



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Никола Деспотовић

**СТАБИЛНОСТ И ОСЦИЛОВАЊЕ
ЗАПРЕМИНСКИ ОПТЕРЕЋЕНЕ
ПРАВОУГАОНЕ НАНО-ПЛОЧЕ УЗ
КОРИШЋЕЊЕ НЕЛОКАЛНЕ ТЕОРИЈЕ
ЕЛАСТИЧНОСТИ**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2018.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	Монографска публикација
Тип записа, ТЗ:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација
Аутор, АУ:	Никола Деспотовић
Ментор, МН:	Др Ратко Маретић, редовни професор
Наслов рада, НР:	Стабилност и осциловање запремински оптерећене правоугаоне нано-плоче уз коришћење нелокалне теорије еластичности.
Језик публикације, ЈП:	Српски
Језик извода, ЈИ:	Српски / Енглески
Земља публикавања, ЗП:	Република Србија
Уже географско подручје, УГП:	Војводина
Година, ГО:	2018
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	8/80/67/15/30
Научна област, НО:	Машинско инжињерство
Научна дисциплина, НД:	Механика
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Нелокална теорија еластичности, нано-плоча, стабилност, осциловање, Галеркинова метода, Метода диференцијалних квадратура
УДК	
Чува се, ЧУ:	У библиотеци Факултета техничких наука у Новом Саду
Важна напомена, ВН:	
Извод, ИЗ:	У овој тези проучене су осцилације и стабилност запремински оптерећене правоугаоне нано-плоче уз коришћење Ерингенове теорије еластичности. Запреминско оптерећење је константно са правцем који је у равни плоче. Гранични услови су моделовани као покретна укљештења. Класична теорија плоча и Карманова теорија плоча, које су надограђене Ерингеновом теоријом еластичности, искоришћене су за формирање диференцијалне једначине стабилности и осциловања нано-плоче. Галеркиновом методом одређене су сопствене фреквенције трансверзалних осцилација нано-плоче у зависности од ефеката запреминског оптерећења и нелокалности. Одређене су критичне вредности параметра запреминског оптерећења при којима нано-плоча губи стабилност. Приказан је утицај ефеката запреминског оптерећења и нелокалности на неколико облика осциловања. Верификација резултата извршена је помоћу методе диференцијалних квадратура.
Датум прихватања теме, ДП:	14.09.2017.
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник: Академик Теодор Атанацковић, проф. емеритус Члан: Др Весна Милошевић Митић, ред. проф. Члан: Др Бранислава Новаковић, ред. проф. Члан: Др Валентин Главарданов, ред. проф. Члан, ментор: Др Ратко Маретић, ред. проф.
	Потпис ментора



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monograph publication
Type of record, TR :	Textual printed material
Contents code, CC :	Ph.D. Dissertation
Author, AU :	Nikola Despotović
Mentor, MN :	Ratko Maretić, PhD, Full professor
Title, TI :	Stability and vibration of rectangular nanoplate under body force using nonlocal elasticity theory
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian / English
Country of publication, CP :	Republic of Serbia
Locality of publication, LP :	Vojvodina
Publication year, PY :	2018
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	8/80/67/15/30
Scientific field, SF :	Mechanical engineering
Scientific discipline, SD :	Mechanics
Subject/Key words, S/KW :	Nonlocal elasticity theory, nanoplate, stability, vibrations, Galerkin's method, differential quadrature method
UC	
Holding data, HD :	Library of the Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
Note, N :	
Abstract, AB :	<p>In this thesis, the problem of stability and vibration of a rectangular single-layer graphene sheet under body force is studied using Eringen's theory. The body force is constant and parallel with the plate. The boundary conditions correspond to the dynamical model of a nanoplate clamped at all its sides. Classical plate theory and von Kármán plate theory, upgraded with nonlocal elasticity theory, is used to formulate the differential equation of stability and vibration of the nanoplate. Natural frequencies of transverse vibrations, depending on the effects of body load and nonlocality, are obtained using Galerkin's method. Critical values of the body load parameter, i.e., the values of the body load parameter when the plate loses its stability, are determined for different values of nonlocality parameter. The mode shapes of nanoplate under influences of body load and nonlocality are presented as well. Differential quadrature method is used for verification of obtained results.</p>
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	14.09.2017.
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	
President:	Academician Teodor Atanacković, prof. Emeritus
Member:	Vesna Milošević Mitić, PhD, Full prof.
Member:	Branislava Novaković, PhD, Full prof.
Member:	Valentin Glavardanov, PhD, Full prof.
Member, Mentor:	Ratko Maretić, PhD, Full prof.
	Mentor's sign

САДРЖАЈ

УВОД	1
1. НАНО-СТРУКТУРЕ	3
1.1. СВОЈСТВА ГРАФЕНА.....	3
1.2. ПРЕГЛЕД РАДОВА ИЗ ОБЛАСТИ КЛАСИЧНЕ И НЕЛОКАЛНЕ ТЕОРИЈЕ ПЛОЧА.....	5
1.2.1. ПРОБЛЕМИ ИЗВИЈАЊА ПЛОЧЕ.....	5
1.2.2. ПРОБЛЕМИ СЛОБОДНОГ ОСЦИЛОВАЊА ПЛОЧЕ.....	6
1.2.3. ПРОБЛЕМИ СЛОБОДНОГ ОСЦИЛОВАЊА И ИЗВИЈАЊА ПЛОЧЕ.....	7
1.2.4. ЗАПРЕМИНСКИ ОПТЕРЕЂЕНЕ КЛАСИЧНЕ ПЛОЧЕ.....	8
2. КИРСНHOFF-ОВА КЛАСИЧНА (ЛОКАЛНА) ТЕОРИЈА ПЛОЧА. ИЗВОЂЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ САВИЈАЊА ПЛОЧЕ КОЈА ЈЕ ПОПРЕЧНО ОПТЕРЕЂЕНА	9
3. ИЗВОЂЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ САВИЈАЊА ПЛОЧЕ УСЛЕД ПОПРЕЧНОГ ОПТЕРЕЂЕЊА СЛОЖЕНОГ СА ОПТЕРЕЂЕЊЕМ У ЊЕНОЈ РАВНИ	17
4. ERINGEN-ОВА НЕЛОКАЛНА ТЕОРИЈА ЕЛАСТИЧНОСТИ	22
5. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА СТАБИЛНОСТИ И ОСЦИЛОВАЊА ЗАПРЕМИНСКИ ОПТЕРЕЂЕНЕ НАНО-ПЛОЧЕ	25
5.1. ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ.....	25
5.1.1. ПОМЕРАЊА И ДЕФОРМАЦИЈЕ ЗА ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ.....	26
5.1.2. ЗАПРЕМИНСКО ОПТЕРЕЂЕЊЕ.....	26
5.1.3. СЛОБОДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ПЛОЧЕ.....	28
5.1.4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА СТАБИЛНОСТИ И ОСЦИЛОВАЊА УЗ УТИЦАЈ НЕЛОКАЛНОСТИ.....	29
5.2. НЕЛИНЕАРНИ <i>VON KÁRMÁN</i> -ОВ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ	33
5.3. НЕЛИНЕАРНИ НЕЛОКАЛНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ	38
6. МЕТОДЕ У РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА ДИНАМИЧКЕ АНАЛИЗЕ НАНО-ПЛОЧЕ	42
6.1. GALERKIN-ОВА МЕТОДА (GM)	42
6.1.1. ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ (GM)	42
6.2. МЕТОДА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ КВАДРАТУРА (DQM).....	46
6.2.1. ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ.....	46
7. КЉУЧНА РАЗМАТРАЊА О СТАБИЛНОСТИ И СЛОБОДНОМ ОСЦИЛОВАЊУ НАНО-ПЛОЧЕ. АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА	54
7.1. ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ.....	55
7.1.1. ВЕРИФИКАЦИЈА РЕЗУЛТАТА	55
7.1.2. АНАЛИЗА ФРЕКВЕНЦИЈА	57
7.1.3. ДИЈАГРАМИ СТАБИЛНОСТИ.....	66
7.1.4. ОБЛИЦИ ОСЦИЛОВАЊА НАНО-ПЛОЧЕ.....	70
8. ЗАКЉУЧАК	74
ЛИТЕРАТУРА	76

СПИСАК СЛИКА

- Слика 1.** Нано-структура: (а) графенски листић (SLGS), (б) нелокални континуум, нано-плоча.
- Слика 2.** Пресек елементарног дела плоче пре и после деформације.
- Слика 3.** Деформација слоја $ABCD$.
- Слика 4.** Елементарни део плоче, и расподела нормалних и тангенцијалних напона и оптерећења.
- Слика 5.** Деловање момената и сила по јединици дужине и оптерећења q на елементарни део плоче.
- Слика 6.** Стварна оптерећења која делују у средњој равни на елементарни део плоче.
- Слика 7.** Пресек елементарног дела плоче пре и после деформације.
- Слика 8.** Нормалне и смичуће силе у пресецима N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} и N_{yx} , и њихови прираштаји и попречно оптерећење q , које се јављају у елементарном делу плоче услед његовог сложеног напрезања.
- Слика 9.** Нано-структура: (а) Дискретна структура материјала. Графенски листић (SLGS), (б) Димензије и померања, (в) Нелокални континуум. Покретно уклештена нано-плоча.
- Слика 10.** Смер инерцијалне силе F_{in1} услед обртања плоче око тачке C константном угаоном брзином ξ .
- Слика 11.** Пример константног запреминског оптерећења услед равномерног кружног обртања плоче.
- Слика 12.** Смер и дејство инерцијалне силе на елементарни део нано-плоче услед слободних осцилација.
- Слика 13.** Приказ облика пробних функција $f_k(\bar{x})$ и $g_l(\bar{y})$ у апроксимативном решењу: (а) функција $g_1(\bar{y})$, (б) функција $g_2(\bar{y})$, (в) функција $g_3(\bar{y})$, (г) функција $g_4(\bar{y})$, (д) функција $f_1(\bar{x})$, (ђ) функција $f_2(\bar{x})$ и (е) функција $f_3(\bar{x})$.
- Слика 14.** Приказ облика пробних функција $f_k(\bar{x})$ и $g_l(\bar{y})$ у апроксимативном решењу: (а) функција $g_1(\bar{y})$, (б) функција $g_2(\bar{y})$, (в) функција $g_3(\bar{y})$, (г) функција $g_4(\bar{y})$, (д) функција $f_1(\bar{x})$, (ђ) функција $f_2(\bar{x})$ и (е) функција $f_3(\bar{x})$.
- Слика 15.** Квадратна плоча $\alpha = 1$. Зависност бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : (а) за мод $(0,0)$, (б) за мод $(1,0)$, (в) за мод $(0,1)$, (г) за мод $(1,1)$, (д) за мод $(2,0)$ и (ђ) за мод $(0,2)$.

- Слика 16.** Правоугаона плоча $\alpha = 0.7$. Зависност бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : (а) за мод $(0,0)$, (б) за мод $(1,0)$, (в) за мод $(0,1)$, (г) за мод $(1,1)$, (д) за мод $(2,0)$ и (ђ) за мод $(0,2)$.
- Слика 17.** Правоугаона плоча $\alpha = 0.5$. Зависност бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : (а) за мод $(0,0)$, (б) за мод $(1,0)$, (в) за мод $(0,1)$, (г) за мод $(1,1)$, (д) за мод $(2,0)$ и (ђ) за мод $(0,2)$.
- Слика 18.** Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (а) за модове $(2,0)$ и $(1,1)$.
- Слика 19.** Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (а) за модове $(1,1)$ и $(0,2)$.
- Слика 20.** Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (а) за модове $(0,2)$ и $(2,0)$.
- Слика 21.** Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (в) за модове $(0,1)$ и $(2,0)$.
- Слика 22.** Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$, (г) за модове $(0,0)$ и $(1,0)$.
- Слика 23.** Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$, (г) за модове $(0,1)$ и $(2,0)$.
- Слика 24.** Приказ зависности бездимензијског параметра фреквенције $\bar{\omega}$ и бездимензијског параметра нелокалности $\bar{\mu}$: (а) за случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (б) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (в) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$.
- Слика 25.** Укупни дијаграми стабилности приликом промене бездимензијског параметара нелокалности $\bar{\mu}$ и запреминског оптерећења β : (а) за случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (б) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (в) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$.
- Слика 26.** Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод $(0,0)$, за случај квадратне плоче $\alpha = 1$: (а) уз одсуство параметра нелокалности, (б) приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења.
- Слика 27.** Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод $(0,0)$, приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења: (а) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (б) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$.

- Слика 28.** Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод **(1,0)**, за случај квадратне плоче $\alpha = 1$: (а) уз одсуство параметра нелокалности, (б) приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења.
- Слика 29.** Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод **(1,0)**, приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења:
(а) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (б) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$.
- Слика 30.** Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод **(0,1)**, за случај квадратне плоче $\alpha = 1$: (а) уз одсуство параметра нелокалности, (б) приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења.

СПИСАК ТАБЕЛА

- Табела 1.** Карактеристике графенског листића.
- Табела 2.** Вредности коефицијената за пробне функције (6.1.3) и (6.1.4). Слика 13.
- Табела 3.** Вредности коефицијената за пробне функције (6.1.3) и (6.1.4). Слика 14.
- Табела 4.** Квадратна нано-плоча. Провера конвергенције решења *Galerkin*-овом методом (**GM**), услед спојеног ефекта бездимензијских параметара нелокалности $\bar{\mu} = 0.002$ и запреминског оптерећења $\beta = 60$.
- Табела 5.** Квадратна нано-плоча. Провера конвергенције решења на основу методе диференцијалних квадратура (**DQM**), услед спојеног ефекта бездимензијских параметара нелокалности $\bar{\mu} = 0.002$ и запреминског оптерећења $\beta = 60$.
- Табела 6.** Упоредивање вредности сопствених фреквенција израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**) и методом диференцијалних квадратура (**DQM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 1$ и правоугаоне плоче, $\alpha = 0.7$ и $\alpha = 0.5$, са вредностима добијеним у раду *Leissa* [34, 1969].
- Табела 7.** Вредности бездимензијских фреквенција добијене *Galerkin*-овом методом (**GM**), за случај квадратне плоче $\alpha = 1$, уз одсуство параметра запреминског оптерећења.
- Табела 8.** Вредности бездимензијских фреквенција добијене *Galerkin*-овом методом (**GM**), за случај квадратне плоче $\alpha = 0.7$, уз одсуство параметра запреминског оптерећења.
- Табела 9.** Вредности бездимензијских фреквенција добијене *Galerkin*-овом методом (**GM**), за случај квадратне плоче $\alpha = 0.5$, уз одсуство параметра запреминског оптерећења.
- Табела 10.** Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 1$.
- Табела 11.** Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 0.7$.
- Табела 12.** Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 0.5$.

Табела 13. Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**), и методом диференцијалних квадратура (**DQM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 1$.

Табела 14. Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**), и методом диференцијалних квадратура (**DQM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 0.7$.

Табела 15. Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**), и методом диференцијалних квадратура (**DQM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 0.5$.

УВОД

Истраживања на пољу нано-структура у протеклих неколико година у свету у наглум су порасту. Она су посвећена детаљном изучавању њихових механичких, хемијских, топлотних и електричних особина. Основни циљ ових истраживања је правилно разумевање њиховог понашања услед статичких и динамичких оптерећења и што боље искоришћавање њихових потенцијала, како би оне убудуће испуниле очекиване задатке приликом развоја микро-електромеханичких система (*micro-electromechanical systems*, MEMS) и нано-електромеханичких система (*nano-electromechanical systems*, NEMS).

Приступи изучавања механичких особина нано-структура могу се поделити у две групе. Први приступ у њиховој детаљној анализи заснован је на експерименталним методама. Код изучавања механичких особина нано-структура он је најзахтевнији, јер испитивање модела на микро- и нано-скали није нимало лак задатак. Оно захтева изузетно скупу опрему и изискује дуго времена како би се добили очекивани резултати. Други приступ за моделирање и симулације нано-структура, описан у раду *Guoxin* [23, 2014], дели се на две категорије: *атомистичке симулације на микро- и нано-скали* и *примена механике континуума*. У првој категорији нумеричко испитивање врши се на основу принципа молекуларне динамике, семи-емпиријских метода и првог принципа квантне механике. Од ове три врсте принципа најефикаснији је принцип молекуларне динамике (*molecular dynamics* (MD)) јер је он у могућности да обухвати већи систем атома и молекула у прорачун, и да тако испита механичке особине нано-структура, за разлику од преостала друга два који се могу применити на само мали систем атома и молекула, док су притом изузетно скупи. Владајући ставови у бројним истраживањима указују на битност развијања теоријских модела применом механике континуума, која у великој мери олакшава испитивање статичке и динамичке анализе нано-структура користећи теоријски модел, који поређењем са методама молекуларне динамике даје задовољавајуће резултате.

Нано-структуре као што су нано-плоче, нано-штапови и нано-цеви, чест су предмет изучавања у литератури. Анализирање нано-структура класичном теоријом еластичности, код које је напон у посматраној тачки функција од деформације у тој посматраној тачки, није довољно како би се пружио жељени резултат. Класична теорија еластичности не узима у обзир ефекте на малој скали. Код нано-структура ови ефекти на малој скали имају велики утицај на њихово понашање. Ти ефекти се односе на дуг опсег интеракција између атома и не могу се занемарити. Користећи *Eringen*-ову нелокалну теорију еластичности, описану у радовима *Eringen* [18, 1983] и *Eringen* [19, 2002], формира се задовољавајући теоријски модел који обухвата ефекте на малој

скали, код кога је у прорачуну обухваћена дискретна структура материјала, и код кога је напон у посматраној тачки функција од поља деформација у свакој тачки домена.

Због конструисања техничких уређаја, детаљно испитивање проблема стабилности и осцилација представља саставни део прорачуна како би им се убудуће омогућио несметан и сугуран рад. Ако испитујемо моделе плоча које су униаксијално или биаксијално оптерећене, одређује се критична сила извијања, која плочу доводи у нестабилно стање. Код проблема слободних осцилација плоча неопходно је одредити сопствене фреквенције са којима она осцилује.

Међутим, анализирајући моделе плоча на микро- и нано-скали ови проблеми добијају нову форму јер се анализира дискретна структура материјала која као последицу уводи у прорачун нелокални параметар који фигурише у конститутивним релацијама.

Предмет изучавања у овом раду је механичко понашање нано-структуре, односно графенског нано-листића теоријски моделираног као нано-плоча. Направиће се детаљна анализа линеарног динамичког понашања покретно уклештене нано-плоче (квадратне и правоугаоне) која је запремински оптерећена и слободно осцилује. Диференцијална једначина стабилности и осциловања сложено оптерећене нано-плоче формираће се на основу *Kirchhoff*-ове и *von Karman*-ове класичне теорије плоча, које се надограђују *Eringen*-овом нелокалном теоријом еластичности.

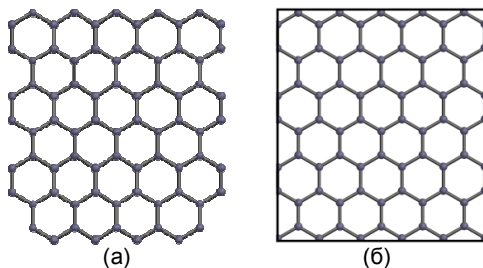
У наставку текста биће образложена структура рада. Прво поглавље посвећено је нано-структурама, где ће бити речи о графену и прегледу радова из области класичне и нелокалне теорије плоча. Друго поглавље односи се на *Kirchhoff*-ову класичну теорију плоча и на формирање диференцијалне једначине савијања плоче која је попречно оптерећена. У трећем поглављу, такође коришћењем *Kirchhoff*-ове теорије, биће формирана диференцијална једначина савијања плоче услед попречног оптерећења сложеног са оптерећењем у њеној равни. У четвртом поглављу биће представљена *Eringen*-ова нелокална теорија еластичности, којом ће се надоградити *Kirchhoff*-ова и *von Karman*-ова теорија плоча. У петом поглављу, на основу *Eringen*-ове теорије еластичности, формираће се диференцијална једначина стабилности и осциловања уз утицај нелокалности, за линеарни и нелинеарни *von Karman*-ов теоријски модел покретно уклештене нано-плоче. У шестом поглављу биће описане *Galerkin*-ова метода (*Galerkin method*, GM) и метода диференцијалних квадратура (*differential quadrature method*, DQM), помоћу којих се решава диференцијална једначина уз нелокални утицај за линеарни теоријски модел нано-плоче. У седмом поглављу, за првих неколико модова осциловања правоугаоне и квадратне нано-плоче приказаће се верификација резултата, затим дијаграми зависности бездимензијског параметра запреминског оптерећења, и бездимензијског параметра фреквенције услед присуства ефекта нелокалности, затим дијаграма зависности бездимензијског параметра фреквенције и бездимензијског параметра нелокалности, и приказ укупних дијаграма стабилности. Биће приказани облици осциловања нано-плоче уз присуство ефекта запреминског оптерећења и одсуство ефекта нелокалности и облици осциловања нано-плоче где се јавља њихово спојено дејство. У следећем поглављу биће изнета закључна разматрања и приказ литературе која је коришћена у овој дисертацији. Поглавља 5, 6 и 7, представљају оригинални допринос ове дисертације.

1. НАНО-СТРУКТУРЕ

1.1. СВОЈСТВА ГРАФЕНА

Могућности нано-структура непрекидно привлаче пажњу научне заједнице. Дугогодишње детаљне анализе на пољима нано-структура усмерене су на што тачније предвиђање њихових перформанси како би се испунила очекивана ефикасност нано-уређаја. Једна од најиспитиванијих нано-структура у кругу научне заједнице је графен. Његовим открићем 2004. године, и на основу бројних извршених експерименталних метода, утврђено је да он има изванредне механичке, топлотне, в. *Guoxin* [23, 2014] и електричне особине, в. *Damascelli* и др. [17, 2015] и као такав предњачи у односу на широку лепезу материјала који се нуде у савременој индустрији.

Графен је дводимензионална нано-структура дебљине једнога атома. Он је од чистог угљеника (C) и његови атоми су међусобно повезани у хексагоналну решетку. Дебљина његовог слоја износи 0.335 nm. На основу модификоване механике континуума у литератури се изучавају случајеви када се посматра само један лист графена (*single-layer graphene sheet*, SLGS), приказан на слици 1(а), који се теоријски моделира као нелокални континуум приказан на слици 1(б). У другом случају посматра се вишеслојна графенска нано-структура (*multi-layered graphene sheets*, MLGSs) коју сачињава више једнослојних графенских нано-листића.



Слика 1. Нано-структура: (а) графенски листић (SLGS), (б) нелокални континуум, нано-плоча.

E	Young-ов модул еластичности	1 TPa
ν	Poisson-ов коефицијент	0.3
σ_{int}	Затезна чврстоћа	130 GPa
ρ	Запреминска густина	2250 kg/m ³
h	Дебљина графенског листића	0.335 nm
D	Савојна крутост нано-плоче	3.4428×10 ⁻¹⁸ Nm

Табела 1. Карактеристике графенског листића.

Механичка својства графенског листића могу се видети у табели 1. На основу експерименталних метода измерен је Young-ов модул еластичности и он се у литератури углавном узима да је $E = 1$ TPa, док су нумеричким симулацијама одређене вредности Poisson-овог коефицијента у опсегу 0.16–0.46 (у радовима се обично узима вредност $\nu = 0.3$) и затезне чврстоће σ_{int} (*intrinsic strength*) која је у просеку око 130 GPa, в. *Guoxin* [23, 2014].

Карактеристике овакве нано-структуре имале би значајну примену у развијању технологије за будуће бежичне уређаје, в. *Huang* и др. [27, 2015], код сензора

притиска, в. *Arsat* и др. [6, 2009], и као филтер за пречишћавање загађене воде, в. *Akbari* и др. [7, 2016]. Користећи графен, развијен је нови приступ код испитивања сигурносних уређаја у авиоиндустрији који препознају нежељена оптерећења која проузрокују микро-пукотине у појединим деловима и које доводе до лома материјала, в. *Gao* и др. [24, 2017], а може бити и као ојачање у композитима где би њихова примена пронашла значајно место у ауто- и авиоиндустрији, в. *Lee* и др. [35, 2010].

Поред нано-структуре од графена постоје још и хетероструктуре, чији је распоред атома у кристалној решетки такође хексагоналан и које представљају комбинацију различитих дводимензионалних нано-структура дебљине једнога атома, које су повезане *van der Waals*-овим силама. Пошто је фамилија 2D структура у константном порасту, њиховом комбинацијом могле би се добити одговарајуће наменске хетероструктуре које би биле револуционарне као графен и одговарале на захтеве индустрије. Међутим, и њихов проблем масовне производње истоветан је као код графена, в. *Novoselov* и др. [47, 2016]. Ако узмемо у обзир могућности и предности нано-структура, онда је неопходна примена метода који ће обезбедити производњу високо квалитетног слоја нано-структуре.

Метод који данас у свету пружа производњу високо квалитетног слоја нано-структуре је хемијска депозиција парне фазе (*chemical vapor deposition method*) или CVD-метод, код кога се врши наношење гасног реактанта на супстрат (подлогу). Овај метод је заснован на сједињавању молекула гаса у реакционој комори која је у почетку подешена на собну температуру. Када сједињени молекули гаса дођу у контакт са супстратом, који је у загрејаној реакционој комори, долази до настанка реакције, и на површини супстрата појављује се слој материјала који треба да обухвати цео супстрат. Код ове методе битни параметри су запремина гаса, притисак, температура и време трајања, али температура супстрата у реакционој комори је од виталног значаја за настајање високо квалитетног слоја материјала (нано-структуре). Оно што битно издваја овај метод јесте могућност настајања површина са већим скалама од оних првобитних на нано-скали. На основу CVD-методе може се створити веома квалитетан слој графена. Супстрат у реакционој комори мора бити прецизно израђен како би се након процеса добила једнака дебљина слоја насталог материјала. Као супстрат може се користити бакар (Cu), в. *Alexeev* и др. [8, 2017]. Међутим, методом епитаксијалног раста (*epitaxial growth*) графен расте на рутенијуму (Ru) и не добија се прецизан узорак са равномерном дебљином, што може ослабити његове карактеристике, в. *Sutter* и др. [55, 2008]. Мана методе епитаксијалног раста је та што се не могу добити велике површине графенског слоја.

Оно што остају као једни од главних задатака на пољу нано-структура јесте:

- стварање високо квалитетних површина нано-структура и хетероструктура, како би оне убудуће испуниле своје перформансе суочавајући се са захтевима индустрије,
- прецизном израдом постићи једнаку дебљину слоја материјала,
- могућност стварања материјала од нано-скала ка вишим скалама као и могућност масовне производње, в. *Privman* и *Yan* [50, 2016].

1.2. ПРЕГЛЕД РАДОВА ИЗ ОБЛАСТИ КЛАСИЧНЕ И НЕЛОКАЛНЕ ТЕОРИЈЕ ПЛОЧА

Истражујући проблеме слободног осциловања и стабилности у класичној и нелокалној теорији плоча, циљ је одредити основну фреквенцију са којом плоча осцилује и критичну силу, при којој ће доћи до извијања плоче и довести је у нестабилно стање. Међутим, постоји битна разлика у овим теоријама приликом анализе слободног осциловања и стабилности плоче, која настаје приликом посматрања дискретне структуре материјала код нелокалне теорије плоча. Наиме, дискретна структура материјала узима у обзир утицај међумолекуларних сила или тзв. *нелокални утицај* при анализи слободног осциловања и стабилности плоча чије су димензије на микро- и нано- скали, које се оправдано зову микро- или нано-плоче. Овај нелокални утицај појављује се у диференцијалним једначинама кретања система као *нелокални ефекат* или *параметар нелокалности*, о коме ће касније бити више речи.

Изучавајући механичко понашање код графенских нано-структура, посматрајући графенски нано-листић, SLGS, који се теоријски моделира као нано-плоча, на основу Eringen-ове теорије еластичности, усваја се да је њена дебљина константна, осим у анализи где је њена промена у дебљини посебно наглашена, в. *Anjomshoa* и др. [1, 2013], и анализи где се посматра композитна нано-плоча сачињена од различитих материјала (*functionally graded materials*, FGM), в. *Sahmani* и др. [58, 2015], *Daneshmehr* и др. [16, 2014]. Поред изучавања једнослојних графенских листића, анализирају се двослојни (*double-layered graphene sheets*, DLGSs) и вишеслојни графенски листићи (*multi-layered graphene sheets*, MLGSs), код којих се интеракција између слојева графена врши помоћу *van der Waals*-ових сила (vdW), које представљају хемијске везивне силе и које се у радовима посебно теоријски моделирају, в. *Pradhan* и *Phadikar* [49, 2009], и *Azhari* и *Sarrami-Foroushani* [4, 2014]. Поред анализе ових нано-структура, постоје још и анализе механичког понашања нано-система (*multi-nanoplate system*, MNPS), који су сачињени од више једнослојних графенских листића, који су међусобно вискоеластично повезани, в. *Kozić* и др. [31, 2014], чија је међусобна веза моделована опругама, в. *Murmu* и др. [42, 2014], *Kozić* и др. [32, 2015]. У наставку следи приказ радова из класичне и некласичне теорије плоча.

1.2.1. ПРОБЛЕМИ ИЗВИЈАЊА ПЛОЧЕ

Babaei и *Shahidi* [10, 2011] проучили су утицај нелокалног параметра на извијање нано-плоче, SLGS, облика ромба, трапеза, квадрата и правоугаоника користећи *Galerkin*-ов метод. *Daneshmehr* и др. [16, 2014] испитивали су стабилност биаксијално оптерећене FGM нано-плоче, уз коришћене теорије вишег реда која је надограђена нелокалном теоријом еластичности. Утицај нелокалности на извијање вишеслојне нано-плоче, MLGSs, при неравномерном биаксијалном оптерећењу користећи *von Karman*-ов модел, показан је у раду *Farajpour* и др. [20, 2013]. Такође користећи *von Karman*-ов модел, *Golmakani* и *Rezatalab* [22, 2014] изучавали су нелинеарно понашање правоугаоне ортотропне нано-плоче, SLGS, која је изложена равномерном

трансверзалном оптерећењу и која се ослања на *Pasternak*-ову еластичну подлогу. Критичне температуре за *Kirchhoff*-ов и *Mindlin*-ов моделе нано-плоче при којима долази до њиховог извијања, одређене су у раду *Wang* и др. [65, 2013]. Користећи *von Karman*-ов модел, аутори *Mohammadi* и др. [38, 2014] су на основу модификоване механике континуума, анализирали проблем извијања аксијално напрегнуте нано-плоче, SLGS. Анализа извијања осносиметричне и асиметричне кружне и прстенасте *Mindlin*-ове нано-плоче користећи *Eringen*-ову теорију еластичности, показана је у раду аутора *Bedroud* и др. [11, 2013]. *Karamooz* и *Shahidi* [30, 2013] показали су да је утицај нелокалног параметра на извијање осносиметричне кружне прстенасте нано-плоче више израженији кад је она укљештена него кад је зглобно ослоњена. Примена нелокалне теорије на извијање ортотропне нано-плоче, SLGS, при неравномерном оптерећењу у њеној равни, показана је од стране аутора *Farajpour* и др. [21, 2012]. *Mohammadimehr* и др. [43, 2016] применили су нелокалну теорију на нелинеарни проблем извијања изотропне и ортотропне нано-плоче користећи *von Karman*-ов модел. Испитивање микроструктурних ефеката на извијање зглобно ослоњене нано-плоче, показано је у раду *Shaaf* и др. [56, 2014]. *Wang* и др. [66, 2015] приказали су детаљно извођење једначина нелокалне механике континуума за проблеме извијања нано-плоче и нано-штапова. У раду аутора *Murmu* и др. [44, 2013], користећи нелокалну теорију еластичности, показана је анализа извијања за случај униаксијално и биаксијално оптерећене дупле нано-плоче, DLGSs. Анализа термалног извијања укљештене правоугаоне плоче може се видети у раду аутора *Al-Khaleefi* и *Kabir* [5, 2003].

1.2.2. ПРОБЛЕМИ СЛОБОДНОГ ОСЦИЛОВАЊА ПЛОЧЕ

Chakraverty и *Behera* [14, 2014] су коришћењем *Rayleigh-Ritz*-овог метода и нелокалне теорије еластичности анализирали слободне осцилације правоугаоне нано-плоче, SLGS, за два типа укљештења, и за прва три мода приказали облике осциловања.

Коришћењем нелокалне теорије еластичности, аутори *Hosseini-Hashemi* и др. [25, 2013], одредили су природне фреквенције *Mindlin*-ове правоугаоне нано-плоче користећи *Levy*-ев тип решења, а нелокални ефекат је испитан за више граничних услова. *Ikhani* и др. [28, 2015] су на основу методе простирања таласа у анализи вибрација, за различите граничне услове одредили природне фреквенције правоугаоне нано-плоче, SLGS. Нелокални ефекти истражени су у раду од стране аутора *Ng* и др. [46, 2013], који су користећи нумеричке симулације и модификовану механику континуума испитивали проблем слободног осциловања правоугаоне нано-плоче, SLGS. *Anjomshoa* и др. [1, 2013] су на основу нелокалне теорије еластичности анализирали ортотропну нано-плочу са променљивом дебљином, и испитали утицај нелокалног параметра на њене слободне осцилације. У раду аутора *Cho* и др. [15, 2015], за два типа граничних услова урађена је анализа слободних и принудних осцилација правоугаоне плоче и укрупњених панела. Анализа слободног осциловања нелокалног *Mindlin*-овог прстенастог одсечка проучена је од стране аутора *Sari* [53, 2015], који је показао да су ефекти нелокалности више израженији у вишим модовима осциловања. Утицај промене температуре на слободне осцилације нано-плоче, SLGS,

која је ослоњена на еластичну подлогу анализиран је од стране аутора *Rao* и *Biswal* [52, 2015]. У раду *Pradhan* и *Phadikar* [49, 2009], користећи класичну и вишу теорију плоча које су надограђене *Eringen*-овом теоријом, детаљно су испитани нелокални утицај на природне фреквенције зглобно ослоњене једно- и двослојне нано-плоче. Анализа слободних трансверзалних осцилација кружне и прстенасте нано-плоче, SLGS, са различитим граничним условима користећи нелокалну теорију еластичности, спроведена је од стране аутора *Mohammadi* и др. [39, 2013]. Испитивање природних фреквенција зглобно ослоњене ортотропне нано-плоче на коју је прикачена наночестица, где је нано-плоча ослоњена на вискоеластичну подлогу, и уз утицај нелокалности и магнетног поља, показано је од стране аутора *Murmu* и др. [41, 2015]. Аутори *Kozić* и др. [31, 2014] одредили су природне фреквенције нано-система, MNPS, са више зглобно ослоњених ортотропних нано-плоча, SLGSs, које су међусобно вискоеластично повезане. У раду *Malekzadeh* и *Farajpour* [40, 2012] користећи *Galerkin*-ов метод, испитан је ефекат нелокалности на слободне осносиметричне и принудне осцилације кружне једно- и двослојне нано-плоче које су уметнуте у еластични медијум. *Sari* и *Al-Kouz* [57, 2016] одредили су природне фреквенције за случај ортотропне нано-плоче која је неравномерно оптерећена и која се ослоња на еластичну подлогу *Winkler*-овог типа. Проблем динамичког понашања FGM микро/нано-плоче испитан је од стране аутора *Nahvi* и др. [48, 2015]. Аутори *Jafari* и др. [29, 2016] направили су детаљну анализу користећи неколико разних метода, како ефекти величина утичу на осциловање зглобне и укљештене нано-плоче. *Amabili* [9, 2004] је користећи *von Karman*-ов модел проучио нелинеарне осцилације правоугаоне плоче за три типа граничних услова.

1.2.3. ПРОБЛЕМИ СЛОБОДНОГ ОСЦИЛОВАЊА И ИЗВИЈАЊА ПЛОЧЕ

Аутори *Aydogdu* и *Aksencer* [3, 2011] су применом модификоване механике континуума испитивали утицај нелокалног параметра на слободне осцилације и извијање нано-плоче, SLGS, користећи *Navier*-ов и *Levy*-ев тип решења. Нелокалне ефекте услед извијања и слободног осциловања правоугаоне нано-плоче *Levy*-евог типа користећи *Reddy*-еву теорију вишег реда, проучили су *Nazemnezhad* и др. [45, 2015]. У раду аутора *Azhari* и *Sarrami-Foroushani* [4, 2014] посматране су униаксијално оптерећене правоугаоне нано-плоче, SLGSs, и вишеслојне нано-плоче, MLGSs. Акцент је стављен на извијање и слободно осциловање вишеслојне нано-плоче, MLGSs, где се прорачун, уз коришћење нелокалне теорије и уз присуство *van der Waals*-ових сила, знатно отежава. Анализа осциловања и извијања нано-система са више једнослојних графенских нано-плоча, MNPS, чија је међусобна веза моделована опругама, показана је у раду *Murmu* и др. [42, 2014], док је у раду аутора *Kozić* и др. [32, 2015] показан утицај температуре на стабилност и осциловање нано-система, MNPS, са више једнослојних ортотропних графенских нано-плоча, чија је међусобна веза моделована опругама. Посматрајући више граничних услова, проблем слободног осциловања и извијања танке правоугаоне плоче која се ослања на *Pasternak*-ову еластичну подлогу проучен је од стране аутора *Baradaran* и *Dehghan* [12, 2011]. *Sahmani* и др. [58, 2015] испитивали су температурни утицај на стабилност и слободне осцилације FGM нано-плоче.

1.2.4. ЗАПРЕМИНСКИ ОПТЕРЕЂЕНЕ КЛАСИЧНЕ ПЛОЧЕ

Анализе плоча које су запремински оптерећене налазе се у радовима следећих аутора: у радовима аутора *Lai* и *Xiang* [33, 2012] и *Wang* и *Yu* [63, 2009], акценат је стављен на утицај запреминског оптерећења на природне фреквенције услед слободног осциловања плоче. *Maretic* и др. [37, 2010] користећи *Galerkin*-ов метод одредили су критичне вредности параметра запреминског оптерећења плоче при којима губи стабилност и приказани су облици осциловања услед ефекта запреминског оптерећења. Одређивање критичних параметара запреминског оптерећења при којима долази до извијања може се видети код аутора *Wang* и др. [62, 2002] који су користили *Levy*-ев тип решења, и код аутора *Xiang* [67, 2008] који су користили *Ritz*-ов метод. Случај када плоча поред запреминског оптерећења има и додатно оптерећење може се наћи у раду *Wang* [64, 2010].

2. KIRCHHOFF-OVA KLASIČNA (LOKALNA) TEORIJA PLOČA. IZVOĐEŃE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE SAVIJAŃA PLOČE KOJA JE POPREČNO OPTEREĐENA

У овом поглављу формираће се диференцијална једначина савијања плоче услед попречног оптерећења на основу *Kirchhoff*-ове класичне теорије, која тродимензионални проблем своди на дводимензионални проблем. Ова теорија је погодна за испитивање малих угиба плоче, који су мали у поређењу са њеном дебљином.

Код *Kirchhoff*-овог теоријског модела посматра се *средња раван плоче*. То је x, y -раван која полови дебљину плоче. Приликом њеног савијања, тачке те равни добијају мала померања управна на њу, и формирају *еластичну површ плоче* (или средњу површ плоче). Ова померања еластичне површи назваћемо *угибима плоче*. Угиб плоче означен са $w(x, y)$, је трансверзално померање тачака у правцу z -осе, и функција од координата x и y , које леже у њеној средњој равни.

За свођење просторног проблема плоче на равански, *Kirchhoff* је користио следеће хипотезе које дају одређена поједностављења:

1. *Средња раван плоче је раван која је неутрална при савијању, у њој нема деформација. Она је еквивалентна неутралној линији у елементарној теорији штапова. Она је раван која полови дебљину плоче. Услед деловања оптерећења средња раван плоче прелази у еластичну површину плоче.*
2. *Тачке плоче које се налазе на нормали на ту средњу раван пре деформације, остају на нормали на еластичну површину плоче.*
3. *Нормални напон σ_{zz} , у правцу z -осе, занемарљив је у поређењу са остала два нормална компонентална напона σ_{xx} и σ_{yy} .*
4. *Материјал је изотропан, линеарно еластичан и хомоген.*

На основу *Hoоке*-овог закона за равно стање напона, изразићемо компоненте деформације преко нормалних напона:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \quad (2.1)$$

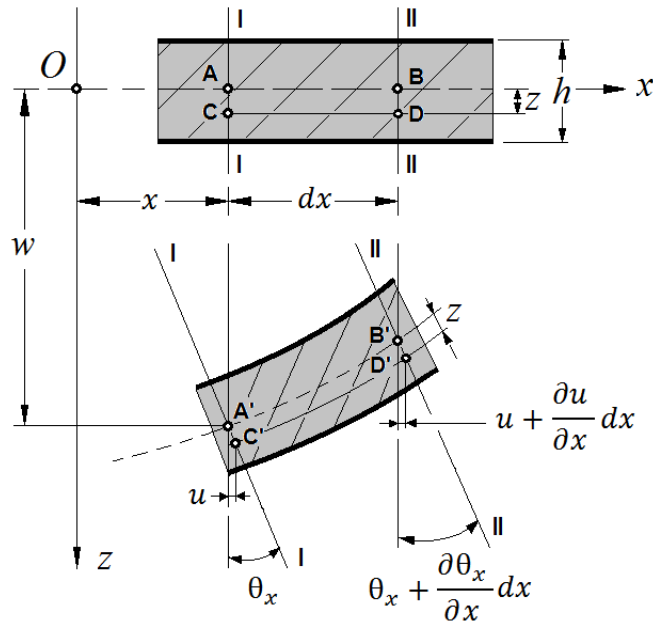
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}). \quad (2.2)$$

У изразима (2.1) и (2.2), ε_{xx} и ε_{yy} су компоненталне деформације у x и y правцу, E представља *Young*-ов модул еластичности, а *Poisson*-ов коефицијент означен са ν .

Множећи израз (2.1) са ν , и сабирајући га са изразом (2.2) добија се компонента нормалног напона σ_{yy} . Аналогно овоме добијамо израз за нормални напон σ_{xx} , тако да је

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), \quad (2.3)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}). \quad (2.4)$$



Слика 2. Пресек елементарног дела плоче пре и после деформације.

На слици 2, приказан је пресек елементарног дела плоче са вертикалном равни паралелном са x -осом, пре и после деформације. Тачке A и B налазе се на средњој равни плоче, док на растојању z од ње налазе се тачке C и D . Услед савијања плоче оне постају A', B', C' и D' .

Користећи другу *Kirchhoff*-ову хипотезу, угао ротације линије I-I, првобитно нормалне на средњу раван плоче, у смеру супротном од казаљке на сату око осе управне на xz -раван, дат је изразом

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.5)$$

На сличан начин је

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.6)$$

Услед тог окретања тачка елемента на одстојању z од средње површи добиће померање u у x -правцу

$$u = z\theta_x \Rightarrow u = -z\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.7)$$

На сличан начин добија се померање v у y -правцу

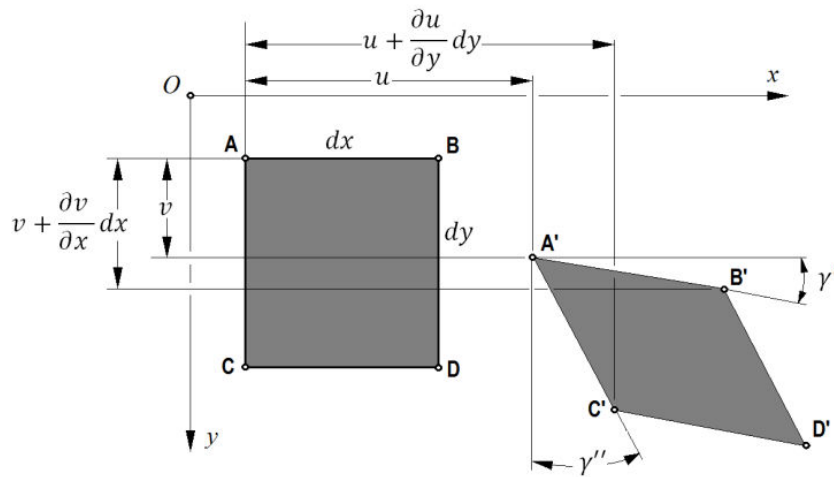
$$v = z\theta_y \Rightarrow v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Израз за компоненталну деформацију ε_{xx} је облика

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\overline{C'D'} - \overline{CD}}{\overline{CD}} = \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.9)$$

На сличан начин је израз за компоненталну деформацију ε_{yy} ,

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.10)$$



Слика 3. Деформација слоја $ABCD$.

Са слике 3, добићемо израз за угао клизања γ_{xy} . Услед савијања плоче, тачке $ABCD$, које се налазе на константном растојању z од средње површи, добијају мала померања. Померање тачке A у правцу x -осе означимо са u док је њено померање у правцу y -осе означено са v . Померање тачке C у правцу x -осе биће $u + (\partial u/\partial y)dy$, а померање тачке B у правцу y -осе биће $v + (\partial v/\partial x)dx$. На основу ових померања добићемо углове γ' и γ'' ,

$$\gamma' dx = \frac{\partial v}{\partial x} dx \Rightarrow \gamma' = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.11)$$

$$\gamma'' dy = \frac{\partial u}{\partial y} dy \Rightarrow \gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.12)$$

тако да је угао клизања γ_{xy}

$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma'' = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.13)$$

Затим, знајући угао клизања следи израз за тангенцијални напон

$$\sigma_{xy} = \gamma_{xy} G. \quad (2.14)$$

Померања u и v , дата изразима (2.7) и (2.8), замењујемо у изразе за компоненталне деформације (2.9) и (2.10) и у израз за угао клизања (2.13), следи

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.16)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.17)$$

Заменом израза (2.15), (2.16) и (2.17) у изразе (2.3), (2.4) и (2.14) добијамо нормалне напоне σ_{xx} и σ_{yy} ,

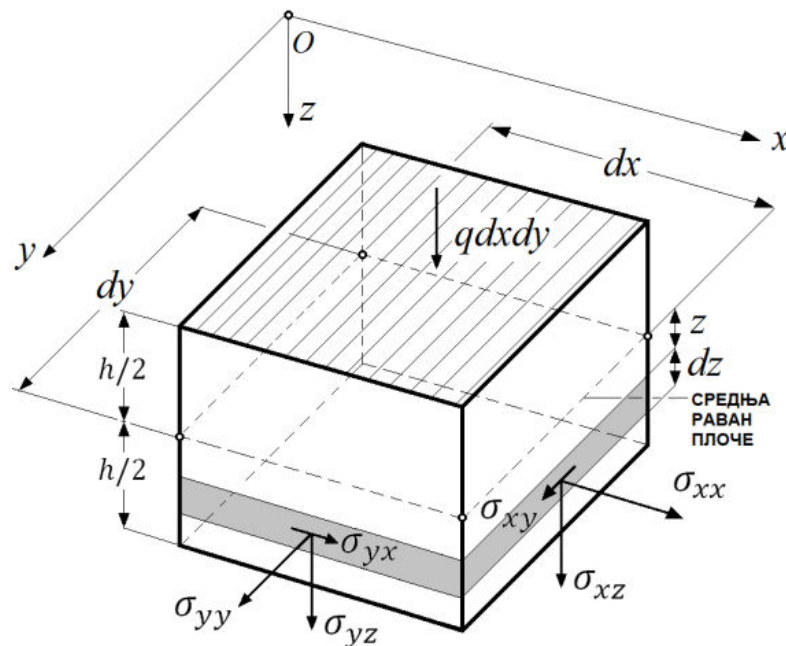
$$\sigma_{xx} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.18)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.19)$$

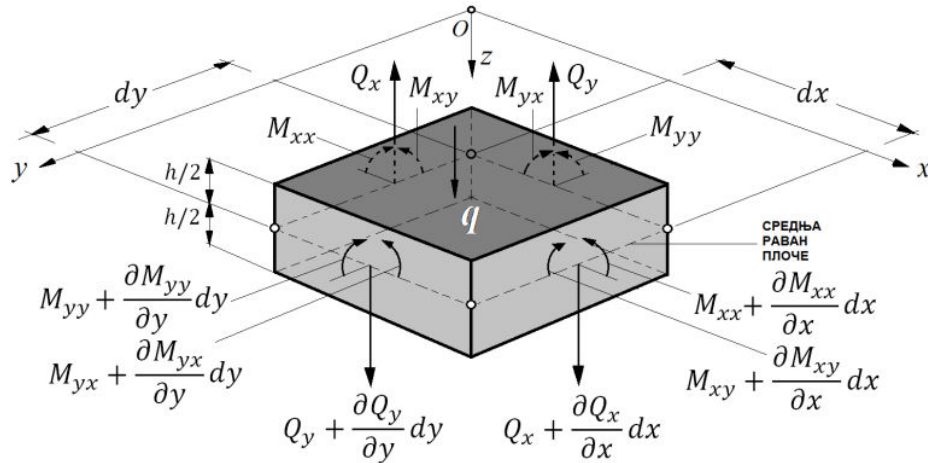
и тангенцијални напон σ_{xy}

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.20)$$

где смо користили да је $G = E/[2(1+\nu)]$.



Слика 4. Елементарни део плоче, и расподела нормалних и тангенцијалних напона и оптерећења.



Слика 5. Деловање момената и сила по јединици дужине и оптерећења q на елементарни део плоче.

На елементарном делу плоче, приказаном на слици 4, приказана је расподела нормалних напона σ_{xx} , σ_{yy} и тангенцијалних напона σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{xz} и σ_{yz} , који се налазе на растојању z , мереног од средње равни плоче. Њиховим интегралњем по дебљини плоче h , добијају се резултате напона приказане на слици 5, које се деле на трансверзалне силе Q и моменте M . За формирање диференцијалне једначине савијања плоче, неопходно је написати изразе за моменте који су формулисани следећим изразима

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz, \quad M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz. \quad (2.21)$$

Заменом израза за нормалне напоне (2.18) и (2.19) у (2.21), добијамо моменте савијања који имају следећи облик

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \\ &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{h^3}{12} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} M_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \\ &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{h^3}{12} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

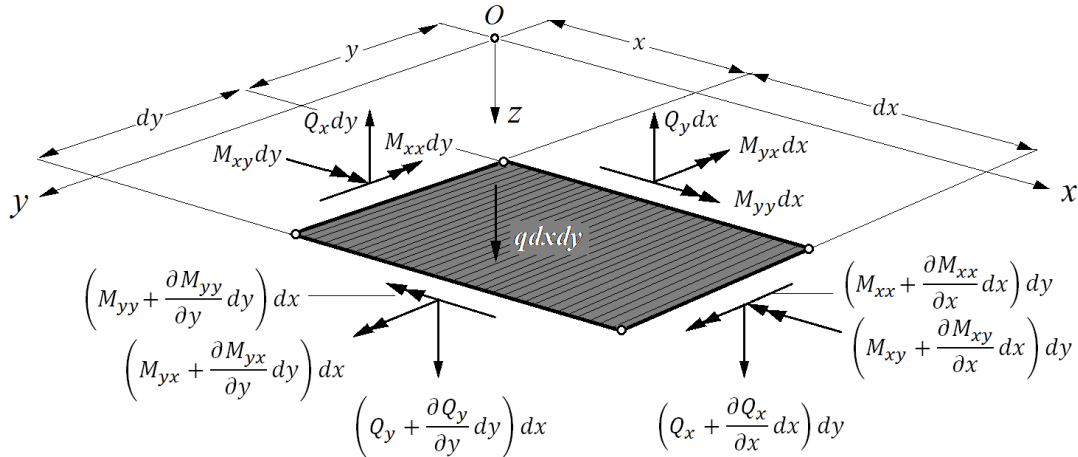
док заменом израза за тангенцијални напон (2.20) у израз (2.21) добијамо момент торзије

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz = -\frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = -\frac{E h^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\
&= -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где је са ознаком D исказана *савојна крутост плоче*, дата изразом $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$. Са слике 5, трансверзалне смичуће силе Q_x и Q_y дате су изразима

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz. \tag{2.25}$$

Са слике 6, видимо да резултанте напона и њени прираштаји помножени са страницама елементарног дела плоче dx и dy , дају стварна оптерећења плоче. Услед њиховог дејства, елемент је у равнотежи.



Слика 6. Стварна оптерећења која делују у средњој равни на елементарни део плоче.

А сада напишимо изразе за унутрашње силе које су паралелне средњој равни плоче:

$$N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz, \quad N_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz. \tag{2.26}$$

Заменом израза за нормални напон (2.18) у (2.26)₁, следи да је

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz = \\
&= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{h^2}{8} - \frac{h^2}{8} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Ако заменимо изразе (2.19) и (2.20) у изразе (2.26)₂ и (2.26)₃ такође би добили да су и силе N_{yy} и N_{xy} једнаке нули. Ово нам казује да у случају попречно оптерећене плоче, неће доћи до појаве унутрашњих сила, односно нормалних и смичућих сила које делују у средњој равни плоче.

У наставку на основу слике 6, написаћемо једначине равнотеже за елементарни део плоче. Од шест услова равнотеже за тело у простору, два услова равнотеже за пројекције сила за x и y осу су задовољени. Трећи услов равнотеже за суму момената свих сила око z -осе је такође задовољен. У наставку написаћемо три преостала услова равнотеже. Сума момената свих сила око y -осе, мора бити једнака нули, па је

$$\begin{aligned} -M_{xx}dy + \left(M_{xx} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} dx \right) dy - M_{yx}dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \\ - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - Q_x dy \frac{dx}{2} = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где је члан $(\partial Q_x / \partial x) dx dy dx / 2$, вишег реда и може се занемарити. Даљим сређивањем добијамо да је

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x. \quad (2.29)$$

Заменом израза за моменте (2.22) и (2.24) у (2.29) следи да је

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right). \quad (2.30)$$

На основу моментне једначине равнотеже за x -осу је

$$\begin{aligned} M_{yy}dx - \left(M_{yy} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dy \right) dx + M_{xy}dy - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \\ + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dy}{2} + Q_y dx \frac{dy}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Занемаривањем члана вишег реда $(\partial Q_y / \partial y) dy dx dy / 2$, следи да је

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y. \quad (2.32)$$

Заменом израза за моменте (2.23) и (2.24) у (2.32) следи

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (2.33)$$

Сума пројекција свих сила у z - правцу даје нам трећу једначину равнотеже

$$q dx dy - Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx = 0, \quad (2.34)$$

из које се добија да је

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (2.35)$$

Заменом (2.29) и (2.32) у (2.35) добијамо:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -q. \quad (2.36)$$

На крају, изразе за моменте (2.22), (2.23) и (2.24) заменимо у једначину (2.36)

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (2.37)$$

Једначина (2.37), применом дводимензионалног Лапласовог оператора, који је облика $\nabla^2(*) = \partial^2(*)/\partial x^2 + \partial^2(*)/\partial y^2$, добија коначну форму

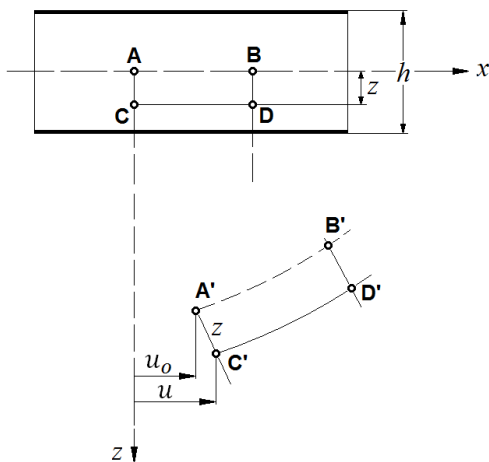
$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q. \quad (2.38)$$

Једначина (2.38) је *диференцијална једначина савијања плоче*. У наредном поглављу анализираће се плоча, која поред попречног оптерећења има и оптерећење у својој равни. Једначине (2.36) и (2.37), добиће додатне чланове са њихових десних страна једнакости. Више о *Kirchhoff*-овој класичној теорији плоча може се наћи у књигама аутора *Hajdin* [26, 1989], *Szilard* [54, 2004], и *Timošenko* и *Vojnovski-Kriger* [60, 1962].

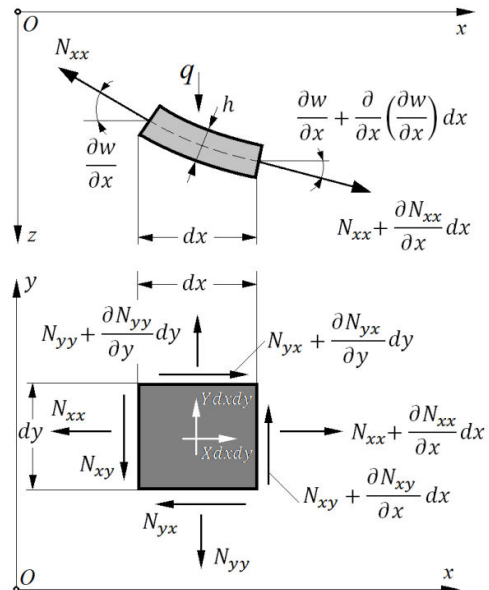
3. ИЗВОЂЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ САВИЈАЊА ПЛОЧЕ УСЛЕД ПОПРЕЧНОГ ОПТЕРЕЂЕЊА СЛОЖЕНОГ СА ОПТЕРЕЂЕЊЕМ У ЊЕНОЈ РАВНИ

У претходном поглављу формирали смо диференцијалну једначину савијања плоче услед попречних оптерећења. У случају да је плоча оптерећена само у својој равни, компонентални напони σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} и σ_{yx} , су равномерно распоређени по дебљини плоче, док су напони σ_{zz} , σ_{xz} и σ_{yz} , једнаки нули у целој области. Међутим, дешава се да плоча и поред попречног терета буде оптерећена и у својој равни.

При оваквом оптерећењу плоче, прва хипотеза из претходног поглавља, да у средњој равни плоче нема деформација, више не важи. Као последица оваквог оптерећења постоји дејство унутрашњих сила (које су поменуте у претходном поглављу), које су паралелне средњој равни плоче. Ове компоненте сила можемо разложити на нормалне силе N_{xx} , N_{yy} и смичуће силе N_{xy} , N_{yx} , чије су величине по јединици дужине, а поред померања која су дата изразима (2.7) и (2.8) постојаће још и померања u_o и v_o , као што је приказано на слици 7.



Слика 7. Пресек елементарног дела плоче пре и после деформације.



Слика 8. Нормалне и смичуће силе у пресецима N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} и N_{yx} , и њихови прираштаји и попречно оптерећење q , које се јављају у елементарном делу плоче услед његовог сложеног напрезања.

Користећи *Kirchhoff*-ову класичну теорију плоча, за линеарни теоријски модел, написаћемо померања $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ и $w(x, y, z, t)$, произвољне тачке у правцу координатних оса x , y и z као

$$u(x, y, z, t) = u_o(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_o(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y}, \quad (3.2)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t), \quad (3.3)$$

где су u_o и v_o померања у средњој равни плоче у правцу x и y оса, док чланови $z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}$ и $z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y}$ су компоненте померања услед ротације попречног пресека.

Померања дата изразима (3.1), (3.2) и (3.3), заменићемо у изразе (2.15), (2.16) и (2.17) и добити компоненталне деформације које имају следећи облик

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.6)$$

Заменом израза (3.4), (3.5) и (3.6) у изразе за напоне (2.3), (2.4) и (2.14) следи

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \quad (3.7)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right], \quad (3.8)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]. \quad (3.9)$$

Компоненте унутрашњих сила, које су у претходном поглављу представљене изразом (2.26), добијамо тако што леву и десну страну једначина (3.7 - 3.9) интегралимо по дебљини плоче h . Интеграљењем израза (3.7) следи да је

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz - \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz. \quad (3.10)$$

Лева страна израза (3.10) дата је изразом (2.26)₁. Након интеграције добијамо да је нормална сила N_{xx} облика

$$N_{xx} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right). \quad (3.11)$$

На сличан начин, интеграљењем израза (3.8) и (3.9) и коришћењем израза (2.26)₂ и (2.26)₃ добијамо нормалну силу

$$N_{yy} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_o}{\partial x} \right), \quad (3.12)$$

и смичућу силу

$$N_{xy} = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1+\nu} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right). \quad (3.13)$$

На основу изведених израза (3.11 - 3.13) за компоненте унутрашњих сила, видимо да у њима само фигуришу компоненте померања у равни плоче u_o и v_o .

Сада ћемо анализирати ситуацију која настаје када је плоча истовремено оптерећена у својој равни и попречним оптерећењем. Код пројекције сила на z -осу, посматрајући слику 8, узимамо у обзир савијање плоче и углове $\partial w/\partial x$ и $\partial w/\partial y$, између сила N_{xx} и N_{yy} и хоризонталне равни. Пројекције нормалне силе N_{xx} и њеног прираштаја на z -осу су

$$-N_{xx} dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_{xx} + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy. \quad (3.14)$$

Одбацивањем члана вишег реда добијамо израз

$$N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy. \quad (3.15)$$

Пројекције нормалне силе N_{yy} и њеног прираштаја, на z -осу су

$$-N_{yy} dx \frac{\partial w}{\partial y} + \left(N_{yy} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx, \quad (3.16)$$

а одбацивањем члана вишег реда добијамо израз

$$N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (3.17)$$

Смичуће силе N_{xy} заклапају углове $\partial w/\partial y$ и $\partial w/\partial x + \partial/\partial x (\partial w/\partial y) dx$ (нагиби еластичне површине у y -правцу), на странама плоче дужине dy . Њихове пројекције на z -осу су

$$-N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \right) dy, \quad (3.18)$$

а одбацивањем члана вишег реда добићемо израз

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (3.19)$$

Смичуће силе N_{yx} заклапају углове $\partial w/\partial x$ и $\partial w/\partial y + \partial/\partial y (\partial w/\partial x) dy$ (нагиби еластичне површине у x -правцу), на странама плоче дужине dx . Њихове пројекције на z -осу су

$$-N_{yx} dx \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \right) dx, \quad (3.20)$$

док одбацивањем члана вишег реда добићемо израз

$$N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy. \quad (3.21)$$

Сабирањем пројекција сила које су дате изразима (3.15), (3.17), (3.19) и (3.21) следи

$$\begin{aligned} N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy \\ + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy. \end{aligned} \quad (3.22)$$

На основу става о коњугованости тангенцијалних напона због кога је $N_{xy} = N_{yx}$, збир пројекција сила дат изразом (3.22) добија следећи облик:

$$\begin{aligned} N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \\ + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Видимо да у изразу (3.23) уз сваки члан стоји производ чланова dx и dy , па ћемо овај израз поделити са $dx dy$. Његов облик је у следећој форми

$$N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.24)$$

Израз (3.24) можемо написати у краћој форми

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (3.25)$$

Поред унутрашњих сила, појављују се још и запреминске силе $X dx dy$ и $Y dx dy$, чији је смер у смеру оса x и y , које су приказане на слици 8 (доња слика). У наставку, напишимо једначине равнотеже.

Пројекције сила на x -осу су

$$-N_x dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - N_{xy} dx + X dx dy = 0, \quad (3.26)$$

односно, након сређивања

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0. \quad (3.27)$$

Пројекције сила на y -осу су

$$-N_y dx + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - N_{xy} dy + Y dx dy = 0, \quad (3.28)$$

а након сређивања израза је

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + Y = 0. \quad (3.29)$$

У једначинама (3.26) и (3.28), X и Y су компоненте запреминских сила за јединицу површине средње равни плоче. Заменом (3.27) и (3.29) у (3.24) следи

$$N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X \frac{\partial w}{\partial x} - Y \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.30)$$

Израз (3.30) нам је неопходан при писању диференцијалне једначине савијања плоче услед попречног оптерећења сложеног са оптерећењем у њеној равни. Диференцијална једначина (2.36) добија нови облик

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = - \left(q + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X \frac{\partial w}{\partial x} - Y \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (3.31)$$

Изражавањем момената преко трансверзалних померања, следи нови облик диференцијалне једначине (3.31)

$$D \nabla^4 w = \left(q + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X \frac{\partial w}{\partial x} - Y \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (3.32)$$

Приметимо још да се диференцијалне једначине савијања (3.31) и (3.32), користећи израз (3.25) могу написати у другом облику

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2 \partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = - \left(q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right), \quad (3.33)$$

односно

$$D \nabla^4 w = \left(q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right). \quad (3.34)$$

На крају можемо закључити следеће:

- Ако је плоча само попречно оптерећења, одређивање угиба плоче је дато диференцијалним једначинама еластичне површине облика (2.36) и (2.38).
- Ако је плоча сложено оптерећена, и постоји још присуство запреминских сила, одређивање угиба плоче се врши коришћењем диференцијалних једначина еластичне површине облика (3.31) и (3.32).

4. ERINGEN-OVA НЕЛОКАЛНА ТЕОРИЈА ЕЛАСТИЧНОСТИ

Компоненте нано-структура сачињавају нано-системе. Предвиђање механичког понашања нано-структура и разумевање њихових особина, главни је задатак приликом конструисања микро-електромеханичких система (*micro-electromechanical systems*, MEMS) и нано-електромеханичких система (*nano-electromechanical systems*, NEMS).

Иако експерименталне методе као и атомистичке симулације нано-структура, захтевају дуготрајна испитивања и високе финансијске ресурсе истраживања у литератури заснивају се на формирању линеарних и нелинеарних теоријских модела коришћењем модификоване механике континуума или нелокалне теорије еластичности.

Код класичне теорије плоча, напон у посматраној тачки је функција деформације у тој истој посматраној тачки, односно понашање система у некој тачки зависи само од стања система у тој тачки. Код ове теорије нема утицаја неке друге тачке на референтну тачку. Међутим, то није случај код испитивања теоријских модела на микро- и нано-скали.

Ако бисмо желели да проучимо механичко понашање нано-структуре, као што је у нашем случају графенски нано-листић, теоријски моделиран као нано-плоча и да при томе добијемо довољно тачне резултате, морамо користити нелокалну теорију еластичности представљену од стране *Eringen*-а (в. *Eringen* [18, 1983], *Eringen* [19, 2002], *Lu* и др. [36, 2007] и *Wang* и др. [66, 2015]) која узима у обзир *утицај дистанце или нелокални ефекат*.

Суштина *Eringen*-ове нелокалне теорије еластичности заснива се на успостављању веза између макроскопских механичких теорија и појава које се јављају на нано-скали.

Код теоријских модела на микро- и нано-скали, утицаји ефеката на малој скали или утицаји међуатомских сила на њихово статичко и динамичко понашање, постају значајни. Скуп оваквих ефеката називају се *ефекти величина* или *нелокални ефекти*, и односе се на дуг опсег интеракција између атома и не могу се занемарити приликом испитивања нано-структура.

Пошто класична теорија плоча не узима у обзир дискретну структуру материјала, примењује се нелокална теорија еластичности, *код које је напон у посматраној тачки функција од поља деформација у свакој тачки домена* или да је посматрање понашања система у некој датој тачки зависно од стања система у свим тачкама датог домена

У литератури, услед испитивања механичких особина графенског нано-листића, посматра се дискретна структура материјала, која као последицу, услед формирања нелокалне диференцијалне једначине кретања, узима у обзир утицај међумолекуларних сила или тзв. *нелокални параметар* који фигурише у конститутивним релацијама, при анализи слободног осциловања и стабилности плоча чије су димензије на микро- и нано-скали, које се оправдано зову микро- или нано-плоче.

На основу *Eringen*-ове нелокалне теорије еластичности, веза између напона и деформације, за хомогено изотропно еластично тело, дата је конститутивном релацијом

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \iiint_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \tau) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'), \quad (4.1)$$

која је изведена у интегралном облику, где се за границе интеграције узима укупна запремина еластичног тела. Члан $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ представља тензор напона за нелокалну теорију, C_{ijkl} је тензор еластичности, а ε_{kl} означава тензор деформације. Нелокални модул дат је преко подинтегралне функције $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \tau)$, која означава функцију језгра, и преко којег се нелокални утицаји у посматраној тачки \mathbf{x} изазване локалним деформацијама у тачки \mathbf{x}' , директно уводе у конститутивне релације. Члан $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ представља растојање изражено Еуклидском нормом. Члан τ је материјални параметар који се одређује експериментално или помоћу метода молекуларне динамике (MD). Он је дат преко израза $\tau = e_o l_i / l_e$, где је e_o материјална константа која зависи од компликоване унутрашње нано-структуре, l_i означава унутрашњу карактеристичну дужину (параметар кристалне решетке, величине грануле, растојања између угљеничних веза) а l_e представља спољашњу карактеристичну дужину (дужина прслине, таласна дужина).

Ради лакше примене конститутивне релације (4.1), која је иначе тешка за решавање, уводи се претпоставка да је нелокални модул $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \tau)$ дат преко *Green*-ове функције линеарног оператора

$$\mathcal{L}\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|), \quad (4.2)$$

где је \mathcal{L} диференцијални оператор, а δ *Dirac*-ова делта дистрибуција. Применом линеарног диференцијалног оператора, на једначину (4.1) добија се

$$\mathcal{L}\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (4.3)$$

Поређењем резултата дисперзионих кривих модела динамике кристалних решетке, за одређени нелокални модул α , који фигурише у изразу (4.2), *Eringen* је представио линеарни диференцијални оператор \mathcal{L} који је следећег облика

$$\mathcal{L} = 1 - (e_o l_i)^2 \nabla^2, \quad (4.4)$$

где је ∇^2 Лапласов оператор. Применом израза (4.3) и (4.4), конститутивна релација добија свој коначан облик

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (4.5)$$

Члан $\mu = (e_0 l_i)^2$, у конститутивној релацији (4.5), представља *нелокални параметар*, који описује утицаје међумолекуларних сила, тј. ефекте на малој скали при статичкој и динамичкој анализи нано-структура.

Комбиновањем израза (2.18), (2.19) за нормалне напоне и израз (2.20), за тангенцијални напон, са изразом (4.5), добићемо конститутивну релацију за хомогену и изотропно еластичну нано-плочу:

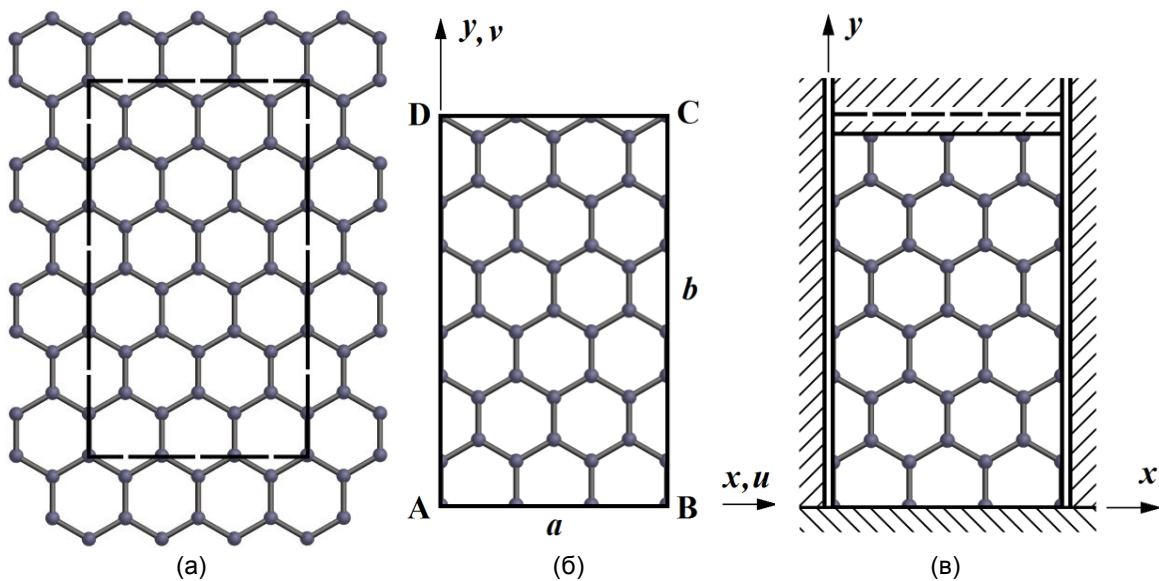
$$(1 - \mu \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E/(1 - \nu^2) & \nu E/(1 - \nu^2) & 0 \\ \nu E/(1 - \nu^2) & E/(1 - \nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

5. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА СТАБИЛНОСТИ И ОСЦИЛОВАЊА ЗАПРЕМИНСКИ ОПТЕРЕЋЕНЕ НАНО-ПЛОЧЕ

Оно што предстоји у овом поглављу везано је за формирање нелокалне диференцијалне једначине стабилности и осциловања запремински оптерећене нано-плоче за линеарни и нелинеарни теоријски модел на основу *Kirchhoff*-ове и *von Karman*-ове класичне теорије плоче, надограђене *Eringen*-овом нелокалном теоријом еластичности.

5.1. ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ

Дискретна структура материјала приказана је на слици 9 (а) у виду графенског нано-листића, који се теоријски моделира као нано-плоча са дужином a и ширином b , приказана на слици 9 (б). Овај нелокални континуум поставиће се у покретно уклештење, приказано на слици 9 (в), и биће запремински оптерећен.



Слика 9. Нано-структура: (а) Дискретна структура материјала. Графенски листић (SLGS), (б) Димензије и померања, (в) Нелокални континуум. Покретно уклештена нано-плоча.

5.1.1. ПОМЕРАЊА И ДЕФОРМАЦИЈЕ ЗА ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ

У трећем поглављу на основу слика 7 и 8, анализирали смо ситуацију која настаје када је плоча истовремено оптерећена у својој равни и попречним оптерећењем. Користећи *Kirchhoff*-ову класичну теорију плоча дефинисали смо померања $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ и $w(x, y, z, t)$, произвољне тачке у правцу координатних оса x , y и z . Напишимо их овде поново

$$u(x, y, z, t) = u_o(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}, \quad (5.1.1)$$

$$v(x, y, z, t) = v_o(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y}, \quad (5.1.2)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t). \quad (5.1.3)$$

Такође, напишимо поново изразе за компоненталне деформације плоче за произвољну тачку која је на растојању z од средње равни плоче као

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (5.1.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (5.1.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.1.6)$$

5.1.2. ЗАПРЕМИНСКО ОПТЕРЕЋЕЊЕ

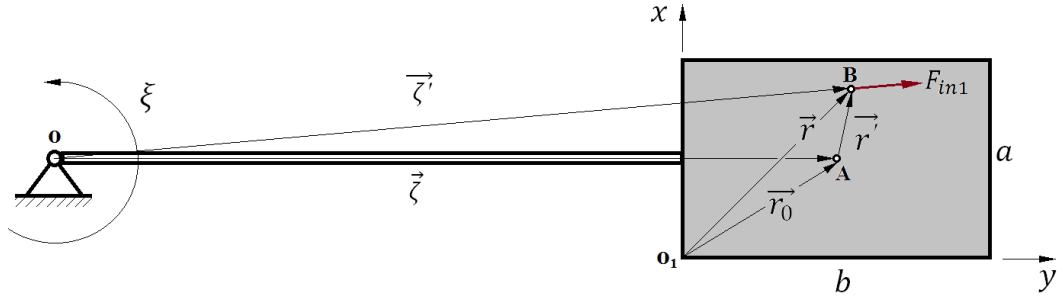
Навешћемо овде примере када је плоча оптерећена константном запреминском силом са правцем који је у равни плоче.

Први пример односи се на *силу тежине*, чији је правац паралелан са y -осом. Издвајањем елементарног дела из плоче, приказаног на слици 8, запреминска сила записује се у облику $Y dx dy$, где је Y дато изразом

$$Y = \rho gh, \quad (5.1.7)$$

у коме је ρ запреминска густина и g гравитационо уобразање.

Други пример запреминског оптерећења односи се на модел центрифуге који је приказан на слици 10. Систем који се обрће константном угаоном брзином ξ око непокретне тачке O , састоји се од штапа дужине ζ , који је са једне стране причвршћен за тачку O а са друге стране је причвршћен за плочу са ивицама дужи a и b . Координатни систем O_1xy везан је за плочу. Положај тачке A у односу на координатни почетак O_1 дат је вектором $\vec{r}_0 = a/2 \vec{i} + b/2 \vec{j}$, док је њен положај у односу на непокретну тачку O , дат вектором $\vec{\zeta} = \zeta \vec{j}$. Положај тачке B у односу на координатни почетак O_1 дат је вектором $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$, док је њен положај у односу на непокретну тачку O , дат вектором $\vec{\zeta}$. Положај тачке B у односу на тачку A дат је вектором $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$. Запреминско оптерећење јавља се услед обртања плоче константном угаоном брзином ξ , око непокретног ослоња O , при чему ће се појавити инерцијална сила F_{in1} .



Слика 10. Смер инерцијалне силе F_{in1} услед обртања плоче око тачке O константном угаоном брзином ξ .

Вектор $\vec{\zeta}'$ једнак је збиру вектора $\vec{\zeta}$ и \vec{r}'

$$\vec{\zeta}' = \vec{\zeta} + \vec{r}' = \left(x - \frac{a}{2}\right)\vec{i} + \left(\zeta + y - \frac{b}{2}\right)\vec{j}, \quad (5.1.8)$$

па елементарна инерцијална сила, са слике 10, има следећи запис

$$d\vec{F}_{in1} = dm \vec{\zeta}' \xi^2. \quad (5.1.9)$$

Елементарну масу записујемо као $dm = \rho dV$, где је $dV = hdA$. Тада израз (5.1.9) има следећи облик

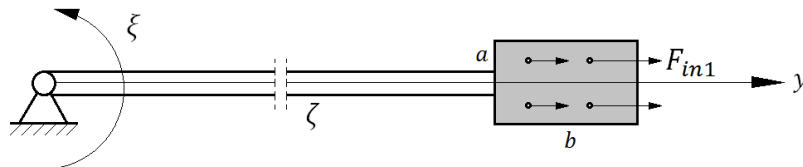
$$d\vec{F}_{in1} = \rho h \vec{\zeta}' \xi^2 dA. \quad (5.1.10)$$

Инерцијално оптерећење сведено на површину, за координатне осе x и y дато је следећим изразима

$$\vec{X} = \rho h \xi^2 \left(x - \frac{a}{2}\right)\vec{i}, \quad (5.1.11)$$

$$\vec{Y} = \rho h \xi^2 \left(\zeta + y - \frac{b}{2}\right)\vec{j}. \quad (5.1.12)$$

Таква запреминска сила јавља се у ситуацији када је плоча изложена великим убрзањима до којих, на пример, може доћи у *центрифугама*.



Слика 11. Пример константног запреминског оптерећења услед равномерног кружног обртања плоче.

Као специјалан случај на слици 11, приказана је нано-плоча са ивицама дужи a и b . Наиме, њене димензије много су мањих дужина од дужине ζ , па се оне могу занемарити у изразима (5.1.11) и (5.1.12), тако да је инерцијално оптерећење исто у свим тачкама нано-плоче, односно константно.

Запреминско оптерећење, поред ова два претходна примера, може још настати при дејству специфичних магнетних поља. Такође и при великом праволинијском убрзању што је случај код граната и ракета.

Пошто је у овој тези акценат стављен на стабилност и осциловање покретно укљештене и сложено оптерећене нано-плоче, запреминско оптерећење у виду силе

теже неће бити узето у обзир, јер поставља се питање колико би то оптерећење заиста имало утицај на њену стабилност и осциловање.

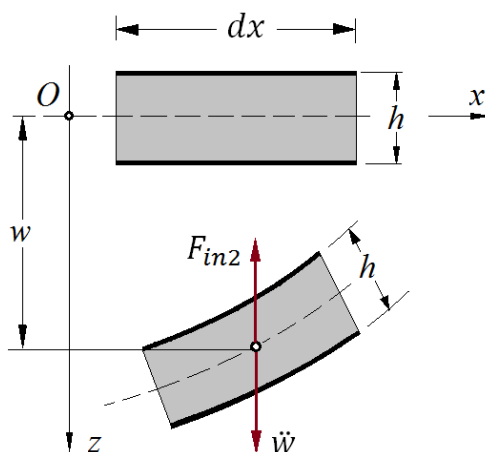
Због тога, пример константног запреминског оптерећења које се јавља у центрифугама улази у проблем ове тезе. Ако бисмо у центрифугама повећали угаону брзину услед равномерног кружног обртања плоче, јављаће се запреминска сила која је знатно већа од њене силе тежине. Оваква запреминска сила имала би значајан утицај на стабилност и слободно осциловање нано-плоче.

У наставку динамичке анализе покретно уклештене нано-плоче, слике 9 (в) и 11, инерцијално оптерећење X , у правцу x -осе, једнако је нули. Узима се само инерцијално оптерећење Y , дато изразом (5.1.12), које добија следећи облик

$$Y = \rho h \zeta \xi^2. \quad (5.1.13)$$

На основу претходно реченог, за случај графенског листића, теоријски моделираног као нано-плоча, у наставку задатка инерцијално оптерећење Y биће супротног смера од смера y -осе, а од интреса је испитати како вредности убрзања $\zeta \xi^2$ утичу на осциловање и при којим вредностима нано-плоча губи стабилност.

5.1.3. СЛОБОДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ПЛОЧЕ



Слика 12. Смер и дејство инерцијалне силе на елементарни део нано-плоче услед слободних осцилација.

Приликом формирања диференцијалне једначине осциловања плоче која је истовремено оптерећена у својој равни и попречним оптерећењем, користимо *D'Alembert*-ов принцип, на основу којег се задати динамички проблем посматра као статички проблем уз увођење одговарајуће инерцијалне силе.

Са слике 12, израз за елементарну инерцијалну силу dF_{in2} следећег је облика

$$dF_{in2} = -dm a, \quad (5.1.14)$$

где је убрзање a дато као други извод по времену померања w , али у случају силе инерције смер убрзања a добија знак минус. Инерцијално оптерећење q_{in2} записујемо као

$$q_{in2} = -\rho h \ddot{w}. \quad (5.1.15)$$

заменом израза (5.1.15) у израз (3.32) следи

$$D\nabla^2\nabla^2w = N_{xx}\frac{\partial^2w}{\partial x^2} + N_{yy}\frac{\partial^2w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y} - X\frac{\partial w}{\partial x} - Y\frac{\partial w}{\partial y} - \rho h\frac{\partial^2w}{\partial t^2}. \quad (5.1.16)$$

5.1.4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА СТАБИЛНОСТИ И ОСЦИЛОВАЊА УЗ УТИЦАЈ НЕЛОКАЛНОСТИ

У наставку следи формирање нелокалне диференцијалне једначине сложено оптерећене квадратне и правоугаоне покретно укљештене нано-плоче, на основу које се испитује њена стабилност и слободно осциловање.

У претходном поглављу упознали смо се са *Eringen*-овом нелокалном теоријом еластичности и добили израз за нелокалне компоненте напона (4.6).

У циљу добијања нелокалних резултанти напона, изразе за померања (5.1.1) - (5.1.3) уврштавамо у изразе за компоненталне деформације (5.1.4) - (5.1.6), које затим уврштавамо у израз (4.6) за нелокалне компоненте напона.

Уврштавајући нелокалне компоненте напона у изразе за моменте савијања и торзије, изрази (2.22), (2.23) и (2.24) и нормалне и смичуће унутрашње силе, изрази (3.11) - (3.13), добијају се нелокалне резултате напона, тј. нелокалне компоненте момената и унутрашњих сила. Нелокалне компоненте момената савијања и торзије имају облик

$$M_{xx} - \mu \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (5.1.17)$$

$$M_{yy} - \mu \left(\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (5.1.18)$$

$$M_{xy} - \mu \left(\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} \right) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (5.1.19)$$

док нелокалне компоненте унутрашњих нормалних и смичућих сила имају облик

$$N_{xx} - \mu \left(\frac{\partial^2 N_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{xx}}{\partial y^2} \right) = K \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right), \quad (5.1.20)$$

$$N_{yy} - \mu \left(\frac{\partial^2 N_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{yy}}{\partial y^2} \right) = K \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_o}{\partial x} \right), \quad (5.1.21)$$

$$N_{xy} - \mu \left(\frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial y^2} \right) = \frac{(1 - \nu)}{2} K \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right), \quad (5.1.22)$$

где је $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$. За претходно описани специјални модел центрифуге инерцијално оптерећење X , у правцу x -осе једнако је нули, а инерцијално оптерећење Y , дато изразом (5.1.13) биће супротног смера од смера y -осе. Једначине равнотеже елементарног дела плоче записују се преко пројекције сила у x , y и z правцу. Пројекције сила у x правцу дају прву једначину равнотеже

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (5.1.23)$$

затим пројекције сила у y правцу дају другу једначину равнотеже

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = Y, \quad (5.1.24)$$

и на крају пројекције сила у z правцу дају трећу једначину равнотеже

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho h \ddot{w}. \quad (5.1.25)$$

Једначина равнотеже (5.1.25), у којој фигурише инерцијално оптерећење q_{in2} , иста је као и једначина (3.33) изведена у трећем поглављу. Сад је неопходно повезати једначине равнотеже (5.1.23) - (5.1.25) са горе напоменутим унутрашњим силама и моментима који су дати изразима (5.1.17) - (5.1.22). Диференцирањем (5.1.17) са ∂_{xx} , затим (5.1.18) са ∂_{yy} и (5.1.19) са ∂_{xy} следи

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - \mu \left(\frac{\partial^4 M_{xx}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 M_{xx}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \quad (5.1.26)$$

$$\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - \mu \left(\frac{\partial^4 M_{yy}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 M_{yy}}{\partial y^4} \right) = -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \quad (5.1.27)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \mu \left(\frac{\partial^4 M_{xy}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 M_{xy}}{\partial x \partial y^3} \right) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}. \quad (5.1.28)$$

Множећи израз (5.1.28) са два, и сабирањем са изразима (5.1.26) и (5.1.27) добија се веза

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} &= \mu \left(\frac{\partial^4 M_{xx}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 M_{xy}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 M_{xx}}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^4 M_{yy}}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 M_{xy}}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 M_{yy}}{\partial y^4} \right) - D \nabla^4 w. \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

Леву страну једначине (5.1.25) замењујемо са (5.1.29), па добијамо

$$\begin{aligned} -D \nabla^4 w &= -\mu \left(\frac{\partial^4 M_{xx}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 M_{xy}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 M_{xx}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 M_{yy}}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 M_{xy}}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 M_{yy}}{\partial y^4} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho h \ddot{w}. \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

Даљим сређивањем у изразу (5.1.30), момената савијања и торзије уз парцијалне изводе ∂_{xx} и ∂_{yy} у загради коју множи нелокални параметар μ , следи нови облик записа

$$\begin{aligned} -D \nabla^4 w &= -\mu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho h \ddot{w}. \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

Затим, у изразу (5.1.31), заграде уз парцијалне изводе ∂_{xx} и ∂_{yy} замењујемо десном страном једначине (5.1.25), тако да је

$$-D\nabla^4 w = -\frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho h \ddot{w} - \mu \nabla^2 \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho h \ddot{w} \right]. \quad (5.1.32)$$

Даљим сређивањем диференцијална једначина уз нелокални утицај (5.1.32) има следећи облик

$$-D\nabla^4 w + (1 - \mu \nabla^2) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho h \ddot{w} \right] = 0. \quad (5.1.33)$$

Покретно уклештена нано-плоча приказана је на слици 9 (в). Означене ивице и њена померања у правцима координатних оса приказана су на слици 9 (б).

Хоризонтална страна плоче AB , са слике 9 (б), за коју је $y = 0$, потпуно је уклештена, па је померање u_o , за сваку тачку плоче у правцу x -осе, једнако нули, па отуда следи гранични услов да је

$$u_o(x, 0) = 0. \quad (5.1.34)$$

Иако су вертикалне стране плоче AD и BC на местима када је $x = 0$ и $x = a$, уклештене, њима је дозвољено померање дуж y -осе. Наиме, оне клижу низ њу али се не померају и нормално на њу, па је

$$u_o(0, y) = 0, \quad u_o(a, y) = 0. \quad (5.1.35)$$

За хоризонталну страну плоче DC за коју је $y = b$, такође је уклештена, али њој је дозвољено померање у равни плоче, па отуда следи гранични услов да је

$$N_{yy}(x, b) = 0. \quad (5.1.36)$$

Имајући у виду граничне услове (5.1.34) и (5.1.35), можемо закључити да ће угао клизања у свим тачкама бити нула, као и да ће важити да је $u_o = 0$. Поред тога, померање v_o ће бити функција само од y -координате. Тада на основу (3.11) - (3.13) је

$$N_{xx} = \nu \frac{E h}{1 - \nu^2} \frac{\partial v_o}{\partial y}, \quad (5.1.37)$$

$$N_{yy} = \frac{E h}{1 - \nu^2} \frac{\partial v_o}{\partial y}. \quad (5.1.38)$$

$$N_{xy} = 0. \quad (5.1.39)$$

Користећи једначину равнотеже (5.1.24) и граничног услова (5.1.36), добијамо компоненте унутрашњих сила

$$N_{xx} = -\nu Y(b - y), \quad (5.1.40)$$

$$N_{yy} = -Y(b - y), \quad (5.1.41)$$

одакле се израз (5.1.39) може написати у облику $N_{xx} = \nu N_{yy}$. Померање v_o , добија се коришћењем израза (5.1.36) и граничног услова $v_o|_{y=0} = 0$. Његов облик је

$$v_o = \frac{Y}{Eh} (1 - \nu^2) \left(\frac{y^2}{2} - by \right). \quad (5.1.42)$$

Да би добили нелокалне компоненте унутрашњих сила које фигуришу у једначини (5.1.33), уврстићемо изразе за локалне компоненте унутрашних сила (5.1.39) - (5.1.41) у изразе (5.1.20) - (5.1.22). Добијамо да решења за локалне компоненте унутрашњих сила, (5.1.39) - (5.1.41), задовољавају нелокалне једначине (5.1.20) - (5.1.22), јер је

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)N_{xx} = 0, \quad (5.1.43)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)N_{yy} = 0, \quad (5.1.44)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)N_{xy} = 0. \quad (5.1.45)$$

Сада када се знају унутрашње силе N_{xx} , N_{yy} и N_{xy} , замењујемо их у (5.1.33). Диференцијална једначина уз нелокални утицај има следећи облик

$$\begin{aligned} & -D\nabla^4 w - Y \left[(b-y)v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial y} + (b-y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \rho h \ddot{w} \\ & - \mu Y \left[-(b-y)v \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2v+1) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (b-y)(1+v) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ & \left. + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (b-y) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \mu \rho h \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (5.1.46)$$

Пошто је циљ истраживања одредити које су то фреквенције са којима нано-плоча осцилује, решење једначине (5.1.33) је облика

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}, \quad (5.1.47)$$

где је $W(x, y)$ функција облика која нам описује модове осциловања плоче, а ω је природна кружна фреквенција. Множењем (5.1.46) са -1, и заменом израза (5.1.47) у (5.1.46) следи нови облик диференцијалне једначине

$$\begin{aligned} & [D - \mu Y v (b-y)] \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + [2D - \mu Y (b-y)(1+v)] \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + [D - \mu Y (b-y)] \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \\ & + \mu Y (1+2v) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + 3\mu Y \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + [Y v (b-y) + \mu \rho h \omega^2] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ & + [Y (b-y) + \mu \rho h \omega^2] \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - Y \frac{\partial W}{\partial y} - \rho h \omega^2 W = 0. \end{aligned} \quad (5.1.48)$$

За диференцијалну једначину (5.1.48) напишимо граничне услове. Нано-плоча је уклештена на свим странама, а то значи да су угиби $W(x, y)$ оса на ивицама плоче једнаки нули. Исто тако нагиби тангенте на еластичну површину $\partial W(x, y)/\partial x$ у правцу x -осе и нагиби тангенте на еластичну површину $\partial W(x, y)/\partial y$ у правцу y -осе, на ивицама плоче једнаки су нули. Са слике 9 (в) следе гранични услови

$$\text{страна AD: } W(0, y) = 0, \quad \frac{\partial W(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \text{страна BC: } W(a, y) = 0, \quad \frac{\partial W(a, y)}{\partial x} = 0, \quad (5.1.49a)$$

$$\text{страна AB: } W(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial W(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \text{страна DC: } W(x, b) = 0, \quad \frac{\partial W(x, b)}{\partial y} = 0. \quad (5.1.49b)$$

Наредни корак је бездимензионисање диференцијалне једначине (5.1.48). Увешћемо бездимензијске координате

$$\bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}. \quad (5.1.50)$$

Замењујући чланове (5.1.50) у једначину (5.1.48), добијамо диференцијалну једначину осциловања правоугаоне нано-плоче у бездимензијском облику

$$\begin{aligned} & \left[1 - (1 - \bar{y})\nu \frac{\beta \bar{\mu}}{\alpha} \right] \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{x}^4} + [2\alpha^2 - (1 - \bar{y})(1 + \nu) \alpha \beta \bar{\mu}] \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + [\alpha^4 - (1 - \bar{y})\alpha^3 \beta \bar{\mu}] \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{y}^4} \\ & + (1 + 2\nu)\alpha \beta \bar{\mu} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + 3\alpha^3 \beta \bar{\mu} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \bar{y}^3} + \left[(1 - \bar{y}) \frac{\beta}{\alpha} \nu + \bar{\omega}^2 \bar{\mu} \right] \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} \\ & + [(1 - \bar{y})\alpha\beta + \bar{\omega}^2 \alpha^2 \bar{\mu}] \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} - \alpha\beta \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{y}} - \bar{\omega}^2 \bar{W} = 0, \end{aligned} \quad (5.1.51)$$

у којој су нам бездимензијски коефицијенти дати следећим изразима

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{a^3 Y}{D}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{a^2}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{a^4 \rho h \omega^2}{D}. \quad (5.1.52)$$

На основу бездимензијске диференцијалне једначине (5.1.51), истражиће се утицај запреминског оптерећења на слободне осцилације и облик нано-плоче.

За бездимензијску диференцијалну једначину (5.1.51) следе бездимензијски гранични услови

$$\text{страна AD: } \bar{W}(0, \bar{y}) = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}(0, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \text{страна BC: } \bar{W}(1, \bar{y}) = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}(1, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (5.1.53a)$$

$$\text{страна AB: } \bar{W}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \text{страна DC: } \bar{W}(\bar{x}, 1) = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}(\bar{x}, 1)}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (5.1.53b)$$

5.2. НЕЛИНЕАРНИ VON KÁRMÁN-ОВ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ

Померања $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ и $w(x, y, z, t)$ произвољне тачке средње површине плоче дуж координатних оса x, y и z , дата су изразима (5.1.1), (5.1.2) и (5.1.3).

Користећи *von Kármán*-ову теорију плоча, представљену у радовима *Afanacković* [2, 1993] и *Timošenko* и *Vojnovski-Krigger* [60, 1962], за нелинеарни теоријски модел сложено оптерећене нано-плоче, везе између померања и деформација за нелинеарни теоријски модел имају облик

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (5.2.1)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (5.2.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (5.2.3)$$

Замењујући (5.1.1), (5.1.2) и (5.1.3) у (5.2.1), (5.2.2) и (5.2.3) следи

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (5.2.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (5.2.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.2.6)$$

Заменом (5.2.4), (5.2.5) и (5.2.6) у (2.3), (2.4) и (2.14), добијамо компоненталне напоне

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \nu \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right], \quad (5.2.7)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \nu \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right], \quad (5.2.8)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \quad (5.2.9)$$

Моменте савијања и торзије добијамо тако што леву и десну страну (5.2.7) - (5.2.9) интегралимо са $\int_{-h/2}^{h/2} z dz$. Прво одредимо момент савијања M_{xx} ,

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz \\ &\quad - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz, \end{aligned}$$

ОДНОСНО

$$M_{xx} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (5.2.10)$$

а затим момент савијања M_{yy} ,

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz \\ &\quad - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz, \end{aligned}$$

ОДНОСНО

$$M_{yy} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (5.2.11)$$

и на крају момент торзије M_{yy} ,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz - \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz,$$

односно

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.2.12)$$

Добијени изрази (5.2.10 - 5.2.12) за компоненте момената савијања и торзије, одговарају моментима савијања и торзије, који су дати изразима (2.22 - 2.24).

Компоненте унутрашњих сила у пресеку добијамо тако што леву и десну страну једначина (5.2.7 - 5.2.9) интегралимо са $\int_{-h/2}^{h/2} dz$. Прво одредимо нормалну силу N_{xx} ,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \int_{-h/2}^{h/2} dz - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz.$$

Пошто је парцијални извод $\partial v_o / \partial x$ у изразу за угао клизања (5.1.6) једнак нули, следи коначан запис

$$N_{xx} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right). \quad (5.2.13)$$

У наставку одредимо нормалну силу N_{yy} ,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right) \int_{-h/2}^{h/2} dz - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz,$$

односно

$$N_{yy} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right). \quad (5.2.14)$$

На крају израз за смичућу силу N_{xy} је облика,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \int_{-h/2}^{h/2} dz - \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z dz,$$

ОДНОСНО

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.2.15)$$

Увешћемо напонску функцију ϕ , тако да је

$$N_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad N_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + Yy, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad (5.2.16)$$

чиме задовољавамо једначине равнотеже (5.1.23) - (5.1.25).

Замењујући моменте савијања (5.2.10), (5.2.11) и (5.2.12) у једначину (5.1.25), лева страна једначине (5.1.25) је

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = -D \nabla^4 w. \quad (5.2.17)$$

Једначина (5.1.25) је облика

$$D \nabla^4 w = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho h \ddot{w}. \quad (5.2.18)$$

Замењујући изразе (5.2.16) у десну страну једначине (5.2.18) добили смо прву диференцијалну једначину

$$D \nabla^4 w = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Yy \frac{\partial w}{\partial y} + Yy \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho h \ddot{w}. \quad (5.2.19)$$

Да би формирали другу диференцијалну једначину, изразе за унутрашње силе (5.2.13), (5.2.14) и (5.2.15) напишимо као

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = 2n_x, \quad (5.2.20)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 2n_y, \quad (5.2.21)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = 2n_{xy}, \quad (5.2.22)$$

где су n_x , n_y и n_{xy} , дати са

$$n_x = \frac{N_{xx}}{K} - \nu \frac{\partial v_o}{\partial y}, \quad (5.2.23)$$

$$n_y = \frac{N_{yy}}{K} - \frac{\partial v_o}{\partial y}, \quad (5.2.24)$$

$$n_{xy} = \frac{N_{xy}}{K(1-\nu)}, \quad (5.2.25)$$

Ако помножимо израз (5.2.20) са $-\nu$, и саберимо са (5.2.21), добићемо

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{2}{1-\nu^2} (-\nu n_x + n_y). \quad (5.2.26)$$

На сличан начин је

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \frac{2}{1-v^2}(-vn_y + n_x). \quad (5.2.27)$$

Диференцирајмо два пута израз (5.2.26) по x и израз (5.2.27) по y , па добијамо

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x^2}(\Psi_1), \quad (5.2.28)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y^2}(\Psi_2), \quad (5.2.29)$$

где су уведене ознаке

$$\Psi_1 = \frac{-vn_x + n_y}{1-v^2}, \quad \Psi_2 = \frac{-vn_y + n_x}{1-v^2}. \quad (5.2.30)$$

У наставку, диференцирајмо два пута израз (5.2.22), прво по x , а затим по y , па је

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.2.31)$$

Комбиновањем изрази (5.2.28) и (5.2.29) у израз (5.2.31) добијамо

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Psi_2) - 2 \frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (5.2.32)$$

односно, након замене (5.2.30) следи

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{1-v^2} \left(-v \frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n_x}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.2.33)$$

Замењујући изразе (5.2.23) - (5.3.25) у (5.2.33), добијамо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{1-v^2} \left[-v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{N_{xx}}{K} - v \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{N_{yy}}{K} - \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - v \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{N_{yy}}{K} - \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{N_{xx}}{K} - v \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{K(1-v)} \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

и заменом изрази (5.2.16) у (5.2.34), следи друга диференцијална једначина

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-v^2)} \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(v^2 \frac{\partial^3 v_o}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 v_o}{\partial x^2 \partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{K} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} y - \frac{v}{K} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \right] = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

где је у нашем случају запреминско оптерећење Y константа, а померање $v_o(y)$ зависи само од y -координате, па су изводи једнаки нули. Сређивањем изрази (5.2.35) добија се

$$\nabla^4 \phi = K(1-v^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (5.2.36)$$

5.3. НЕЛИНЕАРНИ НЕЛОКАЛНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ

Заменом израза (5.2.4) - (5.2.6) у конститутивну релацију за нано-плочу, која је дата изразом (4.6), добијамо изразе за компоненталне напоне који су следећег облика

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \nu \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right], \quad (5.3.1)$$

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \nu \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right], \quad (5.3.2)$$

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]. \quad (5.3.3)$$

Нелокалне компоненте момената савијања и торзије добијамо тако што леву и десну страну једначина (5.3.1) - (5.3.3) интегралимо са $\int_{-h/2}^{h/2} z dz$. Прво одредимо компоненту момента савијања M_{xx} ,

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz - \mu \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz \\ &\quad - \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz, \end{aligned}$$

ОДНОСНО

$$(1 - \mu \nabla^2) M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (5.3.4)$$

а затим компоненту момента савијања M_{yy} ,

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz - \mu \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz \\ &\quad - \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz, \end{aligned}$$

ОДНОСНО

$$(1 - \mu \nabla^2) M_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (5.3.5)$$

На крају запишимо израз за момент торзије M_{xy} ,

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz - \mu \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz \\ &\quad - \frac{E}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz, \end{aligned}$$

ОДНОСНО

$$(1 - \mu \nabla^2) M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.3.6)$$

Добијени изрази (5.3.4) - (5.3.6) за нелокалне компоненте момената савијања и торзије, одговарају нелокалним компонентама момената савијања и торзије, који су дати изразима (5.1.17) - (5.1.19).

Нелокалне компоненте унутрашњих сила добијамо тако што леву и десну страну једначина (5.3.1) - (5.3.3) интегралимо са $\int_{-h/2}^{h/2} dz$. Прво одредимо нормалну силу N_{xx} ,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz - \mu \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \int_{-h/2}^{h/2} dz - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz.$$

Пошто је парцијални извод $\partial v_o / \partial x$ у изразу за угао клизања (5.1.6) једнак нули, следи коначан запис

$$(1 - \mu \nabla^2) N_{xx} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right), \quad (5.3.7)$$

а затим нормалну силу N_{yy} ,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz - \mu \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right) \int_{-h/2}^{h/2} dz - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz,$$

односно

$$(1 - \mu \nabla^2) N_{yy} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right). \quad (5.3.8)$$

На крају запишимо израз за смичућу силу N_{xy} ,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz - \mu \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \int_{-h/2}^{h/2} dz - \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z dz,$$

односно

$$(1 - \mu \nabla^2) N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.3.9)$$

У складу са једначинама равнотеже (5.1.23) - (5.1.25) уводимо напонску функцију дату изразом (5.2.16). Поступак формирања нелинеарне диференцијалне једначине уз нелокални утицај, исти је као и у случају код линеарне диференцијалне једначине уз нелокални утицај, од израза (5.1.26) - (5.1.33), зато што су компоненте момената савијања и торзије исти.

Замењујући изразе за напонску функцију (5.2.16) у једначину (5.1.33), и користећи десну страну једначине (5.2.19), следи запис прве диференцијалне једначине

$$-D\nabla^4 w + (1 - \mu\nabla^2) \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Yy \frac{\partial w}{\partial y} + Yy \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho h \ddot{w} \right] \quad (5.3.10)$$

односно

$$\begin{aligned} & -D\nabla^4 w + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + Yy \frac{\partial w}{\partial y} + Yy \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho h \ddot{w} \\ & - \mu \left[Y \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} y + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} y + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ & - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.3.11) \\ & \left. - 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x \partial y^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + Y \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} y + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} y + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \rho h \ddot{w} \right] = 0. \end{aligned}$$

Да би формирали другу диференцијалну једначину, изразе за силе у пресеку (5.3.7 - 5.3.9) напишимо као

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = 2n_x, \quad (5.3.12)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 2n_y, \quad (5.3.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = 2n_{xy}. \quad (5.3.14)$$

где су n_x , n_y и n_{xy} дати са

$$n_x = \frac{(1 - \mu\nabla^2)N_{xx}}{K} - \nu \frac{\partial v_o}{\partial y}, \quad (5.3.15)$$

$$n_y = \frac{(1 - \mu\nabla^2)N_{yy}}{K} - \frac{\partial v_o}{\partial y}, \quad (5.3.16)$$

$$n_{xy} = \frac{(1 - \mu\nabla^2)N_{xy}}{K(1 - \nu)}, \quad (5.3.17)$$

Као и у претходном поглављу, за формирање друге диференцијалне једначине, поновимо поступак помоћу израза (5.2.26 - 5.2.32), тако да ћемо добити једначину (5.2.32). Замењујући (5.3.15) - (5.3.17) у (5.2.32) следи

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{1 - \nu^2} \left[-\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{(1 - \mu\nabla^2)N_{xx}}{K} - \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) \right. \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{(1 - \mu\nabla^2)N_{yy}}{K} - \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{(1 - \mu\nabla^2)N_{yy}}{K} - \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{(1 - \mu\nabla^2)N_{xx}}{K} - \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{K(1 - \nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (1 - \mu\nabla^2)N_{xy}. \quad (5.3.18) \end{aligned}$$

Заменом напонске функције (5.2.16) у (5.3.18), чланови у првој загради са десне стране једначине (5.3.18) имаће следећи облик

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{(1 - \mu \nabla^2) N_{xx}}{K} - \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) = \frac{1}{K} \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - \mu \left(\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \right] - \nu \frac{\partial^3 v_o}{\partial x^2 \partial y}. \quad (5.3.19)$$

Чланови у другој загради имаће облик

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{(1 - \mu \nabla^2) N_{yy}}{K} - \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) = \frac{1}{K} \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} y - \mu \left(\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^4 \partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} y + \frac{\partial^4 Y}{\partial x^2 \partial y^2} y + 2 \frac{\partial^3 Y}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] - \frac{\partial^3 v_o}{\partial x^2 \partial y}. \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

Чланови у трећој загради биће облика

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{(1 - \mu \nabla^2) N_{yy}}{K} - \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) = \frac{1}{K} \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} y + 2 \frac{\partial Y}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^4 Y}{\partial x^2 \partial y^2} y + 2 \frac{\partial^3 Y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} + 4 \frac{\partial^3 Y}{\partial y^3} \right) \right] - \frac{\partial^3 v_o}{\partial y^3}, \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

а чланови у четвртој загради дати су као

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{(1 - \mu \nabla^2) N_{xx}}{K} - \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) = \frac{1}{K} \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - \mu \left(\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} \right) \right] - \nu \frac{\partial^3 v_o}{\partial y^3}. \quad (5.3.22)$$

На крају, последњи члан са десне стране једначине (5.3.18) има облик

$$\frac{2}{K(1 - \nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (1 - \mu \nabla^2) N_{xy} = - \frac{2}{K(1 - \nu)} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2\mu}{K(1 - \nu)} \left(\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right). \quad (5.3.23)$$

Затим изразе (5.3.19) - (5.3.23) замењујемо у (5.3.18). Како је у нашем случају запреминско оптерећење Y константа, а померање $v_o(y)$ зависи само од y -координате, изводи су једнаки нули. У наставку следи коначан запис друге диференцијалне једначине

$$K(1 - \nu^2) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -\mu \left(\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} + 3 \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 \phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right) + \nabla^4 \phi. \quad (5.3.24)$$

6. МЕТОДЕ У РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА ДИНАМИЧКЕ АНАЛИЗЕ НАНО-ПЛОЧЕ

У претходном поглављу на основу *Kirchhoff*-ове и *von Karman*-ове класичне теорије плоча, надограђене *Eringen*-овом нелокалном теоријом еластичности, формиране су нелокалне диференцијалне једначине стабилности и осциловања покретно уклештене нано-плоче за линеарни и нелинеарни теоријски модел.

Нелокална диференцијална једначина за линеарни теоријски модел, уз одређене граничне услове, биће решавана помоћу *Galerkin*-ове методе (*Galerkin method*, GM) и методе диференцијалних квадратура (*differential quadrature method*, DQM). Оне нам омогућавају да спроведемо динамичку анализу линеарног теоријског модела при великим убрзањима, тј. да нам дају увид како спојени ефекти нелокалности и запреминског оптерећења утичу на слободно осциловање покретно уклештене нано-плоче и на њен облик.

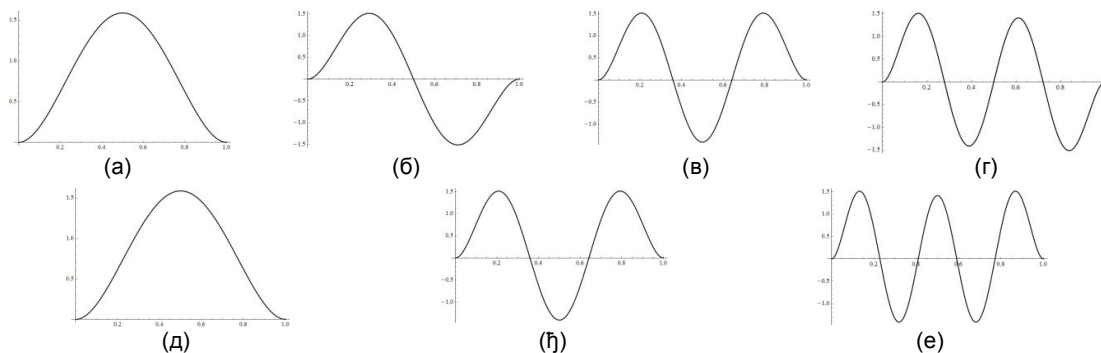
6.1. GALERKIN-ОВА МЕТОДА (GM)

6.1.1. ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ (GM)

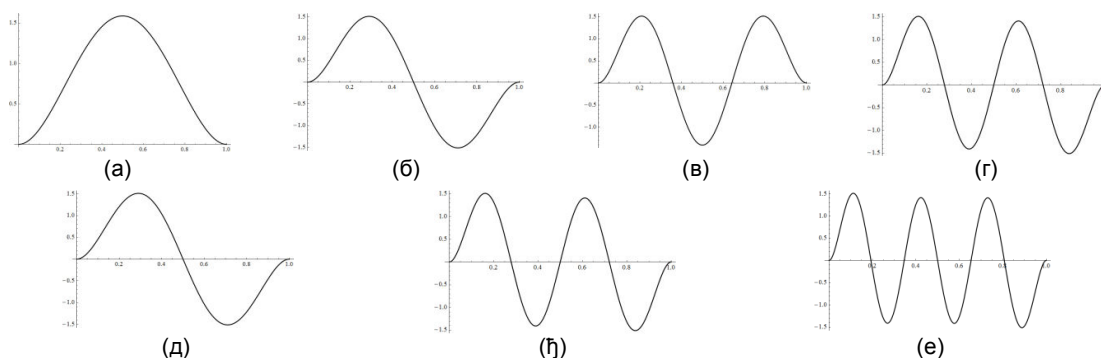
Galerkin-ова метода, представљена у раду *Vujanović* и *Spasić* [61, 1997], је добро позната приближна аналитичка метода која има велику примену у решавању проблема у физици, а посебно у механици. Користи се приликом решавања обичних и парцијалних диференцијалних једначина.

Код ове методе неопходно је знати информације о самом процесу и на основу тога, одабрати апроксимативно решење. Сваки члан у решењу има своју одговарајућу непознату константу. У циљу добијања што тачнијег приближног решења, потребно је правилно одабрати пробне функције. Приликом повећања броја чланова у пробном решењу увећава се и број константи, па решавање сложене диференцијалне једначине постаје све компликованије. Стога је од највеће важности што правилније одабрати апроксимативно решење, тј. пробне функције које одговарају посматраном стварном процесу. Апроксимативно решење претпоставља се у следећој форми

$$\begin{aligned} \bar{W}(\bar{x}, \bar{y}) = & C_1 \bar{W}_1(\bar{x}, \bar{y}) + C_2 \bar{W}_2(\bar{x}, \bar{y}) + C_3 \bar{W}_3(\bar{x}, \bar{y}) + C_4 \bar{W}_4(\bar{x}, \bar{y}) + C_5 \bar{W}_5(\bar{x}, \bar{y}) \\ & C_6 \bar{W}_6(\bar{x}, \bar{y}) + C_7 \bar{W}_7(\bar{x}, \bar{y}) + C_8 \bar{W}_8(\bar{x}, \bar{y}) + C_9 \bar{W}_9(\bar{x}, \bar{y}) + C_{10} \bar{W}_{10}(\bar{x}, \bar{y}) \\ & C_{11} \bar{W}_{11}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots + C_n \bar{W}_n(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (6.1.1)$$



Слика 13. Приказ облика пробних функција $f_k(\bar{x})$ и $g_l(\bar{y})$ у апроксимативном решењу: (а) функција $g_1(\bar{y})$, (б) функција $g_2(\bar{y})$, (в) функција $g_3(\bar{y})$, (г) функција $g_4(\bar{y})$, (д) функција $f_1(\bar{x})$, (ђ) функција $f_2(\bar{x})$ и (е) функција $f_3(\bar{x})$.



Слика 14. Приказ облика пробних функција $f_k(\bar{x})$ и $g_l(\bar{y})$ у апроксимативном решењу: (а) функција $g_1(\bar{y})$, (б) функција $g_2(\bar{y})$, (в) функција $g_3(\bar{y})$, (г) функција $g_4(\bar{y})$, (д) функција $f_1(\bar{x})$, (ђ) функција $f_2(\bar{x})$ и (е) функција $f_3(\bar{x})$.

Табела 2. Вредности коефицијената за пробне функције (6.1.3) и (6.1.4). Слика 13.

Коефицијенти	Функције за симетричне модове (0,0), (1,0), (2,0), (0,2)			
	A_k	φ_k	B_l	ψ_l
f_1	0.9825022145	4.730040744	-	-
f_2	0.9999664501	10.9956078380	-	-
f_3	0.9999999373	17.2787596573	-	-
g_1	-	-	0.9825022145	4.730040744
g_2	-	-	1.0007773119	7.8532046240
g_3	-	-	0.9999664501	10.9956078380
g_4	-	-	1.0000014498	14.1371654912

Табела 3. Вредности коефицијената за пробне функције (6.1.3) и (6.1.4). Слика 14.

Коефицијенти	Функције за антисиметричне модове (0,1), (1,1)			
	A_k	φ_k	B_l	ψ_l
f_1	1.0007773119	7.8532046240	-	-
f_2	1.0000014498	14.1371654912	-	-
f_3	1.0000000027	20.4203522456	-	-
g_1	-	-	0.9825022145	4.730040744
g_2	-	-	1.0007773119	7.8532046240
g_3	-	-	0.9999664501	10.9956078380
g_4	-	-	1.0000014498	14.1371654912

У пробном решењу (6.1.1), чланови $\bar{W}_1, \bar{W}_2 \dots \bar{W}_n$, представљају производ пробних функција $f_k(\bar{x})$ и $g_l(\bar{y})$

$$\begin{aligned}\bar{W}_1(\bar{x}, \bar{y}) &= f_1(\bar{x})g_1(\bar{y}), & \bar{W}_2(\bar{x}, \bar{y}) &= f_1(\bar{x})g_2(\bar{y}), & \bar{W}_3(\bar{x}, \bar{y}) &= f_1(\bar{x})g_3(\bar{y}), \\ \bar{W}_4(\bar{x}, \bar{y}) &= f_1(\bar{x})g_4(\bar{y}), & \bar{W}_5(\bar{x}, \bar{y}) &= f_2(\bar{x})g_1(\bar{y}), & \bar{W}_6(\bar{x}, \bar{y}) &= f_2(\bar{x})g_2(\bar{y}), \\ \bar{W}_7(\bar{x}, \bar{y}) &= f_2(\bar{x})g_3(\bar{y}), & \bar{W}_8(\bar{x}, \bar{y}) &= f_2(\bar{x})g_4(\bar{y}), & \bar{W}_9(\bar{x}, \bar{y}) &= f_3(\bar{x})g_1(\bar{y}) \\ \bar{W}_{10}(\bar{x}, \bar{y}) &= f_3(\bar{x})g_2(\bar{y}), & \bar{W}_{11}(\bar{x}, \bar{y}) &= f_3(\bar{x})g_3(\bar{y}) \dots\end{aligned}\quad (6.1.2)$$

За наше пробне функције одабрали смо решења која задовољавају потребне граничне услове, а то су решења за уклештени штап који попречно осцилује

$$f_k(\bar{x}) = A_k \sin(\varphi_k \bar{x}) - \cos(\varphi_k \bar{x}) - A_k \sinh(\varphi_k \bar{x}) + \cosh(\varphi_k \bar{x}), \quad (6.1.3)$$

$$g_l(\bar{y}) = B_l \sin(\psi_l \bar{y}) - \cos(\psi_l \bar{y}) - B_l \sinh(\psi_l \bar{y}) + \cosh(\psi_l \bar{y}). \quad (6.1.4)$$

Облици пробних функција $f_k(\bar{x})$ и $g_l(\bar{y})$, у пробном решењу (6.1.2), приказани су на сликама 13 и 14, док се коефицијенти A_k и B_l који фигуришу у (6.1.3) и (6.1.4), налазе у табелама 2 и 3. Напоменимо да симетричне модове осциловања добијемо користећи пробне функције приказане на слици 13, док за добијање антисиметричних модова користимо пробне функције приказане на слици 14.

Galerkin-ова метода подразумева да се апроксимативно решење диференцијалне једначине (5.1.51) претпостави изразом (6.1.1). Диференцијални оператор Λ је облика

$$\begin{aligned}\Lambda = & \left[1 - (1 - \bar{y})\nu \frac{\beta \bar{\mu}}{\alpha} \right] \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} + [2\alpha^2 - (1 - \bar{y})(1 + \nu) \alpha \beta \bar{\mu}] \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} \\ & + [\alpha^4 - (1 - \bar{y})\alpha^3 \beta \bar{\mu}] \frac{\partial^4}{\partial \bar{y}^4} + (1 + 2\nu)\alpha \beta \bar{\mu} \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + 3\alpha^3 \beta \bar{\mu} \frac{\partial^3}{\partial \bar{y}^3} \\ & + \left[(1 - \bar{y}) \frac{\beta}{\alpha} \nu + \bar{\omega}^2 \bar{\mu} \right] \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + [(1 - \bar{y})\alpha\beta + \bar{\omega}^2 \alpha^2 \bar{\mu}] \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} - \alpha\beta \frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \bar{\omega}^2.\end{aligned}\quad (6.1.5)$$

Применом диференцијалног оператора Λ , израз (6.1.5), на апроксимативно решење, израз (6.1.1), доводи до

$$\Lambda \bar{W}(\bar{x}, \bar{y}) = \Lambda [C_1 \bar{W}_1(\bar{x}, \bar{y}) + C_2 \bar{W}_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots + C_n \bar{W}_n(\bar{x}, \bar{y})],$$

односно

$$\Lambda \bar{W}(\bar{x}, \bar{y}) = C_1 \Lambda \bar{W}_1(\bar{x}, \bar{y}) + C_2 \Lambda \bar{W}_2(\bar{x}, \bar{y}) + C_3 \Lambda \bar{W}_3(\bar{x}, \bar{y}) + \dots + C_n \Lambda \bar{W}_n(\bar{x}, \bar{y}). \quad (6.1.6)$$

Множењем израза (6.1.6) са пробним функцијама и интеграцијом по бездимензијским координатама добија се

$$\int_0^1 \int_0^1 (\Lambda \bar{W}(\bar{x}, \bar{y})) \bar{W}_j(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

односно

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \left(C_1 (\Lambda \bar{W}_1(\bar{x}, \bar{y})) \bar{W}_j(\bar{x}, \bar{y}) + C_2 (\Lambda \bar{W}_2(\bar{x}, \bar{y})) \bar{W}_j(\bar{x}, \bar{y}) + \dots \right. \\ \left. + C_n (\Lambda \bar{W}_n(\bar{x}, \bar{y})) \bar{W}_j(\bar{x}, \bar{y}) \right) d\bar{x} d\bar{y} = 0.\end{aligned}$$

Пошто су C_i константе, извућићемо их испред интеграла и добити

$$C_1 \int_0^1 \int_0^1 (\Lambda \bar{W}_1(\bar{x}, \bar{y})) \bar{W}_j(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y} + C_2 \int_0^1 \int_0^1 (\Lambda \bar{W}_2(\bar{x}, \bar{y})) \bar{W}_j(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y} \\ + \dots + C_n \int_0^1 \int_0^1 (\Lambda \bar{W}_n(\bar{x}, \bar{y})) \bar{W}_j(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y} = 0, \quad j = 1 \dots n. \quad (6.1.7)$$

Интеграле уз константе C_i обележавамо са a_{ij} ,

$$a_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 (\Lambda \bar{W}_i(\bar{x}, \bar{y})) \bar{W}_j(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y}, \quad i, j = 1 \dots n. \quad (6.1.8)$$

Систем једначина (6.1.7) је хомогени систем линеарних једначина по константама C_1, C_2, \dots, C_n . Како хомогени систем линеарних једначина има нетривијално решење само уколико је детерминанта система једнака нули, формирамо детерминанту система и изједначавамо је са нулом

$$DS = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.1.9)$$

У изразу (6.1.9), коефицијенти $a_{ij} = a_{ij}(\bar{\omega})$ за $i, j = 1 \dots n$, су функције бездимензијске кружне фреквенције $\bar{\omega}$. Карактеристична једначина има форму

$$DS = DS(\bar{\omega}) = 0, \quad (6.1.10)$$

чија решења су бездимензијске кружне фреквенције $\bar{\omega}_j$. Следећи корак је одређивање константи C_1, C_2, \dots, C_n из карактеристичне једначине, за сваку од кружних фреквенција $\bar{\omega}_j$. На основу (6.1.7) и (6.1.8) је

$$a_{11}(\bar{\omega}_j)C_1 + a_{12}(\bar{\omega}_j)C_2 + \dots + a_{1n}(\bar{\omega}_j)C_n = 0, \quad j = 1, 2 \dots n, \\ \vdots \\ a_{21}(\bar{\omega}_j)C_1 + a_{22}(\bar{\omega}_j)C_2 + \dots + a_{2n}(\bar{\omega}_j)C_n = 0, \quad j = 1, 2 \dots n, \\ \vdots \\ a_{n-1,1}(\bar{\omega}_j)C_1 + a_{n-1,2}(\bar{\omega}_j)C_2 + \dots + a_{n-1,n}(\bar{\omega}_j)C_n = 0, \quad j = 1, 2 \dots n. \quad (6.1.11)$$

Сваку једначину система (6.1.11) поделимо са константом C_1 , и слободан члан пребацимо са десне стране једначине. При томе, добијамо нехомогени систем $n - 1$ линеарних једначина и $n - 1$ непознатих константи

$$a_{12}(\bar{\omega}_j) \frac{C_2}{C_1} + \dots + a_{1n}(\bar{\omega}_j) \frac{C_n}{C_1} = -a_{11}(\bar{\omega}_j), \quad j = 1, 2 \dots n, \\ \vdots \\ a_{22}(\bar{\omega}_j) \frac{C_2}{C_1} + \dots + a_{2n}(\bar{\omega}_j) \frac{C_n}{C_1} = -a_{21}(\bar{\omega}_j), \quad j = 1, 2 \dots n, \\ \vdots \\ a_{n-1,2}(\bar{\omega}_j) \frac{C_2}{C_1} + \dots + a_{n-1,n}(\bar{\omega}_j) \frac{C_n}{C_1} = -a_{n-1,1}(\bar{\omega}_j), \quad j = 1, 2 \dots n. \quad (6.1.12)$$

Систем једначина (6.1.12) решавамо по $\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1}, \dots, \frac{C_n}{C_1}$, и уврштавамо их у израз за пробно решење (6.1.1) које је одређено до на непознату амплитуду C_1

$$\bar{W}(x, y) = C_1 \left(\bar{W}_1(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{C_2}{C_1} \bar{W}_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots + \frac{C_n}{C_1} \bar{W}_n(\bar{x}, \bar{y}) \right). \quad (6.1.13)$$

6.2. МЕТОДА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ КВАДРАТУРА (DQM)

6.2.1. ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ

Метода диференцијалних квадратура (DQM) је друга метода коришћена у овој тези за решавање једначине стабилности и осциловања плоче (5.1.51). Поред *Galerkin*-ове методе, (DQM) метода има честу примену у истраживањима, па се тако може пронаћи велики број радова који се баве тематиком стабилности и осциловања плоча и штапова у којима је коришћена ова метода.

Нека је $f(\bar{x}, \bar{y})$ непрекидна функција две променљиве (\bar{x} и \bar{y} координате). Базирајући се на диференцијално квадратној методи представљеној у раду аутора *Shu* [59, 2000] и *Baghani* и др. [13, 2017], r -ти парцијални извод функције f по \bar{x} координати у тачки (\bar{x}_i, \bar{y}_j) дат је изразом

$$\left. \frac{\partial^r f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^r} \right|_{(\bar{x}_i, \bar{y}_j)} = \sum_{m=1}^{N_x} A_{im}^{(r)} f(\bar{x}_m, \bar{y}_j) = \sum_{m=1}^{N_x} A_{im}^{(r)} f_{mj}, \quad (6.2.1)$$

где је f_{mj} вредност функције у тачки (\bar{x}_m, \bar{y}_j) , док је $r + s$ -ти парцијални извод функције f реда r по \bar{x} координати и реда s по \bar{y} координати у тачки (\bar{x}_i, \bar{y}_j) дат у форми

$$\left. \frac{\partial^{r+s} f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^r \partial \bar{y}^s} \right|_{(\bar{x}_i, \bar{y}_j)} = \sum_{n=1}^{N_y} \sum_{m=1}^{N_x} A_{im}^{(r)} \bar{A}_{jn}^{(s)} f(\bar{x}_m, \bar{y}_n) = \sum_{n=1}^{N_y} \sum_{m=1}^{N_x} A_{im}^{(r)} \bar{A}_{jn}^{(s)} f_{mn}. \quad (6.2.2)$$

У изразима (6.2.1) и (6.2.2), ознака N_x означава број мрежних тачака дуж \bar{x} координате, а ознака N_y број мрежних тачака дуж \bar{y} координате. Коефицијенти $A_{ij}^{(r)}$ и $\bar{A}_{ij}^{(r)}$ су тежински коефицијенти уз парцијалне изводе r -тог реда дуж \bar{x} и \bar{y} праваца, респективно. Тежински коефицијенти се рачунају у зависности од реда извода, видети *Baghani* и др. [13, 2017] и *Shu* [59, 2000]. Ако је $r = 1$, дакле за први извод, тежински коефицијент који одговара $\bar{\xi}$ координати (\bar{x} или \bar{y}) дат је у форми

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(\bar{\xi}_i)}{(\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_j)M^{(1)}(\bar{\xi}_j)}, \quad \text{за } i \neq j \text{ и } i, j = 1, 2, \dots, N_{\bar{\xi}}, \quad (6.2.3)$$

$$A_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, (j \neq i)}^{N_{\bar{\xi}}} A_{ij}^{(1)}, \quad \text{за } i = j \text{ и } i, j = 1, 2, \dots, N_{\bar{\xi}}, \quad (6.2.4)$$

где је $M^{(1)}(\bar{\xi}_i)$ дат у форми

$$M^{(1)}(\bar{\xi}_k) = \prod_{j=1, (j \neq k)}^{N_{\bar{\xi}}} (\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_j). \quad (6.2.5)$$

За $r = 2$, односно у случају другог извода, важи

$$A_{ij}^{(2)} = 2A_{ij}^{(1)} \left(A_{ii}^{(1)} - \frac{1}{\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_j} \right), \quad \text{за } i \neq j \text{ и } i, j = 1, 2, \dots, N_{\bar{\xi}}, \quad (6.2.6)$$

$$A_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1}^{N_\xi} A_{ij}^{(2)}, \quad \text{за } i = j \text{ и } i, j = 1, 2, \dots, N_\xi. \quad (6.2.7)$$

Ако је $r = 3$, односно за трећи извод следи

$$A_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{N_\xi} A_{ik}^{(1)} A_{kj}^{(2)}, \quad \text{за } i, j = 1, 2, \dots, N_\xi, \quad (6.2.8)$$

док за четврти извод $r = 4$, важи

$$A_{ij}^{(4)} = \sum_{k=1}^{N_\xi} A_{ik}^{(1)} A_{kj}^{(3)}, \quad \text{за } i, j = 1, 2, \dots, N_\xi. \quad (6.2.9)$$

Дистрибуција мрежних тачака на посматраном линеарном теоријском моделу заснована је на *Gauss-Chebyshev-Lobatto* расподели, која је описана у раду аутора *Shu* [59, 2000] и *Baghani* и др. [13, 2017]. Позивајући се на њу, одговарајући израз за $\bar{\xi}$ координату (\bar{x} или \bar{y}) дат је у форми

$$\bar{\xi}_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi (i-1)}{N_\xi - 1} \right] \right\}, \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, N_\xi, \quad (6.2.10)$$

односно израз за \bar{x}_i координату

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi (i-1)}{N_\xi - 1} \right] \right\}, \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, N_\xi, \quad (6.2.10a)$$

и израз за \bar{y}_i координату

$$\bar{y}_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi (j-1)}{N_\xi - 1} \right] \right\}, \quad \text{за } j = 1, 2, \dots, N_\xi, \quad (6.2.10b)$$

Метод диференцијалних квадратура са *Gauss-Chebyshev-Lobatto* расподелом и једнаким бројем тачака дуж \bar{x} и \bar{y} оса ($N_x = N_y = N$), биће примењен за одређивање природних фреквенција осциловања нано-плоче. Дискретизацијом нелокалне диференцијалне једначине стабилности и осциловања плоче (...), односно коришћењем израза за парцијалне изводе (6.2.1) и (6.2.2), добија се

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N A_{im}^{(4)} \bar{W}_{mj} \left[1 - (1 - \bar{y}_j) \nu \frac{\beta \bar{\mu}}{\alpha} \right] + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N A_{im}^{(2)} \bar{A}_{jn}^{(2)} \bar{W}_{mn} [2\alpha^2 - (1 - \bar{y}_j)(1 + \nu)\alpha\beta\bar{\mu}] + \\ & \sum_{n=1}^N \bar{A}_{jn}^{(4)} \bar{W}_{in} [\alpha^4 - (1 - \bar{y}_j)\alpha^3\beta\bar{\mu}] + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N A_{im}^{(2)} \bar{A}_{jn}^{(1)} \bar{W}_{mn} [(1 + 2\nu)\alpha\beta\bar{\mu}] + \\ & \sum_{n=1}^N \bar{A}_{jn}^{(3)} \bar{W}_{in} 3\alpha^3\beta\bar{\mu} + \sum_{m=1}^N \bar{A}_{im}^{(2)} \bar{W}_{mj} \left[(1 - \bar{y}_j) \frac{\beta}{\alpha} \nu + \bar{\omega}^2 \bar{\mu} \right] + \sum_{n=1}^N \bar{A}_{jn}^{(2)} \bar{W}_{in} [(1 - \bar{y}_j)\alpha\beta + \bar{\omega}^2\alpha\bar{\mu}] - \\ & \sum_{n=1}^N \bar{A}_{jn}^{(1)} \bar{W}_{in} \alpha\beta - \bar{W}_{ij} \bar{\omega}^2 = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Чланове у једначини (6.2.12) у којима фигурише бездимензијска фреквенција $\bar{\omega}^2$, пребацићемо на десну страну једначине

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^N A_{im}^{(4)} \bar{W}_{mj} \left[1 - (1 - \bar{y}_j) \nu \frac{\beta \bar{\mu}}{\alpha} \right] + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N A_{im}^{(2)} \bar{A}_{jn}^{(2)} \bar{W}_{mn} [2\alpha^2 - (1 - \bar{y}_j)(1 + \nu)\alpha\beta\bar{\mu}] + \\
& \sum_{n=1}^N \bar{A}_{jn}^{(4)} \bar{W}_{in} [\alpha^4 - (1 - \bar{y}_j)\alpha^3\beta\bar{\mu}] + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N A_{im}^{(2)} \bar{A}_{jn}^{(1)} \bar{W}_{mn} [(1 + 2\nu)\alpha\beta\bar{\mu}] + \\
& \sum_{n=1}^N \bar{A}_{jn}^{(3)} \bar{W}_{in} 3\alpha^3\beta\bar{\mu} - \sum_{n=1}^N \bar{A}_{jn}^{(1)} \bar{W}_{in} \alpha\beta + \sum_{m=1}^N A_{im}^{(2)} \bar{W}_{mj} \left[(1 - \bar{y}_j) \nu \frac{\beta}{\alpha} \right] + \\
& \sum_{n=1}^N \bar{A}_{jn}^{(2)} \bar{W}_{in} [(1 - \bar{y}_j)\alpha\beta] = - \sum_{m=1}^N A_{im}^{(2)} \bar{W}_{mj} \bar{\omega}^2 \bar{\mu} - \sum_{n=1}^N \bar{A}_{jn}^{(2)} \bar{W}_{in} \bar{\omega}^2 \alpha^2 \bar{\mu} + \bar{W}_{ij} \bar{\omega}^2, \quad (6.2.13)
\end{aligned}$$

где су $i, j = 1, 2, \dots, N$. Дискретизовану нелокалну једначину (6.2.13), написаћемо у матричној форми

$$\mathcal{A}^* \bar{W} = \bar{\omega}^2 B^* \bar{W}, \quad (6.2.14)$$

где је матрица угиба \bar{W} у дискретним тачкама дата матрицом

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \bar{W}_1 \\ \bar{W}_2 \\ \bar{W}_3 \\ \vdots \\ \bar{W}_N \end{bmatrix}, \quad (6.2.15a)$$

где је сваки члан матрице (6.2.15a), дат матрицом

$$\bar{W}_1 = \begin{bmatrix} \bar{W}_{11} \\ \bar{W}_{12} \\ \bar{W}_{13} \\ \vdots \\ \bar{W}_{1N} \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_2 = \begin{bmatrix} \bar{W}_{21} \\ \bar{W}_{22} \\ \bar{W}_{23} \\ \vdots \\ \bar{W}_{2N} \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_3 = \begin{bmatrix} \bar{W}_{31} \\ \bar{W}_{32} \\ \bar{W}_{33} \\ \vdots \\ \bar{W}_{3N} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad \bar{W}_N = \begin{bmatrix} \bar{W}_{N1} \\ \bar{W}_{N2} \\ \bar{W}_{N3} \\ \vdots \\ \bar{W}_{NN} \end{bmatrix}. \quad (6.2.15b)$$

Матрица \mathcal{A}^* , односно матрица леве стране дискретизоване нелокалне једначине (6.2.14), састоји се од дијагоналних чланова \mathcal{A}_{pp}^* и недијагоналних чланова B_{pq}^*

$$\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}^* & B_{12}^* & B_{13}^* & \dots & B_{1N}^* \\ B_{21}^* & \mathcal{A}_{22}^* & B_{23}^* & \dots & B_{2N}^* \\ B_{31}^* & B_{32}^* & \mathcal{A}_{33}^* & \dots & B_{3N}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1}^* & B_{N2}^* & B_{N3}^* & \dots & \mathcal{A}_{NN}^* \end{bmatrix}, \quad (6.2.16)$$

док матрица B^* , десне стране дискретизоване нелокалне једначине (6.2.14), састоји се од дијагоналних чланова $\tilde{\mathcal{A}}_{pp}$ и недијагоналних чланова \tilde{B}_{pq}

$$B^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}}_{11} & \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{13} & \dots & \tilde{B}_{1N} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{\mathcal{A}}_{22} & \tilde{B}_{23} & \dots & \tilde{B}_{2N} \\ \tilde{B}_{31} & \tilde{B}_{32} & \tilde{\mathcal{A}}_{33} & \dots & \tilde{B}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{B}_{N1} & \tilde{B}_{N2} & \tilde{B}_{N3} & \dots & \tilde{\mathcal{A}}_{NN} \end{bmatrix}. \quad (6.2.17)$$

Прво формирамо матрицу \mathcal{A}^* , односно леву страну нелокалне једначине (6.2.13) чије чланове уз одговарајуће суме записујемо у новом облику

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N a_{im} \bar{W}_{mj} + \sum_{m=1}^N \bar{a}_{im} \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right) \bar{W}_{mj} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N b_{imjn} \bar{W}_{mn} + \sum_{n=1}^N c_{jn} \bar{W}_{in} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N d_{imjn} \bar{W}_{mn} + \\ & \sum_{n=1}^N e_{jn} \bar{W}_{in} - \sum_{n=1}^N f_{jn} \bar{W}_{in} + \sum_{m=1}^N g_{im} \bar{W}_{mj} + \sum_{m=1}^N \bar{g}_{im} \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right) \bar{W}_{mj} + \sum_{n=1}^N h_{jn} \bar{W}_{in}, \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

где су $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Коефицијенти уз суме из једначине (6.2.18) дати су изразима

$$\begin{aligned} a_{im} &= A_{im}^{(4)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta \bar{\mu} \nu}{\alpha}\right), & \bar{a}_{im} &= -A_{im}^{(4)} \frac{1}{2} \frac{\beta \bar{\mu} \nu}{\alpha}, & g_{im} &= A_{im}^{(2)} \frac{1}{2} \frac{\beta \nu}{\alpha}, \\ \bar{g}_{im} &= A_{im}^{(2)} \frac{1}{2} \frac{\beta \nu}{\alpha}, & b_{imjn} &= A_{im}^{(2)} \bar{A}_{jn}^{(2)} \alpha \left[2\alpha - \frac{1}{2} \beta \bar{\mu} (1 + \nu) - \frac{1}{2} \alpha \beta \bar{\mu} (1 + \nu) \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right)\right], \\ d_{imjn} &= A_{im}^{(2)} \bar{A}_{jn}^{(1)} (1 + 2\nu) \alpha \beta \bar{\mu}, & c_{jn} &= \bar{A}_{jn}^{(4)} \alpha^3 \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta \bar{\mu}\right) - \bar{A}_{jn}^{(4)} \frac{1}{2} \alpha^3 \beta \bar{\mu} \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right), \\ e_{jn} &= \bar{A}_{jn}^{(3)} 3\alpha^3 \beta \bar{\mu}, & f_{jn} &= \bar{A}_{jn}^{(1)} \alpha \beta, & h_{jn} &= \bar{A}_{jn}^{(2)} \frac{1}{2} \alpha \beta + \bar{A}_{jn}^{(2)} \frac{1}{2} \alpha \beta \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right). \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

У изразу (6.2.18) извршићемо груписања

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N (a_{im} + g_{im}) \bar{W}_{mj} + \sum_{m=1}^N (\bar{a}_{im} + \bar{g}_{im}) \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right) \bar{W}_{mj} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (b_{imjn} + d_{imjn}) \bar{W}_{mn} \\ & + \sum_{n=1}^N (c_{jn} + e_{jn} - f_{jn} + h_{jn}) \bar{W}_{in}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

где чланови уз суме у заградама добијају нове ознаке

$$\mathcal{A}_{jn} = c_{jn} + e_{jn} - f_{jn} + h_{jn}, \quad \mathcal{B}_{im} = a_{im} + g_{im}, \quad (6.2.20a)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{im} = \bar{a}_{im} + \bar{g}_{im}, \quad \mathcal{C}_{imjn} = b_{imjn} + d_{imjn}. \quad (6.2.20b)$$

Израз (6.2.18) записујемо у коначној форми

$$\sum_{n=1}^N \mathcal{A}_{jn} \bar{W}_{in} + \sum_{m=1}^N \mathcal{B}_{im} \bar{W}_{mj} + \sum_{m=1}^N \bar{\mathcal{B}}_{im} \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right) \bar{W}_{mj} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \mathcal{C}_{imjn} \bar{W}_{mn}, \quad (6.2.21)$$

где су $i, j = 1, 2, \dots, N$. За случај $i = 1$, из (6.2.21) следи развој:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{j1} \bar{W}_{11} + \mathcal{A}_{j2} \bar{W}_{12} + \mathcal{A}_{j3} \bar{W}_{13} + \dots + \mathcal{B}_{11} \bar{W}_{1j} + \mathcal{B}_{12} \bar{W}_{2j} + \mathcal{B}_{13} \bar{W}_{3j} + \dots + \\ & \bar{\mathcal{B}}_{11} \bar{W}_{1j} + \bar{\mathcal{B}}_{12} \bar{W}_{2j} + \bar{\mathcal{B}}_{13} \bar{W}_{3j} + \dots + \mathcal{C}_{11j1} \bar{W}_{11} + \mathcal{C}_{11j2} \bar{W}_{12} + \mathcal{C}_{11j3} \bar{W}_{13} + \dots + \\ & \mathcal{C}_{12j1} \bar{W}_{21} + \mathcal{C}_{12j2} \bar{W}_{22} + \mathcal{C}_{12j3} \bar{W}_{23} + \dots + \mathcal{C}_{13j1} \bar{W}_{31} + \mathcal{C}_{13j2} \bar{W}_{32} + \mathcal{C}_{13j3} \bar{W}_{33} + \dots + \\ & \mathcal{C}_{1Nj1} \bar{W}_{N1} + \mathcal{C}_{1Nj2} \bar{W}_{N2} + \mathcal{C}_{1Nj3} \bar{W}_{N3} + \dots \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

Недијагонални чланови \mathcal{B}_{pq}^* , у матрици \mathcal{A}^* , (6.2.16), дати су у форми

$$\mathcal{B}_{pq}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{pq} + J_1 \bar{\mathcal{B}}_{pq} + \mathcal{C}_{pq11} & \mathcal{C}_{pq12} & \mathcal{C}_{pq13} & \cdots & \mathcal{C}_{pq1N} \\ \mathcal{C}_{pq21} & \mathcal{B}_{pq} + J_2 \bar{\mathcal{B}}_{pq} + \mathcal{C}_{pq22} & \mathcal{C}_{pq23} & \cdots & \mathcal{C}_{pq2N} \\ \mathcal{C}_{pq31} & \mathcal{C}_{pq32} & \mathcal{B}_{pq} + J_3 \bar{\mathcal{B}}_{pq} + \mathcal{C}_{pq33} & \cdots & \mathcal{C}_{pq3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{pqN1} & \mathcal{C}_{pqN2} & \mathcal{C}_{pqN3} & \cdots & \mathcal{B}_{pq} + J_N \bar{\mathcal{B}}_{pq} + \mathcal{C}_{pqNN} \end{bmatrix}, \quad (6.2.23)$$

ОДНОСНО

$$\mathcal{B}_{pq}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{pq11} & \mathcal{C}_{pq12} & \mathcal{C}_{pq13} & \cdots & \mathcal{C}_{pq1N} \\ \mathcal{C}_{pq21} & \mathcal{C}_{pq22} & \mathcal{C}_{pq23} & \cdots & \mathcal{C}_{pq2N} \\ \mathcal{C}_{pq31} & \mathcal{C}_{pq32} & \mathcal{C}_{pq33} & \cdots & \mathcal{C}_{pq3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{pqN1} & \mathcal{C}_{pqN2} & \mathcal{C}_{pqN3} & \cdots & \mathcal{C}_{pqNN} \end{bmatrix} + \mathcal{B}_{pq} I + \bar{\mathcal{B}}_{pq} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_N \end{bmatrix}, \quad (6.2.24)$$

где је I јединична матрица реда $N \times N$, а члан J_j уз матрицу $\bar{\mathcal{B}}_{pq}$ је

$$J_j = \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right), \quad \text{за } j = 1, \dots, N. \quad (6.2.24a)$$

Дијагонални чланови \mathcal{A}_{pp}^* , у матрици \mathcal{A}^* , (6.2.16), дати су у форми

$$\mathcal{A}_{pp}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} + \mathcal{B}_{pp} + J_1 \bar{\mathcal{B}}_{pp} + \mathcal{C}_{pp11} & \mathcal{A}_{12} + \mathcal{C}_{pp12} & \cdots & \mathcal{A}_{1N} + \mathcal{C}_{pp1N} \\ \mathcal{A}_{21} + \mathcal{C}_{pp21} & \mathcal{A}_{22} + \mathcal{B}_{pp} + J_2 \bar{\mathcal{B}}_{pp} + \mathcal{C}_{pp22} & \cdots & \mathcal{A}_{2N} + \mathcal{C}_{pp2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{N1} + \mathcal{C}_{ppN1} & \mathcal{A}_{N2} + \mathcal{C}_{ppN2} & \cdots & \mathcal{A}_{NN} + \mathcal{B}_{pp} + J_N \bar{\mathcal{B}}_{pp} + \mathcal{C}_{ppNN} \end{bmatrix}, \quad (6.2.25)$$

ОДНОСНО

$$\mathcal{A}_{pp}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \cdots & \mathcal{A}_{1N} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \cdots & \mathcal{A}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{N1} & \mathcal{A}_{N2} & \cdots & \mathcal{A}_{NN} \end{bmatrix} + \mathcal{B}_{pp} I + \bar{\mathcal{B}}_{pp} \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{pp11} & \mathcal{C}_{pp12} & \cdots & \mathcal{C}_{pp1N} \\ \mathcal{C}_{pp21} & \mathcal{C}_{pp22} & \cdots & \mathcal{C}_{pp2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}_{ppN1} & \mathcal{C}_{ppN2} & \cdots & \mathcal{C}_{ppNN} \end{bmatrix}. \quad (6.2.26)$$

За формирање матрице \mathcal{B}^* , записујемо десну страну дискретизоване нелокалне једначине (6.2.13), чији су чланови уз одговарајуће суме дати као

$$\sum_{m=1}^N \tilde{a}_{im} \bar{W}_{mj} + \sum_{n=1}^N \tilde{b}_{jn} \bar{W}_{in} + \bar{W}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (6.2.27)$$

Коефицијенти уз суме из једначине (6.2.27) дати су изразима

$$\tilde{a}_{im} = -\bar{\mu} \bar{A}_{im}^{(2)}, \quad \tilde{b}_{jn} = -\alpha^2 \bar{\mu} \bar{A}_{jn}^{(2)}. \quad (6.2.28)$$

За случај када је $i = 1$, имамо следећи развој

$$\begin{aligned} & \tilde{a}_{11} \bar{W}_{1j} + \tilde{a}_{12} \bar{W}_{2j} + \tilde{a}_{13} \bar{W}_{3j} + \cdots + \tilde{a}_{1N} \bar{W}_{Nj} + \\ & \tilde{b}_{11} \bar{W}_{1j} + \tilde{b}_{12} \bar{W}_{2j} + \tilde{b}_{13} \bar{W}_{3j} + \cdots + \tilde{b}_{1N} \bar{W}_{Nj} + \bar{W}_{1N}. \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

Недијагонални чланови $\tilde{\mathcal{B}}_{pq}$, у матрици \mathcal{B}^* , (6.2.17), дати су у форми

$$\tilde{\mathcal{B}}_{pq} = \tilde{\alpha}_{pq} I, \quad (6.2.30)$$

док су дијагонални чланови $\tilde{\mathcal{A}}_{pp}$, у матрици \mathcal{B}^* , (6.2.17), дати као

$$\tilde{\mathcal{A}}_{pp} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{pp} + \tilde{b}_{11} + 1 & \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{13} & \cdots & \tilde{b}_{1N} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{a}_{pp} + \tilde{b}_{22} + 1 & \tilde{b}_{23} & \cdots & \tilde{b}_{2N} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} & \tilde{a}_{pp} + \tilde{b}_{33} + 1 & \cdots & \tilde{b}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{N1} & \tilde{b}_{N3} & \tilde{b}_{N3} & \cdots & \tilde{a}_{pp} + \tilde{b}_{NN} + 1 \end{bmatrix}, \quad (6.2.31)$$

односно

$$\tilde{\mathcal{A}}_{pp} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{13} & \cdots & \tilde{b}_{1N} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \tilde{b}_{23} & \cdots & \tilde{b}_{2N} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} & \tilde{b}_{33} & \cdots & \tilde{b}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{N1} & \tilde{b}_{N3} & \tilde{b}_{N3} & \cdots & \tilde{b}_{NN} \end{bmatrix} + \tilde{a}_{pp}I + I, \quad (6.2.32)$$

где је I јединична матрица реда $N \times N$. За одређивање бездимензијских кружних фреквенција дискретизоване нелокалне једначине стабилности и осциловања нано-плоче, која је записана у матричној форми (6.2.14), неопходно је решавање својственог проблема, али треба узети у обзир граничне услове у случају уклештења

$$\text{страна } AD: \quad \bar{W}(0, \bar{y}) = 0, \quad \bar{W}_{1j} = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}(0, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \sum_{m=1}^N A_{1m}^{(1)} \bar{W}_{mj} = 0, \quad (6.2.33a)$$

$$\text{страна } AB: \quad \bar{W}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{W}_{i1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \sum_{n=1}^N A_{1n}^{(1)} \bar{W}_{in} = 0, \quad (6.2.33б)$$

$$\text{страна } BC: \quad \bar{W}(1, \bar{y}) = 0, \quad \bar{W}_{N_x j} = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}(1, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \sum_{m=1}^N A_{N_x m}^{(1)} \bar{W}_{mj} = 0, \quad (6.2.33в)$$

$$\text{страна } DC: \quad \bar{W}(\bar{x}, 1) = 0, \quad \bar{W}_{iN_y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{W}(\bar{x}, 1)}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \sum_{m=1}^N A_{N_y n}^{(1)} \bar{W}_{in} = 0. \quad (6.2.33г)$$

Формираћемо матрицу граничних услова \mathcal{G} , чијим се коришћењем дискретизовани гранични услови записују у форми матричне једначине

$$\mathcal{G}\bar{W} = 0, \quad (6.2.34)$$

где је угиб \bar{W} , у дискретним тачкама дат изразима (6.2.15а), (6.2.15б), док је матрица граничних услова \mathcal{G} дата у форми

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{AD} & N_1 & N_1 & \cdots & N_1 \\ N_2 & \mathcal{G}_1 & N_2 & \cdots & N_2 \\ N_2 & N_2 & \mathcal{G}_1 & \cdots & N_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1 & N_1 & N_1 & \cdots & \mathcal{G}_{BC} \\ \mathcal{G}_{AD_{11}}^{(1)} & \mathcal{G}_{AD_{12}}^{(1)} & \mathcal{G}_{AD_{13}}^{(1)} & \cdots & \mathcal{G}_{AD_{1N}}^{(1)} \\ \mathcal{G}_{BC_{N1}}^{(1)} & \mathcal{G}_{BC_{N2}}^{(1)} & \mathcal{G}_{BC_{N3}}^{(1)} & \cdots & \mathcal{G}_{BC_{NN}}^{(1)} \\ \mathcal{G}_{AB_{11}}^{(1)} & \mathcal{G}_{AB_{12}}^{(1)} & \mathcal{G}_{AB_{13}}^{(1)} & \cdots & \mathcal{G}_{AB_{1N}}^{(1)} \\ \mathcal{G}_{DC_{N1}}^{(1)} & \mathcal{G}_{DC_{N2}}^{(1)} & \mathcal{G}_{DC_{N3}}^{(1)} & \cdots & \mathcal{G}_{DC_{NN}}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (6.2.35)$$

За случај потпуно укљештене нано-плоче, када су угиби $\bar{W}(\bar{x}, \bar{y})$ у дискретним тачкама у правцима координатних оса на крајевима плоче једнаки нули, чланови \mathcal{G}_{AD} и \mathcal{G}_{BC} у матрици (6.2.35), одговарају граничним условима (6.2.33а) и (6.2.33в)

$$\mathcal{G}_{AD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.2.36a)$$

где је члан N_1 нула матрица. Члан \mathcal{G}_1 , одговара граничним условима (6.2.33б) и (6.2.33г),

$$\mathcal{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.2.36b)$$

где је члан N_2 нула матрица. Нагиби тангенте на еластичну површину $\partial\bar{W}(\bar{x}, \bar{y})/\partial\bar{x}$ у правцу \bar{x} -осе једнаки су нули. Чланови $\mathcal{G}_{AD}^{(1)}$ и $\mathcal{G}_{BC}^{(1)}$ у матрици (6.2.35), одговарају граничним условима (6.2.33а) и (6.2.33в)

$$\mathcal{G}_{AD_{1p}}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{1p} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{1p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{1p} \end{bmatrix}, \quad p = 1, \dots, N. \quad (6.2.37a)$$

$$\mathcal{G}_{BC_{Np}}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{Np} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{Np} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{Np} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{Np} \end{bmatrix}, \quad p = 1, \dots, N. \quad (6.2.37b)$$

Нагиби тангенте на еластичну површину $\partial\bar{W}(\bar{x}, \bar{y})/\partial\bar{y}$ у правцу \bar{y} -осе једнаки су нули, па су чланови $\mathcal{G}_{AB}^{(1)}$ и $\mathcal{G}_{DC}^{(1)}$ у матрици (6.2.35), који одговарају граничним условима (6.2.33б) и (6.2.33г)

$$\mathcal{G}_{AB_{11}}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_{AB_{12}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.2.38a)$$

$$\mathcal{G}_{AB_{13}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_{AB_{1N}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \end{bmatrix}, \quad (6.2.38b)$$

$$\mathcal{G}_{DC_{N1}}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \cdots & A_{NN} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_{DC_{N2}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \cdots & A_{NN} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.2.38c)$$

$$\mathcal{G}_{DC_{N3}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \cdots & A_{NN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_{DC_{NN}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}. \quad (6.2.38r)$$

Дакле, решава се својствени проблем (6.2.14)

$$\mathcal{A}^* \bar{W} = \bar{\omega}^2 B^* \bar{W},$$

уз ограничења (6.2.34)

$$\mathcal{G} \bar{W} = 0,$$

увођењем Лагранжевих множитеља $\tilde{\lambda}$. Решавањем својственог проблема

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^* & \mathcal{G}^T \\ \mathcal{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \bar{\omega}^2 \begin{bmatrix} B^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (6.2.39)$$

који је дат у раду *Porcelli* и др. [51, 2015], добијају се решења за бездимензијске кружне фреквенције $\bar{\omega}$, као својствене вредности, и решења за угибе \bar{W} и Лагранжеве множитеље $\tilde{\lambda}$ као својствени вектори.

7. КЉУЧНА РАЗМАТРАЊА О СТАБИЛНОСТИ И СЛОБОДНОМ ОСЦИЛОВАЊУ НАНО-ПЛОЧЕ. АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА

На основу резултата добијених коришћењем *Galekrin*-ове методе (GM) и методе диференцијалних квадратура (DQM), направиће се детаљна динамичка анализа покретно уклештене нано-плоче (квadratне и правоугаоне) која је запремински оптерећена и слободно осцилује. Диференцијална једначина стабилности и осциловања сложено оптерећене нано-плоче формирана је на основу *Kirchhoff*-ове класичне теорије плоча, која је надограђена *Eringen*-овом нелокалном теоријом еластичности.

Валидност добијених резултата приликом динамичке анализе нано-плоче, извршиће се упоређивањем података добијених на основу претходно примењених метода са релевантним подацима из литературе. На тај начин извршиће се њихова верификација, која има за циљ да покаже њихову исправност, као и међусобна верификација података добијених путем поменутих метода.

Главни циљ истраживања састоји се у томе да прикаже утицаје бездимензијског параметра нелокалности $\bar{\mu}$, и бездимензијског параметра запреминског оптерећења β , на бездимензијске природне фреквенције нано-плоче $\bar{\omega}$.

За посматрану квадратну и правоугаону нано-плочу, коришћењем *Galekrin*-ове методе (GM), циљ је испитати:

- верификацију резултата добијених при нултим параметрима $\bar{\mu}$ и β , са резултатима у раду аутора *Leissa* [34, 1969],
- утицај бездимензијског нелокалног параметра $\bar{\mu}$ на бездимензијске природне фреквенције $\bar{\omega}$,
- ефекат спојеног дејства бездимензијских параметара нелокалности $\bar{\mu}$ и запреминског оптерећења β , на бездимензијске природне фреквенције $\bar{\omega}$,
- формирати дијаграме фреквенција, приликом промене бездимензијских параметара нелокалности и запреминског оптерећења,
- формирати дијаграме стабилности, на основу критичних вредности параметра запреминског оптерећења β ,
- ефекат запреминског оптерећења тако и спојено дејство ефеката нелокалности и запреминског оптерећења утичу на облике осциловања нано-плоче.

Методом диференцијалних квадратура (DQM), циљ је испитати

- верификацију резултата добијених при нултим параметрима $\bar{\mu}$ и β , са резултатима у раду аутора *Leissa* [34, 1969], и са резултатима добијеним *Galekrin*-овом методом (GM),
- за линеарни теоријски модел верификовати критичне вредности параметра запреминског оптерећења β , добијених коришћењем *Galekrin*-ове методе (GM).

7.1. ЛИНЕАРНИ ТЕОРИЈСКИ МОДЕЛ

7.1.1. ВЕРИФИКАЦИЈА РЕЗУЛТАТА

Испитивање стабилности и осциловања квадратне и правоугаоне нано-плоче прво је истражено користећи *Galerkin*-ову методу.

Приликом испитивања конвергенције решења, неопходно је одабрати одговарајуће пробне функције (6.1.3) и (6.1.4) у апроксимативном решењу (6.1.1), чија тачност увелико зависи од њиховог правилног избора. У табели 4, приказана је конвергенција решења за првих шест бездимензијских природних фреквенција за случај квадратне нано-плоче. Када нано-плоча осцилује са фреквенцијом $\bar{\omega}_{00}$, њен мод, односно облик осциловања (0,0) биће без чворних линија. Код облика осциловања (1,0) чворна линија је паралелна са x -осом, док код облика осциловања (0,1) чворна линија је паралелна са y -осом. Код мода (1,1), прва чворна линија је паралелна са x -осом, док је друга паралелна са y -осом. Модови (2,0) и (0,2) имају две чворне линије које су паралелне са x -осом и y -осом, редом.

Конвергенција решења испитана је при бездимензијском параметру односа дужина страница нано-плоче $\alpha = 1$, бездимензијском параметру запреминског оптерећења $\beta = 60$ и бездимензијском нелокалном параметру $\bar{\mu} = 0.002$. Из табеле 4, види се да је она одржива са повећањем пробних функција у пробном решењу (6.1.1). Добри резултати јављају се већ приликом употребљених 6 пробних функција, који конвергирају са њиховим порастом.

Табела 4. Квадратна нано-плоча. Провера конвергенције решења *Galerkin*-овом методом (**GM**), услед спојеног ефекта бездимензијских параметара нелокалности $\bar{\mu} = 0.002$ и запреминског оптерећења $\beta = 60$.

Бр. функција у пробном решењу	Модови					
	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)	(2,0)	(0,2)
6	26.630976	56.686937	63.181010	89.558712	104.663788	113.934768
7	26.618613	56.680957	63.176439	89.555186	104.376679	113.609561
8	26.618068	56.675572	63.176263	89.550917	104.368634	113.606675
9	26.615997	56.675357	63.175929	89.550757	104.367355	113.601795
10	26.615728	56.647125	63.175831	89.526014	104.366732	113.601776
11	26.612486	56.646189	63.174441	89.525267	104.305284	113.600513

Galerkin-ова метода показала се као рачунски стабилна како приликом провере конвергенције решења тако и током израчунавања првих шест бездимензијских сопствених фреквенција услед промене параметара $\bar{\mu}$ и β , на основу које се описује динамичка анализа нано-плоче, односно, формирају се дијаграми фреквенција, дијаграми стабилности и дају се прикази неколико облика њеног осциловања. Код сложенијих диференцијалних једначина, дешава се да се са увећањем пробних функција у пробном решењу појављују скокови у конвергенцији, тако да решење варира у одређеном опсегу, што овде није био случај.

Међутим, у табели 5, код методе диференцијалних квадратура (DQM), са порастом броја дискретних тачака у прорачуну, решења нелокалне дискретне једначине имају благе скокове у конвергенцији.

Табела 5. Квадратна нано-плоча. Провера конвергенције решења на основу методе диференцијалних квадратура (**DQM**), услед спојеног ефекта бездимензијских параметара нелокалности $\bar{\mu} = 0.002$ и запреминског оптерећења $\beta = 60$.

Број дискретних тачака	Модови					
	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)	(2,0)	(0,2)
21	26.6643	56.5116	62.3988	90.5521	106.3353	115.5351
22	26.0249	57.2209	62.5385	90.4870	103.3279	112.4436
23	27.0852	56.5826	62.8780	89.7391	103.6398	113.6427
24	26.9082	57.7674	63.0204	89.0838	105.6062	112.6465
25	26.3784	56.3627	63.4635	87.8329	105.3450	112.9040
35	27.2449	56.9445	63.1319	89.4711	104.4033	113.5022

Оваква појава благих скокова при нумеричком решавању, јавља се управо због сложености нелокалне дискретне једначине (6.2.14). Међутим, упоређујући решења из табеле 5, са решењима добијеним *Galerkin*-овом методом, табела 4, видимо да се она крећу у задовољавајућем опсегу. *Такође, оно најбитније о чему ће бити више речи у анализи дијаграма стабилности, је да су решења критичних параметара стабилности веома слична, што указује на коректност оба поступка.* За одређивање вредности фреквенције $\bar{\omega}_{00}$, помоћу (DQM) методе, број дискретних тачака кретао се у опсегу од 19 до 25, док за фреквенцију $\bar{\omega}_{10}$, од 25 до 35. Фреквенција $\bar{\omega}_{01}$, испитана је само у случају квадратне плоче, јер за њено одређивање у случају правоугаоне нано-плоче, као и за одређивање виших фреквенција, неопходан је већи број тачака и рачунар са јаким перформансама.

У табели 6, решења сопствених фреквенција за нулте бездимензијске параметре нелокалности и запреминског оптерећења, помоћу (GM) и (DQM) методе, у складу су са резултатима из литературе, односно са радом аутора *Leissa* [34, 1969].

Табела 6. Упоређивање вредности сопствених фреквенција израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**) и методом диференцијалних квадратура (**DQM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 1$ и правоугаоне плоче, $\alpha = 0.7$ и $\alpha = 0.5$, са вредностима добијеним у раду *Leissa* [34, 1969].

за $\alpha = 1$	$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$	$\bar{\omega}_{11}$	$\bar{\omega}_{20}$	$\bar{\omega}_{02}$
(GM)	35.99	73.42	73.42	108.32	131.62	132.19
(DQM)	35.98	73.39	73.40	108.23	131.58	132.19
Leissa	35.98	73.41	73.41	108.27	131.64	132.18
за $\alpha = 0.7$	$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$	$\bar{\omega}_{11}$	$\bar{\omega}_{20}$	$\bar{\omega}_{02}$
(GM)	27.56	44.20	66.7	82.09	71.87	125.92
(DQM)	27.64	44.16	66.6	81.97	71.78	125.80
Leissa	27.64	44.16	66.6	81.97	71.76	125.79
за $\alpha = 0.5$	$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$	$\bar{\omega}_{11}$	$\bar{\omega}_{20}$	$\bar{\omega}_{02}$
(GM)	24.59	31.85	63.98	71.07	44.76	123.34
(DQM)	24.57	31.83	63.32	71.07	44.76	123.23
Leissa	24.58	31.83	63.93	71.08	44.78	123.07

7.1.2. АНАЛИЗА ФРЕКВЕНЦИЈА

На основу промене параметара нелокалности $\bar{\mu}$ и запреминског оптерећења β , користећи *Galerkin*-ову методу, добијени су резултати бездимензијских сопствених фреквенција $\bar{\omega}$, са којима нано-плоча слободно осцилује. Помоћу њих, формирају се дијаграми фреквенција, приказани на сликама 15-23.

За случај квадратне покретно уклештене нано-плоче, са слике 15 (а), посматрајући бездимензијску фреквенцију $\bar{\omega}_{00}$, видимо да облици кривих фреквенција 2-9, при промени параметра нелокалности, прате облик криве 1, при нултом параметру нелокалности, што исто важи код правоугаоне покретно уклештене нано-плоче, где криве фреквенција 2-7 прате облик криве 1, што је приказано на сликама 16 (а) и 17 (а).

Исти закључак изводимо посматрањем бездимензијских фреквенција $\bar{\omega}_{01}$, приказане на сликама 15 (в), 16 (в) и 17 (в) и $\bar{\omega}_{02}$, приказане на сликама 15 (ђ), 16 (ђ) и 17 (ђ).

Међутим, са слике 15 (б), за квадратну нано-плочу, код бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}_{10}$, облици кривих фреквенција 7, 8 и 9, мењају се у односу на првобитне облике кривих фреквенција 1-5, услед промене бездимензијског параметара нелокалности $\bar{\mu}$, док облици кривих фреквенција 2-7, при промени нелокалног параметра код правоугаоне нано-плоче, прате првобитни облик криве 1, што је приказано на сликама 16 (б) и 17 (б).

Исти закључак који је важио за фреквенцију $\bar{\omega}_{10}$, посматрајући квадратну нано-плочу, важи и за фреквенције $\bar{\omega}_{11}$ и $\bar{\omega}_{20}$, с тим да код њих промена облика кривих фреквенција почиње са кривом 6, за више вредности параметра нелокалности, што је се види на сликама 15 (г) и 15 (д). Док са слика 16 (г), 16 (д), 17 (г) и 17 (д) нема промене облика кривих фреквенција за правоугаону нано-плочу.

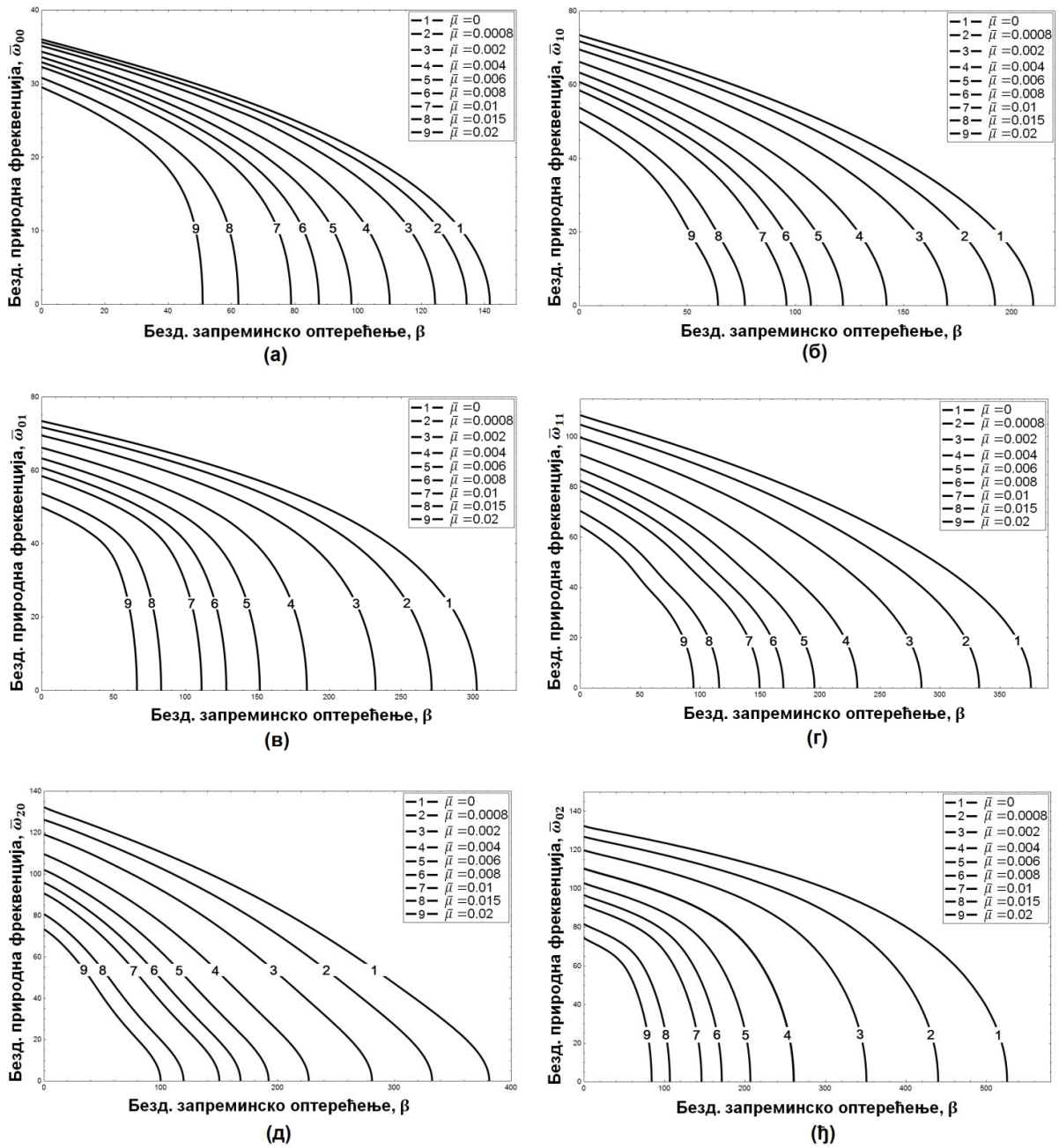
Слике 18-23, приказују интресантну појаву у овој динамичкој анализи, а то је да при повећавању бездимензијског параметра нелокалности долази до пресека кривих фреквенција. Оваква појава првенствено је изражена код фреквенција $\bar{\omega}_{20}$ и $\bar{\omega}_{02}$.

Код квадратне нано-плоче, са слике 18, у случају виших фреквенција $\bar{\omega}_{20}$ и $\bar{\omega}_{11}$, видимо да се криве фреквенција 1,7,8 и 9 секу у две тачке, док се криве фреквенција 2-6 секу у једној тачки. Посматрајући слику 19, код фреквенција $\bar{\omega}_{11}$ и $\bar{\omega}_{02}$, пресек кривих почиње са кривом 7, што исто важи и код фреквенција $\bar{\omega}_{20}$ и $\bar{\omega}_{02}$, приказано на слици 20.

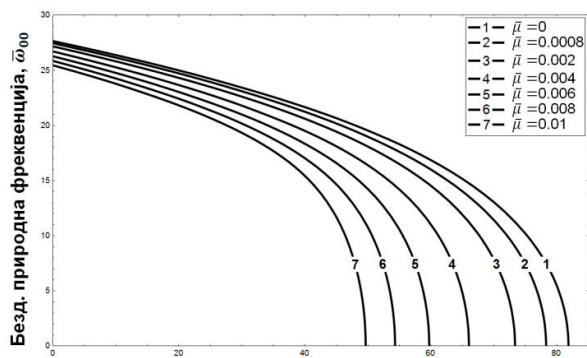
Код правоугаоне нано-плоче за однос дужина страница $\alpha = 0.7$, са слике 21, видимо да код фреквенција $\bar{\omega}_{01}$ и $\bar{\omega}_{20}$, пресек кривих почиње са кривом 4, док за исте фреквенције у случају $\alpha = 0.5$, са слике 23, пресек кривих фреквенција почиње са кривом 6.

Анализирајући фреквенције $\bar{\omega}_{00}$ и $\bar{\omega}_{10}$ за правоугаону нано-плочу за однос дужина страница $\alpha = 0.5$ са слике 22, видимо да је то једини случај где се све криве фреквенција секу услед промене параметра нелокалности.

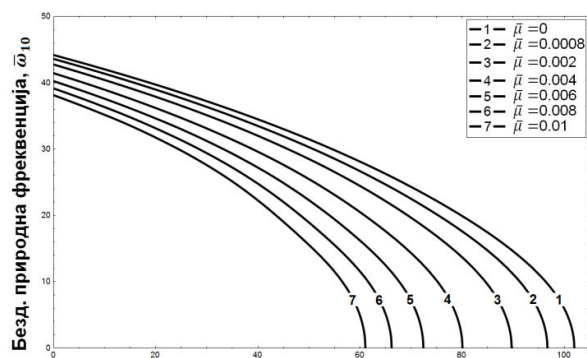
Општи закључак донешен на основу разматрања проистеклих посматрањем фреквентних дијаграма јесте да са повећавањем нелокалног параметра $\bar{\mu}$, долази до опадања вредности бездимензијских природних фреквенција $\bar{\omega}$.



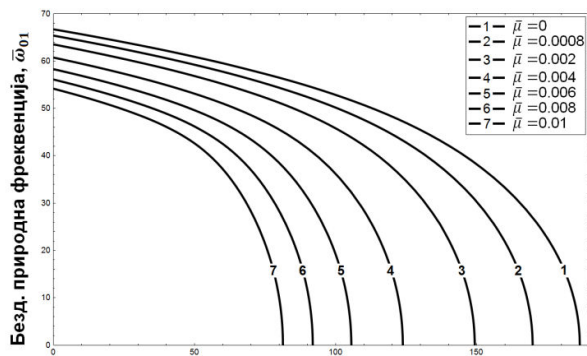
Слика 15. Квадратна плоча $\alpha = 1$. Зависност бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : (а) за мод $(0,0)$, (б) за мод $(1,0)$, (в) за мод $(0,1)$, (г) за мод $(1,1)$, (д) за мод $(2,0)$ и (е) за мод $(0,2)$.



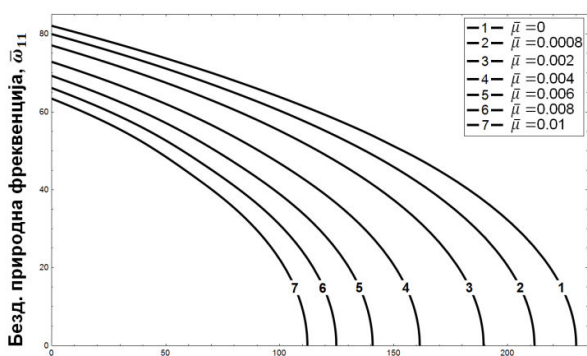
Безд. запреминско оптерећење, β
(а)



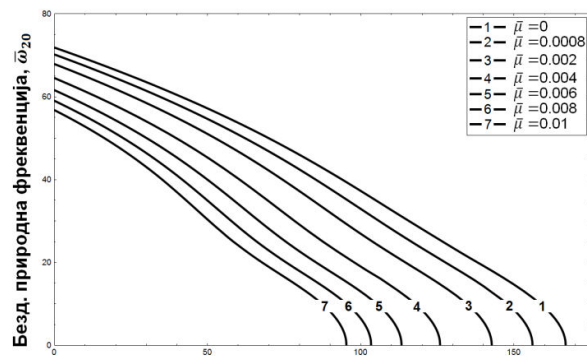
Безд. запреминско оптерећење, β
(б)



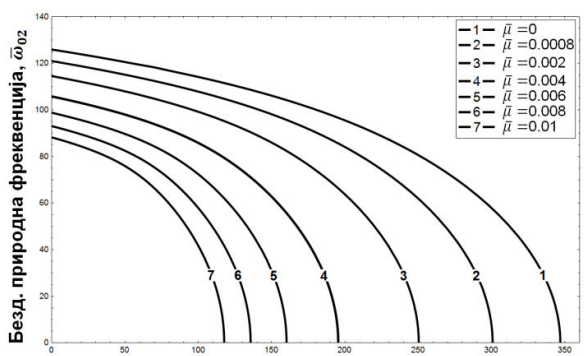
Безд. запреминско оптерећење, β
(в)



Безд. запреминско оптерећење, β
(г)

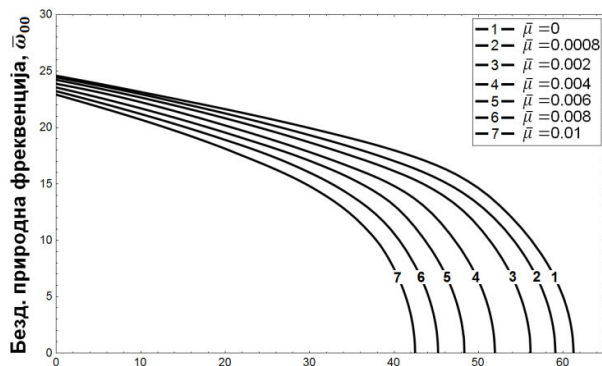


Безд. запреминско оптерећење, β
(д)

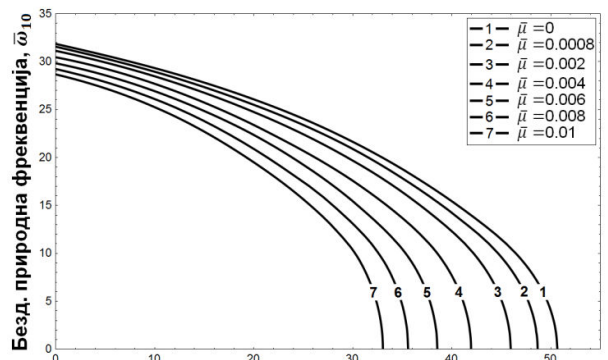


Безд. запреминско оптерећење, β
(ђ)

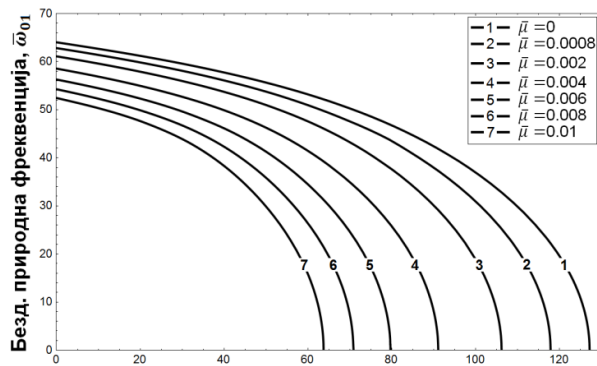
Слика 16. Правоугаона плоча $\alpha = 0.7$. Зависност бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : (а) за мод $(0,0)$, (б) за мод $(1,0)$, (в) за мод $(0,1)$, (г) за мод $(1,1)$, (д) за мод $(2,0)$ и (ђ) за мод $(0,2)$.



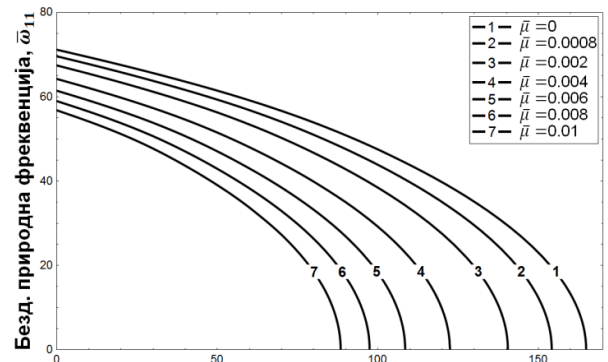
Безд. запреминско оптерећење, β
(а)



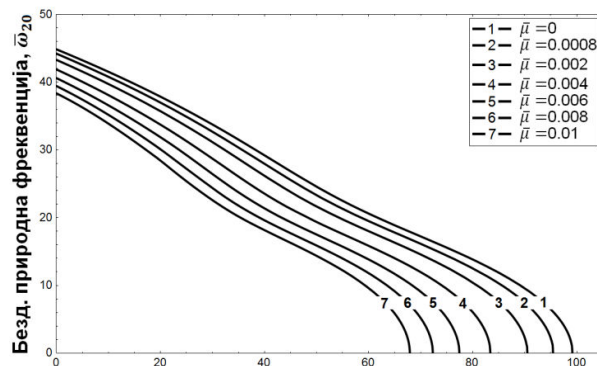
Безд. запреминско оптерећење, β
(б)



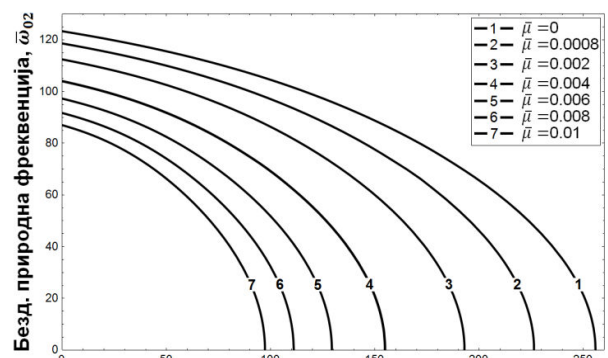
Безд. запреминско оптерећење, β
(в)



Безд. запреминско оптерећење, β
(г)

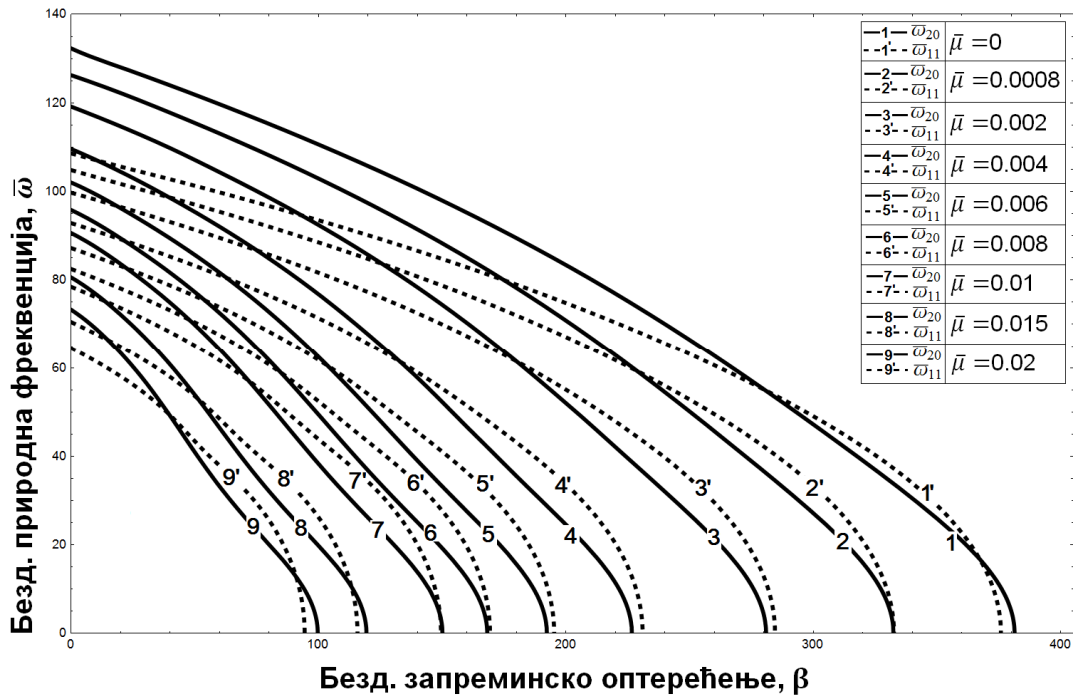


Безд. запреминско оптерећење, β
(д)

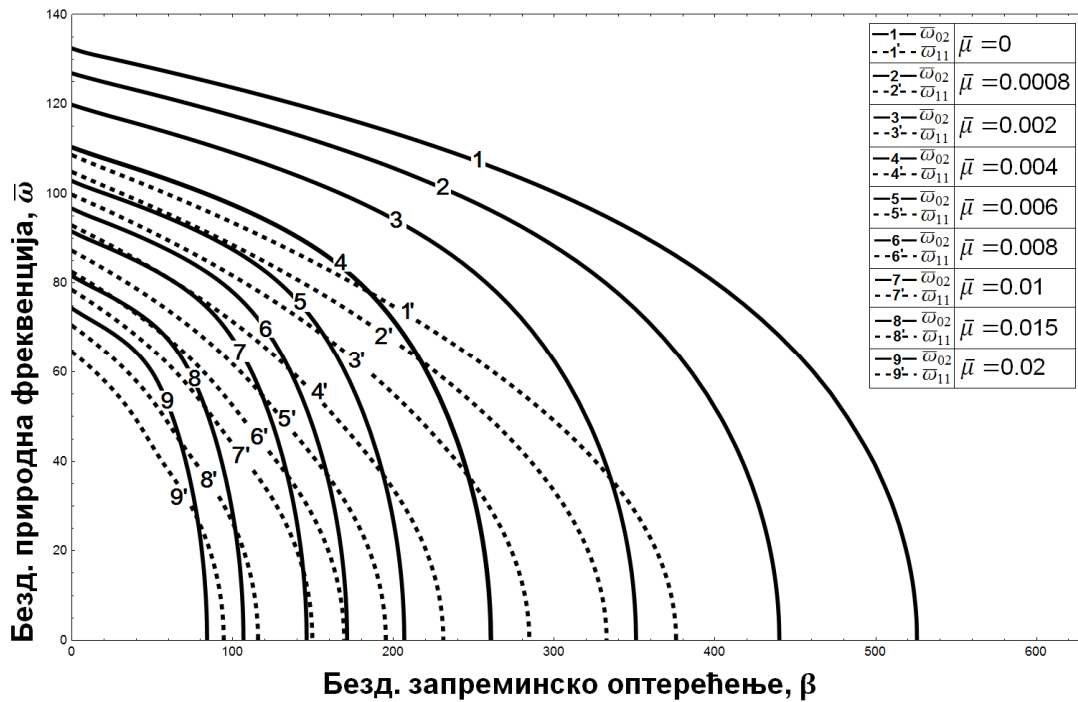


Безд. запреминско оптерећење, β
(ђ)

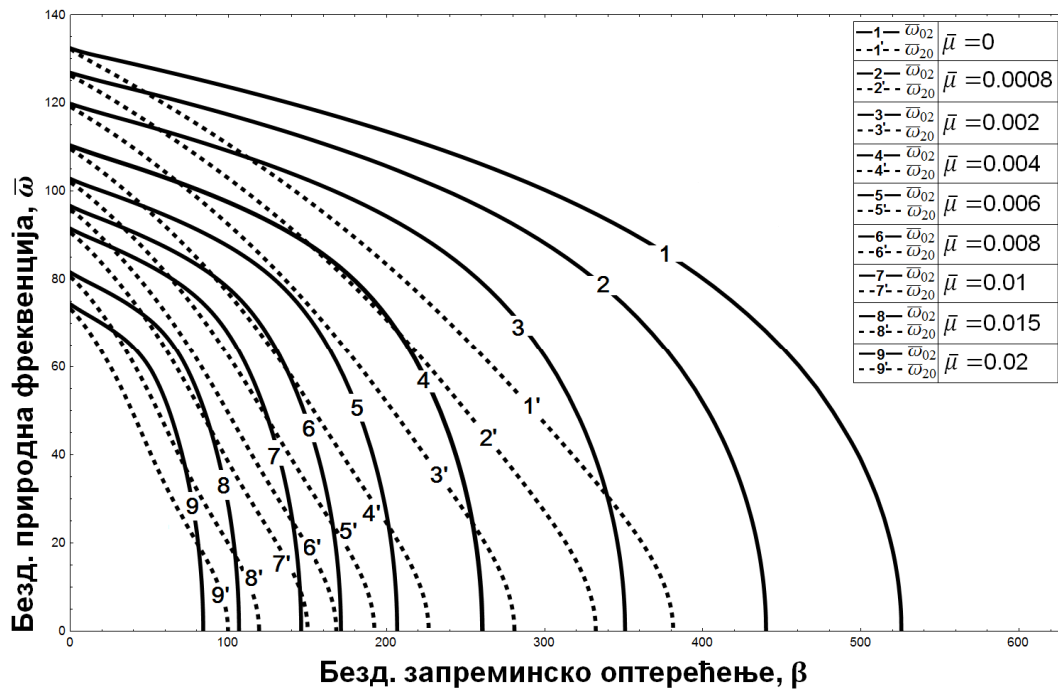
Слика 17. Правоугаона плоча $\alpha = 0.5$. Зависност бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : (а) за мод $(0,0)$, (б) за мод $(1,0)$, (в) за мод $(0,1)$, (г) за мод $(1,1)$, (д) за мод $(2,0)$ и (ђ) за мод $(0,2)$.



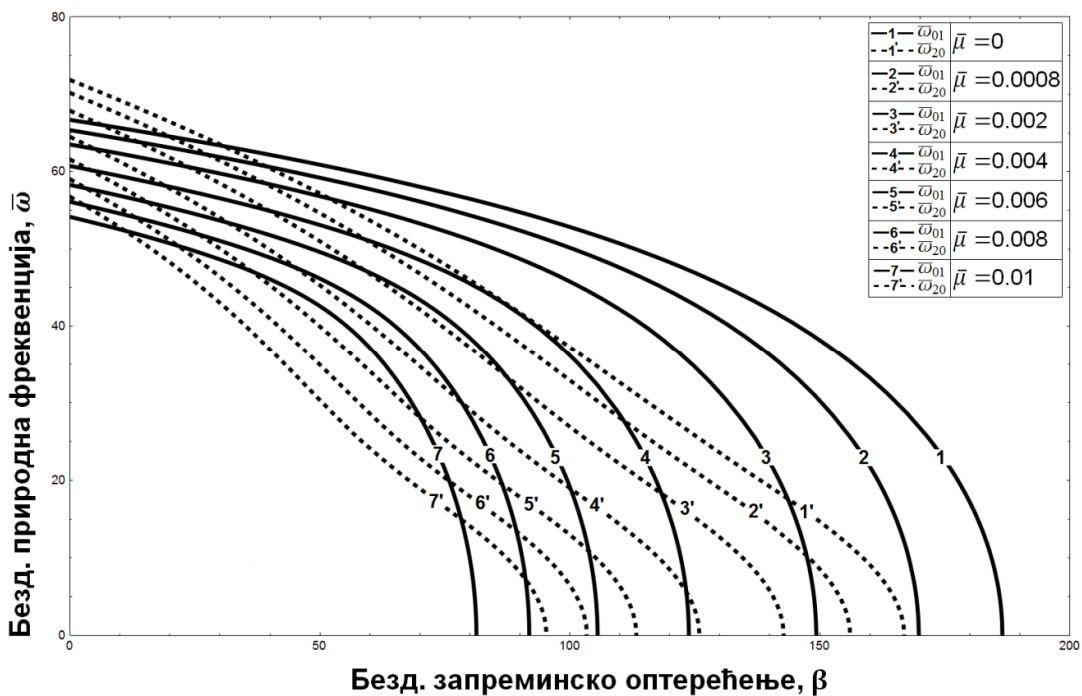
Слика 18. Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (а) за модове (2,0) и (1,1).



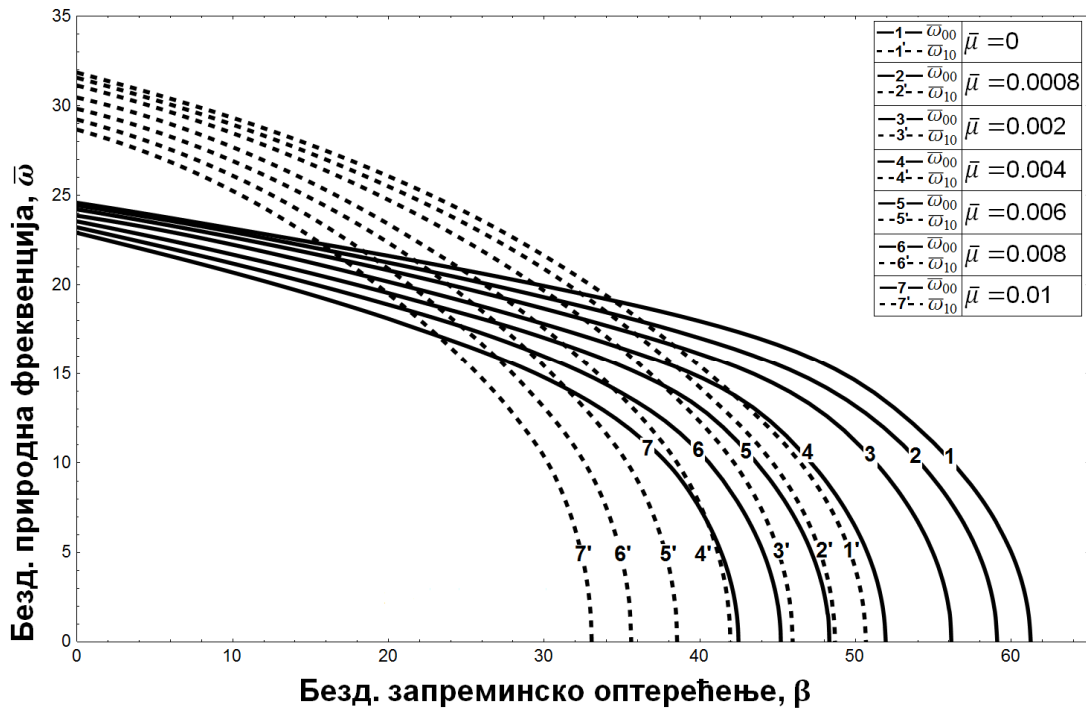
Слика 19. Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (а) за модове (1,1) и (0,2).



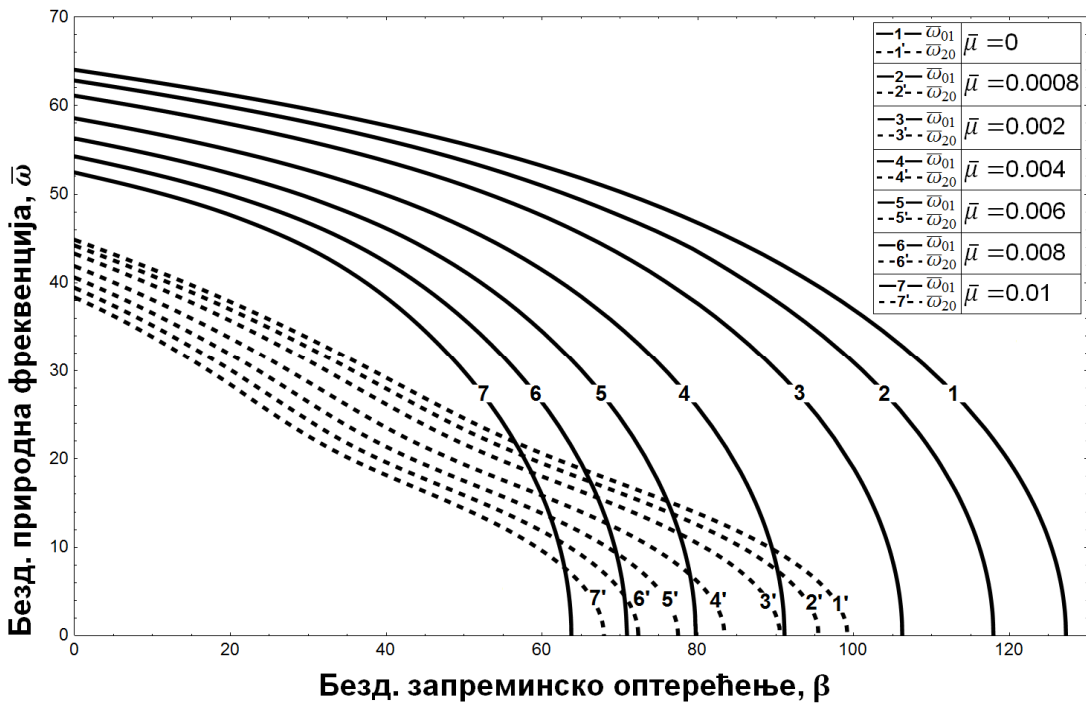
Слика 20. Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (а) за модове (0,2) и (2,0).



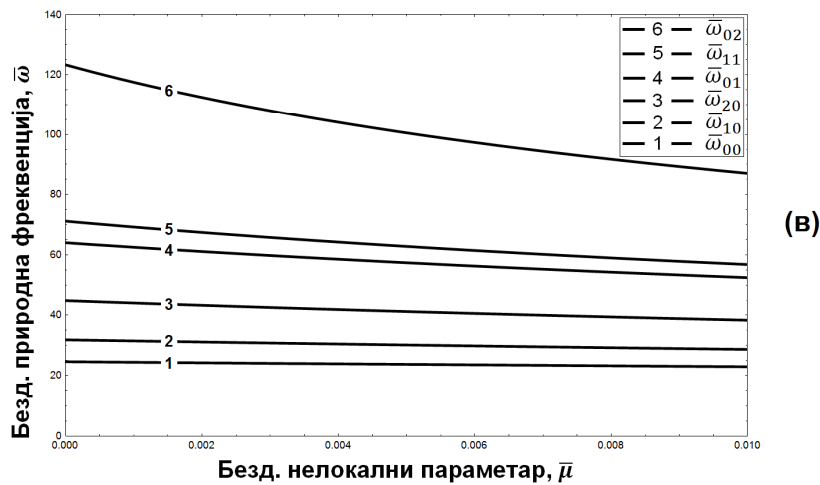
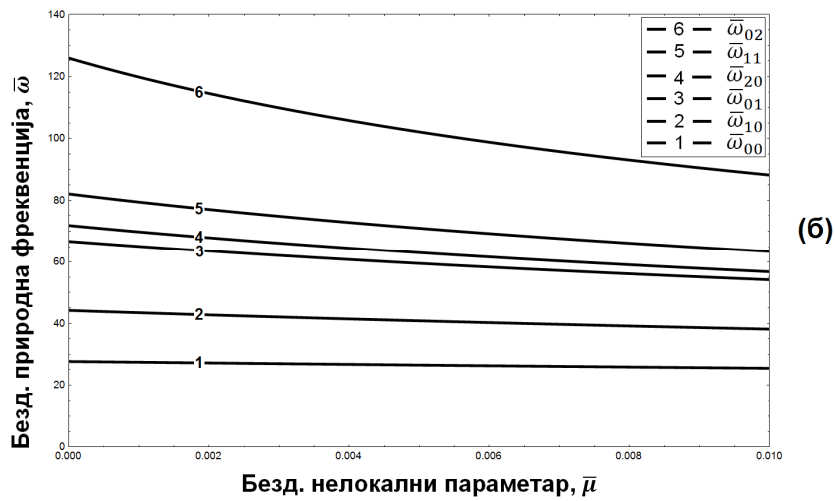
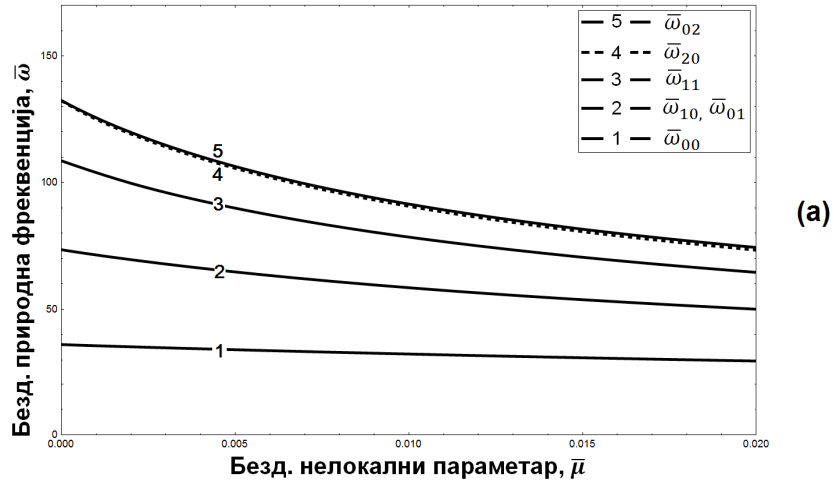
Слика 21. Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (в) за модове (0,1) и (2,0).



Слика 22. Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$, (г) за модове (0,0) и (1,0).



Слика 23. Приказ зависности бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}$ од бездимензијских параметара $\bar{\mu}$ и β : За случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$, (г) за модове (0,1) и (2,0).



Слика 24. Приказ зависности бездимензијског параметра фреквенције $\bar{\omega}$ и бездимензијског параметра нелокалности $\bar{\mu}$: (а) за случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (б) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (в) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$.

Утицај промене бездимензијског параметра нелокалности $\bar{\mu}$, уз одсуство параметра запреминског оптерећења β , на бездимензијске природне фреквенције, приказан је у табели 7 и на слици 24 (а), за квадратну нано-плочу, и у табелама 8 и 9, и на сликама 24 (б) и 24 (в), за правоугаону нано-плочу. Посматрајући резултате из табела, видимо да са повећањем параметра нелокалности долази до опадања вредности фреквенција. Најизраженији пад вредности огледа се код бездимензијске фреквенције $\bar{\omega}_{20}$, када је испитивана правоугаона нано-плоча.

Табела 7. Вредности бездимензијских фреквенција добијене *Galerkin*-овом методом (GM), за случај квадратне плоче $\alpha = 1$, уз одсуство параметра запреминског оптерећења.

$\bar{\mu}$	$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$	$\bar{\omega}_{11}$	$\bar{\omega}_{20}$	$\bar{\omega}_{02}$
0	35.99	73.42	73.42	108.32	131.69	132.29
0.0008	35.66	71.82	71.82	104.85	126.26	126.86
0.002	35.16	69.57	69.57	99.74	119.17	119.83
0.004	34.38	66.23	66.23	92.87	109.61	110.34
0.006	33.64	63.32	63.32	87.24	102.03	102.82
0.008	32.95	60.77	60.77	82.51	95.83	96.67
0.01	32.30	58.49	58.49	78.48	90.63	91.52
0.015	30.83	53.76	53.76	70.51	80.61	81.59
0.02	29.54	50.01	50.01	64.55	73.31	74.37

Табела 8. Вредности бездимензијских фреквенција добијене *Galerkin*-овом методом (GM), за случај квадратне плоче $\alpha = 0.7$, уз одсуство параметра запреминског оптерећења.

$\bar{\mu}$	$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$	$\bar{\omega}_{11}$	$\bar{\omega}_{20}$	$\bar{\omega}_{02}$
0	27.65	44.20	66.7	82.09	71.87	125.92
0.0008	27.46	43.61	65.38	79.96	70.20	120.96
0.002	27.17	42.76	63.52	77.06	67.89	114.52
0.004	26.71	41.45	60.74	72.84	64.51	105.78
0.006	26.27	40.26	58.29	69.25	61.59	98.79
0.008	25.85	39.16	56.11	66.13	59.03	93.04
0.01	25.45	38.14	54.16	63.40	56.77	88.20

Табела 9. Вредности бездимензијских фреквенција добијене *Galerkin*-овом методом (GM), за случај квадратне плоче $\alpha = 0.5$, уз одсуство параметра запреминског оптерећења.

$\bar{\mu}$	$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$	$\bar{\omega}_{11}$	$\bar{\omega}_{20}$	$\bar{\omega}_{02}$
0	24.59	31.85	63.98	71.07	44.76	123.34
0.0008	24.44	31.56	62.82	69.62	44.21	118.61
0.002	24.22	31.13	61.11	67.45	43.29	112.44
0.004	23.87	30.46	58.56	64.25	41.88	104.02
0.006	23.55	29.83	56.29	61.45	40.60	97.27
0.008	23.22	29.23	54.27	58.99	39.43	91.70
0.01	22.91	28.67	52.45	56.80	38.35	87

7.1.3. ДИЈАГРАМИ СТАБИЛНОСТИ

Следећи корак код испитивања нано-плоче односи се на дијаграме стабилности. Ови дијаграми показују понашање кривих стабилности за одабране модове, услед промене бездимензијског нелокалног параметра.

Дијаграми стабилности формирају се помоћу бездимензијских критичних вредности параметра запреминског оптерећења β , добијених *Galerkin*-овом методом (GM).

Губитак стабилности према динамичком критеријуму се дешава када је вредност бездимензијске фреквенције једнака нули.

На слици 25, приказане су криве стабилности за првих шест модова у случају квадратне и правоугаоне нано-плоче.

Са слике 25 (а), криве стабилности 1, 2 и 3 за модове (0,0), (1,0) и (0,1) код квадратне нано-плоче, не секу се са осталим кривама при вишим вредностима бездимензијског параметра нелокалности. Такође, уочавамо да постепено приближавање кривих стабилности 2 и 3, за модове (1,0) и (0,1), али не и до њиховог пресека, настаје при повећању параметра нелокалности $\bar{\mu}$. При вредности параметра $\bar{\mu} = 0.008$, долази до пресека кривих стабилности 4, 5 и 6. Његовим даљим повећањем, криве 4 и 5 остају блиске једна другој, с тим да сада нано-плоча губи брже стабилност посматрајући криве 4 и 6.

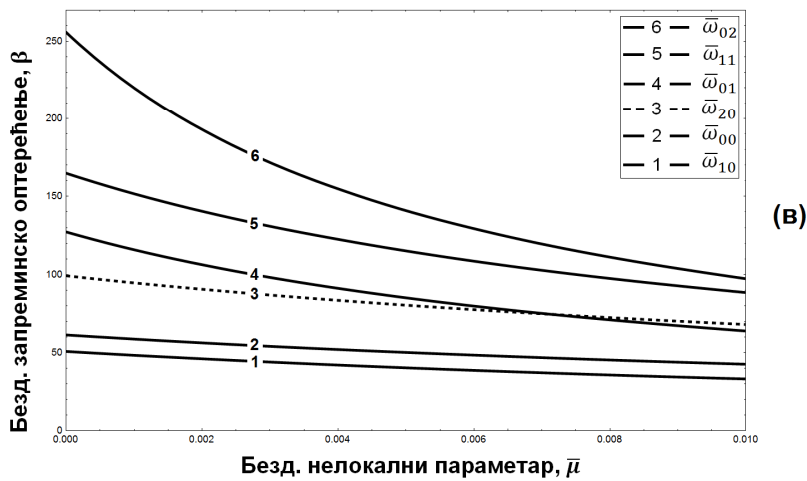
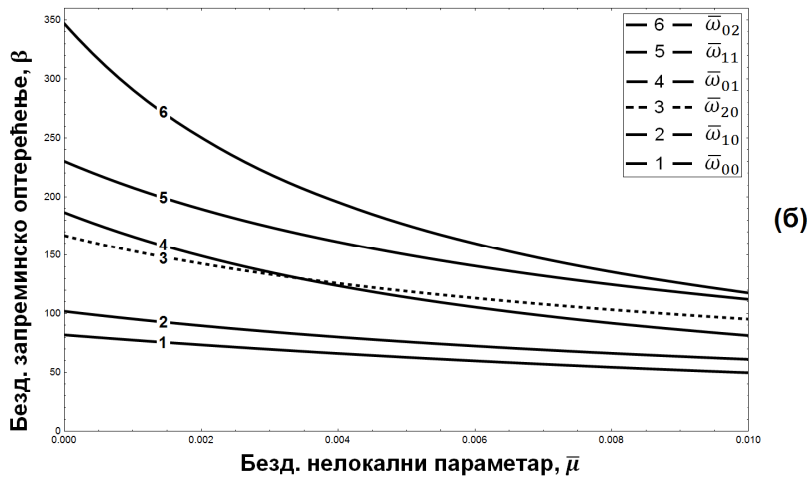
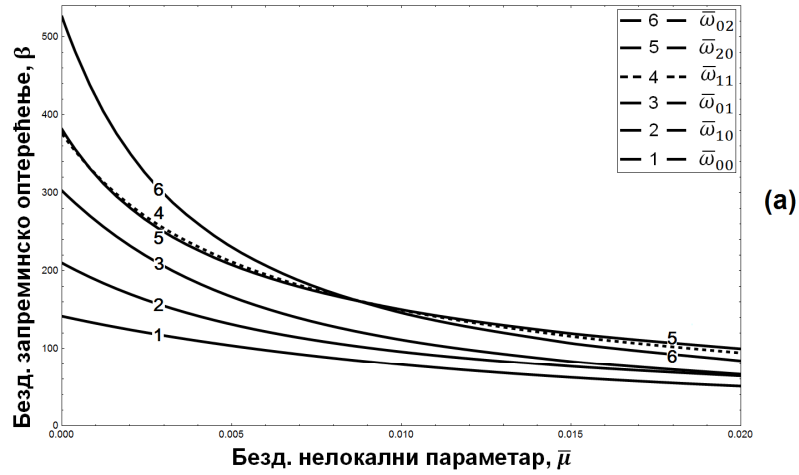
Пресек кривих стабилности 3 и 4, за модове (2,0) и (0,1) види се на слици 25 (б), код правоугаоне нано-плоче при параметрима $\alpha = 0.7$ и $\bar{\mu} = 0.0035$. Повећањем нелокалног параметра, криве стабилности 1 и 2 за модове (0,0) и (1,0) одржавају једнако растојање, док се криве 5 и 6 за модове (1,1) и (0,2), постепено приближавају једна другој али се не пресецају.

Ако бездимензијски параметар односа дужина страница нано-плоче има вредност $\alpha = 0.5$, правоугаона нано-плоча губи раније стабилност при моду (1,0), крива 1 приказана на слици 25 (в), у односу на криву 2 за мод (0,0). Овакав резултат код анализе кривих стабилности, када мод (1,0) постаје основни мод осциловања, није био код правоугаоне нано-плоче када је $\alpha = 0.7$ и квадратне нано-плоче када је $\alpha = 1$. Криве стабилности 3 и 4, за модове (2,0) и (0,1) секу се при параметрима $\alpha = 0.5$ и $\bar{\mu} = 0.007$, док се анализа кривих 5 и 6 за модове (1,1) и (0,2), показала слична као у случају $\alpha = 0.7$.

Посматрајући дијаграме стабилности на слици 25, уочавамо да су највеће вредности бездимензијских критичних параметара запреминског оптерећења β добијене применом класичне теорије плоча, односно када је бездимензијски параметар нелокалности једнак нули.

Укључивањем бездимензијског нелокалног параметра у прорачун, долази до смањења критичних вредности параметра запреминског оптерећења, док даљим повећавањем бездимензијског нелокалног параметра долази до зближавања кривих стабилности у сва три посматрана случаја на слици 25.

Анализирајући дијаграме стабилности, видимо да је нелокални утицај посебно изражен код квадратне нано-плоче за криву стабилности 6, за мод (0,2) и код правоугаоне нано-плоче за криву стабилности 3, за мод (2,0).



Слика 25. Укупни дијаграми стабилности приликом промене бездимензијског параметара нелокалности $\bar{\mu}$ и запреминског оптерећења β : (а) за случај квадратне плоче $\alpha = 1$, (б) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (в) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$.

Преглед резултата критичних вредности параметра запреминског оптерећења добијених *Galerkin*-овом методом, види се у табели 10 за квадратну нано-плочу и табелама 11 и 12 за правоугаону нано-плочу. Оно што треба посебно напоменути је добра усаглашеност резултата добијених помоћу методе диференцијалних квадратура (DQM) са резултатима добијеним од стране *Galerkin*-ове методе (GM), која се види у табелама 13, 14 и 15.

Табела 10. Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (GM), за случај квадратне плоче, $\alpha = 1$.

$\bar{\mu}$	β					
	$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$	$\bar{\omega}_{11}$	$\bar{\omega}_{20}$	$\bar{\omega}_{02}$
0	141.63	209.93	302.5	375.75	381.3	525.63
0.0008	134.27	192.25	271.1	332.53	332.31	440
0.002	124.29	170.1	232.1	284.45	280.87	350.85
0.004	109.97	142.05	184.35	231	226.615	260.6
0.006	97.87	121.88	151.65	195.22	192.25	206.7
0.008	87.59	107.05	128.34	169.3	168.2	171.2
0.01	78.8	95.75	111.13	149.55	150.05	145.96
0.015	62.15	76.5	83.02	115.75	119.36	106.66
0.02	50.86	64.05	66.19	94.4	99.7	84.05

Табела 11. Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (GM), за случај квадратне плоче, $\alpha = 0.7$.

$\bar{\mu}$	β					
	$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$	$\bar{\omega}_{11}$	$\bar{\omega}_{20}$	$\bar{\omega}_{02}$
0	81.86	101.97	186.5	230.05	166.86	346.37
0.0008	78.31	96.7	169.8	211.8	156.04	300.7
0.002	73.37	89.7	149.3	189.45	142.75	250.3
0.004	66.05	80.06	123.8	161.42	125.88	195.39
0.006	59.75	72.41	105.55	140.77	113.3	160.14
0.008	54.32	66.19	91.87	124.82	103.35	135.63
0.01	49.65	61.06	81.3	112.15	95.3	117.61

Табела 12. Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (GM), за случај квадратне плоче, $\alpha = 0.5$.

$\bar{\mu}$	β					
	$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$	$\bar{\omega}_{11}$	$\bar{\omega}_{20}$	$\bar{\omega}_{02}$
0	61.25	50.67	127.23	164.85	99.17	255.83
0.0008	59.1	48.68	117.92	154.14	95.45	226.36
0.002	56.155	45.96	106.22	140.47	90.51	192.99
0.004	51.94	41.955	91.11	122.5	83.4	154.86
0.006	48.32	38.54	79.72	108.49	77.45	129.35
0.008	45.2	35.59	70.9	97.41	72.35	111.08
0.01	42.48	33.05	63.75	88.39	67.94	97.25

Табела 13. Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**), и методом диференцијалних квадратура (**DQM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 1$.

метода	$\bar{\mu}$	β		
		$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$	$\bar{\omega}_{01}$
(GM) (DQM)	0	141.63 141.1	209.93 208.8	302.5 300
(GM) (DQM)	0.0008	134.27 133.6	192.25 191.5	271.1 269.4
(GM) (DQM)	0.002	124.29 123.1	170.1 169	232.1 230.1
(GM) (DQM)	0.004	109.97 109.2	142.05 141	184.35 183.1
(GM) (DQM)	0.006	97.87 97.2	121.88 121.3	151.65 149

Табела 14. Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**), и методом диференцијалних квадратура (**DQM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 0.7$.

метода	$\bar{\mu}$	β	
		$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$
(GM) (DQM)	0	81.86 80.9	101.97 101.5
(GM) (DQM)	0.0008	78.31 77.7	96.7 96.1
(GM) (DQM)	0.002	73.37 72.6	89.7 88.7
(GM) (DQM)	0.004	66.05 65.9	80.06 79
(GM) (DQM)	0.006	59.75 59.3	72.41 71

Табела 15. Критичне бездимензијске вредности запреминског оптерећења β , израчунате *Galerkin*-овом методом (**GM**), и методом диференцијалних квадратура (**DQM**), за случај квадратне плоче, $\alpha = 0.5$.

метода	$\bar{\mu}$	β	
		$\bar{\omega}_{00}$	$\bar{\omega}_{10}$
(GM) (DQM)	0	61.25 60	50.67 49.8
(GM) (DQM)	0.0008	59.1 58	48.68 48.3
(GM) (DQM)	0.002	56.155 55.2	45.96 45
(GM) (DQM)	0.004	51.94 50.3	41.955 41.2
(GM) (DQM)	0.006	48.32 47	38.54 39.2

7.1.4. ОБЛИЦИ ОСЦИЛОВАЊА НАНО-ПЛОЧЕ

На крају разматрања динамичке анализе нано-плоче приказаћемо њене облике осциловања под утицајем параметара нелокалности и запреминског оптерећења.

Основни облик осциловања код квадратне нано-плоче је без чворних линија, мод $(0,0)$, и приказан је на сликама 26 и 27. Овај облик је симетричан у односу на вертикалну раван која је нормална на раван плоче. Са слике 26 (а) видимо да испитивање само утицаја параметра запреминског оптерећења β на слободно осциловање нано-плоче има за последицу померања врха брега у смеру супротном од смера y -осе. *Треба напоменути да и поред померања врха брега, долази до мале промене облика осциловања у односу на првобитни облик (за нулте параметре β и $\bar{\mu}$), што је такође случај код правоугаоне нано-плоче.*

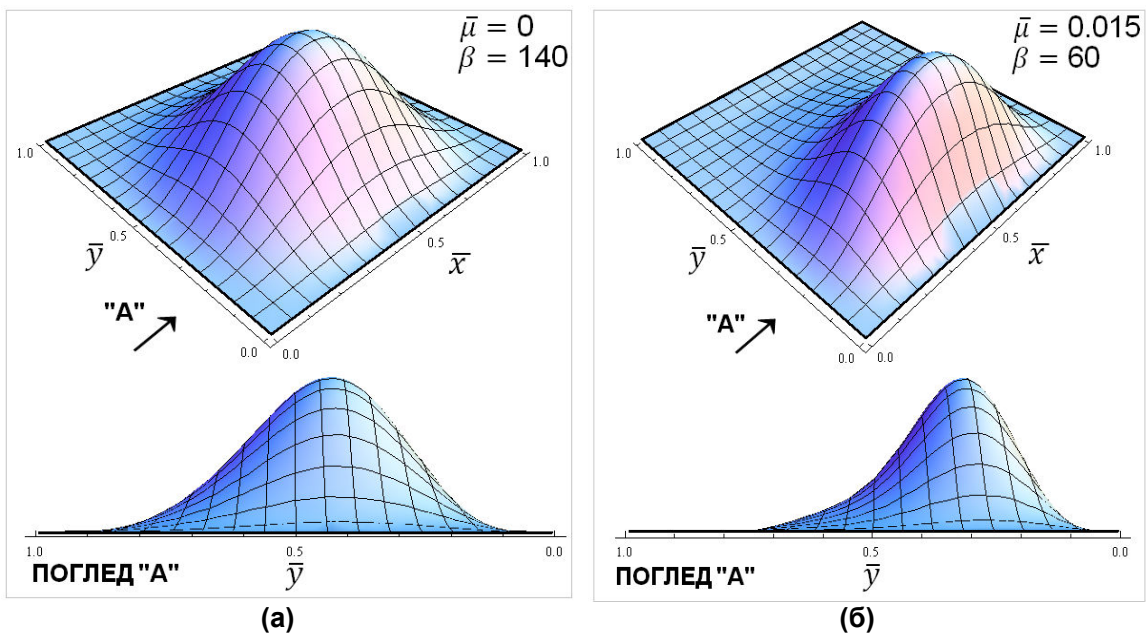
Међутим, са слике 26 (б), израженије померање врха брега и промена облика осциловања који задржава својство симетрије, јавља се ако поред параметра β укључимо и утицај параметра нелокалности $\bar{\mu}$. Исти закључак о спојеном утицају параметара β и $\bar{\mu}$ на основни облик осциловања $(0,0)$ доносимо посматрајући правоугаону нано-плочу, када је $\alpha = 0.7$, са слике 27 (а). Код правоугаоне плоче, када је параметар $\alpha = 0.5$, мод осциловања $(0,0)$ више није основни мод, што се види са слике 22 за криве фреквенција и са слике 25 (в) за криве стабилности. На слици 27 (б), када су вредности параметра запреминског оптерећења ближе критичној, облик осциловања $(0,0)$ постепено се мења у облик $(2,0)$.

Из табеле 7, видимо да иако квадратна нано-плоча слободно осцилује са фреквенцијама $\bar{\omega}_{10}$ и $\bar{\omega}_{01}$, које имају исте вредности при промени нелокалног параметра уз одсуство параметра запреминског оптерећења, њени облици осциловања $(1,0)$ и $(0,1)$ битно се разликују.

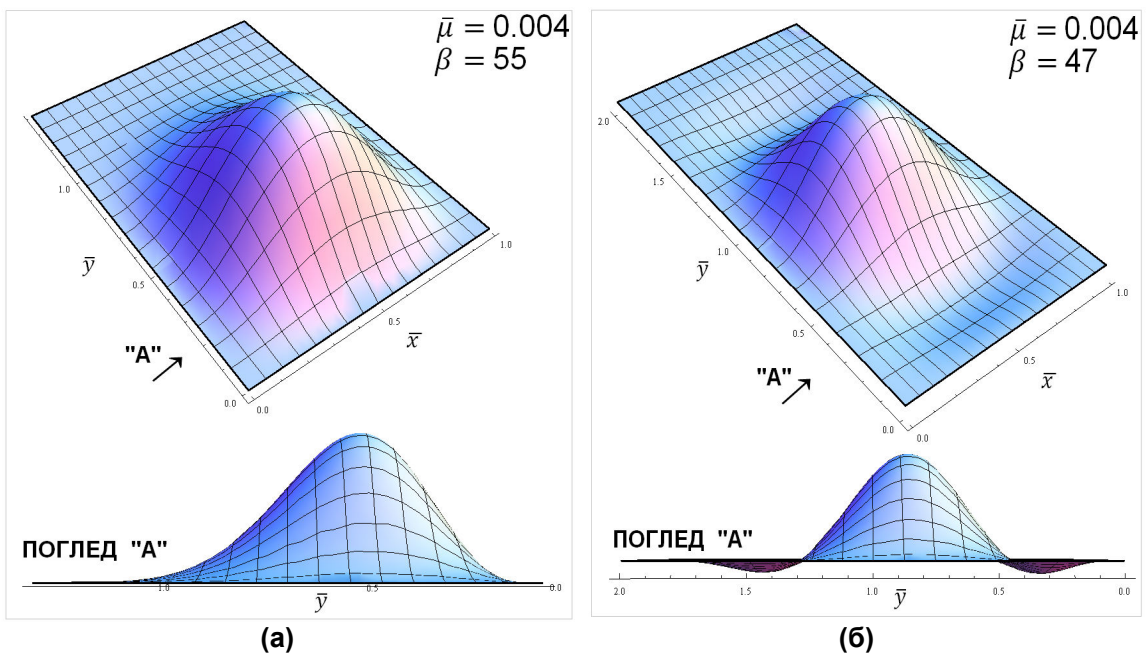
На сликама 28 и 29, приказан је облик осциловања $(1,0)$ који је симетричан у односу на вертикалну раван која је нормална на раван плоче. Са слике 28 (а), видимо да су облици брегова слични, односно да утицај параметра запреминског оптерећења уз одсуство параметра нелокалности, неће довести до велике промене у облику осциловања квадратне нано-плоче, што исто важи и за правоугаону нано-плочу. Међутим, промена облика доњег брега је израженија уз ефекат спојеног дејства параметара нелокалности и запреминског оптерећења, где се он смањује, што се види са слике 28(б).

Код правоугаоне нано-плоче за случај $\alpha = 0.5$, на слици 29 (б), видимо да повећањем параметра запреминског оптерећења, облик осциловања $(1,0)$, иако задржава свој облик, тежи облику $(0,0)$, што није исто код случаја $\alpha = 0.7$, слика 29 (а).

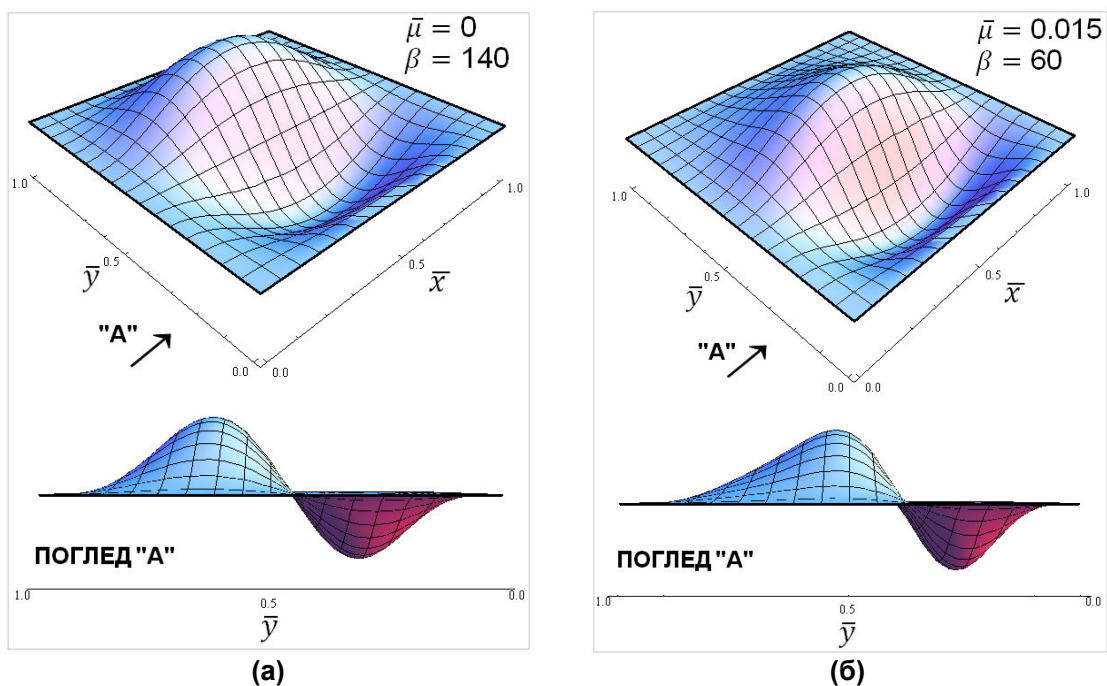
Облик осциловања $(0,1)$, за случај квадратне плоче приказан је на слици 30. Он је антисиметричан у односу на вертикалну раван. Као и код претходних модова $(0,0)$ и $(1,0)$, сам утицај параметра запреминског оптерећења не доводи до приметне промене облика и померања врха брега у смеру супротном од смера y -осе, слика 30 (а). Ако у прорачуну узмемо у обзир параметар нелокалности и вредност запреминског оптерећења која је блиска критичној, са слике 30 (б) видимо да је промена у облику осциловања $(0,1)$ очигледнија у односу на претходни облик приказан на слици 30 (а).



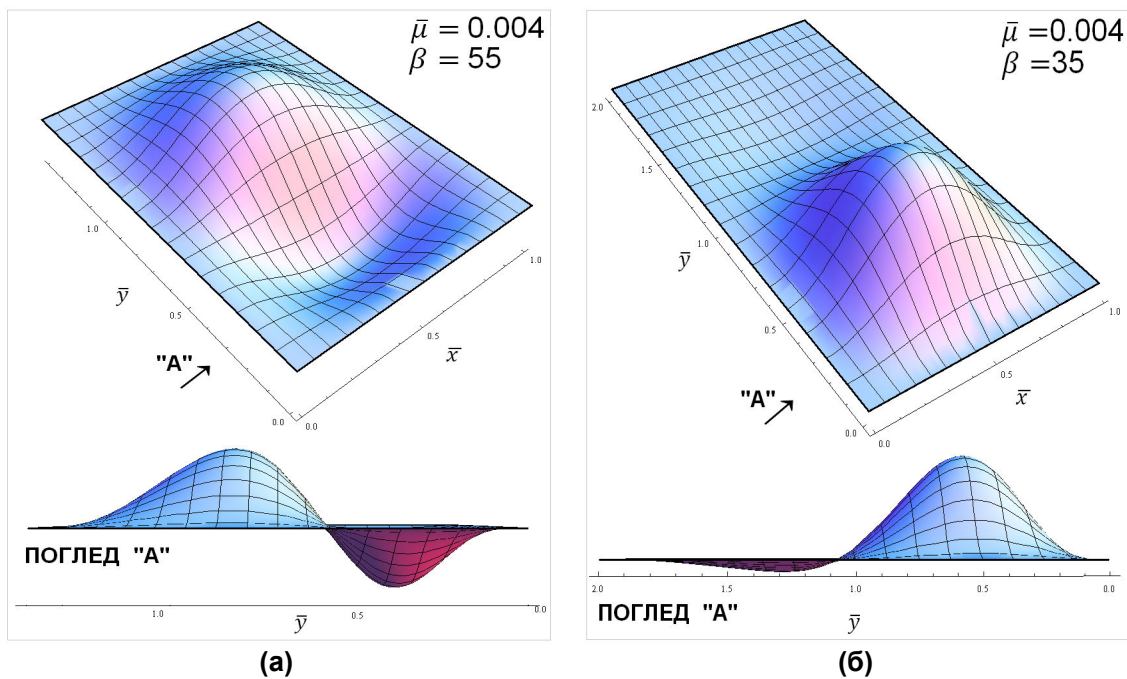
Слика 26. Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод $(0,0)$, за случај квадратне плоче $\alpha = 1$: (а) уз одсуство параметра нелокалности, (б) приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења.



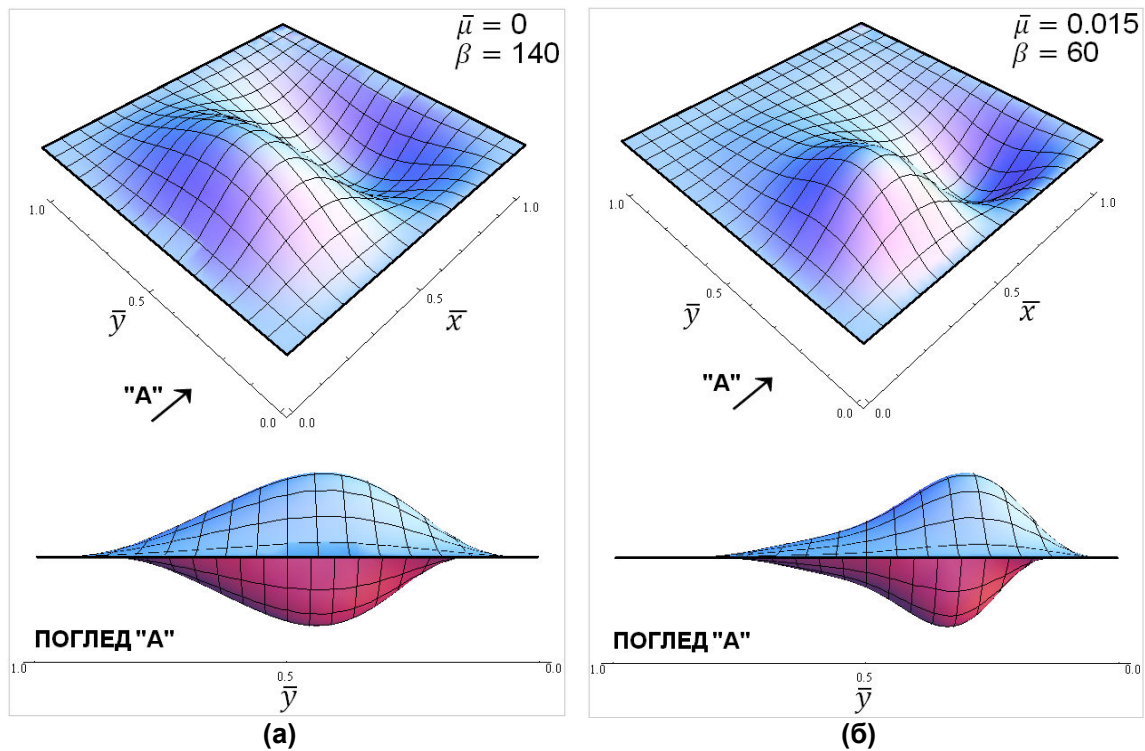
Слика 27. Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод $(0,0)$, приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења: (а) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (б) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$.



Слика 28. Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод $(1,0)$, за случај квадратне плоче $\alpha = 1$: (а) уз одсуство параметра нелокалности, (б) приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења.



Слика 29. Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод $(1,0)$, приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења: (а) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.7$, (б) за случај правоугаоне плоче $\alpha = 0.5$.



Слика 30. Облици осциловања нано-плоче при фреквенцији $\bar{\omega}_{00}$, мод $(0,1)$, за случај квадратне плоче $\alpha = 1$: (а) уз одсуство параметра нелокалности, (б) приликом спојеног утицаја параметра нелокалности и параметра запреминског оптерећења.

Позивајући се на претходна разматрања, закључујемо да се утицај спојеног ефекта параметара нелокалности и запреминског оптерећења битно одражава на облик осциловања квадратне и правоугаоне нано-плоче.

8. ЗАКЉУЧАК

У овој тези извршена је детаљна динамичка анализа покретно уклештене нано-плоче (квадратне и правоугаоне) која је запремински оптерећена и слободно осцилује.

Диференцијална једначина стабилности и осциловања сложено оптерећене нано-плоче формирана је на основу *Kirchhoff*-ове класичне теорије плоча, која је надограђена *Eringen*-овом нелокалном теоријом еластичности.

Диференцијална једначина стабилности и осциловања уз утицај нелокалности, за формулисани линеарни теоријски модел, решавана је помоћу *Galekrin*-ове методе (GM) и методе диференцијалних квадратура (DQM).

Показана је добра усаглашеност резултата међусобним упоређивањем критичних вредности параметра запреминског оптерећења добијених на основу *Galekrin*-ове методе (GM) и методе диференцијалних квадратура (DQM). Такође, показана је добра усаглашеност података претходно примењених метода са релевантним подацима из литературе, односно њихова верификација.

Поред линеарног теоријског модела, у тези су још и формулисане диференцијалне једначине за нелинеарни *von Karman*-ов теоријски модел покретно уклештене нано-плоче.

За формулисани линеарни теоријски модел, за квадратну и правоугаону нано-плочу, применом *Galekrin*-ове методе (GM),

- постигнута је добра усаглашеност резултата добијених при нултим параметрима $\bar{\mu}$ и β , са резултатима у раду аутора *Leissa* [34, 1969],
- испитан је утицај бездимензијског нелокалног параметра $\bar{\mu}$ на бездимензијске природне фреквенције $\bar{\omega}$,
- испитан је ефекат спојеног дејства бездимензијских параметара нелокалности $\bar{\mu}$ и запреминског оптерећења β , на бездимензијске природне фреквенције $\bar{\omega}$,
- формирану су дијаграми фреквенција, на основу бездимензијских параметара нелокалности и запреминског оптерећења,
- формирану су дијаграми стабилности, на основу критичних вредности параметра запреминског оптерећења,
- дат је приказ како сам ефекат запреминског оптерећења тако и спојено дејство ефеката нелокалности и запреминског оптерећења, утичу на облике осциловања нано-плоче.

Методом диференцијалних квадратура (DQM),

- постигнута је добра верификацију резултата добијених при нултим параметрима $\bar{\mu}$ и β , са резултатима у раду аутора Leissa [34,1969], и са резултатима добијеним Galekin-овом методом (GM),
- за линеарни теоријски модел, верификоване су критичне вредности параметра запреминског оптерећења β , добијених коришћењем Galekin-ове методе (GM).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Anjomshoa, A., Shahidi, A. R., Shahidi, S. H., Kamrani, M. [2013] "Fundamental size dependent natural frequencies of non-uniform orthotropic nano scaled plates using nonlocal variational principle and finite element method," *Applied Mathematical Modelling* **37**, 7047-7061.
- [2] Atanacković, T. M. [1993] *Teorija elastičnosti*, (Fakultet tehničkih nauka).
- [3] Aydogdu, M., Aksencer, T. [2011] "Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory," *Physica E* **43**, 954-959.
- [4] Azhari, M., Sarrami-Foroushani, S. [2014] "Nonlocal vibration and buckling analysis of single and multi-layered graphene sheets using finite strip method including van der Waals effects," *Physics E* **57**, 83-95.
- [5] Al-Khaleefi, A. M., Kabir, H. R. H. [2003] "On the thermal buckling response of Shear-Flexible all edges clamped rectangular plates," *Journal of Vibration and Control* **9**, 495-506.
- [6] Arsat, R., Breedon, M., Shafiei, M., Spizziri, P. G., Gilje, R. B., Kaner, R. B. [2009] "Graphene-like nano-sheets for surface acoustic wave gas sensor applications," *Chemical Physics Letters* **467**, 344-347.
- [7] Akbari, A., Sheath, P., Martin, S. T., Shinde, D. B., Shaibani, M., Banerjee, P. C., Tkacz, R., Bhattacharyya, D., Mojumder, M. [2016] "Large-area graphene-based nanofiltration membranes by shear alignment of discotic nematic liquid crystals of graphene oxide," *Nat. Commun.* **7**: 10891 doi:10.1038/incomms10891.
- [8] Alexeev, A.M., Barnes, M.D., Nagareddy, V.K., Craciun, M.F., Wright, C.D [2017] "A simple process for the fabrication of large-area CVD graphene based devices via selective *in situ* functionalisation and patterning," *2D Mater.* **4** 011010 doi:10.1038/2053-1583/4/1/011010.
- [9] Amabili, M. [2004] "Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments," *Computers and Structures* **82**, 2587-2605.
- [10] Babaei, H., Shahidi, A. R. [2011] "Small-scale effects on the buckling of quadrilateral nanoplates based on nonlocal elasticity theory using Galerkin method," *Arch Appl Mech* **81**, 1051-1062.
- [11] Bedroud, M., Hosseini-Hashemi, S., Nazemnezad, R. [2013] "Buckling of circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity," *Acta Mechanica* **224**, 2663-2676.

- [12] Baradaran, G. H., Dehghan, M. [2011] "Buckling and free vibration analysis of thick rectangular plates resting on elastic foundation using mixed finite element and differential quadrature method," *Applied Mathematics and Computation* **218**, 2772-2784.
- [13] Baghani, M., Zargar, O., Mohammadsalehi, M. [2017] "Stability of non-uniform viscoelastic nanoplates vibration based on nonlocal first-order shear deformation theory," *Meccanica* **52**, 1063-1077.
- [14] Chakraverty, S., Behera, L. [2014] "Free vibration of rectangular nanoplates using Razleigh-Rity method," *Physica E* **56**, 357-363.
- [15] Cho, D. C., Kim, B. H., Kim, J.H., Vladimir, N., Choi, T. M. [2015] "Forced vibrations analysis of arbitrarily constrained rectangular plates and stiffened panels using the assumed mode method," *Thin-Walled Structures* **90**, 182-190.
- [16] Daneshmehr, A., Rajabpoor, A., Pourdavood, M. [2014] "Stability of size dependent functionally graded nanoplate based on nonlocal elasticity and higher order plate theories and different boundary condition," *International Journal of Engineering Science* **82**, 84-100.
- [17] Damascelli, A., Starke, U., Ast, C. R., Forti, S., Stöhr, A., Straßer, C., Dosanjh, P., Wong, D., Zhdanovich, S., Neenestra, C. N., Dvorak, D. J., Schneider, M., Zonno, M., Nigge, P., Levy, G., Ludbrook, B.m. [2015] "Evidence for superconnectivity in Li-decorated monolayer graphene," *cond-mat.supr-con*, arXiv:1508.05925v2.
- [18] Eringen, C. A. [1983] "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves," *J. Appl. Phys.* **54**, 4703.
- [19] Eringen, C. A. [2002] *Nonlocal Continuum Field Theories*, (Springer-Verlag NewYork, Inc).
- [20] Farajpour, A., Solghar, A. A., Shahidi, A. [2013] "Postbuckling analysis of multilayered graphene sheets under non-uniform biaxial compression," *Physica E* **47**, 197-206.
- [21] Farajpour, A., Shahidi, A. R., Mohammadi, M., Mahzoon, M. [2012] "Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics," *Composite Structures* **94**, 1605-1615.
- [22] Golmakani, M. E., Rezatalab, J. [2014] "Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoscale plates in an elastic matrix based on nonlocal continuum mechanics," *Composite Structures* **111**, 85-97.
- [23] Guoxin, C. [2014] "Atomistic Studies of Mechanical Properties of Graphene," *Polymers* **2014**, **6**, 2404-2432.
- [24] Gao, S., Deng, Y., Lin, J., Gohs, U., Mäder, E., Heinrich, G. [2017] "Variable structural colouration of composite interphases," The Royal Society of Chemistry 2017, DOI: 10.1039/c6mh00559d.
- [25] Hosseini-Hashemi, S., Zare, M., Nazemnezhad, R. [2013] "An exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nano-plates via nonlocal elasticity," *Composite Structures* **100**, 290-299.

- [26] Hajdin, N. [1989] *Teorija Površinskih Nosača*, (Naučna Knjiga, Gradjevinski Fakultet, Beograd).
- [27] Huang, X., Aqeeli, M., Geim, A. K., Novoselov, K. S., Hu, Z., Chang, K., Chen, J., Zhang, X., Zhu, M., Leng, T. [2015] "Highly Flexible and Conductive Printed Graphene for Wireless Wearable Communications Applications," *Sci. Rep.* 5, 18298; doi: 10.1038/srep 18298.
- [28] Ilkhani, M. R., Bahrami, A., Hosseini-Hashemi, S. H. [2015] "Free vibrations of thin rectangular nano-plates using wave propagation approach," *Applied mathematical Modelling* **000**, 1-13.
- [29] Jafari, A., Shah-enayati, S. S., Atai, A. A. [2016] "Size dependency in vibration analysis of nanoplates; one problem, different answers," *European Journal of Mechanics A/Solids* **59**, 124-139.
- [30] Karamooz Ravari, M. R., Shahidi, A. R., [2013] "Axisymmetric buckling of the circular annular nanoplates using finite difference method," *Meccanica* **48**, 135-144.
- [31] Kozić, P., Karličić, D., Pavlović, R. [2014] "Free transverse vibration of nonlocal viscoelastic orthotropic multi-nanoplate system (MNPS) embedded in a viscoelastic medium," *Composite Structures* **115**, 89-99.
- [32] Kozić, P., Karličić, D., Cajić, M., Pavlović, I., [2015] "Temperature effects on the vibration and stability behavior of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic medium," *Composite Structures* **131**, 672-681.
- [33] Lai, S. K., Xiang, Y. [2012] "Buckling and Vibration of Elastically Restrained Standing Vertical Plates," *Journal of Vibration and Acoustic Vol.* **134/014502-1**.
- [34] Leissa, A. W. [1969] *Vibration of Plates*, (NASA Report SP-160).
- [35] Lee, J. H., Bose, S., Kim, N. H., Yao, D., Bhadra, S., Kuilla, T. [2010] "Recent advances in graphene based polymer composites," *Progress in Polymer Science* **35**, 1350-1375.
- [36] Lu, B. P., Zhang, P. Q., Lee, H. P., Wang, C. M., Reedy, J. N. [2007] "Non-local elastic plate theories," *Proc. R. Soc. A* **463**, 3225-3240.
- [37] Margetic, R. & Glavardanov, V., Milosevic-Mitic, V. [2010] "Vibration and stability of a heavy and heated vertical circular plate," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. **10**, No. **5**, 1111-1121.
- [38] Mohammadi, M., Asemi, S.R., Farajpour, A. [2014] "A study on the nonlinear stability of orthotropic single-layered graphene sheet based on nonlocal elasticity theory," *Latin American Journal of Solids and Structures* **11**, 1541-1564.
- [39] Mohammadi, M., Ghayour, M., Farajpour, A. [2013] "Free transverse vibration analysis of circular and annular graphene sheets with various boundary conditions using nonlocal continuum plate model," *Composites: Part B* **45**, 32-42.
- [40] Malekzadeh, P., Farajpour, A. [2012] "Axisymmetric free and forced vibrations of initially stressed circular nanoplates embedded in an elastic medium," *Acta Mech* **223**, 2311-2330.

- [41] Murmu, T., Karličić, D., Cajić, M., Adhikari, S., Kozić, P. [2015] "Nonlocal mass-nanosensor model based on the damped vibration of single-layered grapheme sheet influenced by in-plane magnetic field," *International Journal of Mechanical Sciences* **96-97**, 132-142.
- [42] Murmu, T., Karličić, D., Cajić, M., Adhikari, S. [2014] "Exact closed form solution for non-local vibration and biaxial buckling of bonded multi-nanoplate system," *Composites: B Part* **66**, 328-339.
- [43] Mohammadimehr, M., Mohammadimehr, M.A., Dashti, P. [2016] "Size-dependent effects on biaxial and shear nonlinear buckling analysis of nonlocal isotropic and orthotropic micro-plate based on surface stress and modified couple stress theories using differential quadrature method," *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.*, **37** (4), 529-554.
- [44] Murmu, T., Sienz, J., Adhikari, S., Arnold, C. [2013] "Nonlocal buckling of double-nanoplate-systems under biaxial compression," *Composites: Part B* **44**, 84-94.
- [45] Nazemnezhad, R., Hosseini-Hashemi, S., Kermajani, M. [2015] "An analytical study on the buckling and free vibration of rectangular nanoplates using nonlocal third-order shear deformation plate theory," *European Journal of mechanics A/Solids* **51**, 29-43.
- [46] Ng, T. Y., Shakouri, A., Lin, R. M. [2013] "A study of the scale effects on the flexural vibration of 79rapheme sheets using REBO potential based atomistic structural and nonlocal couple stress thin models," *Physica* **50**, 22-28.
- [47] Novoselov, K. S, Mishchenko, A., Carvalho, A., Castro, A. H. [2016] "2D materials and van der Waals heterostructures," *Science* **353**, aac9439. DOI:10.1126/science.aac9439.
- [48] Nahvi, H., Shahidi, A. R., Salehipour, H. [2015] "Exact closed-form free vibration analysis for functionally graded micro-nano plates based on modified couple stress and three dimensionl elasticity theory," *Composite Structures* **124**, 283-291.
- [49] Pradhan, S. C., Phadikar, J. K. [2009] "Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates," *Journal of Sound and Vibration* **325**, 206-223.
- [50] Privman, V., Yan, H., [2016] "Random sequential adsorption on imprecise lattice," *J. Chem. Phys.* **144**, 244704, doi:10.1063/1.4954332.
- [51] Porcelli, M., Binante, V., Girardi, M., Padovani, C., Pasquinelli, G. [2015] "A solution procedure for constrained eigenvalue problems and its application within the structural finite-element code NOSA-ITACA," *Calcolo* **52**, 167-186.
- [52] Rao, B. L., Biswal, T. [2015] "Thermo-mechanical Vibration Analysis of Micro-Nano Scale Circular Plate Resting on an Elastic Medium," *Journal of Nanoscience and Nanoengineering*, Vol **1**, No. **2**, 49-55.
- [53] Sari, M. S. [2015] "Free vibration analysis of nonlocal annular sector Mindlin plates," *International Journal of Mechanical Sciences* **96-97**, 25-35.
- [54] Szilard, R. [2004] *Theories and Applications of Plate Analysis*, (John Wiley & Sons Inc. New Jersey).
- [55] Sutter, P.W., Flege, J. I., Sutter, E. A., [2008] "Epitaxial grapheene on ruthenium," *Nat. Mater.* **7.**, 406-411.

- [56] Shaat, M., Mahmond, F. F., Gao, X. –L., Faheem, A. F. [2014] “Size-dependent bending analysis of Kirchhoff nano-plates based on a modified couple-stress theory including surface effects,” *International Journal of Mechanical Science* **79**, 31-37.
- [57] Sari, M. S., Al-Kouz, W. G. [2016] “Vibration analysis of non-uniform orthotropic Kirchhoff plates resting on elastic foundation based on nonlocal elasticity theory,” *International Journal of Mechanical Sciences* **114**, 1-11.
- [58] Sahmani, S., Pourashraf, T., Ashrafi, M. A., Ansari, R. [2015] “Vibration and buckling characteristics of functionally graded nanoplates subjected to thermal loading based on surface elasticity theory,” *Acta Astronautica* **109**, 42-51.
- [59] Shu, C. [2000] “*Differential Quadrature and Its Application in Engineering*,” (Springer-Verlag, London).
- [60] Timošenko, S., Vojnovski-Kruger, S. [1962] “Teorija ploča i ljuski,” (Gradjevinska knjiga, Beograd)
- [61] Vujanović, B. D., Spasić, D. T. [1997] “*Metodi Optimizacije*,” (Novi Sad, Univerzitet).
- [62] Wang, C. M., Xiang, Y. & Wang, C. Y. [2002] “Buckling of standing vertical plates under body forces,” *Journal of Structural Stability Dynamics* **2**, 151- 161.
- [63] Wang, C. Y. , Yu, L. H., [2009] “Fundamental frequency of a standing vertical heavy plate with vertical simply-supported edges,” *Journal of Sound and Vibration* **321**,1-7.
- [64] Wang, C. Y. [2010] “Buckling of a heavy standing plate with top load,” *Thin-Walled Structures* **48**, 127-133.
- [65] Wang, Y. Z., Cui, H. T., Li, F. M., Kishimoto, K. [2013] “Thermal buckling of a nanoplate with small-scale effects,” *Acta Mech* **224**, 1299-1307.
- [66] Wang, Z. W., Zhu, Y., Li, C., Tong, L. H., Yan, J. W. [2015] “Exact solutions of bending deflections for nano-beams and nano-plates based on nonlocal elasticity theory,” *Composite Structures* **125**, 304-313.
- [67] Xiang, Y., Kitipornchai, S. & Wang, C. Y. [2008] “Buckling and spanning capacity of cantilevered vertical plates under body surfaces,” *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering Vol.1, No.2*, 116-122.