UNIVERZITET U NOVOM SADU

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Dragana Gardašević

LOKALIZACIJE GERŠGORINOVOG TIPA ZA NELINEARNE PROBLEME KARAKTERISTIČNIH KORENA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2018.

Zahvalnica

Velika mi je čast što sam pri izradi doktorske disertacije sarađivala sa dva izuzetna naučnika, prof. dr Vladimirom Kostićem i prof. dr. Ljiljanom Cvetković, koji su me uveli u ovu interesantnu i aktuelnu oblast matematike i motivisali na rad svojim naučnim dostignućima i odnosom prema radu.

Najveću zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. dr Vladimiru Kostiću, na izdvojenom vremenu, svim konstruktivnim idejama, komentarima, savetima i bezrezervnoj stručnoj pomoći, bez koje ova disertacija ne bi bila realizovana. Neizmernu zahvalnost dugujem prof. dr Ljiljani Cvetković, na nesebičnoj podršci i dragocenim savetima i sugestijama od samog početka naše saradnje. Zahvaljujem se i članovima komisije za ocenu i odbranu doktorske disertacije dr Kseniji Doroslovački, dr Maji Nedović i prof. dr Katarini Kukić, koje su svojim sugestijama dale doprinos konačnoj formi doktorske disertacije.

Posebno se zahvaljujem Visokoj školi stukovnih studija Beogradska politehnika, u kojoj sam zaposlena, i direktorki prof. dr Marini Stamenović bez čije inicijative i pomoći ne bih ni bila na ovom mestu.

Zahvaljujem se i kolegama sa seminara SCALA, sa kojima sam u lepoj i ugodnoj atmosferi dolazila do novih i interesantnih saznanja.

Na kraju, ali i najvažnije, najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, koja me je podržavala svih ovih godina, i kojoj posvećujem ovu disertaciju.

Dragana Gardašević

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска документација
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, **ВР**:	Докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Драгана Гардашевић
Ментор, **МН**:	Проф. др Владимир Костић
Наслов рада, **НР**:	Локализације Гершгориновог типа за нелинеарне проблеме карактеристичних корена
Језик публикације, **ЈП**:	Српски
Језик извода, **ЈИ**:	Српски, Енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина
Година, **ГО**:	2018.
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	3/143/184/-/48/-/-
Научна област, **НО**:	Примењена математика
Научна дисциплина, **НД**:	Нумеричка математика
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Нелинеарни проблеми карактеристичних корена, дијагонална доминација, Гершгоринов скуп, локализација, Х-матрице
УДК	
Чува се, **ЧУ**:	У библиотеци Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Предмет истраживања у докторској дисертацији је метода за конструкцију локализационих скупова за спектар и псеудоспектар нелинеарних проблема карактеристичних корена базирана на Гершгориновој теореми и њеним генерализацијама која користи особине познатих подкласа Х-матрица. Наведена тврђења и примери расветљавају односе између наведених локализационих скупова, што је посебно значајно за примену у пракси. Садржај овог рада тиме представља полазну тачку за дубља истраживања на тему конструкције локализационих скупова за спектар и псеудоспектар нелинеарних проблема карактеристичних корена Гершгориновог типа.
Датум прихватања теме, **ДП**:	29.03.2018.
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	др Љиљана Цветковић, редовни професор	
	Члан:	др Катарина Кукић, ванредни професор	Потпис ментора
	Члан	др Ксенија Дорословачки, доцент	
	Члан	др Маја Недовић, доцент	
	Члан, ментор:	др Владимир Костић, ванредни професор	

UNIVERSITY OF NOVI SAD ● **FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monograph type
Type of record, **TR**:	Printed text
Contents code, **CC**:	PhD thesis
Author, **AU**:	Dragana Gardašević
Mentor, **MN**:	Vladimir Kostić, PhD, associate professor
Title, **TI**:	Geršgorin-type localizations for Nonlinear Eigenvalue Problems
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian, English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina
Publication year, **PY**:	2018.
Publisher, **PB**:	Author’s reprint
Publication place, **PP**:	Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref/tables/pictures/graphs/appendixes)	3/143/184/-/48/-/-
Scientific field, **SF**:	Applied Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Numerical Mathematics
Subject/Key words, **S/KW**:	Nonlinear eigenvalue problems, diagonal dominance, Geršgorin set, localization, H-matrices
UC	
Holding data, **HD**:	Library of the Faculty of technical sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	The subject of research in the doctoral dissertation is a method for constructing spectra and pseudospectra localization sets for nonlinear eigenvalue problems based on Geršgorin theorem and its generalizations, that uses the properties of well-known subclasses of H-matrices. Theorems and examples given in this paper are showing relations between stated localization sets, which is very important for practical applications. Therefore, the content of this paper represent the starting point for deeper explorations on the subject of constructing spectra and pseudospectra localization sets for Geršgorin type nonlinear eigenvalue problems.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	29.03.2018.
Defended on, **DE**:	

Defended Board, **DB**:	President:	Ljiljana Cvetković, PhD, full professor	
	Member:	Katarina Kukić, PhD, associate professor	Menthor's sign
	Member:	Ksenija Doroslovački, PhD, assistant professor	
	Member:	Maja Nedović, PhD, assistant professor	
	Member, Mentor:	Vladimir Kostić, PhD, associate professor	

Lokalizacije Geršgorinovog tipa za nelinearne probleme karakterističnih korena

Kandidat: Dragana Gardašević Mentor: prof. dr. Vladimir Kostić

-Doktorska disertacija-

Univerzitet u Novom Sadu
novembar 2018.

Sadržaj

Apstrakt

Matrična analiza je moćan alat u proučavanju savremenih pojava i u primeni matematike u nauci, inženjerstvu, medicini, ekonomiji, fizici i drugim naučnim disciplinama. Proučavanje karakterističnih korena obezbeđuje korisne informacije o matricama i/ili operatorima: osetljivost na perturbacije, stabilnost i sl. [72, 82], stoga je znatan deo matrične analize usmeren na teoriju karakterističnih korena (lokalizacija, perturbacija, kanoničke forme) i, kroz numeričke proračune, na brojne primene.

Ova disertacija sistematizuje postojeće rezultate o lokalizaciji standardnog i generalizovanog problema karakterističnih korena matrica i generalizuje ih na nelinearni problem karakterističnih korena, koristeći poznatu vezu dijagonalne dominacije, s jedne, i Geršgorinove teoreme, sa druge strane. Motivacija leži, pre svega, u mogućnosti primene na aktuelne probleme kako u samoj numeričkoj linearnoj algebri, tako i u inženjerstvu, savremenoj nauci, medicini, farmaciji, ekologiji, ekonomiji i drugim naukama.

Kako karakteristični koreni ne mogu dati sveobuhvatne odgovore na pitanja o ponašanju dinamičkih sistema tokom vremena, u nekim slučajevima je dobro otići korak dalje, i primeniti pseudospektralnu analizu. Pseudospektralna analiza, tačnije, računanje pseudospektra datog problema i njegova lokalizacija, pokazalo se kao značajan i nezaobilazan alat u nalaženju odgovora na pitanje o asimptotskom ponašanju nesimetričnih matrica pri malim perturbacijama, posebno matrica koje su daleko od normalnih. Stoga se novi rezultati dati u ovoj disertaciji mogu podeliti u dva dela: prvi daje lokalizacione oblasti spektra datog nelinearnog problema, dok se drugi bavi pseudospektralnom analizom i opštim perturbacijama. Pored toga, interesantnost i aktuelnost ove disertacije uvećana je prezentovanjem većeg broja konkretnih primera proizašlih iz praktičnih primena.

Iako su standardni i generalizovani problemi karakterističnih korena dosta proučavani [39, 52, 53, 91, 104, 111, 115, 116, 122, 128, 131, 162, 163, 164, 167, 168, 171, 174, 176, 177, 178, 179], nelinearni problemi su u poslednjih nekoliko godina postali aktuelniji [10, 14, 16, 76, 95, 102, 112, 117]. Lokalizacija spektra i pseudospektra korišćenjem lokalizacija Geršgorinovog tipa za obične i generalizovane probleme je obrađena u radovima [34, 92], a u ovoj disertaciji je generalizovana za nelinearne probleme karakterističnih korena. Deo ovih novih rezultata objavljen je u radu [93]. Stoga je disertacija organizovana na sledeći način:

- U prvom poglavlju je dat uvod, istorijat i primene karakterističnih korena, kao i zašto se spektralna i pseudospektralna analiza nalaze među

standardnim alatima primenjene matematike. Posebno je data klasifikacija problema karakterističnih korena i opisana njihova problematika. Dat je pregled nekih poznatih potklasa regularnih matrica i odgovarajućih lokalizacionih rezultata, kao i definicije dijagonalne dominacije i njenih generalizacija, dobro poznata veza dijagonalne dominacije i odgovarajuće teoreme Geršgorinovog tipa za standardni i generalizovani problem karakterističnih korena i poznati principi iz toga izvedeni.

- Drugo poglavlje bavi se lokalizacijama nelinearnih problema karakterističnih korena. U ovom poglavlju predstavljeni su novi interesantni rezultati koji se odnose na nelinearne probleme karakterističnih korena, dobijeni generalizacijom postojećih rezultata (Teoreme 2.2, 2.3 i 2.4). Pored formulacija lokalizacionih skupova, navedene su i relacije među njima i razne lokalizacione oblasti za nelinearni problem karakterističnih korena. Posebno, date su primene na polinomne probleme, tačnije, na kvadratni problem karakterističnih korena i neke polinomne probleme višeg reda. Na kraju poglavlja, date su primene i na nepolinomne probleme karakterističnih korena, proizašle iz primena u inženjerstvu. Ovi originalni rezultati objavljeni su u radu [93].

- Treće poglavlje obuhvata vezu između skupova Geršgorinovog tipa i nestrukturnih perturbacija. U ovom poglavlju je izložena pseudospektralna analiza nelinearnih problema karakterističnih korena. Najpre je dat pregled poznatih rezultata za standardni i generalizovani problem karakterističnih korena, zajedno sa definicijama i lokalizacijama Geršgorinovog tipa, a zatim, slično tehnici korišćenoj u radovima [34, 92] za standardni problem, navedeni su novi rezultati koji se odnose na polinomne probleme karakterističnih korena.

Disertacija se završava zaključnim razmatranjima i spiskom korišćene literature.

UVOD

Ako se zapitamo šta je zajedničko za zatvaranje (neposredno po otvaranju) Milenijumskog pešačkog mosta u Londonu, rušenje mosta u Brojtonu i Tahoma mosta u Vašingtonu, sa stanovišta matematike, odgovor je: rezonanca, tj. neželjene vibracije. Naime, neposredno po otvaranju Milenijumskog mosta u Londonu, 2000. godine, isti je morao biti zatvoren jer je postojala opasnost da se sruši usled vibracija koje su izazvali pešaci prelazeći ga ujednačenim ritmom u velikom broju. U slučaju Tahoma mosta u Vašingtonu, uzrok rušenja bio je jak vetar, dok u slučaju mosta u Brojtonu, rušenje mosta su izazvale vibracije nastale marširanjem vojnika pri prelasku mosta. Problem opasnih vibracija [26, 67, 101], tj. problem rezonance, javlja se kada na strukturu deluju spoljne sile (težina ljudskih tela, jak vetar i sl.) frekvencijama približno jednakim prirodnim frekvencijama, što dovodi do povećanja vibracija i nestabilnosti same strukture. Matematički gledano, problem neželjene rezonance sastoji se u preraspodeli nekoliko rezonantnih frekvencija (karakterističnih korena) na željene lokacije, čuvajući ostale željene karakteristične korene i odgovarajuće karakteristične vektore [37, 160].

S druge strane, u domenu saobraćaja, naročito posle Drugog svetskog rata, nagli razvoj drumskog i vazdušnog saobraćaja ubrzao je i razvoj automobilske, železničke i avio industrije. To je naročito primetno u gusto naseljenim delovima Evrope i Japana, gde je u poslednjih nekoliko decenija došlo do velikog napretka u domenu saobraćaja konstrukcijom super brzih vozova i prateće infrastrukture. Kao posledica toga, porastao je interes za vibracionu analizu brzih vozova, najpre u Nemačkoj (kompanija SFE Gmbh u Berlinu, kompanija CE), zatim Japanu (kompanija Shinkansen), Francuskoj (kompanija TGV) [25, 26]. Problem vibracije se javlja usled interakcije između točkova voza i šina ispod njih, te je, povećanjem brzine modernih vozova (i do 300 km/h), veoma važno proučavati ove vibracije radi povećanja sigurnosti i komfora putnika, smanjenja buke i vibracije, minimizacije operacionih i konstrukcijskih troškova.

Proučavanje akustike automobila (pitanje buke unutar automobila), aeronautike (pitanje da li je protok laminarni ili turbulentni), hemijskih reakcija i energetskih nivoa molekula, kvantne mehanike (određivanje atomske energije nivoa a time i frekvencije lasera ili specijalne signature zvezde), dizajniranja zgrada sa povećanom otpornošću na zemljotres (da li će se zgrada srušiti ili ne), ekologije (pitanje da li će fluktuacija biomase biti u stanju stabilne ravnoteže), stabilnosti i bifurkacione analize dinamičkih sistema, stacionarne distribucije slučajnih procesa (proces rađanja i umiranja), magnetohidrodinamike, okeanografije, ekonomije, obrade signala i slika, kontrolne teorije, stohastičkih modela u telekomunikacijama, prepoznavanje šema, performanse računara, inventorna kontrola, atmosferska nauka, samo su neki od mnogobrojnih problema u nauci i inženjerstvu koji se svode na problem proučavanja karakterističnih korena [54, 70, 74, 130, 154, 165, 168]. Ponašanje ovih i sličnih fenomena je pitanje koje se može opisati diferencijalnim jednačinama drugog i višeg reda. Tehnikom diskretizacije, pomenute diferencijalne jednačine mogu se aproksimirati matričnom formulacijom odgovarajućeg reda. U ovom postupku, numeričko rešenje, kao takvo, je vektorska funkcija vremena, a matrice u jednačini nastaju iz samog diskretizacionog procesa. Ponašanje rešenja tokom vremena može se pratiti analizom njenih karakterističnih korena, pri čemu je oscilatorno ponašanje određeno imaginarnim, a eksponencijalni rast/opadanje tokom vremena realnim delom posmatranog karakterističnog korena. U proučavanju ovih pojava eksponencijalni rast je nepoželjan: na primer, u strukturi kao što je most, eksponencijalni rast ukazuje na opasnu rezonantnu frekvenciju koja može rezultirati i totalnim kolapsom pod odgovarajućim uslovima, dok u modelu aviona pilot može izgubiti kontrolu nad avionom tokom turbulencije [76]. Stoga je proučavanje karakterističnih korena odgovarajućeg sistema od primarnog značaja za otklanjanje opasnih defekata u inženjerstvu u fazi dizajniranja, a time i za bezbednost i sigurnost ljudi.

Karakteristični koreni i karakteristični vektori daju vredne informacije o ponašanju i svojstvima matrica, pa i ne čudi njihova značajna uloga u naučnim proračunima već duže od vek i po. U zavisnosti od primene, interesuje nas ponašanje jednog ili više karakterističnih korena, unutrašnjih ili rubnih, kao i broj ovih korena u nekoj oblasti [74]. U mnogim strukturalnim sistemima, analiza karakterističnih korena je adekvatan alat za predviđanje modalnog odgovora. Ipak, u mnogim slučajevima, posebno u domenu struktura sa fizičkim zagušenjem (viskoelastično, histeretičko prigušenje), rotacionih struktura, vibroakustike itd., standardni karakteristični koreni linearne formulacije ne daju zadovoljavajući odgovor o ponašanju posmatranih sistema. Potrebne su nelinearne formulacije problema karakterističnih korena, za korektan opis vibracija sistema [39].

Proučavanje karakterističnih korena predstavlja osnovni alat u naučnim proračunima. Korisnost karakterističnih korena ogleda se u sledećem [165]:

- algoritamski razlog: ako matrica (linearni operator) može biti dijagonalizovan, transformišući problem u bazu karakterističnih vektora, rešenja raznih problema se mogu ubrzati;

- fizički razlog: karakteristični koreni mogu dati informaciju o ponašanju sistema opisanog matricom ili operatorom. Posebno, mogu dati informaciju o rezonanci, nestabilnosti, tempu rasta/opadanja tokom vremena;

- psihološki razlog: veći deo ljudskog mozga je specijalizovan za obradu vizuelnih informacija i karakteristični koreni koriste ovo biološko svojstvo na taj način što dopunjuju apstraktnu ideju matrice ili operatora slikom u kompleksnoj ravni; drugim rečima, daju matrici ,,karakter".

Orzagov račun kritičnog Rejlijevog koeficijenta za nestabilnost karakterističnih korena u protoku fluida u Puasejevoj cevi, nastao 1971. godine, postavio je spektralne metode na mesto glavnog alata u naučnim proračunima [167]. Tako spektralne metode čine jednu od ,,tri velike" tehnologije za numeričko rešavanje parcijalnih i običnih diferencijalnih jednačina, koje su nastale od 1950-tih (metoda konačnih razlika), 1960-tih (metoda konačnih elemenata) i 1970-tih (spektralne metode) [165]. Kao što je poznato, standardni način primene karakterističnih korena može se svesti na pet koraka [49]:

- fizički problem se pretvara u matematički model;
- matematički model se definiše preko (linearnih) operatora karakterističnog problema;
- (linearni) operatori karakterističnog problema definišu se preko velikih diskretizacionih matrica;
- velike diskretizacione matrice se aproksimiraju malim projektovanim matricama;
- računaju se karakteristični koreni projektovanog problema.

Konstrukcijom matematičkih modela, lokalizacijom karakterističnih korena matrica koje čine strukturu posmatranih modela, stiču se značajne uštede u novcu i vremenu, i poboljšavaju performanse mnogih pojava u savremenom društvu. Pa ipak, dok su linearni matrični problemi i generalizovani problemi karakterističnih korena veoma dobro izučeni u literaturi, problem lokalizacije nelinearnih, posebno polinomnih problema je znatno manje proučavan, upravo zbog poteškoća da se metode linearizacije (Lancosova, Jakobi-Dejvidsonova i metoda Krilovljevih potprostora) primene i na nelinearne probleme [10, 39, 49, 74, 76, 160, 167, 168]. Sama aktuelnost navedenih (i sličnih) nelinearnih problema karakterističnih korena dala je dobru motivaciju za metodu lokalizacije ovih korena koja bi smanjila računske troškove svojom jednostavnošću. Koristeći Geršgorinovu teoremu, poznatu po svojoj jednostavnosti i lepoti, ali i velikoj praktičnoj primenljivosti, u ovoj disertaciji ćemo predstaviti metodu lokalizacije karakterističnih korena koja generalizuje rezultate linearnog i generalizovanog problema karakterističnih korena iz radova [16, 88, 92, 178] na nelinearne probleme karakterističnih korena. Iz tog razloga, u ovoj disertaciji će najpre biti predstavljeni već pomenuti poznati rezultati za standardni i generalizovani problem karakterističnih korena, a zatim navedeni i novi rezultati koji se odnose na nelinearne probleme, posebno polinomne probleme karakterističnih korena.

U tom pravcu, napomenimo da se skup svih karakterističnih korena matrice naziva spektar, a samim tim deo nauke koja se bavi njegovim proučavanjem naziva se spektralna analiza. Poznato je da spektralna analiza nije svemoguća u davanju odgovora na pitanje o ponašanju matrica, jer se može desiti da karakteristični koreni opišu jedan obrazac ponašanja matrica, a da se dodatkom malih perturbacija, on sasvim izmeni. Stoga se u slučajevima kada spektralna analiza ne može dati precizan odgovor na pitanje o ponašanju matrica i/ili operatora u graničnim slučajevima, proučava pseudospektar koji može dati preciznije odgovore na pitanja o ponašanju karakterističnih korena (pod perturbacijama) [161, 162, 163]. Iz tog razloga se prvi deo ove disertacije bavi lokalizacijom spektra, a drugi lokalizacijom pseudospektra.

Istorijski posmatrano, pojam karakterističnog korena razvijen je u vezi sa hermitskim matricama i njihovim beskonačno dimenzionim samoadjungovanim operatorima [163]. Proučavanje karakterističnih korena datira od tridesetih godina XIX veka, iz Furijeovih rešavanja toplotne jednačine pomoću stepenih redova, zatim Poasona koji je uopštio Furijeove pretpostavke u svojim analizama, Šturma i Liuvila koji su ih koristili u izučavanjima opštijih diferencijalnih jednačina drugog reda, Silvestera i Kejlija koji su ih primenjivali u dijagonalizaciji simetričnih matrica, Vebera i Švarca i njihovog izučavanja vibracionih opruga i membrana, lorda Rejlija i njegovih izučavanja teorije zvuka, i mnogih drugih [168], sve do tridesetih godina XX veka, kada su Frejzer, Dankan i Kolar iz Aerodinamičkog departmana engleske Nacionalne laboratorije za fiziku (NPL) razvijali matrične metode za analiziranje neželjenih vibracija aviona, što predstavlja početak matrične strukturalne analize, čime matrice postaju alat za proračune u inženjerstvu. Tokom Drugog svetskog rata, Olga Tauski je, radeći u Frejzerovoj grupi u NPL-u, analizirala 6×6 kvadratne probleme karakterističnih korena nastale iz analize vihora supersoničnih aviona. Veliki doprinos problemima karakterističnih korena matrica dao je sredinom XX veka i Piter Lankaster, koji je rešavao kvadratne probleme karakterističnih korena dimenzije 2 do 20. Pored njega, značajan doprinos dali su i Kogi, Gohberg, Rodman i Kublanovskaja. Tako je aerodinamika inicirala proučavanje karakterističnih korena matrica i njihovu primenu u inženjerstvu, a sam trend razvoja superbrzih vozova, supersoničnih aviona, mikro-elektromehaničkih sistema i uopšte ekstremnog dizajna, samo je pojačao atraktivnost proučavanja ove vrste. Ekstremni dizajn vodio je do usložnjavanja problema karakterističnih korena sa slabim uslovima, a fizika sistema je vodila do potrebe čuvanja algebarske strukture kako bi bili ostvareni fizički značajni rezultati [72, 95, 167].

Sledeći veliki pomak u matričnoj analizi bio je 1967. godine, kada je Varah prvi uveo pojam pseudospektra [173], koji može dati podatke o ponašanju matrica u slučajevima kada to pomoću spektra nije moguće. Pseudospektar i sama pseudospektralna analiza je više puta uvođena, a 1990. Trefeten popularizuje ovu temu u saradnji sa Embreom, dajući, u svojoj knjizi *Spektar i pseudospektar* (objavljenoj 2005. godine) kompletan pregled ove teme.

Brzim razvojem industrije, nauke, ekonomije i medicine u XX veku, povećava se i potreba za primenjenom matematikom, i sama spektralna i pseudospektralna analiza postaju nezaobilazan alat u ovim proučavanjima, čime ostaju atraktivni i aktuelni.

Jedan od načina nastanka nelinearnih problema karakterističnih korena je nalaženje specijalnih rešenja sistema homogenih diferencijalnih jednačina i funkcionalnih diferencijalnih jednačina [16]. Najbolje proučavani nelinearni problemi karakterističnih korena su polinomni koji se javljaju u analizi običnih diferencijalnih jednačina (ili kraće ODE, od englesnog *ordinary differential equations*) drugog reda. U modelima kao što je viskoelastičnost dobijamo racionalne algebarske probleme karakterističnih korena. Opštiji nelinearni problemi korena sa algebarskom transcendentnom zavisnošću su prisutni u modelima kašnjenja [142] ili radijacije [155, 183, 184]. Osim polja dinamike, nelinearni problemi karakterističnih korena se pojavljuju u rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina (ili kraće PDE, od englesnog *partial differential equations*) metodom partikularnih rešenja [13], u problemima ocene položaja kamere u kompjuterskoj viziji [100], u nalaženju preseka krivih i površi u računskoj geometriji [113, 114], i mnogim drugim primenama.

Standardni pristup analizi i numeričkom rešavanju polinomnih problema karakterističnih korena je linearizacija, tj. konverzija originalnog nelinearnog problema karakterističnih korena na linearni problem većeg stepena. Na primer, kvadratni problem se može prevesti na linearni dvostruke dimenzije, dok nelinearni većeg stepena, npr. sistemi sa kašnjenjem, se mogu predstaviti kao ODE na beskonačno dimenzionom prostoru stanja [142]. S druge strane, karakteristične korene nelinearnih problema karakterističnih korena možemo razmatrati kao nule skalarne analitičke funkcije $detT(z)$, gde je $T(z)$ matrična funkcija problema karakterističnih korena.

Imajući u vidu brojnost primena, u ovoj disertaciji najviše pažnje ćemo posvetiti proučavanju spektra i pseudospektra matričnih polinoma. Razmatraćemo lokalizacione rezultate koji definišu oblasti u kojima se karakteristični koreni moraju naći. Naši rezultati predstavljaju generalizaciju klasičnih rezultata, kao što su lokalizacione teoreme za spektar i pseudospektar i Geršgorinovi krugovi, veoma mnogo korišćeni u analizi standardnog problema karakterističnih korena. Iako je lokalizacija za nelinearne probleme karakterističnih korena bar jednako korisna kao lokalizacija za standardni i generalizovani preoblem, malo je urađeno po pitanju generalizacije poznatih lokalizacionih rezultata na opšti nelinearni slučaj. Za standardni problem karakterističnih korena je poznato da, ukoliko je matrica A normalna, pseudospektar matrice A je unija zatvorenih lopti radijusa ε sa centrom u karakterističnom korenu, dok za matricu A koja nije normalna, pseudospektar može biti mnogo veći od ovih lopti i stoga spektralna analiza ne mora biti dobar alat za određivanje stabilnosti ili brzine konvergencije. Da bi bio koristan alat, za pseudospektar mora biti moguće efikasno i stabilno računanje. Iz same definicije pseudospektra sledi da je jednostavan način da se izračuna pseudospektar upotreba dekompozicije singularnih vrednosti (kraće SVD, od engleskog *singular value decomposition*), koju su koristili Golub i Van Loan u [63] za nalaženje najmanje singularne vrednosti karakteristične matrice nad zadatim regionom kompleksne ravni. Zatim su za obradu rezultata koristili MATLABov konturni crtač. Međutim, problem sa ovakvim pristupom je u velikom broju računskih operacija ($O(mn^3)$) potrebnih za računanje najmanje singularne vrednosti. Mi ćemo stoga dati drugačiji pristup aproksimacije pseudospektra, koji zahteva manji broj računskih operacija, oslanjajući se na Geršgorinovu teoremu i njene generalizacije.

1 Teorijska osnova i pregled postojećih rezultata

Moderna nauka, posebno linearna algebra i matrična teorija, gotovo da se ne mogu zamisliti bez karakterističnih korena, koji predstavljaju jedan od njenih osnovnih alata za dizajniranje zgrada, mostova i turbina otpornih na vibracije, dozvoljavaju modelovanje mreža za čekanja i analizu stabilnosti električnih mreža ili protoka fluida, kao i za razumevanje lokalnih fizičkih pojava ili proučavanje bifurkacionih shema u dinamičkim sistemima [138]. Karakteristični koreni su nastali iz proučavanja kvadratnih formi i diferencijalnih jednačina, mnogo pre ekspanzije same matrične teorije [150, 169]. Proučavajući rotacije čvrstog tela, Ojler je otkrio važnost glavnih osa, za koje je Lagranž shvatio da predstavljaju karakteristične korene matrice inercije. Početkom XIX veka Koši je primenio njihov rad na kvadratne površi i generalizovao ih je na proizvoljne dimenzije.

Sam pojam "karakteristični koren"(na francuskom *racine caractéristique*) potiče od Košija [170]. 1822. godine Furije je, u svojoj čuvenoj knjizi *Analitička teorija toplote* [55] upotrebio Laplasove i Lagranžove rezultate za rešavanje toplotne jednačine razdvajanjem promenljivih. Šturm je dalje razvio Furijeove ideje, koje je Koši kombinovao sa svojim i dokazao da simetrične matrice imaju realne karakteristične korene. Ovo je Ermit 1855. godine dalje razvio u danas poznate hermitske matrice. U isto vreme Brioki je dokazao da karakteristični koreni ortogonalne matrice leže na jediničnom krugu. Klebh je dokazao odgovarajući rezultat za koso-simetrične matrice. Konačno, Vajerštras je utvrdio važnost teorije stabilnosti tvrdeći da defektne matrice mogu izazvati nestabilnost.

Krajem XIX veka i početkom XX veka, pored Švarca i Poenkarea, i Hilbert se bavio proučavanjem karakterističnih korena. On je 1904. godine prvi upotrebio nemačku reč ,,eigen", da označi karakteristične korene i karakteristične vektore. Reč ,,eigen" ima više značenja: ,,sopstven", ,,karakteristični", ,,individualni", ,,svojstven" i tako naglašava važnost karakterističnih korena za definisanje jedinstvene prirode specifičnih transformacija. Neko vreme u upotrebi je bio engleski termin ,,proper value", ali je u današnje vreme usvojen standardan termin ,,eigenvalue" [170].

Razvojem kvantne mehanike u XX veku kao i otkrićem da atomi i molekuli zauzimaju energetske nivoe koji mogu biti interpretirani kao karakteristične funkcije ili samoadjungovani Šrodingerovi operatori, matrice, linearni operatori i karakteristični koreni dobijaju centralno mesto u nauci i matematici (koje i danas zauzimaju).

Računanje karakterističnih korena ima dugu istoriju, počev od 1846. godine, kada je Jakobi napisao čuveni rad o rešavanju simetričnih problema karakterističnih korena [80], pa sve do danas. Ovi problemi dobro su proučeni u literaturi [22, 24, 25, 34, 50, 51, 74, 104, 111, 138, 162, 163, 164, 165, 167, 168]. U radu [170] dat je pregled istorije računanja problema karakterističnih korena u XX veku.

U mnogim slučajevima analiza karakterističnih korena linearnih problema je adekvatna za predviđanje modalnog odgovora i tada se mogu koristiti standardne tehnike za računanje.

Matematički gledano, za rešavanje sistema običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednačina na prosto povezanom domenu sa velikom tačnošću (između 2 i 10 cifara), spektralne metode predstavljaju najbolji alat [167]. Međutim, računanje pojedinačnih karakterističnih korena u računskom smislu nije uvek efikasno sredstvo za razumevanje ponašanja dinamičkih sistema tokom vremena. Stoga, umesto računanja tačnih pozicija karakterističnih korena, dovoljno je lokalizovati spektar, i na taj način dobiti precizne odgovore na pitanja o ponašanju posmatranog dinamičkog sistema tokom vremena. U tom postupku, znatno se smanjuju računski troškovi.

Sam postupak lokalizacije karakterističnih korena nelinearnih problema, kojim ćemo se baviti u ovoj disertaciji (koji predstavlja osnovu spektralne analize), kao i u standardnom i generalizovanom slučaju, povezuje dijagonalnu dominaciju i regularnost. Ideja (stroge) dijagonalne dominacije potiče s kraja XIX veka, iz radova Deplanka, Levija, Minkovskog i Adamara [44, 65, 108, 121], kada je i pokazano da svojstvo stroge dijagonalne dominacije predstavlja dovoljan uslov za regularnost matrice. S druge strane, razmatrajući regularnost posmatrane matrice, odnosno matrične funkcije, polazimo od Geršgorinove teoreme (iz tridesetih godina XX veka) koja tvrdi da karakteristični koreni proizvoljne matrice reda n mogu biti lokalizovani u kompleksnoj ravni korišćenjem krugova [60, 178]. Ovaj rezultat imao je veliki odjek u nauci, počev od Drugog svetskog rata i ekspanzije primenljivosti matematike u inženjerstvu, posebno zahvaljujući Olgi Tauski, koja je povezala dijagonalnu dominaciju sa pojmom regularnosti [156, 157, 158], otvarajući polje istraživanja koje je aktuelno i danas [8, 12, 19, 20, 21, 22, 24, 28, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 50, 51, 56, 57, 58, 122, 124, 137].

Razvoj nauke i njeno okretanje ka praktičnim primenama u inženjerstvu, medicini, biologiji, ekonomiji, saobraćaju, itd. uslovili su intenzivno zanimanje za nelinearne, posebno polinomne probleme karakterističnih korena, počev od najjednostavnijih, kvadratnih, koji su dobro proučeni u literaturi [10, 14, 15, 16, 25, 26, 39, 61, 67, 70, 71, 72, 73, 76, 95, 101, 102, 104, 112, 116, 117, 160, 161], ka problemima višeg reda, čije izučavanje je postalo aktuelno poslednjih dvadesetak godina [11, 14, 15, 16, 25, 39, 61, 71, 73, 76, 83, 93, 95, 112, 116, 117, 161]. Rastući interes za proučavanjem problema karakterističnih korena postavio ih je na centralno mesto naučnih istraživanja i stvorio potrebu za njihovom klasifikacijom. Lep opis nelinearnih problema karakterističnih korena proizašlih iz praktičnih primena dat je u radu [160], gde je opisano 52 problema koji su proizašli iz primena u fizici, hemiji, biologiji, ekologiji, ekonomiji, medicini, vibracionoj teoriji, dinamici fluida i mnogim drugim oblastima. Svi proučavani problemi karakterističnih korena mogu se formulisati matričnom funkcijom koja opisuje posmatrani problem. Generalizacija pomenutog principa lokalizacije karakterističnih korena, tj. uniforman pristup lokalizaciji nelinearnih problema karakterističnih korena predstavlja jedan od ciljeva ove disertacije.

Kao što je poznato, numerička linearna algebra je veoma aktivna oblast istraživanja, jer preko svojih algoritama za računanje predstavlja jezgro za naučne proračune koji leže u osnovi ne samo problema u fizici ili inženjerstvu, već i mnogobrojnim modernim primenama, među kojima su pronalaženje informacija i restauracija slika. Mnogobrojne primene doprinele su da ova oblast dostigne svoj procvat već sredinom XX veka, uvođenjem modernih kompjutera, što je evidentno iz velikog broja naučnih časopisa u kojima su objavljivani radovi iz ove oblasti, kao i procentnog učešća ovih radova u tim časopisima [170]. Usled komplikovanijih zahteva za rešavanjem ove vrste problema u odnosu na rešavanje sistema linearnih jednačina, kao što su problemi stabilnosti dinamičkih sistema i perturbacione analize u praktičnim primenama, razvijeni su moćni alati za računanje, počev od 1971. godine i algoritama implementiranih u programu Algol60, preko LINPACK I EISPACK paketa za rešavanje sistema linearnih jednačina i problema karakterističnih korena, do LAPACK i ScaLAPACK, QMRPACK, AQPACK, P-ARPACK, GUPTRI (detalje videti u radu [170]) i novijeg Eigtool u MATLABu.

1.1 NLEP

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ prosto povezan domen i $T : \Omega \to \mathbb{C}^{n,n}$ analitička i regularna matrična funkcija, što znači da postoji bar jedan kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$ takav da je $\det(T(z)) \neq 0$. Familiju svih ovakvih matričnih funkcija T, analitičkih i regularnih na prosto povezanom domenu Ω označavaćemo sa $\mathcal{N}_n(\Omega)$. Tada, **regularan nelinearni problem karakterističnih korena**, ili kraće NLEP (od engleskog *nonlinear eigenvalue problem*), je problem oblika:

$$T(z)v = 0, \quad v \neq 0. \tag{1}$$

Obzirom da u ovoj disertaciji ne razmatramo singularne probleme karakterističnih korena, u nastavku nećemo uvek naglašavati da se radi o regularanom nelinearnom problemu karakterističnih korena.

Ovaj problem ima diskretan skup rešenja (z, v) bez tačaka nagomilavanja, gde je $z \in \Omega$ **(konačan) karakteristični koren** i v odgovarajući **(desni) karakteristični vektor**. Analogno, vektor $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, za koji važi $u^*T(z) = 0$ naziva se levi karakteristični vektor. Skup svih (konačnih) karakterističnih korena, $\Lambda_F(T) := \{z \in \Omega : \det(T(z)) = 0\}$ se naziva **konačan spektar** matrične funkcije T.

U slučajevima kada je Ω neograničen u $\mathbb{C}$, uobičajena ekstenzija pojma karakterističnih korena, koja se pokazala veoma dobrom u praktičnim primenama, jeste uključivanje beskonačnosti. Naime, neka je $\mathbb{C}_\infty$ **jednotačkasta-kompaktifikacija** kompleksne ravni $\mathbb{C}$, čija geometrijska reprezentacija je Rimanova sfera. Tada, beskonačno (∞) označava običnu tačku u prostoru koja predstavlja severni pol sfere, dok suprotni, južni pol, predstavlja nula (0). Sledeći ovu ideju, možemo uvesti pojam beskonačnog karakterističnog korena preko Mebijusove transformacije $z \to 1/z$. Naime, ∞ je karakteristični koren funkcije $T : \Omega \to \mathbb{C}^{n,n}$ definisane na neograničenom domenu $\Omega \in \mathbb{C}$, ako postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{N}_1(\Omega)$ i singularna $M \in \mathbb{C}^{n,n}$, takva da je ispunjeno

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T(z_k)}{\varphi(z_k)} = M \neq 0,$$

za sve neograničene nizove $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$. Takodje, lako definišemo mnogostrukosti karakterističnog korena ∞ za funkciju T kao mnogostrukosti karakterističnog korena 0 funkcije $\hat{T} : \hat{\Omega} \to \mathbb{C}^{n,n}$, gde je $\hat{\Omega} = \{0\} \cup \{1/z : z \in \Omega\}$ i

$$\hat{T}(z) := \frac{T(1/z)}{\varphi(1/z)}.$$

Drugim rečima, beskonačno je karakteristični koren funkcije T ako i samo ako je nula karakteristični koren funkcije $\hat{T}$, i mnogostrukosti se poklapaju.

U ovakvoj postavci, **spektar matrične funkcije** T, u oznaci $\Lambda(T)$, predstavlja skup konačnih karakterističnih korena $\Lambda_F(T)$ uz eventulani karakteristični koren ∞. Jasno, prema prethodnoj definiciji karakterističnog korena ∞, možemo napisati i sledeće

$$\Lambda(T) := \{z \in \Omega_\infty : \det(T(z)) = 0\},$$

gde je Ω_∞ jednotačkasta kompaktifikacija skupa Ω a $T(\infty) := M$.

Specijalno, u ovoj disertaciji akcenat će biti stavljen na polinomne probleme karakterističnih korena (ili kraće PEP), formulisane polinomnom matričnom funkcijom, u oznaci $P(z)$. U slučajevima kada je potrebno naglasiti i stepen posmatrane polinomne funkcije koja opisuje PEP, koristićemo oznaku P_m, gde je m je prirodan broj koji označava stepen matričnog polinoma. Ukoliko funkcija kojom je formulisan posmatrani NLEP nije polinomna, već sadrži i na primer i eksponencijalni deo, označavaćemo je sa T.

I pored jednostavne formulacije, rešavanje ovih problema je prilično komplikovano, posebno za praktične primene, gde se pojavljuju sistemi sa nekoliko hiljada, čak i nekoliko desetina i stotina hiljada nepoznatih. Višestruka primena u praksi uslovila je tokom XX veka razvoj nekoliko metoda za rešavanje standardnog problema karakterističnih korena: stepeni metod, Arnoldijev metod, Jakobi-Dejvidsonov metod i metod zasnovan na Krilovljevim potprostorima [170].

Algoritmi i teorija razvijeni za generalizovani problem karakterističnih korena mogu se koristiti direktno u slučaju kvadratnog ukoliko se kvadratni problem karakterističnih korena linearizuje na generalizovani problem. Međutim, nezadovoljavajući aspekt ovakvog pristupa je što se linearizacijom duplira dimenzija prostora. Takođe, još jedan bitan problem koji se nameće je da, ukoliko je moguće aproksimativno rešiti posmatrani generalizovani problem nekom iterativnom tehnikom, odatle ne mora da sledi da se redukcijom informacija iz prostora duple dimenzije na početni zaista dobija rešenje. Dafin je 1955. godine u radu [46] prvi generalizovao Rejli-Ricov princip za kvadratni problem karakterističnih korena za simetrične matrice A, B, C koje ga opisuju. Od tada, kvadratni i nelinearni polinomni problemi višeg reda postaju sve zastupljeniji u literaturi. Sledeći pomak u domenu proučavanja kvadratnih problema karakterističnih korena desio se 1964. godine, kada je Rodžers u radu [133] koristio principe minimuma i maksimuma za proučavanje opštijih kvadratnih problema. Krajem 1960tih i početkom 1970tih, Lankaster [101], Kublanovskaja [98, 99] i Ruhe [135] su razvili algoritme koji ne koriste linearizaciju i predstavljaju uglavnom varijante Njutnovog metoda. Dalji skok u proučavanjima kvadratnih problema karakterističnih korena bio je 1995. godine, kada su Guo i saradnici u radu

[64] opisali nekoliko iterativnih metoda koje se zasnivaju na iteraciji fiksne tačke u kombinaciji sa Lancosovom metodom i (pojednostavljenom) Njutnovom iteracijom. Za veliku popularnost kvadratnih problema karakterističnih korena zaslužan je Tiseur, koji se u radu [159] bavio analizom grešaka za opštije polinomne probleme karakterističnih korena. 1999. godine perturbacionu analizu za kvadratni problem karakterističnih korena objavljuje San u radu [153], a treba pomenuti i rad Slejpena i ostalih [144], koji su 1996. godine pokazali da se Jakobi-Dejvidsonova metoda može primeniti u cilju redukcije datog polinomnog problema u n-dimenzionom prostoru na sličan problem u manjem, m-dimenzionom prostoru, na koji se, tada, može primeniti bilo koja od ranije pomenutih metoda. Za kvadratni problem karakterističnih korena proizašao iz problema akustike, pokazano je da je ovakav pristup efikasan za matrice reda oko 240 000 [145]. Bai je 1995. godine pomenuo potrebu za algoritmima koji rešavaju polinomne probleme petog reda [6]. Tri godine kasnije, Heeg je u radu [68] pokazao da Jakobi-Dejvidsonov princip važi i za PEPove četvrtog stepena proizašle iz proučavanja nestabilnosti linije priključenja protoka u aeroprofilima. Naglim razvojem nauke, tehnike i tehnologija, osim pomenutih, u poslednje dve decenije razvijen je veliki broj kvadratnih problema karakterističnih korena i NLEPova proizašlih iz prakse i oni dobijaju centralno mesto u savremenoj nauci. Lep i koristan pregled kvadratnih problema karakterističnih korena i NLEPova proizašlih iz praktičnih primena dat je u radu [160].

1.1.1 SEP

Najjednostavniji problem karakterističnih korena jeste **standardni problem karakterističnih korena**, ili kraće SEP (od engleskog *standard eigenvalue problem*), formulisan matričnom funkcijom P_1 oblika:

$$P_1(z) = zI - A, \tag{2}$$

gde je A kompleksna kvadratna matrica reda n, I je jedinična matrica, dok je $z \in \mathbb{C}$ proizvoljan kompleksan broj. Standardni problemi karakterističnih korena javljaju se, npr. u populacionoj ekologiji [92], Markovljevim lancima [168], itd.

U slučaju SEPa, računanje karakterističnih korena eksplicitnom konstrukcijom karakterističnih jednačina $det(P_0(z)) = 0$, osim u specijalnim slučajevima, se ne primenjuje, jer se karakteristična jednačina ne može rešiti tako da se dobiju numerički stabilna rešenja [170] jer čak i male perturbacije koeficijenata mogu izazvati velike perturbacije korena.

1.1.2 GEP

Generalizovani problem karakterističnih korena, ili kraće GEP (od engleskog *generalised eigenvalue problem*) je formulisan matričnom funkcijom P_1 oblika:

$$P_1(z) = zB - A, \tag{3}$$

gde je P_1 polinomna matrična funkcija prvog stepena, $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $z \in \mathbb{C}$ je proizvoljan kompleksan broj. GEP predstavlja generalizaciju standardnog problema karakterističnih korena.

Ukoliko je matrica B regularna, generalizovani problem se može transformisati u standardni problem karakterističnih korena $B^{-1}P_1(z) = zI - B^{-1}A$ ili $P_1(z)B^{-1} = zI - AB^{-1}$. U suprotnom, GEP ima ∞ kao rešenje, tj. ∞ je karakteristični koren funkcije P_1 sa čije su mnogostrukosti određene matricom B.

Pod pojmom karakteristični koren funkcije P_1, u [88] nazvan generalizovani karakteristični koren, misli se na karakteristični koren koji odgovara GEP, tj. $z \in \mathbb{C}$, za koji je $P_1(z)v = 0$, za neki $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$.

Numeričko računanje karakterističnih korena i odgovarajućih karakterističnih vektora generalizovanog problema je delikatniji zadatak u odnosu na SEP, posebno u slučajevima kada karakteristični vektori matrice A zaklapaju male uglove [170]. Tako, na primer, ako je matrica A defektna, ona se Žordanovom formom može redukovati, ali, i pored toga, pri malim perturbacijama može postati nedefektna, što ukazuje na suštinu problema računanja karakterističnih korena i karakterističnih vektora i njihove preciznosti. Jakobi [80] je prvi pokrenuo ovu temu, računajući karakteristične korene simetričnih matrica transformacijom matrice do stroge dijagonalne dominacije, o kojoj ćemo kasnije govoriti. Ova tehnika je i dovela do pojave popularnih računskih algoritama.

Tokom vremena razvijane su različite metode za računanje GEP: stepeni metod, inverzna iteracija, Krilovljeve metode, QR metoda, metoda konačnih elemenata (detalje videti npr. u [74, 76, 82, 95, 115, 122, 137, 138, 148, 152, 167, 170, 175]). Treba primetiti da su sve pomenute metode iterativne, što je neminovno, jer bi, u slučaju da postoji metoda koja računa karakteristične korene GEP u n koraka, to bilo u suprotnosti sa teoremom Abel-Rufinija (i takođe sa poznatim rezultatom Galoaove teorije) da ne postoji algoritam za računanje korena karakterističnog polinoma stepena većeg od 4 [170]. Dakle, u opštem slučaju (osim za trougaone i dijagonalne matrice kao i matrice koje su njima slične), za posmatrani problem, u zavisnosti od osobina matrice (realna/kompleksna; simetrična/ koso-simetrična, hermitska, unitarna), strukture (gusta, retka, strukturirano retka, Toplicova), traženih korena (najmanji, najveće magnitude, realan deo negativan), algoritam za računanje mora biti iterativni, pa nastaje problem izbora algoritma, (odnosno odgovarajuće metode računanja GEP) sa što manjim računskim troškovima (u smislu broja operacija, brzine konvergencije i tačnosti). U ovom kontekstu, lokalizacije primenom Geršgorinove teoreme (za GEP), detaljno izložene u [88], izdvajaju se svojom jednostavnošću i čine dobro polazište za primenu iterativnih postupaka.

1.1.3 QEP

Standardni i generalizovani problem karakterističnih korena nastali su, između ostalog, iz proučavanja konzervativnih mehaničkih sistema, tehnikom Lagranžovih jednačina malih slobodnih kretanja [170]. Međutim, ove metode nisu mogle biti primenjene na sisteme koji nisu konzervativni, tačnije na sisteme u koje je uključen faktor prigušenja, iz kojih je proizašao kvadratni problem karakterističnih korena, najjednostavniji od svih nelinearnih, preciznije polinomnih problema karakterističnih korena. Osim toga, određen broj fizičkih pojava se može modelovati običnim diferencijalnim jednačinama drugog reda, sa koeficijentima koji su matrice $x''(t)C + x'(t)B + Ax(t) = f(t)$ Diskretizacijom ovih jednačina dobija se **kvadratni problem karakterističnih korena**, ili kraće QEP (od engleskog *quadratic eigenvalue problem*) formulisan polinomnom matričnom funkcijom drugog stepena P_2 oblika:

$$P_2(z) = z^2C + zB + A, \tag{4}$$

gde su A, B i C kompleksne kvadratne matrice reda n, pri čemu je vodeća matrica $C \neq 0$ i $z \in \mathbb{C}$ je proizvoljan kompleksan broj.

Kao i u slučaju GEP, spektar funkcije P_2 može sadržati i beskonačne karakteristične korene, koji se javljaju u slučajevima kada je vodeća matrica C singularna. Preciznije, kako je $p(z) = det(z^2C+zB+A)$ polinom koji zavisi od z, i ima stepen najviše $r = 2n - rank(C)$, sa $z_1, z_2, ..., z_r$ ćemo označiti rešenja jednačine $p(z) = 0$, i definisati $z_{r+1} = \infty, z_{r+2} = \infty, ..., z_{2n} = \infty$. Tada je spektar $\Lambda(P_2) = \{z_1, z_2, \ldots, z_{2n}\}$ i reći ćemo da svaki (regularan) QEP dimenzije n ima tačno $2n$ karakterističnih korena, među kojima može biti i beskonačnih.

Kao i u slučaju GEP, za proizvoljan QEP određen matričnom funkcijom $P_2(z) = z^2C + zB + A \in \mathcal{N}_n(\Omega)$, lako se vidi da se beskonačni karakteristični koreni mogu tretirati kao nule problema definisanog obrnutim polinomom

$$\widehat{P}(z)v := z^2A + zB + C \tag{5}$$

tj., $\Lambda(P_2) = \Lambda(\widehat{P}_2)^{-1}$, pri čemu se inverz skupa $\mathbb{C}_\infty$ interpretira kao skup recipročnih vrednosti. Ova dualnost je veoma značajna u slučajevima kada se razmatraju QEPovi sa beskonačnim karakterističnim korenima, pod perturbacijama, što je veoma česta pojava u primenama.

Osim pomenutih primena, QEPovi se pojavljuju u strukturalnoj mehanici, kontrolnoj teoriji, mehanici fluida i mnogim drugim oblastima. U radu [14] Bečke i ostali su dali kolekciju ovih problema koji se javljaju u praktičnim primenama, dok je Tiseur u radu [160] opisao kvadratne probleme koji se javljaju u praksi. Pokazalo se da su QEP najčešći nelinearni problemi karakterističnih korena koji proizilaze iz praktičnih primena.

1.1.4 NLEP

Posmatrajmo, npr. linearan, vremenski invarijantan dinamički sistem:

$$A_k x^{(k)}(t) + A_{k-1} x^{(k-1)}(t) + ... + A_0 x(t) = 0 \qquad (6)$$

sa početnim uslovima $x(0) = c_0$, $x'(0) = c_1$, ... , $x^{(k-1)}(0) = c_{k-1}$, gde je $x(t) : R \to \mathbb{C}^n$ funkcija stanja a $A_0, A_1, ..., A_k \in \mathbb{C}^{n,n}$ matrice koeficijenata, uz pretpostavku da je vodeća matrica A_k regularna. Jednačina (6) opisuje *prostor stanja linearnog dinamičkog sistema.* Poželjno svojstvo ovih sistema je stabilnost [118], koja se ispituje preko karakterističnih korena matrične funkcije $P_k(z) = A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + ... + A_0 z$, preciznije, utvrđivanjem njihovog najvećeg realnog dela.

Pored toga, u primenama se često javlja diskretna zavisnost od vremena i tada je prostor stanja sistem koji preslikava diskretnu ulaznu u diskretnu izlaznu funkciju oblika $A_k x_{j+k} + A_{k-1} x_{j+k-1} + ... + A_0 x_j = 0$, $j \in \mathbb{N}_0$ sa početnim uslovima $x_0 = c_0$, ... , $x_{k-1} = c_{k-1}$, što takođe vodi ispitivanju polinomnog problema karakterističnih korena sa matričnom funkcijom $P_k(z) = A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + ... + A_0 z$ i utvrđivanju najvećeg modula vrednosti u spektru.

Pored polinomnih problema karakterističnih korena, postoje i problemi određeni nelinearnim matričnim funkcijama, koje imaju eksponencijalni ili transcedentni deo, npr. problemi sa vremenskim kašnjenjem. Vremensko kašnjenje je veoma česta pojava u inženjerskom svetu (aktuatori, sensori, mrežna polja). Problemi sa vremenskim kašnjenjem, poznati i pod imenima diferencijalne jednačine sa kašnjenjem (ili kraće DDE), sistemi sa afterefektom, nasledni sistemi, jednačine sa devijantnim argumentom, diferencijalno-diferentne jednačine [132], pripadaju klasi sistema sa funkcionalnim stanjem, tj. to su beskonačno dimenzionalne parcijalne diferencijalne jednačine. Karakteristično za ovu vrstu problema je da izvod nepoznate funkcije stanja $x(t)$ zavisi od vrednosti funkcije u prethodnim stanjima.

Ovi sistemi se koriste u proučavanju diferencijalnih jednačina, stohastičkih procesa, teorije statistike i teorije sistema a imaju brojne primene u raznim granama inženjerstva (mehaničko, električno, hemijsko). Neki od otvorenih problema ovog tipa su: upotreba odloženih inputa za stabilizaciju i regularizaciju originalnog sistema, adaptivna identifikacija kašnjenja u praktičnim problemima, imajući u vidu stohastička svojstva vremenskog kašnjenja, i razmatranje informacije o kašnjenju za posmatrače.

Kao primer posmatrajmo sistem sa prostim kašnjenjem i konstantnim koeficijentima $\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-\tau) \quad$ za $A_0, A_1 \in \mathbb{C}^{n,n}$ kome odgovara nelinearna matrična funkcija T oblika [83]:

$$T(z) = -zI + A_0 + A_1e^{-\tau z}.$$

Kao drugi primer posmatrajmo sistem sa diskretnim kašnjenjima oblika: $\frac{d}{dt}x(t) = A_0x(t)+A_1x(t-\tau_1)+...+A_mx(t-\tau_m)$ čija je odgovarajuća funkcija $T(z) = -zI + A_0 + A_1e^{-\tau_1 z} + ... + A_me^{-\tau_m z}$.

Osim pomenutih primena, sistemi određeni nelinearnim matričnim funkcijama koje sadrže eksponencijalni deo pojavljuju se i u problemima radijacije, o čemu je bilo reči u uvodu.

1.2 Lokalizacija karakterističnih korena i dijagonalna dominacija

Lokalizacija karakterističnih korena (lokalizacija spektra) podrazumeva konstruisanje oblasti u kompleksnoj ravni koji obuhvataju sve karakteristične korene matrične funkcije koja određuje posmatrani problem. Ovaj postupak je naročito koristan u situacijama kada je dovoljno odrediti samo približne vrednosti karakterističnih korena, te se upravo na njemu zasnivaju iterativni algoritmi za računanje. Dakle, umesto da određujemo tačnu lokaciju karakterističnih korena (što se, u računskom smislu, može pokazati kao izuzetno skup zadatak), naš cilj je da odredimo dovoljno dobre granice za oblasti koje sadrže karakteristične korene. S druge strane, pri računanju karakterističnih korena velikih i retkih matrica većina postojećih algoritama za računanje se fokusira samo na deo spektra, usled čega se može desiti da se ne izračunaju neki željeni karakteristični koreni, [85]. Najzad, elementi nekih matrica mogu biti dati sa izvesnom nesigurnošću, i, kao posledica toga, karakteristični koreni ne mogu biti izračunati precizno, već samo lokalizovani nekim oblastima kompleksne ravni. Drugim rečima, postupak lokalizacije sastoji se u nalaženju granica krivih koje opisuju oblasti u čijoj se unutrašnjosti ili na granici nalaze svi karakteristični koreni. Kao što je pomenuto, jedan od načina kako se to može ostvariti je pomoću Geršgorinove teoreme i njenih uopštenja. U standardnom slučaju, ova teorema tvrdi da karakteristični koreni date matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ leže u uniji krugova u kompleksnoj ravni. Međutim, u opštem slučaju, ove lokalizacione oblasti su definisane kao jednostavne funkcije koje zavise od elemenata matrice A (za SEP), odnosno od elemenata matrica koje definišu matričnu funkciju T koja određuje posmatrani GEP, QEP, PEP, odnosno NLEP. Navedeni razlozi daju jasnu motivaciju za lokalizaciju karakterističnih korena, a način na koji ćemo je u okviru ove disertacije konstruisati glavnu ulogu daje čuvenoj Geršgorinovoj teoremi [60] koju navodimo u obliku kao u [178]:

Teorema 1.1. *(Geršgorin) Za svaku kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i svaki karakteristični koren $z \in \Lambda(A)$ postoji indeks $i \in N$ takav da je:*

$$|z - a_{ii}| \leq r_i(A). \tag{7}$$

Stoga, $z \in \Gamma_i(A)$, odakle sledi da je $z \in \Gamma(A)$. Kako ovo važi za svaki karakteristični koren z, tada je:

$$\Lambda(A) \subseteq \Gamma(A).$$

Ovde je

$$\Gamma_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i(A)\}, \quad \text{za sve indekse } i \in N \tag{8}$$

i**-ti Geršgorinov krug** koji je zatvoren i ograničen krug u kompleksnoj ravni, sa centrom u a_{ii} i poluprečnikom $r_i(A)$. Unija svih Geršgorinovih krugova formira **Geršgorinov skup** $\Gamma(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A)$.

Ovde se veličina

$$r_i(A) := \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \tag{9}$$

naziva **suma modula vandijagonalnih elemenata i-te vrste matrice** A, ili, kraće, **vandijagonalna suma i-te vrste matrice** A.

Navedena teorema tvrdi da unija krugova u kompleksnoj ravni, definisanih jednakošću (8), sadrži sve karakteristične korene matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$. Kako se lokalizacije koje će na dalje biti konstruisane baziraju na ideji dokaza ove teoreme, isti navodimo, u obliku datom u [178]:

Dokaz. Za svaki karakteristični koren z, neka je $0 \neq v = [v_1, v_2, ..., v_n]^T \in \mathbb{C}^n$ pridruženi karakteristični vektor, tj. važi $Av = zv$, pa je $\sum_{j \in N} a_{ij} v_j = z v_i$, za svaki indeks $i \in N$. Kako je $v \neq 0$, postoji indeks $k \in N$ za koji je $0 < |v_k| = \max\{|v_i| : i \in N\}$. Tada je $\sum_{i \in N} a_{ki} v_i = z v_k$, ili, ekvivalentno tome,

$$(z - a_{kk}) v_k = \sum_{i \in N \setminus \{k\}} a_{ki} v_i.$$

Uzimajući apsolutne vrednosti u prethodnoj jednakosti i koristeći nejednakost trougla, dobija se:

$$|z - a_{kk}| \cdot |v_k| \leq \sum_{i \in N \setminus \{k\}} |a_{ki}| \cdot |v_i| \leq \sum_{i \in N \setminus \{k\}} |a_{ki}| \cdot |v_k| = |v_k| \cdot r_k(A),$$

i, deleći sa $|v_k| > 0$, dobija se nejednakost (7). Tada, na osnovu (8), karakteristični koren $z \in \Gamma_k(A)$ i, stoga je $z \in \Gamma(A)$. Kako ovo važi za proizvoljan karakteristični koren $z \in \Lambda(A)$, sledi da je $\Lambda(A) \subseteq \Gamma(A)$. Ovim je dokaz završen. □

Lepota i primenljivost Geršgorinove teoreme ogleda se u njenoj jednostavnosti, jer je lako izračunati poluprečnike krugova čija unija sadrži sve karakteristične korene posmatrane matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$. Raspored korena nije uniforman, već zavisi od slučaja do slučaja. Stoga ovde navodimo i drugu Geršgorinovu teoremu [60], koja opisuje uslove pod kojima je moguće izolovati korene, uz pretpostavku da se Geršgorinov skup sastoji iz više komponenti, od kojih je bar jedna disjunktna sa ostalima.

Neka je $n \geq 2$ i $S \subseteq N$, i neka je $|S|$ oznaka za broj elemenata skupa S, a $\bar{S} = N \setminus S$ je oznaka za komplement skupa S u odnosu na skup indeksa N. Dalje, za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ označimo sa $\Gamma_S(A) = \bigcup_{i \in S} \Gamma_i(A)$ uniju krugova koja ,,odgovara"indeksima iz skupa S. Tada, druga Geršgorinova teorema, koju ovde navodimo u obliku kao u [45], glasi:

Teorema 1.2. *(Druga Geršgorinova teorema) Ako za matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i neprazan skup indeksa $S \subsetneq N$ važi*

$$\Gamma_S(A) \cap \Gamma_{\bar{S}}(A) = \emptyset, \tag{10}$$

tada $\Gamma_S(A)$ sadrži tačno $|S|$ karakterističnih korena matrice A i, shodno tome, $\Gamma_{\bar{S}}(A)$ sadrži preostale karakteristične korene matrice A.

Popularnost Geršgorinove teoreme je posebno zahvaljujući Olgi Tauski-Tod, koja je znala za njenu vezu dijagonalne dominacije sa pojmom regularnosti [156, 157, 158], otvarajući polje istraživanja koje je aktuelno i danas [8, 12, 19, 20, 21, 22, 24, 28, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 50, 51, 56, 57, 58, 122, 124, 137]. Sam pojam regularnosti je, krajem XIX veka uveo Lévi, teoremom čiji dokaz daje osnovnu ideju koju ćemo nadalje koristiti u generalizacijama u okviru ove disertacije. Ovde je navodimo u obliku kao u [88]:

Teorema 1.3. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica. Ako važi*

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad \textit{za sve } i \in \mathbb{N} \tag{11}$$

tada je A regularna matrica.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je A singularna matrica. Tada postoji vektor $x \neq 0$, $x \in \mathbb{C}^n$, takav da je $Ax = 0$, ili, ekvivalentno tome, $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}x_j = 0$, za svaki indeks $i \in \mathbb{N}$. Kako je vektor $x \neq 0$, sledi da postoji indeks $k \in \mathbb{N}$, za koji je ispunjeno $0 < |x_k| = \max\{|x_j| : j \in \mathbb{N}\}$. Za ovaj indeks k važi:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{k\}} a_{kj}x_j = -a_{kk}x_k,$$

odakle, primenom modula i potom nejednakosti trougla, sledi:

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{k\}} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{k\}} |a_{kj}|.$$

Deljenjem ove nejednakosti pozitivnim brojem $|x_k|$, dobija se:

$$|a_{kk}| \leq r_k(A),$$

što je očigledno u kontradikciji sa pretpostavkom (11). Stoga sledi da je A regularna matrica. □

Lévi-Deplankova teorema 1.3 o regularnosti i Geršgorinova teorema 1.1 o lokalizaciji karakterističnih korena čine osnovu lokalizacione tehnike koja je aktuelna već više od 70 godina. Knjiga Ričarda Varge [178] predstavlja polaznu osnovu za istraživanja različitih aspekata primene Geršgorinove teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena date matrice, pregled rezultata nastalih na osnovu Geršgorinovog rezultata, kao i vezu teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena, s jedne, i teoreme o regularnosti date matrice, s druge strane. Ova knjiga inspirisala je mnoge kasnije lepe rezultate, ali i motivisala brojna dalja uopštenja i primene, kao npr. [90] i [109]. Suština je u sledećem: odgovarajuće teoreme Geršgorinovog tipa ekvivalentne su tvrđenju da je svaka matrica odgovarajuće potklase H-matrica regularna. Do sada je poznato više vrsta lokalizacija Geršgorinovog tipa za standardni i generalizovani problem karakterističnih korena koje koriste osobine poznatih potklasa H-matrica i predstavljaju generalizacije Geršgorinove teoreme kako za matricu A i pomenute klase, tako i za linearne matrične funkcije (videti npr. [88, 178]).

Kako se u praktičnim primenama u nauci i inženjerstvu javljaju i slučajevi koji uključuju perturbacije matrica koje reprezentuju posmatrani NLEP, razmatraćemo i lokalizacione tehnike za pseudospektar nelinearnih problema karakterističnih korena, primenjujući tehniku lokalizacije spektra prilagođenu, odnosno konstruisanu tako da uključi i male perturbacije. Ovo će naročito biti značajno za probleme u kojima se lokalizacija pseudospektra pokazala pogodnijom od lokalizacije spektra za rešavanje problema proizašlih iz praktičnih primena.

Upravo smo videli da je Geršgorinove teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena blisko povezana sa klasom **strogo dijagonalno dominantnih**, ili, kraće, SDD matrica, opisne uslovom (11) koje ćemo u daljem tekstu označavati sa $\mathbb{S}$.

Preciznije, proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je SDD matrica ako i samo ako za svaki indeks (vrste) $i \in N := \{1, 2, \ldots, n\}$ važi nejednakost (11). Drugim rečima, proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je SDD matrica ukoliko je svaki njen dijagonalni element po modulu strogo veći od sume modula vandijagonalnih elemenata posmatrane vrste. Upotrebljivost i značajnost ove klase matrica ogleda se u činjenici da je pomenuti uslov veoma jednostavno proveriti i ne zahteva komplikovan račun. U slučajevima kada stroga nejednakost nije ispunjena za svaki indeks $i \in \mathbb{N}$, ali važi nešto slabiji uslov:

$$|a_{ii}| \geq r_i(A), \quad \text{za sve } i \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

i stroga nejednakost je ispunjena za bar jedan indeks $k \in \mathbb{N}$, govorimo o klasi **dijagonalno dominantnih**, ili, kraće, DD matrica.

Nadalje, prateći [88], uvodimo klase matrica koje su uopštenja SDD, odnosno DD matrica i u tu svrhu uvodimo pojam pridružene matrice. Naime, sa $\langle A \rangle := [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ ćemo označiti **pridruženu matricu** matrice A i definišemo je sa:

$$m_{ij} := \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & \text{inače}. \end{cases}$$

Definicija 1.1. *Neka je $\mathbb{K}$ neprazna klasa kompleksnih kvadratnih matrica reda n. Ako je $\mathbb{K}$ takva da:*

- *za svaku matricu $A \in \mathbb{K}$, $a_{ii} \neq 0$,*
- *za svaku matricu $A \in \mathbb{K}$ i za svaku matricu $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, ako važi $\langle B \rangle \geq \langle A \rangle$, tada je $B \in \mathbb{K}$,*

*tada kažemo da je $\mathbb{K}$ **dijagonalno dominantnog tipa**, ili kratko **DD-tipa**, klasa matrica.*

Primetimo da drugi uslov u prethodnoj definiciji impliciria da je za svaku matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $A \in \mathbb{K}$ ako i samo ako je $|A| \in \mathbb{K}$, gde $|A| := [|a_{ij}|]$.

Drugim rečima, klasa matrica je DD-tipa ako sve njene matrice imaju dijagonalne elemente različite od nule, klasa je invarijantna za rast modula dijagonalnih elemenata, opadanje modula vandijagonalnih elemenata i proizvoljnu promenu kompleksnog argumenta elemenata matrice. Detaljan pregled, opis i definicije ovakvih klasa date su u [88, 176, 178]. Kao što ćemo videti u nastavku disertacije, ove klase regularnih matrica zauzimaće centralno mesto u razmatranjima koja slede. Među njima posebnu ulogu igra koncept generalizovane dijagonalne dominacije, nastao sedamdesetih godina prošlog veka, u okviru teorije konvergencije iterativnih postupaka a prvi put (u današnjem kontekstu) upotrebljen u radu [81].

Definicija 1.2. *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je* ***generalizovano dijagonalno dominantna****, ili, kraće GDD, ako postoji pozitivan vektor $x \in \mathbb{R}^n$, takav da je*

$$|a_{ii}|x_i > \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} |a_{ij}|x_j, \quad \text{za sve } i \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

tj. postoji pozitivna dijagonalna matrica X takva da je AX strogo dijagonalno dominantna.

Sam naziv generalizovano dijagonalno dominantna ukazuje na to da je ovo upravo generalizacija uslova dijagonalne dominacije, tačnije uslova (11), jer se iz uslova (13), za izbor vektora $x = [1, 1, 1, ..., 1]^T$, dobija upravo uslov (11).

Koncept generalizovane dijagonalne dominacije nastao je, s jedne strane, uopštenjem koncepta M-matrica, nastalih iz diskretizacija diferencijalnih operatora [12], a s druge strane, iz stroge dijagonalne dominacije. Osnovna ideja ovog koncepta je da, polazeći od SDD matrice, množeći je s desne strane regularnom dijagonalnom matricom, dobijamo proizvod koji je takođe regularan (uslov (13)). Iako možda na prvi pogled jednostavna posledica, ova ideja je značajno uticala na teoriju M-matrica. Same M-matrice, vode poreklo iz radova Ostrovskog [125] i imaju višestruke primene u praksi (npr. pozitivna definitnost, pozitivna stabilnost, ekonomija, iterativni postupci). Klasa GDD matrica se takođe može konstruisati pomoć u M-matrica, te se u tom kontekstu naziva još i klasa **H-matrica**, što u daljem tekstu označavamo sa $\mathbb{H}$. Da sumiramo, iako se ova klasa $\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$-matrice tj. GDD matrice) može definisati na više ekvivalentnih načina, navodimo dva za nas najvažnija:

- Matrica $A \in \mathbb{H}$ ako i samo ako postoji vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, čiji su elementi pozitivni, tako da važi $|a_{ii}|x_i > \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|x_j$, za sve $i \in N$, ili, ekvivalentno, AX je SDD matrica, za $X := \text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

- Matrica $A \in \mathbb{H}$ ako i samo ako je njena pridružena matrica $\langle A \rangle$ **regularna M-matrica**, tj. ako je pridužena matrica $\langle A \rangle$ regularna, i $\langle A \rangle^{-1} \geq O$.

Nadalje, pod pojmom ,,nenegativna matrica" ćemo podrazumevati sve matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ čiji su elementi nenegativni, tj. $a_{ij} \geq 0$. Slično, pod pojmom ,,pozitivna matrica" ćemo podrazumevati sve matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ čiji su elementi pozitivni, tj. $a_{ij} > 0$. Analogno se definišu pojmovi ,,nepozitivna matrica" i ,,negativna matrica".

Problem pripadnosti klasi $\mathbb{H}$ leži u činjenici da je za dato $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ računski skupo naći X, ako ona postoji, tako da je $AX \in \mathbb{S}$. Međutim, pomenutu matricu X je računski skupo naći, u opštem slučaju. Ona je poznata samo za mali broj potklasa H-matrica, i u tome i leži težina problema rada sa H-matricama.

Dakle, GDD matrice se dobijaju iz SDD matrica množenjem matrice A s desne strane proizvoljnom pozitivnom dijagonalnom matricom [78]. Kako svaki dijagonalni element matrice X množi odgovarajuću kolonu matrice A i tako formira kolonu matrice AX, ovaj postupak ćemo nadalje nazivati **skaliranje**, proizvod AX ćemo nadalje nazivati **skalirana matrica**, a pozitivnu dijagonalnu matricu X **skalirajuća matrica**.

Iz definicije jasno sledi da je $\mathbb{H}$ klasa DD-tipa. Međutim važi i više. Naime, kao što je pokazano u [91, 88], klasa $\mathbb{H}$ je maksimalna regularna klasa DD-tipa u uređenju klasa zadatom relacijom podskupa ($\subseteq$) [91, Teorema 2].

Teorema 1.4. *Ako je klasa $\mathbb{K}$ matrica dijagonalno dominantnog tipa potklasa klase regularnih matrica, tada je ona potklasa klase regularnih H-matrica, tj., $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{H}$.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{K}$. Kako je $\langle A \rangle \in \mathbb{K}$, $\langle A \rangle$ regularna. Treba dokazati da je $\langle A \rangle^{-1}$ nenegativna. Uzmimo razlaganje $\langle A \rangle = D_A - B_A$, gde je $D_A = diag(\langle A \rangle) = diag(|a_{11}|, |a_{22}|, ..., |a_{nn}|)$. Očigledno je D_A dijagonalna matrica čiji su elementi pozitivni, pa možemo pisati $\langle A \rangle = D_A(I_n - D_A^{-1}B_A)$, što implicira da je $I_n - D_A^{-1}B_A$ regularna i $\langle A \rangle^{-1} = (I_n - D_A^{-1}B_A)^{-1}D_A^{-1}$.

Pokažimo da je $\rho(D_A^{-1}B_A) := \max\{|z| : z \in \Lambda(D_A^{-1}B_A)\} < 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $z \in \Lambda(D_A^{-1}B_A)$ takav da je $|z| \geq 1$. Tada je $zI_n - D_A^{-1}B_A = D_A^{-1}(zD_A - B_A)$ singularna. Kako je $|z| \geq 1$, možemo pisati $|zD_A - B_A| = |z|D_A + B_A = D_A + B_A + (|z| - 1)D_A = |A| + D$, gde je $D := (|z| - 1)D_A$ nenegativna dijagonalna matrica. Stoga $zD_A - B_A \in \mathbb{K}$, pa je regularna, što je očigledna kontradikcija sa pretpostavkom.

Sada, kako je $\rho(D_A^{-1}B_A) \leq 1$, geometrijski red $\sum_{i=1}^{+\infty}(D_A^{-1}B_A)^k$ konvergira ka $(I_n - D_A^{-1}B_A)^{-1}$. Kako je $D_A^{-1}B_A$ nenegativna, granična vrednost ovog reda će biti nenegativna, čime je dokaz kompletiran. $\square$

Polazeći od uslova stroge dijagonalne dominacije (uslov (11)), generalizacija ovog uslova se odvijala u nekoliko različitih pravaca [30], od kojih ćemo ovde pomenuti tri: pravac uopštenja nastao množenjem suma po vrstama, zatim pravac kombinovanja vrsta i kolona i pravac uopštenja nastao izdvajanjem podskupa indeksa. Na taj način su nastale neke poznate potklase H-matrica. Jedna od prvih generalizacija stroge dijagonalne dominacije ovog tipa je klasa dvostruko strogo dijagonalno dominantnih matrica, kod kojih su sve vrste u posmatranoj matrici, osim, eventualno, jedne, strogo dijagonalno dominantne. Ovu klasu matrica je uveo Ostrovski dajući u radu [126] dokaz regularnosti za ovu klasu matrica.

Definicija 1.3. *(dSDD matrice) Proizvoljna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ se naziva* ***dvostruko strogo dijagonalno dominantnih matrica****, ili kraće dSDD matrica, ako važi:*

$$|a_{ii}||a_{jj}| > r_i(A)r_j(A) \quad \textit{za sve indekse } i,j \in N,\ i \neq j. \tag{14}$$

Klasu takvih matrica ćemo u daljem tekstu označavati sa $\mathbb{S}_d$. Primetimo da, ukoliko $A \in \mathbb{S}$, tada uslov stroge dijagonalne dominacije važi za svaku vrstu ove matrice, pa time i za svake dve različite vrste, tj. dva različita indeksa $i, j \in N$. Odatle sledi da je svaka SDD matrica takođe i dSDD. Međutim, obrat ne mora da važi, što će biti pokazano u primeru na kraju ove sekcije, gde ilustrujemo i komentarišemo međusobne odnose poznatih potklasa H-matrica.

Odgovarajući rezultat regularnosti dat je teoremom koju ovde navodimo kao u [30]:

Teorema 1.5. *(Teorema Ostrovskog) Svaka dSDD matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regularna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ koja zadovoljava uslov (14) singularna. Odatle, analogno već navedenim dokazima, sledi da postoji vektor $0 \neq x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, takav da važi $Ax = 0$, ili, ekvivalentno tome:

$$-a_{ii}x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij}x_j, \quad \text{za sve } i \in N. \tag{15}$$

Slično kao u dokazu Lévi-Deplankove teoreme, kako je vektor $x \neq 0$, sledi da postoje indeksi $k, l \in N$, za koje je ispunjeno $|x_k| \geq |x_l| \geq \max\{|x_i| : i \in N \setminus \{k, l\}\}$, pri čemu je za $n = 2$ maksimum iz prethodne nejednakosti jednak nuli. Uzimanjem apsolutnih vrednosti i primenom nejednakosti trougla u uslovu (15), sledi:

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}||x_j| \leq |x_l| r_k(A).$$

U slučaju da je $|x_l| = 0$, sve veličine u poslednjoj relaciji su jednake nuli, što je očigledna kontradikcija sa pretpostavkom (14). Stoga mora biti $|x_l| > 0$. Za $i = l$ i primenu nejednakosti trougla na nejednakost (15), dobija se:

$$|a_{ll}||x_l| \leq \sum_{j \in N \setminus \{l\}} |a_{lj}||x_j| \leq |x_k| r_l(A).$$

Konačno, množenjem prethodne dve nejednakosti, dobija se:

$$|a_{kk}||a_{ll}||x_k||x_l| \leq r_k(A) r_l(A) |x_k||x_l|,$$

pa, kako je $|x_k||x_l| > 0$, sledi da $|a_{kk}||a_{ll}| \leq r_k(A) r_l(A)$, što je očigledno u kontradikciji sa pretpostavkom (14). Stoga sledi da je A regularna matrica.

□

Primetimo da je $\mathbb{S}_d$ klasa matrica DD-tipa; drugim rečima iz uslova (14) se vidi da ova klasa ostaje invarijantna za rast modula dijagonalnih elemenata, opadanje modula vandijagonalnih elemenata i proizvoljnu promenu kompleksnog argumenta proizvoljnog elementa. Takođe svi dijagonalni elementi su različiti od nule. Dakle, zaključujemo da je ovo potklasa H-matrica.

Naredno prirodno uopštenje stroge dijagonalne dominacije zasniva se na ideji kombinovanja vrsta i kolona posmatrane matrice, s obzirom da se svojstvo regularnosti prenosi i na transponovanu matricu, tj. matrica i njena transponovana su ili obe regularne ili obe singularne. Koristeći ovu činjenicu, definisane su sledeće potklase H-matrica, pod imenom α-matrice ([125]) u čijem opisu učestvuju vandijagonalne sume po kolonama. Preciznije, za $i \in N$, veličina

$$c_i(A) = r_i(A^T) := \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \tag{16}$$

se naziva **suma modula vandijagonalnih elemenata i-te kolone matrice** A, ili, kraće, **vandijagonalna suma i-te kolone matrice** A.

Definicija 1.4. *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je α_1**-matrica** ako postoji parametar $\alpha \in [0,1]$, takav da za svaki indeks $i \in N$ važi:*

$$|a_{ii}| > \alpha r_i(A) + (1 - \alpha) c_i(A). \tag{17}$$

Obzirom da se za različite vrednosti parametra α mogu dobiti različiti rezultati regularnosti, može se ići i dalje, tačnije, razmatrati ova definicija posebno za fiksiranu vrednost parametra α, a posebno na nivou celog skupa vrednosti $\alpha \in [0,1]$. Uvešćemo oznake: $A \in \mathbb{O}^1_\alpha$, ako za fiksirani parametar $\alpha \in [0,1]$ važi uslov (17), a, ukoliko postoji parametar $\alpha \in [0,1]$ takav da je uslov (17) ispunjen, tada ćemo klasu takvih matrica označavati sa $\mathbb{O}^1$, tj. $\mathbb{O}^1 := \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \mathbb{O}^1_\alpha$ je klasa α_1-matrica.

Definicija 1.5. *Matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ *je* α_2***-matrica*** *ako postoji parametar* $\alpha \in [0,1]$*, takav da za svaki indeks* $i \in N$ *važi:*

$$|a_{ii}| > r_i(A)^\alpha c_i(A)^{1-\alpha}. \tag{18}$$

Analogno prethodnoj klasi, uvešćemo oznake: $A \in \mathbb{O}^2_\alpha$, ako za fiksirani parametar $\alpha \in [0,1]$ važi uslov (18), a, ukoliko postoji parametar $\alpha \in [0,1]$ takav da je uslov (18) ispunjen, tada ćemo klasu takvih matrica označavati sa $\mathbb{O}^2$, tj. $\mathbb{O}^2 := \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \mathbb{O}^2_\alpha$ je klasa α_2-matrica.

Dakle, za različite vrednosti parametra α u prethodna dva slučaja mogu se dobiti različite regularne klase matrica. Lako je uočiti da se za vrednost $\alpha = 1$ uslovi (17) i (18) svode na uslov (11). Za vrednost $\alpha = 0$ prethodni uslovi se svode na $|a_{ii}| > c_i(A)$, što je uslov SDD za A^T.

Efikasno ispitivanje pripadanja klasama $\mathbb{O}^1$ i $\mathbb{O}^2$ je dokazano u radu [20], i ovde ga navodimo bez dokaza u sledeće dve teoreme.

Primetimo, najpre, da za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, za koju je $r_i(A) = c_i(A)$, za svaki indeks $i \in N$, uslovi (17) i (18) se svode na uslov $|a_{ii}| > r_i(A) = c_i(A)$, nezavisno od vrednosti parametra α. U opštem slučaju, osim ove, mogu se pojaviti još dve mogućnosti: $r_i(A) < c_i(A)$ i $r_i(A) > c_i(A)$. U odnosu na ove mogućnosti, autori Cvetković Bru, Kostić i Pedroche su uveli skupove indeksa $\Theta(A)$, $\mathcal{H}(A)$ i $\mathcal{C}(A)$ na sledeći način:

$$\mathcal{L}(A) := \{i \in N : r_i(A) - c_i(A) > 0\}, \tag{19}$$

$$\mathcal{H}(A) := \{i \in N : r_i(A) - c_i(A) < 0\}, \tag{20}$$

$$\mathcal{C}(A) := \{i \in N : r_i(A) - c_i(A) = 0\}. \tag{21}$$

Polazeći od uslova (17) u obliku

$$|a_{ii}| > \alpha(r_i(A) - c_i(A)) + c_i(A) \tag{22}$$

za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i svaki indeks $i \in N$, takav da $i \notin \mathcal{C}(A)$, definisali su veličinu $\phi_i(A)$

$$\phi_i(A) := \frac{|a_{ii}| - c_i(A)}{r_i(A) - c_i(A)} \in \mathbb{R} \tag{23}$$

potrebnu za dobijanje skupa dopustivih vrednosti parametra α. Uvodeći skup realnih brojeva

$$U(A) := (\,-\infty, \min_{i\in\mathcal{L}(A)} \phi_i(A)\,) \cap (\,\max_{i\in\mathcal{H}(A)} \phi_i(A), +\infty), \tag{24}$$

za koji, po dogovoru, važi da je $\min_{i\in\mathcal{L}(A)} \phi_i(A) = +\infty$, ukoliko je $\mathcal{L}(A) = \emptyset$, i $\max_{i\in\mathcal{H}(A)} \phi_i(A) = -\infty$, ukoliko je $\mathcal{H}(A) = \emptyset$, autori su dali novu karakterizaciju klase α_1-matrica narednom teoremom:

Teorema 1.6. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$. Tada, $A \in \mathbb{O}^1$ ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi*

- $U(A) \bigcap [0,1] \neq \emptyset$,
- $|a_{ii}| > r_i(A)$, *za sve* $i \in \mathcal{C}(A)$.

Dokaz ove teoreme dat je u radu [20]. U slučaju da je $U(A) \bigcap [0,1] = \emptyset$, može se desiti da posmatrana matrica A nije regularna H-matrica (vidi Primer 2.1. u istom radu).

Za novu karakterizaciju klase matrica $\mathbb{O}^2$, autori su koristili sličan pristup kao za klasu $\mathbb{O}^1$. Naime, za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i svaki indeks $i \in N$ takav da $i \notin \mathcal{C}(A)$, uveli su veličinu

$$\bar{\phi}_i(A) := \frac{\log|a_{ii}| - \log c_i(A)}{\log r_i(A) - \log c_i(A)} \in \mathbb{R} \tag{25}$$

i skup

$$\bar{U}(A) := (-\infty, \min_{i\in\mathcal{L}(A)} \bar{\phi}_i(A)) \cap (\max_{i\in\mathcal{H}(A)} \bar{\phi}_i(A), +\infty), \tag{26}$$

za koji je, po dogovoru $\min_{i\in\mathcal{L}(A)} \bar{\phi}_i(A) = +\infty$, ukoliko je $\mathcal{L}(A) = \emptyset$, i $\max_{i\in\mathcal{H}(A)} \bar{\phi}_i(A) = -\infty$, ukoliko je $\mathcal{H}(A) = \emptyset$. Na taj način, naredna teorema, dokazana u [20] predstavlja novu karakterizaciju klase α_2-matrica:

Teorema 1.7. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$. Tada, matrica $A \in \mathbb{O}^2$ ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi*

- $\bar{U}(A) \bigcap [0,1] \neq \emptyset$,
- $|a_{ii}| > r_i(A)$, *za sve* $i \in \mathcal{C}(A)$.

Dokaz ove teoreme sličan je dokazu prethodne, i takođe je komentarisan u radu [20].

Kako je klasa $\mathbb{O}^1$ potklasa klase $\mathbb{O}^2$, to je, za svaku $A \in \mathbb{O}^1$ ispunjeno $U(A) \bigcap \bar{U}(A) = U(A)$ [20].

Isti autori su u radu [32] formulisali i dokazali teoremu koja daje kriterijum za karakterizaciju α_1 i α_2 matrica koji je upotrebljiviji za konstrukciju lokalizacionih skupova. Kako ćemo u nastavku konstruisati samo lokalizacione skupove bazirane na osobinama klase $\mathbb{O}^2$ (jer $\mathbb{O}^1 \subseteq \mathbb{O}^2$), ovde navodimo samo teoremu koja daje kriterijum karakterizacije α_2 matrica ([32], Teorema 5):

Teorema 1.8. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$. Tada, matrica $A \in \mathbb{O}^2$ ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi*

- $|a_{ii}| > \min\{r_i(A), c_i(A)\}$, *za sve* $i \in N$,
- $\log_{\frac{r_i(A)}{c_i(A)}} \frac{|a_{ii}|}{c_i(A)} > \log_{\frac{c_j(A)}{r_j(A)}} \frac{c_j(A)}{|a_{jj}|}$, *za sve* $i \in \mathcal{L}(A)$, *za koje je* $c_i(A) \neq 0$, *i za sve* $j \in \mathcal{H}(A)$, *za koje je* $r_j(A) \neq 0$

Dokaz ove teoreme videti u [32]. Odgovarajući rezultat u oblasti regularnosti dat je sledećom teoremom:

Teorema 1.9. *Klase $\mathbb{O}^1$ i $\mathbb{O}^2$ su klase regularnih matrica.*

Primetimo da regularnost klase matrica $\mathbb{O}^1$ sledi direktno iz regularnosti klase matrica $\mathbb{O}^2$, na osnovu generalizovane nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine:

$$\alpha a + (1 - \alpha b) \geq a^{\alpha} b^{1-\alpha} \tag{27}$$

za $a, b \geq 0$ i $\alpha \in [0, 1]$, koja implicira da je $\mathbb{O}^1 \subseteq \mathbb{O}^2$. Dokažimo, dakle, regularnost matrica klase $\mathbb{O}^2$.

Teorema 1.10. *Za datu matricu A i parametar α takav da je $0 \leq \alpha \leq 1$, pretpostavimo da važi uslov (18). Tada je A regularna.*

Dokaz. Primetimo, najpre, da, ako je π bilo koja permutacija indeksa u N i ako je $P := [\delta_{i,\pi(j)}]$ njena pridružena matrica permutacija u $\mathbb{R}^{n,n}$, tada matrica $\hat{A} := [\hat{a}_{ij}] := P^T A P$ ima isti skup dijagonalnih elemenata kao i matrica A. Štaviše, $\hat{A}$ ima isti skup suma vrsta i kolona, kao i matrica A. Stoga, uslov (18) je invarijantan pri permutacijama skupa N za sve indekse $i \in N$ i $\alpha \in [0, 1]$.
Dalje, koristeći definiciju sume vrste (9), slučaj $n = 1$ uslova (18) odmah daje da je matrica A regularna. Tada, za $n \geq 2$, pretpostavimo da je neka suma vrste $r_j(A) = 0$. Koristeći pogodnu permutaciju skupa N, možemo pretpostaviti, ne gubeći na opštosti, da je $j = 1$. Tada, $r_1(A) = 0$ implicira da je matrica A oblika

$$\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{21} & & & \\ \vdots & & A_{n-1,n-1} & \\ a_{n1} & & & \end{array}\right], \tag{28}$$

gde je $A_{n-1,n-1} \in \mathbb{C}^{(n-1),(n-1)}$. Jasno je da, za $a_{11} \neq 0$ iz uslova (18) i kako iz (28) važi

$$\det(A) = a_{11} \cdot det(A_{n-1,n-1}),$$

matrica A je singularna ako i samo ako je glavna podmatrica $A_{n-1,n-1}$ iz (28) singularna. Ako je neka suma vrste matrice $A_{n-1,n-1}$ jednaka nuli, gornja redukcija se može nastaviti sve dok stignemo do krajnje glavne podmatrice A_{pp} matrice A, reda $p \geq 2$, čije sve sume vrsta su pozitivne, ili je A redukovana, do na odgovarajuće permutacije, na donje trougaonu matricu čiji su svi dijagonalni elementi različiti od nule. Poslednji slučaj svakako obezbeđuje regularnost matrice. U prethodnom slučaju, na sličan način, imamo (po konstrukciji)

$$\det(A) = (\prod_{j=1}^{n-p} a_{jj}) \cdot \det(A_{pp}),$$

i, opet, A je singularna ako i samo ako je podmatrica A_{pp}, koja ima pozitivne sume vrsta, singularna. (Važno je primetiti da, po definiciji, suma i-te vrste (ili kolone) podmatrice $A_{p,p}$ je najviše jednaka sumi i-te vrste (ili kolone) date matrice A). Ova redukcija pokazuje da možemo pretpostaviti, ne gubeći na opštosti, da su sve sume vrsta $r_i(A)$ matrice A pozitivne. Takođe, kako u specijalnom slučaju $\alpha = 1$ i $\alpha = 0$, Teorema 1.10 se svodi na poznati rezultat da je svaka SDD matrica regularna, kao i na poznati rezultat da se svojstvo regularnosti prenosi i na transponovanu matricu, pa možemo pretpostaviti da je $0 < \alpha < 1$.
U tom slučaju, pretpostavimo suprotno, da matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ koja zadovoljava uslov (18), ima $r_i(A) > 0$ za sve $i \in N$, i da je singularna, tako da postoji vektor $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$, takav da je $x \neq 0$ i $Ax = 0$. Ovo implicira da je $a_{ii}x_i = -\sum_{j\in N\setminus\{i\}} a_{ij}x_j$, za sve $i \in N$, i, uzimanjem apsolutnih vrednosti i primenom nejednakosti trougla, dobija se

$$|a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j\in N\setminus\{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j|,$$

za sve $i \in N$. Primenjujući uslov (18) na levu stranu gornje nejednakosti, i pišući $|a_{ij}| = |a_{ij}|^{\alpha} \cdot |a_{ij}|^{1-\alpha}$ u gornjoj sumi, dobija se

$$(r_i(A))^{\alpha}(c_i(A))^{1-\alpha}|x_i| \leq \sum_{j\in N\setminus\{i\}} |a_{ij}|^{\alpha} \cdot (|a_{ij}|^{1-\alpha}|x_j|), \tag{29}$$

za sve $i \in N$, gde stroga nejednakost važi kad god je $|x_i| > 0$, i stoga za bar jedan $i \in N$. Primenjujući Holderovu nejednakost na poslednju sumu, za $p := 1/\alpha$ i $q := (1-\alpha)^{-1}$, dobija se

$$(r_i(A))^{\alpha}(c_i(A))^{1-\alpha}|x_i| \leq (\sum_{j\neq i} |a_{ij}|^{\alpha p})^{1/p} \cdot (\sum_{j\neq i} |a_{ij}| \cdot |x_j|^{q})^{1/q}, \tag{30}$$

za sve $i \in N$. Primetimo da je $\left(\sum_{j\in N\setminus\{i\}} |a_{ij}|^{\alpha p}\right)^{1/p} = (r_i(A))^{\alpha}$, jer je $p = 1/\alpha$. Stoga, skraćivanjem $(r_i(A))^{\alpha} > 0$ sa obe strane nejednakosti (30), i stepenovanjem obe strane na q, dobija se, za $q = (1-\alpha)^{-1}$, da je

$$c_i(A)|x_i|^q \leq \sum_{j\in N\setminus\{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j|^q,$$

za sve $i \in N$, gde stroga nejednakost važi za bar jedan indeks $i \in N$. Sumiranjem po svim indeksima $i \in N$ u gornjim nejednakostima, dobija se

$$\sum_{i\in N} c_i(A)|x_i|^q < \sum_{i\in N} \Big(\sum_{j\in N\setminus\{i\}} |a_{ij}| \cdot |x_j|^q \Big). \tag{31}$$

Ali promena redosleda sumiranja u konačnoj (dvostrukoj) sumi u uslovu (31) pokazuje da se ova dvostruka suma redukuje tačno na $\sum_{j\in N} c_j(A) \cdot |x_j|^q$, i ovakvom promenom u (31) dobija se očigledna kontradikcija te stroge nejednakosti. $\square$

Stoga, kako je klasa $\mathbb{O}^1$ uža od klase $\mathbb{O}^2$, na dalje ćemo konstruisati lokalizacione skupove bazirane samo na osobinama klase $\mathbb{O}^2$-matrica.

Na osnovu definicije se lako vidi da su klase $\mathbb{O}^1$ i $\mathbb{O}^2$ DD-tipa jer su uslovi (17) i (18) invarijantni za rast modula dijagonalnih elemenata i opadanje modula vandijagonalnih elemenata, i pri tome garantuju da su dijagonalni elementi nenula. Dakle, zaključujemo da su one potklase klase H-matrica.

Treći pravac generalizacije stroge dijagonalne dominacije o kome će ovde biti reči nastao je izdvajanjem podskupa indeksa. Naime, ako uslov dijagonalne dominacije primenimo na više vrsta čiji su indeksi izdvojeni u odgovarajući podskup, tada govorimo o uopštenju pojma dijagonalne dominacije izdvajanjem podskupa indeksa. Ideja generalizacije dijagonalne dominacije izdvajanjem podskupa indeksa potekla je 1970. godine od Dašnjica i Zusmanoviča (koji su generalizovali uslov SDD izdvajenjem jednog indeksa), da bi 2004. godine Cvetković, Kostić i Varga generalizovali ove rezultate na izdvajanje podskupa indeksa $\emptyset \neq S \subseteq N$, napravivši novu klasu matrica DD-tipa, poznatu pod imenom klasa S-SDD matrica.

Klasu S-SDD matrica definišemo kao u [30]. U tu svrhu, najpre sa

$$r_i^S(A) := \sum_{j\in S\setminus\{i\}} |a_{ij}| \tag{32}$$

označimo sumu vandijagonalnih elemenata i-te vrste matrice A koja odgovara skupu indeksa $\emptyset \neq S \subseteq N$, i neka je $r_i^{\bar{S}}(A)$ je odgovarajuća suma vandijagonalnih elemenata i-te vrste matrice A koja odgovara skupu $\bar{S} := N \setminus S$.

Definicija 1.6. *(S-SDD matrice) Za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, i dati neprazan podskup S skupa indeksa N, matrica A je* ***S-strogo dijagonalno dominantna****, ili kraće S-SDD, ako važi:*

$$|a_{ii}| > r_i^S(A), \quad \textit{za svako } i \in S, \ i \tag{33}$$

$$(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A), \quad \textit{za svako } i \in S \ i \ j \in \bar{S}. \tag{34}$$

U gornjoj definiciji u slučaju $S = N$ je $\bar{S} = \emptyset$, i gornji uslovi se redukuju na $|a_{ii}| > r_i(A)$ za sve indekse $i \in N$, što je, u stvari, definicija stroge dijagonalne dominacije matrice A. Takođe, lako se vidi, iz uslova (33) i (34) da, ako je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ SDD, tada je ona i S-SDD za svaki neprazan pravi podskup $S \subseteq N$.

Budući da se za različite izbore fiksiranog skupa S mogu dobiti različiti rezultati regularnosti, može se ići i dalje, tačnije, napraviti šira klasa DD-tipa na taj način što ćemo pustiti da se skup S menja. Uvešćemo oznake: matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n} \in \mathbb{S}_S$, za fiksiran neprazan podskup indeksa S, takav da za svako $i \in S$, $j \in \bar{S}$ važe uslovi (33) i (34). Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n} \in \mathbb{S}_\Sigma$, ukoliko postoji neprazan podskup S skupa indeksa N takav za svako $i \in S$, $j \in \bar{S}$ važe uslovi (33) i (34), i.e. $\mathbb{S}_\Sigma := \bigcup_{S \subseteq N} \mathbb{S}_S$.

U odnosu na prethodno navedenu definiciju ove klase, primetimo da ako uzmemo proizvoljan indeks $i \in S$ i na sve indekse $j \in \bar{S}$ primenimo uslov (34), dobićemo da je $|a_{jj}| > r_j^{\bar{S}}(A)$ za sve indekse $j \in \bar{S}$, što znači da je ovaj uslov neophodan i implicitno dat u okviru uslova (33). Takođe vidimo da se uslov (33) iz prethodne definicije može zameniti prividno slabijim uslovom $|a_{ii}| > r_i^S(A)$ za bar jedan indeks $i \in S$. U [28] je pokazana sledeća Teorema o regularnosti klase S-SDD.

Teorema 1.11. *([28]) Ako je data matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ S-SDD matrica, za neki neprazan podskup S skupa indeksa N, tada je ona regularna.*

Dokaz. Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, S-SDD matrica. Drugim rečima, postoji neprazan skup indeksa $S \subsetneq N$, takav da važe uslovi (33) i (34).

Konstruišemo dijagonalnu matricu $X = diag(x_1, x_2, ..., x_n)$, takvu da je AX SDD matrica. Drugim rečima, konstruisaćemo skalirajuću matricu X koja datu S-SDD matricu prevodi u SDD oblik. Ukoliko elemente matrice X biramo na sledeći način:

$$x_i = \begin{cases} \gamma > 0, & \text{za } i \in S, \\ 1, & \text{za } i \in \bar{S}, \end{cases}$$

gde je $\gamma > 0$ proizvoljan broj, elementi matrice $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] := AX \in \mathbb{C}^{n,n}$ dati su sa:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \gamma |a_{ij}|, & \text{za } j \in S, \\ |a_{ij}|, & \text{za } j \in \bar{S}. \end{cases}$$

Time su sume njenih vandijagonalnih elemenata po vrstama date sa $r_k(\tilde{A}) = r_k^S(\tilde{A}) + r_k^{\bar{S}}(\tilde{A}) = \gamma r_k^S(A) + r_k^{\bar{S}}(A)$ za sve indekse $k \in N$.

Imajući to u vidu, zaključujemo da je AX SDD matrica ako i samo ako važi

$$\begin{cases} \gamma |a_{ii}| > \gamma r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A), & \text{za svako } i \in S, \\ |a_{jj}| > \gamma r_j^S(A) + r_j^{\bar{S}}(A), & \text{za svako } j \in \bar{S} \end{cases}$$

ili, ekvivalentno tome,

$$\begin{cases} \gamma(|a_{ii}| - r_i^S(A)) > r_i^{\bar{S}}(A), & \text{za svako } i \in S, \\ |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) > \gamma r_j^S(A), & \text{za svako } j \in \bar{S}. \end{cases}$$

Međutim, kako je matrica A S-SDD, zaključujemo da je $|a_{ii}| - r_i^S(A)$ pozitivna veličina za svaki indeks $i \in S$, pa će AX biti SDD matrica ako i samo ako važi:

$$\frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)} < \gamma, \quad \text{za sve } i \in S, \tag{35}$$

$$\gamma < \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)}{r_j^S(A)}, \quad \text{za sve } j \in \bar{S}, \text{ takve da je } r_j^S(A) \neq 0 \tag{36}$$

i

$$|a_{jj}| > r_j^{\bar{S}}(A), \quad \text{za sve } j \in \bar{S}, \text{ takve da je } r_j^S(A) = 0. \tag{37}$$

Uslov (37) važi zbog pretpostavke da je A S-SDD matrica. Nejednakosti (35) i (36) daju, redom, donje i gornje granice za ocenu parametra γ, pa ćemo posmatrati najveću donju i najmanju gornju granicu za γ, koje obezbeđuju da je AX SDD matrica:

$$\alpha_S(A) := \max_{i \in S} \frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)} < \gamma < \min_{j \in \bar{S}, r_j^S(A) \neq 0} \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)}{r_j^S(A)} =: \beta_S(A), \tag{38}$$

gde je, u slučaju kada je $r_j^S(A) = 0$ za svaki indeks $j \in \bar{S}$, $\beta_S(A) := +\infty$. Primetimo, takođe, da je $0 \leq \alpha_S(A)$.

Konačno, kako je A S-SDD matrica, sledi da je $\alpha_S(A) < \beta_S(A)$, pa postoji parametar $\gamma > 0$ takav da je $\alpha_S(A) < \gamma < \beta_S(A)$, što je potreban i dovoljan uslov da je matrica AX SDD. Dakle, A je GDD matrica. $\square$

Primetimo da smo ovde tehnikom skaliranja već dobili da je $\mathbb{S}_S$ (i $\mathbb{S}_\Sigma$) potklasa H-matrica. Pored toga, ove klase matrica su DD-tipa.

Interesantno je uporediti matrice ove klase sa matricama prethodno definisanih klasa. U odnosu na navedene definicije poznatih potklasa H-matrica, na kraju ovog poglavlja navodimo nekoliko primera koji ilustruju uzajamni odnos nekih od navedenih potklasa H-matrica.

Pre nego što navedemo ilustrativne primere, podsetimo se odnosa koji važi među nekim potklasama H-matrica [59]:

$$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}_d \subseteq \mathbb{S}_\Sigma \subseteq \mathbb{H},$$
$$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{O}^1_\alpha \subseteq \mathbb{O}^2_\alpha \subseteq \mathbb{H},$$

za fiksiranu vrednost parametra α, a jasno važi i sledeće:

$$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{O}^1 \subseteq \mathbb{O}^2 \subseteq \mathbb{H}.$$

Primer 1.1. *Date su matrice:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matrica A_1 je simetrična, ima sve SDD vrste, pa je $A_1 \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}_d \subseteq \mathbb{S}_\Sigma \subseteq \mathbb{H}$, kao i $A \in \mathbb{S}_S$, za svaki skup $S \subseteq N$. S druge strane, matrica $A_2 \notin \mathbb{S}$, jer prva vrsta nije SDD. Međutim, $A_2 \in \mathbb{S}_d$, jer je za svaki par indeksa ispunjen uslov (14). Dakle, obrnut smer inkluzije ne mora da važi.

Dalje, matrica $A_3 \notin \mathbb{S}$ (za $i = 1, 4$) i $A_3 \notin \mathbb{S}_d$, jer nije zadovoljen uslov $|a_{11}||a_{44}| = 3 \cdot 1 > 3 \cdot 1 = r_1(A) \cdot r_4(A)$, ali za izbor indeksa $S = \{2, 3\}$ je $A_3 \in \mathbb{S}_S$, pa je $A_3 \in \mathbb{S}_\Sigma = \bigcup_{\emptyset \neq S \subseteq N} \mathbb{S}_S$, odakle je $A_3 \in \mathbb{H}$. Ovim je pokazano da matrica može biti iz klase $\mathbb{S}_S$ iako nije iz klasa $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_d$.

Analogno prethodnom razmatranju, za matricu A_1 *ispunjen je i drugi i treći pravac inkluzija. Posmatrajući drugi pravac inkluzija, primetimo da je* $A_2 \in \mathbb{O}^1 \subseteq \mathbb{O}^2$*, kao i* $A_2 \in \mathbb{O}^1_\alpha \subseteq \mathbb{O}^2_\alpha$*, za proizvoljno izabranu vrednost parametra* $\alpha \in [0,1]$*, iako* $A_2 \notin \mathbb{S}$*. Ovim je pokazano da obrnut smer inkluzije ne mora da važi, tj. ako je matrica iz klase* $\mathbb{O}^1$*, ona ne mora biti iz klase* $\mathbb{S}$*. S druge strane, kako je iz definicija jasno da važi* $\mathbb{O}^1 \subseteq \mathbb{O}^2$*, dovoljno je ispitivati pripadnost klasi* $\mathbb{O}^2$*. Takođe, matrica* $A_4 \notin \mathbb{S}$*, dok za izbor skupova* $\Theta = \{1,2\}$*,* $\mathcal{H} = \{3,4\}$ *i* $\mathcal{C} = \emptyset$*, definisanih uslovima (19), (20) i (21), respektivno, možemo računati veličine* ϕ_i *i* $\bar{\phi}_i$ *(prema (23) i (25)):* $\phi_1 = 0.31$*,* $\phi_2 = 1$*,* $\phi_3 = 0$ *i* $\phi_4 = 0.69$*, kao i* $\bar{\phi}_1 = 0.61$*,* $\bar{\phi}_2 = 1$*,* $\bar{\phi}_3 = 0$*,* $\bar{\phi}_4 = 0.39$*, odakle je, po definiciji,* $U = (-\infty, 0.31) \cap (0.69, +\infty) = (0.31, 0.69)$ *i* $\bar{U} = (-\infty, 0.61) \cap (0.39, +\infty) = (0.39, 0.61)$*, pa je, prema Teoremi 1.6* $U \cap [0,1] \neq \emptyset$*, dakle* $A_4 \in \mathbb{O}^1$*, i, prema Teoremi 1.7,* $\bar{U} \cap [0,1] \neq \emptyset$*, dakle* $A_4 \in \mathbb{O}^2$*. Dakle, matrica koja nije iz klase* $\mathbb{S}$*, može biti iz klase* $\mathbb{O}^1$ *i* $\mathbb{O}^2$*, samim tim i* H*-matrica.*

Matrica $A_4 \notin \mathbb{S}_S$ *ni za jedno* S*, koje je neprazan pravi podskup skupa indeksa* N*. Naime, iz definicije sledi da ako je* A *S-SDD matrica, onda je ona i* $\overline{S}$*-SDD matrica, kao i da su podmatrice* $A[S]$ *i* $A[\overline{S}]$ *obe SDD matrice. Stoga, za izbore* $S = \{1\}$*,* $S = \{1,3\}$*,* $S = \{1,4\}$*,* $S = \{1,2,3\}$*,* $S = \{1,2,4\}$*,* $S = \{1,3,4\}$*, matrica sigurno ne može biti S-SDD, pa ostaje samo da prokomentarišemo izbor* $S = \{1,2\}$*. Međutim, tada uslov*

$$(|a_{11}| - r_1^S)(|a_{44}| - r_4^{\overline{S}}) = (5-4)(5-0) > 1 \cdot 10 = r_4^S r_1^{\overline{S}}$$

nije zadovoljen, pa ni za takvo S *matrica nije S-SDD. Ona, međutim, jeste iz klase* $\mathbb{O}^2_{0.5}$*, što se lako proverava:*

$$|a_{11}| = 5 > 14^{1/2} \cdot 1^{1/2} = r_1(A)^\alpha c_1(A)^{1-\alpha},$$

$$|a_{22}| = 5 > 5^{1/2} \cdot 4^{1/2} = r_2(A)^\alpha c_2(A)^{1-\alpha},$$

$$|a_{33}| = 5 > 4^{1/2} \cdot 5^{1/2} = r_3(A)^\alpha c_3(A)^{1-\alpha},$$

$$|a_{44}| = 5 > 1^{1/2} \cdot 14^{1/2} = r_4(A)^\alpha c_4(A)^{1-\alpha}.$$

Naravno, ovo je time i H-matrica.

Matrica $A_5 \notin \mathbb{S}_S$ *ni za jedno* S*, koje je neprazan pravi podskup skupa indeksa* N*, jer, kako god birali podskup* S*, ne mogu obe podmatrice* $A[S]$ *i* $A[\overline{S}]$ *istovremeno biti SDD matrice, što je neophodan uslov da* $A \in \mathbb{S}_S$*. Takođe, ova matrica nije ni iz klase* $\mathbb{O}^2$*, jer kako god birali* $\alpha \in [0,1]$*, uslov*

$$|a_{33}| = 5 > 5 = 5^\alpha \cdot 5^{1-\alpha} = r_3(A)^\alpha c_3(A)^{1-\alpha}$$

nije zadovoljen. Ipak, ovo jeste H-matrica, jer postoji regularna dijagonalna matrica $X = diag(4, 1, 1, 0.9)$, takva da je $AX \in \mathbb{S}$:

$$A_5X = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 5 & 4.5 \\ 0 & 5 & 0 & 4.5 \\ 0 & 0 & 5 & 4.5 \\ 4 & 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}.$$

Poznato je da je neophodan uslov da matrica bude H-matrica, da ima bar jednu SDD vrstu (i bar jednu SDD kolonu). Stoga, matrica A_6 nije H-matrica, pa samim tim nije ni iz jedne od potklasa H-matrica.

Inspirisani navedenim odnosima poznatih potklasa matrica DD-tipa, u sledećem poglavlju ćemo u primenama prikazati međusobne odnose lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa.

1.3 Teoreme Geršgorinovog tipa za SEP i GEP

U odnosu na osobine poznatih potklasa H-matrica i njihove međusobne odnose, rasvetljene u prethodnoj sekciji, može se primeniti tehnika konstrukcije lokalizacionih skupova za spektar koja se bazira na osobinama ovih potklasa. Stoga ćemo u ovoj sekciji dati pregled poznatih rezultata za standardni i generalizovani problem karakterističnih korena. Knjiga R. Varge [178] sadrži definicije i rasvetljuje odnose lokalizacionih skupova za standardni, dok Kostić u [88] uopštava i sistematizuje lokalizacione rezultate za generalizovani problem karakterističnih korena.

U pomenutim referencama, SEP i GEP su detaljno razmatrani (u smislu konstrukcije lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa za spektar pomenutih problema). U radu [178] su formulisani lokalizacioni skupovi za SEP bazirani na Geršgorinovoj teoremi i njenim generalizacijama, a u [91] su formulisani lokalizacioni skupovi za GEP bazirani na Geršgorinovoj teoremi i njenim generalizacijama. U odnosu na naše oznake, jasno je da za $B = I$ standardni i generalizovani problem karakterističnih korena se poklapaju. U [91] takođe su formulisane i dokazane osobine lokalizacionih skupova za GEP u obliku sledećih principa:

- princip monotonosti,
- princip ekvivalencije,
- princip izolacije,
- princip ograničenosti.

Kako je cilj ove disertacije generalizacija pomenutih rezultata, u ovoj sekciji navodimo i sistematizujemo pomenute definicije i principe. Oznake ćemo prilagoditi tako da jasno bude prepoznato kasnije pravilo uopštenja poznatih rezultata.

U tom pravcu, za datu klasu kompleksnih kvadratnih matrica $\mathbb{K}$ proizvoljnog reda, i matričnu funkciju $P_1 \in \mathcal{N}_n(\Omega)$, definišemo skup:

$$\Theta^{\mathbb{K}}(P_1) := \{z \in \Omega \,:\, P_1(z) \notin \mathbb{K}\}\,. \tag{39}$$

Skup $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$ čine svi kompleksni brojevi za koje matrična funkcija P_1 koja određuje posmatrani problem karakterističnih korena nije iz date klase dijagonalno dominantnog tipa.

Na ovaj način definisani su lokalizacioni skupovi Geršgorinovog tipa za funkciju P_1 (koja određuje GEP), koji odgovaraju poznatim klasama DD-tipa. U slučaju SEP, odgovarajući lokalizacioni skup se definiše na isti način, za matričnu funkciju $P_1(z) = zI - A$. Analogno prethodnim definicijama i oznakama u [88] dobijeni lokalizacioni skup je označen imenom generalizovani skup Geršgorinovog tipa.

Uz prethodno date definicije karakterističnih korena za SEP i GEP, kako je domen polinoma $\Omega = \mathbb{C}$ neograničen, $\infty \in \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$ ako i samo ako za svaki neograničen niz $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, postoji indeks $k_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $k \geq k_0$, $P_1(z_k) \notin \mathbb{K}$.

Osobine ovako definisanih lokalizacionih skupova, date su u [88] u obliku pomenuta četiri principa. Formulisani su za datu klasu $\mathbb{K}$ DD-tipa i proizvoljnu matričnu funkciju $P_1(z) = zB - A$ koja definiše GEP. Kako je SEP specijalan slučaj GEP za $B = I$, jasno je da navedeni principi važe i u ovom slučaju. Prva osobina ovih lokalizacionih skupova data je sledećom teoremom:

Teorema 1.12. ***(Princip monotonosti za GEP)*** *Za date klase $\mathbb{K}_1$ i $\mathbb{K}_2$ DD-tipa proizvoljnog reda, i matričnu funkciju P_1 oblika (3), odgovarajući lokalizacioni skupovi $\Theta^{\mathbb{K}_1}(P_1)$ i $\Theta^{\mathbb{K}_2}(P_1)$ stoje u obrnutom odnosu, tj. što je klasa $\mathbb{K}$ DD-tipa uža, to je odgovarajući lokalizacioni skup $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$ širi:*

$$\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \Rightarrow \Theta^{\mathbb{K}_1}(P_1) \supseteq \Theta^{\mathbb{K}_2}(P_1).$$

Prethodna teorema sledi iz definicije klase DD-tipa i definicije skupa $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$. Lako se može pokazati, na osnovu postojanja Žordanove kanoničke forme, da je za svaki matrični monom P_1 ispunjeno $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1) = \Lambda(P_1)$ za klasu svih regularnih matrica $\mathbb{K}$.

Konstrukcija lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa zasniva se, kao što je pomenuto, na ekvivalenciji rezultata o regularnosti i rezultata o lokalizaciji karakterističnih korena. Iako su Geršgorinovi lokalizacioni rezultati, kao i rezultati o regularnosti Olge Tauski implicitno prisutni još od Drugog svetskog rata, tek 2004. godine je Ričard Varga, u svojoj knjizi [178], jasno formulisao ekvivalenciju između tvrđenja o lokalizaciji karakterističnih korena i tvrđenja o regularnosti matrica u obliku principa ekvivalencije. U obliku određenom prethodnim definicijama i oznakama, princip ekvivalencije navodimo u sledećoj teoremi:

Teorema 1.13. ***(Vargin princip ekvivalencije)*** *Neka je $\mathbb{K}$ klasa kompleksnih kvadratnih matrica reda n i neka je $P_1(z) = zB - A \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ proizvoljna matrična funkcija, određena matricama $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$, za koje je definisan skup $\Theta^K(P_1)$. Tada su sledeća dva uslova ekvivalentna:*

- *Sve matrice iz klase $\mathbb{K}$ su regularne.*
- *Za proizvoljne matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ važi $\Lambda(P_1) \subseteq \Theta^K(P_1)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su sve matrice klase $\mathbb{K}$ regularne i uzmimo proizvoljne matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ koje određuju funkciju $P_1(z) = zB - A$ i proizvoljan karakteristični koren $z \in \Lambda(P_1)$. Razlikujemo dva slučaja:

- Neka je $z \in \Lambda_F(P_1)$. Tada je $P_1(z)$ singularna, tj. $det(P_1(z)) = 0$, i, stoga $P_1(z) \notin \mathbb{K}$. Odavde sledi da je $z \in \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$, pa je $\Lambda(P_1) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$.
- Neka je $z = \infty$. Tada, za obrnuti polinom $\hat{P}_1(z) = B - Az$ imamo da je $0 \in \Lambda(\hat{P}_1)$, tj. $\hat{P}_1(0)$ je singularna, i stoga $\hat{P}_1(0) \notin \mathbb{K}$. Stoga, $\infty \in \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$.

Za dokaz obrnutog smera, pretpostavimo da je za svake matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ (koje određuje matričnu funkciju P_1) ispunjeno $\Lambda(P_1) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$. Neka je matrica A singularna, i $B = I$, tj. $P_1(0) = I \cdot 0 - A$ je singularna. U tom slučaju bi $0 \in \Lambda(P_1)$, i, kao posledica toga, $0 \in \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$. Ali, ovo je ekvivalentno činjenici da je $P_1(0) = -A \notin \mathbb{K}$, što je očigledna kontradikcija sa pretpostavkom. Time je ovaj smer dokazan. Stoga je svaka matrica $A \in \mathbb{K}$ regularna. $\square$

Varga je na ovaj način doprineo da ova odavno implicitno prisutna veza dobije na popularnosti i aktuelnosti. Njegov princip ekvivalencije predstavlja fundamentalno svojstvo lokalizacionih skupova.

Obzirom da je u slučaju SEP, lokalizacioni skup $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1) = \Gamma(P_1)$ upravo Geršgorinov skup, dok je u slučaju GEP, $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$ generalizovani Geršgorinov skup, odgovarajuće teoreme o lokalizaciji karakterističnih korena nelinearnih matričnih funkcija ćemo nazivati teoreme Geršgorinovog tipaako potiču od neke klase DD-tipa. Budući da ćemo ovaj koncept primeniti i na neke poznate potklase H-matrica, uvodimo sledeća dva termina:

- **Skup Geršgorinovog tipa za matričnu funkciju** T je skup $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$, za potklasu $\mathbb{K}$ kompleksnih kvadratnih matrica DD-tipa, i matričnu funkciju T koja određuje posmatrani nelinearni problem karakterističnih korena.

- **Teorema Geršgorinovog tipa za matričnu funkciju** T je teorema koja tvrdi da skup Geršgorinovog tipa sadrži spektar date matrične funkcije T.

Sledeće važno svojstvo lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa nastalo je na osnovu ideje druge Geršgorinove teoreme (Teorema 1.2). To svojstvo nazvano je princip izolacije, prvi put formulisan i dokazan u tom obliku i detaljno razmatran u [88]. Najpre uvedimo definiciju pozitivno homogene klase matrica:

Definicija 1.7. *Klasa matrica $\mathbb{K}$ je **pozitivno homogena**, ako $A \in \mathbb{K}$ implicira da za svako $\alpha > 0$, $\alpha A \in \mathbb{K}$.*

Teorema 1.14. *(**Princip izolacije za GEP**, [88], Teorema 3.3.4) Neka je $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{H}$ regularna pozitivno homogena klasa DD-tipa i $P_1 \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ matrični monom tako da za skup Geršgorinovog tipa*

$$\Theta^K(P_1) := \{z \in \mathbb{C} : P_1(z) \notin \mathbb{K}\},$$

postoje disjunktni zatvoreni skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$ takvi da je $\Theta^K(P_1) = U \cup V$. Tada skup U sadrži tačno $|\{i \in \mathbb{N} : b_{ii} \neq 0, a_{ii}b_{ii}^{-1} \in U\}|$ konačnih karakterističnih korena funkcije P_1, i, ako je U neograničen, tačno $|\{i \in \mathbb{N} : a_{ii}b_{ii}^{-1} \in U\}|$ karakterističnih korena funkcije P_1, gde je, po konvenciji, $z \cdot \infty := \infty$, $z \neq 0$, i $0 \cdot \infty = 0$.

Dokaz. Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ matrice koje određuju matričnu funkciju P_1 i neka je $D_A := diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ i neka je $D_B := diag(b_{11}, b_{22}, ..., b_{nn})$. Uzmimo razlaganja $A = D_A - F_A$ i neka je $B = D_B - F_B$, i posmatrajmo familije matrica $A(t) = D_A - tF_A$ i $B(t) = D_B - tF_B$, za $0 \leq t \leq 1$. Kako je za $t \in (0, 1]$ ispunjeno $\langle A(t)\rangle \geq \langle A\rangle$ i $\langle B(t)\rangle \geq \langle B\rangle$, sledi da je $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1(t)) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$, gde je $P_1(t)(z) = zB(t) - A(t)$.

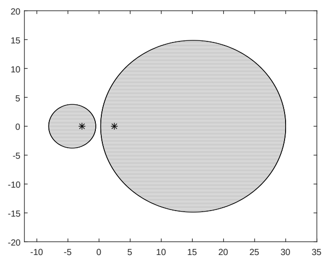
Razmotrimo slučaj $t = 0$. Tada je $A(0) = D_A$, i $z \in \Theta^{\mathbb{K}}(P_1(0))$ ako i samo ako je $zD_B - D_A \notin \mathbb{K}$. Očigledno, ako za neki $i \in N$, $z = a_{ii}b_{ii}^{-1}$, za $b_{ii} \neq 0$, pa $zD_B - D_A$ ima nulu na dijagonali. Stoga ne može pripadati klasi $\mathbb{K}$ koja je DD-tipa. Stoga, $a_{ii}b_{ii}^{-1} \in \Theta^{\mathbb{K}}(P_1(0))$, za sve indekse $i \in N$, za koje je $b_{ii} \neq 0$. Iz istog razloga, za svaki indeks $i \in N$, za koji je $b_{ii} \neq 0$, $a_{ii}b_{ii}^{-1} \in \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$. S druge strane, za $z \neq a_{ii}b_{ii}^{-1}$, za sve indekse $i \in N$, za koje je $b_{ii} \neq 0$, $zD_B - D_A$ je regularna dijagonalna matrica, što implicira da je $zD_B - D_A \in \mathbb{K}$, tj. $zD_B - D_A \notin \Theta^{\mathbb{K}}(P_1(0))$, pa je $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1(0)) = \{a_{ii}b_{ii}^{-1} : b_{ii}^{-1} \neq 0, i \in N\} \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$. Drugim rečima, dobili smo da je

$$\Theta^{\mathbb{K}}(P_1(0)) = \Lambda_F(P_1(0)) = \{a_{ii}b_{ii}^{-1} : b_{ii}^{-1} \neq 0, i \in N\},$$

i da je $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1(t)) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(P)$, za sve $t \in [0,1]$. Sada, kako su konačni karakteristični koreni neprekidne funkcije koje zavise od elemenata matrica A i B [151], dobijamo željeni rezultat.

Da bismo dokazali drugi deo teoreme, neka $\infty \in U$ i neka je $r = |\{i \in N : b_{ii} = 0\}|$. Kako je $det(zD_B - D_A) = \prod_{i \in N} |zb_{ii} - a_{ii}|$ polinom stepena $n - r$, tada $P_1(0)$ ima tačno r beskonačnih karakterističnih korena. Kao što je pokazano, broj konačnih karakterističnih korena u skupu U ostaje nepromenjen za sve $t \in [0,1]$. Stoga, kako $\infty \notin V$, imamo da svih r (moguće) beskonačnih karakterističnih korena funkcije P_1 pripada skupu U. $\square$

Princip izolacije je veoma koristan ukoliko se želi odrediti približna pozicija nekoliko karakterističnih korena posmatranog problema, imajući u vidu da se jedan ili više korena nalazi u svakoj disjunktnoj komponenti lokalizacionog skupa.



Slika 1: Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1)$ za problem iz primera 1.2

Primer 1.2. *Za date matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1.9 \\ -0.1 & 2 \end{bmatrix},$$

lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa za GEP, koji odgovara funkciji $P_1(z) = zB - A$, *prikazan na Slici 1, sastoji se iz dve nepovezane komponente, od kojih svaka sadrži po jedan karakteristični koren funkcije* P_1.

U standardnom slučaju skup $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$, za proizvoljnu klasu $\mathbb{K}$ DD-tipa i datu matričnu funkciju $P_1 = zI - A$, je uvek ograničen. Međutim, u slučaju GEP, za proizvoljnu klasu $\mathbb{K}$ DD-tipa i datu matričnu funkciju $P_1 =$

$zB - A$, skup $\Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$ može biti i neograničen pa je zato važno ispitati kada je lokalizacioni skup ograničen za GEP. Ovaj princip ograničenosti za GEP je, takođe, formulisan, dokazan i detaljno razmatran u [88]. Pre navođenja principa ograničenosti, najpre uvedimo sledeće dve definicije:

Definicija 1.8. *Za datu klasu $\mathbb{K}$ DD-tipa kažemo da je* ***otvorena****, ako, za svaku matricu $A \in \mathbb{K}$, postoji proizvoljno mali $\varepsilon > 0$, tako da za svaku matricu $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, za koju je $|(A-B)_{ij}| < \varepsilon$ za sve indekse $i, j \in \mathbb{N}$ važi da je $B \in \mathbb{K}$.*

Definicija 1.9. *Otvorena klasa matrica DD-tipa naziva se klasa matrica* ***strogo dijagonalno dominantnog tipa, ili, kraće, klasa SDD-tipa****.*

Treba primetiti da, u odnosu na prethodnu definiciju, poznate potklase DD-tipa, navedene u sekciji 1.3.2., su takođe i klase matrica SDD-tipa. Važi sledeći princip [88]:

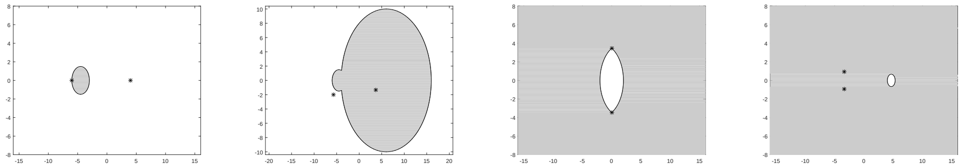
Teorema 1.15. ***(Princip ograničenosti)*** *Za datu pozitivno homogenu SDD-tipa klasu matrica $\mathbb{K}$ i datu funkciju $P_1(z) = Bz - A$, sledeća dva uslova važe:*

- $0 \notin \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$*, ako i samo ako* $A \in \mathbb{K}$*, i*
- $\infty \notin \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$*, ako i samo ako* $B \in \mathbb{K}$*.*

Dokaz. Kako je $P_1(0) = -A \in \mathbb{K}$ i $\mathbb{K}$ je klasa DD-tipa, sledi da je $A \in \mathbb{K}$ ako i samo ako $0 \notin \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$.

Dokaz druge stavke počnimo pretpostavkom da je $\infty \notin \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$. Tada, za svaki niz $\{z_k\}_{k\in N} \subseteq \mathbb{C}$, takav da $z_k \to \infty$ kad $k \to \infty$, sledi da je $P_1(z_k) \in \mathbb{K}$, za dovoljno veliko k. Za takav indeks $k \in N$ posmatrajmo matricu $M_k := B - (z_k)^{-1}A$. Kako je $\mathbb{K}$ pozitivno homogena DD-tipa klasa matrica, za dovoljno veliko $k \in N$ je $|z_k||M_k| = |z_kB - A| \in \mathbb{K}$, i, stoga, $M_k \in \mathbb{K}$. Ali, za dovoljno veliko $k \in N$ možemo napraviti da $|B - M_k| = |z_k|^{-1}|A|$ bude dovoljno malo. Stoga, kako je $\mathbb{K}$ otvorena klasa matrica, $M_k \in \mathbb{K}$ implicira da je $B \in \mathbb{K}$.

Da bismo dokazali da važi obrat, pretpostavimo da je $B \in \mathbb{K}$, i, opet, za proizvoljan niz $\{z_k\}_{k\in N} \subseteq \mathbb{C}$, takav da $z_k \to \infty$ kad $k \to \infty$, posmatrajmo matricu $M_k := B - (z_k)^{-1}A$. Kao i ranije, iz činjenice da je $\mathbb{K}$ otvorena pozitivno homogena DD-tipa klasa matrica, dobijamo da za dovoljno veliko $k \in N$, $z_kM_k = z_kB - A \in \mathbb{K}$, i, stoga $z_k \notin \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$. Kako $z_k \to \infty$ za $k \to \infty$, sledi da $z = \infty \notin \Theta^{\mathbb{K}}(P_1)$. $\square$



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1^1)$ (b) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1^2)$ (c) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1^3)$ (d) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1^4)$

Slika 2: Lokalizacioni skupovi za problem iz primera 1.3

Primer 1.3. *Za date matrice*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 0 & -12 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -i & 3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$$

prikazani su Geršgorinovi lokalizacioni skupovi za GEP, koji odgovaraju funkcijama $P_1^1(z) = zB_1 - A_1$ (Slika 2(a)), $P_1^2(z) = zB_1 - A_2$ (Slika 2(b)), $P_1^3(z) = zB_2 - A_1$ (Slika 2(c)) i $P_1^4(z) = zB_2 - A_3$ (Slika 2(d)).

Primetimo da $B_1 \in \mathbb{S}$, dakle skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1^1)$ je ograničen u $\mathbb{C}$. Kako $A_1 \in \mathbb{S}$, sledi da $0 \notin \Theta^{\mathbb{S}}(P_1^1)$ (vidi Sliku 2(a)). Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1^2)$ je takođe ograničen, jer je vodeća matrica $B_1 \in \mathbb{S}$. Međutim, kako matrica $A_2 \notin \mathbb{S}$, sledi da $0 \in \Theta^{\mathbb{S}}(P_1^2)$ (vidi Sliku 2(b)). Dalje, kako $B_2 \notin \mathbb{S}$, sledi da su skupovi $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1^3)$ i $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1^4)$ neograničeni u $\mathbb{C}$ (Slike 2(c) i 2(d), respektivno). Takođe, kako matrica $A_1 \in \mathbb{S}$, sledi da skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_3)$ ne sadrži nulu. S druge strane, matrica $A_2 \notin \mathbb{S}$, pa skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1^4)$ sadrži nulu.

Navedeni principi i osobine klasa matrica DD-tipa, detaljno razrađeni i opisani u [88, 178], predstavljaju alat za konstrukciju lokalizacionih skupova za spektar matrične funkcije $P_1 = zI - A$ u slučaju standardnog, odnosno spektar funkcije $P_1(z) = zB - A$, u slučaju generalizovanog problema karakterističnih korena.

Za razliku od originalnog Geršgorinovog skupa (koji se sastoji iz n krugova u kompleksnoj ravni), lokalizacioni skupovi bazirani na osobinama ostalih klasa DD-tipa često su dosta komplikovaniji za računanje. Međutim, ukoliko je B iz pozitivno homogene SDD-tipa potklase H-matrica, možemo lokalizovati rešenja koristeći (odgovarajuće) ograničene skupove u kompleksnoj ravni. U nekim slučajevima upravo primenom Geršgorinove teoreme i njenih generalizacija na poznate potklase H-matrica mogu se dobiti bolji lokalizacioni rezultati, u smislu da preciznije lokalizuju karakteristične korene posmatranog problema. U nastavku kratko pravimo pregled poznatih rezultata za

GEP (SEP) za poznate klase matrica navedene u prethodnoj sekciji. Kao i u slučaju Geršgorinove teoreme (bazirane na osobinama potklase $\mathbb{S}$), i za ove potklase postoji jasna ekvivalencija između tvrđenja o lokalizaciji karakterističnih korena i tvrđenja o regularnosti matrica [178]. Princip monotonosti (Teorema 1.12), princip ekvivalencije (Teorema 1.13), princip izolacije (Teorema 1.14) i princip ograničenosti (Teorema 1.15) primenjeni na poznate potklase H-matrica će dati odgovarajuće lokalizacione skupove za karakteristične korene posmatranih problema.

Za klasu $\mathbb{S}$ u [178] je dat skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1)$ poznat pod imenom Geršgorinov skup. Primetimo da u našim oznakama $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1) = \Gamma(A)$, za datu matricu A. Za GEP i matričnu funkciju koja opisuje ovaj problem oblika $P_1(z) = zB - A$, za klasu $\mathbb{S}$ skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1)$ je poznat pod imenom generalizovani Geršgorinov skup i u [88] je označen sa $\Gamma(A, B)$. Primetimo da je u našim oznakama **Geršgorinov skup za matričnu funkciju** $P_1(z) = zB - A$ dat sa:

$$\Theta^{\mathbb{S}}(P_1) = \Gamma(P_1) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i(P_1) \tag{40}$$

gde je

$$\Gamma_i(P_1) := \{z \in \mathbb{C} : |zb_{ii} - a_{ii}| \leq \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} |zb_{ij} - a_{ij}|\}, \text{ za sve } i \in \mathbb{N},\ j \neq i \tag{41}$$

i-ti Geršgorinov skup u kompleksnoj ravni, za koji važi sledeća posledica

Posledica 1.1. *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljne matrice reda $n \geq 2$, kojima je određena funkcija $P_1(z) = zB - A$, $z \in \mathbb{C}$. Za skup $\Gamma(P_1)$ dobijen klasom $\mathbb{S}$ važi sledeće:*

1. $\Lambda(P_1) \subseteq \Gamma(P_1)$,
2. *ako postoje zatvoreni skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, tako da važi $U \cap V = \emptyset$ i $\Gamma(P_1) = U \cup V$, tada skup U sadrži tačno $|\{i \in \mathbb{N} : a_{ii}b_{ii}^{-1} \in U\}|$ karakterističnih korena funkcije P_1,*
3. $0 \notin \Gamma(P_1) \Leftrightarrow A \in \mathbb{S}$,
4. $\infty \notin \Gamma(P_1) \Leftrightarrow B \in \mathbb{S}$.

Treba napomenuti da, u slučaju GEP, ukoliko je B regularna, spektar funkcije P_1 je skup $\{z \in \mathbb{C} : det(P_1(z)) = 0\}$, dok je za singularnu matricu B spektar funkcije P_1 skup $\{z \in \mathbb{C} : det(P_1(z)) = 0\} \cup \{\infty\}$.

U [178], jedna od prvih generalizacija uslova stroge dijagonalne dominacije je već navedena klasa $\mathbb{S}_d$ dSDD matrica. Počev od Teoreme 1.5, koja tvrdi da su sve matrice klase $\mathbb{S}_d$ regularne, u odnosu na uslov (14), koji definiše ovu klasu matrica, jasno je da je ona pozitivno homogena klasa SDD-tipa. Za ovu klasu $\mathbb{S}_d$ u [178] lokalizacioni skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(P_1)$ u slučaju SEP je poznat pod imenom Brauerov skup $\mathcal{K}(A)$ za datu matricu A. U našim oznakama ovaj skup za GEP je oblika:

$$\Theta^{\mathbb{S}_d}(P_1) = \mathcal{K}(P_1) := \bigcup_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i \neq j}} K_{i,j}(P_1) \tag{42}$$

gde je

$$K_{i,j}(P_1) := \{z \in \mathbb{C} : |zb_{ii} - a_{ii}| \cdot |zb_{jj} - a_{jj}| \leq \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} |zb_{ij} - a_{ij}| \cdot \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \{j\}} |zb_{ji} - a_{ji}|\}, \tag{43}$$

za sve indekse $i, j \in \mathbb{N}$, $j \neq i$, i za njega na osnovu prethodnih razmatranja važi:

Posledica 1.2. *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljne matrice reda $n \geq 2$, kojima je određena funkcija $P_1(z) = zB - A$, $z \in \mathbb{C}$. Za skup $\mathcal{K}(P_1)$ dobijen klasom $\mathbb{S}_d$ važi sledeće:*

1. *$\Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{K}(P_1)$,*
2. *ako postoje zatvoreni skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, tako da važi $U \cap V = \emptyset$ i $\mathcal{K}(P_1) = U \cup V$, tada skup U sadrži tačno $|\{i \in \mathbb{N} : a_{ii}b_{ii}^{-1} \in U\}|$ karakterističnih korena funkcije P_1,*
3. *$0 \notin \mathcal{K}(P_1) \Leftrightarrow A \in \mathbb{S}_d$,*
4. *$\infty \notin \mathcal{K}(P_1) \Leftrightarrow B \in \mathbb{S}_d$.*

Interesantno je primetiti da je računanje (generalizovanog) Brauerovog skupa „skuplje" (u smislu broja računskih operacija koje treba izvesti) od računanja (generalizovanog) Geršgorinovog skupa, pa se prirodno postavlja pitanje upotrebljivosti lokalizacije ove vrste. Račun, naravno, ima smisla samo u slučaju da daje značajno bolje lokalizacione rezultate. Na pitanje o prednosti računanja ovog skupa nad skupom $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1)$, osvrnimo se na princip ograničenosti koji tvrdi da ukoliko B nije SDD, skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1)$ je neograničen. Međutim, ukoliko je B jeste iz klase $\mathbb{S}_d$, princip ograničenosti tvrdi da je odgovarajući skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(P_1)$ ograničen, te se može dobiti bolja lokalizacija karakterističnih korena funkcije P_1.

Kao posledica činjenice da je klasa SDD matrica podskup klase dSDD matrica, zaključujemo da je skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(P_1)$ podskup skupa $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1)$. Naime, važi sledeća teorema:

Teorema 1.16. *Za proizvoljan matrični monom P_1,*

$$\Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{K}(P_1) \subseteq \Gamma(P_1).$$

Dalje, razmotrimo klase α_1 i α_2 matrica. Preciznije, obzirom na odnose klasa, navodimo rezultate koji daju uže lokalizacione oblasti za jednak broj računskih operacija. Dakle, posmatramo klase $\mathbb{O}^2_\alpha$, za dato $\alpha \in [0,1]$, i $\mathbb{O}^2$, tj. skupove Geršgorinovog tipa $\Theta^{\mathbb{O}^2_\alpha}(P_1)$, za dato $\alpha \in [0,1]$, i $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_1) = \bigcap_{\alpha\in[0,1]} \Theta^{\mathbb{O}^2_\alpha}(P_1)$ matričnog monoma P_1 koji su opisani u [88], U našim oznakama ti skupovi izgledaju:

$$\Theta^{\mathbb{O}^2_\alpha}(P_1) = \mathcal{A}^2_\alpha(P_1) := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^2_{\alpha,i}(P_1) \tag{44}$$

gde je

$$\mathcal{A}^2_{\alpha,i}(P_1) := \left\{\{z \in \mathbb{C} : |zb_{ii} - a_{ii}| \leq (r_i(P_1(z)))^\alpha \, (c_i(P_1(z)))^{1-\alpha}\right\}, \tag{45}$$

i

$$\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_1) = \mathcal{A}^2(P_1) := \bigcap_{\alpha\in[0,1]} \mathcal{A}^2_\alpha(P_1). \tag{46}$$

Jasno, složenost izračunavanja skupa $\mathcal{A}^2_\alpha(P_1)$ je gotovo ista kao $\Gamma(P_1)$. Sa druge strane, da bi se računski efikasno dobio skup $\mathcal{A}^2(P_1)$ potrebno je iskoristiti karakterizaciju klase $\mathbb{O}^2$ datu sa Teoremom 1.8 kao što je za SEP urađeno u radu [32]. Tako dobijamo:

Teorema 1.17. *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, date matrice, $P_1(z) = zB - A$ data matrična funkcija. Tada je*

$$\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_1) = \mathcal{A}^2(P_1) = \bigcup_{i\in N} \overline{\mathcal{A}}^2_{\alpha,i}(P_1) \;\cup \bigcup_{\substack{i\in\mathcal{L}(A)\\ j\in\mathcal{H}(A)}} \widehat{\mathcal{A}}^2_{\alpha,i,j}(P_1) \tag{47}$$

gde je

$$\overline{\mathcal{A}}^2_{\alpha,i}(P_1) := \{z \in \mathbb{C} : |zb_{ii} - a_{ii}| \leq \min\{r_i(P_1(z)), c_i(P_1(z))\}\ \},$$

i

$$\widehat{\mathcal{A}}^2_{\alpha,i,j}(P_1) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|zb_{ii} - a_{ii}|}{c_i(P_1(z))} \left(\frac{|zb_{jj} - a_{jj}|}{c_j(P_1(z))}\right)^{\log_{\frac{c_j(P_1(z))}{r_j(P_1(z))}} \frac{r_i(P_1(z))}{c_i(P_1(z))}} \leq 1 \right\}$$

za $i \in \mathcal{L}(A)$ i $j \in \mathcal{H}(A)$.

Pozitivna homogenost omogućuje da se osobine (ekvivalencija, izolacija i ograničenost), date Teoremama 1.12, 1.13, 1.14 i 1.15, primene na lokalizacione skupove $\Theta^{\mathbb{O}^2_\alpha}(P_1)$ i $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_1)$:

Posledica 1.3. *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljne matrice reda $n \geq 2$, kojima je određena funkcija $P_1(z) = zB - A$, $z \in \mathbb{C}$. Za skup $\mathcal{A}^2_\alpha(P_1)$ i $\mathcal{A}^2(P_1)$ dobijene klasama $\mathbb{O}^2_\alpha$ i $\mathbb{O}^2$, redom, važi sledeće:*

1. $\Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{A}^2_\alpha(P_1) \subseteq \mathcal{A}^2(P_1)$,
2. *ako postoje zatvoreni skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, tako da važi $U \cap V = \emptyset$ i $\mathcal{A}^2_\alpha(P_1) = U \cup V$, tada skup U sadrži tačno $|\{i \in N : a_{ii}b_{ii}^{-1} \in U\}|$ karakterističnih korena funkcije P_1,*
3. *ako postoje zatvoreni skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, tako da važi $U \cap V = \emptyset$ i $\mathcal{A}^2(P_1) = U \cup V$, tada skup U sadrži tačno $|\{i \in N : a_{ii}b_{ii}^{-1} \in U\}|$ karakterističnih korena funkcije P_1,*
4. $0 \notin \mathcal{A}^2_\alpha(P_1) \Leftrightarrow A \in \mathbb{O}^2_\alpha$,
5. $0 \notin \mathcal{A}^2(P_1) \Leftrightarrow A \in \mathbb{O}^2$,
6. $\infty \notin \mathcal{A}^2_\alpha(P_1) \Leftrightarrow B \in \mathbb{O}^2_\alpha$,
7. $\infty \notin \mathcal{A}^2(P_1) \Leftrightarrow B \in \mathbb{O}^2$.

Na osnovu gore navedenog odnosa između klasa zaključujemo:

Teorema 1.18. *Za svaku matrični monom P_1 važi*

$$\Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{A}^2_\alpha(P_1) \subseteq \mathcal{A}^1_\alpha(P_1) \subseteq \Gamma(P_1),$$

za proizvoljno $\alpha \in [0, 1]$, kao i

$$\Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{A}^2(P_1) \subseteq \mathcal{A}^1(P_1) \subseteq \Gamma(P_1).$$

Sledeća nadklasa klase $\mathbb{S}$ koju posmatramo je sačinjena od S-SDD matrica. Preciznije posmatramo klasu $\mathbb{S}_S$ gde je dat neprazan skup indeksa $S \subseteq N$ i klasu $\mathbb{S}_\Sigma = \bigcup_{\emptyset \neq S \subseteq N} \mathbb{S}_S$. Odgovarajući lokalizacioni skupovi Geršgorinovog tipa $\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(P_1)$ i $\Theta^{\mathbb{S}_S}(P_1)$ su dati u [178] za SEP, a u [88] za GEP i poznati su pod imenom generalizovani CKV-skupovi. U našim oznakama ovi skupovi su dati sa

$$\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(P_1) = \mathcal{C}(P_1) := \bigcap_{\emptyset \neq S \subseteq N} \mathcal{C}^S(P_1)$$

gde je

$$\Theta^{\mathbb{S}_S}(P_1) = \mathcal{C}^S(P_1) := \left[\bigcup_{i \in S}\bigcup_{j \in \bar{S}} V_{ij}^S(P_1)\right] \cup \left[\bigcup_{i \in S} \Gamma_i^S(P_1)\right], \tag{48}$$

a odgovarajući skupovi $V_{ij}^S(P_1)$ i $\Gamma_i^S(P_1)$ su oblika:

$$V_{ij}^S(P_1) := \{z \in \mathbb{C} : (|zb_{ii} - a_{ii}| - r_i^S(P_1(z))) \cdot (|zb_{jj} - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(P_1(z))) \geq r_i^{\bar{S}}(P_1(z)) r_j^S(P_1(z))\}$$

i

$$\Gamma_i^S(P_1) := \bigcup_{i \in S} \{z \in \mathbb{C} : |zb_{ii} - a_{ii}| \geq r_i^S(P_1(z))\}.$$

Kako važi Teorema 1.11, koja tvrdi da su sve S-SDD matrice regularne, i kako uslovi (33) i (34), koji definišu ovu klasu matrica, obezbeđuju pozitivnu homogenost i otvorenost klase $\mathbb{S}_S$, zaključujemo da važi sledeća posledica:

Posledica 1.4. *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljne matrice reda $n \geq 2$, kojima je određena funkcija $P_1(z) = zB - A$, $z \in \mathbb{C}$ i $\emptyset \neq S \subseteq N$. Za skupove $\mathcal{C}^S(P_1)$ i $\mathcal{C}(P_1)$ dobijene klasama $\mathbb{S}_S$ i $\mathbb{S}_\Sigma$, redom, važi sledeće:*

1. $\Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{C}^S(P_1) \subseteq \mathcal{C}(P_1)$,
2. *ako postoje zatvoreni skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, tako da važi $U \cap V = \emptyset$ i $\mathcal{C}^S(P_1) = U \cup V$, tada skup U sadrži tačno $|\{i \in N : a_{ii}b_{ii}^{-1} \in U\}|$ karakterističnih korena funkcije P_1,*
3. *ako postoje zatvoreni skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, tako da važi $U \cap V = \emptyset$ i $\mathcal{C}(P_1) = U \cup V$, tada skup U sadrži tačno $|\{i \in N : a_{ii}b_{ii}^{-1} \in U\}|$ karakterističnih korena funkcije P_1,*
4. $0 \notin \mathcal{C}^S(P_1) \Leftrightarrow A \in \mathbb{S}_S$,
5. $0 \notin \mathcal{C}(P_1) \Leftrightarrow A \in \mathbb{S}_\Sigma$,
6. $\infty \notin \mathcal{C}^S(P_1) \Leftrightarrow B \in \mathbb{S}_S$,
7. $\infty \notin \mathcal{C}(P_1) \Leftrightarrow B \in \mathbb{S}_\Sigma$.

Kao posledica odnosa klasa, važi sledeća teorema:

Teorema 1.19. *Za svaki matrični monom P_1 i proizvoljan neprazan podskup $S \subseteq N$ važi:*

$$\Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{C}(P_1) \subseteq \mathcal{C}^S(P_1) \subseteq \Gamma(P_1) \;\; i \;\; \Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{C}(P_1) \subseteq \mathcal{K}(P_1) \subseteq \Gamma(P_1).$$

Na kraju, primetimo da klasa $\mathbb{H}$, kao maksimalna regularna klasa matrica DD-tipa, generiše ,,najbolji" lokalizacioni skup za spektar matrične funkcije P_1, koji je poznat kao **minimalni Geršgorinov skup**:

$$\Theta^{\mathbb{H}}(P_1) = \mathcal{M}(P_1) := \{z \in \mathbb{C} : \mu_{P_1}(z) \geq 0\},$$

gde je $\mu_{P_1}(z)$ najdesniji realni karakteristični koren esencijalno nenegativne funkcije $-\langle P_1(z) \rangle$.

Budući da je $\mathbb{H}$ maksimalna regularna klasa DD-tipa važi:

Teorema 1.20. *Za svaki matrični monom P_1 je:*

$$\Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{M}(P_1) \subseteq \mathcal{C}(P_1) \ i \ \Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{M}(P_1) \subseteq \mathcal{A}^2(P_1).$$

Dakle, skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P_1)$ je najbolja lokalizaciona oblast Geršgorinovog tipa za spektar funkcije P_1. Obzirom da je klasa takođe otvorena i pozitivno homogena, sledi:

Posledica 1.5. *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljne matrice reda $n \geq 2$, kojima je određena funkcija $P_1(z) = zB - A$, $z \in \mathbb{C}$. Za minimalni Geršgorinov skup $\mathcal{M}(P_1)$ dobijen klasom $\mathbb{H}$ važi sledeće:*

1. $\Lambda(P_1) \subseteq \mathcal{M}(P_1)$;
2. *ako postoje zatvoreni skupovi $U, V \subseteq \mathbb{C}$, tako da važi $U \cap V = \emptyset$ i $\mathcal{M}(P_1) = U \cup V$, tada skup U sadrži tačno $|\{i \in \mathbb{N} : a_{ii}b_{ii}^{-1} \in U\}|$ karakterističnih korena funkcije P_1;*
3. $0 \notin \mathcal{M}(P_1) \Leftrightarrow A \in \mathbb{H}$;
4. $\infty \notin \mathcal{M}(P_1) \Leftrightarrow B \in \mathbb{H}$.

Na kraju ovog poglavlja, ilustujmo navedene rezultate sledećim primerom:

Primer 1.4. *Za date matrice A_1, A_2 i B_1 iz primera 1.3, i matrične funkcije $P_1^1(z) = zI - A_2$ i $P_1^2(z) = zB_1 - A_1$, konstruišimo lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa, generisane klasama $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}_d$, $\mathbb{O}^2$, $\mathbb{S}_\Sigma$ i $\mathbb{H}$, prema definicijama navedenim u ovom poglavlju:*

$$\Gamma(P_1^1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 12| \leq 20\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z + 12| \leq 0\},$$
$$\Gamma(P_1^2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 6| \leq 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z + 4| \leq 0.33|z|\}.$$

Skup $\Gamma(P_1^1)$ se sastoji iz jedne kružne komponente i jedne tačke, kao i skup $\Gamma(P_1^2)$, što se vidi iz definicije ovih skupova. Lokalizacioni skupovi za ove funkcije generisani klasom $\mathbb{S}_d$, su oblika:

$$\mathcal{K}(P_1^1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-12| \cdot |z+12| \leq 0\} = \{-12, 12\},$$
$$\mathcal{K}(P_1^2) = \{z \in \mathbb{C} : |z-6| \cdot |z+4| \leq 0\} = \{-4, 6\}.$$

Dakle, jasno je da $\mathcal{K}(P_1^1) \subseteq \Gamma(P_1^1)$ *i analogno za skup* $\mathcal{K}(P_1^2) \subseteq \Gamma(P_1^2)$.

Dalje, u ovom slučaju za klasu $\mathbb{O}_\alpha^2$ *imamo* $\mathcal{A}_\alpha^2(P_1^1) = \{-12, 12\}$, *za svako* $\alpha \in [0,1]$, *pa time i* $\mathcal{A}^2(P_1^1) = \{-12, 12\}$, *kao i* $\mathcal{A}_\alpha^2(P_1^2) = \{-4, 6\}$, *za svako* $\alpha \in [0,1]$, *pa time i* $\mathcal{A}^2(P_1^1) = \{-4, 6\}$.

Analogno se klase $\mathbb{S}_S$ *i* $\mathbb{S}_\Sigma$ *dobijamo* $\mathcal{C}(P_1^1) = \mathcal{C}^1(P_1^1) = \{-12, 12\}$ *i* $\mathcal{C}(P_1^2) = \mathcal{C}^1(P_1^2) = \{-4, 6\}$.

Na kraju, u ovim slučajevima, kao i za svaki matrični monom dimenzije $n = 2$, *minimalni Geršgorinov skup (generisan klasom* $\mathbb{H}$*), se poklapa sa skupom Brauerovim skupom, tj.* $\mathcal{M}(P_1^1) = \mathcal{K}(P_1^1) = \{-12, 12\}$ *i* $\mathcal{M}(P_1^2) = \mathcal{K}(P_1^2) = \{-4, 6\}$.

Motivisani ovim rezultatima, u sledećem poglavlju navodimo nove, originalne rezultate, koji predstavljaju generalizaciju na slučaj nelinearnih problema karakterističnih korena, specijalno, matričnih polinoma.

2 Lokalizacije NLEP

Razvoj matematčkih oblasti čije su praktične primene u inženjerstvu, medicini, biologiji, ekonomiji, saobraćaju, itd. uslovili su intenzivno zanimanje za polinomne probleme karakterističnih korena, počev od matričnih monoma kao najjednostavnijih, koji su dobro proučeni u literaturi, ka kvadratnim i nelinearnim, čije izučavanje je postalo aktuelno poslednjih dvadesetak godina. Kako je nalaženje karakterističnih korena nelinearnih problema računski veoma zahtevan zadatak, u ovom poglavlju ćemo predstaviti tehniku lokalizacije spektra nelinearnih problema karakterističnih korena dobijenu generalizacijom poznatih rezultata za SEP i GEP, koji su predstavljeni u sekciji 1.4. Preciznije, najpre ćemo formulisati i diskutovati lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za spektar NLEP, koji daju upotrebljivu i računski prihvatljivu ocenu karakterističnih korena. Posebnu pažnju poklonićemo onim NLEP koji su određeni polinomnim matričnim funkcijama, jer imaju veliku primenu u savremenoj nauci i inženjerstvu. Lokalizacioni skupovi za ovu vrstu problema biće detaljno diskutovani kroz primere proizašle iz praktičnih primena. Pored toga, na kraju ovog poglavlja, biće analizirani i neki nepolinomni problemi karakterističnih korena, takođe proizašli iz praktičnih primena. Lokalizacioni skupovi konstruisani i analizirani u ovom poglavlju predstavljaju originalne rezultate objavljene u radu [93].

2.1 Skupovi Geršgorinovog tipa za NLEP

U poglavlju 1.1 data je definicija nelinearnog problema karakterističnih korena uslovom (1), gde je matrična funkcija T koja ga određuje analitička i regularna na prosto povezanom domenu. U većini nelinearnih problema proizašlih iz praktičnih primena, funkcija T je polinomska stepena većeg ili jednakog od dva, dok u nekim slučajevima može sadržati i eksponencijalni deo. Samim tim, računanje karakterističnih korena ovakvih funkcija znatno je složenije od računanja karakterističnih korena funkcija koje određuju SEP i GEP. Držeći se ranijih oznaka, ponovimo pretpostavku da je, nadalje, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ prosto povezan domen i $T : \Omega \to \mathbb{C}^{n,n}$ analitička i regularna matrična funkcija, koja u slučaju kada je Ω neograničen može imati i beskonačne karakteristične korene.

Budući da se većina nelinearnih problema proizašlih iz praktičnih primena svodi na polinomne probleme karakterističnih korena, mi ćemo se u nastavku uglavnom baviti karakterizacijom ove vrste problema. U tom slučaju, analitičku i regularnu matričnu funkciju koja opisuje ovu vrstu problema ćemo označavati sa P_m, gde je m stepen posmatranog polinoma. I ovde, ukoliko ne postoji mogućnost zabune, posmatranu polinomnu funkciju ćemo kraće označavati sa P.

Definišimo, najpre, na isti način kao i u slučajevima SEP i GEP, skup $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$, za datu klasu $\mathbb{K}$ kompleksnih kvadratnih matrica proizvoljnog reda i nelinearnu matričnu funkciju $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ koja određuje posmatrani NLEP:

$$\Theta^{\mathbb{K}}(T) := \{z \in \mathbb{C} : T(z) \notin \mathbb{K}\} \tag{49}$$

Skup $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ naziva se **lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa za funkciju T koja određuje NLEP**.
Može se primetiti da je uslov (49) analogan uslovu (39), s tim što u prvom slučaju T predstavlja nelinearnu matričnu funkciju, tačnije matrični polinom stepena većeg ili jednakog od 2 ili nelinearnu matričnu funkciju koja sadrži nepolinomni deo. U odnosu na to da li je posmatrana klasa $\mathbb{K}$ matrica $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}_d$, $\mathbb{O}^2_\alpha$, $\mathbb{O}^2$, $\mathbb{S}_S$ ili $\mathbb{S}_\Sigma$, lokalizacioni skupovi Geršgorinovog tipa za funkciju T koja određuje NLEP (bilo da su u pitanju polinomni ili problemi određeni matričnim funkcijama koje sadrže eksponencijalni, transcedentni ili racionalni deo) definišu se analogno odgovarajućim lokalizacionim skupovima Geršgorinovog tipa za funkciju P_1 koja određuje SEP, odnosno GEP. Ovde, za razliku od standardnog i generalizovanog slučaja, funkcija T nije uniformnog oblika (menja se u zavisnosti od posmatranog nelinearnog problema), pa se lokalizacioni skupovi Geršgorinovog tipa za funkciju T moraju definisati koristeći uslov (49) za svaki NLEP posebno. Jedino u slučaju PEP, može se na neki način postaviti uniformna definicija ovih skupova:

$$\Theta^{\mathbb{K}}(P) := \{z \in \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{m} A_k z^k \notin \mathbb{K}\} \tag{50}$$

gde je $P(z) = \sum_{k=0}^{m} A_k z^k$, $A_k \in \mathbb{C}^{n,n}$, za $k = 0, ..., m$ funkcija koja određuje posmatrani PEP stepena m. Skup $\Theta^{\mathbb{K}}(P)$, definisan uslovom (50) naziva se **lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa za matrični polinom P**.

U slučajevima kada je Ω neograničen u $\mathbb{C}$, podsetimo se da je uobičajena ekstenzija pojma karakterističnih korena uključivanje beskonačnosti. Tada, ako je $\mathbb{C}_\infty$ jednotačkasta-kompaktifikacija kompleksne ravni $\mathbb{C}$, čija geometrijska reprezentacija je Rimanova sfera, beskonačno (∞) označava običnu tačku u prostoru koja predstavlja severni pol sfere, dok suprotni, južni pol, predstavlja 0. Prema ovoj ideji, možemo jednostavno uključiti beskonačne karakteristične korene Mebijusovom transformacijom $z \to 1/z$.

Naime, definišemo ∞ da bude karakteristični koren nelinearne matrične funkcije $T : \Omega \to \mathbb{C}^{n,n}$, za neograničen domen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ako postoji funkcija $\varphi \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ i singularna $M \in \mathbb{C}^{n,n}$, takva da je ispunjen uslov

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T(z_k)}{\varphi(z_k)} = M \neq 0 \tag{51}$$

za sve neograničene nizove $\{z_k\}_{k\in N} \subseteq \Omega$.

U ovakvoj postavci, lako možemo definisati mnogostrukosti karakterističnog korena ∞ funkcije T kao mnogostrukosti karakterističnog korena 0 funkcije $\hat{T} : \hat{\Omega} \to \mathbb{C}^{n,n}$, gde je $\hat{\Omega} := \{0\} \cup \{1/z : z \in \Omega\}$ i

$$\hat{T}(z) := \frac{T(1/z)}{\varphi(1/z)}.$$

Drugim rečima, ∞ je karakteristični koren nelinearne matrične funkcije T ako i samo ako je 0 karakteristični koren nelinearne matrične funkcije $\hat{T}$ i mnogostrukosti se poklapaju.

2.2 Osobine skupova Geršgorinovog tipa za NLEP

Budući da polinomne matrične funkcije koje određuju PEPove uključuju stepene kompleksnog broja z veće ili jednake od 2, osobine lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa za funkciju P_1 ne mogu se direktno primeniti i na nelinearni slučaj. Za nelinearni slučaj potrebno je dokazati odgovarajuće analogne rezultate kako bismo ih mogli primeniti i za nelinearne, posebno polinomne probleme.

Iz definicije skupa $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$, kao i ranije, direktno sledi prva osobina lokalizacionih skupova za funkciju T, analitičku i regularnu na prosto povezanom domenu Ω, koja određuje posmatrani NLEP, tzv. princip monotonosti:

Teorema 2.1. ***(Princip monotonosti za NLEP)*** *Za date klase matrica $\mathbb{K}_1$ i $\mathbb{K}_2$ i matričnu funkciju $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$, važi:*

$$\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \Rightarrow \Theta^{\mathbb{K}_1}(T) \supseteq \Theta^{\mathbb{K}_2}(T).$$

Primenom ovog principa na lokalizacione skupove dobijene korišćenjem osobina poznatih potklasa H-matrica dobijaju se bolje lokalizacione oblasti za spektar (odnosno pseudospektar) matričnih funkcija T koje određuju posmatrani NLEP.

Sledeća osobina lokalizacionih skupova nelinearnih problema karakterističnih korena o kojoj će biti reči, kao i u slučaju SEP i GEP, daje jasnu vezu između koncepta stroge dijagonalne dominacije i regularnosti.

Teorema 2.2. ***(Princip ekvivalencije za NLEP)*** *Za datu klasu $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}^{n,n}$ i prosto povezan domen $\Omega \subset \mathbb{C}$, sledeća dva uslova su ekvivalentna:*

- *Sve matrice iz klase $\mathbb{K}$ su regularne;*
- *Za datu proizvoljnu matričnu funkciju $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$, skup $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ sadrži sve njene karakteristične korene, tj. $\Lambda(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(T)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su sve matrice iz klase $\mathbb{K}$ regularne. Za proizvoljnu matričnu funkciju $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ i proizvoljan karakteristični koren $z \in \Lambda(T)$, razlikujemo dva slučaja:

- Neka je $z \in \Lambda_F(T)$. Tada je matrica $T(z)$ singularna, i, stoga, $T(z) \notin \mathbb{K}$, odakle sledi da je $z \in \Theta^{\mathbb{K}}(T)$.
- Neka je $z = \infty$. Tada, je $0 \in \Lambda(\hat{T})$, tj. $\hat{T}(0)$ je singularna, pa $\hat{T}(0) \notin \mathbb{K}$. Dakle, $\infty \in \Theta^{\mathbb{K}}(T)$.

Dakle, dobili smo da je $\Lambda(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(T)$. Da bismo dokazali suprotan smer, pretpostavimo da je $\xi \in \Omega$ i da postoji singularna matrica $A \in \mathbb{K}$ i definišimo funkciju $T(z) := A - (\xi - z)I$. Tada, $\xi \in \Lambda(T)$, i, kao posledica toga, $\xi \in \Theta^{\mathbb{K}}(T)$. Međutim, ovo je u kontradikciji sa činjenicom da je $T(\xi) = A \notin \mathbb{K}$. Stoga je svaka matrica $A \in \mathbb{K}$ je regularna. $\square$

Pre konstrukcije narednog principa, uvedimo veličinu poznatu pod imenom rotacioni broj krive, koja će nam biti potrebna za dokaz tog principa. Naime, **rotacioni broj** (engl. *winding number*) zatvorene krive u ravni oko date tačke je ceo broj koji predstavlja ukupan broj obilazaka krive oko posmatrane tačke u smeru obrnutom od kazaljke na satu [134]. Taj broj je pozitivan ukoliko se kriva kreće u smeru obrnutom od kazaljke na satu, odnosno negativan ukoliko se kriva kreće u smeru kazaljke na satu. Ukoliko kriva ne prolazi nijednom oko posmatrane tačke, rotacioni broj posmatrane krive će biti jednak nuli.

Rotacioni broj je dobro poznata veličina koja predstavlja jedan od osnovnih objekata čijim se proučavanjem bavi algebarska topologija. Takođe, veoma je značajan u raznim proučavanjima u kompleksnoj analizi, vektorskoj algebri, geometrijskoj topologiji, diferencijalnoj geometriji, fizici, teoriji struna itd [134].

Da bismo intuitivno objasnili pojam rotacionog broja, pretpostavimo da je data zatvorena orijentisana kriva u ravni. Tu krivu možemo zamisliti kao putanju koju prelazi proizvoljan objekat, krenuši od nekog početnog položaja, pri čemu orijentacija krive daje smer kretanja posmatranog objekta. U ovakvoj postavci, rotacioni broj krive predstavlja ukupan broj obilazaka (u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu) koje posmatrani objekt napravi oko koordinatnog početka. Pritom, kada brojimo ukupan broj obilazaka, oni koji su u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu računaju se kao pozitivni, dok oni u smeru kazaljke na satu se računaju kao negativni. Ukupan zbir svih obilazaka koje proizvoljan objekt napravi duž zatvorene krive oko koordinatnog početka predstavlja rotacioni broj te krive. Tako, na primer, ako posmatrani objekat najpre obiđe koordinatni početak 4 puta u smeru suprotnom od kazaljke na satu, pa zatim 1 put krećući se u smeru kazaljke na satu, ukupno će imati rotacioni broj $4 - 1 = 3$. Na osnovu ovakvog razmatranja može se zaključiti da kriva koja ne prolazi oko koordinatnog početka ima rotacioni broj 0, te rotacioni broj krive može biti ma koji ceo broj.

Ukoliko želimo dobiti informaciju o broju karakterističnih korena u svakoj nepovezanoj komponenti lokalizacionog skupa Geršgorinovog tipa, u standardnom i generalizovanom slučaju, pozivamo se na, tj. koristimo princip izolacije. Imajući prethodno u vidu, generalizacija principa izolacije na nelinearne probleme karakterističnih korena data je sledećom teoremom, koju ćemo nazvati princip izolacije:

Teorema 2.3. ***(Princip izolacije za NLEP)*** *Za datu regularnu klasu matrica $\mathbb{K}$ DD-tipa, prosto povezan domen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, i proizvoljnu matričnu funkciju $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$, ako postoje disjunktni zatvoreni povezani skupovi $U, V \subseteq \Omega$, takvi da važi da je $\Omega \setminus (U \cup V)$ neprazan povezan i za odgovarajući skup Geršgorinovog tipa $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ važi*

$$\Theta^{\mathbb{K}}(T) \subseteq U \cup V, \tag{52}$$

tada u skupu U broj karakterističnih korena funkcije T i broj rešenja jednačina $t_{ii}(z) = 0$, $i \in N$ se poklapaju.

Dokaz. Za proizvoljno $z \in \Omega$, označimo sa $D(z) := \mathrm{diag}(T(z))$ i napravimo razdvajanje $T(z) = D(z) - F(z)$. Razmatramo familiju matričnih funkcija $\{T_t : 0 \le t \le 1\} \subset \mathcal{N}_n(\Omega)$ definisan sa $T_t(z) := D(z) - tF(z)$. Neka je $t \in [0,\, 1]$ i pretpostavimo da $z \notin \Theta^{\mathbb{K}}(T)$. Tada, $T(z) \in \mathbb{K}$, i, stoga,

$$\langle T_t(z) \rangle = |D(z)| - t|F(z)| \ge |D(z)| - |F(z)| = \langle T(z) \rangle,$$

odakle je $T_t(z) \in \mathbb{K}$, takođe. Stoga, $\Theta^{\mathbb{K}}(T(t)) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(T)$ za sve $t \in [0,\, 1]$ što implicira da, na osnovu Teoreme 2.2, matrica $T_t(z)$ je regularna za sve $t \in [0,\, 1]$, i sve kompleksne brojeve $z \in \Omega \setminus (U \cup V)$. Sada, definišimo funkcije $\phi_t : \Omega \to \mathbb{C}$ takve da je $\phi_t(z) = \det(T_t(z))$. Kako je $\Omega \setminus (U \cup V)$ neprazan povezan domen, sledi da postoji prosto povezana zatvorena kontura $\Gamma \in \Omega \setminus (U \cup V)$ takva da se skup U nalazi u njenoj unutrašnjosti. Međutim, tada, za sve kompleksne brojeve $z \in \Gamma$, i za sve vrednosti $t \in [0,\, 1]$, postoje $T_t(z)^{-1}$, što implicira da je rotacioni broj od ϕ_t,

$$W_\Gamma(\phi_t) := \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left[\frac{d}{dz} \log \phi_t(z) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \mathrm{tr} \Big[(T_t(z))^{-1} T_t'(z) \Big],$$

neprekidno definisan za $t \in [0, 1]$, i, stoga, konstantan. Odatle važi da se broj karakterističnih korena funkcije $T_0(z) = D(z)$ i funkcije $T(z)$ na skupu U moraju poklopiti. $\square$

Sledeće pitanje koje se prirodno može postaviti je kada su pomenuti lokalizacioni skupovi Geršgorinovog tipa za matričnu funkciju T (koja određuje posmatrani NLEP) ograničeni u kompleksnoj ravni. Naravno, ako je Ω ograničen domen, ovo odmah sledi. U prvom poglavlju, osobina ograničenosti, tačnije kompaktnosti je za SEP i GEP data u obliku principa kompaktnosti Teoremom 1.15. Za razliku od GEP, osobina ograničenosti za NLEP nije u vidu ekvivalencije.

Teorema 2.4. ***(Princip kompaktnosti za NLEP)*** *Za datu pozitivno homogenu klasu matrica SDD-tipa $\mathbb{K}$, prosto povezan domen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, i matričnu funkciju $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$, skup $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ je zatvoren u $\mathbb{C}$. Štaviše, ako je skup Ω neograničen, i za neko $\varphi \in \mathcal{N}_1(\Omega)$ postoji $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ takva da je $M = \lim_{k\to\infty} \frac{T(z_k)}{\varphi(z_k)}$ za sve neograničene nizove $\{z_k\}_{k\in N} \subseteq \Omega$, tada $M \in \mathbb{K}$ implicira da je $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ kompaktan u $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Neka je $z \in \mathbb{C} \setminus \Theta^{\mathbb{K}}(T)$, tj., $T(z) \in \mathbb{K}$. Tada, postoji $\varepsilon > 0$ tako da za proizvoljnu matricu B, $|(B - T(z))_{ij}| < \varepsilon$, za sve $i, j \in N$, implicira da je $B \in \mathbb{K}$. S druge strane, matrična funkcija T je analitička i domen Ω je otvoren pa za ε postoji $\delta > 0$ tako da važi $|z - \omega| < \delta$ implicira $|(T(z) - T(\omega))_{ij}| < \varepsilon$. Stoga, $T(\omega) \in \mathbb{K}$, i, ekvivalentno tome, $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Theta^{\mathbb{K}}(T)$. Dakle, dokazali smo da je skup $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ zatvoren za sve $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ i klase $\mathbb{K}$ SDD-tipa.

S druge strane, neka je $M \in \mathbb{K}$, i pretpostavimo da je skup $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ neograničen. Tada, postoji niz $\{z_k\}_{k\in N} \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(T)$, takav da je $\lim_{k\to\infty} z_k = \infty$, i možemo definisati familiju matrica $M_k = \varphi(z_k)^{-1}T(z_k)$, za $k \in N$, tako da važi $\lim_{k\to\infty} M_k = M$. Ali, kako je $\mathbb{K}$ otvorena klasa, postoji (dovoljno velik) indeks $k \in N$, tako da je $M_k \in \mathbb{K}$. S druge strane, kako je $\mathbb{K}$ pozitivno homogena, i $|\varphi(z_k)||M_k| = |T(z_k)|$, $T(z_k) \in \mathbb{K}$ što je kontradikcija sa činjenicom da je $z_k \in \Theta^{\mathbb{K}}(T)$. Stoga, skup $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ mora biti ograničen.

Kako smo dokazali da je $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ zatvoren i ograničen u $\mathbb{C}$, stoga je skup $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ kompaktan u $\mathbb{C}$. $\square$

Kada radimo sa polinomnim funkcijama stepena $m \geq 2$, oblika

$$P_m(z) = A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0, \quad A_i \in \mathbb{C}^{n,n},\ i = 0, ..., m, \quad (53)$$

za primenu principa ograničenosti funkcija $\varphi \in \mathcal{N}_1(\Omega)$ je jasno oblika $\varphi(z) = z^m$, za $m \geq 2$ i imamo $\lim_{k\to\infty} \frac{P(z_k)}{z_k^m} = A_m$, za svaki neograničen niz $\{z_k\}_{k\in N}$. Dakle, važi:

Posledica 2.1. ***(Princip ograničenosti za PEP)*** *Za datu pozitivno homogenu klasu matrica SDD-tipa $\mathbb{K}$ i polinomnu matričnu funkciju $P_m(z)$ oblika (53), skup $\Theta^{\mathbb{K}}(P)$ je zatvoren u $\mathbb{C}$, a ako je $A_m \in \mathbb{K}$ tada je $\Theta^{\mathbb{K}}(P_m)$ i kompaktan u $\mathbb{C}$.*

Za razliku od SEP i GEP, u kojima princip kompaktnosti važi u oba smera, u slučaju NLEP obrat ne mora da važi, jer kvadratni ili eksponencijalni deo funkcije T mogu napraviti problem. U nastavku navodimo primer koji pokazuje da obrat (drugog dela prethodne teoreme) nije validan.

Primer 2.1. *Posmatrajmo matričnu funkciju $P(z) = z^2C + zB + A$, za izbor matrica:*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada je skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P) = \Gamma_1(P) \cup \Gamma_2(P)$, gde su $\Gamma_1(P) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2| \leq 1\}$ i $\Gamma_2(P) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, ograničen, iako vodeća matrica C nije SDD matrica.

S druge strane, skupovi $\Theta^{\mathbb{K}}(T)$ mogu biti ne samo neograničeni, već i celo $\mathbb{C}_\infty$. U slučaju da je oblast lokalizacije spektra cela kompleksna ravan, ne dobijaju se korisne informacije o poziciji karakterističnih korena date matrične funkcije.

Primer 2.2. *Za datu matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

definišemo funkciju $P(z) = z^2A - 2zA + A = (z^2 - 2z + 1)A$. Tada, očigledno, $\Theta^{\mathbb{K}}(P) = \mathbb{C}_\infty$ za svaki $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{H}$.

Specijalna uloga dijagonalnih elemenata se može generalizovati upotrebom permutacija skupa indeksa. U tom pravcu neka je π bilo koja fiksirana permutacija elemenata skupa indeksa $N := \{1, 2, ..., n\}$, i neka $P_\pi := [\delta_{i\pi(j)}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ označava njenu pridruženu permutacionu matricu, gde je δ_{ij} poznata Kronekerova delta-funkcija:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$$

Tada, za proizvoljan kompleksan broj z i datu matričnu funkciju T, definišemo **permutovani skup Geršgorinovog tipa za matričnu funkciju** T:

$$\Theta_\pi^K(T) = \{z \in \mathbb{C} : T(z)P_\pi \notin \mathbb{K}\}. \tag{54}$$

Očigledno, kako je $z \in \Lambda(T)$ ako i samo ako je $det(T(z)P_\pi) = 0$, imamo da je $\Lambda(T) \subseteq \Theta_\pi^{\mathbb{K}}(T)$, za sve regularne klase $\mathbb{K}$. Štaviše, svojstva lokalizacionih skupova, tj. Teoreme 2.1, 2.2, 2.3 i 2.4 takođe važe i za skup $\Theta_\pi^K(T)$.

U prethodnom primeru, za izbor $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 1$, imamo $P(z)P_\pi = (z-1)^2 P_\pi^2 = (z-1)^2 I$. Stoga, $\Theta_\pi^{\mathbb{K}}(P) = \Lambda(P) = \{1\}$, za sve klase $\mathbb{K}$ SDD-tipa.

Na žalost, može se desiti da ova procedura ne obezbedi (u smislu lokalizacije karakterističnih korena) ikakve korisne skupove. Na primer, ako uzmemo $P(z) = z^2E - 2zE + E = (z-1)^2E$, gde je E matrica čiji su svi elementi jednaki jedan, tada je $P(z)P_\pi = P(z)$, za svaku permutaciju π, i, stoga je $\Theta_\pi^{\mathbb{H}}(P) = \mathbb{C}_\infty$ za svaku permutaciju π.

2.3 Razne lokalizacione oblasti za spektar NLEP

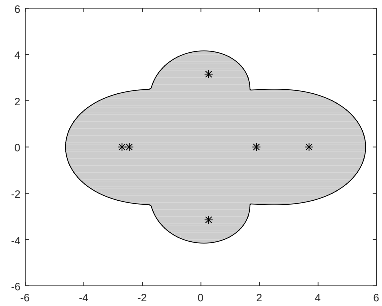
Prateći koncept primenjen na SEP i GEP, opisan u sekciji 1.4, u nastavku ćemo formulisati razne lokalizacione oblasti za spektar NLEP, koristeći osobine poznatih potklasa H-matrica navedenih u sekciji 1.3.2. Kao i u slučaju SEP i GEP, svojstvo ekvivalencije predstavlja podlogu za konstrukciju ovih lokalizacionih skupova. Svojstvo monotonosti daće nam bolje lokalizacione oblasti za šire potklase, ali se i ovde postavlja pitanje opravdanosti računa, jer ,,bolje" lokalizacije podrazumevaju veći broj računskih operacija, te su u tom smislu skuplje. Razlika je naročito vidljiva kod funkcija određenih matricama velikih formata, koje proizilaze iz nekih problema u industriji, kada se radi o više hiljada promenljivih.

Prvo posmatramo klasu $\mathbb{S}$. Lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa za funkciju $T = [t_{ij}(z)]$, $i, j \in N$, koja određuje posmatrani NLEP dat je sa

$$\Theta^{\mathbb{S}}(T) := \bigcup_{i \in N} \Theta_i^{\mathbb{S}}(T) = \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |t_{ii}(z)| \leq r_i(T(z))\}, \tag{55}$$

gde je kao i ranije $r_i(T(z)) := \bigcup_{j \in N \setminus \{i\}} |t_{ij}(z)|$ suma vandijagonalnih elemenata i-te vrste matrične funkcije T. Kada ne postoji opasnost od zabune, nadalje ćemo koristi i kraću oznaku $r_i(z)$. Analogno, $c_i(z)$ će biti skraćena oznaka za odgovarajuću sumu vandijagonalnih elemenata i-te kolone matrične funkcije T, $c_i(T(z)) = \bigcup_{j \in N \setminus \{i\}} |t_{ji}(z)|$.

U ovakvoj postavci, za nelinearne probleme karakterističnih korena određene matričnom funkcijom T, za razliku od skupa $\Theta^{\mathbb{S}}(A)$ koji predstavlja uniju krugova u kompleksnoj ravni u slučaju SEP, skup $\Theta^{\mathbb{S}}(T)$ u opštem slučaju nisu krugovi, već mogu biti različitog oblika.



Slika 3: Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ iz primera 2.3

Primer 2.3. *Za date matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i matričnu funkciju $P_2(z) = z^2C + zB + A$, lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa za funkciju P_2 je $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{3} \Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2)$ (vidi Sliku 3), gde su:

$$\Theta_1^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1.41| \cdot |z + 1.41| \leq 8\},$$

$$\Theta_2^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - i\sqrt{3}||z + i\sqrt{3}| \leq 0.5|z^2 + 2z - 10|\},$$

$$\Theta_3^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : | - z^2 + z + 10| \leq 16\}.$$

Može se primetiti da su skupovi $\Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2)$ kružnog i ovalnog oblika, kompaktni, te je skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ kompaktan.

Osobine ovog lokalizacionog skupa za spektar matrične funkcije T koja određuje posmatrani NLEP, u odnosu na dokazane principe ekvivalencije (Teorema 2.2), izolacije (Teorema 2.3) i ograničenosti (Teorema 2.4), date u prethodnoj sekciji, kao i činjenicu da je klasa $\mathbb{S}$ strogo dijagonalno dominantnih matrica, date su sledećom posledicom:

Posledica 2.2. *Neka je $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ analitička i regularna matrična funkcija na prosto povezanom domenu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, koja određuje posmatrani NLEP. Za skup $\Theta^{\mathbb{S}}(T)$ dobijen klasom $\mathbb{S}$ važi sledeće:*

1. *$\Lambda(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(T)$,*

2. *Ako postoje disjunktni zatvoreni povezani skupovi $U, V \subseteq \Omega$, takvi da važi da je $\Omega \setminus (U \cup V)$ povezan skup i za odgovarajući skup $\Theta^{\mathbb{S}}(T)$ je*

$$\Theta^{\mathbb{S}}(T) \subseteq U \cup V, \tag{56}$$

tada u skupu U broj karakterističnih korena funkcije T i broj rešenja jednačina $t_{ii}(z) = 0$, $i \in N$ se poklapaju,

3. *Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(T)$ je zatvoren u $\mathbb{C}$. Štaviše, ako je skup Ω neograničen, i za neke $\varphi \in \mathcal{N}_1(\Omega)$ postoji matrica $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ takva da je $M = \lim_{k\to\infty} \frac{T(z_k)}{\varphi(z_k)}$ za sve neograničene nizove $\{z_k\}_{k\in N} \subseteq \Omega$, tada $M \in \mathbb{S}$ implicira da je $\Theta^{\mathbb{S}}(T)$ kompaktan u $\mathbb{C}$.*

Za sledeću klasu $\mathbb{S}_d$ (dSDD-matrica) imamo:

$$\Theta^{\mathbb{S}_d}(T) := \bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}} \Theta^{\mathbb{S}_d}_{ij}(T) = \bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}} \{z \in \mathbb{C} : |t_{ii}(z)||t_{jj}(z)| \leq r_i(z)r_j(z)\}. \quad (57)$$

za svaki par indeksa $\{i, j\}$ za koje je $i, j \in N$, $j \neq i$, i gde su $r_i(z) = r_i(T(z))$, $r_j(z) = r_j(T(z))$ skraćene oznake za sumu modula vandijagonalnih elemenata i-te, odnosno j-te vrste matrične funkcije T.

U odnosu na dokazane principe ekvivalencije (Teorema 2.2), izolacije (Teorema 2.3) i ograničenosti (Teorema 2.4), date u prethodnoj sekciji, kao i činjenicu da je klasa $\mathbb{S}_d$ strogo dijagonalno dominantnog tipa, osobine skupa $\Theta^{\mathbb{S}_d}(T)$ date su sledećom posledicom:

Posledica 2.3. *Neka je $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ analitička i regularna matrična funkcija na prosto povezanom domenu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, koja određuje posmatrani NLEP. Za skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(T)$ dobijen klasom $\mathbb{S}_d$ važi sledeće:*

1. *$\Lambda(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}_d}(T)$,*

2. *Ako postoje disjunktni zatvoreni povezani skupovi $U, V \subseteq \Omega$, takvi da važi da je $\Omega \setminus (U \cup V)$ povezan skup i za odgovarajući skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(T)$ je*

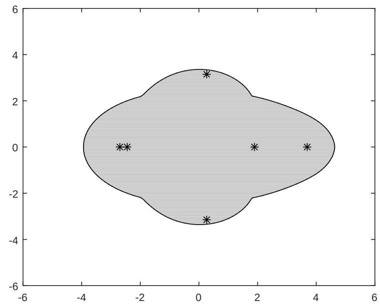
$$\Theta^{\mathbb{S}_d}(T) \subseteq U \;\cup\; V, \quad (58)$$

tada u skupu U broj karakterističnih korena funkcije T i broj rešenja jednačina $t_{ii}(z) = 0$, $i \in N$ se poklapaju,

3. *Skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(T)$ je zatvoren u $\mathbb{C}$. Štaviše, ako je skup Ω neograničen, i za neke $\varphi \in \mathcal{N}_1(\Omega)$ postoji matrica $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ takva da je $M = \lim_{k\to\infty} \frac{T(z_k)}{\varphi(z_k)}$ za sve neograničene nizove $\{z_k\}_{k\in N} \subseteq \Omega$, tada $M \in \mathbb{S}_d$ implicira da je $\Theta^{\mathbb{S}_d}(T)$ kompaktan u $\mathbb{C}$.*

Na nivou principa monotonosti (Teorema 2.1) važi:

$$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}_d \Rightarrow \Theta^{\mathbb{S}_d}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(T).$$



Slika 4: Skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(P_2)$ iz primera 2.3

Interesantno je primetiti da oba skupa, $\Theta^{\mathbb{S}}(T)$ i $\Theta^{\mathbb{S}_d}(T)$ zavise od elemenata matrične funkcije T, od kojih je skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(T)$ nešto komplikovaniji za računanje, ali daje bolju lokalizaciju karakterističnih korena.

Primer 2.4. *Za date matrice A, B, C iz primera 2.3, i matričnu funkciju $P_2(z) = z^2C + zB + A$, lokalizacioni skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(P_2) = \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{3} \Theta_{ij}^{\mathbb{S}_d}(P_2)$ (vidi Sliku 4), za:*

$$\Theta_{12}^{\mathbb{S}_d}(P_2) = \Theta_{21}^{\mathbb{S}_d}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 2| \cdot |z^2 + 3| \leq 4|z + 4.32| \cdot |z - 2.32|\},$$

$$\Theta_{13}^{\mathbb{S}_d}(P_2) = \Theta_{31}^{\mathbb{S}_d}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 2| \cdot | - z^2 + z + 10| \leq 128\},$$

$$\Theta_{23}^{\mathbb{S}_d}(P_2) = \Theta_{32}^{\mathbb{S}_d}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : | - z^2 + z + 10| \cdot |z^2 + 3| \leq 8| - z^2 - 2z + 10|\}.$$

Može se primetiti da je skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(P_2)$ komplikovaniji za računanje od skupa $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$, kao i da je na osnovu principa monotonosti (Teorema 2.1) ispunjeno $\Theta^{\mathbb{S}_d}(P_2) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$.

Daljom generalizacijom uslova stroge dijagonalne dominacije na vrste i kolone, nastale su klasa $\mathbb{O}^1$ i $\mathbb{O}^2$ matrica. Primenjujući osobine ovih klasa (navedene u sekciji 1.3.2 ove disertacije) u postupku konstrukcije lokalizacionog skupa za spektar matrične funkcije T, dobijamo odgovarajuće lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za spektar nelinearnog problema karakterističnih korena:

$$\Theta^{\mathbb{O}^1}(T) := \bigcap_{\alpha\in[0,1]} \bigcup_{i\in N} \{z \in \mathbb{C} : |t_{ii}(z)| \leq \alpha r_i(z) + (1-\alpha)c_i(z)\}, \tag{59}$$

i

$$\Theta^{\mathbb{O}^2}(T) := \bigcap_{\alpha\in[0,1]} \bigcup_{i\in N} \{z \in \mathbb{C} : |t_{ii}(z)| \leq r_i(z)^{\alpha} c_i(z)^{1-\alpha}\}, \tag{60}$$

gde je $\alpha \in [0,1]$ proizvoljan broj, i T je matrična funkcija, analitička i regularna na prosto povezanom domenu Ω, koja određuje posmatrani NLEP, i $r_i(z) = r_i(T(z))$ i $c_i(z) = c_i(T(z))$ su skraćene oznake za sumu modula vandijagonalnih elemenata i-te vrste i i-te kolone matrice $T(z)$.

U radu [16] dat je lokalizacioni rezultat za fiksiranu, proizvoljno izabranu vrednost parametra $\alpha \in [0,1]$. Međutim, u istom radu nije razmatran presek po svim vrednostima $\alpha \in [0,1]$ koji daje bolju lokalizaciju spektra, imajući u vidu činjenicu da je $\mathbb{O}^i_\alpha \subseteq \mathbb{O}^i = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \mathbb{O}^i_\alpha$, $i = 1,2$, te, prema tome, odgovarajući lokalizacioni skup generisan klasom $\mathbb{O}^i$,$i = 1,2$ daje bolju lokalizaciju spektra od lokalizacionog skupa generisanog klasom $\mathbb{O}^i_\alpha$, $i = 1,2$, $\alpha \in [0,1]$. Štaviše, kako je u tom radu dat lokalizacioni rezultat za fiksiranu, proizvoljno izabranu vrednost parametra $\alpha \in [0,1]$ baziran na klasi $\mathbb{O}^2_\alpha$, za izbor $\mathbb{K} = \mathbb{O}^2_\alpha$ i $T(z) = D(z) + E(z)$, gde je $D \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ proizvoljna dijagonalna matrična funkcija, skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}_\alpha$, generisan uslovom (49), je uvek sadržan u lokalizacionom skupu $\Gamma^\alpha(T) := \bigcup_{i\in N} \Gamma^\alpha_i(T)$ iz [16], pri čemu se jednakost dostiže za $D(z) = diag(T(z))$.

Obzirom da je $\mathbb{O}^1 \subseteq \mathbb{O}^2$, polazeći od karakterizaciju klase $\mathbb{O}^2$, date u sekciji 1.3.2 a navedene u radu [32], konstruisaćemo odgovarajući lokalizacioni skupov Geršgorinovog tipa.

U tom pravcu, uvedimo najpre novi skup indeksa J_T, prateći oznake korišćene u radu [93]:

$$J_T := \{(i,j) \in N \times N : r_i(T(z)) > c_i(T(z)) \ i \ c_j(T(z)) > r_j(T(z))\}.$$

Naredna teorema daje praktično primenljiv kriterijum za konstrukciju lokalizacionog skupa $\Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$:

Teorema 2.5. *Neka je $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ analitička i regularna matrična funkcija na prosto povezanom domenu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, koja određuje posmatrani NLEP, i z proizvoljan karakteristični koren posmatrane funkcije T, tada postoji indeks $i \in N$ za koji je*

$$|t_{ii}(z)| \leq \min\{r_i(z), c_i(z)\}, \tag{61}$$

ili par indeksa $(i,j) \in J_T$ takvi da je

$$\frac{\ln|t_{ii}| - \ln c_i(z)}{\ln r_i(z) - \ln c_i(z)} \leq \frac{\ln c_j(z) - \ln|t_{jj}|}{\ln c_j(z) - \ln r_j(z)}. \tag{62}$$

Drugim rečima, odgovarajući lokalizacioni skup je oblika:

$$\Theta^{\mathbb{O}^2}(T) := \bigcup_{i\in N} \bigcup_{j\in N\setminus\{i\}} [\Gamma_i^m(T) \cup (\Psi_{ij}(T) \cap int[\Phi_i(T)] \cap int[\mathbb{C}\setminus\Phi_j(T)])] \quad (63)$$

Ovde "int[.]" označava unutrašnjost skupa; i, za $i, j \in N$

$$\Gamma_i^m(T) := \{z \in \mathbb{C} : |t_{ii}(z)| \leq \min\{r_i(z), c_i(z)\}\ \} \quad (64)$$

$$\Phi_i(T) := \{z \in \mathbb{C} : r_i(z) \geq c_i(z)\} \quad (65)$$

$$\Psi_{ij}(T) := \{z \in \mathbb{C} : \frac{\ln|t_{ii}(z)| - \ln c_i(z)}{\ln r_i(z) - \ln c_i(z)} \leq \frac{\ln c_j(z) - \ln|t_{jj}(z)|}{\ln c_j(z) - \ln r_j(z)}\ \}. \quad (66)$$

U odnosu na dokazane principe ekvivalencije (Teorema 2.2), izolacije (Teorema 2.3) i ograničenosti (Teorema 2.4), date u prethodnoj sekciji, kao i činjenicu da je klasa $\mathbb{O}^2$ strogo dijagonalno dominantnog tipa, osobine skupa $\Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$ date su sledećom posledicom:

Posledica 2.4. *Neka je $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ analitička i regularna matrična funkcija na prosto povezanom domenu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, koja određuje posmatrani NLEP. Za skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$, dobijen klasom $\mathbb{O}^2$, važi sledeće:*

1. $\Lambda(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$, $i = 1, 2$.

2. *Ako postoje disjunktni zatvoreni povezani skupovi $U, V \subseteq \Omega$, takvi da važi da je $\Omega \setminus (U \cup V)$ povezan skup i za odgovarajući skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$ je*

$$\Theta^{\mathbb{O}^2}(T) \subseteq U\ \cup\ V, \quad (67)$$

   tada u skupu U broj karakterističnih korena funkcije T i broj rešenja jednačina $t_{ii}(z) = 0$, $i \in N$ se poklapaju.

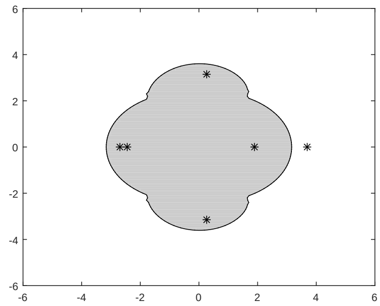
3. *Skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$ je zatvoren u $\mathbb{C}$. Štaviše, ako je skup Ω neograničen, i za neke $\varphi \in \mathcal{N}_1(\Omega)$ postoji matrica $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ takva da je $M = \lim_{k\to\infty} \frac{T(z_k)}{\varphi(z_k)}$ za sve neograničene nizove $\{z_k\}_{k\in N} \subseteq \Omega$, tada $M \in \mathbb{S}_d$ implicira da je $\Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$ kompaktan u $\mathbb{C}$.*

Na nivou principa monotonosti (Teorema 2.1) važi:

$$\Theta^{\mathbb{O}^2}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{O}^1}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(T).$$

U odnosu na prethodno, takođe važi:

$$\Theta^{\mathbb{O}^2}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{O}^2_\alpha}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(T).$$



Slika 5: Skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ iz primera 2.3

Primer 2.5. *Za date matrice A, B, C iz primera 2.3, i matričnu funkciju $P_2(z) = z^2C + zB + A$, lokalizacioni skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$, generisan klasom $\mathbb{O}^2$, je oblika (vidi Sliku 5):*

$$\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2) = \bigcap_{\alpha\in[0,1]} \bigcup_{i\in N} \Theta_i^{\mathbb{O}^2}(P_2) = \bigcap_{\alpha\in[0,1]} \bigcup_{i\in N} \{z \in \mathbb{C} : |p_{ii}(z)| \leq$$
$$\leq r_i(P_2(z))^\alpha c_i(P_2(z))^{1-\alpha}\},$$

i

$$\Theta_1^{\mathbb{O}^2}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{2}| \cdot |z + \sqrt{2}| \leq 8^\alpha \cdot (8 + |z^2 + 2z - 10|)^{1-\alpha} \},$$

$$\Theta_2^{\mathbb{O}^2}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 3| \leq 0.5(|z^2 + 2z - 10|^\alpha \cdot 16^{1-\alpha} \},$$

$$\Theta_3^{\mathbb{O}^2}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - z - 10| \leq 0\}.$$

Kako je $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2) \subseteq \Theta^{\mathbb{O}^1}(P_2)$, dovoljno je komentarisati samo lokalizacioni skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$, jer dalje bolju lokalizaciju karakterističnih korena. Kako je vodeća matrica C ovog problema iz klase $\mathbb{O}^2$, skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ je kompaktan u $\mathbb{C}$. U odnosu na princip monotonosti, jasno je $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2) \subseteq \Theta^{\mathbb{O}^1}(P_2) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$.

Dalje, primenjujući osobine klase $\mathbb{S}_\Sigma$ u postupku konstrukcije lokalizacionog skupa za spektar matrične funkcije T, odgovarajući lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa za NLEP je oblika:

$$\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(T) := \bigcap_{\emptyset\neq S\subseteq N} \Theta^{\mathbb{S}_S}(T),$$

gde je

$$\Theta^{\mathbb{S}_S}(T) := \Big[\bigcup_{i\in S}\bigcup_{j\in\bar{S}} V_{ij}^S(T)\Big] \;\cup\; \Big[\bigcup_{i\in S}\Theta_i^S(T)\Big] \tag{68}$$

i skupovi $V_{ij}^S(T)$ i $\Theta_i^S(T)$ su definisani na sledeći način:

$$V_{ij}^S(T) := \{z\in\mathbb{C} : (|t_{ii}(z)| - r_i^S(z))\cdot(|t_{jj}(z)| - r_j^{\bar{S}}(z)) > r_i^{\bar{S}}(z)\cdot r_j^S(z)\},$$

$$\Theta_i^S(T) := \{z\in\mathbb{C} : |t_{ii}(z)| \le r_i^S(z)\}$$

za neprazan skup indeksa $\emptyset \neq S \subseteq N$, i indekse $i\in S$, $j\in\bar{S}$ za koje proizvoljan karakteristični koren z pripada skupu $V_{ij}^S(T)$ ili $\Theta_i^S(T)$, i $r_i^S(z) = r_i^S(T(z))$, $r_i^{\bar{S}}(z) = r_i^{\bar{S}}(T(z))$ su skraćene oznake za sumu modula vandijagonalnih elemenata i-te vrste matrične funkcije T, za indekse iz skupa S, odnosno $\bar{S}$.

Posledica 2.5. *Neka je $T\in\mathcal{N}_n(\Omega)$ analitička i regularna matrična funkcija na prosto povezanom domenu $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, koja određuje posmatrani NLEP. Za skup $\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(T)$, dobijen klasom $\mathbb{S}_\Sigma$, važi sledeće:*

1. *$\Lambda(T)\subseteq\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(T)$.*

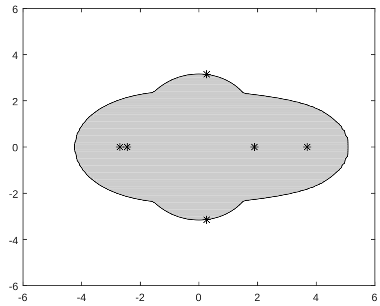
2. *Ako postoje disjunktni zatvoreni povezani skupovi $U, V\subseteq\Omega$, takvi da važi da je $\Omega\setminus(U\cup V)$ povezan skup i za odgovarajući skup $\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(T)$ je*

$$\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(T)\subseteq U \;\cup\; V, \tag{69}$$

   tada u skupu U broj karakterističnih korena funkcije T i broj rešenja jednačina $t_{ii}(z) = 0$, $i\in N$ se poklapaju.

3. *Skup $\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(T)$ je zatvoren u $\mathbb{C}$. Štaviše, ako je skup Ω neograničen, i za neke $\varphi\in\mathcal{N}_1(\Omega)$ postoji matrica $M\in\mathbb{C}^{n,n}$ takva da je $M = \lim_{k\to\infty}\frac{T(z_k)}{\varphi(z_k)}$ za sve neograničene nizove $\{z_k\}_{k\in N}\subseteq\Omega$, tada $M\in\mathbb{S}_d$ implicira da je $\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(T)$ kompaktan u $\mathbb{C}$.*

Primer 2.6. *Za matrice A, B, C iz primera 2.3 i funkciju $P_2(z) = z^2C + zB + A$, odgovarajući lokalizacioni skup generisan klasom $\mathbb{S}_\Sigma$ (vidi Sliku 6) je oblika $\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(P_2) = \bigcap_{\emptyset\neq S\subseteq N}\Theta^{\mathbb{S}_S}(P_2)$ (vidi Sliku 6). Ovde je, na primer, za fiksiran izbor $S = \{1,2\}$ i $\bar{S} = \{3\}$, odgovarajući skup $\Theta^{\mathbb{S}_S}(P_2)$ oblika: $\Theta^{\mathbb{S}_S}(P_2) := \Big[\bigcup_{i\in S}\bigcup_{j\in\bar{S}} V_{ij}^S(P_2)\Big] \;\cup\; \Big[\bigcup_{i\in S}\Theta_i^S(P_2)\Big]$, i skupovi $V_{ij}^S(P_2)$, $i\in\{1,2\}$, $j = \{3\}$, i $\Theta_i^S(P_2)$, $i\in\{1,2\}$, su oblika:*



Slika 6: Skup $\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(P_2)$, za skup $S = \{1, 2\}$, iz primera 2.3

$$V_{13}^S(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : (|z^2 - 2| - 8)) \cdot |z^2 - z - 10| > 0\},$$

$$V_{23}^S(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : (2|z^2 + 3| - |z^2 + 2z - 1|) \cdot |z^2 - z - 10| > 0\},$$

$$\Theta_1^S(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 2| \leq 8\},$$

$$\Theta_2^S(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : 2|z^2 + 3| \leq |z^2 + 2z - 10|\}.$$

Kako je vodeća matrica $C \in \mathbb{S}_S \subseteq \mathbb{S}_\Sigma$, sledi prema Teoremi 2.4, da je skup $\Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(P_2)$ kompaktan u $\mathbb{C}$.

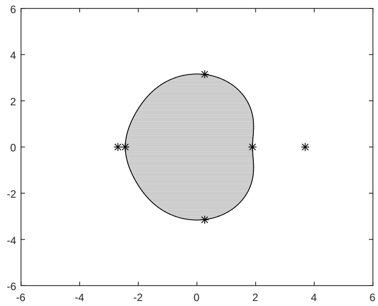
Kako je klasa H-matrica maksimalna regularna klasa DD-tipa, na osnovu principa monotonosti sledi da skup generisan klasom $\mathbb{H}$, minimalni Geršgorinov skup $\Theta^{\mathbb{H}}(T)$, daje najbolju lokalizaciju spektra funkcije $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$:

$$\Theta^{\mathbb{H}}(T) := \bigcap_{\chi > 0} \bigcup_{i} \in N\{z \in \mathbb{C} : |t_{ii}| \leq \frac{1}{\chi_i} \sum_{j \neq i} |t_{ij}|\chi_j\} \tag{70}$$

ili, ekvivalentno sa [91],

$$\Theta^{\mathbb{H}}(T) := \{z \in \mathbb{C} : \mu_T(z) \geq 0\} \tag{71}$$

gde je $\mu_T(z)$ najdesniji realan karakteristični koren esencijalno nenegativne matrice $-\langle T(z) \rangle$.



Slika 7: Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ iz primera 2.3

Primer 2.7. *Za matrice A, B, C iz primera 2.3 i funkciju $P_2(z) = z^2C + zB + A$, odgovarajući lokalizacioni skup generisan klasom $\mathbb{H}$ je oblika (71) (vidi Sliku 7), gde je $\mu_{P_2}(z)$ najdesniji realan karakteristični koren esencijalno nenegativne matrice*

$$\begin{bmatrix} -|z^2-2| & 8 & 0 \\ |z^2+2z-10| & -2|z^2+3| & 0 \\ 8 & 8 & -|z^2-z-10| \end{bmatrix}.$$

Kao što je pomenuto, za navedene lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za funkciju $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ očigledno važe sledeće inkluzije:

$$\Theta^{\mathbb{H}}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}_\Sigma}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}_d}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(T),$$

i, posebno,

$$\Theta^{\mathbb{H}}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{O}^2}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{O}^2}_{\alpha}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(T),$$

za svaku funkciju $T \in \mathcal{N}_n(\Omega)$, $\alpha \in [0,1]$, kao i

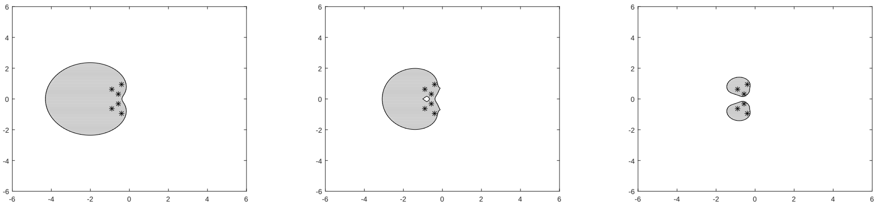
$$\Theta^{\mathbb{H}}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{O}^2}(T) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(T).$$

U nastavku navodimo primer koji ilustruje inkluzije nekih lokalizacionih oblasti navedenih u prethodnoj teoremi.

Primer 2.8. *Za date matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

i datu matričnu funkciju $P_2(z) = z^2C + zB + A$, na slici 8 su dati lokalizacioni skupovi Geršgorinovog tipa za funkciju P indukovani osobinama klasa



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ (b) Skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ (c) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$

Slika 8: Lokalizacioni skupovi za problem iz primera 2.8

$\mathbb{S}$, $\mathbb{O}^2$ i $\mathbb{H}$. Slika 8(c) ukazuje da je lokalizacioni skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ najbolja oblast lokalizacije za posmatranu funkciju P_2. Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ (koji sadrži sve korene) se sastoji samo iz jedne komponente, skoro kružnog oblika (Slika 8(a)), i obuhvata interval $[-4, 0] \times [-2.5, 2.5]$, dok skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ se sastoji iz dve komponente kružnog oblika, takođe u levom delu kompleksne ravni, koje obuhvataju uži interval ($[-2, 0] \times [-2, 2]$), kao što Slika 8(c) sugeriše.

2.4 Primene na PEP

Naglim razvojem nauke i tehnologija u XX i XXI veku, polinomni problemi karakterističnih korena (PEP) dobijaju na značaju jer su veoma zastupljeni u mnogim primenama u inženjerstvu, o čemu je već bilo reči u uvodu ove disertacije. Među poznatijim primenama su modeli sa kašnjenjem ili radijacijom, koji se javljaju pri primeni metoda transformacije diferencijalnih i diferencnih jednačina. Većina primena proizašlih iz prakse (a pobrojanih u radu [160]) odnosi se na polinomne probleme karakterističnih korena drugog reda, tzv. kvadratne probleme karakterističnih korena (QEP), dok su ređe zastupljeni oni koji su određeni matričnim polinomima reda $n \geq 3$. Standardni način rešavanja PEP je korišćenjem linearizacije, kada se QEP predstavlja kao GEP većih dimenzija, i onda rešava solverima za GEP. Međutim problem takvog pristupa je umnožavanje dimenzije prostora, što se pokazalo kao značajna prepreka za primenu ove tehnike lokalizacije na sisteme od par stotina hiljada nepoznatih. Kako matrična struktura igra krucijalnu ulogu u numeričkim metodama za računanje (generalizovanih) karakterističnih korena, dosta se napredovalo u konstruisanju linearizacija koje proizvode GEP koji nasleđuju strukturu originalnih PEP [73, 112, 117, 160]. Pa ipak, u mnogim primenama, dobra struktura (tipično simetrična/kososimetrična, pozitivno definitna, palindromska, itd.) kvadratnih matričnih funkcija može izostati, i, stoga, ide se na upotrebu standardnih linearizacija koje uključuju inverz vodeće matrice C, računski zahtevnije algoritme ili upotrebu metoda tipa ,,pomeri-i-invertuj" i direktan rad sa PEP. U svakom od ovih slučajeva, posebno velikih dimenzija, bitan aspekt predstavljaju računski troškovi, te se ide ka razvoju jeftinijih načina za otkrivanje bar jedne osobine spektra ovih kvadratnih matričnih funkcija koji ne uključuju upotrebu inverza vodeće matrice ili neke matrične faktorizacije. U slučaju ,,pomeri-i-invertuj" (engl. *shift-and-invert*) metoda, oblast u kompleksnoj ravni u kojoj se nalaze karakteristični koreni je esencijalna za izbor ,,pomeraja", i poželjno je da računski trošak takve (grube) metode koja lokalizuje karakteristične korene kvadratnih matričnih funkcija bude reda $O(n)$, a u nekim slučajevima može biti reda $O(n^2)$.

Tehnika konstrukcije lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa za standardni i generalizovani problem karakterističnih korena koja se bazira na Geršgorinovoj teoremi i njenim generalizacijama, opisana u poglavlju 1 ove disertacije, može se uopštiti na konstrukciju lokalizacionih skupova za spektar matrične funkcije koja opisuje PEP. Dakle, za dati regularni matrični polinom P domen je $\Omega = \mathbb{C}$ pa želimo da konstruišemo skupove $\Theta^{\mathbb{K}}(P) \subseteq \mathbb{C}_\infty$ koji lokalizuju njegov spektar, tj. takve da važi $\Lambda(P) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(P)$, koristeći tehniku prikazanu u prvom delu za SEP i GEP [87, 89, 91], a ovde generalizovanu na slučaj polinomnih funkcija stepena $n \geq 2$. U radu [16], autori su konstruisali lokalizacioni skup koji su nazvali *generalizovani Geršgorinov region.* To je skup $\Theta^{\mathbb{O}^2_\alpha}(T)$, za fiksirano $\alpha \in [0, 1]$. Međutim, u pomenutom radu nije tražen presek po svim mogućim α, kao što smo to uradili u ovoj tezi i u radu [93], u cilju dobijanja boljih lokalizacionih oblasti.

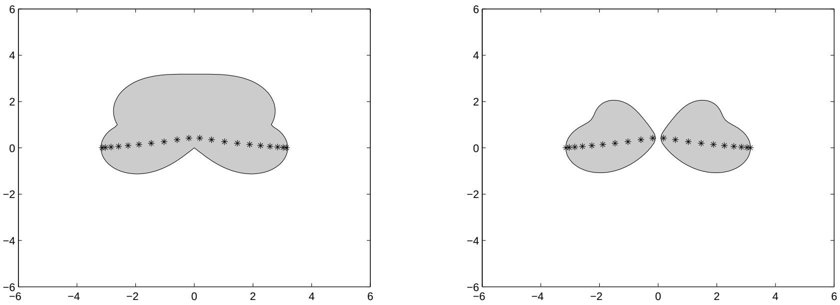
2.4.1 QEP

Najjednostavniji nelinearan problem karakterističnih korena je **kvadratni problem karakterističnih korena**, od engleskog *quadratic eigenvalue problem* (QEP). QEPovi su važna klasa nelinearnih problema karakterističnih korena, pa ipak manje poznati i manje rešavani od standardnih i generalizovanih problema karakterističnih korena (SEP i GEP). Širok spektar praktičnih problema koji mogu biti formulisani kao QEP u raznim disciplinama (dinamička analiza strukturalnih mehaničkih i akustičnih sistema, žiroskopski sistemi, simulacija električnih kola, mehanika fluida, modelovanje mikroelektronskih mehaničkih sistema, itd.) predstavljaju dobru motivaciju za detaljno proučavanje ovih problema.

U nastavku navodimo i diskutujemo nekoliko primera QEP proizašlih iz praktičnih primena. Pomenuti kvadratni problemi karakterističnih korena određeni su kvadratnim matričnim funkcijama $P_2(z) = z^2C + zB + A$, gde su matrice A, B, C kompleksne kvadratne matrice reda n nastale iz diskretizacionog procesa. U radu [15] navedeni su razni poznati problemi proizašlih iz praktičnih primena. Pored toga, u istom radu dati su i polinomni problemi karakterističnih korena trećeg i četvrtog stepena, kao i nekoliko nepolinomnih NLEP. Takođe je data MATLAB funkcija „NLEVP", koji ukratko opisuje navedene probleme i daje vrednosti elemenata matrica od kojih se sastoji matrična funkcija T posmatranog problema. Ovaj algoritam omogućuje da se dobiju elementi matrica koje definišu specifičnu funkciju T za posmatrani NLEP. Pozivom *nlevp('help','problem-name')*, koji vraća opis problema 'problem-name', algoritam daje osnovne karakteristike posmatranog problema; dok se naredbom *COEFFS('problem-name')* dobija niz matrica problema *'problem-name'*, tj. matrica od kojih se sastoji matrična funkcija T. Koristeći podatke o matricama koje se dobijaju iz ovog algoritma, u MATLABu smo konstruisali algoritam *gtype*, za konstrukciju skupova Geršgorinovog tipa koje ćemo prezentovati u ovom delu. Ovaj algoritam se zasniva na konstrukciji mreže kompleksnih brojeva na kojoj se konstruišu odgovarajući lokalizacioni skupovi. Za potrebe ove disertacije pomenuti algoritam je napravljen tako da konstruiše lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za spektar matrične funkcije T, koji se zasnivaju na osobinama poznatih potklasa $\mathbb{S}$, $\mathbb{O}^2$ i $\mathbb{H}$ matrica. Algoritam je pokretan u MATLABu R2015a, za zadatu strukturu matrica koje definišu posmatrani problem, zadatu optimalnu oblast u kojoj se nalazi lokalizacioni skup, odnosno karakteristični koreni posmatranog problema, i mali pozitivan broj ε, koji utiče na finoću dobijenih granica lokalizacionog skupa. Za crtanje odgovarajućih lokalizacionih skupova koristili smo mrežu na kojoj smo računali korene.

U nastavku navodimo šest primera proizašla iz praktičnih primena: problem akustičnog talasa dimenzije 1, problem velikog bilbija, vibraciona analiza problema testere, problem krila, problem bicikla i problem zatvorene petlje. Za svaki od pomenutih QEP ćemo konstruisati odgovarajuće skupove Geršgorinovog tipa, odnosno primeniti gore opisanu tehniku lokalizacije.

Primer 2.9. ***Problem akustičnog talasa dimenzije*** 1 *(engl. acoustic wave problem in* 1 *dimension) je QEP nastao iz diskretizacije* 1*D akustične talasne jednačine [14, 15] koja nastaje iz procesa širenja talasa kroz čvrstu sredinu (medijum) i ima oblik obične parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda. Jednačina opisuje evoluciju akustičnog pritiska p ili brzine čestice u kao funkcije koja zavisi od pozicije x i vremena t. Jednostavan oblik ove jednačine opisuje akustični talas u jednoj prostornoj dimenziji, mada postoje i opštiji oblici ovih jednačina koji opisuju kretanje akustičnih talasa koje zavisi od više dimenzija [123]. Fejnman je dobio talasnu jednačinu koja opisuje ponašanje zvuka koji prolazi kroz datu sredinu i zavisi od jedne dimenzije (pozicije x) na sledeći način [123]:*



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P)$ (b) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$

Slika 9: Lokalizacioni skupovi za QEP akustičnog talasa u $1D$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{72}$$

gde je p akustični pritisak (lokalni izvod ambijentalnog pritiska), a c je brzina zvuka. Diskretizacijom ove jednačine dobija se matrična forma određena matricama A, B, C. Ove matrice su kompleksne kvadratne matrice reda 10, pri čemu je vodeća matrica $C \in \mathbb{S}$, dok matrica $A = tridiag(-10, 20, 10) \notin \mathbb{S}$.

Matrica B ima sve elemente jednake nuli, osim $b_{10,10} = 6.2832i$, matrica C je dijagonalna matrica, čiji su dijagonalni elementi $c_{ii} = -3.9478$, za $i = 1, ..., 9$ i $c_{10,10} = -1.9739$. Ove matrice konstruišu 10×10 kvadratni matrični polinom $P_2(z) = z^2C + zB + A$, gde je $P_2 \in \mathcal{N}_{10}(\mathbb{C})$. Matrica prigušenja B je oblika $2\pi i Z^{-1}B_1$, gde je $B_1 = e_n e_n^T$ realna simetrična matrica malog ranga, a Z je skalarni parametar koji predstavlja otpor (može biti i kompleksan broj) i e_n je jedinični vektor. Podrazumevane vrednosti su $n = 10$ i $Z = 1$. Vodeća matrica C je oblika $-2\pi n^{-1}(2I - e_n e_n^T)$.

Slika 9 ilustruje lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za ovaj NLEP, generisane klasama $\mathbb{S}$, $\mathbb{O}^2$ i $\mathbb{H}$. Kako se iz oblika vodeće matrice C može zaključiti da je $C \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{O}^2 \subseteq \mathbb{H}$, sledi na osnovu Teoreme 2.4 da su svi skupovi kompaktni u $\mathbb{C}$, kao što Slika 9 sugeriše.

Štaviše, zahvaljujući simetriji svih matrica posmatrane matrične funckije P_2, imamo da je $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2) = \Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$. Ovo se analitički lako može izraziti na sledeći način: $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{10} \Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2)$, gde su skupovi $\Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2)$ oblika:

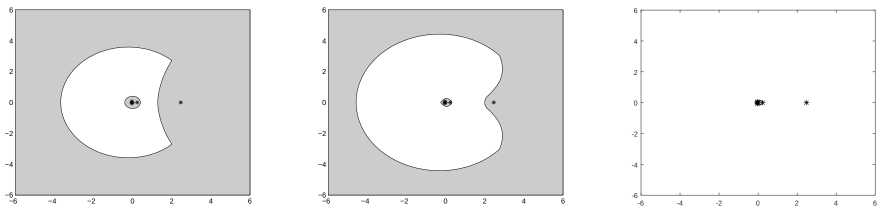
$$\Theta_1^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2.25| \cdot |z + 2.25| \le 2.53\},$$

$$\Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2.25| \cdot |z + 2.25| \le 5.07\}, i = 2, ...9,$$

i

$$\Theta_{10}^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 3.18iz - 5.07| \le 5.07\}.$$

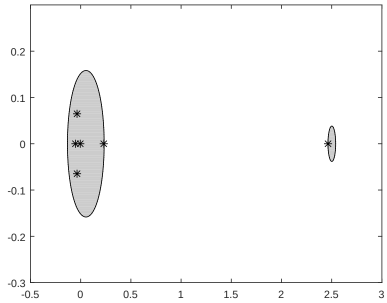
Nasuprot tome, skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ *mora biti tretiran numerički. Dalje, kako se skup* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ *sastoji iz dve nepovezane komponente (vidi Sliku 9(b)), i jednačine* $diag(P_2(z)) = 0$, *za* $i = 1, ..., 10$ *daju rešenja* $((-2.25, 1.59(i-1))$ *sa mnogostrukošću* 5 *koja pripadaju levom delu i rešenja* $(1.59(i+1), 2.25)$ *sa mnogostrukošću* 5 *koja pripadaju desnom delu ovog skupa, prema Teoremi 2.3 zaključujemo da svaka nepovezana komponenta sadrži deset karakterističnih korena funkcije* P.



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P)$ (b) Skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P)$ (c) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$

Slika 10: Lokalizacioni skup za QEP bilbija

Primer 2.10. ***Bilby*** *(Macrotis lagotis), je* 5×5 *QEP proizašao iz modela procesa kvazi rađanja i umiranja populacije velikog bilbija, ugrožene vrste australijskog torbara [14, 15, 48]. Ovaj torbar poznat pod imenom veliki bilbi, dugonosi pacov, ili veliki bandikot, je sitna noćna životinja sa ušima nalik zečijim, iz familije* Thylacomyidae *(rod* Peramelemorphia*), koja živi u pustinjama Australije. Pre dolaska Evropljana na ovo tle, bilbiji su bili rasprostranjeni na više od* 70 *procenata australijskog kopna, dok se u današnje doba može naći jedino u oblasti Tanami i pustinje Gibson u severozapadnoj Australiji i malim delom na tlu jugozapadnog Kvinslenda. U vreme evropske kolonizacije Australije postojale su dve vrste ovog torbara. Manji bilbi je istrebljen sredinom XX veka; veliki bilbi preživljava iako je ugrožena vrsta. U periodu od* 1982. *do* 1994. *godine Međunarodna Unija za očuvanje prirode (OUCN) klasifikovala je bilbija kao ugroženu vrstu i stavila ga na crvenu listu. Od 1994. godine na ovamo, OUCN je označila bilbija kao ,,ranjivu vrstu". Smanjenjem broja staništa, ova populacija je drastično opadala tokom poslednjih sedamdesetak godina. Iako su pokrenuti različiti programi za oporavak ove vrste, pretpostavlja se da ih je preostalo manje od* 10000. *Od* 1991. *godine članovi organizacije Fondacija za Australiju bez zečeva Inc. započela je kampanju zamene ,,Uskršnjeg zeke" sa ,,Uskršnjim bilbijem" kako bi podigla svest društva o opasnosti koja preti očuvanju ove vrste, istovremeno edukujući australijsku javnost o ekološkoj šteti koju nanose zečevi, čija je*



Slika 11: Slika skupa $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ na intervalu $[-0.5, 3] \times [-0.3, 0.3]$ za problem bilbija

brojnost višestruko uvećanja usled smanjenja broja njihovih prirodnih predatora. Prosečna visina ovog torbara je 55 *cm, bez repa, koji je obično dug oko* 29 *cm. Boja krzna ide od bele do sive, ima dug nos i izraženo duge uši, otud mu i nadimak ,,zecoliki nandikot". To su usamljene životinje, koje se tokom dana skrivaju od predatora. Prosečno živi 6 do 7 godina, mada u zatočeništvu može i do 11 [129].*

Diskretizacijom modela procesa kvazi rađanja i umiranja populacije velikog bilbija, dobija se QEP $P_2(z) = z^2C + zB + A$ *određen kompleksnim kvadratnim matricama* A, B, C*:*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0.055 & 0.08 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.32 & 0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.08 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.0250 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

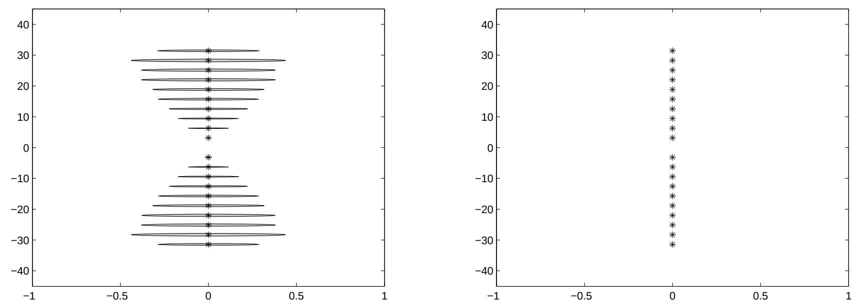
Kako je vodeća matrica C *ovog problema singularna, ne možemo primeniti Teoremu 2.4 ni za jednu klasu matrica SDD-tipa. Analitički izraz za odgovarajući skup Geršgorinovog tipa je* $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{5} \Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2)$*, gde su:*

$$\Theta_1^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 0.1| \leq |0.05z^2 + 0.01z + 0.4| + |0.06z^2 + 0.02z + 0.02| +$$
$$+ |0.08z^2 + 0.01z + 0.01| + 0.1|z^2|\},$$

$$\Theta_2^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 0\},$$
$$\Theta_3^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 0.2|z^2 + 0.2z + 8|\},$$
$$\Theta_4^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 0.22|z^2 + 0.36z + 0.45|\},$$
$$\Theta_5^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \cdot |z - 2.5| \leq |0.8z^2 + 0.1z + 0.1|\},$$

neograničeni (jer predstavljaju spoljašnjosti ovalnih i kružnih krivih) za $i = 1, 3, 4, 5$ *i skup* $\Theta_2^{\mathbb{S}}(P_2) = \{0\}$ *se sastoji iz jedne tačke, tako da je skup* $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ *neograničen kao što Slika 10(a) sugeriše. Analitički izraz za skup* $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P)$ *je nešto komplikovaniji, dok se skup* $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$ *mora računati numerički. Slika 10 ilustruje lokalizacione skupove za ovaj QEP u ova tri slučaja. Kako je skup* $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$ *dosta manji od prethodna dva, zbog bolje vidljivosti, dat je na uveličan prikaz ovog skupa na intervalu* $[-0.5, 3] \times [-0.3, 0.3]$ *na Slici 11.*

Konačno, primetimo da su jednačine $diag(P_2(z)) = 0$, *za* $i = 1, ..., 5$, *ekvivalentne sa* $|z| = 0$ *tri puta,* $|z| \cdot |z - 0.1| = 0$ *i* $|0.4z - 1| = 0$, *odakle sledi da rešenja* $(0, 0, 0, 0, 0.1)$ *koja leže u kompaktnom delu skupa* $\Theta^{\mathbb{O}}$, $\Theta^{\mathbb{S}}$ *otkrivaju da u ovoj oblasti imamo* 5 *karakterističnih korena funkcije* P_2. *Kako se skup* $\Theta^{\mathbb{H}}$ *sastoji iz dva kompaktna regiona i postoji samo jedno rešenje ovih dijagonalnih jednačina* 2.5 *koje tu leži, zaključujemo da funkcija* P_2 *ima šest konačnih karakterističnih korena. Stoga mnogostrukost karakterističnog korena* ∞ *iznosi* 4.



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P)$ (b) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$

Slika 12: Lokalizacioni skup za QEP testere

Primer 2.11. ***Wiresaw*** 1 *(testera, pila, žica) je* 10×10 *žiroskopski QEP proizašao iz vibracione analize testere [14, 15]. Testere imaju višestruke primene. U nauci npr. u laboratorijama se koriste za sečenje krtih (osetljivih)* *materijala, kao što su kristali, supstrati i sl. Osim toga, u području tehnologije mogu se koristiti za razdvajanje naprednih istraživačkih struktura kao što je npr. metod dijamantske testere koji služi za razmontiranje Fuzionog Test Reaktora Tokamak za Prinstonovu laboratoriju fizike plazme, baziranu na demonstraciji PPPL na TFTR surogatu. Tehnologija dijamantske žice je superiorna u odnosu na ostale thenologije kako u pogledu troškova , tako i u pogledu sigurnosti. Kombinacija praznog punjenja (engl.*void filling*)sa pomenutom tehnologijom značajno redukuje personalno izlaganje radijaciji kroz proces zaštite, kao i radionukleidnu stabilizaciju [136].*

Diskretizacijom diferencijalne jednačine koja opisuje ovaj proces dobija se QEP određen matričnom funkcijom $P_2(z) = z^2C + zB + A$, *takvom da je* $P_2 \in \mathcal{N}_{10}(\mathbb{C})$. *Matrice* $A, B, C \in \mathbb{C}^{10,10}$ *koje opisuju ovaj problem su oblika:* $A = diag(a_{ii})$ *(dakle SDD-tipa), čiji elementi su pozitivni brojevi u rastućem nizu, počev od* $a_{11} = 4.9343$, *do* $a_{1010} = 493.4309$*; B je singularna kososimetrična matrica, čiji su svi dijagonalni elementi jednaki nuli, a za vandijagonalne je* $b_{ij} = -b_{ji}$*:*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0.03 & 0 & -0.01 & 0 & -0.01 & 0 & -0.01 & 0 & -0.004 \\ 0.03 & 0 & -0.05 & 0 & -0.02 & 0 & -0.01 & 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & -0.07 & 0 & -0.03 & 0 & -0.02 & 0 & -0.01 \\ 0.01 & 0 & 0.07 & 0 & -0.09 & 0 & -0.03 & 0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0.09 & 0 & -0.11 & 0 & -0.04 & 0 & -0.03 \\ 0.01 & 0 & 0.03 & 0 & 0.11 & 0 & -0.13 & 0 & -0.05 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0.03 & 0 & 0.13 & 0 & -0.15 & 0 & -0.06 \\ 0.01 & 0 & 0.02 & 0 & 0.04 & 0 & 0.15 & 0 & -0.17 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0.02 & 0 & 0.05 & 0 & 0.17 & 0 & -0.19 \\ 0.004 & 0 & 0.01 & 0 & 0.03 & 0 & 0.06 & 0 & 0.19 & 0 \end{bmatrix}$$

Na kraju, C je dijagonalna matrica čiji su elementi $c_{ii} = 0.5$, *dakle skalirana jedinična matrica SDD-tipa. Zahvaljujući tome, očekujemo da sve naše klase obezbeđuju dobre kompaktne aproksimacije karakterističnih korena. Ovo je ilustrovano na Slici 12. Štaviše, sva tri skupa* $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$, $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ *i* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ *su unije nepovezanih oblasti. Dalje, zahvaljujući strukturi ovih matrica važi* $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2) = \Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$, *lako se može dobiti da je odgovarajući lokalizacioni skup* $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2) = \Theta^{\mathbb{S}}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{10} \Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2)$, *gde je:*

$$\Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z + i\xi_i| \cdot |z - i\xi_i| \leq \rho_i |z|\},$$

za $\xi = [\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{10}]^T$ *i* $\rho = [\rho_1, \rho_2, ..., \rho_{10}]^T$ *koji se računaju kao* $\xi_i = \sqrt{2|a_{i,i}|}$ *i* $\rho_i = 2\sum_{j\neq i} |b_{i,j}|$*:* $\xi_1 = 3.14$, $\xi_2 = 6.28$, $\xi_3 = 9.42$, $\xi_4 = 12.56$, $\xi_5 = 15.71$, $\xi_6 = 18.85$, $\xi_7 = 21.99$, $\xi_8 = 25.13$, $\xi_9 = 28.27$ *i* $\xi_{10} = 31.41$*; i* $\rho_1 = 0.02$, $\rho_2 = 0.23$, $\rho_3 = 0.35$, $\rho_4 = 0.45$, $\rho_5 = 0.57$, $\rho_6 = 0.64$, $\rho_7 = 0.76$, $\rho_8 = 0.46$, $\rho_9 = 0.88$ *i* $\rho_{10} = 0.58$.

Na kraju, zaključimo da su jednačine $diag(P_2(z)) = 0$*, za* $i = 1, ..., 10$*, ekvivalentne sa* $|z \pm i\xi_i| = 0$ *za sve indekse* $i = 1, ..., 10$*, pa broj rešenja (*$\pm i\xi_i$*, za* $i = 1, ..., 10$*) u nepovezanim delovima skupova* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$*,* $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ *i* $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ *obezbeđuju da svaki region mora sadržati neki karakteristični koren funkcije* P_2*, implicirajući da je svaki karakteristični koren funkcije* P_2 *prost.*

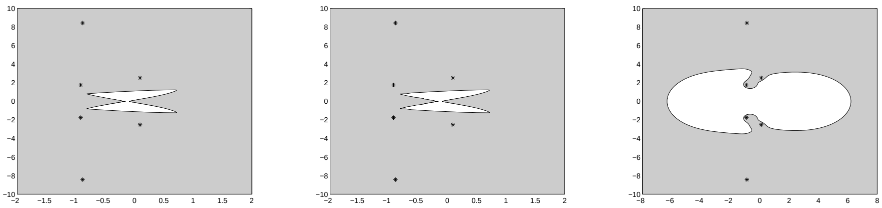
Primer 2.12. *Problem krila (engl.* wing problem*) je* 3×3 *QEP proizašao iz analize oscilacija krila u toku leta aviona [14, 15]. Ovaj problem, nastao u oblasti aeronautike, se odnosi na problem koji se javlja kada se pri velikim brzinama, usled deformacije materijala koja nastaje slaganjem svih sila koje deluju na krilo, frekvencija iskrivljenja krila aviona približava prirodnim rubnim frekvencijama protoka vazduha. Budući da je krilo elastično, ono uvek pomalo oscilira, pri čemu spojevi na kontrolnoj površini uvek proizvode ujednačene pokrete koji nisu vidljivi golim okom. Ovo kretanje nije sporno, osim u slučajevima kada frekvencija kontrolne površine postane jednaka frekvenciji krila, što se dešava postizanjem velikih brzina, bliskih brzini zvuka. Tada rezonantni rezultati krila i kontrolne površine dovode do naglog porasta amplitude oscilacija [180]. Uzrok ove relativno velike kinetičke energije koja dovodi do opasnih oscilacija je da usled protoka vazduha koji teži da priguši ugaone vibracije krila, kontrolna površina krila uzima energiju koja nastaje iz protoka vazduha i tako povećava, umesto da smanji, oscilacije krila. Komplikovaniji problemi uključuju problem rezonance nastao usled vihora koji nastaje kombinacijom rubnih i torzionih oscilacija krila i mnogih oscilacija koje nastaju delovanjem sila na kontrolnu površinu. Stoga svaka velika aerokompanija ima svog inženjera koji se bavi ovim problemima.*

Diskretizacijom diferencijalnih jednačina drugog reda koje opisuju ovaj proces, dobija se odgovarajuća kvadratna matrična funkcija oblika $P_2(z) = z^2C + zB + A$*,* $P_2 \in \mathcal{N}_3(\mathbb{C})$*, definisana matricama* $A, B, C \in \mathbb{C}^{3,3}$ *oblika:*

$$C = \begin{bmatrix} 17.6 & 1.28 & 2.89 \\ 1.28 & 0.824 & 0.413 \\ 2.89 & 0.413 & 0.725 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7.66 & 2.45 & 2.1 \\ 0.23 & 1.04 & 0.223 \\ 0.6 & 0.756 & 0.658 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 121 & 18.9 & 15.9 \\ 0 & 2.7 & 0.145 \\ 11.9 & 3.64 & 15.5 \end{bmatrix}.$$

Kako vodeća matrica $C \notin \mathbb{S}$*,* $C \notin \mathbb{O}^2$*, ne možemo primeniti Teoremu 2.4 ni za jednu klasu matrica SDD-tipa. Slika 13 ilustruje lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za ovaj NLEP.*



(a) Set $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ (b) Set $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ (c) Set $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$

Slika 13: Lokalizacioni skupovi za QEP krila

Budući da je ovaj problem opisan matricama malog formata, lako se može analitički izraziti odgovarajući lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{3} \Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2)$, *gde je:*

$$\Theta_1^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2{+}0.4z{+}6.9| \leq |0.07z^2{+}0.1z{+}1.07| + |0.16z^2{+}0.1z{+}0.9|\},$$

$$\Theta_2^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2{+}1.26z{+}3.28| \leq |1.55z^2{+}0.28z| + |0.5z^2{+}0.27z{+}0.18|\},$$

$$\Theta_3^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2{+}0.9z{+}21.4| \leq |3.99z^2{+}0.8z{+}16.4| + |0.6z^2{+}1.04z{+}5.02|\}.$$

Nasuprot tome, skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ *je malo komplikovaniji za računanje, a skup* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ *mora biti tretiran numerički.*
Primetimo da iz jednačina $diag(P_2(z)) = 0$, *za* $i = 1, 2, 3$, *sledi* $|z - (-0.2 \pm 2.62i)| = 0$, $|z - (-0.63 \pm 1.7i)| = 0$ *i* $|z - (-0.45 \pm 9.24i)| = 0$. *Kako se skupovi* $\Theta^{\mathbb{H}}$, $\Theta^{\mathbb{O}}$, $\Theta^{\mathbb{S}}$ *sastoje iz jedne neograničene komponente, to se svi karakteristični koreni funkcije* P_2 *moraju nalaziti u tom delu.*

Primer 2.13. ***Problem bicikla*** *(engl.* bicycle problem*) je QEP reda 2 nastao iz proučavanja dinamičke stabilnosti modela Whipple bicikla [14, 15]. Linearizovane jednačine pokreta ovog modela mogu se predstaviti u obliku*

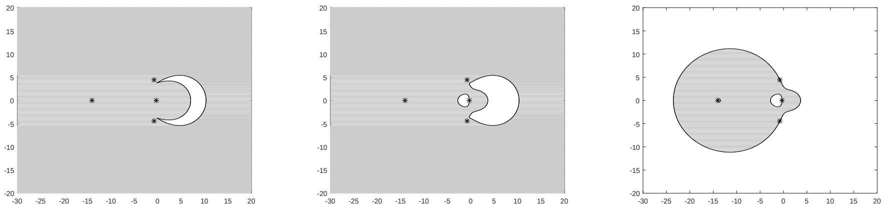
$$C\ddot{q} + B\dot{q} + Aq = f,$$

gde je C *simetrična matrica mase,* $B = vB_1$ *je nesimetrična matrica prigušenja, gde je* v *brzina napredovanja (engl.* forward speed*), pri čemu je njena podrazumevana vrednost* $5m/s$. *Matrica gustine je* $A = gA_0 + v^2A_2$ *predstavlja sumu dva dela: ubrzanja nezavisnog simetričnog dela* gA_0 *proporcionalnog gravitacionom ubrzanju* g, *i nesimetričnog dela* v^2A_2. *Diskretizacijom je ovaj problem predstavljen kvadratnom matričnom funkcijom oblika* $P_2(z) = z^2C + zB + A$, $P_2 \in \mathcal{N}_2(\mathbb{C})$, *definisana matricama* $A, B, C \in \mathbb{C}^{2,2}$ *oblika:*

$$A = \begin{bmatrix} -794.1195 & 1889.4 \\ -25.513 & 58.4776 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 169.3321 \\ -4.2518 & 8.427 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 80.8172 & 2.3194 \\ 2.3194 & 0.2978 \end{bmatrix}.$$

Kako vodeća matrica $C \notin \mathbb{S}$, $C \notin \mathbb{O}^2$, ne možemo primeniti Teoremu 2.4 na klase matrica $\mathbb{S}$ i $\mathbb{O}^2$. Međutim, $C \in \mathbb{H}$, pa se za lokalizacioni skup generisan ovom klasom može primeniti pomenuta teorema. Slika 14 ilustruje lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za ovaj NLEP.



(a) Set $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ (b) Set $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ (c) Set $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$

Slika 14: Lokalizacioni skupovi za QEP bicikla

Budući da je ovaj problem opisan matricama malog formata, lako se može analitički izraziti odgovarajući lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{2} \Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2)$, gde je:

$$\Theta_1^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3.13| \cdot |z + 3.13| \leq 0.29|z^2 + 7.24z + 80.62|\},$$

$$\Theta_2^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 28.1z + 194.93| \leq 7.73|z^2 - 1.83z - 10.99|\}.$$

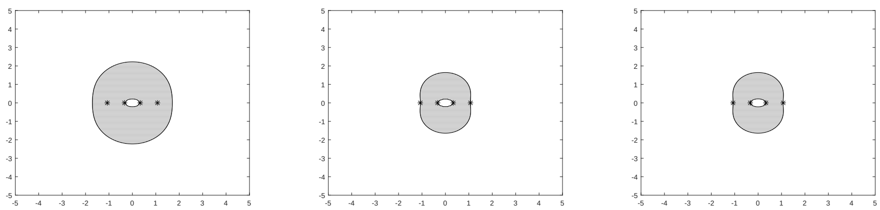
Nasuprot tome, skupovi $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ i $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ su malo komplikovaniji za računanje. Primetimo da iz jednačina $diag(P_2(z)) = 0$, za $i = 1, 2$, sledi $|z \pm 3.13)| = 0$, $|z - 12.48)| = 0$ i $|z + 15.62| = 0$. Kako se skupovi $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ i $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ sastoje iz jedne neograničene komponente, i prema Teoremi 2.1 je $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ to se svi karakteristični koreni funkcije P_2 moraju nalaziti u tom delu. Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ je ograničen, takođe se sastoji iz jedne komponente, pa se svi koreni moraju prema Teoremi 2.2 naći u toj komponenti.

Primer 2.14. *Zatvorena petlja (engl.* closed loop*) je QEP reda 2 nastao iz proučavanja kontrolnog sistema zatvorene petlje. Diskretizacijom je ovaj* *problem predstavljen kvadratnom matričnom funkcijom oblika* $P_2(z) = z^2 I + zB + A$, $P_2 \in \mathcal{N}_2(\mathbb{C})$, *definisana matricama*

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1+\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

za podrazumevanu vrednost povratnih dobiti (engl. feedback gains*)* 1 *i* $1+\alpha$. *Za* $0 < \alpha < 0.875$ *svi karakteristični koreni leže u jediničnom krugu [160]. Podrazumevana vrednost parametra* α *je* 1.

Slika 15 ilustruje lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za ovaj NLEP, generisane klasama $\mathbb{S}$, $\mathbb{O}^2$ *i* $\mathbb{H}$. *Kako se iz oblika vodeće matrice* C *može zaključiti da je* $C \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{O}^2 \subseteq \mathbb{H}$, *sledi na osnovu Teoreme 2.4 da su svi skupovi kompaktni u* $\mathbb{C}$, *kao što Slika 15 sugeriše.*



(a) Set $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ (b) Set $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ (c) Set $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$

Slika 15: Lokalizacioni skupovi za QEP zatvorene petlje

Budući da je ovaj problem opisan matricama malog formata, lako se može analitički izraziti odgovarajući lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{2} \Theta_i^{\mathbb{S}}(P_2)$, *gde je:*

$$\Theta_1^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 0.71i| \cdot |z + 0.71i| \leq 2|z| \},$$
$$\Theta_2^{\mathbb{S}}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 0.5| \cdot |z + 0.5| \leq |z|\}.$$

Nasuprot tome, skupovi $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ *i* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ *su malo komplikovaniji za računanje.*
Primetimo da iz jednačina $diag(P_2(z)) = 0$, *za* $i = 1, 2$, *sledi* $|z \pm 0.71i)| = 0$ *i* $|z \pm 0.5)| = 0$. *Kako se skupovi* $\Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$, $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2)$ *i* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2)$ *sastoje iz jedne komponente, i prema Teoremi 2.1 je* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_2) \subseteq \Theta^{\mathbb{O}^2}(P_2) \subseteq \Theta^{\mathbb{S}}(P_2)$ *to se svi karakteristični koreni funkcije* P_2 *moraju nalaziti u tom delu. Konačno, prema Teoremi 2.2 svaki od ovih skupova će sadržati sve karakteristične korene posmatrane funkcije* P_2 *koja određuje problem zatvorene petlje.*

2.4.2 PEP višeg reda

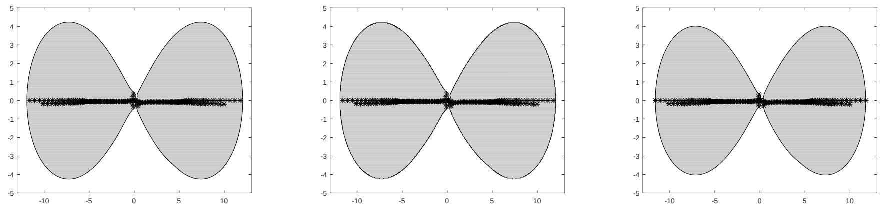
Polinomni problemi karakterističnih korena (PEP) višeg reda određeni su polinomnom matričnom funkcijom stepena većeg od dva. Iako znatno ređe zastupljeni u praktičnim primenama od kvadratnih problema karakterističnih korena, nezaobilazni su u rešavanju velikog broja problema proizašlih iz primena u nauci i inženjerstvu.

Primer 2.15. ***Protok plazme*** *(plazma drift) je PEP stepena* 3*, proizašao iz problema dizajna Tokamak reaktora, nastao pri modelovanju nestabilnosti protoka na ivici plazme unutar Tokamak reaktora. Tokamak reaktor je uređaj koji koristi jako magnetno polje za vezivanje plazme u oblik torusa. Predstavlja jedan od nekoliko tipova uređaja za magnetno vezivanje plazme, koji se koristi za vezivanje vrele plazme koja služi za proizvodnju kontrolisane snage termonuklearnih fuzija u reaktorima [136]. Štaviše, tokamak je lider među uređajima ovog tipa. Upotreba magnetnih polja u procesu vezivanja plazme je veoma važna jer ne postoji nijedan čvrst materijal koji bi izdržao ekstremno visoke temperature plazme. Postizanje stabilne ravnoteže u plazmi postiže se kretanjem linija magnetnog polja oko torusa u spiralnom obliku. Takvo spiralno polje može se generisati dodavanjem toroidalnog polja (koje podrazumeva putovanje oko torusa u krugovima) i poloidalnog polja (koje podrazumeva putovanje u krugovima ortogonalnim na toroidalno polje). U tokamaku toroidalno polje proizvode elektromagneti koji okružuju torus. Poloidalno polje je rezultat toroidalnog električnog protoka struje unutar plazme. Ova struja je indukovana unutar plazme drugim setom elektromagneta [136].*

U matričnoj formulaciji ovog problema fizički interesantan karakteristični koren je onaj sa najvećim imaginarnim delom. Matrična funkcija koja opisuje problem je polinomna trećeg stepena: $P_3(z) = z^3D + z^2C + zB + A$*, za zadate matrice* $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{n,n}$*. Problem protoka plazme je reda* n*, pri čemu su jedine dve dozvoljene vrednosti* $n = 128$ *(podrazumevana vrednost) i* $n = 512$*, kada se radi o retkim matricama [160]. Matrice koje ćemo koristiti za konstrukciju lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa za spektar matrične funkcije* P *(date algoritmom NLEVP) su reda* 128*, pri čemu su matrice* D *i* C *dijagonalne, dakle SDD matrice, dok* B *i* A *nisu SDD matrice.*

Kako je D *SDD matrica, očekujemo da sve naše klase obezbeđuju dobre kompaktne aproksimacije karakterističnih korena. Ovo je ilustrovano na Slici 16. Štaviše, sva tri skupa* $\Theta^{\mathbb{S}}(P_3)$*,* $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_3)$ *i* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_3)$ *kompaktni u kompleksnoj ravni.*

Teorema 2.4 implicira da za svaku klasu $\mathbb{K}$ *matrica SDD-tipa, skup* $\Theta^{\mathbb{K}}(P_3)$ *je kompaktan ukoliko je matrica* $D \in \mathbb{K}$*. Kako je u ovom primeru*



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_3)$ (b) Skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_3)$ (c) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P_3)$

Slika 16: Lokalizacioni skupovi za protok plazme NLEP

matrica $D \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{O} \subseteq \mathbb{H}$, možemo zaključiti da su svi skupovi kompaktni u $\mathbb{C}$, kao što Slika 16 sugeriše.

U odnosu na format matrica koje definišu ovaj problem ($n = 128$), skupovi $\Theta^{\mathbb{S}}(P_3)$, $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_3)$ i $\Theta^{\mathbb{H}}(P_3)$ moraju biti tretirani numerički. Primetimo da iz jednačina $diag(P_3(z)) = 0$, za sve indekse $i = 1, ..., 128$, sledi da broj rešenja u nepovezanim delovima skupova $\Theta^{\mathbb{S}}(P_3)$, $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_3)$ i $\Theta^{\mathbb{H}}(P_3)$ se mora poklopiti sa brojem karakterističnih korena funkcije P u ovim delovima. Naime, bližim ispitivanjem oko koordinatnog početka, može se uočiti da se skupovi $\Theta^{\mathbb{S}}$, $\Theta^{\mathbb{O}}$ i $\Theta^{\mathbb{H}}$ sastoje iz dva povezana simetrična ovalna dela, pa parovi karakterističnih korena pripadaju simetričnim ovalnim delovima.

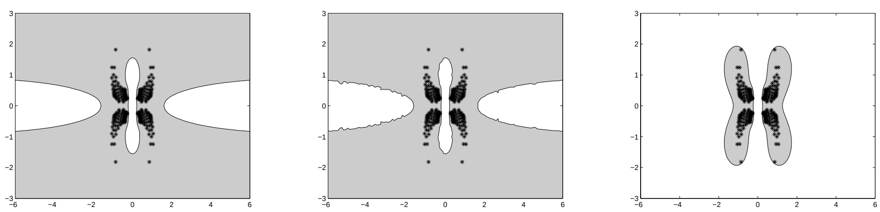
Primer 2.16. ***Relativni položaj 5pt*** *(engl. Relative pose 5pt) je kubni PEP proizašao iz problema relativnog položaja pet tačaka u kompjuterskoj viziji. U kompjuterskoj viziji i robotici, tipičan zadatak je identifikovati specifične objekte na slici i odrediti poziciju i orijentaciju objekta u odnosu na neki koordinatni sistem [140]. Podaci o slici na osnovu kojih se određuje položaj objekta mogu biti ili samo jedna ili par slika, ili niz slika gde se kamera pomera poznatom brzinom. Mogu se posmatrati objekti svih vrsta, živa bića ili njihovi delovi. Metode koje se koriste za određivanje objekta su specifične u odnosu na klasu posmatranog objekta. Položaj se može opisati kao rotacija ili translacija koja prevodi objekt od referentnog (početnog) do posmatranog (trenutnog) položaja. Ove transformacije (rotacije i translacije) mogu biti predstavljene na više načina, npr. kao matrica kvaterniona [140].*

Diskretizacijom diferencijalnih jednačina trećeg reda koje opisuju ovaj proces, dobija se odgovarajuća matrična funkcija oblika $P_3(z) = z^3D + z^2C + zB + A$, za zadate matrice $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{10,10}$. Problem je dimenzije 10, gde su zadate matrice takve da vodeća matrica D ima rang 1, matrica C je ranga 3, B je ranga 6, i A je punog ranga. Dalje, matrica D ima sve elemente jednake nuli u prvih devet kolona, dok se u desetoj nalaze elementi različiti od nule; matrica C ima prvih 7 nula kolona, dok su elementi preostale 3 kolone različiti od nule; matrica B ima prve 4 nula kolone (svi elementi u prve 4 *kolone su jednaki nuli), dok su preostali različiti od nule. Konačno, matrica A ima sve elemente različite od nule i nije SDD.*

Kako je funkcija koja opisuje pomenuti problem polinomna trećeg stepena, i kako je vodeća matrica D ovog problema određenog funkcijom $P_3(z) = z^3D + z^2C + zB + A$, $P_3 \in \mathcal{N}_{10}(\mathbb{C})$ skoro singularna, ne možemo primeniti Teoremu 2.4 ni za jednu klasu matrica SDD-tipa. Takođe, u ovom slučaju se može se zaključiti da primena opisane tehnike neće dati povoljne lokalizacione rezultate.

Među problemima koji proizilaze iz praktičnih primena nalaze se i oni određeni polinomnim funkcijama četvrtog stepena. U nastavku navodimo dva ovakva primera, opisana u radu [14].

Primer 2.17. ***Problem leptira*** *(butterfly problem) je PEP četvrtog stepena, definisan funkcijom $P_4(z) = z^4E + z^3D + z^2C + zB + A$, gde su A, B, C, D, E kompleksne kvadratne matrice reda 64. Vodeća matrica E i matrica A su SDD, matrice E i C su realne simetrične matrice i D i B su realne kososimetrične matrice. Naziv ovog problema potiče od toga što spektar ima oblik leptira.*



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_4)$ (b) Skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_4)$ (c) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P_4)$

Slika 17: Lokalizacioni skupovi za NLEP leptira

Na slikama 17(a) i 17(b) prikazan je samo deo spektra, da bi bio uočljiv centralni deo, gde se nalaze svi karakteristični koreni ovog problema. Kako je vodeća matrica E SDD-tipa, očekujemo da sve naše klase obezbeđuju dobre kompaktne aproksimacije karakterističnih korena. Ovo je ilustrovano na Slici 17. Štaviše, sva tri skupa $\Theta^{\mathbb{S}}(P_4)$, $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_4)$ i $\Theta^{\mathbb{H}}(P_4)$ su kompaktni u kompleksnoj ravni.

Lokalizacioni skupovi se sastoje samo iz jedne komponente, i, prema Teoremi 2.2 sadrže sve karakteristične korene posmatranog problema. U odnosu na princip monotonosti (Teorema2.1), jasno je da važi U odnosu na veličinu ovog problema ($n = 64$), kao i činjenicu da su matrice koje opisuju ovaj problem retke, skupovi $\Theta^{\mathbb{S}}(P_4) = \Theta^{\mathbb{O}^2}(P_4)$ mogu biti tretirani analitički, nasuprot skupu $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$ koji mora biti tretiran numerički.

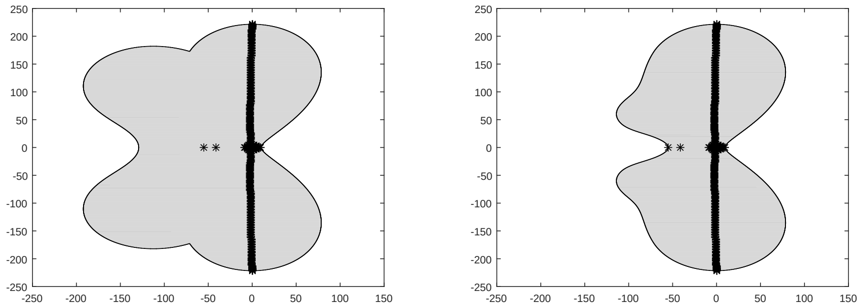
U nastavku navodimo još jedan primer NLEP četvrtog stepena, takođe opisanog u radu [14].

Primer 2.18. ***Planar waveguide***, *planarni protok talasa, je NLEP četvrtog stepena nastao iz procesa prenosa svetlosnih talasa. Optički talasovod (engl.* waveguide*), po kome je ovaj NLEP dobio ime, je fizička struktura koja prevodi elektromagnetne talase u optički spektar. Postoji više vrsta talasovoda, od kojih su najpoznatiji oni koji uključuju optička vlakna i pravougaoni. Koriste se kao komponente integrisanih optičkih kola ili kao medijum za prenos u komunikacionim sistemima [110]. Optički talasovodi se mogu klasifikovati na više načina, npr. prema geometriji se dele na planarne (ravne), trakaste i fibrozne; prema strukturi se dele na one koji imaju singularan i multi mod, prema refraktivnom indeksu distribucije na one koji imaju step ili gradient indeks; prema materijalu na one sačinjene od stakla, polimera i poluprovodnika.*

Planarni (pločasti) talasovod se sastoji iz tri sloja materijala sa različitim dielektričnim konstantama, koje se protežu beskonačno u pravcima paralelnim njihovim interfejsima. Svetlo može biti ograničeno na srednji sloj potpunom unutrašnjom refleksijom. Ovaj slučaj se javlja samo ako je dielektrični indeks srednjeg sloja veći od susednih. U praksi ovi talasovodi nisu beskonačni u pravcima paralelnim njihovim interfejsima, ali ako je veličina interfejsa mnogo veća od dubine sloja, ovaj model će biti odlična aproksimacija procesa prenosa.

Ovaj NLEP je reda 129, a odgovarajuća matrična funkcija je oblika $P_4(z) = z^4E + z^3D + z^2C + zB + A$, *dobijena metodom konačnih elemenata u procesu širenja konstanti u šestoslojnom planarnom protoku talasa. Formulacija ovog problema podrazumeva promenu promenljivih, pa se koeficijenti dobijaju konvertovanjem izračunatih karakterističnih korena. Vodeća matrica* E *matrične formulacije ovog problema je tridijagonalna:* $E = tridiag(0.0026, 0.104, 0.0026)$, *dakle SDD; matrica* A *je takođe tridijagonalna, sa elementima* $a_{11} = a_{129,129} = 4.9437, a_{12} = a_{128,129} = 2,4719,$ $a_{ii} = 9.8874, a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = 2.4719$, *za* $i = 2, 3, ..., 128$. *Ostale matrice su retke: matrica* B *je takva da su joj elementi* $b_{11} = -30.8089$ *i* $b_{129,129} = 30.8089$, *dok su ostali elementi jednaki nuli; matrica* C *je tridijagonalna, sa elementima* $C = tridiag(-64.2903, 126.8389, -64.2903)$ *osim za prvu i poslednju vrstu, za koje je* $c_{11} = c_{129,129} = 63.4195$ *i* $c_{21} = 0$, *dok matrica* D *ima samo dva elementa različita od nule:* $d_{11} = 1$ *i* $d_{129,129} = 1$.

Kako je vodeća matrica E *SDD, očekujemo da sve naše klase obezbeđuju dobre kompaktne aproksimacije karakterističnih korena. Ovo je ilustrovano na Slici 18. Štaviše, sva tri skupa* $\Theta^{\mathbb{S}}(P_4)$, $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_4)$ *i* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_4)$ *kompaktni u kompleksnoj ravni. U odnosu na strukturu matrica koje definišu ovaj problem,*



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P_4) = \Theta^{\mathbb{O}^2}(P_4)$ (b) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$

Slika 18: Lokalizacioni skupovi za PEP planarni talasovod

sledi da je $\Theta^{\mathbb{S}}(P_4) = \Theta^{\mathbb{O}^2}(P_4)$.

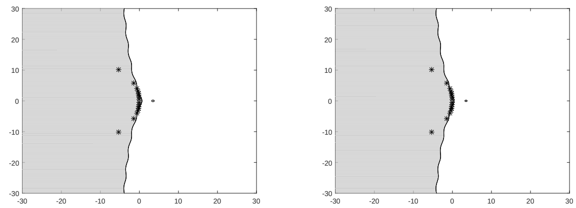
Teorema 2.4 implicira da za svaku klasu $\mathbb{K}$ *matrica SDD-tipa, skup* $\Theta^{\mathbb{K}}(P_4)$ *je kompaktan ako je* $E \in \mathbb{K}$. *Budući da je vodeća matrica* E *ovog problema tridijagonalna, SDD, tj.* $E \in \mathbb{S}$, *možemo zaključiti da je odgovarajući lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa kompaktan u* $\mathbb{C}$, *za posmatrane klase* $\mathbb{S}$, $\mathbb{O}^2$ *i* $\mathbb{H}$. *Lokalizacioni skupovi se sastoje samo iz jedne komponente, i sadrže sve karakteristične korene posmatranog problema (prema Teoremi2.2). Kako je ovaj NLEP formulisan kompleksnim kvadratnim matricama reda*129, *sledi da skupovi* $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P_4)$, $\Theta^{\mathbb{S}}(P_4)$ *i* $\Theta^{\mathbb{H}}(P_4)$ *moraju biti tretirani numerički.*

2.5 Primene na nepolinomne NLEP

U radu [14] razmatran je, osim kvadratnog, i nelinearni problem karakterističnih korena, tačnije poznati Hadelerov problem proizašao iz praktičnih primena. U tom radu primenjena je tehnika lokalizacije koja kombinuje Čebiševljeve polinome i Geršgorinovu teoremu, na taj način što je funkcija koja opisuje nelinearan problem Hadeler najpre aproksimirana Čebiševljevim polinomima, a zatim je na takvu aproksimiranu funkciju primenjena lokalizacija bazirana na Geršgorinovoj teoremi. Mi ćemo koristiti nešto drugačiji pristup, korišćen u prethodnim poglavljima, zasnovan na pomenutim principima ekvivalencije, monotonosti, izolacije i kompaktnosti, i generalizovan na NLEP koji sadrže neki eksponencijalni deo. U tom pravcu, u nastavku analiziramo dva takva nelinearna problema proizašla iz prakse: problem Hadeler, i problem kašnjenja.

Primer 2.19. ***Hadeler problem*** *je nelinearni problem karakterističnih korena određen matričnom funkcijom oblika* $T(z) = (e^z - 1)C + z^2 B - \alpha_1 I$, *gde je* $T(z) \in \mathcal{N}_8(\mathbb{C})$. *Matrica* $A = \alpha_1 I$ *i podrazumevane vrednosti su* $n = 8$,

$\alpha_1 = 100$. *Matrice* $C, B \in \mathbb{C}^{8,8}$ *ovog problema su realne simetrične pozitivno definitne matrice [14].*



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(T) = \Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$ (b) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(T)$

Slika 19: Lokalizacioni skupovi za NLEP Hadeler

U odnosu na strukturu matrica koje definišu ovaj problem, skup $\Theta^{\mathbb{S}}(T) = \Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$. *Slika 19 ilustruje lokalizacione skupove za ovaj NLEP u slučaju* $\mathbb{S}$, $\mathbb{O}^2$ *i* $\mathbb{H}$ *matrica. Primetimo da niz* $\{e^{z_k}\}_{k\in N}$ *može biti ograničen za neograničene* $\{z_k\}_{k\in N}$, *pa ne možemo primeniti drugi deo Teoreme 2.4, da bismo zaključivali o ograničenosti odgovarajućih lokalizacionih skupova za spektar ovog problema.*
Zahvaljujući strukturi matrica koje određuju ovaj NLEP, važi $\Theta^{\mathbb{S}}(T) = \Theta^{\mathbb{O}^2}(T) = \bigcup_{i=1}^{8} \Theta_i^{\mathbb{S}}(T)$, *i ovaj skup se može izraziti analitički:*

$$\Theta_i^{\mathbb{S}}(T) := \{z \in \mathbb{C} : |(e^z - 1)b_{i,i} + z^2 a_{i,i} - \alpha_1| \leq \sum_{j\neq i, j\in N} |(e^z - 1)b_{i,j} + z^2 a_{i,j}|\},$$

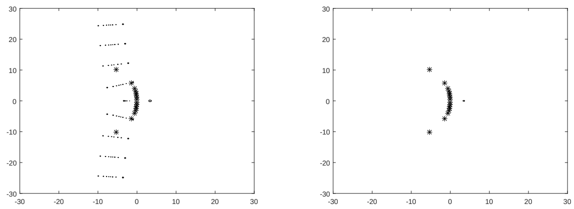
$i = 1, ..., 8$, *dok skup* $\Theta^{\mathbb{H}}(T)$ *mora biti tretiran numerički.*

Simultano dijagonalizujući par (C, B) *matricom* V, *i uz oznake* $A_1 = V^{-1}AV$, $B_1 = V^{-1}BV$ *i* $C_1 = V^{-1}CV$, *posmatrajući problem* $T_1(z) = (e^z - 1)C_1 + z^2 B_1 - A_1$, *dobićemo značajno lepše lokalizacione oblasti. Slika 20 ilustruje lokalizacione skupove za ovaj NLEP u slučaju* $\mathbb{S}$, $\mathbb{O}^2$ *i* $\mathbb{H}$ *matrica.*

Naredni primer analizira problem kašnjenja, NLEP dodređen funkcijom koja, kao i u prethodnom slučaju, sadrži eksponencijalni deo.

Primer 2.20. ***Problem kašnjenja*** *(engl.* Time delay problem*) je NLEP proizašao iz sistema kašnjenja. Karakteristična funkcija (nastala iz procesa diskretizacije) koja opisuje ovaj sistem sa prostim kašnjenjem i konstantnim koeficijentima je oblika* $T(z) = -3zI + A + e^{-z}B$, *takva da je* $T(z) \in \mathcal{N}_3(\mathbb{C})$. *Matrice koje opisuju problem kašnjenja su oblika [14, 15]:*

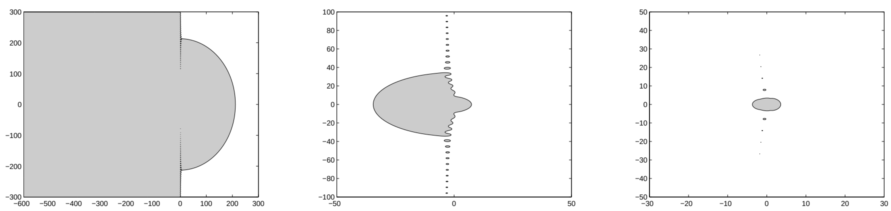
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -531.6456 & -107.5599 & -3.9852 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1363.7 & -18.7335 & -13.3519 \end{bmatrix}.$$



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(T_1) = \Theta^{\mathbb{O}^2}(T_1)$

(b) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(T_1)$

Slika 20: Lokalizacioni skupovi za NLEP Hadeler nakon dijagonalizacije para (C, B).



(a) Skup $\Theta^{\mathbb{S}}(P)$

(b) Skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P)$

(c) Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$

Slika 21: Lokalizacioni skupovi za NLEP kašnjenja

Kao i u prethodnom primeru, kako niz $\{e^{-z_k}\}_{k\in N}$ *može biti ograničen niz za neograničen* $\{z_k\}_{k\in N}$*, ne možemo primeniti drugi deo Teoreme 2.4, te ne možemo zaključivati o ograničenosti odgovarajućih lokalizacionih skupova. S druge strane, zahvaljujući maloj veličini problema* ($n = 3$)*, skupovi* $\Theta^{\mathbb{S}}(T)$ *i* $\Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$ *se lako mogu izraziti analitički. Tako, na primer, koristeći napred navedene definicije lokalizacionih skupova, skup* $\Theta^{\mathbb{S}}(T)$ *može biti analitički izražen u obliku:* $\Theta^{\mathbb{S}}(T) = \Theta_1^{\mathbb{S}}(T) \cup \Theta_2^{\mathbb{S}}(T) \cup \Theta_3^{\mathbb{S}}(T)$*, gde su skupovi* $\Theta_i^{\mathbb{S}}(T)$*,* $i = 1, 2, 3$ *oblika:*

$$\Theta_1^{\mathbb{S}}(T) = \Theta_2^{\mathbb{S}}(T) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 0.33\}$$

i

$$\Theta_3^{\mathbb{S}}(T) = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1.33 + 4.45e^{-z}| \leq |177.22 + 454.57e^{-z}| + |35.85 + 6.24e^{-z}|\}.$$

Analogno prethodnom, skup $\Theta^{\mathbb{O}^2}(T)$ *se takođe može analitički izraziti lako zbog malog formata matrica koje određuju ovaj NLEP.*

S druge strane, skup

$$\Theta^{\mathbb{H}}(T) = \{z \in \mathbb{C} : \mu(z) \geq 0\},$$

gde je $\mu(z)$ *najmanji realan karakteristični koren* Z*-matrice*

$$< P(z) >= \begin{bmatrix} 3|z| & -1 & 0 \\ 0 & 3|z| & -1 \\ -|1363.7e^{-z} + 531.64| & -|18.73e^{-z} + 107.56| & |13.35e^{-z} - 3z + 3.98| \end{bmatrix}.$$

Skup $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$ *je prikazan na Slici 21(c). Lako se može proveriti da je* $(P(z)_{33}) = |13.3519e^{-z} - 3z + 3.9852| > 0$*, i stoga zaključujemo da funkcija* $P(z)$ *ima samo dva karakteristična korena u centralnim komponentama skupova* $\Theta^{\mathbb{O}^2}(P)$ *i* $\Theta^{\mathbb{H}}(P)$*, dok sve ostale komponente moraju biti prazne. Slika 21(a) prikazuje pomenute skupove za ovaj NLEP.*

3 Skupovi Geršgorinovog tipa i nestrukturne perturbacije

Iako spektralna analiza već duže od sedamdeset godina predstavlja veoma interesantno područje istraživanja za modernu nauku, pre svega u oblasti tranzicionog ponašanja matrica, vremenski zavisnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, normalnosti, stabilnosti dinamičkih sistema, dinamičkoj analizi strukturalnih mehaničkih i akustičnih sistema, žiroskopskim sistemima, simulaciji električnih kola, mehanici fluida, modelovanju mikroelektronskih mehaničkih sistema; zatim u teoriji verovatnoće (Markovljevi lanci) i kontrolnoj teoriji [14, 163], tokom vremena primećeno je da se u izvesnim primenama u nauci i inženjerstvu, kao što su npr. područje Kuetovog, Puasejevog protoka i protoka cevi u ispitivanju hidrodinamičke (ne)stabilnosti, kao i konvergencija iterativnih metoda za linearne sisteme, ona neće dati rezultate koji se poklapaju sa očekivanim [163, 165]. Time se nametnulo pitanje: ako analiza karakterističnih korena, odnosno spektra može biti varljiva/nepouzdana, šta se može uraditi da se dobiju bolji/pouzdaniji rezultati? Ispostavilo se da, u slučajevima kada ispitivane matrice poseduju osobinu normalnosti, odgovor vodi ka ispitivanju spektra posmatrane matrice, dok je u slučaju nenormalnih matrica (tj. matrica koje ne poseduju osobinu normalnosti) spektar previše mali, polje vrednosti (numerički opseg) preveliko, krug oko nule radijusa jednakog normi matrice još veći. Osim toga, umesto same matrice ili operatora, u primenama se često operiše sa familijom matrica ili operatora indeksiranih nekim parametrom (kao npr. Rejnoldsov broj, Pekleov broj ili otpornost), pa stepen nenormalnosti može neograničeno porasti kada se parametar približava granici fizičkog interesa [164].

Dakle, za probleme određene matricom ili linearnim operatorom koji nije normalan ili je daleko od normalnog, pokazuje se da analiza spektra ne može predvideti ponašanje sistema u slučajevima da se ispituju veličine kao što su npr. $||A^n||$ ili $||e^{tA}||$. U takvim situacijama, dobre, tj. očekivane rezultate, moguće je dobiti analizom pseudospektra.

Treba pomenuti da, osim navedenih, analiza pseudospektra se primenjuje u raznim oblastima primenjene matematike. Tako, npr. primene pseudospektralne analize u okviru numeričke analize su [164]: konvergencija GMRES, CGS i ostalih nesimetričnih matričnih iteracija; dizajn hibridnih iteracija koje izbegavaju ocene karakterističnih korena; konvergencija uzlaznih (engl. *upwind*) u odnosu na silazne (engl. *downwind*) Gaus-Zajdelovih i SOR koraka; analiza algoritama za računanje grešaka karakterističnih korena i polinomnih pretraživača nula; pseudospektar Toplicovih matrica; gustina običnih diferencijalnih jednačina; Krajsova matrična teorema i generalizacije; Laksova stabilnost metoda linija; stabilnost spektralnih metoda. Aktuelne ili potencijalne primene pseudospektra u drugim oblastima, koje uključuju operatore umesto matrica su: prosti diferencijalni operatori, problemi konvekcije i difuzije, Fadl-Papkovič operator, Viner-Hofovi integralni operatori, Or-Somerfeld operatori, Alvenovi talasi u magnetohidrodinamici.

U praktičnim primenama pokazalo se da je proučavanje pseudospektra posebno korisno u sledećim slučajevima:

- **Analiza stabilnosti**. Stabilnost je sposobnost sistema da odoli ma kakvim nepotrebnim malim uticajima. Da bi se testirala stabilnost jednačina ravnoteže diferencijalnih i diferencnih jednačina, dovoljno je lokalizovati karakteristične korene u levu poluravan kompleksne ravni ili u jedinični krug. U ovom postupku Geršgorinova teorema igra posebno značajnu ulogu u dizajnu i analizi decentralizovanih kontrolera za multivarijabilne sisteme podrške [143].

- **Robusnost** sistema je karakteristika sistema koja označava da je njegova stabilnost nepromenjena poremećajima, u meri u kojoj je to moguće. Ovi poremećaji predstavljaju nekoliko tipova modelovanja nesigurnosti. Npr. u sistemima sa kašnjenjem (engl. *time-delay systems*), kašnjenja se tretiraju kao dodatne perturbacije ulaznog sistema bez kašnjenja [139].

- **Kontrolabilnost** sistema je fundamentalni strukturalni atribut bilo kog kontrolnog sistema, koji se bavi odnosom između ulaznog stanja i stanja sistema. Posebno, bavi se pitanjem da li uvek postoji kontrola koja može prebaciti početno stanje sistema u ma koje željeno stanje u konačnom vremenu [139].

- **Izbor parametara za numeričke metode**. Za simetrične solvere karakterističnih korena bazirane na metodi bisekcije, Geršgorinove granice daju gornje i donje granice spektra za startnu iteraciju, i za velike linearne solvere karakterističnih korena bazirane na metodi Krilovljevih potprostora, Geršgorinova teorema se ponekad koristi za izbor pomeraja (engl. *shifts*) za spektralne transformacije [119]. Grubo poznavanje lokacije karakterističnih korena je takođe veoma važno za metode koje generalizuju linearne solvere karakterističnih korena na nelinearne probleme [84], i za uspostavljanje nelinearnih solvera karakterističnih korena baziranih na Njutnovoj metodi [97]. Za nelinearne solvere karakterističnih korena bazirane na konturnim integralima, [5, 17], važno je imati glavnu informaciju o lokaciji karakterističnih korena da bi se izabrala kontura koja nije blizu nijednog karakterističnog korena.

- **Greška zaokruživanja u numeričkim metodama**. U ovoj oblasti, lokalizacioni rezultati služe da ograniče greške u računanju karakterističnih korena, bilo zahvaljujući zaokruživanju, završetku iterativnih metoda ili grešci nasleđenoj iz elemenata sa neizvesnošću [16]. Lokalizacioni rezultati mogu biti jednako korisni u nelinearnoj postavci za analizu greške u aproksimaciji NLEPa linearnim.

Istorijski posmatrano, pseudospektralna analiza vuče korene od tridesetih godina XX veka i radova von Nojmana, koji su se bavili proučavanjem nenormalnih operatora. Halmoševa knjiga "Knjiga problema Hilbertovog prostora" [66] sadrži veliki broj primera koji ilustruju neobično ponašanje spektra nenormalnih operatora. Pored nje, nekoliko monografija takođe se bavilo ovom temom (npr. [47, 62]). Uvođenje rezolvente u proučavanje nenormalnih operatora i lep pregled teorije matrica i operatora tretiranih tehnikom rezolvente daje Kato u knjizi "Teorija perturbacija za linearne operatore" [86]. Sledeći pomak daje Krajs, koji je, proučavajući metode konačnih razlika za parcijalne diferencijalne jednačine, opisao zamke analize karakterističnih korena i upotrebe rezolvente kao alternative [96]. Prema [165], istorija pseudospektra datira od rada Landaua [105], koji je uveo termin ε-spektra, dok su prvi pseudospektralni portret dali Kostin i Razakov u radu [94]. Ovi autori su bili članovi grupe koju je vodio Godunov u Novosibirsku (pored njih ovoj grupi su pripadali Bulgakov, Kiriljuk, i Mališev), koja je pokrenula razne ideje u pravcu razvoja ideje pseudospektra. Razvojem kompjutera, prvu kompjuterski generisanu sliku pseudospektra dao je Demel 1987. godine u radu [42]. U međuvremenu, Šatelen, Hajnrihsen, Pritčard, Varah (koji je 1967. godine uveo pseudospektar preko minimalne singularne vrednosti) i Vilkinson su razvijali ideje pseudospektra. Kao značajnu treba pomenuti i 1972. godinu, kada su fizičari uveli pojam kvazimodova (engl. quasimodes) (koji odgovaraju pseudomodovima i pseudovektorima) [164]. Međutim, pseudospektralna analiza postaje opšte popularna tek 1990-tih, zahvaljujući Niku Trefetenu, koji je svojim radovima inicirao veliko interesovanje za ovu oblast. On je uveo koncept pseudospektra da objasni ponašanje nenormalnih matrica i operatora [163, 164, 165]. Taj koncept koristićemo u ovoj disertaciji za konstrukciju i analizu lokalizacionih skupova za pseudospektar matrica, tj. matričnih polinoma.

Podsetimo se da je matrica A normalna ako važi uslov $AA^H = A^H A$, gde je A^H konjugovani transponat. Ekvivalentno tome, A je normalna ako ima kompletan skup ortogonalnih karakterističnih vektora. Nasuprot tome, karakteristični vektori nenormalne matrice, iako mogu formirati kompletan skup karakterističnih vektora, nisu ortogonalni, odakle sledi da je uslovni broj bilo koje matrice karakterističnih vektora veći od 1 i može biti veoma veoma velik [165]. Poteškoće koje se mogu pojaviti u radu sa nenormalnim matricama i operatorima proizilaze iz potrebe za računanjem Žordanove kanoničke forme koja se koristi umesto dijagonalizacije, u slučajevima kada posmatrana matrica nema kompletan skup karakterističnih vektora. Kao što je poznato, karakteristični koreni se koriste za fizičko predviđanje ponašanja sistema oslanjajući se na implicitnu transformaciju koordinata karakterističnih vektora. U slučaju normalnih matrica ova transformacija je unitarna (rotacija ili refleksija), dok u slučaju matrica koje su daleko od normalnih, promena koordinata karakterističnih vektora može dovesti do ekstremne iskrivljenosti prostora stanja. U novim koordinatama fizika sistema može postati jako komplikovana. Tipičan primer je superpozicija komponenti velike karakteristične funkcije koje se skoro poništavaju, gde evolucija u vremenskim intervalima od naučnog interesa može biti određena razvojem obrasca poništavanja, pre nego porastom ili opadanjem individualnih karakterističnih funkcija [165].

Iz prethodno navedenog može se zaključiti da analiza karakterističnih korena i karakterističnih vektora nije uvek savršen alat za analizu nenormalnih matrica (i operatora). Razloga je nekoliko: u fizičkom smislu nisu uvek ono što se može prvo opaziti u jako nenormalnim sistemima; matematički razlog je nepotpuna efikasnost spektralne analize za izdvajanje suštinski bitnog u svim problemima proizašlim iz primena; sledeći važan razlog je razumevanje ponašanja sistema, jer je spektralna analiza pravljena inicijalno za ispitivanje normalnih matrica (sistema), a po analogiji prihvaćena u nenormalnom slučaju. Najkoncizniji i najslikovitiji opis problema dao je Nik Trefeten u [164]: ,,za nenormalne sisteme analiza karakterističnih korena može biti i u nenormalnom slučaju manje-više korisna, kao turpija za nokte u slučaju kad nema šrafcigera, ali retko daje egzaktna rešenja".

Pa, iako su lokalizacioni skupovi za pseudospektar komplikovaniji od onih za spektar, oni su značajni jer omogućuju aproksimativne odgovore na pomenute probleme. Osim toga, oni omogućuju geometrijsku interpretaciju svojstva nenormalnosti i daju odgovore na pitanja osetljivosti karakterističnih korena na perturbacije [164].

U situacijama kada želimo imati grubu predstavu o poziciji karakterističnih korena matrice u kompleksnoj ravni, direktno istražujući neko znanje o elementima matrice A, možemo se pozvati na dobro poznat prost lokalizacioni rezultat $|\lambda_i| \leq ||A||$ koji koristi bilo koju matričnu normu, za koju je λ_i

odgovarajući karakteristični koren [137]. Precizniji lokalizacioni rezultat dat je Geršgorinovom teoremom. Kako rezultat takođe važi i za transponovanu matricu, važi i verzija teoreme bazirana na sumama kolona. Ovi rezultati (u slučajevima SEP) su posebno korisni za matrice koje su skoro dijagonalne, što se često javlja kada se koristi algoritam za dijagonalizaciju matrice i proces je blizu konvergencije [137].

U ovom poglavlju konstruisaćemo lokalizacione skupove za pseudospektar NLEPova, posebno PEPova, oslanjajući se, kao i u prethodnom poglavlju (u procesu konstrukcije lokalizacionih skupova za spektar matričnih funkcija) na Geršgorinovu teoremu i njene generalizacije. Budući da će ovi pseudospektralni lokalizacioni skupovi zavisiti od zadatog malog pozitivnog broja ε (koji utiče na perturbacije) nazivaćemo ih **ε-pseudospektralni lokalizacioni skupovi**. Pored analize i konstrukcije ovih skupova u Euklidskoj normi, koja predstavlja standard za proračune ove vrste, u ovom poglavlju je data analiza i konstrukcija ovih skupova u normi beskonačno. Poznati rezultati za SEP [34, 92] su generalizovani na PEP, što predstavlja originalan rezultat. Kako se tehnika konstrukcije ovih skupova razlikuje u zavisnosti od norme, posebno su razmatrani skupovi konstruisani u Euklidskoj normi, a posebno oni konstruisani u normi beskonačno. Na kraju poglavlja dato je nekoliko primera koji su proizašli iz praktičnih primena.

3.1 Pseudospektar SEP

Pseudospektar matrice predstavlja skup tačaka u kompleksnoj ravni u koje se mogu izmestiti karakteristični koreni matrice pri perturbacijama datog reda, tačnije, opisuje ponašanje karakterističnih korena pri perturbacijama. U mnogim primenama posebno se ispituje osetljivost sistema na sve moguće perturbacije. Takođe, mnogi problemi mogu imati inherentnu strukturu koja se mora uzeti u obzir prilikom analize. Specifičnu klasu primera predstavljaju retke matrice, koje se javljaju u raznim problemima strukturalne analize, simulacijama digitalnog kola, analizi konačnih elemenata ili u diskretizaciji konačnim razlikama skoro svakog sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina. Retkost se često definiše strukturom osnovnog problema i stoga su od interesa u analizi osetljivosti ili robusnosti sistema samo perturbacije sa istom strukturom retkosti.

U proučavanjima vezanim za pseudospektar, glavno pitanje koje se postavlja je kako se karakteristični koreni i karakteristični vektori menjaju kada originalna matrica pretrpi male perturbacije. Ova informacija je važna kako zbog teorijske, tako i zbog praktične primene. U svrhu daljih razmatranja uvedimo najpre definiciju pseudospektra. U dostupnoj literaturi postoji nekoliko definicija pseudospektra i sve su vezane za ocenu norme i proizvoljan mali pozitivan broj ε. Ovde ih navodimo kao u knjizi [168]:

Definicija 3.1. *Neka je data matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i proizvoljan $\varepsilon > 0$. **ε-pseudospektar matrice A** je skup kompleksnih brojeva $z \in \mathbb{C}$ tako da važi:*

$$||(zI - A)^{-1}||^{-1} \leq \varepsilon. \tag{73}$$

Broj ε naveden je u naslovu da označi da se promenom ove vrednosti menjaju granice lokalizacionog skupa. Po konvenciji je $||(zI - A)^{-1}||^{-1} := 0$ za sve karakteristične korene $z \in \Lambda(A)$, odakle je jasno da je spektar sadržan u ε-pseudospektru, za svaki mali nenegativan broj ε. Drugim rečima, prethodna definicija određuje ε-pseudospektar kao zatvoren podskup kompleksne ravni za koji je norma rezolvente ograničena krivom ε^{-1}.

ε-pseudospektar se može posmatrati i kao skup kompleksnih brojeva koji su karakteristični koreni matrice $A+E$ za neku perturbaciju $E \in \mathbb{C}^{n,n}$ veličine ε, gde je $\varepsilon \geq 0$ mali proizvoljan broj:

Definicija 3.2. *ε-pseudospektar matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je skup kompleksnih brojeva $z \in \mathbb{C}$ tako da važi:*

$$z \in \Lambda(A + E), \tag{74}$$

za neku matricu $E \in \mathbb{C}^{n,n}$, za koju je $||E|| \leq \varepsilon$.

U istoj knjizi ([168]) data je i definicija ε-pseudospektra matrice A u odnosu na jedinični vektor v, koji predstavlja odgovarajući pseudokarakteristični vektor za odgovarajući pseudokarakteristični koren z.

Definicija 3.3. *ε-pseudospektar matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je skup svih $z \in \mathbb{C}$ takav da važi:*

$$||(zI - A)v|| \leq \varepsilon \tag{75}$$

za neki $v \in \mathbb{C}^n$, čija je norma $||v|| = 1$.

Ekvivalencija navedenih definicija pseudospektra data je narednom teoremom:

Teorema 3.1. *[168] Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, prethodne tri definicije ε-pseudospektra su ekvivalentne.*

Dokaz. Ako je $z \in \Lambda(A)$, ekvivalencija je trivijalna, pa pretpostavimo da $z \notin \Lambda(A)$, odakle sledi da postoji $(zI - A)^{-1}$. Da bismo dokazali da iz uslova (74) sledi uslov (75), pretpostavimo da je $(A + E)v = zv$ za neko $E \in \mathbb{C}^{n,n}$, čija je norma $||E|| < \varepsilon$ i neki različit od nule vektor $v \in \mathbb{C}^n$, koji se može normalizovati tako da je $||v|| = 1$. Tada je $||(zI - A)v|| = ||Ev|| < \varepsilon$, što je i trebalo pokazati. Da bismo dokazali da iz uslova (75) sledi uslov (73), pretpostavimo da važi $(zI - A)v = su$, za neke vektore $u, v \in \mathbb{C}^n$, čija je norma $||u|| = ||v|| = 1$ i $|s| < \varepsilon$. Tada je $(zI - A)^{-1}u = s^{-1}v$, pa je $||(zI - A)^{-1}|| \geq s^{-1} > \varepsilon^{-1}$. Konačno, da bismo dokazali da (73) povlači (74), pretpostavimo da važi $||(zI - A)^{-1}|| > \varepsilon^{-1}$. Tada je $(zI - A)^{-1}u = s^{-1}v$ i, kao posledica toga, $zv - Av = su$, za neke $u, v \in \mathbb{C}^n$, čija je norma $||u|| = ||v|| = 1$ i $|s| < \varepsilon$. Da bi nejednakost (74) bila ispunjena, dovoljno je pokazati da postoji matrica $E \in \mathbb{C}^{n,n}$, za koju je $||E|| = |s|$, i $EV = su$, jer će tada v biti karakteristični vektor matrice $A + E$, koji odgovara karakterističnom korenu z. U suštini, E može biti matrica jediničnog ranga, oblika $E = suw^*$, za neki vektor $w \in \mathbb{C}^n$, za koji je $w^*v = 1$. Ako je posmatrana norma Euklidska, ovo je očigledno za $w = v$. U ostalim slučajevima (kada je $||.||$ proizvoljna norma), postojanje vektora w koji ispunjava zadate uslove se može interpretirati kao postojanje linearnog funkcionala L na $\mathbb{C}^n$, za koji je $||Lv|| = 1$ i $||L|| = 1$, čiju egzistenciju obezbeđuje Han-Banahova teorema. $\square$

Kako se veličina matrice perturbacija E obično meri njenom Euklidskom normom, koja se može definisati kao najveća singularna vrednost od E, pseudokarakteristični koren z matrice A se karakteriše činjenicom da minimalna singularna vrednost od $zI - A$ nije veća od ε, za proizvoljno mali pozitivan broj ε. U knjizi [168] data je i definicija koja važi samo za ε-pseudospektar računat u Euklidskoj normi. Ovde je navodimo tako da važi u opštem slučaju:

Definicija 3.4. *Za proizvoljan $\varepsilon \geq 0$ i datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, ε-pseudospektar matrice A je skup*

$$\Lambda_\varepsilon(A) := \{z \in \mathbb{C} : \sigma_{min}(zI - A) \leq \varepsilon\}. \tag{76}$$

Ova karakterizacija dozvoljava računanje ε-pseudospektra matrice A kao skupa svih kompleksnih brojeva z za koje funkcija $f(z) := \sigma_{min}(zI - A)$ ima vrednost manju od zadate na mreži u kompleksnoj ravni, ili računanje granica ovih skupova metodama kontinuacije [166, 181]. S druge strane, ako ε-pseudospektar matrice A konačne dimenzije posmatramo kao prirodnu ekstenziju spektra, može se postaviti pitanje veličine norme rezolvente. U opštem slučaju važi:

$$||(zI - A)^{-1}||^{-1} \geq dist(z, \Lambda(A)),$$

gde je $dist(z, \Lambda(A))$ rastojanje od proizvoljnog kompleksnog broja z do spektra, dok u nirmalnom slučaju tj. za $AA^H = A^H A$ važi jednakost. Tada se može reći da je ε-pseudospektar matrice A unija otvorenih ε-kugli oko tačaka spektra, dok u nenormalnom slučaju to ne važi. Kao što je poznato, Euklidska norma rezolvente jednaka je najvećoj singularnoj vrednosti, tj. inverzu najmanje singularne vrednosti matrice $zI - A$. Stoga je u normalnom slučaju površ $||(zI - A)^{-1}||^{-1}$ potpuno određena svojim karakterističnim korenima, dok u nenormalnom slučaju gornja nejednakost predstavlja samo donju granicu, pa se o obliku površi ne može zaključiti na osnovu karakterističnih korena [166].

Kao u prethodnom poglavlju, u nastavku najpre predstavljamo poznate rezultate navedene u radu [92], za standardni slučaj, koji čine teorijsku podlogu za računanje ε-pseudospektra za SEP. Nadalje ćemo, u skladu sa oznakama navedenim u prvom poglavlju, u standardnom slučaju (SEP), za zadatu matricu A, ε-pseudospektar ovog problema označavati sa $\Lambda_\varepsilon(P_1)$, budući da je SEP definisan matričnom funkcijom $P_1(z) = zI - A$, koja zavisi od matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ideja je da, zatim, generalizujemo ove rezultate na PEP.

Kako su prema Teoremi 3.1 sve definicije ε-pseudospektra ekvivalentne, one će predstavljati podlogu za dalji rad.

Tako je prva definicija (73) korišćena kao podloga za rezultat, naveden u radu [34], za standardni slučaj, dat u obliku naredne leme i nazvan **princip lokalizacije**:

Lema 3.1. *Za datu funkciju $\mu : \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{R}$, takvu da za proizvoljnu matricu A važi :*

$$||A^{-1}||_\infty^{-1} \geq \mu(A) \tag{77}$$

je
$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Theta_\varepsilon^\mu(A) := \{z \in \mathbb{C} : \mu(A - zI) \leq \varepsilon\}. \tag{78}$$

U prethodnoj notaciji, lako se vidi da je uslov (78) ekvivalentan sa $\Lambda_\varepsilon(P_1) \subseteq \Theta_\varepsilon^\mu(P_1) := \{z \in \mathbb{C} : \mu(P_1(z)) \leq \varepsilon\}$. Ova lema ukazuje na to da se za različite granice μ mogu dobiti različite lokalizacione oblasti za ε-pseudospektar posmatrane funkcije. Stoga ćemo u nastavku navesti nekoliko različitih granica μ, uz napomenu da će norma u kojoj se računaju lokalizacioni skupovi za ε-pseudospektar biti naglašena, jer se iz oznake $\Lambda_\varepsilon(P_1)$ to ne može zaključiti. Na osnovu oznake P_1 može se, međutim, zaključiti za koju vrstu PEP se konstruiše ε-pseudospektralni lokalizacioni skup: $\Lambda_\varepsilon(P_1)$ je ε-pseudospektralni lokalizacioni skup za SEP (gde je $P_1(z) = zI - A$), odnosno GEP (za koji je $P_1(z) = zB - A$), $\Lambda_\varepsilon(P_2)$ je ε-pseudospektralni lokalizacioni skup za QEP, za funkciju $P_2(z) = z^2C + zB + A$, itd. Ukoliko je potrebno naglasiti broj tačaka nad kojima algoritam konstruiše lokalizacione skupove za ε-pseudospektar matrične funkcije P nadalje ćemo koristiti oznaku $\Theta_\varepsilon^\mu(P_m)$ za ove skupove. Budući da se u dostupnoj literaturi granice na osnovu kojih se vrši lokalizacija ε-pseudospektra računaju uglavnom u Euklidskoj normi, kao i da se pomenute granice razlikuju i u zavisnosti od norme u kojoj se posmatraju, posebno će biti diskutovane granice u normi beskonačno, u kom slučaju će oznaka ε-pseudospektra za takve granice μ biti $\Theta_\varepsilon^\mu(P)$, odnosno $\Theta_\varepsilon^\mu(P_m)$ ukoliko je potrebno naglasiti stepen m polinomne funkcije koja određuje posmatrani problem, a posebno one u Euklidskoj normi, u kom slučaju će oznaka ε-pseudospektra za takve granice ν biti $\Theta_\varepsilon^\nu(P)$, odnosno $\Theta_\varepsilon^\nu(P_m)$, ukoliko je potrebno naglasiti stepen m polinomne funkcije koja određuje posmatrani problem. I ovde, ukoliko je potrebno naglasiti broj tačaka nad kojima algoritam konstruiše lokalizacione skupove za ε-pseudospektar matrične funkcije P nadalje ćemo koristiti oznaku $\Theta_\varepsilon^\nu(P_1)$ za ove skupove, gde t označava broj tačaka mreže kompleksnih brojeva nad kojima algoritam konstruiše lokalizacione skupove za ε-pseudospektar matrične funkcije P_1 za SEP i GEP, odnosno $\Theta_\varepsilon^\nu(P_m)$ za PEP, gde je m stepen matričnog polinoma P.

Sledeći ideju lokalizacije ε-pseudospektra za SEP, navedenu u radu [92], najpre ćemo predstaviti granice za lokalizaciju ε-pseudospektra matrice A (koja određuje posmatrani SEP) u normi beskonačno, a zatim i granice za lokalizaciju ε-pseudospektra matrice A u Euklidskoj normi. U tom pravcu, prva granica, čija konstrukcija se oslanja na osobine klase SDD matrica, data je sledećom Lemom, navedenom i dokazanom u istom radu ([92]):

Lema 3.2. *Za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ važi:*
$$||A^{-1}||_\infty^{-1} \geq \mu_1(A) := \min_{i \in N}(|a_{ii}| - r_i(A)) \tag{79}$$

Prethodna Lema predstavlja teorijsku podlogu za narednu teoremu, koja je veoma važna jer tvrdi da lokalizacioni skup $\Theta_\varepsilon^\mu(P_1)$ sadrži sve pseudokarakteristične korene matrične funkcije $P_1(z) = zI - A$ koja definiše SEP. Ova Teorema je takođe navedena u radu [92] za standardni slučaj. Navedimo je ovde u odnosu na prethodne oznake, korišćene u ovoj disertaciji:

Teorema 3.2. *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i funkciju $P_1(z) = zI - A$ koja određuje SEP važi:*

$$\Lambda_\varepsilon(P_1) \subseteq \Theta_\varepsilon^{\mu_1}(P_1) := \bigcup_{i\in N} \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leq r_i(A) + \varepsilon\}. \tag{80}$$

Očigledno je da za $\varepsilon = 0$, ε-pseudospektar se poklapa sa spektrom funkcije P_1, a skup $\Theta_\varepsilon^{\mu_1}(P_1)$ se poklapa sa lokalizacionim skupom Geršgorinovog tipa za SEP, $\Theta^{\mathbb{S}}(P_1)$.

Kako je generalizacija uslova dijagonalne dominacije dala klasu matrica kod kojih su sve vrste, osim, eventualno, jedne, strogo dijagonalno dominantne (klasu matrica $\mathbb{S}_d$), naredna granica za ocenu norme beskonačnosti inverza matrice A je povezana sa ovom klasom.

Lema 3.3. *Za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ važi*

$$||A^{-1}||_\infty^{-1} \geq \mu_2(A) := \min_{i\neq j: |a_{ii}|+r_j(A)\neq 0} \frac{|a_{ii}||a_{jj}| - r_i(A)r_j(A)}{|a_{ii}| + r_j(A)}, \tag{81}$$

gde je u trivijalnom slučaju $A = 0$, granica $\mu_2(A) = 0$.

Lema 3.3 daje ocenu inverza norme beskonačno inverza matrice A i predstavlja podlogu za narednu lokalizacionu teoremu, takođe navedenu u radu [92]. Ova teorema daje lokalizaciju ε-pseudospektra matrice A, tj. lokalizaciju ε-pseudospektra SEP oslanjajući se na poznatu ocenu norme koja odgovara klasi $\mathbb{S}_d$ matrica. Ovde je navodimo u odnosu na prethodne oznake:

Teorema 3.3. *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, i funkciju $P_1(z) = zI - A$ koja određuje posmatrani SEP, skup*

$$\Theta_\varepsilon^{\mu_2}(P_1) := \bigcup_{i\neq j} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}|(|z - a_{jj}| - \varepsilon) \leq r_j(A)(r_i(A) + \varepsilon)\} \tag{82}$$

lokalizuje ε-pseudospektar matrične funkcije P_1 koja određuje SEP, tj. važi $\Lambda_\varepsilon(P_1) \subseteq \Theta_\varepsilon^{\mu_2}(P_1)$.

I u ovom slučaju za $\varepsilon = 0$, ε-pseudospektar se poklapa sa spektrom, a skup $\Theta_\varepsilon^{\mu_2}(P_1)$ postaje originalni skup $\Theta^{\mathbb{S}_d}(P_1)$.

Još jedan interesantan rezultat za ocenu norme beskonačnosti inverza matrice A dat je u istom radu ([92]). Ovaj rezultat povezan je sa osobinama klase S-SDD matrica. Dokaz ja analogan sa prethodna dva. Prateći prethodne oznake i formulacije odgovarajuće Leme i Teoreme iz rada [92] za ovu granicu, uvedimo sledeće oznake: neka je

$$T := \{(i,j) \in S \times \bar{S} : |a_{ii}| > r_i^S(A) \wedge |a_{jj}| > r_i^{\bar{S}}(A)\},$$

i, za $(i,j) \in T$, definišimo:

$$\alpha_{i,j}^S(A) := \frac{(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) - r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A)}{\max\{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^{\bar{S}}(A), |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i^{\bar{S}}(A)\}}.$$

Važi sledeća Lema:

Lema 3.4. *Za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i proizvoljan skup indeksa $S \subseteq N$, važi nejednakost:*

$$||A^{-1}||_\infty^{-1} \geq \mu_3(A) := \min\{\min_{i\in S}(|a_{ii}| - r_i^S(A)), \min_{j\in\bar{S}(A)}(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)), \min_{(i,j)\in T} \alpha_{ij}^S(A)\} \quad (83)$$

Kao i ranije, naredni lokalizacioni rezultat sledi direktno iz uslova (83) i Leme 1. Ovde ćemo takođe navesti ovu teoremu u odnosu na prethodno navedene oznake u ovoj disertaciji:

Teorema 3.4. *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, funkciju $P_1(z) = zI_A \in \mathcal{N}_n(\Omega)$ koja određuje SEP i proizvoljan skup indeksa S, ε-pseudospektar SEP je lokalizovan skupom $\Theta_\varepsilon^{\mu_3}(P_1)$, tj.*

$$\Lambda_\varepsilon(P_1) \subseteq \Theta_\varepsilon^{\mu_3}(P_1) := \Gamma_\varepsilon^S(P_1) \cup \Gamma_\varepsilon^{\bar{S}}(P_1) \cup V_\varepsilon^S(P_1) \cup V_\varepsilon^{\bar{S}}(P_1), \quad (84)$$

gde su

$$\Gamma_\varepsilon^S(P_1) := \bigcup_{i\in S}\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i^S(A) + \varepsilon\},$$

$$\Gamma_\varepsilon^{\bar{S}}(P_1) := \bigcup_{j\in\bar{S}}\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq r_j^{\bar{S}}(A) + \varepsilon\},$$

$$V_\varepsilon^S(P_1) := \bigcup_{i\in S, j\in\bar{S}} \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{ii}| - r_i^S(A) - \varepsilon)(|z - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \leq r_i^{\bar{S}}(A)(r_j^S(A) + \varepsilon)\},$$

$$V_\varepsilon^{\bar{S}}(P_1) := \bigcup_{i\in S, j\in\bar{S}} \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{ii}| - r_i^S(A))(|z - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) - \varepsilon) \leq (r_i^{\bar{S}}(A) + \varepsilon) r_j^S(A)\}.$$

Iako se ε-pseudospektar matrica može računati u bilo kojoj normi, u literaturi je najčešće u upotrebi Euklidska norma. Stoga u nastavku dajemo leme i odgovarajuće teoreme koje daju ocene donjih granica za lokalizaciju ε-pseudospektra u Euklidskoj normi za SEP, date u radu [92]. Za razliku od ocena za normu beskonačno, definisanih u odnosu na poznate klase matrica SDD-tipa, u slučaju granica za ocenu Euklidske norme ne možemo govoriti o povezanosti u smislu inkluzija u odnosu na poznate klase matrica SDD-tipa.

Opšta ideja za formulaciju donje granice za ocenu inverza norme inverza u Euklidskoj normi se zasniva na poznatom rezultatu da za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$:

$$||A||_2 \leq \sqrt{||A||_\infty ||A||_1} = \sqrt{||A||_\infty ||A^T||_\infty} \leq \max\{||A||_\infty, ||A^T||_\infty\}.$$

Polazeći od ovog rezultata, za ocenu inverza norme inverza u Euklidskoj normi konstruisana je sledeća Lema, koju ovde navodimo kao u radu [92]:

Lema 3.5. *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i $k \in \{1, 2, 3\}$ važi nejednakost:*

$$||A^{-1}||_2^{-1} \geq \sqrt{\mu_k(A)\nu_k(A^T)} \geq \min\{\mu_k(A), \nu_k(A^T)\} \tag{85}$$

Osim navedenih, drugačije granice $\nu_k(A)$ za ocenu inverza Euklidske norme inverza u standardnom slučaju (za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$) date su u radu [34]:

$$\nu_1(A) := \min_{i \in N}(|a_{ii}| - s_i(A)),$$

$$\nu_2(A) := \min_{i \in N}(\sqrt{|a_{ii}|^2 + \frac{1}{4}(r_i(A) - c_i(A))^2} - s_i(A)),$$

$$\nu_3(A) := \min_{i,j \in N, i \neq j}(\frac{1}{2}(|a_{ii}| + |a_{jj}|) - \sqrt{\frac{1}{4}(|a_{ii}| - |a_{jj}|)^2 + s_i(A)s_j(A)}),$$

gde je $s_i(A) := \frac{r_i(A)+c_i(A)}{2}$, za $i \in N$.

Na osnovu lokalizacionog principa, tj. Leme 3.1 i Leme 3.5 navedene granice za ocenu norme inverza matrice A proizvode lokalizacione skupove za lokalizaciju ε-pseudospektra SEP u Euklidskoj normi [34] $\Theta_\varepsilon^{\nu_k}(P_1) := \{z \in \mathbb{C} : \nu_k(P_1(z)) > 0\}$, za $k = 1, 2, 3$. U odnosu na navedene rezultate, u do sada dostupnoj literaturi, navedene granice ocene inverza (Euklidske i beskonačne) norme inverza nisu generalizovane na slučajeve matričnih polinoma stepena većeg ili jednakog od dva.

3.2 Pseudospektar PEP

Zaključak koji se nametnuo tokom ovih proučavanja PEP je da pseudospektar obezbeđuje moćan okvir za numeričku analizu naučnih problema koji suštinski zavise od rešenja problema karakterističnih korena (vidi [168]). Otud i ekspanzija proučavanja na temu lokalizacije ε-pseudospektra, uključujući teoriju i primene (vidi [1, 2, 3, 49, 168]). ε-pseudospektar matričnih polinoma je proučavan pokrivajući teorijske i praktične aspekte u radovima [18, 23, 52, 71, 102, 106, 107, 131, 161, 168, 171, 172]. Pa ipak, teorijski okvir za analizu ε-pseudospektra matričnih polinoma nije razvijen u meri u kojoj je razvijen teorijski okvir za standardni slučaj. U poslednjih par decenija nekoliko neekvivalentnih definicija ε-pseudospektra GEP je bilo predloženo [23, 52, 71, 131, 161, 168, 171, 172], što ukazuje da postoji nekoliko načina na koji se može definisati ε-pseudospektar matričnih polinoma. Odatle se nameće pitanje: da li je moguće razviti teorijski okvir za ε-pseudospektar matričnih polinoma na isti način kao za matricu A? Kako formulisati granice za lokalizaciju ε-pseudospektra matričnih polinoma koji će dati dovoljno dobre lokalizacione rezultate?

Pseudospektar matričnog polinoma čine karakteristični koreni perturbovane ili bučne matrice polinoma [27]. Inspirisani idejama lokalizacije ε-pseudospektra za SEP korišćenih u radu [34], mi ćemo generalizovati ovu tehniku na nelinearne, tačnije polinomne probleme karakterističnih korena, povezujući tako ε-pseudospektar matričnih polinoma sa odgovarajućim lokalizacijama Geršgorinovog tipa, dobijenih upotrebom osobine dijagonalne dominacije. Budući da u dostupnoj literaturi ovakav način lokalizacije ε-pseudospektra PEP nije primenjivan, rezultati predstavljeni u ovoj disertaciji su originalni.

U dostupnoj literaturi, pored proučavanja ε-pseudospektra SEP, dosta pažnje je posvećeno i proučavanju ε-pseudospektra GEP [52, 106, 162, 171]. Analiza raznih svojstava matrica (kao što su stabilnost dinamičkih sistema, robusna stabilnost, ponašanje pri prelasku, nenormalna dinamika, itd.) u praktičnim problemima u nauci i inženjerstvu implicirale su ideju da se istraži i dobije tehnika za lokalizaciju ε-pseudospektra za PEP, na način kao u radu [34].

Ponovimo da je matrični polinom koji određuje posmatrani NLEP reda m oblika $P_m(z) = z^m A_n + z^{m-1}A_{m-1} + ... + A_0$, za date kompleksne kvadratne matrice A_i, gde je $i = 1, 2, ..., m$. Nek su dati nenegativni parametri $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ i njima definisan polinom $q(\omega) := \alpha_0 + \alpha_1\omega + \ldots + \alpha_m\omega^m$. Za dato $\varepsilon \geq 0$, u radu [161] data je definicija ε-pseudospektra matričnog polinoma P_m sa

$$\Lambda_{q,\varepsilon}(z) = \{z \in \mathbb{C} : (P(z) + \Delta P_m(z))\, v = 0, v \neq 0, ||\Delta A_k|| \leq \varepsilon\alpha_k,\, 0 \leq k \leq m\},$$

pri čemu je $\Delta P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \Delta A_k z^k$ a α_k su nenegativni parametri koji dozvoljavaju slobodu merenja perturbacija u apsolutnom (za $\alpha_k \equiv 1$) ili u relativnom smislu (za $\alpha_k = ||A_k||$). Za vrednost $\alpha_k = 0$, $\Delta A_k = 0$, perturbacije su izbegnute [161].

Prema prethodnoj definiciji ε-pseudospektar matričnog polinoma P_m, u oznaci $\Lambda_{q,\varepsilon}(P_m)$, predstavlja skup svih kompleksnih brojeva koji su karakteristični koreni nekog perturbovanog matričnog polinoma $P_m(z) + \Delta P_m(z)$ čije su norme $||\Delta A_k|| \leq \varepsilon\alpha_k$, tj. koji su "$\varepsilon$-blizu" matričnom polinomu P_m. Dakle, ε-pseudospektar matričnog polinoma predstavlja skupove u kompleksnoj ravni u koje se karakteristični koreni matričnog polinoma P_m mogu pomeriti odgovarajućim perturbacijama koeficijenata matričnog polinoma.

U istom radu data je još jedna definicija ε-pseudospektra za matrične polinome P_m, veoma važna za konstrukcije pseudospektralnih lokalizacionih skupova. Ova definicija proizilazi direktno iz Definicije 3.1:

$$\Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) = \{z \in \mathbb{C} : ||P_m(z)^{-1}||^{-1} \leq \varepsilon q(|z|)\}. \tag{86}$$

Neke osobine ovako definisanog ε-pseudospektra matričnih polinoma P_m naveli su (bez dokaza) Hajam i Tiseur u radu [71] (Teorema 2.3, [71]):

Teorema 3.5. *Za svaki matrični polinom P_m, $m \geq 2$, važi:*

- $\Lambda_{\varepsilon_1}(P_m) \subseteq \Lambda_{\varepsilon_2}(P_m)$, *za* $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$,
- $\Lambda_\varepsilon(P_m)$ *je neprazan i zatvoren sa najviše mn povezanih komponenti na Rimanovoj sferi,*
- $\Lambda_\varepsilon(P_m^*) = \Lambda_\varepsilon(P_m)^*$,
- *Ako je matrica $A_m + \Delta A_m$ regularna za svako ΔA_m, za koje je $||\Delta A_m|| < \varepsilon$, tada ∞ nije pseudokarakteristični koren i skup $\Lambda_\varepsilon(P_m)$ je ograničen u kompleksnoj ravni,*
- *Pretpostavimo da je A_m singularna i neka je $\varepsilon^* = \min\{\max_k ||A_k z|| : z \in \mathbb{C}^{n,n}, ||z|| = 1, A_m z = 0\}$. Tada je $\Lambda_\varepsilon(P_m) = \hat{\mathbb{C}}$ za svaki epsilon za koji je $\varepsilon \geq \varepsilon^*$.*

Lokalizacione skupove za ε-pseudospektar funkcije P_m konstruisane na osnovu zadatih granica μ_k za ocenu inverza norme beskonačno i ν_k za ocenu inverza Euklidske norme inverza matričnog polinoma P_m ćemo označiti sa $\Theta^{\mu_k}_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \mathbb{C}_\infty$ i $\Theta^{\nu_k}_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \mathbb{C}_\infty$, respektivno, naglasivši na taj način da oni zavise od vrednosti $\varepsilon \geq 0$ i polinoma q, gore definisanog. Važi:

$$\Lambda(P_m) \subseteq \Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \Theta^{\mu_k}_{q,\varepsilon}(P_m),$$

$$\Lambda(P_m) \subseteq \Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \Theta^{\nu_k}_{q,\varepsilon}(P_m).$$

3.2.1 Lokalizacije pseudospektra PEP u normi beskonačno

Lokalizacije ε-pseudospektra u normi beskonačno nisu mnogo proučavane u literaturi, za razliku od lokalizacija ε-pseudospektra u Euklidskoj normi za SEP i GEP [34, 52, 73, 101, 102, 106, 115, 159, 162, 171]. Razne oblasti i procesi kao što su: transport, mešanje, paljenje, evolucija, ekonomske fluktuacije, elastičnost, mehanika itd., predstavljaju samo neke od sistema sa kašnjenjem, čija je istorija i detaljna primena lepo opisana u [139]. Računanje ε-pseudospektra navedenih i drugih nelinearnih problema karakterističnih korena nije lak zadatak, budući da matrična funkcija koja opisuje odgovarajući NLEP ima polinomni oblik stepena većeg ili jednakog od dva. Ako se postavi pitanje zašto se ovi lokalizacioni skupovi konstruišu u odnosu na normu beskonačno, može se navesti primer ocene robusnosti sistema sa kašnjenjem na ulazna kašnjenja, za koje se ispostavlja da norma beskonačno igra važnu ulogu [139]. Dalje, za analizu robusnosti sistema sa kašnjenjem u odnosu na nestrukturirane neizvesnosti, u radu [139] su dati odgovarajući kriterijumi bazirani na tri koncepta stabilnosti. Takođe, testovi algebarske stabilnosti pokazali su se korisnim u povezivanju sa kontrolnim metodama za sisteme sa kašnjenjem.

Mi ćemo, međutim, u cilju generalizacije tehnike lokalizacije spektra i ε-pseudospektra koja se oslanja na Geršgorinovu teoremu, primeniti tehniku opisanu u prethodnom poglavlju za lokalizaciju spektra linearne matrične funkcije P_1 na lokalizaciju ε-pseudospektra matričnog polinoma P_m u normi beskonačno, kako bismo obezbedili opšti pristup konceptu lokalizacije uopšte. U tom pravcu, najpre je potrebno definisati donje granice za konstrukciju pseudospektralnih lokalizacija za matrične polinome u ovoj normi. Ideja za formulaciju granica potekla je iz rada [92], u kome su ove granice formulisane za slučaj SEP, a ovde će biti uopštena tako da važi za slučaj PEP stepena većeg ili jednakog od dva. Budući da ćemo razmatrati lokalizacije ε-pseudospektra matričnog polinoma P_m, $m \geq 2$, u odnosu na proizvoljne perturbacije zadatog reda u apsolutnom i relativnom smislu, u nastavku dajemo nekoliko donjih granica za ocenu $||P_m(z)^{-1}||^{-1}$ u ovoj normi i njihovu vezu sa klasama SDD-tipa. Imajući u vidu Lemu 3.1 (princip lokalizacije), navedenu na početku ovog poglavlja, Lemu 2.1 iz rada [161] i definiciju matričnog polinoma P_m, $m \geq 2$, za zadatu funkciju $\mu : \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{R}$ takvu da za proizvoljni matrični polinom P_m, $m \geq 2$,

$$||P_m(z)^{-1}||_\infty^{-1} \geq \mu(z), \tag{87}$$

imamo da je:

$$\Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \Theta^{\mu}_{q,\varepsilon}(P_m) := \{z \in \mathbb{C} : \mu(z) \leq \varepsilon q(|z|)\}, \tag{88}$$

za $q(z)$ i α_k definisane u prethodnoj sekciji. Koristeći nejednakost (88), moguće je razmatrati donje granice μ za ocenu $||P_m(z)^{-1}||^{-1}$ u različitim normama i konstruisati odgovarajuće lokalizacije ε-pseudospektra matričnog polinoma P_m, $m \geq 2$.

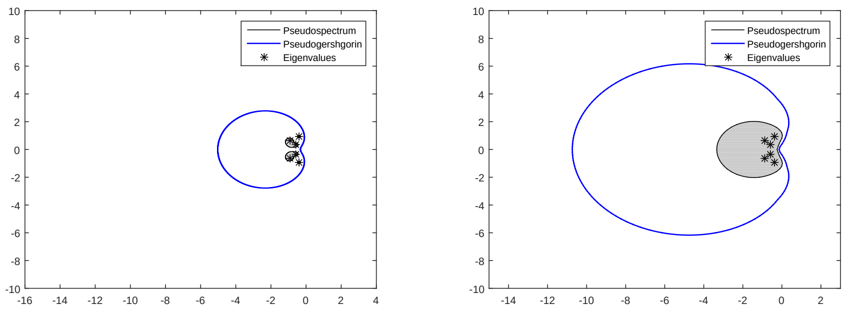
Na taj način dobijamo po ugledu na lokalizacije pseudospektra matrica, sledeće lokalizacije pseudospektra matričnoh polinoma. Prvo, na osnovu funkcije μ_1 povezane sa klasom $\mathbb{S}$ dobijamo ε**-pseudo Geršgorinov skup** (za matrični polinom P_m):

$$\Theta^{\mu_1}_{q,\varepsilon}(P_m) := \bigcup_{i \in N} \Theta^{\mu_1,i}_{q,\varepsilon}(P_m) \tag{89}$$

gde je

$$\Theta^{\mu_1,i}_{q,\varepsilon}(P_m) := \{z \in \mathbb{C} : |p_{ii}(z)| \leq \sum_{j \neq i} |p_{ij}(z)| + \varepsilon q(|z|)\}. \tag{90}$$

Na osnovu lokalizacionog principa, skup $\Theta^{\mu_1}_{q,\varepsilon}(P_m)$ lokalizuje ε-pseudospektar matričnog polinoma P_m, tj., $\Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \Theta^{\mu_1}_{q,\varepsilon}(P_m)$.



(a) apsolutne perturbacije

(b) relativne perturbacije

Slika 22: Skup $\Theta^{\mu_1}_{q,\varepsilon}(P_2)$ za problem iz primera 3.1

Primer 3.1. *Za date matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

i matričnu funkciju $P_2(z) = z^2C + zB + A$, Slika 22 ilustruje skup $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1}(P_2)$ za perturbacije merene u apsolutnom smislu (Slika 22(a)) i relativnom smislu (Slika 22(b)) i $\varepsilon = 0.1$. U odnosu na mali format matrica koje opisuju ovaj problem, posmatrani skup možemo predstaviti analitički

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{3} \Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,i}(P_2),$$

gde su

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,1}(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |3z^2 + 4z + 3| \leq |z + 1| + |2z^2 + z + 1| + \varepsilon(q(|z|))\},$$

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,2}(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |3z^2 + 4z + 2| \leq |z + 1| + 2|z^2| + \varepsilon(q(|z|))\},$$

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,3}(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |3z^2 + 4z + 3| \leq 2|z + 1| + \varepsilon(q(|z|))\}.$$

Pri merenju perturbacija u apsolutnom smislu, ε-pseudospektar se sastoji iz četiri nepovezane komponente koje sadrže sve pseudokarakteristivcne korene (Slika 22(a)), dok pri relativnim perturbacijama ε-pseudospektar funkcije P_2 se sastoji iz jedne komponente koja sadrži sve pseudokarakteristične korene (Slika 22(b)). Kao što je i očekivano, promenom vrednosti ε, menjaće se i oblik ε-pseudospektra (vidi Teoremu 3.5, tačka 1), ali se tada menja i lokalizacioni skup. Povećanjem vrednosti ε, povećava se i lokalizacioni skup i ε-pseudospektar (Teorema 3.5, tačka 1).

Naredna lokalizacija koju ovde dajemo, povezana sa klasom $\mathbb{S}_d$, definisanih uslovom (14). Prema Lemi 3.3 i Teoremi 3.3, za dati matrični polinom $P_m(z) = [p_{ij}(z)] \in \mathbb{C}^{n,n}$, važi:

$$||P_m(z)^{-1}||_\infty^{-1} \geq \mu_2(P_m(z)) = \min \frac{|p_{ii}(z)||p_{jj}(z)| - \sum_{k \neq i} |p_{ik}(z)| \sum_{l \neq j} |p_{jl}(z)|}{|p_{ii}(z)| + \sum_{l \neq j} |p_{jl}(z)|} \quad (91)$$

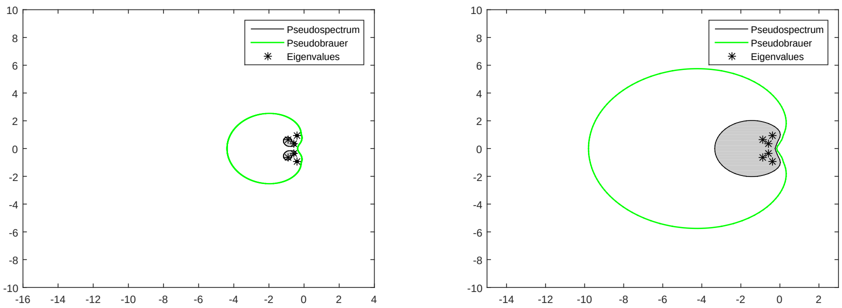
gde se minimum računa po svim $i \neq j$ za koje je $|p_{ii}(z)| + \sum_{l \neq j} |p_{lj}(z)| \neq 0$, i, u trivijalnom slučaju, za $P_m(z) = 0$, $\mu_2(z) = 0$.
Odgovarajući lokalizacioni skup ε-pseudospektra za matrični polinom $P_m(z) = [p_{ij}(z)] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je oblika:

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2}(P_m) := \bigcup_{i \in N} \bigcup_{i \neq j} \Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2,i,j}(z), \quad (92)$$

gde je

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2,i,j}(z) = \{z \in \mathbb{C} : |p_{ii}(z)|(|p_{jj}(z)| - \varepsilon q(|z|)) \leq \sum_{j \neq l} |p_{jl}(z)|(\sum_{k \neq i} |p_{ik}| + \varepsilon q(|z|))\}.$$

Na osnovu lokalizacionog principa, skup $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2}(P_m)$ lokalizuje ε-pseudospektar matričnog polinoma P_m, tj., $\Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2}(P_m)$.



(a) apsolutne perturbacije (b) relativne perturbacije

Slika 23: Skup $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2}(P_2)$ za problem iz primera 3.2

Primer 3.2. *Za date matrice iz primera 3.1, Slika 23 ilustruje skup* $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2}(P_2)$ *za perturbacije merene u apsolutnom smislu (Slika 23(a)) i relativnom smislu (Slika 23(b)) i* $\varepsilon = 0.1$.

Predstavimo posmatrani skup analitički:

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{3} \Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2,i,j}(P_2),$$

gde su

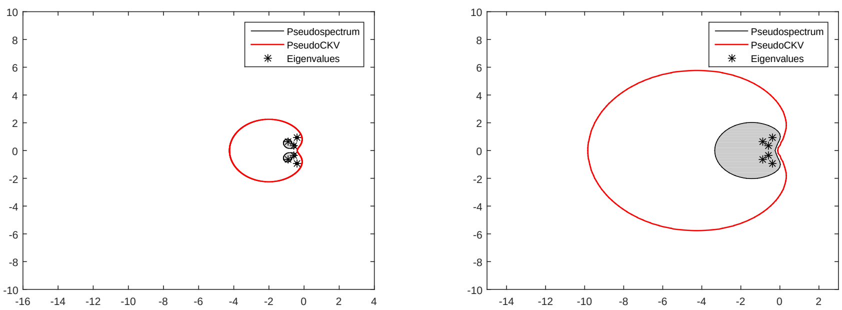
$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2,1,2}(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |3z^2 + 4z + 3| \cdot (|3z^2 + 4z + 2| - \varepsilon q(|z|) \leq$$
$$\leq (|z+1| + |2z^2 + z + 1| + \varepsilon(q(|z|))) \cdot (|z+1| + 2|z^2|)\},$$
$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2,1,3}(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |3z^2 + 4z + 3| \cdot (|3z^2 + 4z + 3| - \varepsilon q(|z|)) \leq$$
$$\leq (|z+1| + |2z^2 + z + 1| + \varepsilon(q(|z|))) \cdot 2|z+1|\},$$
$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2,2,1}(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |3z^2 + 4z + 2| \cdot (|3z^2 + 4z + 3| - \varepsilon q(|z|)) \leq$$
$$\leq (|z+1| + 2|z^2| + \varepsilon(q(|z|))) \cdot (|z+1| + |2z^2 + z + 1|)\},$$

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2,2,3}(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |3z^2+4z+2| \cdot (|3z^2+4z+3| - \varepsilon q(|z|)) \leq$$
$$\leq (|z+1| + 2|z^2| + \varepsilon(q(|z|))) \cdot 2|z+1|\},$$
$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2,3,1}(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |3z^2+4z+3| \cdot (|3z^2+4z+3| - \varepsilon q(|z|)) \leq$$
$$\leq (2|z+1| + \varepsilon(q(|z|))) \cdot (|z+1| + |z^2+z+1|)\},$$
$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_2,3,2}(P_2) := \{z \in \mathbb{C} : |3z^2+4z+3| \cdot (|3z^2+4z+2| - \varepsilon q(|z|)) \leq$$
$$\leq (2|z+1| + \varepsilon(q(|z|))) \cdot (|z+1| + 2|z^2|)\}.$$

Pri merenju perturbacija u apsolutnom smislu, ε-pseudospektar se sastoji iz četiri nepovezane komponente koje sadrže sve pseudokarakteristivcne korene (Slika 23(a)), dok pri relativnim perturbacijama ε-pseudospektar funkcije P_2 se sastoji iz jedne komponente i sadrži sve pseudokarakteristične korene (Slika 23(b)).

Analogno prethodnim razmatranjima i konstrukcijama za SEP, još jedan interesantan rezultat za dobijanje lokalizacija ε-pseudospektra matričnog polinoma P_m, konstruisanih na osnovu teorema Geršgorinovog tipa, se može dobiti korišćenjem osobina klase matrica $\mathbb{S}_\Sigma$. Da bismo pojednostavili notaciju, na isti način kao u radu [34], označimo sa $J(z) := \{(i,j) \in S \times \bar{S} : |p_{ii}(z)| > r_i^S(z) \text{ i } |p_{jj}(z)| > r_j^{\bar{S}}(z)\}$, i, za $(i,j) \in J$, definišemo:

$$\alpha_{ij}^S(z) := \frac{(|p_{ii}(z)| - r_i^S(z))(|p_{jj}(z)| - r_j^{\bar{S}}(z)) - r_i^{\bar{S}}(z) r_j^S(z)}{\max\{|p_{ii}(z)| - r_i^S(z) + r_j^S(z), |p_{jj}(z)| - r_j^{\bar{S}}(z) + r_i^{\bar{S}}(z)\}}.$$



(a) apsolutne perturbacije (b) relativne perturbacije

Slika 24: Skup $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_3}(P_2)$ za problem iz primera 3.3

Uzevši u obzir Lemu 3.4 i Teoremu 3.4, za dati matrični polinom $P_m(z) = [p_{ij}(z)] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i proizvoljan skup indeksa $S \subseteq N$ i $\bar{S} = N \backslash S$

važi:

$$||P_m(z)^{-1}||_\infty^{-1} \geq \mu_3(P_m(z)) := \min\{\min_{i\in S}(|p_{ii}(z)|-r_i^S(z)), \min_{j\in \bar{S}}(|p_{jj}(z)|-r_j^{\bar{S}}(z)), \min_{(i,j)\in J(z)} \alpha_{ij}^S(z)\}. \tag{93}$$

Tada, za dati matrični polinom $P_m(z)$ i proizvoljan skup indeksa $S \subseteq N$, skup $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_3}(P_m)$, lokalizuje ε-pseudospektar matričnog polinoma P_m prema Lemi 3.4 i Teoremi 3.4:

$$\Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_3}(P_m) := \Gamma_{q,\varepsilon}^S(P_m) \cup \Gamma_{q,\varepsilon}^{\bar{S}}(P_m) \cup V_{q,\varepsilon}^S(P_m) \cup V_{q,\varepsilon}^{\bar{S}}(P_m), \tag{94}$$

gde je

$$\Gamma_{q,\varepsilon}^S(P_m) := \bigcup_{i\in S}\{z \in \mathbb{C} : |p_{ii}(z)| \leq r_i^S(z) + \varepsilon q(|z|)\},$$

$$\Gamma_{q,\varepsilon}^{\bar{S}}(P_m) := \bigcup_{j\in \bar{S}}\{z \in \mathbb{C} : |p_{jj}(z)| \leq r_j^{\bar{S}}(z) + \varepsilon q(|z|)\},$$

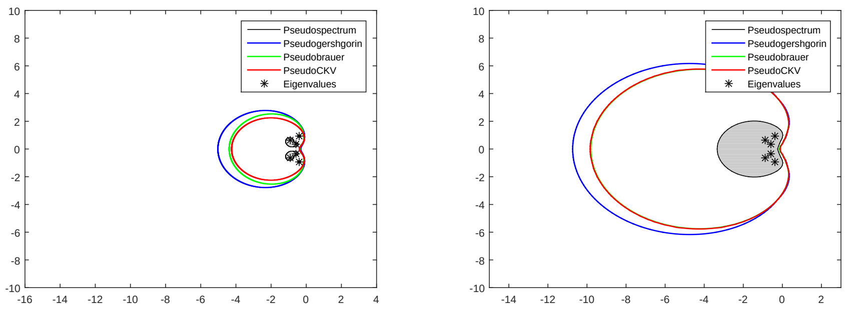
$$V_{q,\varepsilon}^S(P_m) := \bigcup_{i\in S, j\in\bar{S}} \{z \in \mathbb{C} : (|p_{ii}(z)| - r_i^S(z) - \varepsilon q(|z|))(|p_{jj}(z)| - r_j^{\bar{S}}(z))$$

$$\leq r_i^{\bar{S}}(z)(r_j^S(z) + \varepsilon q(|z|))\},$$

$$V_{q,\varepsilon}^{\bar{S}}(P_m) := \bigcup_{i\in S, j\in\bar{S}} \{z \in \mathbb{C} : (|p_{ii}(z)| - r_i^S(z))(|p_{jj}(z)| - r_j^{\bar{S}}(z) - \varepsilon q(|z|))$$

$$\leq (r_i^{\bar{S}}(z) + \varepsilon q(|z|))r_j^S(z)\}.$$

Primer 3.3. *Za date matrice iz primera 3.1, Slika 24 ilustruje skup* $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_3}(P_2)$ *za perturbacije merene u apsolutnom smislu (Slika 24(a)) i relativnom smislu (Slika 24(b)) i* $\varepsilon = 0.1$. *Kako su ovi skupovi znatno komplikovaniji za računanje od skupova* $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_i}(P_2)$, $i = 1, 2$, *ovde ih nećemo navoditi analitički. Na Slici 25 prikazani su svi napred pomenuti lokalizacioni skupovi Geršgorinovog tipa za* ε*-pseudospektar funkcije* P_2 *zadate u primeru 3.1, za perturbacije merene u apsolutnom (Slika 25(a)) i relativnom smislu (Slika 25(b)), za zadati* $\varepsilon = 0.1$.



(a) apsolutne perturbacije (b) relativne perturbacije

Slika 25: skupovi $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_i}(P)$, $i = 1, 2, 3$ za problem iz primera 3.1

3.2.2 Lokalizacija pseudospektra za PEP u Euklidskoj normi

Lokalizacija ε-pseudospektra za SEP i GEP u Euklidskoj normi dosta je proučavana u literaturi. Tačnije, u proučavanjima ε-pseudospektra Euklidska norma je ona koja se po pravilu koristi za ocenu inverza norme inverza i konstrukciju granica za lokalizacione skupove, jer je jednaka najvećoj singularnoj vrednosti, i norma inverza jednaka je inverzu najmanje singularne vrednosti od $zI - A$ [168]. Stoga ćemo se u ovom delu baviti konstrukcijom granica za ocenu inverza Euklidske norme inverza polinomne matrične funkcije P_m koja određuje posmatrani PEP oslanjajući se na radove [34, 92] i prethodnu sekciju. U dostupnoj literaturi nisu definisane granice ovog tipa za lokalizaciju ε-pseudospektra matričnog polinoma P_m, pa dole definisane granice predstavljaju nove rezultate potrebne za konstrukciju lokalizacionih skupova za ε-pseudospektar matričnog polinoma P_m (u Euklidskoj normi).

U radu [161], Euklidska norma inverza matričnog polinoma P_m je data u obliku $||P_m(z)^{-1}||_2^{-1} = \sigma_{min}(P_m(z))$, gde je σ_{min} najmanja singularna vrednost. Koristeći dobro poznatu faktorizaciju $\sigma_{min}(P_m(z)) = \sqrt{\lambda_{min}(P_m(z)^H P_m(z))}$, Tiseur je aproksimirao 2-normu inverza matričnog polinoma P_m i-tom stepenom iteracijom Lancosovom metodom primenjenom na Šurovu formu funkcije $P_m(z)^H P_m(z)$. Na žalost, za polinome stepena $m \geq 2$, ne postoji analogon Šurove forme, pa, stoga, moramo koristiti druge načine za aproksimaciju norme inverza matričnog polinoma P_m.

U radu [34] je pokazano da donje granice za minimalnu singularnu vrednost matrice A mogu biti date ukoliko je uslov $\sigma_{min}(A) \geq \varepsilon(A)$ ispunjen za datu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i zadat $\varepsilon : \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{R}$. Koristeći ovu činjenicu, Lemu 3.3 navedenu na početku ovog poglavlja, Lemu 1.1 iz rada [102] (koja je u stvari specijalan slučaj Leme 2.1 iz rada [161]) dobijamo da je:

$$\sigma_{min}(P_m(z)) \geq \nu_i(P_m(z)), \quad \text{za } \ell = 1, 2, 3, \tag{95}$$

gde su donje granice date sa:

$$\nu_1(P_m(z)) := \min_{i \in N}(|p_{ii}(z)| - s_i(z)),$$

$$\nu_2(P_m(z)) := \min_{i \in N}\Big(\sqrt{|p_{ii}(z)|^2 + \frac{1}{4}(r_i(z) - c_i(z))^2} - s_i(z)\Big),$$

$$\nu_3(P_m(z)) := \min_{i,j \in N, i \neq j}\Big(\frac{|p_{ii}(z)| + |p_{jj}(z)|}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(|p_{ii}(z)| - |p_{jj}(z)|)^2 + s_i(z)s_j(z)}\Big).$$

Na osnovu čega imamo sledeće lokalizacije pseudospektra matričnog polinoma P_m:

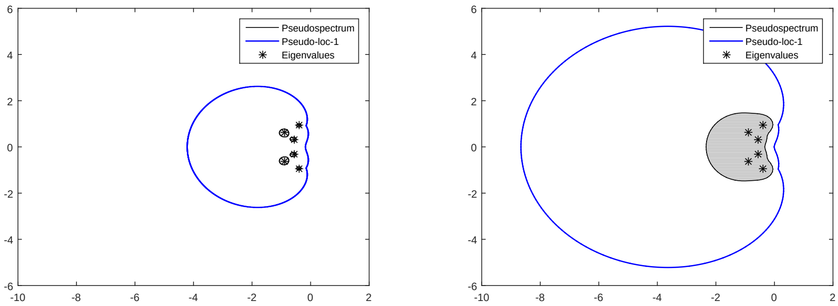
$$\Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \Theta^{\nu_\ell}_{q,\varepsilon}(P_m) := \{z \in \mathbb{C} : \nu_\ell(P_m(z)) \leq \varepsilon q(|z|)\} \tag{96}$$

za $q(z)$ i α_k definisane ranije. Koristeći nejednakost (96), moguće je razmatrati donje granice ν za $||P_m(z)^{-1}||^{-1}$ u Euklidskoj normi i konstruisati odgovarajuće lokalizacione skupove za ε-pseudospektar matričnog polinoma P_m.

Prvo, za $\ell = 1$ imamo da

$$\Theta^{\nu_1}_{q,\varepsilon}(P_m) := \bigcup_{i \in N}\{z \in \mathbb{C} : |p_{ii}(z)| \leq s_i(z) + \varepsilon q(|z|)\} \tag{97}$$

lokalizuje ε-pseudospektar matričnog polinoma P_m u Euklidskoj normi.



(a) apsolutne perturbacije (b) relativne perturbacije

Slika 26: Skup $\Theta^{\nu_1}_{q,\varepsilon}(P_2)$ za QEP iz primera 3.1

Primer 3.4. *Za date matrice iz primera 3.1 i matričnu funkciju* $P_2(z) = z^2C + zB + A$ *definisanu pomenutim matricama, na Slici 26 je dat lokalizacioni skup* $\Theta^{\nu_1}_{q,\varepsilon}(P_2)$ *za perturbacije merene u apsolutnom smislu (Slika 26(a)) i relativnom smislu (Slika 26(b)), za zadati* $\varepsilon = 0.1$.

Posmatrani skup možemo predstaviti analitički $\Theta^{\nu_1}_{q,\varepsilon}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{3} \Theta^{\nu_1,i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, *gde su*

$$\Theta^{\nu_1,1}_{q,\varepsilon}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |3z^2+4z+3| \le |z^2+0.5z+0.5|+|z+1|+2|z^2|+\varepsilon q(|z|)\},$$

$$\Theta^{\nu_1,2}_{q,\varepsilon}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |3z^2+4z+2| \le |z^2| + 1.5|z+1| + \varepsilon q(|z|)\},$$

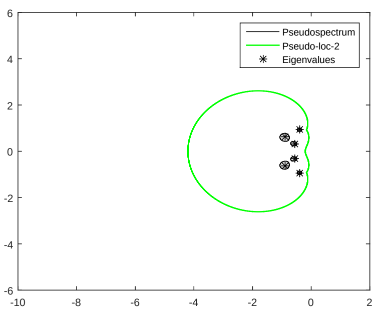
$$\Theta^{\nu_1,3}_{q,\varepsilon}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |3z^2+4z+3| \le 1.5|z+1| + |z^2+0.5z+0.5| + \varepsilon q(|z|)\}.$$

Pri merenju perturbacija u Euklidskoj normi u apsolutnom smislu, ε*-pseudospektar se sastoji iz 6 nepovezanih komponenti koje sadrže sve pseudokarakteristivcne korene (Slika 26(a), za* $\varepsilon = 0.1$*), dok pri relativnim perturbacijama i za istu vrednost* ε*,* ε*-pseudospektar funkcije* P_2 *se sastoji iz jedne komponente i sadrži sve pseudokarakteristične korene (Slika 26(b)).*

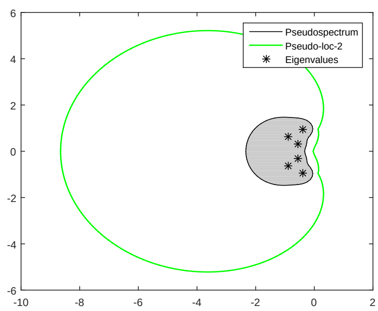
Naredna granica ($\ell = 2$) daje skup

$$\Theta^{\nu_2}_{q,\varepsilon}(P_m) := \bigcup_{i\in N}\{z \in \mathbb{C} : |p_{ii}(z)|^2 \le (s_i(z)+\varepsilon q(|z|))^2 - \frac{1}{4}(r_i(z)-c_i(z))^2\} \quad (98)$$

koji lokalizuje ε-pseudospektar P_m, tj. važi $\Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \Theta^{\nu_2}_{q,\varepsilon}(P_m)$.



(a) apsolutne perturbacije



(b) relativne perturbacije

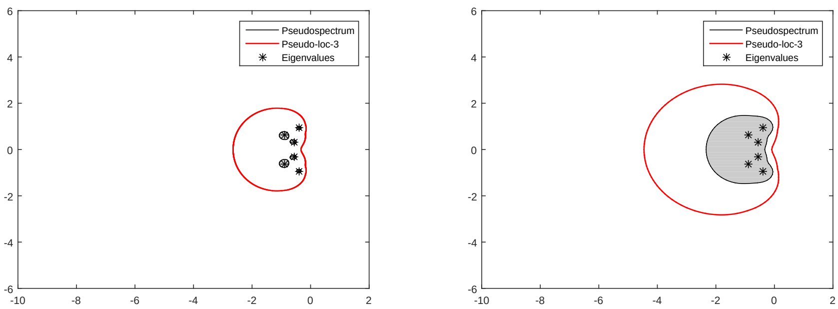
Slika 27: Skup $\Theta^{\nu_2}_{q,\varepsilon}(P_2)$ za QEP iz primera 3.1

Primer 3.5. *Za date matrice iz primera 3.1 i matričnu funkciju* $P(z) = z^2C + zB + A$ *definisanu pomenutim matricama, na Slici 27 je dat lokalizacioni skup* $\Theta^{\nu_2}_{q,\varepsilon}(P_2) = \bigcup_{i\in N} \Theta^{\nu_2,i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$, *za perturbacije merene u* *apsolutnom smislu (Slika 27(a)) i relativnom smislu (Slika 27(b)), za zadati $\varepsilon = 0.1$. Zbog komplikovanijeg računa ovde nećemo navoditi analitičke izraze ovog skupa.*

Još jedan interesantan rezultat može se dobiti za $\ell = 3$. Lokalizacioni skup za pseudospektar u tom slučaju je:

$$\Theta^{\nu_3}_{q,\varepsilon}(P_m) := \bigcup_{i \in N} \bigcup_{ij \neq i} \{z \in \mathbb{C} : (|p_{ii}(z)| + |p_{jj}(z)| - 2\varepsilon q(|z|))^2 \leq$$
$$(|p_{ii}(z)| - |p_{jj}(z)|)^2 + 4 s_i(z) s_j(z)\}, \tag{99}$$

tj. važi $\Lambda_{q,\varepsilon}(P_m) \subseteq \Theta^{\nu_3}_{q,\varepsilon}(P_m)$.



(a) apsolutne perturbacije (b) relativne perturbacije

Slika 28: Skup $\Theta^{\nu_3}_{q,\varepsilon}(P_2)$ za QEP iz primera 3.1

Primer 3.6. *Za date matrice iz primera 3.1 i matričnu funkciju $P_2(z) = z^2C + zB + A$ definisanu pomenutim matricama, na Slici 28 je dat lokalizacioni skup $\Theta^{\nu_3}_{q,\varepsilon}(P_2) = \bigcup_{\substack{i,j \in N \\ j \neq i}} \Theta^{\nu_3,i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$, za perturbacije merene u apsolutnom smislu (Slika 28(a)) i relativnom smislu (Slika 28(b)), za zadati $\varepsilon = 0.1$. Kako su ovi skupovi komplikovaniji za računanje, na ovom mestu nećemo ih navoditi analitički.*

Primetimo da, za razliku od lokalizacija ε-pseudospektra u normi beskonačno, u ovom slučaju ne postoji inkluzija između pomenutih skupova $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P_m(z))$, za $i = 1, 2, 3$.

3.3 Primena na PEP

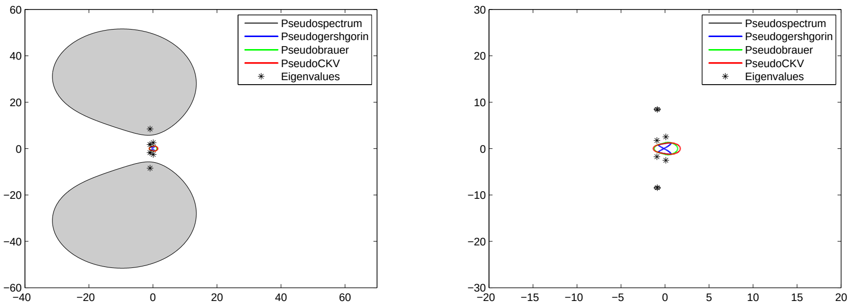
U ovom delu predstavljamo detaljnu analizu rezultata predstavljenih u prethodne dve sekcije na primerima nekoliko nelinearnih problema karakterističnih korena proizašlih iz primena u inženjerstvu: problem krila, vibracioni sistem i žiroskopski sistem za QEP, odnosno problem protoka plazme za PEP višeg reda. Matrice koje definišu pomenute nelinearne probleme date su algoritmom NLEVP koji su napravili Tiseur i ostali i objavili u radu [15], za kolekciju svih nelinearnih problema proizašlih iz praktičnih primena, navedenu u radu [159], koje predstavljaju podlogu za sva izračunavanja. Ovaj algoritam već je opisan u poglavlju 2.4, te ga na ovom mestu nećemo ponovo opisivati. Konkretno, koeficijente matrica za primere koje ćemo detaljnije obraditi u ovom delu koristili su i neki drugi autori [102, 159], ali ćemo ih mi koristiti za primenu tehnike opisane u prethodnom poglavlju. Oblast od interesa je birana na osnovu prethodnog znanja o primerima iz radova [102, 159] ili biranjem veličine koja garantuje da će ε-pseudospektar biti obuhvaćen.

3.3.1 Pseudospektar za QEP

U uvodu je pomenuto da najveći broj problema proizašao iz praktičnih primena predstavlja polinomne probleme karakterističnih korena stepena 2, tačnije QEP. Stoga u ovoj sekciji dajemo nekoliko primera pseudospektralne analize za kvadratne probleme karakterističnih korena. QEPovi su predstavljeni diferencijalnim jednačinama drugog reda, koje se procesom diskretizacije svode na kvadratne matrične polinome oblika $P_2(z) := z^2A_2 + zA_1 + A_0$. Matrična funkcija P_2 je analitička i regularna na posmatranom domenu Ω, za sve kompleksne brojeve z i zadate matrice $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{n,n}$ koje definišu posmatrani problem. Matrice koeficijenata $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{n,n}$ poznatih QEPova i ostalih NLEPova navedene su u radu [160], u kome je ukratko opisano poreklo i značenje za najveći broj ovih problema. Detaljniji opis ovih NLEPova može se naći putem linkova [9, 136, 180, **?**, 103]. Koristeći pomenute koeficijente, u nastavku ćemo dati detaljnu analizu lokalizacionih skupova ε-pseudospektra konstruisanih za nekoliko QEP: problem krila, vibracioni sistem, prigušeni i neprigušeni žiroskopski sistem. Iako su pomenuti primeri diskutovani u radovima [16, 102], u ovom delu primenjujemo opisanu tehniku lokalizacije ε-pseudospektra koja se razlikuje od onih primenjenih u pomenutim radovima.

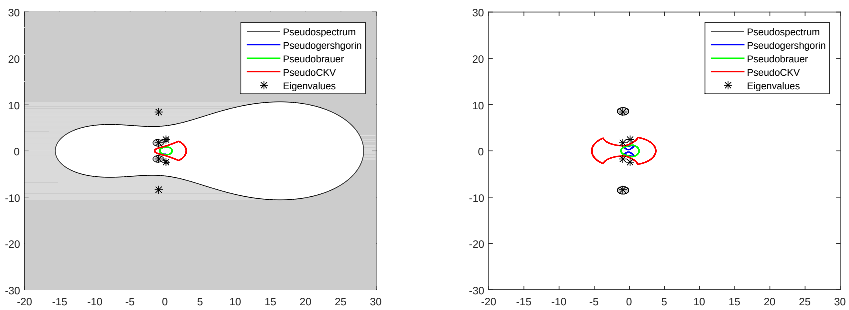
Primer 3.7. ***Problem krila****, opisan u poglavlju* 2.4.1*, je QEP nastao proučavanjem oscilacija krila aviona u aerotunelu [54, 102, 159]. U ovom delu bavimo se konstrukcijom lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa za*

ε-pseudospektar matrične funkcije P koja definiše ovaj problem. Ponovimo da je problem krila definisan kvadratnim matričnim polinomom $P_2(z) = z^2C + zB + A$ iz Primera 2.12.



(a) $\varepsilon = 0.13$ (b) $\varepsilon = 0.01$

Slika 29: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$, ($|| \cdot ||_\infty$, apsolutne perturbacije) za NLEP krila i $\varepsilon = 0.13, 0.01$



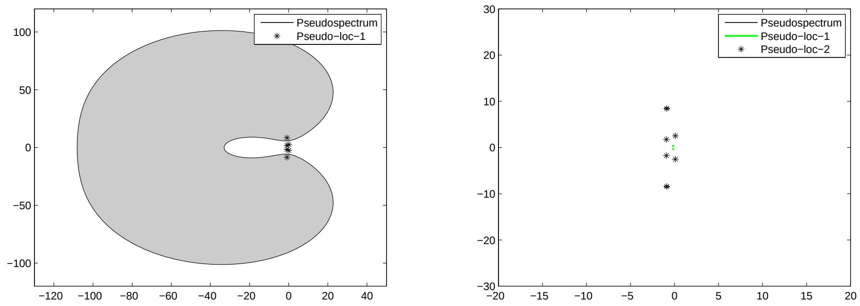
(a) $\varepsilon = 0.007$ (b) $\varepsilon = 0.001$

Slika 30: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$, ($|| \cdot ||_\infty$, relativne perturbacije) za NLEP krila i $\varepsilon = 0.007, 0.001$

Slika 29 ilustruje karakteristične korene matričnog polinoma P_2, granice ε-pseudospektra i lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za različite vrednosti ε pri apsolutnim perturbacijama, dok Slika 30 ilustruje ove karakteristične korene i skupove za različite vrednosti ε pri relativnim perturbacijama u normi beskonačno.

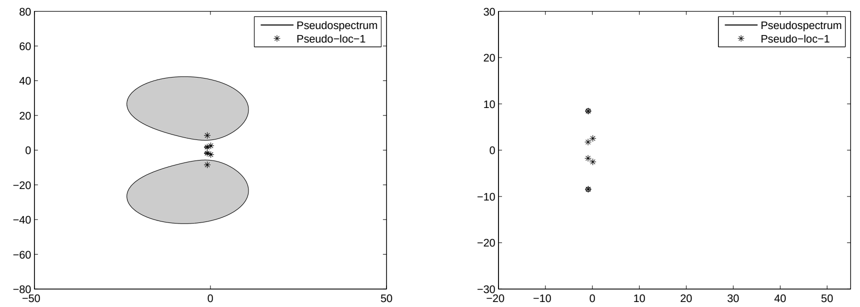
Vodeća matrica C ovog problema nije SDD. Simetrija ε-pseudospektra u odnosu na realnu osu je očigledna, jer se matrična funkcija P_2 sastoji iz tri realne matrice [[102], Tvrđenje 2.1.]. Karakteristični koreni funkcije P su

$-0.88 \pm i8.44$, $0.09 \pm i2.52$, $-0.92 \pm i1.76$, pri čemu su karakteristični koreni $-0.88 \pm i8.44$ mnogo osetljiviji na perturbacije od ostalih karakterističnih korena funkcije P [102, 159].



(a) $\varepsilon = 0.17$ (b) $\varepsilon = 0.01$

Slika 31: Skupovi $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_2$, apsolutne perturbacije) za NLEP krila i $\varepsilon = 0.17, 0.01$



(a) $\varepsilon = 0.009$ (b) $\varepsilon = 0.001$

Slika 32: Skupovi $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_2$, relativne perturbacije) za NLEP krila i $\varepsilon = 0.009, 0.001$

Prateći definicije skupova $\Theta^{i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, za $i = 1, 2, 3$, u Euklidskoj normi, (Poglavlje 3.2), Slika 31 ilustruje karakteristične korene matričnog polinoma P_2, granice ε-pseudospektra od P_2 i lokalizacione skupove za različite vrednosti ε pri apsolutnim perturbacijama, a Slika 32 ilustruje ove karakteristične korene i skupove za različite vrednosti ε pri relativnim perturbacijama.

Primer 3.8. ***Vibracioni sistem****, ili problem vibracija, je QEP nastao iz modela masene opruge:*

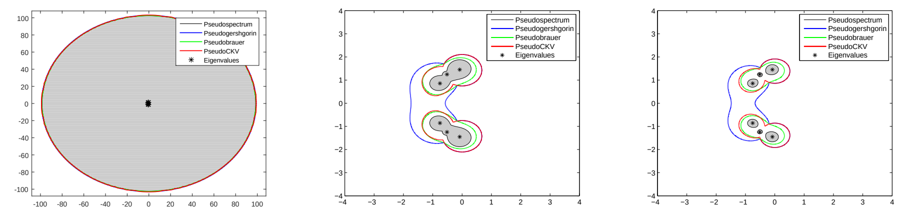
$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + R\frac{\partial x}{\partial t} + kx = 0,$$

koja predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda, čija su rešenja oblika $x = e^{-\alpha t} A\cos(\omega_d t + \phi)$*, gde je* $\alpha = \frac{R}{2m}$ *konstanta opadanja (engl. decay constant),* $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ *je karakteristična (prirodna) frekvencija sistema, za* $\omega_0 = \sqrt{z\frac{k}{m}}$ *koja predstavlja prirodnu frekvenciju ovog sistema u idealnim uslovima (bez otpora* R*). Parametri* A *i* ϕ *su određene početnim pomerajem i ubrzanjem. Prirodna frekvencija* ω_d *je manja od prirodne frekvencije sistema* ω_0 *[101].*

Vibracija je mehanička pojava u kojoj se oscilacije pojavljuju oko tačke ravnoteže. Vibracije koje nastaju u ovom modelu kada se frekvencija ω_d *približi prirodnoj frekvenciji* ω_0 *su nepoželjne.*

Diskretizacijom ovog sistema dobija se matrična formulacija ovog QEP, oblika $P(z) = z^2C + zB + A$*, gde su matrice koje definišu ovaj problem oblika [102, 161]:*

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

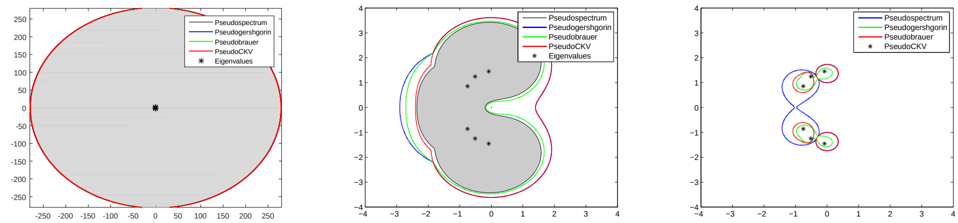


(a) $\varepsilon = 0.99$ (b) $\varepsilon = 0.19$ (c) $\varepsilon = 0.1$

Slika 33: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1,2,3$ ($||\cdot||_\infty$, apsolutne perturbacije) za NLEP vibracija i $\varepsilon = 0.99, 0.19, 0.1$.

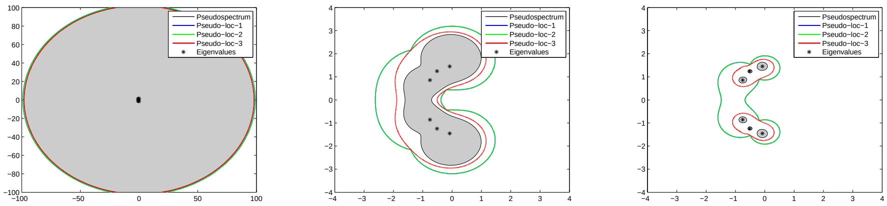
Slika 33 ilustruje karakteristične korene matričnog polinoma P_2*, granice* ε*-pseudospektra i lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za različite vrednosti* ε *pri apsolutnim perturbacijama, a Slika 34 ilustruje ove karakteristične korene i lokalizacione skupove za različite vrednosti* ε *pri relativnim perturbacijama. Pri ovoj analizi za različite vrednosti* $\varepsilon \geq 0$ *pokazalo se da su veći koreni veoma osetljivi na apsolutne i relativne perturbacije, dok su manji koreni relativno neosetljivi.*

Vodeća matrica A_2 matričnog polinoma P_2 koji opisuje vibracioni problem jeste SDD, kao i matrica A_0. Simetrija ε-pseudospektra u odnosu na realnu osu je opet očigledna, jer je matrični polinom P_2 određen sa tri realne matrice, pa karakteristični koreni ovog matričnog polinoma su parovi kompleksnih brojeva: $-0.08 \pm i1.45$, $-0.75 \pm i0.86$, $-0.51 \pm i1.25$ [102, 161].



(a) $\varepsilon = 0.199$ (b) $\varepsilon = 0.1$ (c) $\varepsilon = 10^{-4}$

Slika 34: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($|| \cdot ||_\infty$, relativne perturbacije) za NLEP vibracija i $\varepsilon = 0.199, 0.1, 10^{-4}$.



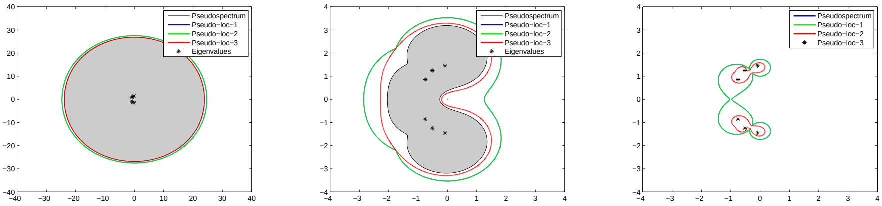
(a) $\varepsilon = 0.99$ (b) $\varepsilon = 0.5$ (c) $\varepsilon = 0.1$

Slika 35: Skupovi $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($|| \cdot ||_2$, apsolutne perturbacije) za NLEP vibracija, $n = 1000$ i $\varepsilon = 0.99, 0.5, 0.1$

Prateći definicije skupova $\Theta^{i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, za $i = 1, 2, 3$, u Euklidskoj normi, Slika 35 ilustruje karakteristične korene matričnog polinoma P_2, granice ε-pseudospektra i odgovarajuće lokalizacione skupove za različite vrednosti ε sa apsolutnim perturbacijama, a Slika 36 ilustruje ove karakteristične korene i skupove za različite vrednosti ε relativnim perturbacijama.

Za apsolutne i relativne perturbacije u Euklidskoj normi, situacija je na neki način različita od one u normi beskonačno jer nema povezanosti (u smislu inkluzije) između skupova $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$. Ukoliko se uključe relativne perturbacije u Euklidskoj normi, situacija je slična onoj sa apsolutnim perturbacijama.

Slike 33-34 ukazuju da je razlika između apsolutnih i relativnih perturbacija u veličini skupa $\Lambda_{q,\varepsilon}(P_2)$. Ove skupove možemo takođe predstaviti



(a) $\varepsilon = 0.19$ (b) $\varepsilon = 0.1$ (c) $\varepsilon = 10^{-4}$

Slika 36: Skupovi $\Theta_{q,\varepsilon}^{\nu_i}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_2$, relativne perturbacije) za NLEP vibracija i $\varepsilon = 0.19, 0.1, 10^{-4}$

analitički. U odnosu na veličinu problema, ove skupove takođe možemo predstaviti analitički. Ovde je i-ti lokalizacioni skup $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1}(P_2)$ oblika:

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,1}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1.41i||z + 1.41i| \leq 1 + \varepsilon q(|z|)\},$$
$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,2}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 1.5z + 1.5| \leq 0.5(1 + |z| + \varepsilon q(|z|))\},$$
$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,3}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 1.2z + 2| \leq 0.2(|z| + \varepsilon q(|z|))\}$$

i lokalizacioni skup ε-pseudospektra je $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1}(P) = \Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,1}(P_2) \cup \Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,2}(P_2) \cup \Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,3}(P_2)$. Za različite izbore vrednosti ε, dobijamo različite lokalizacije ε-pseudospektra za P_2.

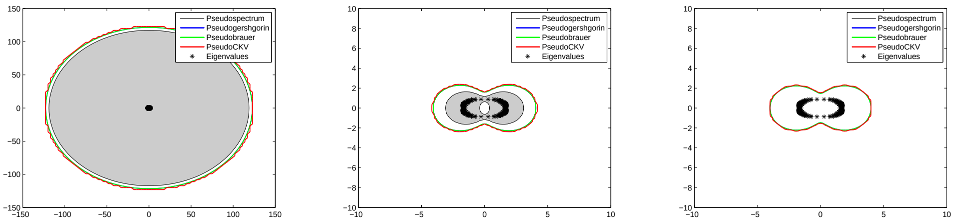
Ostali lokalizacioni skupovi definisani u poglavlju 3.2 *mogu se prezentovati na sličan način, prateći definicije ovih skupova.*

Još jednu interesantnu primenu čine žiroskopski sistemi. Ovi sistemi u opštem slučaju služe za kontrolu ugaonog kretanja nekog tela koje se okreće pod uglom u odnosu na podlogu. Ukoliko pokušamo da pomerimo neki deo posmatranog tela koje rotira pod uglom, dolazi do otpora. Otpor delova rotirajuće strukture u odnosu na pravac ose rotacije naziva se žiroskopski efekat [103]. Ovi sistemi imaju široku primenu, kao npr. za direkcionu kontrolu, žiro-kompase u brodovima i avionima, inercijalno vođene kontrolne sisteme za projektile i prostorne putanje. Javljaju se, takođe, pri naglom skretanju ili okretanju automobila (tzv. proces rotacije automibila), kod avionskih motora kada avion naglo menja pravac [103]. U primenama razlikujemo dve vrste ovih sistema: prigušene i neprigušene. Oba su određena diferencijalnim jednačinama drugog reda, sa različitim početnim uslovima. Procesom diskretizacije pomenuti problemi su određeni kvadratnim matričnim polinomom P_2, čiji koeficijenti se razlikuju u odnosu na to da li posmatramo prigušen ili neprigušen sistem.

Primer 3.9. ***Neprigušeni žiroskopski sistem*** *je* 10×10 *QEP, određen funkcijom* $P_2(z) = z^2 A_2 + zA_1 + A_0$*, za koji su matrice* A_0, A_1, A_2 *oblika [102]:*

$$A_2 = I_{10} \otimes \hat{C}_1 + 1.30\hat{C}_1 \otimes I_{10},$$
$$A_1 = 1.35 I_{10} \otimes \hat{B}_1 + 1.10\hat{B}_1 \otimes I_{10},$$
$$A_0 = I_{10} \otimes \hat{A}_1 + 1.20\hat{A}_1 \otimes I_{10}.$$

Ovde je I_{10} *jedinična matrica reda* 10, $\hat{C}_1 = \frac{1}{6}(4I_{10} + N + N^T)$, $\hat{B}_1 = N - N^T$ *i* $\hat{A}_1 = N + N^T - 2I_{10}$ *, gde je* N *nilpotentna matrica koja ima jedinice na subdijagonali i nule na ostalim mestima.* $P_2 \in \mathbb{C}^{100,100}$ *je matrični polinom koji odgovara neprigušenom žiroskopskom sistemu, za* $A_2 = A_2^T$, $A_1 = -A_1^T$ *i* $A_0 = A_0^T$.

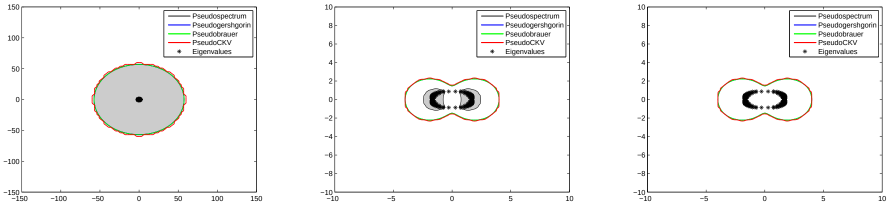


(a) $\varepsilon = 0.76$ (b) $\varepsilon = 0.02$ (c) $\varepsilon = 10^{-8}$

Slika 37: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($|| \cdot ||_\infty$, apsolutne perturbacije) za neprigušen žiroskopski QEP i $\varepsilon = 0.76, 0.02, 10^{-8}$.

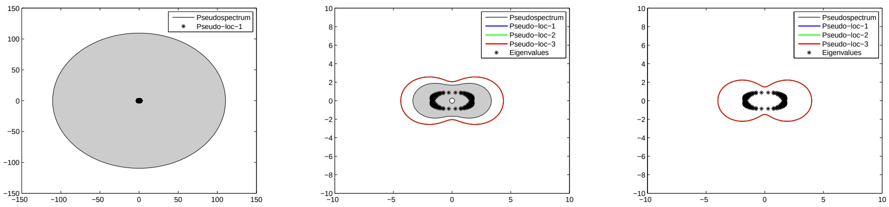
Slika 37 ilustruje karakteristične korene matričnog polinoma P_2*, granice* ε*-pseudospektra i lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za različite vrednosti* ε *pri apsolutnim perturbacijama, dok Slika 38 ilustruje ove karakteristične korene i lokalizacione skupove za različite vrednosti* ε *pri relativnim perturbacijama.*

Treba primetiti da je vodeća matrica A_2 *ovog problema (retka) SDD matrica. Takođe, simetrija pseudospektra u odnosu na realnu osu je očigledna u neprigušenom slučaju, jer je matrični polinom* P_2 *određen sa tri realne matrice. Dalje, minimalna singularna vrednost vodeće matrice* A_2 *približno je jednaka* 0.8*, odakle polazimo pri ispitivanju vrednosti* ε *za koju se dobijaju disjunktne komponente* ε*-pseudospektra za* P_2*. Pokazuje se da je u ovom primeru ta vrednost ograničena sa* $\varepsilon = 0.76$.



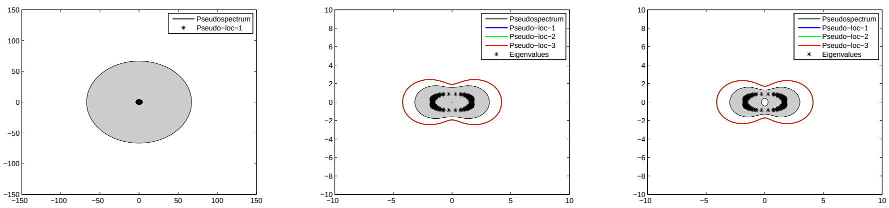
(a) $\varepsilon = 0.32$ (b) $\varepsilon = 10^{-4}$ (c) $\varepsilon = 10^{-8}$

Slika 38: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_\infty$, relativne perturbacije) za neprigušen žiroskopski QEP, $\varepsilon = 0.32, 10^{-4}, 10^{-8}$.



(a) $\varepsilon = 0.79$ (b) $\varepsilon = 0.1$ (c) $\varepsilon = 10^{-8}$

Slika 39: Skupovi $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_2$, apsolutne perturbacije) za neprigušen žiroskopski QEP, $\varepsilon = 0.79, 0.1, 10^{-8}$.



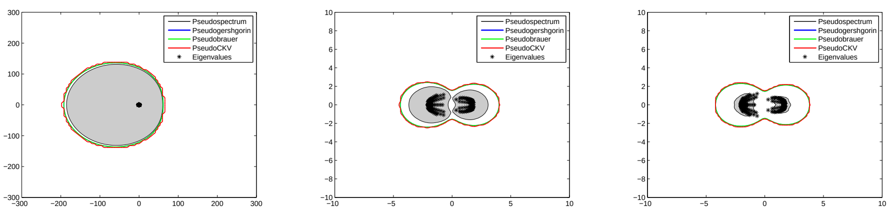
(a) $\varepsilon = 0.34$ (b) $\varepsilon = 0.02$ (c) $\varepsilon = 0.01$

Slika 40: Skupovi $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_2$, relativne perturbacije) za neprigušen žiroskopski QEP, $\varepsilon = 0.34, 0.02, 0.001$.

Prateći definicije skupova $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, za $i = 1, 2, 3$, u Euklidskoj normi, Slika 39 ilustruje karakteristične korene matričnog polinoma P_2, granice ε-pseudospektra za P_2 i odgovarajuće lokalizacione skupove ε-pseudospektra matričnog polinoma P_2 za različite vrednosti ε pri apsolutnim perturbacijama, dok Slika 40 ilustruje ove karakteristične korene i skupove za različite vrednosti ε pri relativnim perturbacijama.

Slike 39-40 ukazuju da je razlika usled apsolutnih i relativnih perturbacija u veličini skupa i broju komponenti skupa $\Lambda_{q,\varepsilon}(P_2)$. U zavisnosti od toga da li se u računu koriste apsolutne ili relativne perturbacije, norma beskonačno ili Euklidska norma, ovi skupovi (sa legendom) su prikazani na Slikama 37-38.

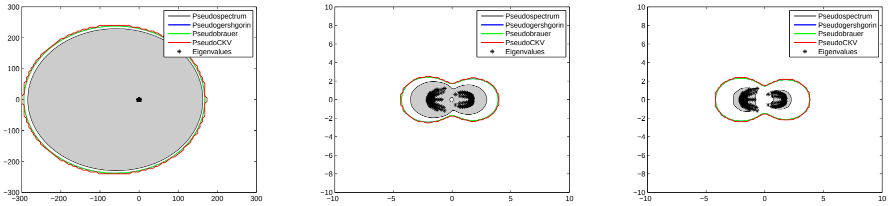
Primer 3.10. ***Prigušeni žiroskopski problem.*** *U ovom primeru predstavljamo rezultate za prigušeni žiroskopski sistem. Matematički posmatrano, razlika između prigušenog i neprigušenog sistema je u linearnom delu. Naime, za prigušeni sistem, linearni deo je oblika $E = A_1 + D$, za koji je matrica A_1 definisana u prethodnom primeru; D je tridijagonalna matrica oblika $D = tridiag(-0.1, 0.3, -0.1)$. Matrični polinom koji određuje ovaj problem je oblika $P_2(z) = z^2 A_2 + Ez + A_0$. Matrice A_2, E i A_0 su retke* 100×100 *matrice, pa, prema tome, možemo navesti njihove elemente. Za indeks $i \in \{1, 2, ..., 100\}$, matrica $A_2 = [c_{ij}]$ ima elemente $c_{i,i} = 1.5336$, $c_{i,i+1} = c_{i+1,i} = 0.1667$, i $c_{i,i+10} = c_{i+10,i} = 0.2167$; matrica E je takva da je $e_{i,i} = 0.3$, $e_{i,i+1} = -1.45$, $e_{i+1,i} = 1.25$, i $e_{i,i+10} = -1.1$, $e_{i+10,i} = 1.1$; i matrica $A_0 = A = [a_{ij}]$ je retka matrica za koju je $a_{i,i} = -4.4$, $a_{i+1,i} = 2.2$, $a_{i,i+1} = 2.2$, ali za $i = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$ $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 0$.*



(a) $\varepsilon = 0.76$ (b) $\varepsilon = 0.04$ (c) $\varepsilon = 10^{-4}$

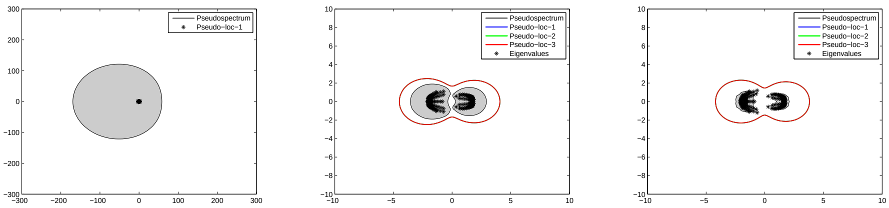
Slika 41: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($|| \cdot ||_\infty$, apsolutne perturbacije) za prigušen žiroskopski QEP, $\varepsilon = 0.76, 0.04, 10^{-4}$.

Slika 41 ilustruje karakteristične korene matričnog polinoma P_2, granice ε-pseudospektra i lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za različite vrednosti ε pri apsolutnim perturbacijama, dok Slika 42 ilustruje ove karakteristične korene i lokalizacione skupove za različite vrednosti ε pri relativnim *perturbacijama. Kao i u slučaju neprigušenog žiroskopskog sistema, vodeća matrica A_2 ovog problema je retka SDD matrica.*



(a) $\varepsilon = 0.33$ (b) $\varepsilon = 10^{-2}$ (c) $\varepsilon = 10^{-4}$

Slika 42: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_\infty$, relativne perturbacije) za prigušen žiroskopski QEP, $\varepsilon = 0.33, 0.01, 10^{-4}$.



(a) $\varepsilon = 0.79$ (b) $\varepsilon = 0.06$ (c) $\varepsilon = 10^{-4}$

Slika 43: Skupovi $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P_2)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_2$, apsolutne perturbacije) za prigušen žiroskopski QEP, $\varepsilon = 0.79, 0.06, 10^{-4}$.

Slike 41-42 ukazuju da je razlika između apsolutnih i relativnih perturbacija u veličini skupa i broju komponenti skupa $\Lambda_{q,\varepsilon}(P_2)$.

Ove skupove takođe možemo predstaviti analitički. i-ti lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa za ε-pseudospektar prigušenog žiroskopskog QEP izražen analitički je:

$$\Theta^{\mu_1,i}_{q,\varepsilon}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2+0.2z+2.87| \leq |0.11z^2-0.94z+1.43|+|0.14z^2-0.72z|+ 0.65\varepsilon q(|z|)\}; \;\; \textit{za } i = 2+10k, 3+10k, ..., 8+10k,\ k = 1, 2, 3, ..., 9,,$$

$$\Theta^{\mu_1,i}_{q,\varepsilon}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2+0.2z+2.87| \leq |0.11z^2+0.82z+1.43|+|0.11z^2-0.94z+ 1.43| + |0.14z^2 - 0.72z| + 0.65\varepsilon q(|z|)\},$$

i za $i = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$*:*

$$\Theta^{\mu_1,i}_{q,\varepsilon}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z||z+0.2| \leq |0.11z^2+0.82z+1.43|+0.94|z|+0.14|z|\cdot|z+$$

$$5.14| + 0.14|z| \cdot |z - 5.14| + 0.65\varepsilon q(|z|)\},$$

dok je za $i = 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91$*:*

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,i}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2+0.2z-2.87| \leq 0.14|z|\cdot|z+5.14|+0.14|z|\cdot|z-5.14|+$$

$$+0.11|z| \cdot |z + 7.45| + 0.11|z| \cdot |z - 8.54| + 0.65\varepsilon q(|z|)\},$$

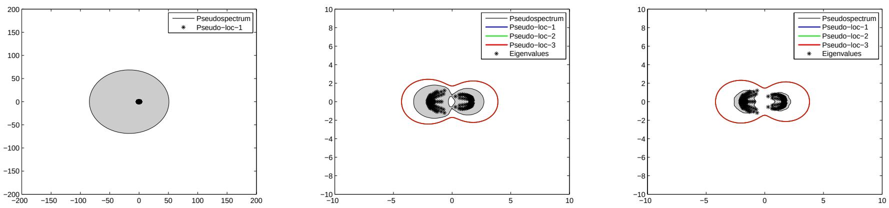
a za ostale indekse i *je:*

$$\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,i}(P_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z^2+0.2z-2.87| \leq 0.14|z|\cdot|z+5.14|+0.14|z|\cdot|z-5.14|+$$

$$|0.11z^2 + 0.82z + 1.43| + |0.11z^2 - 0.94z + 1.43| + 0.65\varepsilon q(|z|)\},$$

i lokalizacioni skup za ε*-pseudospektar matričnog polinoma* P_2 *koji određuje prigušen žiroskopski sistem je* $\Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1}(P_2) = \bigcup_{i=1}^{100} \Theta_{q,\varepsilon}^{\mu_1,i}(P_2)$.

Ostale ε*-pseudospektralne lokalizacije se na sličan način mogu izraziti analitički, prateći definicije.*



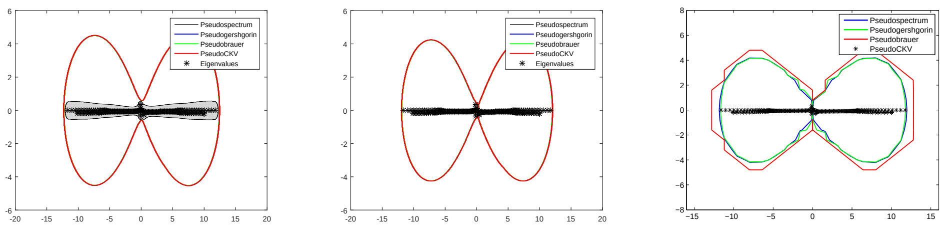
(a) $\varepsilon = 0.34$ (b) $\varepsilon = 10^{-2}$ (c) $\varepsilon = 10^{-4}$

Slika 44: Skupovi $\Theta_{q,\varepsilon}^{\nu_i}(P)$, $i = 1, 2, 3$ ($|| \cdot ||_2$, relativne perturbacije) za prigušen žiroskopski QEP, $\varepsilon = 0.34, 0.01, 0.0001$.

3.3.2 Pseudospektar za EP višeg reda

U ovoj sekciji primenićemo tehniku za konstrukciju lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa ε-pseudospektra matričnog polinoma P_m u normi beskonačno i Euklidskoj normi, čija je teorijska podloga data u sekciji 3.2. Postupak konstrukcije lokalizacionih skupova za ε-pseudospektar matričnog polinoma stepena većeg od dva rađen je po istom principu kao i u prethodnoj sekciji (pozivom algoritama *gtype_nlep_ps* i *gtype_nlep_ps2*), pa to ovde nećemo ponovo opisivati. Opisanu lokalizacionu tehniku za ε-pseudospektar matričnog polinoma P_m višeg reda pokazaćemo na poznatom primeru protoka plazme.

Primer 3.11. ***Problem protoka plazme*** *je matrični polinomni problem trećeg stepena nastao u dizajnu Tokamak reaktora, modelovanjem nestabilnosti protoka na ivicama plazme unutar Tokamak reaktora [15, 73]. Matrice koje opisuju ovaj problem su kompleksne kvadratne reda* 128*. Ovaj primer je opisan detaljnije u poglavlju* 2.4.2*, u primeru 2.15. U ovom delu bavimo se konstrukcijom lokalizacionih skupova Geršgorinovog tipa za ε-pseudospektar matričnog polinoma P_3 koja definiše problem protoka plazme, u normi beskonačno i Euklidskoj normi. Ponovimo da je za ovaj problem matrična polinomna funkcija oblika $P_3(z) = z^3D + z^2C + zB + A$, za matrice A, B, C, D date u primeru 2.15.*

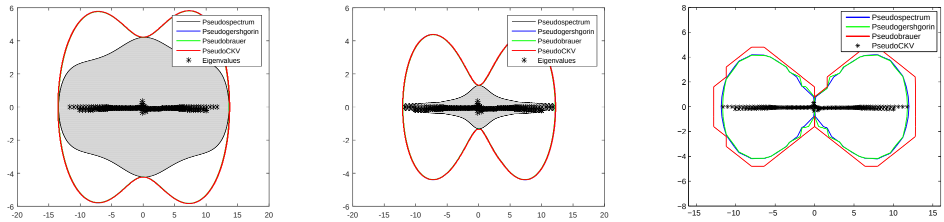


(a) $\varepsilon = 0.5$ (b) $\varepsilon = 0.01$ (c) $\varepsilon = 10^{-8}$

Slika 45: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_3)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_\infty$, apsolutne perturbacije) za PEP protoka plazme, $\varepsilon = 0.5, 0.01, 10^{-8}$.

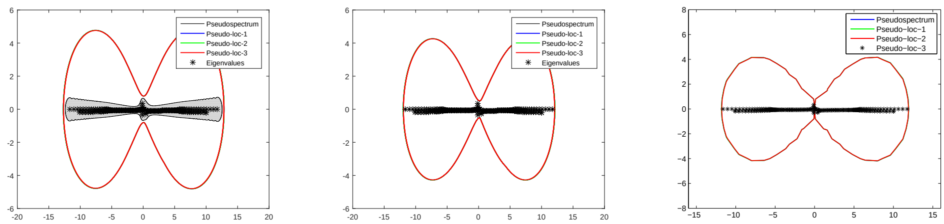
Slika 45 ilustruje karakteristične korene matričnog polinoma P_3, granice ε-pseudospektra i lokalizacione skupove Geršgorinovog tipa za različite vrednosti ε sa apsolutnim perturbacijama, dok Slika 46 ilustruje ove karakteristične korene i lokalizacione skupove za različite vrednosti ε pri relativnim perturbacijama. Treba primetiti da vodeća matrica C ovog problema je dijagonalna SDD matrica.

Prateći definicije skupova $\Theta^{i}_{q,\varepsilon}(P_3)$, za $i = 1, 2, 3$, u Euklidskoj normi, Slika 47 ilustruje karakteristične korene matričnog polinoma P_3, granice ε-



(a) $\varepsilon = 10^{-1}$ (b) $\varepsilon = 10^{-2}$ (c) $\varepsilon = 10^{-8}$

Slika 46: Skupovi $\Theta^{\mu_i}_{q,\varepsilon}(P_3)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_\infty$, relativne perturbacije) za PEP protoka plazme, $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-8}$.

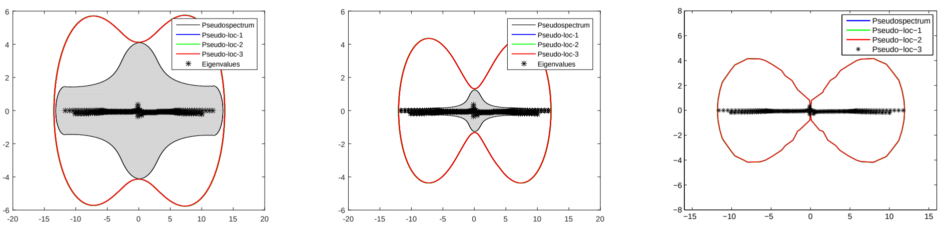


(a) $\varepsilon = 1$ (b) $\varepsilon = 0.1$ (c) $\varepsilon = 10^{-8}$

Slika 47: Skupovi $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P_3)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_2$, apsolutne perturbacije) za PEP protoka plazme, $\varepsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-8}$

pseudospektra i odgovarajuće lokalizacione skupove za različite vrednosti ε sa apsolutnim perturbacijama, dok Slika 48 ilustruje ove karakteristične korene i skupove za različite vrednosti ε pri relativnim perturbacijama.

Slike 47-48 ukazuju da se skupovi $\Lambda_{q,\varepsilon}(P)$ razlikuju u veličini skupa ukoliko se računaju pri apsolutnim u odnosu na one pri relativnim perturbacijama. U zavisnosti od toga da li se računaju lokalizacioni skupovi pri apsolutnim ili relativnim perturbacijama, u normi beskonačno ili Euklidskoj normi, ovi skupovi (sa legendom) su prikazani na Slikama 45-46.



(a) $\varepsilon = 10^{-1}$ (b) $\varepsilon = 10^{-2}$ (c) $\varepsilon = 10^{-8}$

Slika 48: Skupovi $\Theta^{\nu_i}_{q,\varepsilon}(P)$, $i = 1, 2, 3$ ($||\cdot||_2$, relativne perturbacije) za PEP protoka plazme, $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-8}$

Zaključak

U okviru ove disertacije postojeća tehnika za lokalizaciju karakterističnih korena za SEP i GEP je generalizovana na lokalizaciju spektra i pseudospektra matričnih polinomnih funkcija i nelinearnih matričnih funkcija kojima se mogu opisati nelinearni problemi karakterističnih korena koji imaju primenu u raznim poljima primenjene matematike. Ova tehnika, iako postoji za SEP i GEP, ne može se direktno primeniti na nelinearne slučajeve, pa je naš zadatak ovde bio da uopštimo pomenutu tehniku na slučaj NLEP, iz razloga brojnih primena u nauci i inženjerstvu. Koristeći svojstvo dijagonalne dominacije poznatih klasa DD-tipa i poznatu vezu sa teoremama Geršgorinovog tipa o lokalizaciji, konstruisani su algoritmi za konstrukciju ovih lokalizacionih skupova za spektar i pseudospektar nelinearnih matričnih funkcija (koje određuju NLEP) koji se zasnivaju na izloženoj teorijskoj podlozi za računanje spektra i pseudospektra nelinearnih problema karakterističnih korena u poglavlju 2 i 3. U okviru konstrukcije lokalizacionih skupova za pseudospektar PEP, primena našeg metoda dopušta izbor vrsta perturbacija (apsolutnih ili relativnih) matrica koje opisuju matrični polinom čiji pseudospektar se računa.

Namera da se detaljnije istražuju osobine lokalizacionih skupova matričnih funkcija koje opisuju NLEP, koje se baziraju na ideji generalizovane dijagonalne dominacije pokazala se sasvim opravdanom, s obzirom da su dokazani rezultati koji nalaze značajnu primenu u sasvim aktuelnim problemima primenjene, odnosno numeričke linearne algebre. Te mogućnosti primene prikazane su u okviru nekoliko konkretnih problema lokalizacija karakterističnih korena i lokalizacija pseudokarakterističnih korena matričnih funkcija koje opisuju NLEP. Osim navedenih i dokazanih rezultata, disertacija predstavlja i izvor opštih ideja i principa na kojima se mogu zasnivati dalje generalizacije. Kao osnov za izvođenje lokalizacija Geršgorinovog tipa za spektar i pseudospektar funkcija koje opisuju NLEPove može poslužiti prikazana tehnika primenjena na ostale klase regularnih matrica koje nisu razmatrane u ovoj disertaciji. Očigledno je da se istraživanja u ovoj disertaciji mogu pokazati veoma korisnim i u nekim drugim oblastima primenjene linearne algebre, poput oblasti konvergencije iterativnih postupaka, analize osobina Šurovog komplementa, subdirektnih suma itd. Samim tim i moguća primena u drugim naukama nije sporna.

Kao ilustraciju, primenili smo najpre metod lokalizacije spektra na nekoliko problema proizašlih iz primena NLEP u inženjerstvu, a zatim smo istu tehniku primenjenu na lokalizaciju pseudospektra matričnih polinoma za nekoliko praktičnih primera. Kako je u praksi najveći broj nelinearnih problema okarakterisan polinomnim funkcijama drugog reda (QEP), najveći broj primera koje smo predstavili opisuje kvadratne probleme karakterističnih korena. Za potrebe ovih analiza koristili smo grid-type algoritam, zasnovan na teorijskoj podlozi izloženoj u poglavlju 2.

Dalji pravac proučavanja odnosi se na konstrukciju lokalizacionih skupova za spektar i pseudospektar NLEP koji se baziraju na osobinama preostalih poznatih klasa SDD-tipa, kao i za probleme sa racionalnim ili transcedentnim delom što ostaje otvoreno pitanje.

Oznake

$\mathbb{N}$ je skup prirodnih brojeva.

$\mathbb{R}$ je skup realnih brojeva.

$\mathbb{C}$ je skup kompleksnih brojeva.

$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je skup kompleksnih brojeva koji uključuje beskonačno.

$\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionalni realan vektorski prostor kolona vektora $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, čiji su elementi realni brojevi $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$\mathbb{C}^n$ je n-dimenzionalni kompleksni vektorski prostor kolona vektora $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, čiji su elementi kompleksni brojevi $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$\mathbb{C}^{m,n}$ je familija svih $m \times n$ matrica čiji su elementi kompleksni brojeva, za svaka dva proizvoljna broja $m, n \in \mathbb{N}$.

$N := \{1, 2, ..., n\}$ je oznaka za skup indeksa.

$S \subseteq N$ označava da je S podskup skupa N.

$0 \neq S \subseteq N$ označava da je S pravi podskup skupa N.

$c(S)$ označimo kardinalni broj skupa S.

$\bar{S} := N \backslash S$ je oznaka za komplement skupa S u odnosu na skup indeksa N.

$\mathcal{N}_n(\Omega)$ označava familiju svih analitičkih i regularnih funkcija $P : \Omega \to \mathbb{C}^{n,n}$ na prosto povezanom domenu Ω.

$A = [a_{ij}]$ je matrica $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ čiji su elementi $a_{ij} := (A)_{ij} \in \mathbb{C}$, za sve indekse $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

I je oznaka za jediničnu matricu. Ukoliko je neophodno naglasiti red n te matrice, oznaka je I_n.

Permutaciona matrica P dobija se iz identične matrice I permutacijama vrsta i kolona.

O je oznaka za matricu čiji su svi elementi jednaki nuli.

Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, njen inverz se označava sa A^{-1}. To je jedinstvena matrica za koju je $AA^{-1} = I = A^{-1}A$. Matrica A je regularna ukoliko ima inverznu. Inače je singularna.

$\Lambda(A)$ označava spektar matrice A, $\Lambda(P)$ označava spektar polinoma, $\Lambda(T)$ označava spektar nelinearne matrične funkcije.

Spektralni radijus matrice A, u oznaci $\rho(A)$, je maksimalan po modulu karakteristični koren te matrice, tj. $\rho(A) := \max\{z| : z \in \Lambda(A)\}$.

$x \geq 0$ označava vektor x čije su sve komponente nenegativne, tj. $x_i \geq 0$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$.

$x > 0$ označava vektor x čije su sve komponente pozitivne, tj. $x_i > 0$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$.

$|A|$ označava matricu čiji su elementi $|a_{ij}|$, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

$\langle A \rangle$ označava pridruženu matricu matrice A.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$$

je Kroneckerova delta-funkcija.

Z-matrica $A = [a_{ij}]$ je matrica čiji su vandijagonalni elementi manji ili jednaki od nule, tj. $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$.
$A^T = [a_{ji}]$ je transponovana matrica matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m,n}$, za sve indekse $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

$A = [a_{ij}]$ je simetrična matrica ako važi $a_{ij} = a_{ji}$, za sve indekse $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

$A = [a_{ij}]$ je kososimetrična matrica ako važi $A^T = -A$.

$A = [a_{ij}]$ je Hermitska matrica ako važi $A^* = A$.

$A = [a_{ij}]$ je koso Hermitska matrica ako važi $A^* = -A$.

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je matrica za koju je ispunjeno $A^T A = AA^T = I$.

$A = diag(a_{11}, ..., a_{nn})$ je dijagonalna matrica za koju je $[a_{ij}] = 0$, za sve indekse $i \neq j$.

$A \geq 0$ označava da je $a_{ij} \geq 0$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]$.

$A > 0$ označava da je $a_{ij} > 0$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]$.

$A \geq B$, označava da je $a_{ij} \geq b_{ij}$, za bilo koje $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$.

$A > B$, označava da je $a_{ij} > b_{ij}$, za bilo koje $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$.

$A \leq B$, označava da je $a_{ij} \leq b_{ij}$, za bilo koje $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$.

$A < B$ označava da je $a_{ij} < b_{ij}$, za bilo koje $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$.

$\mathrm{diag}(A) := \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ je oznaka za dijagonalni deo matrice A.

$D > 0$ označava da su svi dijagonalni elementi matrice $D = \mathrm{diag}(A) := \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ pozitivni, tj. $a_{ii} > 0$.

$A = [a_{ij}]$ je kvadratna matrica koja nema kompletnu bazu karakterističnih vektora i stoga nije dijagonalizabilna.

Konzervativni sistem je sistem u koji nije uključen faktor prigušenja.

Literatura

Literatura

[1] Ahmad S., 2007. *Pseudospectra of matrix pencils and their applications in perturbation analysis of eigenvalues and eigendecompositions*, Phd dissertation at Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Guwahati, India 781039.

[2] Alam R., Bora S., 2005. *On sensitivity of eigenvalues and eigendecompositions of matrices*, Linear Algebra and Applications 396, pp. 273-301.

[3] Alam R., Bora S., 2005. *On stable eigendecompositions of matrices*, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications 26, pp. 830-848.

[4] Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., Croz J. D., Greenbaum A., Hammarling A. M. S., Sorensen D., 1999. *LAPACK User's Guide*, SIAM, Philadelphia, 1999.

[5] Asakura J., Sakurai T., Tadano H., Ikegami T., Kimura K., 2009. *A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals*, JSIAM Letters 1, pp. 52-55.

[6] Bai Z., 1995. *Progress in the numerical solution of the nonsymmetric eigenvalue problem*, Numerical Linear Algebra with Applications 2, pp. 219-234.

[7] Beattie C., Ipsen I.C., 2003. *Inclusion regions for matrix eigenvalues*, Linear Algebra with Applications 358, pp. 281-291.

[8] Beauwens R., 1976. *Semistrict diagonal dominance*, SIAM Journal of Numerical Analysis 13, pp. 109-112.

[9] Bedford A., Drumheller D.S., 1994. *Introduction to Elastic Wave Propagation*, dopunjeno izdanje John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England.

[10] Benner P., Fassbender H., Stoll M., 2007. *Solving Large-Scale Quadratic Eigenvalue Problems with Hamiltonian eigenstructure using a Structure-Preserving Krylov Subspace Method*, Oxford University Computing Laboratory Numerical Analysis Group Wolfson Building Parks Road Oxford, England, Report No. 07/03.

[11] Berhanu M., 2005. *The polynomial eigenvalue problem*, PhD thesis at School of Mathematics.

[12] Berman A., Plemmons R.J., 1994. *Nonnegative Matrices in the mathematical Sciences*, Classics in Applied Mathematics 9, SIAM, Philadelphia.

[13] Betcke T., Trefethen N., 2005. *Reviving the method of particular solutions*, SIAM Review 47, pp. 469-491.

[14] Betche T., Higham N., Mehrmann V., Schröder C., Tisseur F., 2008. *NLEVP: A Collection of nonlinear eigenvalue problems*, Manchester Institute for Mathematical Sciences School of Mathematics, The University of Manchester, EPrint:2008.40, available at $http : //www.mims.manchester.ac.uk/research/numerical - analysis/nlevp.html$

[15] T. Betche, N. Higham, V. Mehrmann, C. Schröder, F. Tisseur, 2011. *NLEVP: A Collection of nonlinear eigenvalue problems. User's guide*, Manchester Institute for Mathematical Sciences. $http : //www.manchester.ac.uk/mims/eprints$, (EPrint: 2011.116).

[16] Bindel D., Hood A., 2013. *Localization theorems for eigenvalue problems*, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications 34, pp. 1728-1749.

[17] Beyn W.J., 2012. *An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems*, Linear Algebra and its Applications 436, pp. 3839-3863.

[18] Boulton L., Lancaster P., Psarrakos P., 2007. *On pseudospectra of matrix polynomials and their boundaries*, Mathematical Computing, Electronocally published, May 11.

[19] Brauer A., 1947. *Limits for the charasteristic roots of a matrix II* Duke Mathematics Journal 14, pp. 21-26.

[20] Bru R., Cvetković L., Kostić V. and Pedroche F., 2010. *Characterization of $\alpha 1$ and $\alpha 2$-matrices*, Central European Journal of Mathematics 8(1), pp. 32-40.

[21] Brualdi R., 1982. *Matrices, eigenvalues and directed graphs*, Linear Multilinear Algebra 11, pp. 143-165.

[22] Brualdi R., Mellendorf S., 1994. *Regions in the complex plane containing the eigenvalues of a matrix*, American Mathematical Monthly 101, pp. 975-985.

[23] Burke J.V., Lewis A.S., Overton M.L., 2004. *Pseudospectral components and the distance to uncontrolabillity*, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications 26, pp. 350-361.

[24] Caswell H., 2001. *Matrix population models: Construction, analysis and interpretation*, 2nd Edt., Sinauer Associates, Sunderland, Massachusetts. ISBN 0-87893-096-5.

[25] Chopra A.K., 2007. *Dynamics of Structures*, 3rd Edt., Pearson Education Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

[26] Chua E.K-W.,Hwangb T-M., Linc W-W, Wud C.T., 2008. *Vibration of fast trains, palindromic eigenvalue problems and structure-preserving doubling algorithms*, Journal of Computational and Applied Mathematics 219, pp. 237-252.

[27] Corless R.M., Rezvani N., Amiraslani A., 2007. *Pseudospectra of Matrix Polynomials that are Expressed in Alternative Bases*, Mathematics in Computer Science 1 (2), pp. 353-374.

[28] Cvetković Lj., Kostić V., Varga R., 2004. *A new Geršgorin-type inclusion area*, ETNA 18, pp. 73-80.

[29] Cvetković Lj., Kostić V., 2005. *New Criteria for identifying H-matrices*, Journal of Computational and Applied Mathematics 180, pp. 265-278.

[30] Cvetković, Lj., 2006. *H-matrix theory vs. eigenvalue localization*, Numerical Algorithms 42, pp. 229-245.

[31] Cvetković Lj., Kostić V., 2006. *Between Geršgorin and minimal Geršgorin set*, Journal of Computational and Applied Mathematics 196, 452-458.

[32] Cvetković, Lj., Bru, R., Kostić, V., Pedroche, F., 2011. *A simple generalization of Gersgorin's theorem*, Advances in Computational Mathematics 35 (2-4), pp. 271-280.

[33] Cvetković, Lj., Kostić, V., 2012. *Application of Generalized Diagonal Dominance in Wireless Sensor Network Optimization Problems*, Applied Mathematics and Computations 218, pp. 4798-4805.

[34] Cvetković Lj., Kostić V, Doroslovački K., Cvetković D., 2016. *Euclidean norm estimates of the inverse of some special block matrices*, Applied Mathematics and Computation 284, pp. 12-23.

[35] Dashnic L. S., Zusmanovich M. S., 1970. *O nektoryh kriteriyah regulyarnosti matrici lokalizacii ih spectra*, Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 5, pp. 1092-1097.

[36] Dashnic, L. S., Zusmanovich, M. S. 1970. *K voprosu o lokalizacii karakteristicheskih chisel matricy*, Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 10,5, pp. 1321-1327.

[37] Datta B.N., 2005. *Finite element model updating and partial eigenvalue assignment in structural dynamics: recent developmennts on computational methods*, Proceedings of the 10th International Conference $MMA2005$ and $CMAM2$, Mathematical Modelling and Analysis, Trakai, pp. 15-27.

[38] Datta B.N., 2003. *Numerical methods for Linear Control Systems*, Academic Press, New York.

[39] Day D.M., Timothy W.F., 2007. *Quadratic eigenvalue problems*, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico and Livermore, California, SAND2007-2072, pp. 1-34.

[40] Dedieu J.P., 1997. *Condition operators, condition numbers and condition number theorem for generalized eigenvalue problem*, Linear Algebra and Applications 263, pp. 1-24.

[41] Dedieu J.P., Tisseur F., 2003. *Perturbation theory for homogeneus polynomial eigenvalue problems*, Linear Algebra and Applications 358, pp. 71-94.

[42] Demmel J.W., 1987. *A counterexample for two conjectures about stability*, IEEE Transactions on Automatic Control 32, pp. 340-342.

[43] Demmel J.W., Kågström, 1987. *Computing stable eigendecompositions of matrix pencils*, Linear Algebra and Applications 88-89, pp. 139-186.

[44] Desplanques J., 1887. *Théorèm d'algèbre*, Journal de Math. Spec. 9, pp. 12-13.

[45] Doroslovački K., 2014. *Generalizovana dijagonalna dominacija za blok matrice i mogućnosti njene primene*, Doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet Novi Sad.

[46] Duffin R.J., 1955. *A minimax theory for overdamped networks*, Journal of Rational Mechanical Analysis 4, pp. 221-233.

[47] Dunford N., Schwartz J., 1958. *Linear Operators I, II, III*, Interscience, New York.

[48] Ellis R., 2005. *No Turning Back: The Life and Death of Animal Species*, Harper Perennial, New York.

[49] Embree M., Carden R., 2012. *Pseudospectra and Nonnormal Dynamical Systems*, Computational and Applied Mathematics, ELGERSBURG, lecture slides, available at:
https://www.tu-ilmenau.de/fileadmin/media/math/Tagungen/ElgSchool2012/lecture1.pdf

[50] Fan K., 1958. *Note on circular disks containing the eigenvalues of a matrix*, Duke Mathematical Journal 25, pp. 441-445.

[51] Fiedler M., Ptak V., 1962. *Generalized norms of matrices and the location of the spectrum*, Czechoslovak Mathematical Journal 12 (87), pp. 558-571.

[52] Frayssé M., Gueury F., Nicoud and Toumazou V., 1996. *Spectral portraits for matrix pencils*, Technical Report TR/PA/96/19, CERFACS, Toulouse, France.

[53] Frayssé M., Toumazou V., 1998. *A note on the normwise perturbation theory for the regular generalized eigenproblem*, Numerical Linear Algebra with Applications 5(1), pp. 1-10.

[54] Frazer R. A., Duncan W. J., Collar A. R., 1938. *Elementary Matrices and some applications to dynamics and differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge.

[55] Fourieur J.B.J., 1822. *Théorie analytique de la chaleur*, Chez Firmin Didot, père et fils, available at: *https://archive.org/stream/thorieanalytiqu00fourgoog/page/n21/mode/2up.*

[56] Gan T. B., Huang T. Z., 2003. *Symple criteria for nonsingular H-matrices*, Linear Algebra and its Applications 374, pp. 317-326.

[57] Gao Y.M., Xiao H.W., 1992. *Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices*, Linear Algebra and its Applications 169, pp. 257-268.

[58] Gao Y.M., Xiao H.W., 1996. *Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices. II*, Linear Algebra and its Applications 248, pp. 339-353.

[59] Gardašević D., 2012. *Razni pravci generalizacije dijagonalne dominacije*, Master rad, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad.

[60] Geršgorin, S., 1931. *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Izvor Akademija Nauka SSSR Ser. Mat. 1, pp. 749-754.

[61] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L., 1982. *Matrix polynomials*, Academic press, New York.

[62] Gohberg I. C., Kreyn M. G., 1969. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, American Mathematical Society, Providence, RI.

[63] Golub G.H, Van Loan C.F., 1996.*Matrix Computations, third edition*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.

[64] Guo J.S., Lin W.W., Wang C.S., 1995. *Numerical solutions for large sparse eigenvalue problems*, Linear Algebra and Applications 225, pp. 57-89.

[65] Hadamard, J., 1903. *Leçons sur la propagation des ondes*, Hermann et fils, Paris, reprinted in (1949) by Chelsea, New York.

[66] Halmos P.R., 1982. *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd. edition, Springer-Verlag, New York.

[67] Harris C.M., Piersol Allan G., 2002. *Harris' shock and vibration handbook*, 5th Ed., McGraw Hill.

[68] Heeg R., 1998. *Stability and transition of attachment-line ow*, Ph.D. Thesis, Universiteit Twente, Enschede, The Netherlands.

[69] Higham D.J., Higham N.J., 1998. *Structured backward error and condition of generalized eigenvalue problems*, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications 20, pp. 493-512.

[70] Higham N.J., Kim H-M., 2000. *Numerical solution of quadratic matrix equation*, IMA Journal of Numerical Analysis 20, pp. 499-519.

[71] Higham N. J.,Tisseur F., 2002. *More on pseudospectra for polynomial eigenvalue problems and applications in control theory*, Linear Algebra and its Applications 351-352, pp. 435-453.

[72] Higham N., 2006. *Review of Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators, by Lloyd N. Trefethen and Mark Embree. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2005*, Manchester Institute for Mathematical Sciences School of Mathematics, The University of Manchester, EPrint:2006.133, available at $http://eprints.ma.man.ac.uk/303/01/covered/MIMS\_ep2006\_133.pdf$

[73] Higham N.J., Mackey D.S., Tisseur F., Garvey S.D., 2008. *Scaling, sensitivity and stability in the numerical solution of quadratic eigenvalue problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 73, pp. 344-360.

[74] Hochstenbach M.E., 2003. *Subscpace methods for eigenvalue problems*, Phd thesis at Faculty of Mathematics and Computer Science, Utrecht University, Holland.

[75] Hochstenbach M.E.,Singer D. A.,Zachlin P. F., 2008. *Eigenvalue inclusion regions from inverses and of shifted matrices*, Linear Algebra with Applications 429, pp. 2481-2496.

[76] Hoffnung L, 2004. *Subspace projection methods for the quadratic eigenvalue problem*, Phd dissertation at College of Arts and Sciences at the University of Kentucky, Lexington, Kentucky.

[77] Householder A. S., Varga R. S., Wilkinson J. H., 1972. *A note on Gerschgorin's inclusion theorem for eigenvalues of matrices*, Numerical Mathematics 16, pp. 141-144.

[78] Huang T.-Z., 1995. *A note on generalized diagonally dominant matrices*, Linear Algebra and Applications 225, pp. 237-242.

[79] Huang T.-Z., Shen S.-Q., 2006. *Regions containing eigenvalues of a matrix*, Electronical Journal of Linear Algebra 15, pp. 215-224.

[80] Jacobi C. G. J., 1846. *Uber ein leichtes Verfahren die in der Theorie der äculärstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, pp. 30-51.

[81] James K., Riha W., 1975. *Convergence criteria for successive overrelaxation*, SIAM Journal of Numerical Analysis 12 (2), pp. 137-143.

[82] Jamshidi M., Tarokh M., Shafai B., 1992. *Computer aided analysis and design of linear control systems*, Prentice Hall, New Jersey.

[83] Jarlebring E., Michiels W., 2010. *Invariance properties in the root sensitivity of time-delay systems with double imaginary roots*, Automatica 46, pp. 1112-1115.

[84] Jarlebring E., Michiels W., Meerbergen K., 2012. *A linear eigenvalue algorithm for the nonlinear eigenvalue problem*, Numerische Mathematik 122, pp. 169-195.

[85] Kamgnia E., Phillppe B., 2013. *Counting eigenvalues in domains of the complex field*, Electronic Transactions on Numerical Analysis 40, pp. 1-16.

[86] Kato T., 1976. *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York.

[87] Kostić V., Cvetković Lj., Varga R.S., 2009. *Geršgorin-type localizations of generalized eigenvalues*, Numerical Linear Algebra with Applications 16, pp. 883-898.

[88] Kostić, V., 2010. *Benefits from the generalized diagonal dominance*, Phd dissertation at Department of mathematics and Informatics, Faculty of science at the University of Novi Sad.

[89] Kostić V., Varga R.S., Cvetković Lj., 2012. *Localization of Generalized Eigenvalues by Cartesian Ovals*, Numerical Linear Algebra with Applications 19 (4), pp. 728-741.

[90] Kostić V., Cvetković Lj., Krukier L., 2013. *Matrix nonsingularity and diagonal dominance property* (in Russian), Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennie nauki 3, pp. 16-18.

[91] Kostić V., 2015. *On general principles of eigenvalue localizations via diagonal dominance*, Advances in Computational Mathematics 41(1), pp. 55-75.

[92] Kostić V., Cvetković Lj., Cvetković D., 2016. *Pseudospectra localizations and their applications*, Numerical Linear Algebra with Applications 23(2), pp. 356-372.

[93] Kostić V., Gardašević D., 2018. *On the Geršgorin-type localizations for nonlinear eigenvalue problems*, Applied Mathematics and Computations 337, pp. 179-189.

[94] Kostin V.I., Razzakov S.I., 1985. *On convergence of the power orthogonal method of spectrum computing*, Trans. Inst. Math. Sib. Branch Acad. Sci. 6, pp. 55-84.

[95] Kozanek J., 2002. *Resolvent of matrix polynomials, pseudospectra and inversion problems*, Selçuk Journal of Applied Mathematics 3 (1), pp. 49-80.

[96] Kreiss H.O., 1962. *Über die Stabilitätsdefinition für Differenzengleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren*, BIT 2, pp. 153-181.

[97] Kressner D, 2009. *A block Newton method for nonlinear eigenvalue problems*, Numerische Mathematik 114, pp. 355-372.

[98] Kublanovskaya V.N., 1969. *On an application of Newton's method to the determination of eigenvalues of λ-matrices*, Soviet Math. Dokl. 10, pp. 1240-1241.

[99] Kublanovskaya V.N., 1970. *On an approach to the solution of the generalized latent value problem for λ-matrices*, SIAM Journal of Numerical Analysis 7, pp. 532-537.

[100] Kukelova Z., Bujnak M., Pajdla T., 2008. *Polynomial eigenvalue solutions to the 5-pt and 6-pt relative pose problems*, u BMVC.

[101] Lancaster P., 2002. *Lambda matrices and Vibrating systems*, Pergamon Press, Oxford, 1966 and Dover publications, New York.

[102] Lancaster P., Psarrakos P., 2005. *On the pseudospectra of matrix polynomials*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 27 (1), pp. 115-129.

[103] Lancaster P., 2013. *Stability of linear gyroscopic Systems: A review*, Applied Linear Algebra and Applications 439, pp. 686-706.

[104] Lanczos C., 1950. *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators*, J. Res. Nat. Bur. Stand. 45 (4), pp. 255-282.

[105] Landau H.J., 1975. *On Szegő's eigenvalue distribution theorem and non-Hermitian kernels*, Journal of Analyse Math. 28, pp. 335-357.

[106] Lavalleé P.-F., 1997, *Nouvelles aproches de calcul du ε spectre de matrices at de Faisceaux de matrices*, Phd. Thesis, L'Université de Rennes, Rennes, France.

[107] Lavalleé P.-F., Sadkane M., 1998. *Pseudospectra of linear matrix pencils by block diagonalization*, Computing 60, pp. 133-156.

[108] Lévy, L., 1881. *Sur le possibilité du l'equlibre électrique*, C. R. Acad. Paris 93, pp. 706-708.

[109] Li B., Tsatsomeros M. J., 1997. *Doubly diagonally dominant matrices*, Linear Algebra and Applications 261, pp 221-235.

[110] Lin S. Y., Chow E., Johnson S. G., Joannopoulos J. D., 2000. *Demonstration of highly efficient waveguiding in a photonic crystal slab at the $1.5\mu m$ wavelenght*, Optics Letters 25(17), pp. 1297-1299.

[111] Loewy R., 1971. *On a theorem about the location of eigenvalues of matrices*, Linear Algebra and its Applications 4, pp. 233-242.

[112] Mackey D.S., Mackey N., Mehl C., Mehrmann V., 2006. *Structured polynomial eigenvalue problems: Good vibrations from good linearizations*, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications 28, pp. 1029-1051.

[113] Manocha D., Demmel J., 1994. *Algorithms for intersecting parameteric and algebraic curves I: simple intersections*, ACM Transactions on Graphics 13, pp. 73-100.

[114] Manocha D., Demmel J., 1995. *Algorithms for intersecting parametric and algebraic curves II: multiple intersections*, Graphical Models and Image Processing 57, pp. 81-100.

[115] Marcus A.,S., 1988. *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, American Math. Society, Providence, Transl. of Math Monographs 71, pp. 229-246.

[116] Marcus M., Minc H., 1964. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Allyn and Bacon, Boston.

[117] Mehrmann V., Watkins D., 2002. *Polynomial eigenvalue problems with Hamiltonian structure*, Electronic Transactions on Numerical Analysis 13, pp. 106-113.

[118] Mengi E., 2006. *Measures for robust stability and controllability*, PHD dissertation, Department of Computer Science, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York.

[119] Meerbergen K., Spence A., Roose D., 1994. *Shift-invert and cayley transforms for detection of rightmost eigenvalues of nonsymmetric matrices*, BIT 34, pp. 409-423.

[120] Michiels W., Green K., Wagenknecht T., Niculescu S.I., 2006. *Pseudospectra and stability radii for analytic matrix functions with application to time-delay systems*, Linear Algebra and its Applications 418, pp. 315-335.

[121] Minkowski, H., 1900. *Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen*, Zahlk orpern.

[122] Nakatsukasa Y., 2011. *Gerğorin's theorem for generalized eigenvalue problems in the Euclidean metric*, Mathematics of Computations 80, pp. 2127-2142.

[123] Näsholm S. P., Holm S., 2013. *On a Fractional Zener Elastic Wave Equation*, Fractional Calculus and Applied Analysis 16 (1), pp. 26-50.

[124] Newman M., 1980. *Geršgorin revisited*, Linear Algebra and its Applications 30, pp. 247-249.

[125] Ostrowski, A.M., 1937. *Uber die Determinanten mit uberwiegender Hauptidiagonale*, Comment. Math. Helv. 10, pp. 69-96.

[126] Ostrowski, A.M., 1951. *Uber das Nichtvercshwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristicshen Wurzeln von Matrizen*, Compozitio Math. 9, pp. 209-226.

[127] Ostrowski, A.M., 1960. *Solution of equations and systems of equations*, Academic Press, New York.

[128] Paige C.C., 1971. *The computation of the eigenvalues and eigenvectors of very large sparse matrices*, Phd. thesis., London University, London.

[129] Rafferty J.P., *Bilby, Enciclopaedia Britanica*, Enciclopaedia Britanica, inc., available at:
$https://www.britannica.com/animal/bilby$.

[130] Reed M., Simon B., 1978. *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press Inc., San Diego, California.

[131] Reidel K.S., 1994. *Generalized epsilon-pseudospectra*,SIAM Journal of Numerical Analysis 31, pp. 1219-1225.

[132] Richard J. P., 2003. *Time delay systems: an overview of some recent advances and open problems*, Automatica 39 (10), pp. 1667-1694.

[133] Rogers E.H., 1964. *A minimax theory for overdamped systems*, Arch. Rational Mech. Anal. 19, pp. 89-96.

[134] Rudin W., 1987. *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York.

[135] Ruhe A., 1973. *Algorithms for the nonlinear eigenvalue problem*, SIAM Journal of Numerical Analysis 10, pp. 674-689.

[136] Rule K., Perry E., Larson V. M., Madaris S., Rose R., Jenkins N., 2006. *Demonstrating diamond wire cutting of the TFTR*, Innovative Technology Summary report for U.S. Department of Energy Office of Environmental Management Office of Science and Technology, Knoxville, Tenessy.

[137] Saad Y., 2003. *Iterative methods for sparse linear systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[138] Saad Y., 2011. *Numerical methods for large eigenvalue problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[139] Schoen G.M., 1995. *Stability and stabilisation of time-delay systems*, PhD thesis at Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

[140] Shapiro L. G¿, Stockman G. C., 2001. *Computer Vision*, Prentice Hall.

[141] Shub M., Smale S., 1996. *Complexity of Bezout's theorem IV: probability of success; extensions*, SIAM Journal of Numerical Analysis 33, pp. 128-148.

[142] Sipahi R., Niculescu S. I., Abdallah C.T., Michiels W.,Gu K. 2011. *Stability and Stabilization of systems with time delay. Limitations and opportunities.*, Stability and stabilization Control Systems Magazine 31 (1), pp. 38-65.

[143] Skogestad S., Postlethwaite I., 2001. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, John Wiley and Sons, second edition.

[144] Sleijpen G.L.G., Booten J.G.L., Fokkema D.R., Van der Vorst H.A., 1996. *Jacobi-Davidson type methods for generalized eigenproblems and polynomial eigenproblems*, BIT 36, pp. 595-633.

[145] Sleijpen G.L.G., Van der Vorst H.A., Van Gijzen M.B., 1996. *Quadratic eigenproblems are no problem*, SIAM News 29, pp. 8-9.

[146] Solovev V. N., 1984. *A generalization of Geršgorins theorem*, Math U.S.S.R. Izvestiya 23, pp. 545-559.

[147] Stewart G. W., 1972. *On the sensitivity of the eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$*, SIAM Journal of Numerical Analysis and Applications 9, pp. 669-686.

[148] Stewart G. W., 1973. *Introduction to Matrix Computations*, Academic Press, New York.

[149] Stewart G. W., 1973. *Error and perturbation bounds for subspaces associated with certain eigenvalue problems*, SIAM Review 15, pp. 727-764.

[150] Stewart G. W., 1976. *A bibliographical tour of the large, sparse, generalized eigenvalue problem*, J. R. Bunch and D. C. Rose, editors, Sparse Matrix Computations, Academic Press, New York, pp. 113-130.

[151] Stewart G. W., Sun J.G., 2000. *Matrix perturbation theory*, Academic Press Inc., Boston, MA.

[152] Stewart G. W., 2001. *Matrix Algorithms II: Eigensystems*, SIAM, Philadelphia.

[153] Sun J.G., 1999. *Perturbation analysis of quadratic eigenvalue problems*, Report UNINF 99.01, Department of Computer Science, Umeå University, Sweden.

[154] Takayama A., 1985. *Mathematical Economics*, 2nd edition., Cambridge University Press.

[155] Tausch J., Butler J., 2000. *Floquet multipliers of periodic waveguides via dirichlet-to-neumann maps*, Journal of Computational Physics 159, pp. 90-102.

[156] Taussky O., 1947. *A method for obtaining bounds for characteristic roots of matrices with applications to flutter calculations*, Aero. Res. Council (Great Britain), Report 10. 508, pp. 1-19.

[157] Taussky O., 1948. *Bounds for the characteristic roots of matrices*, Duke Mathematical Journal 15, pp. 1043-1044.

[158] Taussky O., 1949. *A recurring theorem on determinants*, American Mathematical Monthly 56, pp 672-676.

[159] Tisseur F., 1998. *Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems*, Technical Report NA-332, University of Manchester, Manchester, UK.

[160] Tisseur F., Meerbergen K., 2001. *The quadratic eigenvalue problem*, SIAM Review, Vol.43 (2), pp 235-286.

[161] Tisseur, F., Higham, N.J., 2001. *Structured pseudospectra for polynomial eigenvalue problems, with applications*, Manchester Institute for Mathematical Sciences School of Mathematics, The University of Manchester, MIMS EPrint: 2006.144, pp. 187-208.

[162] Toumazou V., 1996. *Portraits Spectraux de matrices:un outil d'analyse de la stabilité*, Université Henri Poincaré, Nancy-I, France.

[163] Treffeten L.N., 1991. *Pseudospectra of matrices*, reprinted from D.F.Griffits and G.A.Watson(Eds), Numerical Analysis, Longman Scientific and Tehnical, Harlow, Essex, UK, 1992.

[164] Trefethen L. N., 1991. *Pseudospectra of matrices in Numerical Analysis*, Proceedings of the 14th Dundee Conference, D.F. Griffiths and G.A. Watson, eds., Pitman Res. Notes Math. Ser. 260, Longman Scientific and Tehnical, Harlow, UK, pp. 234-266.

[165] Treffeten L.N., 1997. *Pseudospectra of linear operators*, SIAM Review Vol. 39 (3), pp. 383-406.

[166] Trefethen L.N., 1999. *Computation of pseudospectra*, Acta Numerica 8, pp. 247-295.

[167] Treffeten L.N., 2000. *Spectral methods in Matlab*, SIAM, Philadelphia.

[168] Trefethen L.N., Embree M., 2005. *Spectra and pseudospectra*, Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey, USA.

[169] Van der Vorst H., Golub G. H., 1997. *150 years old and still alive: eigenproblems*, The state of the art in numerical analysis (York, 1996), Volume 63 of Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser., pp. 93-119. Oxford University Press, New York.

[170] Van der Vorst H., Golub G. H., 2000. *Eigenvalue computation in the 20th century*, Journal of Computational and Applied Mathematics 123, pp. 35-65.

[171] Van Dorsselaer J. L. M., 1997. *Pseudospectra of matrix pencils and stability of equilibria*, BIT, 37, pp. 833-845.

[172] Van Dorsselaer J. L. M., 2003. *Several concepts to investigate strongly nonnormal eigenvalue problems*, SIAM Journal of Scientific Computing 24, pp. 1031-1053.

[173] Varah J. M., 1975. *A lower bound for the smallest value of a matrix*, Linear Algebra and its Applications 11, pp. 3-5.

[174] Varga R. S., Kraustengl A., 1999. *On Gersgorin-type problems and ovals of Cassini*, ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis) 8, pp. 15-20.

[175] Varga R. S., 2000. *Matrix Iterative Analysis* Second revised and expanded edition, Springer-Verlag, Berlin.

[176] Varga R. S., 2001. *Gerschgorin disks, Brauer ovals of Cassini (a vindication), and Brualdi sets*, Information 4, pp. 171-178.

[177] Varga R. S., 2001. *Gerschgorin-type eigenvalue inclusion theorems and their sharpness*, ETNA 12, pp. 113-133.

[178] Varga R., 2004. *Geršgorin and his circles*, Springer-Verlag, New York.

[179] Varga R.S., Cvetković Lj., Kostić V., 2008. *Approximation of the minimal Geršgorin set of a complex matrix*, ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis) 30, pp. 398-405.

[180] Von Karman T., 1954. *Aerodynamics: Selected Topics in the Light of Their Historical Development*, Cornell University Press, Ithaca, New York.

[181] Wagenkneght T., Agarwal J., 2005. *Structured pseudospectra in structural engineering*, Bristol Laboratory for Advanced Dynamic Engineering, University of Bristol, Queen's Building, University Walk, Bristol, $BS8$ $1TR$, UK.

[182] Wagenknecht T., Green K., 2006. *Pseudospectra and delay differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 196, pp. 567-578.

[183] Yang C., 2005. *Solving large-scale eigenvalue problems in SciDAC applications*, Journal of Physics: Conference Series 16, pp. 425-434. (Proceedings of 2005 SciDAC Conference).

[184] Yuan J.,Lu Y., 2006. *Photonic bandgap calculations with Dirichlet-to-Neumann maps*, Journal of Optical Society America A 23, pp. 3217-3222.