године. Интересантно је да се решавањем овог задатка бавио и велики немачки математичар Гаус(нем. Carl Friedrich Gauss), али је пронашао само 72 решења. Треба напоменути да је решење овог задатка уско везано са проблемима везаним за унутрашњу и спољашњу стабилност графова.

Проблем трговачког путника
Трговачки путник полази из места боравка, обилази све предвиђене градове и враћа се у место боравка. Треба одредити маршруту тако да у сваком граду борави само једном и да је цена превоза минимална. Решавање овог задатка, а своди се на проналажење Хамилтонових циклуса, због актуелности у разним сферама науке и људског живота, и данас окупира пажњу великог броја истраживача. На жалост, у општем случају не постоји теорема која даје потребне и довољне услове за егзистенцију Хамилтоновог циклуса. Самим тим не постоји ни алгоритам који би одређивао Хамилтонов циклус минималне дужине у датом тежинском графу.

Проблем четири боје
Дата је географска карта, или њен део, на којој су уцртане државе. Свака држава састоји се само од једне регије на карти, а не од више неповезаних области. Треба обојити ову карту помоћу четири боје тако да никоје две суседне државе не буду обојене истом бојом. Решавање овог задатка има веома интересантну историју. Коначно су тек 1976. године овај задатак решили амерички математичари.

Проблем три куће и три бунара
Три куће треба повезати стазама са три бунара, при чему се стазе не смеју укрштати. Решење овог задатка, које је доказ да тражено повезивање не постоји, а до кога је дошао пољски математичар Куратовски(пољ. Kazimierz Kuratowski), омогућило му је да формулише теорему која даје потребне и довољне услове за егзистенцију планарних графова.

2.3 Појам графа

Интуитивно, "граф" је скуп тачака, коначан или бесконачан, у равни (простору, на сфери и слично), при чему неке могу бити међусобно повезане линијама. Ове тачке се називају чворовима (врховима, теменима), а линије гранама (потезима, бридовима, луковима) графа.

Чворови се најчешће означавају малим словима неког алфабета, индексираним или не, природним бројевима, као на пример $\{a, b, \ldots\}$, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ или $\{1, 2, \ldots\}$, затим промењљивама, кодовима, неким симболима, као на пример $\{\circ, \triangle, \square, \diamond, \ldots\}$, или се уопште не означавају.

Гране графа се поред словних ознака, ако се уопште означавају, представљају помоћу ознака чворова које повезују. Могу бити оријентисане или неоријентисане. Ако неоријентисана грана l повезује чворове a и b, представља се помоћу неуређеног пара $l = \{a, b\}$. Ако оријентисана грана l полази из чвора a а завршава у чвору b, тада се она представља помоћу уређеног пара $l = (a, b)$. Грана која повезује чвор a са самим собом назива се петљом. За петљу није важно да ли се она представља као оријентисана или неоријентисана, а означава се са $l = (a, a) = \{a, a\}$. Гране $l_1 = (a, b)$ и $l_2 = (b, a)$ се називају паралелне гране.

Дефиниција 2.3.1. *Нека је $V, V \neq \emptyset$, дати скуп и E колекција неуређених (уређених, мешовитих) парова елемената из V. Уређени пар $G = (V, E)$ назива се неоријентисани (оријентисани, мешовити)* ***псеудограф.*** *Елементи скупа V су чворови, а колекције E су гране.*

Дефиниција 2.3.2. *Неоријентисани (оријентисани, мешовити) псеудограф који не садржи петље назива се (оријентисани, мешовити)* ***мултиграф.***

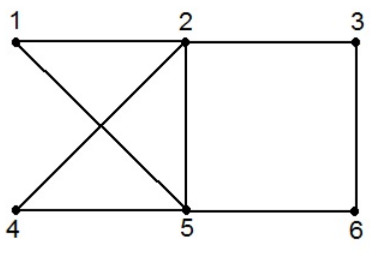
Дефиниција 2.3.3. *Нека је V непразан скуп и E скуп неуређених (уређених, мешовитих) парова из V. Уређени пар $G = (V, E)$ назива се* ***граф*** *(оријентисани, мешовити).*

Треба приметити да се за неоријентисане графове без петљи и вишеструких грана, а они су предмет интересовања у овој дисертацији, користи само назив граф (или прост граф).

Дефиниција 2.3.4. *Нека је V непразан скуп и E фамилија над њим. Тада се уређени пар $G = (V, E)$ назива* ***хиперграф****.*

2.4 Степени чворова. Путеви у графу. Матрице. Изоморфизам

Нека је граф $G = (V, E)$ дефинисан скупом чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и скупом грана $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Број чворова графа G је $n = |V|$ и тај број одређује његов ред. Број грана графа G је $m = |E|$.



Слика 2.2: Пример графа са 6 чворова и 8 грана.

Дефиниција 2.4.1. *Два чвора графа v_i и v_j су суседна ако су спојена граном $e = v_i v_j$. Користи се и ознака $v_i \sim v_j$. Под околином чвора $v_i \in V$ графа $G = (V, E)$ (енг. neighborhood) подразумева се скуп $N(v_i) = \{v_j \in V : v_i \sim v_j\}$ суседа чвора v_i. Степен чвора v_i (енг. degree) је број суседа чвора v_i, $d_i = d(v_i) = |N(v_i)|$.*

Најмањи степен чвора графа G је $\delta = \delta(G) = \min\limits_{v_i \in V} d(v_i)$, а највећи степен чвора графа G је $\Delta = \Delta(G) = \max\limits_{v_i \in V} d(v_i)$. Други најмањи степен чвора је δ_2, а други највећи степен чвора је Δ_2 и тако редом.

Дефиниција 2.4.2. *Средњи степен чворова графа $G = (V, E)$ (енг. average degree), у ознаци $d(G)$, дефинише се са*

$$d(G) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} d(v_i)}{n} \; .$$

Важе следеће неједнакости

$$0 \leq \delta \leq d(G) \leq \Delta \leq n - 1 \; .$$

За однос броја грана и броја чворова, тј. њихових степена, у датом графу $G = (V, E)$ важи следећи резултат.

Теорема 2.4.1. *За дати граф $G = (V, E)$, важи да је*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m \; .$$

Важно је уочити да је на десној страни у претходној једнакости паран број, $2m$, па мора бити и на левој, одакле произилази следећа једноставна последица теореме 2.4.1.

Последица 2.4.1. *Број чворова непарног степена у графу је паран број.*

Дефиниција 2.4.3. *Граф $G = (V, E)$ је r-регуларан, $r \geq 0$, или степена регуларности r, ако за свако i, $i = 1, 2, \ldots, n$, важи једнакост $d(v_i) = r$. Максимални степен регуларности је $r = n-1$. Такав граф се назива комплетним. Комплетан граф са n чворова је граф K_n, $n \in \mathbb{N}$.*

Ако је дати граф $G = (V, E)$ r-регуларан, тада важи једнакост

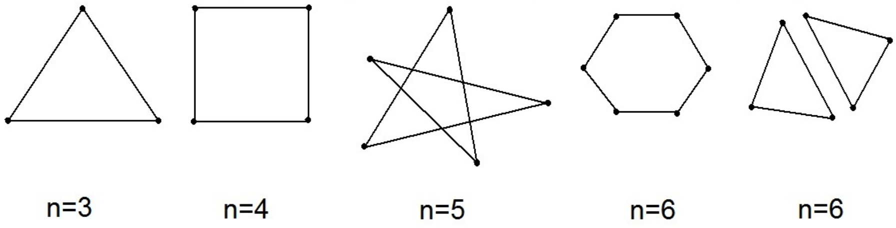
$$m = \frac{r \cdot n}{2} \; .$$

Важно је уочити у претходној једнакости, због чињенице да параметар m мора бити природан број, следи да бар један од параметара r или n мора бити паран број. То значи да за произвољне параметре r и n не мора да постоји r-регуларан граф. Ако је дати граф $G = (V, E)$ r-регуларан, тада краће пишемо G_r.

Ако је дати граф $G = (V, E)$ комплетан граф K_n, тада важи једнакост

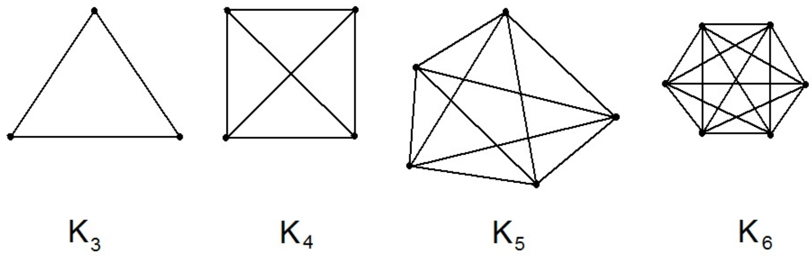
$$m = \frac{n(n-1)}{2} \; .$$

На следећој слици су приказани 2-регуларни графови за $n = 3, 4, 5$ и 6.



Слика 2.3: Примери 2-регуларних графова.

На следећој слици су приказани комплетни графови за $n = 3, 4, 5$ и 6.



Слика 2.4: Примери комплетних графова.

Дефиниција 2.4.4. *Граф $G' = (V', E')$ је подграф (енг. subgraph) графа $G = (V, E)$, ако важи $V' \subseteq V$ и $E' \subset E$. Граф $G' = (V', E')$ је индуковани подграф (енг. induced subgraph) графа $G = (V, E)$, ако важи $V' \subseteq V$ и $E' = E \cap \binom{V'}{2}$.*

Дефиниција 2.4.5. *Шетња (енг. walk) W дужине k у графу $G = (V, E)$ је низ $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$ чворова и грана тако да је $e_i = v_{i-1}v_i$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Чворови v_0 и v_k су крајњи чворови шетње W. Шетња је затворена уколико је $v_0 = v_k$. Стаза (енг. trail) је шетња у којој се ниједна грана не понавља. Пут (енг. path) је шетња у којој се ниједан чвор не понавља. Пут са n чворова означавамо са P_n. Контура (циклус) (енг. cycle) је затворена стаза у којој се ниједан чвор не понавља, изузев првог и последњег. Контуру са n чворова означавамо са C_n.*

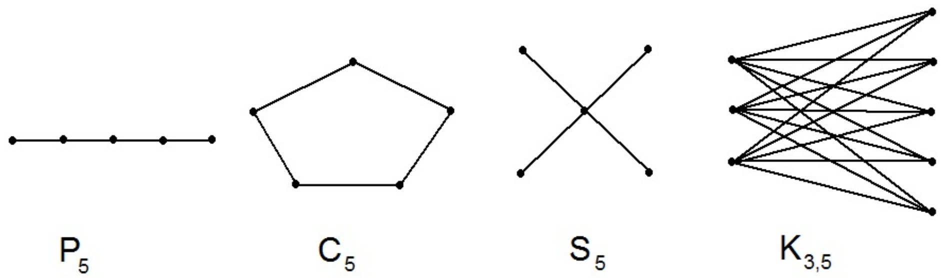
Дефиниција 2.4.6. *Чворови u и v у графу $G = (V, E)$ су повезани ако у G постоји пут чији су крајњи чворови u и v. За граф G се каже да је повезан (енг. connected) ако су свака два његова чвора повезана - у супротном је граф неповезан и може се поделити на компоненте повезаности.*

Дефиниција 2.4.7. *Ако су чворови u и v графа G повезани, тада је растојање, $d(u, v)$, од чвора u до чвора v једнако дужини најкраћег пута између чворова u и v. Ексцентрицитет чвора v је једнак максималном растојању од v до свих осталих чворова, $\varepsilon(v) = \max\limits_{u \in V} d(u, v)$. Дијаметар графа G је највеће растојање између нека два чвора графа, $diam(G) = \max\limits_{u,v \in V} d(u, v)$, док се радијус графа G дефинише као најмањи ексцентрицитет међу чворовима, $r(G) = \min\limits_{v \in V} \varepsilon(v)$. Број парова чворова графа G чије је растојање једнако k означавамо са $d(G, k)$.*

Дефиниција 2.4.8. *Граф $G = (V, E)$ је бипартитан (енг. bipartite graph) ако постоји партиција $\{A, B\}$ скупа чворова $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, тако да за сваку грану $e \in E$ важи да она спаја чвор из A са чвором из B. Комплетан бипартитан граф је прост граф с партицијом $\{A, B\}$, при чему је $|A| = a$ и $|B| = b$, у ознаци $K_{a,b}$, у којем је сваки чвор из партиције A спојен са сваким чвором из партиције B. Комплетан бипартитан граф, $K_{1,n-1}$, је звезда (енг. star) у ознаци S_n . Граф G је планаран (енг. planar) ако се може нацртати у равни, тако да се никоје две гране не секу.*

Дефиниција 2.4.9. (r_1, r_2)*-семирегуларан бипартитан граф, са параметрима (n_1, n_2, r_1, r_2), јесте бипартитан граф са партицијом $\{A, B\}$, такав да партиција A садржи n_1 чворова, партиција B садржи n_2 чворова и при чему сви чворови који припадају истој партицији имају исти степен(чворови који припадају партицији A су степена r_1, а чворови који припадају партицији B су степена r_2). Очигледно је да тада важи да је $n_1 r_1 = n_2 r_2$.*

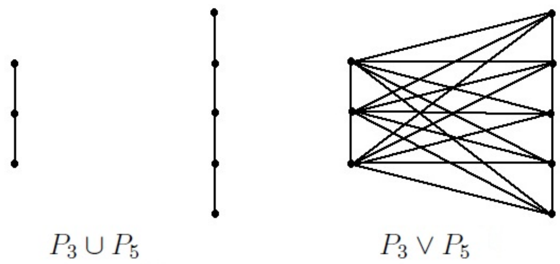
На следећој слици су приказани графови P_5, C_5, S_5, $K_{3,5}$.



Слика 2.5: Графови P_5, C_5, S_5, $K_{3,5}$.

Дефиниција 2.4.10. *Унија графова $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ је граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Спајање (енг. join) графова $G_1 \vee G_2$ се добија од графа $G_1 \cup G_2$, тако што спојимо граном сваки чвор из графа G_1 са сваким чвором из G_2. Комплемент $\overline{G}$ графа $G = (V, E)$ је граф $\overline{G} = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$, дакле он садржи тачно оне гране које нису садржане у графу G, тј. граф $\overline{G}$ има n чворова и $\overline{m} = \binom{n}{2} - m$ грана.*

На следећој слици је приказана унија и спајање графова P_3 и P_5 .



Слика 2.6: Унија и спајање графова P_3 и P_5 .

Дефиниција 2.4.11. *Нека је G прост граф, $v \in V$ произвољан чвор и $e = uv$ произвољна грана тог графа. Граф $G' = G - v$ је добијен брисањем чвора v и свих грана које су суседне са њим. Граф $G - e$ добијамо када из графа G уклонимо грану $e = uv$.*

Дефиниција 2.4.12. *Повезан граф без циклуса назива се стабло (енг. tree). Граф који не садржи циклусе, тј. граф чија је свака компонента повезаности стабло, назива се шума (енг. forest). Чвор степена 1 у графу G назива се лист или висећи чвор (енг. pendant vertex).*

Дефиниција 2.4.13. *Разапињуће(спрежно) стабло $T = (V, E')$ (енг. spanning tree) је подграф графа $G = (V, E)$, који је стабло и садржи све његове чворове и неке његове гране, тј. $E' \subseteq E$.*

Дефиниција 2.4.14. *Граф је уницикличан ако је повезан и садржи тачно један циклус, односно n грана. Граф је бицикличан ако је повезан и садржи тачно два циклуса, односно $n + 1$ грану.*

Дефиниција 2.4.15. *Граф G је чворно k-повезан, ако не постоји скуп од $k-1$ чворова чијим се уклањањем граф распада на неколико компоненти (односно, каже се да је чворна повезаност графа $\geq k$). Чвор $v \in V$ графа G зе назива артикулациони чвор (енг. articulation vertex) ако $G - v$ има више компоненти повезаности од G. Грана $e \in E$ графа G се назива мост (енг. bridge), ако $G - e$ има више компоненти повезаности од G.*

Дефиниција 2.4.16. *Нека су дати графови $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$. Каже се да је граф G изоморфан са графом G', у ознаци $G \cong G'$, ако постоји бијекција $\phi : V \to V'$, таква да је $uv \in E$ ако и само ако је $\phi(u)\phi(v) \in E'$, за свака два чвора $u, v \in V$.*

Дефиниција 2.4.17. *Нека је $I = I(G)$ математички објекат (број, матрица, полином, вектор, група,...) који се на неки начин придружује графу G. Ако је задовољен услов да за свака два изоморфна графа G_1 и G_2 важи $I(G_1) = I(G_2)$, онда се каже да је I инваријанта графа или да је I графовска инваријанта.*

Датом графу G могу се придружити одређене матрице која садрже информације о структури тог графа. Неке од матрица које су највише проучаване у литератури, а и које су предмет интересовања у овој дисертацији, су матрица суседства, Лапласова матрица, нормализована и ненегативна Лапласова матрица.

Дефиниција 2.4.18. *Матрица суседства графа $G = (V, E)$, $A = A(G)$, је квадратна матрица реда n, са елементима a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, који су дефинисани са*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\,, & v_i \sim v_j\,, \\ 0\,, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Дефиниција 2.4.19. *Нека је $G = (V, E)$ граф са n чворова и m грана. Нека су $d_1, d_2, \ldots, d_n$ степени његових чворова. Дијагонална матрица, $D = D(G)$, графа G је квадратна матрица реда n, таква да је $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.*

Дефиниција 2.4.20. *Нека је $G = (V, E)$ граф са n чворова и m грана. Лапласова матрица, $L = L(G)$, је матрица чији су елементи l_{ij} дефинисани са*

$$l_{ij} = \begin{cases} -1\,, & v_i \sim v_j\,,\ i \neq j\,, \\ 0\,, & v_i \nsim v_j\,,\ i \neq j\,, \\ d_i\,, & i = j\,. \end{cases}$$

Лапласова матрица се може дефинисати и као $L = D - A$. Лапласова матрица L графа G се некада назива и Кирхофова матрица графа G (енг. Kirchhoff matrix).

Дефиниција 2.4.21. *Нека је $G = (V, E)$ граф са n чворова и m грана, при чему граф G не садржи изоловане чворове. Нормализована Лапласова матрица, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$, се дефинише као*

$$\mathcal{L} = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}(D - A)D^{-\frac{1}{2}} = I - D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Дефиниција нормализоване Лапласове матрице се може проширити на све графове, $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{ij})$, где је

$$\mathcal{L}_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i = j\,,\ d_i \neq 0\,, \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}\,, & v_i \sim v_j\,, \\ 0\,, & \text{иначе}\,. \end{cases}$$

Дефиниција 2.4.22. *Нека је $G = (V, E)$ граф са n чворова и m грана. Ненегативна Лапласова матрица графа, $Q = Q(G)$, је матрица $Q = D + A$.*

Илустрације ради, за граф са слике 2.2, матрице A, L, $\mathcal{L}$ и Q су дате редом са

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.5 Спектри графа

У овом одељку биће дати неки основни појмови који се односе на спектре графа [11, 26].

Дефиниција 2.5.1. *Сопствена вредност (енг. eigenvalue) матрице A је реалан број λ, ако матрична једначина*

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \ ,$$

има нетривијално решење, које се назива сопствени вектор (енг. eigenvector). Сопствене вредности графа су сопствене вредности његове матрице суседства.

Спектар графа (енг. graph spectrum) је скуп сопствених вредности матрице суседства, заједно са њиховим алгебарским вишеструкостима. Вишеструкост сопствене вредности λ је једнака $n - rang(\lambda I - A)$, где смо са I означили јединичну матрицу реда n. Са $\lambda_i^{(m_i)}$ биће означена сопствена вредност λ_i чија је вишеструкост једнака m_i.

Ако су $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m$ различите сопствене вредности матрице A, чије су вишеструкости k_1, k_2, ..., k_m редом, тада спектар графа означавамо са

$$Spec_G = \left\{ \lambda_1^{(k_1)},\ \lambda_2^{(k_2)}, \ldots, \lambda_m^{(k_m)} \right\} .$$

Сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ су нуле карактеристичног полинома (енг. characteristic polynomial) матрице A

$$P_A(x) = det(xI - A) = (-1)^n det(A - xI) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i) \ .$$

Како је $P_A(x)$ моничан полином са целобројним коефицијентима, све његове рационалне нуле су целобројне, па су сопствене вредности матрице суседства или ирационалне или целобројне. У дисертацији ће са $P_G(x)$ бити означен карактеристични полином матрице суседства графа G. Два графа су коспектрална ако њихове матрице суседства имају исте сопствене вредности. Коспектрални графови не морају да буду изоморфни, али су изоморфни графови увек коспектрални.

Теорема 2.5.1. *Сличне матрице A и B имају исте карактеристичне полиноме. Обрнуто не важи.*

Теорема 2.5.2. *(**Спектрална теорема**) Реална симетрична матрица A има само реалне сопствене вредности и n ортонормираних сопствених вектора.*

Ако је λ сопствена вредност матрице A, тада је скуп $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}$ потпростор од $\mathbb{R}^n$, који се назива *простор сопствене вредности* λ и означава се са $\varepsilon(\lambda)$ или $\varepsilon_A(\lambda)$. Такав потпростор се назива *простор сопствене вредности* графа G. Наравно, пренумерисање чворова у графу G има за резултат пермутацију координата у том потпростору. Димензија од $\varepsilon(\lambda)$ је једнака мултиплицитету тј. вишеструкости сопствене вредности λ као корена од $P_G(x)$. Проста сопствена вредност је сопствена вредност вишеструкости 1.

Ако су елементи симетричне матрице реални бројеви, тада су и њене сопствене вредности реални бројеви. Ако је потребно, користи се ознака $\lambda_i = \lambda_i(G)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Највећа сопствена вредност $\lambda_1(G)$ се назива *индекс* графа G.

За цео број $k \geq 0$, k-ти *спектрални момент* графа G у ознаци s_k је

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \, .$$

Спектрални момент s_k представља траг матрице A^k и првих n спектралних момената одређује спектар графа G.

Релација $A \cdot x = \lambda \cdot x$ може бити интерпретирана и на следећи начин. Ако је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, тада је

$$\lambda \cdot x_u = \sum_{u \sim v} x_v \quad (u = 1, 2, \ldots, n) \, ,$$

где се сумирање врши по свим суседима v чвора u.

Дефиниција 2.5.2. *За симетричну матрицу M реда $n \times n$ (са реалним елементима) кажемо да је позитивна семидефинитна, ако су све њене сопствене вредности ненегативне, односно, ако је $x^T M x \geq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}^n$.*

Неке битне особине позитивно семидефинитне матрице дате су у следећим двема теоремама.

Теорема 2.5.3. *Ако постоји матрица B таква да је $A = B^T B$, тада је матрица A позитивна семидефинитна.*

Теорема 2.5.4. *Ако је матрица A позитивна семидефинитна, онда су све њене сопствене вредности ненегативне.*

Важно својство Лапласове матрице L и ненегативне Лапласове матрице Q је да су оне позитивне семидефинитне матрице. Сопствене вредности и сопствени вектори Лапласове матрице L, називају се Лапласове сопствене вредности и Лапласови сопствени вектори графа G. Лапласове сопствене вредности графа G се означавају са $\mu_i = \mu_i(G)$, а њихови одговарајући вектори са $x_i = x_i(G)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тако да важи

$$L\, x_i = \mu_i \, x_i \, .$$

Вектори x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, су n-димензионални вектори колона.

Ако се са $\mu_i (= \mu_i(G))$ означи i-та највећа сопствена вредност од L, тада је

$$\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \cdots \geq \mu_{n-1}(G) > \mu_n(G) = 0 \, .$$

Скуп $\{\mu_1(G), \mu_2(G), ..., \mu_n(G)\}$ назива се Лапласов спектар.

Добро позната својства Лапласових сопствених вредности графа G (видети [12, 28]) су

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} d_i = 2m \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i \, .$$

Сопствене вредности и сопствени вектори нормализоване Лапласове матрице $\mathcal{L}$ називају се нормализоване Лапласове сопствене вредности и нормализовани Лапласови сопствени вектори графа G.

Нормализоване Лапласове сопствене вредности графа G се означавају са $\rho_i = \rho_i(G), \;\; i = 1, 2, \ldots, n\,$.

Ако се са $\rho_i (= \rho_i(G))$ означи i-та највећа сопствена вредност од $\mathcal{L}$, тада је

$$\rho_1(G) \geq \rho_2(G) \geq \cdots \geq \rho_{n-1}(G) > \rho_n(G) = 0 \, .$$

Скуп $\{\rho_1(G), \rho_2(G), ..., \rho_n(G)\}$ назива се нормализовани Лапласов спектар.

За $\rho_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$, важи (видети [28])

$$\sum_{i=1}^{n-1} \rho_i = n \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i^2 = n + 2 \sum_{v_i \sim v_j} \frac{1}{d_i d_j} \, .$$

У следећим примерима биће наведени спектри за неке специјалне класе графова, у односу на матрицу суседства, Лапласову матрицу и нормализовану Лапласову матрицу.

Пример 2.5.1. *Нека је K_n комплетан граф са n чворова. Спектар графа K_n је*

$$\left\{(-1)^{(n-1)}, \; (n-1)^{(1)}\right\} .$$

Лапласов спектар графа K_n је

$$\left\{0^{(1)}, \; n^{(n-1)}\right\} .$$

Нормализовани Лапласов спектар графа K_n је

$$\left\{0^{(1)}, \; \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)}\right\} .$$

Пример 2.5.2. *Нека је $K_{p,\,q}$ комплетан бипартитан граф . Спектар графа $K_{p,\,q}$ је*

$$\left\{\pm\sqrt{pq}^{(1)}, \; 0^{(p+q-2)}\right\} .$$

Лапласов спектар графа $K_{p,q}$ је

$$\left\{0^{(1)},\ p^{(q-1)},\ q^{(p-1)},\ (p+q)^{(1)}\right\}.$$

Нормализовани Лапласов спектар графа $K_{p,q}$ је

$$\left\{0^{(1)},\ 1^{(p+q-2)},\ 2^{(1)}\right\}.$$

Пример 2.5.3. *Нека је P_n пут са n чворова. Спектар графа P_n је*

$$\left\{2\cos\left(\frac{\pi j}{n+1}\right) :\ j = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Лапласов спектар графа P_n је

$$\left\{2 - 2\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) :\ j = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Нормализовани Лапласов спектар графа P_n је

$$\left\{1 - \cos\left(\frac{\pi j}{n-1}\right) :\ j = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Пример 2.5.4. *Нека је C_n контура са n чворова . Спектар графа C_n је*

$$\left\{2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) :\ j = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Лапласов спектар графа C_n је

$$\left\{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) :\ j = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Нормализовани Лапласов спектар графа C_n је

$$\left\{1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) :\ j = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Пример 2.5.5. *Нека је G регуларан граф степена r. Тада важе следеће релације између матрица A, L и $\mathcal{L}$:*

$$L = r\,\mathcal{L} = rI - A\,.$$

Према томе, ако су познате сопствене вредности једне од матрица A, L или $\mathcal{L}$, сопствене вредности за остале две матрице су потпуно одређене на основу претходних једнакости.

2.6 Тополошки индекси засновани на степенима чворова и грана

Постоји велики број тополошких индекса заснованих на степенима чворова и грана (видети [56, 132, 133]). У овој дисертацији биће наведени само неки од њих, који су неопходни за даља разматрања.

Гутман и Тринајстић су у раду [62] дефинисали тополошки индекс заснован на степенима чворова (енг. Vertex Degree Based), M_1, касније назван први Загребачки индекс, са

$$M_1 = M_1(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \ .$$

У раду [43] је уочено да важи једнакост

$$M_1 = \sum_{v_i \sim v_j} (d_i + d_j) \ .$$

Како је степен сваке гране $e = v_i v_j,\ d(e) = d_i + d_j - 2$, важи и једнакост

$$M_1 = \sum_{i=1}^{m} (d(e_i) + 2) \ ,$$

те се овај тополошки индекс може разматрати и као тополошки индекс заснован на степенима грана.

У раду [62] дефинисан је тополошки индекс заснован на степенима чворова, касније назван други Загребачки индекс, M_2, са

$$M_2 = M_2(G) = \sum_{v_i \sim v_j} d_i d_j \ .$$

У поменутом раду [62], дефинисан је тополошки индекс заснован на степенима чворова, касније назван заборављени индекс (енг. forgotten topological index)(видети [52]), F, са

$$F = F(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^3 \ .$$

У раду [52] је примећено да за овај тополошки индекс важи једнакост

$$F = \sum_{v_i \sim v_j} (d_i^2 + d_j^2) \ .$$

Није тешко уочити да за тополошке индексе F и M_2 важи једнакост

$$F + 2M_2 = \sum_{v_i \sim v_j} (d_i + d_j)^2 \ .$$

У раду [129] је дефинисан тополошки индекс заснован на степенима чворова, HM, под називом Хипер-Загребачки индекс (енг. Hyper-Zagreb index), са

$$HM = HM(G) = \sum_{v_i \sim v_j} (d_i + d_j)^2 \, .$$

На основу претходне једнакости важи да је

$$HM = F + 2M_2 \, ,$$

па се за HM и не може рећи да је нови тополошки индекс заснован на степенима чворова. У раду [48] он је назван први Хипер-Загребачки индекс и дефинисан је други Хипер-Загребачки индекс, R_2, са

$$R_2 = R_2(G) = \sum_{v_i \sim v_j} (d_i d_j)^2 \, .$$

У раду [6] дефинисан је уопштени Рандићев индекс (енг. general Randić index), R_α, са

$$R_\alpha = R_\alpha(G) = \sum_{v_i \sim v_j} (d_i d_j)^\alpha \, ,$$

где је α произвољан реалан број. Поред индекса R_2 и $R_1 = M_2$, у литератури су највише присутни тополошки индекси који се добијају за $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha = -1$. За $\alpha = -\frac{1}{2}$ добија се Рандићев индекс или (мултипликативни) индекс повезаности, R,

$$R = R(G) = \sum_{v_i \sim v_j} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} \, ,$$

дефинисан у раду [123]. За $\alpha = -1$ добија се тополошки индекс, R_{-1},

$$R_{-1} = R_{-1}(G) = \sum_{v_i \sim v_j} \frac{1}{d_i d_j} \, .$$

Овај индекс се јавља под називом модификовани други Загребачки индекс, (видети [115]) и уопштени Рандићев индекс R_{-1} (видети [22]).

У раду [86] дефинисан је тополошки индекс заснован на степенима чворова под називом инверзни индекс, ID, са

$$ID = ID(G) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \, .$$

Мултипликативне варијанте тополошких индекса M_1 и M_2 су дефинисане у раду [133]. Мултипликативни први Загребачки индекс, Π_1, дефинисан је са

$$\Pi_1 = \Pi_1(G) = \prod_{i=1}^{n} d_i^2 \, .$$

Мултипликативни други Загребачки индекс, Π_2, дефинисан је са

$$\Pi_2 = \Pi_2(G) = \prod_{v_i \sim v_j} d_i \, d_j \, .$$

Треба напоменути да је у раду [114] дефинисан тополошки индекс, касније назван Наруми-Катајама тополошки индекс (енг. Narumi-Katayama topological index), NK, са

$$NK = NK(G) = \prod_{i=1}^{n} d_i \ .$$

Није тешко уочити да важи једнакост

$$\Pi_1(G) = (NK(G))^2 \ .$$

У раду [45] дефинисан је модификовани мултипликативни Загребачки индекс, Π_1^*, са

$$\Pi_1^* = \Pi_1^*(G) = \prod_{v_i \sim v_j} (d_i + d_j) \ .$$

Како је

$$\Pi_1^* = \prod_{i=1}^{m} (d(e_i) + 2) \ ,$$

овај тополошки индекс може се третирати и као тополошки индекс заснован на степенима грана.

Биће дефинисана и три тополошка индекса заснована на степенима чворова, који су и мере ирегуларности графова. У раду [1] дефинисан је тополошки индекс, касније назван Албертсонов индекс (енг. Albertson index) (видети [70]), Alb, са

$$Alb = Alb(G) = \sum_{v_i \sim v_j} |d_i - d_j| \ .$$

У раду [126] наведени су тополошки индекси $IRLF$ и $IRLA$, дефинисани са

$$IRLF = IRLF(G) = \sum_{v_i \sim v_j} \frac{|d_i - d_j|}{\sqrt{d_i d_j}}$$

и

$$IRLA = IRLA(G) = 2 \sum_{v_i \sim v_j} \frac{|d_i - d_j|}{d_i + d_j} \ .$$

Није тешко уочити да, на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, важи неједнакост

$$IRLF(G) \geq IRLA(G) \ .$$

2.7 Инваријанте графова засноване на Лапласовом спектру графа

Постоји више графовских инваријанти које су засноване на Лапласовом спектру, односно на сопственим вредностима Лапласове матрице. Биће наведене само оне које су неопходне за ову дисертацију (видети на пример [57, 58]).

Иван Гутман и Зоу (енг. Zhou) су 2006. године у раду [58] дефинисали Лапласову енергију графа на следећи начин

$$LE = LE(G) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right| . \tag{2.1}$$

За више детаља о Лапласовој енергији видети у [3].

Нека је σ $(1 \leq \sigma \leq n)$ највећи позитиван број такав да је

$$\mu_\sigma \geq \frac{2m}{n} \, ,$$

тада следи да је [35]

$$LE = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right| = 2S_\sigma(G) - \frac{4m\sigma}{n} \, ,$$

где је

$$S_\sigma(G) = \sum_{i=1}^{\sigma} \mu_i \, .$$

Лапласова енергија графа G може се дефинисати и на следећи начин [35]

$$LE = 2S_\sigma(G) - \frac{4m\sigma}{n} = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ 2S_i(G) - \frac{4mi}{n} \right\} .$$

Биће наведене неке карактеристичне доње границе за Лапласову енергију графа.

У раду [147] Зоу је добио да за граф G са n чворова и m грана важи

$$LE \geq \frac{4m}{n} \, , \tag{2.2}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је G изоморфан регуларном комплетном k-партитном графу $(1 \leq k \leq n)$.

Гутман и Зоу су у раду [58] добили следећу доњу границу

$$LE \geq 2\sqrt{m + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \frac{2m}{n}\right)^2}\,, \tag{2.3}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је G изоморфан комплетном бипартитном графу $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

У раду [35], аутори су добили доњу границу за Лапласову енергију у зависности од параметара n, m и Δ, тј.

$$LE \geq 2\left(\Delta + 1 - \frac{2m}{n}\right)\,, \tag{2.4}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{1,n-1}$.

У раду [35] је примећено да је доња граница (2.4) строжија од доње границе (2.2) за било које стабло осим за пут P_n. Штавише, граница (2.4) је строжија од границе (2.3) за било које стабло T реда n, где је $\Delta(T) \geq \frac{n}{\sqrt{2}} + 1$.

За бипартитне графове, Со (енг. So) и остали коаутори у раду [128] су добили да је

$$LE \geq \sum_{i=1}^{n}\left|d_i - \frac{2m}{n}\right|\,. \tag{2.5}$$

У раду [36] је показано да је следећа доња граница за Лапласову енергију повезаног графа G увек строжија од доње границе дате са (2.5), тј. важи да је

$$LE \geq 2 + \sum_{i=1}^{n}\left|d_i - \frac{2m}{n}\right|\,. \tag{2.6}$$

У наставку биће наведене неке карактеристичне горње границе за Лапласову енергију графа.

У раду [58] Гутман и Зоу су добили следеће три горње границе

$$LE \leq 2m + M_1(G) - \frac{4m^2}{n}\,, \tag{2.7}$$

$$LE \leq \sqrt{n\left(2m + M_1(G) - \frac{4m^2}{n}\right)}\,, \tag{2.8}$$

$$LE \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1)\left(2m + M_1(G) - \frac{4m^2}{n} - \frac{4m^2}{n^2}\right)}\,. \tag{2.9}$$

У раду [35], аутори су приметили да је горња граница дата са (2.8) строжија од горње границе дате са (2.7). Штавише, показали су да је горња граница дата са (2.9) строжија од горње границе дате са (2.8).

У раду [35] за граф G са n чворова и $m \geq \frac{n}{2}$ грана добијено је да важи

$$LE \leq 4m - 2\Delta - \frac{4m}{n} + 2 \,, \tag{2.10}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{1,n-1}$ или је $G \cong K_{1,\Delta} \cup \overline{K}_{n-\Delta-1}$ $\left(\frac{n}{2} \leq \Delta \leq n-2\right)$.

Као последица овог резултата, у раду [127] за графове са n чворова и $m > 0$ грана је добијено да важи

$$LE \leq 4m\left(1 - \frac{1}{n}\right) , \tag{2.11}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_2 \cup \overline{K}_{n-2}$.

Нека је T стабло реда n са максималним степеном чвора $\Delta \geq \frac{n}{2}\,(n \geq 37)$. У раду [35] је показано да је горња граница дата са (2.10) строжија од горње границе дате са (2.9) за било које стабло T.

Ј. Ли (енг. J. Liu) и Б. Ли (енг. B. Liu) у раду [91] уводе модификовану Лапласову енергију графа, у ознаци $LEL(G)$, (енг. Laplacian-energy-like-invariant) са

$$LEL = LEL(G) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i} \,.$$

Њихова идеја је заснована на чињеници да је

$$\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\mu_i})^2 = 2m \,,$$

која формално доводи у везу LEL са обичном енергијом графа, заснованој на сопственим вредностима матрице суседства [85].

Број разапињућих(спрежних) стабала повезаног графа G са n чворова, у ознаци $t = t(G)$, зависи од Лапласових сопствених вредности и одређен је са

$$t = t(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i \,.$$

Ова једнакост је дата у [54] (видети такође [26]).

Познато је такође да се број разапињућих стабала може изразити и преко нормализованих Лапласових сопствених вредности као [26]

$$t = t(G) = \frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{m} \prod_{i=1}^{n-1} \rho_i \,.$$

2.8 Кирхофов индекс

Историја тополошких индекса заснованих на растојању почиње 1947. године, када је Харолд Винер у раду [135], да би израчунао тачку кључања t_B алкана, искористио формулу

$$t_B = a\,W(G) + b\,W_P(G) + c\,.$$

У овој формули a, b, c су константе за дату изоморфну групу, $W(G)$ је (у модерној терминологији, различит од оног оригиналног који је Винер користио) једнако суми растојања међу свим паровима чворова у молекулском графу G, док је $W_P(G)$ број парова чворова чије је растојање једнако 3 у графу G, тј. $d(G,3)$.

У почетку Винерова идеја није привлачила пажњу код хемичара, али како је време пролазило, величина W постаје један од најпопуларнијих молекулских структурних дескриптора који је нашао примену у дизајнирању квантитативно структурних односа. Осим тога, има велику примену у кристалографији, теорији информација, криптологији и др. Данас, ова графовска инваријанта је позната под називом Винеров индекс (енг. Wiener index) или Винеров број (енг. Wiener number) [140].

Математичари су почели проучавање Винеровог индекса скоро три деценије након хемичара, у почетку без икаквог знања о ранијим радовима Винера. У савременој математичкој литератури са $W(G)$ се обично означава Винеров индекс.

Винер је величину $W_P(G)$ назвао "поларити" број, а данас се уобичајено ова величина назива Винеров "поларити" индекс графа G (енг. Wiener polarity index). Дакле, Винеров и Винеров "поларити" индекс су дефинисани редом са

$$W(G) = \sum_{u,v\,\in V} d_G(u,v),$$

$$W_P(G) = d(G,3)\,.$$

Након што је откривен Винеров индекс, у хемијској и математичко-хемијској литератури појавио се велики број других индекса заснованих на растојању у графу.

Инспирисани Винеровим индексом, а по аналогији са електричним мрежама, Клајн и Рандић су дефинисали Кирхофов индекс (енг. Kirchhoff index) [15, 79]. Он је дефинисан као збир величина r_{ij}, растојања–отпорност (енг. resistance–distance) између чворова v_i и v_j, тј.

$$Kf(G) = \sum_{i<j} r_{ij}\,. \tag{2.12}$$

Израчунавање величине r_{ij} је веома сложено, те је овако дефинисан Кирхофов индекс био веома ограничене примене. Решење овог проблема дошло је од стране Гутмана и Мохара [65](видети и [145]), који су 1996. године доказали да се Кирхофов индекс за повезане графове може израчунати на основу једнакости

$$Kf(G) = n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i}\,. \tag{2.13}$$

Због добре оперативности ове формуле појавио се велики број радова у којима је проучаван Кирхофов индекс, као и његова примена у проучавању молекуларних структура хемијских једињења. Са математичке тачке гледишта, највише су проучаване границе ове инваријанте које зависе од различитих параметара графа и других инваријанти, као и екстремне вредности на разним специјалним класама графова (стабла, уницикличнии, бициклични графови, итд.).

Чен (енг. Chen) и Занг (енг. Zhang) су 2007. године увели још једну графовску инваријанту тесно повезану са Кирхофовим индексом, у ознаци $Kf^*(G)$ (енг. degree Kirchhoff index) [32]. Он је дефинисан са

$$Kf^*(G) = \sum_{i<j} d_i \, d_j \, r_{ij} \; .$$

По аналогији са Кирхофовим индексом, $Kf^*(G)$ се може дефинисати и као [32]

$$Kf^*(G) = 2m \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\rho_i} \; .$$

Биће дате вредности Кирхофовог индекса $Kf(G)$ и индекса $Kf^*(G)$ за неке специјалне класе графова.

За комплетан граф K_n, комплетан бипартитан граф $K_{n,\,n-r}$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и циклус C_n, вредности ових индекса су дате редом са

$$Kf(K_n) = n-1 \; , \quad Kf^*(K_n) = (n-1)^3 \; ,$$

$$Kf(K_{r,\,n-r}) = (n-1)\left(\frac{r}{n-r} + \frac{n-r}{r}\right) - 1 \; , \quad Kf^*(K_{r,\,n-r}) = r(n-r)(2n-3) \; ,$$

$$Kf(C_n) = \frac{n^3-n}{12} \; , \quad Kf^*(C_n) = \frac{n^3-n}{3} \; .$$

У специјалном случају, када је $r=1$, граф $K_{1,\,n-1}$ је звезда и тада је

$$Kf(K_{1,\,n-1}) = (n-1)^2 \; , \quad Kf^*(K_{1,\,n-1}) = (n-1)(2n-3) \; .$$

За комплетан бипартитан граф за који је $r = \frac{n}{2}$, n је паран број, добија се да је

$$Kf(K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}) = 2n-3 \; , \quad Kf^*(K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}) = \frac{n^2}{4}(2n-3) \; .$$

За пут P_n вредност Кирхофовог индекса је

$$Kf(P_n) = \frac{n^3-n}{6} \; .$$

Нека је $G = K_n - e$ граф добијен од комплетног графа K_n брисањем једне његове гране и нека је $G = K_{n-1} + e$ граф добијен додавањем једног чвора комплетном графу K_{n-1} тако да нова грана повезује тај чвор са произвољним чвором у графу K_{n-1}. Вредности Кирхофовог индекса за тако добијене графове су

$$Kf(K_n - e) = n - 2 + \frac{n}{n-2}\,, \quad Kf(K_{n-1} + e) = 2n - 1 - \frac{2}{n-1}\,.$$

У раду [118](видети и [119]) дефинисана је класа d-регуларних графова, у ознаци Γ_d, $1 \leq d \leq n-1$, на следећи начин. Нека је $N(v_i)$ скуп свих суседа чвора v_i и нека је $d(v_i, v_j)$ растојање између чворова v_i и v_j. Тада је Γ_d скуп свих d-регуларних графова, $1 \leq d \leq n-1$, са својством да је

$$diam(G) = 2 \quad \text{и} \quad |N(v_i) \cap N(v_j)| = d\,, \ \text{када}\, v_i \,\text{и}\, v_j \text{ нису суседни.}$$

За било који граф $G_d \in \Gamma_d$ важи да је

$$Kf(G_d) = \frac{n(n-1) - d}{d}\,, \quad Kf^*(G_d) = d(n(n-1) - d).$$

Глава 3

Доње границе за Кирхофов индекс

3.1 Познати резултати

У овом одељку биће дат преглед познатих доњих граница за Кирхофов индекс, $Kf(G)$, графа G. Углавном ће бити наведени резултати који су од интереса за разматрања у дисертацији. Ту спадају доње границе које зависе од неких од параметара n, m, $\Delta = d_1$, $\Delta_2 = d_2$, $d_3, \ldots, d_{n-1} = \delta_2$, $d_n = \delta$ и/или неких од инваријанти M_1, M_2, F, ID, NK, Π_1, Π_2, Π_1^*, R_{-1}, t.

Кажемо да граница за Кирхофов индекс припада класи $I(\alpha)$, ако зависи од параметара из скупа α.

У раду [145] (видети такође [102, 118, 155]) доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq Kf(K_n) = n - 1 . \tag{3.1}$$

Ова доња граница је најбоља могућа у класи $I(n)$, тј. која зависи само од параметра n.

У специјалном случају, за планарне графове, у раду [143] је доказано да важи неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)^2}{6(n-2)} , \tag{3.2}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_3$ или $G \cong K_4$.

У раду [106] је, за планарне графове, доказано да важи неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)}{6(n-2)} - 1 , \tag{3.3}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_3$ или $G \cong K_4$. Ова неједнакост је строжија од неједнакости (3.2), доња граница у (3.3) је боља од доње границе у (3.2), за $Kf(G)$.

У истом раду је доказано да за планарне бипартитне графове важи неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)}{4(n-2)} - 1 \ ,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{2,2}$.

Нека је G_p , $2 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, граф добијен од графа K_n одузимањем p грана. У раду [140] је доказано да важи неједнакост

$$Kf(G_p) \geq n - 1 + \frac{2p}{n-2} \ ,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G_p \cong K_n - pK_2$.

У раду [79] је доказано да за свако стабло T важи

$$W(T) \geq W(K_{1,n-1}) \ ,$$

где је $W = W(G)$ Винеров индекс графа G. Како за свако стабло T важи $W(T) = Kf(T)$ (видети [31]), важи неједнакост

$$Kf(T) \geq (n-1)^2 \ ,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $T \cong K_{1,n-1}$.
Како је $2m \leq n(n-1)$ важи и неједнакост

$$n \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{8m+1} + 1\right) .$$

На основу ове неједнакости и неједнакости (3.1) у раду [110] је доказано да важи неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{8m+1} - 1\right) ,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$. Ова доња граница је најбоља могућа у класи $I(m)$, тј. која зависи само од параметра m .

Веома су значајне границе за инваријанту $Kf(G)$, као и за друге инваријанте графова, које зависе само од основних параметара n и m .

У раду [143] (видети такође [109]) доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)^2}{2m} \ . \tag{3.4}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

У раду [110] је доказана неједнакост

$$
(3.5) \qquad Kf(G) \geq n^2\left(\frac{1}{2m+n} + \frac{(n-2)^2}{2m(n-1)-n}\right).
$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.
Неједнакост (3.5) је строжија од неједнакости (3.4). У раду [44] је доказана и неједнакост

$$
(3.6) \qquad Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)(n-2)}{2m(n-1)-n},
$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$. И ова неједнакост је строжија од неједнакости (3.4). Међутим, лако је показати да је неједнакост (3.6) строжија и од неједнакости (3.5).

У раду [106] је доказана неједнакост

$$
(3.7) \qquad Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)-2m}{2m},
$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Лако је доказати да је неједнакост (3.7) строжија од неједнакости (3.4), (3.5) и (3.6). Ипак, остаје отворено питање да ли је доња граница у (3.7), која припада класи $I(n,m)$, тј. која зависи само од параметара n и m, најбоља могућа у овој класи.

За случај бипартитних графова у раду [110] је доказана неједнакост

$$
(3.8) \qquad Kf(G) \geq \frac{n^2(2n-3)}{4m},
$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број.

У раду [151](видети такође [119]) је одређена доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n и Δ, тј. доказана је неједнакост

$$
(3.9) \qquad Kf(G) \geq \frac{(n-1)^2}{\Delta}.
$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

Како је $2m \leq n\Delta$, неједнакост (3.9) је директна последица неједнакости (3.4).

У специјалном случају, за d-регуларне графове, $1 \leq d \leq n-1$, на основу (3.9) важи неједнакост

$$
(3.10) \qquad Kf(G) \geq \frac{(n-1)^2}{d}.
$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$. Ова неједнакост је доказана у раду [121]. У истом раду [121](видети такође [8]) је за d-регуларне графове, $1 \leq d \leq n-1$, доказана неједнакост

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{1+d} + \frac{(n-2)^2}{nd-d-1}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

У раду [118](видети такође [102]) је доказана неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta}, \tag{3.11}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.
Како је

$$\frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta} \geq \frac{(n-1)^2}{\Delta},$$

неједнакост (3.11) је строжија од неједнакости (3.9). Остаје отворено питање да ли је доња граница за $Kf(G)$, која зависи од параметара n и Δ, одређена у (3.11) најбоља могућа.

На основу неједнакости (3.11) за d-регуларне графове, $1 \leq d \leq n-1$, важи неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-d}{d}, \tag{3.12}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$. Ова неједнакост је доказана у раду [118]. Она је строжија од неједнакости (3.10).

За бипартитне графове у раду [151](видети такође [119]) је доказана неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n(2n-3)}{2\Delta},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број.

У раду [144] је одређена доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n и δ, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq n-1+\frac{n}{\delta}-\frac{\delta+1}{n-1},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

За класу (p,q)-бипартитних графова у раду [142] је одређена доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара p и q, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{(p+q-1)(p^2+q^2)-pq}{pq},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број.

У раду [149] одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m и Δ, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{1+\Delta} + \frac{(n-2)^2}{2m-\Delta-1}\right), \tag{3.13}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$.

Доња граница за $Kf(G)$ која такође зависи од параметара n, m и Δ одређена је у раду [118](видети такође [146, 149]), тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq n - 1 + \frac{n(n-1)-2m}{\Delta}, \tag{3.14}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Неједнакости (3.13) и (3.14) нису упоредиве. Тако на пример, за $G \cong K_{1,n-1}$ неједнакост (3.13) је строжија од неједнакости (3.14). За $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број, неједнакост (3.14) је строжија од неједнакости (3.13).

У раду [106] је доказана неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta} + \frac{(n-1)^3}{2m-\Delta}, \tag{3.15}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Како је

$$\frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta} + \frac{(n-1)^3}{2m-\Delta} \geq n - 1 + \frac{n(n-1)-2m}{\Delta},$$

неједнакост (3.15) је строжија од неједнакости (3.14), тј. доња граница одређена у неједнакости (3.15) је боља од доње границе, за $Kf(G)$, одређене у неједнакости (3.14).

Неједнакост (3.15) је строжија од неједнакости (3.13) када је $G \cong P_n$ или $G \in \Gamma_p$ или када је низ степена чворова графа G облика $D = (n-1, d_2, \ldots, d_n)$.
Такође, у скупу повезаних регуларних графова са $n \geq 4$ чворова није пронађен ниједан граф за који је неједнакост (3.13) строжија од неједнакости (3.15). Ипак, остаје отворено питање да ли је доња граница у (3.15), за $Kf(G)$, која зависи од параметара n, m и Δ најбоља могућа.

У раду [29] (видети такође [38]) одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m, Δ и δ, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{1+\Delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{(n-3)^2}{2m-\Delta-\delta-1}\right), \tag{3.16}$$

при чему је $G \neq K_n$. Једнакост важи ако и само ако је или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \cong K_n - e$ или $G \cong K_{n-1} + e$.

Како је $1+\Delta \leq n$, на основу (3.16) следи неједнакост

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\delta} + \frac{(n-3)^2}{2m-\Delta-\delta-1}\right), \tag{3.17}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \cong K_n - e$ или $G \cong K_{n-1} + e$. Када је $G \neq K_n$, неједнакост (3.16) је строжија од неједнакости (3.17). Неједнакост (3.17) је доказана у раду [38].

У раду [106] је доказана неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + \frac{n-1}{\delta} + \frac{(n-1)(n-2)^2}{2m-\Delta-\delta}. \tag{3.18}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Неједнакости (3.18) и (3.17) нису упоредиве. Тако на пример, за $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, при чему је n паран број, неједнакост (3.18) је строжија неједнакости (3.17). За $G \cong K_n - e$ неједнакост (3.17) је строжија од неједнакости (3.18). Слично, лако је показати да и неједнакости (3.16) и (3.18) нису упоредиве.

Нека је

$$T = \frac{1}{2}\left(\Delta + \delta + \sqrt{(\Delta-\delta)^2 + 4\Delta}\right).$$

На основу једног општијег резултата из рада [14], лако се добија да за бипартитне графове важи неједнакост

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{T} + \frac{(n-2)^2}{2m-T}\right), \tag{3.19}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{1,n-1}$.

У даљем тексту биће наведене познате доње границе за $Kf(G)$ које зависе и од других степена чворова графа G.

У раду [33] одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m, Δ, Δ_2 и δ, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n}{1+\Delta} + \frac{n}{2m-\Delta-1}\left((n-2)^2 + \frac{(\Delta_2-\delta)^2}{\Delta_2\,\delta}\right), \tag{3.20}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је или $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$.

Доња граница за $Kf(G)$, која зависи од истих параметара као и она одређена у (3.20), одређена је у раду [106], тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + \frac{n-1}{2m-\Delta}\left((n-2)^2 + \left(\sqrt{\frac{\Delta_2}{\delta}} - \sqrt{\frac{\delta}{\Delta_2}}\right)^2\right), \tag{3.21}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је или $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Неједнакости (3.20) и (3.21) нису упоредиве.

У раду [89] (видети такође [7]) је доказана следећа неједнакост, као специјалан случај једног општијег резултата,

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{1+\Delta} + \frac{1}{\Delta_2} + \frac{(n-3)^2}{2m-\Delta-\Delta_2-1}\right), \tag{3.22}$$

при чему је $d_{n-2} \geq d_{n-1} + \delta - 1$. Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{1,n-1}$.

У раду [106] је доказана следећа неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + \frac{n-1}{\Delta_2} + \frac{(n-1)(n-2)^2}{2m-\Delta-\Delta_2}, \tag{3.23}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Доње границе за $Kf(G)$ у (3.22) и (3.23) зависе од истих параметара n, m, Δ и Δ_2. Доња граница за $Kf(G)$ одређена у (3.23) је строжија од доње границе одређене у (3.22), на пример за $G \cong P_n$ или $G \in \Gamma_d$. Ипак, остаје отворено питање да ли је неједнакост (3.23) строжија од неједнакости (3.22).

У радовима [89, 146, 149] добијене су доње границе за $Kf(G)$ које зависе од параметара $n, d_1, \ldots, d_n$. Тако је у раду [146] (видети такође [89]) доказана неједнакост

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{1+\Delta} + \sum_{i=2}^{n-2}\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{n-1}+\delta-1}\right), \tag{3.24}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \cong K_3$.

У раду [149] доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq -1 + (n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} = -1 + (n-1)\, ID\,. \tag{3.25}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{r,n-r}$, $1 \le r \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ или $G \in \Gamma_d$ (видети [102,110]) .

У раду [146] је примећено да неједнакости (3.24) и (3.25) нису упоредиве. Међутим, тестирањем није пронађена нека класа повезаних графова за коју је неједнакост (3.24) строжија од неједнакости (3.25) .

На први поглед, неједнакост (3.25) је захтевна, јер за израчунавање инваријанте ID потребно је познавање свих степена чворова. Међутим, инваријанта ID је добро проучена у литератури. Неке доње границе за ID могу се искористити да се на основу (3.25) добију веома добре доње границе за $Kf(G)$ које зависе од разних параметара и других инваријанти графа G . Ова чињеница је доста коришћена у литератури(видети на пример [110]) . Тако, на пример, на основу неједнакости

$$ID = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \ge \frac{n^2}{2m} \;, \tag{3.26}$$

и неједнакости (3.25) добија се неједнакост (3.7), која је доказана у раду [106], а најбоља је могућа, до сада пронађена, доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n и m .

У даљем тексту навешћемо неке доње границе за $Kf(G)$, које зависе од неких параметара и других инваријанти графа G .

У раду [33] је одређена доња граница за инваријанту $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m и тополошког индекса M_1, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \ge \frac{2mn(n-1)(n-2)}{4m^2 - M_1 - 2m} \;, \tag{3.27}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.
У раду [110] је доказана неједнакост

$$Kf(G) \ge 2mn\left(\frac{1}{M_1 + 2m} + \frac{(n-2)^2}{4m^2 - M_1 - 2m}\right) \;, \tag{3.28}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.
Неједнакост (3.28) је строжија од неједнакости (3.27), те је доња граница за $Kf(G)$ одређена у (3.28) боља од доње границе одређене у (3.27) .

У раду [102] одређена је доња граница за инваријанту $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m, Δ и δ и тополошког индекса M_1, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \ge \frac{4(n-1)m^2}{(\Delta + \delta)M_1 - 2m\Delta\delta} - 1 \;, \tag{3.29}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број .

У раду [149](видети такође [14, 90]) за случај када је G бипартитни граф, одређена је доња граница за инваријанту $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m и тополошког индекса M_1, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{M_1}{n}}} + \frac{(n-2)^2}{m - \sqrt{\frac{M_1}{n}}}\right), \tag{3.30}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број .

У раду [152](видети такође [14, 90, 154]) доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{m}{M_1} + \frac{m(n-2)^2}{2m^2 - M_1}\right), \tag{3.31}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број, или је $G \cong K_{1,\,n-1}$.

Доње границе за инваријанту $Kf(G)$ одређене у (3.30) и (3.31), за бипартитне графове, зависе од истих параметара и инваријанти, тј. припадају истој класи $I(n, m, M_1)$. Лако је показати да је доња граница одређена у (3.31) боља од доње границе, за $Kf(G)$, одређене у (3.30) .

У раду [152] (видети такође [14, 154]) за повезане бипартитне графове одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n и m и инваријанти M_1 и t, где је $t = t(G)$ број разапињућих стабала у графу G, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{m}{M_1} + (n-2)\left(\frac{M_1}{tnm}\right)^{\frac{1}{n-2}}\right), \tag{3.32}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број .

У раду [102] одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m и тополошког индекса M_2, тј. доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{2(n-1)m^2}{M_2} - 1\ , \tag{3.33}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је G регуларан или семирегуларан бипартитни граф .

У поменутом раду [102] одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m и тополошког индекса F, тј. доказана је неједнакост

$$
Kf(G) \geq \frac{4(n-1)m^2}{F} - 1 \;, \tag{3.34}
$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број.
Није тешко уочити да се неједнакост (3.34) добија на основу неједнакости (3.33) и неједнакости

$$
2M_2 \leq F \;.
$$

Такође, како је (видети [77, 102])

$$
F \leq (\Delta+\delta)M_1 - 2m\Delta\delta \;,
$$

на основу ове неједнакости и неједнакости (3.34) добија се неједнакост (3.29).

На основу неједнакости (видети [92])

$$
ID \geq 2R_{-1} \,,
$$

и неједнакости (3.25) у раду [102](видети такође [110]) је доказана неједнакост

$$
Kf(G) \geq -1 + 2(n-1)R_{-1} \;, \tag{3.35}
$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Није тешко уочити да неједнакост (3.35) има прилично широк карактер, јер је тополошки индекс R_{-1} добро проучен у литератури. На пример на основу неједнакости (3.35) и неједнакости

$$
2R_{-1} \geq \frac{n}{n-1} \;,
$$

која је доказана у раду [84], добија се неједнакост (3.1).
На основу неједнакости (3.35) и неједнакости

$$
2R_{-1} \geq \frac{n}{\Delta} \;,
$$

која је доказана у раду [22], добија се неједнакост (3.11).
На основу неједнакости (3.35) и неједнакости

$$
R_{-1} \geq \frac{m^2}{M_2} \;,
$$

која је доказана у раду [92], добија се неједнакост (3.33).

Нека је

$$
P = 1 + \sqrt{\frac{2R_{-1}}{n(n-1)}} \;.
$$

У раду [13] (видети такође [8]) одређена је доња граница за инваријанту $Kf(G)$ која зависи од параметара n и Δ и тополошког индекса R_{-1}, тј. доказана је неједнакост

$$(3.36) \qquad Kf(G) \geq \frac{n}{\Delta}\left(\frac{1}{P} + \frac{(n-2)^2}{n-P}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

У раду [150] одређена је доња граница за инваријанту $Kf(G)$, као специјалан случај једног општијег резултата, која зависи од параметара n и Δ и инваријанте t, тј. доказана је неједнакост

$$(3.37) \qquad Kf(G) \geq \frac{n}{1+\Delta} + (n-2)n^{\frac{n-3}{n-2}}\left(\frac{t}{1+\Delta}\right)^{-\frac{1}{n-2}},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$.
Слично, као специјалан случај општијег резултата у раду [40] је доказана неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n}{1+\Delta} + (n-2)n^{\frac{n-3}{n-2}}(1+\Delta)^{\frac{1}{n-2}}t^{-\frac{1}{n-2}} + (\Delta_2^{1/2} - \delta^{1/2})^2,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

У даљем тексту биће наведене неке доње границе за инваријанту $Kf(G)$ које зависе и од неког слободног параметра.

Нека је k произвољан реални број са особином $\mu_1 \geq k \geq \mu_{n-1}$. У раду [110](видети такође [40]) доказана је неједнакост

$$(3.38) \qquad Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{k} + \frac{(n-2)^2}{2m-k}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $k = n$ и $G \cong K_n$ или је $k = n$ и $G \cong K_{1,n-1}$ или је $k = n$ и $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број, или је $k = n-2$ и $G \cong K_n - e$.
Неједнакост (3.38) је веома општег карактера, јер се избором параметра k могу добити бројне познате, али и нове, доње границе за инваријанту $Kf(G)$. Довољно је искористити неједнакост (видети на пример [72])

$$\mu_1 \geq 1 + \Delta \geq \frac{M_1}{2m} + 1 \geq \frac{2m}{n} + 1 \geq \frac{2m}{n-1} \geq \mu_{n-1}.$$

Тако, на пример, за $k = \mu_1$, добија се неједнакост

$$(3.39) \qquad Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{(n-2)^2}{2m-\mu_1}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $\mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_{n-1}$, односно, ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број. За неједнакост (3.39) видети у радовима [90, 149, 150].

За $k = \mu_{n-1}$ на основу (3.38) важи неједнакост

$$Kf(G) \geq n\left(\frac{1}{\mu_{n-1}} + \frac{(n-2)^2}{2m - \mu_{n-1}}\right), \tag{3.40}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n-2}$, тј. ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_n - e$.
Неједнакост (3.40) је доказана у раду [110]. На основу (3.39) и (3.40) у овом раду доказано је да важи неједнакост

$$Kf(G) \geq n \max\left\{\frac{1}{\mu_1} + \frac{(n-2)^2}{2m - \mu_1},\ \frac{1}{\mu_{n-1}} + \frac{(n-2)^2}{2m - \mu_{n-1}}\right\},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број, или $G \cong K_n - e$.

Такође, за $k = \frac{2m}{n} + 1$, на основу (3.38) добија се неједнакост (3.5), за $k = \frac{2m}{n-1}$ добија се неједнакост (3.4), за $k = \frac{M_1}{2m} + 1$ добија се неједнакост (3.28), за $k = 1 + \Delta$ добија се неједнакост (3.13).

Слично, у случају повезаних бипартитних графова важи неједнакост(видети [44, 90])

$$\mu_1 \geq \frac{M_1}{m} \geq 2\sqrt{\frac{M_1}{n}} \geq \frac{4m}{n} \geq \frac{2m}{n-1}.$$

Тако, на пример за $k = \frac{4m}{n}$ на основу (3.38) добија се неједнакост (3.8), за $k = 2\sqrt{\frac{M_1}{n}}$ добија се неједнакост (3.30), за $k = \frac{M_1}{m}$ добија се неједнакост (3.31).

У раду [108] је доказано да за произвољан реалан број k, са особином $\rho_1 \geq k \geq \rho_{n-1}$, важи неједнакост

$$R_{-1} \geq \frac{n-1}{2(n-2)}\left(k - \frac{n}{n-1}\right)^2 + \frac{n}{2(n-1)}.$$

На основу ове неједнакости и неједнакости (3.35) у раду [110](видети такође [102]), доказана је неједнакост

$$Kf(G) \geq n - 1 + \frac{(n-1)^2}{n-2}\left(k - \frac{n}{n-1}\right)^2, \tag{3.41}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $k = \frac{n}{n-1}$ и $G \cong K_n$ или је $k = 2$ и $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број.

За $k = \frac{n}{n-1}$ на основу неједнакости (3.41) добија се неједнакост (3.1). За $k = \rho_1$ и $k = \rho_{n-1}$, редом, на основу неједнакости (3.41) добијају се неједнакости

$$Kf(G) \geq n - 1 + \frac{(n-1)^2}{n-2}\left(\rho_1 - \frac{n}{n-1}\right)^2 ,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$, и

$$Kf(G) \geq n - 1 + \frac{(n-1)^2}{n-2}\left(\rho_{n-1} - \frac{n}{n-1}\right)^2 ,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_{n-1}$. На основу ове две неједнакости у раду [110](видети такође [102]), је доказана неједнакост

$$Kf(G) \geq n - 1 + \frac{(n-1)^2}{n-2}\max\left\{\left(\rho_1 - \frac{n}{n-1}\right)^2, \left(\rho_{n-1} - \frac{n}{n-1}\right)^2\right\} ,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, где је n паран број.

Следеће неједнакости, доказане у раду [151] (видети такође [121]), дају везу између $Kf(G)$ и $Kf^*(G)$

$$\frac{n}{2m\Delta}\,Kf^*(G) \leq Kf(G) \leq \frac{n}{2m\delta}\,Kf^*(G) .$$

Једнакости важе ако и само ако је G регуларан граф.

Наведене неједнакости омогућују да се на основу граница за $Kf(G)$ одреде границе за $Kf^*(G)$, и обрнуто. Међутим, искуство указује да су на тај начин одређене границе доста грубе. Препорука је да се горње неједнакости користе ако се границе не могу одредити на неки други начин.

3.2 Нови резултати

У овом одељку биће наведени и анализирани нови резултати до којих се дошло у току рада на предложеној теми, од којих су неки публиковани у радовима [55], [98], [100] и [105].

У следећој теореми одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m, Δ и δ, тј. која припада класи $I(n, m, \Delta, \delta)$.

Теорема 3.2.1. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)-2m}{2m} + \frac{(n-1)\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta\delta}, \tag{3.42}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. За $a_i = \dfrac{1}{\sqrt{d_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $r = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}$ и $R = \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$, неједнакост (1.5) постаје

$$n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 \geq \frac{n\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta\delta}. \tag{3.43}$$

За $r = 3$, $p_i = \dfrac{1}{\sqrt{d_i}}$, $a_i = b_i = c_i = \sqrt{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, неједнакост (1.2) постаје

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} d_i \geq n^3,$$

односно

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 \geq \frac{n^3}{2m}. \tag{3.44}$$

На основу неједнакости (3.43) и (3.44) следи да је

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} \geq \frac{n^2}{2m} + \frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta\delta}.$$

Коначно, на основу последње неједнакости и неједнакости (3.25), добија се неједнакост (3.42).

Једнакост у (3.44) важи ако и само ако је $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$. Једнакост у (3.25) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или је $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$, одакле следи да једнакост у (3.42) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$. $\square$

Напомена 3.2.1. [100] *Како је* $\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2 \geq 0$, *неједнакост* (3.42) *је строжија од неједнакости* (3.7).

Како је $2m \leq n\Delta$, важи следећа последица теореме 3.2.1.

Последица 3.2.1. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta} + \frac{(n-1)\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta\delta}, \tag{3.45}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Напомена 3.2.2. [100] *Неједнакост* (3.45) *је строжија од неједнакости* (3.11). *Ако је G d-регуларан граф, $1 \leq d \leq n-1$, тада на основу неједнакости* (3.45) *следи неједнакост* (3.12).

Напомена 3.2.3. [100] *Доње границе за $Kf(G)$ дате неједнакостима* (3.16) *и* (3.42) *зависе од истих параметара, n, m, Δ, и δ. Међутим, оне нису упоредиве. Тако, на пример, за $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ доња граница* (3.42) *је строжија од доње границе* (3.16), *али за $G \cong 2K_1 \vee K_{n-2}$ важи обрнуто.*

У следећој теореми одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m, Δ, Δ_2 и δ, тј. која припада класи $I(n,m,\Delta,\Delta_2,\delta)$.

Теорема 3.2.2. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + (n-1)\left(\frac{(n-1)^2}{2m-\Delta} + \frac{\left(\sqrt{\Delta_2}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta_2\delta}\right), \tag{3.46}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. Неједнакост (1.5) се може посматрати у облику

$$(n-1)\sum_{i=2}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right)^2 \geq \frac{n-1}{2}(R-r)^2.$$

За $a_i = \dfrac{1}{\sqrt{d_i}}$, $i = 2,\ldots,n$, $R = \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$ и $r = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta_2}}$ добија се

$$(n-1)\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i} - \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 \geq \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}}\right)^2,$$

тј.

$$(n-1)\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 + \frac{(n-1)\left(\sqrt{\Delta_2}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta_2\delta}. \tag{3.47}$$

Слично, неједнакост (1.2) се може посматрати у облику

$$\left(\sum_{i=2}^{n} p_i\right)^{r-1} \sum_{i=2}^{n} p_i a_i b_i \cdots c_i \geq \sum_{i=2}^{n} p_i a_i \sum_{i=2}^{n} p_i b_i \cdots \sum_{i=2}^{n} p_i c_i.$$

За $r = 3$, $p_i = \dfrac{1}{\sqrt{d_i}}$, $a_i = b_i = c_i = \sqrt{d_i}$, $i = 2, \ldots, n$, дата неједнакост постаје

$$\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 \sum_{i=2}^{n} d_i \geq (n-1)^3,$$

тј.

$$\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 \geq \frac{(n-1)^3}{2m-\Delta}. \tag{3.48}$$

На основу неједнакости (3.47) и (3.48) добија се да је

$$(n-1)\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \frac{(n-1)^3}{2m-\Delta} + \frac{(n-1)\left(\sqrt{\Delta_2}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta_2\delta},$$

тј.

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \frac{n-1}{\Delta} + (n-1)\left(\frac{(n-1)^2}{2m-\Delta} + \frac{\left(\sqrt{\Delta_2}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta_2\delta}\right). \tag{3.49}$$

На крају, на основу неједнакости (3.49) и (3.25) следи неједнакост (3.46).

Једнакост у (3.48) важи ако и само ако је $d_2 = d_3 = \cdots = d_n$. Једнакост у (3.25) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$. Према томе, једнакост у (3.46) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$. □

Биће наведене три теореме, које се доказују сличним поступком као у теореми 3.2.2 , те се сами докази изостављају.

Теорема 3.2.3. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\delta}{\delta} + (n-1)\left(\frac{(n-1)^2}{2m-\delta} + \frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta_2}\right)^2}{2\Delta\delta_2}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.4. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 4$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{(n-1)(\Delta+\delta)-\Delta\delta}{\Delta\delta} + (n-1)\left(\frac{(n-2)^2}{2m-\Delta-\delta} + \frac{\left(\sqrt{\Delta_2}-\sqrt{\delta_2}\right)^2}{2\Delta_2\delta_2}\right), \tag{3.50}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.5. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 4$ чворова и m грана. Тада важи*
(3.51)
$$Kf(G) \geq \frac{(n-1)(\Delta+\Delta_2)-\Delta\Delta_2}{\Delta\Delta_2}+(n-1)\left(\frac{(n-2)^2}{2m-\Delta-\delta}+\frac{\left(\sqrt{\Delta_3}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta_3\delta}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Напомена 3.2.4. [100] *Неједнакост* (3.50) *је строжија од неједнакости* (3.18), *али није упоредива са* (3.16). *На пример, за $G \cong K_n - e$ неједнакост* (3.16) *је строжија од неједнакости* (3.50), *али за $G \cong K_{1,n-1}$ неједнакост* (3.18) *је строжија од неједнакости* (3.16), *па је неједнакост* (3.50) *строжија од неједнакости* (3.16). *Неједнакост* (3.51) *је строжија од неједнакости* (3.23), *али није упоредива са* (3.22). *Тако за $G \cong K_{1,n-1}$ неједнакост* (3.23) *је строжија од неједнакости* (3.22), *па је неједнакост* (3.51) *строжија од неједнакости* (3.22), *али за $G \cong K_n - e$ неједнакост* (3.22) *је строжија од неједнакости* (3.51).

У следећим двема теоремама одређене су доње границе за $Kf(G)$ које зависе од параметара n, m и тополошког индекса $NK = NK(G)$, тј. границе из класе $I(n, m, NK(G))$.

Теорема 3.2.6. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{(n^3-2m)\,(NK(G))^{\frac{1}{n}}-2mn}{2m\,(NK(G))^{\frac{1}{n}}}, \tag{3.52}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. За $a_i = \dfrac{1}{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, неједнакост (1.12) постаје

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 - n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}\right)^{\frac{1}{n}},$$

тј.

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 - \frac{n}{(NK(G))^{\frac{1}{n}}}.$$

На основу дате неједнакости и неједнакости (3.44) добија се неједнакост

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} \geq \frac{n^3}{2m} - \frac{n}{(NK(G))^{\frac{1}{n}}}. \tag{3.53}$$

Неједнакост (3.52) сада следи на основу неједнакости (3.53) и (3.25).

Једнакост у (3.53) важи ако и само ако је $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$. Једнакост у (3.25) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или је $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$. Дакле, једнакост у (3.52) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$. $\square$

Теорема 3.2.7. [98] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq -1 + \frac{n^3(n-1)}{2m(n-1) + n(NK(G))^{\frac{1}{n}}}, \tag{3.54}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. За $r = 3$, $p_i = \sqrt{d_i}$, $a_i = b_i = c_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, неједнакост (1.2) постаје

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{d_i} \right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq n^3. \tag{3.55}$$

На основу неједнакости (1.12), за $a_i = d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, добија се неједнакост

$$(n-1) \sum_{i=1}^{n} d_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{d_i} \right)^2 - n \left(\prod_{i=1}^{n} d_i \right)^{\frac{1}{n}},$$

тј.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{d_i} \right)^2 \leq 2m(n-1) + n(NK(G))^{\frac{1}{n}}. \tag{3.56}$$

На основу неједнакости (3.55) и (3.56) добија се неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \frac{n^3}{2m(n-1) + n(NK(G))^{\frac{1}{n}}}. \tag{3.57}$$

Коначно, неједнакост (3.54) сада следи на основу неједнакости (3.25) и (3.57).

Једнакости у (3.55) и (3.56) важе ако и само ако је $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$, тј. ако и само ако је G регуларан граф. Једнакост у (3.25) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или је $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$. Према томе, једнакост у (3.54) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$. □

Како је $2m \leq n\Delta$, важи следећа последица теореме 3.2.6.

Последица 3.2.2. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{(n^2 - \Delta)(NK(G))^{\frac{1}{n}} - n\Delta}{\Delta (NK(G))^{\frac{1}{n}}}, \tag{3.58}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Како важи да је $2m \leq n\Delta$, $NK(G) \leq \Delta^n$ и $NK(G) \leq \left(\frac{2m}{n}\right)^n$ (видети [125]), важи следећа последица теореме 3.2.7.

Последица 3.2.3. [98] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta} \tag{3.59}$$

и

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)-2m}{2m}, \tag{3.60}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Неједнакости (3.59) и (3.60) доказане су у раду [106] (видети и [110]).

Следеће три теореме доказују се на сличан начин као и теорема 3.2.7, те се њихови докази изостављају.

Теорема 3.2.8. [98] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + \frac{(n-1)^4}{(n-2)(2m-\Delta)+(n-1)(NK(G))^{\frac{1}{n-1}}\Delta^{-\frac{1}{n-1}}},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је или $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.9. [98] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\delta}{\delta} + \frac{(n-1)^4}{(n-2)(2m-\delta)+(n-1)(NK(G))^{\frac{1}{n-1}}\delta^{-\frac{1}{n-1}}},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.10. [98] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада важи*

$$\begin{aligned} Kf(G) \ \geq \ & \frac{(n-1)(\Delta+\delta)-\Delta\delta}{\Delta\delta} \\ + \ & \frac{(n-1)(n-2)^3}{(n-3)(2m-\Delta-\delta)+(n-2)(NK(G))^{\frac{1}{n-2}}\Delta^{-\frac{1}{n-2}}\delta^{-\frac{1}{n-2}}}, \end{aligned}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

У следећој теореми одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m, Δ и $NK(G)$, тј. која припада класи $I(n,m,\Delta,NK(G))$.

Теорема 3.2.11. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + \frac{(n-1)^2}{n-2}\left(\frac{(n-1)^2}{2m-\Delta} - \left(\frac{\Delta}{NK(G)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right), \tag{3.61}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. Неједнакост (1.12) се може посматрати у облику

$$(n-2)\sum_{i=2}^{n} a_i \geq \left(\sum_{i=2}^{n} \sqrt{a_i}\right)^2 - (n-1)\left(\prod_{i=2}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

За $a_i = \dfrac{1}{d_i}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, она постаје

$$(n-2)\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 - (n-1)\left(\prod_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

тј.

$$(n-2)\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)^2 - (n-1)\left(\frac{\Delta}{NK(G)}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

На основу ове неједнакости и неједнакости (3.48) важи неједнакост

$$(n-2)\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \frac{(n-1)^3}{2m-\Delta} - (n-1)\frac{\Delta^{\frac{1}{n-1}}}{(NK(G))^{\frac{1}{n-1}}},$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \frac{1}{\Delta} + \frac{n-1}{n-2}\left(\frac{(n-1)^2}{2m-\Delta} - \frac{\Delta^{\frac{1}{n-1}}}{(NK(G))^{\frac{1}{n-1}}}\right). \tag{3.62}$$

Неједнакост (3.61) сада следи на основу неједнакости (3.62) и (3.25).

Једнакост у (3.62) важи ако и само ако је $d_2 = d_3 = \cdots = d_n$. Како једнакост у (3.25) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$, тада ће једнакост у (3.61) важити ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

□

Како је $2m \leq n\Delta$, важи следећа последица теореме 3.2.11.

Последица 3.2.4. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова . Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{(n-1)(n^2-n-1)-(n-2)\Delta}{(n-2)\Delta} - \frac{(n-1)^2}{n-2}\left(\frac{\Delta}{NK(G)}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Како је $NK(G) \geq n-1$ (видети [67]), важи следећа последица теореме 3.2.11.

Последица 3.2.5. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + \frac{(n-1)^2}{n-2}\left(\frac{(n-1)^2}{2m-\Delta} - \left(\frac{\Delta}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{1,n-1}$.

Нека је $t = t(G)$ укупан број разапињућих стабала графа G. У раду [78] је доказано да важи

$$NK(G) \geq (n-1)t.$$

На основу ове неједнакости важи следећа последица теореме 3.2.11.

Последица 3.2.6. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + \frac{(n-1)^2}{n-2}\left(\frac{(n-1)^2}{2m-\Delta} - \left(\frac{\Delta}{t(n-1)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{1,n-1}$.

Следеће две теореме доказују се на сличан начин као и теорема 3.2.11, те се њихови докази изостављају.

Теорема 3.2.12. [100] *Нека је G прост повезан графа са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\delta}{\delta} + \frac{(n-1)^2}{n-2}\left(\frac{(n-1)^2}{2m-\delta} - \left(\frac{\delta}{NK(G)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.13. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 4$ чворова и m грана. Тада важи*

$$\begin{aligned} Kf(G) \;\; &\geq \;\; \frac{(n-1)(\Delta+\delta)-\Delta\delta}{\Delta\delta} \\ &+ \;\; \frac{(n-1)(n-2)}{n-3}\left(\frac{(n-2)^2}{2m-\Delta-\delta} - \left(\frac{\Delta\delta}{NK(G)}\right)^{\frac{1}{n-2}}\right), \end{aligned}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Последица 3.2.7. [100] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 4$ чворова и m грана. Тада важи*

$$\begin{aligned} Kf(G) \;\; &\geq \;\; \frac{(n-1)(\Delta+\delta)-\Delta\delta}{\Delta\delta} \\ &+ \;\; \frac{(n-1)(n-2)}{n-3}\left(\frac{(n-2)^2}{2m-\Delta-\delta} - \left(\frac{\Delta\delta}{(n-1)t}\right)^{\frac{1}{n-2}}\right), \end{aligned}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_{1,n-1}$.

У следећој теореми је одређена доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, δ, Δ и $NK(G)$, тј. која припада класи $I(n, \delta, \Delta, NK(G))$.

Теорема 3.2.14. [98] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$(3.63) \qquad Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-(\Delta+\delta)}{\Delta+\delta} + \frac{n(n-1)\Delta\delta}{(\Delta+\delta)(NK(G))^{\frac{2}{n}}} + \frac{(\Delta-\delta)^2}{\Delta\delta},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. За $p_i = \frac{\frac{1}{d_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}}$, $a_i = d_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, $R = d_i = \Delta$, $r = d_n = \delta$, неједнакост (1.4) постаје

$$\frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}} + \Delta\delta\,\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}} \leq \Delta+\delta\,,$$

тј.

$$(3.64) \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} \geq \frac{n+\Delta\delta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i^2}}{\Delta+\delta}.$$

За $a_i = \frac{1}{d_{n-i+1}}$, $i = 1,2,\ldots,n$, неједнакост (1.10) постаје

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i^2} \geq n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i^2}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\Delta}\right)^2,$$

тј.

$$(3.65) \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i^2} \geq \frac{n}{(NK(G))^{\frac{2}{n}}} + \frac{(\Delta-\delta)^2}{\delta\Delta}\,.$$

Сада се на основу неједнакости (3.64), (3.65) и (3.25) добија неједнакост (3.63).

Једнакост у (3.64) важи ако и само ако је $\Delta = d_1 = d_2 = \cdots = d_n = \delta$, или ако за неко k, $1 \leq k \leq n-1$, важи да је $\Delta = d_1 = \cdots = d_k \geq d_{k+1} = \cdots = d_n = \delta$. Једнакост у (3.65) важи ако и само ако је $d_2 = \cdots = d_{n-1} = \sqrt{d_1 d_n}$. Дакле, једнакости у неједнакостима (3.64) и (3.65) важе ако и само ако је $\Delta = d_1 = d_2 = \cdots = d_n = \delta$. У том случају неједнакост (3.63) постаје

$$(3.66) \qquad Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-d}{d}\,.$$

Ова неједнакост је доказана у раду [118]. Једнакост у неједнакости (3.66), а самим тим и у неједнакости (3.63), важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$. □

У следећој теореми је одређена доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, δ, Δ и тополошког индекса Π_1, тј. која припада класи $I(n,\delta,\Delta,\Pi_1)$.

Теорема 3.2.15. [105] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова. Тада важи*

$$Kf(G) \geq -1 + n(n-1)\frac{(\Delta+\delta)^{\frac{2}{n}}}{(2\sqrt{\Delta\delta})^{\frac{2}{n}}}\left(\Pi_1\right)^{-\frac{1}{2n}}. \tag{3.67}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. За $a_i = \frac{1}{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_1 = \frac{1}{\delta}$, $a_n = \frac{1}{\Delta}$, неједнакост (1.11) постаје

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}}{n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}\right)^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{\left(\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}+\sqrt{\frac{\delta}{\Delta}}\right)^{\frac{2}{n}}}{2^{\frac{2}{n}}}, \tag{3.68}$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} \geq \frac{n(\Delta+\delta)^{\frac{2}{n}}}{(4\Delta\delta)^{\frac{1}{n}}}\left(\Pi_1\right)^{-\frac{1}{2n}}. \tag{3.69}$$

На основу неједнакости (3.69) и (3.25) добија се неједнакост (3.67).

Једнакост у (3.68) важи ако и само ако је $d_2 = \cdots = d_{n-1} = \frac{2d_1d_n}{d_1+d_n}$, тј. ако и само ако је $d_1 = d_2 = \cdots = d_{n-1} = d_n$. Како једнакост у (3.25) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$, следи да једнакост у (3.67) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$. □

Следеће три теореме доказују се на сличан начин као и теорема 3.2.15, те се њихови докази изостављају.

Теорема 3.2.16. [105] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + (n-1)^2\frac{(\Delta_1+\delta)^{\frac{2}{n-1}}}{(4\Delta_1\delta)^{\frac{1}{n-1}}}\left(\frac{\Pi_1}{\Delta^2}\right)^{-\frac{1}{2(n-1)}}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.17. [105] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\delta}{\delta} + (n-1)^2\frac{(\Delta+\delta_1)^{\frac{2}{n-1}}}{(4\Delta\delta_1)^{\frac{1}{n-1}}}\left(\frac{\Pi_1}{\delta^2}\right)^{-\frac{1}{2(n-1)}}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.18. [105] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 4$ чворова. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{(n-1)(\Delta+\delta)-\Delta\delta}{\Delta\delta} + (n-1)(n-2)\frac{(\Delta_1+\delta_1)^{\frac{2}{n-2}}}{(4\Delta_1\delta_1)^{\frac{1}{n-2}}}\left(\frac{\Pi_1}{\Delta^2\delta^2}\right)^{-\frac{1}{2(n-2)}}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.19. [105] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова. Тада важи*

$$Kf(G) \geq -1 + n(n-1)\left(\Pi_1\right)^{-\frac{1}{2n}} + (n-1)\frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{\Delta\delta}. \tag{3.70}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. За $a_i = \frac{1}{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_1 = \frac{1}{\delta}$, $a_n = \frac{1}{\Delta}$, неједнакост (1.10) постаје

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} - n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\right)^2, \tag{3.71}$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} \geq n\left(\Pi_1\right)^{-\frac{1}{2n}} + \frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{\Delta\delta}. \tag{3.72}$$

Коначно, на основу неједнакости (3.25) и (3.72) добија се неједнакост (3.70).

Једнакост у (3.71) важи ако и само ако је $d_2 = \cdots = d_{n-1} = \sqrt{\Delta\delta}$, тј. ако и само ако је $\Delta = d_1 = \cdots = d_n = \delta$. Једнакост у (3.25) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \in \Gamma_d$. Према томе, једнакост у (3.70) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$. □

Како важи да је $\Pi_1 = (NK(G))^2$ и како је $NK(G) \leq (n-1)^n$, $NK(G) \leq \left(\frac{M_1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$, $NK(G) \leq \left(\frac{2m}{n}\right)^n$ (видети [125]), и на основу неједнакости (3.70) важи следећа последица теореме 3.2.19.

Последица 3.2.8. [98] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова. Тада је*

$$Kf(G) \geq n - 1 + (n-1)\frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{\Delta\delta},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$,

$$Kf(G) \geq \frac{n\sqrt{n}(n-1) - \sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1}} + (n-1)\frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{\Delta\delta},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$,

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1) - 2m}{2m} + (n-1)\frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{\Delta\delta}, \tag{3.73}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Напомена 3.2.5. [98] *Неједнакост* (3.73) *је строжија од неједнакости* (3.60). *Како важи да је* $2m \leq n\Delta$, *на основу неједнакости* (3.73) *добијамо да је*

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta} + \frac{n\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}{2\Delta\delta},$$

која је строжија од неједнакости (3.59).

Следеће три теореме доказују се на сличан начин као и теорема 3.2.19, те се њихови докази изостављају.

Теорема 3.2.20. [105] *Нека је* G *прост повезан граф са* $n \geq 3$ *чворова. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\Delta}{\Delta} + (n-1)^2\left(\frac{\Pi_1}{\Delta^2}\right)^{-\frac{1}{2(n-1)}} + (n-1)\frac{\left(\sqrt{\Delta_2}-\sqrt{\delta}\right)^2}{\Delta_2\delta}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ *или* $G \cong K_{1,n-1}$ *или* $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.21. [105] *Нека је* G *прост повезан граф са* $n \geq 3$ *чворова. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n-1-\delta}{\delta} + (n-1)^2\left(\frac{\Pi_1}{\delta^2}\right)^{-\frac{1}{2(n-1)}} + (n-1)\frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta_2}\right)^2}{\Delta\delta_2}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ *или* $G \in \Gamma_d$.

Теорема 3.2.22. [105] *Нека је* G *прост повезан граф са* $n \geq 4$ *чворова. Тада важи*

$$\begin{aligned} Kf(G) \geq & \frac{(n-1)(\Delta+\delta)-\Delta\delta}{\Delta\delta} \\ & + (n-1)(n-2)\left(\frac{\Pi_1}{\Delta^2\delta^2}\right)^{-\frac{1}{2(n-2)}} + (n-1)\frac{\left(\sqrt{\Delta_2}-\sqrt{\delta_2}\right)^2}{\Delta_2\delta_2}. \end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ *или* $G \cong K_{1,n-1}$ *или* $G \in \Gamma_d$.

Како је $\Pi_1 = (NK(G))^2$ и $NK(G) \leq \Delta^n$ (видети [125]) важи следећа последица теореме 3.2.20 .

Последица 3.2.9. [98] *Нека је* G *прост повезан граф са* $n \geq 3$ *чворова. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta} + +(n-1)\frac{\left(\sqrt{\Delta_2}-\sqrt{\delta}\right)^2}{\Delta_2\delta}.$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ *или* $G \in \Gamma_d$.

Напомена 3.2.6. [105] *Доње границе за $Kf(G)$ дате неједнакостима (3.67) и (3.70) зависе од истих параметара n, Δ, δ и тополошког индекса Π_1. Једнакости се достижу при истим условима, тј. ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$. Међутим, ове границе нису упоредиве. На пример, за $G \cong K_{1,n-1}$ неједнакост (3.67) је строжија од неједнакости (3.70), али за $G \cong P_n$ неједнакост (3.70) је строжија од неједнакости (3.67) за $n \geq 5$. Исто важи и за поређење неједнакости у теоремама 3.2.16, 3.2.17 и 3.2.18 са неједнакостима у теоремама 3.2.20, 3.2.21 и 3.2.22.*

У следећим теоремама одређене су доње границе за $Kf(G)$ које зависе од параметара $n, \Delta, \Delta_2, \delta$ и броја спрежних стабала у графу G, $t = t(G)$, тј. границе из класе $I(n, \Delta, \Delta_2, \delta, t)$.

Теорема 3.2.23. [105] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n}{1+\Delta} + n(n-2)\left(\frac{\Delta+1}{nt}\right)^{\frac{1}{n-2}} + n\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}}\right)^2, \tag{3.74}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$ или $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, под условом да је n паран број.

Доказ. На основу неједнакости (1.10) важи

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} - (n-2)(a_2 a_3 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-2}} \geq \left(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_{n-1}}\right)^2 .$$

За $a_i = \dfrac{1}{\mu_{n-i-1}}$, $i = 2, \ldots, n-1$, ова неједнакост постаје

$$\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{\mu_i} - (n-2)\left(\prod_{i=2}^{n-1} \frac{1}{\mu_i}\right)^{\frac{1}{n-2}} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right)^2,$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i} \geq \frac{1}{\mu_1} + (n-2)\left(\prod_{i=2}^{n-1} \frac{\mu_1}{\mu_i}\right)^{\frac{1}{n-2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right)^2 . \tag{3.75}$$

Очигледно је да једнакост у (3.75), тј. (3.74), важи ако је $G \cong K_n$. Према томе, претпоставимо да је $G \neq K_n$. У том случају, како је $\mu_2 \geq \Delta_2$ (видети [93]) и $\mu_{n-1} \leq \delta$ (видети [53]), неједнакост (3.75) постаје

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i} \geq \frac{1}{\mu_1} + (n-2)\left(\frac{\mu_1}{nt}\right)^{\frac{1}{n-2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}}\right)^2 .$$

Сада, посматрајмо функцију $g(x) = \frac{1}{x} + (n-2)\left(\frac{x}{nt}\right)^{\frac{1}{n-2}}$. Доказано је да је монотоно растућа за $x \geq 1 + \Delta$ и $x \geq (nt)^{\frac{1}{n-1}}$ (видети [33]). Како је $\mu_1 \geq 1 + \Delta$ (видети [97]) и $\mu_1 \geq (nt)^{\frac{1}{n-1}}$, следи да је

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i}\geq\frac{1}{1+\Delta}+(n-2)\left(\frac{1+\Delta}{nt}\right)^{\frac{1}{n-2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}-\frac{1}{\sqrt{\Delta_2}}\right)^2,$$

одакле следи неједнакост (3.74).

Једнакост у (3.75) важи ако и само ако је $\mu_2=\cdots=\mu_{n-1}$, па једнакост у (3.74) важи ако и само ако је $G\cong K_n$ или $G\cong K_{1,n-1}$ или $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, ако је n паран број(видети [34]).

□

На сличан начин доказује се следећа теорема, те из тог разлога доказ изостављамо.

Теорема 3.2.24. [105] *Нека је G прост повезан граф са $n\geq 3$ чворова. Тада важи*

$$Kf(G)\geq\frac{n}{1+\Delta}+n(n-2)\left(\frac{1+\Delta}{nt}\right)^{\frac{1}{n-2}}\left(\frac{\Delta_2+\delta}{2\sqrt{\Delta_2\delta}}\right)^{\frac{2}{n-2}}. \tag{3.76}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G\cong K_n$ или $G\cong K_{1,n-1}$ или $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, под условом да је n паран број.

Напомена 3.2.7. [105] *У раду [33] је доказана неједнакост*

$$Kf(G)\geq\frac{n}{1+\Delta}+n(n-2)\left(\frac{\Delta+1}{nt}\right)^{\frac{1}{n-2}}, \tag{3.77}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G\cong K_n$ или $G\cong K_{1,n-1}$.
Како је

$$\left(\frac{\Delta_2+\delta}{2\sqrt{\Delta_2\delta}}\right)^{\frac{2}{n-2}}\geq 1,$$

неједнакост (3.76) *је строжија од неједнакости* (3.77).

У следећој теореми одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m, Δ и од броја разапињућих стабала у графу G, $t=t(G)$, тј. граница из класе $I(n,m,\Delta,t)$.

Теорема 3.2.25. [55] *Нека је G прост повезан граф са $n\geq 2$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G)\geq 1+\frac{n(n-2)^3}{(n-3)(2m-\Delta-1)+(n-2)\left(\frac{nt}{1+\Delta}\right)^{\frac{1}{n-2}}}. \tag{3.78}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G\cong K_n$ или $G\cong K_{1,n-1}$ или $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, за паран број n.

Доказ. За $r=3$ неједнакост (1.9) може се посматрати у облику

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} p_i\right)^2 \sum_{i=2}^{n-1} p_i a_i^3 \geq \left(\sum_{i=2}^{n-1} p_i a_i\right)^3 .$$

За $p_i=\sqrt{\mu_i}$ и $a_i=\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}$, $i=2,3,\ldots,n-1$, ова неједнакост постаје

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{\mu_i}\right)^2 \left(\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{\mu_i}\right) \geq (n-2)^3 . \tag{3.79}$$

Слично, неједнакост (1.12) може се посматрати у облику

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{a_i}\right)^2 \leq (n-3)\sum_{i=2}^{n-1} a_i + (n-2)\left(\prod_{i=2}^{n-1} a_i\right)^{\frac{1}{n-2}} .$$

За $a_i=\mu_i$, $i=2,3,\ldots,n-1$, ова неједнакост постаје

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{\mu_i}\right)^2 \leq (n-3)\sum_{i=2}^{n-1} \mu_i + (n-2)\left(\prod_{i=2}^{n-1} \mu_i\right)^{\frac{1}{n-2}} ,$$

тј.

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{\mu_i}\right)^2 \leq (n-3)(2m-\mu_1) + (n-2)\left(\frac{nt}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{n-2}} . \tag{3.80}$$

На основу неједнакости (3.79) и (3.80) добија се да је

$$\left((n-3)(2m-\mu_1) + (n-2)\left(\frac{nt}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{n-2}}\right)\frac{1}{n}\left(Kf(G)-\frac{n}{\mu_1}\right) \geq (n-2)^3 .$$

Како важи да је (видети [94, 97])

$$1+\Delta \leq \mu_1 \leq n ,$$

на основу горе наведеног следи да је

$$\left((n-3)(2m-\Delta-1) + (n-2)\left(\frac{nt}{1+\Delta}\right)^{\frac{1}{n-2}}\right)(Kf(G)-1) \geq n(n-2)^3 , \tag{3.81}$$

одакле се добија неједнакост (3.83).

Једнакости у (3.79) и (3.80) важе ако и само ако је $\mu_2=\mu_3=\cdots=\mu_{n-1}$. Једнакост у (3.81) важи ако и само ако је $\mu_1=1+\Delta=n$ и $\mu_2=\mu_3=\cdots=\mu_{n-1}$. Према томе, (видети [34]), једнакости у (3.83) важи ако и само ако је $G\cong K_n$ или $G\cong K_{1,n-1}$ или $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ за паран број n, □

Последица 3.2.10. [55] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова. Тада је*

$$Kf(G) \geq 1 + \frac{n(n-2)^3}{(n-3)(n\Delta - \Delta - 1) + (n-2)\left(\frac{nt}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{n-2}}},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

Последица 3.2.11. [55] *Нека је T стабло са $n \geq 2$ чворова. Тада важи*

$$Kf(T) \geq 1 + \frac{n(n-2)^3}{(n-3)(2n - \Delta - 3) + (n-2)\left(\frac{n}{1+\Delta}\right)^{\frac{1}{n-2}}},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $T \cong K_{1,n-1}$.

Сличним поступком као у теореми 3.2.25 доказују се следеће две теореме, те из тог разлога њихове доказе изостављамо.

Теорема 3.2.26. *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)^3}{2m(n-2) + (n-1)(nt)^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{3.82}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

Теорема 3.2.27. *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана, и нека је k произвољан реалан број са особином $\mu_{n-1} \geq k > 0$. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{n}{k} + \frac{n(n-2)^3}{(n-3)(2m-\delta) + (n-2)(\frac{nt}{\delta})^{\frac{1}{n-2}}}, \tag{3.83}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $k = n$ и $G \cong K_n$.

Теорема 3.2.28. [55] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада важи*

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)}{(nt)^{\frac{1}{n-1}}} + n\frac{\left(\sqrt{\Delta+1} - \sqrt{\delta}\right)^2}{\delta(\Delta+1)}, \tag{3.84}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

Доказ. За $a_i = \dfrac{1}{\mu_{n-i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, неједнакост (1.10) постаје

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i} \geq (n-1)\left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)^2,$$

тј.

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)}{(nt)^{\frac{1}{n-1}}} + n\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)^2. \tag{3.85}$$

Једнакост у (3.85) важи ако је граф G комплетан граф. Претпоставимо да G није комплетан граф. Тада је [53]

$$\mu_{n-1} \leq \delta\,.$$

На основу ове неједнакости, неједнакости $\mu_1 \geq 1+\Delta$ и неједнакости (3.85) добија се неједнакост (3.84).
Једнакост у (3.85) важи ако и само ако је $\mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_{n-2} = \sqrt{\mu_1 \mu_{n-1}}$. □

У следећој теореми одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара $t = t(G)$, n и k, где је k произвољан реалан број такав да је $\mu_{n-1} \geq k > 0$.

Теорема 3.2.29. [55] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова. Тада за било који реалан број k са особином $\mu_{n-1} \geq k > 0$, важи*

$$Kf(G) \geq \frac{2n(n-1)\sqrt{nk}}{(n+k)(nt)^{\frac{1}{n-1}}}\,. \tag{3.86}$$

Једнакост важи ако и само ако је $k = n$ и $G \cong K_n$.

Доказ. За $p_i = \dfrac{\mu_i^{-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i}}$, $a_i = \mu_i$, $R = \mu_1$, $r = \mu_{n-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, неједнакост (1.7) постаје

$$\frac{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n-1} \mu_i^{-2}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i}\right)^2} \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_{n-1}}} + \sqrt{\frac{\mu_{n-1}}{\mu_1}}\right)^2,$$

тј.

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i^2} \leq \frac{1}{4n^2}\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_{n-1}}} + \sqrt{\frac{\mu_{n-1}}{\mu_1}}\right)^2 Kf(G)^2\,. \tag{3.87}$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине за реалне бројеве (видети [113]) следи да је

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i^2} \geq (n-1)\left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i^2}\right)^{\frac{1}{n-1}} = (n-1)(nt)^{-\frac{2}{n-1}}\,.$$

На основу ове неједнакости и неједнакости (3.87) добија се да је

$$\frac{4n^2(n-1)^2}{(nt)^{\frac{2}{n-1}}} \leq \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_{n-1}}} + \sqrt{\frac{\mu_{n-1}}{\mu_1}}\right)^2 Kf(G)^2\,. \tag{3.88}$$

Како важи да је $\mu_1 \leq n$ и $\mu_{n-1} \geq k > 0$ следи да је

$$\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_{n-1}}} + \sqrt{\frac{\mu_{n-1}}{\mu_1}}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\frac{n}{k}} + \sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2 = \frac{(n+k)^2}{nk}\,.$$

На основу ове неједнакости и неједнакости (3.88) добија се да је

$$Kf(G)^2 \geq \frac{4n^2(n-1)^2nk}{(n+k)^2(nt)^{\frac{2}{n-1}}},$$

одакле следи неједнакост (3.86). $\square$

У следећој теореми одређена је доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m и тополошког индекса R_{-1}, тј. припада класи $I(n, m, R_{-1})$.

Теорема 3.2.30. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)-m}{m} - 2(n-1)R_{-1}. \tag{3.89}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{r,n-r}$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. Уочимо да важе следеће једнакости

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = \sum_{v_i \sim v_j} \left(\frac{1}{d_i^2} + \frac{1}{d_j^2} \right) = \sum_{v_i \sim v_j} \frac{d_i^2 + d_j^2}{(d_i d_j)^2} = \sum_{v_i \sim v_j} \left(\frac{d_i + d_j}{d_i d_j} \right)^2 - \sum_{i \sim j} \frac{2}{d_i d_j} \tag{3.90}$$

$$= \sum_{v_i \sim v_j} \left(\frac{d_i + d_j}{d_i d_j} \right)^2 - 2R_{-1}.$$

За $r = 2,\ p_i = 1$ и $a_i = \dfrac{d_i + d_j}{d_i d_j}$, при чему се сумирање врши по свим гранама графа G, неједнакост (1.9) постаје

$$\sum_{v_i \sim v_j} \left(\frac{d_i + d_j}{d_i d_j} \right)^2 \geq m^{-1} \left(\sum_{v_i \sim v_j} \frac{d_i + d_j}{d_i d_j} \right)^2 = \frac{n^2}{m}. \tag{3.91}$$

На основу једнакости (3.90) и неједнакости (3.91) добија се неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \frac{n^2}{m} - 2R_{-1}. \tag{3.92}$$

На основу неједнакости (3.92) и неједнакости (3.25) добија се неједнакост

$$Kf(G) \geq -1 + (n-1)\left(\frac{n^2}{m} - 2R_{-1} \right), \tag{3.93}$$

одакле следи неједнакост (3.89).

Једнакост у (3.91) важи ако и само ако за свака два пара суседних чворова, $v_i \sim v_j$ и $v_k \sim v_l$, тј. за сваке две гране графа G, важи једнакост

$$\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} = \frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_l}\ .$$

Нека су v_j и v_k, произвољни чворови графа G суседни са чвором v_i, тј. $v_i \sim v_j$ и $v_i \sim v_k$. Тада на основу претходне једнакости важи

$$\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} = \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_k}\ ,$$

тј. $d_j = d_k$. Како је G повезан граф, једнакост у (3.91) важи ако и само ако је G регуларан или семирегуларан бипартитни (бирегуларан) граф. Једнакост у (3.25) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{r,n-r}$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ или $G \in \Gamma_d$. То значи да једнакост у (3.89) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{r,n-r}$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ или $G \in \Gamma_d$. $\square$

Напомена 3.2.8. [107] *На основу неједнакости* (3.89), *као специјалан случај, може се добити неједнакост (3.7).*

Како је, на основу једнакости (3.90)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = \sum_{v_i \sim v_j} \frac{d_i^2 + d_j^2}{(d_i d_j)^2}\ ,$$

на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, за реалне бројеве, важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \sum_{v_i \sim v_j} \frac{2 d_i d_j}{(d_i d_j)^2} = 2R_{-1}\ .$$

На основу ове неједнакости и неједнакости (3.25) важи неједнакост (3.35). Сада, на основу неједнакости (3.89) и неједнакости (3.35) важи неједнакост

$$2Kf(G) \geq -1 + \frac{n^2(n-1) - m}{m}\ ,$$

тј.

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1) - 2m}{2m}\ .$$

Напомена 3.2.9. [107] *Нека је G повезан d-регуларан граф,* $1 \leq d \leq n-1$. *На основу неједнакости* (3.89) *добија се неједнакост* (3.12).

Напомена 3.2.10. [107] *Неједнакост* (3.89) *је строжија од неједнакости* (3.35), *на пример, када је* $G \cong P_n$ *или* $G \cong K_{r,n-r}$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. *Међутим, није пронађен ниједан повезан граф за који је неједнакост* (3.35) *строжија од неједнакости* (3.89). *Према томе, отворено је питање да ли је неједнакост* (3.89) *увек строжија од неједнакости* (3.35).

Како није експлицитно доказано да је неједнакост (3.89) увек строжија од неједнакости (3.35) , следи следећа претпоставка као еквивалентан проблем.

Претпоставка 3.2.1. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$R_{-1} \leq \frac{n^2}{4m} \leq \frac{n^2}{4(n-1)} \ .$$

У следећој теореми биће одређена доња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m и инваријанти M_2 и $IRLF$, тј. границу из класе $I(n, m, M_2, IRLF)$.

Теорема 3.2.31. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1) - 2m}{2m} + \frac{(n-1)(IRLF)^2}{2M_2} \ . \tag{3.94}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{r,n-r}$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. Уочимо да важе једнакости

(3.95)
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = \sum_{v_i \sim v_j} \frac{d_i^2 + d_j^2}{(d_i d_j)^2} = \sum_{v_i \sim v_j} \left(\frac{d_i - d_j}{d_i d_j} \right)^2 + \sum_{v_i \sim v_j} \frac{2}{d_i d_j} = \sum_{v_i \sim v_j} \left(\frac{d_i - d_j}{d_i d_j} \right)^2 + 2R_{-1} \ .$$

За $r = 1$, $x_i = \dfrac{|d_i - d_j|}{\sqrt{d_i d_j}}$ и $a_i = d_i d_j$, при чему се сумирање врши по свим гранама графа G, неједнакост (1.13) постаје

$$\sum_{v_i \sim v_j} \frac{\left(\frac{|d_i - d_j|}{\sqrt{d_i d_j}} \right)^2}{d_i d_j} \geq \frac{\left(\sum\limits_{v_i \sim v_j} \frac{|d_i - d_j|}{\sqrt{d_i d_j}} \right)^2}{\sum\limits_{v_i \sim v_j} d_i d_j} = \frac{(IRLF)^2}{M_2} \ . \tag{3.96}$$

На основу једнакости (3.95) и неједнакости (3.96) добија се неједнакост

$$\sum_{v_i \sim v_j} \frac{1}{d_i} \geq \frac{(IRLF)^2}{M_2} + 2R_{-1} \ .$$

На основу ове неједнакости и неједнакости (3.92) важи неједнакост

$$\sum_{v_i \sim v_j} \frac{1}{d_i} \geq \frac{n^2}{2m} + \frac{(IRLF)^2}{2M_2} \ .$$

Неједнакост (3.94) добија се на основу ове неједнакости и неједнакости (3.25) .

Једнакост у (3.92) важи ако и само ако је G регуларан или семирегуларан бипартитни (бирегуларан) граф. Једнакост у (3.25) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{r,n-r}$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ или $G \in \Gamma_d$. То значи да једнакост у (3.94) важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{r,n-r}$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ или $G \in \Gamma_d$.

□

Напомена 3.2.11. [107] *Како је* $\dfrac{(n-1)(IRLF)^2}{2M_2} \geq 0$ *неједнакост (3.94) је строжија од неједнакости (3.7).*

Како је $2m \leq n\Delta$ на основу неједнакости (3.94) важи неједнакост

$$Kf(G) \geq \frac{n(n-1)-\Delta}{\Delta} + \frac{(n-1)(IRLF)^2}{2M_2} ,$$

која је строжија од неједнакости (3.11).

Последица 3.2.12. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)-2m}{2m} + \frac{(n-1)(IRLA)^2}{2M_2} . \tag{3.97}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Доказ. Како је

$$IRLF = \sum_{v_i \sim v_j} \frac{|d_i - d_j|}{\sqrt{d_i d_j}} \geq 2 \sum_{v_i \sim v_j} \frac{|d_i - d_j|}{d_i + d_j} = IRLA ,$$

на основу ове неједнакости и неједнакости (3.94) добија се неједнакост (3.97). □

Сличним поступком као у теореми 3.2.31 доказује се и следећи резултат.

Теорема 3.2.32. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)-2m}{2m} + \frac{(n-1)(Alb)^2}{2R_2} . \tag{3.98}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{r,n-r}$, $1 \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ или $G \in \Gamma_d$.

Напомена 3.2.12. [107] *Како је* $\dfrac{(n-1)(Alb)^2}{2R_2} \geq 0$ *неједнакост (3.98) је строжија од неједнакости (3.7).*

Како је $2R_2 \leq n(n-1)^5$ (видети [71]), важи следећа последица теореме 3.2.32.

Последица 3.2.13. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана. Тада је*

$$Kf(G) \geq \frac{n^2(n-1)-2m}{2m} + \frac{(Alb)^2}{n(n-1)^4} . \tag{3.99}$$

Једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \in \Gamma_d$.

Глава 4

Горње границе за Кирхофов индекс

4.1 Познати резултати

У овом одељку биће дат преглед познатих горњих граница за Кирхофов индекс графа [110].

Међу многим радовима везаним за проучавање граница за Кирхофов индекс много је више оних који проучавају доње границе у односу на оне које проучавају горње границе.

У раду [145] (видети и [120]) одређена је следећа горња граница за $Kf(G)$ у класи $I(n)$

$$Kf(G) \leq Kf(P_n) = \frac{n^3 - n}{6} \,. \tag{4.1}$$

Дата граница је најстрожија могућа горња граница за $Kf(G)$ у класи $I(n)$.

За графове G_p, $2 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, добијене брисањем p грана из комплетног графа K_n, у раду [139] доказана је следећа неједнакост

$$Kf(G_p) \leq n - 1 - p + \frac{n}{n-1-p} + \frac{n(p-1)\delta}{(n-1)(n-1-p)} \,, \tag{4.2}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G_p = K_n - K_{1,p}$.

Нека је k произвољан реалан број такав да је $\mu_{n-1} \geq k > 0$.

У раду [116] је одређена једна горња граница за $Kf(G)$ у класи $I(n,m,k)$. Доказано је да важи

$$Kf(G) \leq \frac{(n+k)(n-1) - 2m}{k} \,, \tag{4.3}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $k=n$ и $G\cong K_n$, или $k=1$ и $G\cong K_{1,n-1}$, или $k=\frac{n}{2}$ и $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, или $k=n-2$ и $G\cong K_n-e$.

Као што се може приметити, неједнакост (4.3) је веома строга, јер се једнакост достиже у више случајева. Дакле, погодно је користити неједнакост (4.3) за добијање горње границе за $Kf(G)$ увек када постоји добра процена доње границе за μ_{n-1}.

У раду [117] одређена је следећа горња граница за $Kf(G)$ из класе $I(n,m,\Delta,k)$

$$Kf(G)\leq n\,\frac{\Delta+1+k(n-1)+n(n-2)-2m}{k(\Delta+1)}\,, \tag{4.4}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $k=n$ и $G\cong K_n$, или ако је $k=1$ и $G\cong K_{1,n-1}$, или $k=n-2$ и $G\cong K_n-e$.

У раду [144] је доказано да важи

$$Kf(G)\leq\binom{n-\Delta+3}{3}+(\Delta-1)\binom{n-\Delta+2}{2}+(\Delta-1)(\Delta-2)\,, \tag{4.5}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G\cong K_n$ или је $G\cong P_n$. Дата неједнакост представља горњу границу за $Kf(G)$ из класе $I(n,\Delta)$.

Горња граница за $Kf(G)$ из класе $I(n,m,t,M_1)$ доказана у раду [33] дата је са

$$Kf(G)\leq\frac{n-1}{t}\left(\frac{4m^2-M_1-2m}{(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{n}}\,, \tag{4.6}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G\cong K_n$ или је $G\cong K_{1,n-1}$.

На основу претходне неједнакости и на основу неједнакости $M_1\geq\frac{4m^2}{n}$ (видети [44]), одређена је следећа горња граница за $Kf(G)$ из класе $I(n,m,t)$

$$Kf(G)\leq\frac{n-1}{t}\left(\frac{2m(2m(n-1)-1)}{n(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{n}}\,, \tag{4.7}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G\cong K_n$.

Са $D(n,a,b)$ означава се класа бипартитних графова који имају $n=p+q$ чворова и који се састоје из пута P_{n-a-b} и a независних чворова суседних са једним висећим чвором пута P_{n-a-b} и b независних чворова суседних са другим висећим чвором пута P_{n-a-b}.

За (p,q)-бипартитне графове $(p<q)$ у раду [142] је одређена следећа горња граница за $Kf(G)$

$$Kf(G) \leq \begin{cases} \frac{1}{6}(-2p+3p^2-p^3-6pq+6p^2q+3q^2+3pq^2), & (q-p)\equiv 0(\,mod 2),\\ \\ \frac{1}{6}(-3+p+3p^2-p^3-6pq+6p^2q+3q^2+3pq^2), & (q-p)\equiv 1(\,mod 2),\end{cases} \tag{4.8}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \in D(p+q, \lfloor \frac{p+q+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p-q+1}{2} \rfloor)$.

У наставку ће бити дато неколико неједнакости које се могу искористити за добијање горњих граница за $Kf(G)$ у различитим класама.

У раду [101] је доказано да важи

$$Kf(G) \leq \frac{n(n-1)^2}{2m}\left(1+\frac{(\mu_1-\mu_{n-1})^2}{\mu_1\mu_{n-1}}\,\alpha(n-1)\right), \tag{4.9}$$

где је

$$\alpha(n-1) = \frac{1}{n-1}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\left(1-\frac{1}{n-1}\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{(-1)^n+1}{2(n-1)^2}\right),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

У раду [104] је илустровано како се, на пример, може искористити неједнакост (4.9) за добијање горњих граница за $Kf(G)$ у класама $I(n,m,k,M_1)$ и $I(n,m,k)$, где је k реалан број са особином $\mu_{n-1} \geq k > 0$.

У раду [104] је доказано да важи

$$(\mu_1-\mu_{n-1})^2 \leq \frac{2}{n-1}((n-1)(M_1+2m)-4m^2)\ , \tag{4.10}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.

Нека је k произвољан реалан број, такав да је $\mu_{n-1} \geq k > 0$. Тада је

$$\mu_1\mu_{n-1} \geq k\,\frac{2m}{n-1}\ . \tag{4.11}$$

Имајући у виду неједнакости (4.9), (4.10) и (4.11) следи да је

$$Kf(G) \leq \frac{n(n-1)^2}{2m}\left(1+\frac{(n-1)(M_1+2m)-4m^2}{mk}\,\alpha(n-1)\right), \tag{4.12}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$. Дакле, одређена је горња граница за $Kf(G)$ у класи $I(n, m, k, M_1)$. Осим тога, како важи да је (видети [20])

$$M_1 \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right), \tag{4.13}$$

на основу (4.12) следи да је

$$Kf(G) \leq \frac{n(n-1)^2}{2m}\left(1 + \frac{n(n-1)-2m}{k}\,\alpha(n-1)\right), \tag{4.14}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$. Ово је такође још једна горња граница за $Kf(G)$ из класе $I(n, m, k)$.

У раду [104] је доказано да важи

$$Kf(G) \leq n\,\frac{(\mu_1 + \mu_{n-1})(n-1) - 2m}{\mu_1 \mu_{n-1}}, \tag{4.15}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је G комплетан граф или је $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ за паран број n.
Занимљиво, неједнакост (4.3) се лако добија из неједнакости (4.15). Такође, како важи да је

$$\mu_1 + \mu_{n-1} \leq n + \frac{2m}{n-1} = \frac{n(n-1)+2m}{n-1}, \tag{4.16}$$

на основу неједнакости (4.11) и (4.15) следи да је

$$Kf(G) \leq \frac{n^2(n-1)^2}{2mk}, \tag{4.17}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $k = n$ и $G \cong K_n$.

Осим тога, како је

$$\mu_1 \mu_{n-1} \geq k(1+\Delta), \tag{4.18}$$

на основу (4.15) следи да је

$$Kf(G) \leq \frac{n^2(n-1)}{k(1+\Delta)}, \tag{4.19}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $k = n$ и $G \cong K_n$.

Следеће три неједнакости могу бити такође интересантне за добијање горњих граница за $Kf(G)$.

У већ поменутом раду [101] доказане су следеће неједнакости

$$Kf(G) \leq \frac{n}{1+\Delta} + \frac{n(n-2)^2}{2m-n}\left(1 + \frac{(\mu_2 - \mu_{n-1})^2}{\mu_2 \mu_{n-1}}\,\alpha(n-2)\right), \tag{4.20}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$, и

$$Kf(G) \leq \frac{n}{1+\Delta} + n\,\frac{(\mu_2 + \mu_{n-1})(n-2) - (2m-n)}{\mu_2 \mu_{n-1}}, \tag{4.21}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$ или $G \cong K_{1,n-1}$, и

$$Kf(G) \leq \frac{n(n-1)^2}{8m}\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_{n-1}}} + \sqrt{\frac{\mu_{n-1}}{\mu_1}}\right)^2, \tag{4.22}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $G \cong K_n$.
Дате неједнакости се могу искористити за добијање горњих граница за $Kf(G)$ у разним класама (видети [47] и [103]).

4.2 Нови резултати

У следећој теореми одређена је горња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m, броја разапињућих стабала t, као и параметра k, где је k произвољан реалан броја такав да је $\mu_{n-1} \geq k > 0$.

Теорема 4.2.1. [105] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова. Тада, за било који реалан број k са особином да је $\mu_{n-1} \geq k > 0$, важи*

$$Kf(G) \leq n(n-1)(n\,t)^{-\frac{1}{n-1}} + n(n-1)^2\alpha(n-1)\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{k}\right)^2}{nk}, \tag{4.23}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $k = n$ и $G \cong K_n$.

Доказ. За $n := n-1$, $a_i = b_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $R_1 = R_2 = 1/\sqrt{\mu_{n-1}}$, $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{\mu_1}$, неједнакост (1.14) постаје

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} - \left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\right)^2 \leq (n-1)^2\alpha(n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)^2.$$

Како је $0 < \mu_1 \leq n$ и $\mu_{n-1} \geq k > 0$, следи да је

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\right)^2 + (n-1)^2\alpha(n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2. \tag{4.24}$$

За $n := n-1$, $a_i = \frac{1}{\mu_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, неједнакост (1.12) постаје

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} - (n-1)\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq (n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} - \left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\right)^2,$$

односно

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\right)^2 \leq (n-2)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} + (n-1)(nt)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{4.25}$$

На основу неједнакости (4.24) и (4.25) добија се да је

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} \leq (n-2)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} + (n-1)(nt)^{-\frac{1}{n-1}} + (n-1)^2\alpha(n-1)\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{k}\right)^2}{nk},$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i} \leq (n-1)(nt)^{-\frac{1}{n-1}} + (n-1)^2\alpha(n-1)\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{k}\right)^2}{nk},$$

одакле се добија неједнакост (4.23).

Једнакост у (4.25) важи ако и само ако је $\mu_1 = \cdots = \mu_{n-1}$, према томе, једнакост у (4.23) важи ако и само ако је $k = n$ и $G \cong K_n$.

$\square$

У следећој теореми одређена је горња граница за $Kf(G)$ која зависи од параметара n, m, као и параметра k, где је k произвољан реалан броја такав да је $\mu_{n-1} \geq k > 0$.

Теорема 4.2.2. *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова. Тада, за било који реалан број k са особином да је $\mu_{n-1} \geq k > 0$, важи*

$$Kf(G) \leq \frac{n(n-1)^2}{2m} + \left(1 + \alpha(n-1)\,\frac{(n-k)^2}{nk}\right). \tag{4.26}$$

Једнакост важи ако је $k = n$ и $G \cong K_n$.

Доказ. Како је $\mu_1 \leq n$ и $\mu_{n-1} \geq k > 0$ важи неједнакост

$$\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_{k-1}}} - \sqrt{\frac{\mu_{n-1}}{\mu_1}}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\frac{n}{k}} - \sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2 .$$

На основу ове неједнакости и неједнакости (4.9) добија се неједнакост (4.26). $\square$

Како је $\alpha(n-1) \leq \frac{1}{4}$ важи следећа последица теореме 4.2.2.

Последица 4.2.1. *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада за било који реалан број k, са особином $\mu_{n-1} \geq k > 0$, важи неједнакост*

$$Kf(G) \leq \frac{(n-1)^2(n+k)^2}{8mk} .$$

Једнакост важи ако је $k = n$ и $G \cong K_n$.

Глава 5

Веза између Кирхофовог индекса и Лапласове енергије графа

Како су и Кирхофов индекс и Лапласова енергија засноване на Лапласовом спектру, интересантно је наћи и везу између њих.

У следећој теореми одређена је веза између Кирхофовог индекса и Лапласове енергије графа.

Теорема 5.0.1. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада за произвољан реалан број k, такав да је $\mu_{n-1} \geq k > 0$, важи*

$$\left(\left(n + k - \frac{4m}{n}\right)(M_1 + 2m) - 2nkm + \frac{8m^3}{n^2}\right) Kf(G) \geq n\left(LE(G) - \frac{2m}{n}\right)^2. \tag{5.1}$$

Једнакост важи ако је $k = n$ и $G \cong K_n$.

Доказ. За $r = 1$, $n := n - 1$, $x_i = \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|$, $a_i = \frac{1}{\mu_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, неједнакост (1.13) постаје

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|\right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i}},$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|^2 \geq \frac{n\left(LE(G) - \frac{2m}{n}\right)^2}{Kf(G)}. \tag{5.2}$$

За $n := n - 1$, $p_i = \frac{\mu_i^2}{M_1 + 2m}$, $a_i = \mu_i$, $r = \mu_{n-1}$, $R = \mu_1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, неједнакост (1.4) постаје

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^3 + \mu_1\mu_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i \leq (\mu_1 + \mu_{n-1})(M_1 + 2m),$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^3 \leq (\mu_1 + \mu_{n-1})(M_1 + 2m) - 2m\mu_1\mu_{n-1}. \tag{5.3}$$

Нека је дата функција

$$f(x) = (x + \mu_{n-1})(M_1 + 2m) - 2xm\mu_{n-1}.$$

Дата функција је растућа за свако x. Отуда, за $x = \mu_1 \leq n$ важи да је $f(x) = f(\mu_1) \leq f(n)$. На основу неједнакости (5.3) добија се да је

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^3 \leq (n + \mu_{n-1})(M_1 + 2m) - 2nm\mu_{n-1}. \tag{5.4}$$

Како је функција

$$g(x) = (n + x)(M_1 + 2m) - 2nmx$$

опадајућа за свако x, за $x = \mu_{n-1} \geq k > 0$, важи да је $g(x) = g(\mu_{n-1}) \leq g(k)$. Према томе, на основу неједнакости (5.4) следи да је

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^3 \leq (n + k)(M_1 + 2m) - 2nmk. \tag{5.5}$$

С друге стране, важи следећа једнакост

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^3 - \frac{4m}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 + \frac{4m^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^3 - \frac{4m}{n}(M_1 + 2m) + \frac{8m^3}{n^2}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Неједнакост (5.1) сада следи на основу неједнакости (5.5), (5.2) и једнакости (5.6). □

На основу теореме 5.0.1 важе следеће две последице.

Последица 5.0.1. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада је*

$$\left(M_1 + 2m - \frac{4m^2(n+1)}{n^2}\right) Kf(G) \geq \left(LE(G) - \frac{2m}{n}\right)^2. \tag{5.7}$$

Једнакост важи ако је $G \cong K_n$.

Доказ. Како је $\mu_1 \leq n$, следи да је

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|^2 \leq n \sum_{i=1}^{n-1} \left|\mu_i - \frac{2m}{n}\right|^2 = n\left(M_1 + 2m - \frac{4m^2(n+1)}{n^2}\right).$$

На основу дате неједнакости и неједнакости (5.2) добија се неједнакост (5.7). □

Последица 5.0.2. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 3$ чворова и m грана. Тада је*

$$\left(\frac{2m^2}{n-1} + mn - \frac{4m^2(n+1)}{n^2}\right) Kf(G) \geq \left(LE(G) - \frac{2m}{n}\right)^2 . \tag{5.8}$$

Једнакост важи ако је $G \cong K_n$.

Доказ. Неједнакост (5.8) следи на основу неједнакости (5.7) и неједнакости

$$M_1 \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right),$$

која је доказана у [20]. □

У наставку ће бити наведене неке нове доње границе за Лапласову енергију до којих се дошло у току рада на предложеној теми.

У следећој теореми је одређена доња граница за $LE(G)$ која зависи од параметара $n, m, \Delta,\ \delta$ и првог Загребачког индекса M_1.

Теорема 5.0.2. [107] *Нека је G прост повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана, са особином да је $\Delta \neq \delta$. Тада је*

$$LE(G) \geq 2 + \frac{2(nM_1 - 4m^2)}{n(\Delta - \delta)} . \tag{5.9}$$

Доказ. За $p_i = \frac{1}{n}$, $a_i = d_i$, $r = \delta$, $R = \Delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$, неједнакост (1.16) постаје

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 \leq \frac{1}{2n}(\Delta - \delta)\sum_{i=1}^{n}\left|d_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j\right| ,$$

тј.

$$nM_1 - 4m^2 \leq \frac{n}{2}(\Delta - \delta)\sum_{i=1}^{n}\left|d_i - \frac{2m}{n}\right| . \tag{5.10}$$

На основу неједнакости (2.6) и неједнакости (5.10) следи да је

$$nM_1 - 4m^2 \leq \frac{n}{2}(\Delta - \delta)(LE(G) - 2) .$$

Како је $\Delta \neq \delta$, на основу дате неједнакости следи неједнакост (5.9). □

У случају бипартитних графова, сличним поступком као у претходној теореми, на основу неједнакости (2.5) и неједнакости (5.10), може се доказати следећа теорема.

Теорема 5.0.3. [107] *Нека је G прост бипартитан повезан граф са $n \geq 2$ чворова и m грана, са особином да је $\Delta \neq \delta$. Тада је*

$$LE(G) \geq \frac{2(nM_1 - 4m^2)}{n(\Delta - \delta)} .$$

Литература

[1] M. O. Albertson, The irregularity of a graph, *Ars Comb.* **46** (1997) 219-225.

[2] D. Andrica, C. Badea, Grüs inequality for positive linear functionals, *Period. Math. Hungar.* **19** (1988) no. 2. 155-167.

[3] E. O. D. Andriantiana, Laplacian Energy, In: Energies of Graphs-Theory and Applications (I. Gutman, X. Li, Eds.), *Mathematical Chemistry Monographs MCM 17*, Univ. Kragujevac, Kragujevac, (2016) pp. 49-80.

[4] A. R. Ashrafi, T. Došlić, A. Hamzeh, The Zagreb coindices of graph operations, *Discr. Appl. Math.* **158** (2010) 1571-1578.

[5] A. T. Balaban, I. Motoc, D. Bonchev, O. Mekenyan, Topological indices for structure-activity corrections, *Topics Curr. Chem.* **114** (1993) 21-55.

[6] B. Bollobás, P. Erdős, Graphs of extremal weights, *Ars Comb.* **50** (1998) 225-233.

[7] M. Bianchi, A. Cornaro, A. Torriero, A majorization method for localizing graph topological indices, *Discr. Appl. Math.* **161** (2013) 2731-2739.

[8] M. Bianchi, A. Cornaro, J. L. Palacios, A. Torriero, Bounds for the Kirchhoff index via majorization technique, *J. Math. Chem.* **51** (2013) 569-587.

[9] M. Bianchi, A. Cornaro, A. Torriero, Majorization under constraints and bounds of the second Zagreb index, *Math. Ineq. Appl.* **16** (2013) 329-347.

[10] M. Bianchi, G. P. Clemente, A. Cornaro, J. L. Palacios, A. Torriero, New Trends in Majorization Techniques for Bounding Topological Indices, In: Bounds in Chemical Graph Theory- Basics (I. Gutman, B. Furtula, K. C. Das, E. Milovanović, I. Milovanović, Eds.), *Mathematical Chemistry Monographs MCM 19*, Univ. Kragujevac, Kragujevac, (2017) pp. 3-66.

[11] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, Spectra of graphs, *Springer,* 2011.

[12] N. L. Bigs, Algebraic Graph Theory, *Cambrigde Univ. Press,* Cambridge, 1974.

[13] S. B. Bozkurt, D. Bozkurt, On the sum of powers of normalized Laplacian eigenvalues of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **68** (2012) 917-930.

[14] S. B. Bozkurt, I. Gutman, Estimating the incidence energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **70** (2013) 143-156.

[15] D. Bonchev, A. T. Balaban, X. Liu, D. J. Klein, Molecular cyclicity and centricity of polycyclic graphs: I cyclicity based on resistance distances of reciprocal distances, *Int. J. Quantum Chem.* **50** (1994) 1-20.

[16] R. B. Bapat, Resistance distance in graphs, *Mathematics Student* **68** (1-4) (1999) 87-98.

[17] M. Biernacki, H. Pidek, C. Ryll-Nardzewski, Sur une inegalite entre des integrales definies, *Ann. Univ. Mariae Curie–Sklodowska A*, **4** (1950) 1-4.

[18] B. Borovićanin, K. C. Das, B. Furtula, I. Gutman, Zagreb indices: Bounds and Extremal graphs, In: Bounds in Chemical Graph Theory- Basics , (I. Gutman, B. Furtula, K. C. Das, E. Milovanović, I. Milovanović, Eds.), Mathematical Chemistry Monographs, MCM 19, Univ. Kragujevac, Kragujevac 2017, pp. 67-153.

[19] B. Borovićanin, K. C. Das, B. Furtula, I. Gutman, Bounds for Zagreb indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **78** (2017) 17-100.

[20] D. de Caen, An upper bound on the sum of squares of degrees in a graph, *Discr. Math.* **185** (1998) 245-248.

[21] G. Caporossi, I. Gutman, P. Hansen, Lj. Pavlović, Graphs with maximum connectivity index, *Comput. Biol. Chem.* **27** (2003) 85-90.

[22] M. Cavers, The normalized Laplacian matrix and general Randić index of graphs, *PhD Thesis* Univ. Regina, Regina, 2010.

[23] M. Cavers, S. Fallat, S. Kirkland, On the normalized Laplacian energy and general Randić index R_{-1} of graphs, *Lin. Algebra Appl.* **433** (2010) 172-190.

[24] P. Cerone, S. S. Dragomir, A refinement of the Grüss inequality and applications, *RGMIA Res. Rep. Coll.* **5(2)** (2002) Article 14.

[25] V. Cirtoaje, The best lower bound depended on two fixed variables for Jensen's inequality with ordered variables, *J. Inequal. Appl.* (2010) Article ID 128258.

[26] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs- Theory and Application,* Third ed., Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995.

[27] D. Cvetković, *Teorija grafova i njene primene,* Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[28] F. R. K. Chung, Spectral Graph Theory, *Amer. Math. Soc.* Providence, 1997.

[29] X. Chen, K. C. Das, Characterization of extremal graphs from Laplacian eigenvalues and the sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs, *Discr. Math.* **338** (2015) 1252-1263.

[30] J. Chen, X. Guo, Extreme Atom-Bond Connectivity Index of Graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **65** (2011) 713-722.

[31] Z. Cinkir, Contraction Formulas for the Kirchhoff and Wiener indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **75** (2016) 169-198.

[32] H. Chen, F. Zhang, Resistance distance and the normalized Laplacian spectrum, *Discr. Appl. Math.* **155** (2007) 654-661.

[33] K.C. Das, On the Kirchhoff index of graphs, *Z. Naturforsch.* **68a** (2013) 531-538.

[34] K.C. Das, Sharp upper bound for the number of spanning trees of a graph, *Graphs Comb.* **23** (2007) 625-632.

[35] K.C. Das, S. A. Mojallal, On Laplacian energy of graphs, *Discr. Math.* **325** (2014) 52-64.

[36] K.C. Das, S. A. Mojallal, On energy and Laplacian energy of graphs, *El. J. Lin. Algebra* **31** (2016) 167-186.

[37] K. C. Das, On Energy, Laplacian Energy and Signless Laplacian Energy of Graphs, In: Bounds in Chemical Graph Theory- Basics (I. Gutman, B. Furtula, K. C. Das, E. Milovanović, I. Milovanović, Eds.), *Mathematical Chemistry Monographs MCM 20*, Univ. Kragujevac, Kragujevac, (2017) pp. 3-21.

[38] K.C. Das, A. D. Güngör, A. S. Çevik, On Kirchhoff index and resistance- distance energy of a graph, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **67** (2012) 541-556.

[39] K. C. Das, K. Xu, On relation between Kirchhoff index, Laplacian-Energy-Like invariant and Laplacian energy of graphs, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **39** (2016) 559-575.

[40] K. C. Das, K. Xu, I. Gutman, Comparison between Kirchhoff index and the Laplacian-energy-like invariant, *Lin. Algebra Appl.* **436** (2012) 3661-3671.

[41] K. C. Das, I. Gutman, B. Furtula, On atom-bond connectivity index, *Chem. Phys. Lett.* **511** (2011) 452-454.

[42] T. Došlić, Vertex - weighted Wiener polynomials for composite graphs, *Ars Math. Contemp.* **1** (2008) 66-80.

[43] T. Došlić, B. Furtula, A. Graovac, I. Gutman, S. Moradi and Z. Yarahmadi, On Vertex - Degree - Based Molecular Structure Descriptors, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **66** (2011) 613-626.

[44] G. S. Edvards, The largest vertex degree for a triangle in a graph, *Bull. London Math. Soc.* **9** (1977) 203-208.

[45] M. Eliasi, A. Iranmanesh, I. Gutman, Multiplicative versions of first Zagreb index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **68** (2012) 217-230.

[46] E. Estrada, L. Torres, L. Rodriguez, I. Gutman, An Atom-Bond Connectivity Index Modelling the Enthalpy of Formation of Alkanes, *Indian J. Chem.* **37A** (1998) 849-855.

[47] G. H. Fath-Tabar, Old and new Zagreb indices of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **65** (2011) 183-186.

[48] M. R. Farahani, M. R. Rajesh Kanna, R. P. Kumar, On the hyper–Zagreb indices of some nanostructures, *Асиан Ацадемиц Ресеарч J. Мултидисциплинары*, **3** (1) (2006) 115-123.

[49] S. Fajtlowicz, On conjectures of Graffiti-II, *Congr. Numer.* **60** (1987) 187-197.

[50] B. Furtula, A. Graovac, D. Vukičević, Atom-bond connectivity index of trees, *Discr. Appl. Math.* **157** (2009) 2828-2835.

[51] B. Furtula, A. Graovac, D. Vukičević, Augmented Zagreb index, *J. Math. Chem.* **48** (2010) 370-380.

[52] B. Furtula, I. Gutman, A forgotten topological index, *J. Math. Chem.* **53(4)** (2015) 1184-1190.

[53] M. Fiedler, Algebraic connectivity of graphs, *Czech. Math. J.* **37** (1987) 660-670.

[54] C. Godsil, G. Royle, Algebraic graph theory, in: Graduate Texts in Mathematics, **207**, *Springer-Verlag*, New York, 2001.

[55] E. Glogić, M. Matejić, E. Milovanović, I. Milovanović, On some lower bounds for the Kirchhoff index, *State University of Novi Pazar,* CPMMI 2018.

[56] I. Gutman, Degree-Based Topological Indices, *Croat. Chem. Acta* **86** (4) (2013) 351-361.

[57] I. Gutman, On two Laplacian-spectrum-based graph invariants and their relation: A review, *Appl. Comput. Math.* **16** (2017) 3-11.

[58] I. Gutman, B. Zhou, Laplacian energy of a graph, *Lin. Algebra Appl.* **414** (2006) 29-37.

[59] I. Gutman, J. Tošović, Testing the quality of molecular structure descriptors. Vertex-degree-based topological indices, *J. Serb. Chem. Soc.* **78** (2013) 805-810.

[60] I. Gutman, O. Araujo, J. Rada, An identity for Randić's connectivity index and its applications, *ACH Models Chem.* **137** (2000) 653-658.

[61] I. Gutman, P. Hansen, H. Mélot, Variable neighborhood search for extremal graphs 10. Comparison of irregularity indices for chemical trees, *J. Chem. Inf. Model.* **45** (2005) 222-230.

[62] I. Gutman, N. Trinajstić, Graph theory and molecular orbitals. Total π- electron energy of alternant hydrocarbons, *Chem. Phys. Lett.* **17** (1972) 535-538.

[63] I. Gutman, K. C. Das, The first Zagreb index 30 years after, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **50** (2004) 83-92.

[64] I. Gutman, Uvod u hemijsku teoriju grafova, *Prirodno-matematički fakultet*, Kragujevac, 2003.

[65] I. Gutman, B. Mohar, The quasi-Wiener and the Kirchhoff indices coincide, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* **36** (1996) 982-985.

[66] I. Gutman, Multiplicative Zagreb indices of trees, *Bull. Int. Math. Virt. Inst.* **1** (2011) 13-19.

[67] I. Gutman, M. Ghorbani, Some properties of the Narumi-Katayama index, *Appl. Math. Lett.* **25** (2012) 1435-1438.

[68] I. Gutman, B. Mohar, The quasi-Wiener and the Kirchhoff indices coincide, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* **36** (1996) 982-985.

[69] I. Gutman, K. C. Das, B. Furtula, E. Milovanović, I. Milovanović, Generalizations of Szökefalvi Nagy and Chebyshev inequalities with applications in spectral graph theory, *Appl. Math. Comput.* **313** (2017) 235-244.

[70] I. Gutman, B. Furtula, C. Elphick, The new/old vertex–degree–based topological indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **72** (2014) 617-632.

[71] I. Gutman, B. Ruščić, N. Trinajstić, C. F. Wilcox, Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes, *J. Chem. Phys.* **62** (1975) 3399-3405.

[72] R. Grone, R. Merris, The Laplacian spectrum of a graph II, *SIAM J. Discr. Math.* **7** (1994) 221-229.

[73] T. Hayashi, On some inequalities, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **44** (1920) 336-340.

[74] Y. Huang, B. Liu, L. Gan, Augmented Zagreb Index of Connected Graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **67** (2012) 483-494.

[75] P. Hansen, D. Vukičević, Comparing the Zagreb indices, *Croat. Chem. Acta* **80** (2007) 165-168.

[76] P. Henrici, Two remarks on the Kantorovich inequality, *Amer. Math. Mountly* **68** (1961) 904-906.

[77] A. Ilić, B. Zhou, On reformulated Zagreb indices, *Discr. Appl. Math.* **160** (2012) 204-209.

[78] D. J. Klein, V. R. Rosenfeld, The degree-product index of Narumi and Katayama, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **64** (2010) 607-618.

[79] D. J. Klein, M. Randić, Resistance distance, *J. Math. Chem.* **12** (1993) 81-95.

[80] D. J. Klein, Resistance-distance sum rules, *Croat. Chem. Acta* **75** (2) (2002) 633-649.

[81] H. Kober, On the arithmetic and geometric means and on Hölder's inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958) 452-459.

[82] L. B. Kier, L. H. Hall, *Molecular Connectivity in Chemistry and Drug Research*, Academic Press, New York, 1976.

[83] X. Li, H. Zhao, Trees with the first smallest and largest generalized topological indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **50** (2004) 57-62.

[84] X. Li, Y. Yang, Sharp bounds for the general Randić index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **51** (2004) 155-166.

[85] X. Li, Y. Shi, I. Gutman, Graph Energy, *Springer, New York*, 2012.

[86] B. Liu, I. Gutman, Estimation the Zagreb and the general Randić indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **57** (2007) 617-632.

[87] J. Liu, J. Cao, X. F. Pan, A. Elaiw, The Kirchhoff index of hypercubes and related complex networks, *Discr. Dynam. Natur. Sci.* (2013) Article ID 543189.

[88] J. B. Liu, X. F. Pan, J. Cao, F. T. Hu, The Kirchhoff index of some combinatorial networks, *Discr. Dynam. Natur. Sci.* (2015) Article ID 340793.

[89] M. Liu, B. Liu, A note on sums of powers of the Laplacian eigenvalues, *Appl. Math. Lett.* **24** (2011) 249-252.

[90] M. Liu, B. Liu, On sum of powers of the signless Laplacian eigenvalues of graphs, *Hacettepe J. Math. Stat.* **41** (2012) 527-536.

[91] J. Liu, B. Liu, A Laplacian-energy-like-invariant of a graph, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **59** (2008) 355-372.

[92] M. Liu, H. Liu, F. Tian, The connectivity index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **51** (2004) 149-154.

[93] J. S. Li, Y. I. Pan, A note on the second largest eigenvalue of the Laplacian matrix of a graph, *Lin. Multilin. Algebra* **48** (2000) 117-121.

[94] J. Li, W. C. Shiu, W. H. Chan, The Laplacian spectral radius of some graphs, *Lin. Algebra Appl.* **431** (2009) 99-103.

[95] A. Lupas, A remark on the Schweitzer and Kantorovich inequality, *Univ. Beograd Publ. Elektr. Fak. Ser. Mat. Fiz.* **381-409** (1972) 13-15.

[96] I. Lukovits, S. Nikolić, N. Trinajstić, Resistance distance in regular graphs, *Int. J. Quantum Chem.* **71** (1999) 217-225.

[97] R. Merris, Laplacian matrices of graphs: A survay, *Lin. Algebra Appl.* **197-198** (1994) 143-176.

[98] E. I. Milovanović, E. Glogić, M. Matejić, I. Milovanović, On the relationship between Kirchhoff and the Narumi-Katayama indices, *FILOMAT* (u štampi).

[99] E. I. Milovanović, I. Ž. Milovanović, M. M. Matejić, On Relation between the Kirchhoff index and Laplacian-energy-like invariant of graphs, *Math. Interdis. Research* **2** (2017) 141-154.

[100] I. Milovanović, M. Matejić, E. Glogić, E. Milovanović, Some new lower bounds for the Kirchhoff index of a graph, *Bull. Austral. Math. Soc.* **97** (2018) 1-10.

[101] I. Milovanović, I. Gutman, E. I. Milovanović, On Kirchhoff and degree Kirchhoff indices, *FILOMAT* **29** (8) (2015) 1869-1877.

[102] I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, On Lower bounds for the Kirchhoff index, , *Kragujevac J. Sci.* **39** (2017) 77-89.

[103] I. Ž. Milovanović, V. M. Ćirić, I. Z. Milentijević, E. I. Milovanović, On some spectral, vertex and egde degree-based graph invariants, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **71** (2017) 177-188.

[104] I. Milovanović, E. I. Milovanović, Remark on inequalities for the Laplacian spread of graphs, *Czech. Math. J.* **64** (2014) 285-287.

[105] I. Milovanović, E. I. Milovanović, M. Matejić, E. Glogić, Some inequalities for the Kirchhoff index of graphs, *Malaya J. Mat.* **6(2)** (2018) 349-353.

[106] I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, On some lower bounds of the Kirchhoff index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **78** (2017) 169-180.

[107] I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, E. R. Glogić, M. M. Matejić, On Kirchhoff index, Laplacian energy and their relations, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* (u štampi).

[108] I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, Remarks on lower bounds on the general Randić index R_{-1} of graph, *Appl. Math. Comput. Sci.* **1** (2016) 9-13.

[109] I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, E. Glogić, Lower bounds of the Kirchhoff and degree Kirchhoff indices, *Publ. State Univ. Novi Pazar* **A7** (2015) 25-31.

[110] I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, Bounds for Kirchhoff and degree Kirchhoff indices, In: Bounds in Chemical Graph Theory- Mainstreams (I. Gutman, B. Furtula, K. C. Das, E. Milovanović, I. Milovanović, Eds.), *Mathematical Chemistry Monographs MCM 20*, Univ. Kragujevac, Kragujevac, (2017) pp. 93-119.

[111] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, History, variations and generalisations of the Čebišev inequality and the question of some priorities, *Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* 461-497 (1974) 1-30.

[112] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, *Springer*, Netherlands, 1993.

[113] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, Analytic inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[114] H. Narumi, M. Katayama, Simple topological index. A newly devised index characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons, *Mem. Fac. Engin. Hokkaido Univ.* **16** (1984) 209-214.

[115] S. Nikolić, G. Kovačević, A. Miličević, The Zagreb indices 30 years after, *Croat. Chem. Acta.* **76** (2003) 113-124.

[116] S. Pirzada, A. Ganie, I. Gutman, Comparison between the Laplacian-energy-like invariant and Kirchhoff index, *El. Lin. Algebra* **31** (2016) 27-41.

[117] S. Pirzada, A. Ganie, I. Gutman, On the Laplacian energy-like invariant and Kirchhoff index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **73** (2015) 41-59.

[118] J. L. Palacios, Some additional bounds for the Kirchhoff index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **75** (2016) 365-372.

[119] J. L. Palacios, J. M. Renom, Broder and Karlin's formula for hitting times and the Kirchhoff index, *Int. J. Quantum Chem.* **111** (2011) 35-39.

[120] J. L. Palacios, Resistance distance and random walks, *Int. J. Quantum Chem.* **81** (2001) 29-33.

[121] J. L. Palacios, J. M. Renom, Bounds for the Kirchhoff index of regular graphs via the spectra of their random walks, *Int. J. Quantum Chem.* **110** (2010) 1637-1641.

[122] J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengen funktionen, *Sitzungsberg. Acad. Wissen. Wien* **122** (1913) 1295-1438.

[123] M. Randić, On characterization of molecular branching, *J. Amer. Chem. Soc.* **97** (1975) 6609-6615.

[124] B. C. Rennie, On a class of inequalities, *J. Austral. Math. Soc.* **3** (1963) 442-448.

[125] T. Reti, I. Gutman, Relations between ordinary and multiplicative Zagreb indices, *Bull. Int. Math. Virt. Inst.* **2** (2012) 133-140.

[126] T. Reti, R. Sharafdini, A. Dregelyi-Kiss, H. Haghbin, Graph Irregularity Indices Used as Molecular Descriptors in QSPR Studies, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **79** (2018) 509-524.

[127] M. Robbiano, R. Jiménez, Applications of a theorem by Ky Fan in the theory of Laplacian energy of graphs , *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **62** (2009) 537-552.

[128] W. So, M. Robbiano, N. M. M. De Abreu, I. Gutman, Application of a theorem by Ky Fan in the theory of graph energy, *Lin. Algebra Appl.* **432** (2010) 2163-2169.

[129] G. H. Shirdel, H. Rezapour, A. M. Sayadi, The hyper Zagreb index of graph operations, *Iran. J. Math. Chem.* **4(2)** (2013) 213-220.

[130] L. Shi, Bound on Randić indices, *Discr. Math.* **309** (2009) 5238-5241.

[131] J. Szőkefalvi Nagy, Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, *Jahresbericht der deutschen mathematiker- Vereingung* **27** (1918) 37-43.

[132] R. Todeschini, V. Consonni, Molecular Descriptors for Chemoinformatics, Wiely-VCH, Weinheim, 2009.

[133] R. Todeschini, V. Consonni, New Local Vertex Invariants and Molecular Descriptors Based on Functions of the Vertex Degrees , *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **64** (2010) 359-372.

[134] D. Vukičević, B. Furtula, Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges, *J. Math. Chem.* **46** (2009) 1369-1376.

[135] H. Wiener, Structural determination of paraffin boiling points, *J. Amer. Chem. Soc.* **69** (1947) 17-20.

[136] D. Wang, Y. Huang, B. Liu, Bounds on Augmented Zagreb Index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **68** (2012) 209-216.

[137] D. B. West, *Introduction to Graph Theory,* Second ed., Prentice Hall, New Jersey, 2001.

[138] W. Xiao, I. Gutman, On resistance matrices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **49** (2003) 67-81.

[139] K. Xu, K. C. Das, X. D. Zhang, Ordering connected graphs by their Kirchhoff index, *Int. J. Comput. Math.* **93** (2016) 1741-1755.

[140] K. Xu, M. Liu, K. C. Das, I. Gutman, B. Furtula, A survey on graphs extremal with respect to distance- based topological indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **71** (2014) 461-508.

[141] Z. You, B. Liu, On the extremal Narumi-Katayama index of graphs, *FILOMAT* **28** (3) (2014) 531-539.

[142] Y. Yang, Bounds for the Kirchhoff index of bipartite graphs, *J. Appl. Math.* (2012) #195242.

[143] Y. Yang, Some bounds for the Kirchhoff index of graphs, *Abstr. Appl. Anal.* (2014) #794781.

[144] Y. Yang, D. J. Klein, A note on the Kirchhoff and additive degree- Kirchhoff indices of graphs, *Z. Naturforsch.* **70** (2015) 459-463.

[145] H. Y. Zhu, D. J. Klein, I. Lukovits, Extensions of the Wiener number, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* **36** (1996) 420-428.

[146] B. Zhou, On sum of powers of Laplacian eigenvalues and Laplacian Estrada index of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **62** (2009) 611-619.

[147] B. Zhou, More on energy and Laplacian energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **64** (2010) 75-84.

[148] B. Zhou, I. Gutman, T. Aleksić, A note on the Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **60** (2008) 441- 446.

[149] B. Zhou, N. Trinajstić, A note on Kirchhoff index, *Chem. Phys. Lett.* **455** (2008) 611-619.

[150] B. Zhou, On sum of powers of the eigenvalues of graphs, *Lin. Algebra Appl.* **429** (2008) 2239-2246.

[151] B. Zhou, N. Trinajstić, On resistance-distance and Kirchhoff index, *J. Math. Chem.* **46** (2009) 283-289.

[152] B. Zhou, N. Trinajstić, Mathematical properties of molecular descriptors based on distances, *Croat. Chem. Acta* **83** (2010) 224-242.

[153] B. Zhou, N. Trinajstić, Mathematical properties of molecular descriptors based on distances, *Croat. Chem. Acta* **83** (2010) 227-242.

[154] B. Zhou, A. Ilić, On the sum of powers of Laplacian eigenvalues of bipartite graphs, *Czech. Math. J.* **60** (2010) 1161-1169.

[155] H. Zhang, Y. Yang, Resistance distance and Kirchhoff index in cirkulant graphs, *Int. J. Quantum Chem.* **107** (2007) 330-339.

[156] L. Zhong, The Harmonic Index for Graphs, *Appl. Math. Lett.* **25** (2012) 561-566.

[157] L. Zhong, The harmonic index on unicyclic graphs, *Ars Combin.* **104** (2012) 261-269.

[158] H. Y. Zhu, D. J. Klein, I. Lukovits, Extensions of the Wiener number, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* **36** (1996) 420-428.

Биографија

Един Р. Глогић рођен је 27.01.1988. године у Сјеници. Основну школу и Гимназију завршио је у Сјеници. Основне академске студије на студијском програму Математика, на Државном универзитету у Новом Пазару, уписао је 2007. године, а завршио 2011. године. Исте године, на Државном универзитету у Новом Пазару, уписује мастер академске студије на студијском програму Математика. Мастер рад под називом "Пермутационе матрице" одбранио је марта 2013. године.

Докторске академске студије уписао је 2014. године на Природно-математичком факултету у Крагујевцу, студијски програм Математика.

Предмет његовог интересовања је спектрална и хемијска теорија графова. До сада има објављено или прихваћено за штампу 17 научних радова у часописима међународног и националног значаја и има 5 саопштења на скуповима међународног значаја. Осим тога, коаутор је поглавља у монографији националног значаја. До сада објављени радови, по категоријама су:

Монографије, посебна поглавља у научним књигама (M14)

1. I. Gutman, B. Furtula, E. Zogić, E. Glogić, *Resolvent energy*, In: Energies of Graphs – Theory and Applications (I. Gutman, X. Li, Eds.), Mathematical Chemistry Monographs, MCM 17, Univ. Kragujevac, Kragujevac,2016, pp. 277–290. (ISBN 978-86-6009-033-3)

Радови публиковани у часописима категорије (M21a)

2. I. Gutman, B. Furtula, E. Zogić, E. Glogić, *Resolvent energy of graphs*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 75 (2016) 279–290. (ISSN 0340-6253, IF(2016)=3,139)

3. L. E. Allem, J. Capaverde, V. Trevisan, I. Gutman, E. Zogić, E. Glogić, *Resolvent energy of Unicyclic, Bicyclic and Tricyclic Graphs*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 77 (2017) 95–104. (ISSN 0340-6253, IF(2016)=3,139)

4. I. Milovanović, E. Milovanović, E. Glogić, M. Matejić, *On Kirchhoff index, Laplacian energy and Their Relations*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 81 (2019) pp. xxx–xxx. (ISSN 0340-6253, IF(2016)=3,139)

Радови публиковани у часописима категорије (M21)

5. E. I. Milovanović, I. Ž. Milovanović, E. Ć. Dolićanin, E. Glogić, *A note on the first reformulated Zagreb index*, Appl. Math. Comput. 273 (2016) 16–20. (ISSN 0096-3003, IF(2016)=1,738)

Радови публиковани у часописима категорије (M22)

6. E. Glogić, E. Zogić, N. Glišović, *Remarks on the upper bound for the Randić energy of bipartite graphs*, Discr. Appl. Math. 221 (2017) 67–70. (ISSN 0166-218X, IF(2017)=0,932)

7. E. Milovanović, E. Glogić, M. Matejić, I. Milovanović, *On relationship between Kirchhoff and Narumi-Katayama index,*, FILOMAT , u štampi, priložena potvrda o prihvatanju rada od strane editora časopisa Filomat.(ISSN 0354-5180, IF(2016)=0,695)

Радови публиковани у часописима категорије (M23)

8. I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, E. Glogić, *On Laplacian eigenvalues of connected graphs*, Czech. Math. J. 65 (2015) 529–535. (ISSN 0011-4642, IF(2015)=0,284)

9. I. Milovanović, M. Matejić, E. Glogić, E. Milovanović, *Some new lower bounds for the Kirchhoff index of a graph*, Bull. Aust. Math. Soc., 97 (2018) 1–10. (ISSN 0004-9727, IF(2017)=0,482)

10. I. Milovanović, E. I. Milovanović, M. Matejić, E. Glogić, *Some inequalities for the Kirchhoff index of a graphs*, Malaya J. Mat., 6(2) (2018) 349–353. (ISSN 2319-3786)

Радови публиковани у часописима категорије (M51)

11. I. Milovanović, E. Milovanović, E. Glogić, *On application of Andrica- Badea and Nagy inequalities in spectral graph theory*, Stud. Univ. Babes- Bolyai Math. 60 (2015) 603–609. (ISSN 0252-1938)

12. E. Glogić and Lj. Pavlović, *Note on the Unicyclic Graphs with the First Three Largest Wiener Indices* , Kragujevac J. Math. 42 (2018) 533–537. (ISSN 2406-3045)

Радови публиковани у часописима категорије (M52)

13. I. Ž. Milovanović, E.R. Glogić, E. I. Milovanović, M. P. Bekakos, M. K. Stojčev, *Permutation Matrices of Reverse r-th Stride*, Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics, 5, (2) (2013), 79–84. (ISSN 2217-5539)

14. I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, M. K. Stojčev, E. Glogić, E. Dolićanin, Application of t-shuffle permutation matrices in delta interconnection networks, Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics, 6, (1) (2014) , 35–43. (ISSN 2217-5539)

15. I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, E. Glogić, *Lower Bounds of the Kirchhoff and Degree Kirchhoff Indices*, Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics, 7 (1) (2015) , 25–31. (ISSN 2217-5539)

16. E. Milovanović, E. Glogić, I. Milovanović, M. Cvjetković, *Irregularity Measures of Graph*, Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics, 7 (2) (2015) , 95–105. (ISSN 2217-5539)

17. E. H. Zogić, E. R. Glogić, *New Bounds for the Resolvent Energy of Graphs*, Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics, 9 (2) (2017) , 187–191. (ISSN 2217-5539)

Саопштења на међународним научним скуповима штампана у изводу (М34)

18. E. Glogić, E. Zogić, *Comparative analysis of interconnection networks*, Third International Conference CPMMI 2014, CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS, MECHANICS AND INFORMATICS, June 16-17, 2014, State University of Novi Pazar, Novi Pazar, Serbia.

19. I. Gutman, B. Furtula, E. Zogić, E. Glogić, *Resolvent energy of graphs*, Spectra of graphs and applications 2016, May 18-20, 2016, Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade, Serbia.

20. E. Glogić, E. Zogić, N. Glišović, *Remarks on the upper bound for Randić index of bipartite graphs*, Fourth International Conference CPMMI 2016, CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS, MECHANICS AND INFORMATICS, June 19-21, 2016, State University of Novi Pazar, Novi Pazar, Serbia.

21. E. Glogić, E. Milovanović, I. Milovanović, M. Matejić, *A short note on the lower bounds for the Kirchhoff index of graphs* , The 14th Serbian Mathematical Congress (14th SMAK), May 16-19, 2018, Kragujevac, Serbia.

22. E. Glogić, M. Matejić, E. Milovanović, I. Milovanović, *On some lower bounds for the Kirchhoff index*, The 5th International Conference CPMMI 2018, CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS, MECHANICS AND INFORMATICS, June 17-19, 2018, State University of Novi Pazar, Novi Pazar, Serbia.

Bull. Aust. Math. Soc. (First published online 2017), page 1 of 10*
doi:10.1017/S0004972717000831
*Provisional—final page numbers to be inserted when paper edition is published

SOME NEW LOWER BOUNDS FOR THE KIRCHHOFF INDEX OF A GRAPH

I. MILOVANOVIĆ✉, M. MATEJIĆ, E. GLOGIĆ and E. MILOVANOVIĆ

(Received 28 May 2017; accepted 24 July 2017)

Abstract

Let G be a simple connected graph with n vertices and m edges and $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0$ its sequence of vertex degrees. If $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} > \mu_n = 0$ are the Laplacian eigenvalues of G, then the Kirchhoff index of G is $Kf(G) = n \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^{-1}$. We prove some new lower bounds for $Kf(G)$ in terms of some of the parameters $\Delta = d_1$, $\Delta_2 = d_2$, $\Delta_3 = d_3$, $\delta = d_n$, $\delta_2 = d_{n-1}$ and the topological index $NK = \prod_{i=1}^{n} d_i$.

2010 *Mathematics subject classification*: primary 05C12; secondary 05C50.

Keywords and phrases: Kirchhoff index, Laplacian eigenvalues (of a graph), vertex degree.

1. Introduction

Let G be a simple connected graph with n vertices, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, and m edges. Let $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0$ be its sequence of vertex degrees and $\Delta = d_1$, $\Delta_2 = d_2$, $\Delta_3 = d_3$, $\delta = d_n$, $\delta_2 = d_{n-1}$. Let $\mathbf{A}$ be the adjacency matrix of G and $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ the diagonal matrix of its vertex degrees. The Laplacian matrix of G is defined as $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$. The eigenvalues of $\mathbf{L}$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} > \mu_n = 0$, form the Laplacian spectrum of G.

The Wiener index, $W(G)$, originally termed the 'path number', is a topological graph index defined by

$$W(G) = \sum_{i<j} d_{ij},$$

where d_{ij} is the shortest path between vertices i and j in G. The first investigations of the Wiener index were made by Harold Wiener in 1947 (see [20]) to explain correlations between the boiling points of paraffin and the structure of the molecules. Since then it has become one of the most frequently used topological indices in chemistry, as molecules are usually modelled as undirected graphs. Based on its success, many other topological indices of chemical graphs, based on information in the distance matrix of the graph, have been developed.

This work was supported by the Serbian Ministry for Education, Science and Technological Development.

Malaya Journal of Matematik, Vol. 6, No. 2, 349-353, 2018

https://doi.org/10.26637/MJM0602/0008

Some inequalities for the Kirchhoff index of graphs

Igor Milovanović[1]*, Emina Milovanović[1], Marjan Matejić[1] and Edin Glogić[2]

Abstract

Let G be a simple connected graph of order n, sequence of vertex degrees $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0$ and Laplacian eigenvalues $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} > \mu_n = 0$. With $\Pi_1 = \Pi_1(G) = \prod_{i=1}^n d_i^2$ we denote the multiplicative first Zagreb index of graph, and $Kf(G) = n\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i}$ the Kirchhoff index of G. In this paper we determine several lower and upper bounds for Kf depending on some of the graph parameters such as number of vertices, maximum degree, minimum degree, and number of spanning trees or multiplicative Zagreb index.

Keywords

Kirchhoff index, Laplacian eigenvalues (of graph), vertex degree.

AMS Subject Classification

05C12, 05C50

[1] *Faculty of Electronic Engineering, 18000 Niš, Serbia.*
[2] *State University of Novi Pazar, 36300 Novi Pazar, Serbia.*
***Corresponding author**: [1] igor@elfak.ni.ac.rs

Article History: Received **24** November **2017**; Accepted **29** January **2018**

Contents

1. Introduction

Let $G = (V, E)$ be a simple connected graph with n vertices and m edges with vertex degree sequence $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n > 0$, and $\Delta = d_1$, $\Delta_1 = d_2$, $\delta = d_n$, $\delta_1 = d_{n-1}$. If vertices i and j are adjacent we write $i \sim j$. Further, let $\mathbf{A}$ be the adjacency matrix of G and $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ the diagonal matrix of its vertex degrees. Then $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ is the Laplacian matrix of G. Eigenvalues of $\mathbf{L}$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} > \mu_n = 0$, form the so-called Laplacian spectrum of G. Following identities are valid for μ_i (see [1])

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i = 2m \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i = M_1 + 2m,$$

where $M_1 = M_1(G) = \sum_{i=1}^n d_i^2$ is the first Zagreb index introduced in [2]. More about this degree–based topological index one can be found in [3–8].

It is well known that a connected graph G of order n has

$$t = t(G) = \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n-1} \mu_i$$

spanning trees.

In [9] (see also [10]) a multiplicative variant of the first Zagreb index, named the first multiplicative Zagreb index, Π_1, was introduced. It is define as

$$\Pi_1 = \Pi_1(G) = \prod_{i=1}^{n} d_i^2.$$

In [11], Klein and Randić, introduced the notion of resistance distance, r_{ij}. It is defined as the resistance between the nodes i and j in an electrical network corresponding to the graph G in which all edges are replaced by unit resistors. The sum of resistance distances of all pairs of vertices of a graph G is named as the Kirchhoff index, i.e.

$$Kf(G) = \sum_{i<j} r_{ij}.$$

There are several equivalent ways to define the resistance distance. Gutman and Mohar [12] (see also [13]) proved that the Kirchhoff index can be obtained from the non-zero eigenvalues of the Laplacian matrix:

$$Kf(G) = n\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i}.$$

Among various indices in mathematical chemistry, those based on the effective resistance, r_{ij}, such as the Kirchhoff index and its generalizations, have received a lot of attention

Filomat xx (yyyy), zzz–zzz
DOI (will be added later)

Published by Faculty of Sciences and Mathematics,
University of Niš, Serbia
Available at: http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat

On the relationship between the Kirchhoff and the Narumi-Katayama indices

Emina Milovanović[a], Edin Glogić[b], Marjan Matejić[a], Igor Milovanović[a]

[a]*Faculty of Electronics Engineering, University of Niš, A. Medvedeva 14, 18000 Niš, Serbia*

[b]*State University of Novi Pazar, Novi Pazar, Serbia*

Abstract. Let G be a simple connected graph with n vertices and m edges, sequence of vertex degrees $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta > 0$ and diagonal matrix $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ of its vertex degrees. Denote by $Kf(G) = n\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i}$, where μ_i are the Laplacian eigenvalues of graph G, the Kirchhoff index of G, and by $NK = \prod_{i=1}^{n} d_i$ the Narumi-Katayama index. In this paper we prove some inequalities that exhibit relationship between the Kirchhoff and Narumi-Katayama indices.

1. Introduction

Let $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, be a simple connected graph with n vertices and m edges and let $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta > 0$, $d_i = d(i)$, be its vertex degree sequence. Further, let $\mathbf{D}$ be the diagonal matrix of order n, whose diagonal elements are $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Vertex–degree–based topological index, $NK = NK(G)$, known as the Narumi–Katayama index, is defined as [26]

$$NK = NK(G) = \det D = \prod_{i=1}^{n} d_i.$$

This topological index was introduced in [26] and referred to as ”simple topological index”. For a long period of time it was not in the spotlight. The situation has changed significantly when Todeschini and Consonni [31] proposed a descriptor named multiplicative Zagreb index, defined as

$$\Pi_1(G) = \prod_{i=1}^{n} d_i^2.$$

One can easily observe that $\Pi_1(G) = (NK(G))^2$. Current name, i.e. the Narumi-Katayama index, was proposed in [9]. Details on this topological index can be found in [8–10, 18, 34, 35].

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 05C12; Secondary 05C50
Keywords. Kirchhoff index; Laplacian eigenvalues; Narumi-Ktayama index.
Received: dd Month yyyy; Accepted: dd Month yyyy
Communicated by (xxx)
Research supported by Serbian Ministry of Education and Science.
Email addresses: ema@elfak.ni.ac.rs (Emina Milovanović[a]), edin_gl@hotmail.com (Edin Glogić[b]), marjan.matejic@elfak.ni.ac.rs (Marjan Matejić[a]), igor@elfak.ni.ac.rs (Igor Milovanović[a])

Reply all | Delete Junk | •••

[FIL] Editor Decision ID number

Dragan Djordjevic <dragan@pmf.ni.ac.rs>
Mon 25/09, 12:23
Emina I. Milovanovic; Edin Glogic <edin_gl@hotmai.com>; Marjan Matejic; Igor Z.

Reply all |

Inbox

You forwarded this message on 25/09/2017 18:55

Dear Professor Emina I. Milovanovic,

We have reached a decision regarding your submission "On relationship between Kirchhoff and Narumi-Katayama index" to FILOMAT.

According to the referee's report, I am glad to inform you that our decision is to accept your article.

Please correct the paper if it is necessary, and then upload the LaTeX file of your paper according to Filomat style:

http://journal.pmf.ni.ac.rs/filomat/index.php/filomat/manager/files/template/template.zip

Thank you again for considering Filomat for your submission.

Sincerely yours,

Francesco Belardo
Graph Theory Section Editor
FILOMAT

FILOMAT
http://journal.pmf.ni.ac.rs/filomat

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Един Глогић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Границе за Кирхофов индекс графа

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу, 10.10.2018. године,

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Един Глогић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Границе за Кирхофов индекс графа

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 10.10.2018. године,

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/