УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Марко С. Алексендрић

ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА ПОСЕБНИХ КЛАСА ЛИНЕАРНИХ СИНГУЛАРНИХ СИСТЕМА СА КАШЊЕЊЕМ НА КОНАЧНОМ И БЕСКОНАЧНОМ ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ

докторска дисертација

Београд, 2012

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Marko S. Aleksendrić

DYNAMICAL ANALYSIS OF PARTICULAR CLASSES OF LINEAR TIME–DELAY SINGULAR CONTROL SYSTEMS DEFINED OVER FINITE AND INFINITE TIME INTERVAL

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012

Komisija za pregled i odbranu:

Mentor:	Dr Dragutin Debeljković, redovni profesor
	Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet
Članovi Komisije:	Dr Sreten Stojanović, vanredni profesor
	Univerzitet u Nišu, Tehnološki fakultet u Leskovcu
	Dr Mihailo Lazarević, redovni profesor
	Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet
Datum odbrane:	

Posvećeno mojoj predivnoj porodici: Mimi, Bobanu, Tanji i pogotovo Tari.

Dinamička analiza posebnih klasa linearnih singularnih sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu

Apstrakt

U disertaciji su razmatrani problemi dinamičke analize posebnih klasa singularnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem prisutnim u stanju sistema, kao i njihovo ponašanje na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu. Pružen je presek savremenih koncepata stabilnosti, prednosti jednih nad drugima i posebno su obrađeni tzv *neljapunovski koncepti*: stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i koncept praktične stabilnosti. Nadograđene su osnovne definicije stabilnosti. Isrpno je izložen hronološki sistematičan pregled osnovnih koncepata stabilnosti, polazeći od ljapunovske metodologije, kao osnove na kojoj se zasniva dinamička analiza sistema. Ukazano je na istorijski razvoj i nastanak ideja i rezultata u ovoj oblasti i na taj način su izvedene i smernice daljih istraživanja otvorenih problema. U disertaciji su sistemi tretirani sa stanovišta dva savremena pristupa: deskriptivnog i LMI, odnosno sa pozicija linearnih matričnih nejednakosti, koja se svodi na metode konveksne optimizacije.

Izvedeni su i saopšteni novi rezultati. Izložen je prilaz koji se bazira na kvaziljapunovskim funkcijama za dobijanje uslova praktične i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu posebne klase singularnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenje, u stanju sistema. Pokazano je da, polazeći od pretpostavke da agregacione funkcije ne moraju da budu određene po znaku i da njihovi izvodi duž trajektorija sistema ne moraju da budu negativno odrređene funkcije, uz pomoć deskriptivnog prilaza se mogu dobiti novi kriterijumi za ocenu neljapunovske stabilnosti. Kombinovanjem rezultata sa ljapunovskim prilazom, izvedeni su o uslovi atraktivne praktične stabilnosti. Drugi doprinos je određivanje dovoljnih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu iste klase sistema pomoću savremenih LMI metoda. Dobijeni i prezentovani rezultati imaju praktičnu primenu u savremenoj teoriji i praksi upravljanja i mogu se primeniti na sve klase proučavanih sistema, pod uslovom da su dostupni verodostojni matematički modeli. Verifikacija rezultata je izvedena kroz numeričke primere

Ključne reči: Singularni sistemi, deskriptivni sistemi, stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, atraktivna praktična stabilnost, vremenski diskretni i kontinualni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem, praktična stabilnost

Naučna oblast: Mašinstvo

Uža naučna oblast: Automatsko upravljanje

Dynamical analysis of particular class of linear singular time–delay control systems on finite and infinite time interval

Abstract

In this thesis the problems of dynamical analysis of particular class of singular control systems with time delays are considered, as well as their behavior on finite and infinite time intervals. Emphasis has been put on the peculiar properties of singular ad descriptor systems, concerning the existence and uniqueness of the solutions, the problems of impulsive behavior, consistent initial conditions and causality of the system itself. On overview of the modern stability frameworks has been presented, starting from the classical Lyapunov ideas and extending through so called non-lyapunov concepts: finite time stability and practical stability in particular. A historical overview of ideas, concepts and results has been presented and the key contributions have been highlighted through key papers from the modern literature. This dissertation follows two main lines of research: the descriptive approach and the LMI (linear matrix inequalities) methodology, the latter being known to reduce control tasks to convex optimization problems, thus making them easily solvable by numerical computation.

New results are presented. A new approach, based on lyapunov-like functions, is used in order to establish new sufficient conditions of practical and finite time interval stability of a particular class of singular time delay systems. Another new result is based on the modern LMI approach and gives new sufficient conditions for finite time stability. The obtained results are numerically verified and have great practical value, as they are easy to compute and less restrictive and conservative than their predecessors.

Key words: Singular systems, descriptor systems, finite time stability, attractive practical stability, discrete nad continuous time-delay singular systems, practical stability

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Automatic control engineering

Predgovor

Poznato je da singularni sistemi, odnosno sistemi opisani kombinacijom diferencijalnih i algebarskih jednačina, pružaju čitav niz prednosti u odnosu na uobičajene, "normalne" sisteme: zadržavanje značajnih fizičkih svojstava u matematičkom modelu, bliska veza sa stvarnim fizičkim veličinama, bolji prikaz strukture sistema, lakša formulacija bilansnih jednačina, pojava "šupljih" matrica koje uprošćavaju numeričke procedure i mnoge druge.

Činjenica da je kod singularnih sistema diferencijalnim pridužen i sistem algebarskih jednačina znatno komplikuje njihov tretman i povlači niz dodatnih pitanja i specifičnosti. Postojanje impulsnih članova, mogućnost nesvojstvenosti prenosne matrice, nekauzalnost između ulaznih vreličina i stanja i izlaza, samo su neki od aspekata koji izdvajaju ovu klasu sistema i čine je privlačnom sa naučnog gledišta.

Singularni sistemi se javljaju u mnogobrojnim raznorodnim oblastima: od teorije električnih i magnetnih kola, preko dinamike letelica i robota, do velikih sistema u energetici, ali i u naizgled potpuno različitim oblastima poput ekonomije, demografskih sistema, biologije i drugo.

Početak razvoja istraživanja singularnih sistema se vezuje za kraj sedamdesetih godina prošlog veka: radovi Campbell et al. (1974) *i* Luenberger *(1977) su udarili temelje istraživanjima koja traju do današnjih dana.*

Sa druge strane, sistemi sa kašnjenjem privlače pažnju naučne i stručne javnosti širom sveta preko pet decenija. Njihovo prisustvo u svim granama nauke i tehnike je očigledno i o njemu svedoče i brojni naučni radovi i obimna publicistička delatnost koja tretira ove sisteme.

U matematičkom smislu, ova klasa sistema opisana je običnim diferencijalnim jednačinama sa pomerenim argumentom, što uslovljava čitav niz dodatnih problema pri njihovom rešavanju. Kao sistemi beskonačne dimenzije, njihovo proučavanje u kompleksnom domenu uslovljeno je suočavanjem sa transcedentnim prenosnim funkcijama, što u izvesnim slučajevima zahteva radikalnu izmenu postojećih kriterijuma i metoda razvijenih za obične linearne sisteme, a ponekad i formiranje sasvim novih prilaza i postupaka za rešavanje postavljenih zadataka kako klasične, tako i moderne teorije automatskog upravljanja.

Na kraju, u mnogim slučajevima se dobijaju sistemi automatskog upravljanja koji u sebi objedinjuju ove dve klase sistema i predstavljeni su spregnutim sistemom diferencijalnih ili diferencnih jednačina sa pomerenim argumentom, kojima je pridružen sistem algebarskih jednačina.

Imajući u vidu da u praktičnim prilikama nije uvek najkorisnije analizirati stabilnost sistema u smislu Ljapunova, već je značajnije utvrditi granice do kojih dosežu trajektorije sistema pri njegovom kretanju u integralnom prostoru stanja, razvijen je čitav spektar koncepata tzv. neljapunovske stabilnosti, koji prvenstveno obuhvata stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, praktičnu stabilnost, ali i druge koncepte.

Dobro je poznato da sistem može da bude stabilan, pa čak i asimptotski stabilan, ali praktično neupotrebljiv, zbog neprihvatljivih pokazatelja kvaliteta prelaznog procesa.

Zbog toga je od posebnog značaja razmatrati stabilnost sistema u odnosu na zadate skupove dozvoljenih i početnih stanja u faznom prostoru, koji su po pravili a priori definisani za dati problem.

Imajući u vidu veoma stroge i kontradiktorne zahteve koji se danas nameću kvalitetu dinamičkog ponašanja realnih sistema, od posebnog je interesa razmatrati njihovo ponašanje na konačnom vremenskom intervalu.

Osobine granica do kojih dosežu rešenja sistema su veoma važne sa inženjerske tačke gledišta. Uzimajući u obzir ovu činjenicu, uvedene su mnogobrojne definicije takozvane tehničke i praktične stabilnosti.

Analiza ovih graničnih osobina rešenja je važan korak koji prethodi projektovanju upravljačkih signala kada se razmatra koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ili praktične stabilnosti.

Autor izražava duboku zahvalnost mentoru Dr Dragutinu Lj. Debeljkoviću, profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, za ideje pri realizaciji doktorske disertacije i za niz sugestija koje su doprinele njenom kvalitetu.

Posebnu zahvalnost prema profesoru Debeljkoviću, autor disertacije duguje zbog već dugogodišnje saradnje i neprekidne i nesebične podrške u akademskim izazovima.

Neosporna je i činjenica da je veliki deo ove doktorske disertacije bio inspirisan naučnim doprinosima Dr Dragutina Lj. Debeljkovića, redovnog profesora i Dr Sretena

B. Stojanovića, vanrednog profesora, objavljenim tokom poslednjih desetak godina i autor ove doktorske disertacije im tim povodom izražava posebnu zahvalnost.

Beograd, 2012. Marko Aleksendrić

SADRŽAJ

Nomenklatura

I OPŠTA RAZMATRANJA

1. UVODNA RAZMATRANJA

Predmet naučne rasprave u ovoj doktorskoj disertaciji su tri posebne klase sistema: *linearni kontinualni singularni sistemi*, *linearni kontinualni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem prisutnim u stanju sistema* i *linearni kontinualni singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem prisutnim u stanju sistema*, kao i njihovi diskretni analogani.

U žiži interesovanja će biti njihovo dinamičko ponašanje, kako na konačnom, tako i na beskonačnom vremenskom intervalu.

U tom smislu, u prvom slučaju razmatraće se tzv. *neljapunovska* stabilnost oličena u konceptima *stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu* i *praktičnoj stabilnosti*.

U drugom slučaju predmeti interesovanja biće ovde pomenute klase sistema u svetlu stabilnosti u smislu Ljapunova, sa posebnim naglaskom na razmatranja koja se odnose na asimptotsku stabilnost istema.

U nekim posebnim slučajevima, u žiži interesovanja će biti moguća kombinacija oba pomenuta koncepta, objedinjena u dobro poznatom konceptu atraktivne praktične stabilnosti.

1.1 Klase razmatranih sistema

l.1.1 *Kontinualni singularni sistemi*

Kontinualni singularni sistemi, u matematičkom smislu, predstavljaju dinamičke sisteme opisane kombinacijom algebarskih i diferencijalnih jednačina, što ne dozvoljava njihovo predstavljanje u klasičnom obliku vektorske diferencijalne jednačine stanja, a samim tim i onemogućava rešavanje tog sistema jednačina uobičajenim metodama koje se koriste za rešavanje "*normalnih*" *sistemema*.

U tom smislu, algebarske jednačine predstavljaju ograničenje nametnuto rešenju, odnosno rešavanju dela sistema koji sadrži diferencijalne jednačine.

Za razmatranja koja su ovde od interesa, matematički model ovih sistema je moguće zapisati u sledećem obliku:

$$
\begin{aligned}
E\left(\left(\cdot\right)\right)\dot{\mathbf{x}}\left(t\right) &= A_0\mathbf{x}\left(t\right)+B_0\mathbf{u}\left(t\right) \\
\mathbf{x}_i\left(t\right) &= C\mathbf{x}\left(t\right)+D\mathbf{u}\left(t\right)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

pri čemu su date matrice odgovarajućih dimenzija, a kvadratna matrica E je u nekom smislu obavezno *singularna.* Prethodni model se odnosi na prinudni radni režim.

Brojni rezultati i praktične primene pokazali su da ovako formirani modeli imaju izvesne prednosti u odnosu na tzv. "*normalne*" sisteme, koji po broju uveliko prevazilaze ovde razmatranu klasu sistema. Neke od prednosti ovih sistema su:

- Zadržavanje bitnih fizičkih svojstava u samom modelu;
- Blisku povezanost sa stvarnim fizičkim promenljivim stanja sistema i, u izvesnom smislu, bolje prikazivanje strukture razmatranog sistema ili procesa;
- Ne zahteva se eliminacija spregnutih promenljivih veličina, što je praktično i nemoguće u nelinearnim slučajevima;
- Formulacija bilansnih i drugih jednačina daleko je neposrednije, sa posebnom pogodnošću da su iste iskazane kroz stvarne fizičke veličine;
- Matrice koje figurišu u ovim modelima, po pravilu su "šuplje", što znatno pojednostavljuje numeričke procedure u onim prilikama kada su iste neophodne.

Sama činjenica da su singularni sistemi iskazani kombinacijom algebro-diferencijalnih jednačina, povlači za sobom niz specifičnosti i osobenosti koje ih jasno izdvajaju i razlikuju u odnosu na tzv. "normalne" sisteme.

U tom smislu, razmatranja egzistencije, jedinstvenosti i strukture tih rešenja predstavljaju fundamentalna pitanja, na koja treba globalno odgovoriti, u svetlu postavljenih ciljeva istraživanja.

Osim toga, postojanje impulsnih članova i vremenskih izvoda ulaznih veličina u kretanju singularnih sistema, kao i moguća nesvojstvenost prenosne matrice i nekauzalnost između ulaznih veličina i veličina stanja i izlaza, čine ih još osobenijim, a samim tim i privlačnijim sa naučnog stanovišta.

Na kraju, potrebno je podvući da, ma koliko sva pomenuta naučna nastojanja išla u pravcu istraživanja njihovih specifičnosti, ipak treba priznati da se sadašnji opšti trend njihovog razmatranja utapa u pokušaje izvođenja rezultata koji proističu iz opšte moderne teorije sistema.

Ovo postaje daleko jasnije ako se shvati činjenica da se osnovna rešenja tih problema ne nalaze u celom prostoru stanja, već da ih treba tražiti u nekom njegovom potprostoru.

Singularni sistemi se prirodno pojavljuju u mnogim inženjerskim disciplinama i problemima, kao što su električna, elektronska i magnetna kola, u dinamici letelica i robota i velikim energetskim sistemima i sistemima sa povratnom spregom, u problemima upravljanja i optimizacije, a takođe i u biologiji, ekonomiji, demografiji i kao graničan slučaj singularno perturbovanih sistema.

Treba posebno naglasiti i činjenicu da se ova klasa sistema javlja u svim onim prilikama, kada se razmatrani sistem može predstavita sa svoja dva podsistema, od kojih u jednom dominiraju brze pojave (algebarski deo) a drugi je okarakterisan sporim prelaznim procesima (diferencijalni deo).

Kao eklatantni primeri ovakvog posmatranja *singularnih sistema* su primeri parnog bloka (turbina + kotao) i motorno vozilo (senzor + motor), itd. Sličnih primera ima mnogo u najrazličitijim oblastima.

Singularni sistemi su prvobitno razmatrani u radu *Campbell et al.* (1974) i kasnije u antologijskom radu *Luenberger* (1977).

I.1.2 *Diskretni deskriptivni sistemi*

Diskretni deskriptivni sistemi, u matematičkom smislu, predstavljaju dinamičke sisteme opisane kombinacijom algebarskih i diferencnih jednačina, što ne dozvoljava njihovo predstavljanje u klasičnom obliku, preko vektorske diferencijalne jednačine stanja, a samim tim onemogućava rešavanje tog sistema jednačina uobičajenim metodama koje se koriste za rešavanje "*normalnih*" *sistemema*.

Sasvim je jasno da je poznavanje linearne algebre i teorije sistema neophodno za razumevanje i adekvatno tumačenje dobijenih rezultata.

Sa tog stanovišta, postoji više različitih prilaza proučavanju ove klase sistema. Neki autori ovu problematiku svode na analitički prilaz, numeričku ili kvalitativnu analizu, dok drugi tu podelu prihvataju sa dva aspekta: geometrijskog prilaza ili čiste algebre.

Za razmatranja koja su ovde od interesa, matematički model ovih sistema se može zapisati u sledećoj formi:

$$
\begin{gathered}
E\left(\left(\cdot\right)\right)\mathbf{x}\left(k+1\right)=A_0\mathbf{x}\left(k\right)+B_0\mathbf{u}\left(k\right)\\
\mathbf{x}_i\left(k\right)=C\mathbf{x}\left(k\right)+D\mathbf{u}\left(k\right)
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

u kojoj su date matrice odgovarajućih dimenzija, pri čemu je kvadratna matrica E u nekom smislu obavezno *singularna.* Ovde izneti model se odnosi na prinudni radni režim.

Očigledno je da u slučaju vremenski diskretnih deskriptivnih sistema, koncept glatkosti ima mali značaj, ali ideja konzistentnih početnih uslova $\mathbf{x}_0$, koji generišu sekvencu rešenja $\left(\mathbf{x}\left(k\right):k\geq 0\right)$, ima svoj potpuni fizički smisao i značenje.

Inače, sve što je prethodno rečeno za kontinualne singularne sisteme, u pogledu njihovih osobina i prednosti u odnosu na tzv. *normalne sisteme* važi i kod diskretnih sistema.

Diskretni deskriptivni sistemi razmatrani su po prvi put u kultnom radu *Luenberger* (1978), koji im je i dao ime.

l.1.3 *Kontinualni sistemi sa kašnjenjem*

Već od sedamdesetih godina dvadesetog veka, sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem privlače veliku pažnju naučne i stručne javnosti.

Njihova pojava u robotici, dugačkim hidrauličnim i pneumatskim i električnim vodovima, dinamici letelica i velikim sistemima podstakla je brojne naučnike da se njima intenzivno bave.

Prisustvo čistog vremenskog kašnjenja, bez obzira da li je ono prisutno u upravljanju i/ili u stanju može da proizvede neželjene prelazne karakteristike, pa i da dovede do nestabilnosti. Pojava nestabilnosti je veoma česta kada su u pitanju sistemi automatskog upravljanja sa povratnom spregom. Zbog toga je ovaj problem naišao na veliko interesovanje kod mnogih istraživača.

U opštem slučaju razmatranje problema koji uključuje i čisto vremensko kašnjenje povlači daleko složeniju matematičku analizu.

Klasa sistema razmatrana u ovom radu je u matematičkom smislu opisana sistemom diferencijalnih jednačina sa pomerenim argumentom i poseduje čitav niz dodatnih specifičnosti i osobina koje se ne susreću kod standardnih kontinualnih sistema automatskog upravljanja. Ova klasa sistema je u prostoru stanja opisana sledećim matematičkim modelom:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \tag{1.3}$$

i sa odgovarajućom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \le t \le 0 \tag{1.4}$$

gde je sa τ označeno čisto vremensko kašnjenje u stanju.

Sa druge strane, u prvom slučaju, kao sistemi beskonačne dimenzije, njihovo proučavanje u kompleksnom domenu uslovljeno je suočavanjem sa transcedentnim prenosnim funkcijama, što u izvesnim slučajevima zahteva radikalnu preformulaciju postojećih kriterijuma i metoda razvijenih za obične linearne sisteme, a ponekada i formiranje sasvim novih prilaza i postupaka za rešavanje postavljenih zadataka kako sa pozicija klasične, tako i moderne teorije automatskog upravljanja.

Prisustvo ovakvih sistema je očigledno u brojnim tehnološkim procesima, dugačkim električnim, pneumatskim i hidrauličnim vodovima, u informacionim sistemima itd.

I.1.4 *Diskretni sistemi sa kašnjenjem*

Diskretni sistemi sa kašnjenjem, opisani su u matematičkom smislu u vidu sistema diferencnih jednačina sa pomerenim argumentom i poseduju čitav niz dodatnih specifičnosti i osobina koje se ne susreću kod standardnih kontinualnih sistema. Klasa ovih sistema je opisana u prostoru stanja sledećim matematičkim modelom:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-h) \tag{1.5}$$

i sa odgovarajućom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, (-h+1), \dots, 0\} \tag{1.6}$$

gde h označava čisto vremensko kašnjenje u stanju.

Nešto jednostavniji nivo matematičkog aparata neophodan je u dinamičkoj analizi vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem, ali odsustvo eksponencijalnog karaktera odziva ove klase sistema i nekih drugih osobina, bez obzira na činjenicu da je njihov prostor stanja konačne dimenzije, onemogućava primenu čitavog niza efikasnih rešenja i prilaza koji se mogu primeniti u prvom, vremenski neprekidnom, slučaju.

I.1.5 *Kontinualni singularni sistemi sa kašnjenjem*

Potrebno je istaći da postoji veliki broj sistema automatskog upravljanja u kojima je istovremeno izražen fenomen čistog vremenskog kašnjenja uz očiglednu singularnost, tako da ova klasa sistema poznata pod imenom *singularni (deskriptivni) sistemi sa kašnjenjem* zaslužuje posebnu pažnju, imajući u vidu da nedvosmisleno objedinjuje ranije ukazane specifičnosti pojedinačnih klasa, prethodno opisanih sistema. Ovi sistemi imaju mnogo specifičnih karakteristika.

Ako postoji potreba da se ovakvi sistemi rigorozno opišu, da se projektuju sa visokim stepenom tačnosti ili da se njima kvalitetno upravlja, neophodno je posvetiti veoma veliku pažnju dubokoj spoznaji njihovih suštinskih osobina i posebnosti koje ih u, velikoj meri, razlikuju od drugih klasa sistema.

U matematičkom smislu ova klasa sistema automatskog upravljanja predstavljena je uparenim sistemom diferencijalnih jednačina sa pomerenim argumentom, kojima je pridružen sistem odgovarajućih algebarskih jednačina koje, u opštem slučaju, mogu biti takođe sa pomerenim argumentom ili bez njega.

U takvim prilikama njihov matematički zapis u prostoru stanja može biti zadat u sledećem obliku:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \tag{1.7}$$

sa obavezno singularnom matricom E i ostalim konstantnim sistemskim matricama i *prihvatljivom* funkcijom početnih stanja, definisanom sa:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \le t \le 0 \tag{1.8}$$

za samo ona trenutna početna stanja koja pripadaju potprostoru konzistentnih početnih uslova $\mathcal{W}_k$, generisanih sledećim algoritmom, u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &= \mathbb{R}^n, \\ &\vdots \\ \mathcal{W}_{j+1} &= A^{-1}\left(E\,\mathcal{W}_j\right), \quad j \ge 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

pri čemu $A^{-1}(\cdot)$ označava inverzni lik $(\cdot)$ nad operatorom A.

Kao i kod sistema sa kašnjenjem, prvobitno ponašanje sistema se iskazuje kroz funkciju konzistentnih početnih uslova.

l.1.6 *Diskretni deskriptivni sistemi sa kašnjenjem*

U matematičkom smislu ova klasa sistema automatskog upravljanja predstavljena je uparenim sistemom diferencnih jednačina sa pomerenim argumentom, kojima je pridružen sistem odgovarajućih algebarskih jednačina, koje u opštem slučaju mogu biti, kao i kod vremenski neprekidnih sistema, sa pomerenim argumentom ili bez njega.

U takvim prilikama njihov matematički zapis u prostoru stanja može biti iskazan u sledećem obliku:

$$E\,\mathbf{x}(k+1)=A_0\mathbf{x}(k)+A_1\mathbf{x}(k-h) \tag{1.10}$$

sa obavezno singularnom matricom E i ostalim konstantnim sistemskim matricama i *prihvatljivom* funkcijom početnih stanja, datom sa:

$$\mathbf{x}(\vartheta)=\boldsymbol{\psi}(\vartheta),\quad \vartheta\in\{-h,(-h+1),\dots,0\} \tag{1.11}$$

za samo ona trenutna početna stanja koja pripadaju potprostoru konzistentnih početnih uslova.

Valja istaći da posle svega prethodno izloženog, ostaje činjenica da analogija konzistentnih početnih uslova, koji su neophodni u kontinualnom slučaju, i početnih uslova u diskretnom slučaju nije potpuna.

Ovaj fenomen će biti još više apostrofiran i razjašnjen posle izlaganja u narednim glavama, u kojima se neposredno govori o rešenju singularnog sistema diferencnih jednačina kao i o mogućem uticaju početnih i krajnjih uslova na izgled samog rešenja.

Međutim, bez obzira na pomenute razlika, *klasično* određivanje konzistentnih početnih uslova, za ovu klasu sistema, može se takođe definisati i ta materija izlaže se u nastavku.

Fundamentalni geometrijski alat za karakterizaciju potprostora konzistentnih početnih uslova $\mathcal{W}_d$, je sekvenca potprostora:

$$\begin{aligned} W_{d,0} &= \mathbb{R}^n \\ &\vdots \\ \mathcal{W}_{d,j+1} &= A^{-1}\left(E\mathcal{W}_{d,j}\right),\quad (j\geq 0) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$A^{-1}(\,\cdot\,)$ označava inverzni lik $(\cdot)$ nad operatorom A, a $\aleph(F)$ i $\Re(F)$ označavaju kernel i rang nad operatorom F, sledstveno.

Sekvenca potprostora $\{\mathcal{W}_{d,0},\ \mathcal{W}_{d,1},\ \mathcal{W}_{d,2},...\}$ se gnezdi u smislu da:

$$\mathcal{W}_{d,0} \supset \mathcal{W}_{d,1} \supset \mathcal{W}_{d,2} \supset \mathcal{W}_{d,3} \supset \cdots \tag{1.13}$$

Osim toga:

$$\aleph(A) \subset \mathcal{W}_{d,j}, \quad (j \geq 0) \tag{1.14}$$

i postoji ceo broj $k \geq 0$, tako da:

$$\mathcal{W}_{d,k+1} = \mathcal{W}_{d,k} \tag{1.15}$$

i prema tome $\mathcal{W}_{d,k+1} = \mathcal{W}_{d,k}$ za $j \geq 1$.

Ako je k^* najmanji takav ceo broj sa ovom osobinom, tada:

$$\mathcal{W}_{d,k} \cap \aleph(E) = \{0\}, \quad (k \geq k^*) \tag{1.16}$$

obezbeđuje da je matrica $(\lambda E - A)$ invertibilna za neko $\lambda \in \mathbb{C}$, *Owens*, *Debeljkovic* (1985).

Na kraju je potrebno istaći da je za sve ovde predmetne klase sistema potrebno sa pažnjom pristupiti njihovom ispitivanju, imajući u vidu sve njihove specifičnosti kako u pogledu postojanja i jedinstvenosti rešenja (uvek smo zainteresovani za rešenja koja se mogu dobiti u zatvorenoj formi), konzistentnih početnih uslova, nekonzistentnih početnih uslova koji mogu da generišu impulsna ponašanja ili, kod diskretnih sistema, pitanje njihove fizičke ostvarljivosti i kretanju sistema u opštem slučaju.

1.2 Koncepti stabilnosti

Poslednjih decenija su prezentovani mnogobrojni značajni doprinosi na polju Ljapunovljeve stabilnosti različitih klasa sistema.

Bilo bi gubljenje vremena vršiti rekapitulaciju svih doprinosa na ovom, uvek atraktivnom području, s obzirom da su svi potrebni detalji dobro poznati. Međutim u praksi nije samo interesantna stabilnost sistema (na primer u smislu Ljapunova), već takođe i granice trajektorija sistema.

Sistem može biti stabilan, ali i potpuno neupotrebljiv, ukoliko poseduje neželjene prelazne performanse. Prema tome, korisno je razmatrati stabilnost takvih sistema u odnosu na određene *podskupove prostora stanja*, koji su *a priori* definisani u datom problemu.

Ti skupovi mogu biti vremenski invarijantni ali i vremenski promenljivi što ovoj, ionako složenoj problematici, daje posebnu težinu.

Zbog toga je od posebnog značaja razmatrati stabilnost sistema u odnosu na *zadate skupove dozvoljenih i početnih stanja* u faznom prostoru, koji su po pravilu unapred poznati za dati problem.

S druge strane, imajući u vidu veoma stroge i često oprečne zahteve koji se danas nameću kvalitetu dinamičkog ponašanja realnih sistema, od posebnog je interesa razmatrati njihovo ponašanje i na *konačnom vremenskom intervalu*.

Zbog toga je od posebnog značaja baviti se ponašanjem dinamičkih sistema na konačnom vremenskom intervalu, ne uslovljavajući da se krajnje stanje sistema vrati i u njegovo početno ravnotežno stanje, ali dozvoljavajući i takvu mogućnost.

Ove granične osobine odziva sistema, odnosno rešenja sistema, su veoma važne sa inženjerske tačke gledišta. Uzimajući u obzir ovu činjenicu, uvedene su mnogobrojne definicije takozvane tehničke i praktične stabilnosti. Grubo govoreći, ove definicije se baziraju na predefinisanju granica perturbacija početnih uslova i dozvoljenih perturbacija odziva sistema.

U inženjerskim primenama upravljačkih sistema, ova činjenica postaje veoma važna i ponekad krucijalna, u cilju karakterizacije unapred, na kvantitativan način, mogućih odstupanja odziva sistema.

Prema tome, analiza ovih partikularnih graničnih osobina rešenja je važan korak, koji prethodi projektovanju upravljačkih signala, kada se razmatra koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ili koncept praktične stabilnosti.

Kada se uopšteno razmatraju sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem, u postojećim kriterijumima stabilnosti, primenjena su uglavnom dva prilaza.

Prvi prilaz je da se dobije uslov stabilnosti koji *ne uključuje* informaciju o čisto vremenskom kašnjenju, a drugi prilaz iskazan je kroz uslove koji taj iznos *uzima u obzir*.

Prvi prilaz se često naziva kriterijumom nezavisnim od čistog vremenskog kašnjenja i u opštem slučaju obezbeđuje jednostavne algebarske uslove.

U drugom slučaju, koji je očigledno kvalitetniji, jer pored sistemskih matrica u formulaciji kriterijuma figuriše i iznos čistog vremenskog kašnjenja, postoji potreba za rešavanjem nešto složenijih izraza, a u nekim slučajevima i potreba za rešavanjem ili transcedentih algebarskih jednačina ili nelinearnih matričnih jednačina visokog reda.

Osim navedenog, u kontinualnim slučajevima, kako bi se iskoristili dobijeni kriterijumi, potrebno je određivanje i maksimalnih ili minimalnih solvenata takvih jednačina, što često vodi ka optimizacionim postupcima veoma složenih algoritamskih procedura

Literatura

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Continuous Singular Control Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1996.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, *Discrete Singular Control Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1998.

D. Lj. Debeljkovic , S. A. Milinkovic, *Finite Time Stabilty of Time Delay Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1999.

M. P. Lazarevic, D. Lj. Debeljkovic, D. Krstic, *Optimal Control of Time Delay Sytems in Industrial Processes* , Čigoja press, Belgrade, 2003.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Continuous Singular Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, Lj. A. Jacic, *Discrete Descriptor Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, *Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval*, Čigoja press, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, A. Lj. Jacic, M. Medenica *Time Delay Systems: Stabilty and Robustness*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic , I. M. Buzurovic, *Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: A Geometric Approach*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2007.

Pjescic, R M., V. Chistyakov, D. Lj. Debeljkovic, On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2008 (*in Serbian*), pp. 445.

D. Lj. Debeljkovic, Stability of Control Systems over Infinite Time Interval, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2009, (*in Serbian*) pp. 460.

I. M. Buzurovic, D. Lj. Debeljkovic, Geometric Approach and Dynamical Behavior Study for Particular Class of Linear Singular Systems with Application in Medicine, Mechanical Faculty, Belgrade, 2009. (*in Serbian*) pp. 446. - ISBN 978 – 86 – 7083 – 669 – 3.

D. Lj. Debeljkovic, Linear Singular Systems with Time Delay: Stability, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 452, ISBN 978 – 86 – 7083 – 682 – 2.

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, Stabilty of Particular Classes of Linear Control Systems over Finite and Infinite Time Interval, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 448., ISBN 978 – 86 – 7083 – 694 – 5.

D. Lj. Debeljkovic, M. S. Aleksendric , N. J. Dimitrijevic, Contemporary Theory of Multi Input - Multi Output Linear Control Systems, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011 (*in Serbian*), pp. 476, ISBN 978 – 86 – 7083 – 706 – 5.

D. Lj. Debeljkovic, Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: Impulsive behaviour, generalized inverses, stabilization, regularization, optimization and applications, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011 (*in Serbian*), pp. 426, ISBN 978 – 86 – 7083 – 728 – 7.

D. Lj. Debeljkovic, Stability of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011 (*in Serbian*), pp. 463., ISBN 978 – 86 – 7083 – 694 – 5.

II OSOBINE I SPECIFIČNOSTI KLASA RAZMATRANIH SISTEMA

2. KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI

2.1 Uvodna razmatranja

Poslednjih nekoliko decenija smo svedoci veoma intezivnog razvoja teorije sistema automatskog upravljanja, koji je obuhvatio široke i značajne oblasti kao što su linearni i nelinearni sistemi, deterministički i stohastički sistemi, optimalni sistemi, robusni sistemi, oblasti ocenjivanja stanja sistema, identifikacije sistema, zatim adaptivni sistemi, složeni sistemi i, u poslednje vreme, inteligentni sistemi - zasnovani na mašinskoj inteligenciji i neuronskim mrežama.

Tokom pomenutog perioda javlja se i značajni interes na polju izučavanja singularnih sistema automatskog upravljanja. Ovi sistemi se pojavljuju kao rezultat matematičkog modeliranja mnogih fizičkih procesa.

U cilju dobijanja što tačnijeg modela fizičkog procesa, singularni sistemi se nameću kao adekvatan matematički aparat, koji problem modeliranja rešava na temeljan način. Ovi sistemi, uopšteno gledano, predstavljaju kombinaciju diferencijalnih i algebarskih jednačina. Do sada je uložen značajan napor u proučavanju ove klase sistema, a rezultat je da je izvedeno više koncepata u njihovom razmatranju, *Buzurović* (2000).

Postoji i više prilaza proučavanju ove klase sistema. Neki autori to svode na analitički prilaz, numeričku ili kvalitativnu analizu, dok drugi tu podelu prihvataju sa dva aspekta: geometrijskog prilaza ili čiste algebre, *Debeljković et. al* (1996). Za razliku od klasične teorije automatskog upravljanja, koja se bazirala na dinamičkom opisu razmatranog sistema kroz njihovo ulazno - izlazno ponašanje, savremena teorija se u potpunosti oslanja na koncept stanja.

Stanje fizičkog sistema u trenutku $t \in \left[-\infty, +\infty\right]$ je ona njegova unutrašnja situacija u tom trenutku t čije je (direktno ili indirektno) poznavanje zajedno sa poznavanjem ulazne veličine na intervalu $\left\{\tau, +\infty\right\}$ neophodno i dovoljno da se jednoznačno odrede vrednosti njegove izlazne veličine, kao i samo njegovo stanje u svakom trenutku $t \in \left[\tau, +\infty\right]$.

Bilo da je reč o analizi ili sintezi sistema, sasvim je jasno da je polazni podatak u oba slučaja poznata dinamika posmatranog objekta ili procesa.

U tom smislu, moderna teorija automatskog upravljanja je uvela, kao osnovno polazište, opis unutrašnje dinamike sistema kroz *vektorsku diferencijalnu jednačinu stanja* i njoj pridruženu jednačinu izlaza.

U opštem slučaju, matematički posmatrano, navedene jednačine imaju oblik :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{g}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \tag{2.2}$$

pri čemu su vektorske funkcije $\mathbf{f}\left((\cdot)\right)$ i $\mathbf{g}\left((\cdot)\right)$, u opštem slučaju:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \tag{2.3}$$

dok $t \in \mathbb{R}$, označava vreme, a $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^p$ vektore stanja, ulaza i izlaza sledstveno, *Lewis* (1986), *Campbell* (1990), *Debeljković et. al* (1996).

Jed. (2.1) i (2.2) predstavljaju matematički model objekta, procesa ili sistema u prostoru stanja.

Nešto drugačiji zapis modela sistema može se dati u sledećem obliku,

$$\mathbf{f}\left(t, \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}_i(t)\right) = \mathbf{0} \tag{2.4}$$

poznatom pod nazivom sistem *implicitnih* diferencijalnih jednačina.

Sistemi opisani ovim jednačinama se, shodno tome, nazivaju *implicitnim sistemima*. Jedna od mogućih kanoničnih formi modela, datog jed. (2.4), je:

$$E\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)\right)\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)\right) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{g}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}_i(t), \mathbf{z}(t)\right) = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

u kojoj vektor $\mathbf{z}(t)$ predstavlja, uslovno rečeno, neželjene veličine stanja.

U tom smislu, $\mathbf{x}(t)$ ima ulogu *pretendenta* za poziciju vektora stanja sistema, ukoliko je moguće eliminisati $\mathbf{z}(t)$ iz jed. (2.5 - 2.6).

Ovakvo rešenje nije uvek moguće, a uz to se mogu javiti i još dva složena problema. Za određene klase sistema matrica $E\left((\cdot)\right)$ može biti pravougaona, a kada je i kvadratna može biti singularna.

U prvom slučaju matrica $E\left((\cdot)\right)$ može biti i nepotpunog ranga, što posebno otežava matematički tretman takvog sistema. U nešto jednostavnijim slučajevima, susreću se kanoničke forme implicitnih sistema, date jed.(2.7) ili jed.(2.8), kako sledi:

$$E\left(t,\mathbf{x}(t)\right)\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}\left(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right) \tag{2.7}$$

$$E(t)\dot{\mathbf{x}}(t)=A\left(t,\mathbf{x}(t)\right)\mathbf{x}(t)+B\left(t,\mathbf{x}(t)\right)\mathbf{u}(t) \tag{2.8}$$

odnosno:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathrm{f}\left(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right) \tag{2.9}$$

uz:

$$\mathbf{x}_i(t)=\mathrm{g}\left(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right) \tag{2.10}$$

U posebnom, ujedno i najčešće susretanom slučaju koji se razmatra, vektorske funkcije $\mathbf{f}\left((\cdot)\right)$ i $\mathbf{g}\left((\cdot)\right)$ su *linearne* funkcije svojih nezavisno promenljivih, tako da se dobija jednačina stanja i jednačina izlaza sa konstantnim matricama A, B, C, D koje su odgovarajućih dimenzija, ali sa *konstantnom kvadratnom matricom* E, obavezno *singularnom*, rang $E \overset{\Delta}{=} q < n$, tako da se može napisati:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t) \tag{2.11}$$

$$\mathbf{x}_i(t)=C\mathbf{x}(t)+D\mathbf{u}(t) \tag{2.12}$$

Imajući u vidu ovu činjenicu, velika klasa ovih sistema poznata je u literaturi kao *singularni sistemi*.

U prilikama kada je matrica E nesingularna, odnosno kada važi $\det E \neq 0$ sistem, dat jed. (2.11), svodi se na:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=E^{-1}A\mathbf{x}(t)+E^{-1}B\mathbf{u}(t) \tag{2.13}$$

odnosno:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A_0\mathbf{x}(t)+B_0\mathbf{u}(t) \tag{2.14}$$

što predstavlja klasičnu formu opisa sistema u savremenoj teoriji upravljanja, sa dobro poznatim rezultatima koji se na nju oslanjaju, *Lewis* (1986).

Singularni sistemi se često nazivaju i diferencijalno algebarski sistemi jer su u pitanju zapravo diferencijalne jednačine sa ograničenjima koja im nameću pridružene algebarske jednačine.

Još jedan naziv za ovu klasu sistema su deskriptor (deskriptivni) sistemi, a poznati su i kao *semi-state* sistemi (polustanja) i *uopšteni sistemi u prostoru stanja*.

2.2 Nastanak i kraći pregled rezultata postignutih na polju proučavanja singularnih sistema

O istorijskom pregledu singularnih sistema do detalja se može pročitati u radovima *Lewis* (1986) i *Campbell* (1990). Tu se mogu naći i prvi izvorni radovi koji su uticali na dalji razvoj singularnih sistema.

Weierstrass je još davne 1867. godine postavio osnove za proučavanje linearnih singularnih sistema opisanih jed. (2.11) u svojoj teoriji elementarnih delitelja.

On je proučavao regularni slučaj singularnog sistema, tj. $\det(sI - A) \neq 0$.

Kronecker je 1890. godine proširio teoriju *Weierstrass*-a na singularni slučaj, tj. kada je $\det(sI - A) = 0$.

Gantmacher je u knjigama *Gantmacher* (1977.a,b), dao poseban tretman ovih problema. Nije ni čudo što su te dve kultne knjige, uz *Campbell*-a (1980.a) i *Campbell*-a (1980.b), ubedljivo najcitiranija bazična literatura na polju proučavanja singularnih sistema i to kod gotovo svih autora.

Osnovna podela koja je rezultat različitih pristupa je proučavanje sa *stanovišta frekventnog domena* i pristup sa *stanovišta vremenskog domena*.

Predvodnik prve grupe je *Rosenbrock* (1974), koji je pručavao vremenski invarijantni slučaj u frekventnom domenu, razmatrajući konačnu strukturu matričnog para (A, E) još 1974. Kasnije, ovu teoriju proširuje na beskonačnu frekventnu strukturu definišući pojmove nula u beskonačnosti matričnog para $(sE - A)$ kao nula od $(sE - A)$, kada je $s = 0$.

Pugh, *Ratcliffe* (1979) pokazuju da se sve nule mogu definisati na drugačiji način i to kao nule od $\left(\frac{1}{s}E - A\right)$ kada je $s = 0$.

Varghese (1978) pokazuje da dozvoljeni početni uslovi različiti od nule mogu dovesti do strukturne nestabilnosti u smislu prethodnog pojma nula u beskonačnosti. Ispitivanje izlazno-nultih karakteristika matričnog para (A, E) takođe spada u analizu u frekventnom domenu, kao i ispitivanje baze potprostora u odnosu na sopstvenu strukturu matričnog para.

Značajni predstavnici su, pored pomenutih, *Lewis*, *Van Doren*, *Ozcaldiran* i drugi. Detalje oko osnovnih radova i bazičnih rezultata na polju singularnih sistema moguće je dalje naći u *Lewis* (1986).

U tu grupu proučavanja spadaju ispitivanja i diskretnih singularnih sistema, problemi optimizacije, kao i proširenje teorije na nelinearne sisteme.

Klasičan predstavnik ovog pravca je *Campbell*, sa poznatim rešenjem singularnih sistema koristeći *Drazin*-ovu inverziju, pa zatim *Yip*, *Sincovec*, *Cobb*, *Dziurla*, *Newcomb* i drugi.

Za celovit prikaz kompletnog razvoja i rezultata na polju singularnih sistema, korisno je proučiti i knjigu *Dai* (1988).

2.3 Priroda i osobenosti singularnih sistema

Singularni sistemi se prirodno pojavljuju u mnogim inženjerskim disciplinama i problemima, kao što su električna, elektronska i magnetna kola, u dinamici letelica i robota, u velikim energetskim sistemima i sistemima sa povratnom spregom, u problemima upravljanja i optimizacije, a takođe i pri modeliranju sistema iz netehničkih disciplina, *Debeljković et. al* (1996), *Debeljković*, *Buzurović* (2007).

Zbog niza neophodnih, specifičnih termina, sistemi kod kojih je $\det E \neq 0$, nazivaće se *normalnim* sistemima.

Za razmatranja koja su ovde od interesa, može se matematički model singularnih sistema, $\det E = 0$, zapisati u sledećoj formi:

$$E\left((\cdot)\right)\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{2.15}$$

$$E\left((\cdot)\right)\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{2.16}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \tag{2.17}$$

pri čemu su date matrice odgovarajućih dimenzija, a kvadratna matrica E je u nekom smislu obavezno singularna

Sama činjenica da su singularni sistemi iskazani kombinacijom algebro-diferencijalnih jednačina povlači sa sobom i niz specifičnosti i osobenosti koje ih jasno izdvajaju i razlikuju od normalnih sistema.

Ovo postaje daleko jasnije ako se shvati činjenica da se osnovna rešenja tih problema ne nalaze u celom prostoru stanja, već da ih treba tražiti u nekom njegovom potprostoru, *Debeljković et. al* (1996).

2.4 Klasifikacija i podela singularnih sistema

Opšta klasifikacija sistema automatskog upravljanja je poznata i može se naći u literaturi *Debeljković et. al* (1996). Ovde je od interesa analizirati vrste *linearnih kontinualnih singularnih sistema*. *Regularni singularni sistemi* imaju uvek jedinstveno rešenje koje, zavisno od prirode pridruženih početnih uslova, može da bude "glatko" ili impulsno.

Iregularni singularni sistemi mogu uopšte da nemaju rešenja, a ako ga i imaju, ono je nejedinstveno. U tom slučaju broj rešenja može biti konačan ili beskonačan. Kao i kod regularnih sistema, i ovde je moguća pojava "glatkih" ili impulsnih rešenja.

S*tacionarna singularnost* podrazumeva singularnu matricu E nad poljem realnih brojeva. Singularnost može biti *strukturna* i *parametarska.*

Posebna podela singularnih sistema takođe počiva na razlici u strukturi matrice E. Naime, matrica E može biti pravougaona, što je ređi slučaj, ili kvadratna, što se daleko češće sreće u praksi.

2.5 Neke specifičnosti singularnih sistema

Kao i za ostale klase sistema, tako i za singularne sisteme od najveće važnosti je ispitati njihovo dinamičko ponašanje u različitim uslovima rada.

Zbog mnogih specifičnosti, od kojih su neke već bile spomenute, kao i zbog činjenice da je u matematičkom smislu njihovo ponašanje iskazano sistemom algebro - diferencijalnih jednačina, treba stalno imati na umu niz novih, dodatnih problema koji neminovno prate njihovu analizu i sledstveno, moguću sintezu.

Posebno su značajna razmatranja pitanja postojanja i jedinstvenosti rešenja, odnosno egzistencije takvih početnih uslova koji generišu *glatka* rešenja, ali ne i *impulsna*, zatim mogućnost formalnog matematičkog opisa onih singularnih sistema koji ne mogu da oforme matricu prenosnih funkcija, tretmana slučajeva kada se matrica E javlja kao pravougaona, kao i pristupa regularizacije, kao svojevrsnog postupka globalnog svođenja singularnih sistema na obične, normalne sisteme.

Kada se svemu tome doda činjenica da proučavanje osobina matričnog para (E, A) omogućava duboko sagledavanje osobina singularnih sistema sa *geometrijskog stanovišta*, onda postaje jasna činjenica zašto se ovoj klasi problema posvećuje naročita pažnja, *Buzurović* (2000), *Debeljković*, *Buzurović* (2007).

Kako bi se precizno utvrdio okvir narednih izlaganja, neophodno je odrediti klasu singularnih sistema i klasu ulaznih signala koje će biti predmet svih razmatranja.

U tom smislu, posmatraće se *vremenski neprekidni stacionarni linearni singularni sistemi*, bilo u slobodnom radnom režimu:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t);\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.18}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = C\,\mathbf{x}(t) \tag{2.19}$$

bilo u prinudnom radnom režimu:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t);\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.20}$$

sa matricom $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ obavezno singularnom i ostalim matricama: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{p\times n}$, u opštem slučaju.

U velikoj većini slučajeva elementi pomenutih matrica pripadaće skupu realnih brojeva.

2.6 Rešivost linearnog singularnog sistema diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

Razmatra se linearni singularni stacionarni sistem, opisan svojom vektorskom diferencijalnom jednačinom stanja:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) + A\mathbf{x}(t) = B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.21}$$

sa kvadratnom matricom *E*, obavezno singularnom.

Najcelovitiji rezultat, kojem se uvek stremi u analitičkom prilazu rešavanja sistema diferencijalnih jednačina ili algebro-diferencijalnih jednačina je takozvani *zatvoreni oblik rešenja*.

Da bi se za ovu klasu sistema dobio takav rezultat, potrebno je da budu ispunjeni određeni, posebni uslovi.

Naime, pokazano je u literaturi, *Gantmacher* (1977), da, ukoliko je *matrični par*[†] $(sE + A)$ *regularan*, tj. ukoliko je:

$$\det(sE + A) \neq 0, s \in \mathbf{C} \tag{2.22}$$

tada rešenja sistema, datog jed. (2.21), *postoje i jedinstvena su*, a ukoliko su im pridruženi konzistentni početni uslovi, ona su tada i "glatka" (ne sadrže impulse) i mogu se dobiti u zatvorenom obliku.

Prema tome *rešivost* sistema, datog jed. (2.21), direktno zavisi od regularnosti matričnog para ($sE + A$), što se može testirati na više različitih načina.

Prvi način svakako predstavlja testiranje jed. (2.21).

Ukoliko se, naime, pokaže da je:

$$\det(sE + A) = 0 \tag{2.23}$$

singularni sistem je *iregularan*.

Rešenja mogu *da postoje*, mogu da budu *jedinstvena* ili *nejedinstvena,* ili mogu uopšte *da ne postoje*.

Da bi se ova pitanja stavila u rigoroznu matematičku formu, navodi se sledeći značajni rezultat, *Campbell* (1980).

Naime, *Campbell et al*. (1976), izneli su sledeći rezultat:

Stav 2.1. Ako je matrični par ($\lambda E + A$) *regularan*, onda je:

$$\aleph(E) \cap \aleph(A) = \{\mathbf{0}\} \tag{2.24}$$

Međutim, ispunjenje uslova datog jed. (2.24) nije dovoljno da garantuje regularnost matričnog para $(\lambda E + A)$ za neko λ, $\lambda \in \mathbf{C}$.

[†] eng *Matrix pecil*;

Sasvim je svejedno da li se razmatra ($sE + A$) ili ($sE - A$).

U drugom slučaju uobičajeno se jednačina stanja

usvaja u obliku: $E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

Debeljković, *Owens* (1985) pokazali su sledeći rezultat:

Stav 2.2. Ako je matrični par ($\lambda E + A$) regularan, $\lambda \in \mathbb{C}$, onda je:

$$\mathcal{W}_k \cap \aleph\left(E\right) = \left\{ \mathbf{0} \right\} \tag{2.25}$$

gde je $\mathcal{W}_k$ potprostor konzistentnih početnih uslova.

Kao i u prethodnom stavu, obrnuto ne mora da važi.

Na kraju, za singularni sistem dat u svojoj *normalnoj kanoničkoj formi*, uslov rešivosti (regularnosti) definisan je sa:

$$\begin{aligned} &\det\left(sI - A_1\right) \det\left(-A_4 - A_3\left(sI - A_1\right)^{-1} A_2\right) = \\ &= \left(-1\right)^n \det A_4 \det\left(\left(sI - A_1\right) - A_2 A_4^{-1} A_3\right) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Ovaj rezultat može se naći u radu *Bender*, *Laub* (1987.b).

2.7 Konzistentni početni uslovi

Dobro je poznato da se rešenje "*normalnog*" sistema jednačina može odrediti, kako u slobodnom, tako i u prinudnom radnom režimu, za *proizvoljne* početne uslove.

Međutim, klasa sistema opisana implicitnim diferencijalnim jednačinama, koja se u posebnom slučaju transformiše u singularne sisteme, susreće se u znatnoj meri sa problemom određivanja rešenja u zavisnosti od početnih uslova.

Očigledno je da zbog implicitnog karaktera tih jednačina u odnosu na $\dot{\mathbf{x}}(t)$ i činjenice da su pored diferencijalnih jednačina prisutne i algebarske jednačine *svi* mogući *početni uslovi* nisu *prihvatljivi*.

Prema *Bajiću* (1992.a), oni početni uslovi koji su prihvatljivi, nazivaju se *konzistentnim.*

Njihovo jasnije tumačenje dato je kroz odgovarajuću definiciju, koja potiče iz rada *Campbell et al.* (1976), a izneta je u sklopu formulacije jedinstvenosti rešenja singularnog sistema.

Osnovno obeležje konzistentnih početnih uslova je činjenica da oni generišu "*glatka*" rešenja, a ako se razmatranom sistemu jednačina dodele (pridruže) *nekonzistentni uslovi*, javiće se *impulsno ponašanje* na početku njihove integracije.

U svakom slučaju, daleko je veći interes za prisustvo "glatkih" rešenja, mada se impulsna rešenja nekada u praksi neizbežna. O ovom problemu biće više govora u nastavku.

Posebno značajan doprinos u tom smislu, predstavlja rad *Verghese et al*. (1981), u kojem su jasno data razgraničenja početnih uslova, koja sistem vode u *impulsno ponašanje*, a koja obezbeđuju glatkost rešenja.

Problemom i određivanjem konzistentnih početnih uslova bavili su se mnogi autori, tako da danas postoji niz postupaka za njihovo određivanje.

Naredna izlaganja baviće se detaljno ovim pitanjem, polazeći od vektorske diferencijalne jednačine stanja linearnog singularnog sistema:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 . \qquad (2.27)$$

Potprostor konzistentnih početnih uslova, u oznaci $\mathcal{W}_k$, prvi su definisali i pokazali kako se određuje *Campbell et al*. (1976).

Naime, iz uslova:

$$\left(I - \hat{E}\hat{E}^D\right)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \qquad (2.28)$$

što je ekvivalentno sa:

$$\mathcal{W}_k = \aleph\left(I - \hat{E}\hat{E}^D\right) \qquad (2.29)$$

može se odrediti skup svih vektora $\mathbf{x}_0$ koji obrazuju potprostor konzistentnih početnih uslova $\mathcal{W}_k$.

Sa $\hat{E}$ označena je matrica:

$$\hat{E} = (\lambda E - A)^{-1} E, \qquad (2.30)$$

a indeks "D" označava Drazinovu inverziju matrice.

Prema definiciji datoj u *Owens*, *Debeljković* (1985), početni uslov $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ je *konzistentan*, ako postoji diferencijabilno, neprekidno rešenje sistema, jed. (2.27). Za numerički tretman i konkretno određivanje $\mathcal{W}_k$, obično se prostor $\mathcal{X}$ identifikuje sa $\mathbb{R}^n$

pogodnim izborom bazisa prostora stanja, ili sa Hilbertovim prostorom sa pogodno usvojenom metrikom.

U ovim razmatranjima E i A su linearni operatori koji preslikavaju $\mathcal{X}$ u n - dimenzionalni realni, linearni vektorski prostor $\tilde{\mathcal{X}}$.

Osnovno geometrijsko oruđe u karakterizaciji potprostora konzistentnih početnih uslova je sekvenca potprostora, određena sa:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &= \mathbb{R}^n \\ &\vdots \\ \mathcal{W}_{j+1} &= A^{-1}\left(E\mathcal{W}_J\right), \quad j \geq 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

gde $A^{-1}(\,\cdot\,)$ predstavlja inverzni lik (·) pod dejstvom operatora A .

Lema 2.1. Sekvenca potprostora $\left\{\mathcal{W}_0 \;\; \mathcal{W}_1 \;\; \mathcal{W}_2 \;\; \ldots \right\}$ formirana je tako da zadovoljava:

$$\mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_1 \supset \mathcal{W}_2 \supset \mathcal{W}_3 \ldots \supset \tag{2.32}$$

Štaviše, može se napisati:

$$\aleph\left(A\right) \subset \mathcal{W}_j, \quad j \geq 0 \tag{2.33}$$

pri čemu postoji *nenegativan ceo broj* $k \geq 0$, takav da je:

$$\mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{W}_k, \tag{2.34}$$

tako da važi:

$$\mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{W}_k, \quad j \geq 1 \tag{2.35}$$

Ako je k^* *najmanji nenegativni ceo broj* koji zadovoljava prethodnu jednačinu, tada je:

$$\mathcal{W}_k \cap \aleph\left(E\right) = \left\{ \mathbf{0} \right\}, \quad k \geq k^* \tag{2.36}$$

pod uslovom da je $(\lambda E - A)$ invertibilno, za neko $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.1. Pod uslovima *Leme* 2.1, $\mathbf{x}_0$ je konzistentni početni uslov za sistem dat jed. (2.1) ako i samo ako je $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_{k^*}$.

Štaviše, $\mathbf{x}_0$ generiše jedinstveno rešenje $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_{k^*}, \quad t \geq 0$

Dokazi ovih i svih drugih ranije izloženih teorema detaljno su izloženi u lit. *Debeljković et al.* (2005.b) ili *Pješćić et al* (2008) a ovde su, iz jasnih razloga, izostavljeni.

Koristeći druge prilaze *Bernhard* (1982) i *Ozcaldrian* (1985) došli su do sličnih rezultata koje daje i *Lema* 2.1, a koji omogućavaju da se u rekurzivnoj proceduri odredi potprostor konzistentnih početnih uslova.

Vrlo jednostavan način određivanja potprostora konzistentnih početnih uslova pruža mogućnost prevođenja polaznog singularnog sistema na sopstvenu *normalnu kanoničku formu*.

Algebarski deo sistema, tada, u potpunosti definiše taj prostor, odnosno:

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_{10} + A_4\mathbf{x}_{20} \tag{2.37}$$

ili, u ekvivalentnoj notaciji:

$$\mathcal{W}_k = \aleph\left(\begin{pmatrix} A_3 & A_4 \end{pmatrix}\right) \tag{2.38}$$

Slične mogućnosti pruža i *SVD* (eng. *Singular value decomposition*) kanonička forma.

Singularni sistem dat jed. (2.27) je u *SVD kanoničkoj formi*, ako se njegova vektorska diferencijalna jednačina stanja i jednačina izlaza mogu prikazati kao:

$$UEV\,\dot{\mathbf{z}}(t) = UAV\mathbf{z}(t) + UB\mathbf{u}(t), \tag{2.39}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = CV\mathbf{z}(t) + D\mathbf{u}(t) \tag{2.40}$$

gde su:

$$UEV = \begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UAV = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

$$UB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad CV = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix}, \tag{2.42}$$

$$\begin{gathered} \det U \neq 0, \ \det V \neq 0, \\ \Sigma^2 = \mathrm{diag}\left\{ \sigma_1, \ \sigma_2, \ \cdots, \ \sigma_\nu, \ 0, \ \cdots, \ 0 \right\}, \end{gathered} \tag{2.43}$$

gde su σ_i, $i = 1, ..., \nu$; singularne vrednosti matrice E koje se razlikuju od nule, $\mathbf{u}(t)$ je vektor ulaza, a $\mathbf{x}_i(t)$ je vektor izlaza sistema.

2.8 Prenosna funkcija i impulsno ponašanje singularnog sistema

Prenosna funkcija

Posmatra se linearan, stacionaran singularni sistem opisan svojom vektorskom diferencijalnom jednačinom stanja i jednačinom izlaza:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{2.44}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = C\mathbf{x}(t) \tag{2.45}$$

Koristeći *Laplace*-ovu transformaciju, pri svim početnim uslovima jednakim nuli, dobija se:

$$W(s) = C(sE - A)^{-1} B = C\frac{\text{adj}(sE - A)}{\det(sE - A)}B \tag{2.46}$$

prenosna matrica singularnog sistema sa svojim karakterističnim polinomom:

$$f_E(s) = \det(sE - A) \tag{2.47}$$

Matricu prenosnih funkcija mogu da oforme samo *regularni singularni sistemi*, tj. samo oni kod kojih je $\det(sE - A) \neq 0$, za neko $s \in \mathbf{C}$.

Ukoliko je *singularni sistem iregularan*, odnosno kada je $\det(sE - A) \equiv 0$, $\forall s$, on nema matricu prenosnih funkcija, ali to još ne znači da on ne može da ostvari odgovarajuće dinamičko ponašanje.

Štaviše, to je moguće, pri čemu se njegovo *ulazno-izlazno ponašanje* karakteriše sledećom relacijom:

$$R(s)\mathbf{X}_i(s) = Q(s)\mathbf{U}(s) \tag{2.48}$$

gde su $R(s)$ i $Q(s)$ polinomi.

O ovoj klasi singularnih sistema može se daleko više naći u radovima *Dziurla*, *Newcomb* (1987.b) i *Dai* (1989.a), u kojima su prezentovane i njihove odgovarajuće fizičke realizacije.

Brojni postupci za izračunavanje matrice prenosnih funkcija linearnog singularnog sistema, iscrpno su dati u lit. *Debeljković et al.* (2005.b).

Impulsno ponašanje

Osobina rešivosti razmatranog singularnog sistema jednačina direktno zavisi od matrica E i A. Ukoliko postoji jedinstveno rešenje, ono će se dobiti uz korišćenje odgovarajućih početnih uslova. Izbor početnih uslova određuje pojavu eksponencijalnih ili impulsnih modova.

U praksi se naravno teži eksponencijalnim modovima koji garantuju tzv. "glatka rešenja" bez pikova, odnosno impulsa, a za početne uslove koji generišu "glatka" rešenja kaže se da su konzistentni (saglasni).

Impulsno kretanje singularnih sistema se može javiti i u slobodnom radnom režimu, kada su dozvoljeni proizvoljni početni uslovi.

U nastavku će se izložiti postupak za ispitivanje singularnih sistema u pogledu broja eksponencijalnih i impulsnih modova u izrazu za kretanje singularnog sistema.

Izlaganje koje sledi prvenstveno se oslanja na rad *Verghese et al.* (1981) i delimično na rad *Campbell* (1980).

U ovim razmatranjima polazi se od standardnog opisa singularnog sistema:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \tag{2.49}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = C\mathbf{x}(t), \quad t \geq 0, \tag{2.50}$$

gde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^p$, uz $m < n$ i odgovarajućim dimenzijama pratećih matrica.

Ako je $E\mathbf{x}(0^-)$ poznato, kao i $\mathbf{u}(t)$ za $t \geq 0$, sistem dat jed. (2.49 – 2.50) može se prevesti u kompleksni domen:

$$\mathbf{X}(s) = (sE - A)^{-1}\left(E\mathbf{x}(0^-) + B\mathbf{U}(s)\right) \tag{2.51}$$

$$\mathbf{X}_i(s) = C\,\mathbf{X}(s) \tag{2.52}$$

pod pretpostavkom da je matrični par $(A,\ E)$ regularan.

Pri nultim početnim uslovima, $E\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{0}$, može se oformiti i odgovarajuća matrica prenosnih funkcija *regularnog singularnog sistema*:

$$W(s) = C\ (sE - A)^{-1} B. \tag{2.53}$$

Kada je reč o tzv. “*normalnim*” sistemima, odnosno kada je $E = I$, neosporne su sledeće činjenice.

(**i**) Poznavanje početnih uslova $E\mathbf{x}\left(0^-\right) = \mathbf{x}_0$, potrebno je i dovoljno za određivanje rešenja $\mathbf{x}\left(t\right)$, $t \geq 0$, kada je poznato $\mathbf{u}\left(t\right)$ za $t \geq 0$.

Tada n-dimenzionalni vektor početnog stanja može da ima n nezavisnih vrednosti.

U tom smislu, sistem dat jed. (9.11) ima *n stepeni slobode*, a broj n označava njegov *red*, odnosno *dimenziju*.

(**ii**) Matrica prenosnih funkcija je *striktno svojstvena*, što znači da zadovoljava uslov:

$$\lim_{s \to \infty} W\left(s\right) \to 0 \tag{2.54}$$

(**iii**) Odziv sistema u slobodnom radnom režimu sastoji se od linearne kombinacije eksponencijalnih modova pri tzv. prirodnim ili karakterističnim frekvencijama određenih oblikom, strukturom i položajem korenova karakteristične jednačine $\det\left(sI - A\right) = 0$.

Kada je sistem jed. (2.49) singularan, tj. $\det E = 0$, može se konstatovati sledeće, a kao poređenje sa prethodno iznetim.

(***i***)$_E$ Broj stepeni slobode sistema, odnosno broj nezavisnih vrednosti koje početni vektor $E\mathbf{x}\left(0^-\right)$ može da uzme, redukovan je na:

$$q = \operatorname{rang} E < n, \tag{2.55}$$

pa je broj *stepeni slobode* manji od reda sistema.

(***ii***)$_E$ Matrica prenosnih funkcija $W\left(s\right)$ ne mora više da bude striktno svojsvena i obično se može predstaviti u vidu dva sabirka, od kojih prvi ima tu osobinu, a drugi odgovara nekom polinomu po s.

(***iii***)$_E$ Za slučaj kada je $\det E = 0$, može se definisati stepen karakterističnog polinoma matričnog para $\left(A,\ E\right)$, kao:

$$\deg\ \det\left(sE - A\right) = r \leq q < n \tag{2.56}$$

U ovom slučaju, odziv sistema u slobodnom radnom režimu sadrži, kao i u analognom slučaju, eksponencijalne modove na r konačnih učestanosti, ali takođe i ($q - r$) impulsnih članova ili ($q - r$) modova “*beskonačne učestanosti*”.

Da bi se pokazalo postojanje impulsa u rešenju singularnog sistema diferencijalnih jednačina, jed. (2.44) dekomponovaće se prostor stanja $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ u dva potprostora, tako da $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, pri $\dim \mathcal{X}_1 = n_1$.

Na ovaj način, dolazi se do *Weierstrass*-ove *kanoničke forme*:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = J\,\mathbf{x}_1(t) + B_1\mathbf{u}(t) \tag{2.57}$$

$$N\,\dot{\mathbf{x}}_2(t) = I\,\mathbf{x}_2(t) + B_2\mathbf{u}(t) \tag{2.58}$$

pri čemu su: $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$,[†] $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, J je *Jordan*-ov, a N je nilpotentni matrični blok, indeksa nilpotentnosti ν.

Podsistem dat jed. (2.57) je po *Cobb*-u (1983) "spor", jer u osnovi odgovara po formi "*normalnom*" sistemu i ima svoju usporenu dinamiku ograničene učestanosti.

Podsistem dat jed. (2.58) je po *Cobb*-u "brz" jer sadrži nedinamička ograničenja i neograničene je učestanosti, što se posebno vidi iz *rešenja* singularnog sistema jednačina:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{Jt}\mathbf{x}_1(0) + \int_{t_0}^{t} e^{J(t-\tau)} B_1\mathbf{u}(\tau)\,d\tau, \tag{2.59}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = -\sum_{i=1}^{\nu-1} \delta^{(i-1)}(t)\,N^i\mathbf{x}_2(0) - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2\mathbf{u}^{(i)}(t), \tag{2.60}$$

gde $\mathbf{u}(t)^{(i)}(t)$ predstavlja i-ti izvod funkcije $\mathbf{u}(t)$, a $\delta^{(i-1)}$, $(i-1)$ izvod impulsne funkcije.

Impulsi u jed. (2.60) određeni su strukturom matrice $N = diag\{N_1,\ N_2,\ \ldots\ N_k\}$

U stvari, svaki $k \times k$ ($k > 1$) nilpotentni blok ima $k - 1$ stepeni slobode i određuje $k - 1$ nezavisnih impulsnih kretanja u slobodnom radnom režimu.

Takođe je očigledno da su trivijalni (1×1) nilpotentni blokovi predstavljeni samo nedinamičkim algebarskim ograničenjima.

Stoga se singularni sistemi sastoje iz *dinamičkog dela* i *nedinamičkih ograničenja*.

Dinamika sistema se sastoji od *eksponencijalnog* i *impulsnog* ponašanja.

I konačno, od posebne važnosti je pokazati u kakvom odnosu stoje pitanja *regularnosti* singularnih sistema i njihovih produženih početnih uslova.

Naime, ako se singularni sistem, prikaže u svojoj *normalnoj kanoničkoj formi*:[†]

[†] $n_1 = \deg ree\ \det(sE - A)$ |.

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t), \tag{2.61}$$

onda je *uslov regularnosti* dat jed. (2.24 – 2.25).

Ključnu ulogu po tom pitanju ima tada, očigledno, submatrica A_4, odnosno ukoliko je submatrica A_4 *regularna* i singularni sistem je *regularan*. Ovo je uobičajena pretpostavka kako bi bio ispunjen uslov regularnosti, što povlači postojanje i jedinstvenosti rešenja.

Štaviše, ova pretpostavka garantuje da neće biti ni impulsnih članova u kretanju sistema za proizvoljne početne uslove, s obzirom na činjenicu da se tada singularni sistem redukuje na “normalni” nešto nižeg reda.‡

Nasuprot tome, može se pokazati da ukoliko je A_4 singularna, onda sistem, ako je rešiv, poseduje impulse u svom kretanju u slobodnom radnom režimu, a za posebno izabrane početne uslove, *Verghese* (1981).

Jasno razgraničenje koji uslovi vode u eksponencijalno ili impulsno rešenje, najbolje se može sagledati ako se razmatrani singularni sistem prvo prevede u svoju *SVD kanoničku formu*, a zatim podvrgne preispitivanju postojećih modova, *Bender*, *Laub* (1987.b).

Kao što je već ranije bilo rečeno, singularni sistem sadrži tri vrste modova: *dinamičke konačne*, *dinamičke beskonačne* i *nedinamičke beskonačne*.

Dinamički beskonačni modovi generišu impulsno ponašanje singularnog sistema, koje je nepoželjno.

Samim tim, postavlja se pitanje kako ih prvo *identifikovati*, a zatim, po mogućstvu minimizirati ili potpuno ukloniti. Izlaganja koja slede baviće se samo prvim pitanjem.

Uticaj *beskonačnih modova* na dinamičko ponašanje sistema može se relativno lako sagledati preko tzv. *beskonačnih generalisanih sopstvenih vektora* matričnog para (sE – A).

Oni se definišu kao *sopstvene vrednosti*, pri $\lambda = 0$ matričnog para ($E - \lambda A$), *Bender*, *Laub* (1987.b).

† Videti *Debeljković et al*. (2005.b), str.28.

‡ Tada je moguće rešiti algebarski sistem jednaèina po $\mathbf{x}_2(t)$.

Definicija 2.1. *Beskonačni generalisani sopstveni vektori.*

(i) Beskonačni generalisani sopstveni vektori matričnog para ($sE - A$), *stepena* 1, zadovoljavaju:

$$E\mathbf{v}_i^1 = \mathbf{0} \tag{2.62}$$

(ii) Beskonačni generalisani sopstveni vektori matričnog para ($sE - A$), *stepena* k ($k \geq 2$), koji odgovaraju i-tom beskonačnom generalisanom sopstvenom vektoru *stepena* 1, zadovoljavaju:

$$E\mathbf{v}_i^{k+1} = A\mathbf{v}_i^k \tag{2.63}$$

Sada se mogu dati sledeći rezultati.

Lema 2.1.

(i) Postoji ($n - \pi$)[†] *nezavisnih* beskonačnih generalisanih sopstvenih vektora *stepena* 1 matričnog para ($sE - A$), u oznaci: $\mathbf{v}_1^1,\ \mathbf{v}_2^1,\ \ldots\ \mathbf{v}_{(n-\pi)}^1$.

(ii) Ako je:

$$\deg\det\left(sE - A\right) = r \tag{2.64}$$

tada postoji nezavisan skup od ($\pi - r$) nezavisnih beskonačnih sopstvenih vektora *stepena* k ($k \geq 2$) matričnog para ($sE - A$), u oznaci: $\mathbf{v}_1^2,\ \mathbf{v}_1^3, \ldots, \mathbf{v}_1^{n_1},\ \ \mathbf{v}_2^2,\ \mathbf{v}_2^3, \ldots\ \mathbf{v}_2^{n_2},$ $\mathbf{v}_\mu^2,\ \mathbf{v}_\mu^3, \ldots\ \mathbf{v}_\mu^{n_\mu}$, gde je indeks $\mu \leq (n - \pi)$.

Štaviše, tada postoji i $n \times (n - r)$ matrica V oformljena od kolona vektora $\mathbf{v}_i^j$ kao i ($n - r) \times (n - r$) *Jordan*-ova forma nilpotentne matrice N koje zadovoljavaju:

$$EV = AVN \tag{2.65}$$

(iii) Postoji i ($n \times r$) matrica W sa linearno nezavisnim kolonama, kao i ($r \times r$) *Jordan*-ova forma matrice Λ koje zadovoljavaju:

$$AW = EW\Lambda \tag{2.66}$$

Dokaz, zbog svoje složenosti, prevazilazi okvire ovih izlaganja i može se naći u *Lewis*, *Ozcaldrian* (1984).

[†] π – broj *singularnih vrednosti* matrice E, različitih od nule.

Na osnovu prethodne *Leme* mogu se izvući sledeći zaključci:

- Kolone matrice V razapinju *sopstveni prostor*[†] matrice ($sE - A$), koji odgovara *beskonačnim sopstvenim vrenostima*, tj. taj prostor odgovara *sopstvenim vrednostima* matričnog para (E, A) za $\lambda = 0$.
- Kolone matrice W razapinju sopstveni prostor matrice ($sE - A$) koji odgovara konačnim sopstvenim vrednostima matričnog para (E, A). Ove konačne sopstvene vrednosti su dijagonalni elementi matrice Λ.

Definicija 2.1. – *Dinamički i nedinamički modovi*

(i) Beskonačni generalisani sopstveni vektori matričnog para ($sE - A$) *stepena* **1**, razapinju prostor *nedinamičkih rešenja* singularnog sistema jednačina; odgovarajuće beskonačne sopstvene vrednosti matrice ($sE - A$) su nedinamički modovi razmatranog singularnog sistema, datog jed. (2.49).

(ii) Beskonačni generalisani sopstveni vektori matričnog para ($sE - A$), *stepena* k ($k \geq 2$), razapinju prostor *impulsivnih* rešenja sistema, datog jed. (2.49); odgovarajuće beskonačne sopstvene vrednosti matrice ($sE - A$) su *dinamički modovi u beskonačnosti* ili *impulsni modovi* sistema, datog jed. (2.49).

(iii) Matrica W razapinje prostor *kauzalnih* ili tzv. *rešenja konačnih učestanosti* sistema, datog jed. (2.49); dijagonalni elementi matrice Λ su *konačni dinamički modovi* sistema, datog jed. (2.49).

[†] Na engleskom jeziku: *eigenspace*.

Neka je $\mathcal{X}^c$ linearni vektorski prostor definisan nad poljem kompleksnih brojeva.

Neka $\mathcal{A}: \mathcal{X}^c \to \mathcal{X}^c$ predstavlja datu linearnu transformaciju.

Tada skup svih vektora $\mathbf{x}_j$, koji zadovoljavaju $\mathcal{A}(\mathbf{x}_i) = \lambda_i \mathbf{x}_i$, za poseban izbor λ_i, zove se sopstveni prostor λ_i.

Sopstveni prostor se sastoji od svih sopstvenih vektora pridruženih svim sopstvenim vrednostima, uključujući i nulti vektor.

Sopstveni prostor je potprostor prostora $\mathcal{X}^c$.

Nedinamički modovi su beskonačne sopstvene vrednosti matrice ($sE - A$) pridruženi pravcima deskriptivnog vektora u kojima postoji čisto algebarska zavisnost između promenljivih stanja (deskriptivnog vektora stanja), vektora ulaza i vektora izlaza.

Prostor nedinamičkih rešenja razapinje nulti prostor matrice E.

Dinamički modovi u beskonačnosti su beskonačne sopstvene vrednosti matrice ($sE - A$) pridruženi pravcima u kojima deskriptivni vektor može da poprimi *impulsno ponašanje* zahvaljujući odgovarajućem početnom uslovu pri nultoj vrednosti ulazne veličine.

Imajući u vidu prethodne činjenice i *Lemu* 2.1 mogu se dati sledeći rezultati koji objedinjuju sva prethodna razmatranja.

Lema 2.2. Neka je matrični par (E, A) *regularan*.

Tada:

(i) Sve beskonačne sopstvene vrednosti regularnog matričnog para ($sE - A$), koje nisu pridružene dinamičkim modovima beskonačne učestanosti, su pridružene nedinamičkim modovima.

(ii) Broj (konačnih i beskonačnih) dinamičkih modova sistema, datog jed. (2.49) *jednak je rangu matrice E*.

(iii) Broj konačnih *nedinamičkih modova* sistema, datog jed. (2.49) *jednak je* ($n - q$).

Lema 2.3. Pretpostavimo da je sistem, dat jed. (2.49), preveden na svoju *SVD kanoničku formu*.

Tada, ako je A_{22} *nesingularna* matrica, važi:

(i) Matrični par (E, A) je *regularan*.

(ii) Sistem, dat jed. (9.11), ne poseduje *impulsne modove*.

Dokaz. Na osnovu izraza za determinantu blokovskih matrica[†], a pod pretpostavkom da postoji A_{22}^{-1}, važi:

$$\begin{aligned}\det\left(sE-A\right) &= \det\begin{pmatrix} s\Sigma^2-A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22}\end{pmatrix} \\ &= \det\left(-A_{22}\right)\det\left(\left(s\Sigma^2-A_{11}\right)-\left(A_{12}-A_{22}^{-1}A_{21}\right)\right),\end{aligned} \tag{2.67}$$

čime je dokaz završen.

Literatura

Applevich, J. D., *Implicit linear systems*, Springer Verlag, Berlin, 1991.

Bajić, V. B., *Lyapunov's direct method in the analysis of singular systems and networks,* Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.a.

Bender, D. J., A. J. Laub, "The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems", *IEEE Proc. on CDC*, Ft. Lauderdale, Fl, (1985) 957-962.

Bender, D. J., A. J. Laub, "The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-32** (8) (1987.b) 672-688.

Bernhard, P.,"On Singular Implicit Linear Dynamical Systems", SIAM J. Control and Optim., **20** (5) (1982) 612-633.

Blanchini, F., "Computation of the Transfer Function for Singular Systems", *Int. J. System Sci.*, **21** (2) (1990) 407-414.

Buzurović, I. M., D. Lj. Debeljković, *Geometrijski prilaz dinamičkom ponašanju posebnih klasa linearnih singularnih sistema sa primenom u medicini,* Mašinski fakultet, Beograd, 2009.

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations,* Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations II,* Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

Christodolou, M. A.,"Recent results in realization theory for singular systems", *Proc. Int. Symp. Singular Systems*, Atlanta, GA, **1** (1987) 25-28.

[†] Videti *Debeljković et al*. (1996.a), str. 165.

Cobb, D., “On the Solution of Linear Differential Equations with Singular Coefficients”, *J. Differential Equations,* **46** (1982) 310-323.

Dai, L., “The difference between regularity and irregularity in singular systems”, *Circ. Syst. Sig. proc.*, **8** (4) (1989.a) 435-444.

Dai. L., *Singular control systems*, Springer Verlag, Berlin, 1989.b.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Application of singular systems theory in chemical engineering,* MAPRET Lecture- Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Praha, Czech Republic 1996.a.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A. Jacić, *Diskretni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

Debeljković, D. Lj., Lj. A. Jacić, M. S. Medenica, *Sistemi sa kašnjenjem*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.a.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.b.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A. Jacić, *Diskretni deskriptivni sistemi*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.c.

Debeljković, D. Lj., N. S. Višnjić, *Linearni singuarni sistemi: Metode podešavanja polova i projektovanje observera,* Mašinski fakultet, Beograd, 2006.

Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, *Dinamika kontinualnih linearnih singularnih sistema- Geometrijski prilaz*, Mašinski fakultet, Beograd, 2007.

Dervisoglu, A., C. A. Desoer, “Degenerate networks and minimal differential equations”, *IEEE Trans. Circuits and Systems,* **CAS-22** (10) (1975) 769-775.

Dziurla, B., R. W. Newcomb, “Nonregular semistate systems: examples and input-output pairing”, *IEEE Proc. on CDC*, Los Angeles, CA (1987) 1125-1126.

Fettweis, A., “On the algebraic derivation of the state equations”, *IEEE Trans. Circuit Theory,* **CT-16** (2) (1969) 171-175.

Gantmacher, F. R., *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, USA, Vol. I, 1977.

Gantmacher, F. R., *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, USA, Vol. II, 1977.

Kucera, V., "Recent results on singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA, **I** (1987) 5-9.

Lewis, F. L., "A survey of linear singular systems", *Circ. Syst. Sig. Proc.,* **5** (1) (1986.a) 3-36.

Lewis, F. L., "Recent work in singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA, (1987.a.) 20-24.

Luenberger, D. G., "Dynamic equations in descriptor form", *IEEE Trans. Automat. Cont.,* **AC-22** (3) (1977) 312-321.

Luenberger, D. G., "Time-invariant descriptor systems", *Automatica,* **14** (1987) 473-480.

Luenberger, D. G., "Nonlinear descriptor systems", *J. Econom. Dynam. Control,* **1** (1979) 219-242.

Malabre, M., "A structural approach for linear singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA (1987.a) 34-37.

Malabre, M., "More geometry about singular systems", *IEEE Proc. on CDC,* Los Angeles, CA, (1987.b) 1138-1139.

Malabre, M., "Geometric algorithm and structural invariants for linear singular systems", *Proc. 12th IMACS World Congr.,* Paris (1988) 181-183.

Malabre, M., "On infinite zeros for generalized linear systems", *Proc. MTNS,* Amsterdam, **1** (1989.a) 271-278.

Malabre, M., "Generalized linear systems: geometric and structural approaches", *Linear Algebra Applic.*, (1989.b) 591-621.

Mertzios, B. G., "Recent work in singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.,* Atlanta, GA (1987) 14-17.

Ozcaldrian, K., *Control of descriptor systems*, Ph.D. Thesis, School of Elec. Eng., Georgia Inst. Techn., Atlanta, GA, USA, 1985.

Ozcaldrian, K., "Geometric notes on descriptor systems", *IEEE Proc. on CDC*, Los Angeles, CA (1987.b) 1134-1137.

Rodriguez, J., D. Sweet, "A characterization of semistate systems", *Circ. Syst. Sig. Proc.,* **5** (1) (1986) 125-138.

Schumacher, J. M., “Algebraic characterization of almost invariance”, *Int. J. Control,* **38** (1983) 107-124.

Sincovec, R. F., A. M. Erisman, E.L. Yip, M. A. Epton, “Analisys of descriptor systems using numerical algorithms”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (1) (1981) 139-147.

Sincovec, R. F., E.L. Yip, M. A. Epton, J. W. Manke, A. M. Erisman, B. Dembart, P. Lu, “Solvability of large-scale descriptor systems”, *NTIS*, Springfield, VA (1979) CONF-790904-P2.

Van Dooren, P., “The computation of Kronecker’s canonical form of singular pencil”, *Linear Algebra and Appl.* , **27** (1979.b) 103-140.

Van Dooren, P. M., “The generalized eigenstructure problem in the linear system theory”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (1) (1981.a) 111-129.

Verghese, G. C., “Further notes on singular descriptions”, *Proc. JAAC*, Charlottesville, VA (1981) TA-4B.

Verghese, G. C., T. Kailath, “Impulsive behavior in dynamical systems; structure and significance”, *Proc. MTNS*, Delft (1979.a) 162-168.

Verghese, G. C., B. C. Levy, T. Kailath, “A generalized state-space for singular systems”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (4) (1981) 811-831.

Yip, E. L., J. W. Manke, *Solvability of large-scale descriptor systems,* Boeing Comp. Services Co., Topical Report, 1987.

Willems, J. C., “Almost A (mod-B) - invariant subspaces”, *Asterisque*, **75-76**, (1980) 239-248.

Willems, J. C., “Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design- Part I: Almost controlled invariant subspaces”, *IEEE Tras. Automat. Cont.*, **AC-26** (1) (1981) 235-252.

Willems, J. C., “Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design- Part II: Almost conditionally invariant subspaces”, *IEEE Tras. Automat. Cont.*, **AC-27** (5) (1982) 1071-1084.

Wolovich, W. A., *Linear Multivariable Systems*, Springer-Verlag, New York, 1974.

Wonham, W. M., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer-Verlag, New York, 1974.

3. DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI

3.1 Uvodna razmatranja

Kao i za ostale klase sistema, tako je i za diskretne singularne sisteme od najveće važnosti ispitati njihovo dinamičko ponašanje u različitim uslovima njihovog rada.

U tom smislu, obično se podrazumeva primena standardne teorije i koncepata koji treba da posluže utvrđivanju njihovih inherentnih osobina kao što su: stabilnost, upravljivost, osmotrivost, dostižljivost, optimalnost, osetljivost, robusnost, itd.

Zbog mnogih specifičnosti o kojima je već bilo reči kao i zbog činjenice da je u matematičkom smislu njihovo ponašanje iskazano sistemom algebro-diferencnih jednačina, treba stalno imati na umu niz novih, dodatnih problema koji neminovno prate njihovu analizu i, sledstveno, mogućnosti sinteze.

Bez posebne želje da se na ovom mestu detaljno obrazlažu ta pitanja, nije na odmet samo ih napomenuti.

U tom smislu, od posebnog su značaja razmatranja koja se odnose na postojanje i jedinstvenost rešenja, egzistenciju takvih početnih uslova koji generišu kauzalna rešenja, mogućnosti formalnog matematičkog opisa onih singularnih sistema koji ne mogu da oforme matricu prenosnih funkcija, tretmana slučajeva kada se matrica E javlja kao pravougaona, kao i evidentnih pristupa regularizacije, kao svojevrsnog postupka globalnog svođenja singularnih sistema na obične (normalne).

Kada se svemu tome doda i činjenica da proučavanje osobina matričnog para (E, A) omogućava duboko sagledavanje singularnih sistema sa geometrijskog stanovišta, onda postaje sasvim jasna činjenica zašto je njihovo izučavanje pobudilo pažnju izuzetno velikog broja naučnika.

To interesovanje proizvelo je impozantan broj radova, od kojih je većina najznačajnijih navedena u priloženom spisku referenci.

Imajući u vidu tematiku ovog rada, izostavlja se pregled doprinosa citiranih autora i njihovih radova na polju osnovnih, globalnih koncepata ispitivanja dinamičkih osobina sistema, jasno za tematiku analize dinamičkog ponašanja, robusnosti stabilnosti, same stabilnosti i stabilizacije posebnih klasa linearnih vremenski diskretnih deskriptivnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Da bi izlaganja koja slede postigla svoj željeni cilj, neophodno je odrediti klasu deskriptivnih sistema i klasu ulaznih signala koji će biti predmet ovih razmatranja.

U tom smislu, posmatraće se vremenski diskretni deskriptivni stacionarni linearni sistemi, bilo u slobodnom:

$$\begin{gathered} E\,\mathbf{x}(k+1)=A\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0\,, \\ \mathbf{x}_i(k)=C\,\mathbf{x}(k), \end{gathered} \tag{3.1}$$

bilo u prinudnom radnom režimu:

$$\begin{gathered} E\,\mathbf{x}(k+1)=A\mathbf{x}(k)+B\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}^*(0)=\mathbf{x}_0^*\,, \\ \mathbf{x}_i(k)=C\,\mathbf{x}(k)+D\mathbf{u}(k) \end{gathered} \tag{3.2}$$

sa matricom $E\in\mathbb{C}^{n\times n}$ obavezno singularnom i ostalim matricama: $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{C}^{p\times n}$ i $D\in\mathbb{C}^{p\times m}$, u opštem slučaju. U velikoj većini slučajeva elementi pomenutih matrica pripadaće skupu *realnih brojeva*.

Kada su u pitanju jed. (3.1) i jed. (3.2) treba odmah naglasiti da, u opštem slučaju, početni uslovi za slobodni i prinudni radni režim *ne moraju* da budu isti.

Ispitivanje dinamičkih osobina singularnih sistema odnosiće se *isključivo* na prisustvo samo *determinističkih signala* na njihovim ulazima.

Na kraju valja istaći da u metodološkom smislu postoje tri osnovna načina za ispitivanje dinamičkog ponašanja i osobina singularnih sistema, a to su: *analitički*, *numerički* i *kvalitativni*.

3.2 Rešivost linearnih singularnih diferencnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

Sva osnovna pitanja i specifičnosti osobina rešivosti[†] linearnih *kontinualnih* singularnih *diferencijalnih* jednačina detaljno su razmotrena i izložena u prethodnoj

[†] Na engleskom jeziku: *solvability*

glavi. Ovo je važno odmah naglasiti s obzirom na nespornu činjenicu da između tih rezultata postoji čista analogija i da su oni za kontinualne sisteme bili i prvi u hronološkom redu nastajanja.

Osnovna pitanja *rešivosti* singularnih sistema svakako su prvi dotakli *Godbout*, *Jordan* (1975), a uspešno matematički rešili *Campbell et al*. (1976).

Polazeći od diskretnog modela singularnog sistema, *Luenberger* (1977, 1978) je pored dobro poznatog testa rešivosti, tzv. "shuffle" algoritma, dao i izvanredno tumačenje ove osobine, povezujući je sa ne manje važnom osobinom *uslovljivosti*‡ sistema, istovremeno ukazujući da je reč o *dualnim konceptima*.

Za ova razmatranja vraćamo se na singularni sistem diskretnih jednačina, već ranije opisan na više mesta, a ovde dat kao:

$$E_{k+1}\mathbf{x}(k+1) = A_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k), \quad k = 0,1,2,\ldots N-1 \tag{3.3}$$

ili u blokovskoj formi:

$$\begin{pmatrix} -A_0 & E_1 & & & \\ 0 & -A_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & E_{N-1} & 0 \\ & & & 0 & -A_{N-1} & E_N \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(N-1) \\ \mathbf{x}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

sa već ranije objašnjenim označavanjem.

Jed. (3.4) sadrži $(N+1)$ nepoznatih vektora $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, mada postoji *samo N* matričnih jednačina istih dimenzionalnosti *n*.

Prema tome, postoji višak nepoznatih u odnosu na postojeći broj jednačina, pa se samim tim postavlja pitanje postojanja uslova koji obezbeđuju moguće rešenje.

S druge strane, ti isti uslovi mogli bi da diktiraju dekompoziciju dinamičkog modela u dva dela: dinamički i čisto statički deo, čime bi se omogućilo rekurzivno izračunavanje traženog rešenja† pri poznatoj sekvenci $\mathbf{u}(k)$.

Kako je to uobičajeno, blokovska matrica u jed. (3.4) se može označiti sa *F* (0, *N*).

---

‡ Na engleskom jeziku: *conditionability*

† Sistemi koji zadovoljavaju ove uslove nazivaju se *regularnim*.

Njene dimenzije su $N \times (N+1)$ ili, uvažavajući dimenzionalnost vektora stanja, $nN \times n(N+1)$.

Blokovska matrica $F\ (0,\ N)$ uobičajeno se zove *koeficijentnom* matricom i tada se može dati sledeća definicija, *Luenberger* (1977):

Definicija 3.1 Linearni, diskretni, dinamički singularni sistem jednačina, jed. (3.3), je *rešiv* ako je njegova koeficijentna matrica $F\ (0,\ N)$ *punog ranga*.

Sistemu jednačina, datom sa jed. (3.4), može se pridružiti i tzv. "*uslovna*" matrica tipa:

$$G(0,\ N) = \begin{pmatrix} E_1 & & & & \\ -A_1 & E_2 & & & \\ & -A_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & E_{N-1} \\ & & & & -A_{N-1} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

koja, očigledno, predstavlja submatricu matrice $F\ (0,\ N)$, oformljenu eliminacijom prvih n i poslednjih n kolona koeficijentne matrice.

Kao drugi test rešivosti može se sada dati sledeća *Definicija*.

Definicija 3.2 Linearni, diskretni, dinamički singularni sistem jednačina, jed. (3.4), je *uslovljiv* ako je njegova uslovna matrica $G\ (0,\ N)$ nultog ranga.

Imajući u vidu kako je formirana uslovna matrica, jasno je da su prethodnim definicijama iskazana dva dualna koncepta.

U tom smislu, ako je subdualni sistem:

$$E_k^T \mathbf{q}(k-1) = A_k^T \mathbf{q}(k) + \mathbf{v}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots N-1 \tag{3.6}$$

važe sledeći rezultati, *Luenberger* (1977):

Teorema 3.1 Sistem dinamičkih jednačina je *uslovljiv* ako i samo ako je njegov subdualni sistem *rešiv*.

Teorema 3.2. Sistem dinamičkih jednačina je *rešiv* ako i samo ako je njegov subdualni sistem *uslovljiv*.

Ovde se ovaj koncept izlagao samo kao alternativni test rešivosti singularnog sistema diferencnih jednačina. Kako jed. (3.4) odgovara nestacionarnom sistemu jednačina, u citiranim radovima je pokazano da isti zaključci važe i da se bez ograničenja proširuju i na stacionarne diskretne singularne sisteme, opisane svojom jednačinom stanja:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \quad k = 0,1,2, \dots N-1 \tag{3.7}$$

Kao najvažniji rezultat prethodnih razmatranja, proističe sledeća teorema, *Luenberger* (1977):

Teorema 3.3 Sistem dat jed. (3.3) je *rešiv* ako i samo ako $\det(A - zE)$ [†] nije identički jednaka nuli.

Jasno, ako je uslov *Teoreme* 3.3 zadovoljen, za matrični par $(E,\ A)$ je r*egularan*.

I konačno, navodi se rezultat koji objedinjuje *Teoreme* 3.1 i 3.2.

Teorema 3.4 Sistem dat jed. (3.3) je *rešiv* ako i samo ako je uslovljiv, *Luenberger* (1977).

Da bi se ova razmatranja stavila u rigoroznu matematičku formu, navode se sledeći značajni rezultati, *Campbell* (1980), koji još više potvrđuju i afirmišu prethodna izlaganja.

Definicija 3.3 Neka matrice $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $k_0 \in \mathbb{R}$.

Vektor $\mathbf{x}(k_0) \in \mathbb{R}^n$ naziva se *konzistentni početni vektor* pridružen trenutku k_0, ako jed. (11.5) ima najmanje *jedno rešenje*.

[†] z – kompleksan broj Z transformacije, $z \in \mathbb{C}$.

Definicija 3.4 Jedn. (3.3) je *traktabilna* ako ima *jedinstveno rešenje* za svaki konzistentni početni vektor.

Ako je linearna homogena jed. (3.3) traktabilna bar u jednom trenutku $k_0 \in \mathbb{R}$, onda je ona traktabilna u svakom trenutku $k \in \mathbb{R}$, pa se jednostavno kaže da je *traktabilna.*

Teorema 3.5 Za E, A $\in \mathbb{C}^{n \times n}$, homogena algebro-diferencna jed. (3.5) je *traktabilna* ako i samo ako postoji skalar $z \in$ **C**, takav da postoji $\left(A - zE\right)^{-1}$.

Dokaz ove kao i svih drugih, ovde prezentovanih, *Teorema* može se naći u izvornom radu ili u *Debeljković et al*. (1996.a).

Naime, Campbell *et al*. (1976), su izveli sledeći rezultat:

Stav 3.1 Ako je matrični par $\left(zE + A\right)$ *regularan*, onda je:

$$\aleph\left(E\right) \cap \aleph\left(A\right) = \left\{ \mathbf{0} \right\} \tag{3.8}$$

Međutim, ispunjenje uslova datog jed. (3.8) nije dovoljno da garantuje regularnost matričnog para $\left(zE + A\right)$ za neko z, $z \in$ **C**.

Debeljković, *Owens* (1985) pokazali su sledeći rezultat:

Stav 3.2 Ako je matrični par $\left(zE + A\right)$ regularan, $z \in$ **C**, tada je:

$$\mathcal{W}_d \cap \aleph\left(E\right) = \left\{ \mathbf{0} \right\} \tag{3.9}$$

gde je $\mathcal{W}_d$ potprostor konzistentnih početnih uslova deskriptivnog sitema.

Kao i u prethodnom stavu, obrnuto ne mora da važi.

3.3 Konzistentni početni uslovi diskretnih deskriptivnih sistema

Dobro je poznato da se rešenje "*normalnog*" sistema jednačina može odrediti, kako u slobodnom, tako i u prinudnom radnom režimu, za proizvoljne početne uslove. Međutim, klasa sistema opisana implicitnim diferencnim jednačinama, koja se u posebnom slučaju transformiše u singularne sisteme, susreće se sa ovim problemom u znatnoj meri.

Očigledno je da zbog implicitnog karaktera tih jednačina u odnosu na $\dot{\mathbf{x}}(t)$ i činjenice da su pored diferencijalnih, prisutne i algebarske jednačine, *svi mogući početni uslovi nisu prihvatljivi*. Prema *Bajić-u* (1992.a), oni početni uslovi koji su prihvatljivi, nazivaju se *konzistentnim*.

Kada su u pitanju *kontinualni* singularni sistemi, *konzistentni početni uslovi* imaju višestruki značaj. Naime, ako je takav sistem *regularan*, onda se njegovo rešenje može dobiti u *zatvorenom obliku* i ono je *jedinstveno*.

Štaviše, ako je vektor početnog stanja izabran iz skupa *konzistentnih početnih uslova*, tada je rešenje "*glatko*" i ne sadrži impulsne članove.

Potprostor konzistentnih početnih uslova, u oznaci $\mathcal{W}_k$, prvi je definisao i pokazao kako se određuje *Campbell et al.* (1976).

Koristeći geometrijski prilaz, *Bernhard* (1982), *Ozcaldrian* (1985), *Owens*, *Debeljković* (1985) izveli su niz sličnih rezultata koji, polazeći od bazičnih matrica, u rekurzivnoj formi i bez potrebe korišćenja Drazinove inverzije, generišu potprostor konzistentnih početnih uslova.

Za singularni (deskriptivni) sistem dat u normalno-kanoničkoj formi, algebarski deo u potpunosti definiše taj prostor.

O ostalim detaljima i mogućnostima konkretnog određivanja potprostora konzistentnih početnih uslova za *kontinualne sisteme*, zainteresovani čitalac se upućuje na lit. *Debeljković et al.* (2005.b).

Kada su u pitanju *diskretni deskriptivni* sistemi, kao što je već ranije bilo rečeno, postojanje "glatkih" rešenja praktično nema smisla, ali ideja o *konzistentnim početnim uslovima* koji generišu rešenje sistema jednačina u vidu sekvence ($\mathbf{x}(k)$: $k \geq 0$) ima svoj potpuni fizički smisao. Samim tim, ovaj problem postaje nešto složeniji nego kod kontinualnih sistema, pa ga je potrebno detaljno razmotriti.

Neka je *diskretni deskriptivni* sistem, dat svojom jednačinom stanja:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \quad k = 0,1,2,\ldots N-1 \tag{3.10}$$

regularan, tj. $\det(zE - A) \neq 0$.

U tom slučaju, sekvenca rešenja $\mathbf{x}(k)$ postoji za sve date sekvence ulaznog signala $\mathbf{u}(k)$. Prirodni broj N određen je posmatranim vremenskim intervalom, *Luenberger* (1977).

Kada je matrica E *nesingularna*, sistem jednačina dat jed. (12.1) može se rešiti iteracionom procedurom, korišćenjem *unaprednih konačnih razlika*[†] pri poznatom *vektoru početnih uslova* $\mathbf{x}(0)$.

S druge strane, ako je pri tome matrica A takođe nesingularna, onda se isti sistem jednačina može takođe u iterativnom postupku rešiti, ali sada korišćenjem *unazadnih konačnih razlika*[‡] pri poznatom *vektoru krajnjih uslova* $\mathbf{x}(N)$.

Situacija postaje značajno složenija kada su matrice E i A singularne. Za taj slučaj, koji je suštinski predmet ovih interesovanja, *Luenberger* (1977) je takođe pokazao, pod pretpostavkom da je matrični par (E, A) *regularan*, da je *jedinstvena* sekvenca rešenja $\mathbf{x}(k)$ određena sekvencom $\mathbf{u}(k)$ i dodatnim uslovima nametnutim sekvenci $\mathbf{x}(k)$ u početnom trenutku $k = 0$ i krajnjem trenutku $k = N$.

U opštem slučaju, dodatni uslovi $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(N)$ ne mogu da budu specificirani proizvoljno i oni su predmet rada mnogih autora, a sa različitih tačaka gledišta. Ovaj problem poznat je u literaturi kao određivanje "dozvoljenih dodatnih uslova".

Nekim od ovih ozbiljnih pitanja će biti posvećena pažnja u nastavku.

Kao što je već ranije napomenuto, diskretni singularni sistem jednačina ima *uvek* veći broj nepoznatih nego jednačina i zbog toga rešenje, ako postoji, neće biti jedinstveno.

Da bi se dobilo jedinstveno rešenje, moraju se propisati *dodatne relacije*, odnosno dodatni uslovi. Za tako nešto postoji sasvim dovoljno prostora.

[†] Na engleskom jeziku: *forward differences*.

[‡] Na engleskom jeziku: *backward differences*.

Ovi dodatni zahtevi, na primer, mogu precizirati tačno određene fiksirane vrednosti deskriptivnog vektora stanja u tačno naznačenim trenucima ili mogu da odrede neku njihovu moguću linearnu kombinaciju u istim tim trenucima, itd.

Kada su pod lupom istraživanja singularni dinamički sistemi, prirodno je da se dodatni uslovi specificiraju preko deskriptivnog vektora stanja u početnom i krajnjem trenutku razmatranog vremenskog intervala.

Međutim, za neke posebne sisteme jednačina ove klase sistema, *jedinstveno rešenje* može se specificirati samo podešavanjem dodatnih uslova na deskriptivni vektor stanja, ne u početnim ili krajnjim trenucima, već samo između tih tačaka.

Takve jednačine su u izvesnom smislu *degenerativne*, jer sadrže promenljive stanja koje su van uticaja uslova definisanih na krajevima razmatranog vremenskog intervala.

Kriterijum koji treba da obezbedi da se nešto tako ne događa formulisan je kroz koncept *uslovljivosti*, o kome je u prethodnoj glavi bilo dovoljno reči.

Imajući u vidu i sve ovo ovde rečeno, nedvosmisleno proističe zaključak da je *uslovljivost* ekvivalentna osobini da, ukoliko su dopunski uslovi specificirani kroz *početno i krajnje stanje deskriptivnog vektora*, tada je rešenje sistema *jedinstveno*.

Valja još istaći da skup dodatnih uslova, koji treba da kompletno odredi rešenje sistema, može uzeti najrazličitije forme.

Te jednačine će, u opštem slučaju, zahtevati poznavanje deskriptivnog vektora stanja i vektora ulaza u nekoliko vremenskih trenutaka.

Međutim, kao što je već rečeno, od posebnog je značaja ove uslove iskazati *samo* preko poznavanja *čisto početnog* ili *čisto krajnjeg stanja* deskriptivnog vektora, tj. poznavanja samo $\mathbf{x}(0)$ ili $\mathbf{x}(N)$, a *bez bilo kakve informacije* o *vektoru ulaznih veličina*.

Sada se sva prethodna razmatranja mogu sažeti i objediniti kroz značajan rezultat, koji se navodi bez dokaza, *Luenberger* (1977).

Teorema 3.6 Ako je dinamički diskretni singularni sistem jednačina *uslovljiv*, tada se skup *dodatnih uslova* može iskazati uvek samo preko *početnog i krajnjeg uslova*.

Prema tome, bilo koji *rešljiv i uslovljiv* sistem jednačina sa pridruženim skupom od n početnih i krajnjih uslova, može se rešiti primenom nekog od numeričkih postupaka, kao što je npr. "double sweep" metoda, *Luenberger* (1977).

Ideja ove metode počiva na *unaprednoj propagaciji* vektora početnog stanja sve do krajnje tačke N. U toj tački, moguće je uspostaviti n nezavisnih relacija, na osnovu kojih se određuje $\mathbf{x}(N)$.

Poznavajući sada taj vektor i sve prethodne uslovne vektore, moguće je *unazadnim operacijama* sračunati sve neophodne vrednosti deskriptivnog vektora u prethodnim trenucima.

Kao ilustracija prethodnih izlaganja mogu se razmatrati neki primeri *diskretnih deskriptivnih* sistema.

Tako na primer, skalarni sistem dat sledećom jednačinom:

$$x_i(k) = u(k+1) \tag{3.11}$$

očigledno je *rešljiv*, $\det(zE - A) \neq 0$, međutim proizvoljni uslovi *ne mogu* se specificirati u početnom trenutku $k = 0$.

Da bi rešenje bilo *jedinstveno*, dva dopunska uslova moraju se specificirati u krajnjem trenutku N.

Slična situacija javlja se i kod *prediktora* višeg reda, *Luenberger* (1977):

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= x_1(k) + u_1(k) \\ x_3(k+1) &= x_2(k) + u_2(k) \\ &\vdots \\ 0 &= x_n(k) + u_n(k) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ni ovde se ne mogu propisati proizvoljni početni uslovi. n proizvoljnih konstanti u rešenju sistema, odgovaraće *konačnim vrednostima* deskriptivnog vektora stanja.

Međutim, lako se uviđa da se za $n = 1$ jednačine prediktora svode na *skalarni slučaj*, tj. $0 = x(k) + u(k)$, koji ne sadrži predikciju, pa je u tom smislu skalarni sitem *kauzalan*, a za $n \geq 2$, sistem dat jed. (3.12) je *nekauzalan*, iako je *rešiv*.[†]

[†] *Kauzalnost* se ovde tretira prema *Luenbergeru* (1977) i konceptualno odgovara fizičkoj ostvarljivosti sistema. Svi "normalni" sistemi su kauzalni, kada je $n \geq m$.

Konačno, valja istaći da posle svega ovde izloženog, stoji činjenica da analogija konzistentnih početnih uslova, koji su neophodni u kontinualnom slučaju, i ovde navedenih nije potpuna.

Međutim, bez obzira na te razlika, *klasično* određivanje konzistentnih početnih uslova, za ovu klasu sistema, može se takođe dati, kako sledi u nastavku.

Lema 3.1 Ako se $\bar{\mathcal{W}}_j\left(j \geq 0\right)$, generiše sekvencom:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{W}}_0 &= \mathbb{R}^n \\ \bar{\mathcal{W}}_{j+1} &= \left(A - \lambda E\right)^{-1} E\bar{\mathcal{W}}_j, \quad \lambda \in \mathbf{C} \end{aligned} \tag{3.13}$$

tada je:

$$\bar{\mathcal{W}}_j = \mathcal{W}_j, \quad \left(j \geq 0\right) \tag{3.14}$$

gde je $\mathcal{W}_j$ *potprostor* konzistentnih početnih uslova *kontinualnog* singularnog sistema, *Owens*, *Debeljković* (1985)[‡].

Lema 3.1 omogućava još jedan značajan rezultat, *Owens*, *Debeljković* (1985).

Teorema 3.7 Pod uslovima *Leme* 3.1., $\mathbf{x}_0$ je vektor konzistentnih početnih uslova za *autonomni* sistem dat jed. (12.1) ako i samo ako $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_{d^*}$.

Štaviše, $\mathbf{x}_0$ tada generiše sekvencu rešenja$\left(\mathbf{x}\left(k\right) : k \geq 0\right)$ takvu da $\mathbf{x}\left(k\right) \in \mathcal{W}_{d^*}$ za $\forall k \geq 0$.

3.4 Matrica prenosnih funkcija diskretnog deskriptivnog sistema

Posmatra se linearni, diskretni singularni sistem opisan svojom vektorskom diferencnom jednačinom stanja i jednačinom izlaza:

$$E\,\mathbf{x}\left(k+1\right) = A\mathbf{x}\left(k\right) + B\mathbf{u}\left(k\right) \tag{3.15}$$

[‡] Potprostor konzistentnih početnih uslova *diskretnih sistema* obeležava se sa $\mathcal{W}_d$.

$$\mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k) \tag{3.16}$$

Primenjujući Z transformaciju na prethodne jednačine, dobija se:

$$(zE - A)\mathbf{X}(z) = zE\,\mathbf{X}(0) + B\mathbf{U}(z) \tag{3.17}$$

$$\mathbf{X}_i(z) = C\,\mathbf{X}(z) \tag{3.18}$$

gde $\mathbf{X}(z)$, $\mathbf{U}(z)$ i $\mathbf{X}_i(z)$ predstavljaju odgovarajuće Z likove.

Pod pretpostavkom da je sistem, dat jed. (3.15 – 3.16) *regularan*, iz jed. (3.17) dobija se:

$$\mathbf{X}(z) = (zE - A)^{-1}\left(zE\,\mathbf{X}(0) + B\mathbf{U}(z)\right) \tag{3.19)a$$

pri nultim početnim uslovima, dobija se:

$$W(z) = C(zE - A)^{-1}B = C \cdot \frac{\operatorname{adj}(zE - A)}{\det(zE - A)}B \tag{3.20}$$

matrica prenosnih funkcija diskretnog sistema, sa svojim karakterističnim polinomom:

$$f_z(z) = \det(zE - A) \tag{3.21}$$

Ukoliko je razmatrani diskretni singularni sistem *iregularan*, on tada ne poseduje matricu prenosnih funkcija, jer je očigledno $\det(sE - A) \equiv 0$, što ne znači da nema dinamičko ponašanje.

Ono je tada opisano tzv. ulazno-izlaznim relacijama tipa:

$$R(z)\mathbf{X}_i(z) = Q(z)\mathbf{U}(z) \tag{3.22}$$

gde su $R(z)$ i $Q(z)$ odgovarajući polinomi.

O ovoj klasi singularnih, posebno kontinualnih sistema, može se daleko više naći u radovima *Dziurla*, *Newcomb* (1987.b) i *Dai* (1989.a) i oni nisu predmet ovih razmatranja.

Dobro je poznato da matrica *prenosnih funkcija*, jed. (3.20), nije u opštem slučaju *striktno svojstvena*[†] i može se, po pravilu, predstaviti u vidu dva sabirka, od kojih prvi ima tu osobinu, a drugi odgovara nekom polinomu po *z*.

[†] Matrica prenosnih funkcija je *striktno svojstvena* ako $\lim_{z \to 0} W(z) \to 0$.

Značajnije osobine matrice prenosnih funkcija, doduše za kontinualne sisteme, iscrpno su analizirane u radu *Verghese et al.*(1981) i bez ikakvih ograničenja mogu se primeniti i na ovaj slučaj.

S druge strane, iz opšte teorije linearnih sistema poznato je da datoj matrici prenosnih funkcija odgovara čitav niz *reprezentacija* matematičkih modela u prostoru stanja, tako da svi kvarteti $\left(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\right)$ povezani sa polaznim sistemom nesingularnom matricom transformacije T, na sledeći način:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= TET^{-1} \\ \tilde{A} &= TAT^{-1} \\ \tilde{B} &= TB \\ \tilde{C} &= CT^{-1} \end{aligned} \tag{3.23}$$

imaju *istu* matricu prenosnih funkcija.

Međutim, jasno je da jednom kvartetu $\left(E, A, B, C\right)$ odgovara jedna i samo jedna matrica prenosnih funkcija.

Razmotrimo neke osobine matrice prenosnih funkcija i još neka druga pitanja, neposredno vezana za dinamiku diskretnog singularnog sistema.

U teoriji regularnih matričnih parova, *Rosenbrock* (1974.b), poznato je da uvek postoje dve nesingularne matrice U i V, takve da:

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &= U\left(zE - A\right)V \\ &= \begin{pmatrix} zI_r - \overline{A} & 0 \\ 0 & I_{n-r} - zN \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.24}$$

gde je N nilpotentna matrica indeksa $\nu = Ind\left(N\right)$, a $r = \deg ree \det\left(zE - A\right)$.

Štaviše, matrica N ima specijalnu *Jordan-ovu formu* sa svim nultim elementima na prvoj dijagonali.

Matrica K poznata je u literaturi kao *Kronecker-ova forma* matričnog para $\left(zE - A\right)$.

S druge strane, jed. (13.5) može se napisati i u ovakvom obliku:

$$\begin{pmatrix} zE - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) \\ \mathbf{U}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zE\,\mathbf{X}(0) \\ \mathbf{X}_i(z) \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

pri čemu je koeficijentna matrica poznata i pod nazivom *sistemska matrica*, *Rosenbrock* (1974.b).

Sistem dat jed. (3.25) je *ograničeno sistemski ekvivalentan* sistemu, koji ima sledeću sistemsku matricu:

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} zE-A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U\left(zE-A\right)V & -UB \\ CV & 0 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

Zamenjujući jed. (3.24) u jed. (3.25), koristeći pri tome transformaciju:

$$\bar{\mathbf{X}}(z)=\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(z) \\ \mathbf{X}_2(z) \end{bmatrix}=V^{-1}\mathbf{X}(z) \tag{3.27}$$

dolazi se do sistema, koji je takođe *ograničeno sistemski ekvivalentan* sistemu, datom jed. (3.25):

$$\begin{pmatrix} zI_r-\bar{A} & 0 & -B_1 \\ 0 & I_{n-r}-zN & -B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(z) \\ \mathbf{X}_2(z) \\ \mathbf{U}(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z\mathbf{X}_1(0) \\ -zN\,\mathbf{X}_2(0) \\ \mathbf{X}_i(z) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

gde su:

$$\bar{C}=CV=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix},\quad \bar{B}=UB=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Ako se sada primeni inverzna Z - transformacija na jed. (3.28), dobija se:

$$\mathbf{x}_1(k+1)=\bar{A}\mathbf{x}_1(k)+B_1\mathbf{u}(k) \tag{3.30}$$

$$N\,\mathbf{x}_2(k+1)=I\,\mathbf{x}_2(k)+B_2\mathbf{u}(k) \tag{3.31}$$

$$\mathbf{x}_i(k)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Sistem, dat jed. (3.30), odgovara *striktno svojstvenom delu* matrice prenosnih funkcija i ima oblik, *Christodolou*, *Mertzios* (1985):

$$\bar{W}(z)=C_1\left(zI_{n_1}-\bar{A}\right)^{-1}B_1 \tag{3.33}$$

a sistem, dat jed. (3.31), odgovara polinomu:

$$P(z) = C_2 \left(zN - I_{n_2} \right)^{-1} B_2 \tag{3.34}$$

tako da konačno, matrica prenosnih funkcija može da se napiše kao:

$$W(z) = \overline{W}(z) + P(z) \tag{3.35}$$

Jasno je da $\overline{W}(z)$ odgovara *sporom delu* a $P(z)$ *brzom delu deskriptivnog sistema*, *Debeljković et al*. (1996.a).

Dobro je poznato da singularni (deskriptivni) sistemi sadrže tri vrste modova: dinamičke *konačne*, dinamičke *beskonačne* i nedinamičke *beskonačne* modove, *Verghese et al*. (1981).

Dinamički beskonačni modovi (modovi "beskonačne učestanosti") mogu da proizvedu nepoželjno *impulsno* ponašanje.

Karakter matrice prenosnih funkcija ima odlučujući značaj na te osobine i o tome govori i sledeća lema, *Bender*, *Laub* (1987.b).

Lema 3.1 Sledeći uslovi su međusobno ekvivalentni:

- Autonomni sistem, dat jed. (3.15) nema beskonačne dinamičke modove.
- Rezolventna matrica $(zE - A)^{-1}$ je svojstvena.
- $\deg \det (zE - A)^{-1} = rang\ E$.

Sledeći rad Verghese *et al*. (1981) tamo naveden primer lepo ukazuje i na povezanost *striktne svojstvenosti* matrice i kauzalnosti odgovarajućeg deskriptivnog sistema.

Prethodna razmatranja bazirala su se na radovima koji su uglavnom tretirali problematiku kontinualnih singularnih sistema.

Fang et al. (1994) pokazali su da se ti rezultati mogu bez problema proširiti na *diskretne deskriptivne* sisteme.

Praktično sračunavanje matrice prenosnih funkcija ne polazi jasno od jed. (3.30), već su za to razvijene odgovarajuće procedure, zasnovane na razvoju rezolventne matrice $(zE - A)^{-1}$ u red.

Literatura

Bajić, V. B., *Lyapunov's Direct Method in the Analysis of Singular Systems and Networks*, Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.a.

Campbell, L. S., *Singular Systems of Differential Equations II,* Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

Campbell, L. S., *Singular Systems of Differential Equations,* Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

Cobb, D., "On the Solution of Linear Differential Equations with Singular Coefficients", *J. Differential Equations,* **46** (1982) 310-323.

Dai, L., "The difference between regularity and irregularity in singular systems", *Circ. Syst. Sig. proc.*, **8** (4) (1989.a) 435-444.

Dai, L., *Singular Control Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1989.b.

Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, "On Practical Stability" , *Proc. MELECON Conference,* Madrid (Spain), October (1985) 102-105.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Application of singular system theory in chemical engineering: Analysis of process dynamics", Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Prague (Czech Republic), Process Eng. Publishing, 1996.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi Automatskog Upravljanja*, Kultura, Beograd, 1996.a.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2004.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, *Diskretni singularni sistemi Automatskog Upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

Dziurla, B., R. W. Newcomb, "Nonregular Semistate Systems: Examples and Input-output Pairing", *IEEE Proc. on CDC*, Los Angeles, CA (1987) 1125-1126.

Lewis F. L., „Subspace recursions and structure Algorithms for Singular Systems", *IEEE Proc. on CDC*, Los Angeles, CA (1987) 11, Los Angeles, CA (1987) 1147-1150.

Lewis, F., "Descriptor Systems: Decomposition into Forward and Backward Subsystems", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-29** (2) (1984) 167-170.

Lin, J., Z. Yang, “Existence and Uniqueness of solutions for Non-Linear Singular (Descriptor) Systems”,*Int. J. Syst. Sci.*, **19** (18) (1988) 2179-2184.

Luenberger, D. G., “Nonlinear descriptor Systems”, *J. Econom. Dynam. Control,* **1** (1979) 219-242.

Mertzios, B. G., F. L. Lewis, „Transfer Function Matrix of Singular Systems“, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-32** (9) (1987) 829-831.

Newcomb, R. W., „The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits“, *IEEE Trans. Circuits and Systems,* **CAS-28** (1) (1981) 62-71.

Newcomb, R. W., B. Dziurla, “Some Circuits and Systems Applications of Semi state Theory”, *Circ. Syst. Sig. Proc.,* **8** (3) (1989) 235-260.

Owens, D. H., D. Lj. Debeljković, „Cosistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems: A Geometric Approach“, *IMA Journal on Mathematical Control and Information,* **2** (1985) 139-151.

Rosenbrock, H. H., „Order, Degree and Complexity“, *Int. J. Control*, **19** (2) (1974.a) 323-331.

Rosenbrock, H. H., „Structural Properties of Linear Dynamic Systems“, *Int. J. Control*, **20** (2) (1974.b) 191-202.

Sincovec, R. F., A. M. Erisman, E. L. Yip, M. A. Epton, „Analysis of Descriptor Systems Using Numerical Algorithms“, *IEEE Trans. Autom. Cont.,* **AC-26** (1) (1981) 139-147.

Sincovec, R. F., E.L. Yip, M. A. Epton, J. W. Manke, A. M. Erisman, B. Dembart, P. Lu, “Solvability of large-scale descriptor systems”, *NTIS*, Springfield, VA (1979) CONF-790904-P2.

Verghese, G. C., “Further Notes on Singular Descriptions”, *Proc. JAAC,* Charlottesville, VA (1981) TA-4B.

Verghese, G. C., B. C. Levy, T. Kailath, “A Generalized State-Space for Singular Systems”, *IEEE Trans. Automat. Cont.,* **AC-26** (4) (1981) 811-831.

Verghese, G. P., Van Dooren, T. Kailath, „Properties of the System matrix of a Generalized State-Space System“ *Int. J. Control* , **30** (2) (1979) 235-243.

Verghese, G., Ph.D. Thesis, Elec. Eng. Dept., Stanford University, CA, USA, 1978.

4. VREMENSKI KONTINUALNI SISTEMI SA ČISTIM VREMENSKiM KAŠNJENJEM

4.1 Uvodna razmatranja

Analiza i projektovanje savremenih sistema automatskog upravljanja, na današnjem stepenu razvoja nauke i tehnike, kao i neophodnost ispunjavanja veoma strogih zahteva koji se nameću kvalitetu dinamičkog ponašanja sistema u celini, traže poznavanje njihovih dovoljno tačnih, u inženjersko-tehničkom smislu, *matematičkih modela*.

Za njihovo formiranje od velikog značaja je suštinsko poznavanje procesa ili objekta koji se modelira, precizno definisanje "kontrolne granice", potpuno razgraničavanje pitanja primarnih i sekundarnih uticaja, kao i korektno ispisivanje odgovarajućih bilansnih jednačina za neuravnotežena stanja procesa.

Preostali deo posla oko svođenja matematičkog modela na svoj konačni oblik, obično predstavlja rutinski zadatak.

Ako se pretpostavi da matematički modeli dovoljno tačno opisuju fizičke sisteme i da daju njihov verodostojan opis, onda oni sadrže sve informacije o osobinama tih sistema i u toj formi pružaju mogućnost da se primenom odgovarajućih metoda i postupaka, kroz *analizu i sintezu*, utvrde njihove objektivne osobine ili projektuju nove upravljačke celine shodno postavljenim zahtevima ili usvojenim kriterijumima.

Prema tome, imajući u vidu prethodno rečeno, naredna izlaganja će biti posvećena upoznavanju i proučavanju *jedne specifične klase sistema* i predstavljanju analitičkih postupaka koji treba da omoguće da se neke njihove specifične osobine razmotre, utvrde, kvantifikuju i efikasno iskoriste u praksi.

4.2 Priroda i osobenosti fenomena kašnjenja u prenosu signala u fizičkim procesima

U savremenim sistemima automatskog upravljanja, bilo u objektu, bilo u upravljačkom delu sistema, postoje obično izvesni prostori neujednačenog gabarita kroz koje se vrši transport mase i/ili energije najrazličitijih fluida.

Predaja energije i/ili impulsa, ili pomeranje radnog tela sa jednog mesta na drugo, se ne odvija trenutno, već sa nekim *kašnjenjem*.

Pri tome treba imati posebno u vidu i konačnu brzinu prostiranja signala nastalih poremećaja u datoj sredini. U većini slučajeva to kašnjenje ima konstantnu vrednost i jednako je vremenu potrebnom da radno telo savlada određeno rastojanje pri konstantnoj brzini kretanja.

Kako bi se isključila mogućnost pojava različitih grešaka pri analizi i sintezi sistema automatskog upravljanja, neophodno je uzimati u obzir pojavu ovog *kašnjenja*, na svim mestima na kojima je ono prisutno, imajući posebno u vidu činjenicu da ono nekada znatno prevazilazi vreme koje je potrebno da signal prođe kroz neki drugi deo sistema.

Uticaj *fenomena kašnjenja* je veoma bitan za pravilno kvalitativno i kvantitativno opisivanje različitih procesa. Tipični vidovi kašnjenja su: *transportno*, *tehnološko* i *informaciono kašnjenje*.

Transportno kašnjenje se obično javlja u procesima prenosa materije, energije ili signala sa jednog mesta na drugo. Tipičan predstavnik ove grupe objekata sa kašnjenjem je transporter za ugalj. Transportno kašnjenje susrećemo i u termoenergetici, gde ono predstavlja vreme neophodno da mazut ili gas iz odgovarajućih rezervoara stigne u ložište parnog kotla, itd.

Tehnološko kašnjenje je prisutno u hemijsko-tehnološkim procesima, kao npr. u proizvodnji sumporne kiseline, proizvodnji stakla i u različitim difuzionim procesima. Konkretno, recimo kod mešanja dve tečnosti različitih koncentracija, *vreme* potrebno da se postigne izjednačena koncentracija mešavine, takođe predstavlja tehnološko kašnjenje. Vreme od paljenja nekog goriva do postizanja punog plamena spada takođe u ovu grupu kašnjenja.

Informaciono kašnjenje se obično javlja kada se merenje neke veličine i njena dalja obrada ne odvijaju na istom mestu, što je često uslovljeno tehnološkim i/ili eksploatacionim uslovima. Kao tipičan primer navodi se merenje debljine trake u valjaoničnom stanu, koja se ne obavlja neposredno jer se davač debljine ne može, iz konstruktivnih razloga, nalaziti u samom zevu između valjaka, već na nekom konačnom rastojanju iza njega.

Prema tome, postojanje *sistema sa kašnjenjem* je posledica *ili* inherentnog prisustva kašnjenja u objektu i/ili pojedinim komponentama upravljačkog sistema, *ili* svesnog uvođenja kašnjenja u sistem, objekat ili proces, na primer korišćenjem povratne sprege, a sa ciljem da se stvari njegovo kvalitetno upravljanje ili neka druga poboljšanja.

Vremensko kašnjenje prisutno je u mehanici, mašinstvu, elektrotehnici, elektromagnetizmu, hemiji, metalurgiji, biologiji i ekonomiji, što znači praktično svuda. Da li će se ono uzimati u obzir ili ne prilikom proučavanja sistema na osnovu njihovih matematičkih modela, zavisi prvenstveno od njegove razmere u odnosu na druge vremenske konstante procesa.

Potenciranje prisustva kašnjenja i na mestima gde ono nije opravdano može lako da dovede do formiranja čisto akademskih matematičkih modela, imajući u vidu svu složenost matematičkog aparata neophodnog za tretman ove klase sistema.

Sistemi sa kašnjenjem, u osnovi su opisani algebarskim ili običnim diferencijalnim jednačinama sa "pomerenim argumentom".

Pri sastavljanju ovih jednačina, zavisnost između pojedinih veličina trebalo bi posmatrati u jednom istom trenutku.

Međutim, kako je priroda procesa takva da se fizičke veličine pojavljuju razdeljene u vremenu, tada ih je neophodno svesti na jedan isti trenutak razmatranja. Matematički gledano to znači da će se, pored razmatrane veličine $x(t)$, pojaviti i neka druga ili ista ta veličina uzeta u trenucima $(t-\tau)$ ili $(t+\tau)$.

Kada se u diferencijalnoj jednačini ponašanja pojave izrazi i za $x(t)$ i za $x(t-\tau)$, i eventualno njihovi izvodi, onda je jasno da je reč o dvema promenljivama. Da se u jednačini ne bi javljala neodređenost, neophodno je utvrditi *dopunsku vezu* između vrednosti $x(t)$ i $x(t-\tau)$.

Sa τ je označeno *čisto* vremensko kašnjenje.

Pri rešavanju običnih diferencijalnih jednačina zadaju se odgovarajući *početni uslovi*, koji bliže određuju vrednost promenljive i njenih izvoda u nekom *određenom trenutku*.

Kod *diferencijalnih jednačina sa pomerenim argumentom* neophodno je poznavati zakon promene promenljive ne u jednom fiksiranom trenutku, već na nekom *određenom početnom vremenskom intervalu*. U tome i jeste suštinska razlika između ove dve klase sistema.

4.3 Mogućnosti rešavanja diferencijalnih jednačina sa pomerenim argumentom

Dinamika jednostavnijih sistema automatskog upravljanja sa kašnjenjem može se opisati sledećim sistemom diferencijalnih jednačina:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t,\, \mathbf{x}(t),\, \mathbf{x}(t-\tau)\right) \tag{4.1}$$

gde je $\mathbf{f}(\,,\,,\,)$ u opštem slučaju nelinearna vektorska funkcija, a τ konstantno vremensko kašnjenje.

Košijev zadatak sastoji se u određivanju neprekidnog rešenja $\mathbf{x}(t)$ koje pri $t > t_0$ zadovoljava jed. (4.1), a pri $t \leq t_0$ i jednačinu:

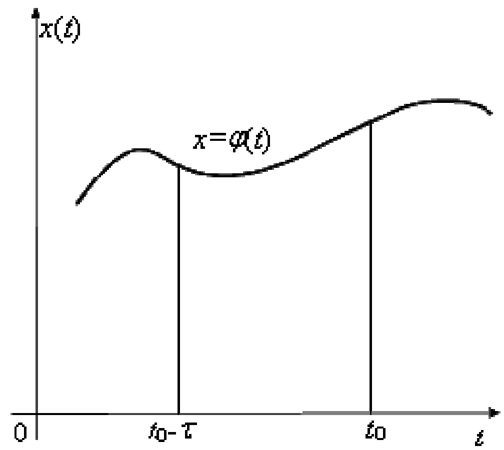
$$\mathbf{x}(t_0 + \vartheta) = \boldsymbol{\phi}(\vartheta), \quad -\infty < \vartheta \leq 0 \tag{4.2}$$

gde je sa $\boldsymbol{\varphi}\ (\vartheta)$ označena unapred poznata neprekidna početna funkcija, sl. 4.1.

Vremenski interval $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, na kome je zadata početna funkcija naziva se *početnim skupom*, a t_0 *početnom tačkom*.

Obično se usvaja da je:

$$\mathbf{x}(t_0 + 0) = \boldsymbol{\varphi}(t_0) \tag{4.3}$$



Slika 4.1

Ako se argument ϑ u jed. (4.2) menja u intervalu $\vartheta \in \left]-\infty,\, 0\right[$, tada se jed. (4.1) naziva jednačinom sa *neograničenim kašnjenjem*, a ako je njegova promena određena zavisnošću $\vartheta \in \left]-\tau,\, 0\right[$, tada je jed. (4.1) sa *ograničenim kašnjenjem*.

U određenom broju zadataka, *početna funkcija* $\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)$ određuje se eksperimentalnim

Sl.

putem.

Za razliku od običnih diferencijalnih jednačina, *rešenje Košijevog zadatka*, za sisteme sa kašnjenjem čak i za beskonačno puta diferencijabilne funkcije $\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)$ i $\mathbf{f}(\;,\;,\;)$ ima, u opštem slučaju, *prekid prvog izvoda* u tački $t = t_0$.

U stvari:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0+0)=\mathbf{f}\left(0,\, \boldsymbol{\varphi}(\vartheta)\right) \tag{4.4}$$

i nije jednako, u opštem slučaju, sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0-0)=\dot{\boldsymbol{\varphi}}(0) \tag{4.5}$$

U tački $t=t_0+\tau$ rešenje ima, u opštem slučaju, *prekid drugog izvoda*, ali je *prvi izvod* u toj tački *obavezno* neprekidan.

Koristeći ovu osobinu, rešenje sistema diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem najčešće se nalazi *metodom koraka*, *Debeljkovic, Milinkovic, Stojanovic* (1995).

Literatura

Debeljković, D. Lj., *Sistemi automatskog upravljanja sa kašnjenjem*, GIP Kultura, Beograd, 1994.

Debeljković, D. Lj., *Dinamika objekata i procesa,* Mašinski fakultet, Beograd, 1989.

Debeljković, D. Lj., *Zbirka zadataka iz dinamike objekata i procesa,* Mašinski fakultet, Beograd, 1990.

Goreckii, H., S. Fuksa, P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time-Delay Systems*, J. Wiley, New York, 1989.

Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem*, Nauka, Moskva, 1978.

Malek-Zavarei, M.,M. Jamshidi, *Time-Delay Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

Marshall, J. E., *Control of Time-Delay Systems*, Peter Peregrinus, London, 1979.

5. VREMENSKI DISKRETNI SISTEMI SA ČISTIM VREMENSKOM KAŠNJENJEM

5.1 Uvodna razmatranja

Iako vremenska kašnjenja u diskretnim sistemima ne stvaraju kvalitativno nov problem, ona su, iz nekoliko razloga zanimljiva.

Kada se traži numeričko rešenje za bilo koji problem u upravljanju koji uključuje razlomljene diferencijalne jednačine (FDE)[†], pre ili kasnije će se naići na model konačnih dimenzija koji je najčešće predstavljen u vidu diferencne jednačine.

U primeni, izražena je tendencija da se problemi upravljanja postavljaju pomoću diskretnih jednačina od samog početka što se javlja iz dva razloga.

Prvo, u mnogim procesima, vrednosti promenljivih procesa su bitne samo u određenim, diskretnim trenucima (računari, relejni i digitalni uređaji, konačni automati).

Drugo, diskretni vremenski modeli se nameću inženjeru svojom jednostavnošću, polazeći od tendencije da se izbegne složena matematika. Ovo je uglavnom pogrešno jer se uvode nove i komplikovane aproksimacije.

Ipak, ne može se poreći da diferencne šeme korišćene u teoriji upravljanja imaju opštiji pristup, tj. one se ne odnose na posebne tipove sistema opisanih običnim, parcijalnim ili funkcionalnim diferencijalnim jednačinama.

Zato diskretne jednačine nude jedinstveni pristup većini problema upravljanja.

[†] Videti *Lazarević, Debeljković* (2003).

5.2 Priroda i osobenosti fenomena kašnjenja u prenosu signala u fizičkim procesima

Sistemi sa kašnjenjem su sistemi u kojima postoji vremensko kašnjenje između ulaza ili upravljanja i ispoljavanja efekata tih dejstava na sistem. Ona su ili posledica kašnjenja svojstvenih komponentama sistema ili namernog uvođenja kašnjenja radi lakšeg upravljanja sistemom. Kašnjenja su česta u elektronskim, mehaničkim, biološkim i hemijskim sistemima. Odgovaraju vremenu potrebnom za prenos signala (seizmički talasi, hormoni u krvotoku, fluidi u hemijskom procesu) ili vremenu potrebnom za obradu signala (analiza slike pomoću robota/softvera, izračunavanje izlaza digitalnim upravljačkim algoritmom ili izvođenje analize hemijskog sastava nekog jedinjenja).

Uticaj *fenomena kašnjenja* je veoma bitan za pravilno kvalitativno i kvantitativno opisivanje različitih procesa.

Osim fenomena kašnjenja, sistemi koji su predmet ovog rada imaju još jednu važnu osobinu – diskretan prenos signala. Ako se vremenski diskretan prenos signala javlja bar u jednoj prenosnoj liniji sistema, to znači da je sistem definisan samo u određenim, diskretnim trenucima vremena.

Izučavanje diskretnih sistema ima opravdanje u njihovoj velikoj praktičnoj primeni.Vremenska diskretizacija signala omogućava postizanje veće tačnosti u prenosu signala nego u slučaju kontinualnog prenosa.

Digitalni računari imaju niz prednosti nad analognim računarima i prenosnim organima, pre svega zbog činjenice da mogu da obrade veliki broj podataka za kratko vreme.

Na osnovu dobijenih podataka, a u skladu sa odgovarajućim algoritmom, oni mogu da donose brze i pravilne odluke, da ostvaruju pravilna upravljačka dejstva, kroz kompleksne algoritme..

Vrlo značajna prednost vremenske diskretizacije signala sa stanovišta tehničke realizacije i ekonomskog efekta je mogućnost korišćenja jednog kanala veze za prenos većeg broja različitih signala, što je važno naročito pri transportu signala na veće daljine.

Vremenski diskretni sistemi su pouzdaniji u radu nego analogni sistemi. Kompaktniji su i manjih su gabarita.

Proučavanje diskretnih sistema je dovelo do posebnog, novog i originalnog prilaza proučavanju sistema uopšte, a posebno sistema automatskog upravljanja.

Na primer, veliki broj sistema automatskog upravljanja, u kojima postoji vremenska diskretizacija signala, su *hibridni* jer je upravljani proces vremenski neprekidan. Pogodno je proučavati dinamička ponašanja ovih sistema samo u trenucima odabiranja. Tada se oni posmatraju kao diskretni sistemi.

U slučaju pojave kašnjenja prilikom prenosa signala, ovi sistemi postaju vremenski diskretni sistemi sa kašnjenjem i osnovna su tema ovih razmatranja.

5.3 Kretanje diskretnih sistema sa kašnjenjem u prostoru stanja

Vremenski prekidni sistemi sa kašnjenjem se mogu, analogno kontinualnim sistemima, predstaviti u prostoru stanja, vektorskom diferencnom jednačinom stanja, kako je već pokazano:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_N\mathbf{x}(k-N) \tag{5.1}$$

i početnom funkcijom, u obliku:

$$\mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(k), \quad \forall k = (k_0 - N) \ \ (k_0 - N + 1), \ldots, k_0 \tag{5.2}$$

pri čemu je očigledno dopušteno jedno proizvoljno veliko *diskretno kašnjenje*.

Teorema 5.1 Rešenje jed. (5.1) može se predstaviti sumom:

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{j=k_0-N}^{k_0} \Phi(k, j)\cdot\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}(j), \ \forall k \geq k_0 \tag{5.3}$$

pri čemu *diskretna fundamentalna matrica* $\Phi(k, j)$ zadovoljava:

$$\begin{gathered}\Phi(k+1, j) = A_0\Phi(k, j) + A_N\Phi(k-N, j), \quad \forall k \geq k_0 \\ \Phi(k, j) = I\cdot\delta(k-j), \quad \forall k, j \in [k_0 - N, \ k_0]\end{gathered} \tag{5.4}$$

Malek-Zavarei, Jamshidi (1987), *Januševski* (1978)[9].

Najpogodniji oblik kretanja, koji će se nadalje stalno koristiti pokazaće se na jednačini stanja d*iskretnog sistema sa kašnjenjem*, za proizvoljan broj kašnjenja.

[9] Dokazi svih *Stavova* i *Teorema* mogu se naći u lit. *Debeljković et al.* (2004).

Polazeći od jednačine stanja i početnih uslova sledećeg oblika:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{N} A_i \mathbf{x}(k-i) \tag{5.5}$$

$$\mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(k), \quad \forall k = 0, -1, ..., -N \tag{5.6}$$

Januševski (1978) je prikazao rešenje jed. (5.5) u obliku sume:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{N} \Phi(k-i) A_i \mathbf{x}(-i) \tag{5.7}$$

Osobine matrice $\Phi(k)$, su sledeće:

$$\Phi(k+1) = \sum_{i=0}^{N} A_i \Phi(k-i) \tag{5.8}$$

$$\Phi(0) = I \tag{5.9}$$

Interesantno je sada uporediti rešenja vremenski kontinualnog i vremenski diskretnog sistema. Poznato je da je fundamentalna matrica *vremenski neprekidnih* sistema *sa kašnjenjem* oblika:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(sI - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{-s\tau_i}\right)^{-1}\right\} \tag{5.10}$$

Ovakav izraz očigledno se ne može direktno rešiti zbog prisustva beskonačnog broja korenova, koji potiču od transcedentnog člana $e^{-s\tau_i}$.

Kod *diskretnog sistema sa kašnjenjem* situacija je potpuno drugačija.

Primenom *Z* - transformacije na jed. (5.5), dobija se:

$$\Phi(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(zI - \sum_{i=0}^{N} z^{-i} A_i\right)^{-1}\right\} \tag{5.11}$$

Ova relacija se očigledno *može* relativno lako rešiti, imajući u vidu konačan broj korenova. Dobija se karakteristični polinom po z stepena $n\times(N+1)$, kome odgovara isto toliko korenova.

U *Gorecki*, *Fuksa*, *Grabowsky*, *Korytowsky* (1989), ovaj polinom je dat sa:

$$\Delta(\lambda) = I\lambda^{N+1} + \sum_{i=0}^{N} \lambda^{N-i} A_i \tag{5.12}$$

što dovodi do istog zaključka kada se ima na umu da je polazna reprezentacija sistema sa kašnjenjem bila data u matričnom zapisu jed. (15.75) reda *n.* Sada se može uvesti jedna nova matrica A_{eq}.

Nazovimo je ekvivalentnom *matricom* u oznaci A_{eq} koja zadovoljava *jedinu* relaciju koja je bitna za povezivanje diskretnog sistema sa kašnjenjem sa njemu ekvivalentnom sistemu bez kašnjenja, ali povećane dimenzije.

Ovo se može zapisati na sledeći način:

$$\left(z\, I_{n\times(N+1)} - A_{eq} \right)^{-1} = \left(zI_n - \sum_{i=0}^{N} z^{-i} A_i \right)^{-1} \tag{5.13}$$

Očigledno je da je ova matrica upravo ona matrica A_{eq} proširenog sistema *bez kašnjenja* iz jed. (5.13) i da ona u sebi objedinjuje sve informacije potrebne i dovoljne da se, uz poznavanje početne funkcije (uslova) odredi kretanje sistema.

Literatura

Aleksendrić, M., *Dinamika posebnih klasa kontinualnih i diskretnih sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu,* Dipl. rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 2002.

Belhouari, A., E. Tissir, A. Hmamed, "Stability of interval matrix polynomial in continuous and discrete cases", *Systems & Control Letters* (**18**) (1992) 183-189.

Debeljković, D. Lj., *Dinamika objekata i procesa,* Mašinski fakultet, Beograd, 1989.

Debeljković, D. Lj., *Sistemi sa kašnjenjem,* GIP Kultura, Beograd, 1994.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stablinost sisema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, 1999.

Desoer, C. A., M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

Gantmacher, F., *The Theory of Matrices,* Vol. 1 and Vol. 2., Chelsea, New York, 1959.

Gu, K., V. L. Kharitonov, J. Chen, Stability of Time-Delay Systems, Burkhauser, Boston, 2003.

Goreckii, H., S. Fuksa, P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time-Delay Systems*, J. Wiley, New York, 1989.

Grujić, Lj., *Diskretni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 1991.

Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem*, Nauka, Moskva, 1978.

Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay", *Trans. ASME*, J. Basic Eng., (3) (1965) 74-80.

Lazarević, P. M., *Sinteza Kalmanovog regulatora u sistemima automatskog upravljanja sa kašnjenjem,* Mag. teza, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 1993.

Malek-Zavarei, M.,M. Jamshidi, *Time-Delay Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

Owens, D . H., *Feedback and Multivariable Systems,* Peter Peregrinus, Ltd., 1987.

Yoshizawa, T., *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

6. DINAMIKA KONTINUALNIH SINGULARNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

6.1 Uvodna razmatranja

U prethodnim glavama su ukratko izložene osnovne osobine dve veoma specifične klase sistema automatskog upravljanja.

Dosta prostora je bilo posvećeno problematici tzv. singularnih sistema i sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem kao i njihovim diskretnim analoganima.

Ipak, važno je istaći da postoji veliki broj sistema automatskog upravljanja u kojima je izražen *istovremeni fenomen* čistog vremenskog kašnjenja i evidentna singularnost. Ova klasa sistema, poznata pod imenom *singularni sistemi sa kašnjenjem*, zaslužuje posebnu pažnju, imajući u vidu da nedvosmisleno objedinjuje ranije ukazane specifičnosti pojedinačnih klasa ovde opisanih sistema. Ovi sistemi imaju mnogo specifičnih karakteristika.

Ukoliko je cilj rigorozan tretman sistema, projektovanje sa zavidnim stepenom tačnosti ili ostvarivanje kvalitetnog upravljanja, neophodna je spoznaja suštinskih osobina i posebnosti sistema koje ih u, velikoj meri, razlikuju od drugih klasa.

U matematičkom smislu ova klasa sistema automatskog upravljanja predstavljena je sistemom uparenih diferencijalnih jednačina sa pomerenim argumentom, kojima je pridružen sistem odgovarajućih algebarskih jednačina koje u opštem slučaju mogu biti, takođe, sa pomerenim argumentom ili bez njega.

Prvo pomenuti slučaj daleko je složeniji i u takvim prilikama njihov matematički zapis u prostoru stanja, u vidu vektorske diferencijalne jednačine stanja, može biti dat u sledećem obliku:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \tag{6.1}$$

sa obavezno singularnom matricom E i ostalim konstantnim sistemskim matricama i odgovarajućim početnim uslovima, o kojima će kasnije biti više reči .

Kao i kod običnih sistema sa kašnjenjem prvobitno stanje sistema, ovde, se iskazuje kroz *funkciju* konzistentnih početnih uslova.

Pored uvek interesantnog istraživanja osobina stabilnosti ove klase sistema, koje se javlja u relevantnoj literaturi, počev tek od 2000. godine, ne manji značaj se poklanja ispitivanjima kojima se može proceniti njihova robusnost u uslovima njihovog normalnog funkcionisanja a u prisustvu strukturnih ili nestrukturnih neizvesnosti prouzrokovanih nedovoljnom preciznošću matematičkog modeliranja, otkazu pojedinih komponenti ili neprestanim delovanjem unutrašnjih i / ili spoljašnjih perturbacija.

U sferi ispitivanja stabilnosti, akcenat je je još uvek na istraživanjima vezanim za ljapunovsku stabilnost, dok se nešto manji broj radova bavi tzv. *neljapunovskom* (tehničkom) stabilnošću što najčešće podrazumeva koncepte stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ili praktičnu stabilnost.

S druge strane, imajući u vidu da ova klasa sistema sadrži i čisto vremensko kašnjenje, u literaturi se izdvajaju dva osnovna pristupa ovoj problematici kada su u pitanju odgovarajući kriterijumi koji iskazuju osobinu stabilnosti u formi ili potrebnih i dovoljnih ili samo dovoljnih uslova.

Naime, prva grupa kriterijuma u svoje konačne uslove uključuje iznos čistog vremenskog kašnjenja, tako da osobina stabilnosti razmatranog sistema zavisi kako od sistemskih matrica tako i od čisto vremenskog kašnjenja.

Druga grupa kriterijuma ne uzima u obzir iznos vremenskog kašnjenja i sa tog stanovišta bliža je inženjerskoj praksi, imajući u vidu da su ti kriterijumi obično dati u vidu samo dovoljnih uslova.

Kao neposredni rezultat ovih razmatranja, oličenih praktično u njihovoj analizi, sledeći interes se pokazuje u pravcu sinteze sistema, koja se u ovoj klasi problema, manifestuje kroz tzv. *stabilizaciju*, čime se praktično određuju uslovi pod kojima je moguće u prisustvu povratne sprege po veličinama stanja ili izlaznim veličinama postići zadovoljavajuće ponašanje sistema u zatvorenom kolu dejstva ostvareno zatvaranjem globalne povratne sprege.

6.2 Neka opšta pitanja dinamike singularnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem

Opšta klasa *singularnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem*, može se predstaviti svojim modelom u prostoru stanja, u vidu:

$$E(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{u}(t)\right), \qquad t \geq 0, \tag{6.2}$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad -\tau \leq t \leq 0, \tag{6.3}$$

u kojem su: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sistema, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ vektor upravljanja, $E(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kvadratna singularna vremenski promenljiva matrica.

$\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}\left([-\tau,\ 0],\ \mathbb{R}^n\right)$ je dozvoljena (prihvatljiva) funkcija početnih stanja.

$\mathcal{C}\left([-\tau,\ 0],\ \mathbb{R}^n\right)$ je *Banach*-ov prostor vremenskih neprekidnih funkcija, koje preslikavaju vremenski interval $[-\tau,\ 0]$ u $n-$dimenzioni realni prostor, u oznaci $\mathbb{R}^n$, sa topologijom uniformne konvergencije.

Norma elementa $\boldsymbol{\varphi}$ u *Banach*-ovom prostoru $\mathcal{B}$, uvodi se na sledeći način:

$$\| \boldsymbol{\varphi} \| = \sup_{\vartheta \in [-\tau,\ 0]} \| \boldsymbol{\varphi}(\vartheta) \|, \tag{6.4}$$

sa osobinom: $\mathbf{f} \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R},\ \mathbb{R}^n\right)$.

Linearna, neautonomna podklasa sistema, datog jed. (6.1), može se dati kao:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) + B\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), \ \ t \geq 0, \tag{6.5}$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad -\tau \leq t < 0, \tag{6.6}$$

pri čemu su : $A_0,\ A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ konstantne matrice, a $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ dovoljno glatka funkcija koja predstavlja spoljašnje uticaje na sistem.

6.2.1 Kanoničke forme

U analizi dinamičkih svojstava sistema značajnu ulogu igraju odgovarajuće kanoničke forme. Njihovim korišćenjem moguće je neposredno utvrditi određene osobine sistema, ne podvrgavajući ih propisanim metodološkim postupcima ili kriterijumima.

Kada su u pitanju odgovarajući postupci sinteze, kanonske forme omogućavaju i znatno olakšavaju značajan niz postupaka, koji se sprovode u savremenoj teoriji upravljanja, koja se u potpunosti oslanja na prostor stanja razmatranih sistema.

Iscrpan pregled kanoničkih formi, vremenski kontinualnih i vremenski diskretnih singularnih sistema, može se naći u lit. *Debeljković et al.* (1996.a, 1996.b, 2005.b) i *Debeljković et al*. (1998, 2005.c), sledsveno.

Kada su u pitanju *singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem*, jedna od najčešće susretanih kanoničkih formi, za sistem dat jed. (6.2), data je u sledećem vidu, *Wei* (2004):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= A_0^{11}\mathbf{x}_1(t) + A_1^{11}\mathbf{x}_1(t-\tau) + A_1^{12}\mathbf{x}_2(t-\tau) + B^1\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}_1(t) \\ N\dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \mathbf{x}_2(t) + A_1^{21}\mathbf{x}_1(t-\tau) + A_1^{22}\mathbf{x}_2(t-\tau) + B^2\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}_2(t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\mathbf{x}_1(t) = \boldsymbol{\varphi}_1(t), \quad \mathbf{x}_2(t) = \boldsymbol{\varphi}_2(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \tag{6.8}$$

gde je N nilpotentna matrica odgovarajuće dimenzije.

Pod pretpostavkom da je matrični par $(E,\ A)$ regularan i neimpulsan, *Debeljković et al*. (1996.a, 1996.b), uvek postoje dve regularne matrice: $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, takve da važi:

$$UEV = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UA_0V = \begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}, \quad UA_1V = \begin{pmatrix} A_1^{11} & A_1^{12} \\ A_1^{21} & A_1^{22} \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

gde su: $I_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $I_{(n-r)\times(n-r)} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ jedinične matrice, koje sistem dat jed. (6.2) – (6.3) u slobodnom radnom režimu mogu da prevedu u sledeću kanoničku formu, *Xu et al*., (2002):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= A_0^{11}\mathbf{x}_1(t) + A_1^{11}\mathbf{x}_1(t-\tau) + A_1^{12}\mathbf{x}_2(t-\tau) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{x}_2(t) + A_1^{21}\mathbf{x}_1(t-\tau) + A_1^{22}\mathbf{x}_2(t-\tau) \end{aligned} \tag{6.10}$$

6.2.2 Opšta rešenja sistema singularnih diferencijalnih jednačina sa čistim vremenskim kašnjenjem

U narednim izlaganjima polazi se od opšteg matematičkog modela *singularnog sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem,* u sledećem vidu:

$$E(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + A_0(t)\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{p} A_{1i}(t)\mathbf{x}(t-\tau_i) + \mathbf{f}(t) \tag{6.11}$$

koji se, u osnovi, strukturalno ne razlikuje od prethodno iznetih.

Za detaljnija razmatranja posmatraće se posebna klasa ovih sistema, samo sa jednim kašnjenjem i vremenski konstantnim matricama. Bez gubitka opštosti, može se pretpostaviti da je $\tau \geq 0$ a $\tau_0 = 1$.

Tada se jed. (6.11), svodi na:

$$E(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + A_0\mathbf{x}(t) = A_1\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{f}(t); t \geq 0 \tag{6.12}$$

Razmatra se prvo slučaj kada je matrica E regularna. Tada jed. (6.4) poprima sledeći oblik:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) + A_0\mathbf{x}(t) = A_1\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{f}(t); t \geq 0 \tag{6.13}$$

Da bi se odredilo jedinstveno rešenje jed. (6.13), mora se prethodno specificirati proizvoljna neprekidna početna funkcija $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ definisana na vremenskom intervalu $[-1,\ 0]$.

Tada postoji jedinstveno rešenje jed. (6.13) na intervalu $[-1,\ 0]$ tako da je $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(0^-)$.

Nastavljajući u tom maniru, za dato rešenje na intervalu $[0,\ n]$, jed. (6.13) ima *jedinstveno* rešenje na intervalu $[n,\ n+1]$, tako da je: $\mathbf{x}(n^+) = \mathbf{x}(n^-)$, a rešenje postoji na intervalu $[0,\ n+1]$. Prema tome, jedinstveno, neprekidno rešenje jed. (6.13), postoji na intervalu $[-1,\ \infty[$ za bilo koju neprekidnu funkciju definisanu na intervalu $[-1,\ 0]$.

Jed. (6.12) će se razmatrati pod pretpostavkom da je matrica $(\lambda E + A_0)$ invertibilna za neko λ. Ponašanje sistema,opisanog sa jed. (6.12) značajno se razlikuje od dinamike sistema da tog jed. (6.13).

Kao što se i očekivalo funkcija $\mathbf{x}(t)$, za sistem dat jed. (6.12), ne može se proizvoljno usvajati na intervalu $[-1,0]$[10].

[10] Dva eklatantna primera, u vezi ovih razmatranja, mogu se naći u *Debeljković et al.* (2004).

Ako se u jed. (6.12), stavi $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, dobija se odgovarajuća homogena jednačina:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) + A_0\mathbf{x}(t) = A_1\mathbf{x}(t-1) \tag{6.14}$$

Sasvim je jasno da sva rešenja jed. (6.12) imaju oblik $\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t)$, gde je $\mathbf{x}_p(t)$ rešenje jed. (6.12) i $\mathbf{x}_h(t)$ je bilo koje rešenje jed. (6.8).

Pokazaće se da jed. (6.12) ima uvek, bar jednu funkciju početnih uslova za koju jed. (6.12) ima rešenje na intervalu $[-1,\ \infty[$, *Campbell,* (1980).

Zatim će se odrediti svi konzistenetni početni uslovi za jed. (6.14) i za interval $[-1,\ \infty[$ i za interval $[-1,\ n[$.

Neka su $\{\mathbf{x}_n(t)\}$, $n \ge 1$ i $\{\mathbf{f}_n(t)\}$, $n \ge 1$ dve sekvence beskonačno diferencijabilnih funkcija definisane na intervalu $[0,\ 1]$.

$\mathbf{x}_n(t)$ (odnosno $\mathbf{f}_n(t)$) tretiraće se kao $\mathbf{x}$ (odnosno $\mathbf{f}$) na intervalu $[n-1,\ n]$.

Sistem, dat jed. (6.14), sada se transformiše u:

$$E\dot{\mathbf{x}}_n(t) + A_0\mathbf{x}_n(t) = A_1\mathbf{x}_{n-1}(t) + \mathbf{f}_n(t); n \ge 1 \tag{6.15}$$

za dato $\mathbf{x}_0$.

Potrebno je naći sve one početne funkcije $\mathbf{x}_0(t)$ za koje jed. (6.15) ima rešenje $\{\mathbf{x}_l\}_{l=0}^{r}$ takvo da je $\mathbf{x}_l(1) = \mathbf{x}_{l+1}(0)$.

Na osnovu rezultata datih u *Campbell* (1980), za $n \ge 1$, može da se napiše:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_n(t) = {} & e^{-\hat{E}^D\hat{A}_0 t}\hat{E}^D\hat{E}\mathbf{x}_n(0) + \hat{E}^D e^{-\hat{E}^D\hat{A}_0 t}\int_0^t e^{-\hat{E}^D\hat{A}_0\kappa}\left(A_1\mathbf{x}_{n-1}(\kappa) + \mathbf{f}_n(\kappa)\right)d\kappa \\ & + \left(I - \hat{E}^D\hat{E}\right)\sum_{m=0}^{k-1}\left(-\hat{E}\hat{A}_0{}^D\right)^m \hat{A}_0{}^D\left(A_1\mathbf{x}_{n-1}^{(m)}(t) + \mathbf{f}_n^{(m)}(t)\right)\end{aligned} \tag{6.16}$$

gde su:

$$\begin{aligned}\hat{E} &= (\lambda E + A_0)^{-1}E, & \hat{A}_0 &= (\lambda E + A_0)^{-1}A_0 \\ \hat{A}_1 &= (\lambda E + A_0)^{-1}A_1, & \hat{\mathbf{f}}_n(t) &= (\lambda E + A_0)^{-1}\mathbf{f}_n(t)\end{aligned} \tag{6.17}$$

a k je indeks matrice $\hat{E}$.

S obzirom da će se ovim izrazom često manipulisati, neka je: $P = \hat{E}^D\hat{E}$, $Q = \hat{E}^D\hat{A}_0$ i $H = -\hat{E}\hat{A}_0{}^D$.

Primetimo da je P projekcija, a P, Q, H su sve komutativne matrice.

Tako se dobija:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_n(t) &= e^{-Qt}P\mathbf{x}_n(0)+\hat{E}^D e^{-Qt}\int_0^t e^{-Q\kappa}\left(\hat{A}_1\mathbf{x}_{n-1}(\kappa)+\mathbf{f}_n(\kappa)\right)d\kappa \\ &+(I-P)\sum_{m=0}^{k-1}H^m\hat{A}_0^D\left(\hat{A}_1\mathbf{x}_{n-1}^{(m)}(t)+\mathbf{f}_n^{(m)}(t)\right)\end{aligned} \tag{6.18}$$

Bez obzira kakvo je $\mathbf{x}_{n-1}(t)$, stavljajući $P\mathbf{x}_n(0)=P\mathbf{x}_{n-1}(1)$ čini $P\mathbf{x}(t)$ neprekidno u tački *n*.

Poteškoće se javljaju sa izrazom $(I-P)\mathbf{x}(t)$ u *n*.

Ima se:

$$(I-P)\mathbf{x}_1(0)=(I-P)\mathbf{x}_0(1) \tag{6.19}$$

što daje:

$$(I-P)\mathbf{x}_0(1)=(I-P)\sum_{m=0}^{k-1}H^m\hat{A}_0^D\left(\hat{A}_1\mathbf{x}_{n-1}^{(m)}(0)+\hat{\mathbf{f}}_n^{(m)}(0)\right) \tag{6.20}$$

Pokazaće se da za dato $\mathbf{f}$ i bilo koje $\left\{\mathbf{x}_0^{(m)}(0)\right\}, m\geq 0$ može se dobiti traženo rešenje, specificirajući samo $\mathbf{x}_0^{(m)}(1)$.

Uzmimo jed. (6.20) za definisanje izraza $(I-P)\mathbf{x}_0(1)$.

Za $n\geq 1$, dobija se:

$$(I-P)\mathbf{x}_n(t)=(I-P)\sum_{m=0}^{k-1}H^m\hat{A}_0^D\left(\hat{A}_1\mathbf{x}_{n-1}^{(m)}(0)+\hat{\mathbf{f}}_n^{(m)}(0)\right) \tag{6.21}$$

Znači zahtev da:

$$(I-P)\mathbf{x}_n(0)=(I-P)\mathbf{x}_{n-1}(1) \tag{6.22}$$

da bude zadovoljeno za $n\geq 2$, je:

$$(I-P)\sum_{m=0}^{k-1}H^m\hat{A}_0^D\hat{A}_1\left(\mathbf{x}_{n-1}^{(m)}(0)-\mathbf{x}_{n-2}^{(m)}(1)\right)=\mathbf{0} \tag{6.23}$$

s obzirom da je: $\hat{\mathbf{f}}_n^{(m)}(0)=\hat{\mathbf{f}}_{n-1}^{(m)}(1)$, $m\geq 0$, $n\geq 2$.

Iz jed. (6.18), za $n\geq 1$ i $r\geq 1$, dobija se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_n^{(r)}(t) &= (-Q)^r e^{-Qt} P\mathbf{x}_n(0) + \\ &\hat{E}^D (-Q)^r e^{-Qt} \int_0^t e^{Q\kappa} \left(\hat{A}_1 \mathbf{x}_{n-1}(\kappa) + \mathbf{f}_n(\kappa)\right) d\kappa + \\ &+ \hat{E}^D \sum_{l=0}^{r-1} Q^{r-l-1} \left(\hat{A}_1 \mathbf{x}_{n-1}{}^{(l)}(t) + \hat{\mathbf{f}}_n{}^{(l)}(t)\right) + \\ &(I-P) \sum_{m=0}^{k-1} H^m \hat{A}_0{}^D \left(\hat{A}_1 \mathbf{x}_{n-1}^{(m+r)}(t) + \hat{\mathbf{f}}_n{}^{(m+r)}(t)\right)\end{aligned} \tag{6.24}$$

U posebnom slučaju:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1{}^{(r)}(0) &= (-Q)^r P\mathbf{x}_1(0) + \hat{E}^D \sum_{l=0}^{r-1} Q^{r-l-1} \left(\hat{A}_1 \mathbf{x}_0{}^{(l)}(0) + \hat{\mathbf{f}}_1{}^{(l)}(0)\right) \\ &+ (I-P) \sum_{m=0}^{k-1} H^m \hat{A}_0{}^D \left(\hat{A}_1 \mathbf{x}_0^{(m+r)}(0) + \hat{\mathbf{f}}_0{}^{(m+r)}(0)\right)\end{aligned} \tag{6.25}$$

Definišimo $\mathbf{x}_0^{(r)}(1) = \mathbf{x}_1^{(r)}(0)$, gde je $\mathbf{x}_1^{(r)}(0)$ dato jed. (6.25).

Da beskonačno diferencijabilna funkcija na intervalu $[0,\ 1]$ postoji za proizvojno izabrane $\{\mathbf{x}^{(r)}(0)\}$, $\{\mathbf{x}^{(r)}(1)\}$ pokazano je u lit. *Campbell* (1980).

Neka je $\mathbf{x}_0(t)$ baš takva jedna funkcija.

Pokazaće se u nastavku da je to konzistentni početni uslov.

Za dato to $\mathbf{x}_0$, može se sračunati $\mathbf{x}_1$, a na osnovu uspostavljenih veza odrediti $\mathbf{x}_0(1) = \mathbf{x}_0(0)$, $m \geq 1$.

Pretpostavimo dalje da raspolažemo sa $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n$ i da je:

$$\mathbf{x}_r^{(m)}(1) = \mathbf{x}_{r+1}^{(m)}(0), m \geq 0,\ r \leq n-1 \tag{6.26}$$

Pokazaće se da dobijamo sličan izraz i za $\mathbf{x}_{n+1}$.

Koristeći jed. (6.26),vidi se da je jed. (6.23) zadovoljena.

Definicija izraza $P\mathbf{x}_{n+1}$ u smislu jed. (6.16), beskonačna diferencijabilnost funkcije $\mathbf{f}$ i indukciona hipoteza definisana jed. (6.26) primenjena na jed. (6.27) znači da je:

$$\mathbf{x}_n{}^{(m)}(1) = \mathbf{x}_{n+1}{}^{(m)}(0) \tag{6.27}$$

čime je potvrđen indukcioni princip.

Teorema 6.1 Ako je funkcija $\mathbf{f}(t)$ beskonačno diferencijabilna na intervalu $[0, +\infty[$, a $\{\mathbf{x}_0^{(m)}(0)\}$ predstavlja proizvoljnu sekvecu brojeva, $\mathbf{x}_0(t)$ je bilo koja beskonačno diferencijabilna funkcija na intervalu $[0,\ 1]$, sa takvim izvodima u nuli da je $\mathbf{x}_0^{(m)}(1)$ dato jed. (6.25), tada je jed. (6.12) konzistentna i ima beskonačno diferencijabilno rešenje.

Neka je $\mathcal{E}$ potprostor prostora $\mathbb{C}^n$, koji sadrži beskonačno diferencijabilne funkcije na intervalu $[0,\ 1]$ sa familijom polunormi:

$$\rho_m(\mathbf{f}) = \sup_{0 \le t \le 1} \left\| \mathbf{f}^{(m)}(t) \right\| \tag{6.28}$$

Za bilo koji celi broj n, neka $\mathcal{E}_n$ bude skup onih početnih uslova $\mathbf{x}_0(t)$ koje pripadaju $\mathcal{E}$ za koje neprekidno rešenje jed. (6.15) postoji na intervalu $[0,\ n]$.

Teorema 6.2 Svaki skup $\mathcal{E}_n$ je zatvoreni potprostor prostora $\mathcal{E}$, tj. $\mathcal{E}_n \supseteq \mathcal{E}_{n+1}$.

Skup konzistentnih početnih uslova:

$$\mathcal{E}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \tag{6.29}$$

je beskonačno dimenzioni zatvoreni potprostor, prostora $\mathcal{C}$.

Literatura

Amir-Moez, A., “Extreme properties of a hermitian transformations and singular values of sum and product of linear transformations”, Duke Math J., **23** (1956) 463-476.

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations,* Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations II,* Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Application of singular system theory in chemical engineering: Analysis of process dynamics", Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Prague (Czech Republic), Process Eng. Publishing, 1996.a.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi Automatskog Upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A. Jacić, *Diskretni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Staiblnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, 1999.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Čogoja štampa, Beograd, 2004.

Debeljković, D. Lj., Lj. A. Jacić, M. S. Medenica, *Sistemi sa kašnjenjem*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.a.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.b.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A. Jacić, *Diskretni deskriptivni sistemi*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.c

Gu, K., V. L. Kharitonov, J. Chen, *"Stability of Time-Delay Systems"*, Burkhauser, Boston 2003.

Hale, J., *Functional Differential equations*, Springer Verlag, New York, 1977.

Malek-Zavarei, M.,M. Jamshidi, *Time-Delay Systems: analysis, optimization and applications*, ser., Systems and Control, Amsterdam, The Nederlands: North-Holland, 1987, vol.9.

Wei, J., "General solution and observability of singular differential systems with time-delay", *Automatica*, 2004.

Xu, S., C. Yang, "An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems", *Int. J. System Science*, Vol.31, (2000.a) 55-61.

Xu, S., P. V. Dooren, R. Stefan, J. Lam, “Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty”, *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-47** (7) (2002) 1122-1128.
Xu, S., J. Lam, C. Yang, “Robust $H\infty$ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty”, *J. of Dynamics Continuous, Discrete Impulsive Systems,* (Canada), (2004).

7. DINAMIKA DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

Prema dostupnim saznanjima autora, do sada se pojavio samo mali broj radova posvećenih problematici i izučavanju dinamike ove klase sistema automatskog upravljanja.

Većina tih radova, od kojih treba pomenuti *Xu et al.* (2001, 2002) i *Xu*, *Yang* (2000.a, 2000.b) se prevashodno bave ljapunovskom stabilnošću sistema, ne ulazeći u druge dinamičke osobine ove klase sistema.

7.1 Uvodna razmatranja

Ovde će se posmatrati klasa linearnih vremenski diskretnih autonomnih, višestruko prenosnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, predstavljenih svojom vektorskom diferencijalnom jednačinom stanja i jednačinom izlaza:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{N} A_j\mathbf{x}(k-h_j), \tag{7.1}$$

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, -h+1, \ldots, 0\} \tag{7.2}$$

pri čemu su: $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sistema, $E, A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sistemske matrice, $j = 1, 2, \,\,,$ h je pozitivan ceo broj koji predstavlja čisto vremensko kašnjenje u stanju sistema, tako da važi: $0 = h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq, \ldots h_N$, sa matricom E obavezno singularnom, a $\boldsymbol{\psi}(\vartheta)$ je unapred poznata diskretna vektorska početna funkcija.

U posebnom slučaju jed. (7.1), svodi se na:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-h), \tag{7.3}$$

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, -h+1, \ldots, 0\} \tag{7.4}$$

Za izlaganja koja slede potrebno je bliže odrediti neke bitne osobine ove posebne klase linearnih vremenski diskretnih deskriptivnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Definicija 7.1 Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (7.2), je *regularan* ako važi:

$$\det\left(z^2 E - zA_0 - A_1\right) \neq 0 \tag{7.5}$$

Definicija 7.2 Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (7.2), je *kauzalan* (uzročan) ako je regularan i ako važi:

$$\deg ree\left(z^n \det\left(zE - A_0 - z^{-1} A_1\right)\right) = n + rang\ E \tag{7.6}$$

Definicija 7.3 Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (18.2) je *stabilan* ako je *regularan* i ako $\mathcal{Z}\left(E, A_0, A_1\right) \subset \mathcal{D}(0, 1)$, gde je:

$$\mathcal{Z}\left(E, A_0, A_1\right) = \left\{z \mid \det\left(z^2 E - zA_0 - A_1\right) = 0\right\} \tag{7.7}$$

a $\mathcal{D}(0, 1)$ skup (otvoreni) tačaka unutar jediničnog kruga u z ravni sa centrom u njenom ishodištu..

Definicija 7.4 Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem je *dopustiv* ako je *regularan*, *uzročan* i *stabilan*.

Sve prethodne *Definicije* preuzete iz rada *Xu et al*. (2002).

Literatura

Debeljkovic, D.Lj., *Linearni singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem*, Mašinski fakultet u Beogradu 2010

Gu, K., V. L. Kharitonov, J. Chen, *Stability of time-delay systems*, Burkhauser, Boston 2003.

Kamen, E. W., *Introduction to signals and systems*, MacMillan Publ. Company, New York, 1990.

Malek - Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time-delay systems. analysis, optimization and applications*, Ser,. Systems and Control, Amsterdam, The Netherlands: North Holland, Vol. 9, 1987.

Xu, S., C. Yang, "An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems", *Int. J. System Science*, Vol. 31, (2000.a) 55-61.

Xu, S., C. Yang, "H_∞ State feedback control for discrete singular systems", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-45** (6) (2000.b) 1405-1409.

Xu, S., C. Yang, Y. Niu, J. Lam, "Robust stabilization for uncertain discrete singular systems", *Automatica*, Vol. 37, (2001.a) 769-774.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay", *Systems Control Lett.* (43), (2001.b) 77-84.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty", *Dynamics Continuous*, *Discrete Impulsive Systems*, Vol. 9, No. 4, (2002) 539 – 554.

III OPŠTA PITANJA TEORIJE STABILNOSTI SISTEMA

8. OSNOVNI KONCEPTI STABILNOSTI - LJAPUNOVSKA, NELJAPUNOVSKA I TEHNIČKA STABILNOST SISTEMA

8.1 Uvodna razmatranja

U savremenoj teoriji upravljanja sistemima predloženi su i koriste se različiti koncepti stabilnosti, kao na primer: ljapunovska, neljapunovska i tehnička stabilnost, stabilnost tipa "ograničeni ulaz - ograničeni izlaz", i slično od kojih se, u prvom redu očekuje da odgovore na sledeća suštinska pitanja:

- O čijoj se stabilnosti radi?
- Kako se definiše rastojanje između posmatranih stanja, odnosno kretanja u odnosu na razmatrano stanje, čija se stabilnost ispituje?
- Kako se definiše "bliskost" između stanja, odnosno kretanja?
- Pod kojim uslovima se zahteva tražena "bliskost"?
- Na kom se vremenskom intervalu zahteva tražena "bliskost"?

U standardnom kontekstu ovih razmatranja, uvažavajući usvojenu klasu sistema, uobičajeno je da se prvo razjašnjavaju pitanja vezana za definiciju, postojanje, jedinstvenost i stabilnost ravnotežnog stanja sistema, a zatim se, shodno predloženom konceptu, izlaže *definicija* i odgovarajući *uslov stabilnosti*.

Na taj način, dolazi se do potrebne platforme i pozicija sa kojih je moguće efikasno analizirati dinamičko ponašanje razmatranog sistema sa željenog aspekta.

Jasno je da se, korišćenjem odgovarajućih kriterijuma, mogu dobiti odgovori po pitanju stabilnosti razmatranih sistema i bez rešavanja njihovih diferencijalnih jednačina kretanja, čime se postiže pun analitički efekat.

Standardni savremeni udžbenici i citirane monografije pružaju veliku mogućnost da se zainteresovani čitalac dublje upozna sa ovom problematikom.

U tom smislu, preporučuju se klasična dela: *Ljapunov* (1956), *Hahn* (1963, 1967), *Krasovskii* (1963), *Rouche et al.* (1977), *Yoshizava* (1996), a od novijih *Grujić et al.* (1984) i *Khalil* (1980).

Da bi se omogućilo efikasno praćenje i sagledavanje materije i doprinosa autora ove disertacije teoriji stabilnosti sistema sa kašnjenjem, koji će biti prezentovani u narednim izlaganjima, izložiće se u nastavku *deo razmatranja*, u celosti preuzet iz lit. *Grujić*

(1970) koji, na jedinstven, rigorozan i koncizan način daje najcelovitiju podlogu za traženje odgovora po svim ranije postavljenim pitanjima.

Samim tim, pružiće se prilika da se nešto kasnije generalno razmotre fundamentalna pitanja teorije stabilnosti sistema, da se jasno razgraniče postojeći koncepti stabilnosti, uoče njihova izvorna polazišta i motivacije nastajanja, kao i da se nedvosmisleno odrede prema značaju i primenjivosti istih u praksi.

8.2 O stabilnosti sistema

Problem ispitivanja stabilnosti je jedan od najosnovnijih i najvažnijih zadataka koji je potrebno rešiti pri analizi i sintezi ponašanja svih, a posebno zatvorenih, sistema automatskog upravljanja.

Stabilnost sistema izražava jednu od njegovih najbitnijih osobina i, najprostije rečeno, ona iskazuje da li se razmatrani sistem odlikuje stalnošću određene karakteristike svog ponašanja koje predstavlja rezultat njegovog kretanja i delovanja, pri čemu pojam kretanja treba shvatiti u najširem smislu te reči, *Grujić* (1970).

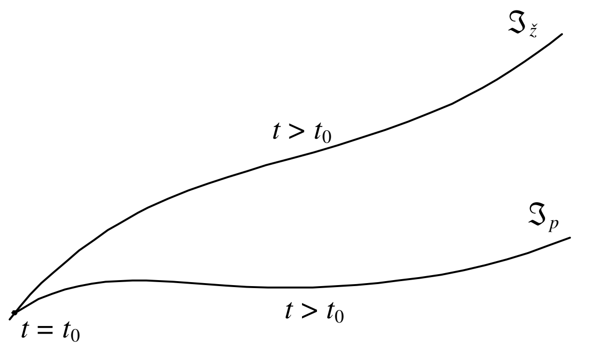
Kao što je poznato, postoji veoma veliki broj definicija stabilnosti, pri čemu su one nastale ili nastaju kao rezultat različitih praktično-tehničkih zadataka i težnji da se što dublje i preciznije iskaže ova značajna osobina sistema.

Za sveobuhvatno poimanje stabilnosti i kasnije proisteklih koncepata od *suštinskog značaja* je razmotriti i uočiti sledeća pitanja i pojmove, koji se ovde izvorno prenose iz lit. *Grujić* (1970).

Uočimo sistem koji se do nekog trenutka $t = t_0$ kreće na željeni (zahtevan) način. Pretpostavlja se da je poznato željeno kretanje i nakon trenutka $t = t_0$, kako je to ilustrovano na sl.8.1.

Dalje se pretpostavlja da će se sistem kretati po trajektoriji $\Im_{\hat{z}}$ i za $\forall t \geq t_0$ ukoliko njegov rad ne bude poremećen iz bilo kog razloga. U tom slučaju, njegovo kretanje naziva se *neporemećenim*.

Sa druge strane, može se postaviti pitanje kako će se sistem kretati ako od trenutka $t = t_0$ bude podvrgnut delovanju nekog neželjenog uticaja? Da li će stvarno kretanje, koje sada predstavlja *poremećeno* kretanje, prikazano trajektorijom $\Im_p$, sl. 8.1, biti dovoljno blizu željenog $\Im_{\check{z}}$ za $\forall t \geq t_0$ i da li će mu se vremenom približavati ili će se udaljavati od njega?

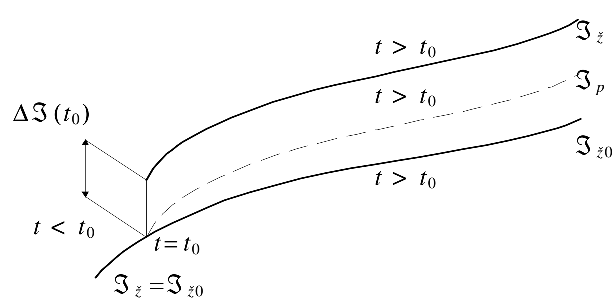


Sl. 8.1

Odstupanje stvarnog kretanja sistema od željenog ne mora da bude posledica neželjenog uticaja samo neke spoljne veličine.

U trenutku $t = t_0$ može da se promeni željeno kretanje $\Im_{\check{z}}$ i da odstupi od prvobitno željenog kretanja, odnosno trajektorije $\Im_{\check{z}0}$ za $t \geq t_0$. U graničnom slučaju, može se pretpostaviti da se promena željenog kretanja odvija momentalno u trenutku $t = t_0$.

Ako sistem nije podvrgnut nikakvim neželjenim i nepredvidljivim spoljašnjim uticajima, može se reći da u trenutku $t = t_0$ postoji početno odstupanje $\Delta\Im(t_0)$ stvarnog od željenog kretanja $\Im_{\check{z}}$, sl. 8.2.



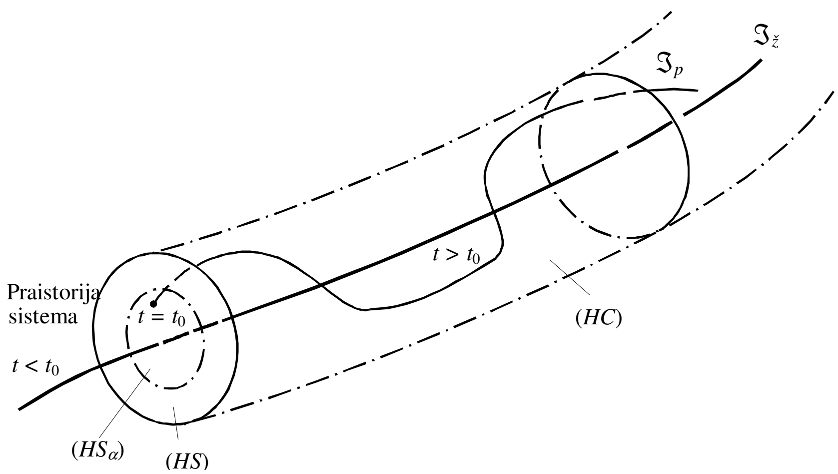
Sl. 8.2

Stvarno kretanje sistema i dalje karakteriše trajektorija $\Im_p$, sl. 8.2.

Kretanju sistema, tj. njegovom stvarnom ponašanju, postavljaju se određeni zahtevia, priroda tih zahteva zavisi od potrebe rešavanja konkretnih zadataka.

Može se, na primer, zahtevati da stvarno kretanje $\Im_p$ ne odstupa od željenog $\Im_{\check{z}}$ ni u jednom trenutku više nego sto je dozvoljeno, čim je to odstupanje posledica uticaja bilo početnih odstupanja, bilo neželjenog dejstva nekih spoljašnjih veličina, u okvirima njihovih prirodno dozvoljenih intenziteta[11].

Ako se prethodno razmatranje interpretira u prostoru stanja, sl.8.3, jasno je da se stvarna trajektorija $\Im_p$ nalazi stalno u hipercilindru $(HC)^{\dagger}$, čiju osu predstavlja željena trajektorija $\Im_{\check{z}}$, a bazu hipersfera (HS) sa centrom na $\Im_{\check{z}}$ u trenutku $t = t_0$, sl.8.3.



Sl. 8.3

Ukoliko je poremećeno kretanje nastalo kao posledica delovanja nenultih početnih uslova, oni treba da pripadaju hipersferi (HS_α) dozvoljenih početnih stanja za koje će trajektorija $\Im_p$ sigurno, sve vreme, biti u hipercilindru (HC), *Grujić* (1970).

---

[11] Spisak svih oznaka dat je u ***Dodatku*** **A**.

[†] U trodimenzionalnom prostoru stanja hipercilindar postaje običan cilindar, čija osa, kao i izvodnica, nisu u opštem slučaju prave linije. Kada su u zadacima postavljena *ograničenja* vrednostima veličina stanja, umesto hipercilindra posmatra se hiper-prizma sa hiperparalelopipedom kao osnovom.

Za dalja razmatranja, usvaja se da ponašanje sistema ne zavisi od njegove "*praistorije*", što praktično znači da stanje sistema $\mathbf{X}(t)$ u trenutku t, zavisi samo od početnog stanja sistema $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(t)$ početnog trenutka t_0 i trenutka t.

Neka je stvarno ponašanje sistema opisano vektorskom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathbf{X}(t)) \tag{8.1}$$

a željeno ponašanje sa :

$$\dot{\mathbf{X}}_{\check{z}}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathbf{X}_{\check{z}}(t)) \tag{8.2}$$

Na osnovu jed. (8.1) i jed. (8. 2) dobija se vektorska diferencijalna jednačina ponašanja u odstupanjima kao:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t)) \tag{8.3}$$

u kojoj je:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_{\check{z}}(t) \tag{8.4}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{X}(t)) = \boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathbf{X}(t),) - \boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathbf{X}_{\check{z}}(t)), \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \tag{8.5}$$

Jasno je da jed. (8.1) opisuje *stvarno kretanje* $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)$ prikazano trajektorijom $\Im_p$, sl. 8.3, da jed. (8.2) opisuje *neporemećeno kretanje* $\mathbf{X}_{\check{z}}(t, \mathbf{X}_{\check{z}0}, t_0)$ kojem odgovara trajektorija $\Im_{\check{z}}$, sl. 8.3, a da jed. (8.3) opisuje *poremećeno* kretanje.

U početnom trenutku $t = t_0$, važi:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(t_0), \quad \mathbf{X}_{\check{z}0} = \mathbf{X}(t_0) \tag{8.6}$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \tag{8.7}$$

Za odstupanja se dobija, na osnovu jed.(8.4):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \tag{8.8}$$

Kada je $\Im_{\check{z}}$ geometrijsko mesto tačaka u prostoru stanja, govori se o *stabilnosti procesa*.

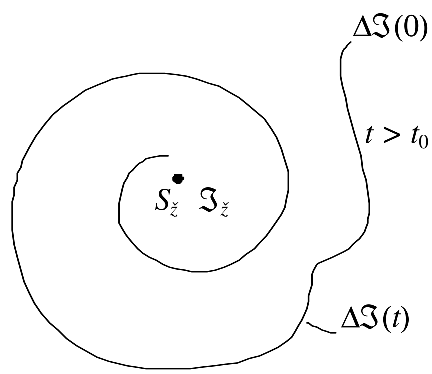
Ako se željena trajektorija $\Im_{\check{z}}$ degeneriše u tačku $S_{\check{z}}$, koja predstavlja određeno stanje, govori se stabilnosti *ravnotežnog stanja*.

Željeno stanje kretanja tada je *stanje mirovanja*, sl. 8.4.

Razmatranje stabilnosti kretanja (sistema, procesa) može se svesti na ispitivanje *stabilnosti ravnotežnog položaja* ako se za željenu trajektoriju $\Im_{\check{z}}$ veže *pokretan koordinatni sistem*.

Tada se dobijaju *jednačine poremećenog kretanja*, jed. (8.3) do jed. (8.5), iz kojih se vidi da je željeno odstupanje $\mathbf{x}_{\check{z}}(t)=\mathbf{0}$, što znači da se *željeno stanje nalazi u koordinatnom početku tog pokretnog koordinatnog sistema*, *Grujić* (1970), pa se ispitivanje stabilnosti sistema svodi na ispitivanje stabilnosti ravnotežnog položaja njegovog poremećenog kretanja.

Ovde razmatrana pitanja, uz jasno razgraničavanje pojmova poremećenog i neporemećenog kretanja sistema, kao i mogući odgovori na ranije postavljena pitanja, omogućila su i dalje omogućavaju da se predloži veliki broj definicija stabilnosti iz kojih proističu i brojni koncepti ove značajne osobine sistema.



Sl 8.4

U odeljcima koji slede biće data kratka rekapitulacija dobro poznatih i danas najviše korišćenih koncepata stabilnosti, sa posebni osvrtom i naglašenim razmatranjem *koncepta stabilnosti sistema na konačnom vremenskom intervalu*, što predstavlja prirodno, pojačano interesovanje za ovu problematiku, s obzirom da on predstavlja okosnicu ove disertacije u primeni na *sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem* i posebne klase *singularnih sistema*.

8.3 Pregled osnovnih koncepata stabilnosti sistema

U lit. *Grujić* (1970) date su brojne definicije stabilnosti, primenljive kako na sisteme u slobodnom, tako i u prinudnom radnom režimu. Pored već klasične *ljapunovske* definicije stabilnosti, pomenute su i navedene su definicije stabilnosti u *smislu Lagrange-a, totalne, apsolutne, orbitalne i hiperstabilnosti*. Osim toga, iznete su i definicije osobine privlačenja i asimptotske stabilnosti, kao i ravnomerne i globalne stabilnosti.

Zbog potrebe poznavanja brzine kojom se poremećeno kretanje približava neporemećenom, spomenute su i date definicije *eksponencijalne stabilnosti* ravnotežnog stanja, kao i moguća rešenja razmatranih sistema.

Priroda većine realnih sistema je takva da na njih deluju poremećaji čiji su trenuci nastajanja i intenziteti, u opštem slučaju, nepoznati, što im s punim pravom daje sva obeležja stohastičkih procesa.

Jasno je da se stabilnost takvih sistema razmatra u prinudnom radnom režimu, a uobičajeno se takvi poremećaji tretiraju kao *Markovljevi procesi*.

Samim tim, sve uvedene definicije stabilnosti moraju se iskazati na *probabilistčki način*, odnosno kroz odgovarajuću meru verovatnoće, što je takođe dato u ranije navedenoj referenci.

I konačno, razmatran je izvestan broj definicija koje se odnose na neke osobine stabilnosti *stacionarnih skupova*[*], *Grujić* (1970).

Lako se uviđa da se izvesni koncepti stabilnosti međusobno niti uslovljavaju, niti isključuju, što praktično znači da pozitivni zaključci po jednom primenjenom konceptu ne znače afirmativni zaključak po drugom, i obrnuto.

U prethodnom pregledu nisu spomenute definicije praktične stabilnosti sistema koje su, takođe, u velikoj meri bile prisutne u citiranom radu, *Grujić* (1970).

To je učinjeno iz razumljivih razloga, jer su one tamo kao što će biti i ovde, za aktuelno razmatrane klase sistema, osnovni predmet interesovanja.

[*] Skup ravnotežnih stanja sistema je stacionarni skup.

8.3.1 **Stabilnost sistema u smislu Ljapunova**

Kapitalno delo A. M. Ljapunova nastalo je 1892.[†] god. inspirisano idejom i delom A. Puankarea o kvalitativnoj analizi nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

Kroz svoju drugu metodu[‡], Ljapunov je uspeo da odgovori i reši fundamentalno pitanje opšte teorije stabinosti.

U tom smislu, dobijen je odgovor i rešenje zadatka ispitivanja stabilnosti *neporemećenog kretanja*, a bez rešavanja, odnosno integraljenja sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina, koje opisuju dinamiku razmatranog sistema, odnosno bez pojedinačnog određivanja i proučavanja *poremećenih kretanja* za svako početno stanje iz datog skupa stanja, *Grujić* (1974), *Grujić et al*. (1984).

U svojoj doktorskoj disertaciji, Ljapunov je utemeljio princip kvalitativne analize odnosa između *poremećenog* (stvarnog) i *neporemećenog* (željenog) kretanja.

Pri tome, on je posmatrao ponašanje odgovarajućih funkcija duž kretanja tih sistema. Te funkcije mogu da predstavljaju različite oblike energije i/ili materijalnih tokova u sistemu, što jasno ukazuje na njihov pun fizički smisao.

Oslanjajući se, dalje, na pojam neprekidnosti funkcija, Ljapunov je uveo suštinsku definiciju stabilnosti neporemećenog kretanja u odnosu na neke funkcije, potčinjene zahtevu $(\varepsilon-\delta)$ bliskosti vrednosti tih funkcija, uzetih duž poremećenog i neporemećenog kretanja, *Grujić et al*. (1984).

Sa druge strane, neposredni odgovor i uvid u stabilnost sistema dobija se neposredno iz jednačina *poremećenog kretanja*, a na osnovu uvedenih *funkcija određenih po znaku*.

Pomoću tih funkcija i njihovih totalnih izvoda, izračunatih saglasno jednačinama poremećenog kretanja, osnovni zadatak ispitivanja stabilnosti neporemećenog kretanja svodi se na ispitivanje ponašanja funkcija određenih po znaku duž kretanja sistema.

Znak totalnog izvoda te funkcije proverava se u svim tačkama koje pripadaju okolini neporemećenog kretanja.

Jasni zahtevi koje treba da ispunjava agregaciona funkcija i određenost (znak) njenog totalnog izvoda sračunatog duž rešenja poremećenog kretanja, bili su dati u pomenutoj

[†] A. M. *Ljapunov* (1892).

[‡] Direktna metoda Ljapunova, *Ljapunov* (1982).

disertaciji za slučajeve ravnomerne stabilnosti i ravnomerne asimptotske stabilnosti, kao i za nestabilnost neporemećenog kretanja.

Iako sam Ljapunov nije tačno odredio pojmove privlačenja i asimptotske stabilnosti, u odnosu na uvedene funkcije određene po znaku ovi značajni pojmovi javljaju se kasnije u radovima velikog broja naučnika i nedvosmisleno i više nego očigledno su povezani sa idejama koje je predočio Ljapunov, *Grujić et al*. (1984).

8.3.2 **Praktična stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu**

U praktičnim prilikama nije uvek od interesa razmatrati stabilnost sistema u smislu Ljapunova, već je ponekad od posebne važnosti utvrditi granice do kojih dosežu trajektorije sistema pri njegovom kretanju u integralnom prostoru stanja.

Sistem može da bude stabilan, pa čak i asimptotski stabilan, ali praktično neupotrebljiv zbog neprihvatljivih pokazatelja kvaliteta prelaznog procesa.

Zbog toga je od posebnog značaja razmatrati stabilnost sistema u odnosu na *zadate skupove dozvoljenih i početnih stanja* u faznom prostoru, koji su po pravilu *a priori* definisani za dati problem.

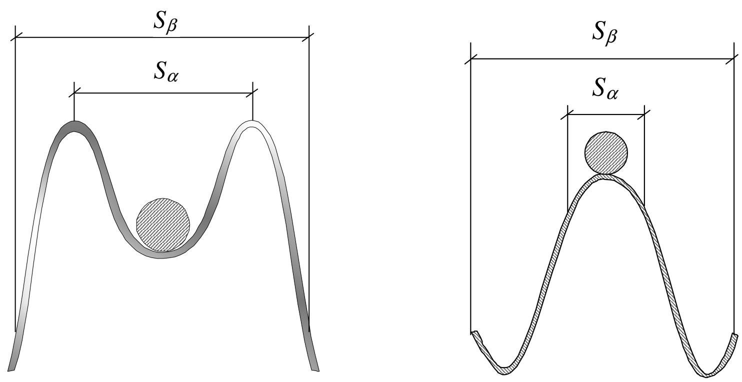
Sa druge strane, imajući u vidu veoma stroge i oprečne zahteve koji se danas nameću kvalitetu dinamičkog ponašanja realnih sistema, od posebnog je interesa razmatrati njihovo ponašanje i na *konačnom vremenskom intervalu*.

Prethodna izlaganja je neophodno potkrepiti nekim primerom iz prakse i u tom cilju razmotrimo ponašanje jednog čisto mehaničkog sistema, prikazanog na sl.8.5, u dve svoje moguće fizičke realizacije.

Istovetna razmatranja i objašnjenja mogu se bez ikakvih poteškoća proširiti i na sve ostale sisteme drugačije fizičke prirode.

Sa stanovišta ljapunovske stabilnosti, ravnotežno stanje sistema sa sl.8.5.a je *asimptotski stabilno*. Za sva dovoljno mala početna odstupanja, loptica će se vraćati u svoj prvobitni ravnotežni položaj.

Međutim, sa stanovišta *praktične stabilnosti*, ono je nestabilno jer je očigledno da će se za njegova pojedina stanja uzeta iz *skupa početnih stanja* S_α, njegovo dalje kretanje odvijati u smislu napuštanja *skupa dozvoljenih stanja* S_β.



(**b**)

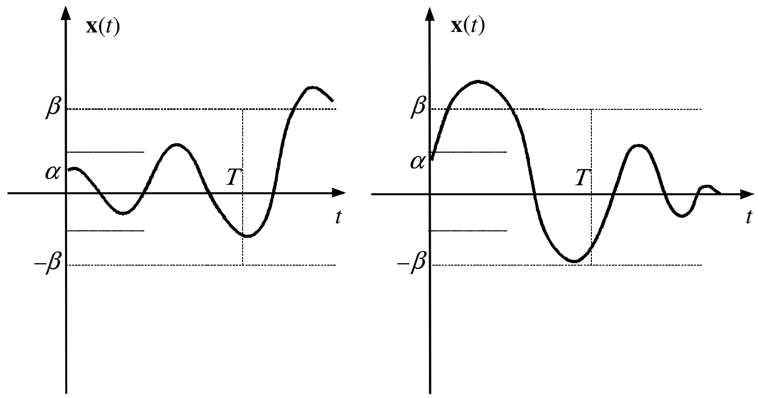
Sl. 8.5

U drugom slučaju, sl.8.5.b, za bilo koja mala odstupanja od ravnotežnog položaja, dalje kretanje sistema (loptice) će se stalno udalavati od njegovog ravnotežnog položaja, tako da je ravnotežno stanje ovog sistema, u ljapunovskom smislu *nestabilno*.

Ako je skup dozvoljenih stanja S_β definisan kao na slici, očigledno je da je sistem, odnosno njegovo ravnotežno stanje, *praktično stabilno* za sva početna stanja iz skupa početnih stanja S_α, jer se kretanje sistema *ne može* udaljiti od prvobitnog ravnotežnog stanja više nego sto su propisane (dozvoljene) granice skupa S_β.

Zbirno rečeno, sistem je *praktično stabilan* ako njegovo kretanje, koje je u početnom trenutku nastalo ili usled promene početnog stanja u skupu dozvoljenih početnih stanja S_α, i/ili usled dejstva spoljašnjih, dozvoljenih uticaja S_ε, treba na posmatranom vremenskom intervalu da ostane u unapred zadatom skupu dozvoljenih stanja sistema S_β.

Grafička interpretacija kretanja u prostoru stanja ova dva sistema, ilustrovana je na sl. 8.6, a vezano za njihova ponašanja na konačnom vremenskom intervalu[†], $\Im = \left[t_0, \left(t_0 + T\right)\right[$.



(a) (b)

Sl.8.6

Iz prethodnog primera lako se uočava suštinska razlika koncepta praktične stabilnosti i stabilnosti u smislu Ljapunova, a koja se, vezano za pitanje skupova $\mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_\beta$ i $\mathcal{S}_\varepsilon$ može sumarno izreći na sledeći način.

U konceptu ljapunovske stabilnosti *zahteva se postojanje* skupova $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\varepsilon$, uzetih u obliku hiperkugli u prostoru stanja, *za svaki otvoreni skup* $\mathcal{S}_\beta$ *dozvoljenih stanja*, koji garantuju da će ravnotežno stanje razmatranog sistema biti *totalno stabilno*[‡].

U konceptu praktične stabilnosti ovi skupovi $\left(\mathcal{S}_\alpha \wedge \mathcal{S}_\varepsilon\right)$ kao i skup $\mathcal{S}_\beta$ koji je *zatvoren* su *proizvoljnog oblika i unapred poznati ili zadati*, *Grujić* (1970).

Pored toga, koncept praktične stabilnosti nema *lokalni karakter*, a koordinatni početak *ne mora* da bude ravnotežno stanje sistema.

Koncept praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu poseduje izvesnu "relativnost", što se ogleda u činjenici da su do sada izvedeni rezultati uvek iskazani *dovoljnim uslovima* ove vrste stabilnosti.

[†] Koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu samo je poseban slučaj koncepta praktične stabilnosti.

[‡] *Ljapunovska stabilnost* u prisustvu stalnih poremećaja, *Grujić* (1970).

Ovo se može relativno lako objasniti činjenicom da se pomenuti uslovi ne izražavaju samo relevantnim osobinama samog sistema, već da se tu nalaze i podaci koji zavise od nametnutih ogrničenja kretanju sistema, kao i dužina vremenskog intervala na kome se ova osobina ispituje.

Sasvim je jasno da jedan te isti sistem u odnosu na neki skup $\{\Im, \alpha_1, \beta_1\}$ može biti praktično stabilan, a da se ta ista osobina ne može pokazati za neki drugi skup $\{\Im, \alpha_2, \beta_2\}$.

Slični zaključci mogu se izvesti ako se fiksiraju vrednosti $\alpha_{(.)}$ i $\beta_{(.)}$, a menja dužina vremenskog intervala $T_{(\cdot)}$.

8.3.3 Stabilnost tipa "Ograničeni ulaz-ograničeni izlaz"

Stabilnost tipa "ograničeni ulaz-ograničeni izlaz"[¶] spada, kao i praktična stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu u *koncepte neljapunovske stabilnosti*, pa je u tom smislu interesantan i značajan sa inženjerske tačke gledišta.

Definicija 8.1 Neka je $\mathbf{u}(t)$ *ograničeni* vektor ulaza sa vrednošću γ_m kao svojom gornjom granicom.[†] Ako postoji skalar k takav da za svaki trenutak t, vektor izlaza sistema zadovoljava relaciju $\left\|\mathbf{x}_i(t)\right\| \le k \cdot \gamma_m$, tada razmatrani sistem poseduje osobinu stabilnosti tipa ograničeni ulaz-ograničeni izlaz.

Ono što bitno karakteriše koncept BIBO stabilnosti jeste razmatranje ponašanja izlaza sistema kada na njega deluje *ograničeni ulaz*, pri nultim početnim uslovima.

Obično se u razmatranje uzima linearni, stacionarni, jednostruko prenosni sistem, impulsnog odziva $i(t)$.

[¶] Na engleskom jeziku:
"Bounded input – bounded output stability" ili "BIBO stability".

[†] Ekvivalentno supremumu.

Sa $x_{i0}(t)$ obeležimo izlaz sistema, koji je nastao kao reakcija na odgovarajući ulaz, pri nultim početnim uslovima.

Tada se, na osnovu dobro poznatog konvolucionog integrala, može napisati:

$$x_{i0}(t)=\int_0^t i(t-\kappa)u(\kappa)d\kappa \tag{8.9}$$

Za sistem se smatra da je BIBO stabilan ako i samo ako je zadovoljen uslov:

$$\int_0^\infty |i(t)|dt<+\infty. \tag{8.10}$$

Uslov, dat jed. (19. 10), ukazuje da površina ispod amplitude impulsnog odziva sistema treba da bude konačna.

U nastavku će se pokazati da ispunjenje uslova, datog jed.(8.10), garantuje BIBO sistemu stabilnost, *Kamen* (1990).

Ukoliko se potraži apsolutna vrednost leve i desne strane jed. (8. 9), dobija se:

$$|x_{i0}(t)|\le\int_0^t |i(t-\kappa)u(\kappa)d\kappa| = \int_0^t |i(t-\kappa)|\cdot|u(\kappa)|d\kappa, \tag{8.11}$$

a kako je po definiciji ulazni signal *ograničen*, tj.

$$|u(t)|\le\gamma_m, \quad \forall t\ge 0, \tag{8.12}$$

gde je: $\gamma_m = const. > 0$, lako se dobija:

$$|x_{i0}(t)|\le\gamma_m\int_0^t |i(t-\kappa)|d\kappa. \tag{8.13}$$

Koristeći smenu promenljive: $\vartheta=(t-\kappa)$, dobija se:

$$\int_0^t |i(t-\kappa)|d\kappa=\int_t^0 |i(\vartheta)|\cdot(-1)d\vartheta=\int_0^t |i(\vartheta)|d\vartheta, \tag{8.14}$$

odnosno, formalnom smenom $\vartheta=\theta$:

$$\int_0^t |i(t-\kappa)|d\kappa=\int_0^t |i(\kappa)|d\kappa. \tag{8.15}$$

Pretpostavimo sada, da je jed. (8.10) zadovoljena. Tada, postoji pozitivna konstanta k $< +\infty$, takva da je:

$$\int_0^t |i(\kappa)|d\kappa=k<+\infty, \quad \forall t\ge 0. \tag{8.16}$$

Povezujući jed. (8. 13) i jed. (8. 16), dobija se:

$$\left| x_{i0}(t) \right| \leq \gamma_m \cdot k \,, \tag{8.17}$$

što ukazuje na zaključak da je sistem BIBO stabilan, *Kamen* (1990).

8.3.4 **Tehnička stabilnost**

I ovde je reč o jednom neljapunovskom konceptu stabilnosti, koji je bio isključivo predmet interesovanja grupe ruskih autora, čija se imena praktično ne susreću u značajnijim referencama svetske literature po ovoj problematici.

U tom smislu valja pomenuti radove *Abgarijan* (1976), *Abdullin*, *Anapoljskii* (1980), *Konstatinov* (1972), *Gurman, Konstatinov* (1979), itd.

U nastavku se izlaže jedno viđenje ovog problema poslednje pomenutog autora, *Konstatinov* (1984).

Razmatra se dinamički sistem, čije je stanje u svakom trenutku $t \in \Im = [t_0,\, t_1]$ okarakterisano vektorom stanja $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, opisan sistemom diferencijalnih jednačina tipa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)\right) \tag{8.18}$$

gde je $\mathbf{f}(\cdot)$ n-dimenzionalna, nelinearna vektorska funkcija, a $\mathbf{z}(t)$ m-dimenzionalni vektor poremećaja koji zadovoljava:

$$\mathbf{z}(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon(t), \qquad \mathcal{S}_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^m \tag{8.19}$$

Neka je, dalje, zadata neka funkcija $\overline{\mathbf{z}} : \Im \rightarrow \mathbb{R}^n$, koja zadovoljava jed. (8.19) za $\forall t \in \Im$, vektor početnih uslova $\overline{\mathbf{x}}$ i odgovarajuće rešenje $\overline{\mathbf{x}}(\cdot)$ sistema, datog jed. (8.18).

Nazovimo to rešenje "*neporemećenim*" kretanjem sistema, a svako drugo rešenje sistema, datog jed. (8.18), koje odgovara svim mogućim početnim stanjima $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}_\alpha$ i proizvoljnim funkcijama $\mathbf{z}(\cdot)$ koje za $\forall t \in \Im$ zadovoljavaju jed. (8.19), nazovimo "*poremećenim*" kretanjem sistema.

Za opisivanje poremećenog kretanja uporedo sa jed. (8.18) i jed.(8.19), mogu se iskoristiti i sledeće relacije:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \in \mathcal{S}\left(t,\, \mathbf{x}(t)\right) \tag{8.20}$$

$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{S}_\alpha \tag{8.21}$$

u kojoj skup $\mathcal{S}\left(t,\mathbf{x}(t)\right) \subset \mathbb{R}^n$ pri $\forall\left(t,\mathbf{x}(t)\right) \in \Im \times \mathbb{R}^n$ karakteriše stalno prisustvo poremećaja, a skup $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ moguća početna stanja sistema.

Prelaz sa prikaza sistema datog jed. (8.18) i jed. (8.19) na jed. (8.20), lako se može sprovesti ukoliko se stavi:

$$\mathcal{S}\left(t,\mathbf{x}(t)\right) = \bigcup_{\mathbf{z}(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)} \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \; \mathbf{v} = \mathbf{f}\left(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{z}(t)\right) \right\} \tag{8.22}$$

Pod rešenjem diferencijalne zavisnosti, date jed. (8.20), koje odgovara početnom stanju $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}_\alpha$, podrazumevaće se apsolutno *neprekidna* funkcija $\mathbf{x}(t): \Im \to \mathbb{R}^n$, takva da je:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \wedge \dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{S}\left(t,\mathbf{x}(t)\right) \tag{8.23}$$

za skoro $\forall t \in \Im$.

Dalje se još pretpostavlja da i $\overline{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{S}_\alpha$, a da funkcija $\overline{\mathbf{x}}(\cdot)$ odgovara rešenju diferencijalne jednačine, date jed. (8.20), pri vektoru početnog stanja $\overline{\mathbf{x}}_0$.

Neka je, dalje, za $\forall t \in \Im$ zadati skup $\mathcal{S}_\alpha(t) \subset \mathbb{R}^n$ takav da važi $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{S}_\beta(t_0)$.

Pojam i koncept *tehničke stabilnosti* određen je sledećom *Definicijom*.

Definicija 8.2 Sistem, dat jed. (8.20), je *tehnički stabilan* u odnosu na $\left\{\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}, \mathcal{S}_\beta\right\}$ na vremenskom intervalu $\Im$, ako svako njegovo rešenje $\mathbf{x}(\cdot)$ koje odgovara početnom stanju $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}_\alpha$ zadovoljava uslov $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}_\beta(t)$, $\forall t \in \Im$.

Sa druge strane, posmatrajući jed. (19.20) i jed.(19.21) kao neki sistem upravljanja, može se lako odrediti, široko rasprostranjen pojam, prisutan u opštoj teoriji upravljanja, a to je pojam *skupa dostiživosti*.

Definicija 8.3 Skup $\mathcal{S}_{dost}\left(t_0,\, \mathcal{S}_\alpha,\, t^*\right)$ naziva se *skupom dostiživosti* sistema datog jed. (8.20) u trenutku t^* ako za svaku tačku iz tog skupa $\mathbf{y} \in \mathcal{S}_{dost}\left(t_0,\, \mathcal{S}_\alpha,\, t^*\right)$ postoji rešenje $\mathbf{x}(\cdot)$ zavisnosti date jed. (8.20) takvo da $\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{S}_\alpha, \quad \mathbf{x}\left(t^*\right) = \mathbf{y}$.

Iz prethodnih definicija sledi očigledan zaključak.

Stav 8.1 Sistem dat jed. (8.20) je stabilan u odnosu na $\left\{\mathcal{S}_\alpha,\, \mathcal{S},\, \mathcal{S}_\beta\right\}$ na vremenskom intervalu $\Im$, ako pri svim $t \in \Im$ sledi da $\mathcal{S}_{dost}\left(t_0,\, \mathcal{S}_\alpha,\, t^*\right) \subset \mathcal{S}_\beta$.

Na ovaj način, dovoljni uslovi *tehničke stabilnosti* neposredno su vezani sa dovoljnim uslovima pod kojima se *skup dostiživosti* datog sistema upravljanja može uključiti (podvesti) u zadati skup.

Zahvaljujući intenzivnom razvoju teorije sistema, pojavili su se mnogi rezultati vezani za ocenu *skupova dostiživosti*, što je sa druge strane rezultiralo velikim brojem *dovoljnih uslova tehničke stabilnosti*, koji se mogu naći u aktuelnim referencama savremene literature po ovoj problematici.

Literatura

Abgarijan, K. A., “Ustoičivost dviženia na konečnom intervale” v knjigi *Itogi nauki i tehniki*, VINITI AN SSSR, Obščaja mehanika, Moskva (1976) 43–124.

Abdullin, R. Z., Yu. L. Anapoljskii, “K zadačam praktičeskoj ustoičivosti” v kjigi *Vektor-funkcii Ljapunova i ih postoenie*, Nauka, Novosibirsk (1980) 34–919.

Barabashin, E. A, *Lyapunov Functions*, Nauka, Moscow, 1970.

Chen, C. T., *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremeskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, 1999.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Čigoja - Štampa, Beograd, 2004.

Debeljković, Lj. D., Lj. A. Jacić, M. S. Medenica, *Sistemi sa kašnjenjem*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.

Debeljković, D. Lj., *Stabilnost sistema automatskog uprvaljanja na konačnom vremenskom intervalu*, Mašinski fakultet, Beograd, 2009.

Debeljković, D. Lj., *Linearni singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem*: Stabilnost, robusnost, stabilizacija i robusna stabilizacija, Mašinski fakultet, Beograd, 2010.

Gajić, Z., M. Qureshi, *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*, Academic Press, San Diego, (USA), 1995.

Grujić, Lj. T., *Automatic Control System Syntehesis of Rigid Body Motion though a Fluid*, M.Sc. Thesis (in Serbian), Electrical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, October 1970.

Grujić, Lj. T., *Large-Scale Systems Stability*, (in Serbian), Faculty of Mechanical Eng., Belgrade, 1974.

Grujić, Lj. T., A. A. Martinjuk, M. Ribbens-Pavella, *Stability of Large Scale Systems under Structural and Singular Disturbances*, Naukova Dumka, Kiev, 1984.

Gurman, V. I., G. N. Konstatinov, "Ocenka množestov dostižimosti upravljaemih sistem", v knjigi *Dinamičeskoe upravlenie*, Nauka, Moskva, (1979) 72–73.

Hahn, W., *Theory and Application of Lyapunov's Direct Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.

Hahn, W., *Stability of Motion*, Spinger-Verlag, Berlin, 1967.

Johnson, G. W., "On Lyapunov Stability vs Bounded Input – Bounded Output", *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-9** (1969) 178–179.

Kamen, E. W., *Introduction to Signals and Systems*, MacMillan Publ. Company, New York, 1990.

Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, MacMillan Publ. Company, New York, 1990.

Konstatinov, G. N., "O vivode dostatočnih uslova tehničeskoj ustoučivosti s pozicii teorii upravljenia" v knjigi: *Metod funkcii Ljapunova i ivo priloženia*, Nauka, Novosibirsk, 1984.

Krasovskii, N. N., *Problems in the Theory of Stability of Motion*, Stanford University Press, 1963.

Lyapunov, A. M., *General Problem of Stability of Motion*, Moscow, Leningrad, USSR Academy of Science,1956.

Rouche, N., P. Haberts, M. Laloy, *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*, Spinger -Verlag, New-York, 1977.

Tchetaev, N. G., *Stability of Motion*, Gosthizdat, Moscow, 1955.

Valeev, G. K., G. S. Finin, *The Construction of Lyapunov Functions*, Naukova Dumka, Kiev, 1982.

Yoshizawa, T., *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

IV KRATKA HRONOLOŠKA REKAPITULACIJA DOPRINOSA NA POLJU SISTEMATSKOG PROUČAVANJA STABILNOSTI RAZMATRANIH KLASA SISTEMA

9. DOPRINOSI NA POLJU NELJAPUNOVSKE STABILNOSTI

9.1 Kontinualni linearni i nelinearni sistemi: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu

Prvi radovi u kojima je započeto razmatranje problema stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu potiču od ruskih autora, *Moiseev* (1948), *Kamenkov* (1953), *Lebedev* (1954.a, 1954.b) i *Chz – Han – Sy – In* (1959).

Najbolji uvid u motivacije za istaživanje ovog novog koncepta stabilnosti može se steći iz izvornog rada *Lebedeva* (1954.a) gde autor kaže:

"Zadatak stabilnosti kretanja, iniciran i rešavan od strane *A. M. Ljapunova* (1956) karakterišu sledeće osobenosti:

a) Razmatra se neograničeni vremenski interval.

b) Pretpostavlja se da su promene početnih uslova, a posledično i dalja proizvedena kretanja, dovoljno male veličine.

c) Razmatra se stabilnost neporemećenog kretanja *samo* u odnosu na promene početnih uslova.

Međutim, u realnim zadacima rešavanja problema stabilnosti javljaju se i neka druga pitanja i činjenice kao što su:

- Kretanje sistema se odvija ipak na nekom konačnom vremenskom intervalu.
- Promene početnih uslova odgovaraju nekim konačnim a ne dovoljno malim veličinama.
- Realni materijalni sistemi nalaze se pod stalnim dejstvom, možda ne velikih po intenzitetu, ali sigurno konačnih poremećajnih sila.

Prema tome, razmatranje stabilnosti kretanja na konačnom vremenskom intervalu pri konačnim promenama, kako početnih uslova, tako i spoljašnjih poremećaja, predstavlja poseban interes".

Jasno je da su ova pitanja bila postavljana i rešavana u pomenutom radu, kao i radovima koji su kasnije usledili, oslanjajući se u potpunosti na prilaz druge metode Ljapunova.

Prema dosadašnjim saznanjima, koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu apsolutno se, u formi koja je kasnije permanentno eksploatisana u svim kasnije nastalim radovima, može se pripisati ruskom autoru *Chz–Han–Sy–In*-u (1959), gde je izvorno napisano:

"*Neporemećeno kretanje* nazvaćemo *stabilnim u odnosu na* α *i* β[†] na konačnom vremenskom intervalu $t_0 \leq t \leq T$, *ako je pri* $t = t_0$, zadovoljeno:

$$\sum_s x_{so}^2 \leq \alpha \tag{9.1}$$

a pri svim trenucima t *na intervalu* $t_0 \leq t \leq T$, zadovoljeno:

$$\sum_s x_s^2 \leq \beta \tag{9.2}$$

Ovde su veličine T, α *i* β unapred poznate i zadate."

U tom radu izvedeni su dovoljni uslovi ove vrste stabilnosti za linearne, nestacionarne i stacionarne autonomne sisteme.

Posmatrajući vremenske odzive linearnih nestacionarnih sistema, *Dorato* (1961) je izveo dovoljne uslove stabilnosti "*na kratkom*"[‡] vremenskom intervalu, koje se ne razlikuju od prethodnih, a iskazani su preko koeficijenata sistema diferencijalnih jednačina. S druge strane, izvedeni su i potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti na "kratkom" vremenskom intervalu, iskazani kroz matricu impulsnih odziva razmatranog sistema.

Weiss, *Infante* (1965, 1967) su uopštili Ljapunovljevu metodu, dozvolivši da agregaciona funkcija i njen totalni izvod duž kretanja sistema, budu po znaku neodređene funkcije.

[†] Izvorno $\alpha = a$, $\beta = C$.

[‡] Na engleskom jeziku: "Short time stability".

Za vremenski neprekidne sisteme, oni su izveli dovoljne uslove[¶] različitih vidova praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, razmatrajući sisteme kako u slobodnom, tako i u prinudnom radnom režimu, na vremenski invarijantnim skupovima u prostoru stanja.

U radu *Weiss* (1967), data je modifikovana verzija standardne definicije stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i prezentovana nova teorema, koja je dala i potrebne i dovoljne uslove ovog koncepta stabilnosti.

Ti rezultati oformili su praktično prvu "konverznu"[†] *Teoremu* stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Sličnim problemima bavio se u svom radu i *Gunderson* (1967).

Koristeći "princip poređenja"[‡], *Kayande*, *Wong* (1968) su uspeli da znatno oslabe uslove nametnute diferencijalnim nejednakostima, iskazane preko tzv. "kvazi-Ljapunovljevih"[¶] funkcija, ranije izvedenih u radovima *Weiss*, *Infante* (1965, 1967). U istom radu, autori su dali još neka komplementarna viđenja ovog koncepta stabilnosti i u tom smislu ga značajno upotpunili.

Identičan sa prethodnim po sadržaju, a značajan po novim rezultatima je rad *Weiss* (1968), koji kroz "*konverznu teoremu*" daje potrebne i dovoljne uslove stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, proširujući ovaj koncept na probleme "*uniformne*", "*eksponencijalne*" i "*eksponencijalno kontraktivne*" stabilnosti ovog tipa.

U svom radu *Heinen*, *Wu* (1969) su izveli značajnu teoremu, koja u određenim prilikama, a za *uniformnu stabilnost*, daje bolje rezultate u odnosu na rezultate njihovih prethodnika.

Značajan rezultat dao je *Weiss* (1969) proširujući koncept *uniformne* i *neuniformne* stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu na klasu nelinearnih, nestacionarnih sistema u prinudnom radnom režimu.

[¶] Za detaljno razjašnjenje buduće spominjanih različitih vidova koncepata neljapunovske stabilnosti, videti naredna izlaganja.

[†] Na engleskom jeziku: "Converse theorem".

[‡] Na engleskom jeziku: "Comparison principle".

[¶] Na engleskom jeziku: "Lyapunov-like functions".

Poseban doprinos proučavanju neljapunovske stabilnosti dao je u svojim radovima *Michel* (1969, 1970.a, 1970.b, 1975), primenjujući taj koncept i njegove brojne modifikacije na različite klase sistema, čije se kretanje odvija unutar unapred zadatih ponekad vremenski invarijantnih, a ponekad vremenski promenljivih skupova u prostoru stanja.

Isti autor primenio je koncept praktične stabilnosti na posebnu klasu diskontinualnih sistema, u zajedničkom radu, *Michel*, *Porter* (1972).

U svim svojim radovima, Michel se bavio i pitanjima ocena granica do kojih dosežu trajektorije razmatranih sistema pri njihovom kretanju u prostoru stanja.

Prvu uspešnu primenu analitičkih rezultata stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, dao je *Garrad* (1969), a kroz klasičan pristup metode podešavanja polova. Izloženi rezultati su manje konzervativni u odnosu na prethodne izvedene korišćenjem ljapunovskog prilaza, a posebno su zgodni i jednostavni za praktičnu implementaciju.

Generalizacija svih prethodnih rezultata data je u radu *Heinen*, *Wu* (1971), a kroz novi koncept stabilnosti nazvan “set stability”[†].

Lako se pokazuje da posebni slučajevi ove vrste stabilnosti odgovaraju ranije iznetim konceptima i, u suštini kao i prethodni, bave se pitanjima granica do kojih dosežu rešenja nelinearnih, nestacionarnih sistema, bilo u slobodnom, bilo u prinudnom radnom režimu unutar zadatih vremenski promenljivih skupova.

Nažalost, kao i u nekim prethodnim slučajevima, dobijeni su i potrebni i dovoljni uslovi, ali u razjedinjenim formulacijama, što donekle umanjuje vrednost iznetih rezultata.

Potrebne i dovoljne uslove *kontraktivne stabilnosti* izveo je Kayande (1971) za klasu nelinearnih, nestacionarnih sistema.

Mnogo opštiji prilaz neljapunovskoj stabilnosti dao je *Grujić* (1971, 1973.a, 1973.b, 1975.a,1975.b,1975.c,1977.a,1977.b) uvodeći čitav niz novih vidova praktične stabilnosti, kao na primer: praktičnu asimptotsku stabilnost sa vremenom smirenja, praktičnu eksponencijalnu stabilnost sa vremenom smirenja. *i.t.d.*

[†] Bez adekvatnog prevoda na srpski jezik.

Tako u radu Grujić (1971) razmatra klasu nelinearnih, neautonomnih sistema sa višestrukim nelinearnostima. Izvedeni su dovoljni uslovi praktične stabilnosti sa unapred zadatim vremenom smirenja i to u formi koja isključuje značaj razmatranih nelinearnih karakteristika, tako da se isti mogu interpretirati kao uslovi "apsolutne" praktične stabilnosti.

U radu *Grujić* (1973.a) ponovljeni su rezultati prethodnog rada, a u *Grujić* (1973.b) u izvesnoj meri, oni su prošireni na problem praktične stabilnosti "*velikih sistema*".[‡]

Dovoljni uslovi praktične stabilnosti sa zadatim vremenom smirenja za klasu vremenski promenljivih, nelinearnih "*kompozitnih*"[¶] sistema proizvoljne strukture, koji ne moraju biti totalno stabilni, ali su ili praktično stabilni, ili stabilni na konačnom vremenskom intervalu. Izloženi rezultati, odnosno teoreme, dokazani su Weiss-Infante-ovom generalizacijom Ljapunovljeve metode, korišćenjem prilaza na bazi dekompozicije i agregacije i vektorskog agregacionog koncepta.

Uniformnu praktičnu i uniformnu stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, koju je ranije uveo i definisao *Weiss* (1967) podrazumevajući da ova osobina stabilnosti ne zavisi od izbora početnog trenutka posmatranja, razvio je, takođe *Grujić*, (1975.b) i to za analizu velikih sistema sa proizvoljno spregnutim podsistemima, koji ne moraju da budu totalno stabilni i čija se kretanja odvijajuna vremenski prmenljivim skupovima.

Neljapunovsku stabilnost velikih sistema, prizvoljnog reda i strukture, na vremenski promenljivim skupovima u prostoru stanja, dao je takođe *Grujić* (1975.c) obezbedivši rezultatima mogućnost uvida do kojih granica dosežu trajektorije kretanja.

Lashirer, *Story* (1972) uveli su novu vrstu stabilnosti nazvanu "konačna stabilnost"[†] koja se uslovno može shvatiti kao jedna moguća varijanta koncepta stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, na vremenski invarijantnim supovima. Tamo izvedeni rezultati daju samo dovoljne uslove ove vrste stabilnosti.

[‡] Na engleskom jeziku: "Large-scale systems".

[¶] Na engleskom jeziku: "Composite systems".

[†] Na engleskom jeziku: "Final stability".

Lam, *Weiss* (1974) proširili su ovaj koncept na sisteme čije se kretanje odvija unutar vremenski promenljivih skupova i tom prilikom, uz prisustvo relativno prihvatljivih ograničenja, dobili i potrebne i dovoljne uslove *konačne stabilnosti sistema*.

U radu *Grippo*, *Lampariello* (1976), izvedeni su dovoljni uslovi praktične stabilnosti velikih sistema. Ovi uslovi dati su u vidu vektorskih kvazi-Lajpunovljevih funkcija, čije komponente mogu da zavise, u opštem slučaju, od vektora stanja podsistema koji obrazuju osnovni sistem. Isti ti uslovi iskazani su u posebnoj agregacionoj formi, u kojoj granice kretanja igraju ulogu agregacionih promenljivih.

Koristeći koncept vektorske agregacione funkcije, *Grujić* (1977.a) je izložio nove rezultate o praktičnoj stabilnosti velikih sistema. Ovaj prilaz ne zahteva informacije o osobinama stabilnosti izdvojenih podsistema i snižava red agregacione matrice sistema na red jednak broju podsistema.

U radu *Grujić* (1977.c) je sproveo postupak sinteze neinercionog adapivnog upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za nelinearne, nestacionarne objekte automatskog upravljanja.

Pokazano je da predloženi postupak ima značajne prednosti, koje se sumarno mogu izraziti u sledećem:

a) referentni model može da bude nelinearni, nestacionarni optimalni sistem,

b) minimizacija vremena smirenja realnog objekta svodi se na minimizaciju istog pokazatelja referentnog modela,

c) primena ovih zakona upravljanja garantuje, sada sistemu u celini, zahtevanu praktičnu stabilnost, kako kretanja sistema, tako i odgovarajuće greške,

d) podaci o varijacijama paramatara objekata i prisutnih nelinearnosti nisu neophodni i

e) laka implementacija korišćenjem računarske podrške.

1997. godine, *Dorato et al.* (1997) su predstavili studiju na 36-om IEEE CDC na temu robusne (FTS) sinteze linearnih sistema (sistema stabilnih na konačnom vremenskom intervalu), primenom linearnih matričnih nejednačina (LMIs) za proučavanje zakona upravljanja u povratnoj sprezi po stanju.

Dalji rezultati analize i sinteze linearnih sistema zasnovani na LMI pristupu predstavljeni su u *Amato et al.* (1998, 1999.a, 1999.b, 2001, 2002, 2003).

2002. godine, *Abdalah et al.* su predstavili tehnike statističkog učenja za (FTS) sintezu sa statičkim uskladnikom smeštenim u povratnoj sprezi sistema po izlazu.

Nedavno, tehnike sinteze vremenski diskretnih (FTS) sistema su primenjene za upravljanje ATM mreža i mrežom upravljane sisteme, *Amato et al.* (2002) i *Mastellone* (2004)).

Literatura

Angelo, H. *Linear Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Robust Finite-Stabilization of Linear Systems Depending on Parameter Uncertainties", *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Tampa (Florida) (1998) 1207-1208.

Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, P. Dorato, "Dynamic Output Feedback Finite-Time Control of LTI Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances", *European Control Conference*, Karlsruhe (Germany) (1999.a).

Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, P. Dorato, "Finite-Time Control for Uncertain Linear Systems with Disturbance Inputs", *Proc. American Control Conf.*, San Diego (California) (1999.b) 1776-1780.

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Finite-Time Control of Linear Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances", *Automatica*, **37** (2001) 1459-1463.

Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, C. Cosentino, "Application of Finite-Time Stability Concepts to Control of ATM Networks", *40th Allerton Conf. on Communication, Control and Computers, Allerton* (Illinois) (2002).

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, "Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Stability of Linear Systems", *Proc. American Control Conf.*, Denevr (Colorado) (2003) 4452-4456.

Chz-Han-Sy-In, "Stability of Motion on Finite-Time Interval", *P. M. M.*, **23** (1959) 230–238.

Dorato, P, "Short Time Stability of Linear Time-Varying Systems", *IRE Trans. on Automat Cont.*, (6) (1961) 83–87.

Dorato, P., *Short-Time Stability in Linear Time-Varying Systems*, Ph.D. Thesis, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1961.b.

Dorato, P., “Short-Time Stability”, *IRE Trans. Automat. Contr.*, **6** (1961.c) 86.

Dorato, P., “Comment on Finite-Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **12** (1967) 340.

Dorato P., “Quantified Multivariate Polynomial Inequalities”, *IEEE Control Systems Magazine*, **20** (2000) 48-58.

Dorato, P., C. Abdallah, D. Famularo, “Robust Finite-Time Stability Design via Linear Matrix Inequalities, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, San Diego (California), (1997).

Garrard, W. L., “Finite Time Stability in Control System Synthesis”, *Proc. IFAC*, Warsaw (1969) 21–29.

Grippo, L., F. Lampariello, “Practical Stability of Large-Scale Systems”, *Proc. IFAC Conf. Large-Scale Systems*, Udine (Italy) (1976) 195–201.

Grujić, Lj. T., *Automatic Control System Synthesis of Rigid Body Motion through a Fluid*, M. Sc. Thesis (in Serbian), Electrical Eng. Dept., Univerity of Belgrade, Belgrade, October, 1970.

Grujić, Lj. T., “On Practical Stability”, *5th Aslomar Conf. on Circ. and Syst.*, (1971) 174–178.

Grujić, Lj. T., D.D. Šiljak, “Stability of Large-Scale Systems with Stable and Unstable Systems”, *Proc. JACC Conference*, California (USA) (1972).

Grujić, Lj. T., *Large-Scale Systems Stability*, Ph. D. Thesis (in Serbian), Mechanical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, May, 1972.

Grujić, Lj. T., “On Practical Stability”, *Int. J. Control*, **17** (4) (1973.a) 881–887.

Grujić, Lj. T., “On Practical Stability of Automatic Control Systems”, *Symp. Mechanical Eng.* ‘1873–1973’, Belgrade (1973.b) B.21–B.26.

Grujić, Lj. T., “Practical Stability with the Settling Time of Composite Systems”, *Automatika*, T. P. 9 (1975.a) 1–11.

Grujić, Lj. T., “Uniform Practical and Finite-Time Stability of Large-Scale Systems”, *Int. J. Syst. Sci.*, **6** (2) (1975.b) 181–195.

Grujić, Lj. T., “Non-Lyapunov Stability Analysis of Large-Scale Systems on Time-Varying Sets”, *Int. J. Control*, **21** (3) (1975.c) 401–415.

Grujić, Lj. T., “Novel Development of Lyapunov Stability of Motion”, *Int. J. Control*, **22** (4) (1975.d) 525–549.

Grujić, Lj. T., “On Practical Stability of Large-Scale Systems”, *Proc. ETAN* (1977.a) III.301–III.307.

Grujić, Lj. T., “On Stability Domain of Singularly Perturbed Systems”, *Proc. ETAN* (1977.b) III.13–III.20.

Grujić, Lj. T., “Finite-Time Nonlinear Adaptive Control”, *AIAA Journal*, **15** (3) (1977) 354–359.

Grujić, Lj. T., “Uniquely Bounded Sets and Nonlinear Systems”, *Proc. 1978 IEEE Conf. Decision and Control*, San Diego (1979) 325–333.

Gunderson, R., “On Stability over a Finite Interval”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-12** (5) (1967) 634–635.

Heinen, J. A., S. H. Wu, “Further Results Concerning Finite Time Stability”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-14** (2) (1969) 211–212.

Heinen, J. A., S. H. Wu, “Set Stability of Differential Equations”, *Int. J. Syst. Sci.*, **1** (3) (1971) 269–277.

Kamenkov, G. V., “On Stability of Motion on Finite-Time Interval”, *P. M. M.*, **17** (1953) 529–540.

Kayande, A. A., “A Theorem on a Contractive Stability”, *SIAM J. Appl. Math.*, **21** (4) (1971) 601–604.

Kayande, A. A., J. S. Wong, “Finite Time Stability and Comparison Principles”, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (64) (1968) 749–756.

Lam, L., L. Weiss, “Finite Time Stability with Respect to Time-Varying Sets”, *J. Franklin Inst.*, **9** (1974) 415–421.

La Salle, Lefschet S., *Stability by Lyapunov’s Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.

Lashirer, A. M., C. Story, “Final-Stability with Applications”, *J. Inst. Math. Appl.*, **9** (1972) 379–410.

Lebedev, A. A., “On the Problem of Stability of Motion on Finite-Time Interval”, *P. M. M.*, **18** (1954.a) 75–94.

Lebedev, A. A., “On Stability of Motion on Prespecified-Time Interval”, *P. M. M.*, **18** (1954.b) 139–148.

Mastellone, S., *Finite-Time Stability of Nonlinear Networked Control Systems*, Master’s Thesis, ECE Department, University of New Mexico, 2004.

Matrosov, V. M., “On the Theory of Stability of Motion”, *P. M. M.*, **26** (1962) 992–1002.

Michel, A. N., “On the Bounds of the Trajectories of Differential Systems”, *Int. J. Control*, **10** (5) (1969) 593–600.

Michel, A. N., “Stability, Transient Behavior and Trajectory Bounds of Interconnected Systems”, *Int. J. Control*, **11** (4) (1970.a) 703–715.

Michel, A. N., “Quantitative Analysis of Simple and Interconnected Systems: Stability, Boundedness and Trajectory Behavior”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-17** (3) (1970.b) 292–301.

Michel, A. N., “Stability and Trajectory Behavior of Composite Systems”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-22** (45) (1975) 305–312.

Michel, A. N., D. W. Porter, “Practical Stability and Finite-Time Stability of Discontinuous Systems”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-19** (2) (1972) 123–129.

Moiseev, N. D., “Survey of Non-Lyapunov Stability Theory Development, *Aero-Space Eng. Ac. N. E. Žukovski*, (1) (1948).

Vitacco, W. R., A. N. Michel, “Qualitative Analysis of Interconnected Dynamical Systems with Algebraic Loops: Well - Posedness and Stability”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-24** (11) (1977) 625–636.

Weiss, L., “Converse Theorems for Finite Time Stability”, *Proc 1st Asilomar Conf. on Circ. and Syst.* (1967) 1006–1014, also *SIAM J. Appl Math*, **16** (6) (1968) 1319–1324.

Weiss, L., “On Uniform and Uniform Finite Time Stability”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-14** (3) (1969) 313–314.

Weiss, L., E. F. Infante, “On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval”, *Proc. National Acad. Sci.*, **54** (1965) 44–48.

Weiss, L., E. F. Infante, “Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-12** (1967) 54–59.

Yoshizawa, T., “Stability and Boundedness of Systems”, *Arc. Rational Mach. Analysis*, **6** (1960) 404–421.

9.2 Diskretni linearni i nelinearni sistemi: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu

LaSalle (1962, 1965, 1966) i ostali su razvili su generalizaciju "drugog metoda" Ljapunova koja koristi određene invarijantne osobine rešenja običnih diferencijalnih jednačina. U radu *Hurt* (1967) su te invarijantne osobine iskorišćene za dobijanje teorema stabilnosti sličnih onima kod *LaSalle*-a.

Jednu vrstu praktične stabilnosti diskretnih sistema koji su definisani na konačnim vremenskom intervalu proučavao je *Hurt* (1967) sa posebnim osvrtom na mogućnost pojave grešaka u numeričkom sračunavanju rezultata.

Kao ilustracija primene ovih teorema, izveden je region konvergencije za *Newton-Raphson*-ov i sekantni iterativni metod. Data je i primenjena modifikacija jedne od ovih teorema radi izučavanja efekta greške zaokruživanja kod *Newton-Raphson* i *Gauss-Seidel* iterativnih metoda.

Koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, prvi su na diskretne sisteme primenili *Michel*, *Wu* (1969).

U tom radu razvijena je teorija koja se bavi stabilnošću diskretnih sistema na ograničenom intervalu vremena. Uzeti su u obzir dinamički sistemi koji su generalizovani tako da u sebe uključuju sisteme u slobodnom radnom režimu, sisteme u prinudnom radnom režimu, linearne sisteme, nelinearne sisteme, vremenski nepromenljive sisteme, vremenski promenljive sisteme, proste i kompozitne sisteme.

Razmatraju se različite definicije stabilnosti i iskazuju i dokazuju odgovarajuće teoreme. Ove teoreme daju dovoljne uslove stabilnosti i u opštem slučaju uključuju primenu funkcija sličnih Ljapunovljevim funkcijama koje ne zahtevaju uobičajene uslove definisanosti po znaku $V\left(k,\mathbf{x}(k)\right)$ i $\Delta V\left(k,\mathbf{x}(k)\right)$.

Praktičnu stabilnost, ili "*stabilnost na skupovima*", kroz razmatranje i procenu kvantitativnog ponašanja trajektorija kretanja na konačnom vremenskom intervalu dao je *Heinen* (1970, 1971), koji je i prvi našao potrebne i dovoljne uslove ovog koncepta stabilnosti, koristeći prilaz sa pozicija Ljapunova i "*diskretnih Ljapunovljevih funkcija* ".

Praktično govoreći, diskretni sistem je „stabilan na skupu“ ako sva rešenja koja počinju iz nekog određenog skupa i posle nekog unapred definisanog vremena ostaju u drugom, unapred datom (moguće i vremenski promenljivom) skupu.

Dalje proširenje ovih rezultata dao je *Weiss* (1972) razmatrajući različite aspekte praktične stabilnosti diskretnih sistema, kao i pitanja njihove realizacije i upravljivosti.

Istu ovu problematiku *Weiss*, *Lam* (1973) proširili su na izučavanje složenih nelinearnih diskretnih sistema.

Veoma efikasne, dovoljne uslove stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu linearnih diskretnih sistema izražene preko normi i/ili sopstvenih vrednosti odgovarajućih matrica, dali su *Weiss*, *Lee* (1971).

Sa druge strane, *Lam*, *Weiss* (1974) prvi su primenili koncept tzv. “*konačne stabilnosti*”[†] na diskretne sisteme čija se kretanja odvijaju unutar vremenski promenljivih skupova u prostoru stanja.

Nekoliko jednostavnih definicija vezanih za skupove koji predstavljaju diferencne jednačine, a samim tim i diskretne siteme, dao je *Shanholt* (1974). Izvedene teoreme daju dovoljne uslove stabilnosti razmatranih sistema i, iako se u osnovi bave ljapunovskom stabilnošću, u određenoj meri mogu da se idejno veoma lepo iskoriste za koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, pa se u tom kontekstu spominju.

Grippo, *Lampariello* (1976) uopštili su sve prethodne rezultate i dali potrebne i dovoljne uslove različitih vidova praktične stabilnosti diskretnih sistema, inspirisani definicijama praktične stabilnosti i nestabilnosti koje je ranije uveo *Heinen* (1970). Isti autori primenili su sve prethodne rezultate u analizi “*velikih sistema*”, *Grippo*, *Lampariello* (1978).

Praktičnu stabilnost sa unapred zadatim vremenom smirenja razmatrao je, po prvi put, *Debeljković* (1979.a), a u vezi sa analizom različitih klasa *linearnih diskretnih sistema*, dovoljno opštih da uključe vremenski stacionarne i nestacionarne sisteme, autonomne i sisteme u prinudnom radnom režimu, kao i sisteme čije je ponašanje iskazano kroz “*funkcionalnu matricu sistema* ”.

[†] Na engleskom jeziku: “*Final stability*”.

U pomenutom radu izvedeni su i dovoljni uslovi praktične nestabilnosti i diskretna verzija poznate *Bellman-Gronwall*-ove leme.

Preostali radovi, *Debeljković* (1979.b, 1980.a, 1980.b, 1983) bave se sličnim problemima i uglavnom parcijalno iznose bazične rezultate doktorske disertacije, *Debeljković* (1979.a).

Za posebnu klasu vremenski diskretnih sistema, sa funkcionalnom matricom, u radu *Debeljković* (1993) su izvedeni dovoljni uslovi praktične stabilnosti.

Konačno, *Bajić* (1983) u svom radu sprovodi kvantitativnu analizu odziva jedne klase diskretnih, homogenih, nestacionarnih bilinearnih sistema sa stacionarnim linearnim delom, a na bazi koncepta praktične stabilnosti. Dobijeni rezultati omogućavaju utvrđivanje granica do kojih doseže odziv razmatrane klase sistema.

Posle izvesnog zatišja, koje je vladalo kako u kontinualnim[12] tako i u diskretnim sistemima, konačno se pojavljuje prvi rad za ovde razmatranu klasu sistema. Naime, reč je o referenci *Amato et al* (2004), u kojoj autori prvi put izlažu *i potrebne i dovoljne* uslove stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, uz neophodnu konstataciju da se dobijeni uslovi mogu isključivo odrediti ukoliko se prethodno odredi fundamentalna matrica sistema ili nađe rešenje posebne diferencne matrične jednačine Ljapunova.

Odmah zatim, sledeći rad - *Amato*, *Ariola* (2005) - proširuje prethodno pomenute rezultate na problem stabilizacije sistema, shodno ovde usvojenom konceptu, uključujući i moguća zasićenja u sistemu. Osim toga, sistem u otvorenom kolu dejstva izložen je dejstvu spoljašnjih poremećaja, pa se stabilizacija sprovodi uzimajući u obzir i tu činjenicu. Rezultati se dalje proširuju i na uvođenje povratne sprege po izlazu, čime se zaokružuje jedna celina. Svi pomenuti rezultati su izraženi preko LMI uslova.

Dalje proširenje koncepta stabilnosti na konačnom intervalu na klasu nelinearnih diskretnih sistema, dato je u radu *Mastallone et al.* (2004).

Kasnije se pojavljuju brojni radovi iz ove oblasti, sa neznatnim modifikacijama i oni izlaze van sfere ovih interesovanja. Svi oni se, u osnovi, baziraju na LMI postupcima.

[12] U ovoj klasi sistema, prvi rad se pojavljuje 2001 god., *Amato et al*. (2001).

Literatura

Amato, F., M. Carbone, M. Ariola, C. Cosentino, "Finite Time Stability of Discrete Time Systems", *Proc. ACC* 2004, Boston (Massachusetts) (USA), (2004), 1440 –1444.

Amato, F.,M. Ariola, "Finite Time Control of Discrete Time Linear Systems", *IEEE Trans. Autom. Control,* AC %0, No. 5, May, (2005), 724 – 729.

Angelo, H., *Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

Bajić, V., "On Practical Stability of Discrete Homogenous Bilinear Systems", *Tehnika*, **32** (1) (1983) 131–132.

Debeljković, D. Lj., *Synthesis of Discrete Automatic Control on Finite Time Interval* (in Serbian), Ph.D. Thesis, Mechanical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, July, 1979.a.

Debeljković, D. Lj., "Praktična Stabilnost sa Vremenom Smirenja Vremenski Diskretnih Sistema", *Tehnika* (Yu), No. 10 (1979.b) 19–23.

Debeljković, D. Lj., "Praktična Stabilnost sa Vremenom Smirenja Vremenski Diskretnih Sistema u Slobodnom i Prinudnom Radnom Režimu", *Tehnika* (Serbia), No. 1 (1980.a) 13–20.

Debeljković, D. Lj., "Prilog Proučavanju Praktične Nestabilnosti Vremenski Diskretnih Sistema", *Tehnika* (Serbia), No. 2 (1980.b) 7–11.

Debeljković, D. Lj., "Further Results in Finite Time Stability", *Proc. MELECON* 83, Athens (Greece), (1983) 475–478.

Debeljković, D. Lj., "Praktična Stabilnost jedne Klase Vremenski Diskretnih Sistema", *Saopštenja MF* (Serbia), No. 1 (1993) 37–42.

Debeljković, D. Lj., *Stabilnost sistema automatskog uprvaljanja na konačnom vremenskom intervalu*, Mašinski fakultet, Beograd, 2009.

Debeljković, D. Lj., *Linearni singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem*: Stabilnost, robusnost, stabilizacija i robusna stabilizacija, Mašinski fakultet, Beograd, 2010.

Grippo, L., F. Lampariello, "Practical Stability of Discrete-Time Systems", *J. Franklin Inst.*, **302** (3) (1976) 213–224.

Grippo, L., F. Lampariello, "Practical Stability of Large-Scale Discrete-Time Systems", *Int. J. Syst. Sci.*, **9** (11) (1978) 1235–1246.

Heinen, J. A., “Quantitative Stability of Discrete Systems”, *Michigan Math. Journal*, (17) (1970) 211–215.

Hurt, J., “Some Stability of Motion on Finite-Time Interval”, *SIAM J. Num. Anal.*, **4** (4) (1967) 583–596.

Lam, L., L. Weiss, “Finite Time Stability with Respect to Time Varying Sets”, *J. Franklin Inst.*, **9** (1974) 415–421.

Masellone, S., P. Dorato, C. T. Abdallah, “Finite Time Stability of Discrete Time Nonlinear Systems: Analysis and Design”, *Proc. CCDC* 2004, Atlantis (Paradise Islands (Bahamas), (2004), 2572 –2577.

Michel, A. N., S. H. Wu, “Stability of Discrete Systems over a Finite Interval of Time”, *Int. J. Control*, **9** (6) (1969) 679–693.

Shanholt, G., “Set Stability for Difference Equations”, *Int. J. Control*, **10** (2) (1974) 309–314.

Weiss, L., “Controllability, Realization and Stability of Discrete-Time Systems”, *SIAM J. Control*, **10** (2) (1972) 230–251.

Weiss, L., L. Lam, “Stability of Non-Linear Discrete-Time Systems”, *Int. J. Control*, **17** (3) (1973) 465–470.

Weiss, L., J. S. Lee, “Finite Time Stability of Linear Discrete-Time Systems”, *Avt. Telem.*, (12) (1971) 63–68.

9.3 Kontinualni singularni sistemi: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu

Rad *Owens*, *Debeljkovic* (1985) donosi nove rezultate na polju ljapunovske stabilnosti i prvi put uvodi nov način formiranja sopstvenih vrednosti, bez kojeg se dalje istraživanje praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ne bi moglo obaviti na klasičan način.

Najznačajniji radovi osamdesetih godina vezani za izučavanje ovog koncepta stabilnosti za pomenutu klasu sistema, svakako su radovi *Debeljković*, *Owens* (1985), *Debeljković*, *Owens* (1986) i *Owens*, *Debeljković* (1986) i odnose se, isključivo, na posebne klase kontinualnih singularnih linearnih sistema.

Debeljković, *Owens* (1985) i *Owens*, *Debeljković* (1986) prvi put su izveli nove rezultate na polju proučavanja praktične stabilnosti i nestabilnosti, kao i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, klase linearnih singularnih sistema.

Dobijeni rezultati predstavljaju dovoljne uslove ove vrste stabilnosti za razmatranu klasu sistema, a bazirani su na korišćenju "kvaziljapunovljeve" funkcije i njenih osobina na potprostoru konzistentnih početnih uslova.

U posebnom slučaju, ove funkcije ne moraju da budu pozitivno određene u celom prostoru stanja i negativno određene duž trajektorija sistema. Geometrijski prilaz korišćen u tom radu daje mogućnost uvida u strukturne osobine singularnih sistema i osobina konzistentnih početnih uslova i omogućava opis dinamičkih karakteristika singularnih sistema preko baznog regularnog matričnog para (E, A).

U ostalim radovima predstavljeni su kriterijumi praktične stabilnosti i nestabilnosti, kao i stabilnosti sistema na konačnom vremenskom intervalu. Dobijeni uslovi su novi i do tada nepoznati, zasnovani na korišćenju modifikovane funkcije ljapunova, što je i ranije korišćen prilaz. Poseban značaj ovim radovima daju tri činjenice. Prva je da su rezultati primenjeni na sistem sa unapred poznatim potprostorom konzistentnih početnih uslova. Kretanja sistema se odvijaju unutar vremenski nepromenljivih skupova. Posebno značajno je da su navedeni uslovi dobijeni *geometrijskim pristupom*, što do tada, ali ni kasnije, nije bio slučaj.

U pomenutim radovima *Debeljković*, *Owens* (1985) i *Owens*, *Debeljković* (1986) se po prvi put iznose novi rezultati na polju proučavanja praktične stabilnosti i nestabilnosti, kao i stabilnosti *linearnih singularnih sistema* na konačnom vremenskom intervalu.

U radu *Debeljković et al.* (1992) razmatran je problem ograničenosti rešenja singularnih sistema na vremenski invarijantnim skupovima u prostoru stanja, kako za *regularne*, tako i za *iregularne singularne sisteme*.

Dobijeni su jednostavni, dovoljni, algebarski uslovi, koji mogu da posluže za testiranje postojanja rešenja singularnih sistema koja poseduju sve karakteristike "*ograničenosti*" na konačnom, i osobine "*praktične*" stabilnosti, na beskonačnom vremenskom intervalu. Isti rezultati omogućavaju da se izvrši i procena *potencijalnog domena praktične* stabilnosti. Takođe su dati i dovoljni uslovi *praktične nestabilnosti* ovih sistema, kao ispomoć u dobijanju pravog odgovora, kada teoreme o praktičnoj stabilnosti ne daju pozitivan odgovor.

Rad *Debeljković et al*. (1993) razmatra identičnu problematiku kao i prethodni rad. Važno je napomenuti da su tom prilikom dobijeni uslovi koji su daleko blaži od pomenutih, a garantuju najmanje ista svojstva razmatranim rešenjima sistema.

Evidentno objedinjavanje i značajno uopštavanje svih rezultata vezanih za ovu problematiku, bili su predmet rada *Debeljković et al*. (1995.b).

U ovom pregledu rezultata, valja pomenuti rad *Jovanović*, *Debeljković* (1986), u kojem su dobijeni dovoljni uslovi praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za *regularne* singularne sisteme u *prinudnom* radnom *režimu*.

U slučajevima kada nije prisutna spoljašnja prinuda, oni se svode na rezultate date u radu *Debeljković*, *Owens* (1985).

Rad *Debeljković et.al* (1998) donosi analizu stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za linearne singularne sisteme, uz geometrijski tretman konzistentnih početnih uslova.

Radovi *Kablar*, *Debeljković* (1998), *Kablar*, *Debeljković* (1999) i *Debeljković*, *Kablar* (1999) daju različit pristup proučavanju stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za singularne sisteme, korišćenjem modifikovane ljapunovljeve funkcije. U radovima su razmatrane i posebne klase linearnih nestacionarnih singularnih sistema i dati dovoljni uslovi stabilnosti i nestabilnosti.

Dobijeni rezultati bazirani su na korišćenju kvaziljapunovljeve funkcije i njenih osobina na potprostoru konzistentnih početnih uslova. Ove funkcije ne moraju da budu pozitivno određene u celom prostoru stanja i negativno određene duž trajektorije sistema.

Geometrijski prilaz korišćen u ovim radovima daje mogućnost uvida u strukturne osobine singularnih sistema i osobina konzistentnih početnih uslova, što omogućava opis dinamičkih karakteristika singularnih sistema preko baznog matričnog para (E, A), *Debeljković et.al* (2005.b).

U radovima grupe okupljenih oko autora *Debeljkovića*, dobijeni su značajni rezultati na polju proučavanja razmatranih koncepata za linearne singularne sisteme. Većina rezultata navedena je u *Debeljković et. al* (2005.b), pa je stoga i navedena referenca vodeća literatura za praćenje doprinosa na ovom polju.

U radovima se razmatraju problemi ograničenosti rešenja singularnih sistema na vremenski invarijantnim skupovima u prostoru stanja, za regularne i za iregularne singularne sisteme. Prikazani su algebarski uslovi koji mogu da služe za testiranje postojanja rešenja sistema koji poseduju sve osobine ograničnosti na konačnom vremenskom intervalu i osobine praktične stabilnosti, na beskonačnom vremenskom intervalu. Isti rezultati omogućavaju procenu domena praktične stabilnosti, a dati su i dovoljni uslovi praktične nestabilnosti ovih sistema.

U *Debeljković et.al* (2005.b) je prikazan rad koji daje uslove praktične stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za regularne singularne sisteme u prinudnom radnom režimu. Kada ne postoji prinudni režim, pokazano je da se uslovi svode na one u radovima *Debeljković*, *Owens* (1985) i *Owens*, *Debeljković* (1986).

I konačno, nekoliko novih zajedničkih radova, *Debeljković et al.* (1997), *Kablar*, *Debeljković* (1998) i *Debeljković*, *Kablar* (1999), bave se problemom stabilnosti ove klase sistema na konačnom vremenskom intervalu a sa pozicija primene matrične mere ili poznate Bellman – Gronwall-ove *Leme*.

Ovi koncepti, su ovde prvi put primenjeni u dinamičkoj analizi singularnih sistema[13].

Kao i kod običnih (*normalnih*) sistema i u ovoj oblasti je vladalo zatišje, sve do 2006. godine, kada je, prvi put u radu *Shen*, *Shen* (2006) primenjen prilaz sa stanovišta LMI na kontinualne singularne sistema, inspirasani radovima *Amata et al.* (1998, 1999.a, 1999.b, 2001, 2002, 2003) i *Dorata* (2006).

Literatura

Abe, N., "Practical Stability and Disturbance Rejection of Internal Model Control for Time-Delay Systems", *Proc. of the* 35*th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, December (1996) 1621-1622.

[13] Značajni doprinosi u primeni neljapunovskih koncepata na vremenski kontinualne nestacionalrne linearne sisteme a zbog ovde već usvojene klase razmatranih sistema izlaze van okvira ovdašnjih razmatranja, pa se u tom smislu, zainteresovani čitalac upućuje na odgovarajući *Dodatak* u lit. *Debeljković et al* (2005.b).

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, “Robust Finite-Stabilization of Linear Systems Depending on Parameter Uncertainties”, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Tampa (Florida) (1998) 1207-1208.

Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, P. Dorato, “Dynamic Output Feedback Finite-Time Control of LTI Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances”, *European Control Conference*, Karlsruhe (Germany) (1999.a).

Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, P. Dorato, “Finite-Time Control for Uncertain Linear Systems with Disturbance Inputs”, *Proc. American Control Conf.*, San Diego (California) (1999.b) 1776-1780.

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, “Finite-Time Control of Linear Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances”, *Automatica*, **37** (2001) 1459-1463.

Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, C. Cosentino, “Application of Finite-Time Stability Concepts to Control of ATM Networks”, *40th Allerton Conf. on Communication, Control and Computers, Allerton* (Illinois) (2002).

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, “Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Stability of Linear Systems”, *Proc. American Control Conf.*, Denevr (Colorado) (2003) 4452-4456.

Bainov, D. D., A. B. Dishliev, I. M. Stamova, “Practical Stability of the Solutions of Impulsive Systems of Differential-Difference Equations via the Method of Comparsion and some Application to Population Dynamics, *Journal of ANZIAM*, Vol. 43, Australian Mathematical Society, Australia, (2002) 525-539.

Bajić, V. B., “Partial Exponential Stability of Semi-State Systems”, *Int. J. Control*, **44** (5) (1986) 1383–1394.

Bajić, V. B., “Lyapunov Function Candidates for Semi-State Systems”, *Int. J. Control*, **46** (6) (1987.b) 2171–2181.

Bajić, V. B., “Equations of Perturbed Motions and Stability of State and Semi-State Systems”, *Int. J. Control*, **47** (6) (1988.b) 1849–1860.

Bajić, V. B., *A Contribution to the Methods of Quantitative Analysis of Some Classes of Electrical Networks Governed by Semistate Models*, Ph. D. Thesis, University of Zagreb, Zagreb, Yugoslavia, 1989.

Bajić, V. B., “Algebraic Conditions for Stability of Linear Singular Systems”, *Proc. 1991 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, **2** (General Circuits and Systems), June 11-14, Singapore (1991) 1089–1092.

Bajić, V. B., *Lyapunov’s Direct Method in The Analysis of Singular Systems and Networks*, Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.a.

Bajić, V. B., *Generic Concepts of System Behavior and the Subsidiary Parametric Function Method*, SACAN, Link Hills, RSA, 1992.b.

Bajić, V. B., *Existence of Practically Stable Solutions of Singular Linear Systems*, Technical Report TR95-02, Control Laboratory, Technikon, Natal, RSA, 1995.

Bajić, V. B., D. Lj. Debeljković, Z. Gajić, “Existence of Solution Converging Toward the Origin of the Phase Space of Singular Linear Systems”, *Proc. SAUM*, Kragujevac, Yugoslavia, June (1992.a) 334–348, also in *Proc. AMSE Conference on System Analysis, Control and Design*, Lyon, France, July (1994.a) 171–184.

Bajić, V. B., D. Debeljković, Z. Gajić, B. Petrović, “Weak Domain of Attraction and Existence of Solutions Convergent to the Origin of the Phase Space of Singular Linear Systems”, *University of Belgrade, ETF, Series: Automatic Control*, (1) (1992.b) 53–62.

Bajić, V. B., M. M. Milić, “Extended Stability of Motion of Semi-State Systems”, *Int. J. Control*, **46** (6) (1987) 2183–2197.

Bajic, B. V., “Algebraic Conditions for Stability of Linear Singular Systems”, *IEEE International Sympoisum on Circuits and Systems*, Vol.2, 11-14 June, (1991) 1089-1092.

Chen, D., J. Sun, “On the Conjunction Practical Stability and Controllability of Large-Scale Impulsive Control Systems”, Journal of Control Theory and Applications, Volume 3, Number 2, May, (2005) 181-185.

Civalleri, P.P., M. Gilli , “On Stability of Cellular Neural Networks”, *The Journal of VLSI Signal Processing*, Volume 23, Numbers 2-3, Springer, Netherlands, November, (1999) 429-47.

Civalleri, P. P., M. Gilli, “Practical Stability Criteria for Cellular Neural Networks”, *IEEE Electronics Letters*, Vol. 33, No. 11, May, (1997) 970-971.

Debeljković, D., Lj., D. H. Owens, “On Practical Stability”, *Proc. of MELECON Conf.*, Madrid, Spain, October, (1985) 103-105.

Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, “On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems”, *Proc. of EUROCON Conf.*, Paris, France, April, (1986) 406-409.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Application of Singular Systems Theory in Chemical Engineering*, MAPRET Lecture – Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Praha, Czech Republic 1996.

Debeljković, D. Lj. D., Koruga, Milinković A. S., Jovanović B. M., Jacić A. Lj., “Finite Time Stability of Linear Discrete Descriptor Systems”, *IEEE Electrotechnical Conference, MELECON* 98., 9th Mediterranean Conf., Volume 1, 504-508, 18-20 May 1998.

Debeljković, D. Lj., N. A. Kablar, “Finite-Time Stability of Linear Singular Systems: Bellman-Gronwall Approach”, *Proc. of the IEEE American Control Conference*, San Diego, California, USA,June, (1999) 1803-1806 .

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.a.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A Jacić, *Diskretnini singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.b.

Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurovic , *Dinamika kontinualnih linearnih singularnih sistema - Geometrijski prilaz*, Mašinski fakultet, Beograd, 2007.

Dlala M., M. A., Hammami , “Uniform Exponential Practical Stability of Impulsive Perturbed Systems”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Volume 13 , Issue 3, Hingham, MA, USA, July (2007) 373-386.

Dolezal, V., “Generalized Solutions of the Semistate Equations and Stability”, *Circ. Syst. Sig. Proc*, **5** (4) (1986) 391–403.

Dolezal, V., “Some Practical Stability Criteria for Semistate Equations“, *Journal Circuits, Systems and Signal Processing*, Volume 6, Number 3, Birkhauser, Boston, USA, September, (1987) 335-345 .

Dorato, P., “Comment on “Finite-Time Stability Under Perturbing Forces and on Product Spaces” ”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 340, June, (1967) 340 -340.

Dorato, P., “An Overview of Finite-Time Stability”, *Currennt Trends in Nonlinear Systems and Control*, Part II, Birkhauser, Boston, USA, September, (2006) 185-194.

Dvirnyi, A. I., “Sufficient Conditions for the Practical and Technical Stability of Quasilinear Impulsive Systems”, *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 41, Number 1, Springer, New York, USA, January (2005) 104-110.

Feng, Z. S., “Lyapunov Stability and Practical Stability of Nonlinear Delay Stochastic Systems: A Unified Approach”, *Proc.* 42*nd IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol. 2, San Antonio, TX, USA, December, (1993) 865-870.

Galkowski, K., Rogers E., Gramacki A., Gramacki J., Owens D., “Strong Practical Stability for a Class of 2D Linear Systems”, *ISCAS* 2000 - *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Geneva, Switzerland, May 28-31, (2000) I-403 - I-406.

Garashchenko, F. G., I. A. Kutsenko, “Problems of Practical Stability and Stabilization of Motion in Discrete-time Systems”, Journal of Mathematical Sciences, Volume 66, Number 5, Springer, New York, USA, October, (1993) 2538-2543.

Garashchenko, F. G., L. A. Pantalienko, “Practical Stability of Dynamical Systems Dependent on a Parameter”, *Journal of Mathematical Sciences*, Volume 58, Number 1, Springer, New York, USA, January, (1992) 95-99.

Grujić, T. Lj., “On Practical Stability”, 5*th Aslomar Conf. on Circuits and Systems*, (1978) 174-178.

Grujić, T. Lj., “On Practical Stability”, *Int. Journal of Control*, Vol 17, Issue 4, (1973) 881-887.

Grujić, Lj. T., “On Practical Stability of Automatic Control Systems”, *Symp. Mechanical Eng.* ‘1873–1973’, Belgrade (1973.b) B.21–B.26.

Grujić, Lj. T., “Practical Stability with the Settling Time of Composite Systems”, *Automatika*, T. P. 9 (1975.a) 1–11.

Grujić, Lj. T., “Uniform Practical and Finite -Time Stability of Large-Scale Systems”, *Int. J. Syst. Sci.*, **6** (2) (1975.b) 181–195.

Grujić, Lj. T., “Non-Lyapunov Stability Analysis of Large-Scale Systems on Time-Varying Sets”, *Int. J. Control*, **21** (3) (1975.c) 401–415.

Grujić, Lj. T., “On Practical Stability of Large-Scale Systems”, *Proc. ETAN* (1977.a) III.301–III.307.

Grujić, Lj. T., “On Stability Domain of Singularly Perturbed Systems”, *Proc. ETAN* (1977.b) III.13–III.20.

Grujić, Lj. T., “Uniquely Bounded Sets and Nonlinear Systems”, *Proc.* 1978 *IEEE Conf. Decision and Control*, San Diego (1979) 325–333.

Guang, C.T., W. Z., “Technical Stability of Nonlinear Time-varying Systems with Small Parameters”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 21, Number 11, Springer Netherlands, November, (2000) 1264-1271.

Gunderson, R.W., “On Stability over a Finite Interval”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, October, (1967) 634-67.

Infante, E.F., “Some Remarks on the Stability of Time-Varying Systems”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, December, (1968) 722-723.

Kablar, A.N., D. Lj. Debeljković, “Finite-Time Stability of Time-Varying Linear Singular Systems”, *Proc. of the* 37*th IEEE Conf. on Decision* & *Control Tampa*, Florida, USA, December, (1998) 3831-3836.

Kablar, A.N., D. Lj. Debeljković, “Finite-Time Instability of Time-Varying Linear Singular Systems”, *Proc. of* 38 *th the IEEE American Control Conference*, San Diego, California, USA, June, (1999) 1796-1800.

Kaplan, J. L., “Converse Theorems for Finite-Time Stability and Practical Stability”, IEEE Transaction on Circuits and Systems Theory, Vol. 20, No. 1, January, (1973) 66-67.

Karamancioglu, A., F. L. Lewis, “A Geometric Approach to 2-D Implicit Systems”, Proc. of the 29th Conf. on Decision and Control, Honolulu, Hawai, USA, December, (1990) 470-475.

LaSalle, J. P., S. Lefschetz, *Stability by Liapunov’s Direct Method with Application*, New York, Academic, USA, 161.

Lee T.C., “Practical Stabilization for Nonholonomic Chained Systems with Fast Convergence, Pole-Placement and Robustness”, *Proc. of the* 2002*nd IEEE International Conf. on Robotics & Automation*, Washington, DC, USA, May, (2002) 3534-3539.

Lee T.S., Chen Y.H., Chuan J., “Fuzzy Modeling and Uncertainty-Based Control for Nonlinear Systems”, Proc. of the American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June (1998) 2088-2092.

Lyapunov, A. M., *General Problem of Stability of Motion*, Moscow, Leningrad, USSR Academy of Science, 1956.

Lyapunov, A. M., *Stability of Motion*, Academic Press, New York, 1966.

Lewis, F. L., “Preliminary Notes on Optimal Control for Singular Systems”, *IEEE Proc. on CDC*, Ft. Lauderdale, FL (1985.b) 266–272.

Lewis, F. L., “A Survey of Linear Singular Systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc.*, **5** (1) (1986.a) 3–36.

Lewis, F. L., “Recent Work in Singular Systems”, *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA (1987.a) 20–24.

Martynyuk, A. A., “Practical Stability of Hybrid Systems”, *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 25, Number 2, Springer, New York, USA, February, (1989) 194 -200.

Meredov A.M., “Stability in the Mean of Solutions of Difference Equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, Volume 71, Number 4, Springer, New York, USA, September, (1994) 2602-2605.

Michel, A.N, “Quantitative Analysis of Simple and Interconnected Systems: Stability, Boundedness and Trajectory Behavior ”, *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-17, No. 3, August, (1970) 292-301.

Michel, A. N., D. W. Porter, “Practical Stability and Finite-Time Stability of Discontinuous Systems”, *IEEE Transaction on Circuits and Systems Theory*, Vol. CT-19, No. 2, March, (1972) 123-129.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “Qualitative Analysis of the Semi-State Model for Large-Scale Systems”, *Proc. 6th European Conf. Circ. Theory and Design* (*ECCTD* 83), Stuttgart (1983) 131–133.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “Some Properties of Solutions of Semi-State Model for Nonlinear Nonstationary Systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc, Special Issue on Semistate Systems*, **5** (1) (1986) 109–123.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “Stability Analysis of Singular Systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc, Special Issue: Recent Advances in Singular Systems*, **8** (3) (1989) 267–287.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “Qualitative Analysis of Systems and Circuits Described by Continuous Semistate Models: An Overview of Methods based on Lyapunov Functions (Keynote and Tutorial Lectures)”, *Proc.* 6-*th Int. Symp. Networks, Systems and Signal Processing* (*ISYNT* 89), ETAN and IEEE CAS Society, Zagreb, Yugoslavia, (1989.b) 10–15.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “A Lyapunov Function for the Analysis of a Class of Singular Systems and Networks”, *Proc.* 10-*th Europ. Conf. Circ. Theory and Design* (*ECCTD* 91), Copenhagen, Denmark, **III** (1991) 1263–1269.

Milić, M. M., D. Đurić, “An Approach to the Qualitative Analysis of Singular Dynamical Systems”, *Proc. SAUM* 92, Kragujevac, YU (1992) 349–367.

Moreau, L., D. Aeyels, “Practical Stability for Systems Depending on a Small Parameter”, *Proc. of the* 37-*th Conf. on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, December, (1998) 1428-1433.

Moreau, L., D. Aeyels, “Practical Stability and Stabilization”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 45, No. 8, August, (2000) 1554-1558.

Morin, P., C. Samson, “Practical and Asymptotic Stabilization of the 3-d Chained System by the Transverse Function Approach”, *Proc. of the* 42*nd IEEE Conf. on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, December (2003) 604-608.

Moulay, E., W. Perruquetti, “Lyapunov-based Approach for Finite Time Stability and Stabilization”, *Proc. of the* 44 *th IEEE Conf. on Decision and Control and the European Control Conference* 2005 Seville, Spain, 4742-4747, December 12-15, 2005.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, “On Practical Stability of Time Delay Systems”, *Proc. of the IEEE American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico, USA, June (1997) 3235-3236.

O’Leary, D. P., J. P. Segundo, J. J. Vidal, “Perturbation Effects on Stability of Gravity Receptors”, *Journal of Biological Cybernetics*, Volume 17, Number 2, Springer Berlin/Heidelberg, June, (1975) 98-108.

Owens, D. H., D. Lj. Debeljković, “Consistency and Liapunov Stability of Linear Decsriptor Systems: a Geometric Approach”, *IMA Journal of Math. Control and Information*, No.2, (1985) 139 – 151.

Owens, D. H., D. Lj. Debeljković, “On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems”, *Proc. of the* 25-*th IEEE Conf. on Decision and Control*, Athens, Greece, (1986) 2138-2139.

Parrilo, P. A., S. Khatri, “On Cone-Invariant Linear Matrix Inequalities”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 45, No. 8, August, (2000) 1558-1563.

Perruquetti, W., S. Drakunov, "Finite Time Stability and Stabilization", *Proc. of the* 39th *IEEE Conf. on Decision and Control*, Sydney, Australia, December, (2000) 1894 -1899.

Pichkur, V. V., "Practical Stability of Set Dynamical Systems", *Journal of Nonlinear Oscillations*, Volume 5, Number 2, Springer, New York, USA, April, (2002) 199-208.

Qideng, F., "Variable Structure Control of Stochastic Partial Differential Equations with Colored Noises in Terms of Practical Stability", *Proc.of the* 2005 *International Conf. on Machine Learning and Cybernetics*, Volume 9, 18-21 August (2005) 5630-5634.

Retchkiman, Z., "Practical Stability of Discrete Event Systems Using Lyapunov Methods", *Proc. of the American Control Conference*, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June, (1998) 3627-3628.

Shen, Y., W. Shen, "Finite-Time Control of Linear Singular Systems with Parametric Uncertaines and Disturbances", Preprint submitted to *Automatica*, (2006).

Tsygankova, L.A., "Optimization of Practical Stability Problems", *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 14, Number 12, Springer, New York, USA, December, (1978) 1312-1317.

Vujičić, A. V., "The Practical Stability of Equilibrium and Motion of Mechanical Systems ", *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 28, Number 11, Springer, New York, USA, November, (1992) 746-750.

Weiss, L., "On Uniform and Nonuniform Finite-Time Stability", *IEEE Transaction on Automatic Control*, June, (1969) 313-314.

Weiss, L., "An Algebraic Criterion for Controllability of Linear Systems with Time Delay", *IEEE Transaction on Automatic Control*, August, (1970) 443-444.

Weiss, L., E. F. Infante, "Finite Time Stability Under Perturbing Forces and on Product Spaces", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, No. 1, February, (1967) 54-59.

Weiss, L., E. F. Infante, "On the Stability of System Defined over a Finite Time Interval", *Proc. of Natonal Acad. Sci*., Vol 54, (1965) 44-48.

Xia, Z., J. Sun, "On Practical Stability for Large Scale Impulsive Control System in Terms of Two Measurements", *Proc. of the* 5th *World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China, 142-145, June (2004) 15-19.

Xu, X., G. Zhai, “Practical Stability and Stabilization of Hybrid and Switched Systems”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 50, No. 11, November, (2005) 1987-1903,.

Xu, X., G. Zhai, Z. He, “Stabilizability and Practical Stabilizability of Continuous-Time Switched Systems: A Unified View”, Proc. of the 2007 American Control Conference, New York City, USA, 663-668, July 11-13, 2007.

Yang, C., Q. L. Zhang, Y. Lin, L. Zhou, “Practical Stability of Closed-loop Descriptor Systems”, *International Journal of Systems Science*, Volume 37, Issue 14, Taylor & Francis, Inc., Bristol, PA, USA, November (2006) 1059-1067.

Yang, T., *Practical Stability of Impulsive Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Volume 272/2001, Springer Berlin/Heidelberg, 149-198, 2001.

Zeng, Z., D. D. Huang, Z. Wang, “Practical Stability Criteria for Cellular Neural Networks Described by A Template”, *Proc. of the* 5th *World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China, June 15-19, (2004) 160-162.

Zhai, G., A. N. Michel, “Generalized Practical Stability Analysis of Discontinuous Dynamical Systems”, *Proc*. 42 *nd IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol. 2, December, (2003) 1663 - 1668.

Zhang, X L., Fun Y. S., “Adaptive State Feedback Control of Exponentially Practical Stability for Uncertain Systems”, *Proc. of the* 2 *nd IEEE International Conf. on Machine Learning and Cybernetics*, Xian, China, 2 -5 November, (2003) 980-984.

Zhang, Y., Sun J., “Eventual Practical Stability of Impulsive Differential Equations with Time Delay in Terms of Two Measurements”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 176, Issue 1, Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, Netherlands, April, (2005) 223 - 229.

9.4 Diskretni deskriptivni sistemi: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu

Debeljković, Owens (1985) i *Owens, Debeljković* (1986) prvi put su izveli nove rezultate na polju proučavanja praktične stabilnosti i nestabilnosti, kao i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, linearnih singularnih sistema. Dobijeni rezultati predstavljaju dovoljne uslove ove vrste stabilnosti za razmatranu klasu sistema, a bazirani su u potpunosti na korišćenju "kvazi –Ljapunovljeve" funkcije i njenih osobina na potprostoru konzistentnih početnih uslova. U posebnom slučaju, slično kontinualnim sistemima, ove funkcije *ne moraju* da budu *pozitivno određene* u celom prostoru stanja i *negativno određene* duž trajektorija sistema.

Geometrijski prilaz korišćen u tom radu daje mogućnost uvida u strukturne osobine singularnih sistema i osobina konzistentnih početnih uslova i omogućava opis dinamičkih karakteristika singularnih sistema preko bazičnog regularnog matričnog para (E, A).

U radu *Debeljković et al*. (1992) razmatran je problem ograničenosti rešenja singularnih sistema na vremenski invarijantnim skupovima u prostoru stanja, kako za *regularne*, tako i za *iregularne singularne sisteme*. Dobijeni su jednostavni, dovoljni, algebarski uslovi, koji mogu da posluže za testiranje postojanja rešenja singularnih sistema koja poseduju sve karakteristike "*ograničenosti*" na konačnom, i osobine "*praktične*" stabilnosti, na beskonačnom vremenskom intervalu. Isti rezultati omogućavaju da se izvrši i procena *potencijalnog domena praktične* stabilnosti. Takođe su dati i dovoljni uslovi *praktične nestabilnosti* ovih sistema, kao ispomoć u dobijanju pravog odgovora, kada teoreme o praktičnoj stabilnosti ne daju pozitivan odgovor.

Rad *Debeljković et al*. (1993) razmatra identičnu problematiku kao i prethodni rad. Valja napomenuti da su tom prilikom dobijeni uslovi koji su daleko blaži od pomenutih, a garantuju najmanje ista svojstva razmatranim rešenjima sistema.
Evidentno objedinjavanje i značajno uopštavanje svih rezultata vezanih za ovu problematiku, bili su predmet rada *Debeljković et al*. (1995.b).

Konačno u ovom pregledu rezultata treba pomenuti rad *Jovanović, Debeljković* (1996, 1997), u kojem su dobijeni dovoljni uslovi praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za *regularne* singularne sisteme u *prinudnom radnom* *režimu*. U slučajevima kada odsustvuje spoljašnja prinuda, oni se svode na rezultate date u radu *Debeljković, Owens* (1985).

Poseban prilaz proučavanju stabilnosti kontinualnih singularnih sistema na konačnom vremenskom intervalu, prvi put je izložen u radu *Debeljković et al*. (1997.b), a zasnovan je na primeni matrične mere i *Coppel*-ove nejednakosti.[†] Tom prilikom razmatrani su kako autonomni, tako i singularni sistemi koji rade u prinudnom radnom režimu, na vremenski promenljivim skupovima u prostoru stanja. Izvedeni rezultati daju *dovoljne* uslove praktične stabilnosti ove klase singularnih sistema i veoma su efikasni za primenu.

Kada su u pitanju *diskretni deskriptivni sistemi*, prvi rezultati vezani za primenu koncepta praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom intervalu, pojavili su se u radovima *Debeljković*, *Đorđević* (1985) i *Debeljković*, *Owens* (1986). Ovi rezultati daju dovoljne uslove stabilnosti ove klase singularnih sistema i, u osnovi, analogni su ranije izvedenim za kontinualne singularne sisteme, *Debeljković, Owens* (1985).

Da bi se strože utvrdile granice do kojih dosežu rešenja diskretnog singularnog sistema, prilikom njegovog rada na konačnom vremenskom intervalu, formulisane su i dokazane teoreme o praktičnoj nestabilnosti ove klase sistema, a u radu *Owens, Debeljković* (1986).

U radovima *Bogićević et al*. (1995) i *Dihovični et al*. (1996.a) razmatran je problem ograničenosti rešenja autonomnih diskretnih singularnih sistema, a bez limitiranosti po pitanju *regularnosti* istih. Mimo standardnih očekivanih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, dobijeni su i značajni rezultati koji omogućavaju efikasnu procenu "*potencijalnog domena praktične stabilnosti*" razmatranog sistema, s obzirom na činjenicu da se ova osobina može vezati samo za određeni skup rešenja, od svih mogućih ponuđenih. Isti ti rezultati u velikoj meri su poboljšani i dograđeni u radu *Bajić et al*. (1988).

Zbog same prirode kretanja diskretnih deskriptivnih sistema, izostala je primena koncepta matrične mere, ali se pokazuje da diskretna modifikovana *Bellman-Gronwall*-ova lema može da pruži još bolje ocene kretanja ovih sistema, kako u slobodnom, tako i u

[†] Coppel, W. A., *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D. C. Heat and Co., Boston, 1965.

prinudnom radnom režimu, a na konačnom vremenskom intervalu i vremenski promenljivim skupovima.

Nedavno se pojavila i diskretna verzija rada *Shen*, *Shen* (2006), za diskretne deskriptivne sisteme sa pozicija LMI. U radu su dobijeni odgovarajući dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu kao i uslovi ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu, imajući u vidu prisustvo egzogenog, spoljašnjeg poremećaja.

Literatura

Bajić, V. B., D. Lj. Debeljković, B. Bogićević, M. B. Jovanović, "Non-Lyapunov Stability Robustness Consideration for Discrete Descriptor Linear Systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **15** (3) (1998) in print.

Debeljković, D. Lj., "Finite-Time Stability of Linear Descriptor Systems", *Proc. IMACS/IFORS*, Lille, France (1986.b) 57–61.

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, Z. Gajić, "Further Results in Non-Lyapunov Stability and Unstability of Regular and Irregular Generalized State Space Systems", *Proc. 4th Conference SAUM*, Kragujevac, Yugoslavia, June (1992) 316–333.

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, Z. Gajić, B. Petrović, "Boundedness and Existence of Solutions of Regular and Irregular Singular Systems", *Publications of Faculty of Electrical Eng. Series: Automatic Control*, Belgrade (YU), (1) (1993) 69–78.

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, A. U. Grgić, S. A. Milinković, "Non-Lyapunov Stability and Instability Robustness Consideration for Linear Singular Systems", *Proc. ECC95*, Roma (Italy), (1995.b) 3702–3707.

Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, "On Practical Stability", *Proc. MELECON Conference*, Madrid (Spain), October (1985) 103–105.

Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, "On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems", *Proc. EUROCON Conference*, Paris (France), April (1986) 406–409.

Debeljković, D.Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, **"**Application of singular system theory in chemical engineering : Analysis of process dynamics", Monograph, 12 th International Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, Prague (Czech Republic), 25 - 30 August, 1996, Process Eng. Publishing, ISBN 80-86059-1-1.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni Singularni Sistemi Automatskog Upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1996.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, "Praktična Stabilnost Vremenski Diskretnih Linearnih Singularnih Sistema", *DIT* (Yu), **III** (8-9) (1997) 51–58.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, *Diskretni Singularni Sistemi Automatskog Upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, T. N. Erić and S. A. Milinković, "A Lyapunov Analysis of Stability Robustness for Discrete Linear Descriptor Systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **15** (1) (1998.a) 53–62.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, "Finite Time Stability of Linear Discrete Descriptor Systems", *Proc. MELECON* 98*,* Tel - Aviv (Izrael) (1998.b) 509–512.

Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, "On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems", *Proc. EUROCON Conference*, Paris (France), April (1986) 406–409.

Debeljkovic, D. Lj., Đ. Koruga, S A .Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj.A.Jacic, "Finite time stability of linear descriptor systems", *Proc. MELECON* 98, Tel-Aviv (Israel) May 18-20, Vol.1, (1998) 504 - 508.

Debeljkovic, D. Lj., Đ. Koruga, S..A.Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A .Jacic, "Finite time stability of linear discrete descriptor systems", *Preprints* 5th *IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China) September 8 - 10 (1998), TS13 1 - 5.

Debeljkovic, D. Lj., N. A. Kablar, **"**On Finite Time Stability of Discrete Descriptor Systems: Bellman - Gronwall Approach**"**, Proc. HIPNEF 98, Oktober 28 - 30, Belgrade (YU), (1998) 169 - 172.

Debeljkovic, D. Lj., N. A. Kablar, "Stability of discrete linear singular systems: Bellman - Gronwall approach", Transactions of Mechanical Eng. Faculty, Belgrade, No.1, (1999) 1 - 4.

Debeljkovic, D. Lj., N. A. Kablar, "Further results on finite time stability of discrete linear singular systems: Bellman - Gronwall approach ", *Proc. APCCM*, The 4th Asia - Pacific Conf. on Control and Measurements, 9 - 12 July (2000) Guilin (China) D. 10.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni Singularni Sistemi*, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2004.

Debeljković, D. Lj.,, S. B. Stojanovic, M. S. Aleksendric, "Finite Time Stability of Linear Time Invariant Discrete Descriptor System: an LMI Approach", *TTEM* (BIH), 2012 (podneseno)

Jovanović, M. R, D. Lj. Debeljković, "Finite-Time Stability under Perturbing Forces of Linear Singular Systems", *Proc. XL Conference ETRAN*, Budva, June 1996.

Milić, M. M., V. B. Bajić, "Bounds on the Zero Input Response of Linear Time-Varying Reciprocal Network", *Proc. 1980 European Conf. Circ. Theory and Design*, Warsaw, Poland, **2** (1980) 60–65.

Milić, M. M., V. B. Bajić, "Bounds on the Complete Response of Linear Time-Varying Networks", *Proc. 1981 IEEE Int. Symp. Circ. Syst.*, Chicago, USA, **2** (1981) 583–585.

Milić, M. M., V. B. Bajić, "Bounds on Solutions of a Class of Semi-State Models", *Proc. 3rd Int. Symp. Electrical Eng. Theory*, Moscow, USSR, **II** (1985) 23–28.

Shen, Y., W. Shen, "Finite-Time Control of Linear Singular Systems with Parametric Uncertaines and Disturbances", Preprint submitted to *Automatica*, (2006).

Owens, D. H. D. Lj. Debeljković, "On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems", *Proc. 25th Conference on Decision and Control*, Athens, Greece (1986) 2138–2139.

9.5 Kontinualni sistemi sa kašnjenjem: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu

Prema dostupnim saznanjima autora, nije moguće sa sigurnošću odrediti ko je prvi koncept praktične stabilnosti proširio na *vremenski neprekidne sisteme sa kašnjenjem*. Naime, krajem 1995. godine, *Nenadić* (1995) iznosi novo viđenje ovog problema i, kroz odgovarajuće definicije i ostale rezultate date u vidu dovoljnih, a ponegde i u vidu potrebnih uslova, u punoj meri primenjuje ovaj koncept i proširuje ga na *vremenski kontinualne sisteme sa kašnjenjem*.

Feng, *Hunsarg* (1996) obelodanjuju svoje viđenje koncepta stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu u primeni na nelinearne, singularno-perturbovane sisteme sa višestrukim kašnjenjem, eksplicitno prisutnim u "*brzom*" podsistemu.

Iako nastale u skoro isto vreme, nezavisno jedna od druge, *osnovne definicije* koje čine polazište ranije pomenutih autora, *suštinski se razlikuju*.

S obzirom na činjenicu da *Feng*, *Hunsarg* (1996) posmatraju *posebnu klasu sistema* u prisustvu nelinearnosti, njihovi glavni rezultati prevazilaze interesovanja određena okvirima ove disertacije.

U radovima *Nenadić et al*. (1995.a, 1995.b) i *Debeljković et al*. (1997.a), su izvedeni dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i praktične stabilnosti jedne klase linearnih, stacionarnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, i to u prilikama kada je moguće izračunati fundamentalnu matricu sistema. Kako njeno izračunavanje može nekada da bude komplikovanije od samog rešavanja sistema diferencijalnih jednačina, ovaj rezultat ima u osnovi više akademski, odnosno teorijski značaj. Sa druge stane, isti rezultat pokazuje jednu značajnu činjenicu.

Naime,očigledno je da, ukoliko je potrebno da *sistem sa kašnjenjem* bude stabilan, odgovarajući sistem *bez kašnjenja* mora da bude "*dovoljno stabilan*", odnosno da poseduje odgovarajuću *rezervu* stabilnosti. U prilikama kada je moguće uspostaviti vezu između fundamentalnih matrica sistema *sa i bez kašnjenja*, neki od iznetih rezultata u pomenutim radovima pružaju mogućnost da se ispita praktična stabilnost razmatranog sistema sa kašnjenjem.

Evidentan nedostatak prethodnih rezultata otklonjen je u seriji radova koji su se pojavili tokom 1997. godine. Tako je u radovima *Nenadić et al*. (1997), *Debeljković et al.* (1997.a – 1997.e), prvi put korišćena *matrična mera* za dobijanje dovoljnih uslova praktične stabilnosti različitih klasa sistema sa kašnjenjem, kako autonomnih, tako i onih koji svoje kretanje ostvaruju u prinudnom radnom režimu. Imajući u vidu moguće brojne implementacije matrične mere, dobijen je niz rezultata koji se odnose na široki spektar mogućih procena konačnog vremenskog intervala, što u stvari daje "*blaže*" ili "*strožije*" uslove stabilnosti.

Zakonitost ovog razgraničavanja samo je intuitivno naslućena, ali nije i teorijski dokazana, što može da bude i jedan od osnovnim pravaca daljih istraživanja.

Druga grupa radova, *Debeljković et al*. (1998.a, b, d, e) uglavnom daje rekapitulaciju ranijih rezultata sa njihovim blagim modifikacijama u pravcu iznalaženja još jednostavnijih i efikasnijih kriterijuma praktične stabilnosti, u prisustvu nekih blažih ili strožih ograničenja, nametnutih različitim klasama razmatranih sistema.

Suštinski pomak, u odnosu na ranije rezultate, pojavljuje se u radovima *Debeljković et al*. (1998.c, 1999), u kojima se prvi put koristi poznata *Bellman-Gronwall*-ova teorema za dobijanje dovoljnih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, iskazanih preko singularnih vrednosti bazičnih matrica sistema sa kašnjenjem.

Upotrebna vrednost ovih rezultata ilustrovana je brojnim primerima, kao i njihova superiornost u pogledu kvaliteta ocena u odnosu na ranije radove autora.
Svi izvedeni kriterijumi u prethodno navedenim radovima, formulisani su u formi *samo* dovoljnih uslova, koji uključuju i iznos *čistog vremenskog kašnjenja* i, sa tog aspekta, spadaju u onu drugu, kvalitetniju grupu kriterijuma za ocenu stabilnosti.

Literatura

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical and Finite-Time Stability of Time-Delay Systems", *Proc. ECC97*, Brussels (Belgium), July 2 - 6 (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, "Finite Time Stability for the Metal Strip Cold Rolling", *Proc. ASI: International Workshop on Automation in Steel Industry*, Kyongju (Korea), July 16 – 18 (1997.b) 233–238.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical Stability of Time-Delay Systems: New Results", *Proc. 2nd ASCC* 97, Seoul (Korea), July 22 – 25 (1997.c) III- 543–545.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. Tomašević, "On Practical Stability of Time Delay System Under Perturbing Forces", *Proc. AMSE* 97, Melbourne (Australia), October 29 – 31 (1997.d) 442–445.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval”, *Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21 – 23 (1997.e) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, “Further Results on Non-Lyapunov Stability of Time Delay Systems”, *Proc. MELECON* 98, Tel-Aviv (Israel), May 18 – 20 (1998.a) **Vol 1**, 509–512.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Non-Lyapunov Stability Analysis of Linear Time Delay Systems”, *Proc. DYCOPS* 98, Corfu (Greece), June 8 – 10 (1998.b) 549–553.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman-Gronwall Approach”, *Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France) July 6 – 7 (1998.c) 171–175.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, Đ. Koruga, “Further Results on Non-Lyapunov Stability of Time Delay Systems”, *Proc. 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), September 8 – 10 (1998.d) TS13-6–TS13-10.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, “Further Results on Non-Lyapunov Stability of Linear Systems with Delayed State”, *Proc. XII Brazilian Automatic Control Conference*, **IV**, Uberlandia (Brasil) September 14 – 18 (1998.e) 1229–1233.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, “Stabilnost neautonomnih sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu”, *Zbornik radova HIPNEF 98*, Beograd (YU), Oktobar 28 – 30 (1998.f) 181–185.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, “Finite Time Stability of Time Delay Systems”, *IMA J. Math. Control and Information*, **16** (3) (1999).

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, 1999.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval", *Proc*. ***ACC*** 2000, Chicago Illinois (USA), June 28-30, 2000, 1450-1451.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, **Systems, Structure and Control** (Scientific monograph)**,** Editior Petr Husek, Chapter: *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, Vienna, ISBN 978-7619-05-3, 2008, 29-60.

Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, **Time Delay Systems** - (Scientific monograph) – Chapter: *The Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval*, I – Tech, Vienna, ISBN 978-953-7619-X-X, 2011.

Desoer, C. A., M. Vidysagar, *Feedback Systems: Input – Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

Feng, H. H., J. Hunsarg, "Stabilization of Nonlinear Singularly Perturbed Multiple Time Delay Systems by Dither", *Trans. ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **118** (3) (1996) 177–181.

Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Lag", *Trans. ASME J. Basic Eng*., (3) (1965) 74–80.

Lazarević, M. P., D.Lj. Debeljković, D. Krstić, *Optimalno upravljanje sistemima sa kašnjenjem u procesnoj industriji,* Tehnološko – metalurški fakultet, Beograd, 2003.a.

Nenadić, Z. Lj., *Sinteza kontinualnog automatskog upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za objekte i procese sa kašnjenjem*, Dipl. rad, *Katedra za automatsko upravljanje*, Mašinski fakultet, Beograd (1995).

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Praktična stabilnost jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem", *Zbornik radova HIPNEF '96*, Vrnjačka Banja, 5–7 jun (1995.a) 197–204.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, *Tehnika – E*, **45** (11-12) (1995.b) E1–E7.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On Practical Stability of Time Delay Systems", *Proc. American Control Conference*, Albuquerque, USA June 4 – 6 (1997) 3235–3235.

9.6 Diskretni sistemi sa kašnjenjem: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu

Kada su u pitanju rezultati koji se odnose na klasu *diskretnih sistema sa kašnjenjem*, koliko je autorima poznato, sve do nedavno, objavljen je samo jedan rad.

U radovima *Aleksendrić*, *Debeljković* (2002), *Debeljković*, *Aleksendrić* (2003) inicirano je rešavanje ovog još nerazmatranog problema. S obzirom na usvojeni koncept stabilnosti, u tim radovima istražuje se problem *dovoljnih uslova koji garantuju da će trajektorije autonomnog linearnog diskretnog sistema sa kašnjenjem u stanju* ostati u unapred zadatom skupu stanja na konačnom vremenskom intervalu njegovog rada.

Detalji i opširna diskusija rezultata sa primerima će biti izložena u narednom odeljku.

Literatura

Aleksendrić, M., *On Stability of Particular Class of Continual and Discrete Time Delay Systems on Finite and Infinite Time Interval*, Diploma Work, Univ. of Belgrade, Dept. of Control Eng., 2002.

Aleksendrić, M., D, Lj. Debeljkovic, "Finite Time Stability of Linear Discrete Time Delayed Systems", *Proc. HIPNEF* 2002, Nis (Yu), October, 2-5, 2002., pp. 333 – 340.

Debeljković, D. Lj., *Synthesis of Discrete Automatic Control on Finite Time Interval* (in Serbian), Ph.D. Thesis, Mechanical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, July, 1979.a.

Debeljković, D. Lj., "Praktična stabilnost sa vremenom smirenja vremenski diskretnih sistema", *Tehnika* (Yu), No. 10, 1979.b, pp. 19–23.

Debeljković, D. Lj., "Praktična stabilnost sa vremenom smirenja vremenski diskretnih sistema u slobodnom i prinudnom radnom režimu", *Tehnika* (Yu), No. 1, 1980.a, pp. 13–20.

Debeljković, D. Lj., "Prilog proučavanju praktične nestabilnosti vremenski diskretnih sistema", *Tehnika* (Yu), No. 2, 1980.b, pp. 7–11.

Debeljković, D. Lj., “Further Results in Finite Time Stability”, *Proc. MELECON 83*, Athens (Greece), 1983, pp. 475–478.

Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, “On Practical Stability”, *Proc. MELECON Conference*, Madrid (Spain), October 1985, pp. 103–105.

Debeljković, D. Lj., “Praktična stabilnost jedne klase vremenski diskretnih sistema”, *Saopštenja MF* (Yu), No. 1., 1993, pp. 37–42.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, 1999.

Debeljkovic, D. Lj., M. Aleksendrić, “Lyapunov and Non – Lyapunov stability of linear discrete time delay systems“, *Proc. ACC* 2003, Denver (Colorado), USA, June 4 - 6, 2003 , CD-Rom

10. DOPRINOSI NA POLJU LJAPUNOVSKE STABILNOSTI

10.1 Kontinualni singularni sistemi: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja ljapunovske stabilnosti

Prema dostupnim saznanjima, problem *ljapunovske stabilnosti* ove klase sistema inicirao je *Pandolfi* (1980). U tom radu izvedena je Ljapunovljeva matrična jednačina, za autonomni regularni singularni sistem, pod veoma strogim uslovom da je $A = I$. Šta više, pozitivno određena simetrična matrica P, kao rešenje Ljapunovljeve matrične jednačine, mora da zadovolji još neke dopunske zahteve, kako bi se obezbedilo neimpulsno ponašanje sistema.

Geometrijski prilaz problemu konzistentnih početnih uslova i asimptotsku stabilnost linearnih singularnih sistema, razmatrali su *Owens*, *Debeljković* (1985). Teorija konzistentnosti vodi do prirodne klase pozitivno određenih kvadratnih formi na potprostoru koji sadrži sva rešenja. Ova činjenica omogućava da se Ljapunovljev koncept stabilnosti proširi na singularne sisteme u smislu da je asimptotska stabilnost ekvivalentna postojanju realne, simetrične, pozitivno određene matrice kao rešenja "slabe" singularne matrične jednačine Ljapunova. Kada je $E = I$, problem se svodi na klasično rešenje.

Do sličnog rezultata, koji obezbeđuje "glatka" asimptotski stabilna rešenja singularnog sistema, ali drugačijim prilazom, došao je *Lewis* (1985.b).

Koristeći drugu metodu Ljapunova, *Bajić et al.* (1992a, 1992b) su ispitivali postojanje rešenja koja teže ishodištu faznog prostora, kao i postojanje odgovarajućeg "slabog" domena privlačenja kako za *regularne*, tako i za *iregularne* linearne singularne sisteme. Odgovori na ova pitanja mogu se dobiti ukoliko su ispunjeni odgovarajući uslovi.

Za prethodno pomenute radove se može sa sigurnošću reći da predstavljaju pionirske poduhvate po ovoj problematici a bazirani su na analognim rešenjima koja se pojavljuju kod *normalnih sistema*, i u tom smislu dovode do *neke forme* klasične Ljapunovljeve matrične jednačine.

I pored permanentnog interesovanja za jedan ovakav prilaz u literaturi se, nedavno, pojavio i jedan novi pristup baziran isključivo na primeni tzv. *linearnih matričnih* *nejednakosti*[14] . Imajući u vidu ovu činjenicu i aktuelnost ove metode, značajan prostor će biti posvećen ovoj problematici u nastavku ovih izlaganja, te se stoga površni komentar doprinosa na ovom polju, na ovom mestu izostavlja.

Pregled preostalih rezultata na ovom polju, vezanih za različite klase singularnih sistema, izlazi van okvira ovih izlaganja, a mogu se prepoznati u navedenoj literaturi prilično izražajnim i konstruktivnim naslovima, koji u velikoj meri govore o tematici odgovarajućih radova.

Posle 1980. godine napisano je više od hiljadu radova koji tretiraju ovu problematiku, tako da bilo kakva diskusija opšteg karaktera prevazilazi potrebe ove disertacije.

Literatura

D. Lj. Debeljkovic, S. A .Milinkovic, M. B. Jovanovic, Application of singular system theory in chemical engineering: Analysis of process dynamics, Monograph, 12 th International Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, Prague (Czech Republic), 25 - 30 August, 1996, Process Eng. Publishing, ISBN 80-86059-1-1., 1977.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Continuous Singular Control Systems, GIP Kultura, Belgrade, 1996.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Continuous Singular Systems, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic , I. M. Buzurovic, Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: A Geometric Approach, Mechanical Faculty, Belgrade, 2007.

Pjescic, R M., V. Chistyakov, D. Lj. Debeljkovic, On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2008 (*in Serbian*), pp. 445

I. M. Buzurovic, D. Lj. Debeljkovic, Geometric Approach and Dynamical Behavior Study for Particular Class of Linear Singular Systems with Application in Medicine, Mechanical Faculty, Belgrade, 2009. (*in Serbian*) pp. 446. - ISBN 978 – 86 – 7083 – 669 – 3.

[14] Na engleskom jeziku: LMI Method – Linear matrix inequalities method

D. Lj. Debeljkovic, Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 452, ISBN 978 – 86 – 7083 – 682 – 2.

10.2 Diskretni deskriptivni sistemi: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja ljapunovske stabilnosti

Kada su u pitanju *diskretni deskriptivni sistemi*, prvi rezultati mogu se vezati za rad, *Owens*, *Debeljković* (1985), u kojem su se autori bavili razmatranjem geometrijskog prilaza potprostoru konzistentnih početnih uslova koji generišu sekvencu rešenja $\left(\mathbf{x}(k): k = 0,1, ...\right)$.

Dobijeni rezultati su direktno iskazani preko baznih matrica E i A, tako da su izbegnute dodatne algebarske transformacije, koje obično opterećuju većinu procedura namenjenih ispitivanju stabilnosti sistema.

U tom smislu, predloženi geometrijski prilaz ponudio je ispitivanje dinamičkih osobina ove klase sistema preko "slabe" diskretne algebarske matrične jednačine Ljapunova. Nažalost, sve do nedavno[†] testiranje tih rezultata bilo je veoma složeno, a što je sve proisteklo iz činjenice da je pozitivna određenost relevantnih kvadratnih formi bila zahtevana samo na određenom podskupu prostora stanja, a ne na njegovoj sveukupnosti.

U radovima Dihovični *et al.* (1996.b), Debeljković *et al.* (1998.a) istraživano je postojanje diskretnih sekvenci koje teže ishodištu prostora stanja. Koristeći Ljapunovljevu metodu bilo je omogućeno razmatranje kako *regularnih*, tako i *iregularnih* diskretnih singularnih sistema. Koristeći pogodnu linearnu nesingularnu transformaciju, polazni sistem preveden je u svoju *normalnu kanoničku formu*, koja se pokazala kao izuzetno pogodna za utvrđivanje podklase mogućih rešenja (sekvenci) koje poseduju razmatranu osobinu. Štaviše, tom prilikom definisan je i određen "*potencijalni* (*slabi*) *domen privlačenja*" nultog ravnotežnog stanja.

[†] Videti rad Müller (1993).

Od ostalih značajnih rezultata na polju Ljapunovske stabilnosti vredi pomenuti rad *Milić*, *Bajić* (1984) u kojem je izučavana posebna klasa nelinearnih, nestacionarnih diskretnih singularnih sistema, kao i odgovarajući "*veliki sistemi*".

Pregled preostalih rezultata na ovom polju vezanih za različite klase singularnih i deskriptivnih sistema, izlazi van okvira ovih izlaganja, a mogu se prepoznati u navedenoj literaturi prilično izražajnim i konstruktivnim naslovima, koji u velikoj meri govore o tematici odgovarajućih radova.

Literatura

Buzurovic, I. M., Debeljkovic, D. Lj., Geometric Approach and Dynamical Behavior Study for Particular Class of Linear Singular Systems with Application in Medicine, Mechanical Faculty, Belgrade, 2009. (*in Serbian*) pp. 446. - ISBN 978 – 86 – 7083 – 669 – 3.

Debeljkovic, D. Lj., , S. A .Milinkovic, M. B. Jovanovic, Application of singular system theory in chemical engineering: Analysis of process dynamics, Monograph, 12 th International Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, Prague (Czech Republic), 25 - 30 August, 1996, Process Eng. Publishing, ISBN 80-86059-1-1., 1977.

Debeljkovic, D. Lj., , S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Continuous Singular Control Systems, GIP Kultura, Belgrade, 1996.

Debeljkovic, D. Lj., , S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Continuous Singular Systems, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

Debeljkovic, D. Lj., , I. M. Buzurovic, Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: A Geometric Approach, Mechanical Faculty, Belgrade, 2007.

Debeljkovic, D. Lj., , Linear Singular Systems with Time Delay: Stability, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 452, ISBN 978 – 86 – 7083 – 682 – 2.

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, T. N. Erić and S. A. Milinković, "A Lyapunov Analysis of Stability Robustness for Discrete Linear Descriptor Systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **15** (1) (1998) 53–62.

Dihovični, Đ. N., T. N. Erić, D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Weak Domain Attraction and Existence of Solutions Convergent to the Origin of the

Phase Space of Discrete Descriptor Linear Systems”, *Proc. ITHURS 96*, Leon, Spain, **II** (1996.b) 367–371.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “Solution Behavior of Semi-State Model for Large-Scale Time-Discrete Systems”, *Proc 5th Int. Symp. Network Theory, ETAN and CAS Society*, Sarajevo, Yugoslavia (1984) 106–111.

Müller, P. C., “Stability of Linear Mechanical Systems with Holonomic Constraints”, *Applied Mechanics Review*, **46** (11) (1993) 160–164.

Owens, D. H. D. Lj. Debeljković, “On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems”, *Proc. 25th Conference on Decision and Control*, Athens, Greece (1986) 2138–2139.

Pjescic, R M., V. Chistyakov, Debeljkovic, D. Lj., , On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2008.

10.3 Kontinualni sistemi sa kašnjenjem: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja ljapunovske stabilnosti

Interesovanje za dinamičko ponašanje sistema sa kašnjenjem okupira pažnju velikog broja autora već više od pola veka. Prisustvo čistog vremenskog kašnjenja, u matematičkom smislu, znatno komplikuje ispitivanje stabilnosti ove klase sistema. U tom smislu, razvila su se dva suštinski različita pravca, po dva sasvim različita osnova.

U prvom prilazu izvestan broj autora postavio je sebi značajan zadatak određivanja *i potrebnih i dovoljnih uslova* ljapunovske stabilnosti, uglavnom linearnih sistema sa kašnjenjem.

Centralno mesto u tim radovima bilo je određivanje pogodne Ljapunovljeve funkcije i traženje njenog izvoda duž kretanja razmatranog sistema, *Lee*, *Diant* (1981), *Mori et al.* (1983), *Lee et al.* (1986), *Xu*, *Liu* (1994), *Tissir*, *Hmamed* (1994,1996). Rešavajući isti problem, znatan broj autora, počevši od *Mori et al.* (1981), zadovoljavao se iznalaženjem *samo dovoljnih uslova stabilnosti*.

Ideja o korišćenju *matrične mere* u tim problemima inspirisala je veliki broj autora, koji su, stalnim nadograđivanjem baznih rezultata, dali veoma efikasne kriterijume, *Mori et al*. (1986), *Bourles* (1987), *Mori, Kokame* (1989), *Tissir, Hmamed* (1996) i stvorili nove mogućnosti za iznalaženje i ocenu odgovarajućih *domena* stabilnosti.

Drugo suštinsko opredeljenje autora išlo je u pravcu određivanja uglavnom dovoljnih uslova ljapunovske stabilnosti, u formi koja jeste ili nije sadržavala informaciju o iznosu uticaja čisto vremenskog kašnjenja na stabilnost sistema.

Tako su stvorene dve velike grupe kriterijuma; jedne koji *uključuju*[†], *Mori* (1985), *Mori*, *Kokame* (1989), *Tissir*, *Hmamed* (1996) i druge koji *ne uključuju*[‡], *Kamen* (1980), *Brirley et al*. (1982), *Mori* (1982), *Bourles* (1987), uticaj kašnjenja na apsolutnu ili relativnu stabilnost sistema. Za ove druge, dobro je poznato da se dobijaju u formi veoma prostih algebarskih relacija.

Posebna klasa sistema sa kašnjenjem, opisana sledećom vektorskom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \tag{10.1}$$

sa početnom funkcijom:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \le t \le 0 \tag{10.2}$$

bila je predmet interesovanja velikog broja autora.

Tako su na primer, *Lee, Diant* (1981), za ovu klasu sistema i agregacionu funkciju tipa:

$$V(\mathbf{x}_t, \tau) = \left[\mathbf{x}(t) + P_1(t) * \mathbf{x}(t)\right]^T P_0 \left[\mathbf{x}(t) + P_1(t) * \mathbf{x}(t)\right] \tag{10.3}$$

u kojoj je:

$$\mathbf{x}_t(\vartheta) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{x}(t+\vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0] \tag{10.4}$$

a P_0 je *Hermitova matrica*, izveli potrebne i dovoljne uslove koristeći Ljapunovljevu drugu metodu, a kroz sistematsku konstrukciju tzv. "*energetske funkcije*".

Postojanje ove funkcije neposredno je vezano sa postojanjem rešenja jedne transcedentne matrične nelinearne, algebarske jednačine.

[†] Na engleskom jeziku: Delay-dependent criteria

[‡] Na engleskom jeziku: Delay-independent criteria

U radu *Mori et al*. (1981), je prvi put izvedeno nekoliko jednostavnih kriterijuma stabilnosti, zasnovanih na korišćenju matrične mere, za klasičnu klasu sistema sa kašnjenjem. Ovim bazičnim rezultatom, koji u osnovi koristi *Teoremu poređenja*, pokazano je da sistem iz kojeg je izostavljeno čisto vremensko kašnjenje mora biti *dovoljno*[†] stabilan da bi se obezbedila njegova stabilnost u prisustvu čistog kašnjenja.

Sličan rezultat prezentovan je i u radu *Mori et al*. (1982), gde su izvedeni dovoljni uslovi, koji razmatranom sistemu pored stabilnosti i odgovarajuću brzinu konvergencije rešenja.

Koristeći linearnu povratnu spregu po veličinama stanja, *Mori et al*. (1983) predložili su veoma efikasan postupak za stabilizaciju sistema, opisanog jed. (10.1), na bazi klasične agregacione funkcije i konvencionalnog rešavanja jedne modifikovane Ljapunovljeve matrične jednačine.

Nekoliko jednostavnih kriterijuma za testiranje asimptotske stabilnosti sistema sa kašnjenjem, jed. (10.1), izvedeno je u radu *Mori* (1985), a u formi koja u kriterijume uključuje i čisto vremensko kašnjenje i matrične mere matrica sistema.

Hmamed (1986) daje rezultate koji su, u izvesnoj meri, manje restriktivni nego odgovarajući dati u radu, *Mori et al*. (1982).

Ipak, godinu dana kasnije, *Bourles* (1987) u svom radu pored niza značajnih doprinosa na polju izučavanja stabilnosti sistema sa kašnjenjem, ukazuje jednim kontra-primerom na neodrživost rezultata koje je dao *Hmamed* (1986).

Potrebne i dovoljne uslove asimptotske stabilnosti sistema sa celobrojnim umnošcima kašnjenja, izveli su *Lee et al*. (1986), polazeći od *operatorske forme* zapisa tih sistema i generalisane Ljapunovljeve matrične jednačine.

Novi kriterijum za ocenu stabilnosti sistema sa kašnjenjem, koji uključuje i vrednost čisto vremenskog kašnjenja, dat je u radu *Mori, Kokame* (1989). Pokazano je, štaviše, kako se na bazi dobijenih rezultata mogu odrediti *domeni* u kompleksnoj ravni s u kojima leže svi koreni kvazi-karakteristične jednačine sa pozitivnim realnim delovima.

U radu *Chen et al*. (1995), razmatrane su osobine stabilnosti vremenski invarijantnih sistema sa kašnjenjem tipa jed. (4.9). Pod lupom autora je bila asimptotska stabilnost ove

[†] Odgovarajuća rezerva stabilnosti.

klase sistema, koja ne uključuje vrednost čisto vremenskog kašnjenja. Izvedeno je nekoliko novih rezultata koji po svojoj vrednosti značajno premašuju rezultate njihovih prethodnika. Posebna efikasnost ovih rezultata leži u činjenici da su na najbolji mogući način iskorišćene sve značajne osobine matrične mere i spektralnog radijusa.

Značajno poboljšanje rezultata, ranije prezentovanih u radu *Mori*, *Kokame* (1986), dali su *Tissir*, *Hmamed* (1996), pokazavši efikasan način za određivanje regiona u *s*-ravni, u kojem su locirani nestabilni koreni kvazi-karakterističnog polinoma. Pored toga, predložen je numerički postupak za implementaciju dobijenih rezultata i izvršeno njihovo poređenje sa ranije izvedenim.

Značajne doprinose u razvoju ljapunovske stabilnosti sistema sa kašnjenjem, dali su *Stojanović*, *Debeljković* (2005.a-2005.d, 2008.a, 2008.b, 2009) u brojnim radovima objavljenim u periodu od 2004 do 2010 godine, sumarno prikazane u dve monografije *Debeljković et al.* (2004) i *Debeljković et al* (2010).

Jos jedan rad zaslužuje pažnju i potrebno ga je pomenuti. Reče je o preglednom radu *Jean-Pierre- Richard* (2003), u kojem je iscrpno prikazan pregled najznačajnihijih pitanja ljapunovske stabilnosti kontinualnih sisetma sa kašnjenjem, uključujući analizu mogućih prilaza rešavanju ovog problema u smislu najpogodnijeg izbora odgovarajuće agregacione funkcije ili odgovarajućih transformacija kojima se, na primer razmatrani sistem, svodi na svoj deskriptivni oblik ili diferencijalno-integralnu formu. U oba poslednje pomenuta slučaja vremensko kašnjenje se ne javlja eksplicitno.

Literatura

Bourlés, J., "α-Stability of Systems Governed by a Functional Differential Equation – Extension of Results Concerning Linear Delay Systems", *Int. J. Control*, **45** (6) (1987) 2233–2234.

Chen, J., "On Computing the Maximal Delay Intervals for Stability of Linear Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-40** (6) (1995) 1087–1093.

Chen, J., D. Xu, B. Shafai, "On Sufficient Conditions for Stability Independent of Delay", *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-40** (9) (1995) 1675–1680.

Debeljković, D. Lj., *Sistemi sa kašnjenjem*, GIP Kultura, Beograd, 1994.

D. Lj. Debeljkovic, Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 452, ISBN 978 – 86 – 7083 – 682 – 2.

D. Lj. Debeljkovic- Editor, *Time Delay Systems*, *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), **. 2011**

Debeljkovic, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non – Lyapunov stability of linear discrete time delay systems", *Proc. ACC* 03, Denver (Colorado), USA, June 4 - 6, (2003a), CD-Rom, 4450 – 4451.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval**,** Cigoja press, Belgrade, 2005.a.

D. Lj. Debeljkovic, A. Lj. Jacic, M. Medenica Time Delay Systems**:** Stability and Robustness**,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.b

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, Systems, Structure and Control - Editor Petr Husek, **– C**hapter : *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, Vienna, ISBN 978-7619-05-3**, 2008**, pp. 029 – 060.

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, Stabilty of Particular Classes of Linear Control Systems over Finite and Infinite Time Interval**,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 448., ISBN 978 – 86 – 7083 – 694 – 5.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, Time Delay Systems, - Chapter 2 **:** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp.15 – 30, 2011.a.

D. Lj. Debeljkovic**,** T. Nestorovic, Time Delay Systems, - Chapter **3 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp. 31 – 74, 2011**.**b.

D. Lj. Debeljkovic, Stabilty of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval**,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.c (*in Serbian*), pp. 463., ISBN 978 – 86 – 7083 – 694 – 5.

Goreckii, H., S. Fuksa, P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, J. Wiley, New York, 1989.

Gu, K., Kharitonov, V. L., Chen, J., Stability of Time-Delay Systems, Burkhauser, 2003, Boston

Hmamed, A., “On the Stability of Time Delay Systems: New Results”, *Int. J. Control*, **43** (1) (1986.a) 321–324.

Hmamed, A., “Stability Conditions of Delay-Differential Systems”, *Int. J. Control*, **43** (2) (1986.b) 455–463.

Hmamed, A., “Further Results on the Delay – Independent Asymptotic Stabilitz of Linear Systems”, *Int. J. Systems Sci.*, **22** (6) (1991) 1127–1132.

Hmamed, A., “A matrix Inequality”, *Int. J. Control*, **49** (1989) 363–365.

Hmamed, A., “Further Results on Delay-Independent Asymptotic Stability of Linear Systems”, *Int. J. Systems Sci*., **22** (6) (1991), 1127–1132.

Kalman, R. E., J. E. Bertram, “Control System Analysis and Design via the ‘Second Method’ of Lyapunov”, I – Continuous Time Systems, *Trans. AMSE J. Basic Eng.*, **82** (June) (1960) 371–393.

Kalman, R. E., J. E. Bertram, “Control System Analysis and Design via the ‘Second Method’ of Lyapunov”, II – Discrete Time Systems, *Trans. AMSE J. Basic Eng.*, **82** (June) (1960) 394–400.

Koepcke, R. W., “On the Control of Linear Systems with Pure Time Lag”, *Trans. ASME J. Basic Eng*., (3) (1965) 74–80.

Lee, T. N., S. Diant, “Stability of Time Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-26** (4) (1981) 951–953.

Lee, E. B., W. S. Lu, N. E. Wu, “A Lyapunov Theory for Linear Time Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-31** (3) (1986) 259–262.

Lee, T. N., U. L.Radovic, “General Decentralized Stabilization of Large – Scale Linear Continuous and Discrete Time Delay Systems”, *Int. J. Control*, **46** (6) (1987) 2127–2140.

Lee, T. N., U. L.Radovic, “Decentralized Stabilization of Linear Continuous and Discrete Time Systems with Delays”, *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-33** (8) (1988) 757–761.

Lewis, R. M., B. D. O. Anderson, Necessary and Sufficient Conditions for Delay-Independent Stability of Linear Autonomous Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-25** (1980) 735–739.

Lyapunov, A. M., *General Problem of Stability of Motion*, Moscow, Leningrad, USSR Academy of Science, 1956.

Malek-Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time-Delay Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

Mori, T., “Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-30** (1985) 158–161.

Mori, T., “Further Comments on ‘Comments on “On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems”’”, *Int J. Control*, **43** (5) (1986) 1613–1614.

Mori, T., N, Fukuma, M. Kuwahara, “Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delays”, *Int. J. Control* **34** (6) (1981) 1175–1184.

Mori, T., N, Fukuma, M. Kuwahara, “On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems”, *Int. J. Control* **36** (1) (1982) 95–97.

Mori, T., H. Kokame, “Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-34** (1989) 460–462.

Mori, T., E. Noldus, M. Kuwahara, “A Way to Stabilize Linear Systems with Delayed State”, *Automatica*, **19** (5) (1983) 571–573.

Richard, J. P. “ATime delay systems: an overview of some recent advances and open problems”, *Automatica*, **39** (5) (2003) 1667–1694.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, **“**The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large – Scale Time Delay Interval Systems**",** *The fifth International Conference on Control and Automation,* ICCA 05, June 26 – 29, Budapest (Hungary), (2005.a), pp. 347 – 352, also CD-Rom.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, **“**The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large-scale Time Delay Interval Systems**”,** International Journal of Information & System Science, (Canada), Vol. 1, No. 1, (2005.b), 61 - 74.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, **“**On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems ”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 3 - 4, (2005.c) 413 – 420.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Necessary and Sufficient Conditions for Delay – Dependent Asymptotic Stability of Linear Continuous Large Scale Time Delay Autonomous Systems” *Asian Journal of Control* (Taiwan), Vol.. 7., No. 4, (2005.d), 414 - 418

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Delay – Dependent Stability of Linear Large Scale Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 4, No. 2, (2008.a), 241 – 250.

Stojanovic, S. B, D. Lj., Debeljkovic, “ Quadratic Stabilty and Stabilization of Uncertain Linear Discrete Time Systems with State Delay: a LMI Approach ”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series B: Applications and Algorithms, No. 2 (2008.b), 195 – 206.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Necessary and Sufficient Conditions for Delay-Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series B: Math. Analysis, Vol. 16, No.6, (2009), 887 – 900.

Tissir, E., A. Hmamed, “Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$ ”, *Automatica*, **32** (12) (1996), 1723–1726.

Walton, K., J. E. Marsall, “Direct Method for TDS Stability Analysis”, *IEE Proc. Part D*, **134** (2) (1987), 101–107.

Wang, S. S., “Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$ ” *Systems and Control Letters*, **19** (1992), 165–168.

Xu, B., Y. Liu, “An Improved Razumikhin-Type Theorem and Its Applications”, *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-39** (4) (1994), 839–841.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, “Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete–time systems with state delay,” *Systems Control Lett*. (43), (2001) pp. 77–84.

10.4 Diskretni sistemi sa kašnjenjem: hronološki pregled postignutih rezultata na polju izučavanja ljapunovske stabilnosti

Interesovanje za dinamičko ponašanje sistema sa kašnjenjem okupira pažnju velikog broja autora već više od pola veka. Međutim, može se sa sigurnošću reći da je to interesovanje bilo u daleko većoj meri zastupljeno kada su u pitanju bili kontinualni, a daleko manje kada je bila reč o *vremenski diskretnim sistemima* sa kašnjenjem.

Jedan od glavnih razloga za ovo, uslovno rečeno, smanjeno interesovanje leži u činjenici da *diskretni sistemi sa kašnjenjem* imaju konačnu dimenziju, pa se kao takvi mogu iskazati preko odgovarajućeg *ekvivalentnog sistema bez kašnjenja*. Red ovog sistema srazmeran je proizvodu vrednosti kašnjenja i reda matrica sistema. Pri velikim iznosima čisto vremenskog kašnjenja, red ekvivalentnog sistema postaje izuzetno veliki, pa je to u prošlosti, stvaralo znatne matematičke poteškoće.

U tom smislu *osnovni doprinosi* mnogoborojnih radova su išli u pravcu da se ovaj problem prevaziđe analizirajući osobine vremenski diskretnog sistema sa kašnjenjem na polaznim matricama sistema i bez nužnih prevođenja istog na *ekvivalentni sistem.*

Prvi značajniji rad, koji se bavio problematikom *ljapunovske stabilnosti* ove klase sistema pojavio se tek 1982. godine, *Mori et al.*(1982).

Među prvim koji su izložili definicije, odredili kretanje diskretizovanog sistema i dali uslove njegove stabilnosti je rad *Koepcke* (1965). Iako se ne bavi problemom klasičnih diskretnih sistema sa kašnjenjem, već diskretnim nastalih diskretizacijom kontinualnih rad *Koepcke* (1965) daje osnovu za određivanje njihovog kretanja,

Prilično opširna analiza kretanja diskretnog sistema sa kašnjenjem i optimizacija njihovog ponašanja data je od strane *Januševskog* (1978).

U radu *Mori et al.* (1982) se daju jednostavni dovoljni uslovi stabilnosti ove klase sistema, zasnovani na korišćenju normi matrica i njihovih funkcija. Tamo izvedeni dovoljni uslov asimptotske stabilnosti posebne klase ovih sistema ne uzima u obzir iznos čistog vremenskog kašnjenja, ali pruža efikasan rezultat za testiranje ove važne osobine sistema. Osim toga, konačni rezultati ovog rada bili su i snažan podsticaj za kasnije iznete rezultate a posebno logične zaključke koji se, na bazi istih, prirodno nameću.

Problem stabilizacije za opšte decentralizovane velike (*large-scale*) linearne kontinualne i diskretne sisteme, pomoću kontrolera bez memorije u lokalnim povratnim spregama, prezentovan je u radu *Lee*, *Radovic* (1987). U njemu su izvedeni dovoljni uslovi stabilizacije i pri tome se, u kriterijumima za kontinualne sisteme, koristila matrična mera određenih matrica, dok se kod diskretnih ekvivalenata koristila norma. Problem stabilizacije pomenutih velikih (*large-scale*) sistema, takođe su razmatrali *Lee*, *Radovic* (1988).

U radu *Trinh*, *Aldeen* (1995) razmatrana je asimptotska i *D*-stabilnost *diskretnih sistema sa kašnjenjem* i predloženi su dovoljni uslovi koji su manje konzervativni od *Mori et al.* (1982).

Na bazi izvedene algebarske nejednakosti, *Wang*, *Mau* (1997) su dali kriterijum koji garantuje robusnu stabilizaciju i estimaciju stanja za perturbovane diskretne *velike* sisteme. Ovaj kriterijum je nezavisan od kašnjenja i ne zahteva rešavanje Ljapunovljeve ili Rikatijeve matrične jednačine.

U radu *Debeljković*, *Aleksendrić* (2003), izložene su prve ideje o jednom novom prilazu problema ljapunovske stabilnosti diskretnih sistema.

Neke konkretne realizacije i rešenja tih ideja data su, nešto kasnije, u radovima *Debeljković*, *Aleksendrić*(2003.a, 2003.b).

U radu *Stojanović*, *Debeljković* (2003.a) između ostalog, koristeći razlaganje matrica sistema na realni i imaginarni deo, dobijeni su dovoljni uslovi koji garantuju asimptotsku stabilnost posene klase *vremenski diskretnih sistema* sa kašnjenje i koji su manje restriktivni od većine postojećih uslova stabilnosti.

Robusna asimptotska stabilnost diskretnih nestacionarnih sistema sa kašnjenjem razmatrana je u radu *Stojanovic*, *Debeljković* (2003.b). Pomenute nestacionarnosti su tretirane kao perturbacije matrica sistema u obliku simetričnih intervalnih matrica.

U radu *Stojanović*, *Debeljković* (2003.c) su prvi put izvedeni *potrebni i dovoljni* uslovi asimptotske stabilnosti *linearnih diskretnih sistema sa kašnjenjem* sa mogućim sagledavanjem uticaja čisto vremenskog kašnjenja na stabilnost sistema. Izvedeni rezultati pokrivaju najšire klase ovih linearnih sistema i uključuju i slučajeve sistema sa *višestrukim kašnjenjem*. Za njih se, u izvesnom smislu, može reći da predstavljaju rezultate analogne rezultatima izvedenim za vremenski kontinualne sisteme sa kašnjenjem, date u lit. *Lee, Dianat* (1981), ali ih na određeni način i prevazilaze. To se prvenstveno odnosi na činjenicu da rešenje poznate diskretne matrične jednačine *uvek postoji*, što nije bio slučaj u bazičnom-kontinualnom rezultatu iz 1981.godine. Problem je rešen sa pozicija primene Ljapunovljeve druge metode i pogodno odabrane Ljapunovljeve funkcije za tamo razmatranu klasu sistema.

U radovima *Stojanović*, *Debeljković* (2003.d, 2003.e) su izvedeni dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti iste sličnih klasa diskretnih sistema sa kašnjenjem i lako se pokazuje da su manje restriktivni od onih koje postoje u savremenoj literaturi. Rad

Debeljković et al. (2004) predstavlja *potpuni diskretni analogan* rezultatu koji je dao *Hmamed* (1986) za vremenski kontinualne sisteme sa kašnjenjem.

Literatura

Aleksendrić, M., *Dinamika posebnih klasa kontinualnih i diskretnih sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu,* Dipl rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 2002.

Aleksendrić, M., D, Lj. Debeljkovic, "Finite Time Stability of Linear Discrete Time Delayed Systems", *Proc. HIPNEF* 2002, Nis (Yu), October, 2-5, (2002)., 333 – 340.

Amir-Moez, A., "Extreme Properties of a Hermitian Transformations and Singular Values of Sum and Product of Linear Transformations", *Duke Math J.*, **23** (1956) 463–476.

Amemiya, T., "Delay - Independent Stability of High-order Systems", *Int. J. Control*, **50** (1) (1989) 139–149.

Baker, R. A., A. R. Bergen, "Lyapunov Stability and Lyapunov Functions of Infinite Dimensional Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-14** (4) (1969) 325–334.

Belhouari, A., E. Tissir, A. Hmamed, "Stability of interval matrix polynomial in continuous and discrete cases", *Systems and Control Letters* (**18**), (1992), 183-189.

Bourlés, J., " α - Stability of Systems Governed by a Functional Differential Equation – Extension of Results Concerning Linear Delay Systems", *Int. J. Control*, **45** (6) (1987) 2233–2234.

Brierley, S. D., J. N. Chiasson, E. B. Lee, S. H. Zak, " On Stability Independent of Delay for Linear Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-27** (1982) 252–254.

Chyung D. H., "Discrete Optimal Systems with Time Delay", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, (1967), 117-119.

Chyung D. H., "Discrete Systems with Delays in Control", *I E E E Trans. Automat. Contr.*, (1969), 196 –197.

Debeljkovic, D. Lj., M. Aleksendrić, "Stability in the sense of Lyapunov of linear discrete time delayed systems", *Proc. HIPNEF* 2002, Nis (Yugoslavia), October, 2-5 (2002), 325 – 332.

Debeljkovic, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non – Lyapunov stability of linear discrete time delay systems", *Proc. ACC* 03, Denver (Colorado), USA, June 4 - 6, (2003.a), CD-Rom, 4450 – 4451.

Debeljković, D.Lj., M. Aleksendrić, N. Yi-Yong, Q. L. Zhang, "Lyapunov and Non – Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. The Fourth Inter. Conference on Control and Automation,* 9 – 12 June, Montreal (Canada), (2003.b), CD – Rom, 296 – 300.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, S. A. Milinković, M. B. Jovanović., "Further Results on Stability of ", (2004), *Proc. Conference OSTDS*, Shenyang (China), (2004) 2012 – 2018

Goreckii, H., S. Fuksa, P., P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems,* J. Wiley, New York, 1989.

Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem*, Nauka, Moskva, 1978.

Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay", *Trans. ASME*, J. Basic Eng, (3), (1965) 74-80.

Lee, T.H.S., J. H. Lee," Stabilization Bounds of Discrete-Two Time-Scale - Systems", *Systems Control Letters,* **(18)** (1992) 479–489.

Lee, T. N., U. L. Radovic, "General Decentralized Stabilization of Large – Scale Linear Continuous and Discrete Time Delay Systems", *Int. J. Control*, **46** (6) (1987) 2127–2140.

Lee, T. N., U. L. Radovic, "Decentralized Stabilization of Linear Continuous and Discrete Time Systems with Delays", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-33** (8) (1988) 757–761.

Malek - Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time Delay Systems*, North - Holland, Amsterdam, 1987.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, (1982) "Delay Independent Stability Criteria for Discrete - Delay Systems ", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-27** (4) (1982) 964-966.

Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., " On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time-Delay Systems", (2003a), (submitted)

Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., "On Stability of Perturbed Linear Discrete-Delay Systems with Multiple Delays", (2003b), (submitted)

Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., "Necessary and Sufficient Conditions for Delay-Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Time-Delay Autonomous Systems", (2003c), (submitted)

Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., " Further Results on Asymptotic Stability of Linear Discrete Time-Delay Systems", (2003d), (submitted)

Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time-Delay Autonomous Systems: New Results", (2003e), (submitted)

Trinh, H., M. Aldeen, "*D – stability Analysis of Discrete Perturbed Systems*", *Int. J. Control*, **61** (2) (1995.a), 493–505.

Trinh, H., M. Aldeen, " Robust Stability of Singularly Perturbed Discrete Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-40** (9) (1995.b) 1620–1623.

Trinh, H., M. Alden, "A memoryless state observer for discrete time - delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr*., **AC-42** (9) (1997) 1572–1577.

Wang, W. J., L. G. Mau, "Stabilization and Estimation for Perturbed Discrete Time - Delay Large-Scale Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr*., **AC-42** (9), (1997) 1277-1281.

Xu, S., J. Lam and C. Yang, "Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete–time systems with state delay," *Systems Control Lett*. 43 (2001) 77–84.

V KRATKA HRONOLOŠKA I SELEKTIVNA REKAPITULACIJA DOPRINOSA NA POLJU SISTEMATSKOG PROUČAVANJA STABILNOSTI RAZMATRANIH KLASA SISTEMA: KLASIČAN PRILAZ

11. KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI

11.1 Stabilnost u smislu Ljapunova

Vremenski invarijantan, kontinualan, singularan sistem se može prikazati sledećom jednačinom:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0(t) \tag{11.1}$$

gde je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor generalizovanog prostora stanja (eng. *co–state*, vektor polu–stanja), $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je singularna matrica, pri čemu je $rank\, E = r < n$. E su A su matrice odgovarajućih dimenzija i definisane su na polju realnih brojeva.

Sistem definisan jed. (11.1) je u slobodnom radnom režimu i na njega ne deluju spoljašnje sile. Treba napomenuti da, u opštem slučaju, nisu isti početni uslovi za autonoman sistem i sistem u prinudnom radnom režimu.

Modeli sistema ovakvog oblika imaju neke važne prednosti u poređenju sa modelima normalnih sistema, t.j. kada je $E = I$, a odgovarajuća diskusija se može naći u radu *Debeljkovic et al*. (1996, 2004), kao i u prethodnim glavama ove disertacije/

Složena priroda singularnih sistema prouzrokuje mnoge teškoće prilikom analitičkog i numeričkog tretmana, koje se ne javljaju kada se razmatraju sistemi koji su prezentovani u normalnoj formi. U tom smislu, prezentovana su pitanja postojanja, rešivosti, jedinstvenosti i glatkoće, koja se mogu rešiti na zadovoljavajuči način.

Definicije stabilnosti

Definicija 11.1 Sistem, dat jed. (11.1), je *regularan* ako postoji $s \in \mathbb{C}$, $\det(sE - A) \neq 0$, *Campbell et al.* (1974).

Definicija 11.2 Sistem, dat jed. (11.1), pri čemu je $A = I$, je *eksponencijalno stabilan* ako se mogu naći dve pozitivne konstante $c_1,\, c_2$ tako da važi $\|\mathbf{x}(t)\| \leq c_2 \cdot e^{-c_1 \cdot t} \|\mathbf{x}(0)\|$ za svako rešenje jed. (11.1), *Pandolfi* (1980).

Definicija 11.3 Sistem, dat jed. (11.1), je *asimptotski stabilan* ako i samo ako, za sve konzistente početne uslove $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ kad $t \to \infty$, *Owens, Debeljkovic* (1985).

Definicija 11.4 Sistem, dat jed. (11.1), je *asimptotski stabilan* ako svi koreni $\det(sE - A)$, t.j. sve konačne sopstvene vrednosti ovog matričnog para (pencil), leže u otvorenoj levoj polovini kompleksne ravni, a razmatrani sistem je *neimpulsan* ako ne postoji $\mathbf{x}_0$ tako da $\mathbf{x}(t)$ pokazuje prekidno ponašanje u slobodnom random režimu, *Lewis* (1986).

Definicija 11.5 Sistem, dat jed. (11.1), je *asimptotski stabilan* ako i samo ako sve konačne sopstvene vrednosti λ_i, $i = 1, \dots, n_1$, matričnog para $(\lambda E - A)$ imaju negativne realne delove, *Muller* (1993).

Definicija 11.6 Ravnotežno stanje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistema, datog jed. (11.1), je *stabilno* ako za svako $\varepsilon > 0$, i za bilo koje $t_0 \in \Im$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, tako da $\left\| \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \right\| < \varepsilon$ važi za svako $t \geq t_0$, kada $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_k$ i $\left\| \mathbf{x}_0 \right\| < \delta$, gde $\Im$ označava vremenski interval tako da $\Im = [t_0, +\infty[$, $t_0 \geq 0$, a $\mathcal{W}_k$ je potprostor konzistentnih početnih uslova, *Chen, Liu* (1997).

Definicija 11.7 Ravnotežno stanje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistema, datog jed. (11.1), je *nestabilno* ako postoji $\varepsilon > 0$, i $t_0 \in \Im$, za bilo koje $\delta > 0$, tako da postoji $t^* \geq t_0$, za koje važi $\left\| \mathbf{x}(t^*, t_0, \mathbf{x}_0) \right\| \geq \varepsilon$, i ako $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_k$ [15] i $\left\| \mathbf{x}_0 \right\| < \delta$, *Chen*, *Liu* (1997).

---

[15] Rešenja vremenski kontinualnog, singularnog sistema u ovom istraživanju su neprekidne diferencijabilne funkcije vremena t koje zadovoljavaju razmatrane jednačine modela. S obzirom da za vremenski kontinualni, singularni sistem neće sve početne vrednosti $\mathbf{x}_0$ od $.\mathbf{x}(t).$ generisati glatko rešenje, one koje generišu takvo rešenje (neprekidno u desno) se nazivaju konzistentnim. Sem toga, pozitivno rešivi uslov garantuje jedinstvenost i zatvorenu formu rešenje jed. (11.1).

Definicija 11.8 Ravnotežno stanje $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ sistema, datog jed. (11.1), je *atraktivno* (privlačno) ako za svako $t_0 \in \Im$, postoji $\eta=\eta(t_0)>0$, tako da $\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$, kada $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_k$ i $\|\mathbf{x}_0\|<\eta$, *Chen, Liu* (1997).

Definicija 11.9 Ravnotežno stanje $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ singularnog sistema, datog jed. (11.1), je *asimptotski stabilno* ako je ono *stabilno* i *atraktivno*, *Chen*, *Liu* (1997).
Definicija 11.5 je ekvivalentna sa $\lim_{t\to+\infty}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$.

Lema 11.1 Ravnotežno stanje $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ linearnog singularnog sistema, datog jed. (11.1), je *asimptotski stabilno* ako i samo ako je ono *neimpulsno*, i $\sigma(E,\ A)\subset \mathbb{C}^-$, *Chen*, *Liu* (1997).

Lema 11.2 Ravnotežno stanje $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ sistema, datog jed. (11.1), je *asimptotski stabilno* ako i samo ako je ono *neimpulsno*, i $\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$, *Chen*, *Liu* (1997).

Teoreme stabilnosti

Teorema 11.1 Sistem, dat jed. (11.1), kada je $A=I$, I je jedinična matrica, je *eksponencijalno stabilan* ako i samo ako sopstvene vrednosti matrice E nemaju pozitivne realne delove, *Pandolfi* (1980).

Teorema 11.2 Neka je $I_{\mathcal{W}_k}$ matrica koja predstavlja operator na $\mathbb{R}^n$ koji je jedinični operator na $\mathcal{W}_k$ i nula operator na $\mathcal{W}_k$. Sistem, dat jed. (11.1), kada je $A=I$, je *stabilan* ako postoji $(n\times n)$ matrica P, koja je rešenje sledeće matrične jednačine:

$$E^T P + P E = -I_{\mathcal{W}_k} \tag{11.2}$$

sa sledećim osobinama:

$$P = P^T \tag{11.3}$$

$$P\mathbf{q}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{q}\in\mathcal{V} \tag{11.4}$$

$$\mathbf{q}^T P\mathbf{q}>0, \quad \mathbf{q}\neq\mathbf{0}, \quad \mathbf{q}\in\mathcal{W}_k \tag{11.5}$$

gde je:

$$\mathcal{W}_k=\aleph\left(I-EE^D\right) \tag{11.6}$$

$$\mathcal{V}=\aleph\left(EE^D\right) \tag{11.7}$$

$\mathcal{W}_k$ je podprostor konzistentnih početnih uslova, *Pandolfi* (1980), a $\aleph(\ )$ označava kernel ili nulti prostor matrice $(\ )$.

Teorema 11.3 Sistem, dat jed. (11.1), je *asimptotski stabilan* ako i samo ako:

a) matrica A je invertibilna,

b) postoji pozitivno određen, samoadjungovan (Hermitov) operator P na $\mathbb{R}^n$, tako da:

$$A^T PE+E^T PA=-Q \tag{11.8}$$

gde je Q samoadjungovan i pozitivan u smislu da:

$$\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)>0 \quad \text{za svako} \quad \mathbf{x}(t)\in\mathcal{W}_{k^*}\setminus\{\mathbf{0}\} \tag{11.9}$$

Owens, Debeljkovic (1985).

Teorema 11.4 Sistem, dat jed. (30.1), je *asimptotski stabilan* ako i samo ako važi:

a) matrica A je invertibilna,

b) postoji pozitivno određen, samoadjungovan operator P, tako da:

$$\mathbf{x}^T(t)\left(A^T PE+E^T PA\right)\mathbf{x}(t)=-\mathbf{x}^T(t)I\ \mathbf{x}(t) \tag{11.10}$$

za sve $\mathbf{x}\in\mathcal{W}_{k^*}$, gde $\mathcal{W}_{k^*}$ označava potprostor konzistentnih početnih uslova, *Owens, Debeljković* (1985).

11.2 Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu

Dinamičko ponašanje sistema, datog jed. (11.1), je definisano na vremenskom intervalu $\Im=\{t:t_0\le t\le t_0+T\}$, pri čemu veličina T može biti bilo pozitivan realan broj ili simbol $+\infty$, tako da se istovremeno mogu tretirati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost.

Pretpostavlja se da su vremenski invarijantni skupovi, koji se koriste kao granice trajektorija sistema, *otvoreni, povezani i ograničeni*.

Neka $\mathcal{S}_\beta$ označava skup svih dozvoljenih stanja sistema, a $\mathcal{S}_\alpha$ označava skup svih početnih stanja sistema, tako da $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\beta$.

U opštem slučaju, može se napisati:

$$\mathcal{S}_\wp = \left\{ \mathbf{x} : \left\| \mathbf{x}(t) \right\|_Q < \wp \right\}, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_k \setminus \{0\} \tag{11.11}$$

gde se pretpostavlja da je Q simetrična, pozitivno određena, realna matrica a $\mathcal{W}_k$ označava podprostor konzistentnih početnih uslova koji generiše glatka rešenja. Vektor početnih uslova je konzistentan ako postoji neprekidno, diferencijabilno rešenje jed. (11.1). Geometrijski tretman, *Owens, Debeljkovic* (1985), skupa $\mathcal{W}_k$ kao granice podprostora algoritma je:

$$\mathcal{W}_0 = \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{W}_{j+1} = A^{-1}\left(E\mathcal{W}_j\right), \quad j \geq 0 \tag{11.12}$$

gde $A^{-1}(\cdot)$ označava inverzni lik $(\cdot)$ nad operatorom A.

U radu *Campbell et al.* (1974) pokazano je da podprostor $\mathcal{W}_k$ predstavlja skup vektora koji zadovoljavaju:

$$\left(I - \hat{E}^D \hat{E}\right)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{ili} \quad \mathcal{W}_k = \aleph\left(I - \hat{E}^D \hat{E}\right) \tag{11.13}$$

gde je $\hat{E} = (\lambda E - A)^{-1} E$. c je bilo koji kompleksan skalar tako da:

$$\det(\lambda E - A) \neq 0 \quad \text{ili} \quad \mathcal{W}_k \cap \aleph(E) = \{0\} \tag{11.14}$$

Ovaj uslov garantuje jedinstvenost rešenja koja su generisana sa $\mathcal{W}_k$ a $(\lambda E - A)$ je invertibilna matrica za neko $\lambda \in \mathbb{R}$. Nulti prostor matrice F je označen sa $\aleph(F)$, rang prostora sa $\Re(F)$ a gornji indeks "D" se koristi da označi *Drazin*–ovu inverziju. Neka je $\left\| \mathbf{x}(t) \right\|_{(\cdot)}$ bilo koja vektorska norma (t.j. $\cdot = 1, 2, \infty$) a $\left\| (\cdot) \right\|$ matrična norma.

Matrična mera je definisana na sledeći način:

$$\mu(F) = \frac{1}{2} \max_i \lambda_i \left(F^* + F\right) \tag{11.15}$$

za bilo koju matricu $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Gornji indeks $*$ označava transponovanu konjugovanu vrednost. U slučaju kada $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sledi $F^* = F^T$, gde gornji indeks T označava transpoziciju.

Vrednost partikularnog rešenja u trenutku t, koje u trenutku $t = 0$ prolazi kroz tačku $\mathbf{x}_0$, je označena sa .$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$., u skraćenoj oznaci $\mathbf{x}(t)$. Skup svih tačaka $\mathcal{S}_i$, u faznom prostoru $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}_i \subseteq \mathbb{R}^n$, koji generiše glatka rešenje može se odrediti pomoću inverzne Drazinove tehnike.

Definicije stabilnosti

Definicija 11.10 Sistem, dat jed. (11.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, Q, \Im\}$, $\alpha < \beta$, ako i samo ako $\forall \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_k$, koje zadovoljava $\|\mathbf{x}_0\|_Q^2 < \alpha$, sledi $\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2 < \beta$, $\forall t \in \Im$, *Debeljkovic*, *Owens* (1985).

Definicija 11.11 Sistem, dat jed. (11.1), je *nestabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, Q, \Im\}$, $\alpha < \beta$, ako i samo ako za $\forall \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_k$, koje zadovoljava $\|\mathbf{x}_0\|_Q^2 < \alpha$, postoji $t^* \in \Im$ tako da sledi $\|\mathbf{x}(t^*)\|_Q^2 \geq \beta$, *Debeljkovic*, *Owens* (1985).

Stav 11.1 Ako je $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(t) M\, \mathbf{x}(t)$ kvadratna forma na $\mathbb{R}^n$ tada sledi da postoje brojevi $\lambda_{\min}(M)$ i $\lambda_{\max}(M)$, koji zadovoljavaju $-\infty < \lambda_{\min}(M) \leq \lambda_{\max}(M) < +\infty$, tako da:

$$\lambda_{\min}(M) \leq \frac{\mathbf{x}^T(t) M\, \mathbf{x}(t)}{V(\mathbf{x})} \leq \lambda_{\max}(M), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{W}_k \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{11.16}$$

Ako $M = M^T$ i $\mathbf{x}^T(t) M\, \mathbf{x}(t) > 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{W}_k \setminus \{\mathbf{0}\}$, tada $\lambda_{\min}(M) > 0$ i $\lambda_{\max}(M) > 0$, gde su $\lambda_{\min}(M)$ i $\lambda_{\max}(M)$ definisane na sledeći način:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(M) &= \min\left\{\begin{matrix}\mathbf{x}^T(t)M\,\mathbf{x}(t), & \mathbf{x}\in\mathcal{W}_k\setminus\{\mathbf{0}\}, \\ & \mathbf{x}^T(t)E^TPE\,\mathbf{x}(t)=1\end{matrix}\right\} \\ \lambda_{\max}(M) &= \max\left\{\begin{matrix}\mathbf{x}^T(t)M\,\mathbf{x}(t), & \mathbf{x}\in\mathcal{W}_k\setminus\{\mathbf{0}\}, \\ & \mathbf{x}^T(t)E^TPE\,\mathbf{x}(t)=1\end{matrix}\right\}\end{aligned} \tag{11.17}$$

Pogodno je razmatrati, u cilju razjašnjenja, funkciju sistema, datog jed. (11.1), sledećeg oblika:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)E^TPE\,\mathbf{x}(t) \tag{11.18}$$

sa partikularnim izborom $P = I$, I je jedinična matrica.

Teoreme stabilnosti

Teorema 11.5 Sistem je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,\Im\}$, $\alpha<\beta$, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(*i*)
$$\beta/\alpha > \frac{\gamma_2(Q)}{\gamma_1(Q)} \tag{11.19}$$

(*ii*)
$$\ln\beta/\alpha > \Lambda(Q) + \ln\frac{\gamma_2(Q)}{\gamma_1(Q)}, \qquad \forall t\in\Im \tag{11.20}$$

pri čemu je $\lambda_{\max}(Q)$ kao u *Stavu* 11.1, *Debeljkovic*, *Owens* (1985).

Stav 11.2 Postoji matrica $P = P^T > 0$, tako da $\gamma_1(Q) = \gamma_2(Q) = 1$, *Debeljkovic*, *Owens* (1985).

Posledica 11.1 Ako je $\beta/\alpha > 1$, moguće je izabrati matricu P tako da:

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\gamma_2(Q)}{\gamma_1(Q)} \tag{11.21}$$

Praktično značenje ovog rezultata je da je uslov (i) *Teoreme* 11.5 može biti zadovoljen početnim izborom slobodnih parametara matrice P. Uslov (*ii*) zavisi takođe od podataka o sistemu i otuda je složenije ali takođe prirodno pitanje da li možemo izabrati matricu P tako da $\lambda_{\max}(Q) < 0$, *Debeljkovic, Owens* (1985).

Teorema 11.6 Sistem, dat jed. (11.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, I, \Im\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\Phi_{CSS}(t) < \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \forall t \in \Im \tag{11.22}$$

$\Phi_{CSS}(t)$ je *fundamentalna matrica* linearnog, singularnog sistema, datog jed. (11.1), *Debeljkovic et al.* (1997).

Sada se primenjuje prilaz matričnih mera.

Teorema 11.7 Sistem, dat jed. (11.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, I, \Im\}$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu(\Upsilon)\cdot t} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im \tag{11.23}$$

gde je:

$$\Upsilon = \hat{E}^D \hat{A}, \quad \hat{A} = \left(s\,E - A\right)^{-1} A, \quad \hat{E} = \left(s\,E - A\right)^{-1} E \tag{11.24}$$

Debeljkovic et al. (1997).

Polazeći od eksplicitnog rešenja sistema, datog jed. (11.1), izvedenog u radu *Campbell* (1980):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\hat{E}^D \hat{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{x}_0 = \hat{E}\,\hat{E}^D \mathbf{x}_0 \tag{11.25}$$

i diferencirajući jed. (11.25), dobija se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{E}^D \hat{A}\, e^{\hat{E}^D \hat{A}\cdot t} \cdot \mathbf{x}_0 = \hat{E}^D \hat{A}\,\mathbf{x}(t) \tag{11.26}$$

tako da se samo *regularni* singularni sistemi mogu tretirati sa matricama datim jed. (11.24).

Teorema 11.8 Za datu konstantnu matricu $\hat{E}^D \hat{A}$ bilo koje rešenje jed. (11.1) zadovoljava sledeću nejednakost:

$$\left\| \mathbf{x}(t_0) \right\| e^{-\mu\left(-\hat{E}^D \hat{A}\right)(t-t_0)} \leq \ \left\| \mathbf{x}(t) \right\| \ \leq \left\| \mathbf{x}(t_0) \right\| e^{\mu\left(\hat{E}^D \hat{A}\right)(t-t_0)}, \quad \forall t \in \Im \tag{11.27}$$

Kablar, Debeljkovic (1998).

Teorema 11.9 Da bi sistem, dat jed. (11.1), bio *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, I, \Im\}$, $\alpha < \beta$, *potrebno* je da je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{-\mu\left(-\hat{E}^D \hat{A}\right)\cdot(t-t_0)} < \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}, \qquad \forall t \in \Im \tag{11.28}$$

gde je $0 < \delta \leq \alpha$, *Kablar*, *Debeljkovic* (1998).

Teorema 11.10 Da bi sistem, dat jed. (11.1), bio *nestabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, I, \Im\}$, $\alpha < \beta$, *potrebno* je da postoji $t^* \in \Im$ tako da je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu\left(\hat{E}^D \hat{A}\right)\cdot\left(t^*-t_0\right)} \geq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad t^* \in \Im \tag{11.29}$$

Teorema 11.11 Sistem, dat jed. (11.1), je *nestabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, I, \Im\}$, $\alpha < \beta$, ako $.\exists \delta,\ 0 < \delta \leq \alpha.$ i $t^* \in \Im$ tako da je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{-\mu\left(-\hat{E}^D \hat{A}\right)\cdot\left(t^*-t_0\right)} < \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}, \quad t^* \in \Im \tag{11.30}$$

Konačno, prezentuje se *Bellman–Gronwall*–ov prilaz kako bi se izveli rezultati, prethodno dati u *Teoremi* 11.7.

Lema 11.3 Pretpostavlja sa da je vektor $\mathbf{q}(t, t_0)$ definisan na sledeći način:

$$\mathbf{q}(t, t_0) = \Phi(t, t_0)\, \hat{E}^D \hat{E}\, \mathbf{v}(t_0) \tag{11.31}$$

Debeljkovic, Kablar (1999).

Tako da ako je:

$$E\,\mathbf{q}(t,t_0) = E\,\Phi(t,t_0)\,\hat{E}^D \hat{E}\,\mathbf{v}(t_0) \tag{11.32}$$

tada je:

$$\left\|\mathbf{q}(t,t_0)\right\|_{E^T E}^2 \le \left\|\mathbf{v}(t_0)\right\|_{E^T E}^2 e^{\lambda_{\max}(M)(t-t_0)} \tag{11.33}$$

gde je:

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}(M) = \max\left\{\mathbf{q}^T(t,t_0)\,\Xi\,\mathbf{q}(t,t_0) : \mathbf{q}(t,t_0) \in \mathcal{W}_k \setminus \{0\},\right. \\ \left.\mathbf{q}^T(t,t_0)\,E^T E\,\mathbf{q}(t,t_0) = 1, \quad \Xi = A^T E + E^T A\right\}\end{aligned} \tag{11.34}$$

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{q}(t_0,t_0) \tag{11.35}$$

Korišćenjem ovog prilaza rezultati *Teoreme* 11.7 se mogu preformulisati na sledeći način.

Teorema 11.12 Sistem, dat jed. (11.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, \left\|(\cdot)\right\|_Q^2, \Im\right\}$, $a < \beta$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\lambda_{\max}(\Xi)\cdot(t-t_0)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im \tag{11.36}$$

gde je $\lambda_{\max}(M)$ dato jed. (30.34), *Debeljkovic*, *Kablar* (1999).

Literatura

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equation*, Pitman, London, 1980.

Campbell, S. L., C. D. Meyer, N. J. Rose, “Application of Drazin inverse to linear system of differential equations”, *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 31, (1974) 411–425.

Chen, C., Y. Liu, “Lyapunov stability analysis of linear singular dynamical systems”, *Proc. Int. Conf. on Intelligent Processing Systems*, Beijing, October 28–31, (1997) 635–639.

Dai, L., *Singular control systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, 118, 1989.

Debeljkovic, D. Lj., “Singular control systems”**,** *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 11, Series A Math. Analysis, No. 5–6, (2004) 691–706.

Debeljkovic, Lj. D., *Stabilty of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, (*in Serbian*), 460, 2009.

Debeljkovic, Lj. D., *Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and Robustness Stabilizability*, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, (*in Serbian*), 452, 2010.

Debeljkovic, Lj. D., D. H. Owens, “On practical stability of singular systems”, *Proc. Melecon Conf* .85, October 85, Madrid (Spain), (1985) 103–105.

Debeljkovic, D. Lj., V. B. Bajic, A. U. Grgic, S. A. Milinkovic, “Non–Lyapunov stability and instability robustness consideration for linear singular systems”, *Proc. 3rd ECC,* Roma (Italy), September 5–8, (1995) 1373–1379.

Debeljkovic, D. Lj. S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Application of singular system theory in chemical engineering Analysis of process dynamics*, Internat. Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, (monograph), Prague, August, (1996) 25–30.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj. Koruga, S. Tomasevic, “Finite time stability of singular systems operating under perturbing forces: Matrix measure approach”, *Proc. AMSE*, Melbourne, (Australia) Oct. 29–31, (1997) 447–450.

Debeljkovic, D. Lj., N. A. Kablar, “Finite time stability of linear singular systems: Bellman–Gronwall approach”, *Proc. ACC* 99, San Diego (USA), (1999) 1803–1806.

Hsiung, K. L., L. Lee, “Lyapunov Inequality and Bounded Real Lemma for Discrete–Time Descriptor Systems”, *IEEE Proc.–Control Theory Application*, Vol. 146, No. 4, July, (1999) 327–331.

Kablar, A. N., D. Lj. Debeljkovic, “Finite time stability of time varying singular systems”, *Proc. CDC* 98, Florida (USA), December 10–12, (1998) 3831–3836.

Lewis, E. L., “A survey of linear singular systems”, *Circuits, Systems and Signal Processing*, 5 (1), (1986) 3–36.

Luenberger, D. G., “Dynamic equations in descriptor form”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 22 (3), (1977) 312–321.

Muller P. C., “Linear mechanical descriptor systems identification, analysis and design”, *Preprints of IFAC, Conference on Control of Independent Systems*, Belfort, France, (1997) 501–506.

Owens, H. D., D. Lj. Debeljkovic, “Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems A Geometric Analysis”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, (2), (1985) 139–151.

Pandolfi L., “Controllability and stabilization for linear system of algebraic and differential equations”, *Jota* 30 (4), (1980) 601–620.

Silva, M. S., T. P. De Lima, “Looking for nonnegative solutions of a Leontief dynamic model”, *Linear Algebra*, 364, (2003) 281–316.

12. DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI

12.1 Stabilnost u smislu Ljapunova

Vremenski invarijantan, linearan, diskretan, deskriptivni sistem se može prikazati sledećom jednačinom:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k), \qquad \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \tag{12.1}$$

gde je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor generalizovanog prostora stanja , $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je singularna matrica, pri čemu je $rank\, E = r < n$.

E su A su matrice odgovarajućih dimenzija i definisane su na polju realnih brojeva.

U slučaju vremenski diskretnih sistema, koncept glatkosti ima mali značaj kao što je već pokazano, ali ideja konzistentnih početnih uslova $\mathbf{x}_0$, koji generišu sekvencu rešenja $(\mathbf{x}(k) : k \geq 0)$, ima fizičko značenje i pun smisao.

Fundamentalni geometrijski alat za karakterizaciju potprostora konzistentnih početnih uslova $\mathcal{W}_d$, je sekvenca potprostora:

$$W_{d,0} = \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{W}_{d,j+1} = A^{-1}\left(E\mathcal{W}_{d,j}\right), \quad (j \geq 0) \tag{12.2}$$

$A^{-1}(\,\cdot\,)$ označava inverzni lik $(\cdot)$ nad operatorom A, a $\aleph(F)$ i $\Re(F)$ označavaju kernel i rang nad operatorom F, sledstveno.

Lema 12.1 Sekvenca potprostora $\{\mathcal{W}_{d,0},\ \mathcal{W}_{d,1},\ \mathcal{W}_{d,2}, ...\}$ se formira u smislu da:

$$\mathcal{W}_{d,0} \supset \mathcal{W}_{d,1} \supset \mathcal{W}_{d,2} \supset \mathcal{W}_{d,3} \supset \cdots \tag{12.3}$$

Osim toga:

$$\aleph(A) \subset \mathcal{W}_{d,j}, \quad (j \geq 0) \tag{12.4}$$

i postoji ceo broj $k \geq 0$, tako da:

$$\mathcal{W}_{d,k+1} = \mathcal{W}_{d,k} \tag{12.5}$$

i prema tome $\mathcal{W}_{d,k+1} = \mathcal{W}_{d,k}$ za $j \geq 1$.

Ako je k^* najmanji takav ceo broj sa ovom osobinom, tada:

$$\mathcal{W}_{d,k} \cap \aleph(E) = \{0\}, \quad (k \geq k^*) \tag{12.6}$$

obezbeđuje da je matrica $(\lambda E - A)$ invertibilna za neko $\lambda \in \mathbb{R}$, *Owens, Debeljkovic* (1985).

Teorema 12.1 Pod uslovima *Leme* 12.1, $\mathbf{x}_0$ je konzistentan početni uslov sistema, datog jed. (12.1), ako $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_{d,k^*}$. Osim toga $\mathbf{x}_0$ generiše jedinstveno rešenje $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_{d,k^*}$, $(k \geq 0)$ koje je realno–analitičko na $\{k : k \geq 0\}$, *Owens, Debeljkovic* (1985).

Teorema 12.1 je geometrijska dopuna algebarskih rezultata iz rada *Campbell* (1980). Kratko i sažeto, prihvatljivo i razumljivo objašnjenje svih ovih pitanja može se naći u radu *Debeljkovic* (2004).

Definicija 12.1 Linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem, dat jed. (12.1), je *regularan* ako $\det(sE - A)$ nije identički jednaka nuli, *Dai* (1989).

Napomena 12.1 Treba uočiti da regularnost matričnog para (E, A) garantuje postojanje i jedinstvenost rešenja $\mathbf{x}(\cdot)$ za bilo koji zadati početni uslov, a obezbeđuje odsustvo impulsnog ponašanje u početnom trenutku za nekonzistentne početne uslove. Jasno je da, za netrivijalan slučaj, $\det E \neq 0$, odsustvo impulsa povlači regularnost.

Definicija 12.2 Pretpostavlja se da je linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem, dat jed. (33.1), *nedegenerativan* (ili regularan), t.j. $\det(zE - A) \neq 0$. U suprotnom, sistem je *degenerativan*, *Syrmos et al.* (1995).

Ako je matrica $(z\,E - A)$ nedegenerativna, definiše se *spektar* od $(z\,E - A)$, označen sa $\sigma\{E, A\}$ kao izolovane vrednosti od z gde ne važi da je $\det(z\,E - A) \neq 0$. Uobičajeno je da se spektar od $(z\,I - A)$ označava sa $\sigma\{A\}$.

Valja uočiti da zbog moguće singularnosti matice E, spektar $\sigma\{E, A\}$ može zadržati konačne i beskonačne vrednosti od z.

Definicija 12.3 Linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem, dat jed. (12.1), je *kauzalan* ako je sistem, dat jed. (12.1), regularan i $\deg \det(z\,E - A) = \operatorname{rank} E$, *Dai* (1989).

Definicija 12.4 Matrični par (E, A) je dozvoljen (eng. *admissible)* ako je on regularan, neimpulsan i stabilan, *Hsiung*, *Lee* (1999).

Lema 12.2 Linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem, dat jed. (12.1), je *regularan, kauzalan i stabilan* ako i samo ako postoji invertibilna, simetrična matrica $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tako da važe sledeće dve nejednakosti:

$$E^T H\,E \geq 0 \tag{12.7}$$

$$A^T H\,A - E^T H\,E < 0 \tag{12.8}$$

Xu, Yang (1999).

Definicije stabilnosti

Definicija 12.5 Linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem, dat jed. (12.1) je *stabilan* ako i samo ako je sistem, dat jed. (12.1), regularan i svi njegovi polovi se nalaze unutar regiona $\Omega(0,1)$, *Dai* (1989).

Definicija 12.6 Sistem, dat jed. (12.1) je *asimptotski stabilan* ako su sve konačne sopstvene vrednosti matrice $(z\,E - A)$ unutar jediničnog kruga, bez svojstva predviđanja ukoliko se za svako dopustivo $\mathbf{x}(0)$ u jed. (12.1) dobijaju jednostrana rešenja, *Syrmos et al.* (1995).

Definicija 12.7 Linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem, dat jed. (12.1), je *asimptotski stabilan* ako, za sve konzistentne početne uslove $\mathbf{x}_0$, imamo da $\mathbf{x}(t)\rightarrow\mathbf{0}$ kad $t\rightarrow+\infty$, *Owens*, *Debeljkovic* (1985).

Teoreme stabilnosti

Prvo će se izložiti fundamentalni radovi na polju stabilnosti u smislu Ljapunova primenjeni na linearne, vremenski diskretne, deskriptivne sisteme, *Owens*, *Debeljkovic* (1985).

Pažnja je ograničena na slučaj kada je matrica E singularna (t.j. neinvertibilna) a konstruisanje geometrijskih uslova na $\mathbf{x}_0$ za postojanje kauzalnih rešenja jed. (12.1) u vidu relativne strukture potprostora E i A. Rezultati su, prema tome, geometrijska dopuna algebarske teorije iz rada *Campbell* (1980) gde je dokazano da je zahtevana forma od $\mathbf{x}_0$ u vidu Drazinove inverzije, a tehničko rešenje se sastoji u zameni matrica E i A sa komutativnim operatorima.

Ideja u ovom poglavlju je direktan rad sa matricama E i A, a ne pretpostavlja se komutativnost. Geometrijska teorija konzistencije vodi ka prirodnoj klasi pozitivno određenih kvadratnih formi na potprostoru koji sadrži sva rešenja. Ova činjenica omogućava definisanje Ljapunovljeve teorije stabilnosti za linearne vremenski diskretne, deskriptivne sisteme u smislu da je asimptotska stabilnost ekvivalentna postojanju simetričnih, pozitivno određenih rešenja *slabe* Ljapunovljeve matrične jednačine.

U ovom izlaganju pretpostavlja se da je matrica $(\lambda E-A)$ invertibilna u konačnom broju tačaka $\lambda\in\mathbb{C}$ i prema tome ako postoji rešenje $\mathbf{x}(k)$, $(k\geq 0)$ od $\left(\mathbf{x}(k):k=0,1,...\right)$ za dati izbor od $\mathbf{x}_0$, koje je jedinstveno, *Campbell* (1980).

Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem je stabilan ako je sistem dat jed. (12.1) regularan i svi njegovi konačni polovi su unutar regije $\Omega(0,1)$, *Dai* (1989), tako da pažljivo ispitivanje pokazuje da nije potrebno da matrica A bude invertibilna, u poređenju sa slučajem kada se razmatraju vremenski kontinualni sistemi, videti rad *Debeljkovic et al.* (2007).

Teorema 12.2 Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem, dat jed. (12.1) je *asimptotski stabilan* ako i samo ako postoji realan broj $\lambda^* > 0$ tako da, za sve λ u opsegu $0 < |\lambda| < \lambda^*$, postoji samoadjungovani (Hermitov), pozitivno određen operator H_λ na $\mathbb{R}^n$ koji zadovoljava sledeću jednačinu:

$$(A - \lambda E)^T H_\lambda (A - \lambda E) - E^T H_\lambda E = -Q_\lambda \tag{12.9}$$

za neki samoadjungovani operator Q_λ koji zadovoljava pozitivnost sledećeg uslova:

$$\mathbf{x}^T(t) Q_\lambda \mathbf{x}(t) > 0, \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_{d,k^*} \setminus \{0\} \tag{12.10}$$

Owens, *Debeljkovic* (1985).

Teorema 12.3 Pretpostavlja se da je matrica A invertibilna. Tada je linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem, dat jed. (12.1), *asimptotski stabilan* ako i samo ako postoji samoadjungovani, pozitivno određeno rešenje H na $\mathbb{R}^n$ koje zadovoljava sledeću jednačinu:

$$A^T H A - E^T H E = -Q \tag{12.11}$$

gde je matrica Q samoadjungovana i pozitivna u smislu da:

$$\mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) > 0, \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_{d,k^*} \setminus \{0\} \tag{12.12}$$

Owens, Debeljkovic (1985).

Teorema 12.4 Linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem, dat jed. (12.1), je *asimptotski stabilan* ako i samo ako postoji realan broj $\lambda^* > 0$ tako da, za sve λ u opsegu $0 < |\lambda| < \lambda^*$, postoji samoadjungovan, pozitivno određen operator H_λ na $\mathbb{R}^n$ koji zadovoljava sledeću jednačinu:

$$\mathbf{x}^T(t)\Big((A-\lambda E)^T H_\lambda (A-\lambda E) - E^T H_\lambda E\Big)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)$$
$$\forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_{d,k^*} \qquad (12.13)$$

Owens, Debeljkovic (1985).

Posledica 12.1 Ako je matrica A invertibilna, tada je linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem, dat jed. (12.1), *asimptotski stabilan* ako i samo ako jed. (12.13) važi za $\lambda = 0$ i neki simetrični pozitivno određen operator H_0, *Owens, Debeljkovic* (1985).

12.2 Stabilnost na beskonačnom vremenskom intervalu

Dinamičko ponašanje sistema, datog jed. (12.1), je definisano na vremenskom intervalu $\mathcal{K} = \{k_0, (k_0 + k_N)\}$, gde veličina k_N može biti ili pozitivan realan broj ili simbol $+\infty$, tako da se istovremeno mogu tretirati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost. Pretpostavlja se da su vremenski invarijantni skupovi, koji se koriste kao granice trajektorija sistema, otvoreni, povezani i ograničeni.

Neka indeks β u oznaci skupa označava skup svih dozvoljenih stanja sistema a indeks α skup svih početnih stanja sistema, tako da $\forall \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_d$.

Pretpostavlja se da su skupovi otvoreni, povezani i ograničeni i definisani jed. (12.3) za slučaj diskretnih sistema.

Definicije stabilnosti

Definicija 12.8 Sistem, dat jed. (12.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, G, \mathcal{K}, \mathcal{W}_d\}$, ako i samo ako *konzistentan početni uslov* $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_d$, koji zadovoljava $\|\mathbf{x}_0\|_G^2 < \alpha$, $G = E^T P E$, povlači da je $\|\mathbf{x}(k)\|_G^2 < \beta$, $\forall k \in \mathcal{K}$. Matrica G je izabrana tako da reprezentuje fizička ograničenja sistemskih varijabli i pretpostavlja se, kao i ranije, da zadovoljava $G = G^T$, $\mathbf{x}^T(k) G \mathbf{x}(k) > 0,$,

$\forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}_d \backslash \{0\}$, *Debeljković* (1985, 1986), *Debeljković, Owens* (1986), *Owens, Debeljković* (1986).

Definicija 12.9 Sistem, dat jed. (12.1), je *nestabilan na konačnom vremenskom* u odnosu na $\{K, \alpha, \beta, G, W_q\}$, ako i samo ako postoji *konzistentan početni uslov*, koji zadovoljava $\|\mathbf{x}_0\|_G^2 < \alpha,\ G = E^T P\, E$, i ako postoji postoji diskretan trenutak $k^* \in K$, tako da je ispunjen sledeći uslov $\left\|x\left(k^*\right)\right\|_G^2 > \beta$ za neko $k^* \in \mathcal{K}$, *Debeljković, Owens* (1986), *Owens, Debeljković* (1986).

Teoreme stabilnosti

Teorema 12.5 Sistem, dat jed. (12.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \mathcal{K}\}$, $\beta > \alpha$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\lambda_{\max}^k (Q) < \beta / \alpha, \quad \forall k \in \mathcal{K} \tag{12.14}$$

gde je $\lambda_{\max}^k (Q)$ definisano sa:

$$\lambda_{\max}^k (Q) = \max_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k) A^{\mathrm{T}} P A \mathbf{x}(k): \quad \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}_d \backslash \{0\}, \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k) E^{\mathrm{T}} P E \mathbf{x}(k) = 1 \right\} \tag{12.15}$$

gde je matrica $P = P^T > 0$, *Debeljkovic* (1986), *Debeljkovic*, *Owens* (1986).

Teorema 12.6 Sistem, dat jed. (12.1), je *nestabilan na konačnom vremenskom* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \mathcal{K}\}$, $\beta > \alpha$ ako postoji pozitivan skalar $\gamma \in \left]0, \alpha\right[$ i diskretan trenutak k^*, $\exists\left(k^* > k_0\right) \in \mathcal{K}$ tako da je zadovoljen sledeći uslov:

$$\lambda_{\min}^{k^*} (Q) > \beta / \gamma, \quad \text{za neko } k^* \in \mathcal{K} \tag{12.16}$$

gde je $\lambda^k (Q)$ definisano sa:

$$\lambda_{\min}^k (Q) = \min_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k) A^{\mathrm{T}} P A \mathbf{x}(k): \quad \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}_d \backslash \{0\}, \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k) E^{\mathrm{T}} P E \mathbf{x}(k) = 1 \right\} \tag{12.17}$$

Debeljković, *Owens* (1986).

Teorema 12.7 Sistem, dat jed. (12.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \mathcal{K}\}$, $\beta > \alpha$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\left\| \Psi(k) \right\| < \beta / \alpha, \quad \forall k \in K \tag{12.18}$$

gde je: $\Psi(k) = \left(\hat{E}^D \hat{A}\right)^k$ i $\hat{E} = (cE - A)^{-1} E$, $\hat{A} = (cE - A)^{-1} A$, *Debeljković* (1986).

Literatura

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equation*, Pitman, London, 1980.

Campbell S. L., C. D .Meyer, N. J. Rose, "Application of Drazin inverse to linear system of differential equations", *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 31, (1974) 411–425.

Chen, C., Y. Liu, "Lyapunov stability analysis of linear singular dynamical systems", *Proc. Int. Conf. on Intelligent Processing Systems*, Beijing, October 28–31, (1997) 635–639.

Coppel, W. A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Boston D.C. Heath, 1965.

Dai, L., *Singular control systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, 118, 1989.

Debeljkovic, D. Lj., "Finite time stability of linear singular discrete time systems", *Proc. Conference on Modeling and Simulation*, Monastir (Tunisia), November 85, (1985) 2–9.

Debeljkovic, D. Lj., "Finite time stability of linear descriptor systems", *Preprints of I.M.A.C.S. (International Symposium Modelling and Simulation for Control of Lumped and Distributed Parameter Systems*), Lille, (France), 3–6 June, (1986) 57–61.

Debeljkovic, D. Lj., "On practical stabilty of discrete time control systems", *Proc.* 3rd *International Conference on Control and Applications*, Pretoria (South Africa), December 2001, (2001) 197–201.

Debeljkovic, D. Lj., "Singular control systems"**,** *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 11, Series A Math. Analysis, No. 5–6, (2004) 691–706.

Debeljkovic, Lj. D., *Stabilty of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, (*in Serbian*), 460, 2009.

Debeljkovic, Lj. D., *Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and Robustness Stabilizability*, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, (*in Serbian*), 452, 2010.

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic, I – Tech, Vienna, 2011.

Debeljkovic, Lj. D., D. H. Owens, "On practical stability of singular systems", *Proc. Melecon Conf* .85, October 85, Madrid (Spain), (1985) 103–105.

Debeljkovic, D. Lj., D. H. Owens, "On non–Lyapunov stability of discrete–descriptor systems", *Proc. EUROCON Conference* 86, 21–23 April, Paris (France), (1986) 406–409.

Debeljkovic, D. Lj., V. B. Bajic, A. U. Grgic, S. A. Milinkovic, "Non–Lyapunov stability and instability robustness consideration for linear singular systems", *Proc. 3rd ECC,* Roma (Italy), September 5–8, (1995) 1373–1379.

Debeljkovic, D. Lj. S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "Application of singular system theory in chemical engineering Analysis of process dynamics", *Internat. Congress of Chemical and Process Eng.*, CHISA 96, (monograph) August, Prague, (1996), 25–30.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj. Koruga, S. Tomasevic, "Finite time stability of singular systems operating under perturbing forces: Matrix measure approach", *Proc. AMSE*, Melbourne, (Australia) Oct. 29–31, (1997) 447–450.

Debeljkovic, D. Lj., N. A. Kablar, "Finite time stability of linear singular systems: Bellman–Gronwall approach", *Proc. ACC* 99, San Diego (USA), (1999) 1803–1806.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, *Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval*, Cigoja press, Belgrade, 2004.

Debeljkovic D. Lj., Lj. A. Jacic., N. S. Visnjic, M. Pjescic, "Asymptotic Stability of Generalized Discrete Descriptive Time Delayed Systems", *Proc. The* 5th *Edition of IFAC Know. and Tech. Transfer Conference Series on Automation for Buildings the in the Infra structure, DECOM* 2007, May 17–19, Cesme–Izmir (Turkey), (2007) 369–374.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, I. M. Buzurovic, N. J. Dimitrijevic, "A New Approach to the Stability of Time–Delay Systems in the Sense of Non–Lyapunov Delay–Independent and Delay–Dependent Criteria", *Proc. SISY* 2010 (IEEE 8th *International*

Symposium on Intelligent Systems and Informatics), Sept. 10–11, Subotica (Serbia), (2010) 213–218.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, I. M. Buzurovic, G. V. Simeunovic, "On non–Lyapunov delay–independent and delay–dependent criteria for particular class of continuous time delay systems", *Proc. CDC*, December 3–5, Orlando (Florida), (2011), *submitted.*

Owens, H. D., D. Lj. Debeljkovic, "Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems A Geometric Analysis", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, (2), (1985) 139–151.

Owens, H. D., D. Lj. Debeljkovic, "On non–Lyapunov stability of discrete descriptor systems", *Proc. CDC*, Athens (Greece), December, (1986) 2138–2139.

Pandolfi L., "Controllability and stabilization for linear system of algebraic and differential equations", *Jota* 30 (4), (1980) 601–620.

13. KONTINUALNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

13.1 Stabilnost u smislu ljapunova

Primena Ljapunovljeve direktne metode (LDM) je izloženo u mnogobrojnim referencama.

Zbog njihove brojnosti, doprinosi na ovom polju su izostavljeni u ovom poglavlju.

Deo rada *Tissir, Hmamed* (1996), koji je posebno interesantan u kontekstu ovih i daljih istraživanja, će kasnije biti prezentovan.

13.2 Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu

Linearni višestruko prenosni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem se može predstaviti sledećom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \tag{13.1}$$

i sa pridruženom funkcijom početnog stanja:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t), \quad -\tau \le t \le 0 \tag{13.2}$$

Sistem dat jed. (13.1) se naziva *homogenim,* $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ je vektor prostora stanja, A_0, A_1, su konstantne matrice sistema odgovarajućih dimenzija, a τ je čisto vremensko kašnjenje, $\tau = const.,(\tau > 0)$.

Dinamičko ponašanje sistema, datog jed. (13.1), sa početnim funkcijama, datim jed. (13.2), je definisano na neprekidnom vremenskom intervalu $\Im = \{t_0,\ \ t_0 + T\}$, pri čemu veličina T može biti ili pozitivan realan broj ili simbol +∞, tako da se istovremeno mogu tretirati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost.

Očigledno je da $\Im \in \mathbb{R}_+$.

Vremenski invarijantni skupovi, koji se koriste kao granice trajektorija sistema, zadovoljavaju pretpostavke izložene u prethodnom poglavlju.

Definicije stabilnosti

Definicija 13.1 Sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (13.1–13.2), je *stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, -\tau, T, \|\mathbf{x}\|\}$, $\alpha \le \beta$, ako za bilo koju trajektoriju $\mathbf{x}(t)$ uslov $\|\mathbf{x}_0\| < \alpha$ povlači $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta \ \ \forall t \in [-\Delta, \ T]$, $\Delta = \tau_{\max}$, *Feng*, *Hunsarg* (1996).

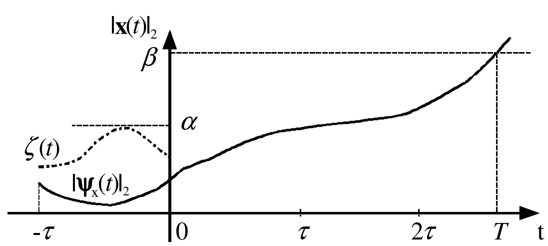
Definicija 13.2 Sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (13.1–13.2), je *stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, -\tau, T, \|\mathbf{x}\|\}$, $\gamma < \alpha < \beta$, ako za bilo koju trajektoriju $\mathbf{x}(t)$ uslov $\|\mathbf{x}_0\| < \alpha$, povlači:

(*i*) Stabilnost u odnosu na $\{\alpha, \beta, -\tau, T, \|\mathbf{x}\|\}$,

(*ii*) Postoji $t^* \in \left]0, T\right[$ tako da $\|\mathbf{x}(t)\| < \gamma$ za sve $\forall t \in \left]t^*, T\right[$,

Feng, *Hunsarg* (1996).

Definicija 13.3 Sistem, dat jed. (13.1), koji zadovoljava početni uslov, dat jed. (13.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\zeta(t), \beta, \Im\}$ ako i samo ako $\|\boldsymbol{\psi}_x(t)\| < \zeta(t)$, povlači $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$, $t \in \Im$, $\zeta(t)$ je skalarna funkcija sa osobinom $0 < \zeta(t) \le \alpha$, $-\tau \le t \le 0$, gde je α realan pozitivan broj i $\beta \in \mathbb{R}$ i $\beta > \alpha$, *Debeljkovic et al.* (1997.a, 1997.b, 1997.c, 1997.d), *Nenadic et al.* (1997).



Sl.13.1 Ilustracija definicije 13.3

Definicija 13.4 Sistem, dat jed. (13.1), koji zadovoljava početni uslov, dat jed. (13.2) je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\zeta(t), \beta, \tau, \Im, \mu(A_0 \ne 0)\}$

ako i samo ako $\boldsymbol{\psi}_x(t) \in \mathcal{S}_\alpha, \quad \forall t \in [-\tau, \ 0]$ povlači $\mathbf{x}(t_0, t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}_\beta, \quad \forall t \in [0, \ T]$, *Debeljkovic et al.* (1997.b, 1997.c).

Definicija 13.5 Sistem, dat jed. (13.1), koji zadovoljava početni uslov, dat jed. (13.2) je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, \tau, \Im, \mu_2\left(A_0\right) \neq 0\right\}$ ako i samo ako $\boldsymbol{\psi}_x(t) \in \mathcal{S}_\alpha, \quad \forall t \in [-\tau, \ 0]$ povlači $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)) \in S_\beta, \quad \forall t \in \Im$, *Debeljkovic et al.* (1997.b, 1997.c).

Definicija 13.6 Sistem, dat jed. (13.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (13.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{t_0, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta\}$, ako i samo ako $\left\|\mathbf{x}(t_0)\right\|^2 = \left\|\mathbf{x}_0\right\|^2 < \alpha$, povlači $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|^2 < \beta$, $\forall t \in \Im$, *Debeljkovic et al.* (2010).

Definicija 13.7 Sistem, dat jed. (13.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (13.2), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\{t_0, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta\}$, ako i samo ako $\left\|\mathbf{x}(t_0)\right\|_P^2 = \left\|\mathbf{x}_0\right\|_P^2 < \alpha$, povlači: $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_P^2 < \beta$, $\forall t \in \Im$, sa osobinom da: $\lim_{k \to \infty} \left\|\mathbf{x}(t)\right\|_P^2 \to 0$, *Debeljkovic et al.* (2010).

Teoreme stabilnosti – Uslovi stabilnosti zavisni od kašnjenja

Teorema 13.1 Sistem, dat jed. (13.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (13.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \tau, \Im\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\left\|\Phi(t)\right\|_2 < \frac{\sqrt{\beta / \alpha}}{1 + \tau \left\|A_1\right\|_2}, \qquad \forall t \in [0, T] \tag{13.3}$$

$\left\|(\,\cdot\,)\right\|$ je Euklidska norma, a $\Phi(t)$ je fundamentalna matrica sistema, datog jed. (13.1), *Nenadic et al*. (1997), *Debeljkovic et al*. (1997.a).

Kada je $\tau = 0$ ili $\left\|A_1\right\| = 0$, problem se svodi na slučaj običnih linearnih sistema, *Angelo* (1974).

Teorema 13.2 Sistem, dat jed. (13.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (13.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\ \beta,\ \tau,\ T\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu(A_0)t} < \frac{\sqrt{\beta/\alpha}}{1+\tau\left\|A_1\right\|_2}\ ,\quad \forall t\in\left[0,\ T\right] \tag{13.4}$$

gde $\left\|(\cdot)\right\|$ označava Euklidsku normu, *Debeljkovic et al*. (1997.b).

Teorema 13.3 Sistem, dat jed. (13.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (13.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha,\ \beta,\ \tau,\ T,\ \mu_2\left(A_0\right)\neq 0\right\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu(A_0)t} < \frac{\beta/\alpha}{1+\mu_2^{-1}\left(A_0\right)\cdot\left\|A_1\right\|_2\cdot\left(1-e^{-\mu_2(A_0)\tau}\right)}\ ,\quad \forall t\in\left[0,\ T\right] \tag{13.5}$$

Debeljkovic et al. (1997.c, 1997.d).

Teorema 13.4 Sistem, dat jed. (13.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (13.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\sqrt{\alpha},\ \sqrt{\beta},\ \tau,\ T,\ \mu\left(A_0\right)=0\right\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$1+\tau\left\|A_1\right\|_2 < \sqrt{\beta/\alpha},\quad \forall t\in\left[0,\ T\right] \tag{13.6}$$

Debeljkovic et al. (1997.d).

Rezultati koji će biti prezentovani u nastavku omogućavaju ispitivanje stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu razmatranih sistema, naime sistema, datog jed. (13.1) i (13.2), bez izračunavanja fundamentalne matrice ili odgovarajućih matričnih mera.

Jednačina (13.2) se može prepisati u svojoj opštoj formi na sledeći način:

$$\mathbf{x}\left(t_0+\vartheta\right)=\boldsymbol{\varphi}_x\left(\vartheta\right),\quad \boldsymbol{\varphi}_x\left(\vartheta\right)\in\mathcal{C}\left[-\tau,\ 0\right],\quad -\tau\leq\vartheta\leq 0 \tag{13.7}$$

pri čemu je t_0 početni trenutak posmatranja sistema, datog jed. (13.1), a $\mathcal{C}\left[-\tau,\ 0\right]$ je *Banach*-ov prostor neprekidnih funkcija na vremenskom intervalu dužine τ, koji preslikava interval $\left[\left(t-\tau\right),\ t\right]$ u $\mathbb{R}^n$ sa normom definisanom na sledeći način:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathcal{C}} = \max_{-\tau\leq\vartheta\leq 0}\left\|\boldsymbol{\varphi}\left(\vartheta\right)\right\| \tag{13.8}$$

Pretpostavlja se da su ispunjeni uobičajeni uslovi glatkosti tako da ne postoje teškoće po pitanjima postojanja, jedinstvenosti i neprekidnosti rešenja u odnosu na početne uslove.

Osim toga, može se napisati:

$$\mathbf{x}\left(t_0+\vartheta\right)=\boldsymbol{\varphi}_x\left(\vartheta\right) \tag{13.9}$$

kao i:

$$\dot{\mathbf{x}}\left(t_0\right)=\mathbf{f}\left(t_0,\boldsymbol{\varphi}_x\left(\vartheta\right)\right) \tag{13.10}$$

Teorema 13.5 Sistem, dat jed. (13.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (13.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha,\beta,t_0,\Im\right\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\left(1+\left(t-t_0\right)\sigma_{\max}\right)^2 e^{2\left(t-t_0\right)\sigma_{\max}} < \frac{\beta}{\alpha},\quad \forall t\in\Im \tag{13.11}$$

$\sigma_{\max}\left(\cdot\right)$ je najveća singularna vrednost matrice $\left(\cdot\right)$, naime:

$$\sigma_{\max}=\sigma_{\max}\left(A_0\right)+\sigma_{\max}\left(A_1\right) \tag{13.12}$$

Debeljkovic et al. (1998.c), *Lazarevic et al.* (2000).

Napomena U slučaju kada je u *Teoremi* 13.5 $A_1=0$, t.j. A_1 je nula matrica, dobija se rezultat sličan rezultatu prezentovanom u radu *Angelo* (1974).

Pre prezentovanja krucijalnog rezultata iz ove oblasti, potrebno je razmotriti i objasniti neke dodatne rezultate.

Predstavlja se sledeći rezultat iz rada *Lee*, *Dianat* (1981).

Lema 13.1 Neka se razmatra sistem, dat jed. (13.1), i neka je $P_1(t)$ karakteristična matrica, dimenzije $(n \times n)$, kontinualna i diferencijabilna na vremenskom intervalu $[0,\ \tau]$ i 0 van intervala, a funkcija:

$$V(\mathbf{x}_t, \tau) = \left(\mathbf{x}(t) + \int_0^h P_1(\tau)\mathbf{x}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) P_0 \left(\mathbf{x}(t) + \int_0^h P_1(\tau)\mathbf{x}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \tag{13.13}$$

gde je $P_0 = P_0^* > 0$ Hermitova matrica i $\mathbf{x}_t(\vartheta) = \mathbf{x}(t+\vartheta),\ \ \vartheta \in [-\tau,\ 0]$.

Ako:

$$P_0\left(A_0 + P_1(0)\right) + \left(A_0 + P_1(0)\right)^* P_0 = -\,Q \tag{13.14}$$

$$\dot{P}_1(\kappa) = \left(A_0 + P_1(0)\right) P_1(\kappa), \quad 0 \le \kappa \le \tau \tag{13.15}$$

gde je $P_1(\tau) = A_1$ i $Q = Q^* > 0$ je Hermitova matrica, tada je:

$$\dot{V}(\mathbf{x}_t,\ \tau) = \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}_t,\ \tau) < 0 \tag{13.16}$$

Lee, Dianat (1981).

Jed. (13.13) definiše Ljapunovljevu funkciju sistema, datog jed. (13.1), a * označava konjugovanu transponovanu matricu.

U radu *Lee*, *Dianat* (1981) istaknuto je da je ključ uspeha u konstruisanju odgovarajuće Ljapunovljeve funkcije sistema, datog jed. (13.1), *postojanje najmanje jednog rešenja* $P_1(t)$ jed. (13.15) sa graničnim uslovom $P_1(\tau) = A_1$.

Drugim rečima, zahteva se da nelinearna algebarska matrična jednačina:

$$e^{\left(A_0 + P_1(0)\right)\tau} P_1(0) = A_1 \tag{13.17}$$

ima *najmanje jedno rešenje* za $P_1(0)$.

Teorema 13.6 Neka je sistem opisan jed. (13.1). Ako za bilo koju datu pozitivno određenu Hermitovu matricu Q postoji pozitivno određena Hermitova matrica P_0, tako da:

$$P_0\left(A_0 + P_1(0)\right) + \left(A_0 + P_1(0)\right)^* P + Q = 0 \tag{13.18}$$

gde za $\vartheta \in [0,\ \tau]$ i $P_1(\vartheta)$ zadovoljava:

$$\dot{P}_1(\vartheta) = \left(A_0 + P_1(0)\right) P_1(\vartheta) \tag{13.19}$$

sa graničnim uslovom $P_1(\tau) = A_1$ i $P_1(\tau) = 0$ van intervala, tada je sistem *asimptotski stabilan*, *Lee*, *Dianat* (1981).

Teorema 13.7 Neka je sistem opisan jed.(13.1) i osim toga, neka jed. (13.17) ima rešenje za $P_1(0)$, koje je nesingularno. Tada je, sistem, dat jed. (13.1) *asimptotski stabilan* ako je zadovoljena jed. (13.19) *Teoreme* 13.6, *Lee*, *Dianat* (1981).

Potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti sistema su izvedeni pomoću Ljapunovljeve direktne metode konstruisanjem odgovarajuće funkcije "energije". Poznato je da ova funkcija postoji ako se može odrediti rešenje $P_1(0)$ algebarske nelinearne matrične jednačine $A_1 = e^{\tau\left(A_0 + P_1(0)\right)\cdot P_1(0)}$.

U radu *Lee*, *Dianat* (1981) je pokazano da se znak izvoda Ljapunovljeve funkcije (*Lema* 13.1), a na taj način i asimptotska stabilnost sistema (*Teorema* 13.6 i *Teorema* 13.7) se može odrediti na osnovu poznavanja *samo jednog ili bilo kog* rešenja partikularne nelinearne matrične jednačine.

U nastavku će se demonstrirati da bi *Lema* 13.1 trebalo da bude poboljšana s obzirom da se ne uzimaju u obzir sva moguća rešenja jed. (13.17). Kontraprimer, koji se zasniva na originalnom prilazu i koji je podržan primenom *Lambert*-ove funkcije, je dat u lit. *Stojanovic*, *Debeljkovic* (2006), *Debeljkovic*, *Stojanovic* (2008). Konačan rezultat sledi u nastavku.

Lema 13.2 Pretpostavlja se da postoji (postoje) rešenje (rešenja) $P_1(0)$ jed. (13.19) i neka je Ljapunovljeva funkcija data jed. (13.13). Tada važi $\dot{V}(\mathbf{x}_t, \tau) < 0$ ako i samo ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P_0 = P_0^* > 0$ tako da važi jed. (13.5) za *svako (sva)* rešenje (rešenja) $P_1(0)$, *Stojanovic, Debeljkovic* (2006), *Debeljkovic*, *Stojanovic* (2008).

Napomena 13.2 Potreban uslov *Leme* 13.2. sledi direktno iz dokaza *Teoreme* 13.2 u lit. *Lee*, *Dianat* (1981) i *Stojanović, Debeljković* (2006).

Teorema 13.8 Pretpostavlja se da postoji (postoje) rešenje (rešenja) $P_1(0)$ jed. (13.17). Tada je sistem, dat jed. (13.1) *asimptotski stabilan* ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P_0 = P_0^* > 0$ tako da važi jed. (13.14) za **sva** rešenja $P_1(0)$ jed. (13.17), *Stojanovic*, *Debeljkovic* (2006), *Debeljkovic*, *Stojanovic* (2008).

Napomena 13.3 Iskazi *Leme* 13.2. i *Teoreme* 13.7 i *Teoreme* 13.8 zahtevaju da su ispunjeni odgovarajući uslovi za bilo koje rešenje $P_1(0)$ jed. (13.17) .

Ovi matrični uslovi su analogni sledećem poznatom skalarnom uslovu asimptotske stabilnosti.

Sistem, dat jed. (13.1) je *asimptotski stabilan* ako i samo ako uslov $\mathrm{Re}(s) < 0$ važi za **sva** rešenja s sledeće jednačine:

$$f(s) = \det\left(s\,I - A_0 - e^{-s\tau}A_1\right) = 0 \tag{13.20}$$

Sada, se prezentuje glavni rezultat, koji se tiče praktične stabilnosti sistema, datog jed. (13.1).

Teorema 13.9 Sistem, dat jed. (13.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (13.2), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{t_0, \Im, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan realan broj q, $q > 1$, tako da:

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}(t+\tau)\|_{P_0} \leq \sup_{\vartheta\in[-\tau,0]} \|\mathbf{x}(t+\vartheta)\|_{P_0} < q\|\mathbf{x}(t)\|_{P_0} \\ q > 1, \quad t \geq t_0, \quad \forall t \in \Im, \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}_\beta \end{gathered} \tag{13.21}$$

i ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P_0 = P_0^* > 0$ tako da važi jed. (13.14) za *sva* rešenja $P_1(0)$ jed. (13.17) i ako su ispunjeni sledeći uslovi, *Debeljkovic et al.* (2012.b):

$$e^{\bar{\lambda}_{\max}(\bar{\Upsilon})(t-t_0)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im \tag{13.22}$$

gde je:

$$\bar{\lambda}_{\max}\left(\bar{\Upsilon}\right) = \bar{\lambda}_{\max}\left(\mathbf{x}^T(t)\left(P_0 A_1 P_0^{-1} A_1^T P_0 + q^2 P_0\right)\mathbf{x}(t) : \ \mathbf{x}^T(t) P_0 \mathbf{x}(t) = 1\right) \tag{13.23}$$

Debeljkovic (2011).

Teoreme stabilnosti – Uslovi stabilnosti nezavisni od kašnjenja

Teorema 13.10. Sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (13.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{t_0, \Im, \alpha, \beta, \left\|(\cdot)\right\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan realan broj q, $q > 1$, tako da:

$$\begin{gathered} \left\|\mathbf{x}(t+\tau)\right\| \leq \sup_{\vartheta \in [-\tau, 0]} \left\|\mathbf{x}(t+\vartheta)\right\| < q\left\|\mathbf{x}(t)\right\| \\ q > 1, \quad t \geq t_0, \quad \forall t \in \Im, \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}_\beta \end{gathered} \tag{13.24}$$

ako je zadovoljen sledeći uslov, *Debeljkovic et al.* (2010):

$$e^{\bar{\lambda}_{\max}(\Psi)(t-t_0)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im \tag{13.25}$$

gde je:

$$\lambda_{\max}\left(\Pi\right) = \lambda_{\max}\left(A_0^T + A_0 + A_1 A_1^T + q^2 I\right) \tag{13.26}$$

Debeljkovic (2011).

Literatura

Amir-Moez, A., (1956) Extreme properties of a hermitian transformations and singular values of sum and product of linear transformations, *Duke Math J.*, 23, 463–476.

Angelo, H., (1974) *Linear time varying systems*, Allyn and Bacon, Boston.

Coppel, W. A., (1965) *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Boston D.C. Heath.

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic, I – Tech, Vienna, 2011.

Debeljkovic, D. Lj., Z. Lj. Nenadic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, (1997.a) On Practical and Finite-Time Stability of Time-Delay Systems, *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium), pp. 307–311.

Debeljkovic, D. Lj., Z. Lj. Nenadic, Dj.,Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, (1997.b) On practical stability of time-delay systems new results, *Proc.* 2nd *ASCC* 97, 22 – 25 July, Seoul (Korea), pp. 543–546.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj. Koruga, S. Tomaševic, (1997.c) On practical stability of time delay system under perturbing forces, *Proc. AMSE* 97, Melbourne (Australia), pp. 442–446.

Debeljkovic, D. Lj., Z. Lj. Nenadic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, (1997.d) On the stability of linear systems with delayed state defined over finite time interval, *Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), pp. 2771–2772.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj. Koruga, (1997.e) Finite time stability for the metal strips cold rolling, *Proc. ASIAN* international workshop on automation in steel industry, Kyongju (Korea), July 16 – 18, pp. 233-238.

Debeljkovic, D. Lj., Dj. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic (1998.a) Further Results on Non-Lyapunov Stability of Time Delay Systems, *Proc. MELECON* 98, Tel-Aviv (Israel), May 18-20, Vol.1, pp. 509 – 512.

Debeljkovic, D. Lj., Dj. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, (1998.b) Non-Lyapunov stability analysis of linear time delay systems**,** *Preprints DYCOPS* 5, 5th IFAC Symposium on Dynamics and Process Systems, Corfu (Greece), pp. 549-553.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, (1998.c) Finite time stability analysis of linear time delay systems Bellman-Gronwall approach, *Proc.* 1st *IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France) July 6 – 7, pp. 171–175.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, Dj. Koruga, (1998.d), Further results on non - Lyapunov stability of time delay systems**,** *Prepr.* 5th *IFAC* Symp. on (LCA), Shenyang (China), September 8 - 10 , TS13, pp. 6-10.

Debeljkovic, D. Lj., Dj. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, (1998.e) Further results on non-Lyapunov stability of linear systems with delayed state, *Proc.* XII *CBA* - Brazilian Automatic Control Conference, Uberlandia (Brazil), September 14 - 18 Vol. IV, pp. 1229-1233.

Debeljkovic, Lj. D. & S. A. Milinkovic, (1999) *Finite Time Stabilty of Time Delay Systems*, GIP Kultura, ID 72600076, Belgrade.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Z. Lj. Nenadic, S. A. Milinkovic, (1999) Finite Time Stability of Time Delay Systems, *IMA J. Math. Control and Info.* 16 (3) pp. 101-109, ISSN 0265-0754.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj.. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, (2000.a) Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval, *Proc. ACC* 2000, Chicago (USA), pp. 1450-1451.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj.. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, (2000.b) Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval, *Proc. APCCM* (The 4th Asia-Pacific Conference on Control and Measurements), 9-12 July Guilin (China), D. pp.9.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, (2000.c) Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval and application to different chemical processes, *CHISA* 2000, 27-31 Avgust, Praha (Czech Republic), CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj. & M. Aleksendric, (2003.a) Lyapunov and non-Lyapunov stability of linear discrete time delay systems, *Proc. ACC*, 4-7 June 2003, Denver USA, pp. 4450-4451.

Debeljkovic, D. Lj., M. Aleksendric, Y. Y. Nie, Q. L. Zhang, (2003.b) Lyapunov and non-Lyapunov stability of linear discrete time delay systems, *Proc. The Fourth Inter. Conference on Control and Automation,* 9-12 June 2003, Montreal (Canada), pp. 296-300.

Debeljkovic, Lj. D., A. Jacic, M. Medenica, (2005) *Time Delay Systems Stability and Robustness,* Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, ISBN 86-7083-504-5

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, (2006.a) Further Results on Descriptor Time Delayed System Stabilty Theory in the sense of Lyapunov Pandolfi based approach, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, pp. 1-11, ISSN 1708-296x.

Debeljkovic, D. Lj.,& S. B. Stojanovic, (2008) *Systems, Structure and Control* **-** Editior Petr Husek, – Chapter *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems Delay Dependent Approach*, pp. 029 – 060, I – Tech, ISBN 978-7619-05-3, Vienna.

Desoer, C. A. & M. Vidysagar, *Feedback Systems Input – Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

Fang, H. H., H. J. Hunsarg, (1996) Stabilization of nonlinear singularly perturbed multiple time delay systems by dither, *Journal of Dynamic Systems*, *Measurements and Control*, March, Vol. 118, pp. 177-181.

Lazarevic, M. P., D. Lj. Debeljkovic, Z. Lj. Nenadic, S. A. Milinkovic, (2000) Finite time stability of time delay systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol..17, No.3, pp. 101-109, ISSN 0265-0754.

Lee, T. N., S. Diant, (1981) Stability of time delay systems, *IEEE Trans. Automat. Control* AC-26 (4), 951–953, ISSN 0018-9286.

Mao, X., (1997) Comments on "Improved Razumikhin-Type Theorem and its Applications", *IEEE Trans. Automat. Control*, 42 (3) 429 - 430, ISSN 0018 - 9286

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, (1981) Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delay, *International Journal of Control*, 34, (6), 1175-1184, ISSN 0020-7179.

Muller, P. C., (1983) Stability of linear mechanical systems with holonomic constraints, *Appl. Mechanical Review* (11), Part II, November, 160-164, ISSN 978019514.

Nenadic, Z. Lj., D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, (1997) On practical stability of time delay systems, *Proc. ACC* 97, Albuquerque, New Mexico (USA), pp. 3235–3236.

Pjescic, R M., V. Chistyakov, D. Lj. Debeljkovic, (2008) *On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness***,** Faculty of Mechanical Engineering Belgrade, ISBN 978-86-7083-631-0, Belgrade

Stojanovic, S. B. .& D. Lj. Debeljkovic, (2005) Necessary and sufficient conditions for delay-dependent asymptotic stability of linear continuous large scale time delay systems, *Asian Journal of Control*, (Taiwan) Vol. 7, No. 4, pp. 414 - 418.

Stojanovic, S. B. .& D. Lj. Debeljkovic, (2005.c) Necessary and sufficient conditions for delay-dependent asymptotic stability of linear continuous large scale time delay autonomous systems, *Asian J Contr* (*Taiwan*), Vol. 7., No. 4, 414-418, ISSN 1561-8625.

Stojanovic, S. B. & D. Lj. Debeljkovic, (2006) Comments on stability of time-delay systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* (*submitted*)

Su, J. H., (1994) Further results on the robust stability of linear systems with single time delay, *Systems & Control Letters* (23), pp. 375 – 379.

Su, J. H. & C. G. Huang, (1992) Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems, *IEEE Trans. Automat. Control* AC- 37 (10), pp. 1656-1659.

Tissir, E. & A. Hmamed, (1996) Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$, *Automatica*, 32 (12), 1723-1726.

Xu, B. & Y. Liu, (1994) Improved Razumikhin-Type Theorem and its Applications, *IEEE Trans. Automat. Control* AC- 39 (4), pp. 839 – 841.

14. DISKRETNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

14.1 Stabilnost u smislu ljapunova

Primena Ljapunovljeve direktne metode (LDM) je izložena u mnogobrojnim referencama. Zbog njihove brojnosti, doprinosi na ovom polju su izostavljeni u ovom poglavlju.

Deo rada *Tissir, Hmamed* (1996), koji je od interesa, u kontekstu ovih istraživanja, će ovde biti predstavljen samo kao ideja koja je poslužila za formiranje konačnih rezultata istraživanja.

Posmatra se linearni, diskretni sistem sa kašnjenjem u obliku:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1) \tag{14.1}$$

Jedn. (14.1) je homogena jednačina stanja, $\mathbf{x}(k)$ je vektor stanja sistema, dok su A_0 i A_1 konstantne sistemske matrice odgovarajućih dimenzija.

Teorema 14.1 Sistem definisan jedn. (14.1) je asimptotski stabilan ako važi:

$$\| A_0 \| + \| A_1 \| < 1 \tag{14.2}$$

Mori et al. (1981).

Teorema 14.2 Sistem jedn. (14.1) je asimptotski stabilan, nezavisno od kašnjenja, ukoliko važi:

$$\| A_1 \| < \frac{\sigma_{\min}\left(Q^{-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma_{\max}\left(Q^{-\frac{1}{2}}A_0^T P\right)} \tag{14.3}$$

pri čemu je P rešenje *diskretne ljapunovske matrične jednačine*:

$$A_0^T P A_0 - P = -\left(2Q + A_1^T P A_1\right) \tag{14.4}$$

a $\sigma_{\max}(\cdot)$ i $\sigma_{\min}(\cdot)$ su maksimalna i minimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$, *Debeljkovic et al.*(2004.a, 2004.b, 2004.d, 2005.a).

Teorema 14.3 Neka je matrica $\left(Q - A_1^T P A_1\right)$ regularna.

Sistem definisan jedn. (14.1) je asimptotski stabilan, nezavisno od kašnjenja ako važi:

$$\left\| A_1 \right\| < \frac{\sigma_{\min}\left(\left(Q - A_1^T P A_1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma_{\max}\left(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P\right)} \tag{14.5}$$

sa matricom P koja je rešenje *diskretne ljapunovske matrične jednačine:*

$$A_0^T P A_0 - P = -2Q \tag{14.6}$$

pri čemu su $\sigma_{\max}(\cdot)$ i $\sigma_{\min}(\cdot)$ maksimalna i minimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$, *Debeljkovic et al.*(2004.a, 2004.b, 2004.d, 2005.a).

Pristup zasnovan na ljapunovskoj asimptotskoj stabilnosti

Linearni autonomni multivarijabilni diskretni sistem sa kašnjenjem je moguće predstaviti diferencnom jednačinom:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{j=0}^{N} A_j \mathbf{x}\left(k - h_j\right), \quad \mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \left\{-h_N, -h_N + 1, \dots, 0\right\} \tag{14.7}$$

u kojoj je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, i $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \dots < h_N$ - celi brojevi koji predstavljaju vremenska kašnjenja sistema.

Neka je $V\left(\mathbf{x}(k)\right)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tako da je $V\left(\mathbf{x}(k)\right)$ ograničena i za koju je i $\left\|\mathbf{x}(k)\right\|$ takođe ograničeno.

Lema 14.1 Za proizvoljne matrice istih dimenzija F i G i za neku proizvoljnu pozitivnu konstantu ε važi sledeći izraz , *Wang & Mau* (1997):

$$\left(F + G\right)^T \left(F + G\right) \le \left(1 + \varepsilon\right) F^T F + \left(1 + \varepsilon^{-1}\right) G^T G \tag{14.8}$$

Teorema 14.4 Neka je A_0 nenulta matrica. Ako za svaku datu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ takva da je sledeća matrična jednačina zadovoljena:

$$\left(1 + \varepsilon_{\min}\right) A_0^T P A_0 + \left(1 + \varepsilon_{\min}^{-1}\right) A_1^T P A_1 - P = -Q \tag{14.9}$$

sa:

$$\varepsilon_{\min} = \frac{\left\| A_1 \right\|_2}{\left\| A_0 \right\|_2} \tag{14.10}$$

tada je sistem, jedn. (14.7) asimptotski stabilan, *Stojanovic & Debeljkovic* (2005.b).

Posledica 14.1 Ukoliko za proizvoljnu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ koja je rešenje sledeće ljapunovljeve matrične jednačine:

$$A_0^T P A_0 - P = -\frac{\varepsilon_{\min}}{1+\varepsilon_{\min}} Q \tag{14.11}$$

u kojoj je $\varepsilon_{\min}$ definisano jed. (14.10) i ukoliko je sledeći uslov zadovoljen:

$$\sigma_{\max}\left(A_0\right) + \sigma_{\max}\left(A_1\right) < \frac{\lambda_{\min}\left(Q-P\right)}{\sigma_{\max}\left(A_0\right)\lambda_{\max}\left(P\right)} \tag{14.12}$$

Tada je sistem, jed. (14.7) asimptotski stabilan, *Stojanovic & Debeljkovic* (2005.b).

Posledica 14.2 Ako za proizvoljnu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ koja je rešenje matrične jednačine:

$$\left(1+\varepsilon_{\min}\right) A_0^T P A_0 - P = -\varepsilon_{\min} Q \tag{14.13}$$

u kojoj je $\varepsilon_{\min}$ definisano sa jedn. (14.10), i ukoliko je zadovoljen sledeći uslov:

$$\sigma_{\max}\left(A_0\right) + \sigma_{\max}\left(A_1\right) < \frac{\lambda_{\min}\left(Q\right)}{\sigma_{\max}\left(A_0\right)\lambda_{\max}\left(P\right)} \tag{14.14}$$

tada je sistem, jed. (14.7) asimptotski stabilan, *Stojanovic & Debeljkovic* (2005.b).

Teorema 14.5 Ako za proizvoljnu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ takva da je sledeća matrična jednačina zadovoljena:

$$2A_0^T P A_0 + 2A_1^T P A_1 - P = -Q \tag{14.15}$$

Tada je sistem definisan jedn. (14.7) asimptotski stabilan, *Stojanovic & Debeljkovic* (2006.a).

Posledica 14.3. Sistem definisan jedn. (14.7) je asimptotski stabilan, nezavisno od kašnjenja ako :

$$\sigma_{\max}^{2}\left(A_{1}\right)<\frac{\lambda_{\min}\left(2Q-P\right)}{2\sigma_{\max}^{2}\left(P^{\frac{1}{2}}\right)} \tag{14.16}$$

pri čemu za svaku zadatu matricu $Q=Q^{T}>0$ postoji matrica $P=P^{T}>0$ koja je rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine , *Stojanovic & Debeljkovic* (2006.a):

$$A_{0}^{T}PA_{0}-P=-Q \tag{14.17}$$

Posledica 14.4 Sistem jedn.(13.7) je asimptotski stabilan, nezavisno od kašnjenja ako:

$$\sigma_{\max}^{2}\left(A_{1}\right)<\frac{\lambda_{\min}\left(Q\right)}{2\sigma_{\max}^{2}\left(P^{\frac{1}{2}}\right)} \tag{14.18}$$

pri čemu za svaku matricu $Q=Q^{T}>0$ postoji matrica $P=P^{T}>0$ koja je rešenje sledeće *ljapunovljeve matrične jednačine, Stojanovic & Debeljkovic* (2006.a):

$$2A_{0}^{T}PA_{0}-P=-Q \tag{14.19}$$

14.2 Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu

Koliko je poznato jedini rezultat koji razmatra i istražuje problem neljapunovske analize linearnih vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, je jedini pomenuti u uvodu, odnosno *Debeljkovic, Aleksendric* (2003), u kojem je ovaj problem razmatran po prvi put.

Ispitivanje stabilnosti sistema pomoću diskretne fundamentalne matrice je veoma komplikovano, tako da postoji potreba za pronalaženjem efikasnijih izraza koji treba da se zasnivaju na izračunavanju odgovarajuće sopstvene vrednosti ili norme odgovarajuće matrice sistema kao što je to urađeno za slučaj kontinualnih sistema.

Razmatra se linearni vremenski diskretni sistem sa kašnjenjem u stanju, opisan sledećom jednačinom:

$$\mathbf{x}\left(k+1\right)=A_{0}\,\mathbf{x}\left(k\right)+A_{1}\,\mathbf{x}\left(k-1\right) \tag{14.20}$$

sa poznatom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(k_0)=\boldsymbol{\psi}(k_0), \quad -1\le k_0\le 0 \tag{14.21}$$

gde je $\mathbf{x}(k)\in\mathbb{R}^n$ vekor stanja, a A_0 i A_1 su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija. Čisto vremensko kašnjenje je konstantno i jednako jedinici.

Za neke druge svrhe, jednačina stanja sa kašnjenjem se može reprezentovati na sledeći način:

$$\mathbf{x}(k+1)=A_0\,\mathbf{x}(k)+\sum_{j=1}^{M}A_j\,\mathbf{x}(k-h_j) \tag{14.22}$$

$$\mathbf{x}(\vartheta)=\boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta\in\{-h,-h+1,\dots,0\} \tag{14.23}$$

gde je $\mathbf{x}(k)\in\mathbb{R}^n$, $A_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $j=1,2$, h–je ceo broj koji predstavlja čisto vremensko kašnjenje sistema a $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je poznata vektorska funkcija početnih uslova.

Definicije stabilnosti

Definicija 14.1 Sistem, definisan jed. (14.22), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\{k_0,\mathcal{K}_N,\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}_\beta\}$, ako i samo ako $\|\mathbf{x}(k_0)\|^2_{A_0^TPA_0}=\|\mathbf{x}_0\|^2_{A_0^TPA_0}<\alpha$, povlači: $\|\mathbf{x}(k)\|^2_{A_0^TPA_0}<\beta$, $\forall k\in\mathcal{K}_N$ sa osobinom da $\lim\limits_{k\to\infty}\|\mathbf{x}(k)\|^2_{A_0^TPA_0}\to 0$, *Debeljković* (2011).

Definicija 14.2 Sistem, dat jed. (14.22), je *praktično stabilan* u odnosu na $\{k_0,\mathcal{K}_N,\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}_\beta\}$, ako i samo ako: $\|\mathbf{x}_0\|^2<\alpha$, povlači $\|\mathbf{x}(k)\|^2<\beta$, $\forall k\in\mathcal{K}_N$

.

Definicija 14.3 Sistem, dat jed. (14.22), je *atraktivno praktično nestabilan* u odnosu na $\{k_0,\mathcal{K}_N,\alpha,\beta,\|(\cdot)\|^2\}$, $\alpha<\beta$, ako za $\|\mathbf{x}_0\|^2_{A_0^TPA_0}<\alpha$, postoji moment: $k=k^*\in\mathcal{K}_N$, tako da je ispunjen sledeći uslov $\|\mathbf{x}(k^*)\|^2_{A_0^TPA_0}\ge\beta$ sa osobinom da $\lim\limits_{k\to\infty}\|\mathbf{x}(k)\|^2_{A_0^TPA_0}\to 0$, *Debeljkovic* (2011).

Definicija 14.4 Sistem, dat jed. (14.22), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{k_0, \mathcal{K}_N, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako za $\|\mathbf{x}_0\|^2 < \alpha$ postoji moment: $k = k^* \in \mathcal{K}_N$, tako da je ispunjen sledeći uslov $\left\|\mathbf{x}\left(k^*\right)\right\|^2 \geq \beta$ za neko $k = k^* \in \mathcal{K}_N$.

Definicija 14.5 Linearan, vremenski diskretan sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (14.22) *je stabilan na konačnom vremenskom* intervalu u odnosu na $\left\{\alpha,\ \beta,\ k_0,\ k_N,\ \|(\cdot)\|\right\}$, $\alpha \leq \beta$, ako i samo ako za svaku trajektoriju $\mathbf{x}(k)$ koja zadovoljava početnu funkciju, datu jed (33.2), tako da $\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \alpha$, $k = 0, -1, -2, \cdots, -N$, povlači $\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \beta$, $k \in \mathcal{K}_N$, *Aleksendrić* (2002), *Aleksendrić, Debeljković* (2002), *Debeljković, Aleksendrić* (2003).

Ova *Definicija* je analogna definiciji prezentovanoj, po prvi put, u lit. *Debeljković et al.* (1997.a, 1997.b, 1997.c, 1997.d) i *Nenadic et al.* (1997).

Teoreme stabilnosti

Teorema 14.6 Linearan, vremenski diskretan sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (14.22), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, M, N, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, ako je ispunjen sledeći dovoljan uslov:

$$\|\Phi(k)\| < \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{M} \|A_j\|}, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, N \tag{14.24}$$

$\Phi(k)$ je fundamentalna matrica, *Aleksendric* (2002), *Aleksendric*, *Debeljkovic* (2002), *Debeljkovic*, *Aleksendric* (2003).

Ovaj rezultat je analogan rezultatu koji je, po prvi put, izveden u radu *Debeljkovic et al.* (1997.a) za vremenski kontinualne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Napomena 14.1 Matrična mera se uveliko koristi kada se ispituju kontinualni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem, *Coppel* (1965), *Desoer*, *Vidysagar* (1975).

Priroda diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem omogućava da se koristi ovaj prilaz kao i *Bellman*-ov princip, tako da se ovom problemu može pristupiti sa stanovišta koji se zasniva samo na normama.

Teoreme stabilnosti: Praktična stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu

Teorema 14.7 Sistem, dat jed. (14.22), sa $\det A_1 \neq 0$, je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{k_0, \mathcal{K}_N, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji matrica $P = P^T > 0$, kao rešenje sledeće matrične jednačine:

$$2A_0^T P A_0 - P = -Q \tag{14.25}$$

gde je $Q = Q^T > 0$ i ako su zadovoljeni sledeći uslovi, *Nestorovic et al.* (2011):

$$\| A_1 \| < \sigma_{\min}\left(\left(Q - A_1^T P A_1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\sigma_{\max}^{-1}\left(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P\right) \tag{14.26}$$

$$\bar{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}k}(\ ) < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall k \in K_N \tag{14.27}$$

u kojoj je:

$$\bar{\lambda}_{\max}(\ ) = \max\left\{\mathbf{x}^T(k) A_1^T P A_1 \mathbf{x}(k) : \mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0\, \mathbf{x}(k) = 1\right\} \tag{14.28}$$

Debeljkovic (2011).

Napomena 14.2 Pretpostavka $\det A_1 \neq 0$ ne umanjuje opštost ovog rezultata, s obzirom da ovaj uslov nije krucijalan kada se razmatraju vremenski diskretni sistemi.

Napomena 14.3 Asimptotska stabilnost u smislu Ljapunovljeva i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu su nezavisni koncepti: sistem koji je stabilan na konačnom vremenskom intervalu ne mora biti asimptotski stabilan u smislu Ljapunova, nasuprot tome asimptotski stabilan sistem u smislu Ljapunova nije stabilan na konačnom vremenskom intervalu ako, u toku prelaznih procesa, njegovo kretanje izlazi van specificirane granice (β).

Osobina atraktivnosti je garantovana jed. (14.24) i jed.(14.25), *Debeljković et al.* (2004) a kretanje sistema unutar specificiranih granica je obezbeđeno jed. (33.26).

U nastavku će biti izveden kriterijum stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, nezavistan od kašnjenja, razmatranog sistema, nije potrebno da bude asimptotski stabilan, tako da se redukuje prethodni zahtev da osnovna matrica sistema A_0 bude diskretno stabilna matrica.

Teorema 14.8 Pretpostavlja se da je $\left(I - A_1^T A_1\right) > 0$. Sistem, dat jed. (14.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{k_0, \mathcal{K}_N, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan realan broj p, $p > 1$, tako da:

$$\left\| \mathbf{x}(k-1) \right\|^2 < p^2 \left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N, \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{S}_\beta \tag{14.29}$$

i ako je zadovoljen sledeći uslov, *Nestorovic et al.* (2011):

$$\lambda_{\max}^k(\;) < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N \tag{14.30}$$

gde je:

$$\lambda_{\max}(\;) = \lambda_{\max}\left(A_0^T \left(I - A_1^T A_1\right) A_0 + p^2 I\right) \tag{14.31}$$

Debeljković (2011)

Napomena 14.4 U slučaju kada je A_1 nula matrica i $p = 0$ rezultat, dat jed. (14.31), se svodi na rezultat dat u radu *Debeljkovic* (2001) koji je ranije razvijen za obične vremenski diskretne sisteme.

Teorema 14.9 Pretpostavlja se da je $\left(I - A_1^T A_1\right) > 0$. Sistem, dat jed. (33.1), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{k_0, \mathcal{K}_N, \alpha, \beta, \left\|(\cdot)\right\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan realan broj p, $p > 1$, tako da:

$$\left\|\mathbf{x}(k-1)\right\|^2 < p^2 \left\|\mathbf{x}(k)\right\|^2, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N, \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{S}_\beta \tag{14.32}$$

i ako postoji: realan, pozitivan broj δ, $\delta \in \left]0, \alpha\right[$ i vremenski trenutak k, $k = k^* : \exists!\left(k^* > k_0\right) \in \mathcal{K}_N$ za koje je ispunjen sledeći uslov:

$$\lambda_{\min}^{k^*} > \frac{\beta}{\delta}, \quad k^* \in \mathcal{K}_N \tag{14.33}$$

Debeljković (2011)

Literatura

Aleksendric, M., *On stability of particular class of continual and discrete time delay systems on finite and infinite time interval*, Diploma Work, School of Mechanical Eng., University of Belgrade, Department of Control Eng., Belgrade, 2002.

Aleksendric, M., D. Lj. Debeljkovic, "Finite time stability of linear discrete time delayed systems", *Proc.* HIPNEF 2002, Nis (Serbia), October, 2–5, (2002) 333–340.

Amir–Moez, A., "Extreme properties of a hermitian transformations and singular values of sum and product of linear transformations", *Duke Math J.*, 23, (1956) 463–476.

Angelo, H., *Linear time varying systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

Coppel, W. A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Boston D. C. Heath, 1965.

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic, I – Tech, Vienna, 2011.

Debeljkovic, D. Lj., "On practical stabilty of discrete time control systems", *Proc.* 3rd *International Conference on Control and Applications*, Pretoria (South Africa), December (2001) 197–201.

Debeljkovic, Lj. D., S. A. Milinkovic, *Finite Time Stabilty of Time Delay Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1999.

Debeljkovic, D. Lj., M. Aleksendric, "Lyapunov and non–Lyapunov stability of linear discrete time delay systems", *Proc. ACC*, 4–7 June 2003, Denver USA, (2003.a) 4450–4451.

Debeljkovic, D. Lj., M. Aleksendric, Y. Y. Nie, Q. L. Zhang, "Lyapunov and non–Lyapunov stability of linear discrete time delay systems", *Proc. The Fourth Inter. Conference on Control and Automation,* 9–12 June 2003, Montreal (Canada), (2003.b) 296–300.

Debeljkovic, D. Lj., Stojanovic S. B., "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Large Scale Time Delay Autonomous System", *7th Biennial ASME Conference Eng. Systems Design and Analysis*, *ESDA* 2004, Manchester, UK, July 19–22, (2004.a) CD–Rom.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, "A Short Note to the Lyapunov Stabilty of $\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1)$ New Results", *Proc. CSCSC* 04 Shenyang (China), Avgust 08–10, (2004.b) 11–14.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. P. Lazarevic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, "Discrete time delayed system stability theory in the sense of Lyapunov application to the chemical engineering and process technology", *Proc.* CHISA 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, (2004.c) CD–Rom.

Debeljkovic, Lj. D., M. P. Lazarevic, S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, "Discrete Time Delayed System Stabilty Theory in the sense of Lyapunov: New Results", *Proc. ISIC* 04 (*International Symposium on Intelligent Control*), September 01–04, Taipei (Taiwan), (2004) 511–515.

Debeljkovic, Lj. D., A. Jacic, M. Medenica, *Time Delay Systems Stability and Robustness,* Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, 2005.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, "Discrete time delayed system stability theory in the sense of Lyapunov: New results", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 12, Series B Numerical. Analysis, Vol. 12.b–Suppl., (2005.a) 433–442.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, *Systems, Structure and Control*–Editior Petr Husek,–Chapter *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems Delay Dependent Approach*, (2008) 029–060, I–Tech, Vienna.

Desoer, C. A., M. Vidysagar, *Feedback Systems Input–Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

Fang, H. H., H. J. Hunsarg, “Stabilization of nonlinear singularly perturbed multiple time delay systems by dither”, *Journal of Dynamic Systems*, *Measurements and Control*, March, Vol. 118, (1996) 177–181.

Lee, T. N., S. Diant, “Stability of time delay systems”, *IEEE Trans. Automat. Control* AC–26 (4), (1981) 951–953.

Mao, X., “Comments on ”Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 42 (3), (1997) 429–430.

Pjescic, R. M., V. Chistyakov, D. Lj. Debeljkovic, *On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness***,** Faculty of Mechanical Engineering Belgrade, 2008, Belgrade

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “The sufficient conditions for stability of continuous and discrete large–scale time delay interval systems, *Internat. Journal of Infor. & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 1, (2005.a) 61–74.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “On the asymptotic stability of linear discrete time delay autonomous systems”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 3–4, (2005.b) 413–420.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Comments on stability of time–delay systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.* (2006), (*submitted*).

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Further results on asymptotic stability of linear discrete time delay autonomous systems”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, (2006.a) 117–123.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Exponential stability of discrete time delay systems with nonlinear perturbations”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 3, (2006.b) 428–435.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Delay–dependent stability of linear discrete large scale time delay systems necessary and sufficient conditions”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 4(2), (2008.a) 241–250.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Necessary and sufficient conditions for delay–dependent asymptotic stability of linear discrete time delay autonomous systems”, *Proc.* of 17*th* IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 6–10, (2008.b) 2613–2618, Stojanovic, S. B.,D. Lj. Debeljkovic, “Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete–time systems with state delay: A LMI approach”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series B: Applications and Algorithms, No. 2, (2008) 195–206

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Necessary and sufficient conditions for delay–dependent asymptotic stability of linear discrete time delay autonomous systems”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series B: Applications and Algorithms , Vol. 16, No.6, (2009), 887–900.

Su, J. H., “Further results on the robust stability of linear systems with single time delay”, *Systems & Control Letters* (23), (1994) 375–379.

Su, J. H., C. G. Huang, “Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems”, *IEEE Trans. Automat. Control* AC–37 (10), (1992) 1656–1659.

Syrmos, V. L., P. Misra, R. Aripirala, “On the discrete generalized Lyapunov equation”, *Automatica*, 31(2), (1995) 297–301.

Tissir, E., A. Hmamed, (1996) “Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$”, *Automatica*, 32 (12), 1723–1726.

Xu, B., Y. Liu, “Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications”, *IEEE Trans. Automat. Control* AC–39 (4), (1994) 839–841.

Wang, W., L. Mau, “Stabilization and estimation for perturbed discrete time–delay large–scale systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.,* 42(9), (1997) 1277–1282,

15. KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

15.1 Stabilnost u smislu Ljapunova

Razmatra se linearni vremenski kontinualni singularni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju, opisan sledećom jednačinom:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\,\mathbf{x}(t) + A_1\,\mathbf{x}(t-\tau) \tag{15.1}$$

sa poznatom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \le t \le 0 \tag{15.2}$$

pri čemu su A_0 i A_1 konstantne matrice odgovarajućih dimenzija.

Čisto vremensko kašnjenje je konstantno, t.j. $\tau \in \mathbb{R}_+$. Osim toga pretpostavlja se da je $rank\, E = r < n$.

Definicija 15.1 Matrični par $(E,\ A_0)$ je *regularan* ako $\det(s\,E - A_0)$ nije identički jednaka nuli, *Xu et al*. (2002.a).

Definicija 15.2 Matrični par $(E,\ A_0)$ je *neimpulsan* ako je $\deg\ \det(s\,E - A) = \mathrm{rank}\,E$, *Xu et al*. (2002.a).

Linearan, vremenski kontinualan, singularan sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.1), može imati impulsno rešenje, međutim, regularnost i neimpulsnost matričnog para $(E,\ A_0)$ omogućava postojanje i jedinstvenost neimpulsnog rešenja razmatranog sistema, što je definisano sledećom *Lemom*.

Lema 15.1 Pretpostavlja se da je matrični par $(E,\ A_0)$ *regularan*, *neimpulsan* i *jedinstven* na intervalu $[0,\ \infty[$, *Xu et al.* (2002).

Neophodnost za ispitivanjem stabilnosti sistema dovodi do potrebe za uvođenjem odgovarajuće definicije stabilnosti.

Definicija 15.3 Linearan, vremenski kontinualan, singularan sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.1), je *regularan* i *neimpulsan* ako je matrični par $\left(E,\ A_0\right)$ regularan i neimpulsan, *Xu et al.* (2002.a).

Definicije stabilnosti

Definicija 15.4 Ako $\forall t_0 \in T$ i $\forall \varepsilon > 0$, uvek postoji $\delta\left(t_0, \varepsilon\right)$, tako da $\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{S}_\delta\left(0, \delta\right) \cap \mathbb{S}\left(t_0,\ t^*\right)$, rešenje $\mathbf{x}\left(t,\ t_0,\ \boldsymbol{\varphi}\right)$ jed. (15.1) zadovoljava uslov $\left\| \mathbf{q}\left(t, \mathbf{x}\left(t\right)\right) \right\| \le \varepsilon$, $\forall t \in \left(t_0,\ t^*\right)$, tada je nulto rešenje jed. (15.1) *stabilno* na $\left\{ \mathbf{q}\left(t, \mathbf{x}\left(t\right)\right),\ T \right\}$, gde je $T = \left[0,\ +t^*\right]$, $0 < t^* \le +\infty$ i $\mathbb{S}_\delta\left(0, \delta\right) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}\left(\left[-\tau,\ 0\right], \mathbb{R}^n\right),\ \left\| \boldsymbol{\varphi} \right\| < \delta,\ 0 < \delta \right\}$. $\mathbb{S}_*\left(t_0,\ t^*\right)$ je skup svih konzistentnih početnih funkcija i za $\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{S}_*\left(t_0,\ t^*\right)$, postoji neprekidno rešenje jed. (15.1) na intervalu $\left[t_0 - \tau,\ t^*\right)$ kroz najmanje jedno $\left(t_0,\ \boldsymbol{\varphi}\right)$, *Li*, *Liu* (1997, 1998).

Definicija 15.5 Ako je δ isključivo funkcija ε i ne zavisi od t_0, tada je nulto rešenje *ravnomerno stabilno* na intervalu $\left\{ \mathbf{q}\left(t, \mathbf{x}\left(t\right)\right),\ T \right\}$, *Li*, *Liu* (1997, 1998).

Definicija 15.6 Linearan, vremenski kontinualan, singularan sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.1), je *stabilan* ako za bilo koje $\varepsilon > 0$ postoji skalar $\delta\left(\varepsilon\right) > 0$ tako da, za bilo koju kompatibilnu početnu funkciju $\boldsymbol{\varphi}\left(t\right)$, koja zadovoljava uslov: $\sup\limits_{-\tau \le t \le 0} \left\| \boldsymbol{\varphi}\left(t\right) \right\| \le \delta\left(\varepsilon\right)$, rešenje $\mathbf{x}\left(t\right)$ sistema, datog jed. (15.2), zadovoljava uslov $\left\| \mathbf{x}\left(t\right) \right\| \le \varepsilon,\ \forall t \ge 0$.

Osim toga, ako $\lim\limits_{t \to \infty} \left\| \mathbf{x}\left(t\right) \right\| \to 0$, sistem je *asimptotski stabilan*, *Xu et al.* (2002.a).

Teoreme stabilnosti

Teorema 15.1 Pretpostavlja se da je matrični par (E, A_0) regularan, a matrica sistema A_0 nesingularna, t.j. $\det A_0 \neq 0$. Sistem, dat jed. (15.1) je *asimptotski stabilan*, nezavisno od čistog vremenskog kašnjenja, ako postoji simetrična pozitivno određena matrica $P = P^T > 0$, kao rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$A_0^T P E + E^T P A_0 = -2(S+Q) \tag{15.3}$$

sa matricama $Q = Q^T > 0$ i $S = S^T$, tako da je:

$$\mathbf{x}^T(t)(S+Q)\mathbf{x}(t) > 0, \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_{k^*} \setminus \{0\} \tag{15.4}$$

pozitivno određena kvadratna forma na $\mathcal{W}_{k^*} \setminus \{0\}$, $\mathcal{W}_{k^*}$ je potprostor konzistentnih početnih uslova, i ako je zadovoljena sledeći uslov:

$$\| A_1 \| < \sigma_{\min}\left(Q^{\frac{1}{2}}\right)\sigma_{\max}^{-1}\left(Q^{-\frac{1}{2}} E^T P\right) \tag{15.5}$$

$\sigma_{\max}(\cdot)$ i $\sigma_{\min}(\cdot)$ su maksimalna i minimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$, sledstveno, *Debeljkovic et al.* (2003, 2004.c, 2006, 2007).

Napomena 15.1 Jed. (15.3–15.4) su, u modifikovanoj formi, uzete iz *Owens*, *Debeljkovic* (1985).

Napomena 15.2 Ako je razmatrani sistem običan (klasičan, normalan) sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, t.j. $E = I$, dobijaju su rezultati identični rezultatima prezentovanim u radu *Tissir*, *Hmamed* (1996).

Napomena 15.3 Razmatra se prvi slučaj kada čisto vremensko kašnjenje nije prisutno.Tada je singularna (slaba) Ljapunovljeva matrična jednačina, data jed. (15.3), prirodna generalizacija klasične Ljapunovljeve teorije.

U posebnom slučaju:

a) Ako je *E nesingularna matrica*, tada je sistem *asimptotski stabilan* ako i samo ako je $A = E^{-1} A_0$ *Hurwitz–ova* matrica. Jed. (15.3) se može napisati u sledećem obliku:

$$A^T E^T P E + E^T P E A = -(Q+S) \tag{15.6}$$

gde je Q simetrična i pozitivno određena matrica, na celom prostoru stanja, s obzirom da je tada $\mathcal{W}_{k^*} = \Re\left(E^{k^*}\right) = \mathbb{R}^n$. U tom slučaju $E^T P E$ je Ljapunovljeva funkcija sistema.

b) Matrica A_0 je nesingularna i prema tome sistem ima formu:

$$E_0 \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{15.7}$$

Tada, da bi ovaj sistem bio stabilan, mora takođe da važi jed. (15.7) i da ima poznatu Ljapunovljevu strukturu:

$$E_0^T P + P E_0 = -Q \tag{15.8}$$

gde je Q simetrična matrica, ali se samo zahteva da bude pozitivno određena na $\mathcal{W}_{k^*}$.

Napomena 15.4 Nije potrebno da razmatrani sistem poseduje osobine date u *Definiciji* 15.2, s obzirom da je ovo očigledno garantovano zahtevom da sva glatka rešenja $\mathbf{x}(t)$ ostaju u $\mathcal{W}_{k^*}$.

Napomena 15.5 Ideja i prilaz se baziraju na radovima *Owens, Debeljkovic* (1985) i *Tissir, Hmamed* (1996).

Teorema 15.2 Pretpostavlja se da je matrica sistema A_0 nesingularna, t.j. $\det A_0 \neq 0$. Tada se može razmatrati sistem, dat jed. (15.1) sa poznatom funkcijom početnih uslova i pretpostavlja se da je $\mathit{rank}\, E_0 = r < n$.

Matrica E_0 je definisana na sledeći način: $E_0 = A_0^{-1} E$. Sistem, dat jed. (15.1) je *asimptotski stabilan*, nezavisno od čisto vremenskog kašnjenja, ako je:

$$\| A_1 \| < \sigma_{\min}\left(Q^{\frac{1}{2}}\right) \sigma_{\max}^{-1}\left(Q^{-\frac{1}{2}} E_0^T P\right) \tag{15.9}$$

i ako postoji $(n \times n)$ matrica P, koja je rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$E_0^T P + P E_0 = -2 I_{\mathcal{W}_k} \tag{15.10}$$

sa osobinama datim jed. (15.19–15.21). Osim toga P je simetrična i pozitivno određena matrica na potprostoru konzistentnih početnih uslova. $\sigma_{\max}(\cdot)$ i $\sigma_{\min}(\cdot)$ su maksimalna i minimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$, sledstveno, *Debeljkovic et al.* (2005.b, 2005.c, 2006.a).

Napomena 15.6 Osnovna ideja i prilaz se zasnivaju na radovima *Pandolfi* (1980) i *Tissir*, *Hmamed* (1996).

15.2 Neljapunovska stabilnost

15.2.1 Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu

Definicija 15.7 Regularan i neimpulsan singularan sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{t_0, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta\}$, ako i samo ako $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_k^*$ koje zadovoljava uslov $\|\mathbf{x}(t_0)\|_{E^T E}^2 = \|\mathbf{x}_0\|_{E^T E}^2 < \alpha$, sledi $\|\mathbf{x}(t)\|_{E^T E}^2 < \beta$, $\forall t \in \Im$, gde je $\mathcal{W}_k^*$ potprostor konzistentnih početnih uslova.

Napomena 15.7 Singularnost matrice E će obezbediti da rešenja jed. (15.1) postoje samo za specijalan izbor $\mathbf{x}_0$.

U radu *Owens*, *Debeljković* (1985) pokazano je da je $\mathcal{W}_k^*$ potprostor konzistentnih početnih uslova limes ugnježdenog algoritma potprostora:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{k,0}^* &= \mathbb{R}^n \\ &\vdots \\ \mathcal{W}_{k,(j+1)}^* &= A_0^{-1}\left(E\,\mathcal{W}_{k,(j)}^*\right)_{A_1=0}, \quad j \geq 0 \end{aligned} \tag{15.11}$$

Osim toga, ako $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_k^*$ tada $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_k^*$, $\forall t \geq 0$ i $\left(\lambda E - A_0\right)_{A_1=0}$ je invertibilna za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ (uslov za jedinstvenost), tada $\mathcal{W}_k^* \cap \aleph(E) = \{0\}$.

Teorema 15.3 Pretpostavlja se da je $\left(I - E^T E\right) > 0$. Singularni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.1) je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{t_0, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan realan broj q, $q > 1$, *Owens*, *Debeljković* (1985), tako da:

$$\left\|\mathbf{x}(t+\vartheta)\right\|^2 < q^2 \left\|\mathbf{x}(t)\right\|^2, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \forall t \in \Im, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_k^*, \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}_\beta \tag{15.12}$$

i ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\bar{\lambda}_{\max}(\Xi)(t-t_0)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im \tag{15.13}$$

sa:

$$\bar{\lambda}_{\max}(\Xi) = \bar{\lambda}_{\max} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T E + E^T A_0 + E^T A_1 \left(I - E^T E\right)^{-1} A_1^T E + q^2 I\right)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_k^*, \quad \mathbf{x}^T(t) E^T E \, \mathbf{x}(t) = 1 \end{pmatrix} \tag{15.14}$$

Debeljković (2011).

Napomena 15.8 U slučaju sistema bez prisustva čisto vremenskog kašnjenjam, t.j. $A_1 \equiv 0$ i $q = 0$, nejed. (15.9) i jed. (15.10) se mogu svesti na osnovni rezultat dat u radu *Debeljković*, *Owens* (1985).

15.2.2 **Praktična stabilnost**

Definicija 15.7 Regularan i neimpulsan singularan sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.1), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{t_0, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta\right\}$, ako i samo ako $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_k^*$ koje zadovoljava uslov $\left\|\mathbf{x}(t_0)\right\|_{G=E^T PE}^2 = \left\|\mathbf{x}_0\right\|_{G=E^T PE}^2 < \alpha$, sledi

$\left\|\mathbf{x}(t)\right\|^2_{G=E^TPE} < \beta, \quad \forall t \in \Im$, sa sledećom osobinom $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\mathbf{x}(t)\right\|^2_{G=E^TPE} \to 0$, gde je $\mathcal{W}_k^*$ je potprostor konzistentnih početnih uslova.

Teorema 15.4 Pretpostavlja se da je $\left(Q - E^T PE\right) > 0$. Singularan sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.1), sa nesingularnom matricom A_0, je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{t_0, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta, \left\|(\,\cdot\,)\right\|^2_{G=E^TPE}\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji matrica $P = P^T > 0$ kao rešenje sledeće matrične jednačine:

$$A_0^T P E + E^T P A_0 = -Q \tag{15.15}$$

sa matricama $Q = Q^T > 0$ i $S = S^T$ tako da je:

$$\mathbf{x}^T(t)\left(S + Q\right)\mathbf{x}(t) > 0, \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_k^* \backslash \{0\} \tag{15.16}$$

pozitivno određena kvadratna forma na $\mathcal{W}_k^* \backslash \{0\}$.

$\mathcal{W}_k^*$ je potprostor konzistentnih početnih uslova, ako postoji pozitivan realan broj q, $q > 1$, *Owens*, *Debeljković* (1985), tako da:

$$\left\|\mathbf{x}(t-\tau)\right\|^2_{E^TPE} < q^2 \left\|\mathbf{x}(t)\right\|^2_{E^TPE}, \quad \forall t \in \Im,\ \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{S}_\beta,\ \forall \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_k^* \backslash \{0\} \tag{15.17}$$

i ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\left\|A_1\right\| < \sigma_{\min}\left(Q^{\frac{1}{2}}\right)\sigma^{-1}_{\max}\left(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P\right) \tag{15.18}$$

i:

$$e^{\bar{\lambda}_{\max}(\Psi)(t-t_0)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im \tag{15.19}$$

gde je:

$$\bar{\lambda}_{\max}(\Psi) = \max\begin{pmatrix} \mathbf{x}^T(t)\left(E^T P A_1 \left(Q - E^T P E\right)^{-1} A_1^T P E + q^2 Q\right)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_k^*, \quad \mathbf{x}^T(t) E^T P E\,\mathbf{x}(t) = 1 \end{pmatrix} \tag{15.20}$$

Debeljković (2011).

Napomena 15.9 Asimptotska stabilnost sistema datog jed. (15.1) je garantovana jed. (15.15) i nejed. (15.18) na osnovu uslova prezentovanih u lit. *Owens*, *Debeljković* (1985) i *Debeljković et al.* (2007).

Literatura

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic, I–Tech, Vienna, 2011.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. S. Višnjić, S. A. Milinković, "Singular Time Delayed System Stability Theory in the sense of Lyapunov: A Quite New Approach", IEEE Proc. American Control Conference, New York, USA, July 11–13, (2007) 493–494.

Debeljković, D. Lj., N. S. Višnjić, M. Pjescić, "The Stability of Linear Continuous Singular Systems over the Finite Time Interval: An Overview", International Journal of Information & System Science, Vol. 4, No. 4, (2008) 560–584.

Owens, D. H., D. Lj. Debeljković, "Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems: a Geometric Analysis", IMA Journal of Math. Control and Information, No.2, (1985) 139–1534.

Shen, Y., W. Shen, "Finite–Time Control of Linear Singular Systems with Parametric Uncertainties and Disturbances", *Automatic*a, (2006).

Su, J. H., "Further results on the robust stability of linear systems with single time delay", *Systems & Contro Letters* (23), (1994) 375–379.

Xu, S., P. V. Dooren, R. Stefan, J. Lam, "Robust Stability and Stabilization for Singular Systems with State Delay and Parameter Uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–47 (7), (2002) 1122–1128.

Yang, C. Y., Q. L. Zhang, L. Zhou, "Practical Stabilization and Controlability of Descriptor Systems", *International Journal of Inforamation and System Science*, Vol. 1, No. 3–4, (2005) 455–466.

Yang, C. Y., Q. L. Zhang, Y. P. Lin, "Practical Stability of Descriptor Systems", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, Series B: 12.b–Supplement, (2005) 44–57.

Yang, C., Q. Zhang, Y. Lin, L. Zhou, “Practical stability of descriptor systems with time–delay in terms of two measurements”, J. of the Franklin Institute, (2006) 635–646.

16. DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

16.1 Stabilnost u smislu ljapunova

Razmatra se linearan, vremenski diskretan, deskriptivan sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju, opisan sa:

$$E\,\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-1) \tag{16.1}$$

$$\mathbf{x}(k_0) = \boldsymbol{\varphi}(k_0), \quad -1 \le k_0 \le 0 \tag{16.2}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja. Matrica $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je obavezno singularna matrica, sa osobinom $rank\,E = r < n$ i sa matricama A_0 i A_1 odgovarajućih dimenzija.

Za sistem, dat jed. (16.1), prezentuju se sledeće definicije, preuzete iz rada *Xu et al.* (2003 16.b).

Definicija 16.1 sistem je *regularan* ako $\det\left(z^2 E - z\,A_0 - A_1\right)$, nije identički jednaka nuli.

Definicija 16.2 sistem je *kauzalan* ako je *regularan* i ako je $\deg\left(z^n \det\left(z\,E - A_0 - z^{-1} A_1\right)\right) = n + rang\,E$.

Definicija 16.3 sistem je *stabilan* ako je *regularan* i ako je $\rho\,\left(E, A_0, A_1\right) \subset D(0,1)$, gde je $\rho\left(E, A_0, A_1\right) = \left\{z \mid \det\left(z^2 E - z\,A_0 - A_1\right) = 0\right\}$.

Definicija 16.4 sistem je *prihvatljiv* ako je *regularan*, *kauzalan* i *stabilan*.

Definicije stabilnosti

Definicija 16.5 Sistem, dat jed. (16.1) je E–stabilan ako za bilo koje $\varepsilon > 0$, uvek postoji pozitivno δ tako da je $\left\| E\,\mathbf{x}(k) \right\| < \varepsilon$, kada je $\left\| E\,\mathbf{x}_0 \right\| < \delta$, *Liang* (2000).

Definicija 16.6 Sistem, dat jed. (16.1) je E– asimptotski stabilan ako je sistem, dat jed. (16.1) E– stabilan i ako $\lim\limits_{k \to +\infty} E\,\mathbf{x}(k) \to \mathbf{0}$, *Liang* (2000).

Teoreme stabilnosti

Teorema 16.1 Pretpostavlja se da je sistem, dat jed. (16.1) *regularan* i *kauzalan* pri čemu je matrica sistema A_0 nesingularna, t.j. $\det A_0 \neq 0$. Sistem, dat jed. (16.1) je *asimptotski stabilan*, nezavisno od čisto vremenskog kašnjenja, ako je:

$$\left\| A_1 \right\| < \frac{\sigma_{\min}\left(Q^{\frac{1}{2}} \right)}{\sigma_{\max}\left(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T\, P \right)} \tag{16.3}$$

i ako postoji simetrična pozitivno određena matrica P na celom prostoru stanja, koja je rešenje sledeće diskretne Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$A_0^T\, P\, A_0 - E^T P\, E = -2\left(S + Q \right) \tag{16.4}$$

sa matricama $Q = Q^T > 0$ i $S = S^T$, tako da je:

$$\mathbf{x}^T(k)\left(S + Q \right)\mathbf{x}(k) > 0, \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}_{d,k^*} \setminus \{0\} \tag{16.5}$$

pozitivno određena kvadratna forma na $\mathcal{W}_{d,k^*} \setminus \{0\}$, $\mathcal{W}_{d,k^*}$ je potprostor konzistentnih početnih uslova. $\sigma_{\max}(\cdot)$ i $\sigma_{\min}(\cdot)$ su maksimalna i minimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$, sledstveno, *Debeljković et al.* (2004).

Napomena 16.1 Jed. (16.4–16.5) su, u modifikovanoj formi, uzete iz rada *Owens*, *Debeljkovic* (1985).

Napomena 16.2 Ako je razmatrani sistem običan sistem sa čistim vremenskom kašnjenjem, t.j. $E = I$, dobija se rezultat identičan rezultatima prezentovanim u lit. *Debeljkovic et al.* (2004.a–2004.d, 2005.a, 2005.b).

Napomena 16.3 Ideja i prilaz se baziraju na radovima *Owens*, *Debeljkovic* (1985) i *Tissir*, *Hmamed* (1996).

Teorema 16.2 Pretpostavlja se da je sistem, dat jed. (16.1) *regularan* i *kauzalan.* Osim toga, pretpostavlja se da je matrica $\left(Q_\lambda - A_1^T P_\lambda A_1\right)$ regularna, pri čemu je $Q_\lambda = Q_\lambda^T > 0$. Sistem, dat jed. (16.1) je *asimptotski stabilan*, nezavisno od čistog vremenskog kašnjenja, ako je:

$$\left\| A_1 \right\| < \frac{\sigma_{\min}\left(\left(Q_\lambda - A_1^T P_\lambda A_1\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\sigma_{\max}\left(Q_\lambda^{-\frac{1}{2}}\left(A_0 - \lambda E\right)^T P_\lambda\right)} \tag{16.6}$$

i ako postoji pozitivan realan skalar $\lambda^* > 0$ tako da za sve λ u opsegu $0 < \left|\lambda\right| < \lambda^*$ postoji simetrična pozitivno određena matrica P_λ, koja je rešenje sledeće diskretne Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$\left(A_0 - \lambda E\right)^T P_\lambda \left(A_0 - \lambda E\right) - E^T P_\lambda E = -2\left(S_\lambda + Q_\lambda\right) \tag{16.7}$$

u kojoj je matrica $S_\lambda = S_\lambda^T$, tako da je:

$$\mathbf{x}^T(k)\left(S_\lambda + Q_\lambda\right)\mathbf{x}(k) > 0, \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}_{d,k^*} \setminus \{0\} \tag{16.8}$$

pozitivno određena kvadratna forma na $\mathcal{W}_{d,k^*} \setminus \{0\}$, $\mathcal{W}_{d,k^*}$ je potprostor konzistentnih početnih uslova i za vremenski diskretan, deskriptivan sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i za vremenski diskretan, deskriptivan sistema bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja.

Ovakvi uslovi nazvaće se *kompatibilni, konzistentni početni uslovi*. $\sigma_{\max}(\cdot)$ i $\sigma_{\min}(\cdot)$ su maksimalna i minimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$ sledstveno, *Debeljkovic et al.* (2007).

16.2 Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu

Definicije stabilnosti

Definicija 16.7 *Kauzalan* sistem, dat jed. (16.1), je *stabilan* na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{k_0, \mathcal{K}_N, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta\}$, ako i samo ako $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_{d,k^*}$ koje zadovoljava $\|\mathbf{x}_0\|^2_{E^T E} < \alpha$, sledi: $\|\mathbf{x}(k)\|^2_{E^T E} < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N$.

Definicija 16.8 *Kauzalan* sistem, dat jed. (16.1), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{k_0, \mathcal{K}_N, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako i samo ako $\exists \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_{d,k^*}$ tako da je $\|\mathbf{x}_0\|^2_{E^T E} < \alpha$, postoji neko $k^* \in K_N$, tako da je ispunjen sledeći uslov $\left\|\mathbf{x}\left(k^*\right)\right\|^2_{E^T E} \geq \beta$, za neko $k^* \in \mathcal{K}_N$.

Definicija 16.9 *Kauzalan* sistem, dat jed. (16.1), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\{k_0, \mathcal{K}_N, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta\}$, ako i samo ako $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_{d,k^*}$ koje zadovoljava $\|\mathbf{x}(k_0)\|^2_{G=E^T P E} = \|\mathbf{x}_0\|^2_{G=E^T P E} < \alpha$, sledi $\|\mathbf{x}(k)\|^2_{G=E^T P E} < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N$, sa osobinim da $\lim\limits_{k \to \infty} \|\mathbf{x}(k)\|^2_{G=E^T P E} \to 0$, *Debeljkovic* (2011).

Napomena 16.4 Potrebne su sledeće definicije najmanje i najveće sopstvene vrednosti, sledstveno, matrice $R = R^T$, u odnosu na potprostor konzistentnih početnih uslova $\mathcal{W}_{d,k^*}$ i matrice G.

Pretpostavka 16.1 Ako je $\mathbf{x}^T(k) R\, \mathbf{x}(k)$ kvadratna forma na $\mathbb{R}^n$, tada sledi da postoje brojevi $\lambda_{\min}(R)$ i $\lambda_{\max}(R)$ koji zadovoljavaju: $-\infty \leq \lambda_{\min}(R) \leq \lambda_{\max}(R) \leq +\infty$, tako da je:

$$\lambda_{\min}(\Xi) \leq \frac{\mathbf{x}^T(k) R\, \mathbf{x}(k)}{\mathbf{x}^T(k) G\, \mathbf{x}(k)} \leq \lambda_{\max}(\Xi), \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}_{d,k^*} \setminus \{0\} \tag{16.9}$$

gde je matrica $R = R^T$, a odgovarajuće sopstvene vrednosti:

$$\lambda_{\min}\left(R,G,\mathcal{W}_{d,k^*}\right)=\min\left\{\mathbf{x}^T(k)R\,\mathbf{x}(k):\ \mathbf{x}(k)\in\mathcal{W}_{d,k^*}\setminus\{0\},\ \mathbf{x}^T(k)G\,\mathbf{x}(k)=1\right\}\tag{16.10}$$

$$\lambda_{\max}\left(R,G,\mathcal{W}_{d,k^*}\right)=\max\left\{\mathbf{x}^T(k)R\,\mathbf{x}(k):\ \mathbf{x}(k)\in\mathcal{W}_{d,k^*}\setminus\{0\},\ \mathbf{x}^T(k)G\,\mathbf{x}(k)=1\right\}\tag{16.11}$$

Valja uočiti da je $\lambda_{\min}>0$ ako je $R=R^T>0$.

Razmatra se slučaj kada se poklapaju potprostori konzistentnih početnih uslova za vremenski diskretne deskriptivne sisteme *sa čistim vremenskim kašnjenjem* i vremenski diskretne deskriptivne sisteme *bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja.*

Teoreme stabilnosti

Teorema 16.3 Pretpostavlja se da je matrica $\left(A_1^TA_1-E^TE\right)>0$. *Kauzalan* sistem, dat jed. (16.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{k_0,\mathcal{K}_N,\alpha,\beta,\|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha<\beta$, ako postoji pozitivan realan broj p, $p>1$, tako da:

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}(k-1)\|^2_{A_1^TA_1}<p^2\|\mathbf{x}(k)\|^2_{A_1^TA_1}\\ \forall k\in K_N,\ \forall\mathbf{x}(k)\in S_\beta,\ \forall\mathbf{x}(k)\in\mathcal{W}^*_{d,k}\setminus\{0\}\end{gathered}\tag{16.12}$$

i ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\bar{\lambda}^k_{\max}(\ )<\frac{\beta}{\alpha},\quad \forall k\in K_N\tag{16.13}$$

gde je:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{\max}(\ )=\bar{\lambda}_{\max}&\left\{\mathbf{x}^T(k)A_0^T\left(I-A_1\left(A_1^TA_1-E^TE\right)^{-1}A_1^T\right.\right.\\ &\left.\left.+p^2A_1^TA_1\right)A_0\,\mathbf{x}(k),\quad \mathbf{x}(k)\in\mathcal{W}_{d,k^*},\quad \mathbf{x}^T(k)E^TE\,\mathbf{x}(k)=1\right\}\end{aligned}\tag{16.14}$$

Debeljkovic(2011).

Teorema 16.4 Pretpostavlja se da je matrica $\left(A_1^TA_1-E^TE\right)>0$. *Kauzalan* sistem, dat jed. (16.1), je *nestabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{k_0,\mathcal{K}_N,\alpha,\beta,\|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha<\beta$, ako postoji pozitivan realan broj p, $p>1$, tako da je:

$$\left\| \mathbf{x}(k-1) \right\|^2_{A_1^T A_1} < p^2 \left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_1^T A_1}$$
$$\forall k \in \mathcal{K}_N, \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{S}_\beta, \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}^*_{d,k} \backslash \{0\} \tag{16.15}$$

i ako za $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_{d,k^*}$ i $\|\mathbf{x}_0\|^2_{G=E^T E} < \alpha$ postoji realan, pozitivan broj δ, $\delta \in \left]0, \alpha\right[$ i vremenski trenutak k, $k = k^* : \exists!\left(k^* > k_0\right) \in \mathcal{K}_N$, za koji je ispunjen sledeći uslov,

$$\bar{\lambda}^{k^*}_{\min}(\ ) > \frac{\beta}{\delta}, \quad k^* \in \mathcal{K}_N \tag{16.16}$$

gde je:

$$\bar{\lambda}_{\min}(\ ) = \bar{\lambda}_{\min}\Big\{\mathbf{x}^T(k) A_0^T \Big(I - A_1\left(A_1^T A_1 - E^T E\right)^{-1} A_1^T + 2\wp(k) I\Big) A_0 \mathbf{x}(k)$$
$$\mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}^d_{k^*}, \quad \mathbf{x}^T(k) E^T E \mathbf{x}(k) = 1\Big\} \tag{16.17}$$

Debeljkovic (2011)

Teorema 16.5 Pretpostavlja se da je matrica $\left(A_1^T P A_1 - E^T P E\right) > 0$. *Kauzalan* sistem, dat jed. (16.1), sa $\det A_0 \neq 0$, je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{k_0, \mathcal{K}_N, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji matrica $P = P^T > 0$, koja je rešenje sledeće jednačine:

$$A_0^T P A_0 - E^T P E = -2(Q + S) \tag{16.18}$$

sa matricama $Q = Q^T > 0$ i $S = S^T$, tako da je:

$$\mathbf{x}^T(k)(Q + S)\mathbf{x}(k) > 0, \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}_{d,k^*} \backslash \{0\} \tag{16.19}$$

pozitivno određena kvadratna forma na $\mathcal{W}_{d,k^*} \backslash \{0\}$, p je realan broj, $p > 1$, tako da je:

$$\left\| \mathbf{x}(k-1) \right\|^2_{A_1^T P A_1} < p^2 \left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_1^T P A_1}$$
$$\forall k \in \mathcal{K}_N, \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{S}_\beta, \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}^*_{k,d} \backslash \{0\} \tag{16.20}$$

i ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\| A_1 \| < \sigma_{\min}\left(Q^{\frac{1}{2}}\right) \sigma^{-1}_{\max}\left(Q^{-\frac{1}{2}} E^T P\right) \tag{16.21}$$

i:

$$\bar{\lambda}_{\max}^{k}(\ ) < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N \tag{16.22}$$

gde je:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{\max}(\ ) = \max\Big\{ & \mathbf{x}^T(k) A_0^T P^{\frac{1}{2}} \left(I - A_1 \left(A_1^T P A_1 - E^T P E \right)^{-1} A_1^T + p^2 I \right) P^{\frac{1}{2}} A_0 \,\mathbf{x}(k) : \\ & \mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}_{d,k^*}, \quad \mathbf{x}^T(k) E^T P E \,\mathbf{x}(k) = 1 \Big\}\end{aligned} \tag{16.23}$$

Debeljkovic (2011).

Napomena 16.5 Izrazi (16.18–16.19) su, u modifikovanoj formi, uzeti iz rada *Owens*, *Debeljkovic* (1985).

Literatura

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic, I–Tech, Vienna, 2011.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, “Descriptor Time Delayed System Stability Theory in the sense of Lyapunov New Results”, Facta Universitatis, Ser. Mech. Eng, Vol. 1, No. 10, (2003.c) 1311–1315.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. P. Lazarevic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, “Discrete time delayed system stability theory in the sense of Lyapunov application to the chemical engineering and process technology”, *Proc.* CHISA 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, CD–Rom, (2004.c).

Debeljkovic, Lj. D., M. P. Lazarevic, S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, “Discrete Time Delayed System Stabilty Theory in the sense of Lyapunov: New Results”, *Proc. ISIC* 04 (International Symposium on Intelligent Control), September 01–04, Taipei (Taiwan), (2004) 511–515.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, “Discrete time delayed system stability theory in the sense of Lyapunov: New results”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 12, Series B Numerical. Analysis, Vol. 135.b–Suppl., (2005.a) 433–442.

Debeljkovic, Lj. D., S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, “Further results on descriptor time delayed system stabilty theory in the sense of Lyapunov:

Pandolfi based approach", *The fifth International Conference on Control and Automation,* ICCA 05, June 26–29, Budapest (Hungary), CD–Rom, (2005.c).

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, "Further results on asymptotic stability of linear discrete descriptor time delayed systems", *Proc.* 1st International Workshop on Advanced Control Circuits and Systems, ACCS 05, Cairo (Egypt), March 06–10, 2005, CD–Rom, (2005.d).

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, "Further Results on Descriptor Time Delayed System Stabilty Theory in the sense of Lyapunov Pandolfi based approach", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, (2006.a) 1–11.

Debeljkovic, Lj. D. S. B. Stojanovic, N. S. Visnjic, S. A. Milinkovic, "Lyapunov Stability Theory A Quite New Approach–Discrete Descriptive Time Delayed Systems", *Proc. American Control Conference* 06, June, 14–16, Minneapolis (USA), (2006.b) 5091–5096.

Debeljkovic D. Lj., Lj. A. Jacic., N. S. Visnjic, M. Pjescic, "Asymptotic Stability of Generalized Discrete Descriptive Time Delayed Systems", *Proc. The 5th Edition of IFAC* Know. and Tech. Transfer Conference Series on Automation for Buildings the in the Infra structure, DECOM 2007, May 17–19, Cesme–Izmir (Turkey), (2007.a) 369–374.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, N. S. Visnjic, S. A. Milinkovic, "A Quite New Approach to the Asymptotic Stability Theory: Discrete Descriptive Time Delayed System", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series A: Mathematical Analysis, No. 15 , (2008) 469–480.

Liang J. R., "Analysis of stability for descriptor discrete systems with time–delay", *Journal of Guangxi University* (Nat. Sc. Ed.), 25(3), (2000) 249–251.

Mao, X., Comments on "Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications", *IEEE Trans. Automat. Control*, 42 (3), (1997) 429–430,

Owens, H. D., D. Lj. Debeljkovic, "Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems A Geometric Analysis", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, (2), (1985) 139–151, Pandolfi L., "Controllability and stabilization for linear system of algebraic and differential equations", *Jota* 30 (4), (1980) 601–620,

Su, J. H., "Further results on the robust stability of linear systems with single time delay", *Systems & Control Letters* (23), (1994) 375–379, Su, J. H., C. G. Huang, “Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems”, *IEEE Trans. Automat. Control* AC– 37 (10), (1992) 1656–1659,

Tissir, E., A. Hmamed, “Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$”, *Automatica*, 32 (12), (1996) 1723–1726,

Xu, B., Y. Liu, “Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications”, *IEEE Trans. Automat. Control AC*– 39 (4), (1994) 839–841.

Xu, S., C. Yang, “Stabilization of discrete–time singular systems: A matrix inequality approach”, *Automatica,* Vol. 35, (1999) 1613–1617

Xu, S., J. Lam, C. Yang, “Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty”, *Dynamics Continuous*, *Discrete and Impulsive Systems,* Vol. 9, No.4, (20035.b) 539–554

Yang D. M., Q. L. Zhang, B. Yao., *Descriptor systems*, Science Publisher, Beijing, 2004.

Wang, W., L. Mau, “Stabilization and estimation for perturbed discrete time–delay large–scale systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.,* 42(9), (1997) 1277–1282.

VI DETALJNI HRONOLOŠKI I SELEKTIVNI PRIKAZ POSTOJEĆIH I NOVIH REZULTATA NA POLJU SISTEMATSKOG PROUČAVANJA NELJAPUNOVSKE STABILNOSTI RAZMATRANIH KLASA SISTEMA: LMI I DESKRIPTIVNI PRILAZ

17. KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI

17.1 Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu

Model singularnog sistema predstavlja prirodan prikaz dinamičkog sistema koji više služi za opisivanje velikih sistema nego uobičajenih modela linearnih sistema.

Uobičajen opis prostora stanja linearnih sistema ne može predstaviti algebarska ograničenja između promenljivih stanja.

Na primer, kod hemijskih procesa, takva algebarska ograničenja često slede iz jednačina termodinamičke ravnoteže i konturnih (graničnih) uslova, *Kumar et al.* (1999).

Fenomen impulsivnosti i histerezisa, koji je predstavljen u teoriji kola, takođe se ne može razmatrati na odgovarajući način primenom klasičnih linearnih modela prostora stanja, *Lewis* (1986), *Wang* (1998). Međutim, modeli singularnih sistema nude efikasan način za opis ovih ponašanja.

Ovakvi modeli se često sreću kod sistema velikih dimenzija, u ekonomiji, kod mrežnih sistema, u energetici, i u neuralnim sistemima, *Dai* (1989), *Wang et al*. (1998).

S druge strane, postoji značajno interesovanje za proučavanje linearnih nestacionarnih sistema, koje je motivisano potrebom za projektovanjem adaptivnog upravljanja.

Analiza i sinteza ove klase sistema pobudila je značajnu pažnju i izučavana je u sledećim radovima: *Apkarian* (1995), *Becker* (1993), *Boyd* (1994), *Ramos* (2002), *Montagner* (2005).

Većina rezultata iz ove oblasti se odnosi na kriterijume stabilnosti i performanse koji su definisani na neograničenom vremenskom intervalu.

U mnogim praktičnim primenama, međutim, osnovni interes je ponašanje sistema na konačnom fiksiranom vremenskom intervalu. U tom smislu, opravdano je definisati stabilnim sistem čije kretanje, za zadate početne uslove, ostaje u propisanim granicama na konačnom fiksiranom vremenskom intervalu.

Sa druge strane, sistem je nestabilan ukoliko njegovo kretanje prelazi zadate granice na datom intervalu.

Amato et al. (2001) su proširili definiciju *stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu*, koju su svojevremeno uveli *Dorato* (1961) i *Weiss*, *Infante* (1967) na definiciju *ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu* gde se u obzir uzima i prisustvo i delovanje spoljašnjih poremećaja.

U tom radu je, zatim, dat i dovoljan uslov za *ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu* sistema u zatvorenom kolu dejstva koji je nastao uvođenjem povratne sprege po stanju. Ovaj uslov je zatim preveden u problem optimizacije korišćenjem LMI (linearnih matričnih nejednakosti).

U ovim izlaganjima uopšteni su koncepti *stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu* i *ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu* na posebnu klasu linearnih singularnih sistema.

17.2 Postavka problema

U ovim izlaganjima razmatraće se linearni singularni sistem pri delovanju spoljašnjih poremećaja:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\mathbf{p}(t))\mathbf{x}(t) + B(\mathbf{p}(t))\mathbf{u}(t) + F(\mathbf{p}(t))\mathbf{z}(t) \tag{17.1}$$

gde je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$ je spoljašnji poremećaj, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ je upravljačko dejstvo, a E singularna matrica reda $\mathrm{rank} = r < n$.

Matrice $A(\mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ i $F(\mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ su ograničene politopom $\mathcal{P}$ koji je određen sa:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P}\{(A,B,F)(\mathbf{p}(t))\} &: (A,B,F)(\mathbf{p}(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{N} p_j(t)(A_j, B_j, F_j) \\ \sum_{j=1}^{N} p_j(t) = 1,\ \ p_j(t) \geq 0,\ \ & j = 1,\ldots,N \end{aligned}\right\} \tag{17.2}$$

Drugim rečima, matrice sistema zavise od vremenski promenljivog vektora $\mathbf{p}(t)$ koji je definisan sa:

$$\mathbf{p}(t) = \left[p_1(t) \cdots p_N(t) \right]^T$$
$$\sum_{j=1}^{N} p_j(t) = 1 \tag{17.3}$$
$$p_j(t) \geq 0,\ j = 1,...,N$$

za koju se pretpostavlja da se meri i proračunava u realnom vremenu. Jasno je da poznavanje vednosti vektora $\mathbf{p}(t)$ definiše precizno poznat sistem unutar politope $\mathcal{P}$, koja je opisana konveksnom kombinacijom svojih čvorova.

Tokom daljeg teksta, čvorovi politope $\mathcal{P}$ će se označavati kao $(A,B,F)_j$ ili kao $A_j, B_j, F_j,\ j = 1,...,N$. Spoljašnji poremećaj $\mathbf{z}(t)$ je vremenski promenljiv i zadovoljava ograničenje:

$$\mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0 \tag{17.4}$$

Definicija 17.1. Vremenski promenljiv, linearni, singularni sistem:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \tag{17.5}$$

je bez impulsa na konačnom vremenskom intervalu $[0,T]$, ako je $\deg\det\left(sE - A(t)\right) = rank\ E$, *Takaba* (1998).

Definicija 17.2 Vremenski promenljiv, linearni, singularni sistem, dat jed. (17.7), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,T,R\}$, pri $\alpha < \beta$ i $R > 0$, ako je $\mathbf{x}^T(0)E^T R\, E\,\mathbf{x}(0) \leq \alpha$ i tada je:

$$\mathbf{x}^T(t)E^T R\, E\,\mathbf{x}(t) < \beta, \quad \forall t \in [0,T] \tag{17.6}$$

Definicija 17.3 Vremenski promenljiv, linearni, singularni sistem:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + F(t)\mathbf{z}(t) \tag{17.7}$$

izložen dejstvu spoljašnjeg poremećaja $\mathbf{z}(t)$ koji zadovoljava nejed. (17.4), je *ograničen na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,\varepsilon,T,R\}$ pri $\alpha < \beta$ i $R > 0$, ako je $\mathbf{x}^T(0)E^T R\, E\,\mathbf{x}(0) \leq \alpha$, a tada je:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^T(t)E^T R E\mathbf{x}(t) < \beta, \quad \forall t \in [0, T] \\ \forall \mathbf{z}(t) : \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) \le \varepsilon \end{gathered} \tag{17.8}$$

Lako je uočiti da je *stabilnost na konačnom vremenskom intervalu* samo poseban slučaj *ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu* kada je $\varepsilon = 0$.

Definicija 17.2 i *Definicija* 17.3 su generalizacija prethodno pomenutih koncepata stabilnosti (ograničenosti) na linearne, singularne sisteme, ranije izloženih u radu dao *Amato et al*. (2001).

17.3 Osnovni rezultati

Kao prvo se iznosi uslov koji obezbeđuje da linearni singularni sistem:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + F\,\mathbf{z}(t) \tag{17.9}$$

ne pokazuje impulsno ponašanje i da je *ograničen na konačnom vremenskom intervalu.*

Lema 17.1 Linearni, singularni sistem dat jed. (17.9) *ne poseduje impulsno ponašanje* i *ograničen je na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \varepsilon, T, R\}$ ako, stavljajući da je $P\,E = E^T R^{\frac{1}{2}} Q_1 R^{\frac{1}{2}} E$, postoji skalarna veličina $\wp > 0$ i dve simetrične pozitivno određene matrice $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $Q_2 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ takve da važi:

$$PE = E^T P^T > 0 \tag{17.10}$$

$$\begin{pmatrix} PA + A^T P^T - \wp PE & PF \\ F^T P^T & -\wp Q_2 \end{pmatrix} < 0 \tag{17.11}$$

$$\frac{\lambda_{\max}(Q_1)\alpha + \varepsilon\left(1 - e^{-\wp T}\right)\lambda_{\max}(Q_2)}{\lambda_{\min}(Q_1)} < e^{-\wp T}\beta \tag{17.12}$$

Dokaz. Neka je agregaciona funkcija data sa $V(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) PE\mathbf{x}(t)$ i označimo sa $\dot{V}(t, \mathbf{x}(t))$ izvod funkcije $V(t, \mathbf{x}(t))$ duž kretanja sistema, datog jed. (17.9).

Tada je:

$$\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right)=\dot{\mathbf{x}}^T(t)PE\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}^T(t)PE\dot{\mathbf{x}}(t)$$

$$=\mathbf{x}^T(t)\left(A^TP^T+PA\right)\mathbf{x}(t)+\mathbf{z}^T(t)F^TP^T\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}^T(t)PF\,\mathbf{z}(t) \tag{17.13}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}(t)\end{bmatrix}^T\begin{pmatrix}PA+A^TP^T & PF\\ F^TP^T & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}(t)\end{bmatrix}$$

Iz jed.(17.11), sledi:

$$\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right)<\wp V\left(\mathbf{x}(t)\right)+\wp\mathbf{z}^T(t)Q_2\mathbf{z}(t) \tag{17.14}$$

a množenjem nejed. (17.14) sa $e^{-\wp t}$, dobija se:

$$e^{-\wp t}\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right)-e^{-\wp t}\wp V\left(\mathbf{x}(t)\right)<\wp e^{-\wp t}\mathbf{z}^T(t)Q_2\mathbf{z}(t) \tag{17.15}$$

Dalje je:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\wp t}V\left(\mathbf{x}(t)\right)\right)<\wp e^{-\wp t}\mathbf{z}^T(t)Q_2\mathbf{z}(t) \tag{17.16}$$

Integraljenjem nejed. (17.16) u granicama od 0 do t, gde je $t\in[0,T]$, dobija se da je:

$$e^{-\wp t}V\left(\mathbf{x}(t)\right)-V\left(\mathbf{x}(0)\right)<\wp\int_0^t e^{-\wp\tau}\mathbf{z}^T(\tau)Q_2\mathbf{z}(\tau)\,d\tau \tag{17.17}$$

Dalje je:

$$\begin{aligned}V\left(\mathbf{x}(t)\right)&<e^{\wp t}V\left(\mathbf{x}(0)\right)+\wp e^{\wp t}\int_0^t e^{-\wp\tau}\mathbf{z}^T(\tau)Q_2\mathbf{z}(\tau)\,d\tau\\ &<e^{\wp t}V\left(\mathbf{x}(0)\right)+\wp\,\varepsilon\,\lambda_{\max}(Q_2)e^{\wp t}\int_0^t e^{-\wp\tau}d\tau\\ &=e^{\alpha t}\left(V\left(\mathbf{x}(0)\right)+\alpha d\lambda_{\max}(Q_2)\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right)\\ &=e^{\alpha t}\left(V\left(\mathbf{x}(0)\right)+d\left(1-e^{-\alpha t}\right)\lambda_{\max}(Q_2)\right)\end{aligned} \tag{17.18}$$

Imajući u vidu da je $PE=E^TR^{\frac{1}{2}}Q_1R^{\frac{1}{2}}E$, iz nejed.(17.17), dobija se:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^T(t)E^TR^{\frac{1}{2}}Q_1R^{\frac{1}{2}}E\,\mathbf{x}(t)<\\ &<e^{\wp t}\left(\mathbf{x}^T(0)E^TR^{\frac{1}{2}}Q_1R^{\frac{1}{2}}E\,\mathbf{x}(0)+\varepsilon\left(1-e^{-\wp t}\right)\lambda_{\max}(Q_2)\right)\end{aligned} \tag{17.19}$$

Sada se ima:

$$\mathbf{x}^T(t)E^T R^{\frac{1}{2}} Q_1 R^{\frac{1}{2}} E\,\mathbf{x}(t) \ge \lambda_{\min}(Q_1)\mathbf{x}^T(t)E^T R\,E\,\mathbf{x}(t) \tag{17.20}$$

$$\begin{aligned} &e^{\wp t}\left(\mathbf{x}^T(0)E^T R^{\frac{1}{2}} Q_1 R^{\frac{1}{2}} E\,\mathbf{x}(0)+\varepsilon\left(1-e^{-\wp t}\right)\lambda_{\max}(Q_2)\right) \le \\ &\le e^{\wp t}\left(\lambda_{\max}(Q_1)\mathbf{x}^T(0)E^T E\,\mathbf{x}(0)+\varepsilon\left(1-e^{-\wp t}\right)\lambda_{\max}(Q_2)\right) \end{aligned} \tag{17.21}$$

Povezujući zajedno nejed. (17.18), nejed.(17.19) i nejed.(17.20), dobija se:

$$\mathbf{x}^T(t)E^T R\,E\,\mathbf{x}(t) < e^{\wp T}\,\frac{\left(\lambda_{\max}(Q_1)\alpha+\varepsilon\left(1-e^{-\wp t}\right)\lambda_{\max}(Q_2)\right)}{\lambda_{\min}(Q_1)} \tag{17.22}$$

Uslov dat nejed. (17.12) povlači da je, za svako $t\in[0,T]$, $\mathbf{x}^T(t)E^T R\,E\,\mathbf{x}(t)<\beta$, što je i trebalo dokazati.

Teorema 17.1 Linearni singularni sistem dat jed. (17.9), bez prisustva impulsa je *ograničen na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,\varepsilon,T,R\}$ ako, stavljajući da je $\bar{P}^{-1}E = E^T R^{\frac{1}{2}}\bar{Q}_1 R^{\frac{1}{2}} E$, postoje skalar $\wp>0$ i dve simetrične pozitivno određene matrice $\bar{Q}_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ i $\bar{Q}_2\in\mathbb{R}^{l\times l}$ koje zadovoljavaju:

$$E\bar{P}^T = \bar{P}E^T > 0 \tag{17.23}$$

$$\begin{pmatrix} A\bar{P}^T+\bar{P}A^T-\wp E\bar{P}^T & F\bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_2F^T & -\wp\bar{Q}_2 \end{pmatrix} < 0 \tag{17.24}$$

$$\frac{\alpha}{\lambda_{\min}(\bar{Q}_1)}+\frac{\varepsilon\left(1-e^{-\wp T}\right)}{\lambda_{\min}(\bar{Q}_2)}<\frac{e^{-\wp T}\beta}{\lambda_{\max}(\bar{Q}_1)} \tag{17.25}$$

Posledica 17.1 Linearni, singularni sistem dat jed. (17.9) bez prisustva impulsa je *ograničen na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,\varepsilon,T,R\}$ ako, stavljajući da je $\bar{P}^{-1}E = E^T R^{\frac{1}{2}}\bar{Q}_1 R^{\frac{1}{2}} E$, postoje skalar $\wp>0$ i dve simetrične pozitivno određene matrice $\bar{Q}_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ i $\bar{Q}_2\in\mathbb{R}^{l\times l}$ tako da nejed. (17.22), nejed.(17.23) i:

$$\frac{\alpha}{\lambda_{\min}(\bar{Q}_1)}+\frac{\varepsilon}{\lambda_{\min}(\bar{Q}_2)}<\frac{e^{-\wp T}\beta}{\lambda_{\max}(\bar{Q}_1)} \tag{17.26}$$

budu ispunjene.

Dokaz: S obzirom na činjenicu, da je $1-e^{-\wp T}<1$, dobija se:

$$\frac{\alpha}{\lambda_{\min}\left(\bar{Q}_1\right)}+\frac{\varepsilon\left(1-e^{-\wp T}\right)}{\lambda_{\min}\left(\bar{Q}_2\right)}<\frac{\alpha}{\lambda_{\min}\left(\bar{Q}_1\right)}+\frac{\varepsilon}{\lambda_{\min}\left(\bar{Q}_2\right)} \tag{17.27}$$

Prema tome, iz nejed. (17.25) sledi da nejed.(17.24) važi.

Napomena 17.1 Multiplikator (množilac) $\left(1-e^{-\wp T}\right)$ u jed. (17.24) obezbeđuje manje konzervativne rezultate.

Posledica 17.2 U sistemu datom nejed. (17.9), za $E=I$, sistem je *ograničen na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,\varepsilon,T,R\}$ ako, stavljajući da je $\bar{P}=R^{-\frac{1}{2}}\bar{Q}_1 R^{-\frac{1}{2}}$, postoje skalar $\wp>0$ i dve simetrične pozitivno određene matrice $\bar{Q}_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ i $\bar{Q}_2\in\mathbb{R}^{l\times l}$ tako da su sledeće relacije:

$$\begin{pmatrix} A\bar{P}+\bar{P}A^T-\wp\bar{P} & F\bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_2F^T & -\wp\bar{Q}_2 \end{pmatrix}<0 \tag{17.28}$$

$$\frac{\alpha}{\lambda_{\min}\left(\bar{Q}_1\right)}+\frac{\varepsilon}{\lambda_{\min}\left(\bar{Q}_2\right)}<\frac{e^{-\wp T}\beta}{\lambda_{\max}\left(\bar{Q}_1\right)} \tag{17.29}$$

zadovoljene, *Shen*, *Shen* (2006).

Napomena 17.2. Posledica 17.2 je zapravo Lema 6 u literaturi *Amato et al*. (2001).

Literatura

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Finite-Time Control of Linear Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances", *Automatica*, **37** (2001) 1459-1463.

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Finite-Time Stabilization via Dynamic Output Feedback", *Automatica*, **42** (2006) 337-342.

Apkarian, P., P. Gahinet, "A Convex Characterization of Gain Scheduled H_1 Controllers, *IEEE Trans Autom. Control*, **40** (1995) 853-864.

Becker, G., A. Packard, D. Philbrick, G. Blas, “Control of Parametrically-Dependent Linear Systems: a Single Quadratic Lyapunov Approach, *Proc. American Control Conf.*, San Francisco (1993) 2795-27936.

Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, *SIAM,* Philadelphia (Pennsylvania) (1994).

Dai, L., *Singular Control Systems*, Lecture notes contr. Info. Sci. Berlin (Germany), Springer Verlag, 19836.

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic, I–Tech, Vienna, 2011.

Dorato, P., “Short Time Stability in Linear Time-Varying Systems”, *Proc. IRE International Convention”*, (6) (1961) 83-87.

Kumar, A., P. Daoutidis, *Control of Nonlinear Differential Algebraic Equation Systems*, ser. Notes in Math. London, UK: Chapman & Hall, 19936.

Lewis, F. L., “A Survey of Linear Singular Systems”, *Circuits, Syst. Signal Process*, (1) (1986) 3-36.

Ramos, D. C. W., P. L. D. Peres, “An LMI Condition for the Robust Stability of Uncertain Continuous-Time Linear Systems”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, **47** (2002) 675-678.

Rugh, W. J., “Analytical Framework for Gain Scheduling”, *IEEE Control Systems Mag.*, **11** (1991) 74-84.

Shamma, J. S., M. Athans, “Analysis of Nonlinear Gain-Scheduled Control Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **35** (1990) 898-907.

Shen, Y., W. Shen, “Finite-Time Control of Linear Singular Systems with Parametric Uncertaines and Disturbances”, *Automatica*, (2006).

Takaba, K., “Robust H_2 Control of Descriptor System with Time-Varying Uncertainty”, *International Journal of Control*, **71** (4) (1998) 559-5736.

Wang, H. S., C. F. Yung, F. R. Chang, “Bounded Real Lemma and H_∞ Control for Descriptor Systems”, *Proc. Inst. Elect. Eng.* (145) (1998) 316-322.

Weiss, L., E. F. Infante, “Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-12** (1967) 54–536.

18. DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

18.1 Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu

Singularni model sistema je prirodna reprezentacija dinamičkih sistema i opisuje širu klasu sistema od normalnih linearnih sistema. Uobičajeni prikaz sistema u prostoru stanja nije u stanju da obuhvati i predstavi algebarska ograničenja koja postoje između stanja sistema.

Na primer, kod hemijskih procesa, ovakva algebarska ograničenja se često dobijaju kao rezultat relacija termodinamičke ravnoteže *Kumar et.al*. (1999).

Dinamika vazduhoplova je, takođe, obično opisana singularnim sistemom diferencijalnih jednačina, *Stevens* (1984).

Tokom poslednje tri decenije, singularni sistemi su privukli mnogo pažnje, zahvaljujući primeni u ekonomiji u Leontief dinamičkom modelu *Silva*, *Lima* (2003), u električnim modelima *Campbell* (1980), kao i mehaničkim modelima i robotici *Muller* (1993, 1997), itd.

Dalje, fenomeni impulsnog ponašanja i pojave histerezisa koji su prisutni u teoriji električnih kola ne mogu biti tretirani na odgovarajući način korišćenjem linearnih modela u prostoru stanja *Newcomb* (1981), *Lewis* (1986), *Dai* (1989).

Sa druge strane, modeli singularnih sistema pružaju efikasan način za opisivanje ovakvih ponašanja.

Linearni diskretni deskriptivni sistemi (LDDS), poznati i kao degenerativni, singularni, generalizovani diferencni algebarski ili sistemi polustanja – su oni čija dinamika je definisana mešavinom algebarskih i diferencnih jednačina.

U poslednje vreme mnogi naučnici su se bavili sa velikom pažnjom deskriptivnim sistemima i ostvarili su značajne rezultate.

Kompleksna priroda deskriptivnih sistema postavlja mnogobrojne izazove i teškoće pri analitičkom i numeričkom tretmanu takvih sistema, posebno u slučaju kada je potrebno ostvariti upravljanje kvalitetno istima.

U praksi nije interesantna samo stabilnost sistema (na primer u smislu Ljapunova), već i granice sistemskih trajektorija. Sistem može biti stabilan, ali i potpuno neupotrebljiv ukoliko ima neželjene prelazne performanse.

Sledi da je često korisno razmatranje stabilnosti ovakvih sistema na određenim podskupovima prostora stanja koji su *a priori* definisani za dati problem.

Osim toga, posebno je značajno uzeti u obzir ponašanje dinamičkog samo na konačnom vremenskom intervalu. Ove ograničene osobine odziva sistema, odnosno rešenja modela sistema su veoma značajne iz inženjerske perspektive. Polazeći od ove činjenice razvijene su mnogobrojne definicije takozvane tehničke i praktične stabilnosti.

Grubo rečeno, ove definicije su suštinski zasnovane na unapred određenim granicama za perturbacije početnih uslova i dozvoljenih perturbacija odziva sistema.

U inženjerskoj primeni automatskog upravljanja ova činjenica postaje veoma značajna i ponekad presudna kada je u pitanju kvantitativno opisivanje mogućih odstupanja odziva sistema.

Sledi da je analiza ovih ograničenja na rešenja sistema izuzetno značajan korak koji prethodi sintezi upravljačkog signala, kada su u pitanju stabilnost na konačnom vremenskom intervalu ili praktična stabilnost.

Motivisani *kratkom diskusijom* o praktičnoj stabilnosti u monografiji *La Salle*, *Lefschetz* (1961), *Weiss*, *Infante* (1965, 1967) su uveli različite koncepte stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za vremenski neprekidne sisteme i nepromenljive skupove granica trajektorija sistema.

Amato et. al. (2001) su proširili definiciju stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu (FTS), *Dorato* (1961), *Weiss*, *Infante* (1967) na definiciju ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu (FTB) koja bi uzela u obzir i prisustvo spoljnih poremećaja.

Potrebni i dovoljni uslovi za stabilnost na konačnom vremenskom intervalu običnih linearnih sistema su takođe izvedeni u *Amato et al* (2001, 2003).

Koncept stabilnosti diskretnih sistema na konačnom vremenskom intervalu je prvi put analiziran u *Michel*, *Wu* (1969).

Dalji rezultati su predstavljeni u *Weiss* (1972), *Weiss*, *Lam* (1973) i mnogim drugim radovima.

Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu linearnih i nelinearnih vremenski diskretnih sistema je tretirana u *Amato et al.* (2004) i *Mastellone et al.* (2004), sledstveno.

Debeljkovic, *Owens* (1985, 1986) i *Debeljkovic* (1986.a) su izveli nove rezultate u oblasti praktične i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za vremenski nepromenljive linearne singularne sisteme. Ovi rezultati predstavljaju dovoljne uslove za stabilnost razmatranih sistema i zasnovani su na korišćenju tzv. *kvaziljapunovljevih* funkcija kao i na njihovim osobinama na podprostoru konzistentnih početnih uslova. Tačnije, ove funkcije ne moraju da imaju osobinu pozitivne određenosti na celom prostoru stanja i negativne izvode duž sistemskih trajektorija.

U skorije vreme *Shen*, *Shen* (2006) su razmatrali problem upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za klasu linearnih singularnih sistema sa vremenski promenljivim parametarski neizvesnostima i egzogenim poremećajima.

Pojam *deskriptivnih sistema* je uveo *Luenberger* (1977). Strukturne karakteristike linearnih vremenski nepromenljivih diskretnih deskriptivnih sistema je, takođe, izučavao *Luenberger* (1978).

U kontekstu praktične stabilnosti linearnih diskretnih deskriptivnih sistema, višestruki rezultati su prvi put dobijeni u radovima *Debeljkovic* (1986.b) i *Owens*, *Debeljkovic* (1986).

Uopšteno se posmatraju sledeći linearni vremenski nepromenljivi diskretni desktriptivni sistemi sa spoljašnjim poremećajem:

$$\begin{gathered} E\,\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + F\,\mathbf{z}(k), \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \end{gathered} \tag{18.1}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ generalisani vektor stanja (polustanja), $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^m$ je vektor poremećaja koj zadovoljava:

$$\mathbf{z}^T(k)\,\mathbf{z}(k) < \mathcal{E}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, N\} \tag{18.2}$$

i $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ može biti singularna matrica čiji je rang $rank\,E = r < n$. Matrice *E*, *A* i *F* su odgovarajućih dimenzija i definisane na polju realnih brojeva.

Važno je napomenuti da, u opštem slučaju, početni uslovi sistema u slobodnom i u prinudnom radnom režimu ne moraju biti jednaki.

Modeli sistema u ovom obliku imaju određene značajne prednosti u odnosu na modele u *normalnoj formi*, odnosno u slučaju kada je $E = I$ a detaljna diskusija o ovoj temi se može naći u *Bajic* (1992) i *Debeljkovic et al*. (2005.a, 2005.b) *Debeljkovic* (2011) i *Debeljkovic*, *Nestorovic* (2011), odnosno u prethodnim glavama ove disertacije.

Kompleksna priroda deskriptivnih sistema povlači mnoge teškoće pri *analizi i numeričkoj obradi,* koje nisu prisutne kod sistema u normalnoj formi.

U tom smislu pitanja egzistencije, rešivosti i jedinstvenosti se moraju rešiti na zadovoljavajući način.

U diskretnom slučaju, koncept glatkosti rešenja nema mnogo smisla, ali pojam konzistentnih početnih uslova $\mathbf{x}_0$, koji povlače sekvencu rešenja $\left(\mathbf{x}(k): k \geq 0\right)$ ima jasno fizičko značenje.

Diferencne jed. (18.1) su traktabilne *Campbell et al.* (1980) ukoliko problem početne vrednosti ima jedinstveno rešenje za svaki konzistentni početni uslov $\mathbf{x}_0$

Sledi da je potrebno da važi:

$$\det\left(cE - A\right) \neq 0 \tag{18.3}$$

kako bi bila obezbeđena jedinstvenost rešenja, pri čemu je c realni skalar.

Poznato je da sekvenca rešenja jednačine $\left\{\mathbf{x}(k)\right\}$, $k \geq 0$, ne postoji za sve početne uslove.

Definicija 18.1 Linearni deskriptivni sistem, dat jed. (18.1), je regularan ukoliko $\det\left(zE - A\right)$ nije identički jednako nuli, *Dai* (1989).

Napomena 18.1 Regularnost matričnog para $\left(E, A\right)$ garantuje egzistenciju i jedinstvenost rešenja $\mathbf{x}(k)$ za svaki zadati početni uslov, a *impulsni imunitet* omogućava da se izbegne impulsno ponašanje u početnom trenutku za nekonzistentne početne uslove.

Jasno je da u netrivijalnom slučaju, kada je $E \neq 0$, odsustvo impulsa povlači regularnost.

Definicija 18.2 Linearni autonomni diskretni deskriptivni sistem, dat jed. (18.3) je *kauzalan* ukoliko je regularan i važi $\deg ree \ \det\left(sE - A\right) = rank\ E$, *Dai* (1989).

Definicija 18.3 Matrični par (E, A) je prihvatljiv (eng. *admissible*) ukoliko je regularan, bez impulsa i stabilan, *Hsiung*, *Lee* (1999).

Lema 18.1 Linearni diskretni deskriptivni sistem (18.1) je regularan, kauzalan i stabilan ako i samo ako postoji inerzibilna simetrična matrica $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takva da sledeće dve nejednakosti važe:

$$E^T HE \geq 0 \tag{18.4}$$

$$A^T HA - E^T HE < 0 \tag{18.5}$$

Xu, *Yang* (1999).

Definicija 18.4 Sistem, dat jed. (18.1), sa $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, N\}$, $\alpha < \beta$, ako:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(0) E^{\mathrm{T}} E\mathbf{x}(0) \leq \alpha \tag{18.6}$$

povlači:

$$\mathbf{x}^T(k) E^T E\mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in \{1, \cdots, N\} \tag{18.7}$$

Definicija 18.5 Sistem, dat jed. (18.1), izložen spoljašnjim poremećajima, je ograničen na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, N\}$, $\alpha < \beta$, ako :

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(0) E^{\mathrm{T}} E\mathbf{x}(0) \leq \alpha \tag{18.8}$$

povlači:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(k) E^{\mathrm{T}} E\mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in \{1, \cdots, N\} \tag{18.9}$$

kada važi:

$$\mathbf{z}^T(k)\mathbf{z}(k) < \mathcal{E}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, N\} \tag{18.10}$$

Sada smo u mogućnosti da izložimo dovoljne uslove pod kojima će sistem, dat jed. (18.1), biti regularan, kauzalan i ograničen na konačnom vremenskom intervalu, istovremeno. Izlaganja koja slede prate rad *Debeljković, Stojanović, Aleksendrić* (2011).

Teorema 18.1. Linearni deskriptivni sistem, dat jed. (18.1), je regularan, kauzalan i ograničen na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, N\}$, $\alpha < \beta$ ukoliko postoji skalar $\gamma > 1$ i dve simetrične pozitivno određene matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$,takvi da važi:

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\gamma E^T PE & 0 & A^T P \\ 0 & -\gamma Q & F^T P \\ PA & PF & -P \end{pmatrix} \leq 0 \tag{18.11}$$

i:

$$\gamma^N \alpha \; \lambda_{\max}(P) + \rho_N \; \mathcal{E} \, \lambda_{\max}(Q) < \beta \lambda_{\min}(P) \tag{18.12}$$

pri čemu je:

$$\rho_N = \sum_{j=1}^{N} \gamma^j = \frac{\gamma(\gamma^N - 1)}{\gamma - 1} \tag{18.13}$$

Dokaz.

Prvo se dokazuje regularnost i kauzalnost sistema.

Prema Šurovom komplementu (18.11) je jednako sa:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A^T PA - \gamma E^T PE & A^T PF \\ F^T PA & F^T PF - \gamma Q \end{pmatrix} \leq 0$$
$$P = P^T > 0 \tag{18.14}$$

Iz jed. (18.14), sledi:

$$A^T PA - \gamma E^T PE \leq 0 \tag{18.15}$$

Pri čemu se za $\gamma \geq 1$, dobija:

$$A^T PA - E^T PE < 0 \tag{18.16}$$

Kako je $P > 0$, (16) se svodi na

$$E^T PE \geq 0 \tag{18.17}$$

Iz jed. (18.16-18.17), zaključuje se da je sistem regularan i kauzalan.

Neka je:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) E^T PE \, \mathbf{x}(k) \tag{18.18}$$

potencijalna agregaciona funkcija za sistem, dat jed. (18.1).

Za zadatu agregacionu funkciju, jed. (18.18), opšta potonja razlika duž trajektorije sistema, datog jed.(34.1), je:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= V\left(\mathbf{x}(k+1)\right)-V\left(\mathbf{x}(k)\right)\\ &= \mathbf{x}^T(k+1)E^T PE\mathbf{x}(k+1)-\mathbf{x}^T(k)E^T PE\mathbf{x}(k)\\ &= \left[A\mathbf{x}(k)+F\,\mathbf{z}(k)\right]^T E^T PE\left[A\mathbf{x}(k)+F\,\mathbf{z}(k)\right]-\mathbf{x}^T(k)E^T PE\mathbf{x}(k)\end{aligned} \qquad (18.19)$$

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= \xi^T(k)\begin{pmatrix} A^T PA-E^T PE & A^T PF\\ F^T PA & F^T PF\end{pmatrix}\xi(k)\\ &= \xi^T(k)\hat{\Gamma}\xi(k)\end{aligned} \qquad (18.20)$$

pri čemu je

$$\xi(k)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{z}(k)\end{bmatrix},\quad \hat{\Gamma}=\begin{pmatrix} A^T PA-E^T PE & A^T PF\\ F^T PA & F^T PF\end{pmatrix}$$

Iz jed (18.14) i (18.20) se dobija:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= \xi^T(k)\hat{\Gamma}\xi(k)\\ &= \xi^T(k)\left(\Gamma+\begin{pmatrix}(\gamma-1)E^T PE & 0\\ 0 & \gamma Q\end{pmatrix}\right)\xi(k)\end{aligned} \qquad (18.21)$$

Ako je jed. (18.11) (tj.jed. (18.14)) zadovoljena, tada se jed. (18.21), svodi na:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &\le (\gamma-1)\mathbf{x}^T(k)E^T PE\,\mathbf{x}(k)+\gamma\mathbf{z}^T(k)Q\mathbf{z}(k)\\ &= (\gamma-1)V\left(\mathbf{x}(k)\right)+\gamma\mathbf{z}^T(k)Q\mathbf{z}(k)\end{aligned} \qquad (18.22)$$

tako da se dobija:

$$V\left(\mathbf{x}(k+1)\right)\le \gamma V\left(\mathbf{x}(k)\right)+\gamma\mathbf{z}^T(k)Q\mathbf{z}(k) \qquad (18.23)$$

Primenom iterativnog postupka na jed. (18.23), dobija se:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right)\le \gamma^k V\left(\mathbf{x}(0)\right)+\sum_{j=1}^{k}\gamma^j\,\mathbf{z}^T(k-j)Q\,\mathbf{z}(k-j) \qquad (18.24)$$

Dalje je:

$$\begin{aligned}V\left(\mathbf{x}(k)\right) &< \gamma^k\mathbf{x}^T(0)E^T PE\,\mathbf{x}(0)+\mathcal{E}\,\lambda_{\max}(Q)\ \rho_k\\ &\le \gamma^k\lambda_{\max}(P)\mathbf{x}^T(0)E^T E\,\mathbf{x}(0)+\mathcal{E}\,\lambda_{\max}(Q)\ \rho_k\\ &< \gamma^k\alpha\lambda_{\max}(P)+\mathcal{E}\,\lambda_{\max}(Q)\ \rho_k\\ &< \gamma^N\alpha\lambda_{\max}(P)+\mathcal{E}\,\lambda_{\max}(Q)\ \rho_N\end{aligned} \qquad (18.25)$$

Što sledi prema pretpostavci Teoreme 18.1, odnosno prirodnim uslovima nametnutim spoljašnjim poremećajima i početnim uslovima.

Sa druge strane je

$$\lambda_{\min}(P)\mathbf{x}^T(k)E^T P E\mathbf{x}(k) \le V(\mathbf{x}(k)) \tag{18.26}$$

Kombinovanjem jed. (18.25) i jed. (18.26), dobija se:

$$\mathbf{x}^T(k)E^T P E\mathbf{x}(k) < \frac{\gamma^N \alpha\,\lambda_{\max}(P) + \mathcal{E}\,\lambda_{\max}(Q)\,\rho_N}{\lambda_{\min}(P)} \tag{18.27}$$

Uslov, dat jed. (18.12), i gornja nejednakost povlače:

$$\mathbf{x}^T(k)E^T E\mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in \{1, \cdots, N\} \tag{18.28}$$

Tada iz *Definicije* 18.5 zaključujemo da je sistem ograničen na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha,\ \beta,\ N\}$, $\alpha < \beta$ što završava dokaz.

Posledica 18.1. Linearni diskretni deskriptivni sistem (181) je regularan, kauzalan i ograničen na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha,\ \beta,\ N\}$, $\alpha < \beta$, ukoliko postoje pozitivni skalari $\gamma > 1$, $\wp_1$, $\wp_2$ i $\wp_3$, i dve simetrične pozitivno određene matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, takve da važi:

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\gamma E^T PE & 0 & A^T P \\ 0 & -\gamma Q & F^T P \\ PA & PF & -P \end{pmatrix} \le 0 \tag{18.29}$$

i:

$$\begin{gathered} \wp_1 I < P < \wp_2 I \\ 0 < Q < \wp_3 I \\ \begin{pmatrix} -\beta\wp_1 & \wp_2\sqrt{\alpha\gamma^N} & \wp_3\sqrt{\varepsilon\rho(k)} \\ \wp_2\sqrt{\alpha\gamma^N} & -\wp_2 & 0 \\ \wp_3\sqrt{\mathcal{E}\rho(k)} & 0 & -\wp_3 \end{pmatrix} < 0 \end{gathered} \tag{18.30}$$

pri čemu je:

$$\rho(N) = \sum_{j=1}^{N} \gamma^j = \frac{\gamma(\gamma^N - 1)}{\gamma - 1} \tag{18.31}$$

Dokaz. Izvođenje dokaza je slično dokazu prethodne teoreme.

Neka je

$$0 < \wp_1 < \lambda_{\min}(P), \quad \wp_2 > \lambda_{\max}(P), \quad \wp_3 > \lambda_{\max}(Q) \tag{18.32}$$

Tada je

$$\begin{gathered} \wp_1 I < P < \wp_2 I, \quad \wp_1 > 0, \quad 0 < Q < \wp_3 I \\ -\beta \wp_1 + \alpha \gamma^N \lambda_2 + \mathcal{E} \rho_N \wp_3 < 0 \end{gathered} \tag{18.33}$$

Korišćenjem Šurovog komplementa, (18.33) postaje ekvivalentna jed. (18.31). Ovim je dokaz završen.

Napomena 18.1 Ovaj rezultat je analogan radu *Shen*, *Shen* (2006) za kontinualne singularne sisteme.

Napomena 18.2 Kada je matrica *E* nesingularna, sledeća posledica (18.2) važi. Jednostavnosti radi, usvaja se da je *E=I.*.

Posledica 18.2 Linearni diskretni sistem, dat jed. (18.1), je ograničen na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, N\}$, $\alpha < \beta$, ukoliko postoje pozitivni skalari $\gamma > 1$, $\wp_1$, $\wp_2$ i $\wp_3$, i dve simetrične pozitivno određene matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ takve da važi:

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\gamma P & 0 & A^T P \\ 0 & -\gamma Q & F^T P \\ PA & PF & -P \end{pmatrix} < 0 \tag{18.34}$$

i:

$$\begin{gathered} \wp_1 I < P < \wp_2 I \\ 0 < Q < \wp_3 I \\ \begin{pmatrix} -\beta \wp_1 & \wp_2 \sqrt{\alpha \gamma^N} & \wp_3 \sqrt{\mathcal{E} \rho(k)} \\ \wp_2 \sqrt{\alpha \gamma^N} & -\wp_2 & 0 \\ \wp_3 \sqrt{\mathcal{E} \rho(k)} & 0 & -\wp_3 \end{pmatrix} < 0 \end{gathered} \tag{18.35}$$

gde je:

$$\rho(N) = \sum_{j=1}^{N} \gamma^j = \frac{\gamma(\gamma^N - 1)}{\gamma - 1} \tag{18.36}$$

Navedeni postupak predstavlja dovoljan uslov za ograničenost na konačnom vremenskom intervalu posebne klase vremenski nepromenljivih diskretnih deskriptivnih sistema. Uslov se svodi na problem izvodljivosti primenom linearnih matričnih nejednakosti.

Literatura

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Finite-Time Control of Linear Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances", *Automatica*, **37** (2001) 1459-1463.

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, "Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Stability of Linear Systems", *Proc. of the* 2003 *American Control Conference*, Denver (Colorado), **5** (2003) 4452-4456.

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, M. Carbone, "Finite-Time Stability of Discrete-Time Systems", *Proc. of the 2004 American Control Conference*, Boston (Massachusetts) (2004) 1440-1444.

Bajic, V. B., *Lyapunov's Direct Method in The Analysis of Singular Systems and Networks*, Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.

Campbell, S. L., *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

Dai, L., *Singular Control Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1989.b.

Debeljkovic, D. Lj., "Finite-Time Stability of Time-Continuous Linear Singular Systems", *Automatika* (Yug), (1-2) (1986.b) 17–23.

Debeljkovic, D. Lj., "Finite-Time Stability of Linear Descriptor Systems", *Proc. IMACS/IFORS*, Lille, France (1986.b) 57–61.

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic I-Tech, Vienna, 2011.

Debeljkovic, D. Lj., D. H. Owens, "On Practical Stability", *Proc. MELECON Conference*, Madrid (Spain), October (1985) 103–105.

Debeljkovic, D. Lj., D. H. Owens, "On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems", *Proc. EUROCON Conference*, Paris (France), April (1986) 406–409.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Continuous Singular Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.a.

Debeljkovic, D. Lj., M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, Lj. A. Jacic, *Discrete Descriptor Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.b.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, Time Delay Systems, **–** Editior Dragutin Lj. Debeljkovic **–** (Scientific monograph) – Chapter: *Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems*, I – Tech, Vienna, ISBN 978–953–7619–X–X, 2011.

Dorato, P., "Short Time Stability in Linear Time-Varying Systems", *Proc. IRE International Convention"*, (6) (1961) 83-87.

Hsiung, K. L., L. Lee, "Lyapunov Inequality and Bounded Real Lemma for Discrete-time Descriptor Systems", *IEE Proc. - Control Theory Appl.*, (**146**), No.4, July (1999) 327 - 331.

Kumar, A., P. Daoutidis, *Control of Nonlinear Differential Algebraic Equation Systems*, ser. Notes in Math. London, UK: Chapman & Hall, 1999.

La Salle, S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's Direct Method*, Academic Press, New York, 1961

Lewis, F. L., "A Survey of Linear Singular Systems", *Circ. Syst. Sig. Proc.*, **5** (1) (1986.a) 3–36.

Luenberger, D. G., "Dynamic Equations in Descriptor Form", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-22** (3) (1977) 312–321.

Luenberger, D. G., "Time-Invariant Descriptor Systems", *Automatica*, **14** (1978) 473–480.

Mastellone, S., P. Dorato, C. T. Abdallah, "Finite Time Stabilty of Discrete Time Nonlinear Systems: Analysis and Design", *Proc.* 43 *rd Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Islands, Bahamas, December (2004) 2572–2577.

Michel, A., S. H. Wu, "Stability of Discrete Systems over a Finite Interval of Time", *Int. J. Control* .9, (1969) 679-693.

Müller, P. C., "Stability of Linear Mechanical Systems with Homonymic Constrains", Applied Mechanical Review, Vol. 46, No. 11, November, (1993) 161 – 164.

Muller,P.C.: *Linear Mechanical Descriptor Systems: Identification, Analysis and Design*, Preprints of IFAC, Conference on Control of Independent Systems, Belfort, France, (1997) 501-506.

Newcomb, R. W., "The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-28** (1) (1981) 62–71.

Owens, D. H., D. Lj. Debeljkovic, "Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems: A Geometric Approach", *IMA Journal on Mathematical Control and Information*, **2** (1985) 139–151.

Owens, D. H. D. Lj. Debeljkovic, "On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems", *Proc. 25th Conference on Decision and Control*, Athens, Greece (1986) 2138–2139.

Shen, Y., W. Shen, "Finite-Time Control of Linear Singular Systems with Parametric Uncertaines and Disturbances", Preprint submitted to *Automatica*, (2006).

Silva, M. S., de Lima, Looking for nonnegative solutions of a Leontief dynamic model, Linear Algebra, 364 (2003) 281-316.

Stevens, B. L., *Modeling, Simulation and Analysis with State Variables*, Report LG84RR002, Lockheed - Georgia Co., Marietta, GA, 1984.

Weiss, L.,"Controllability, Realization and Stability of Discrete-time Systems", *SIAM J. Control*, 10, (1972) 230 - 251.

Weiss, L., E. F. Infante, "On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval", *Proc. National Acad. Sci.*, **54** (1965) 44 – 48.

Weiss, L., E. F. Infante, "Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC – 12** (1967) 54 – 59.

Weiss, L., L. Lam, "Stability of Non-linear Discrete-time Systems", *Int. J. Control*, 17, (1973) 465-470.

Xu, S., C. Yang, "Stabilization of Discrete-time Singular Systems: a Matrix Inequality Approach", *Automatica* (35) (1999) 1613 - 1617.

19. KONTINUALNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM: DESKRIPTIVNI PRILAZ

Linearan, višestruko prenosni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem se može predstaviti sledećom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \tag{19.1}$$

i sa pridruženom funkcijom početnog stanja:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_x(t), \quad -\tau \le t \le 0 \tag{19.2}$$

Sistem dat jed. (19.1) se naziva *homogenim,* $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ je vektor prostora stanja, A_0, A_1 su konstantne matrice sistema odgovarajućih dimenzija, a τ je čisto vremensko kašnjenje, $\tau = const., (\tau > 0)$.

Dinamičko ponašanje sistema, datog jed. (19.1), sa početnim funkcijama, datim jed. (19.2), je definisano na neprekidnom vremenskom intervalu $\Im = \{t_0,\ t_0 + T\}$, gde veličina T može biti ili pozitivan realan broj ili simbol +∞, tako da se istovremeno mogu tretirati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost. Očigledno je da $\Im \in \mathbb{R}_+$.

U opštem slučaju, za autonomni sistem, dat je. (19.1) se ne zahteva da važi: $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, što znači da nije neophodno da koordinatni početak prostora stanja bude ravnotežno stanje. $\mathbb{R}^n$ označava prostor stanja sistema, datog jed. (19.1), a $\|(\cdot)\|$ označava euklidsku normu.

Neka je $V: \Im \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tako da je funkcija $V(t, \mathbf{x}(t))$ ograničena za $\forall t \in \Im$, $\forall \mathbf{x}(t)$ za koje je $\|\mathbf{x}(t)\|$ takođe ograničena.

Definiše se *Ojlerov* izvod funkcije $V(t, \mathbf{x}(t))$ duž trajektorije sistema, datog jed. (19.1), na sledeći način:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x}(t))}{\partial t} + \left[grad\, V(t, \mathbf{x}(t))\right]^T \mathbf{f}(\ \ ).$$

Za vremenski invarijantne skupove se pretpostavlja: $\mathcal{S}_{(\ )}$ je ograničen, otvoren skup. Neka je $\mathcal{S}_\beta$ dati skup svih dozvoljenih stanja sistema za $\forall t \in \Im$. Skup $\mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{S}_\beta$, označava skup svih dozvoljenih početnih stanja.

Skupovi $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ su povezani i *a priori* poznati.

$\lambda(\ )$ označava sopstvene vrednosti matrice $(\ )$.

$\lambda_{\max}$ i $\lambda_{\min}$ su maksimalna i minimalna sopstvena vrednost, sledstveno.

Vremenski invarijantni skupovi, koji se koriste kao granice trajektorija sistema, zadovoljavaju uobičajene prethodno iznete pretpostavke.

Definicija 19.1 Sistem, dat jed. (19.1), koji zadovoljava početni uslov, dat jed. (19.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\zeta(t),\ \beta,\ \Im\}$ ako i samo ako $\|\boldsymbol{\varphi}_x(t)\| < \zeta(t)$, povlači $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$, $t \in \Im$, $\zeta(t)$ je skalarna funkcija sa osobinom $0 < \zeta(t) \leq \alpha$, $-\tau \leq t \leq 0$, gde je α realan pozitivan broj i $\beta \in \mathbb{R}_+$ i $\beta > \alpha$, *Debeljkovic et al.* (1997.a, 1997.b, 1997.c, 1997.d), *Nenadic et al.* (1997).

Teorema 19.1 Sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (19.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{t_0, \tau, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\Lambda_{\max}(\Pi)(t-t_0)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im \tag{19.3}$$

gde je:

$$\Lambda_{\max}(\Pi) = \lambda_{1\max}(\ ) + \tau \cdot \lambda_{2\max}(\ ) \tag{19.4}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1\max}(\ ) &= \lambda_{1\max}\left(\left(A_0^T + A_0\right) + \left(A_1^T + A_1\right)\right) \\ \lambda_{2\max}(\ ) &= \lambda_{2\max}\left(\wp\left(A_1 A_0 A_0^T A_1^T + A_1 A_1 A_1^T A_1^T\right) + 2\frac{q^2}{\wp} I\right) \end{aligned} \tag{19.5}$$

sa: $\wp > 0$ i $q > 1$, *Debeljkovic et al.* (2011.c,d)

Dokaz. Razmatra se vremenski kontinualan, linearan sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem opisan diferencijalnom jednačinom sa kašnjenjem (19.1).

Neka je $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, rešenje jed. (19.1) ako su početni trenutak i stanje $\mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{x}}(t)$, sledstveno.

Poznato je da ako je $\mathbf{x}(t)$ neprekidno diferencijabilno za $t \geq 0$, može se napisati:

$$\mathbf{x}(t-\tau) = \mathbf{x}(t) - \int_{-\tau}^{0} \left(A_0\,\mathbf{x}(t+\vartheta) + A_1\,\mathbf{x}(t-\tau+\vartheta) \right) d\vartheta \tag{19.6}$$

za $t \geq \tau$, *Hale* (1977), tako da se dinamika osnovnog sistema, datog jed. (19.1), može prepisati na sledeći način:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(A_0 + A_1\right)\mathbf{x}(t) - A_1 \int_{-\tau}^{0} \left(A_0\,\mathbf{x}(t+\vartheta) + A_1\,\mathbf{x}(t-\tau+\vartheta) \right) d\vartheta \tag{19.7}$$

za proizvoljnu vremenski kontinualnu početnu funkciju $\boldsymbol{\varphi}(t)$ na vremenskom intervalu $t \in [-2\theta, 0]$.

U radu *Hale* (1977) utvrđeno je da asimptotska stabilnost sistema, datog jed. (19.7), može obezbediti asimptotsku stabilnost prvobitnog sistema, datog jed. (19.1), s obzirom da je osnovni sistem, dat jed. (19.1), samo specijalan slučaj sistema, čija je dinamika opisana jed. (19.7). Ova važna činjenica će se direktno koristiti u drugom delu ove glave, odnosno kada se bude razmatrala *atraktivna praktična stabilnost*.

U ovom delu, radi pojednostavljivanja, koristiće se sistem, dat jed. (19.7), da bi se dobio dovoljan uslov stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu sistema, datog jed. (19.1), s obzirom da su ispunjeni uslovi manje stroži nego kada se ostvaruje asimptotska stabilnost.

Definiše se sledeća funkcija:

$$V\left(\mathbf{x}(t)\right) = \mathbf{x}^T(t)\,\mathbf{x}(t) \tag{19.8}$$

Izvod $\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right)$ duž trajektorija sistema, datog jed. (19.43), se dobija kao:

$$\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right)=\mathbf{x}^T(t)\left(\left(A_0^T+A_0\right)+\left(A_1^T+A_1\right)\right)\mathbf{x}(t)$$
$$-2\int_{-\tau}^{0}\mathbf{x}^T(t)A_1\left(A_0\,\mathbf{x}(t+\vartheta)+A_1\,\mathbf{x}(t-\tau+\vartheta)\right)d\vartheta \tag{19.9}$$

U nastavku, sledi se postupak iz rada *Su* (1994).

Primenjujući *Ruzumikhin*–ovu teoremu, *Hale* (1977), pretpostavlja se da za neku realnu konstantu $q>1$ važi sledeća nejednakost:

$$V\left(\mathbf{x}(\xi)\right)<q^2V\left(\mathbf{x}(t)\right),\quad t-2\theta\le\xi\le t \tag{19.10}$$

Osim toga korišćenjem sledeće nejednakosti, za bilo koju realnu konstantu $\wp>0$ i bilo koju simetričnu, pozitivno određenu matricu Ξ, $\Xi=\Xi^T>0$:

$$-2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t)\le\wp\mathbf{u}^T(t)\Xi^{-1}\mathbf{u}(t)+\frac{1}{\wp}\mathbf{v}^T(t)\Xi\,\mathbf{v}(t) \tag{19.11}$$

dobija se:

$$\begin{aligned}&-2\int_{-\tau}^{0}\mathbf{x}^T(t)A_1A_0\mathbf{x}(t+\vartheta)d\vartheta\le\\&\le\int_{-\tau}^{0}\left(\wp\mathbf{x}^T(t)A_1A_0A_0^TA_1^T\mathbf{x}(t)+\frac{1}{\wp}\mathbf{x}^T(t+\vartheta)\mathbf{x}(t+\vartheta)\right)d\vartheta\\&<\tau\mathbf{x}^T(t)\left(\wp A_1A_0A_0^TA_1^T+\frac{q^2}{\wp}I\right)\mathbf{x}(t)\\&<\tau\lambda_{2\max1}\left(\wp A_1A_0A_0^TA_1^T+\frac{q^2}{\wp}I\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{19.12}$$

i na istovetan način:

$$-2\int_{-\tau}^{0}\mathbf{x}^T(t)A_1A_1\mathbf{x}(t-\tau+\vartheta)d\vartheta<\tau\lambda_{2\max2}\left(\wp A_1A_1A_1^TA_1^T+\frac{q^2}{\wp}I\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \tag{19.13}$$

Korišćenjem jed. (19.13) i jed.(19.12), dobija se:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right)&<\lambda_{1\max}\left(\left(A_0^T+A_0\right)+\left(A_1^T+A_1\right)\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\\&+\tau\lambda_{2\max}\left(\wp\left(A_1A_0A_0^TA_1^T+A_1A_1A_1^TA_1^T\right)+2\frac{q^2}{\wp}I\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\\&<\Lambda_{\max}(\Pi)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{19.14}$$

$$\Lambda_{\max}(\Pi)=\Lambda_{\max}\left(A_0,A_1,\tau\right)=\lambda_{1\max}(\ )+\tau\lambda_{2\max}(\ ) \tag{19.15}$$

Iz jed. (19.14) i jed.(19.15), dobija se:

$$\frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right)}{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)} < \Lambda_{\max}(\Pi)\, d\,t \tag{19.16}$$

ili:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right)}{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)} < \int_{t_0}^{t} \Lambda_{\max}(\Pi)\, d\,t \tag{19.17}$$

i:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{x}(t_0)\, e^{\Lambda_{\max}(\Pi)(t-t_0)} \tag{19.18}$$

Konačno, ako se iskoristi prvi uslov Definicije 19.1, tada:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \alpha \cdot e^{\Lambda_{\max}(\Pi)(t-t_0)} \tag{19.19}$$

i na kraju primenom jed. (19.3), dobija se:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} < \beta, \quad \forall t \in \Im \tag{19.20}$$

čime je teorema dokazana.

Teorema 19.2 Sistem, dat jed. (19.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (19.1), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{t_0, \tau, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta, \left\|(\,\cdot\,)\right\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji matrica $P = P^T > 0$, koja je rešenje sledeće matrične jednačine:

$$A_0^T P + P A_0 = -Q \tag{19.21}$$

i matrica $Q = Q^T > 0$ i ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\| A_1 \| < \sigma_{\min}\left(Q^{\frac{1}{2}}\right)\sigma_{\max}^{-1}\left(Q^{-\frac{1}{2}}P\right) \tag{19.22}$$

i:

$$e^{\Lambda_{\max}(\Sigma)(t-t_0)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im \tag{19.23}$$

gde je:

$$\Lambda_{\max}(\Sigma) = \lambda_{1\max}(\quad) + \tau\,\lambda_{2\max}(\quad) \tag{19.24}$$

pri čemu su $\lambda_{1\max}(\quad)$ i $\lambda_{2\max}(\quad)$ dati jed. (19.14) i $\wp > 0$ i $q > 1$.

Dokaz. Ideja i prilaz iz *Teoreme* 19.1 se koriste za izvođenje uslova *atraktivne praktične stabilnosti*.

Za potrebe stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu razmatra se sistem, dat jed. (19.1).

Definiše se sledeća funkcija:

$$V\left(\mathbf{x}(t)\right) = \mathbf{x}^T(t) P\ \mathbf{x}(t) \tag{19.25}$$

Izvod $\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right)$ duž trajektorija sistema, se dobija kao:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right) &= \mathbf{x}^T(t)\Big(P\left(A_0 + A_1\right) + \left(A_0 + A_1\right)^T P\Big)\mathbf{x}(t) \\ &\quad - 2\int_{-\tau}^{0} \mathbf{x}^T(t) P A_1 \left(A_0\,\mathbf{x}(t+\vartheta) + A_1\,\mathbf{x}(t-\tau+\vartheta)\right) d\vartheta\end{aligned} \tag{19.26}$$

Sledeći rad *Su* (1994), korišćenjem jed. (19.26) i procedure iz prethodnih izvođenja, lako se pokazuje da:

$$\begin{aligned}&\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right) < \lambda_{1\max}\left(A_1^T P + P A_1 - Q\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) + \\ &+\tau\,\lambda_{2\max}\left(\wp P\left(A_1 A_0 P^{-1} A_0^T A_1^T + A_1 A_1 P^{-1} A_1^T A_1^T\right) P + 2\frac{q^2}{\wp} P\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \\ &< \Lambda_{\max}(\Sigma)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{19.27}$$

čime je dokaz završen.

Napomena 19.1 Asimptotska stabilnost sistema, datog jed. (19.1), je garantovana jed. (19.21) i jed.(19.22), na osnovu ideja prezentovanih u radu *Tissir*, *Hmamed* (1996).

Teorema 19.3 Sistem, dat jed. (19.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (19.2), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{t_0, \tau, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta, \|(\,\cdot\,)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji matrica $P = P^T > 0$, koja je rešenje sledeće matrične jednačine:

$$A_0^T P + P A_0 = -2I \tag{19.28}$$

i ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\|A_1\| < \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \tag{19.29}$$

i:

$$e^{\Lambda_{\max}(\Pi)(t-t_0)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im \tag{19.30}$$

gde je:

$$\Lambda_{\max}(\Pi) = \lambda_{1\max}(\ ) + \tau\,\lambda_{2\max}(\ ) \tag{19.31}$$

pri čemu su $\lambda_{1\max}(\ )$ i $\lambda_{2\max}(\ )$ dati jed. (19.5) i $\wp > 0$ i $1 < q < \frac{1}{\|A_1\|}\lambda_{\max}^{-1}(P)$,

Debeljkovic et al (2011.d).

Dokaz. Definiše se sledeća agregaciona funkcija:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t) \tag{19.32}$$

Dokaz asimptotskih osobina razmatranog sistema je identičan dokazu prezentovanom u radu *Xu*, *Liu* (1994) za partikularan slučaj, kada je:

$$\mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t-\tau(t))\right) = A_1\,\mathbf{x}(t-\tau) \tag{19.33}$$

Jasno je da je asimptotska stabilnost sistema, datog jed. (19.1), garantovana jed. (19.28) i jed. (19.29), na osnovu rezultata prezentovanih u radu *Xu*, *Liu* (1994) i dodatnih korekcija u radu *Mao* (1997).

Ostatak dokaza, koji se tiče stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ili *atraktivne* praktične stabilnosti je kompletno identičan dokazu prezentovanom u prethodnom odeljku i izostavlja se.

Literatura

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, "Necessary and sufficient conditions for finite–time stability of linear systems", *Proc. of the* 2003 *American Control Conference*, Denver (Colorado), 5**,** (2003) 4452–4456.

Amir-Moez, A., Extreme properties of a hermitian transformations and singular values of sum and product of linear transformations, *Duke Math J.*, 23, (1956) 463–476.

Angelo, H., *Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

Coppel, W. A., *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, Boston: D.C. Heath, 1965.

Debeljkovic, Lj. D., *Stabilty of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, (*in Serbian*), pp. 460.

Debeljkovic, Lj. D., *Linear Singular Systems with Time Delay*: Stabilty, Robustness, Stabilizability and Robustness Stabilizability, Part **I**, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 452.

Debeljkovic, D. Lj., - Editor *Time Delay Systems*, *I–Tech*, Vienna, (Austria) pp. 226, 2011.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On practical and finite-time stability of time-delay systems", *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium) July 2 - 6 (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, "Finite time stability for the metal strip cold rolling", *Proc. ASI: International Workshop on Automation in Steel Industry*, Kyongju (Korea), July 16 – 18 (1997.b) 233–238.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On practical stability of time-delay systems: New results", *Proc. 2nd ASCC* 97, Seoul (Korea), July 22 – 25 (1997.c) III - 543–545.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. Tomašević, "On practical stability of time delay system under perturbing forces", *Proc. AMSE* 97, Melbourne (Australia), October 29 – 31 (1997.d) 442–445.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On the stability of linear systems with delayed state defined over finite time interval", *Proc. CDC* 97,San Diego, California (USA), December 21 – 23 (1997.e) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, "Further results on non-lyapunov stability of time delay systems", *Proc. MELECON* 98, Tel-Aviv (Israel), May 18 – 20 Vol 1 (1998.a) 509–512.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Non-Lyapunov stability analysis of linear time delay systems", *Proc. DYCOPS* 98, Corfu (Greece), June 8 – 10 (1998.b) 549–553.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Finite time stability analysis of linear time delay systems: Bellman-Gronwall

Approach", *Proc.* 1st *IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France) July 6 – 7 (1998.c) 171–175.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, Đ. Koruga, "Further results on Non-Lyapunov stability of time delay systems", *Proc. 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), September 8 – 10 (1998.d) TS13-6–TS13-10.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, "Further results on Non-Lyapunov stability of linear systems with delayed state", *Proc.* XII *Brazilian Automatic Control Conference*, **IV**, Uberlandia (Brasil) September 14 – 18 (1998.e) 1229–1233.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, "Stabilnost neautonomnih sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu", *Zbornik radova HIPNEF* 98, Beograd (YU), Oktobar 28 – 30 (1998.f) 181–185.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, "Finite time stability of time delay systems", *IMA J. Math. Control and Information*, **16** (3) (1999) 101 – 109.

Debeljković, D.Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, pp. 220, 1999.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj.. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval",, *Proc. ACC* 2000, Chicago (USA) (2000.a) 1450-1451.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj.. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval",, *Proc. APCCM* (The 4th Asia-Pacific Conference on Control and Measurements), 9-12 July Guilin (China), part D (2000.b) 9 -14.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval and application to different chemical processes, *CHISA* 2000, 27-31 Avgust, Praha (Czech Republic), (2000.c) CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, *Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval*, Cigoja press, Belgrade, (*in Serbian*) ISBN 86-7558-212-9, 2004.

Debeljkovic, D. Lj., & S. B. Stojanovic, *Systems, Structure and Control* **-** Editior Petr Husek, – Chapter *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems Delay Dependent Approach*, pp. 029 – 060, I – Tech, ISBN 978-7619-05-3, Vienna, 2008.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, I. M. Buzurovic, N. J. Dimitrijevic, "A New Approach to the Stability of Time-Delay Systems in the Sense of Non-Lyapunov Delay-Independent and Delay-Dependent Criteria", *Proc. SISY* 2010 (*IEEE* 8th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics), Sept. 10-11, Subotica (Serbia), (2010) 213-218.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, *Time Delay Systems*, - Chapter 2 : " Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval", *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp.15 – 30, 2011.a.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, *Time Delay Systems*, - Chapter 3 : " Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp. 31 – 74, 2011.b.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, D. Popov, " On Finite and Practical Stability of Time Delayed Systems: Lyapunov-Krassovski Approach: Delay Dependent Criteria ", *Proc.* The 23 rd, Chinese Control and Decision Conference CCDC 2011, Mianyang, (China), 23 – 25 , (2011.c) 331 - 337.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, D. Popov, " On Finite Time Stability and Asymptotic Practical Stability of Time Delayed Systems: New Delay Dependent Criteria ", *Proc.* Chinese Control Conference CCDC 2011, Yantai, (China), 24 – 26, (2011.d) 1058 – 1065 CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, M. S. Aleksendric, " Time Delayed System Stability in the sense of Non- Lyapunov: Delay Independent and Delay Depandent Approach: New Results ", *Proc.* 2011 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC) Denver (Colorado), (USA), September 28 – 30, 2011, CD – Rom , (2011.e) CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, M. S. Aleksendric, "Time Delayed System Stability Theory in the sense of Non – Lyapunov – Delay Independent and Delay Dependent Approach: New Results", *Asian Journal Control*, Vol. .. No. (2011.f).*submitted*

Desoer, C. A., M. Vidysagar, *Feedback systems: input – output properties*, Academic Press, New York, 1975.

Feng, H. H., J. Hunsarg, "Stabilization of nonlinear singularly perturbed multiple time delay systems by dither", *Trans. ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118 (3) (1996) 177–181.

Hale, J. K., *Functional differential equations*, Springer, New York, 1971.

Koepcke, R. W., "On the control of linear systems with pure time lag", *Trans. ASME J. Basic Eng.*, (3) (1965) 74–80.

Lazarević, M. P., D.Lj. Debeljković, D. Krstić, *Optimalno upravljanje sistemima sa kašnjenjem u procesnoj industriji,* Tehnološko – metalurški fakultet, Beograd, 2003.a.

Lazarević, P. M., D. Lj. Debeljković, "Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed states", *Preprints 4th IFAC Workshop on Time Delay Systems,* Rocquencourt, Paris, France, September 2003, CD – Rom., 2003.b.

La Salle, S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.

Lee, T. N., S. Dianat, "Stability of Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* Vol. **26**, No 4, (1981) 951–954.

Mao, X., "Comments on "Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications"", *IEEE Trans. Automat. Control*, 42 (3), (1997) 429–430.

Nenadić, Z. Lj., *Sinteza kontinualnog automatskog upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za objekte i procese sa kašnjenjem*, Dipl. rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd (1995).

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Praktična stabilnost jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem", *Zbornik radova HIPNEF '*96, Vrnjačka Banja, 5–7 jun (1995.a) 197–204.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, *Tehnika – E*, 45 (11-12) (1995.b) E1–E7.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, “On Practical Stability of Time Delay Systems”, *Proc. American Control Conference*, Albuquerque, USA June 4 – 6 (1997) 3235–3235.

Su, J. H., “Further Results on The Robust Stability of Linear Systems with Single Time Delay”, *Systems & Contro Letters* (23), (1994) 375–379.

Su, J. H., C. G. Huang, “Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC–37** (10), (1992) 1656–1659.

Tissir, E., A. Hmamed, “Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$”, *Automatica*, **32** (12), (1996) 1723–1726.

Xu, B., Y. Liu, “Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC–39** (4), (1994) 839–841.

Weiss, L., E. F. Infante, “On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval”, *Proc. National Acad. Sci.*, **54** (1965) 44–48.

Weiss, L., E. F. Infante, “Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC–12** (1967) 54–59.

20. KONTINUALNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM: LMI PRILAZ

Kao što je već više puta podvučeno u ovom radu, koncept Ljapunovske stabilnosti, definisane na beskonačnom vremenskom intervalu, često nije dovoljan kada su u pitanju praktične primene. Razlog leži u činjenici da često nisu dopustive visoke vrednosti veličina stanja, na primer kada je prisutan fenomen zasićenja (saturacije) i slično. U ovakvim slučajevima, koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu (KVI) pruža pogodnu alternativu.

Najjednostavnije rečeno, za sistem se kaže da je stabilan na konačnom vremenskom intervalu ako, za određeni vremenski interval, njegove veličine stanja ne prelaze određene granice tokom istog intervala. Problem upravljanja na konačnom vremenskom intervalu se bavi sintezom linearnog upravljačkog sistema koji obezbeđuje stabilnost na konačnom vremenskom intervalu sistema u zatvorenom kolu dejstva.

Prvi rezultati i rešenja problema stabilnosti na KVI potiču iz šezdesetih godina 20. veka, a nakon tog perioda, naučno interesovanje se više okrenulo klasičnim ljapunovskim konceptima stabilnosti. Poslednjih godina se, međutim, konceptu stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu prišlo sa pozicija teorije linearnih matričnih nejednakosti (LMI), što je omogućilo određivanje i dobijanje manje konzervativnih uslova koji obezbeđuju stabilnost na KVI i stabilizaciju sistema na konačnom vremenskom intervalu, Kao posledica ovog interesovanja, dobijeni su mnogi rezultati za ovaj tip stabilnosti.

Vremensko kašnjenje se pojavljuje u brojnim industrijskim sistemima, hemijskim procesima, biološkim sistemima, u modelu dinamike populacije, n neuronskim mrežama, u takozvanim *velikim sistemima*. Pokazano je da je kašnjenje uzrok nestabilnosti i slabih performansi sistema automatskog upravljanja. Imajući u vidu široku rasprostranjenost sistema sa kašnjenjem i stalnu potrebu za obezbeđivanjem odgovarajućih i sve strožije definisanih performansi sistema u različitim granama inženjerstva, jasna je motivacija da se stabilnost i stabilizacija na konačnom vremenskom intervalu primene na klasu sistema sa kašnjenjem.

Nije objavljeno mnogo radova koji tretiraju problematiku stabilnosti i stabilizacije sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu. Neki rani radovi o stabilnosti sistema sa kašnjenjem na KVI se mogu naći u radovima *Debeljkovic et al.* U *Debeljković et al.* (1997) i *Nenadic et al.* (1997) su neki osnovni rezultati iz oblasti stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu prošireni na posebnu klasu sistema sa kašnjenjem, korišćenjem fundamentalne sistemske matrice. Ipak, ovi rezultati nisu primenjivi u praksi, s obzirom da iziskuju određivanje fundamentalne matrice sistema.

Matrična mera je prvi put primenjena u radovima *Debeljkovic et al.* (1997a, 1997b, 1998) i to za analizu stabilnosti na KVI linearnih sistema sa kašnjenjem.

Druga vrsta pristupa, zasnovana na poznatoj *Bellman – Gronwall*ovoj lemi, je primenjena u *Debeljkovic et al.* (1998), *Debeljkovic et al.* (1999). Na kraju, modifikovani *Bellman – Gronwall* princip je proširen na posebnu klasu kontinualnih neautonomnih sistema sa vremenskim kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu u *Debeljkovic et al.* (2000) . Prethodno nabrojani postupci daju konzervativne rezultate jer se zasnivaju na osobinama ograničenosti sistemskih odziva, odnosno rešenja modela sistema.

Konačno, poslednjih godina su objavljeni rezultato zasnovani na linearnim matričnim nejednakostima (LMI) za stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i ograničenost na конačnom vremenskom intervalu (eng. *finite-time boundedness – FTB*) za posebne klase sistema sa kašnjenjem *Gao et al.* (2011), *Wang et al* (2010). Ipak, nije napravljen pomak kada je u pitanju stabilnost i stabilizacija na KVI klase linearnih sistema sa kašnjenjem korišćenjem LMI metodologije. Radovi *Jiang* (2009), *Shen et al* (2007), *Wang et al* (2009) i *Wang et al.* (2010) razmatraju problem ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu neuronskih mreža sa kašnjenjem. U radovima *Lin, Shen* (2011) i *Lin et al.* (2011) se proučava ograničenost na konačnom intervalu prekidačkih linearnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjima i spoljašnjim poremećajima. Radovi *Gao et al.* (2011) i *Shang et al.* (2011) tretiraju problematiku umreženih upravljačkih sistema sa promenljivim kašnjenjima. U *Shang et al.* (2011) se uvodi posebna linearna transformacija kako bi se sistem sa kašnjenjem konvertovao u sistem bez kašnjenja. Na kraju, u *Moulay et al.* (2008) su razvijene metode stabilizacije na konačnom vremenskom intervalu za nelinearne funkcionale direferencijalnih jednačina sa kašnjenjem.

Polazeći od rezultata predstavljenih u *Lazarević et al.* (1999), *Debeljković, Stojanović (2011)* su proširili rezultate stabilnosti i stabilizacije na konačnom vremenskom intervalu linearnih sistema sa kašnjenje, putem Ljapunovljeve metode, korišćenjem linearnih matričnih nejednakosti. U radu su izvedeni novi dovoljni uslovi stabilnosti i stabilizacije na KVI putem povratne sprege po stanju, u obliku matričnih nejednakosti, koje se mogu svesti na LMI problem izvodljivosti. Naredna izlaganja u potpunosti prate rad *Debeljković, Stojanović (2011).*

20.1 Uvodna razmatranja

Posmatra se linearni sistem sa kašnjenjem, uz standardnu notaciju:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau)+B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{x}(t) &= \phi(t),t\in[-\tau,0]\end{aligned} \tag{20.1}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t)\in\mathbb{R}^m$ je upravljački vektor, $A_0\in\mathbb{R}^{n\times n},A_1\in\mathbb{R}^{n\times n},B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ su poznate konstantne matrice, τ je konstantno vremensko kašnjenje. Početni uslov, $\phi(t)$, je neprekidna i diferencijabilna vektorska funkcija od $t\in[-\tau,0]$.

U radu se rešava problem određivanja stabilizirajućeg statičkog upravljačkog sistema u sledećem obliku:

$$\mathbf{u}(t)=K\mathbf{x}(t) \tag{20.2}$$

sa matricom K kao parametrom sinteze koji je potrebno odrediti.

Uključivanjem izraza upravljačkog sistema (20.2) u jedn. (20.1) dobijaju se jednačine dinamike sistema u zatvorenom kolu dejstva:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \hat{A}_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau)\\ \mathbf{x}(t) &= \phi(t),t\in[-\tau,0]\end{aligned} \tag{20.3}$$

pri čemu je:

$$\hat{A}_0 = A_0+BK. \tag{20.4}$$

U radu je razmatrana stabilnost i stabilizacija na konačnom vremenskom intervalu klase sistema definisanih jedn. (20.1), sa ciljem da se razvije metoda stabilizacije koja bi obezbedila upravljačku matricu pojačanja K, kao i gornju granicu kašnjenja τ_M koja obezbeđuje da je sistem u zatvorenom kolu dejstva stabilan na konačnom vremenskom intervalu za svako τ koje zadovoljava $0 < \tau < \tau_M$. Pre nego što se nastavi sa izlaganjem rada, ponoviće se blago preformulisana definicija stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Definicija 20.1 Sistem definisan jedn. (20.1) sa $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na (c_1, c_2, T), pri čemu je $0 \le c_1 < c_2$, ako važi:

$$\sup_{t \in [-\tau, 0]} \phi^T(t)\phi(t) \le c_1 \Rightarrow \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < c_2, \forall t \in [0, T] \tag{20.5}$$

Napomena 20.1 Ljapunovska asimptotska stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu su dva koncepta nezavisna jedan od drugog: sistem koji je stabilan na konačnom vremenskom intervalu može da ne bude asimptotski stabilan, a sistem koji je asimptotski stabilan u ljapunovskom smislu može da ne bude stabilan na konačnom vremenskom intervalu ukoliko tokom prelaznog procesa veličine stanja prelaze utvrđene granice.

20.2 Glavni rezultat

Izvode se dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i stabilizacije na konačnom vremenskom intervalu, i izvodi se sinteza stabilizirajućeg upravljačkog sistema u povratnoj sprezi po stanju za sistem sa kašnjenjem, jedn. (20.1).

Teorema 20.1 Sistem (20.1) sa $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ i vremenskim kašnjenjem τ je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na (c_1, c_2, T), pri čemu je $0 \le c_1 < c_2$, ako postoji nenegativan skalar α i pozitivno određene matrice P, Q takve da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_0^T P + PA_0 + Q - \alpha P & PA_1 \\ * & -Q \end{bmatrix} \tag{20.6}$$

i

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(P)}\left[\lambda_{\max}(P)+\tau\lambda_{\max}(Q)\right]e^{\alpha T}<c_2 \tag{20.7}$$

Dokaz. Posmatra se sledeća kvaziljapunovska funkcija:

$$V(\mathbf{x}(t))=\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(\theta)Q\mathbf{x}(\theta)\,d\theta \tag{20.8}$$

Tada je vremenski izvod duž trajektorije sistema (20.1) definisan sa:

$$\begin{aligned}\dot V(\mathbf{x}(t))&=2\dot{\mathbf{x}}^T(t)P\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^T(t-\tau)Q\mathbf{x}(t-\tau)=\\&=\mathbf{x}^T(t)\left(A_0^TP+PA_0+Q\right)\mathbf{x}(t)+2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau)-\mathbf{x}^T(t-\tau)Q\mathbf{x}(t-\tau)=\\&=\boldsymbol{\xi}(t)^T\Omega\boldsymbol{\xi}(t)\end{aligned} \tag{20.9}$$

pri čemu je $\boldsymbol{\xi}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)^T & \mathbf{x}(t-\tau)^T\end{bmatrix}^T, \Gamma=\begin{bmatrix}A_0^TP+PA_0+Q & PA_1\\ * & -Q\end{bmatrix}$

Iz jed. (20.6) i (20.9) dobija se:

$$\begin{aligned}\dot V(\mathbf{x}(t))&=\boldsymbol{\xi}(t)^T\Omega\boldsymbol{\xi}(t)=\\&=\boldsymbol{\xi}(t)^T\left\{\Gamma-\begin{bmatrix}-\alpha P & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}\boldsymbol{\xi}(t)=\\&=\boldsymbol{\xi}(t)^T\Gamma\boldsymbol{\xi}(t)-\boldsymbol{\xi}(t)^T\begin{bmatrix}-\alpha P & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}(t)=\\&=\boldsymbol{\xi}(t)^T\Gamma\boldsymbol{\xi}(t)+\alpha\mathbf{x}(t)^TP\mathbf{x}(t)<\alpha\mathbf{x}(t)^TP\mathbf{x}(t)<\\&<\alpha\left[\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(\theta)Q\mathbf{x}(\theta)\,d\theta\right]<\alpha V(\mathbf{x}(t))\end{aligned} \tag{20.10}$$

Množenjem jed. (20.10) sa $e^{-\alpha t}$ dobija se

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t}V\right)<0 \tag{20.11}$$

Integraljenjem jed. (20.11) od 0 do t, sa $t\in[0,T]$, dobija se:

$$V(\mathbf{x}(t))<e^{\alpha t}V(\mathbf{x}(0)). \tag{20.12}$$

Tada je:

$$V(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0} \mathbf{x}^T(\theta)Q\mathbf{x}(\theta)d\theta \le$$

$$\le \lambda_{\max}(P)\mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) + \lambda_{\max}(Q)\int_{-\tau}^{0} \mathbf{x}^T(\theta)Q\mathbf{x}(\theta)d\theta \le \qquad (20.13)$$

$$\le \lambda_{\max}(P)c_1 + \lambda_{\max}(Q)\tau c_1 = c_1\left[\lambda_{\max}(P) + \tau\lambda_{\max}(Q)\right].$$

Sa druge strane je:

$$V(\mathbf{x}(t)) > \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t) \ge \lambda_{\min}(P)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \qquad (20.14)$$

Kombinovanjem jedn. (20.12), (20.13) i (20.14) dobija se:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}c_1\left[\lambda_{\max}(P) + \tau\lambda_{\max}(Q)\right]e^{\alpha T}. \qquad (20.15)$$

Uslov (20.7) i prethodna nejednakost povlače

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < c_2, \forall t \in [0, T] \qquad (20.16)$$

čime je dokaz završen.

Napomena 20.2 Ukoliko su uslovi (20.6) i (20.7) teoreme 20.1 zadovoljeni za $\alpha = 0,$ tada je sistem (20.1) i asimptotski stabilan u smislu Ljapunova. U ovom slučaju je stabilnost na konačnom vremenskom intervalu obezbeđena za svako $T > 0$.

Napomena 20.3 Iz jed. (20.7) i gornju granicu kašnjenja od τ_M, takvu da je sistem u zatvorenom kolu dejstva stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na svako τ koje zadovoljava $0 < \tau < \tau_M$ i konstantne α, c_1, c_2 dobija se:

$$\tau_M = \frac{c_2\lambda_{\min}(P)}{c_1\lambda_{\max}(Q)}e^{-\alpha T} - \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \qquad (20.17)$$

Sa matricama P i Q definisanim jedn. (20.6).

Napomena 20.4 Treba podvući činjenicu da uslov iz teoreme 20.1 nije standardni LMI uslov u odnosu na α, P, Q. Ipak, lako se proverava da je uslov (20.7) obezbeđen postavljanjem uslova:

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 I < P < \beta_2 I \\
&0 < Q < \beta_3 I \\
&\begin{bmatrix} -\beta_1 c_2 e^{-\alpha T} & \beta_2\sqrt{c_1} & \beta_3\sqrt{c_1\tau} \\ * & -\beta_2 & 0 \\ * & * & -\beta_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{20.18}
$$

za neke pozitivne skalare $\beta_1, \beta_2\, i\, \beta_3$. Za usvojeno fiksirano α uslovi (20.6) i (20.7) se mogu svesti na LMI problem izvodljivosti.

Posledica 20.1 (LMI problem izvodljivosti) Sistem jedn. (20.1) sa $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ i vremenskim kašnjenjem τ, je stabilan na KVI u odnosu na $(c_1, c_2, T), 0 \le c_1 < c_2$, ukoliko za usvojeno α postoje pozitivni skalari $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ i pozitivno određene simetrične matrice P, Q takve da su uslovi (20.6) i (20.18) zadovoljeni.

Polazeći od izloženih rezultata, moguće je izvršiti sintezu upravljačkog sistema sa povratnom spregom po stanju.

Teorema 20.2. Postoji upravljački sistem sa povratnom spregom po stanju u formi jedn. (20.2) takav da je sistem u zatvorenom kolu dejstva (20.3) – (20.4) stabilan na konačnom vremenskom intervalu ako postoji nenegativan skalar α i pozitivno određene simetrične matrice P, Q i matrica Z takve da su ispunjeni uslovi :

$$
\Gamma = \begin{bmatrix} XA_0^T + A_0 X + BZ + Z^T B^T + Y - \alpha X & A_1 X \\ * & -Y \end{bmatrix} < 0 \tag{20.19}
$$

i:

$$
c_1 \lambda_{\max}(X) \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(X)} + \frac{\tau}{\lambda_{\min}(XY^{-1}X)} \right] e^{\alpha T} < c_2 \tag{20.20}
$$

Pojačanje stabilizirajućeg statičkog upravljačkog sistema se sada dobija kao $K = ZX^{-1}$.

Dokaz. Iz jed. (20.6) i (20.4) dobija se :

$$\begin{bmatrix} (A_0+BK)^T P + P(A_0+BK) + Q - \alpha P & PA_1 \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{20.21}$$

Množenjem sa leve i sa desne strane prethodne nejednakosti sa $diag\left\{P^{-1}, P^{-1}\right\}$ i uz uslove $X \triangleq P^{-1} > 0, Y \triangleq P^{-1}QP^{-1} > 0$ dobija se :

$$\begin{bmatrix} XA_0^T + A_0X + XK^TB^T + BKX + XQX - \alpha X & A_1X \\ * & -XQX \end{bmatrix} < 0. \tag{20.22}$$

Neka je $K = ZX^{-1}$, tada je prethodna nejednakost ekvivalentna sa (20.19). Iz jedn. (20.7) za $P = X^{-1}$ i $Q^{-1} = P^{-1}Y^{-1}P^{-1} = XY^{-1}X$, dobija se izraz (20.20)-

Napomena 20.5 Ukoliko su uslovi (20.19) i (20.20) iz teoreme 20.2 zadovoljeni za $\alpha = 0$, tada je sistem u zatvorenom kolu dejstva, jedn. (20.3), (20.4) takođe asimptostki stabilan u smislu Ljapunova na beskonačnom vremenskom intervalu $[0, \infty]$. U tom slučaju je stabilnost na konačnom vremenskom intervalu obezbeđena za svako $T > 0$.

Napomena 20.6 Iz jed. (20.20) je moguće odrediti gornju granicu kašnjenja τ_M takvu da je sistem u zatvorenom kolu dejstva jedn. (20.3) (20.4) stabilan na KVI za svako τ koje zadovoljava $0 < \tau < \tau_M$:

$$\tau_M = \frac{c_2 \lambda_{\min}\left(XY^{-1}X\right)}{c_1 \lambda_{\max}(X)} e^{-\alpha T} - \frac{\lambda_{\min}\left(XY^{-1}X\right)}{\lambda_{\max}(X)} \tag{20.23}$$

sa matricama X, Y definisanim preko jedn. (20.22).

20.3 Numerički primeri

Primer 20.1 Razmatra se linearni kontinualni sistem sa kašnjenjem, definisan sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) + B\mathbf{u}(t)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1,7 & 1,7 & 0 \\ 1,3 & -1 & 0,7 \\ 0,7 & 1 & -0,6 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,7 & 0,1 \\ -1,3 & 1 & -0,3 \\ -0,7 & 1 & 0,6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tau = 0,2 \tag{20.24}$$

Potrebno je ispitati stabilnost sistema na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na (c_1, c_2, T), sa posebnim izborom :

$$c_1 = 0,55;\ c_2 = 100;\ T = 2;\ \phi^T(t) = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ u(t) \equiv 0$$

Rešavanjem LMI (20.6) i (20.18) (posledica 20.1), za usvojeno $\alpha = 1,95,$ mogu se dobiti sledeća prihvatljiva rešenja :

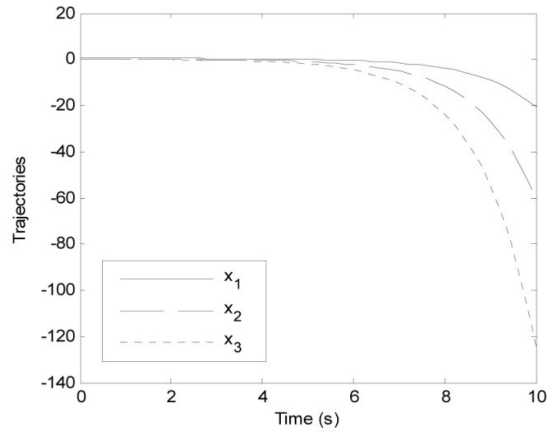
$$P = \begin{bmatrix} 3,1289 & 0,2410 & 0,0236 \\ 0,2410 & 4,9471 & -0,2070 \\ 0,0236 & -0,2070 & 2,1462 \end{bmatrix} \times 10^3, Q = \begin{bmatrix} 8,5992 & -7,2357 & -0,0336 \\ -7,2357 & 6,7240 & 0,0360 \\ -0,0336 & 0,0360 & 0,3408 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

$$b_1 = 2,1286 \times 10^3,\ b_2 = 4,9954 \times 10^3, b_3 = 1,4970 \times 10^4$$

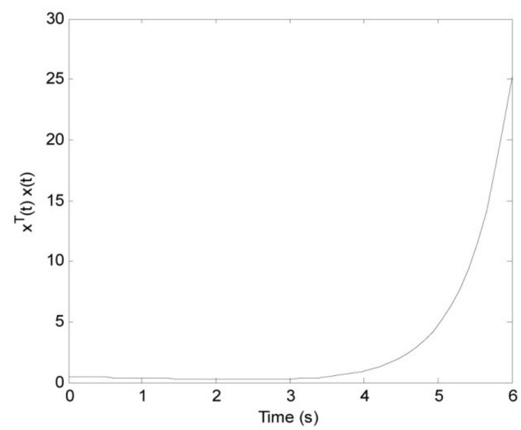
Sledi da je sistem jed. (20.24) u slobodnom radnom režimu stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(0,55,100,2)$.

Na Slici 20.1 su pokazane trajektorije sistema (20.24) sa početnim uslovima $\phi^T(t) = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, t \in [-\tau, 0].$ Vidi se da vrednosti veličina stanja $|x_i(t)| \to \infty, i = 1,2,3$ kada $t \to \infty,$ što pokazuje da sistem nije asimptotski stabilan. Ovo pokazuje da su ljapunovska asimptotska stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu dva nezavisna koncepta : sistem koji je stabilan na KVI ne mora da bude i asimptotski stabilan. Slika 20.2 pokazuje normu odziva stanja u vremenu. Korišćenjem uslova (20.6) – (20.7) (Teorema 20.1) moguće je zaključiti da sistem jed. (20.24) nije stabilan na KVI u odnsou na $(0,55,100,2)$, ali *jeste stabilan* na KVI u odnosu na $(0,55,300,2)$, sa $\alpha = 1,801.$ Tada gornja granica parametra c_2 iznosi 299,189. Sledi da Teorema 20.1 daje konzervativnije uslove od Posledice 20.1. Gornja granica kašnjenja τ_M koja obezbeđuje da sistem (20.24) bude stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(0,55,300,2)$ ima vrednost $\tau_M = 0,201$ za $\alpha = 1,7901$ (iz Teoreme 20.1) ili $\tau_M = 1,561$ za $\alpha = 2,08$ iz Posledice 20.1.

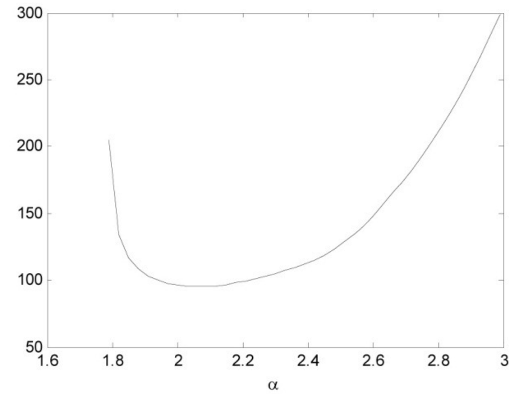
Zavisnosti parametara $c_2(\alpha)$ i $\tau(\alpha)$ za $c_1 = 0,55$ i $T = 2,$ dobijene iz posledice 20,1 su prikazane na slikama 20.3 i 20.4, sledstveno. Sa grafika funkcije se može videti da se najmanja vrednost c_2 za $\tau = 0,2$ i najveća vrednost τ za $c_2 = 150$ mogu dobiti usvajanjem $\alpha = 2,1$.



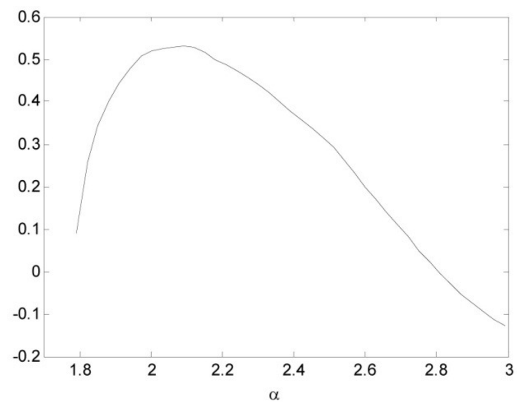
Slika 20.1 Trajektorije sistema u slobodnom radnom režimu, jed. (20.24)



Slika 20.2 – norma trajektorija sistema, jed. (20.24)



Slika 20.3 – Zavisnost parametara $c_2(\alpha)$ za $c_1 = 0,55; T = 2; \tau = 0,2$ dobijene iz Posledice 20.1



Slika 20.3 – Zavisnost parametara $\tau(\alpha)$ za $c_1 = 0,55; T = 2; c_2 = 150$ dobijene iz Posledice 20.1

Najmanja vrednost parametra c_2, dobijena za vrednost $\alpha = 2,1$ i različite vrednosti vremenskog kašnjenja τ iz Teoreme 20.1 i Posledice 20.1 su prikazane u tabeli 1. Zbog mogućnosti poređenja, u tabeli su prikazane i najmanje vrednosti parametra c_2 dobijene u *Lazarević et al.* (1999) (teoreme 2 i 3). Jasno je da Teorema 20.1 i Posledica 20.1 u ovom izloženom radu daju mnogo bolje rezultate od onih iz *Lazarević et al.* (1999), zbog primene LMI tehnike.

Tabela 20.1 Najmanje vrednosti parametra c_2 za $c_1 = 0,55, T = 2, \alpha = 2,1$

τ	0,2	0,5
Teorema 20.1	201,99	299,75
Posledica 20.1	95,59	145,04
Lazarević et al. (1999), Teorema 2	$2,27\times10^{12}$	$2,27\times10^{12}$
Lazarević et al. (1999), Teorema 2	$2,46\times10^{10}$	$2,46\times10^{10}$

Primer 20.2

Posmatra se vremenski neprekidni sistem sa vremenskim kašnjenjem, jed. (20.24). Izvršiće se projektovanje upravljačkog sistema u povratnoj grani po stanju koji stabilizuje sistem na konačnom vremenskom intervalu po Teoremi 20.2, obezbeđujući sistemu stabilnost na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(c_1, c_2, T) = (0,55;5;10)$.

Rešavanjem linearnih matričnij nejednakosti (20.19) i nejednakosti (20.20) za $\alpha = 1,1\times10^{-5}$, dobijaju se sledeća izvodljiva rešenja sistema u zatvorenom kolu dejstva.

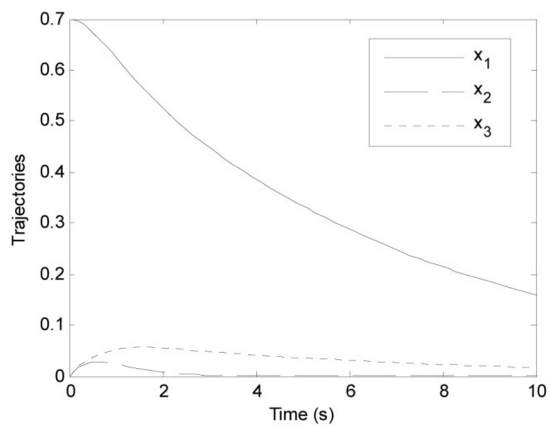
$$X = \begin{bmatrix} 4,1669 & 2,0632 & -0,5508 \\ 2,0632 & 2,8710 & -0,6659 \\ -0,5508 & -0,6659 & 2,3582 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 6,1494 & 0,6512 & 0,8662 \\ 0,6512 & 3,7410 & -0,4156 \\ 0,8662 & -0,4156 & 5,0295 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -1,8965 & -3,5254 & -3,0671 \end{bmatrix}, K = ZX^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1900 & -1,7720 & -1,7566 \end{bmatrix}$$

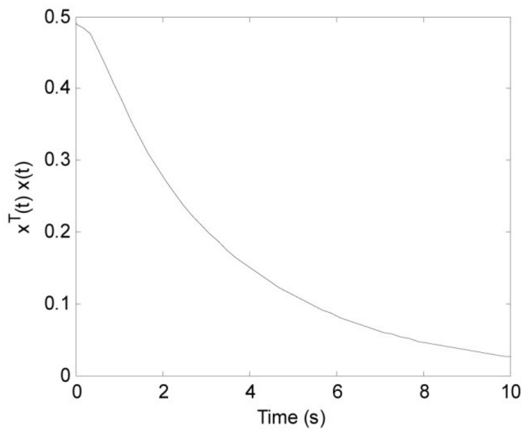
$$c_1 \lambda_{\max}(X) \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(X)} + \frac{1}{\lambda_{\min}(XY^{-1}X)} \right] e^{\alpha T} = 3,8652 < 5 = c_2$$

Sledi da postoji kosntantni statički regulator u povratnoj sprezi po stanju, oblika $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) = ZX^{-1}\mathbf{x}(t)$ koji obezbeđuje da je sistem u zatvorenom kolu dejstva stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(c_1, c_2, T) = (0,55;5;10)$.

Na slikama 20.5 i 20.6 su prikazane trajektorije odziva stanja sistema u zatvorenom kolu dejstva, kao i njihova norma. Može se zaključiti da je sistem u zatvorenom kolu dejstva asimptotski stabilan $\left(|x_i| \to 0, t \to \infty\right)$. Isti zaključak se može izvesti i na sledeći način : usvajanjem vrednosti $\alpha = 0,$ dobija se da je sistem asimptotski stabilan u smislu Ljapunova jer je $\lambda_{\max}\left\{\Gamma\big|_{\alpha=0}\right\} = -0,170 < 0$. Dalje, sa slike 20.6 se vidi da važi $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \le c_1 = 0,55 < c_2, \forall t \in [0,\infty]$, tako da je sistem u zatvorenom kolu dejstva stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(c_1, c_2, T) = (0,55;5;10)$ i za $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5}$ se dobija $\tau_M = 0,363.$ Sa druge strane, za vrednosti $(c_1, c_2, T) = (0,55;300;2)$ iz Primera 20.1, gornja granica vremenskog kašnjenja daje značajno veću vrednost $\tau_M = 42,841$.



Slika 20.5 Odziv trajektorije stanja sistema u zatvorenom kolu dejstva (20.24) sa početnim uslovom $\phi^T(t) = [0,7 \quad 0 \quad 0]$



Slika 20.6 Norma odziva trajektorije stanja sistema u zatv. kolu dejstva

Literatura

Amato, F, Ariola, M.: 'Finite-time control of discrete-time linear system', IEEE Trans. Autom. Control, 2005, 50 (5), pp. 724-729.

Amato, F., Ariola, M., Carbone, M., Cosentino, C.: 'Finite-time output feedback control of discrete-time systems'. Proc. of 16th IFAC World Congress, Pague, July 2005.

Amato, F., Ariola, M., Cosentino C.: 'Finite-time Control of Discrete-time Linear Systems: Analysis and Design Conditions', Automatica, 2010, 46, pp. 919-924.

Amato, F., Ariola, M., Cosentino, C., Abdallah, C. T., Dorato, P.: 'Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of linear systems'. Proc. of American Control Conference, Denver, Colorado, June 2003, pp. 4452–4456.12

Amato, F., Ariola, M., Dorate, P.: 'Finite-time Stabilization via Dynamic Output Feedback', Automatica, 2006, 42, pp. 337-342.

Amato, F., Ariola, M., Dorato, P.: 'Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances', Automatica, 2001, 37 (9), pp. 1459-1463.

Amato, F., Arolia, M., Dorato, P.: 'State feedback stabilization over a finite-time interval of linear systems subject to norm bounded parametric uncertainties'. Proc. of the 36th Allerton Conference, Monticello, 1998.

Ambrosino, R., Calabrese, F., Cosentino, C., De Tommasi, G.: 'Sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical systems', IEEE Trans. Autom. Control, 2009, 54, pp. 861-865.

Angelo, H.D., *Linear time-varying systems: analysis and synthesis,* Allyn and Bacon, Boston, 1970, American Control Conference, Chicago Illinois (USA), June 2000, pp. 1450 – 1451.

Debeljkovic, D.Lj., Lazarevic, M.P., Koruga, Dj., Milinkovic, S.A., Jovanovic, M.B. : 'Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval'. Proc.

Debeljkovic, D.Lj., Lazarevic, M.P., Milinkovic, S.A., Jovanovic, M.B.: 'Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman-Gronwall Approach'. Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems, Grenoble (France) July 1998, pp. 171–175.

Debeljkovic, D.Lj., Nenadic, Z.Lj., Koruga, Dj., Milinkovic, S.A., Jovanovic, M.B.: 'On Practical Stability of Time-Delay Systems: New Results'. Proc. 2nd Asian Control Conference, Seoul (Korea), July 1997, pp. 543–545.

Debeljkovic, D.Lj., Nenadic, Z.Lj., Milinkovic, S.A., Jovanovic, M.B.: 'On Practical and Finite-Time Stability of Time-Delay Systems'. Proc. European Control Conference, Brussels (Belgium) July 1997, pp.307–311. 13

Debeljkovic, D.Lj., Nenadic, Z.Lj., Milinkovic, S.A., Jovanovic, M.B.; 'On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval'. Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, California (USA), December 1997, pp. 2771–2772.

Dorato, P., "Short time stability in linear time-varying system". *Proc. IRE Internat. Conv. Rec.* Part 4, New York 1961, pp. 83–87.

Feng, J.,Wu, Z., Sun, J.: 'Finite-time control of linear singular systems with parametric uncertainties and disturbances', Acta Autom. Sin., 2005, 31 (4), pp. 634-637.

Gao, F., Yuan, Z., Yuan, F.: 'Finite-time Control Synthesis of Networked Control Systems with Timevarying Delays', Advances in Information Sciences and Service Sciences, 2011, 3 (7), pp. 1-9.

Garcia, G., Tarbouriech, S., Bernussou, J.: 'Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems', IEEE Trans. Autom. Control, 2009, 54, pp. 364-369.

Jiang, D.: ‘Finite Time Stability of Cohen-Grossberg Neural Network with Time-Varying Delays’. Proc. of the 6th International Symposium on Neural Networks on Advances in Neural Networks, Wuhan, China May 2009, pp. 522–531.

Lazarevic, M.P., Debeljkovic, D.Lj., Nenadic, Z.Lj., Milinkovic, S.A.: ‘Finite-Time Stability of Delayed Systems’, IMA J. Math. Control Inf., 1999, 17 (2), pp. 101-109.

Lin, X., Du, H., Li, S.; ‘Finite-time boundedness and L2-gain analysis for switched delay systems with norm-bounded disturbance’, Appl. Math. Comput., 2011, 217, pp. 5982–5993.

Liu, H., Shen, Y.; ‘H∞ Finite-Time Control for Switched Linear Systems with Time-Varying Delay’, Intell. Control Autom., 2011, 2, pp. 203-213.

Liu, L., Sun, J.: ‘Finite-time stabilization of linear systems via impulsive control’, Int. J. Control, 2008, 81 (6), pp. 905-909.

Ming, Q., Shen, Y.: ‘Finite-Time H∞ Control for Linear Continuous System with Norm-bounded Disturbance’, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2009, 14, pp. 1043-1049.

Moulay, E., Dambrine, M., Yeganefar, N., Perruquetti, W.: ‘Finite-time Stability and Stabilization of Time-Delay Systems’, Syst. Control Lett., 2008, 57, pp. 561-566.

Moulay, E., Perruquetti, W.; ‘Finite-Time Stability and Stabilization of a Class of Continuous Systems’, J. Math. Anal. Appl., 2006, 323, pp.1430–1443.

Nenadic, Z.Lj., Debeljkovic, D.Lj., Milinkovic, S.A.: ‘On Practical Stability of Time Delay Systems’, Proc. American Control Conference, Albuquerque, (USA) June 1997, pp. 3235–3235.

Shang, Y., Gao, F., Yuan F.: ‘Finite-time Stabilization of Networked Control Systems Subject to Communication Delay’, International Journal of Advancements in Computing Technology, Vol. 3, Num. 3, pp. 192-198, 2011.

Shen, Y., Zhu, L., Guo, Q.: ‘Finite-Time Boundedness Analysis of Uncertain Neural Networks with Time Delay: An LMI Approach’. Proc. of the 4th international symposium on Neural Networks: Advances in Neural Networks, Nanjing, China, Jun 2007, pp. 904–909.

Shen, Y.: ‘Finite-time Control for a Class of Linear Discrete-time Systems’, Control and Decision, 2008, 23, pp.107-109.

Wang, J., Jian, J., Yan, P.: 'Finite-Time Boundedness Analysis of a Class of Neutral Type Neural Networks with Time Delays'. Proc. of the 6th International Symposium on Neural Networks on Advances in Neural Networks, Wuhan, China May 2009, pp. 395–404.

Wang, X., Jiang, M., Jiang, C., Li, S.: 'Finite-Time Boundedness Analysis of Uncertain CGNNs with Multiple Delays'. Proc. of the 7th International Symposium on Neural Networks, Shanghai, China, June 2010, pp. 611–618.

Weiss, L., Infante, E.F.: 'Finite-Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces', IEEE Trans. Autom. Control, 1967, 12, pp. 54-59.

Zhao, S., Sun, J., Liu, L.: 'Finite-time stability of linear time-varying singular systems with impulsive effects', Int. J. Control, 2008, 81 (11), pp. 1824-1829.

21. DISKRETNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM: LMI PRILAZ

Linearne matrične nejednakosti (LMI) su se poslednjih godina pokazale kao izuzetno moćan matematički alat za analizu i sintezu (projektovanje) sistema automatskog upravljanja. Efikasni algoritmi konveksne optimizacije omogućavaju da se veliki broj upravljačkih problema prevede u LMI oblik.

LMI priprada, kao što je pomenuto, klasi konveksnih optimizacionih problema, što znači da globalno rešenje uvek postoji. Iz navedenog sledi da ukoliko se upravljački problem može redukovati na LMI problem, može se smatrati da je rešen.

Kada je u pitanju problem neljapunovske analize linearnih diskretnih sistema sa kašnjenjem, već je pomenuto da su prvi rezultati predstavljeni u *Debeljković, Aleksendrić* (2003) kada je problem prvi put i razmatran.

Ispitivanje stabilnosti sistema preko diskretne fundamentalne matrice je veoma nepogodno i komplikovano, tako da postoji potreba za pronalaženjem efikasnijih metoda, zasnovanih na jednostavnim izračunavanjima sopstvenih vrednosti ili normi sistemskih matrica, kao što je rađeno kod vremenski neprekidnih sistema, ili jednostavno primenom LMI pristupa.

Posmatra se diskretni sistem sa kašnjenjem definisan sa:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{M} A_j\,\mathbf{x}(k-h_j) \tag{21.1}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta) \\ \vartheta \in \{-N, (-N+1),\ \ldots, 0\} \end{gathered} \tag{21.2}$$

pri čemu su $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j = 1,\ldots,M$, h_j, $j = 1,\ldots,M$ celi brojevi koji predstavljaju vremensko kašnjenje sistema, $N = \max\{h_1, h_2, \ldots, h_M\}$, a $\psi(\cdot)$ je apriori poznata funkcija početnih uslova.

Definicije stabilnosti

Definicija 21.1 Linearni diskretni sistem sa kašnjenjem, jed. (21.1) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha,\ \beta,\ k_N,\ \|(\cdot)\|\}$, $\alpha \leq \beta$, ako i samo ako za svaku trajektoriju $\mathbf{x}(k)$ zadovoljava početnu funkciju, jedn. (21.2) tako da :

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \alpha, \quad k = 0, -1, -2, \cdots, -N \tag{21.3}$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \beta, \quad k \in K_N \tag{21.4}$$

Debeljković, *Aleksendrić* (2003).

Teoreme stabilnosti

Teorema 21.1 Sistem jed. (21.1) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{K_N, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan skalar $\gamma > 0$ i pozitivno određene matrice P, Q takve da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\Xi = \begin{pmatrix} A_0^T P A_0 + Q + P - \gamma P & A_0^T P A_1 \\ A_1^T P A_0 & Q - A_1^T P A_1 \end{pmatrix} < 0 \tag{21.5}$$

i:

$$(\gamma + 1)^k \left(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} + h \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)} \right) < \frac{\beta}{\alpha} \tag{21.6}$$
$$\forall k \in K_N$$

Debeljković, Stojanović, Dimitrijević, Popov (2012).

Dokaz. Ako se posmatra sledeća kvaziljapunovska agregaciona funkcija:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) P \mathbf{x}(k) + \sum_{j=k-h}^{k-1} \mathbf{x}^T(j) Q \mathbf{x}(j) \tag{21.7}$$

Tada, ukoliko se izračuna diferenca $\Delta V(\mathbf{x}(k))$ duž trajektorije sistema, dobija se:

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}(k)) = {} & \mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T P A_0 + Q - P\right)\mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_1 \mathbf{x}(k-h) \\ & - \mathbf{x}^T(k-h)\left(Q - A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}(k-h) = \boldsymbol{\zeta}^T(k)\Gamma\boldsymbol{\zeta}(k) \end{aligned} \tag{21.8}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}^T(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{x}^T(k-h) \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} A_0^T P A_0 + Q + P & A_0^T P A_1 \\ A_1^T P A_0 & Q - A_1^T P A_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21.9}$$

Sada se iz jedn. (21.2) i (20.5) dobija:

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}(k)) &= \boldsymbol{\zeta}^T(k)\Gamma\boldsymbol{\zeta}(k) = \boldsymbol{\zeta}^T(k)\left(\Xi - \begin{pmatrix} -\gamma P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{\zeta}(k) \\ &= \boldsymbol{\zeta}^T(k)\Xi\boldsymbol{\zeta}(k) - \boldsymbol{\zeta}^T(k)\begin{pmatrix} -\gamma P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\zeta}(k) \\ &= \boldsymbol{\zeta}^T(k)\Xi\boldsymbol{\zeta}(k) + \gamma\mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k) \\ &< \gamma\mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k) < \gamma\mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k) + \gamma\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j) = \gamma V(\mathbf{x}(k)) \end{aligned} \tag{21.10}$$

kako je $\boldsymbol{\zeta}^T(k)\Xi\boldsymbol{\zeta}(k) < 0$.

Dalje, očigledno je da važi:

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) < \gamma V(\mathbf{x}(k)) \tag{21.11}$$

tako da je:

$$V(\mathbf{x}(k+1)) < (\gamma+1)V(\mathbf{x}(k)) \tag{21.12}$$

Iterativnom primenom jed.(21.12) dobija se:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(k)) &< (\gamma+1)V(\mathbf{x}(k-1)) \\ &< (\gamma+1)^2 V(\mathbf{x}(k-2)) < (\gamma+1)^3 V(\mathbf{x}(k-3))\cdots \\ &< (\gamma+1)^k V(\mathbf{x}(0)) \end{aligned} \tag{21.13}$$

Sa druge strane važi i:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(0)) &= \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) + \sum_{j=-h}^{-1}\mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j) \\ &\le \lambda_{\max}(P)\mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) + \lambda_{\max}(Q)\sum_{j=-h}^{-1}\mathbf{x}^T(j)\mathbf{x}(j) \end{aligned} \tag{21.14}$$

što uz osnovnu pretpostavku iz definicije 21.1 dovodi do:

$$V(\mathbf{x}(0)) < \alpha\left(\lambda_{\max}(P) + h\cdot\lambda_{\max}(Q)\right) \tag{21.15}$$

Očigledno je da važi

$$V(\mathbf{x}(k)) > \mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k) \ge \lambda_{\min}(P)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) \tag{21.16}$$

Kombinovanjem jedn. (21.12), (21.15) i (21.16) lako se vidi da je:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(P)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < V(\mathbf{x}(k)) < (\gamma+1)^k V(\mathbf{x}(0)) \\ < (\gamma+1)^k \alpha\left(\lambda_{\max}(P) + h\cdot\lambda_{\max}(Q)\right)\end{aligned} \tag{21.17}$$

odnosno:

$$\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < (\gamma+1)^k \cdot \alpha\left(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} + h\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}\right) \tag{21.18}$$

Uslov (21.6) i prethodna nejednakost povlače:

$$\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in K_N \tag{21.19}$$

Čime je dokaz dovršen.

Napomena 21.1

Treba imati u vidu da uslov iz teoreme 21.1 nije klasičan LMI uslov u odnosu na γ, P, Q.

Ipak, lako se proverava da je uslov nametnut jedn. (21.6) obezbeđen kada su ispunjeni uslovi:

$$\begin{gathered}\gamma_1 I < P < \gamma_2 I \\ 0 < Q < \gamma_3 I \\ \begin{pmatrix} -\gamma_1\beta(\gamma+1)^{-k_N} & \gamma_2\sqrt{\alpha} & \gamma_3\sqrt{\alpha h} \\ \gamma_2\sqrt{\alpha} & -\gamma_2 & 0 \\ \gamma_3\sqrt{\alpha h} & 0 & -\gamma_3 \end{pmatrix} < 0\end{gathered} \tag{21.20}$$

za neke pozitivne skalare $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Za usvojeno fiksirano γ uslovi jedn. (21.5) i (21.6) se mogu pretvoriti u LMI problem izvodljivosti.

Numerički primer

U ovom delu se izlaže numerički problem kao ilustracija efikasnosti predstavljene metode.

Primer 21.1 posmatra se sledeći diskretni sistem sa kašnjenjem po stanju:

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0.05 & 0.6\end{pmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix}0.25 & 0.1\\ 0.4 & 0.25\end{pmatrix}\mathbf{x}(k-2) \tag{21.21}$$

Potrebno je ispitati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\left\{K_N, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$ uz izbor:

$$\begin{gathered}\alpha = 40, \quad \beta = 290\\ \boldsymbol{\psi}(\vartheta)=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ -3 & -3 & -3\end{pmatrix}^T\\ \vartheta \in \{-2, -1, 0\}\end{gathered} \tag{21.22}$$

Rešavanjem linearnih matričnih nejednačina za usvojeno $\gamma = 0,065$ i $h = 2$ dobijaju se sledeća rešenja:

$$P=\begin{pmatrix}1,2862 & -0,0132\\ -0,0132 & 0,5383\end{pmatrix}\times 10^4 \tag{21.23}$$

$$Q=\begin{pmatrix}3,6258 & 1,8416\\ 1,8416 & 1,0343\end{pmatrix}\times 10^3 \tag{21.24}$$

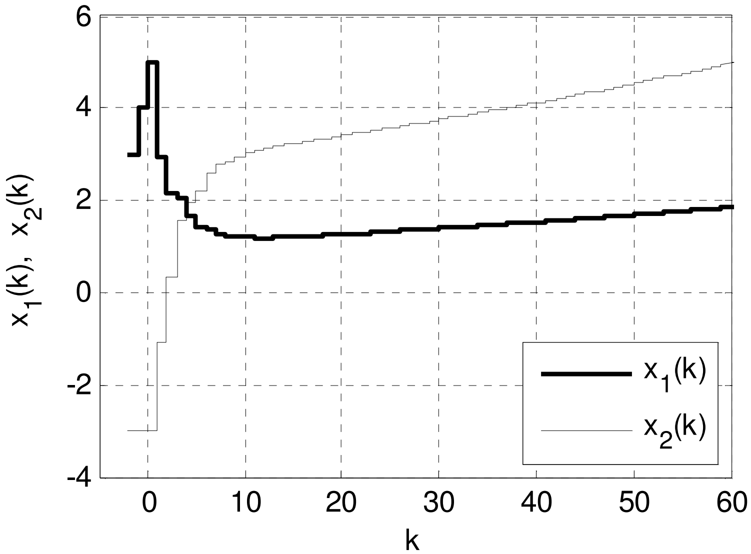
$$\begin{gathered}\gamma_1 = 5,3744\times 10^3, \ \ \gamma_2 = 1,2891\times 10^4\\ \gamma_3 = 4,5949\times 10^3\end{gathered} \tag{21.25}$$

za $k_{N\max} = k_N^{est} = 9$.

Sledi da je sistem jedn. (21.21) stabilan na KVI u odnosu na $\left\{9, 40, 290, \|(\cdot)\|^2\right\}$.

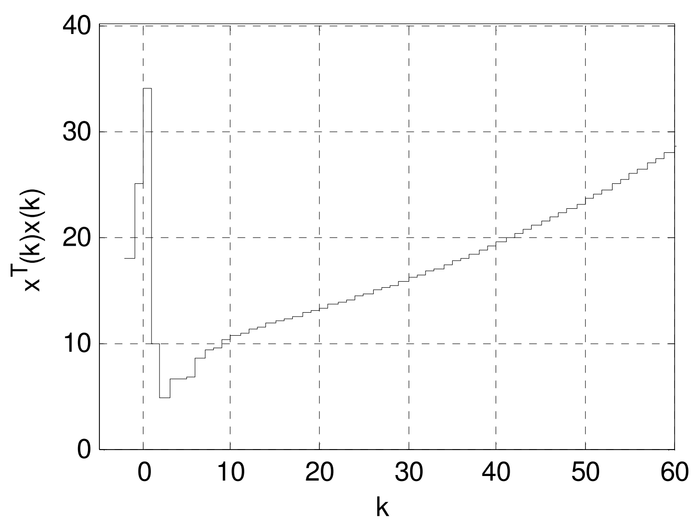
Slika 21.1 pokazuje promene veličina stanja sistema u vremenu za početne uslove $\boldsymbol{\psi}(\vartheta), \vartheta \in \{-2, -1, 0\}$

Vidi se da vrednosti veličina stanja $|x_i(k)| \to \infty, i = 1,2$ za $k \to \infty,$ što dokazuje da sistem nije asimptotski stabilan.



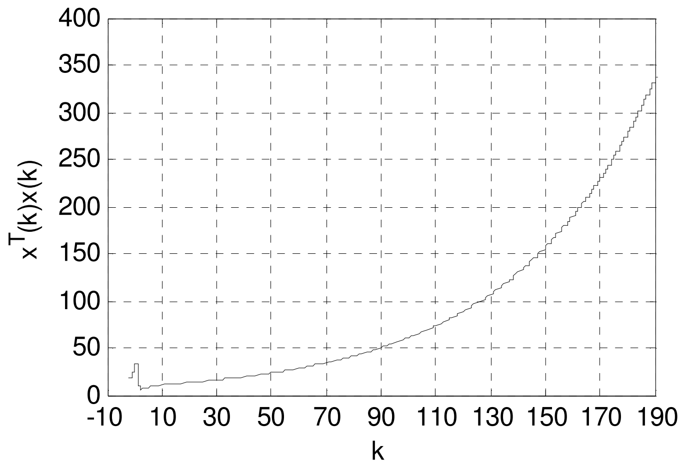
Slika 21.1. Trajektorije stanja sistema sa početnim uslovima $\boldsymbol{\psi}(\vartheta), \vartheta \in \{-2,-1,0\}$

Norma vektora stanja je prikazana na slikama 21.2.a i 21.2.b.



Slika 21.2.a detaljni prikaz norme trajektorije stanja sistema datog jed. (21.21) sa početnim uslovom $\boldsymbol{\psi}(\vartheta), \vartheta \in \{-2,-1,0\}$

.



Slika 21.2.b opšti prikaz norme trajektorije stanja sistema datog jed. (21.21) sa početnim uslovom $\psi(\vartheta), \vartheta \in \{-2,-1,0\}$

Pokazano je da su Ljapunovska stabilnost i stabilnost na KVI koncepti nezavisni jedan od drugog: sistem koji je stabilan na konačnom vremenskom intervalu može da ne bude asimptotski stabilan.

Literatura

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, "Necessary and Sufficient Conditions for Finite–Time Stability of Linear Systems", *Proc. of the* 2003 *American Control Conference*, Denver (Colorado), **5** (2003) p. 4452–4456.

Debeljković, D. Lj., "On Practical Stability of Discrete Time Control Systems", *Proc.* 3rd International Conference on Control and Applications, Pretoria (South Africa), December (2001), p. 197–201.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non–Lyapunov stability of linear discrete time delay systems", *Proc.* ACC 2003, Denver (Colorado), USA, June 4–6, (2003), p. 4450–4451.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems", *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium) July 2–6 (1997.a) p. 307–311.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc*. *CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21–23 (1997.b) p. 2771–2772.

Hmamed, A., "On the Stability of Time Delay Systems: New Results", *Int. J. Control*, **43** (1) (1986.a) p. 321–324.

Hmamed, A., "Stability Conditions of Delay–Differential Systems", *Int. J. Control*, **43** (2) (1986.b) p. 455–463.

Hmamed, A., "Further Results on the Delay–Independent Asymptotic Stability of Linear Systems", *Int. J. Systems Sci.*, **22** (6) (1991) p. 1127–1132.

Lee, E. B., W. S. Lu, N. E. Wu, "A Lyapunov Theory for Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC–31** (3) (1986) p. 259–262.

Lee, T. N., S. Diant, "Stability of Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC–26** (4), (1981) p. 951–953.

Mori, T., "Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC–30** (1985) p. 158–161.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delays", *Int. J. Control* **34** (6) (1981) p. 1175–1184.

Nenadić, Lj. Z., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On practical stability of time delay systems", *Proc. AACC*, (Annual American Control Conference), Alberquerque, New Mexico, (USA), June 4–6, (1997), p. 3235–3236.

22. KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM: DESKRIPTIVNI PRILAZ

Dinamički fizički procesi su prisutni u mnogom oblastima inženjerske tehnike, nauke i ekonomije i obično se modeliraju korišćenjem običnih diferencijalnih jednačina (ODE) ili parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDE). Sa druge strane, neka od stanja ovih sistema su podložna ograničenjima i takva stanja su promenljive veličine algebarskih jednačina. Već je iscrpno pokazano da ovako dobijeni matematički model sadrži obične ili parcijalne diferencijalne jednačine uparene sa nelinearnim algebarskim jednačinama.

Numerička rešenja diferencijalno – algebarskih jednačina se teže određuju nego rešenja običnih sistema diferencijalnih jednačina, upravo zbog prisustva linearnih i nelinearnih algebarskih relacija, kao i zbog diskontinuiteta (prekida) algebarskih promenljivih, kao što je obimno ilustrovano u uvodnim glavama ove disertacije.

Kao ilustracija, izložiće se primer singularnog sistema iz hemijskog inženjeringa. Reč je o separaciji dva alkohola (methanol,n – propanol) u destilacionoj koloni od 40 pregrada sa jednim ulaznim tokom, opisanim u *Rehme, Allgower* (2004). Singularni model sa koncentracijom x_B u grejaču, položajem profila profile s_r ispravljačka sekcija, koncentracijom x_M za ulaznom pregradom, položajem profila s_s u odvajačkoj sekciji, i koncentracijom x_D u kondenzatoru kao deskriptivnim promenljivim su opisane sledećom matričnom jednačinom *Rehme, Allgower* (2004):

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t) \tag{22.1}$$

pri čemu su:

$$E = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \square & \square & \square & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & 0 & 0 \\ \square & \square & \square & 0 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & \square & \square \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \square \\ 0 & \square \\ \square & \square \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ 0 & \square \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta x_B \\ \Delta s_r \\ \Delta x_M \\ \Delta s_s \\ \Delta x_D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1(t) = \begin{bmatrix} \Delta x_F \\ \Delta F \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2(t) = \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

Ovde "□" označava numeričke vrednosti a $\Delta z = z(t) - z_n$ je razlika između tekuće vrednosti promenljive $z(t)$ i njene nominalne vrednosti z_n.

Mešavina se dovodi u kolonu sa protokom F. Brzina protoka F i sastav mešavine x_F (molarna frakcija) su određeni procesima u gornjem toku sistema. Brzina protoka tečnosti L i pare V se smatraju ulaznim veličinama.

Primećeno je da je fenomen čistog vremenskog kašnjenja prisutan kod mnogih singularnih sistema: vremensko kašnjenje se može pojaviti u ulaznim veličinama, izlaznim veličinama i/ili u vektoru stanja. Ovakvi sistemi su klasičan primer singularnih sistem sa vremenskom kašnjenjem.

U praksi nije interesantna samo stabilnost sistema (na primer, ljapunovska), već i granice do kojih dosežu trajektorije sistema. Sistem može da bude stabilan, ali istovremeno i potpuno beskoristan jer ima nezadovoljavajuće performanse. Sa te strane posmatrano, korisno je posmatrati i analizirato stabilnost takvih sistema u odnosu na određene podskupove prostora stanja, a priori definisane za zadati problem. Osim toga, od posebnog značaja je i analiza sistema na konačnom vremenskom intervalu. Ovakve vremenski i po vrednosti ograničene osobine odziva sistema, odnosno rešenja modela sistema, su posebno važne sa inženjerske tačke gledišta. Polazeći od ove činjenice uvedene su brojne definicije takozvane tehničke i praktične stabilnosti, kao i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, detaljno prezentovane u ovom radu.

U narednim izlaganjima se detaljno izlaže rad *Debeljković, Stojanović, Aleksendrić (2012)*. U radu je razmatran problem stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i praktične stabilnosti klase linearnih singularnih sistema sa kašnjenjem.

22.1 Notacija i preliminarna razmatranja

U radu koji će biti izložen je korišćena sledeća standardna notacija:

$\mathbb{R}^n$	realni vektorski prostor
$\mathbb{C}^n$	kompleksni vektorski prostor
I	jedinična matrica
$F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$	realna matrica
F^T	transpozicija matrice F
$F > 0$	pozitivno određena matrica
$F \geq 0$	pozitivno poluodređena matrica
$\Re(F)$	prostor matrice F
$\aleph(F)$	nulti prostor (kernel) matrice F
$\lambda(F)$	sopstvena vrednost matrice F
$\lVert F \rVert = \sqrt{\lambda \max(A^T A)}$	euklidska norma matrice F
$\lVert \mathbf{x}(t) \rVert_E^2 = (E\mathbf{x}(t))^T E\mathbf{x}(t)$	norma vektora $\mathbf{x}(t)$ u odnosu na matricu E

Posmatraće se linearni kontinualni singularni sistem sa kašnjenjem:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \qquad (22.2)$$

sa poznatom kompatibilnom funkcijom početnih vrednosti

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \qquad (22.3)$$

pri čemu je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja,, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ upravljački ulaz, τ je konstantno vremensko kašnjenje, $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ su poznate konstantne matrice. Matrica $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ može biti singularna i pretpostavlja se da je $\mathrm{rang}(E) = r \leq n$.
Sledeće definicije će biti korišćene pri dokazivanju glavnog rezultata.

Definicija 22.1. Za matrični par (E, A_0) se kaže da je *regularan* ukoliko $\det(sE - A_0)$ nije identički jednako nuli, *Xu et al.* (2002).

Definicija 22.2. Za matrični par (E, A_0) se kaže da je bez impulsa ako važi $\mathit{deg}\,\det(sE - A_0) = \mathit{rank}\,E$, *Xu et al.* (2002).

Linearni kontinualni singularni sistem sa kašnjenjem (22.2) može imati impulsno rešenje. Sa druge strane, regularnost i odsustvo impulsa matričnog para (E, A_0) obezbeđuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja sistema bez impulsa. Postojanje rešenja je definisano u sledećoj lemi.

Lema 22.1. Neka je matrični par (E, A_0) regularan i bez impulsa. Tada postoji rešenje jedn. (22.2) koje je bez impulsa (glatko) i jedinstveno na [0, ∞), *Xu et al.* (2002).

Lema 22.2. Kontinualni singularni sistem

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{22.4}$$

sa

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{22.5}$$

je regularan i bez impulsa ako i samo ako je matrica A_{22} invertibilna, *Dai* (1981).

U tom smislu se uvodi sledeća definicija za singularne sisteme sa kašnjenjem (2).

Definicija 22.3. Singularni vremenski neprekidni sistem sa kašnjenjem u stanju (22.2) je regularan i bez impulsa ako je matrični par (E, A_0) regularan i bez impulsa, *Xu et al.* (2002).

Napomena 22.1. Singularnost matrice E obezbeđuje da rešenja sistema (22.2) postoje samo pri posebnim izborima $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathcal{W}^*_{cont.}$, $\forall t \in [-\tau, 0]$. U *Owens, Debeljković* (1985) je pokazano da je podprostor $\mathcal{W}^*_k$ konzistentnih početnih uslova granični slučaj algoritma ugnježdenog podprostora

$$\begin{aligned} W^*_{k,0} &= \mathbb{R}^n \\ &\vdots \\ W^*_{k,(j+1)} &= A_0^{-1}\left(EW^*_{k,(j)}\right)_{A_1=0}, \quad j \geq 0 \end{aligned} \tag{22.6}$$

Dalje, ukoliko je $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathcal{W}_k^*$, $\forall t \in [-\tau, 0]$ tada je $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_k^*$, $\forall t \geq 0$ i matrica $(\lambda E - A_0)_{A_1 = 0}$ je invertibilna za neko $\lambda \in \mathbb{C}$ (uslov jedinstvenosti), i važi $\mathcal{W}_k^* \cap \aleph(E) = \{0\}$.

22.2 Glavni rezultat

U daljoj analizi se posmatra sledeći slučaj: potprostori konzistentnih početnih uslova singularnog sistema sa kašnjenjem i singularnog sistema bez kašnjenja se podudaraju.

Kao osnovu daljeg razvoja rešenja sada se predstavljaju definicija stabilnosti i teorema.

Definicija 22.4. Singularni sistem sa kašnjenjem (22.2) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$, ako

$$\sup_{t \in [-\tau, 0]} \boldsymbol{\varphi}^T(t) E^T E \boldsymbol{\varphi}(t) \leq \alpha \tag{22.7}$$

povlači:

$$\mathbf{x}^T(t) E^T E \mathbf{x}(t) < \beta, \quad \forall t \in [0, T] \tag{22.8}$$

Teorema 22.1. Singularni sistem sa kašnjenjem jedn. (22.2) sa

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathcal{W}_{cont.}^*, \quad \forall t \in [-\tau, 0] \tag{22.9}$$

$$\mathbf{x}^T(t-\theta)\mathbf{x}(t-\theta) < q\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t), \quad q > 0, \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad \forall t \in [0, T]$$

(22.10)

pri čemu je $\mathcal{W}_k^*$ potprostor konzistentnih početnih uslova.

a) Ako postoji realan pozitivan broj $\wp$ takav da važi:

$$\Xi = A_0^T E + E^T A_0 + E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E + q\wp I < 0 \tag{22.11}$$

tada je sistem, jed. (22.2) regularan, bez impulsa i stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$ za svako $T > 0$.

b) Ako postoji realan pozitivan broj $\wp$ takav da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\Xi = A_0^T E + E^T A_0 + E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E + q\wp I > 0 \tag{22.12}$$

$$e^{\lambda_{\min}\left(\Xi, E^T E\right)T} < \frac{\beta}{\alpha} \tag{22.13}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}\left(\Xi, E^T E\right) &= \min\left(\frac{\mathbf{x}^T(t)\,\Xi\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^T(t)\,E^T E\,\mathbf{x}(t)}\right) = \\ &= \min\left[\mathbf{x}^T(t)\,\Xi\mathbf{x}(t): \quad \mathbf{x}^T(t)\,E^T E\,\mathbf{x}(t) = 1\right]\end{aligned} \tag{22.14}$$

tada je sistem (22.2) regularan, bez impulsa i stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$.

Dokaz. Uslov (22.9) obezbeđuje da sistem jed. (22.2) bude regularan i bez impulsnih članova, odnosno da su rešenja glatka.

Dalje će se dokazivati stabilnost sistema. Posmatra se sledeća kvaziljapunovska funkcija:

$$V\left(\mathbf{x}(t)\right) = \mathbf{x}^T(t)\,E^T E\,\mathbf{x}(t) \tag{22.15}$$

Totalni izvod funkcije, $\dot{V}\left(t, \mathbf{x}(t)\right)$ duž trajektorije sistema je:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right) &= \dot{\mathbf{x}}^T(t)\,E^T E\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\,E^T E\,\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T E + E^T A_0\right)\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)\,E^T A_1 \mathbf{x}(t-\tau)\end{aligned} \tag{22.16}$$

Prema poznatoj nejednakosti[16], dobija se:

$$2\mathbf{x}^T(t)\,E^T A_1 \mathbf{x}(t-\tau) \le \mathbf{x}^T(t)\,E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t-\tau)\,\wp\,\mathbf{x}(t-\tau) \tag{22.17}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right) \le\ & \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T E + E^T A_0\right)\mathbf{x}(t) \\ & + \mathbf{x}^T(t)\,E^T A_1 \mu^{-1} A_1^T E\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t-\tau)\,\mu\mathbf{x}(t-\tau)\end{aligned} \tag{22.18}$$

Korišćenjem (22.10) i (22.12), jasno je da se jedn. (22.18) svodi na:

---

[16] $2\mathbf{u}^T(t)\,\mathbf{v}(t-\tau) \le \mathbf{u}^T(t)\,\Gamma^{-1}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}^T(t-\tau)\,\Gamma\,\mathbf{v}(t-\tau)$, $\Gamma = \Gamma^T > 0$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right) &< \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T E + E^T A_0\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E\mathbf{x}(t) + q\wp\mathbf{x}^T(t)x(t) \\
&= \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T E + E^T A_0 + E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E + q\wp I\right)\mathbf{x}(t) \\
&= \mathbf{x}^T(t)\Xi\mathbf{x}(t) \\
&\quad \Xi = A_0^T E + E^T A_0 + E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E + q\wp I
\end{aligned}
\tag{22.19}
$$

Ukoliko je uslov (22.11) ispunjen, tada je sistem jed. (22.2) asimptotski stabilan u smislu Ljapunova. U tom slučaju, stabilnost na konačnom vremenskom intervalu je obezbeđena za svako $T > 0$.

Iz jedn. (22.19) se dobija:

$$
\frac{d\left[\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)\right]}{\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)} < \frac{\mathbf{x}^T(t)\Xi\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)}dt \tag{22.20}
$$

Nejednakost (22.20) je zadovoljena ukoliko je ispunjen sledeći uslov:

$$
\begin{gathered}
\frac{d\left[\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)\right]}{\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)} \le \min\left(\frac{\mathbf{x}^T(t)\Xi\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)}\right)dt = \lambda_{\min}\left(\Xi, E^T E\right)dt \\
\lambda_{\min}\left(\Xi, E^T E\right) = \min\left[\mathbf{x}^T(t)\Xi\mathbf{x}(t): \quad \mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t) = 1\right]
\end{gathered}
\tag{22.21}
$$

Nakon integracije prethodne nejednakosti dobija se:

$$
\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t) < \mathbf{x}^T(0)E^T E\,\mathbf{x}(0)e^{\lambda_{\min}\left(\Xi, E^T E\right)t} \tag{22.22}
$$

Konačno, ukoliko se iskoristi prvi uslov definicije *22.4*, sledi:

$$
\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t) < \alpha\cdot e^{\lambda_{\min}\left(\Xi, E^T E\right)t} \tag{22.23}
$$

Uslov (22.12) i (22.13) i prethodna nejednakost impliciraju:

$$
\mathbf{x}^T(t)E^T\,E\,\mathbf{x}(t) < \beta, \quad \forall t\in\left[0, T\right] \tag{22.24}
$$

Ovim je dokaz završen.

Lema 22.3. Za svaku realnu konstantu $\wp > 0$ i za svaku realnu simetričnu pozitivno određenu matricu $\Xi = \Xi^T > 0$ je ispunjen sledeći uslov:

$$
-2\mathbf{u}^T(t)\,\mathbf{v}(t) \le \wp\mathbf{u}^T(t)\,\Xi^{-1}\mathbf{u}(t) + \frac{1}{\wp}\mathbf{v}^T(t)\,\Xi\mathbf{v}(t) \tag{22.25}
$$

Teorema 22.2 Neka je singularni sistem sa kašnjenjem, definisan jed. (22.2) uz

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathcal{W}^{*}_{cont.}, \quad \forall t \in [-\tau, 0] \tag{22.26}$$

$$\mathbf{x}^T(t-\theta)\mathbf{x}(t-\theta) < q\mathbf{x}^T(t)E^T E\mathbf{x}(t), \quad q>0, \quad \theta \in [-2\tau, 0], \quad \forall t \in [0, T] \tag{22.27}$$

pri čemu je $\mathcal{W}^{*}_{k}$ podprostor konzistentnih početnih uslova.

a) Ukoliko postoji pozitivan realan broj $\wp$, takav da važi

$$\Pi = \left(A_0 + A_1\right)^T E + E^T \left(A_0 + A_1\right) + \tau\wp A_1 \left(A_0 A_0^T + A_1 A_1^T\right) A_1^T + \frac{2q\tau}{\wp} I < 0 \tag{22.28}$$

tada je sistem, jed. (22.2) regularan, bez impulsa i stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$, za svako $T > 0$.

b) Ukoliko postoji pozitivan realan broj $\wp$, takav da su sledeći uslovi zadovoljeni:

$$\Pi = \left(A_0 + A_1\right)^T E + E^T \left(A_0 + A_1\right) + \tau\wp A_1 \left(A_0 A_0^T + A_1 A_1^T\right) A_1^T + \frac{2q\tau}{\wp} I > 0 \tag{22.29}$$

$$e^{\lambda_{\min}(\Pi)T} < \frac{\beta}{\alpha} \tag{22.30}$$

sa:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}\left(\Pi, E^T E\right) &= \min\left(\frac{\mathbf{x}^T(t)\Pi\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)}\right) = \\ &= \min\left[\mathbf{x}^T(t)\Pi\mathbf{x}(t): \quad \mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t) = 1\right]\end{aligned} \tag{22.31}$$

tada je sistem (22.2) regularan, bez impulsa i stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$.

Dokaz: Uslov (22.9) obezbeđuje da je sistem (22.2) regularan i bez impulsa. Sledeće se razmatra stabilnost.

Poznato je da ukoliko je funkcija $\mathbf{x}(t)$ neprekidno diferencijabilna za $t \geq 0$, može da se napiše sledeći izraz:

$$\mathbf{x}(t-\tau) = \mathbf{x}(t) - \int_{t-\tau}^{t} \left(A_0\mathbf{x}(s) + A_1\mathbf{x}(s-\tau)\right) ds \tag{22.32}$$

za $t \geq \tau$, *Kablar, Debeljković* (1998) (1), tako da se jednačina dinamičkog ponašanja osnovnog sistema (22.2) pretvara u:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = (A_0 + A_1)\mathbf{x}(t) - A_1 \int_{t-\tau}^{t} \left(A_0\mathbf{x}(s) + A_1\mathbf{x}(s-\tau)\right) ds \tag{22.33}$$

za proizvoljnu neprekidnu funkciju početnih uslova $\boldsymbol{\varphi}(t)$ na vremenskom intervalu $t \in [-2\tau, 0]$.

U *Hale* (1977) je pokazano da asimptotska stabilnost (22.33) može da obezbedi asimptotsku stabilnost prvobitnog sistema (22.2), imajući u vidu da je osnovni sistem (22.2) samo poseban slučaj sistema čija je dinamika opisana jedn. (22.33).

Ukoliko se posmatra kvaziljapunovska funkcija:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) E^T E\mathbf{x}(t) \tag{22.34}$$

Totalni izvod $\dot{V}(\mathbf{x}(t))$ duž trajektorije kretanja sistema (22.33), je oblika:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}^T(t)\left((A_0 + A_1)^T E + E^T (A_0 + A_1)\right)\mathbf{x}(t) \\ &\quad -2\int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(t) E^T A_1 \left(A_0\mathbf{x}(s) + A_1\mathbf{x}(s-\tau)\right) ds\end{aligned} \tag{22.35}$$

Daljim korišćenjem leme 22.3 i jed. (22.27) dobija se:

$$\begin{aligned}&-2\int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(t) E^T A_1 A_0 \mathbf{x}(s)\, ds \le \\ &\le \int_{t-\tau}^{t} \wp \mathbf{x}^T(t) E^T A_1 A_0 A_0^T A_1^T E\, \mathbf{x}(t)\, ds + \int_{t-\tau}^{t} \frac{1}{\wp} \mathbf{x}^T(s)\mathbf{x}(s)\, ds \\ &< \tau\wp \mathbf{x}^T(t) E^T A_1 A_0 A_0^T A_1^T E\mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau}^{t} \frac{q}{\wp} \mathbf{x}^T(t) E^T E\mathbf{x}(t)\, ds \\ &< \mathbf{x}^T(t) E^T \left(\tau\wp A_1 A_0 A_0^T A_1^T + \frac{q\tau}{\wp} I\right) E\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{22.36}$$

Odnosno, na isti način:

$$\begin{aligned}-2\int_{-\tau}^{0} \mathbf{x}^T(t) E^T A_1 A_1 \mathbf{x}(s-\tau)\, ds &< \int_{t-\tau}^{t} \wp \mathbf{x}^T(t) E^T A_1 A_1 A_1^T A_1^T E\, \mathbf{x}(t)\, ds \\ &\quad + \int_{t-\tau}^{t} \frac{1}{\wp} \mathbf{x}^T(s-\tau)\mathbf{x}(s-\tau)\, ds \\ &< \tau\wp \mathbf{x}^T(t) E^T A_1 A_1 A_1^T A_1^T E\mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau}^{t} \frac{q}{\wp} \mathbf{x}^T(t) E^T E\mathbf{x}(t)\, ds \\ &< \mathbf{x}^T(t) E^T \left(\tau\wp A_1 A_1 A_1^T A_1^T + \frac{q\tau}{\wp} I\right) E\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{22.37}$$

Korišćenjem (22.35), (22.36) i (22.37) dobija se:

$$\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right) < \mathbf{x}^T(t)\Pi\mathbf{x}(t)$$
$$\Pi = \left(A_0 + A_1\right)^T E + E^T\left(A_0 + A_1\right) + \tau\wp A_1\left(A_0 A_0^T + A_1 A_1^T\right)A_1^T + \frac{2q\tau}{\wp}I \qquad (22.38)$$

Ukoliko je uslov (22.28) zadovoljen, tada je sistem (22.2) asimptoski stabilan u smislu Ljapunova. U tom slučaju je stabilnost na konačnom vremenskom intervalu obezbeđena za svako $T > 0$.

Iz (22.38) se dobija:

$$\frac{d\left[\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)\right]}{\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)} < \frac{\mathbf{x}^T(t)\Pi\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)}dt \qquad (22.39)$$

Ukoliko je ispunjeno

$$\frac{d\left[\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)\right]}{\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)} \le \min\left(\frac{\mathbf{x}^T(t)\Pi\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t)}\right)dt = \lambda_{\min}\left(\Pi, E^T E\right)dt$$
$$\lambda_{\min}\left(\Pi, E^T E\right) = \min\left[\mathbf{x}^T(t)\Pi\mathbf{x}(t): \quad \mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t) = 1\right] \qquad (22.40)$$

tada je zadovoljena jedn. (22.39). Nakon integracije prethodne nejednakosti dobija se:

$$\mathbf{x}^T(t)E^T E\mathbf{x}(t) < \mathbf{x}^T(0)E^T E\mathbf{x}(0)e^{\lambda_{\min}\left(\Pi, E^T E\right)t} \qquad (22.41)$$

Konačno, ukoliko se iskoristi prvi uslov Definicije 22.4 za $\forall\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathcal{W}_k^*$ dobija se:

$$\mathbf{x}^T(t)E^T E\mathbf{x}(t) < \alpha \cdot e^{\lambda_{\min}\left(\Pi, E^T E\right)T} \qquad (22.42)$$

i, konačno, iz jed. (22.29), (22.30) i (22.42) se dobija:

$$\mathbf{x}^T(t)E^T E\mathbf{x}(t) < \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} < \beta, \quad \forall t \in [0, T] \qquad (22.43)$$

što je trebalo dokazati.

Napomena 22.2 Izrazi (22.14) i (22.31) su poznati kao Rajlijev kvocijent čiji minimum je moguće odrediti primenom standardnih numeričkih metoda.

Napomena 22.3 Uslovi (22.10) i (22.27) su glavni uzrok konzervativnosti u teoremama 22.1 i 22.2 sledstveno. Teško je odrediti parametar q tako da (22.10) ili (22.27) budu zadovoljene, jer se smatra da je rešenje sistema (22.2) nepoznato. Jedan od načina da se izvrši estimacija parametra q je simulacijom sistema (22.2) za poznate početne funkcije. Sledi da prethodno izložene teoreme imaju više teoretski nego praktični značaj. U narednom poglavlju će biti izložen savremeni pristup preko linearnih matričnih nejednakosti.

Literatura

Campbell S.L. , *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

Dai L., *Singular Control Systems*, Springer, Berlin, 1981.

Debeljković, D. Lj.,, S. B. Stojanovic, M. S. Aleksendric, "Finite Time Stability of Linear Time Invariant Discrete Descriptor System: an LMI Approach", *TTEM* (BIH), 2012

Debeljkovic D.Lj., Kablar N.A., Finite time instability of time varying linear singular systems, *Proc. IEEE ACC 99*, San Diego, USA, June 2-4 (1999) 1796-1800.

Debeljkovic D.Lj., Kablar N.A., Finite time stability of linear singular systems: Bellman-Gronwall approach, *Proc. IEEE ACC 99*, San Diego, USA, June 2-4, (1999) 1803-1806.

Debeljkovic D.Lj., Kablar N.A., On necessary and sufficient conditions of linear singular systems stability operating on finite time interval, *Proc. XII CBA* , Uberlandia, Brazil Sep. 14 -18 (1998) Vol. IV, 1241-1246.

Debeljkovic D.Lj., Lazarevic M.P., Koruga Dj., Tomasevic S., Finite time stability of singular systems operating under perturbing forces: Matrix measure approach, *Proc. AMSE Conference*, Melbourne Australia, October 29 – 31 (1997) 447–450.

Fridman E., Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach, *J. Math. Anal. Appl*., 273 (2002) 24–44.

Hale J.K., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

Jun-E F., Zhen W., Jia-Bing S., Finite-time control of linear singular systems subject to parametric uncertain and disturbances, *Acta Autom. Sin*., 31(4) (2005) 634-637.

Kablar N.A., Debeljkovic D. Lj., Non-Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach, *Proc. 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang, China, September 8-10 (1998) 16 – 20.

Kablar N.A., Debeljkovic D.Lj., Non-Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach, *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems*, Padova, Italy, July 6-10 (1998).

Kablar N.A., Debeljkovic D.Lj., Finite time stability of time varying singular systems, *Proc IEEE Decision and Control*, Florida, USA, December 10-12 (1998) 3831-3836.

Kumar A., Daoutidis P., Control of nonlinear differential algebraic equation systems: an overview, *Proc. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Model Based Process Control*, Antalya, Turkey, August 10-20, (1997) 311-344.

Müller P.C., Stability of Linear Mechanical Systems with Holonomic Constraints, *Appl. Mech. Rev*., 46 (11) (1993) 60–164.

Owens D.H., Debeljkovic D.Lj., Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems: a Geometric Analysis, *IMA J. Math. Control Inf.*, 2 (1985) 139-151.

Pantelides C.C., Gridsis D., Morison K.R., Sargent R.W.H., The mathematical modeling of transient systems using differential-algebraic equations, *Comp.& Chem. Eng*., 12 (1988) 449–454.

Rehm A., Allgower F., H-Infinity Control of Descriptor Systems: An Application from Binary Distillation Control, *Proc. 7 International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, Hong Kong, 11-14 January (2004).

Su M., Wang S., Zhang X., Finite-Time Stabilization for Singular Linear Time-delay Systems with Time-varying Exogenous Disturbance, *Adv. Mater. Res*., 490-495 (2012) 2459-2463.

Xu S., Dooren P.V. ,Stefan R., Lam J., Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty, *IEEE Trans. Autom. Control*, 47(7) (2002) 1122–1128.

Xu S., Lam J., Yang C., H_∞ control for uncertain singular systems with state delay, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 13(13) 1213–1223.

Xu S., Lam J., Zou Y., An improved characterization of bounded realness for singular delay systems and its applications, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 18(3) (2008) 263–277.

Yang C., Zhang Q., Zhou L., Practical stability of descriptor systems with time delays in terms of two measurements, *J. Franklin Inst*., 343 (2006) 635–646.

Yang C.Y., Jing X., Zhang Q.L., Zhou L.N., Practical stability analysis and synthesis of linear descriptor systems with disturbances, *Int. J. Autom. Comput*., 5(2) (2008) 138–144.

Yangy C., Zhang Y.Q., Linz Y., Zhouy L., Practical stability of closed-loop descriptor systems, *Int. J. Syst. Sci.*, 37(14) (2006) 1059–1067.

Yue D., Han Q.-L., Delay-dependent robust H_∞ controller design for uncertain descriptor systems with time-varying discrete and distributed delays, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 152(6) (2005) 628–638.

Zhu S., Zhang C., Cheng Z., Feng J., Delay-dependent robust stability criteria for two classes of uncertain singular time-delay systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(5) (2007) 880–885.

23. KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM: MODERNI LMI PRILAZ

Nadovezujući se na primer iz prethodnog poglavlja, naredna izlaganja nastavljaju da prate rad *Debeljković, Stojanović, Aleksendrić (2012).* Biće izvedeni dovoljni uslovi pod kojima će singularni sistem sa kašnjenjem, jed. (23.1) biti regularan, bez impulsa i stabilan na konačnom vremenskom intervalu ili atraktivno (privlačno) praktično stabilan.

Ponovo se posmatra linearni kontinualni singularni sistem sa kašnjenjem:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \tag{23.1}$$

sa poznatom kompatibilnom funkcijom početnih vrednosti

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \le t \le 0 \tag{23.2}$$

Pri čemu je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja,, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ upravljački ulaz, τ je konstantno vremensko kašnjenje, $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ su poznate konstantne matrice. Matrica $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ može biti singularna i pretpostavlja se da je $\operatorname{rang}(\hat{E}) = r \le n$.

U nastavku pomenutog rada se, korišćenjem linearnih matričnih nejednakosti, izvode dovoljni uslovi pod kojima će sistem (23.1) biti regularan, bez impulsa i stabilan na konačnom vremenskom intervalu ili praktično atraktivno stabilan. LMI pristup je korišćen sa ciljem da se dobiju manje konzervativni uslovi. Ovako izvedeni uslovi stabilnosti imaju veliki značaj sa praktične tačke gledišta jer su zasnovani na standardnim metodama numeričke optimizacije.

Definicija 23.1. Singularni sistem sa vremenskim kašnjenjem (23.1) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$, ako

$$\sup_{t\in[-\tau,0]} \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(t) \le \alpha \tag{23.3}$$

povlači

$$\mathbf{x}^T(t)E^T E\,\mathbf{x}(t) < \beta, \quad \forall t \in [0,T] \tag{23.4}$$

Teorema 23.1. Singularni sistem sa kašnjenjem (23.1) je regularan, bez impulsa i stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$ ako postoji pozitivni skalar $\wp$ i dve pozitivno određene matrice $\Pi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kao i nesingularna matrica P, takvi da su sledeći uslovi ispunjeni:

$$PE = E^T P^T \geq 0 \tag{23.5}$$

$$PE = E^T \, \Pi \, E \tag{23.6}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} A_0^T P^T + PA_0 + Q - \wp EP & PA_1 \\ A_1^T P^T & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{23.7}$$

i:

$$\lambda_{\max}(PE) + \tau \lambda_{\max}(Q) < \frac{\beta}{\alpha} e^{-\wp T} \lambda_{\min}(\Pi) \tag{23.8}$$

Dokaz. Dokaz ove teoreme je podeljen na dva dela.

Prvo će se odrediti uslovi regularnosti i odsustva impulsa, a nakon toga će se posvetiti pažnja problemu stabilnosti.

Kako bi se pokazalo da je sistem (23.1) regularan i sa glatkim rešenjima (bez impulsa), polazi se od jed. (23.7) iz koje se lako vidi da važi:

$$A_0^T P^T + PA_0 - \wp PE < 0 \tag{23.9}$$

Ukoliko se usvoje dve nesingularne matrice M i N, takve da važi

$$\hat{E} = MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_0 = MA_0N = \begin{bmatrix} \hat{A}_0^{11} & \hat{A}_0^{12} \\ \hat{A}_0^{21} & \hat{A}_0^{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_1 = MA_1N = \begin{bmatrix} \hat{A}_1^{11} & \hat{A}_1^{12} \\ \hat{A}_1^{21} & \hat{A}_2^{22} \end{bmatrix} \tag{23.10}$$

i neka je

$$\hat{P} = N^T PM^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} \end{bmatrix} \tag{23.11}$$

pri čemu su particije blokovske matrice, jedn. (23.11) kompatibilnih dimenzija sa onima iz jedn. (23.10), iz jed. (23.5), (23.10) i (23.11) se dobija

$$PE = N^{-T} \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & 0 \\ \hat{P}_{21} & 0 \end{bmatrix} N^{-1}, \quad E^T P^T = N^{-T} \begin{bmatrix} \hat{P}_{11}^{\,T} & \hat{P}_{21}^{\,T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N^{-1} \tag{23.12}$$

Preko jed. (23.12), je moguće proveriti da važi

$$\hat{P}_{11} = \hat{P}_{11}^{\,T}, \quad \hat{P}_{21} = 0 \tag{23.13}$$

dok iz jedn. (23.9), (23.10) i (23.11) može da se pokaže da važi

$$\hat{A}_0^T \hat{P}^T + \hat{P}\hat{A}_0 - \wp \hat{P}\hat{E} < 0 \tag{23.14}$$

Polazeći od (23.13) dobija se

$$\begin{bmatrix} \odot & \odot \\ \odot & \hat{A}_0^{22\,T} \hat{P}_{22}^T + \hat{P}_{22}\hat{A}_0^{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{23.15}$$

pri čemu simbol "$\odot$" označava matricu nebitnu za dalja izračunavanja. Iz jed. (23.15) se dedukcijom izvodi:

$$\hat{A}_0^{22\,T} \hat{P}_{22}^T + \hat{P}_{22}\hat{A}_0^{22} < 0 \tag{23.16}$$

odnosno $\hat{A}_0^{22} \neq 0$, jer je $\hat{P}_{22} \neq 0$. Sledi, prema definiciji 22.3 i lemi 22.2, da je sistem (23.1) regularan i bez impulsa.

Sada će se dokazati i stabilnost sistema. Posmatra se kvaziljapunovska funkcija sledećeg oblika:

$$V\big(\mathbf{x}(t)\big) = \mathbf{x}^T(t)\, PE\, \mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta)\, Q\, \mathbf{x}(\vartheta)\, d\vartheta \tag{23.17}$$

Neka je sa $\dot{V}\big(\mathbf{x}(t)\big)$ označen vremenski izvod funkcije $V\big(\mathbf{x}(t)\big)$ duž trajektorije sistema (23.1), tako da je moguće pisati:

$$\begin{aligned} \dot{V}\big(\mathbf{x}(t)\big) &= \dot{\mathbf{x}}^T(t)\, PE\, \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\, PE\, \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta) Q \mathbf{x}(\vartheta)\, d\vartheta \\ &= \mathbf{x}^T(t)\big(A_0^T P^T + PA_0\big)\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) PA_1 \mathbf{x}(t-\tau) \\ &\quad + \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-\tau) Q \mathbf{x}(t-\tau) \\ &= \boldsymbol{\zeta}^T(t)\, \Gamma\, \boldsymbol{\zeta}^T(t) \end{aligned} \tag{23.18}$$

pri čemu je :

$$\boldsymbol{\zeta}^T(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{x}^T(t-\tau) \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} A_0^T P^T + PA_0 + Q & PA_1 \\ A_1^T P^T & -Q \end{bmatrix} \tag{23.19}$$

Iz (23.7) i (23.18), dobija se:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \boldsymbol{\zeta}^T(t)\Gamma\boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{\zeta}^T(t)\left(\Xi + \begin{bmatrix} \wp PE & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{\zeta}(t) \\
&= \boldsymbol{\zeta}^T(t)\Xi\boldsymbol{\zeta}(t) + \boldsymbol{\zeta}^T(t)\begin{bmatrix} \wp PE & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}(t) \\
&< \wp\mathbf{x}^T(t)PE\,\mathbf{x} < \wp\left(\mathbf{x}^T(t)PE\,\mathbf{x}(t) + \wp\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(\vartheta)Q\,\mathbf{x}(\vartheta)\,d\vartheta\right) \\
&= \wp V(\mathbf{x}(t))
\end{aligned}
\tag{23.20}
$$

Integracijom (23.20) od 0 do $t \le T$, dobija se:

$$
V(\mathbf{x}(t)) < e^{\wp t}V(\mathbf{x}(0)) \tag{23.21}
$$

Tako da važi:

$$
V(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}^T(0)PE\,\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0}\mathbf{x}^T(\vartheta)Q\,\mathbf{x}(\vartheta)\,d\vartheta \tag{23.22}
$$

Imajući u vidu da je:

$$
PE = E^T\Pi\,E \tag{23.23}
$$

iz jedn. (23.22) i prvog uslova definicije 23.6, sledi:

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{x}(0)) &= \mathbf{x}^T(0)PE\,\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0}\mathbf{x}^T(\vartheta)Q\,\mathbf{x}(\vartheta)\,d\vartheta \\
&\le \lambda_{\max}(PE)\mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) + \lambda_{\max}(Q)\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\varphi}^T(\vartheta)\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)\,d\vartheta \\
&\le \lambda_{\max}(PE)\cdot\alpha + \lambda_{\max}(Q)\cdot\alpha\int_{-\tau}^{0}d\vartheta \le \alpha\left(\lambda_{\max}(PE) + \tau\cdot\lambda_{\max}(Q)\right)
\end{aligned}
\tag{23.24}
$$

Sa druge strane, očigledno je da važi:

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}^T(t)PE\,\mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(\vartheta)Q\,\mathbf{x}(\vartheta)\,d\vartheta \\
&> \mathbf{x}^T(t)PE\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t)E^T\Pi\,E\mathbf{x}(t) > \lambda_{\min}(\Pi)\mathbf{x}^T(t)E^TE\mathbf{x}(t)
\end{aligned}
\tag{23.25}
$$

Iz jed. (23.25) sledi:

$$
\mathbf{x}^T(t)E^TE\mathbf{x}(t) < \frac{1}{\lambda_{\min}(\Pi)}V(\mathbf{x}(t)) \tag{23.26}
$$

tako da se, kombinovanjem jed.(23.21), (23.24) i (23.26), dobija:

$$
\mathbf{x}^T(t)E^TE\mathbf{x}(t) < \frac{1}{\lambda_{\min}(\Pi)}e^{\wp t}V(\mathbf{x}(0)) < \alpha e^{\wp T}\,\frac{\lambda_{\max}(PE) + \tau\cdot\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(\Pi)} \tag{23.27}
$$

Uslov (23.8) i gornja nejednakost povlače:

$$\mathbf{x}^T(t)E^T E\mathbf{x}(t) < \beta, \quad \forall t \in [0,T] \tag{23.28}$$

Čime je dokaz završen.

Napomena 23.1. Treba podvući činjenicu da uslov iz teoreme 4 nije klasičan LMI uslov u odnosu na $\wp$, Π i Q.

Neka je

$$0 < \lambda_1 < \lambda_{\min}(\Pi), \quad \lambda_2 > \lambda_{\max}(PE), \quad \lambda_3 > \lambda_{\max}(Q) \tag{23.29}$$

Tada važi:

$$\lambda_1 I < \Pi, \quad \lambda_2 I > PE, \quad \lambda_3 I > Q \tag{23.30}$$

$$-\beta e^{-\alpha T}\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha\tau\lambda_3 < 0 \tag{23.31}$$

Iz jed. (23.31) se dobija

$$-\beta e^{-\wp T}\lambda_1 + \alpha\tau\lambda_3 - \sqrt{\alpha}\lambda_2(-\lambda_2)^{-1}\sqrt{\alpha}\lambda_2 < 0 \tag{23.32}$$

Korišćenjem Šurovog komplementa moguće je pisati

$$\begin{bmatrix} -\beta e^{-\wp T}\lambda_1 + \alpha\tau\gamma_3 & \sqrt{\alpha}\lambda_2 \\ \sqrt{\alpha}\lambda_2 & -\lambda_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{23.33}$$

$$\begin{bmatrix} -\beta e^{-\wp T}\lambda_1 + \alpha\tau\lambda_3 & \sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & -\lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha\tau}\lambda_3 \\ 0 \end{bmatrix}(-\lambda_3)^{-1}\begin{bmatrix} \sqrt{\alpha\tau}\lambda_3 & 0 \end{bmatrix} < 0 \tag{23.34}$$

$$\begin{bmatrix} -\beta e^{-\wp T}\lambda_1 & \sqrt{\alpha}\lambda_2 & \sqrt{\alpha\tau}\lambda_3 \\ * & -\lambda_2 & 0 \\ * & * & -\lambda_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{23.35}$$

Kada se usvoji fiksno $\wp$ za poznate α i β, uslovi (23.7) - (23.8) se mogu pretvoriti u problem zasnovan na LMI.

Posledica 23.1. Singularni sistem sa kašnjenjem (23.1) je regularan, bez impulsa i stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$, ako za neki konstantni nenegativni skalar $\wp$ postoje pozitivni skalari λ_1, λ_2 i λ_3, nesingularna matrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pozitivno određene matrice $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, takve da važe sledeći uslovi:

$$PE = E^T P^T \geq 0 \tag{23.36}$$

$$PE = E^T \Pi E \tag{23.37}$$

$$\begin{bmatrix} A_0^T P^T + PA_0 + Q - \wp PE & PA_1 \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{23.38}$$

$$\lambda_1 I < \Pi, \quad \lambda_2 I > PE, \quad \lambda_3 I > Q \tag{23.39}$$

$$\begin{bmatrix} -\beta e^{-\wp T} \lambda_1 & \sqrt{\alpha} \lambda_2 & \sqrt{\alpha \tau} \lambda_3 \\ * & -\lambda_2 & 0 \\ * & * & -\lambda_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{23.40}$$

Sada će se izložiti definicija atraktivne praktične stabilnosti i dovoljni uslovi da sistem (23.1) bude privlačno praktično stabilan.

Definicija 23.2. Singularni sistem sa kašnjenjem (23.1) je atraktivno praktično stabilan u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$ ako

$$\sup_{t \in [-\tau, 0]} \boldsymbol{\varphi}^T(t) \boldsymbol{\varphi}(t) \leq \alpha \tag{23.41}$$

povlači

$$\mathbf{x}^T(t) E^T E \mathbf{x}(t) < \beta, \quad \forall t \in [0, T] \tag{23.42}$$

Sa sledećom osobinom

$$\lim_{t \to \infty} x^T(t) x(t) \to 0 \tag{23.43}$$

Teorema 23.2. Singularni sistem sa kašnjenjem (23.1) je regularan, bez impulsa i privlačno praktično stabilan u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$, ako postoje pozitivno određene matrice X, Y takve da su zadovoljene sledeće linearne matrične nejednakosti (LMI):

$$XE = E^T X^T \geq 0 \tag{23.44}$$

$$\begin{bmatrix} A_0^T X^T + XA_0 + Y & XA_1 \\ * & -Y \end{bmatrix} < 0 \tag{23.45}$$

i pozitivno određene matrice P, Q, nenegativna konstanta $\wp$, i pozitivne konstante λ_1, λ_2 i λ_3 takve da su sledeće linearne matrične nejednakosti zadovoljene:

$$PE = E^T P^T \geq 0 \tag{23.46}$$

$$PE = E^T \Pi E \tag{23.47}$$

$$\begin{bmatrix} A_0^T P^T + PA_0 + Q - \wp PE & PA_1 \\ * & -Q \end{bmatrix} \leq 0 \tag{23.48}$$

$$\lambda_1 I < \Pi, \quad \lambda_2 I > PE, \quad \lambda_3 I > Q \tag{23.49}$$

$$\begin{bmatrix} -\beta e^{-\wp T}\lambda_1 & \sqrt{\alpha}\lambda_2 & \sqrt{\alpha\tau}\lambda_3 \\ * & -\lambda_2 & 0 \\ * & * & -\lambda_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{23.50}$$

Dokaz. Regularnost i odsustvo impulsa u sistemu su dokazani u prethodnoj teoremi. Polazeći od Posledice 23.1, prva dva uslova definicije 23.2 su izvedena u jedn.(23.46)-(23.50).

Dalje, ukoliko su uslovi (23.36) i (23.38) zadovoljeni za $\wp = 0$, tada je sistem (23.1) asimptotski stabilan što povlači (23.43). Imajući u vidu da su uslovi (23.44) i (23.45) ekvivalentni uslovima (23.36) i (23.38), sledstveno, sledi da je treći uslov definicije 23.6 takođe ispunjen.

Ovim je dokaz završen.

Napomena 23.5. Prema saznanjima autora ne postoje dostupni rezultati o stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i privlačnoj stabilnosti u smislu definicija 23.1 i 23.2 za klasu linearnih neprekidnih sistema sa kašnjenjem, tako da nije moguće izvršiti poređenje izloženih rezultata sa nekim postojećim.

Numerički primeri

Efikasnost izloženih rezultata će biti ilustrovana numeričkim primerima. Polazeći od Napomene 22.3 iz prethodnog poglavlja, daju se rešenja dva problema atraktivne praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu korišćenjem teoreme 23.1 i 23.2.

Primer 23.1. Neka je zadat sledeći nestabilni singularni neprekidni sistem sa vremenskim kašnjenjem:

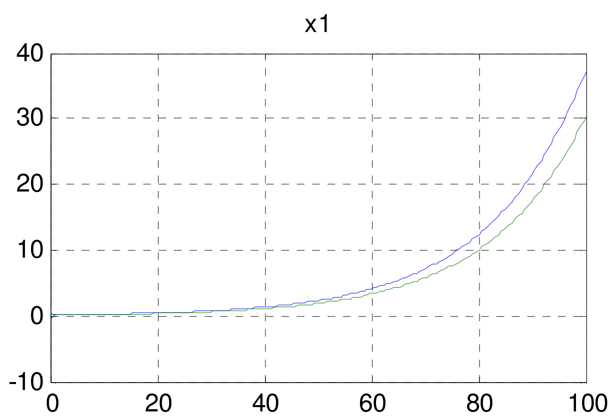
$$E\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau)$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau = 1 \tag{23.51}$$

Potrebno je ispitati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu sistema (23.51) u odnosu na $\alpha = 3$, $\beta = 100$ i $T = 5$. Polazeći od napomene 23.1, za fiksirano $\gamma = 3.8 \cdot 10^{-1}$, moguće je odrediti sledeća izvodljiva rešenja:

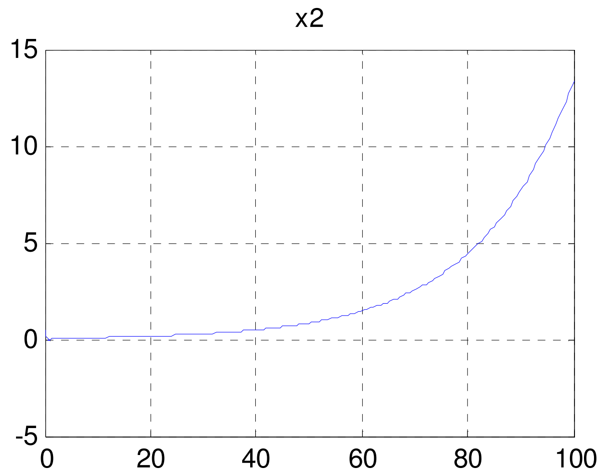
$$P = \begin{bmatrix} 5.7484 & -1.1447 & -1.3063 \\ -1.1447 & 9.6663 & 2.8294 \\ 0 & 0 & 5.3187 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 10.927 & 1.7094 & 1.9388 \\ 1.7094 & 10.738 & 1.4311 \\ 1.9388 & 1.4311 & 8.9738 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 5.7484 & -1.1447 & 0 \\ -1.1447 & 9.6663 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5554 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 5.2451, \lambda_2 = 10.786, \lambda_3 = 14.575$$

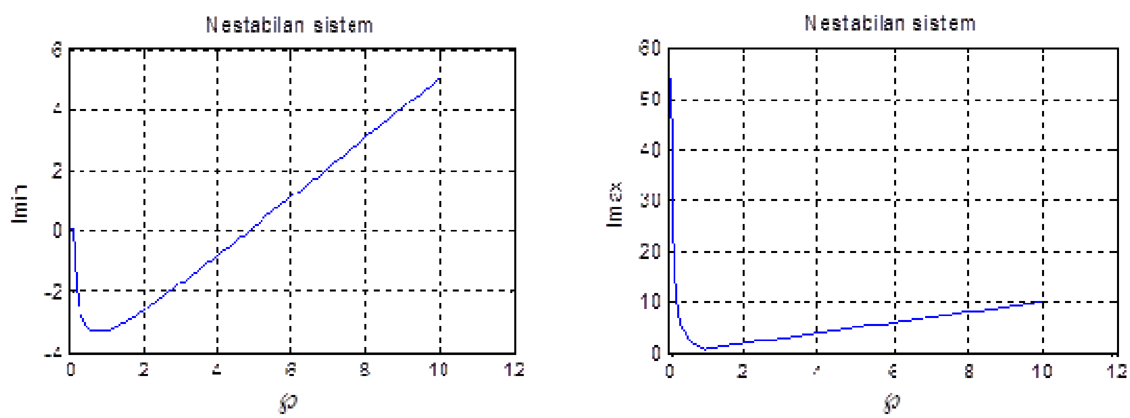
Sledi da je sistem (23.51) regularan, bez impulsa i stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(3,100,5)$.



Slika 23.1 $\mathbf{x}_1$ - deo vektora stanja koji ulazi u diferencijalnu jednačinu modela



Slika 23.2 $\mathbf{x}_2$ - deo vektora stanja koji je zastupljen samo u algebarskom delu modela



Slika 23.3 Minimalna i maksimalna sopstvena vrednost

Primer 23.2. Posmatra se sledeći kontinualni singularni sistem sa kašnjenjem:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau)$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad \tau = 1 \tag{23.52}$$

Rešavanjem linearne matrične nejednakosti (LMI) jedn. (23.38), za $\wp = 0$ dobijaju se izvodljiva rešenja:

$$X=\begin{bmatrix}19.727 & 2.6273 & 37.521\\ 2.6273 & 31.397 & 12.165\\ 0 & 0 & 56.386\end{bmatrix}>0,\quad Y=\begin{bmatrix}56.737 & 0.1068 & -1.5756\\ 0.1068 & 58.682 & -0.3238\\ -1.5756 & -0.3238 & 56.162\end{bmatrix}>0$$

iz čega sledi da je sistem asimptotski stabilan, što povlači osobinu privlačenja $\lim\limits_{t\to\infty} x^T(t)x(t)\to 0$.

Ukoliko se izvrši provera uslova (23.46)-(23.50) u odnosu na $\alpha=3$, $\beta=3.3$ i $T=200$ za usvojeno $\wp=1\cdot 10^{-4}$, dobijaju se sledeća izvodljiva rešenja:

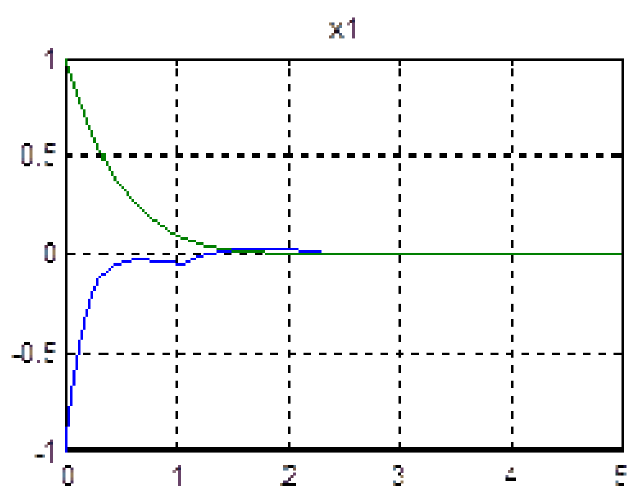
$$P=\begin{bmatrix}9.5757\cdot 10^{2} & -4.2053\cdot 10^{-3} & 7.4462\cdot 10^{2}\\ -4.2053\cdot 10^{-3} & 9.5765\cdot 10^{2} & 9.1516\cdot 10^{2}\\ 0 & 0 & 2.6480\cdot 10^{3}\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}49.107 & -2.3894 & 4.6023\\ -2.3894 & 48.648 & -1.4973\\ 4.6023 & -1.4973 & 70.497\end{bmatrix},$$

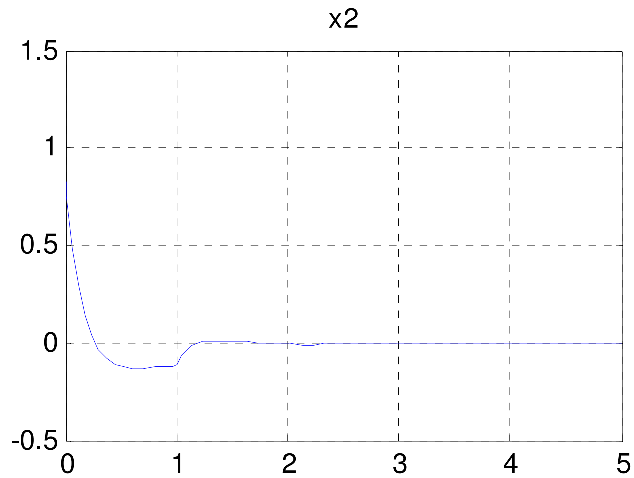
$$\Pi=\begin{bmatrix}9.5757\cdot 10^{2} & -4.2053\cdot 10^{-3} & 0\\ -4.2053\cdot 10^{-3} & 9.5765\cdot 10^{2} & 0\\ 0 & 0 & 1.6111\cdot 10^{3}\end{bmatrix},$$

$$\lambda_1=956.59,\ \lambda_2=958.71,\ \lambda_3=72.192.$$

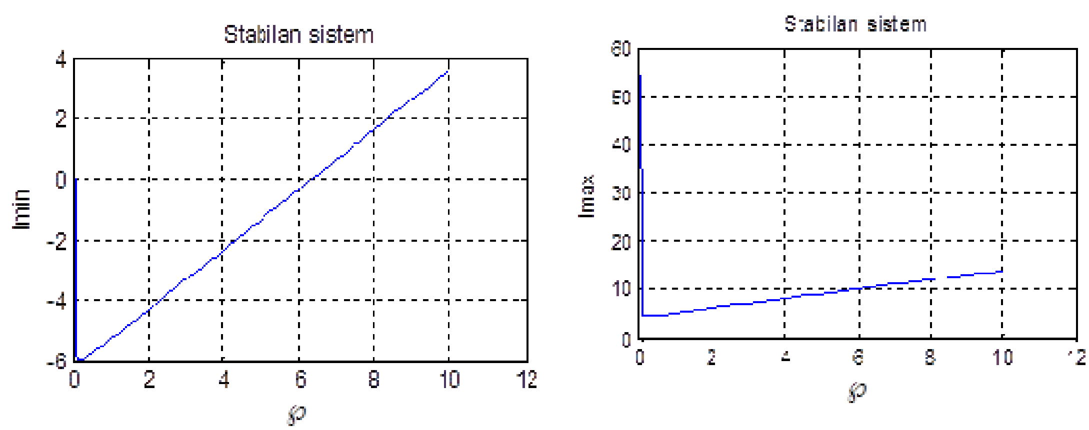
Sledi da je sistem (23.52) regularan, bez impulsa i privlačno praktično stabilan u odnosu na $(3, 3.3, 200)$.



Slika 23.4 $\mathbf{x}_1$ - deo vektora stanja koji ulazi u diferencijalnu jednačinu modela



Slika 23.5 $\mathbf{x}_2$ - deo vektora stanja koji je zastupljen samo u algebarskom delu modela



Slika 23.6 Minimalna i maksimalna sopstvena vrednost

Zaključak

1. Za manje vrednosti parametra $\wp$ (manje od ≈ 5 za nestabilan sistem i manje od ≈ 6 za stabilan sistem) minimalna sopstvena vrednost je negativna, dok je za veće vrednosti ovog parametra ona pozitivna.
2. Maksimalna sopstvena vrednost je uvek pozitivna za bilo koju vrednost parametra $\wp$ i za stabilan i za nestabilan sistem.

3. Matrica $A_0^T E + E^T A_0 + E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E + q\wp I$ je pozitivno određema za veće vrednosti parametra $\wp$ i nikada nije negativno određena kako za stabilan, tako i za nestabilan sistem.
4. Iako je prvi sistem nestabilan, na osnovu 3. ne može se zaključiti da li je sistem stabilan pošto ne postoji ni jedno q koje daje dV/dt < 0. Prema tome uslov $A_0^T E + E^T A_0 + E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E + q\wp I < 0$ je vrlo konzervativan kada se radi o proveri stabilnosti sistema. Ovo je posledica zamene mešovitog člana

   $$2\mathbf{x}^T(t) E^T A_1 \mathbf{x}(t-\tau)$$

   koji može biti i pozitivan i negativan, kvadratnim članom

   $$\mathbf{x}^T(t) E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t-\tau) \wp \mathbf{x}(t-\tau)$$

   koji je uvek pozitivan.
5. S pravom se može konstatovati da postoji neko $\wp$ za koje je

   $$A_0^T E + E^T A_0 + E^T A_1 \wp^{-1} A_1^T E + q\wp I > 0$$

Ovaj rad proširuje neke osnovne rezultate neljapunovske stabilnosti na klasu linearnih singularnih sistema sa vremenskim kašnjenjem. Razmatrani su problemi stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i privlačne praktične stabilnosti linearnih singularnih sistema sa kašnjenjem. Korišćenjem klasičnog pristupa (izložen u prethodnoj glavi ove disertacije) i metode linearnih matričnih nejednakosti izvedeni su novi dovoljni uslovi, kako za stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, tako i za praktičnu privlačnu stabilnost. Dobijene LMI uslove je moguće proveriti standardnim metodama numeričke optimizacije. Na kraju, priložena su i dva numerička primera koji ilustruju efikasnost predložene metode.

Literatura

Campbell S.L. , *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

Dai L., *Singular Control Systems*, Springer, Berlin, 1981.

Debeljkovic D.Lj., Kablar N.A., Finite time instability of time varying linear singular systems, *Proc. IEEE ACC 99*, San Diego, USA, June 2-4 (1999) 1796-1800.

Debeljkovic D.Lj., Kablar N.A., Finite time stability of linear singular systems: Bellman-Gronwall approach, *Proc. IEEE ACC 99*, San Diego, USA, June 2-4, (1999) 1803-1806.

Debeljkovic D.Lj., Kablar N.A., On necessary and sufficient conditions of linear singular systems stability operating on finite time interval, *Proc. XII CBA* , Uberlandia, Brazil Sep. 14 -18 (1998) Vol. IV, 1241-1246.

Debeljkovic D.Lj., Lazarevic M.P., Koruga Dj., Tomasevic S., Finite time stability of singular systems operating under perturbing forces: Matrix measure approach, *Proc. AMSE Conference*, Melbourne Australia, October 29 – 31 (1997) 447–450.

Fridman E., Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach, *J. Math. Anal. Appl*., 273 (2002) 24–44.

Hale J.K., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

Jun-E F., Zhen W., Jia-Bing S., Finite-time control of linear singular systems subject to parametric uncertain and disturbances, *Acta Autom. Sin*., 31(4) (2005) 634-637.

Kablar N.A., Debeljkovic D. Lj., Non-Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach, *Proc. 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang, China, September 8-10 (1998) 16 – 20.

Kablar N.A., Debeljkovic D.Lj., Non-Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach, *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems*, Padova, Italy, July 6-10 (1998).

Kablar N.A., Debeljkovic D.Lj., Finite time stability of time varying singular systems, *Proc IEEE Decision and Control*, Florida, USA, December 10-12 (1998) 3831-3836.

Kumar A., Daoutidis P., Control of nonlinear differential algebraic equation systems: an overview, *Proc. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Model Based Process Control*, Antalya, Turkey, August 10-20, (1997) 311-344.

Müller P.C., Stability of Linear Mechanical Systems with Holonomic Constraints, *Appl. Mech. Rev*., 46 (11) (1993) 60–164.

Owens D.H., Debeljkovic D.Lj., Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems: a Geometric Analysis, *IMA J. Math. Control Inf.*, 2 (1985) 139-151.

Pantelides C.C., Gridsis D., Morison K.R., Sargent R.W.H., The mathematical modeling of transient systems using differential-algebraic equations, *Comp.& Chem. Eng*., 12 (1988) 449–454.

Rehm A., Allgower F., H-Infinity Control of Descriptor Systems: An Application from Binary Distillation Control, *Proc. 7 International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, Hong Kong, 11-14 January (2004).

Su M., Wang S., Zhang X., Finite-Time Stabilization for Singular Linear Time-delay Systems with Time-varying Exogenous Disturbance, *Adv. Mater. Res*., 490-495 (2012) 2459-2463.

Xu S., Dooren P.V. ,Stefan R., Lam J., Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty, *IEEE Trans. Autom. Control*, 47(7) (2002) 1122–1128.

Xu S., Lam J., Yang C., H_∞ control for uncertain singular systems with state delay, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 13(13) 1213–1223.

Xu S., Lam J., Zou Y., An improved characterization of bounded realness for singular delay systems and its applications, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 18(3) (2008) 263–277.

Yang C., Zhang Q., Zhou L., Practical stability of descriptor systems with time delays in terms of two measurements, *J. Franklin Inst*., 343 (2006) 635–646.

Yang C.Y., Jing X., Zhang Q.L., Zhou L.N., Practical stability analysis and synthesis of linear descriptor systems with disturbances, *Int. J. Autom. Comput*., 5(2) (2008) 138–144.

Yangy C., Zhang Y.Q., Linz Y., Zhouy L., Practical stability of closed-loop descriptor systems, *Int. J. Syst. Sci*., 37(14) (2006) 1059–1067.

Yue D., Han Q.-L., Delay-dependent robust H_∞ controller design for uncertain descriptor systems with time-varying discrete and distributed delays, *IEE Proc. Control Theory Appl*., 152(6) (2005) 628–638.

Zhu S., Zhang C., Cheng Z., Feng J., Delay-dependent robust stability criteria for two classes of uncertain singular time-delay systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(5) (2007) 880–885.

24. DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM: MODERNI LMI PRILAZ

Razmatra se linearan diskretan deskriptivni sistem sa kašnjenjem u stanju opisan jednačinom:

$$\begin{aligned} E\,\mathbf{x}(k+1) &= A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1) \\ \mathbf{x}(k_0) &= \boldsymbol{\psi}(k_0), \quad -1 \le k_0 \le 0 \end{aligned} \tag{24.1}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja

Matrica $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je nužno singularna, sa osobinom $rank\, E = r < n$ i sa matricama A_0 i A_1 odgovarajućih dimenzija.

Za linearni diskretni deskriptivni sistem sa kašnjenjem iz jedn. (24.1), predstavljaju se sledeće definicije, preuzete iz *Xu et al*. (2004).

Definicija 24.1 linearni diskretni deskriptivni sistem sa kašnjenjem je regularan ako $\det\left(z^2E - zA_0 - A_1\right)$, nije identički jednako nuli.

Definicija 24.2 linearni diskretni deskriptivni sistem sa kašnjenjem je kauzalan ako je regularan i ako važi:

$$\deg\left(z^n \det\left(zE - A_0 - z^{-1}A_1\right)\right) = n + rang\, E\,.$$

Definicija 24.3 linearni diskretni deskriptivni sistem sa kašnjenjem je stabilan ako je regularan i ako $\rho\,\left(E, A_0, A_1\right) \subset D(0,1)$, pri čemu je

$$\rho\left(E, A_0, A_1\right) = \left\{z \mid \det\left(z^2E - zA_0 - A_1\right) = 0\right\}.$$

Definicija 24.4 linearni diskretni deskriptivni sistem sa kašnjenjem je dopustiv ako je regularan, kauzalan i stabilan.

Za neke druge svrhe posmatraće se linearan diskretni sistem sa kašnjenje, opisan jednačinom:

$$
\begin{aligned}
&E\,\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{M} A_j\,\mathbf{x}(k-h_j) \\
&\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-N, (-N+1),\ \dots, 0\}
\end{aligned}
\tag{24.2}
$$

pri čemu je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, vektor stanja $E,\ A_j \in \mathbb{R}^{n\times n},\ j = 1,\cdots,M$, $h_j,\ j = 1,\cdots,M$ su celi brojevi koji predstavljaju kašnjenje, $N = \max\{h_1, h_2, \cdots, h_M\}$ a $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je apriori poznata funkcija početnih uslova.

Neka je $\mathbb{R}^n$ prostor stanja sistema jedn. (24.1) – (24.2) a $\|(\cdot)\|$ euklidska norma. Rešenja (24.1– 24.2) su označena sa: $\mathbf{x}(k, \boldsymbol{\psi}) \equiv \mathbf{x}(k)$.

K_N označava diskretni vremenski interval, ako skup nenegativnih celih brojeva: $\mathcal{K}_N = \{\, k : 0 \le k \le k_N \}$.

Veličina k_N može biti pozitivan celi broj ili simbol $+\infty$, tako da je moguće tretirati istovremeno i praktičnu stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu.

$\lambda(\ )$ označava sopstvene vrednosti matrice, dok su $\lambda_{\max}(\lambda_{\min})$ maksimalna (minimalna) sopstvena vrednost matrice koje se mogu izračunati na više načina, u zavisnosti od problema.

Definicije stabilnosti

Definicija 24.5 Kauzalni sistem, jedn. (24.2), je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{k_0, \mathcal{K}_N, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta, R\}$, sa $R > 0$, ako i samo ako za $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}^*_{dis}$ koje zadovoljava:

$$
\|\mathbf{x}(k)\|^2_{E^T RE} < \alpha, \quad k = 0, -1, -2, \dots -h\,,
$$

važi:

$$
\|\mathbf{x}(k)\|^2_{E^T RE} < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N\,,
$$

$\mathcal{W}^*_{dis}$ je podprostor konzistentnih početnih uslova.

Sada je moguće dati dovoljne uslove pod kojima će sistem (24.2), bez pretpostavki o regularnosti, biti regularan, kauzalan i stabilan na konačnom vremenskom intervalu, istovremeno.

Teorema 24.1 Sistem (24.2) je kauzalan i stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, K_N, \left\|(\cdot)\right\|^2\right\}$ $\alpha < \beta$, ako za $E^T PE = E^T R^{\frac{1}{2}} \Pi R^{\frac{1}{2}} E$, postoji pozitivni skalar γ i dve pozitivno određene matrice Π, Q takve da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$E^T PE \geq 0$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} A_0^T PA_0 + Q + E^T PE - \gamma E^T PE & A_0^T PA_1 \\ A_1^T PA_0 & -\left(Q - A_1^T PA_1\right) \end{pmatrix} < 0 \tag{24.3}$$

$$\left(\gamma + 1\right)^k \left(\frac{\lambda_{\max}\left(\Pi\right)}{\lambda_{\min}\left(\Pi\right)} + h \frac{\lambda_{\max}\left(Q\right)}{\lambda_{\min}\left(\Pi\right)} \right) < \frac{\beta}{\alpha}, \ \forall k \in K_N$$

Dokaz. Ako se razmatra sledeća kvaziljapunovska agregaciona funkcija:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) = \mathbf{x}^T(k) E^T P E\mathbf{x}(k) + \sum_{j=k-h}^{k-1} \mathbf{x}^T(j) Q\, \mathbf{x}(j) \tag{24.4}$$

Tada je potonja razlika (diferenca) duž trajektorije sistema (24.2) određena sa:

$$\begin{aligned} \Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= V\left(\mathbf{x}(k+1)\right) - V\left(\mathbf{x}(k)\right) \\ &= \mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T PA_0 + Q - E^T PE\right)\mathbf{x}(k) \\ &+ \mathbf{x}^T(k) A_0^T PA_1\, \mathbf{x}(k-h) + \mathbf{x}^T(k-h) A_1^T PA_0 \mathbf{x}(k) \\ &- \mathbf{x}^T(k-h)\left(Q - A_1^T PA_1\right)\mathbf{x}(k-h) \\ &= \boldsymbol{\zeta}^T(k)\Gamma\boldsymbol{\zeta}(k) \end{aligned} \tag{24.5}$$

pri čemu je:

$$\boldsymbol{\zeta}^T(k) = \left[\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{x}^T(k-h)\right]$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A_0^T PA_0 + Q + E^T PE & A_0^T PA_1 \\ A_1^T PA_0 & -\left(Q - A_1^T PA_1\right) \end{pmatrix} \tag{24.6}$$

Iz jedn. (24.2) i (24.5) se izvodi:

$$\begin{aligned}\Delta V(\mathbf{x}(k)) &= \zeta^T(k)\Gamma\zeta(k)\\ &= \zeta^T(k)\left(\Xi - \begin{pmatrix} -\gamma E^T PE & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\zeta(k)\\ &= \zeta^T(k)\Xi\zeta(k) - \zeta^T(k)\begin{pmatrix} -\gamma E^T PE & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\zeta(k)\\ &= \zeta^T(k)\Xi\zeta(k) + \gamma\mathbf{x}^T(k)E^T PE\,\mathbf{x}(k)\\ &< \gamma\mathbf{x}^T(k)E^T PE\,\mathbf{x}(k)\\ &< \gamma\mathbf{x}^T(k)E^T PE\,\mathbf{x}(k) + \gamma\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j)\\ &= \gamma V(\mathbf{x}(k))\end{aligned} \tag{24.7}$$

s obzirom da važi $\boldsymbol{\zeta}^T(k)\Xi\boldsymbol{\zeta}(k) < 0.$

Dalje, očigledno je da:

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) < \gamma V(\mathbf{x}(k)) \tag{24.8}$$

tako da je:

$$V(\mathbf{x}(k+1)) < (\gamma+1)V(\mathbf{x}(k)) \tag{24.9}$$

Iterativnom primenom jedn. (24.9), dobija se:

$$\begin{aligned}V(\mathbf{x}(k)) &< (\gamma+1)V(\mathbf{x}(k-1))\\ &< (\gamma+1)^2 V(\mathbf{x}(k-2))\\ &< (\gamma+1)^3 V(\mathbf{x}(k-3))\cdots\\ &< (\gamma+1)^k V(\mathbf{x}(0))\end{aligned} \tag{24.10}$$

Dok je sa druge strane:

$$\begin{aligned}V(\mathbf{x}(0)) &= \mathbf{x}^T(0)E^T PE\;\mathbf{x}(0) + \sum_{j=-h}^{-1}\mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j)\\ &\mathbf{x}^T(0)E^T R^{\frac{1}{2}}\Pi R^{\frac{1}{2}}E\;\mathbf{x}(0) + \sum_{j=-h}^{-1}\mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j)\\ &\le \lambda_{\max}(\Pi)\mathbf{x}^T(0)E^T RE\mathbf{x}(0) + \lambda_{\max}(Q)\sum_{j=-h}^{-1}\mathbf{x}^T(j)\mathbf{x}(j)\end{aligned} \tag{24.11}$$

što uz osnovne pretpostavke definicije 24.1 dovodi do:

$$V(\mathbf{x}(0)) < \alpha\left(\lambda_{\max}(\Pi) + h\cdot\lambda_{\max}(Q)\right) \tag{24.12}$$

Dalje je očigledno da važi i:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) > \mathbf{x}^T(k) E^T PE\ \mathbf{x}(k) \geq \lambda_{\min}(\Pi)\mathbf{x}^T(k) E^T RE\ \mathbf{x}(k) \tag{24.13}$$

Kombinovanjem izraza (24.9), (24.11) i (24.12) lako se utvrđuje da je:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(\Pi)\mathbf{x}^T(k)E^T RE\,\mathbf{x}(k) &< V\left(\mathbf{x}(k)\right) \\ &< (\gamma+1)^k V\left(\mathbf{x}(0)\right) < (\gamma+1)^k \alpha\left(\lambda_{\max}(\Pi) + h\cdot\lambda_{\max}(Q)\right)\end{aligned} \tag{24.14}$$

ili:

$$\mathbf{x}^T(k) E^T RE\ \mathbf{x}(k) < (\gamma+1)^k \alpha\left(\frac{\lambda_{\max}(\Pi)}{\lambda_{\min}(\Pi)} + h\cdot\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(\Pi)}\right) \tag{24.15}$$

Uslov (24.3) i prethodna nejednakost povlače:

$$\mathbf{x}^T(k) E^T R E\ \mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N \tag{24.16}$$

što je trebalo dokazati.

Napomena 24.1 Treba primetiti da uslov iz teoreme 24.1 nije klasičan LMI uslov u odnosu na γ, P, Q, ali se lako proverava da je uslov (24.3) obezbeđen postavljanjem sledećih relacija:

$$\begin{gathered}\gamma_1 I < P < \gamma_2 I \\ 0 < Q < \gamma_3 I \\ \begin{pmatrix} -\gamma_1\beta(\gamma+1)^{-k_N} & \gamma_2\sqrt{\alpha} & \gamma_3\sqrt{\alpha h} \\ \gamma_2\sqrt{\alpha} & -\gamma_2 & 0 \\ \gamma_3\sqrt{\alpha h} & 0 & -\gamma_3 \end{pmatrix} < 0\end{gathered} \tag{24.17}$$

za neke pozitivne skalare $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Kada se usvoji fiksno γ, uslovi (24.1) i (24.2) se mogu pretvoriti u LMI problem izvodljivosti.

Literatura

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic, I – Tech, Vienna, 2011.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, “Descriptor Time Delayed System Stability Theory in the sense of Lyapunov New

Results”,

Facta Universitatis, Ser. Mech. Eng, Vol. 1, No. 10, (2003.c) 1311–1315.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. P. Lazarevic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, “Discrete time delayed system stability theory in the sense of Lyapunov application to the chemical engineering and process technology”, *Proc.* CHISA 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, CD–Rom, (2004.c).

Debeljkovic, Lj. D., M. P. Lazarevic, S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, “Discrete Time Delayed System Stabilty Theory in the sense of Lyapunov: New Results”, *Proc. ISIC* 04 (International Symposium on Intelligent Control), September 01–04, Taipei (Taiwan), (2004) 511–515.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, “Discrete time delayed system stability theory in the sense of Lyapunov: New results”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 12, Series B Numerical. Analysis, Vol. 135.b–Suppl., (2005.a) 433–442.

Debeljkovic, Lj. D., S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, “Further results on descriptor time delayed system stabilty theory in the sense of Lyapunov: Pandolfi based approach”, *The fifth International Conference on Control and Automation,* ICCA 05, June 26–29, Budapest (Hungary), CD–Rom, (2005.c).

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, “Further results on asymptotic stability of linear discrete descriptor time delayed systems”, *Proc.* 1st International Workshop on Advanced Control Circuits and Systems, ACCS 05, Cairo (Egypt), March 06–10, 2005, CD–Rom, (2005.d).

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, “Further Results on Descriptor Time Delayed System Stabilty Theory in the sense of Lyapunov Pandolfi based approach”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, (2006.a) 1–11.

Debeljkovic, Lj. D. S. B. Stojanovic, N. S. Visnjic, S. A. Milinkovic, “Lyapunov Stability Theory A Quite New Approach–Discrete Descriptive Time Delayed Systems”, *Proc. American Control Conference* 06, June, 14–16, Minneapolis (USA), (2006.b) 5091–5096.

Debeljkovic D. Lj., Lj. A. Jacic., N. S. Visnjic, M. Pjescic, “Asymptotic Stability of Generalized Discrete Descriptive Time Delayed Systems”, *Proc. The* 5^{th} *Edition of*

IFAC Know. and Tech. Transfer Conference Series on Automation for Buildings the in the Infra structure, DECOM 2007, May 17–19, Cesme–Izmir (Turkey), (2007.a) 369–374.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, N. S. Visnjic, S. A. Milinkovic, “A Quite New Approach to the Asymptotic Stability Theory: Discrete Descriptive Time Delayed System”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series A: Mathematical Analysis, No. 15 , (2008) 469–480.

Liang J. R., “Analysis of stability for descriptor discrete systems with time–delay”, *Journal of Guangxi University* (Nat. Sc. Ed.), 25(3), (2000) 249–251.

Mao, X., Comments on “Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 42 (3), (1997) 429–430,

Owens, H. D., D. Lj. Debeljkovic, “Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems A Geometric Analysis”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, (2), (1985) 139–151, Pandolfi L., “Controllability and stabilization for linear system of algebraic and differential equations”, *Jota* 30 (4), (1980) 601–620,

Xu, S., C. Yang, “Stabilization of discrete–time singular systems: A matrix inequality approach”, *Automatica,* Vol. 35, (1999) 1613–1617

Xu, S., J. Lam, C. Yang, “Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty”, *Dynamics Continuous*, *Discrete and Impulsive Systems,* Vol. 9, No.4, (20035.b) 539–554

Yang D. M., Q. L. Zhang, B. Yao., *Descriptor systems*, Science Publisher, Beijing, 2004.

Wang, W., L. Mau, “Stabilization and estimation for perturbed discrete time–delay large–scale systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.,* 42(9), (1997) 1277–1282.

VII ZAKLJUČAK

25. ZAKLJUČAK

Predmet naučne rasprave ove disertacije su dve posebne klase sistema: linearni singularni sistemi i linearni singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem prisutnim u stanju sistema, kao i njihovo dinamičko ponašanje na beskonačnom i na konačnom vremenskom intervalu.

U **uvodnom delu** su detaljno analizirane i prezentovame klase razmatranih sistema sa posebnim osvrtom na klase neprekidnih sistema. Ukazano je i na specifičnosti diskretnih sistema, posebno kod problema koji se mogu javiti u matematičkom smislu, kao i na usložnjavanje problematike kada se uključi i uticaj vremenskog kašnjenja.

U **II delu** se detaljno razmatraju osobine i specifičnosti svih klasa sistema koje su predmet istraživanja. Detaljno su izloženi problemi egzistencije i jedinstvenosti rešenja singularnih i deskriptivnih sistema, mogućnosti pojave impulsa, problematika konzistentnih početnih uslova i fizičke ostvarivosti (kauzalnosti) sistema. Posebna pažnja je posvećena problemu rešivosti linearnih singularnih sistema diferencijalnih i diferencnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, kao i definisanju prenosne funkcije kod singularnih sistema.

Tema **III dela** su različiti koncepti stabilnosti. Polazeći od osnovnog koncepta stabilnosti u smislu Ljapunova, kao polazne tačke pri dinamičkoj analizi sistema, izloženi su i tzv. *neljapunovski* koncepti stabilnosti: stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, tehnička stabilnost, praktična stabilnost. Ukazano je na značaj ovih koncepata pre svega sa inženjerske tačke gledišta i podvučena je primenjivost istih u praksi.

IV deo pruža selektivnu rekapitulaciju doprinosa na polju proučavanja neljapunovske i ljapunovske stabilnosti svih klasa razmatranih sistema čime je pružen uvid u hronološki nastanak i razvoj osnovnih rezultata na polju izučavanja dinamike sistema. Ovakav prikaz predstavlja osnovu za sagledavanje i prepoznavanje mogućih daljih pravaca istraživanja i otvorenih problema.

Slično prethodnom delu, **V deo** pruža kratki hronološki selektivni prikaz doprinosa na polju stabilnosti posmatranih klasa sistema u duhu *klasičnog prilaza*. Izabrani su reprezentativni radovi iz literature i skraćeno prezentovani, sa naglaskom na doprinosima koji su od značaja za dalje potrebe disertacije, odnosno mogućnosti dalje nadgradnje postojećih rezultata. Posebno su apostrofirani radovi mentora i komentora ove disertacije, imajući u vidu činjenicu da su doprinosi disertacije zasnovani na ovim rezultatima.

U **VI delu** disertacije je predstavljen prikaz postojećih i novih rezultata na polju sistematskog proučavanja neljapunovske stabilnosti razmatranih klasa sistema, sa stanovišta linearnih matričnih nejednakosti i sa deskriptivnim prilazom. Ukazano je na suštinske i praktične razlike između ova dva savremena pristupa: dok su se LMI metode pokazale kao superiorne u odnosu na ostale tehnike kada su u pitanju numerički aspekti, ostaju problemi kod sagledavanja faktora koji imaju uticaj na celokupno ponašanje sistema. Deskriptivni prilaz, sa druge strane, svodi probleme jednačina sa pomerenim argumentom na integro – diferencijalne jednačine, upotrebom odgovarajuće smene, eliminišući na taj način kašnjenje i značajno uprošćavajući dalji tretman. U ovoj glavi su, pre svega zbog mogućnosti jasnog poređenja sa postojećim, predstavljeni i novi rezultati.

Prezentovana su tri nova rezultata, odnosno teoreme koje za različite klase sistema daju *dovoljne uslove* stabilnosti na ograničenom i na neograničenom vremenskom intervalu, kao i uslov praktične atraktivne stabilnosti.

U disertaciji su razvijena dva nova prilaza. Prvi, zasnovan na kvaziljapunovljevim funkcijama, za dobijanje uslova praktične i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu posebne klase singularnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, koji polazi od pretpostavke da agregacione funkcije ne moraju da budu određene po znaku i da njihovi izvodi duž sistemskih trajektorija ne moraju da budu negativno određeni. Potpomognuti deskriptivnim prilazom, dobijeni su kriterijumi za ocenu neljapunovske stabilnosti. Kombinovanjem ovih rezultata sa ljapunovskim prilazom, pokazano je da je moguće odrediti i uslove pod kojima su razmatrani sistemi atraktivno praktično stabilni.

Drugi doprinos predstavlja određivanje dovoljnih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu iste klase sistema pomoću savremene LMI metodologije.

Dobijeni rezultati imaju praktičnu primenu u savremenoj teoriji i praksi automatskog upravljanja i mogu se primeniti na sve razmatrane klase sistema.

VIII LITERATURA

26. LITERATURA

[1] Abdullin, R. Z., Yu. L. Anapoljskii, “K zadačam praktičeskoj ustoičivosti” v kjigi *Vektor-funkcii Ljapunova i ih postoenie*, Nauka, Novosibirsk (1980) 34–919.

[2] Abe, N., “Practical Stability and Disturbance Rejection of Internal Model Control for Time-Delay Systems”, *Proc. of the* 35*th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, December (1996) 1621-1622.

[3] Abgarijan, K. A., “Ustoičivost dviženia na konečnom intervale” v knjigi *Itogi nauki i tehniki*, VINITI AN SSSR, Obščaja mehanika, Moskva (1976) 43–124.

[4] Aleksendrić, M., *Dinamika posebnih klasa kontinualnih i diskretnih sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu,* Dipl rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 2002.

[5] Aleksendrić, M., D, Lj. Debeljković, “Finite Time Stability of Linear Discrete Time Delayed Systems“, *Proc. HIPNEF* 2002, Nis (Yu), October, 2-5, 2002., pp. 333 – 340.

[6] Aleksendrić, M., D. Lj. Debeljković, “Finite time stability of linear discrete time delayed systems”, *Proc.* HIPNEF 2002, Nis (Serbia), October, 2–5, (2002) 333–340.

[7] Aleksendrić, M., *Dinamika posebnih klasa kontinualnih i diskretnih sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu,* Dipl. rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 2002.

[8] Aleksendrić, M., *On Stability of Particular Class of Continual and Discrete Time Delay Systems on Finite and Infinite Time Interval*, Diploma Work, Univ. of Belgrade, Dept. of Control Eng., 2002.

[9] Aleksendrić, M., *On stabilty of particular class of continual and discrete time delay systems on finite and infinite time interval*, Diploma Work, School of Mechanical Eng., University of Belgrade, Department of Control Eng., Belgrade, 2002.

[10] Amato, F, Ariola, M.: 'Finite-time control of discrete-time linear system', IEEE Trans. Autom. Control, 2005, 50 (5), pp. 724-729.

[11] Amato, F., Ariola, M., Carbone, M., Cosentino, C.: 'Finite-time output feedback control of discrete-time systems'. Proc. of 16th IFAC World Congress, Pague, July 2005.

[12] Amato, F., Ariola, M., Cosentino C.: 'Finite-time Control of Discrete-time Linear Systems: Analysis and Design Conditions', Automatica, 2010, 46, pp. 919-924.

[13] Amato, F., Ariola, M., Cosentino, C., Abdallah, C. T., Dorato, P.: 'Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of linear systems'. Proc. of American Control Conference, Denver, Colorado, June 2003, pp. 4452–4456.12

[14] Amato, F., Ariola, M., Dorato, P.: 'Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances', Automatica, 2001, 37 (9), pp. 1459-1463.

[15] Amato, F., Ariola, M., Dorato, P.: 'Finite-time Stabilization via Dynamic Output Feedback', Automatica, 2006, 42, pp. 337-342.

[16] Amato, F., Arolia, M., Dorato, P.: 'State feedback stabilization over a finite-time interval of linear systems subject to norm bounded parametric uncertainties'. Proc. of the 36th Allerton Conference, Monticello, 1998.

[17] Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, C. Cosentino, "Application of Finite-Time Stability Concepts to Control of ATM Networks", *40th Allerton Conf. on Communication, Control and Computers, Allerton* (Illinois) (2002).

[18] Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, P. Dorato, "Dynamic Output Feedback Finite-Time Control of LTI Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances", *European Control Conference*, Karlsruhe (Germany) (1999.a).

[19] Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, P. Dorato, "Finite-Time Control for Uncertain Linear Systems with Disturbance Inputs", *Proc. American Control Conf.*, San Diego (California) (1999.b) 1776-1780.

[20] Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, "Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Stability of Linear Systems", *Proc. of the* 2003 *American Control Conference*, Denver (Colorado), **5** (2003) 4452-4456.

[21] Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, M. Carbone, "Finite-Time Stability of Discrete-Time Systems", *Proc. of the 2004 American Control Conference*, Boston (Massachusetts) (2004) 1440-1444.

[22] Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Finite-Time Control of Linear Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances", *Automatica*, **37** (2001) 1459-1463.

[23] Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Finite-Time Stabilization via Dynamic Output Feedback", *Automatica*, **42** (2006) 337-342.

[24] Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Robust Finite-Stabilization of Linear Systems Depending on Parameter Uncertainties", *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Tampa (Florida) (1998) 1207-1208.

[25] Ambrosino, R., Calabrese, F., Cosentino, C., De Tommasi, G.: 'Sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical systems', IEEE Trans. Autom. Control, 2009, 54, pp. 861-865.

[26] Amemiya, T., "Delay - Independent Stability of High-order Systems", *Int. J. Control*, **50** (1) (1989) 139–149.

[27] Amir-Moez, A., "Extreme Properties of a Hermitian Transformations and Singular Values of Sum and Product of Linear Transformations", *Duke Math J.*, **23** (1956) 463–476.

[28] Amir-Moez, A., (1956) Extreme properties of a hermitian transformations and singular values of sum and product of linear transformations, *Duke Math J.*, 23, 463–476.

[29] Amir-Moez, A., "Extreme properties of a hermitian transformations and singular values of sum and product of linear transformations", Duke Math J., **23** (1956) 463-476.

[30] Angelo, H., *Linear time varying systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

[31] Angelo, H., *Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

[32] Angelo, H.D., *Linear time-varying systems: analysis and synthesis,* Allyn and Bacon, Boston, 1970, American Control Conference, Chicago Illinois (USA), June 2000, pp. 1450 – 1451.

[33] Apkarian, P., P. Gahinet, “A Convex Characterization of Gain Scheduled H_1 Controllers, *IEEE Trans Autom. Control*, **40** (1995) 853-864.

[34] Applevich, J. D., *Implicit linear systems*, Springer Verlag, Berlin, 1991.

[35] Bainov, D. D., A. B. Dishliev, I. M. Stamova, “Practical Stability of the Solutions of Impulsive Systems of Differential-Difference Equations via the Method of Comparsion and some Application to Population Dynamics, *Journal of ANZIAM*, Vol. 43, Australian Mathematical Society, Australia, (2002) 525-539.

[36] Bajic, B. V., “Algebraic Conditions for Stability of Linear Singular Systems”, *IEEE International Sympoisum on Circuits and Systems*, Vol.2, 11-14 June, (1991)
1089-1092.

[37] Bajic, V. B., *Lyapunov’s Direct Method in The Analysis of Singular Systems and Networks*, Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.

[38] Bajić, V. B., “Algebraic Conditions for Stability of Linear Singular Systems”, *Proc. 1991 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, **2** (General Circuits and Systems),
June 11-14, Singapore (1991) 1089–1092.

[39] Bajić, V. B., “Equations of Perturbed Motions and Stability of State and Semi-State Systems”, *Int. J. Control*, **47** (6) (1988.b) 1849–1860.

[40] Bajić, V. B., “Lyapunov Function Candidates for Semi-State Systems”, *Int. J. Control*, **46** (6) (1987.b) 2171–2181.

[41] Bajić, V. B., “Partial Exponential Stability of Semi-State Systems”, *Int. J. Control*, **44** (5) (1986) 1383–1394.

[42] Bajić, V. B., *A Contribution to the Methods of Quantitative Analysis of Some Classes of Electrical Networks Governed by Semistate Models*, Ph. D. Thesis, University of Zagreb, Zagreb, Yugoslavia, 1989.

[43] Bajić, V. B., D. Debeljković, Z. Gajić, B. Petrović, “Weak Domain of Attraction and Existence of Solutions Convergent to the Origin of the Phase Space of Singular Linear Systems”, *University of Belgrade, ETF, Series: Automatic Control*, (1) (1992.b) 53–62.

[44] Bajić, V. B., D. Lj. Debeljković, B. Bogićević, M. B. Jovanović, “Non-Lyapunov Stability Robustness Consideration for Discrete Descriptor Linear Systems”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **15** (3) (1998) in print.

[45] Bajić, V. B., D. Lj. Debeljković, Z. Gajić, “Existence of Solution Converging Toward the Origin of the Phase Space of Singular Linear Systems”, *Proc. SAUM*, Kragujevac, Yugoslavia, June (1992.a) 334–348, also in *Proc. AMSE Conference on System Analysis, Control and Design*, Lyon, France, July (1994.a) 171–184.

[46] Bajić, V. B., *Existence of Practically Stable Solutions of Singular Linear Systems*, Technical Report TR95-02, Control Laboratory, Technikon, Natal, RSA, 1995.

[47] Bajić, V. B., *Generic Concepts of System Behavior and the Subsidiary Parametric Function Method*, SACAN, Link Hills, RSA, 1992.b.

[48] Bajić, V. B., *Lyapunov’s Direct Method in the Analysis of Singular Systems and Networks*, Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.a.

[49] Bajić, V. B., M. M. Milić, “Extended Stability of Motion of Semi-State Systems”, *Int. J. Control*, **46** (6) (1987) 2183–2197.

[50] Baker, R. A., A. R. Bergen, “Lyapunov Stability and Lyapunov Functions of Infinite Dimensional Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-14** (4) (1969) 325–334.

[51] Barabashin, E. A, *Lyapunov Functions*, Nauka, Moscow, 1970.

[52] Becker, G., A. Packard, D. Philbrick, G. Blas, “Control of Parametrically-Dependent Linear Systems: a Single Quadratic Lyapunov Approach, *Proc. American Control Conf.*, San Francisco (1993) 2795-2796.

[53] Belhouari, A., E. Tissir, A. Hmamed, “Stability of interval matrix polynomial in continuous and discrete cases“, *Systems and Control Letters* (**18**), (1992), 183-189.

[54] Bender, D. J., A. J. Laub, “The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems”, *IEEE Proc. on CDC*, Ft. Lauderdale, Fl, (1985) 957-962.

[55] Bender, D. J., A. J. Laub, “The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-32** (8) (1987.b) 672-688.

[56] Bernhard, P.,”On Singular Implicit Linear Dynamical Systems”, SIAM J. Control and Optim., **20** (5) (1982) 612-633.

[57] Blanchini, F., "Computation of the Transfer Function for Singular Systems", *Int. J. System Sci.*, **21** (2) (1990) 407-414.

[58] Bourlés, J., " α - Stability of Systems Governed by a Functional Differential Equation – Extension of Results Concerning Linear Delay Systems", *Int. J. Control*, **45** (6) (1987) 2233–2234.

[59] Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", *SIAM,* Philadelphia (Pennsylvania) (1994).

[60] Brierley, S. D., J. N. Chiasson, E. B. Lee, S. H. Zak, " On Stability Independent of Delay for Linear Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-27** (1982) 252–254.

[61] Buzurovic, I. M., Debeljković, D. Lj., Geometric Approach and Dynamical Behavior Study for Particular Class of Linear Singular Systems with Application in Medicine, Mechanical Faculty, Belgrade, 2009. (*in Serbian*) pp. 446. - ISBN 978 – 86 – 7083 – 669 – 3.

[62] Buzurović, I. M., D. Lj. Debeljković, *Geometrijski prilaz dinamičkom ponašanju posebnih klasa linearnih singularnih sistema sa primenom u medicini,* Mašinski fakultet, Beograd, 2009.

[63] Campbell S. L., C. D .Meyer, N. J. Rose, "Application of Drazin inverse to linear system of differential equations", *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 31, (1974) 411–425.

[64] Campbell S.L. , *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

[65] Campbell, L. S., *Singular Systems of Differential Equations II,* Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

[66] Campbell, L. S., *Singular Systems of Differential Equations,* Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

[67] Campbell, S. L., C. D. Meyer, N. J. Rose, "Application of Drazin inverse to linear system of differential equations", *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 31, (1974) 411–425.

[68] Campbell, S. L., *Singular systems of differential equation*, Pitman, London, 1980.

[69] Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations II,* Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

[70] Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations,* Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

[71] Chen, C. T., *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.

[72] Chen, C., Y. Liu, "Lyapunov stability analysis of linear singular dynamical systems", *Proc. Int. Conf. on Intelligent Processing Systems*, Beijing, October 28–31, (1997) 635–639.

[73] Chen, D., J. Sun, "On the Conjunction Practical Stability and Controllability of Large-Scale Impulsive Control Systems", Journal of Control Theory and Applications, Volume 3, Number 2, May, (2005) 181-185.

[74] Chen, J., "On Computing the Maximal Delay Intervals for Stability of Linear Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-40** (6) (1995) 1087–1093.

[75] Chen, J., D. Xu, B. Shafai, "On Sufficient Conditions for Stability Independent of Delay", *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-40** (9) (1995) 1675–1680.

[76] Christodolou, M. A.,"Recent results in realization theory for singular systems", *Proc. Int. Symp. Singular Systems*, Atlanta, GA, **1** (1987) 25-28.

[77] Chyung D. H., "Discrete Optimal Systems with Time Delay", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, (1967), 117-119.

[78] Chyung D. H., "Discrete Systems with Delays in Control", *I E E E Trans. Automat. Contr.*, (1969), 196 –197.

[79] Civalleri, P. P., M. Gilli, "Practical Stability Criteria for Cellular Neural Networks", *IEEE Electronics Letters*, Vol. 33, No. 11, May, (1997) 970-971.

[80] Civalleri, P.P., M. Gilli , "On Stability of Cellular Neural Networks", *The Journal of VLSI Signal Processing*, Volume 23, Numbers 2-3, Springer, Netherlands, November, (1999) 429-47.

[81] Cobb, D., "On the Solution of Linear Differential Equations with Singular Coefficients", *J. Differential Equations,* **46** (1982) 310-323.

[82] Coppel, W. A., (1965) *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Boston D.C. Heath.

[83] Coppel, W. A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Boston D.C. Heath, 1965.

[84] Dai L., *Singular Control Systems*, Springer, Berlin, 1981.

[85] Dai, L., “The difference between regularity and irregularity in singular systems”, *Circ. Syst. Sig. proc.*, **8** (4) (1989.a) 435-444.

[86] Dai, L., *Singular Control Systems*, Lecture notes contr. Info. Sci. Berlin (Germany), Springer Verlag, 1986.

[87] Dai, L., *Singular control systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, 118, 1989.

[88] Dai, L., *Singular Control Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1989.b.

[89] Debeljković, D .Lj., Nenadić, Z. Lj., Koruga, Dj., Milinković, S.A., Jovanović, M.B.: ‘On Practical Stability of Time-Delay Systems: New Results’. Proc. 2nd Asian Control Conference, Seoul (Korea), July 1997, pp. 543–545.

[90] Debeljković, D. Lj. & M. Aleksendrić, (2003.a) Lyapunov and non-Lyapunov stability of linear discrete time delay systems, *Proc. ACC*, 4-7 June 2003, Denver USA, pp. 4450-4451.

[91] Debeljković, D. Lj. , I. M. Buzurovic, *Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: A Geometric Approach*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2007.

[92] Debeljković, D. Lj. , S. A. Milinković, *Finite Time Stabilty of Time Delay Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1999.

[93] Debeljković, D. Lj. D., Koruga, Milinković A. S., Jovanović B. M., Jacić A. Lj., “Finite Time Stability of Linear Discrete Descriptor Systems”, *IEEE Electrotechnical Conference, MELECON* 98., 9th Mediterranean Conf., Volume 1, 504-508, 18-20 May 1998.

[94] Debeljković, D. Lj.- Editor, *Time Delay Systems*, *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), **. 2011**

[95] Debeljković, D. Lj. S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Application of singular system theory in chemical engineering Analysis of process dynamics”, *Internat. Congress of Chemical and Process Eng.*, CHISA 96, (monograph) August, Prague, (1996), 25–30.

[96] Debeljković, D. Lj., M. S. Aleksendrić , N. J. Dimitrijevic, Contemporary Theory of Multi Input - Multi Output Linear Control Systems, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011 (*in Serbian*), pp. 476, ISBN 978 – 86 – 7083 – 706 – 5.

[97] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Continuous Singular Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.a.

[98] Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, *Time Delay Systems*, - Chapter 3 : " Stability of

Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I–Tech*,

ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp. 31 – 74, 2011.b.

[99] Debeljković, D. Lj., "Praktična stabilnost sa vremenom smirenja vremenski diskretnih sistema", *Tehnika* (Yu), No. 10, 1979.b, pp. 19–23.

[100] Debeljković, D. Lj., A. Lj. Jacic, M. Medenica Time Delay Systems**:** Stability and Robustness**,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.b

[101] Debeljković, D. Lj., Dj. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacic, (1998.e) Further results on non-Lyapunov stability of linear systems with delayed state, *Proc.* XII *CBA* - Brazilian Automatic Control Conference, Uberlandia (Brazil), September 14 - 18 Vol. IV, pp. 1229-1233.

[102] Debeljković, D. Lj., - Editor *Time Delay Systems*, *I–Tech*, Vienna, (Austria) pp. 226, 2011.

[103] Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A. Jacic, *Discrete Descriptor Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.b.

[104] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Dj.. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, (2000.a) Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval, *Proc. ACC* 2000, Chicago (USA), pp. 1450-1451.

[105] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Continuous Singular Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

[106] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval*, Čigoja press, Belgrade, 2005.

[107] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, Systems, Structure and Control - Editor Petr Husek, **– C**hapter : *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, Vienna, ISBN 978-7619-05-3**, 2008**, pp. 029 – 060.

[108] Debeljković, D. Lj., Stability of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011 (*in Serbian*), pp. 463., ISBN 978 – 86 – 7083 – 694 – 5.

[109] Debeljković, D. Lj., Stability of Control Systems over Infinite Time Interval, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2009, (*in Serbian*) pp. 460.

[110] Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, Time Delay Systems, - Chapter **3 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp. 31 – 74, 2011**.**b.

[111] Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, *Time Delay Systems*, - Chapter 2 : " Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval", *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp.15 – 30, 2011.a.

[112] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, (1997.a) On Practical and Finite-Time Stability of Time-Delay Systems, *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium), pp. 307–311.

[113] Debeljković, D. Lj., & S. B. Stojanović, *Systems, Structure and Control* **-** Editior Petr Husek, – Chapter *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems Delay Dependent Approach*, pp. 029 – 060, I – Tech, ISBN 978-7619-05-3, Vienna, 2008.

[114] Debeljković, D. Lj., , S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Continuous Singular Systems, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

[115] Debeljković, D. Lj., , Linear Singular Systems with Time Delay: Stability, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 452, ISBN 978 – 86 – 7083 – 682 – 2.

[116] Debeljković, D. Lj., , S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Continuous Singular Control Systems, GIP Kultura, Belgrade, 1996.

[117] Debeljković, D. Lj., "Finite time stability of linear descriptor systems", *Preprints of I.M.A.C.S. (International Symposium Modelling and Simulation for Control of Lumped and Distributed Parameter Systems*), Lille, (France), 3–6 June, (1986) 57–61.

[118] Debeljković, D. Lj., "Finite time stability of linear singular discrete time systems", *Proc. Conference on Modeling and Simulation*, Monastir (Tunisia), November 85, (1985) 2–9.

[119] Debeljković, D. Lj., "Finite-Time Stability of Linear Descriptor Systems", *Proc. IMACS/IFORS*, Lille, France (1986.b) 57–61.

[120] Debeljković, D. Lj., "Finite-Time Stability of Time-Continuous Linear Singular Systems", *Automatika* (Yug), (1-2) (1986.b) 17–23.

[121] Debeljković, D. Lj., "Further Results in Finite Time Stability", *Proc. MELECON 83*, Athens (Greece), 1983, pp. 475–478.

[122] Debeljković, D. Lj., "On Practical Stability of Discrete Time Control Systems", *Proc.* 3rd International Conference on Control and Applications, Pretoria (South Africa), December (2001), p. 197–201.

[123] Debeljković, D. Lj., "Praktična stabilnost jedne klase vremenski diskretnih sistema", *Saopštenja MF* (Yu), No. 1., 1993, pp. 37–42.

[124] Debeljković, D. Lj., "Praktična stabilnost sa vremenom smirenja vremenski diskretnih sistema u slobodnom i prinudnom radnom režimu", *Tehnika* (Yu), No. 1, 1980.a, pp. 13–20.

[125] Debeljković, D. Lj., "Prilog proučavanju praktične nestabilnosti vremenski diskretnih sistema", *Tehnika* (Yu), No. 2, 1980.b, pp. 7–11.

[126] Debeljković, D. Lj., "Singular control systems", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 11, Series A Math. Analysis, No. 5–6, (2004) 691–706.

[127] Debeljković, D. Lj., A. Lj. Jacic, M. Medenica *Time Delay Systems: Stabilty and Robustness*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

[128] Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, "On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems", *Proc. EUROCON Conference*, Paris (France), April (1986) 406–409.

[129] Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, "On Practical Stability" , *Proc. MELECON Conference,* Madrid (Spain), October (1985) 102-105.

[130] Debeljković, D. Lj., *Dinamika objekata i procesa,* Mašinski fakultet, Beograd, 1989.

[131] Debeljković, D. Lj., Dj. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić (1998.a) Further Results on Non-Lyapunov Stability of Time Delay Systems, *Proc. MELECON* 98, Tel-Aviv (Israel), May 18-20, Vol.1, pp. 509 – 512.

[132] Debeljković, D. Lj., Dj. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, (1998.b) Non-Lyapunov stability analysis of linear time delay systems**,** *Preprints DYCOPS* 5, 5th IFAC Symposium on Dynamics and Process Systems, Corfu (Greece), pp. 549-553.

[133] Debeljković, D. Lj., Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: Impulsive behaviour, generalized inverses, stabilization, regularization, optimization and applications, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011 (*in Serbian*), pp. 426, ISBN 978 – 86 – 7083 – 728 – 7.

[134] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S A .Milinković, M. B. Jovanović, Lj.A.Jacić, "Finite time stability of linear descriptor systems", *Proc. MELECON* 98, Tel-Aviv (Israel) May 18-20, Vol.1, (1998) 504 - 508.

[135] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, "Finite Time Stability of Linear Discrete Descriptor Systems", *Proc. MELECON* 98*,*
Tel - Aviv (Izrael) (1998.b) 509–512.

[136] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, "Further Results on Non-Lyapunov Stability of Time Delay Systems", *Proc. MELECON* 98, Tel-Aviv (Israel), May 18 – 20 (1998.a) **Vol 1**, 509–512.

[137] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Non-Lyapunov Stability Analysis of Linear Time Delay Systems", *Proc. DYCOPS* 98, Corfu (Greece),
June 8 – 10 (1998.b) 549–553.

[138] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, "Further Results on Non-Lyapunov Stability of Linear Systems with Delayed State", *Proc. XII Brazilian Automatic Control Conference*, **IV**, Uberlandia (Brasil) September 14 – 18 (1998.e) 1229–1233.

[139] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, "Further results on non-lyapunov stability of time delay systems", *Proc. MELECON* 98, Tel-Aviv (Israel), May 18 – 20 Vol 1 (1998.a) 509–512.

[140] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Non-Lyapunov stability analysis of linear time delay systems", *Proc. DYCOPS* 98, Corfu (Greece),June 8 – 10 (1998.b) 549–553.

[141] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, "Further results on Non-Lyapunov stability of linear systems with delayed state", *Proc.* XII *Brazilian Automatic Control Conference*, **IV**, Uberlandia (Brasil) September 14 – 18 (1998.e) 1229–1233.

[142] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S..A.Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A .Jacić, "Finite time stability of linear discrete descriptor systems", *Preprints* 5^{th} *IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China) September 8 - 10 (1998), TS13 1 - 5.

[143] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurovic , *Dinamika kontinualnih linearnih singularnih sistema - Geometrijski prilaz*, Mašinski fakultet, Beograd, 2007.

[144] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurovic, Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: A Geometric Approach, Mechanical Faculty, Belgrade, 2007.

[145] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, T. Nestorović, D. Popov, " On Finite Time Stability and Asymptotic Practical Stability of Time Delayed Systems: New Delay Dependent Criteria ", *Proc.* Chinese Control Conference CCDC 2011, Yantai, (China), 24 – 26, (2011.d) 1058 – 1065 CD-Rom.

[146] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, T. Nestorović, D. Popov, " On Finite and Practical Stability of Time Delayed Systems: Lyapunov-Krassovski Approach: Delay Dependent Criteria ", *Proc.* The 23 rd, Chinese Control and Decision Conference CCDC 2011, Mianyang, (China), 23 – 25 , (2011.c) 331 - 337.

[147] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, T. Nestorović, S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, M. S. Aleksendrić, " Time Delayed System Stability in the sense of Non- Lyapunov: Delay Independent and Delay Depandent Approach: New Results ", *Proc.* 2011 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC) Denver (Colorado), (USA), September 28 – 30, 2011, CD – Rom , (2011.e) CD-Rom.

[148] Debeljković, D. Lj., Kablar N. A., On necessary and sufficient conditions of linear singular systems stability operating on finite time interval, *Proc. XII CBA* , Uberlandia, Brazil Sep. 14 -18 (1998) Vol. IV, 1241-1246.

[149] Debeljković, D. Lj., Lazarević, M.P., Koruga, Dj., Milinković, S.A., Jovanović, M.B. : 'Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval'. Proc.

[150] Debeljković, D. Lj., Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 452, ISBN 978 – 86 – 7083 – 682 – 2.

[151] Debeljković, D. Lj., *Linearni singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem*: Stabilnost, robusnost, stabilizacija i robusna stabilizacija, Mašinski fakultet, Beograd, 2010.

[152] Debeljković, D. Lj., *Linearni singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem*, Mašinski fakultet u Beogradu, 2010

[153] Debeljković, D. Lj., Lj. A. Jacić, M. S. Medenica, *Sistemi sa kašnjenjem*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.a.

[154] Debeljković, D. Lj., Lj. A. Jacić., N. S. Višnjić, M. Pješčić, "Asymptotic Stability of Generalized Discrete Descriptive Time Delayed Systems", *Proc. The* 5th *Edition of IFAC Know. and Tech. Transfer Conference Series on Automation for Buildings the in the Infra structure, DECOM* 2007, May 17–19, Cesme–Izmir (Turkey), (2007) 369–374.

[155] Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non – Lyapunov stability of linear discrete time delay systems", *Proc. ACC* 03, Denver (Colorado), USA, June 4 - 6, (2003a), CD-Rom, 4450 – 4451.

[156] Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Stability in the sense of Lyapunov of linear discrete time delayed systems", *Proc. HIPNEF* 2002, Nis (Yugoslavia), October, 2-5 (2002), 325 – 332.

[157] Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and non–Lyapunov stability of linear discrete time delay systems", *Proc. ACC*, 4–7 June 2003, Denver USA, (2003.a) 4450–4451.

[158] Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, Y. Y. Nie, Q. L. Zhang, (2003.b) Lyapunov and non-Lyapunov stability of linear discrete time delay systems, *Proc. The Fourth Inter. Conference on Control and Automation,* 9-12 June 2003, Montreal (Canada), pp. 296-300.

[159] Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A Jacić, *Diskretnini singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.b.

[160] Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A. Jacić, *Discrete Descriptor Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

[161] Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A. Jacić, *Diskretni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

[162] Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A. Jacić, *Diskretni deskriptivni sistemi*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.c.

[163] Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A. Jacić, *Diskretni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

[164] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Dj. Koruga, (1997.e) Finite time stability for the metal strips cold rolling, *Proc. ASIAN* international workshop on automation in steel industry, Kyongju (Korea), July 16 – 18, pp. 233-238.

[165] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Dj. Koruga, S. Tomaševic, (1997.c) On practical stability of time delay system under perturbing forces, *Proc. AMSE* 97, Melbourne (Australia), pp. 442–446.

[166] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Dj. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, (2000.c) Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval and application to different chemical processes, *CHISA* 2000, 27-31 Avgust, Praha (Czech Republic), CD-Rom.

[167] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Dj. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval and application to different chemical processes, *CHISA* 2000, 27-31 Avgust, Praha (Czech Republic), (2000.c) CD-Rom.

[168] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Dj. Koruga, S. Tomasevic, "Finite time stability of singular systems operating under perturbing forces: Matrix measure approach", *Proc. AMSE*, Melbourne, (Australia) Oct. 29–31, (1997) 447–450.

[169] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Dj.. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval",, *Proc. APCCM* (The 4th Asia-

Pacific Conference on Control and Measurements), 9-12 July Guilin (China), part D (2000.b) 9 -14.

[170] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, "Finite Time Stability for the Metal Strip Cold Rolling", *Proc. ASI: International Workshop on Automation in Steel Industry*, Kyongju (Korea), July 16 – 18 (1997.b) 233–238.

[171] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, "Finite time stability for the metal strip cold rolling", *Proc. ASI: International Workshop on Automation in Steel Industry*, Kyongju (Korea), July 16 – 18 (1997.b) 233–238.

[172] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, "Stabilnost neautonomnih sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu", *Zbornik radova HIPNEF 98*, Beograd (YU), Oktobar 28 – 30 (1998.f) 181–185.

[173] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval", *Proc*. ***ACC*** 2000, Chicago Illinois (USA), June 28-30, 2000, 1450-1451.

[174] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, "Stabilnost neautonomnih sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu", *Zbornik radova HIPNEF* 98, Beograd (YU), Oktobar 28 – 30 (1998.f) 181–185.

[175] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. Tomašević, "On Practical Stability of Time Delay System Under Perturbing Forces", *Proc. AMSE* 97, Melbourne (Australia), October 29 – 31 (1997.d) 442–445.

[176] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, (1998.c) Finite time stability analysis of linear time delay systems Bellman-Gronwall approach, *Proc.* 1st *IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France) July 6 – 7, pp. 171–175.

[177] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman-Gronwall Approach", *Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France)
July 6 – 7 (1998.c) 171–175.

[178] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, "Discrete time delayed system stability theory in the sense of

Lyapunov: New results", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 12, Series B Numerical. Analysis, Vol. 12.b–Suppl., (2005.a) 433–442.

[179] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, (1999) Finite Time Stability of Time Delay Systems, *IMA J. Math. Control and Info.* 16 (3) pp. 101-109, ISSN 0265-0754.

[180] Debeljković, D. Lj., N. A. Kablar, "Finite time stability of linear singular systems: Bellman–Gronwall approach", *Proc. ACC* 99, San Diego (USA), (1999) 1803–1806.

[181] Debeljković, D. Lj., N. A. Kablar, "Further results on finite time stability of discrete linear singular systems: Bellman - Gronwall approach ", *Proc. APCCM*, The 4th Asia - Pacific Conf. on Control and Measurements, 9 - 12 July (2000) Guilin (China) D. 10.

[182] Debeljković, D. Lj., N. A. Kablar, **"**On Finite Time Stability of Discrete Descriptor Systems: Bellman - Gronwall Approach**"**, Proc. HIPNEF 98, Oktober 28 - 30, Belgrade (YU), (1998) 169 - 172.

[183] Debeljković, D. Lj., N. A. Kablar, "Stability of discrete linear singular systems: Bellman - Gronwall approach", Transactions of Mechanical Eng. Faculty, Belgrade,
No.1, (1999) 1 - 4.

[184] Debeljković, D. Lj., N. S. Višnjić, *Linearni singuarni sistemi: Metode podešavanja polova i projektovanje observera,* Mašinski fakultet, Beograd, 2006.

[185] Debeljković, D. Lj., N. S. Višnjić, M. Pješčić, "The Stability of Linear Continuous Singular Systems over the Finite Time Interval: An Overview", International Journal of Information & System Science, Vol. 4, No. 4, (2008) 560–584.

[186] Debeljković, D. Lj., Nenadić, Z. Lj., Milinković, S.A., Jovanović, M.B.: 'On Practical and Finite-Time Stability of Time-Delay Systems'. Proc. European Control Conference, Brussels (Belgium) July 1997, pp.307–311. 13

[187] Debeljković, D. Lj., S. A .Milinković, M. B. Jovanović, Application of singular system theory in chemical engineering: Analysis of process dynamics, Monograph,

12 th International Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, Prague (Czech Republic), 25 - 30 August, 1996, Process Eng. Publishing, ISBN 80-86059-1-1., 1977.

[188] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Application of singular system theory in chemical engineering: Analysis of process dynamics", Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Prague (Czech Republic), Process Eng. Publishing, 1996.

[189] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Application of Singular Systems Theory in Chemical Engineering*, MAPRET Lecture – Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Praha,
Czech Republic 1996.

[190] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Continuous Singular Control Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1996.

[191] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

[192] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.b.

[193] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi Automatskog Upravljanja*, Kultura, Beograd, 1996.a.

[194] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2004.

[195] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.a.

[196] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacic, *Discrete Singular Control Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1998.

[197] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacic, Dj. Koruga, (1998.d), Further results on non - Lyapunov stability of time delay systems**,** *Prepr.* 5th *IFAC* Symp. on (LCA), Shenyang (China), September 8 - 10 , TS13, pp. 6-10.

[198] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, *Diskretni singularni sistemi Automatskog Upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

[199] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, "Praktična Stabilnost Vremenski Diskretnih Linearnih Singularnih Sistema", *DIT* (Yu), **III** (8-9) (1997) 51–58.

[200] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, *Diskretni Singularni Sistemi Automatskog Upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

[201] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, Đ. Koruga, "Further Results on Non-Lyapunov Stability of Time Delay Systems", *Proc. 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), September 8 – 10 (1998.d) TS13-6–TS13-10.

[202] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval*, Cigoja press, Belgrade, 2004.

[203] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Čogoja štampa, Beograd, 2004.

[204] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremeskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, 1999.

[205] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Descriptor Time Delayed System Stability Theory in the sense of Lyapunov New Results", Facta Universitatis, Ser. Mech. Eng, Vol. 1, No. 10, (2003.c) 1311–1315.

[206] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacic, "Further results on asymptotic stability of linear discrete descriptor time delayed systems", *Proc.* 1st International Workshop on Advanced Control Circuits and Systems, ACCS 05, Cairo (Egypt), March 06–10, 2005, CD–Rom, (2005.d).

[207] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, (2006.a) Further Results on Descriptor Time Delayed System Stabilty Theory in the sense of Lyapunov Pandolfi based approach, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, pp. 1-11, ISSN 1708-296x.

[208] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, "A Short Note to the Lyapunov Stabilty of $\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1)$ New Results", *Proc. CSCSC* 04 Shenyang (China), Avgust 08–10, (2004.b) 11–14.

[209] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, "Further Results on Descriptor Time Delayed System Stabilty Theory in the sense of Lyapunov Pandolfi based approach", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, (2006.a) 1–11.

[210] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, M. P. Lazarević, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, "Discrete time delayed system stability theory in the sense of Lyapunov application to the chemical engineering and process technology", *Proc.* CHISA 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, (2004.c) CD–Rom.

[211] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijevic, M. S. Aleksendrić, "Time Delayed System Stability Theory in the sense of Non – Lyapunov – Delay Independent and Delay Dependent Approach: New Results", *Asian Journal Control*, Vol. .. No. (2011.f).*submitted*

[212] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijevic, Stabilty of Particular Classes of Linear Control Systems over Finite and Infinite Time Interval**,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010 (*in Serbian*), pp. 448., ISBN 978 – 86 – 7083 – 694 – 5.

[213] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. S. Višnjić, S. A. Milinković, "A Quite New Approach to the Asymptotic Stability Theory: Discrete Descriptive Time Delayed System", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15,Series A: Mathematical Analysis, No. 15 , (2008) 469–480.

[214] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. S. Višnjić, S. A. Milinković, "A Quite New Approach to the Asymptotic Stability Theory: Discrete Descriptive Time Delayed System", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series A: Mathematical Analysis, No. 15 , (2008) 469–480.

[215] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. S. Višnjić, S. A. Milinković, "Singular Time Delayed System Stability Theory in the sense of Lyapunov: A Quite New Approach", IEEE Proc. American Control Conference, New York, USA, July 11–13, (2007) 493–494.

[216] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, S. A. Milinković, M. B. Jovanović., "Further Results on Stability of $\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1)$", (2004), *Proc. Conference OSTDS*, Shenyang (China), (2004) 2012 – 2018

[217] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, *Systems, Structure and Control*–Editior Petr Husek,–Chapter *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems Delay Dependent Approach*, (2008) 029–060, I–Tech, Vienna.

[218] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, **Systems, Structure and Control** (Scientific monograph)**,** Editior Petr Husek, Chapter: *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, Vienna, ISBN 978-7619-05-3, 2008, 29-60.

[219] Debeljković, D. Lj., *Sistemi automatskog upravljanja sa kašnjenjem*, GIP Kultura, Beograd, 1994.

[220] Debeljković, D. Lj., *Sistemi sa kašnjenjem,* GIP Kultura, Beograd, 1994.

[221] Debeljković, D. Lj., *Stabilnost sistema automatskog uprvaljanja na konačnom vremenskom intervalu*, Mašinski fakultet, Beograd, 2009.

[222] Debeljković, D. Lj., Stojanović S. B., "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Large Scale Time Delay Autonomous System", *7th Biennial ASME Conference Eng. Systems Design and Analysis*, *ESDA* 2004, Manchester, UK, July 19–22, (2004.a) CD–Rom.

[223] Debeljković, D. Lj., *Synthesis of Discrete Automatic Control on Finite Time Interval* (in Serbian), Ph.D. Thesis, Mechanical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, July, 1979.a.

[224] Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, **Time Delay Systems** - (Scientific monograph) – Chapter: *The Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval*, I – Tech, Vienna, ISBN 978-953-7619-X-X, 2011.

[225] Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, I. M. Buzurovic, G. V. Simeunovic, "On non–Lyapunov delay–independent and delay–dependent criteria for particular class of continuous time delay systems", *Proc. CDC*, December 3–5, Orlando (Florida), (2011), *submitted.*

[226] Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, I. M. Buzurovic, N. J. Dimitrijevic, "A New Approach to the Stability of Time–Delay Systems in the Sense of Non–Lyapunov

Delay–Independent and Delay–Dependent Criteria", *Proc. SISY* 2010 (IEEE 8th *International Symposium on Intelligent Systems and Informatics*), Sept. 10–11, Subotica (Serbia), (2010) 213–218.

[227] Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, Time Delay Systems, - Chapter 2 **:** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp.15 – 30, 2011.a.

[228] Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, Time Delay Systems, **–** Editior Dragutin Lj. Debeljković **–** (Scientific monograph) – Chapter: *Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems*, I – Tech, Vienna, ISBN 978–953–7619–X–X, 2011.

[229] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajic, A. U. Grgic, S. A. Milinković, "Non–Lyapunov stability and instability robustness consideration for linear singular systems", *Proc. 3rd ECC,* Roma (Italy), September 5–8, (1995) 1373–1379.

[230] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, A. U. Grgić, S. A. Milinković, "Non-Lyapunov Stability and Instability Robustness Consideration for Linear Singular Systems", *Proc. ECC95*, Roma (Italy), (1995.b) 3702–3707.

[231] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, T. N. Erić and S. A. Milinković, "A Lyapunov Analysis of Stability Robustness for Discrete Linear Descriptor Systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **15** (1) (1998) 53–62.

[232] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, Z. Gajić, "Further Results in Non-Lyapunov Stability and Unstability of Regular and Irregular Generalized State Space Systems", *Proc. 4th Conference SAUM*, Kragujevac, Yugoslavia, June (1992) 316–333.

[233] Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, Z. Gajić, B. Petrović, "Boundedness and Existence of Solutions of Regular and Irregular Singular Systems", *Publications of Faculty of Electrical Eng. Series: Automatic Control*, Belgrade (YU), (1) (1993) 69–78.

[234] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Dj.,Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, (1997.b) On practical stability of time-delay systems new results, *Proc.* 2nd *ASCC* 97, 22 – 25 July, Seoul (Korea), pp. 543–546.

[235] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, (1997.d) On the stability of linear systems with delayed state defined over finite time interval, *Proc*. *CDC* 97, San Diego, California (USA), pp. 2771–2772.

[236] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On Practical and Finite-Time Stability of Time-Delay Systems”, *Proc. ECC97*, Brussels (Belgium), July 2 - 6 (1997.a) 307–311.

[237] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval” *Proc*. *CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21 – 23 (1997.e) 2771–2772.

[238] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On practical and finite-time stability of time-delay systems”, *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium) July 2 - 6 (1997.a) 307–311.

[239] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On the stability of linear systems with delayed state defined over finite time interval”, *Proc*. *CDC* 97,San Diego, California (USA), December 21 – 23 (1997.e) 2771–2772.

[240] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems“, *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium) July 2–6 (1997.a) p. 307–311.

[241] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval”, *Proc*. *CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21–23 (1997.b) p. 2771–2772.

[242] Debeljković, D. Lj., *Zbirka zadataka iz dinamike objekata i procesa,* Mašinski fakultet, Beograd, 1990.

[243] Debeljković, D. Lj.,& S. B. Stojanović, (2008) *Systems, Structure and Control* **-** Editior Petr Husek, – Chapter *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems Delay Dependent Approach*, pp. 029 – 060, I – Tech, ISBN 978-7619-05-3, Vienna.

[244] Debeljković, D. Lj.,, S. B. Stojanović, M. S. Aleksendrić, “Finite Time Stability of Linear Time Invariant Discrete Descriptor System: an LMI Approach”, *TTEM* (BIH), 2012 (podneseno)

[245] Debeljković, D., Lj., D. H. Owens, “On Practical Stability”, *Proc. of MELECON Conf.*, Madrid, Spain, October, (1985) 103-105.

[246] Debeljković, D.Lj., M. Aleksendrić, N. Yi-Yong, Q. L. Zhang, “Lyapunov and Non – Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems“, *Proc. The Fourth Inter. Conference on Control and Automation,* 9 – 12 June, Montreal (Canada), (2003.b), CD – Rom, 296 – 300.

[247] Debeljković, D.Lj., Kablar N.A., Finite time instability of time varying linear singular systems, *Proc. IEEE ACC 99*, San Diego, USA, June 2-4 (1999) 1796-1800.

[248] Debeljković, D.Lj., Kablar N.A., Finite time stability of linear singular systems: Bellman-Gronwall approach, *Proc. IEEE ACC 99*, San Diego, USA, June 2-4, (1999) 1803-1806.

[249] Debeljković, D.Lj., Lazarević M. P., Koruga Dj., Tomasevic S., Finite time stability of singular systems operating under perturbing forces: Matrix measure approach, *Proc. AMSE Conference*, Melbourne Australia, October 29 – 31 (1997) 447–450.

[250] Debeljković, D.Lj., Lazarević, M .P., Milinković, S.A., Jovanović, M.B.: ‘Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman-Gronwall Approach’. Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems, Grenoble (France) July 1998, pp. 171–175.

[251] Debeljković, D.Lj., Nenadić, Z.Lj., Milinković, S.A., Jovanović, M.B.; ‘On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval’. Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, California (USA), December 1997, pp. 2771–2772.

[252] Debeljković, D.Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, **“**Application of singular system theory in chemical engineering : Analysis of process dynamics”, Monograph,

12 th International Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, Prague

(Czech Republic), 25 - 30 August, 1996, Process Eng. Publishing, ISBN 80-86059-1-1.

[253] Debeljković, D.Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, pp. 220, 1999.

[254] Debeljković, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - **Editor D. Lj. Debeljković**, I – Tech, Vienna, 2011.

[255] Debeljković, Lj. D. & S. A. Milinković, (1999) *Finite Time Stabilty of Time Delay Systems*, GIP Kultura, ID 72600076, Belgrade.

[256] Debeljković, Lj. D. S. B. Stojanović, N. S. Višnjić, S. A. Milinković, “Lyapunov Stability Theory A Quite New Approach–Discrete Descriptive Time Delayed Systems”, *Proc. American Control Conference* 06, June, 14–16, Minneapolis (USA), (2006.b) 5091–5096.

[257] Debeljković, Lj. D., A. Jacic, M. Medenica, (2005) *Time Delay Systems Stability and Robustness,* Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, ISBN 86-7083-504-5

[258] Debeljković, Lj. D., A. Jacic, M. Medenica, *Time Delay Systems Stability and Robustness,* Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, 2005.

[259] Debeljković, Lj. D., D. H. Owens, “On practical stability of singular systems”, *Proc. Melecon Conf* .85, October 85, Madrid (Spain), (1985) 103–105.

[260] Debeljković, Lj. D., *Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and Robustness Stabilizability*, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, (*in Serbian*), 452, 2010.

[261] Debeljković, Lj. D., *Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and Robustness Stabilizability*, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, (*in Serbian*), 452, 2010.

[262] Debeljković, Lj. D., Lj. A. Jacić, M. S. Medenica, *Sistemi sa kašnjenjem*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.

[263] Debeljković, Lj. D., M. P. Lazarević, S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, “Discrete Time Delayed System Stabilty Theory in the sense of Lyapunov: New Results”, *Proc. ISIC* 04 (*International Symposium on Intelligent Control*), September 01–04, Taipei (Taiwan), (2004) 511–515.

[264] Debeljković, Lj. D., S. A. Milinković, *Finite Time Stabilty of Time Delay Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1999.

[265] Debeljković, Lj. D., S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, "Further results on descriptor time delayed system stabilty theory in the sense of Lyapunov: Pandolfi based approach", *The fifth International Conference on Control and Automation,* ICCA 05, June 26–29, Budapest (Hungary), CD–Rom, (2005.c).

[266] Debeljković, Lj. D., *Stabilty of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, (*in Serbian*), 460, 2009.

[267] Debeljković, Lj. D., *Stabilty of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, (*in Serbian*), pp. 460.

[268] Dervisoglu, A., C. A. Desoer, "Degenerate networks and minimal differential equations", *IEEE Trans. Circuits and Systems,* **CAS-22** (10) (1975) 769-775.

[269] Desoer, C. A., M. Vidysagar, *Feedback Systems: Input – Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

[270] Dihovični, Đ. N., T. N. Erić, D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Weak Domain Attraction and Existence of Solutions Convergent to the Origin of the Phase Space of Discrete Descriptor Linear Systems", *Proc. ITHURS 96*, Leon, Spain, **II** (1996.b) 367–371.

[271] Dlala M., M. A., Hammami , "Uniform Exponential Practical Stability of Impulsive Perturbed Systems", *Journal of Dynamical and Control Systems*, Volume 13 , Issue 3, Hingham, MA, USA, July (2007) 373-386.

[272] Dolezal, V., "Generalized Solutions of the Semistate Equations and Stability", *Circ. Syst. Sig. Proc*, **5** (4) (1986) 391–403.

[273] Dolezal, V., "Some Practical Stability Criteria for Semistate Equations", *Journal Circuits, Systems and Signal Processing*, Volume 6, Number 3, Birkhauser, Boston, USA, September, (1987) 335-345 .

[274] Dorato, P., "An Overview of Finite-Time Stability", *Currennt Trends in Nonlinear Systems and Control*, Part II, Birkhauser, Boston, USA, September, (2006) 185-194.

[275] Dorato, P., “Comment on “Finite-Time Stability Under Perturbing Forces and on Product Spaces” ”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 340, June, (1967) 340 -340.

[276] Dorato, P., “Short time stability in linear time-varying system”. *Proc. IRE Internat. Conv. Rec.* Part 4, New York 1961, pp. 83–87.

[277] Dvirnyi, A. I., “Sufficient Conditions for the Practical and Technical Stability of Quasilinear Impulsive Systems”, *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 41, Number 1, Springer, New York, USA, January (2005) 104-110.

[278] Dziurla, B., R. W. Newcomb, “Nonregular semistate systems: examples and input-output pairing”, *IEEE Proc. on CDC*, Los Angeles, CA (1987) 1125-1126.

[279] Fang, H. H., H. J. Hunsarg, (1996) Stabilization of nonlinear singularly perturbed multiple time delay systems by dither, *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, March, Vol. 118, pp. 177-181.

[280] Feng, J.,Wu, Z., Sun, J.: ‘Finite-time control of linear singular systems with parametric uncertainties and disturbances’, Acta Autom. Sin., 2005, 31 (4), pp. 634-637.

[281] Feng, Z. S., “Lyapunov Stability and Practical Stability of Nonlinear Delay Stochastic Systems: A Unified Approach”, *Proc.* 42*nd IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol. 2, San Antonio, TX, USA, December, (1993) 865-870.

[282] Fettweis, A., “On the algebraic derivation of the state equations”, *IEEE Trans. Circuit Theory,* **CT-16** (2) (1969) 171-175.

[283] Fridman E., Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach, *J. Math. Anal. Appl*., 273 (2002) 24–44.

[284] Gajić, Z., M. Qureshi, *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*, Academic Press, San Diego, (USA), 1995.

[285] Galkowski, K., Rogers E., Gramacki A., Gramacki J., Owens D., “Strong Practical Stability for a Class of 2D Linear Systems”, *ISCAS* 2000 - *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Geneva, Switzerland, May 28-31, (2000) I-403 - I-406.

[286] Gantmacher, F. R., *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, USA, Vol. I, 1977.

[287] Gantmacher, F. R., *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, USA, Vol. II, 1977.

[288] Gantmacher, F., *The Theory of Matrices,* Vol. 1 and Vol. 2., Chelsea, New York, 1959.

[289] Gao, F., Yuan, Z., Yuan, F.: 'Finite-time Control Synthesis of Networked Control Systems with Timevarying Delays', Advances in Information Sciences and Service Sciences, 2011, 3 (7), pp. 1-9.

[290] Garashchenko, F. G., I. A. Kutsenko, "Problems of Practical Stability and Stabilization of Motion in Discrete-time Systems", Journal of Mathematical Sciences, Volume 66, Number 5, Springer, New York, USA, October, (1993) 2538-2543.

[291] Garashchenko, F. G., L. A. Pantalienko, "Practical Stability of Dynamical Systems Dependent on a Parameter", *Journal of Mathematical Sciences*, Volume 58, Number 1, Springer, New York, USA, January, (1992) 95-99.

[292] Garcia, G., Tarbouriech, S., Bernussou, J.: 'Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems', IEEE Trans. Autom. Control, 2009, 54, pp. 364-369.

[293] Goreckii, H., S. Fuksa, P., P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems,* J. Wiley, New York, 1989.

[294] Grujić, Lj. T., "Non-Lyapunov Stability Analysis of Large-Scale Systems on Time-Varying Sets", *Int. J. Control*, **21** (3) (1975.c) 401–415.

[295] Grujić, Lj. T., "On Practical Stability of Automatic Control Systems", *Symp. Mechanical Eng.* '1873–1973', Belgrade (1973.b) B.21–B.26.

[296] Grujić, Lj. T., "On Practical Stability of Large-Scale Systems", *Proc. ETAN* (1977.a) III.301–III.307.

[297] Grujić, Lj. T., "On Stability Domain of Singularly Perturbed Systems", *Proc. ETAN* (1977.b) III.13–III.20.

[298] Grujić, Lj. T., "Practical Stability with the Settling Time of Composite Systems", *Automatika*, T. P. 9 (1975.a) 1–11.

[299] Grujić, Lj. T., "Uniform Practical and Finite -Time Stability of Large-Scale Systems", *Int. J. Syst. Sci.*, **6** (2) (1975.b) 181–195.

[300] Grujić, Lj. T., “Uniquely Bounded Sets and Nonlinear Systems”, *Proc.* 1978 *IEEE Conf. Decision and Control*, San Diego (1979) 325–333.

[301] Grujić, Lj. T., A. A. Martinjuk, M. Ribbens-Pavella, *Stability of Large Scale Systems under Structural and Singular Disturbances*, Naukova Dumka, Kiev, 1984.

[302] Grujić, Lj. T., *Automatic Control System Syntehesis of Rigid Body Motion though a Fluid*, M.Sc. Thesis (in Serbian), Electrical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, October 1970.

[303] Grujić, Lj. T., *Large-Scale Systems Stability*, (in Serbian), Faculty of Mechanical Eng., Belgrade, 1974.

[304] Grujić, Lj., *Diskretni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 1991.

[305] Grujić, T. Lj., “On Practical Stability”, 5*th Aslomar Conf. on Circuits and Systems*, (1978) 174-178.

[306] Grujić, T. Lj., “On Practical Stability”, *Int. Journal of Control*, Vol 17, Issue 4, (1973) 881-887.

[307] Gu, K., Kharitonov, V. L., Chen, J., Stability of Time-Delay Systems, Burkhauser, 2003, Boston

[308] Gu, K., V. L. Kharitonov, J. Chen, *“Stability of Time-Delay Systems”*, Burkhauser, Boston 2003.

[309] Guang, C.T., W. Z., “Technical Stability of Nonlinear Time-varying Systems with Small Parameters”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 21, Number 11, Springer Netherlands, November, (2000) 1264-1271.

[310] Gunderson, R.W., “On Stability over a Finite Interval”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, October, (1967) 634-67.

[311] Gurman, V. I., G. N. Konstatinov, “Ocenka množestov dostižimosti upravljaemih sistem”, v knjigi *Dinamičeskoe upravlenie*, Nauka, Moskva, (1979) 72–73.

[312] Hahn, W., *Stability of Motion*, Spinger-Verlag, Berlin, 1967.

[313] Hahn, W., *Theory and Application of Lyapunov’s Direct Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.

[314] Hale J.K., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[315] Hale, J. K., *Functional differential equations*, Springer, New York, 1971.

[316] Hale, J., *Functional Differential equations*, Springer Verlag, New York, 1977.

[317] Hmamed, A., “A matrix Inequality”, *Int. J. Control*, **49** (1989) 363–365.

[318] Hmamed, A., “Further Results on Delay-Independent Asymptotic Stability of Linear Systems”, *Int. J. Systems Sci*., **22** (6) (1991), 1127–1132.

[319] Hmamed, A., “On the Stability of Time Delay Systems: New Results”, *Int. J. Control*, **43** (1) (1986.a) 321–324.

[320] Hmamed, A., “Stability Conditions of Delay-Differential Systems”, *Int. J. Control*, **43** (2) (1986.b) 455–463.

[321] Hmamed, A., “Stability Conditions of Delay–Differential Systems”, *Int. J. Control*, **43** (2) (1986.b) p. 455–463.

[322] Hsiung, K. L., L. Lee, “Lyapunov Inequality and Bounded Real Lemma for Discrete–Time Descriptor Systems”, *IEEE Proc.–Control Theory Application*, Vol. 146, No. 4, July, (1999) 327–331.

[323] I. M. Buzurović, D. Lj. Debeljković, Geometric Approach and Dynamical Behavior Study for Particular Class of Linear Singular Systems with Application in Medicine, Mechanical Faculty, Belgrade, 2009. (*in Serbian*) pp. 446. - ISBN 978 – 86 – 7083 – 669 – 3.

[324] Infante, E.F., “Some Remarks on the Stability of Time-Varying Systems”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, December, (1968) 722-723.

[325] Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem*, Nauka, Moskva, 1978.

[326] Jiang, D.: ‘Finite Time Stability of Cohen-Grossberg Neural Network with Time-Varying Delays’. Proc. of the 6th International Symposium on Neural Networks on Advances in Neural Networks, Wuhan, China May 2009, pp. 522–531.

[327] Johnson, G. W., “On Lyapunov Stability vs Bounded Input – Bounded Output”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-9** (1969) 178–179.

[328] Jovanović, M. R, D. Lj. Debeljković, “Finite-Time Stability under Perturbing Forces of Linear Singular Systems”, *Proc. XL Conference ETRAN*, Budva, June 1996.

[329] Jun-E F., Zhen W., Jia-Bing S., Finite-time control of linear singular systems subject to parametric uncertain and disturbances, *Acta Autom. Sin*., 31(4) (2005) 634-637.

[330] Kablar N.A., Debeljković D. Lj., Non-Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach, *Proc. 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang, China, September 8-10 (1998) 16 – 20.

[331] Kablar N.A., Debeljković D.Lj., Non-Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach, *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems*, Padova, Italy, July 6-10 (1998).

[332] Kablar N.A., Debeljković D.Lj., Finite time stability of time varying singular systems, *Proc IEEE Decision and Control*, Florida, USA, December 10-12 (1998) 3831-3836.

[333] Kablar, A. N., D. Lj. Debeljković, "Finite time stability of time varying singular systems", *Proc. CDC* 98, Florida (USA), December 10–12, (1998) 3831–3836.

[334] Kablar, A.N., D. Lj. Debeljković, "Finite-Time Instability of Time-Varying Linear Singular Systems", *Proc. of* 38 *th the IEEE American Control Conference*, San Diego, California, USA, June, (1999) 1796-1800.

[335] Kalman, R. E., J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the 'Second Method' of Lyapunov", I – Continuous Time Systems, *Trans. AMSE J. Basic Eng.*, **82** (June) (1960) 371–393.

[336] Kalman, R. E., J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the 'Second Method' of Lyapunov", II – Discrete Time Systems, *Trans. AMSE J. Basic Eng.*, **82** (June) (1960) 394–400.

[337] Kamen, E. W., *Introduction to signals and systems*, MacMillan Publ. Company, New York, 1990.

[338] Kaplan, J. L., "Converse Theorems for Finite-Time Stability and Practical Stability", IEEE Transaction on Circuits and Systems Theory, Vol. 20, No. 1, January, (1973) 66-67.

[339] Karamancioglu, A., F. L. Lewis, "A Geometric Approach to 2-D Implicit Systems", Proc. of the 29th Conf. on Decision and Control, Honolulu, Hawai, USA, December, (1990) 470-475.

[340] Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, MacMillan Publ. Company, New York, 1990.

[341] Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay", *Trans. ASME*, J. Basic Eng, (3), (1965) 74-80.

[342] Konstatinov, G. N., "O vivode dostatočnih uslova tehničeskoj ustoučivosti s pozicii teorii upravljenia" v knjigi: *Metod funkcii Ljapunova i ivo priloženia*, Nauka, Novosibirsk, 1984.

[343] Krasovskii, N. N., *Problems in the Theory of Stability of Motion*, Stanford University Press, 1963.

[344] Kucera, V., "Recent results on singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA, **I** (1987) 5-9.

[345] Kumar A., Daoutidis P., Control of nonlinear differential algebraic equation systems: an overview, *Proc. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Model Based Process Control*, Antalya, Turkey, August 10-20, (1997) 311-344.

[346] Kumar, A., P. Daoutidis, *Control of Nonlinear Differential Algebraic Equation Systems*, ser. Notes in Math. London, UK: Chapman & Hall, 1996.

[347] La Salle, S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's Direct Method*, Academic Press, New York, 1961

[348] LaSalle, J. P., S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Application*, New York, Academic, USA, 1961.

[349] Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, D. Krstić, *Optimalno upravljanje sistemima sa kašnjenjem u procesnoj industriji,* Tehnološko – metalurški fakultet, Beograd, 2003.a.

[350] Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, (2000) Finite time stability of time delay systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol..17, No.3, pp. 101-109, ISSN 0265-0754.

[351] Lazarević, M.P., Debeljković, D.Lj., Nenadić, Z.Lj., Milinković, S.A.: 'Finite-Time Stability of Delayed Systems', IMA J. Math. Control Inf., 1999, 17 (2), pp. 101-109.

[352] Lazarević, P. M., D. Lj. Debeljković, "Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed states", *Preprints 4th IFAC Workshop on Time Delay Systems,* Rocquencourt, Paris, France, September 2003, CD – Rom., 2003.b.

[353] Lazarević, P. M., *Sinteza Kalmanovog regulatora u sistemima automatskog upravljanja sa kašnjenjem,* Mag. teza, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 1993.

[354] Lee T.C., "Practical Stabilization for Nonholonomic Chained Systems with Fast Convergence, Pole-Placement and Robustness", *Proc. of the* 2002*nd IEEE International Conf. on Robotics & Automation*, Washington, DC, USA, May, (2002) 3534-3539.

[355] Lee T.S., Chen Y.H., Chuan J., "Fuzzy Modeling and Uncertainty-Based Control for Nonlinear Systems", Proc. of the American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June (1998) 2088-2092.

[356] Lee, E. B., W. S. Lu, N. E. Wu, "A Lyapunov Theory for Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-31** (3) (1986) 259–262.

[357] Lee, T. N., S. Dianat, "Stability of Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* Vol. **26**, No 4, (1981) 951–954.

[358] Lee, T. N., U. L. Radović, "Decentralized Stabilization of Linear Continuous and Discrete Time Systems with Delays", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-33** (8) (1988) 757–761.

[359] Lee, T. N., U. L. Radović, "General Decentralized Stabilization of Large – Scale Linear Continuous and Discrete Time Delay Systems", *Int. J. Control*, **46** (6) (1987) 2127–2140.

[360] Lee, T.H.S., J. H. Lee," Stabilization Bounds of Discrete-Two Time-Scale - Systems", *Systems Control Letters,* **(18)** (1992) 479–489.

[361] Lewis F. L., „Subspace recursions and structure Algorithms for Singular Systems", *IEEE Proc. on CDC*, Los Angeles, CA (1987) 11, Los Angeles, CA (1987) 1147-1150.

[362] Lewis, F. L., "A survey of linear singular systems", *Circ. Syst. Sig. Proc.,* **5** (1) (1986.a) 3-36.

[363] Lewis, F. L., "Preliminary Notes on Optimal Control for Singular Systems", *IEEE Proc. on CDC*, Ft. Lauderdale, FL (1985.b) 266–272.

[364] Lewis, F. L., "Recent work in singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA, (1987.a.) 20-24.

[365] Lewis, F., "Descriptor Systems: Decomposition into Forward and Backward Subsystems", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-29** (2) (1984) 167-170.

[366] Lewis, R. M., B. D. O. Anderson, Necessary and Sufficient Conditions for Delay-Independent Stability of Linear Autonomous Systems", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-25** (1980) 735–739.

[367] Liang J. R., "Analysis of stability for descriptor discrete systems with time–delay", *Journal of Guangxi University* (Nat. Sc. Ed.), 25(3), (2000) 249–251.

[368] Lin, J., Z. Yang, "Existence and Uniqueness of solutions for Non-Linear Singular (Descriptor) Systems",*Int. J. Syst. Sci.*, **19** (18) (1988) 2179-2184.

[369] Lin, X., Du, H., Li, S.; 'Finite-time boundedness and L2-gain analysis for switched delay systems with norm-bounded disturbance', Appl. Math. Comput., 2011, 217, pp. 5982–5993.

[370] Liu, H., Shen, Y.; 'H∞ Finite-Time Control for Switched Linear Systems with Time-Varying Delay', Intell. Control Autom., 2011, 2, pp. 203-213.

[371] Liu, L., Sun, J.: 'Finite-time stabilization of linear systems via impulsive control', Int. J. Control, 2008, 81 (6), pp. 905-909.

[372] Luenberger, D. G., "Dynamic equations in descriptor form", *IEEE Trans. Automat. Cont.,* **AC-22** (3) (1977) 312-321.

[373] Luenberger, D. G., "Nonlinear descriptor systems", *J. Econom. Dynam. Control,* **1** (1979) 219-242.

[374] Luenberger, D. G., "Time-invariant descriptor systems", *Automatica,* **14** (1987) 473-480.

[375] Lyapunov, A. M., *General Problem of Stability of Motion*, Moscow, Leningrad, USSR Academy of Science,1956.

[376] Lyapunov, A. M., *Stability of Motion*, Academic Press, New York, 1966.

[377] M. P. Lazarević, D. Lj. Debeljković, D. Krstic, *Optimal Control of Time Delay Sytems in Industrial Processes* , Čigoja press, Belgrade, 2003.

[378] Malabre, M., "A structural approach for linear singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA (1987.a) 34-37.

[379] Malabre, M., "Generalized linear systems: geometric and structural approaches", *Linear Algebra Applic.*, (1989.b) 591-621.

[380] Malabre, M., "Geometric algorithm and structural invariants for linear singular systems", *Proc. 12th IMACS World Congr.,* Paris (1988) 181-183.

[381] Malabre, M., “More geometry about singular systems”, *IEEE Proc. on CDC,* Los Angeles, CA, (1987.b) 1138-1139.

[382] Malabre, M., “On infinite zeros for generalized linear systems”, *Proc. MTNS,* Amsterdam, **1** (1989.a) 271-278.

[383] Malek - Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time Delay Systems*, North - Holland, Amsterdam, 1987.

[384] Malek - Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time-delay systems. analysis, optimization and applications*, Ser,. Systems and Control, Amsterdam, The Netherlands: North Holland, Vol. 9, 1987.

[385] Malek-Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time-Delay Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[386] Malek-Zavarei, M.,M. Jamshidi, *Time-Delay Systems: analysis, optimization and applications*, ser., Systems and Control, Amsterdam, The Nederlands: North-Holland, 1987, vol.9.

[387] Mao, X., (1997) Comments on ”Improved Razumikhin-Type Theorem and its Applications”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 42 (3) 429 - 430, ISSN 0018 - 9286

[388] Marshall, J. E., *Control of Time-Delay Systems*, Peter Peregrinus, London, 1979.

[389] Martynyuk, A. A., “Practical Stability of Hybrid Systems”, *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 25, Number 2, Springer, New York, USA, February, (1989) 194 -200.

[390] Mastellone, S., P. Dorato, C. T. Abdallah, “Finite Time Stabilty of Discrete Time Nonlinear Systems: Analysis and Design”, *Proc.* 43 *rd Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Islands, Bahamas, December (2004) 2572–2577.

[391] Meredov A.M., “Stability in the Mean of Solutions of Difference Equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, Volume 71, Number 4, Springer, New York, USA, September, (1994) 2602-2605.

[392] Mertzios, B. G., “Recent work in singular systems”, *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.,* Atlanta, GA (1987) 14-17.

[393] Mertzios, B. G., F. L. Lewis, „Transfer Function Matrix of Singular Systems“, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-32** (9) (1987) 829-831.

[394] Michel, A. N., D. W. Porter, "Practical Stability and Finite-Time Stability of Discontinuous Systems", *IEEE Transaction on Circuits and Systems Theory*, Vol. CT-19, No. 2, March, (1972) 123-129.

[395] Michel, A., S. H. Wu, "Stability of Discrete Systems over a Finite Interval of Time", *Int. J. Control* .9, (1969) 679-693.

[396] Michel, A.N, "Quantitative Analysis of Simple and Interconnected Systems: Stability, Boundedness and Trajectory Behavior ", *IEEE Transaction on Circuit Theory*, Vol. CT-17, No. 3, August, (1970) 292-301.

[397] Milić, M. M., D. Đurić, "An Approach to the Qualitative Analysis of Singular Dynamical Systems", *Proc. SAUM* 92, Kragujevac, YU (1992) 349–367.

[398] Milić, M. M., V. B. Bajić, "A Lyapunov Function for the Analysis of a Class of Singular Systems and Networks", *Proc.* 10-*th Europ. Conf. Circ. Theory and Design* (*ECCTD* 91), Copenhagen, Denmark, **III** (1991) 1263–1269.

[399] Milić, M. M., V. B. Bajić, "Bounds on Solutions of a Class of Semi-State Models", *Proc. 3rd Int. Symp. Electrical Eng. Theory*, Moscow, USSR, **II** (1985) 23–28.

[400] Milić, M. M., V. B. Bajić, "Bounds on the Complete Response of Linear Time-Varying Networks", *Proc. 1981 IEEE Int. Symp. Circ. Syst.*, Chicago, USA, **2** (1981) 583–585.

[401] Milić, M. M., V. B. Bajić, "Bounds on the Zero Input Response of Linear Time-Varying Reciprocal Network", *Proc. 1980 European Conf. Circ. Theory and Design*, Warsaw, Poland, **2** (1980) 60–65.

[402] Milić, M. M., V. B. Bajić, "Qualitative Analysis of Systems and Circuits Described by Continuous Semistate Models: An Overview of Methods based on Lyapunov Functions (Keynote and Tutorial Lectures)", *Proc.* 6-*th Int. Symp. Networks, Systems and Signal Processing* (*ISYNT* 89), ETAN and IEEE CAS Society, Zagreb, Yugoslavia, (1989.b) 10–15.

[403] Milić, M. M., V. B. Bajić, "Qualitative Analysis of the Semi-State Model for Large-Scale Systems", *Proc. 6th European Conf. Circ. Theory and Design* (*ECCTD* 83), Stuttgart (1983) 131–133.

[404] Milić, M. M., V. B. Bajić, “Solution Behavior of Semi-State Model for Large-Scale Time-Discrete Systems”, *Proc 5th Int. Symp. Network Theory, ETAN and CAS Society*, Sarajevo, Yugoslavia (1984) 106–111.

[405] Milić, M. M., V. B. Bajić, “Some Properties of Solutions of Semi-State Model for Nonlinear Nonstationary Systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc, Special Issue on Semistate Systems*, **5** (1) (1986) 109–123.

[406] Milić, M. M., V. B. Bajić, “Stability Analysis of Singular Systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc, Special Issue: Recent Advances in Singular Systems*, **8** (3) (1989) 267–287.

[407] Ming, Q., Shen, Y.: ‘Finite-Time H∞ Control for Linear Continuous System with Norm-bounded Disturbance’, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2009, 14, pp. 1043-1049.

[408] Moreau, L., D. Aeyels, “Practical Stability and Stabilization”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 45, No. 8, August, (2000) 1554-1558.

[409] Moreau, L., D. Aeyels, “Practical Stability for Systems Depending on a Small Parameter”, *Proc. of the* 37-*th Conf. on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, December, (1998) 1428-1433.

[410] Mori, T., “Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-30** (1985) 158–161.

[411] Mori, T., “Further Comments on ‘Comments on “On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems”’”, *Int J. Control*, **43** (5) (1986) 1613–1614.

[412] Mori, T., E. Noldus, M. Kuwahara, “A Way to Stabilize Linear Systems with Delayed State”, *Automatica*, **19** (5) (1983) 571–573.

[413] Mori, T., H. Kokame, “Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **AC-34** (1989) 460–462.

[414] Mori, T., N, Fukuma, M. Kuwahara, “On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems”, *Int. J. Control* **36** (1) (1982) 95–97.

[415] Mori, T., N, Fukuma, M. Kuwahara, “Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delays”, *Int. J. Control* **34** (6) (1981) 1175–1184.

[416] Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, (1981) Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delay, *International Journal of Control*, 34, (6), 1175-1184, ISSN 0020-7179.

[417] Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, (1982) "Delay Independent Stability Criteria for Discrete - Delay Systems ", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-27** (4) (1982) 964-966.

[418] Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delays", *Int. J. Control* **34** (6) (1981) p. 1175–1184.

[419] Morin, P., C. Samson, "Practical and Asymptotic Stabilization of the 3-d Chained System by the Transverse Function Approach", *Proc. of the* 42*nd IEEE Conf. on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, December (2003) 604-608.

[420] Moulay, E., Dambrine, M., Yeganefar, N., Perruquetti, W.: 'Finite-time Stability and Stabilization of Time-Delay Systems', Syst. Control Lett., 2008, 57, pp. 561-566.

[421] Moulay, E., Perruquetti, W.; 'Finite-Time Stability and Stabilization of a Class of Continuous Systems', J. Math. Anal. Appl., 2006, 323, pp.1430–1443.

[422] Moulay, E., W. Perruquetti, "Lyapunov-based Approach for Finite Time Stability and Stabilization", *Proc. of the* 44 *th IEEE Conf. on Decision and Control and the European Control Conference* 2005 Seville, Spain, 4742-4747, December 12-15, 2005.

[423] Muller P. C., "Linear mechanical descriptor systems identification, analysis and design", *Preprints of IFAC, Conference on Control of Independent Systems*, Belfort, France, (1997) 501–506.

[424] Müller, P. C., "Stability of Linear Mechanical Systems with Homonymic Constrains", Applied Mechanical Review, Vol. 46, No. 11, November, (1993) 161 – 164.

[425] Muller, P.C.: *Linear Mechanical Descriptor Systems: Identification, Analysis and Design*, Preprints of IFAC, Conference on Control of Independent Systems, Belfort, France, (1997) 501-506.

[426] Nenadić, Lj. Z., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, “On practical stability of time delay systems”, *Proc. AACC*, (Annual American Control Conference), Alberquerque, New Mexico, (USA), June 4–6, (1997), p. 3235–3236.

[427] Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Praktična stabilnost jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem”, *Zbornik radova HIPNEF ‘96*, Vrnjačka Banja, 5–7 jun (1995.a) 197–204.

[428] Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Stabilnost

na konačnom vremenskom intervalu jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, *Tehnika – E*, **45** (11-12) (1995.b) E1–E7.

[429] Nenadić, Z. Lj., *Sinteza kontinualnog automatskog upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za objekte i procese sa kašnjenjem*, Dipl. rad, *Katedra za automatsko upravljanje*, Mašinski fakultet, Beograd (1995).

[430] Nenadić, Z.Lj., Debeljković, D.Lj., Milinković, S.A.: ‘On Practical Stability of Time Delay Systems’, Proc. American Control Conference, Albuquerque, (USA) June 1997, pp. 3235–3235.

[431] Newcomb, R. W., “The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-28** (1) (1981) 62–71.

[432] Newcomb, R. W., B. Dziurla, “Some Circuits and Systems Applications of Semi state Theory”, *Circ. Syst. Sig. Proc.,* **8** (3) (1989) 235-260.

[433] O’Leary, D. P., J. P. Segundo, J. J. Vidal, “Perturbation Effects on Stability of Gravity Receptors”, *Journal of Biological Cybernetics*, Volume 17, Number 2, Springer Berlin/Heidelberg, June, (1975) 98-108.

[434] Owens D.H., Debeljković D.Lj., Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems: a Geometric Analysis, *IMA J. Math. Control Inf.*, 2 (1985) 139-151.

[435] Owens, D . H., *Feedback and Multivariable Systems,* Peter Peregrinus, Ltd., 1987.

[436] Owens, D. H. D. Lj. Debeljković, “On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems”, *Proc. 25th Conference on Decision and Control*, Athens, Greece (1986) 2138–2139.

[437] Owens, D. H., D. Lj. Debeljković, „Cosistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems: A Geometric Approach“, *IMA Journal on Mathematical Control and Information,* **2** (1985) 139-151.

[438] Owens, H. D., D. Lj. Debeljković, "On non–Lyapunov stability of discrete descriptor systems", *Proc. CDC*, Athens (Greece), December, (1986) 2138–2139.

[439] Ozcaldrian, K., "Geometric notes on descriptor systems", *IEEE Proc. on CDC*, Los Angeles, CA (1987.b) 1134-1137.

[440] Ozcaldrian, K., *Control of descriptor systems*, Ph.D. Thesis, School of Elec. Eng., Georgia Inst. Techn., Atlanta, GA, USA, 1985.

[441] Pandolfi L., "Controllability and stabilization for linear system of algebraic and differential equations", *Jota* 30 (4), (1980) 601–620.

[442] Pantelides C.C., Gridsis D., Morison K.R., Sargent R.W.H., The mathematical modeling of transient systems using differential-algebraic equations, *Comp.& Chem. Eng*., 12 (1988) 449–454.

[443] Parrilo, P. A., S. Khatri, "On Cone-Invariant Linear Matrix Inequalities", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 45, No. 8, August, (2000) 1558-1563.

[444] Perruquetti, W., S. Drakunov, "Finite Time Stability and Stabilization", *Proc. of the* 39th *IEEE Conf. on Decision and Control*, Sydney, Australia, December, (2000) 1894 -1899.

[445] Pichkur, V. V., "Practical Stability of Set Dynamical Systems", *Journal of Nonlinear Oscillations*, Volume 5, Number 2, Springer, New York, USA, April, (2002) 199-208.

[446] Pješčić, R M., V. Chistyakov, D. Lj. Debeljković, On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2008 (*in Serbian*), pp. 445.

[447] Pješčić, R M., V. Chistyakov, D. Lj. Debeljković, (2008) *On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness***,** Faculty of Mechanical Engineering Belgrade, ISBN 978-86-7083-631-0, Belgrade

[448] Qideng, F., “Variable Structure Control of Stochastic Partial Differential Equations with Colored Noises in Terms of Practical Stability”, *Proc.of the* 2005 *International Conf. on Machine Learning and Cybernetics*, Volume 9, 18-21 August (2005) 5630-5634.

[449] Ramos, D. C. W., P. L. D. Peres, “An LMI Condition for the Robust Stability of Uncertain Continuous-Time Linear Systems”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, **47** (2002) 675-678.

[450] Rehm A., Allgower F., H-Infinity Control of Descriptor Systems: An Application from Binary Distillation Control, *Proc. 7 International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, Hong Kong, 11-14 January (2004).

[451] Retchkiman, Z., “Practical Stability of Discrete Event Systems Using Lyapunov Methods”, *Proc. of the American Control Conference*, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June, (1998) 3627-3628.

[452] Richard, J. P. “ATime delay systems: an overview of some recent advances and open problems”, *Automatica*, **39** (5) (2003) 1667–1694.

[453] Rodriguez, J., D. Sweet, “A characterization of semistate systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc.,* **5** (1) (1986) 125-138.

[454] Rosenbrock, H. H., „Order, Degree and Complexity“, *Int. J. Control*, **19** (2) (1974.a) 323-331.

[455] Rosenbrock, H. H., „Structural Properties of Linear Dynamic Systems“, *Int. J. Control*, **20** (2) (1974.b) 191-202.

[456] Rouche, N., P. Haberts, M. Laloy, *Stability Theory by Lyapunov’s Direct Method*, Spinger -Verlag, New-York, 1977.

[457] Rugh, W. J., “Analytical Framework for Gain Scheduling”, *IEEE Control Systems Mag.*, **11** (1991) 74-84.

[458] Schumacher, J. M., “Algebraic characterization of almost invariance”, *Int. J. Control,* **38** (1983) 107-124.

[459] Shamma, J. S., M. Athans, “Analysis of Nonlinear Gain-Scheduled Control Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **35** (1990) 898-907.

[460] Shang, Y., Gao, F., Yuan F.: ‘Finite-time Stabilization of Networked Control Systems Subject to Communication Delay’, International Journal of Advancements in Computing Technology, Vol. 3, Num. 3, pp. 192-198, 2011.

[461] Shen, Y., W. Shen, "Finite–Time Control of Linear Singular Systems with Parametric Uncertainties and Disturbances", *Automatic*a, (2006).

[462] Shen, Y., Zhu, L., Guo, Q.: 'Finite-Time Boundedness Analysis of Uncertain Neural Networks with Time Delay: An LMI Approach'. Proc. of the 4th international symposium on Neural Networks: Advances in Neural Networks, Nanjing, China, Jun 2007, pp. 904–909.

[463] Shen, Y.: 'Finite-time Control for a Class of Linear Discrete-time Systems', Control and Decision, 2008, 23, pp.107-109.

[464] Silva, M. S., T. P. De Lima, "Looking for nonnegative solutions of a Leontief dynamic model", *Linear Algebra*, 364, (2003) 281–316.

[465] Sincovec, R. F., A. M. Erisman, E. L. Yip, M. A. Epton, „Analysis of Descriptor Systems Using Numerical Algorithms", *IEEE Trans. Autom. Cont.,* **AC-26** (1) (1981) 139-147.

[466] Sincovec, R. F., E.L. Yip, M. A. Epton, J. W. Manke, A. M. Erisman, B. Dembart, P. Lu, "Solvability of large-scale descriptor systems", *NTIS*, Springfield, VA (1979) CONF-790904-P2.

[467] Stevens, B. L., *Modeling, Simulation and Analysis with State Variables*, Report LG84RR002, Lockheed - Georgia Co., Marietta, GA, 1984.

[468] Stojanović, S. B, D. Lj., Debeljković, "Quadratic Stabilty and Stabilization of Uncertain Linear Discrete Time Systems with State Delay: a LMI Approach **"**, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series B: Applications and Algorithms, No. 2 (2008.b), 195 – 206.

[469] Stojanović, S. B. & D. Lj. Debeljković, (2006) Comments on stability of time-delay systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* (*submitted*)

[470] Stojanović, S. B. .& D. Lj. Debeljković, (2005) Necessary and sufficient conditions for delay-dependent asymptotic stability of linear continuous large scale time delay systems, *Asian Journal of Control*, (Taiwan) Vol. 7, No. 4, pp. 414 - 418.

[471] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, **"**Necessary and Sufficient Conditions for Delay-Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems**",** *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive*

Systems, (Canada), Vol. 15, Series B: Math. Analysis, Vol. 16, No.6, (2009), 887 – 900.

[472] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Comments on stability of time–delay systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.* (2006), (*submitted*).

[473] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Delay – Dependent Stability of Linear Large Scale Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions**"**, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 4, No. 2, (2008.a), 241 – 250.

[474] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Exponential stability of discrete time delay systems with nonlinear perturbations", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 3, (2006.b) 428–435.

[475] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Further results on asymptotic stability of linear discrete time delay autonomous systems", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, (2006.a) 117–123.

[476] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay – Dependent Asymptotic Stability of Linear Continuous Large Scale Time Delay Autonomous Systems" *Asian Journal of Control* (Taiwan), Vol.. 7., No. 4, (2005.d), 414 - 418

[477] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and sufficient conditions for delay–dependent asymptotic stability of linear discrete time delay autonomous systems", *Proc*. of 17*th* IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 6–10, (2008.b) 2613–2618.

[478] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and sufficient conditions for delay–dependent asymptotic stability of linear discrete time delay autonomous systems", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series B: Applications and Algorithms , Vol. 16, No.6, (2009), 887–900.

[479] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, **"**On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems ", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 3 - 4, (2005.c) 413 – 420.

[480] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, **"**The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large – Scale Time Delay Interval Systems**",** *The fifth*

International Conference on Control and Automation, ICCA 05, June 26 – 29, Budapest (Hungary), (2005.a), pp. 347 – 352, also CD-Rom.

[481] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, **"**The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large-scale Time Delay Interval Systems**",** International Journal of Information & System Science, (Canada), Vol. 1, No. 1, (2005.b), 61 - 74.

[482] Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., " Further Results on Asymptotic Stability of Linear Discrete Time-Delay Systems", (2003d), (submitted)

[483] Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., " On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time-Delay Systems", (2003a), (submitted)

[484] Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., "Necessary and Sufficient Conditions for Delay-Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Time-Delay Autonomous Systems", (2003c), (submitted)

[485] Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., "On Stability of Perturbed Linear Discrete-Delay Systems with Multiple Delays", (2003b), (submitted)

[486] Stojanović, S. B., Debeljković, D. Lj., "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time-Delay Autonomous Systems: New Results", (2003e), (submitted)

[487] Stojanović, S. B.,D. Lj. Debeljković, "Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete–time systems with state delay: A LMI approach", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series B: Applications and Algorithms, No. 2, (2008) 195–206.

[488] Su M., Wang S., Zhang X., Finite-Time Stabilization for Singular Linear Time-delay Systems with Time-varying Exogenous Disturbance, *Adv. Mater. Res*., 490-495 (2012) 2459-2463.

[489] Su, J. H. & C. G. Huang, (1992) Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems, *IEEE Trans. Automat. Control* AC- 37 (10), pp. 1656-1659.

[490] Su, J. H., (1994) Further results on the robust stability of linear systems with single time delay, *Systems & Control Letters* (23), pp. 375 – 379.

[491] Su, J. H., C. G. Huang, "Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC– 37** (10), (1992) 1656–1659,

[492] Syrmos, V. L., P. Misra, R. Aripirala, "On the discrete generalized Lyapunov equation", *Automatica*, 31(2), (1995) 297–301.

[493] Takaba, K., "Robust H_2 Control of Descriptor System with Time-Varying Uncertainty", *International Journal of Control*, **71** (4) (1998) 559-5736.

[494] Tchetaev, N. G., *Stability of Motion*, Gosthizdat, Moscow, 1955.

[495] Tissir, E. & A. Hmamed, (1996) Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$, *Automatica*, 32 (12), 1723-1726.

[496] Trinh, H., M. Aldeen, " Robust Stability of Singularly Perturbed Discrete Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-40** (9) (1995.b) 1620–1623.

[497] Trinh, H., M. Aldeen, "*D – stability Analysis of Discrete Perturbed Systems*", *Int. J. Control*, **61** (2) (1995.a), 493–505.

[498] Trinh, H., M. Alden, "A memoryless state observer for discrete time - delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-42** (9) (1997) 1572–1577.

[499] Tsygankova, L.A., "Optimization of Practical Stability Problems", *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 14, Number 12, Springer, New York, USA, December, (1978) 1312-1317.

[500] Valeev, G. K., G. S. Finin, *The Construction of Lyapunov Functions*, Naukova Dumka, Kiev, 1982.

[501] Van Dooren, P. M., "The generalized eigenstructure problem in the linear system theory", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (1) (1981.a) 111-129.

[502] Van Dooren, P., "The computation of Kronecker's canonical form of singular pencil", *Linear Algebra and Appl.* , **27** (1979.b) 103-140.

[503] Verghese, G. C., "Further notes on singular descriptions", *Proc. JAAC*, Charlottesville, VA (1981) TA-4B.

[504] Verghese, G. C., B. C. Levy, T. Kailath, "A generalized state-space for singular systems", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (4) (1981) 811-831.

[505] Verghese, G. C., T. Kailath, "Impulsive behavior in dynamical systems; structure and significance", *Proc. MTNS*, Delft (1979.a) 162-168.

[506] Verghese, G. P., Van Dooren, T. Kailath, „Properties of the System matrix of a Generalized State-Space System" *Int. J. Control* , **30** (2) (1979) 235-243.

[507] Verghese, G., Ph.D. Thesis, Elec. Eng. Dept., Stanford University, CA, USA, 1978.

[508] Vujičić, A. V., "The Practical Stability of Equilibrium and Motion of Mechanical Systems ", *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 28, Number 11, Springer, New York, USA, November, (1992) 746-750.

[509] Walton, K., J. E. Marsall, "Direct Method for TDS Stability Analysis", *IEE Proc. Part D*, **134** (2) (1987), 101–107.

[510] Wang, H. S., C. F. Yung, F. R. Chang, "Bounded Real Lemma and H_∞ Control for Descriptor Systems", *Proc. Inst. Elect. Eng.* (145) (1998) 316-322.

[511] Wang, J., Jian, J., Yan, P.: 'Finite-Time Boundedness Analysis of a Class of Neutral Type Neural Networks with Time Delays'. Proc. of the 6th International Symposium on Neural Networks on Advances in Neural Networks, Wuhan, China May 2009, pp. 395–404.

[512] Wang, S. S., "Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$," *Systems and Control Letters*, **19** (1992), 165–168.

[513] Wang, W. J., L. G. Mau, "Stabilization and Estimation for Perturbed Discrete Time - Delay Large-Scale Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-42** (9), (1997) 1277-1281.

[514] Wang, W., L. Mau, "Stabilization and estimation for perturbed discrete time–delay large–scale systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* 42(9), (1997) 1277–1282.

[515] Wang, X., Jiang, M., Jiang, C., Li, S.: 'Finite-Time Boundedness Analysis of Uncertain CGNNs with Multiple Delays'. Proc. of the 7th International Symposium on Neural Networks, Shanghai, China, June 2010, pp. 611–618.

[516] Wei, J., "General solution and observability of singular differential systems with time-delay", *Automatica*, 2004.

[517] Weiss, L., "An Algebraic Criterion for Controllability of Linear Systems with Time Delay", *IEEE Transaction on Automatic Control*, August, (1970) 443-444.

[518] Weiss, L., "On Uniform and Nonuniform Finite-Time Stability", *IEEE Transaction on Automatic Control*, June, (1969) 313-314.

[519] Weiss, L., E. F. Infante, "Finite Time Stability Under Perturbing Forces and on Product Spaces", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-12, No. 1, February, (1967) 54-59.

[520] Weiss, L., E. F. Infante, "On the Stability of System Defined over a Finite Time Interval", *Proc. of Natonal Acad. Sci*., Vol 54, (1965) 44-48.

[521] Weiss, L., Infante, E.F.: 'Finite-Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces', IEEE Trans. Autom. Control, 1967, 12, pp. 54-59.

[522] Weiss, L., L. Lam, "Stability of Non-linear Discrete-time Systems", *Int. J. Control*, 17, (1973) 465-470.

[523] Weiss, L.,"Controllability, Realization and Stability of Discrete-time Systems", *SIAM J. Control*, 10, (1972) 230 - 251.

[524] Willems, J. C., "Almost A (mod-B) - invariant subspaces", *Asterisque*, **75-76**, (1980) 239-248.

[525] Willems, J. C., "Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design- Part I: Almost controlled invariant subspaces", *IEEE Tras. Automat. Cont.*, **AC-26** (1) (1981) 235-252.

[526] Willems, J. C., "Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design- Part II: Almost conditionally invariant subspaces", *IEEE Tras. Automat. Cont.*, **AC-27** (5) (1982) 1071-1084.

[527] Wonham, W. M., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[528] Xia, Z., J. Sun, "On Practical Stability for Large Scale Impulsive Control System in Terms of Two Measurements", *Proc. of the* 5th *World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China, 142-145, June (2004) 15-19.

[529] Xu S., Dooren P.V. ,Stefan R., Lam J., Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty, *IEEE Trans. Autom. Control*, 47(7) (2002) 1122–1128.

[530] Xu S., Lam J., Yang C., H_∞ control for uncertain singular systems with state delay, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 13(13) 1213–1223.

[531] Xu S., Lam J., Zou Y., An improved characterization of bounded realness for singular delay systems and its applications, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 18(3) (2008) 263–277.

[532] Xu, B. & Y. Liu, (1994) Improved Razumikhin-Type Theorem and its Applications, *IEEE Trans. Automat. Control* AC- 39 (4), pp. 839 – 841.

[533] Xu, S., C. Yang, "An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems", *Int. J. System Science*, Vol.31, (2000.a) 55-61.

[534] Xu, S., C. Yang, "Stabilization of Discrete-time Singular Systems: a Matrix Inequality Approach", *Automatica* (35) (1999) 1613 - 1617.

[535] Xu, S., C. Yang, " H_∞ State feedback control for discrete singular systems", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-45** (6) (2000.b) 1405-1409.

[536] Xu, S., C. Yang, "An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems", *Int. J. System Science*, Vol. 31, (2000.a) 55-61.

[537] Xu, S., C. Yang, Y. Niu, J. Lam, "Robust stabilization for uncertain discrete singular systems", *Automatica*, Vol. 37, (2001.a) 769-774.

[538] Xu, S., J. Lam and C. Yang, "Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete–time systems with state delay," *Systems Control Lett*. 43 (2001) 77–84.

[539] Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty", *Dynamics Continuous*, *Discrete and Impulsive Systems,* Vol. 9, No.4, (20035.b) 539–554

[540] Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Robust $H\infty$ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty", *J. of Dynamics Continuous, Discrete Impulsive Systems,* (Canada), (2004).

[541] Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay", *Systems Control Lett.* (43), (2001.b) 77-84.

[542] Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty", *Dynamics Continuous*, *Discrete Impulsive Systems*, Vol. 9, No. 4, (2002) 539 – 554.

[543] Xu, S., P. V. Dooren, R. Stefan, J. Lam, "Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-47** (7) (2002) 1122-1128.

[544] Xu, X., G. Zhai, "Practical Stability and Stabilization of Hybrid and Switched Systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 50, No. 11, November, (2005) 1987-1903,.

[545] Xu, X., G. Zhai, Z. He, "Stabilizability and Practical Stabilizability of Continuous-Time Switched Systems: A Unified View", Proc. of the 2007 American Control Conference, New York City, USA, 663-668, July 11-13, 2007.

[546] Yang C., Zhang Q., Zhou L., Practical stability of descriptor systems with time delays in terms of two measurements, *J. Franklin Inst*., 343 (2006) 635–646.

[547] Yang C.Y., Jing X., Zhang Q.L., Zhou L.N., Practical stability analysis and synthesis of linear descriptor systems with disturbances, *Int. J. Autom. Comput*., 5(2) (2008) 138–144.

[548] Yang D. M., Q. L. Zhang, B. Yao., *Descriptor systems*, Science Publisher, Beijing, 2004.

[549] Yang, C. Y., Q. L. Zhang, L. Zhou, "Practical Stabilization and Controlability of Descriptor Systems", *International Journal of Inforamation and System Science*, Vol. 1, No. 3–4, (2005) 455–466.

[550] Yang, C. Y., Q. L. Zhang, Y. P. Lin, "Practical Stability of Descriptor Systems", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, Series B: 12.b–Supplement, (2005) 44–57.

[551] Yang, C., Q. L. Zhang, Y. Lin, L. Zhou, "Practical Stability of Closed-loop Descriptor Systems", *International Journal of Systems Science*, Volume 37, Issue 14, Taylor & Francis, Inc., Bristol, PA, USA, November (2006) 1059-1067.

[552] Yang, C., Q. Zhang, Y. Lin, L. Zhou, "Practical stability of descriptor systems with time–delay in terms of two measurements", J. of the Franklin Institute, (2006) 635–646.

[553] Yang, T., *Practical Stability of Impulsive Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Volume 272/2001, Springer Berlin/Heidelberg, 149-198, 2001.

[554] Yangy C., Zhang Y.Q., Linz Y., Zhouy L., Practical stability of closed-loop descriptor systems, *Int. J. Syst. Sci.*, 37(14) (2006) 1059–1067.

[555] Yip, E. L., J. W. Manke, *Solvability of large-scale descriptor systems,* Boeing Comp. Services Co., Topical Report, 1987.

[556] Yoshizawa, T., *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

[557] Yue D., Han Q.-L., Delay-dependent robust H_∞ controller design for uncertain descriptor systems with time-varying discrete and distributed delays, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 152(6) (2005) 628–638.

[558] Zeng, Z., D. D. Huang, Z. Wang, "Practical Stability Criteria for Cellular Neural Networks Described by A Template", *Proc. of the* 5th *World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China, June 15-19, (2004) 160-162.

[559] Zhai, G., A. N. Michel, "Generalized Practical Stability Analysis of Discontinuous Dynamical Systems", *Proc*. 42 *nd IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol. 2, December, (2003) 1663 - 1668.

[560] Zhang, X L., Fun Y. S., "Adaptive State Feedback Control of Exponentially Practical Stability for Uncertain Systems", *Proc. of the* 2 *nd IEEE International Conf. on Machine Learning and Cybernetics*, Xian, China, 2 -5 November, (2003) 980-984.

[561] Zhang, Y., Sun J., "Eventual Practical Stability of Impulsive Differential Equations with Time Delay in Terms of Two Measurements", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 176, Issue 1, Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, Netherlands, April, (2005) 223 - 229.

[562] Zhao, S., Sun, J., Liu, L.: 'Finite-time stability of linear time-varying singular systems with impulsive effects', Int. J. Control, 2008, 81 (11), pp. 1824-1829.

[563] Zhu S., Zhang C., Cheng Z., Feng J., Delay-dependent robust stability criteria for two classes of uncertain singular time-delay systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(5) (2007) 880–885.

IX PRILOZI

PRILOG A – Oznake

OSNOVNE OZNAKE

$A_{(\cdot)}$	matrica sistema, objekta ili procesa, matrica
A	alternativna matrica sistema
$\mathcal{A}$	metrički prostor
a	elementi matrice A, koeficijenti karakterističnog kvazipolinoma
$a(t)$	funkcija
B	matrica upravljanja, matrica
b	elementi matrice upravljanja, koeficijent, konstanta
$\mathbf{b}$	vektor upravljanja
$b(t)$	funkcija
C	matrica, matrica izlaza, konstanta, dopuna skupu
$\mathrm{C}^{(\cdot)}$	skup vremenskih neprekidnih, diferencijabilnih funkcija
c	elementi matrice C, konstanta, koeficijent
$c(t)$	funkcija
D	matrica direktne veze ulaza i izlaza, dijagonalna matrica
$\mathfrak{D}$	domen
D	skup
d	dijametar skupa
$\mathcal{E}$	operator
e	elementi matrice E
F	matrica
$\mathbb{F}$	matrica pratilja
F	skup
$\mathcal{F}$	polje
$F(j\omega)$	frekventna karakteristika
f	elementi matrice F, konstanta

$\mathbf{f}(\cdot)$	vektorska funkcija
$f(s)$	karakteristični polinom
G	matrica
$\mathcal{G}$	skup
g	elementi matrice G
$g(t)$	odskočni odziv, funkcija
H	pozitivno određena matrica, *Ermitte*-ova matrica
$\mathcal{H}$	skup
h	elementi matrice H, mala pozitivna veličina
$h(t)$	odskočna funkcija
I	jedinična matrica
$I(t,\tau)$	matrica impulsnih odziva
$i(t)$	impulsni odziv
j	tekući indeks
$\mathcal{K}$	diskretni vremenski interval
k	diskretni vremenski trenutak, konstanta, eksponent, tekući indeks
L	matrica, *Lipschitz*-ova konstanta
$\mathcal{L}$	skup
$\mathcal{L}_{(\cdot)}^{n}$	normirani vektorski prostor sa pridruženom normom
l	elementi matrice L, tekući indeks
ℓ	neka dužina
M	matrica, pozitivno određena matrica
$\mathcal{M}$	skup, linearna višestrukost
$M(t)$	funkcija
m	elementi matrice M, eksponent
$m(t)$	funkcija
N	nilpotentna matrica
$\mathcal{N}(\ )$	nelinearnost, ceo pozitivan broj
n	red sistema, dimenzionalnost, tekući indeks
P	matrica, pozitivno određena matrica, *Ermitte*-ova matrica
$\mathcal{P}$	skup
p	elementi matrice P, operator, tekući indeks
$\mathbf{p}$	vektor
Q	matrica, pozitivno određena matrica
$\mathcal{Q}$	skup
Ω	domen
q	elementi matrice Q, prirodan broj, tekući indeks
$\mathbf{q}$	vektor
$q(s)$	polinom
R	matrica, pozitivno određena matrica
$\mathcal{R}$	skup
$\mathrm{Re}(\ )$	realni deo od $(\ )$
r	elementi matrice R,

	tekući indeks
$r(s)$	polinom
S	skup
$\mathbb{S}$	skup, invarijantni skup
	Komple+
s	ksno promenljiva,
	element skupa $\mathcal{S}_{(\ )}$
	matrica,
T	matrica transformacije,
	konačan vremenski interval
$\mathcal{T}$	skup
t	vreme
U	matrica
U	skup
$\mathcal{U}$	univerzalni skup
$\mathbf{u}(t)$	vektor upravljanja
V	matrica
V	skup
$V(\ ,\ )$	Ljapunovljeva funkcija
$\mathcal{V}$	prostor
$\mathbf{v}$	vektor
W	matrica
$W(\ ,\ )$	Ljapunovljeva funkcija
$\mathcal{W}$	prostor
$W(s)$	matrica prenosnih funkcija
$\mathcal{X}$	linearni vektorski prostor, skup
$x(t)$	veličina stanja
$\mathbf{x}(t)$	vektor stanja
$\mathbf{x}_i(t)$	vektor izlaza
$\mathbf{y}(t)$	vektor
Z	matrica
Z	skup
$\mathbf{z}(t)$	vektor poremećaja
α	realan, pozitivan broj
β	realan, pozitivan broj
Γ	posebna osobina
$\Gamma(t)$	funkcija
γ	realan pozitivan broj, realan broj, konstanta
$\gamma(t)$	funkcija
δ	realan pozitivan broj
δ_{ij}	*Kronecker*-ov simbol
$\delta(t)$	*Dirac*-ova funkcija
Δ	najveće vremensko kašnjenje u sistemu, konačna razlika
ε	realan pozitivan broj
$\xi(t)$	skalarna funkcija
ν	realan pozitivan broj, promenljiva, tekući indeks
θ	čisto vremensko kašnjenje, promenljiva, tekući indeks
$\vartheta(\ )$	skalarna funkcija,
κ	promenljiva, konstanta, tekući indeks
$\kappa(t)$	skalarna funkcija

Λ	matrica
$\Lambda(\ )$	maksimalna sopstvena vrednost matrice $(\ )$
λ	sopstvena vrednost matrice
μ	tekući indeks
$\mu(\ )$	matrična mera
η	promenljiva, tekući indeks
$\rho(\ )$	spektralni radijus matrice
$\rho(,)$	metrika datog prostora
ρ	realan pozitivan broj, konstanta
$\rho(t)$	skalarna funkcija
Π	simetrična, pozitivno određena matrica
π	*Ludolof*-ov broj
$\wp$	parameter, konstanta
$\boldsymbol{\Sigma}$	invarijantni skup
Σ	*Banach*-ov prostor
σ	realni deo kompleksnog broja
$\sigma(\ )$	singularna vrednost matrice
$\sigma\{\ \}$	spektar sopstvenih vrednosti
$\Im$	skup, kontinualni vremenski interval
$\Im_{(\cdot)}$	trajektorija
τ	čisto vremensko kašnjenje
$\varphi(t)$	skalarna funkcija
$\varphi_{(\ )}(t)$	početna funkcija
$\varphi(\omega)$	fazno-frekventna karakteristika
$\Phi(t)$	fundamentalna matrica
$\Phi(s)$	rezolventna matrica
$\phi(t)$	funkcija
$\Omega\{\ \}$	spektar sopstvenih vrednosti
ω	učestanost

$[\;]$	zatvoren interval
$]\;[$	otvoren interval
$\wedge$	i
$\vee$	ili
$\veebar$	isključivo ili
$\rightarrow$	preslikava
$\Rightarrow$	sledi
$\Leftrightarrow$	ako i samo ako
$\forall$	za svako
$\exists$	postoji
$\exists!$	postoji barem jedan
$\neg\exists$	ne postoji
$:$	koji ima osobinu
$\ni$	tako da
$\mid$	tako da
$\in$	pripada
$\notin$	ne pripada
$\{\;\}$	skup, sekvenca, niz
$\cup$	unija skupa
$\cap$	presek skupova
$\subset$	podskup
$\backslash$	razlika skupova
Δ	simetrična razlika
$\sim$	ekvivalentni skupovi
$\partial(\cdot)$	granica skupa
$(\cdot)$	otvoren skup
$\overline{(\cdot)}$	zatvoren skup
$(\cdot)^c$	komplement skup
$\operatorname{int} S$	unutrašnjost skupa S
$\varnothing$	prazan skup
$\triangleq$	po definiciji
Δ	konačna potonja razlika
∇	posebno značenje, simbol
$\bullet$	skalarni proizvod vektora
$\times$	proizvod
$*$	konvolucija
$\sum$	suma
$\prod$	proizvod
$\otimes$	*Kronecker*-ov proizvod
$\oplus$	direktna suma
$\lvert(\cdot)\rvert$	amplituda, apsolutna vrednost
$\lVert(\cdot)\rVert$	norma
grad	gradijent
det	determinanta
exp	eksponent
inf	infinum
max	maksimum
min	minimum
sup	supremum
$\mathbb{C}^{(\cdot)}$	$(\cdot)$ dimenzionalni kompleksni vektorski prostor
$\mathbb{C}$	skup svih kompleksnih brojeva
$\aleph(\;)$	nulti prostor matrice $(\;)$
$\Re(\;)$	područje vrednosti matrice $(\;)$
$\mathbb{R}$	skup svih realnih brojeva
$\mathbb{R}^{(\cdot)}$	$(\cdot)$ dimenzionalni realni vektorski prostor
degree	stepen polinoma
$\det(\;)$	determinanta matrice $(\;)$
$diag\{\;\}$	dijagonalna matrica $\{\;\}$
$Ind(\;)$	indeks matrice $(\;)$
$rang(\;)$	rang matrice $(\;)$
$tr(\;)$	trag matrice $(\;)$

DONJI INDEKSI

es	estimirano, procenjeno
i	izlaz
kr	krajnje
N	krajnja vrednost
0	početna vrednost
p	neka proizvoljna vrednost, poremećeno
pč	početno
r	ravnotežno
S	skup
sm	vreme smirenja
t	vremensko
u	ulaz
ž	željeno
*	neka posebna vrednost

GORNJI INDEKSI

*	konjugovano-kompleksna transponovana vrednost, neka posebna vrednost
D^+	gornji desni *Dini*-jev izvod
D_+	donji desni *Dini*-jev izvod
T	transpozicija
un	unutrašnjost skupa
-1	inverzija
$\dot{(\cdot)}$	izvod po vremenu
$(\cdot)^k$	*k*-ti izvod po vremenu

Biografija

Ime i prezime:	Marko Aleksendrić
Datum rođenja:	13.05.1975.
Mesto rođenja:	Beograd, Srbija

Obrazovanje:

1982. – 1990.	Osnovna škola “Vladislav Ribnikar” u Beogradu
1990. – 1991.	XIV Beogradska Gimnazija u Beogradu
1991. – 1994.	Gimnazija *La Farnesina* u Rimu (Italija)
1994. – 2002.	Studije na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Automatsko upravljanje, prosečna ocena tokom studija 7,83 (sedam i 83/100)
2002.	Odbranio diplomski rad na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu na temu “Dinamika posebnih klasa kontinualnih i diskretnih sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu“, sa ocenom 10 (deset), kod mentora Dr. D. Lj. Debeljkovića, prof.
2003. – 2010.	Postdiplomske studije na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Automatsko upravljanje
2010.	Odbranio magistarski rad na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu na temu “Dinamička analiza i sinteza sistema automatskog upravljanja sa stanovišta kriterijuma H_∞ optimalnosti“, kod profesora Dr. Dragutina Lj. Debeljkovića
2010. –	Podneo zahtev za izradu doktorske disertacije na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Automatsko upravljanje

Posao:

2002. – 2005.	Institut Vinča, Laboratorija za termotehniku i energetiku

2005. – Italijanski Institut za spoljnu trgovinu ICE

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Марко Алексендрић

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА ПОСЕБНИХ КЛАСА ЛИНЕАРНИХ СИНГУЛАРНИХ СИСТЕМА СА КАШЊЕЊЕМ НА КОНАЧНОМ И БЕСКОНАЧНОМ ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, ____________________

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Марко Алексендрић

Број индекса ______________________

Студијски програм Аутоматско управљање

Наслов рада ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА ПОСЕБНИХ КЛАСА ЛИНЕАРНИХ СИНГУЛАРНИХ СИСТЕМА СА КАШЊЕЊЕМ НА КОНАЧНОМ И БЕСКОНАЧНОМ ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ

Ментор Др Драгутин Љ. Дебељковић, редовни професор

Потписани/а Марко Алексендрић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ______________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА ПОСЕБНИХ КЛАСА ЛИНЕАРНИХ СИНГУЛАРНИХ СИСТЕМА СА КАШЊЕЊЕМ НА КОНАЧНОМ И БЕСКОНАЧНОМ ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.