

## Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду

На седницама, бр. 303 од 18.11.2011. и 324 од 25.9.2015., Наставно-научног већа Математичког факултета, одређена је комисија за преглед и оцену докторске дисертације под насловом "Неке класе графова са датим ограничењем друге сопствене вредности" кандидата Мр Бојане Михаиловић. Пошто су прегледали рукопис под наведеним насловом који је кандидаткиња предала, чланови комисије подносе Наставно-научном већу Математичког факултета следећи

### ИЗВЕШТАЈ

#### 1. Подаци о кандидату

Мр Бојана Михаиловић рођена је 1960. године у Београду, где је завршила основну школу "Браћа Рибар" и Другу београдску гимназију. Дипломирала је 1985. године на Природно-математичком факултету у Београду, смер "Математичке структуре", са просечном оценом 8,71. Исте године уписала је и последипломске студије на Математичком факултету, смер "Општа топологија". Последипломске студије на смеру "Математичке методе у електротехници и рачунарству" на Електротехничком факултету у Београду уписала је 2003. године. Магистарски рад под насловом "Стаблолики рефлексивни графови" под руководством професора др Зорана Радосављевића одбранила је 2008. године. Израду докторске дисертације под наведеним насловом Научно-наставно веће Математичког факултета у Београду одобрило јој је 18.11.2011.

Од 1986. до 1989. радила је на одређено време на Математичком факултету у Београду као студент-сарадник и асистент-приправник, а од 1989. године ради на Електротехничком факултету у Београду на Катедри за примењену математику у разним звањима (асистент-приправник, стручни сарадник, виши лабораторијски инжењер, асистент). На Математичком факултету држала је вежбе из предмета Анализа 1, Анализа 2 и Нацртна геометрија, а на Електротехничком факултету вежбе из предмета Математика I и Математика II, а затим Математика 1, Математика 2, Математика 3, Математика 4, Математика 5, Вероватноћа и статистика, Практикум из математике 1, Практикум из математике 2 и Практикум из математике 4 за студенте студијског програма Електротехника и рачунарство, као и вежбе из предмета Математика 1, Математика 2, Вероватноћа и статистика, Практикум из математике 1 и Практикум из математике 2 за студенте студијског програма Софтверско инжењерство. У периоду од 1991. до 2000.

држала је и вежбе из предмета Математика 1 и Математика 2 на Ваздухопловној војно-техничкој академији у Жаркову, као и вежбе из предмета Engineering Mathematics за студенте из Либије.

## 2. Предмет и научни циљ дисертације

Научна област којој припада ова дисертација јесте тзв. спектрална теорија графова, која се може посматрати и као посебан, али и веома важан део, алгебарске теорије графова. Спектрална теорија графова је модерна и актуелна научна дисциплина, са многобројним одзивима и применама чији се списак стално повећава - како у класичним наукама (физика, хемија), тако и у модерним примењеним наукама (рачунарске науке, операциона истраживања, итд.).

Посматраном графу се може придружити више матрица, тј. њихових спектара, а најстарија и најразвијенија теорија изграђена је полазећи од тзв. матрице суседства графа. Ова дисертација такође припада овој грани спектралне теорије. То значи да се у њој под општим појмом графа подразумева оно што се у литератури описује као коначан, неоријентисан граф без петљи и без вишеструких грана, тј. оно што се у општој теорији графова обично назива прост граф. За овакав граф природно се дефинише матрица суседства као квадратна  $(0,1)$  - матрица димензије једнаке броју чворова графа, где се на позицији  $(i,j)$  налази 1 или 0 према томе да ли су чворови означени са  $i$  и  $j$  суседни или нису. Спектар овакве (симетричне) матрице састоји се у потпуности од реалних бројева  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , па се у њиховој нотацији увек подразумева нерастући поредак:  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , где се  $\lambda_1$  назива још и индекс графа. Као последица теореме о преплитању, познате у теорији матрица, спектрална особина  $\lambda_i \leq a$ , где је  $a$  задати реалан број, у графовској интерпретацији претвара се у тзв. наследну особину, што значи да за сваки граф са том спектралном особином и сви његови (индуковани) подграфови ту особину задржавају. Ова чињеница усмерава истраживања која имају за циљ одређивање (описивање, карактеризацију) свих графова са задатом спектралном особином наведеног типа у два карактеристична правца: или ка налажењу свих максималних графова са наведеном особином, или ка одређивању свих минималних графова забрањених за ту особину, тј. свих графова који ту особину немају али чији је сви (индуковани) подграфови имају.

Предмет ове дисертације јесу истраживања усмерена ка одређивању, описивању или налажењу карактеристичних особина графова који су у спектралном смислу одређени особином  $\lambda_2 \leq a$ , где је  $a$  задати реалан број. Како је за поједине мале вредности  $a > 0$

овај проблем углавном решен, а са повећавањем вредности  $a$  се многоструко компликује, природно је такође да се та истраживања као и у случају многих ранијих радова ограниче на унапред задате класе графова дефинисане њиховим структурним особинама (стабла, кактуси, унициклички, бициклички итд.). Притом, истраживања на тему ограничења друге сопствене вредности се природно ослањају и надовезују на досадашње радове из ове области за неколико конкретних вредности  $a$ , а један део посвећен је и општем случају,  $\lambda_2 \leq a$  за произвољно  $a$ .

Друга сопствена вредност и последице њеног ограничења на структурне особине графова несумњиво јесте релевантна тема у спектралној теорији, како из унутар-теоријских разлога (јер  $\lambda_2$  фигурише у многим чињеницама и ставовима) тако и из разлога примене (познато је, нпр. да су графови са особином  $\lambda_2 \leq 2$  - тзв. рефлексивни графови, од значаја за конструкцију и класификацију група рефлексивних графова). Досадашњи радови из ове области обухватају следећа ограничења:  $\frac{1}{3}$ ,  $\sqrt{2}-1$ ,  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $1$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  и  $2$ . Већи део ове дисертације бави се највећим ограничењем,  $a = 2$ , које генерише најтеже проблеме, дакле већ поменути рефлексивни графови, у циљу комплетирања неких започетих истраживања, отварања нових са новим резултатима и, што се показало посебно вредно и интересантно, у циљу креирања новог и оригиналног алгебарско-комбинаторног апарата који много брже и ефикасније доводи до неких познатих резултата, а потом и до нових резултата.

Осим рефлексивних графова, у дисертацији се третирају још и ограничења  $\sqrt{2}$ ,  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  (први пут) и  $\sqrt{3}$ , а као што је већ речено, посебна глава се бави закључцима везаним за уопштени случај  $\lambda_2 \leq a$ , где је  $a > 0$  произвољно.

### 3. Садржај и научни резултати дисертације

Докторска дисертација под насловом "Неке класе графова са датим ограничењем друге сопствене вредности" кандидата мр Бојане Михаиловић написана је на укупно 210 страна, од тога 166 стране основног текста и 40+4 страна прилога после основног текста, уз већи број слика, а списак литературе садржи 58 референци. Уз "Увод", дисертација је подељена на осам глава, после чега следује "Закључак", а затим прилози везани за садржај и резултате појединих глава. У "Уводу" су у неформалном облику наведене дефиниције

неких основних појмова и неке основне чињенице из спектралне теорије графова, тј. основни теоријски апарат потребан у даљем тексту, иначе добро познат истраживачима у овој области.

Прва глава дисертације садржи кратку рекапитулацију досадашњих резултата релевантних за истраживања у наредним главама, тј. формира полазну основу за касније нове резултате. У одељку 1.1. побројани су разни резултати који се тичу до сада разматраних ограничења друге сопствене вредности графа  $(\frac{1}{3}, \sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2)$ . Пошто се највећи део ових резултата односи на најтежу проблематику, тј. рефлексивне графове, а како је њима посвећен и већи део дисертације, претходни резултати о овим графовима су посебно изложени у одељку 1.2. Ту је представљен основни теоријски алат за ову област - Смитови графови, неке релевантне леме и њихове последице, тзв. РС-теорема итд. и уведене су класе графова и објашњене претпоставке под којима су се одвијала досадашња истраживања. Затим су побројане класе постојећих резултата на које се надовезују истраживања у дисертацији, а то су максимални графови у следећим класама: бициклички графови с мостом, затим кактуси са више контура чије контуре не чине сноп (међу њима сви са пет и четири контуре и парцијални резултати за трициклички случај), неке класе уницикличких графова, једна класа бицикличких кактуса са заједничким чвором контура и једна класа  $\theta$ -графова.

У другој глави дефинисани су и развијени нови, оригинални и ефикасни елементи алгебарско-комбинаторног апарата за даљи рад, који битно олакшава и убрзава даља истраживања, а представља и други, краћи пут ка добијању неких познатих резултата. Прво се у одређеним класама графова уводе два пресликавања дефинисана помоћу локалних трансформација у једном делу графа, која имају особину да чувају знак израза  $\lambda_2 - 2$  [9]. Овакве трансформације графа, инваријантне у односу на посматрану спектралну особину, у теоријском смислу очигледно представљају генерализацију оних трансформација које доводе до коспектралних графова, тј. трансформација инваријантних у односу на целокупан спектар. Затим се уводе још два пресликавања оваквог типа, али сада није више у питању права инваријантност у односу на знак израза  $\lambda_2 - 2$ : наиме, ради се о томе да сада  $\lambda_2 \leq 2$  у графу - слици имплицира  $\lambda_2 \leq 2$  у графу - оригиналу. Овде је потребно напоменути да су се досадашња истраживања о рефлексивним графовима претежно тичала рефлексивних кактуса, а да су у овој класи графова, као последица тзв. РС-теореме, предмет разматрања били само тзв. РС-неодлучиви графови, наиме такви који се, после уклањања одговарајућег артикулационог чвора, декомпоунују на један прави надграф и све остале праве подграфове неког од Смитових графова. Поменути пресликавања уведена у овој глави омогућила су да се многи случајеви РС-неодлучивости, који су се затим морали посебно разматрати, сада трансформишу у одлучиве случајеве. Ове нове и ефикасне алатке у одељку 2.2. су одмах примењене на класу бицикличких

графова са мостом између контура (прво истраживање о рефлексивним кактусима). У одељку 2.4. веома важан случај максималног броја контура (пет) у рефлексивном кактусу чије контуре не чине сноп сада се једноставно потврђује оваквом техником, а исто се дешава и са неким класама оваквих графова са четири и три контуре.

Тема треће главе јесу максимални рефлексивни трициклички кактуси. Под раније поменутом претпоставком РС-неодлучивости и уз услов да контуре графа не чине сноп, дефинисане су четири карактеристичне класе ових графова [4], а у ранијим истраживањима у потпуности је решен случај само једне од њих - тзв. класе  $R_4$ . Одељак 3.1. бави се веома важним случајем преливања парова Смитових стабала, прво у класи  $R_1$  ([4], доказано у магистарском раду кандидаткиње), а други у класи  $R_2$  [1]. Преливање Смитових стабала је веома интересантна појава у многим класама максималних рефлексивних кактуса, и пошто се помоћу ње једноставно и елегантно описује велики број случајева максималних графова, важно је утврдити њено евентуално присуство још у почетној фази истраживања. У наредним одељцима 3.2.-3.4. решавани су случајеви класа трицикличких рефлексивних кактуса  $R_1 - R_3$ . Максимални графови из класе  $R_1$  одређени су сви, уз ефикасну примену новог алгебарско-комбинаторног апарата уведеног у другој глави. У класи  $R_2$ , која представља и најтежи случај, осим већ поменутог преливања парова Смитових стабала, разним техникама добијен је још један део парцијалних резултата. Класа  $R_3$  је, као и класа  $R_1$ , решена у потпуности, првенствено захваљујући ефикасном апарату из друге главе. Због сложености истраживања и обимности резултата, један део ове главе изложен је у облику табела, у поједином додатку у прилогу овог рукописа.

Четврта глава бави се минималним забрањеним графовима код рефлексивних графова. Карактеризација помоћу забрањених графова за задату спектралну особину  $\lambda_2 \leq 2$  до сада није коришћена. У одељку 4.1. одређени су сви минимални забрањени графови у класи бицикличких рефлексивних графова са мостом између контура који су РС-неодлучиви. Занимљиво је да је ова класа рефлексивних графова била прва комплетно решена и путем максималних дозвољених графова. Може се рећи да она представља неку врсту почетног, елементарног случаја, због њених веза са класама рефлексивних кактуса са више контура, као и са одређеном класом уницикличких рефлексивних графова. И заиста, на основу овог резултата, у одељку 4.2. се релативно лако добијају сви минимални забрањени графови у класи трицикличких рефлексивних кактуса  $R_3$ .

Главни резултат у петој глави јесте максималан број контура у РС-неодлучивом рефлексивном кактусу. Раније разматрани случај, када контуре кактуса не чине сноп, даје максималан број од пет контура. Са друге стране, у рефлексивном кактусу чије контуре чине сноп, број контура није ограничен. Али, ако се одбаце РС-одлучиви случајеви а

посматрају само случајеви када се после уклањања заједничког чвора контура граф декомпонује на један прави надграф и све остале праве подграфове Смитових стабала, отвара се ново питање максималног броја контура за који се показало да има коначно решење. За решавање овог проблема у одељку 5.1. припремљен је посебан комбинаторни алат, састављен од тзв. минималних компонената. Коришћењем ове технике, у одељку 5.2. доказано је да максималан број контура у РС-неодлучивом кактусу чије контуре чине сноп износи 74. Одељак 5.3. садржи конкретне примере (конструкције) неких РС-неодлучивих максималних рефлексивних графова, чије контуре чине сноп: по једне фамилије графова из двеју карактеристичних класа дефинисаних у одељку 5.1. у поступку формирања поменутог комбинаторног апарата и једне фамилије бицикличких графова [2].

У шестој глави извршена је генерализација неких теорема које су играле кључну улогу у претходним истраживањима. Пре свега, у одељку 6.1. доказана је генералисана РС-теорема (кратко, ГРС-теорема) [5]. Ради се о идеји да се уместо спектралне особине  $\lambda_2 \leq 2$ , која дефинише рефлексивне графове, посматра уопштена особина  $\lambda_2 \leq r$ , где је  $r > 0$  произвољно, а улогу Смитових графова преузимају графови са индексом  $r$ , уколико такви постоје. Затим је, у духу те идеје, у одељку 6.2. извршено одговарајуће уопштавање четири карактеристична пресликавања из друге главе, као и њихових последица, што значи да су се ти нови и ефикасни елементи алгебарско-комбинаторног апарата за истраживања у овој области показали применљиви не само за рефлексивне графове, него и општије, заправо онда кад за изабрано  $r > 0$  можемо да идентификујемо скуп графова са индексом  $r$ , тј. скуп аналоган скупу Смитових графова. У одељку 6.3. изведене су неке последице претходних закључака на неке посебно дефинисане класе графова и демонстрирана њихова примена у неким конкретним случајевима.

У седмој глави представљена су истраживања и резултати који се тичу других ограничења за  $\lambda_2$ , различитих од 2, конкретно  $\sqrt{2}$ ,  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  и  $\sqrt{3}$ . Наиме за све ове вредности постоје графови чије су оне индекси, што омогућује да се на неке класе графова са таквом спектралном особином примене елементи (уопштеног) алгебарско-комбинаторног апарата развијеног у шестој глави. У одељку 7.1. добијени су нови резултати за  $r = \sqrt{2}$ . Раније су била позната сва стабла и сви регуларни и семирегуларни бипартитни графови са овом особином, као и нека минимална забрањена стабла, а сада су одређени сви максимални ГРС-неодлучиви графови у класи уницикличких и мултицикличких кактуса и сви максимални ГРС-неодлучиви  $\theta$ -графови [6]. Ограничење  $r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  до сада није било предмет истраживања, а сада су у одељку 7.2. одређена сва максимална ГРС-неодлучива стабла (има их 59) за  $r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  [5]. Такође, у одељку 7.3., који се бави ограничењем

$r = \sqrt{3}$ , одређена су сва максимална стабла са дијаметром 3 и дијаметром већим од 8, као и сви максимални ГРС-неодлучиви мутициклички кактуси [7].

У осмој глави даље се развија идеја о кључној улози Смитових графова у налажењу и конструкцији максималних рефлексивних кактуса и детаљно анализирају могућности локалних модификација ових графова, укључујући проширења, декомпозиције итд., које би могле да омогуће ефикасније и елегантније описивање резултата. Најбољи пример такве модификације јесте цепање и преливање Смитових стабала, што је већ коришћено и у ранијим истраживањима и у овој дисертацији. Међутим, могућности су много шире и зато се у овој глави дефинише седам различитих тзв.  $\sigma$ -модификација Смитових стабала (одељак 8.1.). У следећа два одељка на карактеристичним примерима се демонстрира улога ових модификација у конструкцији максималних рефлексивних кактуса са четири контуре ако се пође од оваквих графова са три контуре [3],[8].

У "Закључку" кандидаткиња разматра могућности даљих истраживања ослоњених на резултате ове дисертације, и набраја десетак праваца, што говори о томе да се заиста ради о богатој, живој и занимљивој проблематици која стално са решавањем актуелних проблема отвара још више нових.

Иначе, у методолошком смислу истраживања у овој дисертацији карактерише спрега и преплитање примене алгебарског апарата и метода спектралне теорије графова и комбинаторног резоновања, а у појединим, нарочито завршним фазама, и за извршавање појединачних операција, коришћен је и експертни систем newGRAPH; укратко, заступљена је методологија стандардна и уобичајена у овој научној области.

#### 4. Библиографија

##### I Радови произашли из доктората:

###### A) Часописи са IF

- [1] Z. Radosavljević, B. Mihailović, M. Rašajski: *Decomposition of Smith graphs in maximal reflexive cactuses*; Discrete Math., Vol. 308/2-3 (2008), 355-366., IF=0.502, ISSN: 0012-365X
- [2] Z. Radosavljević, B. Mihailović, M. Rašajski: *On bicyclic reflexive graphs*; Discrete Math., Vol. 308/5-6 (2008), 715-725., IF=0.502, ISSN: 0012-365X
- [3] M. Rašajski, Z. Radosavljević, B. Mihailović: *Maximal reflexive cacti with four cycles: The approach via Smith graphs*; Linear Algebra Appl., 435 (10) (2011) 2530-2543., IF=0.974, ISSN: 0024-3795

###### B) Остали часописи

- [4] B. Mihailović, Z. Radosavljević: *On a class of tricyclic reflexive cactuses*; Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. 16 (2005), 55-63., ISSN: 0353-8893
- [5] B. Mihailović: *Trees whose second largest eigenvalue does not exceed  $(\sqrt{5}+1)/2$* ; Scientific Publications of The State University of Novi Pazar, Ser.A: Appl.Math.Inform. and Mech. Vol.6,2 (2014), 119-129., ISSN: 2217-5539

###### C) Зборници конференција

- [6] B. Mihailović, T. Koledin, Z. Stanić: *Some classes of graphs whose second eigenvalue does not exceed  $\sqrt{2}$* , Proc. International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2015, Rhodes, Greece (accepted)
- [7] B. Mihailović: *Neke klase bicikličkih i unicikličkih grafova čija druga sopstvena vrednost nije veća od  $\sqrt{3}$* ; Proc. XXXVIII Symp. on operational res. SYMOPIS 2011, Zlatibor, Oct. 4-7., 246-249., ISBN: 978-86-403-1168-7
- [8] M. Rašajski, Z. Radosavljević, B. Mihailović: *Modifications of Smith trees in the structure of some classes of maximal reflexive graphs*; Proc. XXXIX Symp. on operational res. SYMOPIS 2012, Tara, Sept.25-28. 2012., 221-224., ISBN: 978-86-7488-086-9
- [9] B. Mihailović, M. Rašajski: *Primeri preslikavanja koja čuvaju refleksivnost grafova* Proc. XLII International Symposium on Operational Research SYMOPIS 2015, Silver Lake Resort, Sept.15-18. 2015., 165-169., ISBN: 978-86-80593-55-5

##### II Остали радови

- [10] M. Rašajski, Z. Radosavljević, B. Mihailović: *Konstrukcija jedne klase maksimalnih refleksivnih  $\theta$ -grafova pomoću Smitovih grafova*, Zbornik radova, XXXIII Simpozijum o operacionim istraživanjima SYMOPIS 2006, Banja Koviljača, Oct. 3-6, 2006., 217-220.



## 5. Закључак и предлог

Рукопис докторске дисертације "Неке класе графова са датим ограничењем друге сопствене вредности" кандидаткиње мр Бојане Михаиловић написан је прегледно, јасно и у математичком смислу коректно. Изузимајући прву главу, која садржи раније резултате на које се ослањају истраживања у дисертацији, све остале главе (2.-8.) садрже велики број оригиналних научних резултата у оквиру теме одређене насловом. Један део тих резултата објављен је у часописима различитих категорија (три рада у међународним часописима на SCI-листи, два рада у домаћим часописима, један рад у зборнику међународне конференције, три рада у зборницима домаћих конференција), а један део новијих резултата још није публикован. Рукопис несумњиво поседује све карактеристике и квалитете једне докторске дисертације, па зато долепотписани чланови комисије предлажу Наставно-научном већу Математичког факултета у Београду да рукопис под насловом "Неке класе графова са датим ограничењем друге сопствене вредности" кандидаткиње мр Бојане Михаиловић прихвати као докторску дисертацију и омогући кандидаткињи усмену одбрану.

Београд, 9.5.2016.

Чланови комисије:

---

др Зоран Радосављевић, ментор, редовни професор  
Електротехничког факултета у Београду у пензији

---

др Милан Дражић, ванредни професор  
Математичког факултета у Београду

---

др Зоран Станић, ванредни професор  
Математичког факултета у Београду

---

др Марија Рашајски, ванредни професор  
Електротехничког факултета у Београду