UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Gorica A. Pavlović-Rajković

OPŠTI TIP STABILNOSTI STOHASTIČKIH FUNKCIONALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Doktorska disertacija

Mentor
Prof. dr Svetlana V. Janković

Niš, 2014.

Predgovor

U doktorskoj disertaciji *Opšti tip stabilnosti stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina* proučava se stabilnost rešenja u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju više klasa stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina Itôa, primenom metode Lyapunova i metode Razumikhina.

Stohastičkim diferencijalnim jednačinama se modeliraju promene stanja realnih sistema pod uticajem Gaussovog belog šuma i ostalih slučajnih faktora iz okruženja. One imaju veliku primenu u tehnici, biologiji, medicini, ekonomiji i drugim granama nauke. Imajući u vidu ovu činjenicu, od velike važnosti je predvidjanje ponašanja rešenja sa protokom vremena.

Šezdesetih godina prošlog veka počela je da se razvija teorija stabilnosti stohastičkih diferencijalnih jednačina na principima preuzetim iz teorije stabilnosti običnih diferencijalnih jednačina. Ruski matematičar Lyapunov je 1892. godine u svojoj doktorskoj disertaciji [110] izneo koncept stabilnosti običnih diferencijalnih jednačina, koji je privukao veliko interesovanje tek za vreme hladnog rata (1952–1963) primenom u kontroli navodjenja aviona. Američki naučnik Bucy [12] 1965. godine medju prvima primenjuje direktnu metodu Lyapunova za ispitivanje stabilnosti rešenja nelinearnih diferencnih jednačina koje sadrže slučajnu komponentu. Uopštenje njegovih rezultata na stohastičke diferencijalne jednačine ubrzo su napravili Kushner [89] i Khasminskii [72]. Od tada se ova oblast permanentno razvija od strane matematičara, mehaničara i inženjera, pre svega zbog svoje velike primene.

Iako postoje različite definicije stabilnosti stohastičkih diferencijalnih jednačina, uglavnom se izučavaju eksponencijalna stabilnost u verovatnoći, eksponencijalna L^p-stabilnost i eksponencijalna skoro izvesna stabilnost. Medjutim, nisu sve jednačine eksponencijalno stabilne, ali mogu biti stabilne u odnosu na neku drugu tzv. decay-funkciju koja sporije opada ka nuli sa protokom vremena nego eksponencijalna funkcija. Ruski matematičar Khasminskii [48] 1980. godine prvi razmatra stabilnost stohastičkih sistema u odnosu na funkciju koja nije eksponencijalna. Devedesetih godina prošlog veka, Mao [112, 114, 115] izučava polinomijalnu skoro izvesnu i L^p-stabilnost više klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina. Medjutim, mali je broj radova koji se odnose na opštu skoro izvesnu i L^p-stabilnost. Medju matematičarima koji imaju zapažene rezultate u istraživanju opšte stabilnosti izdvajaju se Mao [123, 125], Liu i Mao [103], Caraballo [15], Wu [173] i dr. Motivacija za izradu ove doktorske disertacije je nastavak istraživanja o opštoj skoro izvesnoj i L^p-stabilnosti više tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina, a pre svega činjenica da je za stohastičke diferencijalne jednačine koje nisu eksponencijalno stabilne, informacija o slabijem vidu stabilnosti itekako bitna.

Disertacija se sastoji od pet glava.

U prvoj glavi su navedeni osnovni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih procesa i teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina. Izložene su teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja i teoreme koje se odnose na tri osnovna tipa eksponencijalne stabilnosti stohastičkih diferencijalnih i stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina. Dat je osvrt na direktnu metodu Lyapunova i metodu Razumikhina, s obzirom se one primenjuju za proučavanje opšte stabilnosti razmatranih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina.

U drugoj glavi se ispituje opšta skoro izvesna i L^p-stabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina sa konačnim promenljivim vremenskim kašnjenjem i eksponencijalna skoro izvesna i L^p-stabilnost perturbovanih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa konačnim kašnjenjem.

U prvom delu ove glave se koristi metoda Lyapunova za ispitivanje opšte stabilnosti stohastičkih diferencijalnih jednačina. Imajući u vidu koeficijente razmatranih jednačina, odredjuje se moguća decay-funkcija i koercitivni član koji je značajan za proučavanje opšte skoro izvesne i L^p-stabilnosti. Posebano se razmatra slučaj kada je decay-funkcija konkavna, kao i uobičajeni vidovi stabilnosti, na primer, eksponencijalna, polinomijalna i logaritamska stabilnost. Rezultati ovog dela disertacije su objavljeni u radu [60], S. Janković, G. Pavlović, *Moment decay rates of stochastic differential equations with time-varying delay*, Filomat 24(1) (2010) 115–132.

Kako primena metode Lyapunova zahteva nalaženje adekvatne funkcije Lyapunova, što u odredjenim slučajevima nije jednostavno, u drugom delu ove glave su izloženi dovoljni uslovi eksponencijalne L^p-integrabilnosti, skoro izvesne stabilnosti i L^p-stabilnosti, koji se jednostavnije proveravaju. Dobijena tvrdjenja predstavljaju uopštenja rezultata rada Maoa [113] koji se odnosi na eksponencijalnu srednje kvadratnu i skoro izvesnu stabilnost perturbovanih stohastičkih diferencijalnih jednačina. Ovi kriterijumi integrabilnosti i stabilnosti mogu se primeniti i na stohastičke diferencijalne jednačine sa promenljivim vremenskim kašnjenjem i bez kašnjenja. Štaviše, primena dobijenih tvrdjenja na stohastičke diferencijalne jednačine sa konstantnim kašnjenjem implicira dovoljne uslove za uniformnu opštu skoro izvesnu i L^p-stabilnost, jer uslovi ne zavise od veličine perioda kašnjenja. Ovi rezultati su sadržani u radu [142], G. Pavlović, S. Janković, *Moment exponential stability and integrability of stochastic functional differential equations*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 6125-6134.

U trećoj glavi se proučava opšta skoro izvesna i L^p-stabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa beskonačnim kašnjenjem primenom metode Razumikhina. Šezdesetih godina prošlog veka ruski matematičar Razumikhin [149, 150] je razmatrao stabilnost determinističkih diferencijalnih jednačina u terminima funkcije Lyapunova koju je lakše konstruisati nego funkcionale, čime je otklonio poteškoće koje nastaju primenom metode Lyapunova na funkcionalne diferencijalne jednačine. Mao [117] 1996. godine proširuje ideju Razumikhina na stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine. Od tada počinje ekspanzija primene ove metode na različite tipove stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina, na primer u radovima Mao [118, 119], Janković [59, 143], Peng [145, 146], Shen [159], Liu [104], Wu [173, 175] i mnogim drugim.

Dobijeni kriterijumi za ispitivanje opšte skoro izvesne i L^p-stabilnosti stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina mogu se primeniti i na stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim beskonačnim kašnjenjem i distributivnim kašnjenjem. U radu [143], G. Pavlović, S. Janković, *Razumikhin-type theorems on general decay stability of stochastic functional differential equations with infinite delay*, Journal of Computational and Applied Mathematics 236(7) (2012) 1679-1690, koji je sastavni deo ove glave, prvi put se javlja integralni uslov $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)\,dt < \infty$ za neko $\delta > 0$, koji omogućava ispitivanje skoro izvesne stabilnosti u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju $\lambda(t)$.

U četvrtoj glavi se razmatra opšta skoro izvesna i L^p-stabilnost neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa konačnim kašnjenjem primenom metode Razumikhina. Kao specijalan slučaj, razmatra se opšta skoro izvesna i L^p-stabilnost perturbovanih neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina i neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa konstantnim kašnjenjem. Wu *et al.* [173, 174, 175], Liu *et al.* [107], Meng i Yin [127] za ispitivanje opšte stabilnosti primenom metode Razumikhina zahtevaju da decay-funkcija $\lambda(t)$ zadovoljava uslov $\sup_{t>0} \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} = r = \text{const}$. U radu [144], G. Pavlović, S. Janković, *The Razumikhin approach on general decay stability for neutral stochastic functional differential equations*, Journal of the Franklin Institute 350 (8) (2013) 2124-2145 čiji sadrzaj je osnova ove glave, taj uslov nije neophodan.

U petoj glavi se ispituje opšta skoro izvesna i L^p-stabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa impulsima i markovskim prelazima primenom metode Razumikhina kao i opšta L^p-nestabilnost primenom metode Lyapunova. Kao specijalan slučaj, dobijena su nova tvrdjenja koja se odnose na skoro izvesnu stabilnost, L^p-stabilnost i L^p-nestabilnost impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem i markovskim prelazima. Impulsivne stohastičke diferencijalne jednačine imaju veliku primenu u finasijama, epidemiologiji i populacionoj dinamici s obzirom da su mnoge realne pojave impulsivne prirode. Medjutim, one su i najkomplikovanije za proučavanje jer su za ispitivanje stabilnosti od značaja raspored i veličina "skokova" impulsa. Rezultati sadržani u ovoj glavi su još uvek neobjavljeni.

Svi teorijski rezultati ove disertacije su ilustrovani primerima i grafičkim prikazima o slabijim tipovima stabilnosti u odnosu na eksponencijalnu stabilnost, pre svega o polinomijalnoj i logaritamskoj, kada se ništa ne može zaključiti o eksponencijalnoj stabilnosti rešenja razmatranih jednačina.

U Zaključku su izloženi neki od otvorenih problema i mogući pravci daljih istraživanja.

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru prof. dr Svetlani Janković na nesebičnoj pomoći i podršci u toku doktorskih studija, istraživanja i izrade doktorske disertacije. Zahvaljujem i prof. dr Miljani Jovanović i docentu dr Mariji Milošević na korisnim savetima i pomoći, pre svega u izradi grafika za ovu disertaciju. Posebnu zahvalnost dugujem svojoj porodici na strpljenju, razumevanju i veri u mene.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi

U ovoj glavi su izloženi osnovni pojmovi i rezultati o stohastičkim diferencijalnim jednačinama, koji će biti korišćeni u narednim glavama. Sa više detalja ovi rezultati se mogu naći u [38, 58, 77, 111, 125, 158]. U Poglavlju 1.1 se navode osnovni elementi teorije stohastičkih procesa kao što su merljivost, separabilnost, neprekidnost, Markovsko svojstvo, stacionarnost. Poglavlje 1.2 se odnosi na proces Brownovog kretanja i njegova svojstva. Integral Itôa i najvažnije osobine ovog integrala izloženi su u Poglavlju 1.3. Teoreme egzistencije, jedinstvenosti i stabilnosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina Itôa predstavljeni su u Poglavlju 1.4, uz poseban osvrt na teoriju stabilnosti običnih diferencijalnih jednačina i na direktnu metodu Lyapunova. Poglavlje 1.5 se odnosi na egzistenciju, jedinstvenost i stabilnost rešenja stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina Itôa. U ovom poglavlju je izložena i metoda Razumikhina, kao značajna metoda za ispitivanje stabilnosti rešenja običnih i stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina. Ova glava se završava Poglavljem 1.6 koje sadrži neke elementarne nejednakosti, integralnu nejednakost Gronwall-Bellmana i nejednakosti sa matematičkim očekivanjem, koje će biti neophodne u dokazivanju glavnih rezultata u narednim glavama.

1.1 Osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa

U praksi se često javljaju veličine zavisne od vremena, čije vrednosti nisu determinisane već zavise i od slučajnih uticaja, na primer, haotično kretanje čestica, broj jedinki eko-sistema, kretanje cena na berzi itd. Karakteristika svih ovih pojava je slučajna promena u vremenu, tj. funkcionalna zavisnost slučajnih veličina od vremena koja dovodi do pojma stohastičkog procesa.

Opšta teorija stohastičkih procesa počela je da se razvija početkom prošlog veka kao posledica naglog razvoja nauke i tehnike i njihovog zanimanja za pojave koje se menjaju sa protokom vremena. Kako klasična teorija verovatnoća nije bila dovoljna za opisivanje i proučavanje takvih pojava, postavljena je teorija stohastičkih procesa čiji su predmet izučavanja slučajne promenljive koje zavise od jednog ili više parametara i neprekidno se menjaju sa protokom vremena.

Pojam stohastičkog procesa je star oko sto godina i vezuje se za imena Sluckog, Wienera, Kolmogorova, Cramera. U tom periodu je bilo više pokušaja proučavanja slučajnih pojava zavisnih od vremena, medju kojima su najznačajniji pokušaj Sluckog[1] [161] da slučajnost poveže sa konceptom realnih funkcija, i pokušaj Wienera[2] [167] koji je matematički opisao haotično kretanje čestica polena u tečnosti, danas poznato kao Wienerov proces, tj. proces Brownovog kretanja. Uvodjenje pojmova uslovne verovatnoće i uslovnog matematičkog očekivanja omogućilo je Kolmogorovu[3] [82, 83] da postulira sistematsku i strogu konstrukciju osnova teorije stohastičkih procesa markovskog tipa sa beskonačnim parametarskim skupom. Radovi Khinchina[4] [69] predstavljaju osnovu teorije stacionarnih procesa, a rad Craméra[5][20] okosnicu razvoja teorije Gaussovih procesa.

Doob[6] je u svojoj monografiji [26] sistematizovao brojne koncepte teorije stohastičkih procesa. Izmedju ostalog, on je proučavao pojam vremena zaustavljanja i time doveo do razvoja teorije martingala. Rad u ovoj oblasti su nastavili Meyer[7] [128, 129, 130], Doléans-Dade [24], Dellacherie [23], Kunita i Watanabe [88] i mnogi drugi. Teorija stohastičkih procesa je doprinela razvoju mnogih matematičkih teorija koje opisuju pojave iz realnog života, i kao takva je od velikog značaja za nematematičke nauke, kao što su ekonomija, inženjerstvo, biologija, ekologija, epidemiologija, mehanika, saobraćaj i dr.

Nadalje će se podrazumevati da su sve slučajne promenljive i stohastički procesi zadati na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i parametraskom skupu $T \subset \mathbb{R}$, pri čemu T može biti interval $[0, \infty)$, $[0, T]$ ili $[t_0, T] \subset [0, \infty)$, a parametar $t \in T$ predstavlja vreme. Takodje, za euklidsku normu u $\mathbb{R}^d$ koristiće se oznaka $|\cdot|$, tj. $|x| = \sqrt{(x, x)}, x \in \mathbb{R}^d$ gde je sa $(\cdot, \cdot)$ označen skalarni proizvod vektora. Kako je *trag* kvadratne matrice $A = (a_{ij})_{d\times d}$ definisan sa $trA = \sum_{1\leq i\leq d} a_{ii}$, *trag normu* matrice A označavaćemo sa $|\cdot|$, tj. $|A| = \sqrt{tr(A^T A)}$ gde je A matrica, a A^T transponovana matrica matrice A.

Definicija 1.1.1 *Familija* $\{x(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$ *merljivih funkcija* $x(\omega, t) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ *je d-dimenzionalan stohastički proces sa faznim prostorom* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ *i parametarskim skupom* T.

Na osnovu prethodne definicije se može zaključiti da se za svako fiksirano $t \in T$ dobija slučajna promenljiva $\omega \mapsto x(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, tj. $\mathcal{F}$-merljiva funkcija. Takodje, za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, preslikavanje $t \mapsto x(\omega, t)$, $t \in T$ predstavlja funkciju realnog argumenta koja se naziva trajektorija ili realizacija koja odgovara ishodu $\omega \in \Omega$. Zbog jednostavnijeg zapisivanja, umesto oznake $\{x(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$ za stohastički proces će se koristiti oznaka $\{x(t), t \in T\}$. Ako je $T = \mathbb{N}$, tj. ako je vremenski interval diskretan, onda se radi o slučajnom nizu $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. U ovoj disertaciji će biti razmatrani stohastički procesi sa neprekidnim vremenom koji

[1] Evgenii Evgenievic Sluckii, 1880–1948, ruski matematičar
[2] Norbert Wiener, 1894–1964, američki matematičar i filozof
[3] Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903–1987, ruski matematičar
[4] Aleksandr Yakovlevich Khinchin, 1894–1959, ruski matematičar
[5] Harald Cramér, 1893–1985, švedski matematičar i statističar
[6] Joseph Leo Doob, 1910–2004, američki matematičar
[7] Paul-André Meyer, 1934–2003, francuski matematičar

predstavljaju matematičke modele slučajnih pojava čiji se ishodi mogu registrovati neprekidno sa protokom vremena.

Stohastički proces odredjuje familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P\{x(t_1) < x_1,\ldots,x(t_n) < x_n\},$$

pri čemu je $x_i \in \mathbb{R}^d$ i $t_i \in T,\ i = 1,2,\ldots,n,\ n \in N$.

Zahteva se da familija konačno-dimenzionalnih raspodela zadovoljava sledeća dva uslova:

– uslov simetrije, tj. da za svaku permutaciju $(i_1,\ldots,i_n)$ skupa $\{1,\ldots,n\}$ važi

$$F_{t_{i_1},t_{i_2},\ldots,t_{i_n}}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n);$$

– uslov saglasnosti, tj. da važi

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},+\infty) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).$$

Stohastički proces se može definisati familijom konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela, što proističe iz tvrdjenja Kolmogorova da za svaku familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela, koja zadovoljava uslove simetrije i saglasnosti, postoji prostor verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$ i stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ definisan na tom prostoru, kome odgovara data familija konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela.

Neprebrojivost parametarskog skupa, u opštem slučaju, onemogućava odredjivanje verovatnoća dogadjaja opisanih pomoću stohastičkih procesa. Da bi se ta teškoća otklonila, uvodi se pojam separabilnosti.

Definicija 1.1.2 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je separabilan ako postoji prebrojiv skup $S \subset T$ (separant) i dogadjaj $\Lambda \subset \Omega$ za koji je $P(\Lambda) = 0$, tako da se za proizvoljan zatvoren skup $F \subset \mathbb{R}^d$ i proizvoljan otvoren interval $I \subset T$, skupovi*

$$\{\omega : x(\omega,t) \in F,\ t \in I\} \quad i \quad \{\omega : x(\omega,t) \in F,\ t \in I \cap S\}$$

razlikuju na podskupu od Λ.

Definicija 1.1.3 *Stohastički procesi $\{x(t), t \in T\}$ i $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$, definisani na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom stanja, stohastički su ekvivalentni ako je*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t)\} = 1 \text{ za svako } t \in T.$$

U tom slučaju se kaže da je jedan proces stohastička modifikacija drugog.

Definicija 1.1.4 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je merljiv ako je $x(\omega,t)$ merljiva funkcija u odnosu na $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$, gde je $\mathcal{B}_T$ Borelovo σ-polje nad T, tj. za svaki Borelov skup B, važi $\{(t,\omega) : x(\omega,t) \in B\} \in \mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$.*

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je *stohastički neprekidan* u tački $t_0 \in T$ ako za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$P\{|x(t) - x(t_0)| > \varepsilon\} \to 0, \quad t \to t_0. \tag{1.1}$$

Stohastički proces je stohastički neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.1) važi za svako $t_0 \in S$.

Teorema 1.1.1 *Za stohastički neprekidan proces $\{x(t), t \in T\}$ postoji stohastički ekvivalentan, separabilan i merljiv proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$, definisan na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom vrednosti.*

Stohastički proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$ iz Teoreme 1.1.1 se naziva *separabilna i merljiva modifikacija* procesa $\{x(t), t \in T\}$.

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je *neprekidan u srednjem reda p*, tj. L^p-neprekidan, u tački $t_0 \in T$ ako važi

$$E|x(t) - x(t_0)|^p \to 0, \quad t \to t_0. \tag{1.2}$$

Stohastički proces je L^p-neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.2) važi za svako $t_0 \in S$.

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je *skoro izvesno neprekidan* na segmentu $[a, b] \subset T$ ako su skoro sve njegove trajektorije neprekidne na $[a, b]$, tj. ako je zadovoljeno

$$P\{\omega : x(\omega, t) \text{ ima prekid na } [a, b]\} = 0.$$

Sledeća teorema, poznata kao kriterijum Kolmogorova, daje dovoljne uslove skoro izvesne neprekidnosti stohastičkog procesa.

Teorema 1.1.2 (Kriterijum Kolmogorova) *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ ima skoro izvesno neprekidnu modifikaciju ako postoje pozitivne konstante p, q i k, tako da za svako $T > 0$ i svako $0 \le s, t \le T$ važi*

$$E|x(t) - x(s)|^p \le k\,|t - s|^{1+q}.$$

Definicija 1.1.5 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je proces reda p, $p \ge 0$ (L^p-proces) ako je $E|x(t)|^p < \infty$ za svako $t \in T$.*

Matematičko očekivanje (srednja vrednost) d-dimenzionalnog stohastičkog procesa $\{x(t), t \in T\}$ je d-dimenzionalni neslučajni vektor

$$Ex(t) = (Ex_1(t), \ldots, Ex_d(t)), \quad t \in T,$$

a korelaciona matrica

$$K(t, s) = [cov(x(t), x(s))]_{d \times d}, \quad t, s \in T.$$

Definicija 1.1.6 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je stacionaran u širem smislu (slabo stacionaran) ako je srednja vrednost $Ex(t) = const$ za $t \in T$, a korelaciona matrica $K(t, s)$ zavisi samo od razlike $t - s$, tj.*

$$Ex(t) = (m_1, \ldots, m_d), \qquad K(t, s) = B(t - s).$$

Definicija 1.1.7 *d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je Gaussov ako je svako njegovo n-dimenzionalno sečenje $(x(t_1), x(t_2)..., x(t_n))$, $t_1, t_2, ...t_n \in T$ Gaussova (normalno raspodeljena) slučajna promenljiva, tj. ako slučajni vektor $(x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n))$ ima karakterističnu funkciju*

$$f_{t_1,...t_n}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = exp\Big\{i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^T m_j(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j^T C(t_j, t_k) \lambda_k\Big\},$$

gde je $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^d$, $m_j(t_j) = Ex(t_j)$, $j = \overline{1, n}$, a $C(t, s) = cov(x(t), x(s))$.

Za dati prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ familija $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ pod-σ-algebri od $\mathcal{F}$ za koju važi $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F},\ s \leq t,\ s, t \in T$, naziva se *filtracija.* Ako je $T = [0, \infty)$, tada je $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\}$.

Neka je $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\cup_{s<t} \mathcal{F}_s\}$ σ-algebra dogadjaja koji prethode momentu $t > 0$ i neka je $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$ σ-algebra dogadjaja koji se dešavaju neposredno posle trenutka $t > 0$. Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je *neprekidna sa desna* (*neprekidna s leva*) ako za svako $t \geq 0$ važi $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ ($\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_-}$). Za filtraciju se kaže da je *neprekidna* ako je $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, za svako $t \geq 0$.

Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ zadovoljava *uobičajene uslove* ako je neprekidna sa desna i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve dogadjaje iz $\mathcal{F}$ verovatnoće nula. Nadalje će se podrazumevati da filtracija zadovoljava uobičajene uslove.

Definicija 1.1.8 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *je adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *ako je za svako* $t \in T$ *slučajna promenljiva* $x(t)$ $\mathcal{F}_t$*-merljiva.*

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, označava se sa $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in T\}$.

Za dati stohastički proces $X = \{x(t), t \in T\}$, *prirodna filtracija* je generisana samim procesom, tj. $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{x(s), s \leq t\}$ je najmanja σ-algebra u odnosu na koju je $x(s)$ merljivo za svako $s \leq t$. Dakle, X je adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, t \in T\}$. Ako je $\tilde{X} = \{\tilde{x}(t), t \in T\}$ modifikacija procesa X, tada je i $\tilde{X}$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}^X$, pod uslovom da $\mathcal{F}_0$ sadrži sve dogadjaje verovatnoće nula.

Definicija 1.1.9 *Stohastički proces* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *je progresivno merljiv ako za svako* $t \geq 0$ *i* $B \in \mathcal{B}_d$ *važi*

$$\{(s, \omega) : s \leq t,\ \omega \in \Omega,\ x(\omega, s) \in B\} \in \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t,$$

pri čemu je $\mathcal{B}([0, t])$ *Borelovo* σ*-polje nad* $[0, t]$.

Odavde sledi da je svaki progresivno merljiv stohastički proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Pored ovoga, važe i sledeća tvrdjenja.

Teorema 1.1.3 *Ako je stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *merljiv i adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

Teorema 1.1.4 *Ako je stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *i neprekidan sa desna ili sa leva, tada on ima progresivno merljivu modifikaciju.*

Definicija 1.1.10 *Stohastički proces* $\{x(t), t \geq 0\}$ *je proces Markova ako je za svako* $s < t$ *i svaki Borelov skup* $B \in \mathcal{B}_d$*,*

$$P\{x(t) \in B | \mathcal{F}_s\} = P\{x(t) \in B | x(s)\} \text{ skoro izvesno.}$$

Definicija 1.1.11 *Stohastički proces* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *takav da je* $E|x(t)| < \infty$ *za svako* $t \geq 0$ *je:*

(i) martingal ako je $E(x(t)|\mathcal{F}_s) = x(s)$ *s.i. za svako* $0 \leq s < t$;

(ii) submartingal ako je $E(x(t)|\mathcal{F}_s) \geq x(s)$ *s.i. za svako* $0 \leq s < t$;

(iii) supermartingal ako je $E(x(t)|\mathcal{F}_s) \leq x(s)$ *s.i. za svako* $0 \leq s < t$.

Ako je $E|x(t)|^2 < \infty$ za svako $t \geq 0$, martingal $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je *kvadratno-integrabilan martingal (submartingal, supermrtingal).*

Definicija 1.1.12 *Slučajna promenljiva* $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ *se naziva vreme zaustavljanja filtracije* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *ako je* $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *za svako* $t \geq 0$.

Definicija 1.1.13 *Neka je* $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *progresivno merljiv proces i neka je* τ *vreme zaustavljanja. Tada se proces* $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *naziva zaustavljen proces od* X.

Sledeća teorema predstavlja poznatu Doobovu teoremu (*Doob martingale stopping theorem*)

Teorema 1.1.5 *Neka je* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan martingal i* τ *vreme zaustavljanja u odnosu na istu filtraciju. Tada za svako* $0 \leq s < t < \infty$ *važi*

$$E(x_{t\wedge\tau}|\mathcal{F}_s) = x_{s\wedge\tau} \ \ s.i.,$$

tj. zaustavljen proces $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *je takodje martingal.*

Definicija 1.1.14 *Neprekidan (desno neprekidan) proces* $X = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, *za koji važi* $x(0) = 0$ *skoro izvesno, je lokalni martingal ako postoji neopadajući niz vremena zaustavljanja* $\{\tau_k, k \geq 1\}$ *u odnosu na fitraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *tako da je* $P\{\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty\} = 1$ *i* $\{x(t \wedge \tau_k), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *je martingal za svako* $k \geq 1$.

Iz Teoreme 1.1.5 sledi da je svaki martingal i lokalni martingal, dok obrat u opštem slučaju ne važi.

Definicija 1.1.15 *Neka je* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan stohastički proces. Kvadratna varijacija procesa* X *je proces* $< X, X >_t$ *definisan kao*

$$< X, X >_t (\omega) = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{t_k \leq 0} |X_{t_k+1}(\omega) - X_{t_k}(\omega)|^2 \ \textit{(u verovatnoći)},$$

pri čemu je $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$ *i* $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Teorema 1.1.6 *Neka filtracija* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *zadovoljava uobičajene uslove i neka je* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan kvadratno-integrabilan martingal takav da je* $x(0) = 0$ *skoro izvesno. Tada važi*

$$x^2(t) = m(t) + u(t) \ s.i., \ \ t \geq 0,$$

gde je $m(t) = \{m(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan martingal,* $u(t) = \{u(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan integrabilan rastući proces i* $m(0) = u(0) = 0$ *skoro izvesno. Ova martingalna dekompozicija je jedinstvena do stohastičke ekvivalentnosti.*

Stohastički proces $\{u(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ iz prethodne teoreme se naziva *kvadratna varijacija procesa* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Naredna teorema poznata je kao teorema o konvergenciji martingala (*Doob's martingale converegence theorem*).

Teorema 1.1.7 *Neka je* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *desno neprekidan supermartingal. Ako je* $\sup_{0\leq t<\infty} Ex^-(t) < \infty$, *onda* $x(t)$ *konvergira skoro izvesno ka slučajnoj promenljivoj* x_∞, $E|x_\infty| < \infty$. *Pored toga, ako je* $E|x(t)| < \infty$, *tada je*

$$E(x(t)|\mathcal{F}_t)) \to E(x(t)|\mathcal{F}_\infty)),\ t \to \infty, \quad s.i.$$

1.2 Proces Brownovog kretanja

Engleski prirodnjak Robert Brown[8] je u periodu 1826–1828. godine izučavao kretanje mikroskopski malih čestica kroz tečnost. Primetio je da ove čestice neprekidno izvode haotično kretanje. Po ovom naučniku ovakvo kretanje je dobilo naziv Brownovo kretanje. Nepotpun matematički opis Brownovog kretanja dao je A. Einstein[9] 1905. godine, zaključivši na osnovu zakona fizike da do ovakvog kretanja dolazi zbog neprekidnog sudaranja čestica sa molekulima fluida u kojem se kreću. Izučavanje Brownovog kretanja nastavili su Smoluhovski, Planck, Lévy itd.

Norbert Wiener, 1918. godine, u svojoj disertaciji daje potpun matematički opis Brownovog kretanja. Otuda je Wienerov proces sinonim za proces Brownovog kretanja. Zahvaljujući njegovim rezultatima [167, 168] Brownovo kretanje više nije predstavljalo samo fizičku pojavu, veći i matematički pojam. Danas se pomoću procesa Brownovog kretanja (kraće Brownovo kretanje) modeliraju mnoge pojave iz realnog života, koje su predmet izučavanja mnogih naučnih disciplina, na primer, u ekonomiji, ekologiji, epidemiologiji, itd.

Definicija 1.2.1 *Stohastički proces* $w = \{w(t),\ t \geq 0\}$ *je* m*-dimenzionalno Brownovo kretanje ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $w(0) = 0$, *skoro izvesno;*
2. *ima nezavisne priraštaje, tj. za svako* $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, *slučajne promenljive* $w(t_0), w(t_1) - w(t_0), \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$ *su nezavisne;*
3. $w(t) - w(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2|t-s|I)$, $0 \leq s < t$ *gde je* I *jedinična matrica reda* m.

Matrica $\sigma^2|t-s|I$ predstavlja difuzionu matricu Brownovog kretanja, a srednja vrednost procesa je $Ew(t) = 0$ za svako $t \geq 0$. Specijalno, za $\sigma^2 = 1$, radi se o *standardnom Brownovom kretanju.* Komponente $w_i(t)$, $i = \overline{1,m}$ m-dimenzionalnog Brownovog kretanja $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_m(t))^T$ zadovoljavaju uslov $E(w_i(t) - w_i(s))(w_j(t) - w_j(s)) = \delta_{ij}(t-s)$, $0 \leq s < t$ pri čemu je δ_{ij} Diracova delta funkcija. Prema tome, $\{w_i(t), t \geq 0\}$ su *jednodimenzionalna* nezavisna Brownova kretanja sa raspodelom $\mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$.

Brownovo kretanje ima mnogo važnih osobina medju kojima se izdvajaju sledeće:

[8]Robert Brown, 1773–1858, škotski botaničar

[9]Albert Einstein, 1879–1955, nemački fizičar

- Proces je drugog reda, tj. $E|w(t)|^2 = \sigma^2 t < \infty$.
- Proces je Markova.
- Srednje kvadratno je neprekidan.
- Skoro izvesno je neprekidan, tj. skoro sve njegove trajektorije su neprekidne funkcije.
- Skoro sve trajektorije su skoro izvesno nediferencijabilne funkcije u svakoj tački.
- Proces $\{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal, tj. za svako $t \geq s \geq 0$ važi
$$E(w(t)|\mathcal{F}_s) = w(s), \text{ s.i.};$$
- Proces $\{\frac{w(ct)}{\sqrt{c}}, \mathcal{F}_{ct},\, t \geq 0\}$, $c > 0$ je Brownovo kretanje (osobina sažimanja).
- Proces $y = \{y(t), \mathcal{F}_t^y, t \geq 0\}, y(t) = t\, w(\frac{1}{t})$, $t > 0$, $y(0) = 0\, s.i.$ je Brownovo kretanje (osobina inverzije).
- Proces $z = \{z(t), \mathcal{F}_t^z, t \geq 0\}, z(t) = w(t_0) - w(t - t_0)$, $0 \leq t \leq t_0$ je Brownovo kretanje (osobina obrtanja).
- Proces $u = \{u(t), \mathcal{F}_t^u, t \geq 0\}$, $u(t) = Bw(t)$, $t \geq 0$, $BB^T = I$ je Brownovo kretanje (osobina rotacije).
- Proces $\{-w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je Brownovo kretanje (osobina simetrije).
- Skoro izvesno je neograničene varijacije i konačne srednje-kvadratne varijacije na svakom segmentu $[a, b] \subset [0, \infty)$, tj. za proizvoljnu konstantu $c \in \mathbb{R}$ i proizvoljnu particiju $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ segmenta $[a, b]$ za koju $\max_{k=\overline{1,n}}(t_k - t_{k-1}) \to 0$, $n \to \infty$, sledi
$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} |w(t_k) - w(t_{k-1})| > c\right\} \to 1, \quad \text{kad } n \to \infty,$$
$$\sum_{k=1}^{n} |w(t_k) - w(t_{k-1})|^2 \to \sigma^2(b - a) \text{ s.k.}, \quad \text{kad } n \to \infty.$$

Slabo stacionaran proces ξ_t koji ima očekivanje nula i konstantnu spektralnu gustinu $S(\nu) = S_0$, $\nu \in \mathbb{R}$ naziva se beli šum. Ako je ξ_t Gaussov proces, tada se on naziva *Gaussov beli šum*. Naziv "beli šum" potiče iz radiotehnike, gde se ovakvi procesi javljaju kao modeli šumova pri radiopredaji informacija, s jedne strane, a sa druge strane iz činjenice da je spektralna gustina nepromenljiva u vremenu, pa sve učestanosti spektra ovog procesa imaju isti intenzitet, kao kod spektra bele svetlosti.

Za Gaussov beli šum vrednosti ξ_t i ξ_s su medjusobno nekorelirane ako je $t \neq s$, čak i kada su t i s veoma bliske po vrednosti. Štaviše, disperzija belog šuma je

$\int_{-\infty}^{\infty} S_0 d\nu = +\infty$, a kod realno mogućih procesa ovaj uslov nije ispunjen. Zbog toga se njegova korelaciona funkcija "popravlja" kao $K(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau)$, gde je $\delta(\tau)$ Diracova delta-funkcija..

Proces $w_h(t) = \frac{w(t+h)-w(t)}{h}$, gde je $\{w(t), t \geq 0\}$ jednodimenzionalno Brownovo kretanje, je slabo stacionaran Gaussov proces sa srednjom vrednošću 0 i disperzijom $1/|h|$. Kad $h \to 0$, ne postoji proces kome $w_h(t)$ konvergira u raspodeli, pa $w(t)$ nije skoro izvesno diferencijabilan ni u jednoj tački. Kako njegova korelaciona funkcija $K_h(\tau) = 1/|h| \max\{0, 1 - |\tau|/|h|\} \to \delta(\tau)$ kad $h \to 0$, proces $w_h(t)$ se u raspodeli "približava" Gaussovom belom šumu ξ_t. Zbog toga se proces $w_h(t)$ naziva *obojeni šum*, a Gaussov beli šum interpretira kao izvod Brownovog kretanja w_t tj. $\xi_t = \dot{w}(t)$. Iako Gaussov beli šum ne može biti fizički fenomen, on se koristi kao pogodna matematička apstrakcija slučajnih uticaja, tj. šumova, na realne procese.

1.3 Integral Itôa

Kako je proces Brownovog kretanja skoro izvesno neograničene varijacije i skoro sve njegove trajektorije nemaju izvod ni u jednoj tački, stohastički integral po Brawnovom kretanju se ne može definisati na standardan način kao Riemann–Stieltjesov ili Lebesgue–Stieltjesov integral. Medjutim, imajući u vidu stohastičku prirodu Brownovog kretanja, moguće je definisati stohastički integral za široku klasu stohastičkih procesa.

Četrdesetih godina prošlog veka, nezavisno jedan od drugog i sa sličnim pristupom, I. I. Gikhman[10] [36, 37] i K. Itô[11] [51, 52, 53, 54, 55] su postavili teoriju stohastičkih diferencijalnih jednačina, a u okviru nje i stohastički integral po Brownovom kretanju. Vremenom se zadržao opštiji pristup Itôa, po kome je stohastički integral po Brownovom kretanju nazvan *stohastički integral Itôa*.

Godine 1939. mladi matematičar W. Döblin[12] poslao je sa francuskog fronta svoj poslednji rukopis o jednačinama Chapman– Kolmogorova Francuskoj akademiji nauka. Kako je samo godinu dana kasnije Döblin izvršio samoubistvo pod naletom nemačke vojske, njegov zapečaćeni rukopis [25] otvoren je tek 2000. godine. Ispostavilo se posle otvaranja da je u rukopisu "O jednačinama Kolmogorova" [25] razvio račun koji se može uporediti sa računom [54] do kojeg je kasnije došao Itô, ne znajući za rad [25] Döblina. Takodje, Döblin je ostavio traga i u proučavanju lanaca i procesa Markova i skicama svojih ideja razvio matematičko okruženje povoljno za dalje istraživanje stohastičkih diferencijalnih jednačina. Francuski matematičar, P. Lévy smatrao je da bi se teorija verovatnoća brže razvijala da je Döblin duže živeo.

Danas, stohastički račun Itôa ima veliki značaj u nauci i ekonomiji, a posebno u finansijskoj matematici. Na primer, Black–Scholesov model koji se koristi za modeliranje cena opcija, upravo je zasnovan na ovom računu.

[10] Iosif Ilyich Gikhman, 1918–1985, ukrajinski matematičar

[11] Kiyoshi Itô, 1915–2008, japanski matematičar

[12] Wolfgang Döblin, u Francuskoj poznat kao Vincent Doeblin, 1915–1940, francusko–nemački matematičar

1.3.1 Konstrukcija i osobine integrala Itôa

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća na kome su definisane sve slučajne promenljive i procesi koji će biti razmatrani u nastavku.

Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalni standardni proces Brownovog kretanja adaptiran u odnosu na rastuću familiju pod-σ-algebri $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ σ-algebre $\mathcal{F}$ pri čemu je $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s), s \leq t\}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, s \leq t$ i $w(t) - w(s)$ nezavisno u odnosu na $\mathcal{F}_s$ za svako $s \leq t$.

U daljem tekstu će $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ označavati familiju stohastičkih procesa $\varphi = \{\varphi(t), t \in [t_0, T]\}$ za koje važi:

1. φ je $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$-merljiv;
2. φ je adaptiran u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$;
3. $\|\varphi\|^2{}_{\mathcal{M}^2} = \int_{t_0}^T E|\varphi(t)|^2 dt < \infty$.

Sa $|\cdot|$ je označena ranije pomenuta trag-norma matrice, tj.

$$|\varphi|^2 = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m} |\varphi_{ij}|^2 = tr(\varphi\varphi').$$

Prostor $(\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m}), \|\cdot\|_{\mathcal{M}^2})$ je Banachov i u tom prostoru se poistovećuju φ i $\tilde{\varphi}$ ako je $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathcal{M}^2} = 0$.

U nastavku će najpre biti definisan stohastički integral stepenastog stohastičkog procesa iz familije $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$, a zatim će definicija biti proširena na čitavu familiju $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ metodom aproksimacije proizvoljnog procesa iz te familije nizom stepenastih procesa.

Definicija 1.3.1 *Stohastički proces* $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ *je stepenasti proces ako postoji particija* $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, *nezavisna od* ω, *tako da je*

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) \ s.i., \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Definicija 1.3.2 *Neka je* $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ *stepenasti stohastički proces. Slučajna promenljiva*

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)dw(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k))$$

se naziva stohastički integral stepenastog procesa φ *u odnosu na proces Brownovog kretanja* w, *odnosno, integral Itôa.*

U narednoj teoremi je predstavljen postupak konstruisanja integrala Itôa za proizvoljno $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ pomoću niza stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 1.3.1 *Neka je* $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m*-dimenzionalno Brownovo kretanje i* $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$. *Tada:*

(i) Postoji niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *tako da*

$$\|\varphi - \varphi_n\|^2{}_{\mathcal{M}^2} = \int_{t_0}^{T} E|\varphi(t) - \varphi_n(t)|^2 dt \to 0,\ n \to \infty.$$

(ii) Ako niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in N\}$ *aproksimira* φ *u smislu* $\|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{M}^2} \to 0$, $n \to \infty$ *i ako je integral* $I(\varphi_n)$ *definisan kao u Definiciji 1.3.2, tada niz slučajnih promenljivih* $\{I(\varphi_n), n \in \mathbb{N}\}$ *konvergira u srednje kvadratnom smislu kada* $n \to \infty$.

(iii) Ako su $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *i* $\{\varphi'_n, n \in \mathbb{N}\}$ *dva niza stepenastih procesa koji aproksimiraju* φ*, tada je*

$$s.k. \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = s.k. \lim_{n\to\infty} I(\varphi'_n).$$

Na osnovu Teoreme 1.3.1 se definiše višedimenzionalan intergal Itôa $I(\varphi)$ kao srednje kvadratni limes niza $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$, tj.

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)dw(t) := \text{s.k.} \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{T} \varphi_n(t)dw(t).$$

Kako je $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ onda kada je $\varphi_{ij} \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}), i = \overline{1,d}, j = \overline{1,m}$, integral Itôa je d-dimenzionalan vektor

$$I(\varphi) = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)dw(t) = \int_{t_0}^{T} \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ \varphi_{d1}(t) & \dots & \varphi_{dm}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_1(t) \\ \vdots \\ dw_m(t) \end{bmatrix},$$

gde je i-ta komponenta vektora $I(\varphi)$ suma jednodimenzionalnih integrala Itôa, tj.

$$I_i(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{T} \varphi_{ij}(t)dw_j(t), \quad i = \overline{1,d}.$$

U narednoj teoremi su date neke od najbitnijih osobina integrala Itôa.

Teorema 1.3.2 *Neka je* $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *proizvoljne konstante. Tada je:*

1. $I(\varphi)$ $\mathcal{F}_T$*-merljivo;*

2. $EI(\varphi) = 0$;

3. $I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$;

4. $E|I(\varphi)|^2 = \int_{t_0}^{T} E|\varphi(t)|^2 dt$ *(stohastička integralna izometrija);*

5. $E[I(\varphi)I(\psi)] = \int_{t_0}^{T} E[\varphi(t)\psi(t)]dt$.

Integral Itôa se može definisati pod slabijim uslovima od prethodno navedenih. Naime, neka je $\mathcal{L}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ familija stohastičkih procesa koji su $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}$-merljivi i adaptirani u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$, za koju je

$$P\left\{\int_{t_0}^{T} |\varphi(t)|^2 dt < \infty\right\} = 1.$$

Iz definicije familije $\mathcal{L}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ sledi da je ona šira familija u odnosu na $\mathcal{M}_2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$.

Može se dokazati da za svako $\varphi\in\mathcal{L}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ postoji niz $\{\varphi_n, n\in\mathbb{N}\}$ iz familije $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ tako da se integral Itôa definiše kao

$$I(\varphi) = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) \text{ u verovatnoći.}$$

U tom slučaju važe samo osobine 1–3 Teoreme 1.3.2, a ne važe 4 i 5. Medjutim, za integral Itôa procesa $\varphi\in\mathcal{L}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ i proizvoljne pozitivne konstante N i ε važi

$$P\left\{\left|\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dw(t)\right| > \varepsilon\right\} \leq P\left\{\int_{t_0}^{T}|\varphi(t)|^2 dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

1.3.2 Neodredjeni integral Itôa

Definicija 1.3.3 *Neka je $I_{\{s<t\}}, t_0\leq s<t<T$ indikator skupa $[t_0,t]$. Neodredjeni integral Itôa procesa $\varphi\in\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ u odnosu na m-dimenzionalno Brownovo kretanje $w=\{w(t),\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ je d-dimenzionalan stohastički proces $x=\{x(t), t\in[t_0,T]\}$, pri čemu je*

$$x(t) := \int_{t_0}^{T} I_{\{s<t\}}\varphi(s)dw(s) = \int_{t_0}^{t}\varphi(s)dw(s), \quad t\in[t_0,T].$$

Osobine neodredjenog integrala Itôa su:

1. $x(t)$ je $\mathcal{F}_t$-adaptirano za svako $t\in[t_0,T]$;
2. $\{x(t),\mathcal{F}_t, t\in[t_0,T]\}$ ima separabilnu i merljivu modifikaciju;
3. $x(t_0)=0$ s.i.;
4. $x(t)-x(s)=\int_s^t\varphi(u)dw(u), \quad s<t$;
5. $Ex(t)=0$;
6. $E|x(t)|^2=\int_{t_0}^t E|\varphi(s)|^2 ds$;
7. proces $\{x(t),\mathcal{F}_t, t\in[t_0,T]\}$ je za $\varphi\in\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ kvadratno integrabilni martingal sa kvadratnom varijacijom

$$u(t) = \int_{t_0}^{t}|\varphi(u)|^2 du;$$

8. proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je skoro izvesno neprekidan;

9. ako je τ vreme zaustavljanja u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$, tada je za $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ zaustavljen proces

$$x(t \wedge \tau) = \int_{t_0}^{t\wedge\tau} \varphi(s)dw(s), \quad t \in [t_0, T],$$

pri čemu je $\{x(t \wedge \tau), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ i $Ex(t \wedge \tau) = 0$ (po Teoremi 1.1.5);

10. ako je $\varphi \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ i ako su ρ i τ dva vremena zaustavljanja takva da je $t_0 \le \rho \le \tau \le T$, tada je

$$E\left(\int_\rho^\tau \varphi(s)dw(s)\right) = 0, \quad E\left|\int_\rho^\tau \varphi(s)dw(s)\right|^2 = E\int_\rho^\tau |\varphi(s)|^2 dw(s). \quad (1.3)$$

Analogno Definiciji 1.3.3, neodredjeni integral Itôa se može definisati i pod slabijim uslovima, tj. za stohastičke procese $\varphi \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$. U tom slučaju proces $x = \{x(t), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je merljiv i skoro izvesno neprekidan, ali u opštem slučaju nije martingal. S druge strane, proces x je lokalni martingal u smislu Definicije 1.1.14, tj. $\{x(t \wedge \tau_n), \mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ je martingal, pri čemu je $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$ niz vremena zaustavljanja definisanih sa

$$\tau_n = \inf_{t\in[t_0,T]} \left\{\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \ge n\right\}.$$

Sledeće tvrdjenje, poznato kao *Burkholder-Davis-Gundy nejednakost*, ima veliku primenu u stohastičkoj analizi. Dokaz ovog tvrdjenja se može naći u [13, 125], a njena poboljšanja ($C_1 = 3$) u [147, 153].

Teorema 1.3.3 *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje i $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d\times m})$. Tada, za svako $p > 0$ postoje univerzalne konstante c_p i C_p, koje zavise samo od p, tako da za svako $t \ge 0$ važi*

$$c_p E\left|\int_0^t |\varphi(s)|^2 ds\right|^{\frac{p}{2}} \le E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s \varphi(u)dw(u)\right|^p\right) \le C_p E\left|\int_0^t |\varphi(s)|^2 ds\right|^{\frac{p}{2}},$$

gde je

$$\begin{array}{lll} c_p = (p/2)^p, & C_p = (32/p)^{\frac{p}{2}}, & 0 < p < 2; \\ c_p = 1, & C_p = 4, & p = 2; \\ c_p = (2p)^{-\frac{p}{2}}, & C_p = (p^{p+1}/2(p-1)^{p-1})^{\frac{p}{2}}, & p > 2. \end{array}$$

Dokaz naredne leme može se naći u [63].

Lema 1.3.1 *Ako je $\alpha(t)$ ograničena neprekidna funkcija definisana na $[0, \infty)$, tada je*

$$E\left[exp\left\{\int_{t_0}^t \alpha(s)\, dw(s)\right\}\right] = exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \alpha^2(s)\, d(s)\right\}, \quad 0 \le t_0 \le t.$$

1.3.3 Formula Itôa

U cilju efektivnog rešavanja integrala Itôa koristri se tzv. *formula Itôa.* Ovu formulu je prvi uveo K. Itô u radovima [54, 55], a uopštio je Meyer [131]. S obzirom da je istu formulu izveo i Döblin u svom zapečaćenom rukopisu [25], ova formula se u njegovu čast sve češće u literaturi naziva *formula Itô–Döblina.* Osim što se koristi za odredjivanje vrednosti integrala Itôa, ona se primenjuje i u kvalitativnoj analizi rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Bez gubljenja opštosti u nastavku se pretpostavlja da je $t_0 = 0$.

Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje i neka su $a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ i $b \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$ merljivi procesi, adaptirani u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, pri čemu je za svako $T > 0$,

$$\int_0^T |a(t)|dt < \infty \quad \text{s.i.}, \qquad \int_0^T |b(t)|^2 dt < \infty \quad \text{s.i.}$$

Definicija 1.3.4 *Neka je $a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ i $b \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$. Neprekidan i adaptiran d-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$ je proces Itôa ako je oblika*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw(s). \tag{1.4}$$

Takodje, proces $\{x(t), t \geq 0\}$ ima stohastički diferencijal $dx(t)$ za $t \geq 0$, pri čemu je

$$dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t).$$

Prvi integral u izrazu (1.4) je Lebesgueov, dok je drugi integral Itôa. Kako su oba integrala merljiva, $\mathcal{F}_t$-adaptirana i skoro izvesno neprekidna i proces Itôa ima iste osobine.

Neka $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ predstavlja familiju funkcija $V(t,x)$ sa neprekidnim izvodima prvog i drugog reda po x i prvog reda po t. Pre nego izložimo formulu Itôa za višedimenzionalan slučaj, uvedimo sledeće oznake

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_d}\right),$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{d\times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.3.4 (Višedimenzionalna formula Itôa) *Neka je $\{x(t), t \geq 0\}$ d-dimenzionalan proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$ i neka je $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R})$. Tada je $\{V(t,x(t)), t \geq 0\}$ takodje proces Itôa koji ima stohastički diferencijal*

$$\begin{aligned} &dV(t,x(t)) \\ &\quad = \Big[V_t(t,x(t)) + V_x(t,x(t))\,a(t) + \frac{1}{2}tr(b^T(t)\,V_{xx}(t,x(t))\,b(t))\Big]\,dt \\ &\qquad + V_x(t,x(t))\,b(t)\,dw(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Izraz (1.5) je poznat kao *formula Itôa za stohastičko diferenciranje.*

Analogno se definiše formula Itôa za jednodimenzionalan slučaj:

Teorema 1.3.5 (Formula Itôa) *Neka je $\{x(t), t \geq 0\}$ jednodimenzionalan proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom $dx(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$ i $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neslučajna funkcija sa neprekidnim parcijalnim izvodima $f'_t(t,x)$, $f'_x(t,x)$, $f''_{xx}(t,x)$. Tada je $\{f(t, x(t)), t \geq 0\}$ takodje proces Itôa koji ima stohastički diferencijal*

$$df(t,x(t)) = f'_t(t,x(t))\,dt + f'_x(t,x(t))dx(t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,x(t))\,b^2(t)\,dt, \quad t \geq 0. \tag{1.6}$$

1.4 Stohastičke diferencijalne jednačine

Stohastičkim diferencijalnim jednačinama se modeliraju promene stanja realnih sistema pod uticajem slučajnih faktora, na primer, cene finansijskih instrumenata na finansijskim tržištima, obim fizičkih sistema podvrgnutih slučajnim uticajima iz okoline (rast populacije). Ovi modeli sadrže "beli šum" $\xi(t)$ koji se predstavlja formalnim (generalisanim) izvodom Brownovog kretanja, tj. $\xi(t) = \dot{w}(t)$.

Ako je promena stanja sistema modelirana diferencijalnom jednačinom

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t)) + g(t,x(t))\,\xi(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0,$$

ona se može predstaviti u obliku *stohastičke diferencijalne jednačine Itôa* nepoznatog d-dimenzionalnog procesa $x = \{x(t), t \in [0,T]\}$,

$$dx(t) = f(t,x(t))\,dt + g(t,x(t))\,dw(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0, \tag{1.7}$$

pri čemu je $w = \{w(t), t \in [0,T]\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje, početni uslov x_0 je d-dimenzionalna slučajna promenljiva koja je stohastički nezavisna u odnosu na w, a $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ su neslučajne Borelove funkcije.

S obzirom na Definiciju 1.3.4 stohastičkog diferencijala, jednačina (1.7) ima ekvivalentan integralni oblik

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))\,ds + g(s,x(s))\,dw(s), \quad t \in [0,T]. \tag{1.8}$$

Funkcije $f(t,x)$ i $g(t,x)$ predstavljaju koeficijente jednačine (1.7), pri čemu se funkcija $f(t,x)$ naziva *koeficijent prenosa*, a funkcija $g(t,x)$ *koeficijent difuzije* ili *rasipanja.*

Nadalje će se podrazumevati da je $\mathcal{F}_t = \sigma\{x_0, w(s), 0 \leq s \leq t\}$. Tada je $w(t)$ $\mathcal{F}_t$-merljivo za svako $t \geq 0$, $w(t) - w(s)$ ne zavisi od $\mathcal{F}_s$ za svako $t \geq s$ i x_0 je $\mathcal{F}_0$-merljivo.

Definicija 1.4.1 *Merljiv stohastički proces $x = \{x(t), t \in [0,T]\}$ je strogo rešenje jednačine (1.7) ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. *$x(t)$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran proces za svako $t \in [0,T]$;*

2. *$\int_0^T |f(t,x(t))|\,dt < \infty$, s.i., $\int_0^T |g(t,x(t))|^2\,dt < \infty$, s.i.;*

3. *$x(0) = x_0$ s.i.;*

4. *jednačina (1.8) je zadovoljena s.i. za svako $t \in [0,T]$.*

Na osnovu osobina 1 i 2 Definicije 1.4.1 sledi da su i Lebesgueov i Itôv integral na desnoj strani jednakosti (1.8) dobro definisani i skoro izvesno neprekidni, zbog čega je i x skoro izvesno neprekidan proces. Oba integrala su jedinstvena do stohastičke ekvivalentnosti. U tom slučaju, u skladu sa Teoremom 1.1.1, uvek se pretpostavlja da se radi sa merljivom, separabilnom i skoro izvesno neprekidnom modifikacijom strogog rešenja.

Definicija 1.4.2 *Jednačina (1.7) ima jedinstveno strogo rešenje ako za svaka dva stroga rešenja x i $\tilde{x}$ važi*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [0,T]\} = 1.$$

U sledećoj teoremi su dati dovoljni uslovi za egzistenciju i jedinstvenost strogog rešenja jednačine (1.7). Zbog jednostavnosti, nadalje će se umesto termina strogo rešenje koristiti samo termin rešenje.

Teorema 1.4.1 *Neka je w m-dimenzionalano Brownovo kretanje i x_0 slučajna promenljiva, nezavisna od w, za koju je $E|x_0|^2 < \infty$. Neka su $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ Borelove funkcije koje zadovoljavaju globalni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. postoji konstanta $L > 0$ tako da za svako $(t,x), (t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ važi*

$$\begin{aligned} &|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \le L|x-y|, \\ &|f(t,x)|^2 + |g(t,x)|^2 \le L^2(1 + |x|^2.) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Tada postoji jedinstveno skoro izvesno neprekidno rešenje jednačine (1.7) sa osobinom $E\sup_{t\in[0,T]} |x(t)|^2 < \infty$. Pored toga, ako je $E|x_0|^p < \infty$ za $p \ge 2$, tada je $E\sup_{t\in[0,T]} |x(t)|^p \le \infty$.

Jednačina (1.7) je često definisana na celoj vremenskoj osi, tj. za $t \in [0,\infty)$. Ukoliko Teorema 1.4.1 važi na svakom konačnom podintervalu $[0,T] \subset [0,\infty)$, tada jednačina (1.7) ima jedinstveno rešenje $x(t)$ na celom intervalu $[0,\infty)$ i takvo rešenje naziva se *globalno rešenje*.

Iz formulacije Lipschitzovog uslova možemo zaključiti da se pri promeni veličine x koeficijenti $f(t,x)$ i $g(t,x)$ ne menjaju brže nego linearna funkcija od x. To znači da su koeficijenti $f(t,x)$ i $g(t,x)$ neprekidni po x za svako $t \in [0,T]$. Zato, Teorema 1.4.1 daje samo dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.7), jer u slučaju prekidnih funkcija $f(t,x)$ i $g(t,x)$ rešenje ove jednačine ne mora biti skoro izvesno neprekidno. Odavde zaključujemo da je Lipschitzov uslov isuviše restriktivan. Egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (1.7) se mogu dokazati pod slabijim tzv. *lokalnim Lipschitzovim uslovom* koji proširuje klasu dopustivih funkcija za f i g neprekidno diferencijabilnim funkcijama. S druge strane, kako mnoge funkcije (npr. $-|x|^2x$) ne zadovoljavaju uslov linearnog rasta, on može biti oslabljen tzv. *uslovom monotonosti.*

Naredna teorema predstavlja uopštenje Teoreme 1.4.1 o egzistenciji i jedinstvenosti globalnog rešenja pod oslabljenim uslovima.

Teorema 1.4.2 *Neka je w m-dimenzionalano Brownovo kretanje i x_0 slučajna promenljiva, nezavisna od w, za koju je $E|x_0|^2 < \infty$. Neka su $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ Borelove funkcije koje zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov i uslov monotonosti, tj. za svaki realan broj $T > 0$ i prirodan broj $n \geq 1$ postoje pozitivne konstante $L_{T,n}$ i L_T tako da za svako $(t,x),(t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $|x| \vee |y| \leq n$ važi*

$$
\begin{aligned}
&|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq L_{T,n}|x-y|, \\
&x^T f(t,x) + \frac{1}{2}|g(t,x)|^2 \leq L_T(1+|x|^2).
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Tada postoji jedinstveno globalno rešenje $\{x(t), t \in [0,T]\}$ jednačine (1.7) tako da je $E\sup_{t\in[0,T]}|x(t)|^2 < \infty$.

Teorema 1.4.2 važi i ukoliko se uslov monotonosti (1.10) zameni uslovom linearnog rasta (1.9).

Ako se za koeficijente f i g jednačine (1.7) uvede dodatna pretpostavka da je

$$f(t,0) = 0 \quad \text{s.i.} \qquad \text{i} \qquad g(t,0) = 0 \quad \text{s.i.}, \qquad t \in [0,T],$$

jednačina (1.7) ima rešenje $x(t) \equiv 0$ koje odgovara početnom uslovu $x(0) = 0$. Ovo rešenje se naziva *trivijalnim rešenjem* ili *položajem ravnoteže* jednačine (1.7).

1.4.1 Stabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina

Teorija stohastičke stabilnosti ili *stabilnosti (rešenja) stohastičkih diferencijalnih jednačina* počela je da se razvija šezdesetih godina prošlog veka. Njeni osnovni principi preuzeti su iz teorije stabilnosti običnih diferencijalnih jednačina kojima se opisuju dinamički sistemi. Kako je mali broj običnih diferencijalnih jednačina efektivno rešiv, mogućnost predvidjanja ponašanja rešenja u beskonačnom vremenskom intervalu postala je predmet interesovanja mnogih naučnika. Razvoj kvalitativne i kvantitativne analize rešenja običnih diferencijalnih jednačina našao je veliku primenu u mnogim oblastima nauke i tehnike.

Da bi se razumele osnovne ideje teorije stohastičke stabilnosti, ovde će biti izložen mali osvrt na stabilnost diferencijalnih jednačina.

Stabilnost običnih diferencijalnih jednačina

Ruski matematičar Aleksandr M. Lyapunov[13] je 1892. godine u svojoj doktorskoj disertaciji [110] prvi izneo koncept stabilnosti dinamičkih sistema koji se opisuju

[13] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 1857–1918, ruski matematičar i fizičar

običnim diferencijalnim jednačinama. On je razmatrao modifikacije nelinearnog sistema da bi se on stabilizovao u blizini položaja ravnoteže, bez nalaženja tačnog rešenja sistema. Njegov rad, prvobitno objavljen na ruskom, a kasnije preveden i na francuski jezik, nije privukao veliku pažnju naučnika, a ni javnosti. Naglo interesovanje počinje za vreme hladnog rata (1953–1962), kada tzv. druga metoda Lyapunova nalazi veliku primenu u kontroli sistema navodjenja aviona. Počev od tada, teorija stabilnosti dinamičkih sistema se naglo razvija . Mnogi naučnici, medju kojima treba istaći Letova [95], Kalmana [65], LaSallea [93], Parksa [141] i Hahna [41], nastavili su istraživanja u ovoj oblasti. Zbog aktuelnosti i velike primenljivosti, teorija stabilnosti je i danas predmet istraživanja velikog broja naučnika.

Pojednostavljen opis koncepta stabilnosti je u tome da je sistem stabilan ako sva rešenja dinamičkog sistema koja su u početnom trenutku bila u blizini položaja ravnoteže, ostaju u njegovoj blizini duž cele vremenske ose. Stabilnost sistema znači neosetljivost sistema na male promene početnih uslova. Za detalje pogledati Hahn [41], Lakshmikantham [90], Janković [56].

Razmotrimo d-dimenzionalnu običnu diferencijalnu jednačinu

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, \infty), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d. \tag{1.11}$$

Neka postoji jedinstveno rešenje jednačine (1.11) definisano na $[0, \infty)$ i neka je $f(0, t) = 0$ za svako $t \in [0, \infty)$, tj. jednačina (1.11) ima trivijalno rešenje $x(t) \equiv 0$. Može se primetiti da se ispitivanje stabilnosti bilo kog rešenja diferencijalne jednačine (1.11) uvek može svesti na ispitivanje stabilnosti trivijalnog rešenja.

Definicija 1.4.3 *Trivijalno rešenje jednačine (1.11) je stabilno ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon, 0) > 0$ *tako da je*

$$|x(t; 0, x_0)| < \varepsilon, \quad t \geq 0$$

kad god je $|x_0| < \delta$. *Inače, rešenje je nestabilno. Trivijalno rešenje je asimptotski stabilno ako je stabilno i ako postoji* $\delta_0 = \delta_0(0) > 0$ *tako da je*

$$\lim_{t \to \infty} x(t; 0, x_0) = 0$$

kad god je $|x_0| < \delta_0$.

Na osnovu ove definicije može se zaključiti da bi ispitivanje stabilnosti rešenja bilo relativno jednostavno ako bi jednačina bila rešiva. Medjutim, to uglavnom nije slučaj. Ogroman doprinos Lyapunova teoriji stabilnosti je u tome što je on 1892. godine razvio metodu koja ne zahteva poznavanje tačnog rešenja sistema. Ta metoda je poznata kao *direktna (ili druga) metoda Lyapunova.*

Neka je $\mathcal{K}$ familija neprekidnih neopadajućih funkcija $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\mu(0) = 0$, $\mu(r) > 0$, za $r > 0$. Za funkciju $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ kažemo da je *pozitivno-definitna* (u smislu Lyapunova) ako je $V(0, t) \equiv 0$ i ako postoji $\mu \in \mathcal{K}$ tako da je

$$V(t, x) \geq \mu(|x|), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d.$$

Sa $C^{1,1}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_+)$ označimo familiju neprekidnih funkcija $V(t,x)$ koje su jednom neprekidno diferencijabilne po x i po t. Ako je $x(t)$ rešenje jednačine (1.11), definišimo funkciju $v(t):=V(t,x(t))$. Tada je

$$\dot{v}(t)=V_t(t,x(t))+V_x(t,x(t))f(t,x(t)).$$

Ako je $\dot{v}(t)\leq 0$, onda je $v(t)$ nerastuća. S obzirom da je $V(t,x(t))$ pozitivno-definitna funkcija, "rastojanje" rešenja $x(t)$ od položaja ravnoteže, "mereno" funkcijom $V(t,x(t))$, takodje ne raste. Ako je $\dot{v}(t)<0$, tada $v(t)$ opada ka 0, tj. $v(t)\downarrow 0$ kad $t\to\infty$, pa u tom slučaju i $x(t)\downarrow 0$ kad $t\to\infty$. Ova ideja dovodi do sledeće teoreme poznate kao *teorema Lyapunova.*

Teorema 1.4.3 *Pretpostavimo da postoji pozitivno-definitna funkcija* $V(t,x)\in C^{1,1}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_+)$ *tako da je*

$$\dot{V}(t,x)=V_t(t,x(t))+V_x(t,x(t))f(t,x(t))\leq 0$$

za svako $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. *Tada je trivijalno rešenje jednačine (1.11) stabilno.*

Funkcija $V(t,x)$ koja zadovoljava uslove prethodne teoreme, naziva se *funkcija Lyapunova.*

Stohastička stabilnost

Američki naučnik R.S. Bucy[14] je u radu [12] iz 1965. godine primenio metodu Lyapunova za ispitivanje stabilnosti rešenja nelinearnih diferencnih jednačina koje sadrže slučajnu komponentu. Pretpostavivši da funkcija Lyapunova mora biti nenegativan supermartingal i koristeći teoremu o konvergenciji martingala, on je postavio dovoljne uslove kako za stabilnost u verovatnoći, tako i za stabilnost momenta rešenja sistema. Uopštenje njegovih rezultata na stohastičke diferencijalne jednačine ubrzo je napravio Kushner[15] u radu [89]. Khasminskii[16][72] 1967. godine razmatra dovoljne uslove za skoro izvesnu stabilnost rešenja linearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina. S ozirom da su rezultati teorije stohastičke stabilnosti polovinom prošlog veka naišli na veliku primenu u mehanici, tehnici, biologiji, medicini i drugim oblastima nauke i tehnike, mnogi naučnici su bili motivisani da se bave problemom stabilnosti različitih vrsta stohastičkih diferencijalnih jednačina, na primer, Khasminskii [48, 73, 74], Coleman [21], Zabczyk [182], Ichikawa [50], Curtain [22], Mohammed [134], Mao [111, 125] , Shaikhet [154, 157, 158] i drugi.

Postoje različite definicije stabilnosti stohastičkih diferencijalnih jednačina, pri čemu se izdvajaju tri osnovna tipa: stabilnost u verovatnoći (stohastička stabilnost), skoro izvesna eksponencijalna stabilnost i eksponencijalna stabilnost momenata rešenja. Kao i u determinističkom slučaju, neka je $C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_+)$ familija nenegativnih funkcija $V(t,x)$ koje su jednom neprekidno diferencijabilne po t i dva puta po x. Diferencijalni operator L, pridružen jednačini (1.7), definiše se na sledeći način,

[14]Richard Snowden Bucy, 1935– , američki fizičar i matematičar

[15]Harold Joseph Kushner, 1933– , američki matematičar

[16]Rafail Zalmanovich Khasminskii, 1931– , ruski matematičar

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} f_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left[g^T(t,x)g(t,x)\right]_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}. \tag{1.12}$$

Jasno je da za $V \in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_+)$ važi

$$LV(t,x) = V_t(t,x) + V_x(t,x)f(t,x) + \frac{1}{2}tr\left[g^T(t,x)V_{xx}(t,x)g(t,x)\right].$$

U nastavku su navedene defnicije i teoreme za svaki tip stabilnosti. Za detalje pogledati [45, 73, 75, 90, 125, 134, 154].

Stabilnost u verovatnoći

Stabilnost u verovatnoći (stohastička stabilnost) predstavlja prirodno uopštenje stabilnosti rešenja u determinističkom slučaju, što se vidi iz sledeće definicije.

Definicija 1.4.4 *Trivijalno rešenje jednačine (1.7) je stohastički stabilno ili stabilno u verovatnoći ako za svako* $\varepsilon \in (0,1)$ *i* $r > 0$, *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon, r, 0) > 0$ *tako da je*

$$P\left\{\sup_{t\geq 0}|x(t;0,x_0)| < r\right\} \geq 1-\varepsilon$$

kad god je $|x_0| < \delta$. *Inače, rešenje je stohastički nestabilno.*

Definicija 1.4.5 *Trivijalno rešenje jednačine (1.7) je stohastički asimptotski stabilno ako je stohastički stabilno i ako za svako* $\varepsilon \in (0,1)$, *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon, 0) > 0$ *tako da je*

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} x(t;0,x_0) = 0\right\} \geq 1-\varepsilon$$

kad god je $|x_0| < \delta$.

Naredna teorema predstavlja uopštenje Teoreme Lyapunova 1.4.3 na stohastički slučaj.

Teorema 1.4.4 *Pretpostavimo da postoji pozitivno-definitna funkcija* $V(t,x) \in C^{1,2}$ $([0,\infty)\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_+)$ *tako da je*

$$LV(t,x) \leq 0$$

za svako $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^d$, *tada je trivijalno rešenje jednačine (1.7) stohastički stabilno.*

Funkcija $V(t,x)$ iz prethodne teoreme se naziva *stohastička funkcija Lyapunova.* Osnovni problem ispitivanja stohastičke stabilnosti predstavlja kako naći odgovarajuću funkciju Lyapunova . U tu svrhu postoje mnogobrojne tehnike. Na primer, za $V(t,x)$ se može uzeti x^TQx, gde je Q kvadratna matrica, ili $|x|^p$, $p > 0$, što zavisi od samih koeficijenata jednačine. O ovome će više biti reči u narednim poglavljima.

Skoro izvesna eksponencijalna stabilnost

Definicija 1.4.6 *Trivijalno rešenje jednačine (1.7) je skoro izvesno eksponencijalno stabilno ako je*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log |x(t;0,x_0)|}{t} < 0 \quad s.i. \tag{1.13}$$

za svako $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Leva strana relacije (1.13) se naziva *eksponent Lyapunova trajektorije rešenja.* Očigledno, trivijalno rešenje sistema je skoro izvesno eksponencijalno stabilno ako i samo ako je eksponent Lyapunova negativan. Iz definicije sledi da skoro izvesna eksponencijalna stabilnost znači da skoro sve trajektorije rešenja eksponencijalno brzo teže ka trivijalnom rešenju kad $t \to \infty$.

Sledeća teorema daje uslove skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti rešenja jednačine (1.7) u terminima funkcije Lyapunova.

Teorema 1.4.5 (Mao, [125]) *Neka postoji pozitivno-definitna funkcija* $V(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ *i konstante* $p, c_1 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ *i* $c_3 \geq 0$ *tako da je za svako* $x \neq 0$ *i* $t \geq 0$ *:*

(i) $c_1|x|^p \leq V(t,x)$*;*

(ii) $LV(t,x) \leq c_2 V(t,x)$*;*

(iii) $|V_x(t,x)g(t,x)|^2 \geq c_3 V^2(t,x)$.

Tada je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log |x(t;0,x_0)|}{t} \leq -\frac{c_3 - 2c_2}{2p} \quad s.i.$$

za svako $x_0 \in \mathbb{R}^d$*. Ako je* $c_3 > 2c_2$*, trivijalno rešenje sistema (1.7) je skoro izvesno eksponencijalno stabilno.*

Eksponencijalna stabilnost momenta rešenja

Razmotrimo *eksponencijalnu stabilnost momenta reda* p, $p > 0$, ili kraće *eksponencijalnu* L^p*-stabilnost* rešenja. Neka je $L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ familija stohastičkih promenljivih $x \in \mathbb{R}^d$, $E|x|^p < \infty$.

Definicija 1.4.7 *Trivijalno rešenje jednačine (1.7) je eksponencijalno* L^p*-stabilno ako postoje pozitivne konstante* λ *i* C *tako da je*

$$E|x(t;0,x_0)|^p \leq C\, E|x_0|^p\, e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \tag{1.14}$$

za svako $x_0 \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$*. Ako je* $p = 2$*, trivijalno rešenje je srednje kvadratno eksponencijalno stabilno.*

Relacija (1.14) može se ekvivalentno zapisati na sledeći način,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log E|x(t;0,x_0)|^p}{t} < -\lambda. \tag{1.15}$$

Leva strana relacije (1.15) se naziva *eksponent Lyapunova momenta reda p*. Očigledno, eksponent Lyapunova momenta reda p je negativan i nije veći od $-\lambda$. Eksponencijalna L^p-stabilnost podrazumeva da se moment rešenja reda p približava trivijalnom rešenju eksponencijalno brzo kad $t \to \infty$.

Teorema 1.4.6 (Mao, [125]) *Neka postoji pozitivno-definitna funkcija $V(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_+)$ i pozitivne konstante c_1, c_2, c_3, tako da za svako $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ važi:*

(i) $c_1|x|^p \le V(t,x) \le c_2|x|^p$;

(ii) $LV(t,x) \le -c_3V(t,x)$.

Tada je

$$E|x(t;0,x_0)|^p \le \frac{c_1}{c_2}\,|x_0|^p\,e^{-c_3 t}, \quad t \ge 0$$

za svako $x_0 \in \mathbb{R}^d$, tj. trivijalno rešenje je eksponencijalno L^p-stabilno. Štaviše, eksponent Lyapunova momenta reda p nije veći od $-c_3$.

U opštem slučaju eksponencijalna L^p-stabilnost i skoro izvesna stabilnost ne impliciraju jedna drugu i za to su potrebni dodatni uslovi koji su predstavljeni u sledećoj teoremi.

Teorema 1.4.7 (Mao, [125]) *Neka postoji pozitivna konstanta K tako da za svako $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ važi*

$$x^T f(t,x) \vee |g(t,x)|^2 \le K|x|^2.$$

Tada, ako je trivijalno rešenje jednačine (1.7) eksponencijalno L^p-stabilno, onda je i skoro izvesno eksponencijalno stabilno.

1.5 Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine

Često se u primenama, radi jednostavnijeg matematičkog modeliranja, pretpostavlja da sistem koji se razmatra ne zavisi od prošlog stanja sistema. Medjutim, da bi se razmatrani sistem što realnije opisao, neophodno je uzeti u obzir i prošlost sistema. Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine (SFDJ) predstavljaju matematičku formulaciju takvih sistema. Predmet proučavanja u ovoj oblasti su najčešće egzistencija, jedinstvenost i stabilnost, kao i kvalitativna i kvantitativna svojstva rešenja. Osnove ove teorije postavili su Mohamed [134], Mao [125], Kolmanovskii [77] i drugi.

Kao i ranije, neka su sve slučajne promenljive i procesi definisani na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove (tj., rastuća je, neprekidna sa desna i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve dogadjaje verovatnoće nula).

Za fiksirano $\tau > 0$, neka je $C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$ familija neprekidnih funkcija $\varphi : [-\tau,0] \to \mathbb{R}^d$, sa supremum-normom $||\varphi|| = \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0}|\varphi(\theta)|$. Pritom je $(C([-\tau,0];\mathbb{R}^d), ||\cdot||)$ Banachov prostor. Familiju svih ograničenih $\mathcal{F}_0$-merljivih slučajnih promenljivih iz $C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$ označimo sa $C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$. Za $p > 0$ i $t \geq 0$, neka je $L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$ familija svih $\mathcal{F}_0$-merljivih slučajnih promenljivih iz $C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$, $\varphi = \{\varphi(\theta) : -\tau \leq t \leq 0\}$ tako da je $E||\varphi||^p < \infty$.

U ovom poglavlju se razmatra SFDJ oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t,x_t)\,dt + g(t,x_t)\,dw(t), \quad t\in[0,T], \\ x_0 &= \xi, \end{aligned} \tag{1.16}$$

pri čemu su funkcionali

$$f : [0,T]\times C([-\tau,0];\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d, \quad g : [0,T]\times C([-\tau,0];\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{d\times m}$$

Borel merljivi, $x(t)$ je d-dimenzionalan proces i $x_t = \{x(t+\theta), \theta\in[-\tau,0]\}$ je stohastički proces iz familije $C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$ koji se interpretira kao prošlost datog stanja. Zbog zavisnosti od prošlosti, početni uslov se mora zadati na čitavom intervalu $[-\tau,0]$, tj.

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta\in[-\tau,0]\},$$

pri čemu je ξ $\mathcal{F}_0$-merljiva slučajna promenljiva iz familije $C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$, za koju važi $E||\xi||^2 < \infty$.

Definicija 1.5.1 *Za d-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t\in[-\tau,T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.16) ako je skoro izvesno neprekidan, $\{x_t, t\in[0,T]\}$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran, $\int_0^T |f(t,x_t)|\,dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |g(t,x_t)|^2\,dt < \infty$ s.i., $x_0 = \xi$ s.i. i za svako $t\in[0,T]$ integralni oblik jednačine (1.16) je skoro izvesno zadovoljen.*

Definicija 1.5.2 *Rešenje $\{x(t), t\in[-\tau,T]\}$ je jedinstveno ako je bilo koje drugo rešenje $\{\tilde{x}(t), t\in[-\tau,T]\}$ stohastički ekvivalentno tom rešenju, tj. ako je*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t\in[-\tau,T]\} = 1.$$

Sledeći fundamentalan rezultat u teoriji stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina se može naći u, npr. [125].

Teorema 1.5.1 (Mao, [125]) *Ako za funkcionale f i g važe uniformni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. ako postoji konstanta $K > 0$, tako da je*

$$\begin{aligned} &|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| \vee |g(t,\varphi) - g(t,\psi)| \leq K||\varphi-\psi||, \\ &|f(t,\varphi)| \vee |g(t,\varphi)| \leq K(1 + ||\varphi||) \end{aligned}$$

za svako $t\in[0,T]$ i $\varphi,\psi\in C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$, tada postoji jedinstveno, skoro izvesno neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.16). Štaviše, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p\geq 2$, tada je $E\sup_{-\tau\leq t\leq T}|x(t)|^p < \infty$.

Ako je $f(t,0) \equiv 0$ i $g(t,0) \equiv 0$, jednačina (1.16) ima rešenje $x(t) \equiv 0$ koje odgovara početnom uslovu $x_0 = 0$. Ovo rešenje se naziva *trivijalno rešenje* jednačine (1.16).

1.5.1 Stabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina

U nastavku su navedene definicije i teoreme teorije stabilnosti stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina, koje se mogu naći u, na primer, [77].

Analogno definicijama iz Poglavlja 1.4.1, definišu se tri osnovna tipa stabilnosti za stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine.

Definicija 1.5.3 *Trivijalno rešenje jednačine (1.16) je stohastički stabilno ako za svako $\varepsilon \in (0,1)$ i $r > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon, r, 0) > 0$, tako da je*

$$P\{|x(t;\xi)| > r, t \geq 0\} \leq \varepsilon,$$

za svaki početni uslov $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ za koji je $P\{||\xi|| \leq \delta\} = 1$.

Definicija 1.5.4 *Trivijalno rešenje jednačine (1.16) je skoro izvesno eksponencijalno stabilno ako je*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|x(t;\xi)|}{t} < 0 \quad s.i. \tag{1.17}$$

za svako $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$.

Definicija 1.5.5 *Trivijalno rešenje jednačine (1.16) je eksponencijalno L^p-stabilno ako postoje pozitivne konstante λ i C tako da je*

$$E|x(t;\xi)|^p \leq C\, E||\xi||^p\, e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \tag{1.18}$$

Neka je $V : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ funkcional oblika $V(t,\varphi) := V(t, \varphi(0), \varphi(\theta))$, $-\tau \leq \theta \leq 0$. Za $\varphi = x_t$ definišimo funkciju

$$V_\varphi(t,x) := V(t,\varphi) = V(t, x_t) = V(t, x, x(t+\theta)),\ -\tau \leq \theta \leq 0,$$

gde je $x = \varphi(0) = x(t)$.

Neka je $C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ familija funkcionala $V(t,\varphi)$ tako da su za skoro svako $t \geq 0$ neprekidni prvi i drugi izvod po x od $V_\varphi(t,x)$, dok je prvi izvod po t neprekidan. Primenom operatora L (1.12) pridruženog jednačini (1.16), dobija se

$$LV(t,x_t) = \frac{\partial V_\varphi(t,x)}{\partial t} + f^T(t,x_t)\frac{\partial V_\varphi(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2} tr\left[g^T(t,x_t)\frac{\partial^2 V_\varphi(t,x)}{\partial x^2} g(t,x_t)\right].$$

Prirodno je uopštiti metod Lyapunova predstavljen u Poglavlju 1.4.1 na ovaj tip stohastičkih jednačina. Kao rezultat toga dobijene su sledeće teoreme koje se mogu naći u [77, 158].

Teorema 1.5.2 (Shaikhet, [158]) *Neka postoji funkcional $V(t,\varphi) \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ i konstante $c_1, c_2 > 0$, $p \geq 2$ tako da važi*

$$V(t,x_t) \geq c_1|x(t)|^p, \quad V(0,\xi) \leq c_2||\xi||^p,$$

$$LV(t,x_t) \leq 0, \quad t \geq 0,$$

za svako $x(t) \in \mathbb{R}^d$ i početni uslov ξ, $P\{||\xi|| \leq \delta\} = 1$, gde je $\delta > 0$ dovoljno mali broj. Tada je trivijalno rešenje jednačine (1.16) stohastički stabilno.

Teorema 1.5.3 (Shaikhet, [158]) *Neka postoji funkcional $V(t,\varphi) \in C^{2,1}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ i konstante $p > 0$ i $\lambda > 0$ tako da važi*

$$EV(t,x_t) \geq c_1 e^{\lambda t} E|x(t)|^p,\ t \geq 0, \qquad EV(0,\xi) \leq c_2 E||\xi||^p,$$

$$ELV(t,x_t) \leq 0,\ t \geq 0.$$

Tada je trivijalno rešenje jednačine (1.16) eksponencijalno L^p-stabilno.

Osnovni problem u ispitivanju stabilnosti jednačine (1.7) bio je kako pronaći odgovarajuću stohastičku funkciju Lyapunova. U ovom slučaju, problem se dodatno komplikuje jer je potrebno pronaći odgovarajući funkcional koji će zadovoljiti uslove prethodne teoreme, a koji se naziva *funkcional Lyapunova.*

Metoda Razumikhina

Postoji brojna literatura na temu konstrukcije funkcionala Lyapunova, a posebno se ističu Shaikhet[17] [155, 156, 158] i Kolmanovskii[18] [75, 77, 80, 81] svojim knjigama i radovima. Činjenica je da, bez obzira na brojne tehnike i metode, konstrukcija funkcionala nije laka ni pogodna u praktičnim primerima. Metoda Razumikhina u nekim slučajevima omogućava prevazilaženje ovih poteškoća.

Zbog lakšeg razumevanja ove metode, izložen je kratak osvrt na stabilnost funkcionalnih diferencijalnih jednačina, gde se i nalaze počeci primene ove tehnike (za više detalja pogledati [40, 43, 79]).

Metoda Razumikhina u determinističkom slučaju

Osnovne poteškoće u primeni direktne metode Lyapunova u diferencijalnim jednačinama sa pomerenim argumentima formulisao je L.E. Elsgolts[19] [31] 1954. godine. Glavni problem je odrediti znak diferencijala Lyapunova koji predstavlja funkciju od $2n$ promenljivih (funkcionala) ukoliko je razmatrana jednačina reda n. Ubrzo je rešenje ovih poteškoća dao B.S. Razumikhin[20] [149, 150]. On je razmatrao stabilnost diferencijalnih jednačina u terminima funkcije Lyapunova koju je lakše konstruisati nego funkcionale. Otuda se ova metoda naziva *metoda Lyapunov-Razumikhina.* Njegov rad su kasnije proširili Driver [27] i Forumochi [33] na funkcionalne diferencijalne jednačine, a Kato [67] na diferencijalne jednačine sa beskonačnim kašnjenjem.

Nasuprot tome, 1956. godine, N.N. Krasovskii[21] u svojim radovima [84, 85, 86] uopštava direktnu metodu Lyapunova razmatrajući diferencijalne jednačine sa pomerenim argumentima. Odgovarajuća funkcija Lyapunova zapravo je funkcional $V(x_t)$ koji "meri" odstupanje x_t od trivijalnog rešenja. Krasovskii daje dovoljne uslove za asimptotsku stabilnost u slučaju kada je $V(x_t)$ negativno-semidefinitna matrica. LaSalle[22] [92] je 1960. godine uopštio ovu metodu pa se ona često naziva

[17] Leonid Shaikhet, 1948– , ukrajinski matematičar
[18] Vladimir Borisovich Kolmanovskii, 1942– , ruski matematičar
[19] Lev Ernestovich Elsgolts, 1909–1967, ruski matematičar
[20] Boris Sergeevich Razumikhin, 1918–1988, ruski fizičar i matematičar
[21] Nikolai Nikolaevich Krsovskii, 1924-2012, ruski matematičar
[22] Joseph Pierre La Salle, 1916–1983, američki matematičar

Krasovskii-LaSalle ili *Lyapunov-Krasovskii metoda.* Teoreme ovog tipa imaju važnu ulogu u teorijskom ispitivanju, ali se u praksi često teško primenjuju zbog veoma komplikovane konstrukcije funkcionala Lyapunova, iako su u medjuvremenu razvijene brojne tehnike za ovu konstrukciju (pogledati, na primer [32, 45]).

Kako bi osnovna ideja Razumikhina bila objašnjena, razmatra se sledeća diferencijalna jednačina sa pomerenim argumentom

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h)), \quad h = const. > 0, \quad t \geq 0, \tag{1.19}$$

gde je $x(t)$ rešenje ove diferencijalne jednačine sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$, a funkcija $f(x,y)$ je neprekidno diferencijabilna i ima $2n$ skalarnih argumenata. Neka za zadati početni uslov $x_0(t)$, $t \in [-h, 0]$ postoji jedinstveno rešenje jednačine (1.19). Bez gubljenja opštosti, pretpostavlja se da je $f(0,0) = 0$, kako bi jednačina imala trivijalno rešenje $x(t) \equiv 0$.

Neka je funkcija $V(x)$ definisana i neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini $G \subset \mathbb{R}^n$ trivijalnog rešenja takva da je $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ za svako $x \in G \setminus \{0\}$. Izvod funkcije V u odnosu na sistem (1.19) je oblika

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} V_{x_i}(x)\dot{x}_i = (gradV(x), \dot{x})$$

gde je $gradV(x) = (V_{x_1}(x), ..., V_{x_n}(x))$ i $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ je skalarni proizvod vektora.

L.E. Elsgolts [31], razmatrajući stabilnost trivijalnog rešenja jednačine (1.19) na način opisan u Poglavlju 1.4.1 (Teorema 1.4.3), dokazao je da je dovoljan uslov stabilnosti da je $V(x(t))$ opadajuća funkcija, tj. $\dot{V}(x(t)) \leq 0$. Takva funkcija se naziva funkcija Lyapunova. Ako je $n = 1$, uobičajena funkcija Lyapunova je $V(x) = x^2$. Tada je

$$\dot{V}(x(t)) = 2x(t)\dot{x}(t) = 2x(t)f(x(t), x(t-h)).$$

Odavde sledi da je nejednakost $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ zadovoljena ako je $xf(x,y) \leq 0$ za dovoljno malo $|x|$ i $|y|$, što znači da mora biti $f(0,y) \equiv 0$. Ovaj uslov znatno sužava klasu jednačina koje ovom metodom mogu biti razmatrane, što je osnovni problem primene metode Lyapunova na funkcionalne diferencijalne jednačine.

B.S. Razumikhin [149] je modifikovao ovaj pristup i učinio ga primenljivijim i jednostavnijim od dotadašnje primene funkcionala Lyapunova.

Objasnimo osnovnu ideju Razumikhina. Da bismo pokazali da trajektorija rešenja koja polazi iz male okoline trivijalnog rešenja u toj okolini ostaje i u budućnosti, potrebno je da je $\dot{V}(x(t)) \leq 0$. Medjutim, nije neophodno da $V(x(t))$ bude opadajuća sve vreme. Dovoljno je da trajektorija koja odgovara rešenju ne izlazi iz okoline trivijalnog rešenja. Dakle, ako je okolina definisana nejednakošću $V(x(t)) < \delta, (\delta = const. > 0)$, bilo bi dovoljno zahtevati da je $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ kad je $V(x(t)) = \delta$ i $V(x(t-h)) < \delta$, gde poslednja nejednakost opisuje ponašanje trajektorije stabilnog rešenja u početnom trenutku. Zato, za stabilnost trivijalnog rešenja uslov $xf(x,y) \leq 0$ ne mora biti zadovoljen za svako dovoljno malo $|x|$ i $|y|$, već samo za one x i y za koje je $|y| < |x|$. Ovaj uslov znatno proširuje klasu jednačina (1.19) čiju stabilnost možemo ispitati korišćenjem funkcije Lyapunova.

Preciznija formulacija ove ideje data je sledećom teoremom koja se može naći u [135].

Teorema 1.5.4 *Neka postoji funkcija Lyapunova $V : G \to \mathbb{R}$ takva da je $V(y) < V(x)$, za $x, y \in G$ i*

$$(gradV(x), f(x, y)) \leq 0.$$

Tada je trivijalno rešenje jednačine (1.19) stabilno.

Metoda Razumikhina u stohastičkom slučaju

Ideju Razumikhina je na stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine proširio X. Mao[23] 1996. godine u svom radu [117]. Od tada počinje ekspanzija primene ove metode na različite tipove stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina, na primer u radovima Mao [118, 119], Janković [59, 143], Peng [145, 146], Shen [159], Liu [104], Wu [173, 175] i mnogim drugim.

Za dokazivanje stabilnosti rešenja jednačine (1.16) primenom metode Lyapunova, na osnovu Teoreme 1.5.3 neophodno je da je $ELV(x_t, t) \leq 0$ za početni uslov $x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ i svako $t \geq 0$. Kao i u determinističkom slučaju, to znači da njeni koeficijenti $f(t, x_t)$ i $g(t, x_t)$ moraju zadovoljiti neke stroge uslove kako bi stabilnost bila dokazana. Dakle, ovakav pristup u ispitivanju stabilnosti se može primeniti na usku klasu jednačina oblika (1.16). Mao, motivisan idejom Razumikhina za detreministički slučaj, primećuje da uslov $ELV(x_t, t) \leq 0$ ne mora biti zadovoljen za svako $x_t = \{x(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$, već samo za one koji zadovoljavaju tzv. *uslov Razumikhina*. Bazirane na ovoj ideji, nastale su *teoreme tipa Razumikhin* koje se mogu naći, na primer u [125].

Teorema 1.5.5 (Mao, [125]) *Neka su date konstante $\lambda, p, c_1, c_2 > 0$, $q > 1$ i neka postoji funkcija $V(t, x) \in C^{1,2}([-\tau, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ tako da je*

$$c_1|x|^p \leq V(t, x) \leq c_2|x|^p, \quad (t, x) \in [-\tau, \infty) \times \mathbb{R}^d.$$

Štaviše, neka je

$$ELV(t, \varphi) \leq -\lambda\, EV(t, \varphi(0)),$$

za svako $t \geq 0$ i $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ koje zadovoljava uslov Razumikhina

$$EV(t + \theta, \varphi(\theta)) < q\, EV(t, \varphi(0)), \qquad -\tau \leq \theta \leq 0.$$

Tada, za svako $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ važi

$$E|x(t; \xi)|^p \leq \frac{c_2}{c_1} E||\xi||^p e^{-\gamma t} \quad t \geq 0,$$

gde je $\gamma = \min\{\lambda, \frac{\log q}{\tau}\}$, tj. trivijalno rešenje jednačine (1.16) je eksponencijalno L^p-stabilno.

Sledeća teorema daje vezu izmedju skoro izvesne i L^p-eksponencijalne stabilnosti.

[23] Xuerong Mao, 1957– , kineski matematičar

Teorema 1.5.6 (Mao, [125]) *Neka je $p \geq 1$, $K > 0$ i neka važe svi uslovi Teoreme 1.5.5. Ako za svako rešenje $x(t)$ jednačine (1.16) važi*

$$E(|f(t, x_t)|^p + |g(t, x_t)|^p) \leq K \sup_{-\tau \leq t \leq 0} E|x(t + \theta)|^p, \quad t \geq 0,$$

tada je

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log |x(t; \xi)| \leq -\frac{\gamma}{p} \quad s.i.,$$

odnosno, trivijalno rešenje jednačine (1.16) je skoro izvesno eksponencijalno stabilno.

1.6 Elementarne, integralne i nejednakosti sa matematičkim očekivanjem

U ovom poglavlju su navedene neke elemenarne nejednakosti, integralna nejednakost Gronwall–Bellmana i neke nejednakosti sa matematičkim očekivanjem, koje će biti korišćene prilikom dokazivanja glavnih rezultata.

Elementarne nejednakosti [133] koje će biti korišćene su:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^p \leq (n^{p-1} \vee 1) \sum_{i=1}^{n} a_i{}^p, \quad a_i \geq 0,\, p > 0; \tag{1.20}$$

$$|a + b|^p \leq \frac{|a|^p}{(1-\varepsilon)^{p-1}} + \frac{|b|^p}{\varepsilon^{p-1}}, \quad a, b \in \mathbb{R}^n,\, 0 < \varepsilon < 1,\, p > 0; \tag{1.21}$$

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b, \quad a, b \geq 0,\, \alpha \in [0, 1]; \tag{1.22}$$

$$a^{p-i} b^i \leq \frac{(p-i)\varepsilon}{p} a^p + \frac{i}{p\varepsilon^{\frac{p-i}{i}}} b^p, \quad \varepsilon > 0,\, a, b \geq 0,\, i = 1, 2,\, p \geq i; \tag{1.23}$$

$$a^\alpha b^\beta \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} a^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} b^{\alpha+\beta}, \quad a, b, \alpha,\, \beta > 0. \tag{1.24}$$

Poznato je da postoji više verzija Gronwall–Bellmanove nejednakosti. Za potrebe daljeg razmatranja navodi se sledeća verzija, koja će biti eksplicitno korišćena, a čiji se dokaz može naći u [125].

Teorema 1.6.1 *Neka je $T > 0$ i $c \geq 0$. Neka je $u(\cdot)$ ograničena nenegativna Borelova funkcija definisana na $[0, T]$ i $v(\cdot)$ nenegativna integrabilna funkcija na $[0, T]$. Ako je*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s) u(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

tada je

$$u(t) \leq c\, e^{\int_0^t v(s) ds}, \quad t \in [0, T].$$

U nastavku će biti navedene neke od najpoznatijih nejednakosti za matematičko očekivanje, a koje će biti korišćene pri dokazivanju glavnih rezultata.

- **Nejednakost Chebysheva:** Neka slučajna promenljiva X ima momenat reda r, $r \in \mathbb{N}$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}. \tag{1.25}$$

- **Nejednakost Lyapunova:** Ako je X slučajna promenljiva za koju je $E|X|^t < \infty$ i $0 < s < t$ realni brojevi, tada je

$$(E|X|^s)^{1/s} \leq (E|X|^t)^{1/t}. \tag{1.26}$$

- **Nejednakost Höldera:** Ako su p i q realni brojevi, takvi da je $1 < p, q < \infty$ i $1/p + 1/q = 1$, i ako za slučajne promenljive X i Y važi $E|X|^p < \infty$, $E|Y|^q < \infty$, tada je

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q}. \tag{1.27}$$

- **Nejednakost Jensena:** Neka je $g = g(x)$ konveksna Borelova funkcija i X slučajna promenljiva za koju je $E|X| < \infty$. Tada je

$$g(EX) \leq Eg(X). \tag{1.28}$$

Glava 2

Stabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa konačnim kašnjenjem

U ovoj glavi se razmatra skoro izvesna i L^p-stabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačna sa konačnim kašnjenjem. Preciznije, ispituje se stabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina sa konačnim promenljivim vremenskim kašnjenjem i perturbovanih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa konačnim kašnjenjem. U Poglavlju 2.1, koje je uvodnog karaktera, izložena je motivacija za uvodjenje pojma opšte stabilnosti, tj. stabilnosti u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju (decay–propadanje, eng.). Poglavlje 2.2 se odnosi na ispitivanje opšte skoro izvesne i L^p-stabilnosti stohastičkih diferencijalnih jednačina sa promenljivim vremenskim kašnjenjem. U Sekciji 2.2.1 se za ovo ispitivanje koristi metoda Lyapunova. Posebno se diskutuje slučaj kada je decay-funkcija konkavna, uz osvrt na polinomijalnu i logaritamsku decay-funkciju. Sekcija 2.2.2 sadrži posledice i adekvatne primere izloženih rezultata. U Poglavlju 2.3 se razmatra eksponencijalna skoro izvesna i L^p-stabilnost perturbovanih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina, sa naglaskom na jednostavnost provere dobijenih uslova. Kao specijalan slučaj, u Sekciji 2.3.1 se diskutuju uslovi za uniformnu stabilnost u odnosu na period kašnjenja perturbovanih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa promenljivim vremenskim kašnjenjem, konstantnim kašnjenjem i bez kašnjenja.

2.1 Uvodni pojmovi

Funkcionalne diferencijalne jednačine imaju veliku ulogu u primenama matematike u inženjerstvu, tako da su predmet interesovanja mnogih naučnika. Zbog fundamentalnih postavki problema koji se modeliraju funkcionalnim diferencijalnim jednačinama, posebno treba istaći radove Halea [42, 43] i Kolmanovskog [77, 78]. Fizički sistem, u kome nepoznati proces $x(t)$ zavisi od vremenskog kašnjenja, modelira se funkcionalnom diferencijalnom jednačinom oblika

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0,$$

pri čemu je $x_t = \{x(t+\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\}$ (za više detalja videti [77]). Zbog prisustva slučajnih uticaja, ovakvi sistemi se realanije opisuju stohastički perturbovanom funkcionalnom diferencijalnom jednačinom oblika

$$dx(t) = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)dw(t) \tag{2.1}$$

gde je $\xi = \{\xi(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\}$ zadati početni uslov, funkcionali $f : \mathbb{R}_+ \times C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ i $g : \mathbb{R}_+ \times C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times m}$ su Borel-merljivi, a $w(t)$ je m-dimenzionalno Brownovo kretanje. S obzirom da je početni uslov definisan na konačnom intervalu $[-\tau, 0]$ jednačina (2.1) predstavlja *stohastičku funkcionalnu diferencijalnu jednačinu (SFDJ) sa konačnim kašnjenjem.*

Oblast od posebne važnosti za stohastičko modeliranje stohastičkim funkcionalnim diferencijalnim jednačinama je automatska kontrola stohastičkih sistema, pri čemu je naglasak na analizi stabilnosti stohastičkih modela (videti [77, 78]). Zbog toga je bitno istražiti kako perturbacija utiče na stabilnost sistema kao i koliku perturbaciju sistem može da podnese, a da i dalje bude stabilan.

U biologiji, fizici, medicini i stohastičkoj kontroli procesa u ekspanziji je proučavanje problema koji zahtevaju ispitivanje L^p-stabilnosti i skoro izvesne stabilnosti. Postoji brojna literatura koja pokriva eksponencijalnu stabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina (SDJ), na primer, Arnold [3, 4, 5, 6], Chappell [16], Mao [112, 114, 115, 116, 117, 118, 121, 125], Kolmanovskii [75, 76, 77], Liu [101, 102, 103, 104], Shaikhet [155, 156, 158]. Medjutim, dobro je poznato da nisu svi sistemi eksponencijalno stabilni, ali da oni mogu biti stabilni u odnosu na neku drugu funkciju, tzv. decay-funkciju, koja sporije opada ka nuli od eksponencijalne funkcije. Navedimo dva primera kao motivaciju za proširivanje koncepta eksponencijalne stabilnosti stohastičkih diferencijalnih jednačina konceptom opšte stabilnosti, tj. stabilnosti u odnosu na neku decay-funkciju (videti [102]).

Primer 2.1.1 Neka je data jednodimenzionalna SDJ

$$dx(t) = \frac{p}{1+t}\,x(t)dt + (1+t)^{-p}dw(t), \quad t \geq 0,$$

pri čemu je početni uslov $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_0$-merljiva slučajna promenljiva sa konačnim momentom drugog reda. Takodje, neka je konstanta $p > 1/2$ i w jednodimenzionalno Brownovo kretanje. Primenom formule Itôa(Teorema 1.3.5), jednostavno se dokazuje da je njeno rešenje

$$x(t) = (x_0 + w(t))(1+t)^{-p}, \quad t \geq 0.$$

Kako je $Ew^2(t) = t$, to je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log E\,x^2(t; x_0)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log(Ex_0^2 + t) - 2p\log(1+t)}{t} = 0_-$$

Prema tome, rešenje nije srednje kvadratno eksponencijalno stabilno. Nasuprot tome, za $p > 1/2$ se može pokazati da je rešenje srednje kvadratno stabilno u odnosu na polinomijalnu funkciju, jer je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log E\,x^2(t; x_0)}{\log t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\log(Ex_0^2 + t) - 2p\log(1+t)}{\log t} \leq -(2p-1).$$

Primer 2.1.2 Data je skalarna linearna SDJ,

$$dx(t) = \frac{x(t)}{(1+t)\log(1+t)}\, dt + e^{-t}x(t)dw(t), \quad t \geq 0,$$

pri čemu je početni uslov $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_0$-merljiva slučajna promenljiva sa konačnim momentom drugog reda, a $w(t)$ je jednodimenzionalno Brownovo kretanje. Rešenje jednačine je oblika

$$x(t) = x_0 \exp\left\{\int_0^t \left[-\frac{1}{(1+s)\log(1+s)} - \frac{1}{2}\, e^{-2s}\right] ds + \int_0^t e^{-s}dw(s)\right\}.$$

Na osnovu Leme 1.3.1, sledi

$$\log E\, x^2(t; x_0) = \log E\, x_0^2 - 2\int_0^t \frac{1}{(1+s)\log(1+s)} ds.$$

Odavde se dobija,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log E\, x^2(t; x_0)}{\log t} = 0,$$

jer je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log\log(1+t)}{\log t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{(1+t)\log(1+t)} = 0$$

Drugim rečima, rešenje u ovom slučaju nije srednje kvadratno stabilno u odnosu na polinomijalnu funkciju, ali jeste u odnosu na logaritamsku funkciju jer je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \frac{1}{(1+s)\log(1+s)} ds}{\log\log t} = 1,$$

odnosno,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log E\, x(t; x_0)^2}{\log\log t} \leq -2.$$

Postoji brojna literatura koja se bavi slabijim vidovima stabilnosti stohastičkih sistema. Prvi originalan rad na ovu temu je dao Khasminskii [48] razmatrajući stabilnost stohastičkog sistema u odnosu na funkciju koja nije eksponencijalna 1980. godine. Početkom devedesetih godina, Mao [112, 114] izučava polinomijalnu stabilnost za klasu SDJ Itôa, a potom i polinomijalnu skoro izvesnu stabilnost za klasu perturbovanih SDJ u odnosu na semimartingale u [115]. Ubrzo je koncept polinomijalne stabilnosti uopšten na stabilnost u odnosu na opštu decay-funkciju. Za više detalja pogledati, na primer, Mao [123, 125], Liu i Mao [103], Caraballo *et al.* [15], Wu *et al.* [173].

Opšti tip stabilnosti ili *stabilnost u odnosu na opštu decay-funkciju* znači da brzina kojom rešenje opada ka nuli može biti različita. Uobičajeno je da se razmatra eksponencijalna stabilnost, tj. kada proizvoljno rešenje eksponencijalno brzo opada ka nuli. Medjutim, kako se vidi iz prethodna dva primera, ukoliko se ne može pokazati eksponencijalna stabilnost, u opštem slučaju ne znači da je sistem nestabilan, već da se sporije stabilizuje, što je u datim primerima polinomijalno, odnosno logaritamski brzo.

Uvedimo definicije L^p-stabilnosti i skoro izvesne stabilnosti u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju.

Definicija 2.1.1 *Neka je funkcija* $\lambda \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ *rastuća,* $\lambda(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$. *Jednačina (2.1) (tj. trivijalno rešenje jednačine (2.1)) je* L^p*-stabilno reda* γ *u odnosu na decay-funkciju* $\lambda(t)$ *ako postoji par konstanata* $\gamma > 0$ *i* $c(\xi) > 0$*, tako da*

$$E|x(t;\xi)|^p \leq c(\xi)\cdot\lambda^{-\gamma}(t), \quad t \geq 0$$

za bilo koje $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$*, odnosno,*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma.$$

Jednačina (2.1) je skoro izvesno stabilna reda γ *u odnosu na decay-funkciju* $\lambda(t)$ *ako je*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln |x(t;\xi)|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma \quad s.i.$$

Očigledno, ako je decay-funkcija $\lambda(t)$ jednaka e^t, $1+t$ ili $\ln(1+t)$ dobija se eksponencijalna, polinomijalna ili logaritamska L^p-stabilnost i skoro izvesna stabilnost, respektivno.

2.2 Stohastičke diferencijalne jednačine sa promenljivim vremenskim kašnjenjem

U mnogim situacijama iz realnog života, promene sistema su uslovljene kako trenutnim stanjem, tako i stanjima sistema u periodu koji prethodi datom trenutku. Ako te promene zavise od svih stanja sistema u toku prethodnog perioda fiksne dužine, za matematičko modeliranje takvih pojava se koriste SFDJ (1.16) sa fiksnim kašnjenjem, o kojima je bilo reči u Poglavlju 1.5. Medjutim, često je priroda zavisnosti od prošlosti nekog sistema takva da se stanje sistema adekvatnije opisuje nekom funkcijom vremena. Takvi sistemi se matematički modeliraju pomoću stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem.

Postoji opsežna literatura kako o determinističkim, tako i o stohastičkim diferencijalnim jednačinama sa kašnjenjem i o njihovoj primeni, izmedju ostalog, u populacionoj dinamici, medicini i teoriji materijala sa memorijom. Tako se, na primer, rast ćelijske populacije u okruženju koje je izloženo slučajnim uticajima može opisati SDJ sa vremenski zavisnim kašnjenjem,

$$\begin{aligned} &dx(t) = (\rho_0 x(t) + \rho_1 x(t-\delta(t)))dt + \beta x(t)dw(t), \ t \geq 0, \\ &x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \end{aligned}$$

gde $x(t)$ predstavlja veličinu populacije u trenutku t, a $x(t-\delta(t))$ u trenutku $t-\delta(t)$. U ovom modelu se pretpostavlja da, kada otpočne, ćelijska deoba nije trenutna. U tom smislu ρ_0 predstavlja stopu trenutnog rasta populacije, ρ_1 stopu zakasnelog rasta populacije, dok se δ može interpretirati kao vreme ćelijske deobe.

Kao i ranije, pretpostavlja se da su sve slučajne promenljive definisane na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ sa prirodnom filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove. Za fiksirano $\tau > 0$, $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ predstavlja familiju svih neprekidnih funkcija $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^d$, $||\varphi|| = \sup_{s\in[-\tau,0]} |\varphi(s)|$. Za $p > 0$, neka je $L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d))$ familija svih $\mathcal{F}_0$-adaptiranih slučajnih promenljivih $\xi = \{\xi(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\}$ iz $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, tako da je $E||\xi||^p < \infty$.

Imajući u vidu uvedene oznake, razmatra se (SDJ) sa vremenski zavisnim kašnjenjem,

$$dx(t) = f(t, x(t), x(t-\delta(t)))dt + g(t, x(t), x(t-\delta(t)))dw(t),\ t \in [0, T], \tag{2.2}$$

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \tag{2.3}$$

gde je $\delta : [0, T] \to [0, \tau]$ Borelova funkcija, tzv. *funkcija kašnjenja*, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ i $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ su Borelove funkcije, $x(t)$ je d-dimenzionalan proces koji opisuje promenu stanja sistema, a za početni uslov $\xi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ se pretpostavlja da je $\mathcal{F}_0$-merljiv i $E||\xi||^2 < \infty$.

Definicija 2.2.1 *Za d-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ se kaže da je rešenje jednačine (2.2) sa početnim uslovom (2.3) ako je s.i. neprekidan, $\mathcal{F}_t$-adaptiran, $\int_0^T |f(t, x(t), x(t-\delta(t)))|dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |g(t, x(t), x(t-\delta(t)))|^2 dt < \infty$ s.i., $x_0 = \xi$ s.i. i za svako $t \in [0, T]$ integralni oblik jednačine (2.2) važi s.i.*

Jedinstvenost rešenja jednačine (2.2) se definiše na isti način kao u Definiciji 1.5.2.

Dovoljni uslovi za egzistenciju i jedinstvenost rešenja jednačine (2.2) su dati sledećom teoremom koja se može naći u [125].

Teorema 2.2.1 (Mao, [125]) *Ako koeficijenti f i g jednačine (2.2) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. ako za svako $n \geq 1$ postoji pozitivna konstanta K_n tako da za svako $t \in [0, T]$ i $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^d$ tako da je $|x| \vee |y| \vee |\tilde{x}| \vee |\tilde{y}| \leq n$, važi*

$$|f(t, x, y) - f(t, \tilde{x}, \tilde{y})|^2 \vee |g(t, x, y) - g(t, \tilde{x}, \tilde{y})|^2 \leq K_n(|x - \tilde{x}|^2 + |y - \tilde{y}|^2),$$

i ako postoji konstanta $K > 0$ tako da za svako $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ važi

$$|f(t, x, y)|^2 \vee |g(t, x, y)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2),$$

tada postoji jedinstveno skoro izvesno neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (2.2). Pored toga, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E \sup_{-\tau\leq t\leq T} |x(t)|^p < \infty$.

U nastavku će biti razmatrano uopštenje jednačine (2.2), tj. *stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina (SFDJ) sa promenljivim vremenskim kašnjenjem*,

$$\begin{aligned} dx(t) = {} & F(t, x(t), x(\rho_1(t)), \ldots, x(\rho_n(t)))\, dt \\ & + G(t, x(t), x(\rho_1(t)), \ldots, x(\rho_n(t)))\, dw(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

sa zadatim početnim uslovom $x_0 = \xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d))$. Koeficijenti $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \to \mathbb{R}^d$ i $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \to \mathbb{R}^{d\times m}$ su Borel merljivi, $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je m-dimenzionalno Brownovo kretanje, $x(t)$ je nepoznati stohastički proces, a $\rho_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ neprekidno diferencijabilne funkcije tako da je

$$\rho_i(t) \leq t, \quad \rho_i'(t) \geq 1, \quad t \geq 0. \tag{2.5}$$

Odavde je

$$t + \rho_i(0) \leq \rho_i(t), \quad \rho_i^{-1}(t) \leq t - \rho_i(0), \quad t \geq 0, \tag{2.6}$$

gde je $\rho_i^{-1}(\cdot)$ inverzna funkcija funkcije $\rho_i(\cdot)$. Takodje, neka je $\tau = \max\{-\rho_i(0), i = 1, \ldots, n\}$.

Analogno Teoremi 2.2.1, za jednačinu (2.4) se može iskazati teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja ako funkcije $F(t, x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ i $G(t, x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ zadovoljavaju uniforman Lipshitzov uslov i uslov linearnog rasta po promenljivama $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, tj. da pri ovim uslovima postoji jedinstveno rešenje $x(t; \xi), t \in [-\tau, \infty)$ jednačine (2.4) tako da je $E \sup_{t\in[-\tau,\infty)} |x(t; \xi)|^p < \infty$ za $p \geq 2$.

Uobičajeno, pretpostavlja se da je $F(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ i $G(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, da bi jednačina (2.4) imala trivijalno rešenje $x(t; 0) \equiv 0$.

U nastavku, za jednačinu (2.4) će biti razmatrana L^p-stabilnost u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju primenom metode Lyapunova. Rezultati Sekcije 2.2.1 i Sekcije 2.2.2 se mogu naći u radu [60], S. Janković, G. Pavlović, *Moment decay rates of stochastic differential equations with time-varying delay*, Filomat 24(1) (2010) 115–132.

2.2.1 Opšta stabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim vremenskim kašnjenjem

S obzirom da su SFDJ sa vremenski zavisnim kašnjenjem nezaobilazne u opisivanju mnogih fizičkih procesa, nije iznenadjujuće veliko interesovanje za ispitivanje opšte stabilnosti ovog tipa jednačina. Ovde navodimo samo neke od autora koji se bave ovom tematikom: Mao [113], Liu *et al.* [102, 103, 107], Zhou *et al.* [184].

Motivacija za rezultate koji će biti izloženi u nastavku bila je da se postave uslovi koji garantuju opštu L^p i skoro izvesnu stabilnost jednačine (2.4), koji će biti jednostavniji za primenu. U tu svrhu je korišćena metoda Lyapunova, o čemu je već bilo reči u Poglavlju 1.4.1. Napomenimo da su Liu i Chen u [102] razmatrali sličan problem, ali su uslovi stabilnosti potpuno drugačiji od uslova koji će ovde biti izloženi.

S obzirom da će se primenjivati metoda Lyapunova, uvodi se pojam diferencijalnog operatora definisanog u odnosu na jednačinu (2.4).

Neka je $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ familija funkcija $V(t, x)$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda po t i drugog reda po x, respektivno. Za svako $V(t, x) \in$

$C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$, definiše se operator $L\tilde{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \to \mathbb{R}$ tako da je

$$\begin{aligned} &L\tilde{V}(t, x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\quad := V_t(t,x) + V_x(t,x)\, F(t, x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\, tr[G^T(t, x, y_1, y_2, \dots, y_n)\, V_{xx}(t,x)\, G(t, x, y_1, y_2, \dots, y_n)], \end{aligned} \tag{2.7}$$

gde je $x \in \mathbb{R}^d$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{d\times n}$, $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$, $V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d}\right)$ i $V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{d\times d}$.

Osnovni problem pri ispitivanju stabilnosti rešenja je kako odabrati funkciju $\lambda(t)$. Očigledno je da koeficijenti prenosa i difuzije razmatrane jednačine sugerišu izbor decay-funkcije. Na primer, ako $L\tilde{V}$ sadrži činilac koji zavisi od $\lambda(t)$, bilo bi logično za decay-funkciju izabrati baš $\lambda(t)$. Primeri koji ilustruju ovakav izbor decay-funkcije mogu se naći u [14, 101, 102, 103] i predstavljaju motivaciju za rezultate dobijene u ovom poglavlju.

Najpre će biti uvedene neke opšte pretpostavke u vezi sa decay-funkcijom, koercitivnim članom i funkcijom V. Preciznije, pretpostavlja se da postoje funkcije λ, θ i V tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$(\mathbf{H_1})$ Decay-funkcija $\lambda \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ je strogo rastuća ($\lambda'(t) > 0$), $\lambda(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$ i $\lambda(0) = 1$.

$(\mathbf{H_2})$ Funkcija $\theta \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ je takva da je $\theta(t) = o(\lambda^\delta(t))$, $t \to \infty$ za proizvoljno $\delta > 0$, gde je δ koercitivni član.

$(\mathbf{H_3})$ Postoje konstante $p > 0$ i $c_1, c_2 > 0$ tako da funkcija $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ zadovoljava uslov

$$c_1|x|^p \le V(t,x) \le c_2|x|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d. \tag{2.8}$$

U narednim tvrdjenjima, osim opšte pretostavke $(\mathbf{H_1})$, zahtevaće se neki dodatni uslovi za decay-funkciju $\lambda(t)$.

Teorema 2.2.2 *Neka važe pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *i* $(\mathbf{H_3})$ *za funkcije* λ, θ *i* V, *respektivno, i neka je* $0 < \lambda'(t) \le \lambda(t)$ *za* $t \ge 0$. *Takodje, neka postoje konstante* $\mu > 0$, $\nu_1, \dots, \nu_n > 0$ *i* $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0$, *gde je* $0 \le \frac{c_2}{c_1}\sum_{i=1}^n \lambda_i < \lambda_0$, *tako da važi*

$$L\tilde{V}(t, x, y_1, \dots, y_n) \le -\lambda_0 V(t,x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(t) V(t, y_i) + \theta(t) \cdot \lambda^{-\mu}(t) \tag{2.9}$$

za svako $x, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^d$ *i* $t \ge 0$. *Tada je jednačina (2.4)* L^p*-stabilna u odnosu na* $\lambda(t)$, *odnosno,*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln \lambda(t)} \le -\left[\mu \wedge \nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_n \wedge \left(\frac{c_1}{c_2}\lambda_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\right] \tag{2.10}$$

za svako $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d))$.

Dokaz. Zbog jednostavnosti, u nastavku će se koristiti zapis $x(t)$ umesto $x(t;\xi)$ za označavanje rešenja jednačine (2.4) sa zadatim početnim uslovom ξ.

Najpre je neophodno dodefinisati funkciju $\lambda(t)$ tako da je $\lambda(t)=1$ za $-\tau\le t\le 0$. Ako označimo sa $u(t)=\ln\lambda(t)$, onda je $u(t)=0$ za $-\tau\le t\le 0$ i $0<u'(t)\le 1$ za $t\ge 0$. Iako $\lambda'(t)$ i $u'(t)$ imaju prekid u tački $t=0$, u nastavku će se podrazumevati, bez posebnog naglašavanja, da je $\lambda'(0)=\lambda'(0+)$ i $u'(0)=u'(0+)$.

Neka je $\gamma=\mu\wedge\nu_1\wedge\ldots\wedge\nu_n\wedge\left(\frac{c_1}{c_2}\lambda_0-\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)$ i $\varepsilon\in(0,\gamma)$ proizvoljno. Primenom formule Itôa na $e^{(\gamma-\varepsilon)u(t)}V(t,x(t))$ dobija se

$$
\begin{aligned}
&e^{(\gamma-\varepsilon)u(t)}V(t,x(t))\\
&\quad=V(0,x(0))+\int_0^t(\gamma-\varepsilon)e^{(\gamma-\varepsilon)u(s)}u'(s)V(s,x(s))\,ds\\
&\qquad+\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(s)}L\tilde{V}(s,x(s),x(\rho_1(s)),\ldots,x(\rho_n(s)))\,ds\\
&\qquad+\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(s)}V_x(s,x(s))G(x(s),x(\rho_1(s)),\ldots,x(\rho_n(s)))\,dw(s).
\end{aligned}
$$

Na osnovu uslova (2.9) i činjenice da je $u'(t)\le 1$, dolazi se do sledeće relacije,

$$
\begin{aligned}
&Ee^{(\gamma-\varepsilon)u(t)}V(t,x(t))\\
&\quad\le EV(0,x(0))+(\gamma-\varepsilon-\lambda_0)E\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(s)}V(s,x(s))\,ds\\
&\qquad+\sum_{i=1}^n\lambda_iE\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(s)}V(s,x(\rho_i(s)))\,ds+\int_0^t\theta(s)\lambda^{\gamma-\varepsilon-\mu}(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Kako je $\gamma-\varepsilon-\mu<0$, iz pretpostavke $(\mathbf{H_2})$ sledi da postoji dovoljno malo δ tako da je $\theta(t)=o(\lambda^\delta(t))$ i $\int_0^\infty\theta(s)\lambda^{\gamma-\varepsilon-\mu}(s)\,ds<\infty$. Štaviše, primenom uslova (2.8) se dobija

$$
\begin{aligned}
&c_1Ee^{(\gamma-\varepsilon)u(t)}|x(t)|^p\\
&\quad\le Ee^{(\gamma-\varepsilon)u(t)}V(t,x(t))\\
&\quad\le c_2E||\xi||^p+[c_2(\gamma-\varepsilon)-c_1\lambda_0)]E\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(s)}|x(s)|^p\,ds\\
&\qquad+c_2\sum_{i=1}^n\lambda_iE\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(s)}|x(\rho_i(s))|^p\,ds+\int_0^\infty\theta(s)\lambda^{\gamma-\varepsilon-\mu}(s)\,ds.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Za ocenu integrala $E\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(s)}|x(\rho_i(s))|^p\,ds$, $i=1,\ldots,n$, koristiće se osobine (2.5) i (2.6) funkcije $\rho_i(t)$. Ako se uvede smena $\rho_i(s)=v$, tada je $v=\rho_i(s)\le s\le t$ i $dv=\rho_i'(s)\,ds\ge ds$. Sa druge strane, kako je $0\le s=\rho_i^{-1}(v)\le v-\rho_i(0)\le v+\theta$, sledi da je $-\tau\le v\le t$. Štaviše, s obzirom da je $\gamma-\varepsilon-\nu_i<0$, to je

$$
\begin{aligned}
E\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(s)}|x(\rho_i(s))|^pds&=E\int_0^t\lambda^{\gamma-\varepsilon-\nu_i}(s)|x(\rho_i(s))|^p\,ds\\
&\le E\int_{-\theta}^t\lambda^{\gamma-\varepsilon-\nu_i}(v)|x(v)|^p\,dv\\
&\le E||\xi||^p\tau+E\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(v)}|x(v)|^p\,dv.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Ova ocena zajedno sa (2.11) daje

$$
\begin{aligned}
&Ee^{(\gamma-\varepsilon)u(t)}|x(t)|^p \\
&\quad \le c(\xi,\varepsilon) + \left[\frac{c_2}{c_1}\Big(\gamma-\varepsilon+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)-\lambda_0\right] E\int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(s)}|x(s)|^p\,ds,
\end{aligned}
$$

gde je

$$
c(\xi,\varepsilon)=\frac{c_2}{c_1}(1+\tau\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)E||\xi||^p+\frac{1}{c_1}\int_0^\infty \theta(s)\lambda^{\gamma-\varepsilon-\mu}(s)\,ds<\infty.
$$

Imajući u vidu da je $\frac{c_2}{c_1}(\gamma-\varepsilon+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)-\lambda_0<0$, to je

$$
Ee^{(\gamma-\varepsilon)u(t)}|x(t)|^p\le c(\xi,\varepsilon),\quad t\ge 0,
$$

tj.

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln E|x(t)|^p}{u(t)}\le-(\gamma-\varepsilon).
$$

Traženi rezultat (2.10) se dobija kad $\varepsilon\to 0$. $\diamondsuit$

Može se primetiti da iako je $0<\lambda^{-\nu_i}(t)\le 1$ za $t\ge 0$, prisustvo člana $\lambda^{-\nu_i}(t)$ na desnoj strani relacije (2.9) je od ključne je važnosti u Teoremi 2.2.2 jer, u protivnom, ne bi mogla biti dokazana relacija (2.12).

Teorema 2.2.3 *Neka važe pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *i* $(\mathbf{H_3})$ *za funkcije* λ, θ *i* V, *respektivno, i neka je* $0<\lambda'(t)\le\lambda(t)$ *i* $\lambda(t+s)\le\lambda(t)\cdot\lambda(s)$ *za* $t,s\ge 0$. *Takodje, neka postoje konstante* $\mu>0$, $\nu_1,\ldots,\nu_n\ge 0$ *i* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\ge 0$, *gde je* $\mu>(\nu_1\vee\ldots\vee\nu_n)\ge 0$ *i* $0\le\frac{c_2}{c_1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)<\lambda_0$, *tako da uslov (2.9) važi za svako* $x,y_1,\ldots,y_n\in R^d$ *i* $t\ge 0$. *Tada je*

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln\lambda(t)}\le-(\mu\wedge\alpha^*) \tag{2.13}
$$

za svako $\xi\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_0,C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$, *pri čemu je* $\alpha^*\in\Big(0,\frac{c_1}{c_2}\lambda_0-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\Big)$ *jedinstveno rešenje jednačine*

$$
c_2\Big(\alpha+\lambda^{\alpha}(\tau)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\theta)\Big)-c_1\lambda_0=0. \tag{2.14}
$$

Dokaz. Neka je funkcija $\lambda(t)$ dodefinisana tako da je $\lambda(t)=1$ za $-\tau\le t\le 0$. Ako se uvede oznaka $u(t)=\ln\lambda(t)$, onda je $0<u'(t)\le 1$ i $u(t+s)\le u(t)+u(s)$ za $t,s\ge 0$.

Neka je

$$
h(\alpha):=c_2\Big(\alpha+\lambda^{\alpha}(\tau)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\theta)\Big)-c_1\lambda_0,\quad \alpha\ge 0.
$$

Kako je

$$h(0) = c_2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(\theta) - c_1 \lambda_0 < 0,$$

$$h\left(\frac{c_1}{c_2}\lambda_0 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(\tau)\right) = c_2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(\tau) \cdot \left(\lambda^{\frac{c_1}{c_2}\lambda_0 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(\tau)}(\tau) - 1\right) > 0$$

i $h'(\alpha) > 0$, sledi da postoji jedinstveno rešenje $\alpha^* \in \left(0, \frac{c_1}{c_2}\lambda_0 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(\tau)\right)$ jednačine $h(\alpha) = 0$, tj. jednačine (2.14).

Ako se za proizvoljno $\varepsilon \in (0, \mu - (\nu_1 \vee \ldots \vee \nu_n))$ primeni formula Itôa na $e^{(\mu-\varepsilon)u(t)}V(t, x(t))$, na osnovu uslova (2.8), (2.9) i činjenice da je $u'(t) \leq 1$, dobija se

$$\begin{aligned} c_1 E e^{(\mu-\varepsilon)u(t)} |x(t)|^p & \\ \leq c_2 E||\xi||^p + [c_2(\mu-\varepsilon) - c_1\lambda_0]\, E \int_0^t e^{(\mu-\varepsilon)u(s)} |x(s)|^p \, ds & \\ + c_2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E \int_0^t e^{(\mu-\varepsilon-\nu_i)u(s)} |x(\rho_i(s))|^p \, ds + \int_0^t \theta(s)\lambda^{-\varepsilon}(s)\, ds. & \end{aligned} \tag{2.15}$$

Uvodjenjem smene $v = \rho_i(s)$, ponavljanjem postupka iz (2.11) i iz činjenice da je $\mu - \varepsilon - \nu_i > 0$ dolazi se do sledeće ocene,

$$\begin{aligned} & E \int_0^t e^{(\mu-\varepsilon-\nu_i)u(s)} |x(\rho_i(s))|^p \, ds \\ & \leq E \int_{-\tau}^t e^{(\mu-\varepsilon-\nu_i)u(v+\tau)} |x(v)|^p \, dv \\ & \leq E \int_{-\tau}^t e^{(\mu-\varepsilon-\nu_i)(u(v)+u(\tau))} |x(v)|^p \, dv \\ & \leq \lambda^{\mu-\varepsilon-\nu_i}(\tau) E \int_{-\tau}^t e^{(\mu-\varepsilon-\nu_i)u(v)} |x(v)|^p \, dv \\ & \leq \lambda^{\mu-\varepsilon-\nu_i}(\tau) \left(E||\xi||^p \, \tau + E \int_0^t e^{(\mu-\varepsilon)u(v)} |x(v)|^p \, dv \right). \end{aligned}$$

Ova relacija zajedno sa (2.15) daje

$$\begin{aligned} & E e^{(\mu-\varepsilon)u(t)} |x(t)|^p \\ & \leq c(\xi, \varepsilon, \mu) \\ & + \left[\frac{c_2}{c_1}\Big(\mu - \varepsilon + \lambda^{\mu-\varepsilon}(\tau) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(\tau)\Big) - \lambda_0 \right] E \int_0^t e^{(\mu-\varepsilon)u(s)} |x(s)|^p \, ds, \end{aligned} \tag{2.16}$$

gde je

$$\begin{aligned} c(\xi, \varepsilon, \mu) = & \frac{c_2}{c_1} E||\xi||^p \Big(1 + \tau \lambda^{\mu-\varepsilon}(\tau) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(\tau)\Big) + \frac{1}{c_1} \int_0^\infty \theta(s)\lambda^{-\varepsilon}(s)\, ds \\ & < \infty. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Sada se mogu izdvojiti dva slučaja. Najpre, neka je $\mu \le \alpha^*$. Kako je

$$\frac{c_2}{c_1}\Big(\mu - \varepsilon + \lambda^{\mu-\varepsilon}(\tau)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\Big) - \lambda_0 = \frac{1}{c_1}h(\mu-\varepsilon) < \frac{1}{c_1}h(\alpha^*) = 0,$$

na osnovu (2.16) sledi da je

$$E|x(t)|^p \le c(\xi,\varepsilon,\mu)\cdot e^{-(\mu-\varepsilon)u(t)}, \quad t \ge 0.$$

Dakle, relacija (2.13) se dobija kad $\varepsilon \to 0$.

Neka je sada $\mu > \alpha^*$. Tada iz (2.9) sledi,

$$L\tilde{V}(t,x,y_1,\ldots,y_n) \le -\lambda_0 V(t,x) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(t)V(t,y_i) + \theta(t)\cdot\lambda^{-\alpha^*}(t)$$

za svako $x, y_1, \ldots, y_n \in R^d$ i $t \ge 0$. Ako se u (2.16) μ zameni sa α^*, dobija se

$$\begin{aligned} &Ee^{(\alpha^*-\varepsilon)u(s)}|x(t)|^p \\ &\le c(\xi,\varepsilon,\alpha^*) \\ &\quad + \left[\frac{c_2}{c_1}\Big(\alpha^* - \varepsilon + \lambda^{\alpha^*-\varepsilon}(\tau)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\Big) - \lambda_0\right] E\int_0^t e^{(\alpha^*-\varepsilon)u(s)}|x(s)|^p\,ds, \end{aligned}$$

gde je $c(\xi,\varepsilon,\alpha^*)$ oblika (2.17) sa α^* umesto μ. Zbog toga što je

$$\frac{c_2}{c_1}\Big(\alpha^* - \varepsilon + \lambda^{\alpha^*-\varepsilon}(\tau)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\Big) - \lambda_0 = \frac{1}{c_1}h(\alpha^*-\varepsilon) < \frac{1}{c_1}h(\alpha^*) = 0,$$

sledi da je

$$E|x(t)|^p \le c(\xi,\varepsilon,\alpha^*)\cdot e^{-(\alpha^*-\varepsilon)u(t)}, \quad t \ge 0.$$

Željena relacija (2.13) se dobija kad $\varepsilon \to 0$, čime je teorema dokazana. $\diamondsuit$

Za $\lambda(t) = e^t$, prethodna tvrdjenja daju dovoljne uslove eksponencijalne L^p-stabilnosti jednačine (2.4), odnosno,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{t} \le -\gamma.$$

U nastavku su date teoreme o L^p-stabilnosti u odnosu na konkavnu funkciju $\lambda(t)$, $(\lambda''(t) \le 0)$. Iako se naredne teoreme ne mogu primeniti za utvrdjivanje eksponencijalne L^p-stabilnosti, od značaja su za ispitivanje stabilnosti u odnosu na polinomijalnu i logaritamsku decay-funkciju (npr. $\lambda(t) = 1+t$, $\lambda(t) = \ln(1+t)$, $\lambda(t) = \ln\ln(1+t)$).

Teorema 2.2.4 *Neka važe pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *i* $(\mathbf{H_3})$ *za funkcije* λ, θ *i* V, *respektivno. Štaviše, neka je* $\lambda \in C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ *i* $\lambda''(t) \le 0$ *za* $t \ge 0$. *Takodje, neka* *postoje konstante* $\mu > 0$, $\nu_1, \ldots, \nu_n > 0$, $\eta_1, \ldots, \eta_n \geq 0$ *i* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, *pri čemu je* $0 \leq \frac{c_2}{c_1} \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda'^{\eta_i}(0) < \lambda_0$, *tako da je*

$$\begin{aligned} & L\tilde{V}(t, x, y_1, \ldots, y_n) \\ & \quad \leq -\lambda_0 V(t, x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(t) \lambda'^{\eta_i}(t) V(t, y_i) + \theta(t) \cdot \lambda^{-\mu}(t) \end{aligned} \tag{2.18}$$

za svako $x, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^d$ *i* $t \geq 0$. *Tada je jednačina (2.4)* L^p*-stabilna u odnosu na decay-funkciju* $\lambda(t)$, *odnosno, za svako* $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d))$ *važi*

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \to \infty} \frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln \lambda(t)} \\ & \quad \leq - \left[\mu \wedge \nu_1 \wedge \ldots \wedge \nu_n \wedge \Big(\frac{c_1}{c_2 \lambda'(0)} \lambda_0 - \frac{1}{\lambda'(0)} \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda'^{\eta_i}(0) \Big) \right]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Dokaz. Kao i ranije, pretpostavlja se da je $\lambda(t)$ dodefinisana tako da je $\lambda(t) = 1$, $-\tau \leq t \leq 0$. Takodje, uvodi se oznaka $u(t) = \ln \lambda(t)$, $-\tau \leq t < \infty$.

Neka je $\gamma = \mu \wedge \nu_1 \wedge \ldots \wedge \nu_n \wedge \Big(\frac{c_1}{c_2 \lambda'(0)} \lambda_0 - \frac{1}{\lambda'(0)} \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda'^{\eta_i}(0) \Big)$. Primenom formule Itôa i uslova (2.18), za proizvoljno $\varepsilon \in (0, \gamma)$ se dobija

$$\begin{aligned} & c_1 E e^{(\gamma-\varepsilon)u(t)} |x(t)|^p \\ & \quad \leq c_2 E||\xi||^p + c_2(\gamma - \varepsilon) E \int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(s)} u'(s) |x(s)|^p \, ds \\ & \quad -c_1 \lambda_0 E \int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(s)} |x(s)|^p \, ds \\ & \quad +c_2 \sum_{i=1}^n \lambda_i E \int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(s)} \lambda'^{\eta_i}(s) |x(\rho_i(s))|^p \, ds + \int_0^\infty \theta(s) \lambda^{\gamma-\varepsilon-\mu}(s) \, ds. \end{aligned} \tag{2.20}$$

S obzirom da je $u''(t) = (\lambda'(t)/\lambda(t))' = [\lambda''(t)\lambda(t) - \lambda'^2(t)]/\lambda^2(t) < 0$ za $t \geq 0$, sledi da $u'(t)$ opada. Dakle, $u'(t) \leq \lambda'(0)$ za $t \geq 0$. Takodje, $\lambda'(t) \leq \lambda'(0)\lambda(t)$ za $t \geq 0$ i $\lambda'(t) = 0$ za $t < 0$. Ako se uvede smena $v = \rho_i(s)$, onda je $\lambda'(s) \leq \lambda'(\rho_i(s))$ i $e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(s)} \leq e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(\rho_i(s))}$. Dakle,

$$\begin{aligned} & E \int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(s)} \lambda'^{\eta_i}(s) |x(\rho_i(s))|^p \, ds \\ & \quad \leq E \int_{-\tau}^0 e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(v)} \lambda'^{\eta_i}(v) |x(v)|^p \, dv + E \int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon-\nu_i)u(v)} \lambda'^{\eta_i}(v) |x(v)|^p \, dv \\ & \quad \leq \lambda'^{\eta_i}(0) E \int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(v)} |x(v)|^p \, dv. \end{aligned}$$

Na osnovu (2.20), dobija se

$$\begin{aligned} & E e^{(\gamma-\varepsilon)u(t)} |x(t)|^p \\ & \quad \leq c(\xi, \varepsilon) + \left[\frac{c_2 \lambda'(0)}{c_1} (\gamma - \varepsilon) + \frac{c_2}{c_1} \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda'^{\eta_i}(0) - \lambda_0 \right] E \int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)u(s)} |x(s)|^p \, ds, \end{aligned}$$

gde je

$$c(\xi,\varepsilon) = \frac{c_2}{c_1}E||\xi||^p + \frac{1}{c_1}\int_0^\infty \theta(s)\lambda^{\gamma-\varepsilon-\mu}(s)\,ds < \infty.$$

Kako je $\frac{c_2\lambda'(0)}{c_1}(\gamma-\varepsilon) + \frac{c_2}{c_1}\sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda'^{\eta_i}(0) - \lambda_0 < 0$, sledi da je

$$E|x(t)|^p \le c(\xi,\varepsilon)\cdot e^{-(\gamma-\varepsilon)u(t)}, \quad t \ge 0.$$

Dakle, teorema je dokazana kad $\varepsilon \to 0$. $\diamondsuit$

Teorema 2.2.5 *Neka važe pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *i* $(\mathbf{H_3})$ *za funkcije* λ, θ *i* V, *respektivno, i neka je* $\lambda \in C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$, $\lambda''(t) \le 0$ *i* $\lambda(t+s) \le \lambda(t)\cdot\lambda(s)$ *za* $t,s \ge 0$. *Takodje, neka postoje konstante* $\mu > 0$, $\nu_1,\ldots,\nu_n \ge 0$, $\eta_1,\ldots,\eta_n \ge 0$ *i* $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n \ge 0$ *gde je* $\mu > (\nu_1 \vee \ldots \vee \nu_n)$ *i* $0 \le \frac{c_2}{c_1}\sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\lambda'^{\eta_i}(0) < \lambda_0$ *tako da uslov (2.18) važi za svako* $x, y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}^d$ *i* $t \ge 0$. *Tada, za svako* $\xi \in L^p(\Omega,\mathcal{F}_0,C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$ *važi*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln\lambda(t)} \le -(\mu\wedge\alpha^*), \tag{2.21}$$

gde je $\alpha^* \in \Big(0, \frac{c_1}{c_2\lambda'(0)}\lambda_0 - \frac{1}{\lambda'(0)}\sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\lambda'^{\eta_i}(0)\Big)$ *jedinstveno rešenje jednačine*

$$c_2\Big(\lambda'(0)\cdot\alpha + \lambda^\alpha(\tau)\sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\lambda'^{\eta_i}(0)\Big) - c_1\lambda_0 = 0. \tag{2.22}$$

Dokaz. Neka je

$$h(\alpha) := c_2\Big(\lambda'(0)\cdot\alpha + \lambda^\alpha(\tau)\sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\lambda'^{\eta_i}(0)\Big) - c_1\lambda_0, \quad \alpha \ge 0.$$

Nije teško proveriti da je

$$h(0) < 0, \quad h\left(\frac{c_1}{c_2\lambda'(0)}\lambda_0 - \frac{1}{\lambda'(0)}\sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\lambda'^{\eta_i}(0)\right) > 0$$

i $h'(\alpha) > 0$, što znači da jednačina $h(\alpha) = 0$, odnosno, jednačina (2.22), ima jedinstveno rešenje $\alpha^* \in \Big(0, \frac{c_1}{c_2\lambda'(0)}\lambda_0 - \frac{1}{\lambda'(0)}\sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\lambda'^{\eta_i}(0)\Big)$.

Zbog konkavnosti funkcije $\lambda(t)$, odnosno $\lambda''(t) < 0$, sledi da su $\lambda'(t)$ i $u'(t)$ opadajuće funkcije. Takodje, može se zaključiti da je $\lambda'(t) < \lambda'(0)\lambda(t)$ i $u'(t) < \lambda'(0)$. Na osnovu ovih činjenica i postupka korišćenog u dokazu Teoreme 2.2.3, za $\mu \le \alpha^*$ i proizvoljno $\varepsilon \in (0, \mu - (\nu_1 \vee \ldots \vee \nu_n))$ sledi

$$\begin{aligned} &Ee^{(\mu-\varepsilon)u(t)}|x(t)|^p \\ &\le c(\xi,\varepsilon,\mu) + \left[\frac{c_2}{c_1}\Big(\lambda'(0)(\mu-\varepsilon) + \lambda^{\mu-\varepsilon}(\tau)\sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau)\lambda'^{\eta}(0)\Big) - \lambda_0\right] \\ &\qquad\times E\int_0^t e^{(\mu-\varepsilon)u(s)}|x(s)|^p\,ds, \end{aligned}$$

gde je

$$c(\xi,\varepsilon,\mu)=\frac{c_2}{c_1}\,E||\xi||^p+\frac{1}{c_1}\int_0^\infty \theta(s)\lambda^{-\varepsilon}(s)\,ds<\infty.$$

Kako je činilac koji množi integral $E\int_0^t e^{(\mu-\varepsilon)u(s)}|x(s)|^p\,ds$ jednak $\frac{1}{c_1}h(\mu-\varepsilon)<\frac{1}{c_1}h(\alpha^*)=0$, sledi da je $E|x(t)|^p\le c(\xi,\varepsilon,\mu)\cdot e^{-(\mu-\varepsilon)u(t)}$, $t\ge 0$. Teorema je dokazana kad $\varepsilon\to 0$.

Za $\mu>\alpha^*$, iz uslova (2.18) u kome je α^* umesto μ, ponavljanjem postupka prikazanog u drugom delu dokaza Teoreme 2.2.3, dokazuje se da je $Ee^{(\alpha^*-\varepsilon)u(t)}|x(t)|^p \le c(\xi,\varepsilon,\alpha^*)$ za $t\ge 0$. Dokaz tvrdjenja sada sledi kad $\varepsilon\to 0$. $\diamondsuit$

Može se primetiti da Teorema 2.2.2 i Teorema 2.2.4 sadrže dovoljne uslove za *uniformnu L^p-stabilnost* jednačine (2.4) u odnosu na zadatu decay-funkciju, jer uslovi u ovim tvrdjenjima ne zavise od τ. Dakle, jednačina (2.4) je L^p-stabilna pri datim uslovima, bez obzira na veličinu pomeraja, odnosno, kašnjenja τ.

2.2.2 Posledice i primeri

U konkretnim primerima, primena prethodno iznetih kriterijuma stabilnosti može biti otežana zbog problema koji nastaju pri nalaženju odgovarajuće funkcije Lyapunova $V(t,x)$ koja zadovoljava uslove (2.9) i (2.18). Motivisani rezultatima u radovima [57, 59, 148], mogu se formulisati posledice Teorema 2.2.2–2.2.5 koje su dobijene za $V(t,x)\equiv|x|^p$ za $p\ge 2$, $t\ge 0$. Na taj način su kriterijumi stabilnosti efikasniji i jednostavniji za primene u konkretnim slučajevima.

Na osnovu (2.7) sledi

$$\begin{aligned}&L\tilde{V}(t,x,y_1,y_2,\dots,y_n) \qquad (2.23)\\ &\le p|x|^{p-2}|x^TF(t,x,y_1,\dots,y_n)|+\frac{p(p-1)}{2}\,|x|^{p-2}|G(t,x,y_1,y_2,\dots,y_n)|^2\end{aligned}$$

za svako $x,y_1,\dots,y_n\in R^d$ i $t\ge 0$. Uslovi (2.9) i (2.18) su u tom slučaju oblika

$$L\tilde{V}(t,x,y_1,y_2,\dots,y_n)\le-\lambda_0|x|^p+\sum_{i=1}^n\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(t)|y_i|^p+\theta(t)\cdot\lambda^{-\mu}(t), \tag{2.24}$$

$$L\tilde{V}(t,x,y_1,y_2,\dots,y_n)\le-\lambda_0|x|^p+\sum_{i=1}^n\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(t)\lambda'^{\eta_i}(t)|y_i|^p+\theta(t)\cdot\lambda^{-\mu}(t). \tag{2.25}$$

Jednačina (2.4) može biti razmatrana i kao stohastički perturbovan sistem sa kašnjenjem,

$$\dot{x}(t)=F(t,x(t),x(\rho_1(t)),\dots,x(\rho_n(t)))\,dt\quad t\ge 0.$$

Štaviše, ako je $F(t,x,y_1,\dots,y_n)\equiv f(t,x)+h(t,y_1,\dots,y_n)$, gde je $f(t,0)\equiv 0$, $h(t,0,\dots,0)\equiv 0$, jednačina

$$\begin{aligned}dx(t)=[&f(t,x(t))+h(t,x(\rho_1(t)),\dots,x(\rho_n(t)))\\ &+G(t,x(t),x(\rho_1(t)),\dots,x(\rho_n(t)))\,dw(t),\quad t\ge 0,\end{aligned} \tag{2.26}$$

se može smatrati stohastičkom perturbacijom determinističkog sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.27}$$

gde perturbacija zavisi od više prošlih stanja sa promenljivim vremenskim kašnjenjem. Napomenimo da je eksponencijalna srednje kvadratna stabilnost jednačine (2.26) razmatrana u radu [113] pri drugačijim uslovima od onih koji će biti zadati u narednim tvrdjenjima.

Osnovni zadatak u teoriji stohastičke stabilnosti je, izmedju ostalog, pronaći uslove koji garantuju da će stabilan sistem (2.27) ostati stabilan uprkos slučajnim uticajima koji ga transformišu u stohastički sistem (2.26). U vezi sa prethodnim razmatranjima postavlja se sledeće pitanje: Ako je jednačina (2.27) L^p-stabilna, kolika stohastička perturbacija može biti tolerisana da bi sistem i dalje bio stabilan, tj. pod kojim uslovima jednačina (2.26) ostaje stabilna? Naredna tvrdjenja se odnose na ovaj problem.

Posledica 2.2.1 *Neka decay-funkcija $\lambda(t)$ zadovoljava uslove Teoreme 2.2.2 i neka je pretpostavka ($\mathbf{H_2}$) zadovoljena za $\theta_1(t)$ i $\theta_2(t)$. Takodje, neka postoje konstante $\mu_1, \mu_2 > 0$ i $l_0, l_i, \bar{l}_i, \rho_i, \bar{\rho}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, tako da je*

$$x^T f(t, x) \leq -l_0 |x|^2, \tag{2.28}$$

$$|h(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leq \sum_{i=1}^{n} l_i \lambda^{-\rho_i}(t) |y_i| + \theta_1(t)\, \lambda^{-\mu_1}(t), \tag{2.29}$$

$$|G(t, x, y_1, \ldots, y_n)|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \bar{l}_i \lambda^{-\bar{\rho}_i}(t) |y_i|^2 + \theta_2(t)\, \lambda^{-\mu_2}(t) \tag{2.30}$$

za svako $x, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^d$ i $t \geq 0$, i neka je

$$l_0 > \frac{p-1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left[l_i + \frac{p-1}{2}\, \bar{l}_i \right]. \tag{2.31}$$

Tada je jednačina (2.26) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, pri čemu je

$$\gamma = \mu_1 p \wedge \frac{\mu_2 p}{2} \wedge \rho_1 \wedge \bar{\rho}_1 \wedge \ldots \wedge \rho_n \wedge \bar{\rho}_n \wedge \left\{ p \left(l_0 - \sum_{i=1}^{n} \left[l_i + \frac{p-1}{2}\, \bar{l}_i \right] - \frac{p-1}{2} \right) \right\}. \tag{2.32}$$

Dokaz. Ako je $V(t, x) \equiv |x|^p$, na osnovu (2.23) i (2.28), (2.29), (2.30) sledi

$$\begin{aligned}
& L\tilde{V}(t, x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\quad = p|x|^{p-2} \left[x^T f(t, x) + x^T h(t, y_1, \ldots, y_n) \right] \\
&\qquad + \frac{p(p-1)}{2}\, |x|^{p-2} |G(t, x, y_1, \ldots, y_n)|^2 \\
&\quad \leq -p\, l_0 |x|^p + p|x|^{p-1} \left[\sum_{i=1}^{n} l_i \lambda^{-\rho_i}(t) |y_i| + \theta_1(t)\, \lambda^{-\mu_1}(t) \right] \\
&\qquad + \frac{p(p-1)}{2}\, |x|^{p-2} \left[\sum_{i=1}^{n} \bar{l}_i \lambda^{-\bar{\rho}_i}(t) |y_i|^2 + \theta_2(t)\, \lambda^{-\mu_2}(t) \right].
\end{aligned}$$

Primenom nejednakosti (1.24), dobija se

$$\begin{aligned}
& L\tilde{V}(t,x,y_1,y_2,\dots,y_n) \\
& \le -\left(p\, l_0 - (p-1)\sum_{i=1}^{n}\left[l_i\lambda^{-\rho_i}(t) + \frac{p-2}{2}\,\bar{l}_i\lambda^{-\bar{\rho}_i}(t)\right] - \frac{p(p-1)}{2}\right)|x|^p \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n}\left[l_i\lambda^{-\rho_i}(t) + (p-1)\,\bar{l}_i\lambda^{-\bar{\rho}_i}(t)\right]|y_i|^p \\
& \quad + \theta_1^p(t)\,\lambda^{-\mu_1 p}(t) + (p-1)\theta_2^{\frac{p}{2}}(t)\,\lambda^{-\frac{\mu_2 p}{2}}(t).
\end{aligned}$$

Može se primetiti da je relacija (2.24) zadovoljena za

$$\nu_i = \rho_i \wedge \bar{\rho}_i, \quad \mu = \mu_1 p \wedge \frac{\mu_2 p}{2}, \quad \theta(t) = p\,(\theta_1^p(t) \vee \theta_2^{\frac{p}{2}}(t)).$$

Takodje, (2.9) važi za

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= p\, l_0 - (p-1)\sum_{i=1}^{n}\left[l_i + \frac{p-2}{2}\,\bar{l}_i\right] - \frac{p(p-1)}{2}, \\
\lambda_i &= l_i + (p-1)\bar{l}_i, \ \ i = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Dakle, svi uslovi Teoreme 2.2.2 su zadovoljeni, čime je posledica dokazana. $\diamondsuit$

Posledica 2.2.2 *Neka decay-funkcija $\lambda(t)$ zadovoljava uslove Teoreme 2.2.3 i neka* $(\mathbf{H_2})$ *važi za funkcije $\theta_1(t)$ i $\theta_2(t)$. Takodje, neka postoje konstante $\mu_1, \mu_2 > 0$ i $l_0, l_i, \bar{l}_i, \rho_i, \bar{\rho}_i \ge 0$, $i = 1,\dots,n$, tako da su zadovoljeni uslovi (2.28), (2.29), (2.30). Pored toga, neka je*

$$p\, l_0 > \sum_{i=1}^{n}[l_i + (p-1)\bar{l}_i]\lambda^{-\nu_i}(\tau) + (p-1)\sum_{i=1}^{n}\left[l_i + \frac{p-2}{2}\,\bar{l}_i\right] + \frac{p(p-1)}{2}, \tag{2.34}$$

gde je $\nu_i = \rho_i \wedge \bar{\rho}_i$. Tada je jednačina (2.26) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, pri čemu je $\gamma = \mu_1 p \wedge \frac{\mu_2 p}{2} \wedge \alpha^*$, α^* je jedinstveno rešenje jednačine $\alpha + \lambda^{\alpha}(\tau)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda^{-\nu_i}(\tau) - \lambda_0 = 0$, a λ_0, λ_i su oblika (2.33).

Dokaz. Posledica se dokazuje direktnom primenom Teoreme 2.2.3. Ako je $V(t,x) \equiv |x|^p$, korišćenjem (2.23) i (2.28), (2.29), (2.30), a zatim elementarne nejednakosti (1.24), za $L\tilde{V}(t,x,y_1,y_2,\dots,y_n)$ se dobija

$$\begin{aligned}
& L\tilde{V}(t,x,y_1,y_2,\dots,y_n) \\
& \le -\left(p\, l_0 - (p-1)\sum_{i=1}^{n}\left[l_i\lambda^{-\rho_i}(t) + \frac{p-2}{2}\,\bar{l}_i\lambda^{-\bar{\rho}_i}(t)\right] - \frac{p(p-1)}{2}\right)|x|^p \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n}\left[l_i\lambda^{-\rho_i}(t) + (p-1)\,\bar{l}_i\lambda^{-\bar{\rho}_i}(t)\right]|y_i|^p \\
& \quad + \theta_1^p(t)\,\lambda^{-\mu_1 p}(t) + (p-1)\theta_2^{\frac{p}{2}}(t)\,\lambda^{-\frac{\mu_2 p}{2}}(t).
\end{aligned}$$

Za $\nu_i = \rho_i \wedge \bar{\rho}_i$, $\mu = \mu_1 p \wedge \frac{\mu_2 p}{2}$, $\theta(t) = p\,(\theta_1^p(t) \vee \theta_2^{\frac{p}{2}}(t))$ i λ_0, λ_i oblika (2.33), zadovoljen je uslov (2.24) Teoreme 2.2.3. Imajući u vidu ovako definisane λ_0, λ_i, $i = 1, \ldots, n$, uslov $\frac{c_2}{c_1}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{-\nu_i}(\tau) < \lambda_0$ $(c_1 = c_2 = 1)$ postaje relacija (2.34).

Kako su svi uslovi Teoreme 2.2.3 ispunjeni, dokaz posledice je kompletan. $\diamondsuit$

Za jednačinu (2.26), na sličan način se mogu dobiti posledice analogne Teoremi 2.2.4 i Teoremi 2.2.5.

Naredni primeri ilustruju prethodne teorijske rezultate.

Primer 2.2.1 Neka je data nelinearna jednodimenzionalna SDJ sa vremenski promenljivim kašnjenjem koja zavisi od dva parametra, $a > 0$ i $q > 0$,

$$dx(t) = \left[-a|x(t)| + \frac{t \cdot \sin x(\rho_i(t))}{(t+1)^3(\ln(t+1)+1)^{\frac{1}{2}} + |x(t)|}\right] dt \tag{2.35}$$
$$+ \left[\frac{1 - e^{-|x(\rho_2(t))|}}{(t+1)^2 + x^2(t)} + \frac{\cos t \cdot \sqrt{|x(\rho_1(t))|}}{(\ln(t+1)+1)^q + 1}\right] dw(t),\ t \geq 0,$$

sa zadatim početnim uslovom $x_0 = \xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau, 0], \mathbb{R}))$. Pretpostavlja se da funkcije $\rho_1(t)$ i $\rho_2(t)$ zadovoljavaju uslove (2.5) i da je $\tau = \max\{-\rho_1(0), -\rho_2(0)\}$.

Nije teško proveriti da su za koeficijente ove jednačine,

$$F(t, x, y_1, y_2) = -a|x| + \frac{t \sin y_1}{(t+1)^3(\ln(t+1)+1)^{\frac{1}{2}} + |x|},$$
$$G(t, x, y_1, y_2) = \frac{1 - e^{-|y_2|}}{(t+1)^2 + x^2} + \frac{\cos t \sqrt{|y_1|}}{(\ln(t+1)+1)^q + 1},$$

zadovoljeni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta. Zato na osnovu Teoreme 2.2.1, postoji jedinstveno rešenje $x(t;\xi), t \in [-\tau, \infty)$ jednačine (2.35) tako da je $E \sup_{t \in [-\tau, \infty)} |x(t;\xi)|^p < \infty$. Takodje, postoji trivijalno rešenje jednačine, s obzirom da je $F(t, 0, 0, 0) \equiv 0$, $G(t, 0, 0, 0) \equiv 0$.

Ako je $V(t, x) = |x|^p$, uslov (2.18) je zadovoljen za $c_1 = c_2 = 1$. Na osnovu (2.23) se dobija ocena za $L\tilde{V}(t, x, y_1, y_2)$,

$$L\tilde{V}(t, x, y_1, y_2) \leq -ap\,|x|^p + \frac{p|x|^{p-1}|y_1|}{(t+1)^2(\ln(t+1)+1)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ p(p-1)\left[\frac{|x|^{p-2}|y_2|^2}{(t+1)^4} + \frac{|x|^{p-2}\cos^2 t\,|y_1|}{(\ln(t+1)+1)^{2q}}\right],$$

pri čemu su korišćene nejednakosti $e^{-x} \geq 1 - x$, $x \geq 0$ i $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, $a, b > 0$. Imajući u vidu uslove (2.9) i (2.18), logično je za decay-funkciju izabrati

$$\lambda(t) = \ln(t+1) + 1.$$

Tada je $\lambda'(t) = \frac{1}{t+1}$, $0 < \lambda'(t) \leq \lambda(t)$, $\lambda''(t) < 0$ i $\lambda(t+s) \leq \lambda(t) \cdot \lambda(s)$ za svako $t, s \geq 0$. Dakle, decay-funkcija $\lambda(t)$ zadovoljava sve uslove Teorema 2.2.2–2.2.5.

Za dokazivanje L^p-stabilnosti, $p \geq 2$, jednačine (2.35) u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t) = \ln(t+1) + 1$, neophodno je najpre proveriti da li su zadovoljeni uslovi (2.24) i (2.25). Primenom nejednakosti (1.24), dobija se

$$\begin{aligned} L\tilde{V}(t,x,y_1,y_2) \leq & -[ap-(p-1)(2p-3)]\,|x|^p + \lambda^{-\frac{1}{2}}(t)\,\lambda'^2(t)\,|y_1|^p \\ & +2(p-1)\lambda'^4(t)\,|y_2|^p(p-1)\lambda^{-2q}(t)\,|y_1|^p + (p-1)\cos^{2p} t\,\lambda^{-2q}(t). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Kako je $\lambda'(t) \leq \lambda(t)$, sledi

$$\begin{aligned} L\tilde{V}(t,x,y_1,y_2) \leq & -[ap-(p-1)(2p-3)]\,|x|^p + p\,\lambda^{-\left(\frac{5}{2}\wedge 2q\right)}(t)\,|y_1|^p \\ & +2(p-1)\lambda^{-4}(t)\,|y_2|^p + (p-1)\cos^{2p} t\,\lambda^{-2q}(t). \end{aligned}$$

Prema tome, uslov (2.24) je zadovoljen za $\theta(t) = (p-1)\cos^{2p} t$ i $\mu = 2q$, $\lambda_0 = ap-(p-1)(2p-3)$, $\lambda_1 = p$, $\lambda_2 = 2(p-1)$, $\nu_1 = \frac{5}{2} \wedge 2q$, $\nu_2 = 4$.

Za primenu Teoreme 2.2.2, neophodno je da bude zadovoljen uslov $\frac{c_2}{c_1}(\lambda_1+\lambda_2) < \lambda_0$, što povlači da mora biti

$$a > \frac{(p+1)(2p-1)}{p}. \tag{2.37}$$

Dakle, jednačina (2.35) je L^p-stabilna u odnosu na decay $\lambda(t)$, odnosno,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln[\ln(t+1)+1]} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln\ln t} \leq -\gamma,$$

gde je, na osnovu (2.10)

$$\gamma = 2q \wedge \frac{5}{2} \wedge \frac{ap-(p+1)(2p-1)}{2}. \tag{2.38}$$

Teorema 2.2.4 i Teorema 2.2.5 se mogu primeniti na analogan način s obzirom da uslov (2.25) sledi iz uslova (2.36),

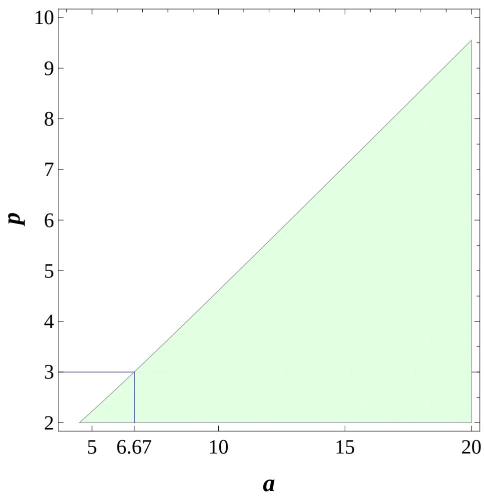
$$\begin{aligned} L\tilde{V}(t,x,y_1,y_2) \leq & -[ap-(p-1)(2p-3)]\,|x|^p + p\,\lambda^{-\left(\frac{5}{2}\wedge 2q\right)}(t)\,|y_1|^p \\ & +2(p-1)\lambda^{-1}(t)\,\lambda'^3(t)\,|y_2|^p + (p-1)\cos^{2p} t\,\lambda^{-2q}(t), \end{aligned}$$

gde je $\nu_2 = 1$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 3$, a $\theta(t)$, $\mu, l_0, \lambda_1, \lambda_2, \nu_1$ su definisani kao u prethodnom razmatranju.

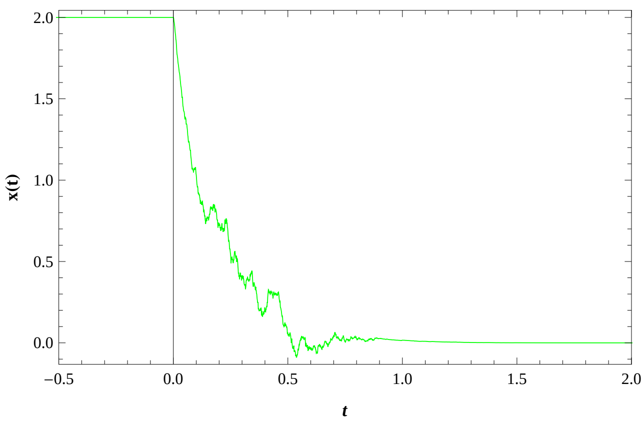
Kako je $\lambda'(0) = 1$, za primenu Teoreme 2.2.4 potrebni su isti uslovi (2.37) i (2.38) kao i za primenu Teoreme 2.2.2. Lako je zaključiti da Teorema 2.2.5 zahteva strože uslove nego Teorema 2.2.3.

Slika 2.1[1] prikazuje oblast logaritamske L^p-stabilnost, $p \geq 2$, jednačine (2.35). Prema tome, za stabilnost momenta trećeg reda potrebno je da je $a = 6.67$. Specijalno za $q = 2$, $\rho_1(t) = t + 1/(1+t)$, $\rho_2(t) = t - e^{-t}$, $\tau = \max\{-\rho_1(0), -\rho_2(0)\} = 1$, $\xi = 2$, grafički prikazi trajektorije rešenja jednačine (2.35) i funkcije $E|x(t)|^3$ su prikazani na Slici 2.2 i Slici 2.3, respektivno.

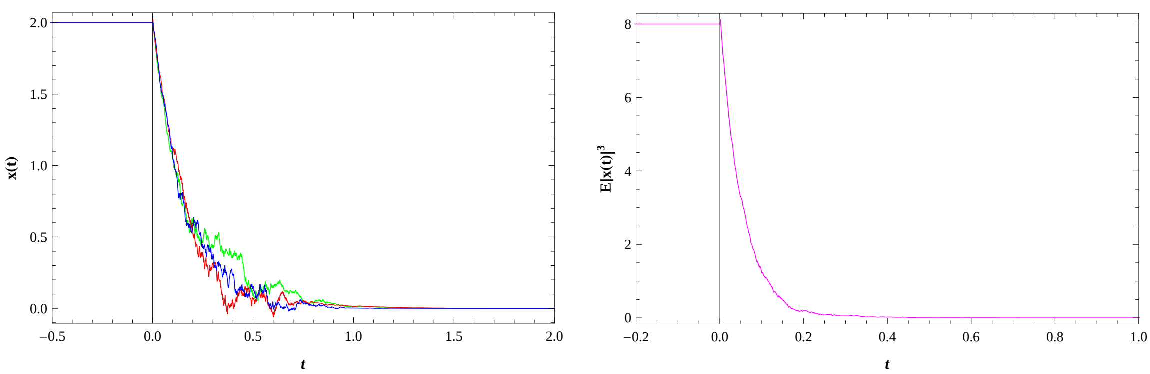
[1]Svi grafički prikazi uradjeni su korišćenjem programskog paketa MATHEMATICA 8.0.



Slika 2.1: Oblast u kojoj je ispunjen uslov (2.37)



Slika 2.2: Trajektorija jednačine (2.35) za $a = 6.67$, $q = 2$, $\rho_1(t) = t + 1/(1+t)$, $\rho_2(t) = t - e^{-t}$, $\tau = 1$, $\xi = 2$



Slika 2.3: Trajektorije jednačine (2.35) (levo) i $E|x(t)|^3$ (desno) za $a = 6.67$, $q = 2$, $\rho_1(t) = t + 1/(1+t)$, $\rho_2(t) = t - e^{-t}$, $\tau = 1$, $\xi = 2$

Primer 2.2.2 Neka je data dvodimenzionalna SDJ sa promenljivim vremenskim kašnjenjem koja zavisi od parametara $a_1, a_2, \alpha, \beta > 0$,

$$
\begin{aligned}
dx_1(t) &= \left[-a_1 x_1(t) + \frac{e^{-\alpha t}\sqrt{1+x_1^2(\rho_1(t))}}{(t+1)^3} \cdot \frac{x_2(\rho_2(t))}{1+x_2^2(\rho_2(t))} \right] dt \\
&\quad + \frac{\ln(1+|x_2(\rho_1(t))|)}{t+1}\, dw_1(t)), \qquad (2.39) \\
dx_2(t) &= \left[-a_2 x_2(t) - \frac{x_1(\rho_2(t))}{(t+1)^2} \right] dt \\
&\quad + \frac{e^{-\beta t} x_1^{\frac{1}{3}}(\rho_2(t))}{(t+1)^2 + |x_1(t)|}\, dw_1(t) - \frac{x_2(\rho_2(t))}{(t+1)^3}\, dw_2(t),
\end{aligned}
$$

sa zadatim početnim uslovom $x_0 = \xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau, 0], \mathbb{R}))$. Nije teško proveriti da su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.2.1 egzistencije i jedinstvenosti rešenja $x(t;\xi)$, da je $E|x(t;\xi)|^p < \infty$ i da sistem (2.39) ima trivijalno rešenje.

Neka je $x = (x_1, x_2)^T$, $y_i = (y_{1i}, y_{2i})^T$ i $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, $x(\rho_i(t)) = (x_1(\rho_i(t)), x_2(\rho_i(t)))^T$, $i = 1, 2$. Tada je

$$
\begin{aligned}
F(t,x,y_1,y_2) &= \begin{bmatrix} -a_1 x_1 \\ -a_2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e^{-\alpha t}\sqrt{1+y_{11}^2}}{(t+1)^3} \cdot \frac{y_{22}}{1+y_{22}^2} \\ -\frac{y_{12}}{(t+1)^2} \end{bmatrix} \equiv f(t,x) + h(t,y_1,y_2), \\
G(t,x,y_1,y_2) &= \begin{bmatrix} \frac{\ln(1+|y_{21}|)}{t+1} & 0 \\ \frac{e^{-\beta t} y_{12}^{\frac{1}{3}}}{(t+1)^2 + |x_1|} & -\frac{y_{22}}{(t+1)^3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Očigledno, sistem (2.39) može biti razmatran kao stohastička perturbacija determinističkog sistema koji je asimptotski stabilan, tj.

$$
\begin{bmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.
$$

Koeficijenti sistema (2.39) sugerišu ispitivanje polinomijalne stabilnosti. Da bi se postavili uslovi pri kojima sistem (2.39) ostaje L^p-stabilan, $p \geq 2$, primenićemo Posledicu 2.2.1 za $\lambda(t) = t + 1$. Dakle,

$$
\begin{aligned}
x^T f(t,x) &\leq -(a_1 \wedge a_2)|x|^2, \\
|h(t,y_1,y_2)|^2 &\leq \frac{1}{4}\, e^{-2\alpha t}(1+y_{11}^2)\, \lambda^{-6}(t) + y_{12}^2\, \lambda^{-4}(t) \\
&\leq \frac{1}{4}\, |y_1|^2 \lambda^{-6}(t) + |y_2|^2\, \lambda^{-4}(t) + \frac{1}{4}\, e^{-2\alpha t} \lambda^{-6}(t).
\end{aligned}
$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.20), dobija se

$$
|h(t,y_1,y_2)| \leq \frac{1}{2}\, |y_1|\, \lambda^{-3}(t) + |y_2|\, \lambda^{-2}(t) + \frac{1}{2}\, e^{-\alpha t} \lambda^{-3}(t).
$$

Analogno,

$$\begin{aligned}|G(t,x,y_1,y_2)|^2 &\le y_{21}^2\lambda^{-2}(t)+e^{-2\beta t}y_{12}^{\frac{2}{3}}\lambda^{-4}(t)+y_{22}^2\lambda^{-6}(t)\\ &\le |y_1|^2\lambda^{-2}(t)+|y_2|^2\lambda^{-4}(t)+e^{-2\beta t}\lambda^{-4}(t).\end{aligned}$$

Primenom Posledice 2.2.1 sledi da je sistem (2.39) polinomijalno L^p-stabilan ako je zadovoljen uslov (2.31), tj. ako je

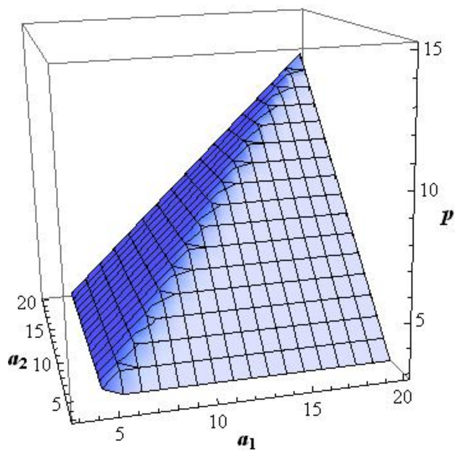
$$a_1\wedge a_2>\frac{3}{2}\,p.$$

Tada je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln(t+1)}\le -\gamma,$$

gde je, na osnovu (2.32), $\gamma = 2\wedge p\alpha\wedge p\beta\wedge p(a_1\wedge a_2-\frac{3}{2}p)$.

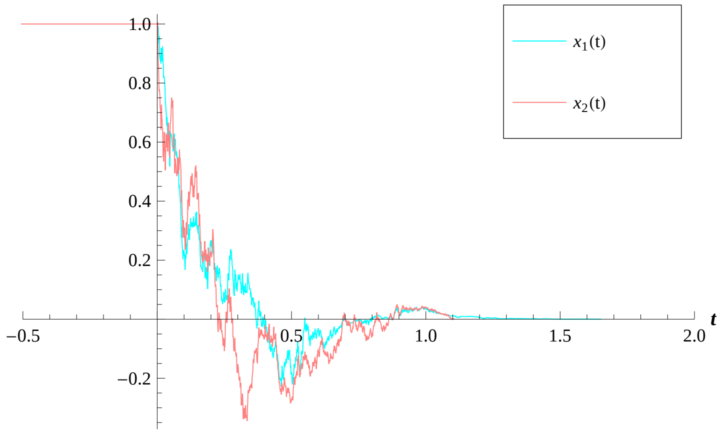
Oblast polinomijalne L^p-stabilnosti je prikazana na Slici 2.4. Specijalno za $p=5$, $\rho_1(t)=t-1/(1+\log(1+t))$, $\rho_2(t)=t-1/(1+t^2)$, $\tau=\max\{-\rho_1(0),-\rho_2(0)\}=1$, $\xi=(1,1)$, $a_1=a_2=10$, $\alpha=\beta=1$ grafički prikaz trajektorija rešenja $(x_1(t),x_2(t))$ sistema (2.39) i momenta petog reda može se videti na Slici 2.5 i Slici 2.6, respektivno.



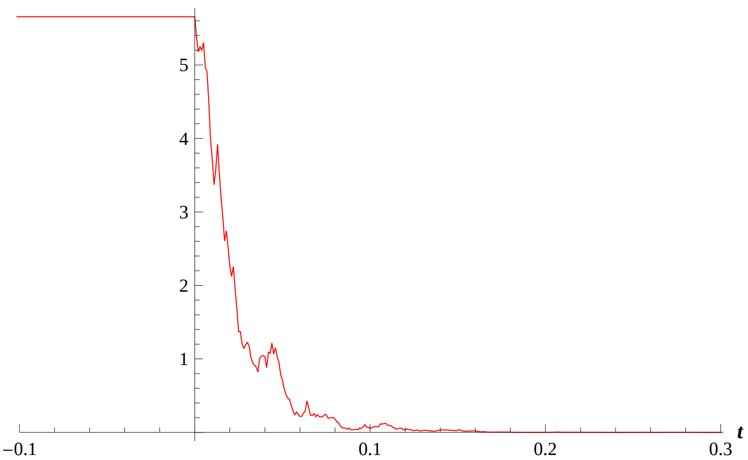
Slika 2.4: Oblast u kojoj je ispunjen uslov $a_1\wedge a_2>\frac{3}{2}\,p$

Napomena 2.2.1 Može se primetiti da se sva prethodna tvrdjenja mogu primeniti za ispitivanje stabilnosti SDJ sa konstantnim kašnjenjem, odnosno, u slučaju kada je $\rho_i(t)\equiv t-\tau_i$, $\tau_i=\text{const}>0$, $\tau=\max\{-\tau_1,\dots,-\tau_n\}$.

Štaviše, sva prethodna tvrdjenja mogu se preformulisati i za ispitivanje stabilnosti SDJ bez kašnjenja, za $\rho_i(t)\equiv t$.



Slika 2.5: Trajektorije rešenja sistema (2.39) za $\rho_1(t) = t - 1/(1 + \log(1 + t))$, $\rho_2(t) = t - 1/(1 + x^2)$, $\tau = 1$, $\xi = (1, 1)$, $\alpha = \beta = 1$



Slika 2.6: $E|x(t)|^5$ za $a_1 = a_2 = 10$, $\alpha = \beta = 1$, $\rho_1(t) = t - 1/(1 + \log(1 + t))$, $\rho_2(t) = t - 1/(1 + t^2)$, $\tau = 1$, $\xi = (1, 1)$

2.3 Eksponencijalna L^p-stabilnost i integrabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina

Neka je data sledeća *stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina (SFDJ)*

$$dx(t) = [f(t, x(t)) + F(t, x_t)]\, dt + G(x_t)\, dw(t), \quad t \geq t_0 \geq 0, \tag{2.40}$$

sa zadatim početnim uslovom $x_{t_0} = \xi$, funkcijom $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ i funkcionalima $F : \mathbb{R}_+ \times C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$, $G : \mathbb{R}_+ \times C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{d\times m}$. Kako jednačina zavisi od prošlosti, početni uslov ξ je definisan na segmentu $[t_0 - \tau, t_0]$ kao $\mathcal{F}_{t_0}$-adaptirana slučajna promenljiva iz familije $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, nezavisna od Brownovog kretanja, koja zadovoljava uslov $E||\xi||_\tau^2 < \infty$, tj.

$$x_{t_0} = \xi = \{\xi(s) : -\tau \leq s \leq 0\} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)).$$

S obzirom da je jednačina (2.40) specijalan oblik SFDJ (1.16) sa konačnim kašnjenjem, Definicijom 1.5.1 i Definicijom 1.5.2 se definiše rešenje i jedinstveno rešenje, respektivno, ove jednačine. Iz istog razloga, ako f, F, G zadovoljavaju Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, na osnovu Teoreme 1.5.1 postoji jedinstveno skoro izvesno neprekidno i adaptirano rešenje $x(t; t_0, \xi)$ jednačine (2.40) koje zadovoljava uslov $E\sup_{t\in[-\tau,T]}|x(t;t_0,\xi)|^2 < \infty$ za $T \geq t_0$. Štaviše, ako je početni uslov $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau, 0]; R^d))$, $p \geq 0$, onda je $E\sup_{t\in[-\tau,T]}|x(t;t_0,\xi)|^p < \infty$.

Za ispitivanje stabilnosti rešenja u prethodnom poglavlju je korišćena metoda Lyapunova. Medjutim, kako je više puta naglašeno, zbog poteškoća pri nalaženju odgovarajuće funkcije Lyapunova, neophodno je naći druge, primenljivije kriterijume, koji nisu zasnovani na direktnoj metodi Lyapunova. Za više detalja pogledati Jankovic *et al.* [57, 59, 148], Liu i Xia [101], Mao [113], Zhou *et al.* [184].

Mao je u radu [113] razmatrao eksponencijalnu srednje kvadratnu i skoro izvesnu stabilnost SFDJ i SDJ sa promenljivim vremenskim kašnjenjem. Pod pretpostavkom da je deterministički sistem stabilan, proučavajući pri kojim uslovima odgovarajući stohastički perturbovani sistem i dalje ostaje stabilan, formulisao je uslove za stabilnost koji se jednostavno proveravaju, a u slučaju SDJ sa konstantnim kašnjenjem predstavljaju uslove uniformne stabilnosti.

Teorema 2.3.1 (Mao, [113]) *Neka su λ, α, β pozitivne konstante tako da važi:*

(i) $\quad x^T f(t,x) \leq -\dfrac{\lambda}{2}|x|^2, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d;$

(ii) $\quad |F(t,\varphi)| \leq \alpha\,||\varphi||, \; |G(t,\varphi)|^2 \leq \beta\,||\varphi||^2, \quad (t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C([-\tau,0],\mathbb{R}^d));$

(iii) $\quad 2\alpha + \beta + 6\lambda\sqrt{\beta\tau} < \lambda\, e^{-\lambda\tau}.$

Tada postoje pozitivne konstante M i γ tako da je

$$E||x(t;t_0,\xi)||^2 \leq M\, e^{-\gamma(t-t_0)}\, E||\xi||^2, \tag{2.41}$$

za svako $t_0 \geq 0$ i $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$, odnosno, jednačina (2.40) je eksponencijalno L^2-stabilna Štaviše, jednačina (2.40) je eksponencijalno skoro izvesno stabilna, tj.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t;t_0,\xi)|}{t} \leq -\frac{\gamma}{2} \quad s.i.$$

U nastavku su izloženi rezultati iz rada [142], G. Pavlović, S. Janković, *Moment exponential stability and integrability of stochastic functional differential equations*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 6125-6134. Dobijeni rezultati delom predstavljaju uopštenja tvrdjenja iz rada [113] X. Maoa u kome je razmatrana srednje kvadratna stabilnost SFDJ (2.40). Uopštenja u radu [142] se odnose na nalaženje dovoljnih uslova eksponencijalne skoro izvesne i L^p-stabilnosti jednačine (2.40) za $p \geq 2$.

U Sekciji 2.3.1, kao specijalan slučaj jednačine (2.40), razmatra se perturbovana SDJ sa promenljivim vremenskim kašnjenjem, SDJ sa konstantnim kašnjenjem i SDJ bez kašnjenja.

Najpre se dokazuje pomoćno tvrdjenje koje će biti primenjeno za dokazivanje glavnih rezultata.

Teorema 2.3.2 *Neka je $p \geq 2$ i neka su λ, α, β pozitivne konstante tako da važi:*

(i) $\quad x^T f(t,x) \leq -\dfrac{\lambda}{p}|x|^2, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d;$

(ii) $\quad |F(t,\varphi)| \leq \alpha\,||\varphi||,\ |G(t,\varphi)|^2 \leq \beta\,||\varphi||^2, \quad (t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times C([-\tau,0],\mathbb{R}^d));$

(iii) $\quad \dfrac{p}{2}[2\alpha + (p-1)\beta] + 3p\lambda\sqrt{\beta\tau} < \lambda\, e^{-\lambda\tau}.$

Tada postoje pozitivne konstante C i $\gamma \in (0,\lambda)$ tako da je svako rešenje $x(t;t_0,\xi)$ jednačine (2.40) L^p-integrabilno u odnosu na funkciju $e^{\gamma t}$, u smislu da važi

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma t} E|x(t;t_0,\xi)|^p\,dt \leq C\, e^{\gamma t_0}\, E||\xi||^p, \tag{2.42}$$

za svako $t_0 \geq 0$ i $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$.

Dokaz. Zbog jednostavnosti, biće korišćen $x(t)$ umesto $x(t;t_0,\xi)$ za rešenje jednačine (2.40) sa početnim uslovom $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$.

Primenom formule Itôa na $e^{\lambda r}|x(r)|^p$, pri čemu je $r \geq t_0$, dobija se

$$\begin{aligned}
e^{\lambda r}|x(r)|^p = {} & e^{\lambda t_0}|x(t_0)|^p + \int_{t_0}^{r} \lambda\, e^{\lambda s}|x(s)|^p\,ds \\
& + p\int_{t_0}^{r} e^{\lambda s}|x(s)|^{p-2}\left(x^T(s)[f(s,x(s)) + F(s,x_s)] + \frac{1}{2}\,|G(s,x_s)|^2\right) ds \\
& + \frac{p(p-2)}{2}\int_{t_0}^{r} e^{\lambda s}|x(s)|^{p-4}|x^T(s)G(s,x_s)|^2\,ds \\
& + p\int_{t_0}^{r} e^{\lambda s}|x(s)|^{p-2}x^T(s)G(s,x_s)\,dw(s).
\end{aligned}$$

Za $t \geq t_0 + \theta$, na osnovu pretpostavki (i) i (ii), sledi

$$\begin{aligned}
e^{\lambda(t-\tau)}E||x_t||^p \leq {} & E \sup_{r\in[t-\tau,t]} e^{\lambda r}|x(r)|^p \\
\leq {} & e^{\lambda t_0}||\xi||^p + p\alpha\, E\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}|x(s)|^{p-1}||x_s||\,ds \\
& + \frac{p(p-2)}{2}\,\beta\, E\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}|x(s)|^{p-2}||x_s||^2\,ds \\
& + p\,E \sup_{r\in[t-\tau,t]}\int_{t-\tau}^{r} e^{\lambda s}|x(s)|^{p-1}x^T(s)G(s,x_s)\,dw(s) \\
\leq {} & e^{\lambda t_0}E||\xi||^p + \frac{p}{2}\,[2\alpha + (p-1)\beta]\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}E||x_s||^p\,ds \\
& + p\,E \sup_{r\in[t-\tau,t]}\int_{t-\tau}^{r} e^{\lambda s}|x(s)|^{p-1}x^T(s)G(s,x_s)\,dw(s).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Ako se primeni Burkholder-Davis-Gundi nejednakost (Teorema 1.3.3), a zatim nejednakost Younga (1.22), za proizvoljno $\varepsilon \in (0,1/2)$ se dobija

$$
\begin{aligned}
&p\,E \sup_{r\in[t-\tau,t]} \int_{t-\tau}^{r} e^{\lambda s}|x(s)|^{p-1}x^T(s)G(s,x_s)\,dw(s)\\
&\le 3p\,E\left(\int_{t-\tau}^{t} e^{2\lambda s}|x(s)|^{2(p-1)}||G(s,x_s)||^2\,ds\right)^{1/2}\\
&\le 3p\,E\left(\int_{t-\tau}^{t} e^{2\lambda s}\beta\,||x_s||^{2p}\,ds\right)^{1/2}\\
&\le 3p\,E\left(||x_t||^p\int_{t-\tau}^{t} e^{2\lambda s}\beta\,||x_s||^{p}\,ds\right)^{1/2}\\
&\le 2\,E\left\{\left(\varepsilon\,e^{\lambda(t-\tau)}||x_t||^p\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{9p^2\beta}{4\varepsilon}\,e^{-\lambda(t-\tau)}\int_{t-\tau}^{t} e^{2\lambda s}||x_s||^p\,ds\right)^{1/2}\right\}\\
&\le \varepsilon\,e^{\lambda(t-\tau)}E||x_t||^p+\frac{9p^2\beta}{4\varepsilon}\,e^{-\lambda(t-\tau)}\int_{t-\tau}^{t} e^{2\lambda s}E||x_s||^p\,ds.
\end{aligned}
$$

Prema tome, za $t\ge t_0+\tau$, na osnovu (2.43) sledi da je

$$
\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\,e^{\lambda(t-\tau)}E||x_t||^p \le{}& e^{\lambda t_0}E||\xi||^p\\
&+\frac{p}{2}\,[2\alpha+(p-1)\beta)]\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}E||x_s||^p\,ds\\
&+\frac{9p^2\beta}{4\varepsilon}\,e^{-\lambda(t-\tau)}\int_{t-\tau}^{t} e^{2\lambda s}E||x_s||^p\,ds.
\end{aligned}\tag{2.44}
$$

Ako je $t\in[t_0,t_0+\tau]$, na sličan način se dobija

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda(t-\tau)}E||x_t||^p \le{}& e^{\lambda t_0}E\left\{||\xi||^p+\sup_{r\in[t_0,t]}|x(r)|^p\right\}\\
\le{}& e^{\lambda t_0}E||\xi||^p+E\sup_{r\in[t_0,t]}e^{\lambda r}|x(r)|^p\\
\le{}& 2e^{\lambda t_0}E||\xi||^p+\frac{p}{2}\,[2\alpha+(p-1)\beta]\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}E||x_s||^p\,ds\\
&+\frac{9p^2\beta}{4\varepsilon}\,e^{-\lambda(t-\tau)}\int_{t_0}^{t} e^{2\lambda s}E||x_s||^p\,ds+\varepsilon\,e^{\lambda(t-\tau)}E||x_t||^p.
\end{aligned}\tag{2.45}
$$

Otuda, za svako $t\ge t_0$, primenom (2.44) i (2.45) sledi

$$
\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\,e^{-\lambda\tau}E||x_t||^p \le{}& 2e^{-\lambda(t-t_0)}E||\xi||^p\\
&+\frac{p}{2}[2\alpha+(p-1)\beta]\,e^{-\lambda t}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda s}E||x_s||^p\,ds\\
&+\frac{9p^2\beta}{4\varepsilon}\,e^{-2\lambda t+\lambda\tau}\int_{(t-\tau)\vee t_0}^{t} e^{2\lambda s}E||x_s||^p\,ds.
\end{aligned}\tag{2.46}
$$

Na osnovu uslova (iii) sledi da postoji konstanta $\gamma\in(0,\lambda)$ tako da je

$$
\frac{p}{2}[2\alpha+(p-1)\beta]+3p(\lambda-\gamma)\sqrt{\beta\tau}<(\lambda-\gamma)\,e^{-\lambda\tau}.\tag{2.47}
$$

Za proizvoljno $T > t_0$ je

$$
\begin{aligned}
&(1-\varepsilon)\, e^{-\lambda\tau} \int_{t_0}^{T} e^{\gamma t} E||x_t||^p \, dt \\
&\quad \le 2 \int_{t_0}^{T} e^{\gamma t - \lambda(t-t_0)} E||\xi||^p \, dt \\
&\qquad + \frac{p}{2}[2\alpha + (p-1)\beta] \int_{t_0}^{T} e^{(\gamma-\lambda)t} \int_{t_0}^{t} e^{\lambda s} E||x_s||^p \, ds \, dt \\
&\qquad + \frac{9p^2\beta}{4\varepsilon}\, e^{\lambda\tau} \int_{t_0}^{T} e^{\gamma t - 2\lambda t} \int_{(t-\tau)\vee t_0}^{t} e^{2\lambda s} E||x_s||^p \, ds \, dt \\
&\quad \le \frac{2}{\lambda-\gamma}\, e^{\gamma t_0} E||\xi||^p + \frac{p}{2}[2\alpha + (p-1)\beta)] \int_{t_0}^{T} e^{\lambda s} E||x_s||^p \left(\int_{s}^{T} e^{(\gamma-\lambda)t} \, dt \right) ds \\
&\qquad + \frac{9p^2\beta}{4\varepsilon}\, e^{\lambda\tau} \int_{t_0}^{T} e^{2\lambda s} E||x_s||^p \left(\int_{s}^{(s+\tau)\wedge T} e^{\gamma t - 2\lambda t} \, dt \right) ds \\
&\quad \le \frac{2}{\lambda-\gamma}\, e^{\gamma t_0} E||\xi||^p + \frac{p}{2}[2\alpha + (p-1)\beta] \frac{1}{\lambda-\gamma} \int_{t_0}^{T} e^{\gamma s} E||x_s||^p \, ds \\
&\qquad + \frac{9p^2\beta}{4\varepsilon}\, e^{\lambda\tau} \int_{t_0}^{T} e^{(2\lambda)s} E||x_s||^p \left(e^{(\gamma-2\lambda)s}\, \frac{1 - e^{-(2\lambda-\gamma)\tau)}}{(2\lambda-\gamma)\tau} \tau \right) ds.
\end{aligned}
$$

Za $\varepsilon = \frac{3p}{2}\sqrt{\beta\tau}\, e^{\lambda\tau}$, koje je na osnovu uslova (iii) iz intervala $(0, 1/2)$, dobija se

$$
\begin{aligned}
&\left(e^{-\lambda\tau} - \frac{3p}{2}\sqrt{\beta\tau} \right) \int_{t_0}^{T} e^{\gamma t} E||x_t||^p \, dt \\
&\qquad \le \frac{2}{\lambda-\gamma}\, e^{\gamma t_0} E||\xi||^p \\
&\qquad\quad + \left(\frac{1}{\lambda-\gamma} \frac{p}{2}\, [2\alpha + (p-1)\beta] + \frac{3p}{2}\, \sqrt{\beta\tau} \right) \int_{t_0}^{T} e^{\gamma s} E||x_s||^p \, ds,
\end{aligned}
$$

odnosno,

$$
\begin{aligned}
&\left(e^{-\lambda\tau} - 3p\sqrt{\beta\tau} - \frac{1}{\lambda-\gamma} \frac{p}{2}\, [2\alpha + (p-1)\beta] \right) \int_{t_0}^{T} e^{\gamma t} E||x_t||^p \, dt \\
&\qquad \le \frac{2}{\lambda-\gamma}\, e^{\gamma t_0} E||\xi||^p.
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu nejednakost (2.47), sledi da za svako $T > 0$ važi

$$
\int_{t_0}^{T} e^{\gamma t} E||x_t||^p \, dt \le C \cdot e^{\gamma t_0}\, E||\xi||^p,
$$

pri čemu je $C > 0$ generisana konstanta. Kako je $E|x(t)|^p \le E||x_t||^p$, teorema je dokazana kad $T \to \infty$. $\diamondsuit$

Primenjujući prethodnu teoremu, mogu se postaviti uslovi za eksponencijalnu L^p-stabilnost jednačine (2.40). Kao i obično, pretpostavlja se da je $f(t,0) \equiv 0$, $F(t,0) \equiv 0$, $G(t,0) \equiv 0$ za svako $t \ge t_0$, kako bi jednačina (2.40) imala trivijalno rešenje $x(t; t_0, 0) = 0$ za svako $t \ge t_0$.

Teorema 2.3.3 *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.3.2. Tada postoje pozitivne konstante M i $\gamma \in (0, \lambda)$ tako da je*

$$E|x(t; t_0, \xi)|^p \le M\, e^{-\gamma(t-t_0)}\, E||\xi||^p \tag{2.48}$$

za svako $t_0 \ge 0$ i $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d))$, odnosno, jednačina (2.40) je eksponencijalno L^p-stabilna u smislu da važi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln E|x(t; t_0, \xi)|^p}{t} \le -\gamma.$$

Štaviše, jednačina (2.40) je eksponencijalno skoro izvesno stabilna sa eksponentom Lyapunova γ/p, tj.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t; t_0, \xi)|}{t} \le -\frac{\gamma}{p} \quad s.i.$$

Dokaz. Ako je $\varepsilon = 3/2p\sqrt{\beta\tau}\, e^{\lambda\tau}$, što je na osnovu uslova (iii) Teoreme 2.3.2 manje od 1/2, i ako u relaciji (2.46) zamenimo λ sa γ, dobija se

$$\begin{aligned} &e^{\gamma(t-\tau)} E||x_t||^p \\ &\quad \le 4\, e^{\gamma t_0} E||\xi||^p + p\left[2\alpha + (p-1)\beta + 3\sqrt{\beta/\tau}\, e^{(\gamma-\lambda)\tau}\right] \int_{t_0}^{T} e^{\gamma s} E||x_s||^p\, ds. \end{aligned}$$

Primenom nejednakosti (2.42), iz Teoreme 2.3.2 se dobija tražena nejednakost (2.48),

$$e^{\gamma t} E|x(t)|^p \le e^{\gamma t}\, E||x_t||^p \le M\, E||\xi||^p,$$

pri čemu je $M = \left\{4 + p\left[2\alpha + (p-1)\beta + 3\sqrt{\beta/\tau}\, e^{(\gamma-\lambda)\tau}\right] C\right\} e^{\gamma\tau}$.

Štaviše, eksponencijalna L^p-stabilnost povlači eksponencijalnu skoro izvesnu stabilnost sa eksponentom Lyapunova γ/p, čime se opisuje brzina konvergencije proizvoljnog rešenja kad $t \to \infty$. Za $p = 2$, dokaz se može naći u [113], a ovde je dat dokaz za $p \ge 2$.

Za proizvoljno $\varepsilon \in (0, \gamma)$ i $k = 1, 2, \ldots$, na osnovu (2.48) sledi

$$\begin{aligned} P\left\{\omega : |x(k\tau + t_0; t_0, \xi)| > e^{-(\gamma-\varepsilon)k\tau/p}\right\} &\le e^{(\gamma-\varepsilon)k\tau}\, E|x(k\tau + t_0; t_0, \xi)|^p \\ &\le M\, E||\xi||^p. \end{aligned}$$

Primenom Borel–Cantellijeve leme sledi da postoji slučajni indeks $k_0(\omega)$ tako da je skoro izvesno $|x(k\tau + t_0; t_0, \xi)| \le e^{-(\gamma-\varepsilon)k\tau/p}$ za $k > k_0(\omega)$. Prema tome, ako je $(k-1)\tau + t_0 \le t \le k\tau + t_0$ i $k > k_0(\omega)$, onda je

$$\frac{\ln|x(k\tau + t_0; t_0, \xi)|}{t} \le -\frac{(\gamma-\varepsilon)k\tau/p}{(k-1)\tau + t_0} \quad \text{s.i.}$$

Zbog toga je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(k\tau + t_0; t_0, \xi)|}{t} \le -\frac{\gamma-\varepsilon}{p} \quad \text{s.i.}$$

Kako je ε proizvoljno izabrano, dokaz je kompletan zahtevom da $\varepsilon \to 0$. $\diamondsuit$

Napomena 2.3.1 Prikazana tehnika dokazivanja nije efektivno primenljiva za ispitivanje opšte skoro izvesne i L^p-stabilnosti jer proizvoljna decay-funkcija $\lambda(t)$ mora da zadovolji uslov,

$$a \leq \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \leq 1, \quad a \in (0,1], \quad t \geq 0,$$

koji je isuviše restriktivan. U tom slučaju, klasa decay-funkcija je veoma uska jer mali broj funkcija zadovoljava ovaj uslov, npr. eksponencijalna funkcija, a ne mogu se uzeti u obzir polinomijalna i logaritamska funkcija.

2.3.1 Eksponencijalna L^p-stabilnost i integrabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina sa promenljivim vremenskim kašnjenjem

SFDJ (2.40) može biti redukovana, izmedju ostalog, na različite tipove SDJ sa kašnjenjem. U ovom poglavlju, kao specijalan slučaj jednačine (2.40), razmatra se *stohastička diferencijalna jednačina sa promenljivim vremenskim kašnjenjem*,

$$\begin{aligned} dx(t) = {} & [f(t,x(t)) + F(t, x(\rho_1(t)), \ldots, x(\rho_n(t)))]\, dt \\ & + G(t, x(\rho_1(t)), \ldots, x(\rho_n(t)))\, dw(t), \quad t \geq t_0 \geq 0, \end{aligned} \tag{2.49}$$

pri čemu je početni uslov $x_{t_0} = \xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$ i $p \geq 2$. Kao i ranije, $w(t)$ je m-dimenzionalno Brownovo kretanje i $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d\times n} \to \mathbb{R}^d$, $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d\times n} \to \mathbb{R}^{d\times m}$. Takodje, pretpostavlja se da neprekidno diferencijabilne funkcije $\rho_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, zadovoljavaju uslove (2.5) i (2.6) i da je $\tau = \max_{1\leq i\leq n}\{-\rho_i(0)\}$.

Teorema 2.3.4 *Neka su $\rho_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ neprekidno diferencijabilne funkcije koje zadovoljavaju uslove (2.5) i neka postoje konstante λ, α, β tako da važi:*

(i′) $\quad x^T f(t,x) \leq -\dfrac{\lambda}{p}\,|x|^2, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d;$

(ii′) $\quad |F(t,\varphi)| \leq \alpha\,||\varphi||, \quad |G(t,\varphi)|^2 \leq \beta\,||\varphi||^2, \quad (t,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d\times n};$

(iii′) $\quad \alpha p\sqrt{n} + \beta\,\dfrac{p(p-1)}{2}\,n < \lambda.$

Tada postoje pozitivne konstante C i $\gamma \in (0,\lambda)$ tako da je svako rešenje $x(t;t_0,\xi)$ jednačine (2.49) L^p-integrabilno u odnosu na funkciju $e^{\gamma t}$, odnosno, važi

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma t} E|x(t;t_0,\xi)|^p\, dt \leq C\, e^{\gamma t_0}\, E||\xi||^p \tag{2.50}$$

za svako $t_0 \geq 0$ and $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$.

Dokaz. Primenom formule Itôa i uslova (i'), za $t \geq t_0$ je

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda t} E|x(t)|^p \\
&= e^{\lambda t_0} E||\xi||^p + \lambda E \int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|^p\, ds \\
&+p\, E \int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|^{p-2} x(s)^T f(s, x(s))\, ds \\
&+p\, E \int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|^{p-2} x(s)^T F(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))\, ds \\
&+\frac{p(p-2)}{2} E \int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|^{p-4} |x^T(s) G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))|^2\, ds \\
&+\frac{p}{2} E \int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|^{p-2} |G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))|^2\, ds \\
&\leq e^{\lambda t_0} E||\xi||^p + p\, E \int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|^{p-1} |F(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))|\, ds \\
&+\frac{p(p-1)}{2} E \int_{t_0}^t e^{\lambda s}|x(s)|^{p-2} |G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))|^2\, ds.
\end{aligned}$$

Na osnovu uslova (ii') i (iii') sledi

$$\begin{aligned}
E|x(t)|^p \leq\ & e^{-\lambda(t-t_0)} E||\xi||^p \\
&+ p\alpha\, E \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)}|x(s)|^{p-1} \Big(\sum_{i=1}^n |x(\rho_i(s))|^2\Big)^{1/2} ds \\
&+ \frac{p(p-1)}{2}\beta\, E \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)}|x(s)|^{p-2} \Big(\sum_{i=1}^n |x(\rho_i(s))|^2\Big) ds.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Primenom nejednakosti (1.23) za neko $\varepsilon_1 > 0$ i elementarne nejednaksti (1.20), dobija se

$$\begin{aligned}
&E \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)}|x(s)|^{p-1} \Big(\sum_{i=1}^n |x(\rho_i(s))|^2\Big)^{1/2} ds \\
&\quad\leq \frac{p-1}{p}\varepsilon_1\, E \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)}|x(s)|^p\, ds \\
&\quad+\frac{1}{p}\varepsilon_1^{-(p-1)}\, E \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \Big(\sum_{i=1}^n |x(\rho_i(s))|^2\Big)^{p/2} ds \\
&\quad\leq \frac{p-1}{p}\varepsilon_1 \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} E|x(s)|^p\, ds \\
&\quad+\frac{1}{p}\varepsilon_1^{-(p-1)} n^{p/2-1} \Big(\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} E|x(\rho_i(s))|^p\, ds\Big).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Na sličan način sledi da je

$$
\begin{aligned}
&E\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}|x(s)|^{p-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}|x(\rho_i(s))|^2\Big)\,ds \qquad (2.53)\\
&\quad\le \frac{p-2}{p}\varepsilon_2\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}E|x(s)|^p\,ds\\
&\quad+\frac{2}{p}\varepsilon_2^{-(p/2-1)}n^{p/2-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds\Big).
\end{aligned}
$$

Zamenom ocena (2.52) i (2.53) u (2.51) dobija se

$$
\begin{aligned}
E|x(t)|^p &\le e^{-\lambda(t-t_0)}E||\xi||^p+\delta_1\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}E|x(s)|^p\,ds\\
&\quad+\delta_2\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds\Big), \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\delta_1=(p-1)[\alpha\varepsilon_1+\beta(p-2)\varepsilon_2/2],\ \delta_2=n^{p/2-1}\left[\alpha\varepsilon_1^{-(p-1)}+(p-1)\beta\varepsilon_2^{-(p/2-1)}\right]. \qquad (2.55)
$$

Sa druge strane, iz uslova (iii') se može zaključiti da postoji konstanta $\gamma\in(0,\lambda)$ tako da je

$$
\alpha p(n^{p/2}e^{\gamma\tau})^{1/p}+\beta\frac{p(p-1)}{2}(n^{p/2}e^{\gamma\tau})^{2/p}<\lambda-\gamma. \qquad (2.56)
$$

Na osnovu (2.54) sledi da za svako $T>t_0$ važi

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{T} e^{\gamma t}E|x(t)|^p\,dt &\le e^{\lambda t_0}\int_{t_0}^{T} e^{(\gamma-\lambda)t}E||\xi||^p\,dt \qquad (2.57)\\
&\quad+\delta_1\int_{t_0}^{T} e^{\gamma t}\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}E|x(s)|^p\,ds\,dt\\
&\quad+\delta_2\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{t_0}^{T} e^{\gamma t}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds\Big)\,dt\Big).
\end{aligned}
$$

Promenom redosleda integracije, dobija se

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{T} e^{\gamma t}\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}E|x(s)|^p\,ds\,dt &\le \int_{t_0}^{T} e^{\lambda s}E|x(s)|^p\Big(\int_{s}^{T} e^{(\gamma-\lambda)t}\,dt\Big)\,ds\\
&\le \frac{1}{\lambda-\gamma}\int_{t_0}^{T} e^{\gamma s}E|x(s)|^p\,ds. \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

Analogno,

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{T} e^{\gamma t}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds\Big)\,dt \qquad (2.59)\\
&\le \int_{t_0}^{T} e^{\lambda s}E|x(\rho_i(s))|^p\Big(\int_{s}^{T} e^{(\gamma-\lambda)t}\,dt\Big)\,ds\\
&\le \frac{1}{\lambda-\gamma}\int_{t_0}^{T} e^{\gamma s}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds.
\end{aligned}
$$

Da bi ocenili poslednji integral u relaciji (2.59), uvodi se smena $u = \rho_i(s)$. Kako funkcije ρ_i zadovoljavaju uslove (2.5) i (2.6), to je

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{T} e^{\gamma s} E|x(\rho_i(s))|^p\, ds &\le \int_{t_0-\tau}^{T} e^{\gamma(u+\tau)} E|x(u)|^p\, du \\
&= \int_{t_0-\tau}^{t_0} e^{\gamma(u+\tau)} E|x(u)|^p\, du + \int_{t_0}^{T} e^{\gamma(u+\tau)} E|x(u)|^p\, du \\
&= e^{\gamma(t_0+\tau)} \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} \tau E||\xi||^p + \int_{t_0}^{T} e^{\gamma(u+\tau)} E|x(u)|^p\, du \\
&\le \tau e^{\gamma(t_0+\tau)} E||\xi||^p + \int_{t_0}^{T} e^{\gamma(u+\tau)} E|x(u)|^p\, du. \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

Konačno, na osnovu poslednje ocene i (2.57), (5.37) i (2.59), sledi

$$\int_{t_0}^{T} e^{\gamma t} E|x(t)|^p\, dt \le c_1\, E||\xi||^p + c_2 \int_{t_0}^{T} e^{\gamma t} E|x(t)|^p\, dt, \qquad (2.61)$$

gde je

$$c_1 = \frac{1}{\lambda-\gamma} e^{\gamma t_0}(1+\delta_2 n\tau e^{\gamma\tau}) > 0, \quad c_2 = \frac{1}{\lambda-\gamma}(\delta_1 + \delta_2 n e^{\gamma\tau}).$$

Na osnovu (2.55), c_2 je oblika

$$c_2 = \frac{1}{\lambda-\gamma}\left[(p-1)\varepsilon_1 + n^{p/2} e^{\gamma\tau} \alpha \varepsilon_1^{-p+1} + \frac{(p-2)(p-1)}{2}\varepsilon_2 + (p-1) n^{p/2} e^{\gamma\tau} \beta \varepsilon_2^{-\frac{p}{2}+1}\right].$$

Imajući u vidu relaciju (2.56), ε_1 i ε_2 će biti izabrane tako da je $c_2 < 1$, na primer, $\varepsilon_1 = (n^{p/2}e^{\gamma\tau})^{1/p}$ i $\varepsilon_2 = (n^{p/2}e^{\gamma\tau})^{2/p}$. Tada je

$$c_2 = \frac{1}{\lambda-\gamma}\left[\alpha p (n^{p/2}e^{\gamma\tau})^{1/p} + \beta \frac{p(p-1)}{2} (n^{p/2}e^{\gamma\tau})^{2/p}\right] < 1,$$

pa na osnovu (2.61) postoji konstanta $C = \frac{c_1}{1-c_2} > 0$ tako da važi

$$\int_{t_0}^{T} e^{\gamma t} E|x(t)|^p\, dt \le C\, e^{\gamma t_0} E||\xi||^p.$$

Prema tome, (2.50) direktno sledi kad $T \to \infty$, čime je teorema dokazana. $\diamondsuit$

Kao i obično, za ispitivanje eksponencijalne skoro izvesne i L^p-stabilnosti jednačine (2.49), neophodno je pretpostaviti da je $F(t,0,\ldots,0) \equiv 0$, $G(t,0,\ldots,0) \equiv 0$ i $f(t,0) \equiv 0$.

Teorema 2.3.5 *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 2.3.4. Tada postoje pozitivne konstante M i $\gamma \in (0,\lambda)$ tako da važi*

$$E|x(t;t_0,\xi)|^p \le M\, e^{-\gamma(t-t_0)}\, E||\xi||^p \qquad (2.62)$$

za svako $t_0 \ge 0$ i $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau,0],\mathbb{R}^d))$, odnosno, jednačina (2.49) je eksponencijalno L^p-stabilna. Štaviše, jednačina (2.49) je istovremeno i eksponencijalno skoro izvesno stabilna sa eksponentom Lyapunova γ/p.

Dokaz. Neka je $\gamma \in (0, \lambda)$ izabrano tako da je zadovoljena relacija (2.56). Primenom formule Itôa i uslova (i'), za $r > t_0$ je

$$\begin{aligned} e^{\gamma r}|x(r)|^p \leq e^{\gamma t_0}|x(t_0)|^p &+ p\int_{t_0}^{r} e^{\gamma s}|x(s)|^{p-1}|F(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))|ds \\ &+ \frac{p(p-1)}{2}\int_{t_0}^{r} e^{\gamma s}|x(s)|^{p-2}|G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))|^2 ds \\ &+ p\int_{t_0}^{r} e^{\gamma s}|x(s)|^{p-2}x(s)^T G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))dw(s). \end{aligned}$$

Prema tome, za $t \geq t_0 + \tau$ važi

$$\begin{aligned} & e^{\gamma(t-\tau)}E||x_t||^p \\ &\quad \leq E \sup_{r\in[t-\tau,t]} e^{\gamma r}|x(r)^p| \\ &\quad \leq e^{\gamma t_0}E||\xi||^p + p\,E\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}|x(s)|^{p-1}|F(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))|\,ds \\ &\quad + \frac{p(p-1)}{2}\,E\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}|x(s)|^{p-2}|G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))|^2\,ds \\ &\quad + p\,E\int_{t_0}^{t-\tau} e^{\gamma s}|x(s)|^{p-2}x(s)^T G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))\,dw(s) \\ &\quad + p\,E\Big\{\sup_{r\in[t-\tau,t]}\int_{t-\tau}^{r} e^{\gamma s}|x(s)|^{p-2}x(s)^T G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))\,dw(s)\Big\}. \end{aligned}$$

Primenom uslova *(ii')* i nejednakosti (1.23) za $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, na način kako je dobijena relacija (2.54), dobija se

$$\begin{aligned} & e^{\gamma(t-\tau)}E||x_t||^p_\tau \\ &\quad \leq e^{\gamma t_0}E||\xi||^p_\tau + \Big[\alpha(p-1) + \beta\frac{(p-1)(p-2)}{2}\Big]\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}E|x(s)|^p\,ds \\ &\quad + \big[\alpha n^{p/2-1} + (p-1)\beta n^{p/2-1}\big]\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds\Big) \\ &\quad + p\,E\sup_{r\in[t-\tau,t]}\int_{t-\tau}^{r} e^{\gamma s}|x(s)|^{p-2}x^T(s)G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))\,dw(s). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Da bi ocenili poslednji integral, primenimo Burkholder-Davis-Gundy nejednakost (Teorema 1.3.3) i elementarne nejednakosti (1.22) i (1.23),

$$\begin{aligned} & p\,E\sup_{r\in[t-\tau,t]}\int_{t-\tau}^{r} e^{\gamma s}|x(s)|^{p-2}x^T(s)G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))\,dw(s) \\ &\quad \leq 3p\,E\Big\{\int_{t-\tau}^{t} e^{2\gamma s}|x(s)|^{2p-2}|G(s, x(\rho_1(s)), \ldots, x(\rho_n(s)))|^2\,ds\Big\}^{1/2} \\ &\quad \leq E\Big\{||x(t)||^p\,9p^2\beta\int_{t-\tau}^{t} e^{2\gamma s}\Big[\frac{p-2}{p}|x(s)|^p + \frac{2}{p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|x(\rho_i(s))|^2\Big)^{p/2}\Big]\,ds\Big\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}e^{\gamma(t-\tau)}E||x(t)||^p \\
&+\frac{9}{2}p^2\beta e^{-\gamma(t-\tau)}\,E\int_{t-\tau}^{t} e^{2\gamma s}\left[\frac{p-2}{p}|x(s)|^p+\frac{2}{p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|x(\rho_i(s))|^2\Big)^{p/2}\right]ds.
\end{aligned}
$$

Na osnovu ove ocene, relacija (2.63) postaje

$$
\begin{aligned}
&e^{\gamma(t-\tau)}E||x_t||^p \qquad (2.64)\\
&\quad\leq e^{\gamma t_0}E||\xi||^p+(p-1)\left[\alpha+\beta\frac{p-2}{2}\right]\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}E|x(s)|^p\,ds \\
&\quad\quad +n^{p/2-1}[\alpha+(p-1)\beta]\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds\Big) \\
&\quad\quad +\frac{9}{2}p(p-2)\beta e^{-\gamma(t-\tau)}\int_{t-\tau}^{t} e^{2\gamma s}E|x(s)|^p\,ds+\frac{1}{2}e^{\gamma(t-\tau)}E||x(t)||^p \\
&\quad\quad +9p\beta n^{p/2-1}e^{-\gamma(t-\tau)}\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau}^{t} e^{2\gamma s}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds\Big).
\end{aligned}
$$

Ako je $t\in[t_0,t_0+\tau]$, na sličan način se dobija ocena

$$
\begin{aligned}
&e^{\gamma(t-\tau)}E||x_t||^p \qquad (2.65)\\
&\quad\leq e^{\gamma t_0}E\left\{||\xi||^p+\sup_{r\in[t_0,t]}|x(r)|^p\right\} \\
&\quad\leq 2e^{\gamma t_0}E||\xi||^p+(p-1)\left[\alpha+\beta\frac{p-2}{2}\right]\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}E|x(s)|^p\,ds \\
&\quad\quad +n^{p/2-1}[\alpha+(p-1)\beta]\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds\Big) \\
&\quad\quad +\frac{9}{2}p(p-2)\beta e^{-\gamma(t-\tau)}\int_{t_0}^{t} e^{2\gamma s}E|x(s)|^p\,ds+\frac{1}{2}e^{\gamma(t-\tau)}E||x(t)||^p \\
&\quad\quad +9p\beta n^{p/2-1}e^{-\gamma(t-\tau)}\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} e^{2\gamma s}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds\Big).
\end{aligned}
$$

Prema tome, za svako $t\geq t_0$ iz relacija (2.64) i (2.65) sledi

$$
\begin{aligned}
&e^{\gamma(t-\tau)}E||x_t||^p \\
&\quad\leq 4e^{\gamma t_0}E||\xi||^p+(p-1)[2\alpha+\beta(p-2)]\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}E|x(s)|^p\,ds \\
&\quad\quad +2n^{p/2-1}[\alpha+(p-1)\beta]\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t} e^{\gamma s}E|x(\rho_i(s))|^p ds\Big) \\
&\quad\quad +9p(p-2)\beta e^{-\gamma(t-\tau)}\int_{t_0\vee(t-\tau)}^{t} e^{2\gamma s}E|x(s)|^p\,ds \\
&\quad\quad +18p\beta n^{p/2-1}e^{-\gamma(t-\tau)}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0\vee(t-\tau)}^{t} e^{2\gamma s}E|x(\rho_i(s))|^p\,ds.
\end{aligned}
$$

Konačno, na osnovu relacije (2.50), Teoreme (2.3.4) i ocene (2.60), sledi da je

$$\begin{aligned}
&e^{\gamma(t-\tau)}E||x_t||^p \\
&\le 4e^{\gamma t_0}E||\xi||^p + \{(p-1)[2\alpha+(p-2)\beta]+9p(p-2)\beta e^{\gamma\tau}\}\, Ce^{\gamma t_0}E||\xi||^p \\
&\quad +2n^{p/2}[\alpha+(p-1)\beta+9p\beta e^{\gamma\tau}]\int_{t_0-\tau}^{t} e^{\gamma(u+\tau)}E|x(u)|^p\,du \\
&\le e^{\gamma t_0}\{4+(p-1)[2\alpha+(p-2)\beta]+9p(p-2)\beta e^{\gamma\tau}\}\, C\, E||\xi||^p \\
&\quad +2n^{p/2}[\alpha+\beta(p-1)+9p\beta e^{\gamma\tau}]\left[\tau e^{\gamma(t_0+\tau)}E||\xi||^p+\int_{t_0}^{T} e^{\gamma(u+\tau)}E|x(u)|^p\,du\right] \\
&\le \tilde{M}\, e^{\gamma t_0}\, E||\xi||^p,
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &= \{4+(p-1)[2\alpha+(p-2)\beta]+9p(p-2)\beta e^{\gamma\tau}\}C \\
&\quad +2n^{p/2}[\alpha+(p-1)\beta+9p\beta e^{\gamma\tau}]e^{\gamma\tau}(\tau+C).
\end{aligned}$$

Prema tome, relacija (2.62) je zadovoljena za $M=\tilde{M}\, e^{\gamma\tau}$.

Dokazivanje eksponencijalne skoro izvesne stabilnosti se izostavlja, s obzirom da je postupak isti kao u drugom delu dokaza Teoreme 2.3.3. $\diamondsuit$

Razmotrimo specijalan slučaj za $\rho_i(t)=t-\tau_i$, pri čemu su $\tau_i, i=1,\dots,n$ nenegativne konstante, a $\tau=\max_{1\le i\le n}\{\tau_i\}$. Tada se jednačina (2.49) svodi na SDJ sa konstantnim kašnjenjem oblika

$$\begin{aligned}
dx(t) &= [f(t,x(t))+F(x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_n))]\,dt \\
&\quad +G(t,x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_n))\,dw(t).
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Prema Teoremi 2.3.4, ako su zadovoljeni uslovi (i')–(iii') svako rešenje jednačine (2.66) je L^p-inegrabilno. Takodje, jednačina je eksponencijalno skoro izvesno i L^p-stabilna na osnovu Teoreme 2.3.5. Štaviše, s obzirom da uslovi (i')–(iii') ne zavise od τ_i, jednačina (2.66) je *uniformno* eksponencijalno skoro izvesno i L^p-stabilna.

Posebno, za $n=1$ i $\tau_1=0$, jednačina (2.66) postaje *stohastička diferencijalna jednačina bez kašnjenja*

$$dx(t)=[f(t,x(t))+F(t,x(t))]\,dt+G(t,x(t))\,dw(t). \tag{2.67}$$

Naredno tvrdjenje direktno sledi iz Teoreme 2.3.4 i Teoreme 2.3.5.

Posledica 2.3.1 *Neka postoje konstante λ,α,β tako da je:*

(i′) $\quad x^Tf(t,x)\le -\dfrac{\lambda}{p}\,|x|^2, \quad (t,x)\in R_+\times R^d;$

(ii″) $\quad |F(t,x)|\le\alpha\,|x|, \quad |G(t,x)|^2\le\beta\,|x|^2, \quad (t,x)\in R_+\times R^d;$

(iii″) $\quad \alpha p+\beta\,\dfrac{p(p-1)}{2}<\lambda.$

Tada je jednačina (2.67) L^p-integrabilna i eksponencijalno skoro izvesno i L^p-stabilna.

Napomena 2.3.2 Za $p = 2$, uslovi (iii), (iii') i (iii'') svode na uslove koji se mogu naći u [113]. Na primer, uslov (iii) za slučaj srednje kvadratne stabilnosti i integrabilnosti jednačine (2.40) je oblika $2\alpha + \beta + 6\lambda\sqrt{\beta\tau} < \lambda\, e^{-\lambda\tau}$.

Naredna dva primera ilustruju prethodna razmatranja. U oba slučaja, pretpostavlja se da je $\{w(t), t \geq 0\}$ skalarno Brownovo kretanje.

Primer 2.3.1 Neka je data SFDJ oblika (2.40) koja zavisi od parametra $a \in \mathbb{R}$, pri čemu je rešenje označeno sa $x(t) = (u(t), v(t))^T$, a prošlost rešenja sa $x_t(s) = (u_t(s), v_t(s))^T$, $t, s \geq 0$. Pretpostavlja se da je $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t_0}, C([-\tau, 0], \mathbb{R}^2))$ i da je

$$f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} -u(t) \\ \frac{1}{2}\, u(t) - v(t) \end{bmatrix}, \quad F(t, x_t) = \begin{bmatrix} \sin\left(\displaystyle\int_{-\tau}^{0} e^t\, v_t(s)\, ds\right) \\ 2\displaystyle\int_{-\tau}^{0} |u_t(s)|\, ds \end{bmatrix},$$

$$G(t, x_t) = \frac{a}{\sqrt{\tau}} \begin{bmatrix} 1 - e^{-\left|\int_{-\tau}^{0} \ln(1 + |u_t(s)|)\, ds\right|} \\ \displaystyle\int_{-\tau}^{0} \sin v_t(s)\, ds \end{bmatrix}.$$

Nije teško proveriti da funkcionali f, F, G zadovoljavaju Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, čime je garantovana egzistencija i jedinstvenost proizvoljnog rešenja. Očigledno, $f(t, 0) \equiv 0$, $F(t, 0) \equiv 0$ i $G(t, 0) \equiv 0$, pa jednačina ima trivijalno rešenje. Sa druge strane, kako je

$$x^T(t) f(t, x(t)) \leq -\frac{3}{4}\, |x(t)|^2,$$

$$\begin{aligned} |F(t, x_t)|^2 &= \left(\sin\left(\int_{-\tau}^{0} e^t\, v_t(s)\, ds\right)\right)^2 + \left(2\int_{-\tau}^{0} |u_t(s)|\, ds\right)^2 \\ &\leq \tau \int_{-\tau}^{0} \left[(v_t(s))^2 + 4(u_t(s))^2\right] ds \leq 4\tau \int_{-\tau}^{0} |x_t(s)|^2\, d \\ &\leq 4\tau^2 \sup_{s \in [-\tau, 0]} |x(t + s)| \\ &= 4\tau^2\, ||x_t||, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |G(t, x_t)|^2 &\leq \frac{a^2}{\tau} \left[\left(\int_{-\tau}^{0} \ln(1 + |u_t(s)|)\, ds\right)^2 + \left(\int_{-\tau}^{0} \sin v_t(s)\, ds\right)^2\right] \\ &\leq a^2\tau\, ||x_t||^2, \end{aligned}$$

uslovi (i) i (ii) su zadovoljeni za $\lambda = 3/4\, p$, $\alpha = 2\tau$, $\beta = a^2\tau$. Prema tome, ključni uslov (iii) je oblika

$$2(p-1)a^2 + 9p\, a + 8 - \frac{3}{\tau}\, e^{-3/4p\tau} < 0. \tag{2.68}$$

Neka je $g(a)$ leva strana nejednakosti (2.68). Na osnovu Teoreme 2.3.3 sledi da će razmatrana jednačina biti eksponencijalno skoro izvesno i L^p-stabilna ukoliko je

$a \in (a_1, a_2)$, pri čemu su a_1 i a_2 rešenja kvadratne jednačine $g(a) = 0$. Kako je diskriminanta pozitivna, $81p^2 + 24(p-1)e^{-3/4p\tau}/\tau > 0$, ova rešenja uvek postoje. Štaviše, ukoliko je neophodno da a bude pozitivno, odnosno, $a \in [0, a_2)$, onda τ mora biti iz intervala $(0, \tau_0)$, gde τ_0 zadovoljava jednakost $3e^{-3/4p\tau_0} = 8\tau_0$. Takodje, u ovom slučaju, na osnovu Teoreme 2.3.2 sledi da je svako rešenje L^p-integrabilno u odnosu na funkciju $e^{\gamma t}$ za $\gamma \in (0, 3/4p)$.

Primer 2.3.2 Prethodni teorijski rezultati mogu se primeniti za naliziranje stabilnsti SDJ sa promenljivim vremenskim kašnjenjem i parametrima $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$,

$$d\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = -a\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \dfrac{u(\rho_1(t))}{t+1} + v(\rho_2(t)) \\ 1 - e^{-|v(\rho_1(t))|} \end{bmatrix} dt \qquad (2.69)$$

$$+b\begin{bmatrix} \sin\left(e^{-t}u(\rho_1(t))\right) \\ v(\rho_2(t)) \end{bmatrix} dw(t), \quad t \geq 0,$$

pri čemu je zadat početni uslov $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau, 0], \mathbb{R}^2))$ i funkcije kojima se opisuje kašnjenje

$$\rho_1(t) = t - e^{-t}, \quad \rho_2(t) = t - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan t\right), \quad t \geq 0.$$

Jednostavno je proveriti da su uslovi (2.5) zadovoljeni i da je $\tau = \max\{-\rho_1(0), -\rho_2(0)\} = \pi/2$. Takodje, postoji jedinstveno rešenje $x(t) = (u(t), v(t))^T$, kao i trivijalno rešenje ove jednačine. S obzirom da važi

$$x^T(t)f(t, x(t)) = -a\,|x(t)|^2,$$

$$\begin{aligned} |F(t, x(\rho_1(t)), \rho_2(t)))|^2 &\leq 2\,|x(\rho_1(t))|^2 + 2|x(\rho_2(t))|^2 \\ &\leq 4 \sup_{s\in[-\pi/2,0]} |x(t+s)|^2 \\ &= 4\,||x_t||^2, \end{aligned}$$

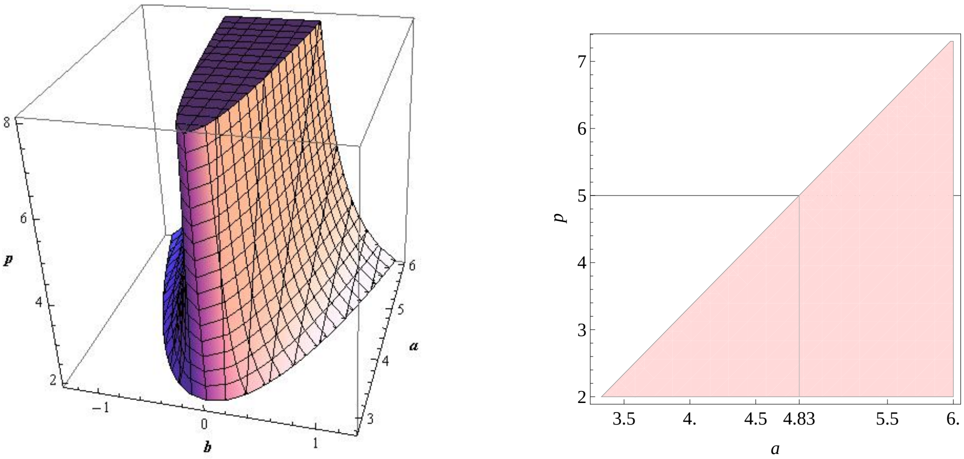
$$\begin{aligned} |G(t, x(\rho_1(t)), \rho_2(t)))|^2 &\leq b^2[|x(\rho_1(t))|^2 + |x(\rho_2(t))|^2] \\ &\leq 2b^2||x_t||^2, \end{aligned}$$

uslovi (i') i (ii') su zadovoljeni za $\lambda = ap$, $\alpha = 2$, $\beta = 2b^2$, pa je (iii') oblika

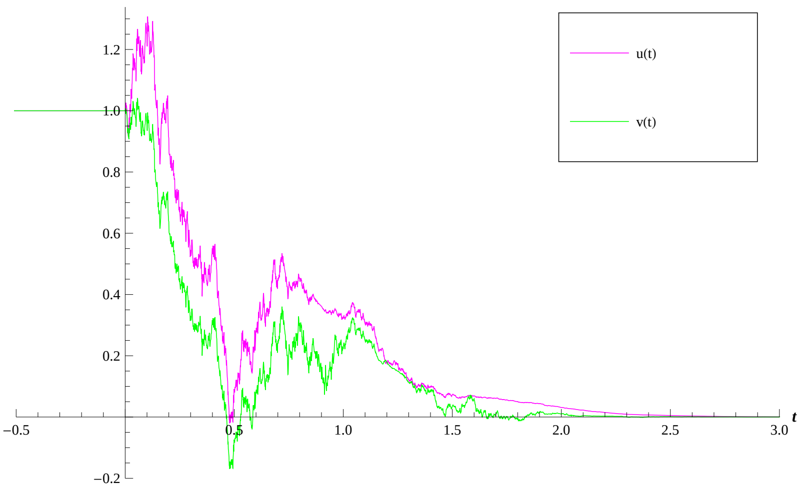
$$2\sqrt{2} + 2b^2(p-1) < a. \qquad (2.70)$$

Prema tome, ako je zadovoljena prethodna relacija, na osnovu Teoreme 2.3.4 sledi da je svako rešenje L^p-integrabilno u odnosu na funkciju $e^{\gamma t}$, pri čemu je $\gamma \in (0, ap)$. Pri istim uslovima, primenom Teoreme 2.3.5 sledi da je jednačina (2.69) eksponencijalno skoro izvesno i L^p-stabilna.

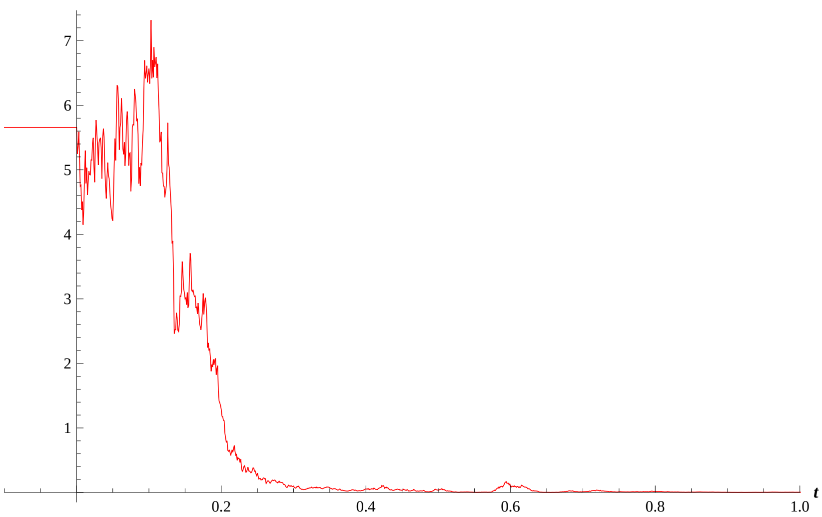
S obzirom da jednačina (2.69) direktno zavisi od parametara a i b, na Slici 2.7 je prikazana oblast eksponencijalne skoro izvesne i L^p-stabilnosti, $p \geq 2$, koja zavisi od ovih parametara. Specijalno za $b = 0.5$ za eksponencijalnu stabilnost momenta petog reda dovoljno je da je $a = 4.83$. Za tako izabrane vrednosti parametara i početni uslov $\xi = (1, 1)$ grafički prikazi trajektorija rešenja $(u(t), v(t))$ i $E|x(t)|^5$ su prikazani na Slici 2.8 i Slici 2.9, respektivno.



Slika 2.7: Oblast u kojoj je ispunjen uslov (2.70) (levo) i za fiksirano $b = 0.5$ (desno)



Slika 2.8: Trajektorije sistema (2.69) za $b = 0.5$, $a = 4.83$, $\xi = (1, 1)$ i $\tau = \frac{\pi}{2}$



Slika 2.9: $E|x(t)|^5$ za $b = 0.5$, $a = 4.83$, $\xi = (1, 1)$ i $\tau = \frac{\pi}{2}$

Glava 3

Stabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa beskonačnim kašnjenjem

U ovoj glavi se razmatra opšta skoro izvesna i L^p-stabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačna sa beskonačnim kašnjenjem primenom metode Razumikhina. U Poglavlju 3.1 su navedeni teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja razmatrane klase jednačina i poznati rezulatati koji se odnose na stabilnost rešenja pri uslovu Razumikhina. Dat je poseban osvrt na specijalne oblike ovih jednačina koje imaju veliku primenu u medicini, biologiji i tehnici kao što su Lotka-Volterra sistemi sa beskonačnim kašnjenjem. U Poglavlju 3.2 se razmatraju dovoljni uslovi L^p-stabilnosti i skoro izvesne stabilnosti u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa beskonačnim kašnenjem. Rezultati Poglavlja 3.2 prošireni su u Poglavlju 3.3 i Poglavlju 3.4 na stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski zavisnim beskonačnim kašnjenjem i distributivnim kašnjenjem, respektivno.

3.1 Uvodni pojmovi

U mnogim situacijama iz realnog života promene sistema su uslovljene trenutnim stanjem i stanjima sistema u periodu koji prethodi datom trenutku. Ukoliko te promene zavise od svih stanja sistema u prošlosti, u matematičkom modeliranju dinamike sistema se primenjuju stohastičke diferencijalne jednačine sa beskonačnim kašnjenjem.

S obzirom da SFDJ sa beskonačnim kašnjenjem sadrže memoriju nekog sistema, one realnije predstavljaju stvarne sisteme pa su samim tim predmet razmatranja mnogih oblasti nauke i tehnike. Na primer, u teoriji viskoelastičnosti, modeli sa memorijom se koriste za opisivanje stanja materijala pri naprezanju, tj. savijanju. Materijali koji se razmatraju su, na primer, drvo, polimeri, plastika, led, itd. U literaturi [7, 30, 78] ponašanje viskoelastičnih struktura (štapa dužine l) se opisuje jednačinom sa beskonačno raspodeljenim kašnjenjem (memorijom),

$$\begin{aligned}\rho u_{tt}(t,x) &= \sigma_t(t,x) + h(t,x),\\ \sigma(t,x) &= P(u_x(t,x)) - \int_0^\infty a(t-s)q(u_x(t,x))\,ds,\end{aligned}$$

pri čemu je ρ gustina materijala, σ Piola-Kirchhoffov napon, h sila kojom se utiče na telo materijala, $u(t,x)$ položaj štapa na udaljenosti x od počeka štapa, P opisuje trenutni odgovor materijala, a integralni član zavisi od istorije pomeranja tela materijala u periodu $(-\infty, t]$. U radovima [28, 29] Drozdov i Kolmanovskii razmatraju stohastičke oblike ovog sistema i stabilnost rešenja. Preciznije, predmet izučavanja je stabilnost viskoelastičnog štapa koji je izložen uticaju spoljašnjih sila u beskonačnom vremenskom intervalu. Dati su dovoljni uslovi srednje kvadratne stabilnosti viskoelastičnog štapa za različite periode dejstva sile i različite vrste fiksiranja krajeva štapa. U radu [28], u tu svrhu se koristi modifikovani metod Lyapunova.

Stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine sa beskonačnim kašnjenjem imaju veliku primenu u posebnoj oblasti biologije, u populacionoj dinamici. Razmatranje beskonačnog kašnjenja u diferencijalnim jednačinama potiče od rada [166] Volterre u modelima rasta populacije. Naime, u ovim modelima zajedničko delovanje bioloških vrsta u prošlosti za vreme nekog perioda τ, uključujući i slučaj $\tau = \infty$, može biti opisano pomoću integralnih jednačina. Klasičan predator-plen model su, nezavisno jedan od drugog, 1925. godine objavili Lotka i Volterra,

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad \dot{y} = -cy + dxy, \quad a,b,c,d > 0,$$

gde x predstavlja broj elemenata populacije plena, a y broj elemenata populacije predatora. Nekoliko godina kasnije, Volterra sugeriše uvodjenje beskonačnog kašnjenja u jednačinu predatora s obzirom da posledice ponašanja predatora na rast populacije nisu trenutne,

$$\dot{y}(t) = -cy(t) + dy(t)\int_{-\infty}^{t} x(s)G(t-s)\,ds,$$

pri čemu je "funkcija memorije" $G(s)$ neprekidna i integrabilna na $[0,\infty)$ i $G(s) = 0$ za $s > \tau$, a τ je period inkubacije predatora.

Uvodjenje velikog kašnjenja u sistem diferencijalnih jednačina često dovodi do oscilacija, nestabilnosti i neograničenosti rešenja. Rezultati vezani za egzistenciju, jedinstvenost i stabilnost rešenja determinističkih Lotka-Volterra sistema mogu se naći u mnogim radovima, na primer, Miller [132], Kung i Smith [87], Chen [17] i referencama u njima.

Medjutim, realni sistemi su najčešće pod uticajem slučajnih komponenata, pa se dinamika neke vrste realnije opisuje stohastičkim Lotka-Voltera modelima. Štaviše, Bahar i Mao [8] su pokazali da uticaj okoline (šum okoline) može suzbiti eksploziju neke populacije, a Mao [122] da različiti uticaji okoline imaju različite posledice na populacione sisteme sa kašnjenjem. Wan i Zhou [169] su razmatrali n-dimenzionalni stohastički Lotka-Volterra sistem sa beskonačnim kašnjenjem oblika

$$dx_i(t) = x_i(t)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)x_j(s)\,ds\right)dt$$
$$+x_i(t)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j(t)dw_j, \quad i=\overline{1,n}, \quad t\geq 0,$$

pri čemu je početni uslov $x_i(\theta) = \varphi_i(\theta) > 0$ za $\theta \in (-\infty, 0]$ i $\sup_{-\infty<\theta\leq 0}|\varphi(\theta)| < \infty$. Funkcije φ_i, $i = \overline{1,n}$ su neprekidne na $(-\infty, 0]$, a k_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$ su nenegativne, neprekidne funkcije definisane na $[0,\infty)$ i zadovoljavaju uslov $\int_0^\infty k_{ij}(t)dt = 1$. Ova jednačina predstavlja specijalan slučaj SFDJ sa raspodeljenim beskonačnim kašnjenjem o kojoj će biti reči u Poglavlju 3.4. Ponašanjem i svojstvima rešenja stohastičkih Lotka-Volterra sistema sa beskonačnim kašnjenjem bavili su se, izmedju ostalih, Liu i Wang [105], Huang *et al.* [49], Xu *et al.* [179], Xu [180], Wei i Cai [171] i drugi.

U ovoj glavi se razmatra *stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina sa beskonačnim kašnjenjem*,

$$dx(t) = f(t, x_t)\,dt + g(t, x_t)\,dw(t), \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

sa zadatim početnim uslovom $x_0 = \xi = \{\xi(\theta) : \theta \leq 0\} \in L^p_{\mathcal{F}_0}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$, pri čemu je $x(t) \in \mathbb{R}^n$ nepoznati stohastički proces, $x_t = \{x(t+\theta) : -\infty < \theta \leq 0)\} \in BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ i $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je m-dimenzionalno Brownianovo kretanje. Funkcionali $f : \mathbb{R}_+ \times BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ i $g : \mathbb{R}_+ \times BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times m}$ su Borel-merljivi, gde je $BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ familija ograničenih i neprekidnih funkcija $\varphi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ sa normom $||\varphi|| = \sup_{\theta\leq 0}|\varphi(\theta)|$. Za $p > 0$ i $t \geq 0$, $L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ predstavlja familiju $\mathcal{F}_t$-adaptiranih slučajnih promenljivih $\varphi = \{\varphi(\theta) : \theta \leq 0\} \in BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ za koju je $||\varphi||^p_E = \sup_{\theta\leq 0} E|\varphi(\theta)|^p < \infty$.

Definicija 3.1.1 *Za n-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \in (-\infty, T]\}$ se kaže da je strogo rešenje jednačine (3.1) ako je s.i. neprekidan, $\{x(t), t \in ([0, T]\}$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran proces, $\int_0^T |f(t, x_t)|dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |g(t, x_t)|^2 dt < \infty$ s.i., $x_0 = \xi$ s.i. i za svako $t \in [0, T]$ integralni oblik jednačine (3.1) je zadovoljen s.i.*

Definicija 3.1.2 *Rešenje $\{x(t), t \in (-\infty, T]\}$ jednačine (3.1) je jedinstveno ako je bilo koje drugo rešenje $\{\tilde{x}(t), t \in (-\infty, T]\}$ stohastički ekvivalentno sa njim, tj. ako je*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in (-\infty, T]\} = 1.$$

Do sada nema mnogo radova koji se bave egzistencijom i jedinstvenošću rešenja SFDJ sa beskonačnim kašnjenjem, a ovde navodimo radove Kolmanovskiog i Nosova [77], Weia i Wanga [170] i Rena *et al.* [151]. Wei i Wang [170] su dokazali egzistenciju i jedinstvenost rešenja jednačine (3.1) pri uniformnom Lipschitzovom uslovu i oslabljenom uslovu linearnog rasta. Ren *et al.* [151] su dokazali egzistenciju i jedinstvenost rešenja pri opštijem, ne-Lipschitzovom uslovu, razmatrajući Lipschitzov uslov kao specijalan slučaj, i oslabljenom uslovu linearnog rasta. Kako većina Lotka-Volterra sistema ne zadovoljavaju uslov linearnog rasta, Liu *et al.* [107] taj problem prevazilaze korišćenjem stohastičke verzije funkcije Lyapunova.

Teorema 3.1.1 (Wei i Wang, [170]) *Ako koeficijenti f i g jednačine (3.1) zadovoljavaju Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. ako postoji pozitivna konstanta K tako da za svako $t \in [0, T]$ i $\varphi, \psi \in BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ važi*

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi))|^2 \vee |g(t,\varphi)-g(t,\psi)|^2 \leq K(||\varphi - \psi||^2),$$

$$|f(t,0)|^2 \vee |g(t,0)|^2 \leq K,$$

tada postoji jedinstveno s.i. neprekidno rešenje $\{x(t), -\infty < t \leq T\}$ jednačine (3.1). Štaviše, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E\sup_{-\infty<t\leq T}|x(t)|^p < \infty$.

S obzirom da je Lipschitzov uslov isuviše restriktivan, Wei i Wang su dokazali da prethodna teorema važi i ukoliko se uniformni Lipschitzov uslov zameni lokalnim Lipschitzovim uslovom. U tom slučaju, postoji jedinstveno rešenje na svakom intervalu (t_0, ∞), pri čemu je $t_0 \in \mathbb{R}$ proizvoljan realan broj.

Iako sistemi sa beskonačnim kašnjenjem imaju veliku primenu, sistemi sa konačnim kašnjenjem su više izučavani, pa postoji opsežna literatura koja se odnosi na ispitivanje stabilnosti ovih sistema, o čemu je bilo reči u Glavi 2. Poslednjih godina raste interesovanje za ispitivanje ponasanja rešenja jednačine (3.1). Na primer, Hu *et al.* [47] proučavaju koliku stohastičku perturbaciju može da podnese deterministički stabilan sistem sa beskonačnim kašnjenjem, a da i dalje ostane eksponencijalno stabilan, dok Zhou *et al.* [184] i Liu *et al.* [107] daju dovoljne uslove za skoro izvesnu i L^p-stabilnost u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju, ne koristeći metodu Razumikhina.

Kao što je ranije naglašeno, metoda Razumikhina predstavlja efikasnu i primenljivu verziju metode Lyapunova (za više detalja pogledati Poglavlje 1.5.1), što je i bio motiv za njeno izučavanje u ovoj doktorskoj disertaciji. Metodu Razumikhina su primenjivali Yang *et al.* [181] i Li i Fu [96] za ispitivanje eksponencijalne skoro izvesne stabilnosti i eksponencijalne L^p-stabilnosti rešenja SFDJ sa beskonačnim kašjenjem.

Teorema 3.1.2 (Yang *et al.*, [181]) *Neka postoje pozitivne konstante p, μ, c_1 i c_2 tako da važi*

$$c_1|x|^p \leq V(t,x) \leq c_2|x|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

i

$$E\mathcal{L}V(t,\varphi) \leq -\mu EV(t,\varphi(0)) \tag{3.3}$$

za svako $t \geq 0$ i one $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju uslov

$$e^{\mu\theta}EV(t+\theta,\varphi(\theta)) \leq EV(t,\varphi(0)), \quad -\infty < t \leq 0. \tag{3.4}$$

Tada je jednačina (3.1) eksponencijalno L^p-stabilna, odnosno, za svako $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ važi

$$E|x(t;\xi)|^p \leq \frac{c_2}{c_1}||\xi||^p_E\, e^{-\mu t}, \quad \text{za svako } t \geq 0. \tag{3.5}$$

Teorema 3.1.3 (Yang *et al.*, [181]) *Neka su ispunjeni svi uslovi Teoreme 3.1.2 i neka je* $p \geq 2$. *Ako postoji konstanta* $K > 0$ *tako da za svako* $t \geq 0$ *i* $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ *važi*

$$E|f(t,\varphi|^p + E|g(t,\varphi|^p \geq K \sup_{\theta \leq 0} e^{\mu\theta} E|\varphi(\theta)|^p, \tag{3.6}$$

tada je za svako $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ *i bilo koje* $\gamma \in (0, \mu)$,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|x(t,\xi)|}{t} \leq -\frac{\gamma}{p} \quad s.i. \tag{3.7}$$

U nastavku ove glave se primenjuje metoda Razumikhina da bi se dobili dovoljni uslovi za opštu skoro izvesnu i L^p-stabilnost jednačine (3.1). Kao specijalan slučaj, dobiće se rezultati rada [181], ako je decay-funkcija upravo eksponencijalna funkcija. Sadržaji Poglavlja 3.2 i Poglavlja 3.3 objavljeni su u radu [143], G. Pavlović, S. Janković, *Razumikhin-type theorems on general decay stability of stochastic functional differential equations with infinite delay*, Journal of Computational and Applied Mathematics 236(7) (2012) 1679-1690.

3.2 Ispitivanje stabilnosti stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina primenom metode Razumikhina

S obzirom da je predmet istraživanja ove glave stabilnost rešenja, pretpostavilja sed da, bez obzira na to koji uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja su zadovoljeni (videti [77, 151, 170]), postoji jedinstveno globalno rešenje $x(t;\xi), t \in \mathbb{R}$ jednačine (3.1) tako da je $E\sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t;\xi)|^p < \infty$, kao i da su dobro definisani svi integrali Lebesguea i Itôa koji se pojavljuju u daljem radu.

Zbog jednostavnijeg ispitivanja stabilnosti rešenja, kao i obično, pretpostavlja se da je $f(0,t) \equiv 0$ i $g(0,t) \equiv 0$, tako da jednačina (3.1) ima trivijalno rešenje $x(t;0) \equiv 0$.

Decay-funkcija $\lambda(t)$, u odnosu na koju se ispituje L^p-stabilnost i skoro izvesna stabilnost jednačine (3.1), definisana je u Definiciji 2.1.1: Za rastuću funkciju $\lambda \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $\lambda(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$, jednačina (3.1) je L^p-stabilna reda γ u odnosu na $\lambda(t)$ ako postoje konstante $\gamma > 0$ i $c(\xi) > 0$, tako da za bilo koje $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_0, C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d))$ važi

$$E|x(t;\xi)|^p \leq c(\xi) \cdot \lambda^{-\gamma}(t), \quad t \geq 0,$$

odnosno,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma,$$

a skoro izvesno stabilna reda γ u odnosu $\lambda(t)$ ako je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t;\xi)|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma \quad \text{s.i.}$$

S obzirom da je pristup Razumikhina kombinovan sa funkcijom Lyapunova, neophodno je da definisati sledeći diferencijalni operator pridružen jednačini (3.1):

Za funkciju $V \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$, operator $\mathcal{L}V : \mathbb{R}_+ \times BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ je definisan na sledeći način,

$$\mathcal{L}V(t,\varphi) := V_t(t,\varphi(0)) + V_x(t,\varphi(0))f(t,\varphi) + \frac{1}{2}\,tr[g^T(t,\varphi)V_{xx}(t,\varphi(0))g(t,\varphi)],$$

pri čemu je $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$, $V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$ i $V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}$.

Pre iskazivanja *teorema tipa Razumikhina*, uvode se sledeće prepostavke za decay-funkciju i funkciju V.

($\mathbf{H_1}$) Decay-funkcija $\lambda \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ je strogo rastuća, $\lambda(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$,

$$\lambda(0) = 1 \quad i \quad \lambda(t+s) \le \lambda(t)\lambda(s), \quad t, s \ge 0. \tag{3.8}$$

($\mathbf{H_2}$) Postoje konstante $p > 0$ i $c_1, c_2 > 0$ tako da funkcija $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ zadovoljava uslov

$$c_1|x|^p \le V(t,x) \le c_2|x|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

Primenom metode Razumikhina dokazuje se sledeće tvrdjenje koje daje dovoljne uslove pri kojima je jednačina (3.1) L^p-stabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Teorema 3.2.1 *Neka su zadovoljene pretpostavke* ($\mathbf{H_1}$) *i* ($\mathbf{H_2}$) *za funkcije λ i V, respektivno. Takodje, neka postoje konstante $p > 0$, $\mu > 0, q > 0$ i $\nu \ge 1$ tako da važi*

$$E\mathcal{L}V(t,\varphi) \le -q\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,EV(t,\varphi(0)) \tag{3.10}$$

za svako $t \ge 0$ i one $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju uslov Razumikhina

$$EV(t+\theta,\varphi(\theta)) \le \nu\,\lambda^{\mu}(-\theta)\,EV(t,\varphi(0)), \quad -\infty < t \le 0. \tag{3.11}$$

Tada je jednačina (3.1) L^p-stabilna reda $\gamma = q \wedge \mu$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, odnosno, za svako $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$ važi

$$E|x(t;\xi)|^p \le \frac{c_2}{c_1}\,||\xi||^p_E\,\lambda^{-\gamma}(t), \quad za\ svako\ t \ge 0. \tag{3.12}$$

Dokaz. Kao i ranije, biće korišćen zapis $x(t)$ umesto $x(t;\xi)$ kojim se označava rešenje jednačine (3.1) u odnosu na zadati početni uslov ξ.

Najpre, neka je $\bar{\gamma} = \gamma - \epsilon$ za proizvoljno $\epsilon \in (0,\gamma)$. U tom slučaju, ukoliko se dokaže da je za svako $t \ge 0$

$$\lambda^{\bar{\gamma}}(t)EV(t,x(t)) \le c_2||\xi||^p_E, \tag{3.13}$$

relacija (3.12) direktno sledi kad $\epsilon \to 0$.

Za $t = 0$, na osnovu (3.9) i činjenice da je $\lambda(0) = 1$, dobija se

$$\lambda^{\bar{\gamma}}(0)EV(0, x(0)) \leq c_2 E|x(0)|^p \leq c_2 \sup_{\theta \leq 0} E|\xi(\theta)|^p = c_2||\xi||_E^p,$$

pa je relacija (3.13) zadovoljena. Ako je $t > 0$, relacija (3.13) biće dokazana kontradikcijom. U tu svrhu, pretpostavlja se suprotno, tj. da (3.13) ne važi. Kako je $V(t, x(t))$ neprekidna funkcija, može se naći neko $\rho \geq 0$ tako da je

$$\lambda^{\bar{\gamma}}(t)EV(t, x(t)) \leq c_2||\xi||_E^p \tag{3.14}$$

za svako $t \in [0, \rho]$. Takodje, postoji niz $\{t_k\}_{k\geq 1}$, $t_k \downarrow \rho$ tako da je

$$\lambda^{\bar{\gamma}}(t_k)EV(t_k, x(t_k)) > c_2||\xi||_E^p. \tag{3.15}$$

Otuda je

$$\lambda^{\bar{\gamma}}(\rho)EV(\rho, x(\rho)) = c_2||\xi||_E^p. \tag{3.16}$$

Dokažimo da uslov (3.11) važi za $\varphi = x_\rho$.

Najpre, neka je $-\infty < \theta < -\rho$. Tada, na osnovu (3.9) i (3.16) sledi

$$\begin{aligned}\nu^{-1}\,\lambda^{-\mu}(-\theta)EV(\rho+\theta, x(\rho+\theta)) &\leq \lambda^{-\bar{\gamma}}(-\theta)EV(\rho+\theta, x(\rho+\theta))\\ &\leq \lambda^{-\bar{\gamma}}(-\theta)c_2 \sup_{\theta\leq-\rho} E|x(r+\theta)|^p\\ &= \lambda^{-\bar{\gamma}}(-\theta)c_2||\xi||_E^p\\ &\leq \lambda^{-\bar{\gamma}}(\rho)c_2||\xi||_E^p\\ &= EV(\rho, x(\rho)).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ako je $-\rho \leq \theta \leq 0$, primenom relacija (3.14), (3.16) i činjenice da je $\lambda(t+s) \leq \lambda(t)\lambda(s)$ za $t, s \geq 0$, dobija se

$$\begin{aligned}\nu^{-1}\,\lambda^{-\mu}(-\theta)EV(\rho+\theta, x(\rho+\theta)) &\leq \lambda^{-\bar{\gamma}}(-\theta)EV(\rho+\theta, x(\rho+\theta))\\ &\leq \lambda^{-\bar{\gamma}}(-\theta)\lambda^{-\bar{\gamma}}(\rho+\theta)c_2||\xi||_E^p\\ &\leq \lambda^{-\bar{\gamma}}(\rho)c_2||\xi||_E^p\\ &= EV(\rho, x(\rho)).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Sada se izdvajaju dva slučaja: $EV(\rho, x(\rho)) = 0$ i $EV(\rho, x(\rho)) > 0$. Ako je $EV(\rho, x(\rho)) = 0$, iz relacije (3.17) sledi da je $EV(\rho+\theta, x(\rho+\theta)) = 0$. Primenom uslova (3.9) zaključuje se da je $\xi(\theta) = 0$ skoro izvesno za $-\infty < \theta < 0$, što povlači da je $x(t) \equiv 0$ za svako $t \in \mathbb{R}$. Dakle, nejednakost (3.13) je zadovoljena.

Ako je $EV(\rho, x(\rho)) > 0$, na osnovu već pokazanog, iz (3.17) i (3.18) za svako $-\infty < \theta < 0$ važi

$$\nu^{-1}\,\lambda^{-\mu}(-\theta)EV(\rho+\theta, x(\rho+\theta)) \leq EV(\rho, x(\rho)),$$

odnosno, relacija (3.11) važi za $\varphi = x_\rho$. Štaviše, na osnovu uslova (3.10) se dobija

$$E\mathcal{L}V(\rho, x(\rho+\theta)) \le -q\,\frac{\lambda'(\rho)}{\lambda(\rho)}\,EV(\rho, x(\rho)) \le -\bar{\gamma}\,\frac{\lambda'(\rho)}{\lambda(\rho)}\,EV(\rho, x(\rho))$$

za svako $-\infty < \theta \le 0$. Kako su $E\mathcal{L}V(t, x_t)$ i $EV(t, x(t))$ neprekidne funkcije, može se naći dovoljno malo $h > 0$ tako da za svako $\rho - h \le t \le \rho + h$ važi

$$E\mathcal{L}V(t, x_t) \le -\bar{\gamma}\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,EV(t, x(t)).$$

Primenom formule Itôa na funkciju $\lambda^{\bar{\gamma}}(s)V(s, x(s))$, pri čemu je $\rho \le s \le \rho + \varepsilon$ za bilo koje $\varepsilon \in (0, h)$, iz (3.16) sledi

$$\begin{aligned}
&\lambda^{\bar{\gamma}}(\rho+\varepsilon)EV(\rho+\varepsilon, x(\rho+\varepsilon)) - c_2||\xi||_E^p \\
&\quad = \lambda^{\bar{\gamma}}(\rho+\varepsilon)EV(\rho+\varepsilon, x(\rho+\varepsilon)) - \lambda^{\bar{\gamma}}(\rho)EV(\rho, x(\rho)) \\
&\quad = \int_\rho^{\rho+\varepsilon} \lambda^{\bar{\gamma}}(s)\left[\bar{\gamma}\,\frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)}EV(s, x(s)) + E\mathcal{L}V(s, x_s)\right] ds \\
&\quad \le 0.
\end{aligned}$$

Ova relacija je u kontradikciji sa (3.15). Prema tome, važi nejednakost (3.13), čime je teorema dokazana. ♢

Naredno tvrdjenje daje dovoljne uslove skoro izvesne stabilnosti jednačine (3.1) u odnosu na zadatu decay-funkciju $\lambda(t)$.

Teorema 3.2.2 *Neka su zadovoljene sve pretpostavke Teoreme 3.2.1 za $p \ge 2$. Ako postoje konstante $K > 0$ i $\delta \in (0, \gamma)$, pri čemu je $\gamma = q \wedge \mu$, tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)\,dt < \infty$ i*

$$E|f(t, \varphi)|^p + E|g(t, \varphi)|^p \le K \sup_{\theta \le 0} \lambda^{-\mu}(-\theta)E|\varphi(\theta)|^p \tag{3.19}$$

za svako $t \ge 0$ i $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$, tada je jednačina (3.1) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\gamma-\delta}{p}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, odnosno, za svako $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ važi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t;\xi)|}{\ln\lambda(t)} \le -\frac{\gamma-\delta}{p} \quad s.i. \tag{3.20}$$

Dokaz. Da bi bila dokazana nejednakost (3.20), najpre je neophodno pokazati da važi

$$E \sup_{k-1\le t\le k} |x(t)|^p \le H\lambda^{-\gamma}(k-1), \quad k \in N, \tag{3.21}$$

gde je H neka generisana konstanta.

Neka je $k - 1 \le t \le k$. Tada je

$$\begin{aligned}
E \sup_{k-1\le t\le k} |x(t)|^p \le 3^{p-1}\Bigg[&E|x(k-1)|^p + E\Big|\int_{k-1}^k f(s, x_s)\,ds\Big|^p \\
&+ E \sup_{k-1\le t\le k}\Big|\int_{k-1}^t g(s, x_s)\,dw(s)\Big|^p\Bigg].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Drugi sabirak u prethodnoj relaciji može se proceniti na osnovu Teoreme 3.2.1 po kojoj je

$$E|x(k-1)|^p \le \frac{c_2}{c_1}||\xi||_E^p\,\lambda^{-\gamma}(k-1). \tag{3.23}$$

Primenom Hölderove nejednakosti (1.27) i uslova (3.19), dobija se

$$\begin{aligned}
& E\left|\int_{k-1}^{k} f(s,x_s)\,ds\right|^p \qquad (3.24)\\
& \le \int_{k-1}^{k} E|f(s,x_s)|^p\,ds\\
& \le K\int_{k-1}^{k} \sup_{\theta\le 0}\lambda^{-\mu}(-\theta)E|x(s+\theta)|^p\,ds\\
& \le K\int_{k-1}^{k}\left[\sup_{\theta\le -s}\lambda^{-\mu}(-\theta)E|x(s+\theta)|^p + \sup_{-s\le\theta\le 0}\lambda^{-\mu}(-\theta)E|x(s+\theta)|^p\right]ds\\
& \le K\int_{k-1}^{k}\left[\lambda^{-\mu}(s)||\xi||_E^p + \sup_{-s\le\theta\le 0}\lambda^{-\mu}(-\theta)\lambda^{-\gamma}(s+\theta)\frac{c_2}{c_1}||\xi||_E^p\right]ds\\
& \le K\int_{k-1}^{k}\left[\lambda^{-\gamma}(s)||\xi||_E^p + \sup_{-s\le\theta\le 0}\lambda^{-\gamma}(-\theta)\lambda^{-\gamma}(s+\theta)\frac{c_2}{c_1}||\xi||_E^p\right]ds\\
& \le K\Big(1+\frac{c_2}{c_1}\Big)||\xi||_E^p\int_{k-1}^{k}\lambda^{-\gamma}(s)\,ds\\
& \le K\Big(1+\frac{c_2}{c_1}\Big)||\xi||_E^p\,\lambda^{-\gamma}(k-1).
\end{aligned}$$

Analogno, primenom Burkholder-Davis-Gandy nejednakosti (Teorema 1.3.3), sledi

$$\begin{aligned}
E\sup_{k-1\le t\le k}\left|\int_{k-1}^{k} g(s,x_s)\,dw(s)\right|^p &\le C_p\,E\left[\int_{k-1}^{k}|g(s,x_s)|^2\,ds\right]^{\frac{p}{2}} \qquad (3.25)\\
&\le C_pK\Big(1+\frac{c_2}{c_1}\Big)||\xi||_E^p\,\lambda^{-\gamma}(k-1),
\end{aligned}$$

gde je C_p generisana konstanta. Zamenom (3.23), (3.24), (3.25) u (3.22) jednostavno se pokazuje da važi (3.21), pri čemu je $H=(1+c_2/c_1)[1+k(1+C_p)]\,||\xi||_E^p$.

Primenom nejednakosti Chebysheva (1.25) sledi

$$\begin{aligned}
P\Big\{\sup_{k-1\le t\le k}|x(t)|^p \ge \lambda^{-(\gamma-\delta)}(k)\Big\} &\le \lambda^{\gamma-\delta}(k)E\sup_{k-1\le t\le k}|x(t)|^p\\
&\le H\,\lambda^{\gamma-\delta}(k)\,\lambda^{-\gamma}(k-1)\\
&\le H\,\lambda^{\gamma-\delta}(1)\,\lambda^{-\delta}(k-1).
\end{aligned}$$

Kako je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-\delta}(k-1) \le \sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\lambda^{-\delta}(s)\,ds = \int_0^{\infty}\lambda^{-\delta}(s)\,ds < \infty,$$

na osnovu Borel-Cantellijeve leme se zaključuje da postoji prirodan broj $k_0(\omega) > 0$ tako da za skoro sve $\omega \in \Omega$ i $k \geq k_0(\omega)$ važi

$$|x(t)|^p \leq \lambda^{-(\gamma-\delta)}(k) \leq \lambda^{-(\gamma-\delta)}(t), \quad k-1 \leq t \leq k.$$

Konačno, nejednakost (3.20) sledi iz poslednje relacije, čime je teorema dokazana. $\diamondsuit$

Napomena 3.2.1 Ako je $\lambda(t) = e^t$, $q = \mu$, $\nu = 1$ i $\delta = 0$, Teorema 3.2.1 i Teorema 3.2.2 se svode na odgovarajuće teoreme iz rada [181] koje daju dovoljne uslove za eksponencijalnu L^p-stabilnost i eksponencijalnu skoro izvesnu stabilnost jednačine (3.1). U tom slučaju, uslov $\int_0^\infty e^{-\delta t}\, dt < \infty$ je zadovoljen za svako $\delta > 0$, pa nije neophodno isticati ga u ovim teoremama.

Nadalje se razmatra *perturbovana stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina (SFDJ) sa beskonačnim kašnjenjem*,

$$dx(t) = [h(t, x(t)) + f(t, x_t)]\, dt + g(t, x_t)\, dw(t), \quad t \geq 0, \tag{3.26}$$

pri čemu je zadat početni uslov $x_0 = \xi = \{\xi(\theta) : \theta \leq 0\} \in L^p_{\mathcal{F}_0}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$. Funkcija $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je Borel-merljiva, a funkcionali f i g su definisani kao ranije. Takodje, neka je $h(t, 0) \equiv 0, f(t, 0) \equiv 0, g(t, 0) \equiv 0$. S obzirom da će se razmatrati stabilnost rešenja, pretpostavlja se da postoji jedinstveno globalno rešenje jednačine (3.26) za bilo koji početni uslov. Teoreme egzistencije i jedinstvenosti se mogu naći u [107, 151].

Teorema 3.2.3 *Neka je $p \geq 2$ i neka su zadovoljene pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$ za funkcije λ i V, raspektivno. Takodje, neka postoje konstante $\mu > 0, \rho > 0$, $\nu \geq 1$ i $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \geq 0$ tako da važi*

$$\begin{aligned} V_t(t,x) + V_x(t,x) \cdot h(t,x) &\leq -\rho \, \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\, V(t,x), \\ |V_x(t,x)| &\leq \eta_1 \, \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\, [V(t,x)]^{\frac{p-1}{p}}, \\ ||V_{xx}(t,x)|| &\leq \eta_2 \, \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\, [V(t,x)]^{\frac{p-2}{p}} \end{aligned} \tag{3.27}$$

za svako $t \geq 0$, $x \in R^n$ i

$$E|f(t,\varphi)|^p \leq \eta_3 \, \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\, EV(t, \varphi(0)), \quad E|g(t,\varphi)|^p \leq \eta_4 \, \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\, EV(t, \varphi(0)) \tag{3.28}$$

za svako $t \geq 0$ i one $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju uslov

$$EV(t+\theta, \varphi(\theta)) \leq \nu\, \lambda^\mu(-\theta)\, EV(t, \varphi(0)), \quad -\infty < \theta \leq 0. \tag{3.29}$$

Ako je

$$\rho > \eta_1 \eta_3^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2} \eta_2 \eta_4^{\frac{2}{p}},$$

tada je jednačina (3.26) L^p-stabilna reda $\gamma = (\rho - \eta_1\eta_3^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{2}\eta_2\eta_4^{\frac{2}{p}}) \wedge \mu$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Štaviše, ako postoje konstante $K > 0$ i $\delta \in (0, \gamma)$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)\,dt < \infty$ i

$$E|h(t,\varphi(0))|^p + E|f(t,\varphi)|^p + E|g(t,\varphi)|^p \le K \sup_{\theta\le 0} \lambda^{-\mu}(-\theta)E|\varphi(\theta)|^p \tag{3.30}$$

za svako $t \ge 0$ i $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$, tada je jednačina (3.26) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\gamma-\delta}{p}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Uvodjenjem smene $f(t,\varphi) = h(t,\varphi(0)) + f(t,\varphi)$, jednačina (3.26) se svodi na jednačinu (3.1). Najpre će biti provereno da li važi uslov (3.10) za one $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju (3.29).
Na osnovu (3.27) je

$$\begin{aligned} E\mathcal{L}V(t,\varphi) \le &-\rho\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,EV(t,\varphi(0)) + \eta_1\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,E([V(t,\varphi(0))]^{\frac{p-1}{p}}|f(t,\varphi)|) \\ &+ \frac{\eta_2}{2}\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,E([V(t,x)]^{\frac{p-2}{p}}|g(t,\varphi)|^2). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.23) za $\varepsilon = \eta_3{}^{\frac{1}{p}}$ i nejednakosti (3.28), dobija se

$$\begin{aligned} E([V(t,\varphi(0))]^{\frac{p-1}{p}}|f(t,\varphi)|) &= E\left([\varepsilon V(t,\varphi(0))]^{\frac{p-1}{p}}\left[\frac{|f(t,\varphi)|^p}{\varepsilon^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \\ &\le \eta_3{}^{\frac{1}{p}} EV(t,\varphi(0)). \end{aligned}$$

Slično,

$$E\left([V(t,x)]^{\frac{p-2}{p}}|g(t,\varphi)|^2\right) \le \eta_4{}^{\frac{2}{p}} EV(t,\varphi(0).$$

Iz prethodnih ocena, (3.31) se ocenjuje kao

$$E\mathcal{L}V(t,\varphi) \le -\left[\rho - \eta_1\eta_3{}^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}\,\eta_2\eta_4{}^{\frac{2}{p}}\right]\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,EV(t,\varphi(0).$$

Na osnovu Teoreme 3.2.1 sledi da je jednačina (3.26) L^p-stabilna reda

$$\gamma = (\rho - \eta_1\eta_3^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{2}\eta_2\eta_4^{\frac{2}{p}}) \wedge \mu$$

u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Iz uslova (3.30) sledi da je uslov (3.19) takodje zadovoljen, tako da skoro izvesna stabilnost jednačine (3.26) direktno sledi primenom Teoreme 3.2.2. $\diamondsuit$

Primer 3.2.1 Prethodni rezultati se mogu primeniti za dobijanje uslova pri kojima stabilan deterministički oscilator ostaje stabilan kad je pod uticajem slučajnih perturbacija datih skalarnim belim šumom $\dot{w}(t)$. Preciznije, ponašanje oscilatora je opisano sledećom semi-linearnom SFDJ

$$\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 3u(t) = a \cdot b(t, u_t, \dot{u}_t)\, \dot{w}(t), \quad t \geq 0, \tag{3.32}$$

gde je $a > 0$ parametar, $b : \mathbb{R}_+ \times BC((-\infty, 0]\,; \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ lokalno Lipschitz-neprekidna funkcija, $b(t, 0, 0) \equiv 0$ i

$$|b(t, \varphi)|^p \leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-s)^\alpha} |\varphi(s)|^p \, ds, \tag{3.33}$$

za $\varphi \in L^p((-\infty, 0]\,; \mathbb{R}^2)$, pri čemu je $p \geq 4$ i $\alpha > 2$.

Uvodjenjem smene $v(t) = \dot{u}(t)$ i nove promenljive $x(t) = (u(t), v(t))^T$, jednačina (3.32) se transformiše u 2-dimenzionalnu SFDJ sa beskonačnim kašnjenjem,

$$dx(t) = Ax(t)\, dt + G(t, x_t)\, dw(t), \quad t \geq 0, \tag{3.34}$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad G(t, x_t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \cdot b(t, x_t) \end{bmatrix}.$$

Takodje, pretpostavlja se *a priori* da je početni uslov $x_0 = \xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^2)$.

Linearna transformacija prostora stanja omogućava ispitivanje skoro izvesne i L^p-stabilnosti jednačine (3.34) u odnosu na polinomijalnu decay-funkciju $\lambda(t) = 1 + t$. Može se primetiti da prethodno izložena teorija ne može biti primenjena za ispitivanje eksponencijalne L^p-stabilnosti jednačine (3.34) jer, s obzirom na (3.33), uslov (3.10) Teoreme 3.2.1 nije ispunjen za $\lambda(t) = e^t$.

Odredjivanjem sopstvenih vektora matrice A dobija se matrica transformacije H, pri čemu je

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad H^{-1}AH = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ako je $Q = (H^{-1})^T H^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, onda je $0.08\, |x|^2 \leq x^T Q x \leq 3\, |x|^2$. Prema tome, funkcija Lyapunova može biti

$$V(x) = (x^T Q x)^{\frac{p}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Otuda je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(\varphi) = {} & p\, (\varphi^T(0) Q \varphi(0))^{\frac{p}{2}-1} \left[\varphi^T(0) Q A \varphi(0) + \frac{1}{2} G^T(t, \varphi) Q G(t, \varphi) \right] \\ & + p \left(\frac{p}{2} - 1 \right) (\varphi^T(0) Q \varphi(0))^{\frac{p}{2}-2} |\varphi^T(0) Q G(t, \varphi)|^2. \end{aligned}$$

Nije teško proveriti da je $x^T Q A x \leq -x^T Q x$, pa važi

$$\begin{aligned} E\mathcal{L}V(\varphi) \leq {} & -p\, EV(\varphi(0)) + \frac{p}{2} E \left([V(\varphi(0))]^{\frac{p-2}{p}} \cdot G^T(t, \varphi) Q G(t, \varphi) \right) \\ & + p \left(\frac{p}{2} - 1 \right) E \left([V(\varphi(0))]^{\frac{p-4}{p}} \cdot |\varphi^T(0) Q G(t, \varphi)|^2 \right) \\ \equiv {} & -p\, EV(\varphi(0)) + I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ocenimo I_1 i I_2 za bilo koje $\mu \in (1, \alpha - 1)$ i one $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty, 0]\,;\mathbb{R}^2)$ koji zadovoljavaju uslov

$$EV(\varphi(s)) \leq (1-s)^{\mu} EV(\varphi(0)), \quad s \leq 0. \tag{3.36}$$

Najpre, kako je $G^T(t,\varphi)\,Q\,G(t,\varphi) = \frac{a^2}{2}|b(t,\varphi)|^2$, na osnovu (3.36) je

$$E|b(t,\varphi)|^p \leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-s)^{\alpha}}\, E|\varphi(s)|^p\, ds \leq \frac{1}{0.08^{\frac{p}{2}}\,(\alpha-\mu-1)}\, EV(\varphi(0)).$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.23), za bilo koje $\varepsilon > 0$ važi

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{a^2 p}{4}\, E\left([V(\varphi(0))]^{\frac{p-2}{p}} |b(t,\varphi)|^2 \right) \\ &\leq \frac{a^2 p}{4} \left[\frac{p-2}{p}\,\varepsilon + \frac{2}{p\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}\, 0.08^{\frac{p}{2}}\,(\alpha-\mu-1)} \right] EV(\varphi(0)) \\ &\equiv a^2 f_1(\varepsilon)\, EV(\varphi(0)), \end{aligned}$$

pri čemu je $f_1(\varepsilon) = \frac{p-2}{4}\,\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}\, 0.08^{\frac{p}{2}}\,(\alpha-\mu-1)}$. ε će biti izabrano tako da $f_1(\varepsilon)$ bude najmanje. Kako je $f_1'(\varepsilon) = 0$ za $\varepsilon = \varepsilon_1 = \left(0.08\,(\alpha-\mu-1)^{\frac{2}{p}}\right)^{-1}$ i kako je $f_1''(\varepsilon_1) > 0$ sledi da je $f_1(\varepsilon_1) = \frac{p}{4}\,\varepsilon_1$ najmanja vrednost ove funkcije. Otuda je

$$I_1 \leq \frac{a^2 p\, \varepsilon_1}{4}\, EV(\varphi(0)). \tag{3.37}$$

Kako je $|\varphi^T(0)\,Q\,G(t,\varphi)|^2 \leq 2a^2|\varphi(0)|^2|b(t,\varphi)|^2 \leq a^2\,(|\varphi(0)|^4 + |b(t,\varphi)|^4)$, na osnovu nejednakosti (1.23) sledi

$$\begin{aligned} I_2 &\leq p\left(\frac{p}{2} - 1\right) a^2\, E\left([V(\varphi(0))]^{\frac{p-4}{p}} \left(|\varphi(0)|^4 + |b(t,\varphi)|^4\right)\right) \\ &\leq (p-2)a^2 f_2(\varepsilon)\, EV(\varphi(0)), \end{aligned}$$

gde je $f_2(\varepsilon) = (p-4)\,\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^{\frac{p-4}{4}}\, 0.08^{\frac{p}{2}}}\, \frac{\alpha-\mu}{\alpha-\mu-1}$. Kao i ranije, iz $f_2'(\varepsilon) = 0$ sledi $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{0.08^2}\left(\frac{\alpha-\mu}{2(\alpha-\mu-1)}\right)^{\frac{4}{p}}$. Kako je $f_2(\varepsilon_2) = p\,\varepsilon_2$, to je

$$I_2 \leq a^2 p(p-2)\,\varepsilon_2\, EV(\varphi(0)). \tag{3.38}$$

Sada, na osnovu (3.35), (3.37), (3.38) sledi da je

$$E\mathcal{L}V(\varphi) \leq -\left[p - \frac{a^2 p\,\varepsilon_1}{4} - a^2 p(p-2)\,\varepsilon_2 \right] EV(\varphi(0)).$$

Za $q = p - \frac{a^2 p\,\varepsilon_1}{4} - a^2 p(p-2)\,\varepsilon_2 > 0$, to je

$$E\mathcal{L}V(\varphi(0)) \leq -q\,\frac{1}{1+t}\, EV(\varphi(0)), \quad t \geq 0.$$

Zapravo, uslov (3.10) je zadovoljen s obzirom da je $\lambda'(t)/\lambda(t) = 1/(1+t)$. Prema tome, svi uslovi Teoreme 3.2.1 su zadovoljeni, pa se zaključuje da je jednačina (3.34) L^p-stabilna reda $\gamma = q \wedge \mu$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t) = 1 + t$.

Štaviše, ako je $q > 1$, onda je $\gamma > 1$, pa je $\int_{-\infty}^{0}(1+t)^{-\delta}\,dt < \infty$ za svako $\delta \in (1,\gamma)$. Da bi bila dokazana skoro izvesna stabilnost u odnosu na $\lambda(t) = 1+t$, neophodno je proveriti da li je zadovoljen uslov (3.19). Nije teško pokazati da važi

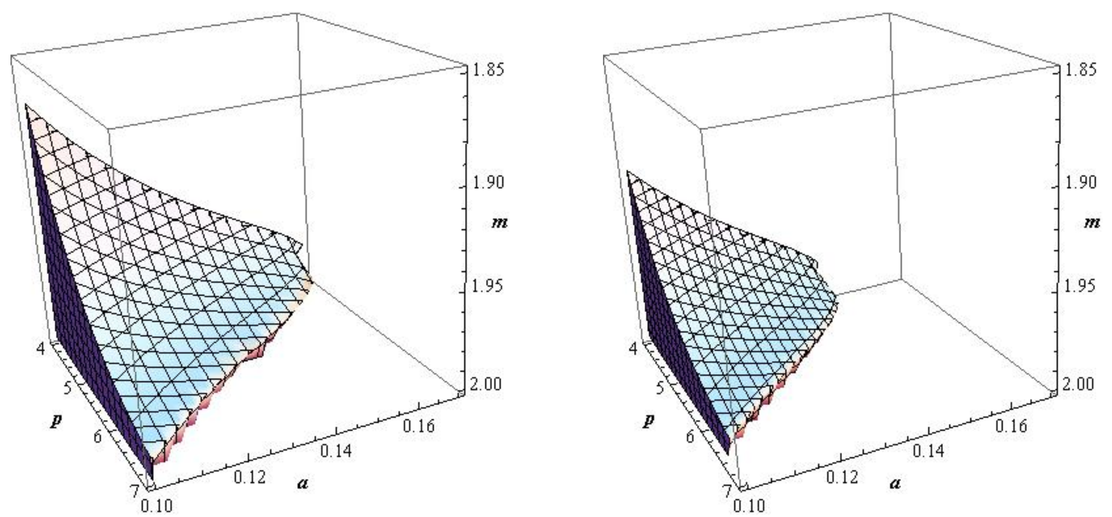
$$\begin{aligned} E|A\varphi(0)|^p + E|G(t,\varphi)|^p &\leq 29\,E|\varphi(0)|^p + a^p E|b(t,\varphi)|^p \\ &\leq K \sup_{s\leq 0}(1-s)^{-\mu} E|\varphi(s)|^p, \end{aligned}$$

gde je $K = 29 + a^p/(\alpha-\mu-1)$. Prema tome, jednačina (3.34) je istovremeno skoro izvesno i L^p-stabilna u odnosu na polinomijalnu funkciju $\lambda(t) = 1+t$, ako je ispunjen uslov

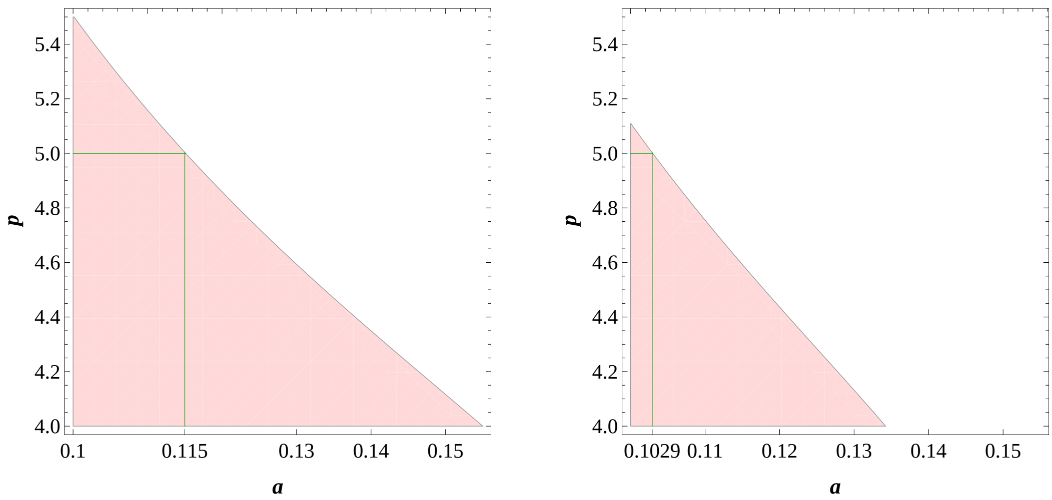
$$a^2 < \frac{4(p-1)}{p\,\varepsilon_1 + 4p(p-2)\,\varepsilon_2}.$$

Može se primetiti da se slučaj $p = 2$ može jednostavno diskutovati s obzirom da je $V(x) = x^T Qx$ i $\mathcal{L}V(\varphi) = 2\varphi^T(0)QA\varphi(0) + G^T(t,\varphi)QG(t,\varphi)$. Tada je jednačina (3.34) polinomijalno srednje kvadratno stabilna u odnosu na funkciju $\lambda(t) = 1+t$ ako je $a^2 < 4\cdot 0.08\,(\alpha-\mu-1)$, a skoro izvesno stabilna ako je $a^2 < 2\cdot 0.08\,(\alpha-\mu-1)$.

Specijalno, za $\alpha = 3$ oblast polinomijalne L^p-stabilnosti, $p \geq 4$, odnosno skoro izvesne stabilnosti koja zavisi od p, a i μ je prikazana na Slici 3.1. Za fiksirano $\mu = 1.96$, na Slici 3.2 se vidi odnos stepena stabilnosti p i parametra a. Konkretno, ako je $a \leq 0.115$ i $p = 5$ jednačina (3.34) je polinomijalno L^p-stabilna reda $\gamma = 0.0107671 \wedge 1.96$. S druge strane, za $a \leq 0.1029$ i $p = 5$ jednačina (3.34) je istovremeno polinomijalno skoro izvesno i L^p-stabilna.



Slika 3.1: Oblast u kojoj su ispunjeni uslovi $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ i $q > 0$ (levo), odnosno, $q > 1$ (desno) za $\alpha = 3$



Slika 3.2: Oblast u kojoj su ispunjeni uslovi $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ i $q > 0$ (levo), odnosno, $q > 1$ (desno) za $\alpha = 3$, $\mu = 1.96$

3.3 Stabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski zavisnim kašnjenjem

U ovom poglavlju se razmatra specijalan slučaj jednačine (3.1), *stohastička diferencijalna jednačina (SDJ) sa vremenski zavisnim kašnjenjem* oblika

$$\begin{aligned} dx(t) &= F(t, x(t), x(t-\delta_1(t)), \ldots, x(t-\delta_r(t)))\, dt \\ &\quad + G(t, x(t), x(t-\delta_1(t)), \ldots, x(t-\delta_r(t)))\, dw(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.39}$$

sa zadatim početnim uslovom $x_0 = \xi = \{\xi(\theta) : \theta \leq 0\} \in L^p_{\mathcal{F}_0}(((-\infty, 0]\,; \mathbb{R}^n))$, $p > 0$, gde je $\delta_i \in C((-\infty, 0]\,; \mathbb{R}_+)$, $i = 1, \ldots, r$, $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times r} \to \mathbb{R}^n$ i $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times r} \to \mathbb{R}^{n \times m}$. Kao i ranije, pretpostavlja se, bez obzira koji su uslovi zadovoljeni za egzistenciju i jedinstvenost rešenja, da postoji jedinstveno globalno rešenje $x(t;\xi)$ jednačine (3.39) takvo da je $E \sup_{-\infty < t < \infty} |x(t;\xi)|^p < \infty$. Takodje, neka je $F(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ i $G(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ tako da ova jednačina ima trivijalno rešenje.

Naredna tvrdjenja samo delimično predstavljaju uopštenja nekih rezultata iz publikacija [117, 125]) X. Maoa o eksponencijalnoj skoro izvesnoj i L^p-stabilnosti jednačine (3.39). Preciznije, u narednim tvrdjenjima se definišu dovoljni uslovi za skoro izvesnu i L^p-stabilnost u odnosu na zadatu decay-funkciju.

Teorema 3.3.1 *Neka je $p > 0$ i neka su zadovoljene pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_2})$ *za funkcije λ i V, respektivno. Ako postoje konstante $\mu > 0, \nu \geq 1$ i $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_r \geq 0$, pri čemu je $\eta_0 > \sum_{i=1}^r \eta_i$, tako da važi*

$$\begin{aligned} &V_t(t,x) + V_x(t,x) F(t, x, y_1, \ldots, y_r) \\ &\quad + \frac{1}{2}\, tr[G^T(t, x, y_1, \ldots, y_r) V_{xx}(t,x) G(t, x, y_1, \ldots, y_r)] \\ &\quad \leq -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \left[\eta_0 V(t,x) - \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^r \eta_i\, \lambda^{-\mu}(\delta_i(t)) V(t - \delta_i(t), y_i) \right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

za svako $t \geq 0$ *i* $x, y_1, \ldots, y_r \in \mathbb{R}^n$, *tada je jednačina (3.39)* L^p*-stabilna reda* $\gamma = (\eta_0 - \sum_{i=1}^r \eta_i) \wedge \mu$ *u odnosu na decay-funkciju* $\lambda(t)$.

Dokaz. Dokaz će biti izveden primenom Teoreme 3.2.1. Zbog toga se uvode smene: za $t \geq 0$ i $\varphi \in BC((-\infty, 0]\,; \mathbb{R}^n)$ je

$$f(t,\varphi) := F(t, \varphi(0), \varphi(-\delta_1(t)), \ldots, \varphi(-\delta_r(t))),$$
$$g(t,\varphi) := G(t, \varphi(0), \varphi(-\delta_1(t)), \ldots, \varphi(-\delta_r(t))).$$

Na taj način, jednačina (3.39) se transformiše u jednačinu (3.1), a operator $\mathcal{L}V$ je oblika

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(t,\varphi) = {} & V_t(t,\varphi(0)) + V_x(t,\varphi(0)) F(t, \varphi(0), \varphi(-\delta_1(t)), \ldots, \varphi(-\delta_r(t))) \\ & + \frac{1}{2} tr[G^T(t, \varphi(0), \varphi(-\delta_1(t)), \ldots, \varphi(-\delta_r(t))) \\ & \times V_{xx}(t,\varphi(0)) G(t, \varphi(0), \varphi(-\delta_1(t)), \ldots, \varphi(-\delta_r(t)))].\end{aligned}$$

Sada se može proveriti da li je zadovoljen uslov (3.10) Teoreme 3.2.1 za $t \geq 0$ i one $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju uslov

$$EV(t+\theta, \varphi(\theta)) \leq \nu\, \lambda^{\mu}(-\theta) EV(t, \varphi(0)), \quad -\infty < \theta \leq 0.$$

Na osnovu uslova (3.40) je

$$\begin{aligned} & E\mathcal{L}V(t,\varphi) \\ & \leq -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \left[\eta_0\, EV(t,\varphi(0)) - \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^r \eta_i\, \lambda^{-\mu}(\delta_i(t))\, EV(t - \delta_i(t), \varphi(-\delta_i(t))) \right] \\ & \leq -\Big(\eta_0 - \sum_{i=1}^r \eta_i\Big) \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\, EV(t,\varphi(0)), \end{aligned}$$

pa je ispunjen uslov (3.10). Prema tome, primenom Teoreme 3.2.1 sledi da je jednačina (3.39) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Teorema 3.3.2 *Neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 3.3.1 za* $p \geq 1$. *Ako postoje konstante* $K > 0$ *i* $\delta \in (0, \gamma)$, *pri čemu je* $\gamma = (\eta_0 - \sum_{i=1}^r \eta_i) \wedge \mu$, *tako da je* $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)\, dt < \infty$ *i*

$$|F(t,x,y_1,\ldots,y_r)| \bigvee |G(t,x,y_1,\ldots,y_r))| \leq K \left[|x| + \sum_{i=1}^r \lambda^{-\frac{\mu}{p}}(\delta_i(t))\, |y_i| \right] \quad (3.41)$$

za svako $t \geq 0$ *i* $x, y_1, \ldots, y_r \in R^n$, *tada je jednačina (3.39) skoro izvesno stabilna reda* $\frac{\gamma - \delta}{p}$ *u odnosu na decay-funkciju* $\lambda(t)$.

Dokaz. Za dokazivanje tvrdjenja, neophodno je proveriti da li je zadovoljen uslov (3.19). S obzirom na (3.41), sledi

$$\begin{aligned}
&E|f(t,\varphi)|^p + E|g(t,\varphi)|^p \\
&\le 2E\left(K\left[|\varphi(0)| + \sum_{i=1}^{r} \lambda^{-\frac{\mu}{p}}(\delta_i(t))\,|\varphi(-\delta_i(t))|\right]\right)^p \\
&\le 2K^p(1+r)^{p-1}\left[E|\varphi(0)|^p + \sum_{i=1}^{r} \lambda^{-\mu}(\delta_i(t))\,E|\varphi(-\delta_i(t))|^p\right] \\
&\le 2[K(1+r)]^p \sup_{\theta\le 0} \lambda^{-\mu}(-\theta)\,E|\varphi(\theta)|^p,
\end{aligned}$$

tako da dokaz tvrdjenja direktno sledi primenom Teoreme 3.2.2. $\diamondsuit$

Uslov (3.40) nije uvek pogodan za proveravanje, imajući u vidu poteškoće pri pronalaženju odgovarajućih funkcija Lyapunova. Naredno tvrdjenje, koje je posledica Teoreme 3.3.1 i Teoreme 3.3.2, sadrži uslove koji se jednostavnije mogu proveriti.

Posledica 3.3.1 *Neka je $p \ge 2$ i neka je zadovoljena pretpostavka $(\mathbf{H_1})$ za funkciju $\lambda(t)$. Takodje, neka postoje konstante $\mu > 0, \rho > 0$, $\nu \ge 1$ i $\alpha_i, \beta_i \ge 0$, $0 \le i \le r$ tako da važe uslovi*

$$x^T F(t,x,0,\dots,0) \le -\rho\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,|x|^2, \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
&|F(t,x,0,\dots,0) - F(t,\bar{x},y_1,\dots,y_r)| \\
&\quad\le \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\left[\alpha_0|x-\bar{x}| + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,\lambda^{-\mu}(\delta_i(t))\,|y_i|\right],
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$|G(t,x,y_1,\dots,y_r)|^2 \le \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\left[\beta_0|x|^2 + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\beta_i\,\lambda^{-\mu}(\delta_i(t))\,|y_i|^2\right] \tag{3.44}$$

za svako $t \ge 0$ i $x, \bar{x}, y_1, \dots, y_r \in \mathbb{R}^n$. Ako je

$$\rho > \frac{p-1}{2}\,\beta_0 + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\left(\alpha_i + \frac{p-1}{2}\,\beta_i\right), \tag{3.45}$$

tada je jednačina (3.39) L^p-stabilna reda

$$\gamma = p\left[\rho - \frac{p-1}{2}\,\beta_0 - \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\left(\alpha_i + \frac{p-1}{2}\,\beta_i\right)\right] \wedge \mu$$

u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$. Štaviše, ako je $\sup_{t\ge 0}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} < \infty$ i ako postoji $\delta \in (0,\gamma)$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)\,dt < \infty$, tada je jednačina (3.39) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\gamma-\delta}{p}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Neka je $V(x)=|x|^p$. Na osnovu relacija (3.42)–(3.44), može se pokazati da je zadovoljena relacija (3.40). Zaista, kako je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x) \le -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\Bigg[&\Big(p\,\rho-\frac{p(p-1)}{2}\beta_0\Big)|x|^p-\frac{p}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,\lambda^{-\mu}(\delta_i(t))\,|x|^{p-1}|y_i| \\ &-\frac{p(p-1)}{2\nu}\sum_{i=1}^{r}\beta_i\,\lambda^{-\mu}(\delta_i(t))\,|x|^{p-2}|y_i|^2\Bigg],\end{aligned}$$

primenom elementarne nejednakosti (1.23) za $\varepsilon=1$ jednostavno se dobija

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}V(x) \\ &\le -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\Bigg[\Bigg(p\,\rho-\frac{p(p-1)}{2}\beta_0-\frac{(p-1)(p-2)}{2\nu}\sum_{i=1}^{r}\beta_i-\frac{p-1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\alpha_1\Bigg)|x|^p \\ &\qquad -\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}[\alpha_i+(p-1)\beta_i]\,\lambda^{-\mu}(\delta_i(t))\,|y_i|^p\Bigg].\end{aligned}$$

Prema tome, uslov (3.40) je zadovoljen za

$$\begin{aligned}&\eta_0=p\,\rho-\frac{p(p-1)}{2}\beta_0-\frac{(p-1)(p-2)}{2\nu}\sum_{i=1}^{r}\beta_i-\frac{p-1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\alpha_1,\\ &\eta_i=\alpha_i+(p-1)\beta_i,\quad i=1,\ldots,r,\end{aligned}$$

S obzirom da važi (3.45), ispunjen je i uslov $\eta_0-\sum_{i=1}^{r}\eta_i>0$, pa su zadovoljeni svi uslovi Teoreme 3.3.1, čime je dokazana L^p-stabilnost jednačine (3.39) u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Imajući u vidu da je $F(t,0,\ldots,0)\equiv 0$ i $\sup_{t\ge 0}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}=M=\text{const}$, na osnovu uslova (3.43) sledi

$$\begin{aligned}|F(t,x,y_1,\ldots,y_r)| &\le \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\Bigg[\alpha_0|x|+\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,\lambda^{-\mu}(\delta_i(t))\,|y_i|\Bigg] \\ &\le \Big(M\bigvee_{i=0}^{r}\alpha_i\Big)\Big(|x|+\sum_{i=1}^{r}\lambda^{-\frac{\mu}{p}}(\delta_i(t))|y_i|\Big).\end{aligned}$$

Slično, na osnovu (3.44) se dobija

$$\begin{aligned}|G(t,x,y_1,\ldots,y_r)| &\le \Big(\sqrt{M}\bigvee_{i=0}^{r}\sqrt{\beta_i}\Big)\Big(|x|+\sum_{i=1}^{r}\lambda^{-\frac{\mu}{2}}(\delta_i(t))|y_i|\Big) \\ &\le \Big(\sqrt{M}\bigvee_{i=0}^{r}\sqrt{\beta_i}\Big)\Big(|x|+\sum_{i=1}^{r}\lambda^{-\frac{\mu}{p}}(\delta_i(t))|y_i|\Big).\end{aligned}$$

Prema tome, uslov (3.41) je zadovoljen za generisanu konstantu $K(M)$, pa dokaz tvrdjenja direkno sledi na osnovu Teoreme 3.3.2. $\diamondsuit$

3.4 Stabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina sa distributivnim kašnjenjem

Veoma značajni stohastički Lotka–Volterra populacioni sistemi predstavljaju specijalan slučaj stohastičkih diferencijalnih jednačina sa distributivnim beskonačnim kašnjenjem (videti [169] i reference u radu). U ovom poglavlju se primenom metode Razumikhina za ispitivanje opšte stabilnosti proširuje razmatranje iz prethodnih poglavlja na jednu vrstu ovih jednačina. Tačnije, razmatra se stabilnost *SDJ sa distributivnim beskonačnim kašnjenjem* sledećeg oblika,

$$
\begin{aligned}
dx(t) = F &\left(t, x_t, \int_{-\infty}^{0} k_1(s)x(t+s)\,ds, \ldots, \int_{-\infty}^{0} k_r(s)x(t+s)\,ds\right) dt \\
&+ G\left(t, x_t, \int_{-\infty}^{0} k_1(s)x(t+s)\,ds, \ldots, \int_{-\infty}^{0} k_r(s)x(t+s)\,ds\right) dw(t), \quad t \geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

sa zadatim početnim uslovom $x_0 = \xi = \{\xi(\theta) : \theta \leq 0\} \in L^p_{\mathcal{F}_0}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$, pri čemu je $k_i \in L((-\infty, 0]; \mathbb{R}_+)$ $i = 1, \ldots, r$ i $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times r} \to \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times r} \to \mathbb{R}^{n\times m}$. Takodje, pretpostavlja se da postoji jedinstveno globalno rešenje jednačine (3.46) tako da je $\sup_{t\in\mathbb{R}} E|x(t)|^p < \infty$. Kao i ranije, radi jednostavnijeg razmatranja stabilnosti rešenja, neka je $F(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ i $G(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, tj. neka jednačina (3.46) ima trivijalno rešenje.

Naredno tvrdjenje se odnosi na L^p-stabilnost jednačine (3.46) i predstavlja posledicu Teoreme 3.2.1.

Teorema 3.4.1 *Neka je $p > 0$ i neka su zadovoljene pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$ za funkcije λ i V, respektivno. Takodje, neka je $k_i \in L((-\infty, 0]; R^n)$, $i = 1, \ldots, r$ i neka postoji konstanta $\mu > 0$ tako da važi*

$$
\int_{-\infty}^{0} k_i(s)\,ds = 1, \quad \bar{k}_i = \int_{-\infty}^{0} k_i(s)\lambda^{\mu}(-s)\,ds < \infty, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.47}
$$

Ako postoje konstante $\nu \geq 1$ i $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_r \geq 0$, pri čemu je $\eta_0 > \sum_{i=1}^{r} \eta_i \bar{k}_i$ tako da je

$$
\begin{aligned}
&V_t(t, \varphi(0)) + V_x(t, \varphi(0))\, F\left(t, \varphi(0), \int_{-\infty}^{0} k_1(s)\varphi(s)\,ds, \ldots, \int_{-\infty}^{0} k_r(s)\varphi(s)\,ds\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\, tr\left[G^T\left(t, \varphi(0), \int_{-\infty}^{0} k_1(s)\varphi(s)\,ds, \ldots, \int_{-\infty}^{0} k_r(s)\varphi(s)\,ds\right)\right. \\
&\quad\quad \left. \times V_{xx}(t, \varphi(0))\, G\left(t, \varphi(0), \int_{-\infty}^{0} k_1(s)\varphi(s)\,ds, \ldots, \int_{-\infty}^{0} k_r(s)\varphi(s)\,ds\right)\right] \\
&\leq -\eta_0 \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} V(t, \varphi(0)) + \frac{1}{\nu} \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \sum_{i=1}^{r} \eta_i \int_{-\infty}^{0} k_i(s) V(t+s, \varphi(s))\,ds
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

za svako $t \geq 0$ i $\varphi \in BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n) \cap L^p((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$, tada je jednačina (3.46) L^p-stabilna reda $\gamma = (\eta_0 - \sum_{i=1}^{r} \eta_i \bar{k}_i) \wedge \mu$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Za $t \geq 0$ i $\varphi \in BC((-\infty,0];\mathbb{R}^n) \cap L^p((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$, uvode se sledeće smene,

$$f(t,\varphi) := F\left(t,\varphi(0),\int_{-\infty}^{0} k_1(s)\varphi(s)\,ds,\ldots,\int_{-\infty}^{0} k_r(s)\varphi(s)\,ds\right),$$
$$g(t,\varphi) := G\left(t,\varphi(0),\int_{-\infty}^{0} k_1(s)\varphi(s)\,ds,\ldots,\int_{-\infty}^{0} k_r(s)\varphi(s)\,ds\right),$$

kojima se jednačina (3.46) svodi na jednačinu (3.1). Sada, na osnovu (3.11), (3.47) i (3.48) sledi

$$\begin{aligned}
&E\mathcal{L}V(t,\varphi)\\
&\leq -\eta_0\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}EV(t,\varphi(0)) + \frac{1}{\nu}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\sum_{i=1}^{r}\eta_i\int_{-\infty}^{0} k_i(s)EV(t+s,\varphi(s))\,ds\\
&\leq -\left(\eta_0 - \sum_{i=1}^{r}\eta_i\bar{k}_i\right)\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}EV(t,\varphi(0)).
\end{aligned}$$

S obzirom da je relacija (3.10) zadovoljena za $q = \eta_0 - \sum_{i=1}^{r}\eta_i\bar{k}_i$, dokaz direktno sledi primenom Teoreme 3.2.1. $\diamondsuit$

Teorema 3.4.2 *Neka važe pretpostavke Teoreme 3.4.1 za $p \geq 2$. Ako postoje konstante $K > 0$ i $\delta \in (0,\gamma)$, pri čemu je $\gamma = (\eta_0 - \sum_{i=1}^{r}\eta_i\bar{k}_i)\wedge\mu$ i $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)\,dt < \infty$, i ako važi uslov*

$$\begin{aligned}
&\left|F\left(t,\varphi(0),\int_{-\infty}^{0} k_1(s)\varphi(s)\,ds,\ldots,\int_{-\infty}^{0} k_r(s)\varphi(s)\,ds\right)\right|^2\\
&\qquad+\left|G\left(t,\varphi(0),\int_{-\infty}^{0} k_1(s)\varphi(s)\,ds,\ldots,\int_{-\infty}^{0} k_r(s)\varphi(s)\,ds\right)\right|^2\\
&\leq K\left(|\varphi(0)|^2 + \sum_{i=1}^{r}\left|\int_{-\infty}^{0} k_i(s)\varphi(s)\,ds\right|^2\right)
\end{aligned}\tag{3.49}$$

za svako $t \geq 0$, $\varphi \in BC((-\infty,0];\mathbb{R}^n) \cap L^p((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$, tada je jednačina (3.46) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\gamma-\delta}{p}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Za dokaz se koriste smene uvedene u dokazu Teoreme 3.4.1. Iz uslova (3.49), Hölderove nejednakosti (1.27), a zatim relacija (3.47), dobija se

$$\begin{aligned}
E|f(t,\phi)|^p + E|g(t,\phi)|^p &\leq E\Big[K\Big(|\phi(0)|^2 + \sum_{i=1}^{r}\Big|\int_{-\infty}^{0} k_i(s)\phi(s)ds\Big|^2\Big)\Big]^{\frac{p}{2}}\\
&\leq (K(1+r))^{\frac{p}{2}}\Big(E|\phi(0)|^p + \sum_{i=1}^{r}E\Big|\int_{-\infty}^{0} k_i(s)\phi(s)ds\Big|^p\Big)\\
&\leq (K(1+r))^{\frac{p}{2}}\Big(E|\phi(0)|^p + \sum_{i=1}^{r}E\Big(\int_{-\infty}^{0} k_i(s)|\phi(s)|^p ds\Big)\Big(\int_{-\infty}^{0} k_i(s)ds\Big)^{p-1}\Big)
\end{aligned}$$

$$\leq (K(1+r))^{\frac{p}{2}}(1+\sum_{i=1}^{r}\bar{k}_i)\sup_{s\leq 0}\lambda^{-\eta}(-s)E|\phi(s)|^p$$
$$\leq (K(1+r))^{\frac{p}{2}}(1+\sum_{i=1}^{r}\bar{k}_i)\sup_{s\leq 0}\lambda^{-\mu}(-s)E|\phi(s)|^p.$$

S obzirom da je zadovoljen uslov (3.19), dokaz sledi direktnom primenom Teoreme 3.2.2. $\diamondsuit$

Kako nije uvek jednostavno proveriti uslove (3.48) i (3.49) u narednom tvrdjenju su dati jednostavniji uslovi L^p-stabilnosti i skoro izvesne stabilnosti jednačine (3.46).

Posledica 3.4.1 *Neka je $p \geq 2$ i neka $(\mathbf{H_1})$ i (3.47) važe za funkcije λ i $k_i, i = 1,\ldots,r$, respektivno. Takodje, neka postoje konstante $\rho > 0$, $\nu \geq 1$ i $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,r$ tako da su ispunjeni uslovi*

$$\varphi^T(0)\,F(t,\varphi(0),0,\ldots,0) \leq -\rho\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,|\varphi(0)|^2,$$
$$\left|F(t,\psi(0),0,\ldots,0) - F\left(t,\varphi(0),\int_{-\infty}^{0}k_1(s)\varphi(s)\,ds,\ldots,\int_{-\infty}^{0}k_r(s)\varphi(s)\,ds\right)\right|$$
$$\leq \alpha_0\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,|\psi(0)-\varphi(0)| + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\left|\int_{-\infty}^{0}k_i(s)\varphi(s)\,ds\right|,$$
$$\left|G\left(t,\varphi(0),\int_{-\infty}^{0}k_1(s)\varphi(s)\,ds,\ldots,\int_{-\infty}^{0}k_r(s)\varphi(s)\,ds\right)\right|^2$$
$$\leq \beta_0\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,|\varphi(0)|^2 + \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{r}\beta_i\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\left|\int_{-\infty}^{0}k_i(s)\varphi(s)\,ds\right|^2$$

za svako $t \geq 0$ i $\psi,\varphi \in BC((-\infty,0];\mathbb{R}^n) \cap L^p((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$. Ako je $\rho > \zeta$, pri čemu je

$$\zeta = \frac{p-1}{2}\,\beta_0 + \frac{p-1}{2p\nu}\sum_{i=1}^{r}[2\alpha_i + (p-2)\beta_i] + \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{r}[\alpha_i + (p-1)\beta_i]\bar{k}_i,$$

tada je jednačina (3.46) L^p-stabilna reda $\gamma = p(\rho-\zeta)\wedge\mu$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$. Štaviše, ako je $\sup_{t\geq 0}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} < \infty$ i ako postoji $\delta \in (0,\gamma)$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)\,dt < \infty$, tada je jednačina (3.46) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\gamma-\delta}{p}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Dokaz se izostavlja s obzirom da je sličan dokazu Posledice 3.3.1. $\diamondsuit$

Glava 4

Stabilnost neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa konačnim kašnjenjem

U ovoj glavi se razmatra opšta skoro izvesna i L^p-stabilnost neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačna sa konačnim kašnjenjem primenom metode Razumikhina. U Poglavlju 4.1 se izlaže motivacioni primer za izučavanje neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina, navodi se osnovna teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja, kao i već poznati rezultati u vezi eksponencijalne skoro izvesne i L^p-stabilnosti. Poglavlje 4.2 se odnosi na primenu metode Razumikhina za ispitivanje opšte L^p-stabilnosti i skoro izvesne stabilnosti neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa konačnim kašnjenjem. Rezultati iz ovog poglavlja su uopšteni u Poglavlju 4.3 na perturbovane neutralne stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine i neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem. U Poglavlju 4.4 su predstavljena dva primera kojima se opravdavaju i ilustruju teorijski rezultati. Preciznije, dati su uslovi kojima se garantuje polinomijalna, odnosno logaritamska stabilnost, a da se o eksponencijalnoj stabilnosti razmatranih sistema ništa ne može zaključiti.

4.1 Uvodni pojmovi

Neutralne stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine (NSFDJ) predstavljaju uopštenje stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina u kojima se pored nepoznatog procesa x kojim se opisuje stanje sistema, pod diferencijalom javlja i argument sa kašnjenjem. Ovakve jednačine najčešće se koriste za opisivanje distributivnih mreža koje se sastoje od prenosnih kablova bez gubitka energije.

Sovjetski naučnici Bogomolov [11] i Solovdovnikov [162] četrdesetih godina prošlog veka medju prvima primenjuju neutralne funkcionalne diferencijalne jednačine za izučavanje povratnih sistema hidrauličnih turbina. Jedan takav povratni sistem se sastoji od dugačkog električnog kabla dužine l, pri čemu je jedan kraj kabla priključen na izvor energije E sa otporom R, dok je drugi kraj priključen na oscilatorni sklop formiran kondenzatorom C_1 i nelinearnim elementom čija je volt-amper karakteristika $i = g(v)$. Neka su sa L i C označeni linearna indukcija i kapacitet kabla. Ovakav sistem se matematički opisuje sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$Li_t(t,x) = -u_x(t,x), \quad Cv_t(t,x) = -i_x(t,x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{4.1}$$

sa graničnim uslovima

$$E - v(t,0) - Ri(t,0) = 0, \quad C_1 v_t(t,l) = i(t,l) - g(v(t,l)).$$

Nizom transformacija (videti [77, 125])sistem (4.1) se svodi na sistem diferencijalnih jednačina, s tim što se iz graničnih uslova za $x(t) = v(t,l)$ dobija diferencijalna jednačina

$$\frac{1}{C_1}\frac{d}{dt}(x(t) - Kx(t-\tau)) = \alpha - \beta x(t) - K\beta x(t-\tau) - g(x(t)) + Kg(x(t-\tau)),$$

gde su α, β i K generisane konstante i $\tau = 2l\sqrt{LC}$. Time se u rešavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (4.1), kojim se opisuje sistem distributivnih mreža, uključuje neutralna diferencijalna jednačina sa kašnjenjem.

O determinističkim neutralnim diferencijalnim jednačinama postoji opsežna literatura. Izmedju ostalih, temelje ove teorije u determinictičkom slučaju postavili su Hale i Meyer [42] i Hale i Lunel [44] u svojim monografijama.

Generalno, neutralna funkcionalna diferencijalna jednačina je oblika

$$\frac{d}{dt}(x(t) - G(x_t)) = f(t, x_t),$$

gde je G zadati funkcional. Ako se ova jednačina stohastički perturbuje Gaussovim belim šumom ξ_t, dolazi se do neutralne stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine (NSFDJ) sa kašnjenjem oblika

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(x_t)] = f(t, x_t)\, dt + g(t, x_t)\, \xi_t, \quad t \geq 0.$$

Pojam NSFDJ prvi su uveli Kolmanovskii i Nosov [76] 1981. godine, proučavajući ponašanje reaktora u hemijskom postrojenju i izučavajući medjusobnu interakciju izmedju inertnih, elastičnih i aerodinamičkih sila koje se javljaju kad se elastično telo kreće kroz neki fluid. Takodje, Kolmanovskii i Nosov [77] su dokazali teoremu egzistencije i jedinstvenosti, a Kolmanovskii i Myshkis [78] su proučavali stabilnost i asimptotsku stabilnost ovih jednačina.

Neka je $C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, $\tau = const > 0$, familija neprekidnih funkcija $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ sa normom $||\varphi|| = \sup_{-\tau\leq\theta\leq0} |\varphi(\theta)|$, a $L^p_{\mathcal{F}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ familija $\mathcal{F}$-merljivih slučajnih promenljivih $\phi = \{\phi(\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} \in C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ koje zadovoljavaju uslov $\sup_{-\tau\leq\theta\leq0} E|\phi(\theta)|^p < \infty$. Očigledno je $C([-\tau,0];\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\mathcal{F}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$.

U ovoj glavi se razmatra n-dimenzionalna *neutralna stohastička funkcionalna diferencijalna jeednačina (NSFDJ) sa konačnim kašnjenjem*,

$$d[x(t) - G(x_t)] = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)dw(t), \quad t \geq 0, \tag{4.2}$$

sa početnim uslovom $x_0 = \xi = \{\xi(\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, gde je $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$ za $-\tau \leq t \leq 0$ i $x_t = \{x(t+\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} \in C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ je nepoznati proces. Funkcionali $G : C([-\tau,0];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}_+ \times C([-\tau,0];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ i $g : \mathbb{R}_+ \times C([-\tau,0];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times m}$ su Borel-merljivi.

Definicija 4.1.1 *Za n-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ se kaže da je strogo rešenje jednačine (4.2) ako je skoro izvesno neprekidan, $x(t)$ je $\mathcal{F}_t$-adaptiran proces za $t \in [0, T]$, $\int_0^T |f(t, x_t)|\, dt < \infty$ s.i., $\int_0^T |g(t, x_t)|^2\, dt < \infty$ s.i., $x_0 = \xi$ s.i. i za svako $t \in [0, T]$ integralni oblik jednačine (4.2) je zadovoljen skoro izvesno.*

Definicija 4.1.2 *Rešenje $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ jednačine (4.2) je jedinstveno ako je bilo koje drugo rešenje $\{\tilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\}$ stohastički ekvivalentno sa njim, tj. ako je*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\} = 1.$$

Kako se za $G(\cdot) \equiv 0$ jednačina (4.2) svodi na stohastičku funkcionalnu diferencijalnu jednačinu (1.16), na osnovu Teoreme 1.5.1 sledi da su za egzistenciju i jedinstvenost rešenja jednačine (4.2) neophodni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta za funkionale f i g. Uslov koji treba nametnuti funkcionalu G u literaturi je poznat kao *uslov kontrakcije*, odnosno, funkcional G mora biti uniformno Lipschitz neprekidan sa Lipschitzovom konstantom manjom od 1 (za više detalja videti Kolmanovski i Nosov [77], Mao [125]).

Teorema 4.1.1 (Mao, [125]) *Ako funkcionali f i g zadovoljavaju uniformni Lipschitzov uslov i uslov linearnog rasta, tj. ako postoji konstanta $K > 0$, tako da je*

$$|f(t, \varphi) - f(t, \psi)|^2 \vee ||g(t, \varphi) - g(t, \psi)||^2 \leq K||\varphi - \psi||^2,$$
$$|f(t, \varphi)|^2 \vee |g(t, \varphi)|^2 \leq K(1 + ||\varphi||^2)$$

za svako $t \in [0, T]$ i $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, i ako postoji konstanta $\kappa \in (0, 1)$ tako da je

$$|G(\varphi) - G(\psi)| \leq \kappa \|\varphi - \psi\|$$

za svako $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, tada postoji jedinstveno, skoro izvesno neprekidno rešenje $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ jednačine (4.2). Pored toga, ako je $E||\xi||^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je

$$E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t)|^p < \infty.$$

Iako NSFDJ predstavljaju prirodno uopštenje SFDJ, o kojima je bilo reči u prethodnoj glavi, one su suštinski komplikovanije, pa je teže odredjivanje njihovog tačnog rešenja. Zbog toga je od posebnog značaja ispitivanje stabilnosti rešenja NSFDJ na osnovu uslova koje ispunjavaju koeficijenti te jednačine, a da pritom nije poznato tačno rešenje.

Definicija 4.1.3 *Neka je $\lambda \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ strogo rastuća funkcija tako da $\lambda(t) \uparrow \infty$ kad $t \to \infty$. Tada je jednačina (4.2), odnosno njeno trivijalno rešenje L^p-stabilno reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$ ako postoji par konstanata $\gamma > 0$ i $M > 0$ tako da je*

$$E|x(t; \xi)|^p \leq M \cdot \lambda^{-\gamma}(t) \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|\xi(\theta)|^p, \quad t \geq 0 \tag{4.3}$$

za svako $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$*, odnosno,*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma.$$

Jednačina (4.2) je skoro izvesno stabilna reda γ *u odnosu na decay-funkciju* $\lambda(t)$ *ako je*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln |x(t;\xi)|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma \quad s.i.$$

Mao [116] 1995. godine medju prvima ispituje eksponencijalnu stabilnost NSFDJ. Ubrzo su raznim tehnikama dobijeni dovoljni uslovi za ispitivanje eksponencijalne skoro izvesne i L^p-stabilnosti, a iz opsežne literature ovde se izdvajaju Liao i Mao [97], Janković i Jovanović [57], Ren i Xia [152], Luo [109] i dr.

Medjutim, rezultati rada [116] se ne mogu primeniti na neke specijalne klase NSFDJ, a posebno na NSDJ sa kašnjenjem. Nakon što je metodu Razumikhina primenio na ispitivanje stabilnosti SFDJ (za više detalja pogledati Poglavlje 3.1 ove disertacije), Mao [118] 1997. godine ovu tehniku primenjuje i na NSFDJ za ispitivanje eksponencijalne srednje-kvadratne i skoro izvesne stabilnosti. Time potvrdjuje da je osnovna prednost ove metode njena primenljivost za ispitivanje stabilnosti široke klase jednačina, a tim pre se relativno jednostavno primenjuje na specijalne jednačine. Od tada, ova metoda se koristi za ispitivanje eksponencijalne stabilnosti različitih vrsta NSFDJ kao, na primer, u radovima Janković, Randjelović i Jovanović [59], Randjelović i Janković [148], Wu i Hu [175], Zhou i Hu [183].

Kako neke NSFDJ nisu eksponencijalno stabilne, istraživanje dovoljnih uslova za stabilnost u odnosu na neku "slabiju" decay-funkciju, na primer, polinomijalnu ili logaritamsku, takodje je poslednjih godina zaokupilo pažnju naučnika. Rezultati koji se odnose na opštu stabilnost NSFDJ mogu se naći, na primer u Liu, Meng i Wu [107], Wu, Hu, Huang [173], Wu i Hu [174].

U nastavku, metoda Razumikhina se primenjuje na ispitivanje opšte L^p-stabilnosti ($p \geq 1$) i skoro izvesne stabilnosti ($p \geq 2$) neutralne stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačone (4.2), uvodjenjem integralnog uslova za decay-funkciju koji garantuje skoro izvesnu stabilnost u odnosu na tu funkciju. Dobijeni rezultati su publikovani u radu [144], G. Pavlović, S. Janković, *The Razumikhin approach on general decay stability for neutral stochastic functional differential equations*, Journal of the Franklin Institute 350 (8) (2013) 2124-2145. Ovi rezultati delimično uopštavaju rezultate radova [107, 127, 173, 174, 175], a pre svega su zasnovani na radovima Janković, Randjelović i Jovanović [59] i Shen i Liao [159] koji se odnose na eksponencijalnu L^p-stabilnost.

Teorema 4.1.2 (Janković, Randjelović i Jovanović [59]) *Neka postoji konstanta* $k \in (0,1)$ *tako da je*

$$E|G(\phi)|^p \leq k \sup_{-\tau\leq t\leq 0} E|\phi(\theta)|^p$$

za svako $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$. *Neka je* $q > (1-k^{\frac{1}{p}})^{-p}$ *i neka postoji konstanta* $\lambda > 0$ *tako da važi*

$$\begin{aligned} E\Big\{\frac{p}{2}|\phi(0)-G(\phi)|^{p-4}(|\phi(0)-G(\phi)|^2[2(\phi(0)-G(\phi))^T f(t,\phi) \\ +|g(t,\phi)|^2+(p-2)|(\phi(0)-G(\phi))^T g(t,\phi)|^2])\Big\} \\ \le -\lambda E|\phi(0)-G(\phi)|^p \end{aligned}$$

za svako $t \ge 0$ *i one* $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ *koji zadovoljavaju uslov*

$$E|\phi(\theta)|^p \le qE|\phi(0)-G(\phi)|^p, \quad -\tau \le \theta \le 0.$$

Tada, za svako $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ *rešenje* $x(t;\xi)$ *jednačine (4.2) ispunjava uslov*

$$E|x(t;\xi)|^p \le q\,(1+k^{\frac{1}{p}})^p\, e^{-\bar{\gamma}t} \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|\xi(\theta)|^p, \quad t \ge 0,$$

gde je $\bar{\gamma} = \min\left\{\lambda, \frac{1}{\tau}\ln\frac{q}{(1+(kq)^{\frac{1}{p}})^p}\right\} > 0$, *odnosno, trivijalno rešenje jednačine (4.2) je eksponencijalno* L^p*-stabilno.*

4.2 Stabilnost neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina

Kako je predmet istraživanja stabilnost rešenja jednačine (4.2), pretpostavlja se, bez naglašavanja koji uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja su ispunjeni, da postoji jedinstveno rešenje te jednačine takvo da je $\sup_{-\tau\le t<\infty} E|x(t;\xi)|^p < \infty$. Takodje, pretpostavlja se da su dobro definisani svi integrali Lebesguea i Itôa koji će nadalje biti korišćeni. Bez gubljenja opštosti, neka je $G(0)\equiv 0$, $f(t,0)\equiv 0$, $g(t,0)\equiv 0$, tako da jednačina (4.2) ima trivijalno rešenje $x(t;0)\equiv 0$.

Za ispitivanje stabilnosti rešenja jednačine (4.2) primenjivaće se metoda Razumikhina. S tim u vezi, uvodi se sledeći diferencijalni operator pridružen jednačini (4.2).

Neka je $C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$ familija nenegativnih funkcija $V(t,x)$ sa neprekidnim prvim izvodom po t i drugim izvodom po x. Tada je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t,\varphi) := V_t(t,\varphi(0)-G(\varphi)) + V_x(t,\varphi(0)-G(\varphi))f(t,\varphi) \\ +\frac{1}{2}\,tr[g^T(t,\varphi)V_{xx}(t,\varphi(0)-G(\varphi))g(t,\varphi)], \end{aligned} \tag{4.4}$$

pri čemu je $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$, $V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$ i $V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n}$.

Za decay-funkciju i funkciju V uvode se sledeće pretpostavke:

($\mathbf{H_1}$) Decay-funkcija $\lambda \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ je strogo rastuća, $\lambda(t)\uparrow\infty$, $t\to\infty$ i

$$\lambda(0)=1, \quad \lambda(t+s)\le\lambda(t)\lambda(s), \quad t,s\ge 0. \tag{4.5}$$

($\mathbf{H_2}$) Postoje konstante $p > 0$ i $c_1, c_2 > 0$ tako da funkcija $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ zadovoljava uslov

$$c_1|x|^p \le V(t,x) \le c_2|x|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n. \tag{4.6}$$

Zbog kašnjena, neophodno je dodefinisati decay-funkciju tako da je $\lambda(t) = 1$ za svako $t < 0$.

Wu *et al.* [173, 174, 175], Liu *et al.* [107], Meng i Yin [127] za ispitivanje opšte stabilnosti primenom metode Razumikhina zahtevaju da decay-funkcija zadovoljava uslov $\sup_{t>0} \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} = r = \text{const}$. Medjutim, naredna tvrdjenja ne zahtevaju ovaj uslov, već su dovoljne samo osobine decay-funkcije navedene u pretpostavci ($\mathbf{H_1}$).

Za ispitivanje stabilnosti jednačine (4.2) neophodno je prethodno dokazati dve leme. Lema 4.2.1 uopštava rezultate radova Janković, Randjelović i Jovanović [59] i Shen i Liao [159] koji se odnose na eksponencijalnu stabilnost. Lema 4.2.2 se može naći u [59], a ovde je dokaz leme izostavljen.

Kao i ranije, umesto zapisa $x(t;\xi)$ koristi se $x(t)$ za označavanje rešenja jednačine (4.2) u odnosu na zadati početni uslov $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$.

Lema 4.2.1 *Neka je $p \ge 1$ i neka su zadovoljene pretpostavke ($\mathbf{H_1}$) i ($\mathbf{H_2}$). Takodje, neka postoji konstanta $k \in (0,1)$ tako da je*

$$E|G(\phi)|^p \le k \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|\phi(\theta)|^p \tag{4.7}$$

za svako $\phi \in L^p_{\mathcal{F}}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. Ako je $x(t)$ rešenje jednačine (4.2) i ako postoje konstante $0 < \gamma < \frac{1}{\ln \lambda(\tau)} \ln \frac{1}{k}$ i $\rho \ge 0$ tako da je

$$\lambda^\gamma(t) E|x(t) - G(x_t)|^p \le \frac{c_2}{c_1}(1 + k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|x(\theta)|^p, \quad 0 \le t \le \rho, \tag{4.8}$$

tada je

$$\lambda^\gamma(t) E|x(t)|^p \le \frac{c_2(1 + k^{\frac{1}{p}})^p}{c_1(1 - (k\lambda^\gamma(\tau))^{\frac{1}{p}})^p} \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|x(\theta)|^p, \quad -\tau \le t \le \rho. \tag{4.9}$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon \in (0,1)$ i $0 \le t \le \rho$. Primenom elementarne nejednakosti (1.21) i uslova (4.7), dobija se

$$E|x(t)|^p \le \frac{E|x(t) - G(x_t)|^p}{(1-\varepsilon)^{p-1}} + \frac{k}{\varepsilon^{p-1}} \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|x(t+\theta)|^p.$$

Iz uslova (4.8) i pretpostavke ($\mathbf{H_1}$), za svako $-\tau \le t \le \rho$ je

$$\begin{aligned}
&\lambda^\gamma(t) E|x(t)|^p \\
&\quad\le \frac{1}{(1-\varepsilon)^{p-1}} \lambda^\gamma(t) E|x(t) - G(x_t)|^p + \frac{k}{\varepsilon^{p-1}} \lambda^\gamma(t) \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|x(t+\theta)|^p \\
&\quad\le \frac{c_2(1 + k^{\frac{1}{p}})^p}{c_1(1-\varepsilon)^{p-1}} \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|x(\theta)|^p + \frac{k}{\varepsilon^{p-1}} \sup_{-\tau\le t\le\rho} (\lambda^\gamma(t-\theta) E|x(t)|^p) \\
&\quad\le \frac{c_2(1 + k^{\frac{1}{p}})^p}{c_1(1-\varepsilon)^{p-1}} \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|x(\theta)|^p + \frac{k}{\varepsilon^{p-1}} \sup_{-\tau\le t\le\rho} (\lambda^\gamma(t+\tau) E|x(t)|^p) \\
&\quad\le \frac{c_2(1 + k^{\frac{1}{p}})^p}{c_1(1-\varepsilon)^{p-1}} \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|x(\theta)|^p + \frac{k\lambda^\gamma(\tau)}{\varepsilon^{p-1}} \sup_{-\tau\le t\le\rho} (\lambda^\gamma(t) E|x(t)|^p).
\end{aligned}$$

Kako ova nejednakost važi i za $-\tau \le t \le 0$, to je

$$\sup_{-\tau\le t\le\rho}(\lambda^{\gamma}(t)E|x(t)|^p)$$
$$\le \frac{c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p}{c_1(1-\varepsilon)^{p-1}}\sup_{-\tau\le\theta\le 0}E|x(\theta)|^p+\frac{k\lambda^{\gamma}(\tau)}{\varepsilon^{p-1}}\sup_{-\tau\le t\le\rho}(\lambda^{\gamma}(t)E|x(t)|^p).$$

Ako je ε takvo da je zadovoljena relacija $k\lambda^{\gamma}(\tau) < \varepsilon^{p-1} < 1$, tada je

$$\sup_{-\tau\le t\le\rho}(\lambda^{\gamma}(t)E|x(t)|^p)\le\frac{c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p}{c_1(1-\varepsilon)^{p-1}}\left(1-\frac{k\lambda^{\gamma}(\tau)}{\varepsilon^{p-1}}\right)^{-1}\sup_{-\tau\le\theta\le 0}E|x(\theta)|^p.$$

Odavde se tražena relacija (4.9) dobija za $\varepsilon=(k\lambda^{\gamma}(\tau))^{\frac{1}{p}}$. $\diamondsuit$

Lema 4.2.2 *Neka je $p\ge 1$ i neka je zadovoljen uslov (4.7) za neku konstantu $k\in(0,1)$. Tada, za svako $\phi\in L^p_{\mathcal{F}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ važi*

$$E|\phi(0)-G(\phi)|^p\le(1+k^{\frac{1}{p}})^p\sup_{-\tau\le\theta\le 0}E|\phi(\theta)|^p.$$

Dokaz ove leme direktno sledi primenom nejednakosti (1.21) za $\varepsilon=k^{\frac{1}{p}}/(1+k^{\frac{1}{p}})$ i uslova (4.7).

Naredno tvrdjenje daje dovoljne uslove L^p-stabilnosti jednačine (4.2) u odnosu na opštu decay-funkciju $\lambda(t)$.

Teorema 4.2.1 *Neka je $p\ge 1$ i neka su zadovoljene pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *i uslov (4.7). Takodje, neka postoje pozitivne konstante μ i $q>\frac{c_2}{c_1}(1-k^{\frac{1}{p}})^{-p}$ tako da je*

$$E\mathcal{L}V(t,\varphi)\le-\mu\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}EV(t,\varphi(0)-G(\varphi)) \tag{4.10}$$

za svako $t\ge 0$ i one $\varphi\in L^p_{\mathcal{F}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju uslov

$$EV(t+\theta,\varphi(\theta))\le qEV(t,\varphi(0)-G(\varphi)),\quad -\tau\le\theta\le 0. \tag{4.11}$$

Tada je jednačina (4.2) L^p-stabilna reda $\tilde{\gamma}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, tj. za svako $\xi\in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ i $t\ge 0$ važi

$$E|x(t;\xi)|^p\le\frac{c_2}{c_1}q_1\,(1+k^{\frac{1}{p}})^p\,\lambda^{-\tilde{\gamma}}(t)\sup_{-\tau\le\theta\le 0}E|\xi(\theta)|^p, \tag{4.12}$$

pri čemu je $\tilde{\gamma}=\min\left\{\mu,\frac{1}{\ln\lambda(\tau)}\ln\frac{q_1}{(1+(kq_1)^{\frac{1}{p}})^p}\right\}>0$ i $q_1=\frac{c_1}{c_2}q$.

Dokaz. Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je $\sup_{-\tau\le\theta\le 0}E|x(\theta)|^p>0$ za svako $\xi\in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$. Uslov $q>\frac{c_2}{c_1}(1-k^{\frac{1}{p}})^{-p}$ povlači da je

$$q_1(1+(kq_1)^{\frac{1}{p}})^{-p}>1,$$

gde je $q_1 = \frac{c_1}{c_2} q$, pa je zbog toga $\tilde{\gamma} > 0$. Otuda, za proizvoljno $\gamma \in (0, \tilde{\gamma})$ sledi da je $0 < \gamma < \min\left\{\mu, \frac{1}{\ln\lambda(\tau)} \ln\frac{1}{k}\right\}$, odnosno, $k\lambda^\gamma(\tau) < 1$.

Slično, kako je $\gamma < \frac{1}{\ln\lambda(\tau)} \ln \frac{q_1}{\left(1+(kq_1)^{\frac{1}{p}}\right)^p}$, to je

$$\lambda^{\frac{\gamma}{p}}(\tau) < \frac{q_1^{\frac{1}{p}}}{1+(kq_1)^{\frac{1}{p}}}, \tag{4.13}$$

tako da je

$$1 - (k\lambda^\gamma(\tau))^{\frac{1}{p}} > 1 - \frac{(kq_1)^{\frac{1}{p}}}{1+(kq_1)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{1+(kq_1)^{\frac{1}{p}}}. \tag{4.14}$$

Zamenom (4.14) u (4.13), dobija se

$$\frac{\lambda^\gamma(\tau)}{(1-(k\lambda^\gamma(\tau))^{\frac{1}{p}})^p} < q_1. \tag{4.15}$$

Sledeći korak je dokazati kontradikcijom da važi

$$\lambda^\gamma(t) EV(t, x(t) - G(x_t)) \le c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|x(\theta)|^p, \quad t \ge 0. \tag{4.16}$$

Pre svega, može se zaključiti da (4.16) važi za $t = 0$. Zaista, kako je $\lambda(0) = 1$, iz pretpostavke $(\mathbf{H_2})$ i Leme 4.2.2, je

$$\begin{aligned}\lambda^\gamma(0) EV(0, x(0) - G(x_0)) &\le c_2 E|x(0) - G(x_0)|^p \\ &\le c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|\xi(\theta)|^p.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da relacija (4.16) nije zadovoljena za $t > 0$. Kako je funkcija $V(t, x(t) - G(x_t))$ neprekidna, može se naći broj $\rho \ge 0$ tako da je

$$\lambda^\gamma(t) EV(t, x(t) - G(x_t)) \le c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|\xi(\theta)|^p, \quad 0 \le t \le \rho. \tag{4.17}$$

Takodje, postoji niz $\{t_k\}_{k\ge 1}$, $t_k \downarrow \rho$ za koji je

$$\lambda^\gamma(t_k) EV(t, x(t_k) - G(x_{t_k})) > c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|\xi(\theta)|^p \tag{4.18}$$

i

$$\lambda^\gamma(\rho) EV(\rho, x(\rho) - G(x_\rho)) = c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|\xi(\theta)|^p. \tag{4.19}$$

Sada se može pokazati da uslov (4.11) važi za $\varphi = x_\rho$. Kako je zadovoljena relacija (4.17), primenom Leme 4.2.1 sledi da za $-\tau \le t \le \rho$ važi

$$\begin{aligned}\lambda^\gamma(t) EV(t, x(t)) &\le c_2\, \lambda^\gamma(t) E|x(t)|^p \\ &\le \frac{c_2^2\,(1+k^{\frac{1}{p}})^p}{c_1\,(1-(k\lambda^\gamma(\tau))^{\frac{1}{p}})^p} \sup_{-\tau\le\theta\le 0} E|x(\theta)|^p \\ &= \frac{c_2\,\lambda^\gamma(\rho) EV(\rho, x(\rho) - G(x_\rho))}{c_1(1-(k\lambda^\gamma(\tau))^{\frac{1}{p}})^p}.\end{aligned}$$

Ako je u prethodnoj relaciji $t=\rho+\theta$, onda iz monotonosti funkcije $\lambda(t)$ sledi

$$\lambda^{\gamma}(\rho-\tau)EV(\rho+\theta,x(\rho+\theta))\leq\frac{c_2\,\lambda^{\gamma}(\rho)EV(\rho,x(\rho)-G(x_{\rho}))}{c_1\,(1-(k\lambda^{\gamma}(\tau))^{\frac{1}{p}})^p}.$$

S obzirom da je $\lambda^{\gamma}(\rho)\leq\lambda^{\gamma}(\rho-\tau)\,\lambda^{\gamma}(\tau)$ za $\rho>\tau$, na osnovu (4.15) se dobija

$$EV(\rho+\theta,x(\rho+\theta))\leq q\,EV(\rho,x(\rho)-G(x_{\rho})).$$

U slučaju kad je $\rho\leq\tau$, prethodna relacija je takodje zadovoljena jer je $\lambda^{\gamma}(\rho-\tau)=1$ i $\lambda(t)$ je rastuća funkcija. Zbog (4.11), uslova (4.10) i činjenice da je $\gamma<\mu$, sledi

$$\begin{aligned}E\mathcal{L}V(\rho,x_{\rho})&\leq-\mu\,\frac{\lambda'(\rho)}{\lambda(\rho)}\,EV(\rho,x(\rho)-G(x_{\rho}))\\&\leq-\gamma\,\frac{\lambda'(\rho)}{\lambda(\rho)}\,EV(\rho,x(\rho)-G(x_{\rho})).\end{aligned}$$

Kako su f,g i G neprekidni funkcionali, može se naći dovoljno malo $h>0$ tako da za svako t, $\rho\leq t\leq\rho+h$ važi

$$E\mathcal{L}V(t,x_t)\leq-\gamma\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,EV(t,x(t)-G(x_t)).\tag{4.20}$$

Sa druge strane, primenom formule Itôa na funkciju $\lambda^{\gamma}(s)V(s,x(s)-G(x_s))$ za $\rho\leq s\leq\rho+h$, a zatim relacija (4.19) i (4.20), dobija se

$$\begin{aligned}&\lambda^{\gamma}(\rho+h)EV(\rho+h,x(\rho+h)-G(x_{\rho+h}))-c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p\sup_{-\tau\leq\theta\leq0}E|\xi(\theta)|^p\\&=\int_{\rho}^{\rho+h}\lambda^{\gamma}(s)\left(\gamma\,\frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)}EV(s,x(s)-G(x_s))+E\mathcal{L}V(s,x_s)\right)ds\\&\leq0,\end{aligned}$$

što je u kontradikciji sa (4.18), pa je zadovoljena relacija (4.16).

Konačno, na osnovu (4.15), primenom Leme 4.2.1 za $t\geq0$ se dobija

$$\begin{aligned}\lambda^{\gamma}(t)E|x(t)|^p&\leq\frac{c_2\,(1+k^{\frac{1}{p}})^p}{c_1\,(1-(k\lambda^{\gamma}(\tau))^{\frac{1}{p}})^p}\sup_{-\tau\leq\theta\leq0}E|x(\theta)|^p\\&\leq q\,(1+k^{\frac{1}{p}})^p\sup_{-\tau\leq\theta\leq0}E|x(\theta)|^p.\end{aligned}$$

Odavde, dokaz teoreme neposredno sledi kad $\gamma\to\tilde{\gamma}$. $\diamondsuit$

Teorema 4.2.1 ističe razliku izmedju primene uslova Razumikhina i uobičajenih tvrdjenja za ispitivanje L^p-stabilnosti. Naime, suština koncepta Razumikhina je da se pojednostavi dokazivanje ispunjenosti uslova (4.10), u smislu da se ne zahteva da on važi za svako $\phi\in L^p_{\mathcal{F}}([-\tau,0);\mathbb{R}^n)$, već samo za one koji zadovoljavaju uslov (4.11).

Napomena 4.2.1 Za $G(t) \equiv 0$, Teorema 4.2.1 se svodi na Teoremu 2.1 u [143]. Specijalno, za $\lambda(t) = e^t$ ova teorema se svodi na Teoremu 1 u [159] i Teoremu 1 u [59] pri čemu je $V(t,x) = |x|^p$. Štaviše, za $\lambda(t) = e^t$ i $G(t) \equiv 0$, Teorema 4.2.1 se svodi na Teoremu 2.1 u [117] i Teoremu 3.1 u [118] za $p = 2$ i $V(x) = x^T x$.

U nastavku su dati uslovi pri kojima L^p-stabilnost povlači skoro izvesnu stabilnost jednačine (4.2). Za dokazivanje tog tvrdjenja, neophodna je sledeća lema.

Lema 4.2.3 *Neka je zadovoljena pretpostavka* ($\mathbf{H_1}$) *i neka postoje konstante* $p \geq 1$ *i* $k \in (0,1)$ *tako da za svako* $\phi \in C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ *važi*

$$|G(\phi)|^p \leq k \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} |\phi(\theta)|^p. \tag{4.21}$$

Ako je $z \in C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ *i ako postoje konstante* $0 < \gamma < \frac{1}{\ln\lambda(\tau)} \ln\frac{1}{k}$ *i* $H > 0$ *tako da je*

$$E|z(t) - G(z_t)|^p \leq H\lambda^{-\gamma}(t), \quad t \geq 0, \tag{4.22}$$

tada je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|z(t)|}{\ln\lambda(t)} \leq -\frac{\gamma}{p}. \tag{4.23}$$

Dokaz. Na osnovu elementarne nejednakosti (1.21) i uslova (4.21) sledi da za proizvoljno $T > 0$ i $k\lambda^\gamma(\tau) < \varepsilon^{p-1} < 1$ važi

$$\sup_{0\leq t\leq T}(\lambda^\gamma(t)|z(t)|^p) \leq \frac{H}{(1-\varepsilon)^{p-1}} + \frac{k}{\varepsilon^{p-1}} \sup_{0\leq t\leq T}\lambda^\gamma(t) \sup_{-\tau\leq t\leq 0}|z(t)|^p. \tag{4.24}$$

Primenom ($\mathbf{H_1}$), dobija se

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T}\lambda^\gamma(t) \sup_{-\tau\leq t\leq 0}|z(t)|^p &\leq \sup_{-\tau\leq t\leq T}(\lambda^\gamma(t+\tau)|z(t)|^p)\\ &\leq \lambda^\gamma(\tau)\left(\sup_{0\leq t\leq T}(\lambda^\gamma(t)|z(t)|^p) + \sup_{-\tau\leq t\leq T}|z(t)|^p\right),\end{aligned}$$

a na osnovu ove relacije i (4.24) sledi

$$\left(1 - \frac{k\lambda^\gamma(\tau)}{\varepsilon^{p-1}}\right)\sup_{0\leq t\leq T}(\lambda^\gamma(t)|z(t)|^p) \leq \frac{H}{(1-\varepsilon)^{p-1}} + \frac{k\lambda^\gamma(\tau)}{\varepsilon^{p-1}}\sup_{-\tau\leq t\leq 0}|z(t)|^p.$$

Otuda, relacija (4.23) je zadovoljena kad $T \to \infty$. $\diamondsuit$

Sledeće tvrdjenje sadrži integralni uslov $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)\,dt < \infty$ za neko konačno $\delta > 0$, koji garantuje skoro izvesnu stabilnost u odnosu na opštu decay-funkciju $\lambda(t)$. Ovaj uslov se prvi put javlja u [143] G. Pavlović i S. Janković za ispitivanje opšte skoro izvesne stabilnosti SFDJ. Može se primetiti da se ovaj uslov ne javlja u ispitivanju eksponencijalne skoro izvesne stabilnosti s obzirom da je uvek zadovoljen, odnosno, $\int_0^\infty e^{-\delta t}\,dt < \infty$ za svako $\delta > 0$.

Teorema 4.2.2 *Neka je $p \geq 2$ i neka su zadovoljeni pretpostavka* $(\mathbf{H_1})$ *i uslov (4.7). Takodje, neka postoji konstanta $K > 0$ tako da za svako $t \geq 0$ i $\phi \in L^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ važi*

$$E|f(t,\phi)|^p + E|g(t,\phi)|^p \leq K \sup_{\tau \leq \theta \leq 0} E|\phi(\theta)|^p. \tag{4.25}$$

Neka je trivijalno rešenje jednačine (4.2) L^p-stabilno reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$. Ako je $\bar{\gamma} = \min\left\{\gamma, \frac{1}{\ln \lambda(\tau)} \ln \frac{1}{k}\right\}$ i ako postoji konstanta $\delta \in (0, \bar{\gamma})$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)dt < \infty$, tada je jednačina (4.2) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\bar{\gamma}-\delta}{p}$ u odnosu na decay $\lambda(t)$, odnosno, za svako $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$,

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\ln|x(t;\xi)|}{\ln \lambda(t)} \leq -\frac{\bar{\gamma} - \delta}{p} \quad s.i. \tag{4.26}$$

Specijalno, ako je zadovoljen uslov (4.25) i svi uslovi Teoreme 4.2.1, i ako postoji konstanta $\delta \in (0, \bar{\gamma})$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)dt < \infty$, tada je jednačina (4.2) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\bar{\gamma}-\delta}{p}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Primenom elementarne nejednakosti (1.20), dobija se

$$\begin{aligned} E \sup_{0 \leq \theta \leq \tau} |x(n\tau + \theta) - G(x_{n\tau+\theta})|^p &\leq 3^{p-1}\Bigg(E|x(n\tau) - G(x_{n\tau})|^p \\ &+E\left|\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} f(s, x_s)\, ds\right|^p + E \sup_{0 \leq \theta \leq \tau}\left|\int_{n\tau}^{n\tau+\theta} g(s, x_s)\, dw(s)\right|^p\Bigg). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Na osnovu (4.3), (4.7) i $(\mathbf{H_1})$ sledi

$$\begin{aligned} &E|x(n\tau) - G(x_{n\tau})|^p \\ &\leq 2^{p-1}(E|x(n\tau)|^p + E|G(x_{n\tau})|^p) \\ &\leq 2^{p-1}\left(M\lambda^{-\gamma}(n\tau) \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|\xi(\theta)|^p + k \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|x(n\tau + \theta)|^p\right) \\ &\leq 2^{p-1}M[\lambda^{-\gamma}(n\tau) + k\lambda^{-\gamma}(n\tau - \tau)] \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|\xi(\theta)|^p \\ &\leq 2^{p-1}M(1+k)\lambda^{-\gamma}(n\tau - \tau) \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|\xi(\theta)|^p \\ &\leq 2^{p-1}M(1+k)\lambda^{-\bar{\gamma}}(n\tau - \tau) \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|\xi(\theta)|^p. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Pomoću Hölderove nejednakosti (1.27), (4.25), (4.3) i $(\mathbf{H_1})$, dobija se ocena

$$\begin{aligned} E\left|\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} f(s, x_s)\, ds\right|^p &\leq \tau^{p-1}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} E|f(s, x_s)|^p\, ds \\ &\leq K\tau^{p-1}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|x(s+\theta)|^p\, ds \\ &\leq MK\tau^{p-1}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \lambda^{-\gamma}(s+\theta) \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|\xi(\theta)|^p\, ds \\ &\leq MK\tau^p\, \lambda^{-\bar{\gamma}}(n\tau - \tau) \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} E|\xi(\theta)|^p. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Slično, na osnovu Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti (1.3.3) je

$$E\sup_{0\le\theta\le\tau}\left|\int_{n\tau}^{n\tau+\theta} g(s,x_s)\,dw(s)\right|^p \le C_p\tau^{\frac{p}{2}-1}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} E|g(s,x_s)|^p\,ds \tag{4.30}$$

$$\le C_pMK\tau^{\frac{p}{2}}\lambda^{-\bar\gamma}(n\tau-\tau)\sup_{-\tau\le\theta\le 0}E|\xi(\theta)|^p,$$

gde je $C_p>0$ univerzalna konstanta. S obzirom da je

$$\lambda^{-\bar\gamma}(n\tau-\tau)=\frac{\lambda^{\bar\gamma}(\tau)}{\lambda^{\bar\gamma}(n\tau-\tau)\lambda^{\bar\gamma}(\tau)}\le\frac{\lambda^{\bar\gamma}(\tau)}{\lambda^{\bar\gamma}(n\tau)}=\lambda^{-\bar\gamma}(n\tau)\lambda^{\bar\gamma}(\tau),$$

zamenom (4.28), (4.29), (4.30) u (4.27) se dobija ocena

$$E\sup_{0\le\theta\le\tau}|x(n\tau+\theta)-G(x_{n\tau+\theta})|^p\le C\,\lambda^{-\bar\gamma}(n\tau),$$

gde je $C>0$ generisana konstanta. Primenom nejednakosti Chebysheva (1.25) sledi da je

$$P\left\{\sup_{0\le\theta\le\tau}|x(n\tau+\theta)-G(x_{n\tau+\theta})|^p\ge\lambda^{-(\bar\gamma-\delta)}(n\tau)\right\}$$

$$\le\frac{C\,\lambda^{-\bar\gamma}(n\tau)}{\lambda^{-(\bar\gamma-\delta)}(n\tau)}=C\lambda^{-\delta}(n\tau).$$

Kako je $\lambda^{-\delta}(n\tau)\le\lambda^{-\delta}(s)$ za $(n-1)\tau\le s\le n\tau$, to je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-\delta}(n\tau)\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\tau}\int_{(n-1)\tau}^{n\tau}\lambda^{-\delta}(s)\,ds=\frac{1}{\tau}\int_0^{\infty}\lambda^{-\delta}(s)\,ds<\infty.$$

Na osnovu Borel-Cantellijeve leme sledi da postoji $n_0=n_0(\omega)>0\,s.i.$ tako da za skoro sve $\omega\in\Omega$ i $n>n_0$ važi

$$\sup_{0\le\theta\le\tau}|x(n\tau+\theta)-G(x_{n\tau+\theta})|^p\le\lambda^{-(\bar\gamma-\delta)}(n\tau)\quad\text{s.i.},$$

odnosno, $|x(t)-G(x_t)|^p\le\lambda^{-(\bar\gamma-\delta)}(t-\tau)$ skoro izvesno za $t\ge n_0\tau$. Štaviše, s obzirom da je $|x(t)-G(x_t)|^p$ skoro izvesno konačno na $[0,n_0\tau]$, postoji skoro izvesno konačan broj $H=H(\omega)$ tako da je

$$|x(t)-G(x_t)|^p\le H\lambda^{-(\bar\gamma-\delta)}(\tau)\quad\text{s.i. za } t\ge 0.$$

Kako je zadovoljen uslov (4.22), na osnovu Leme 4.2.3 sledi da važi (4.26), odnosno da je jednačina (4.2) skoro izvesno stabilna reda $(\bar\gamma-\delta)/p$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Štaviše, ako su zadovoljeni uslovi Teoreme 4.2.1, onda je $q_1/(1+(kq_1)^{\frac{1}{p}})^p<1/k$, što na osnovu prethodne konstatacije povlači da je jednačina (4.2) skoro izvesno stabilna reda $(\tilde\gamma-\delta)/p$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$. $\diamondsuit$

Specijalno, ako je $\lambda(t)=e^t$, onda je jednačina (4.2) eksponencijalno skoro izvesno stabilna, pri čemu je $\bar\gamma=-\gamma/p$, što sledi iz (4.26) kad $\delta\to 0$.

Napomena 4.2.2 Za $G(t)\equiv 0$, Teorema 4.2.2 se svodi na Teoremu 2.2 u [143]. Ako je $\lambda(t)=e^t$, Teorema 4.2.2 se svodi na Teoremu 2 u [59], za $G(t)\equiv 0$ na Teoremu 2.2 u [117], a za $p=2$, $G(t)\equiv 0$, $V(x)=x^Tx$ na Teoremu 4.1 u [118].

4.3 Stabilnost perturbovanih neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina

Primenom rezultata dobijenih u Poglavlju 4.2 može se ispitati skoro izvesna i L^p-stabilnost u odnosu na opštu decay-funkciju šire klase *perturbovanih neutralnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina* oblika

$$d[x(t) - G(x_t)] = [h(t, x(t)) + f(t, x_t)]\, dt + g(t, x_t)\, dw(t), \quad t \geq 0 \tag{4.31}$$

sa zadatim početnim uslovom $x_0 = \xi = \{\xi(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\} \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. Ovde su G, f i g definisani kao u Poglavlju 4.2, a $h : \mathbb{R}^+ \times C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $h(t, 0) \equiv 0$ je Borel merljivo.

S obzirom da je jednačina (4.31) specijalan slučaj jednačine (4.2), zbog razloga već navedenih u prethodnom poglavlju, pretpostavlja se da postoji jedinstveno rešenje jednačine (4.31), bez naglašavanja koji uslovi egzistencije i jedinstvenosti su ispunjeni (za više detalja pogledati [77, 125]).

Ispitivanje eksponencijalne L^p-stabilnosti i skoro izvesne stabilnosti jednačine (4.31) primenom pristupa Razumikhina razmatrano je, izmedju ostalog, u [59, 118].

Posledica 4.3.1 *Neka je $p \geq 1$ i neka su zadovoljene pretpostavke $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ i uslov (4.7). Takodje, neka postoje konstante $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tako da je*

$$0 < k < \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^p}, \quad \lambda_1 > \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\left(1 - \left(\frac{c_2 k}{c_1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p} \tag{4.32}$$

i

$$\begin{aligned} E\mathcal{L}V(t, \varphi) &= E\Big\{V_t(t, \varphi(0) - G(\varphi)) + V_x(t, \varphi(0) - G(\varphi))[h(t, \varphi(0)) + f(t, \varphi)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\, tr[g^T(t, \varphi) V_{xx}(t, \varphi(0) - G(\varphi)) g(t, \varphi)]\Big\} \\ &\leq -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\left[\lambda_1 EV(t, \varphi(0)) - \lambda_2 \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} EV(t + \theta, \varphi(\theta))\right] \end{aligned} \tag{4.33}$$

za svako $t \geq 0$ i $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. Tada je jednačina (4.31) L^p-stabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Iz prve relacije u (4.32) sledi da je

$$\frac{c_1}{c_2 k} > \frac{c_2}{c_1 (1 - k^{\frac{1}{p}})^p} \geq 1.$$

Kako je funkcija $\psi(x) = x\left(1 - \left(\frac{c_2 k}{c_1} x\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{-p}$ rastuća, postoji konstanta $q > 1$ tako da je

$$\frac{c_1}{c_2 k} > q > \frac{c_2}{c_1 (1 - k^{\frac{1}{p}})^p}, \quad \lambda_1 > \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\lambda_2 q}{\left(1 - \left(\frac{c_2 k q}{c_1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p}. \tag{4.34}$$

Očigledno je da se jednačina (4.31) svodi na jednačinu (4.2) uvodjenjem smene $f_1(t,\phi) \equiv h(t,\phi(0)) + f(t,\phi)$ za svako $t \geq 0$ i $\phi \in L^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n))$. Prema tome, ako je zadovoljen uslov (4.10), tvrdjenje se dokazuje primenom Teoreme 4.2.1.

Neka je $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ takvo da je za svako $t \geq 0$ ispunjen uslov Razumikhina (4.11) i neka q zadovoljava relaciju (4.34). Na osnovu nejednakosti (1.21), pretpostavke $(\mathbf{H_2})$ i uslova (4.7) sledi da je za svako $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
EV(t,\varphi(0)-G(\varphi)) &\leq c_2 E\,|\varphi(0)-G(\varphi)|^p \\
&\leq \frac{c_2}{(1-\varepsilon)^{p-1}} E\,|\varphi(0)|^p + \frac{c_2}{\varepsilon^{p-1}} E|G(\varphi)|^p \\
&\leq \frac{c_2}{c_1(1-\varepsilon)^{p-1}} EV(t,\varphi(0)) + \frac{c_2 kq}{c_1\varepsilon^{p-1}} EV(t,\varphi(0)-G(\varphi)).
\end{aligned}$$

Kako je $\frac{c_2kq}{c_1} < 1$, za $\varepsilon = \left(\frac{c_2kq}{c_1}\right)^{\frac{1}{p}}$ se dobija

$$-EV(t,\varphi(0)) \leq -\frac{c_1}{c_2}\left(1-\left(\frac{c_2kq}{c_1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p EV(t,\varphi(0)-G(\varphi)). \tag{4.35}$$

Prema tome, za konstantu q koja zadovoljava (4.34) i za svako $t \geq 0$ i one $\varphi \in L^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];R^n)$ koji zadovoljavaju (4.11), na osnovu (4.33) i (4.35) sledi

$$E\mathcal{L}V(t,\varphi) \leq -\left[\lambda_1\frac{c_1}{c_2}\left(1-\left(\frac{c_2kq}{c_1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p - \lambda_2 q\right]\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(t,\varphi(0)-G(\varphi)).$$

Kako (4.34) implicira da je $\lambda_1\frac{c_1}{c_2}\left(1-\left(\frac{c_2kq}{c_1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p - \lambda_2 q > 0$, dokaz tvrdjenja direktno sledi na osnovu Teoreme 4.2.1. Štaviše,

$$\tilde{\gamma} = \min\left\{\lambda_1\frac{c_1}{c_2}\left(1-\left(\frac{c_2kq}{c_1}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p - \lambda_2 q, \frac{1}{\ln\lambda(\tau)}\ln\frac{q_1}{(1+(kq_1)^{\frac{1}{p}})^p}\right\}, \tag{4.36}$$

pri čemu je $q_1 = \frac{c_1}{c_2}q$. $\diamondsuit$

Napomena 4.3.1 Prethodno tvrdjenje predstavlja uopštenje Teoreme 3 u [59] za $\lambda(t) = e^t$ i $V(x) = |x|^p$, kao i Teoreme 5.1 u [118] za $p = 2$, $\lambda(t) = e^t$ i $V(x) = x^T x$.

Sledeće tvrdjenje neposredno sledi na osnovu Teoreme 4.2.2, tako da se dokaz izostavlja.

Posledica 4.3.2 *Neka je $p \geq 2$ i neka su zadovoljeni pretpostavka $(\mathbf{H_1})$ i uslov (4.7). Takodje, neka postoji konstanta $K > 0$ tako da je*

$$E|h(t,\varphi(0))|^p + E|f(t,\phi)|^p + E|g(t,\phi)|^p \leq K \sup_{\tau\leq\theta\leq 0} E|\phi(\theta)|^p \tag{4.37}$$

za svako $t \geq 0$ i $\phi \in L^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$. Neka je trivijalno rešenje jednačine (4.31) L^p-stabilno reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$. Ako je $\bar{\gamma} = \min\left\{\gamma, \frac{1}{\ln\lambda(\tau)}\ln\frac{1}{k}\right\}$ i ako postoji konstanta $\delta \in (0,\bar{\gamma})$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)dt < \infty$, tada je jednačina (4.31) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\bar{\gamma}-\delta}{p}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Prethodni rezultati se mogu primeniti na ispitivanje opšteg tipa stabilnosti *neutralnih stohastičkih diferencijalnih (NSDJ) sa kašnjenjem*

$$d[x(t) - \bar{G}(x(t-\tau))] = \bar{f}(t, x(t), x(t-\tau))dt + \bar{g}(t, x(t), x(t-\tau))dw(t), \quad (4.38)$$

gde je $t \geq 0$, $x_0 = \xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^n)$ i w je m-dimenzionalno Brownovo kretanje. Borel-merljive funkcije $\bar{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\bar{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $\bar{g} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ su takve da je $\bar{G}(0) \equiv 0$, $\bar{f}(t, 0, 0) \equiv 0$, $\bar{g}(t, 0, 0) \equiv 0$. Takodje, pretpostavlja se da postoji jedinstveno rešenje $\{x(t; \xi), t \in [-\tau, \infty)\}$ jednačine (4.38) i da je $\sup_{-\tau\leq t<\infty} E|x(t; \xi)|^p < \infty$.

Neka je $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ familija nenegativnih funkcija $V(t, x)$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda po t i drugog reda po x. Za funkciju $V \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ operator $LV : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ je definisan na sledeći način,

$$\begin{aligned} LV(t, x, y) = {} & V_t(t, x - \bar{G}(y)) + V_x(t, x - \bar{G}(y))\bar{f}(t, x, y) \\ & + \frac{1}{2} tr[\bar{g}^T(t, x, y)V_{xx}(t, x - G(y))\bar{g}(t, x, y)], \end{aligned} \quad (4.39)$$

pri čemu su V_t, V_x, V_{xx} definisani kao i ranije.

Napomena 4.3.2 Naredna dva tvrdjenja uopštavaju postojeće rezultate iz rada [118], u kome je $\lambda(t) = e^t$, $p = 2$ i $V(x) = x^T x$.

Posledica 4.3.3 *Neka je $p \geq 1$ i neka su zadovoljene pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_2})$. *Takodje, neka postoji konstanta $k \in (0, 1)$ tako da je*

$$|\bar{G}(y)|^p \leq k|y|^p, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.40)$$

Ako postoje konstante $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tako da je ispunjen uslov (4.32) i ako je

$$LV(t, x, y) \leq -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} [\lambda_1 V(t, x) - \lambda_2 V(t - \tau, y)]$$

za svako $t \geq 0$ i $x, y \in \mathbb{R}^n$, tada je jednačina (4.38) L^p-stabilna reda $\tilde{\gamma}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, gde je $\tilde{\gamma}$ odredjeno sa (4.36).

Štaviše, za $p \geq 2$, ako postoji konstanta $K > 0$ tako da važi

$$|\bar{f}(t, x, y)|^p + |\bar{g}(t, x, y)|^p \leq K(|x|^p + |y|^p) \quad (4.41)$$

za svako $t \geq 0$ i $x, y \in \mathbb{R}^n$ i ako postoji konstanta $\delta \in (0, \tilde{\gamma})$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\delta}(t)dt < \infty$, tada je jednačina (4.38) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\tilde{\gamma}-\delta}{p}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Smenama

$$\begin{aligned} & G(\varphi) := \bar{G}(\varphi(-\tau)), \ f_1(t, x) := \bar{f}(t, x, 0), \\ & f(t, \varphi) := -\bar{f}(t, \varphi(0), 0) + \bar{f}(t, \varphi(0), \varphi(-\tau)), \\ & g(t, \varphi) := \bar{g}(t, \varphi(0), \varphi(-\tau)) \end{aligned}$$

za svako $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ i $\varphi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, jednačina (4.38) se svodi na jednačinu (4.31). Zbog postavljenih uslova, dokaz direktno sledi na osnovu Posledice 4.3.1 i Posledice 4.3.2. $\diamondsuit$

U narednom tvrdjenju, $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ uobičajeno označava familiju $\mathcal{F}$-merljivih slučajnih promenljivih X sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$ za koje je $E|X|^p<\infty$.

Posledica 4.3.4 *Neka je $p\geq 1$ i neka su zadovoljene pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$. Takodje, neka postoji konstanta $k>0$ tako da je*

$$E|\bar{G}(Y)|^p\leq kE|Y|^p,\quad Y\in L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n). \tag{4.42}$$

Ako postoje konstante $q>\frac{c_2}{c_1}(1-k^{\frac{1}{p}})^{-p}$ i $\mu>0$ tako da je

$$ELV(t,X,Y)\leq -\mu\,\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\,EV(t,X-\bar{G}(Y)) \tag{4.43}$$

za svako $t\geq 0$ i one $X,Y\in L^p_{\mathcal{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju uslov Razumikhina

$$EV(t-\tau,Y)<q\,EV(t,X-\bar{G}(Y)),$$

tada je trivijalno rešenje jednačine (4.38) L^p-stabilno reda $\tilde{\gamma}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, gde je

$$\tilde{\gamma}=\min\left\{\mu,\frac{1}{\ln\lambda(\tau)}\ln\frac{q_1}{(1+(kq_1)^{\frac{1}{p}})^p}\right\}>0,\quad q_1=\frac{c_1}{c_2}\,q.$$

Štaviše, za $p\geq 2$, ako je zadovoljen uslov (4.41) i ako postoji konstanta $\delta\in(0,\bar{\gamma})$ tako da je $\int_0^\infty\lambda^{-\delta}(t)dt<\infty$, tada je jednačina (4.38) skoro izvesno stabilna reda $\frac{\tilde{\gamma}-\delta}{p}$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. S obzirom da se jednačina (4.38) može svesti na jednačinu (4.2) uvodjenjem smena

$$G(\varphi):=\bar{G}(\varphi(-\tau)),\quad f(t,\varphi):=\bar{f}(t,\varphi(0),\varphi(-\tau)),\quad g(t,\varphi):=\bar{g}(t,\varphi(0),\varphi(-\tau))$$

za svako $t\geq 0$ i $\varphi\in C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, dokaz neposredno sledi primenom Teoreme 4.2.1 i Teoreme 4.2.2. $\diamondsuit$

4.4 Primeri

U ovom poglavlju se razmatraju dva primera kojima se ilustruju prethodni rezultati. Preciznije, odredjuju se dovoljni uslovi koji garantuju polinomijalnu stabilnost u prvom primeru i logaritamsku stabilnost u drugom. Pritom se u razmatranim primerima ne može ništa zaključiti o L^p-stabilnosti i skoro izvesnoj stabilnosti u odnosu na eksponencijalnu decay-funkciju $\lambda(t)=e^t$.

Primer 4.4.1 Prethodni teorijski rezultati se mogu primeniti za odredjivanje uslova pri kojima je trivijalno rešenje n-dimenzionalne NSFDJ

$$\begin{aligned}d[x(t)-G(x_t)]=&\left[-\frac{a+b}{1+t/2}\,x(t)+\frac{at}{(1+t)^2}\,G(x_t)\right]dt\\&+\frac{c}{\sqrt{2+t^2}}\,g(x_t)\,dw(t),\quad t\geq 0,\quad x_0=\xi,\end{aligned} \tag{4.44}$$

istovremeno skoro izvesno i L^p-stabilno u odnosu na odgovarajuću decay-funkciju $\lambda(t)$. Pretpostavimo da je $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, $p \geq 2$, $a,b > 0$ i $c \in \mathbb{R}$ su konstante, w je m-dimenzionalno Brownovo kretanje, $G : C([-\tau,0];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $g : C([-\tau,0];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times m}$ su Borel-merljive i $G(0) \equiv 0$, $g(0) \equiv 0$. Pored toga, neka postoje konstante $k \in (0,1)$ i $K > 0$ tako da je

$$E|G(\phi)|^p \leq k \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} E|\phi(\theta)|^p, \quad E|g(\phi)|^p \leq K \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} E|\phi(\theta)|^p \tag{4.45}$$

za svako $\phi \in L^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$. S obzirom na prethodno navedene uslove, na osnovu Teoreme 4.1.1 postoji jedinstveno skoro izvesno neprekidno rešenje $\{x(t;\xi), t \in [-\tau,\infty)\}$ jednačine (4.44) za koje je $\sup_{-\tau\leq t\leq\infty} E|x(t)|^p < \infty$.

Neka je $V(x) = |x|^p$. Tada je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x_t) \leq{}& p|x(t)-G(x_t)|^{p-2}[x(t)-G(x_t)]^T\Big[-\frac{a+b}{1+t/2}\,x(t) + \frac{at}{(1+t)^2}\,G(x_t)\Big]\\ &+ \frac{p(p-1)}{2}\,\frac{c^2}{2+t^2}\,|x(t)-G(x_t)|^{p-2}|g(x_t)|^2.\end{aligned}$$

Kako je $[x(t)-G(x_t)]^T x(t) = |x(t)-G(x_t)|^2 + [x(t)-G(x_t)]^T G(x_t)$, to je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x_t) \leq \frac{1}{1+t}\Big\{&-p\Big(a+\frac{b}{2}\Big)V(x(t)-G(x_t)) + \frac{pb}{2}\,V^{\frac{p-2}{p}}(x(t)-G(x_t))|G(x_t)|^2\\ &+ \frac{p(p-1)c^2}{2}\,V^{\frac{p-2}{p}}(x(t)-G(x_t))|g(x_t)|^2\Big\}.\end{aligned}$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.23) za $\varepsilon > 0$ je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x_t) \leq \frac{1}{1+t}\Big\{&-p\Big(a+\frac{b}{2}\Big)V(x(t)-G(x_t))\\ &+ \frac{pb}{2}\Big[\frac{(p-2)\varepsilon}{p}V(x(t)-G(x_t)) + \frac{2}{p\varepsilon^{\frac{p}{2}-1}}\,|G(x_t)|^p\Big]\\ &+ \frac{p(p-1)c^2}{2}\Big[\frac{(p-2)\varepsilon}{p}V(x(t)-G(x_t)) + \frac{2}{p\varepsilon^{\frac{p}{2}-1}}\,|g(x_t)|^p\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

Za $q > (1-k^{\frac{1}{p}})^{-p}$, na osnovu uslova (4.11) i (4.45) sledi

$$E\mathcal{L}V(x_t) \leq -\frac{1}{1+t}\,\Big[p\Big(a+\frac{b}{2}\Big) - f(\varepsilon)\Big]\,EV(x(t)-G(x_t)),$$

gde je $f(\varepsilon) = \frac{p-2}{2}\,[b+(p-1)c^2]\varepsilon + [bk+(p-1)c^2K]q\varepsilon^{-\frac{p}{2}+1}$. Neka je ε takvo da $f(\varepsilon)$ ima najmanju vrednost. Kako je $f'(\varepsilon) = 0$ za $\varepsilon = \Big(\frac{[bk+(p-1)c^2K]q}{b+(p-1)c^2}\Big)^{\frac{2}{p}} = \varepsilon_0$, to je $\min\limits_{\varepsilon>0} f(\varepsilon) = f(\varepsilon_0) = \dfrac{p}{2}\,[b+(p-1)c^2]\varepsilon_0$. Prema tome,

$$E\mathcal{L}V(x_t) \leq -\frac{\mu}{1+t}\,EV(x(t)-G(x_t)), \tag{4.46}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\mu &= p\left(a+\frac{b}{2}\right)-\frac{p}{2}\Big[b+(p-1)c^2\Big]\varepsilon_0\\ &= p\left(a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\Big[bk+(p-1)c^2K\Big]^{\frac{2}{p}}q^{\frac{2}{p}}\Big[b+(p-1)c^2\Big]^{\frac{p-2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Ako je $\lambda(t)=1+t$, onda je $\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}=\frac{1}{1+t}$, pa je relacija (4.10) zadovoljena za $\mu>0$, odnosno,

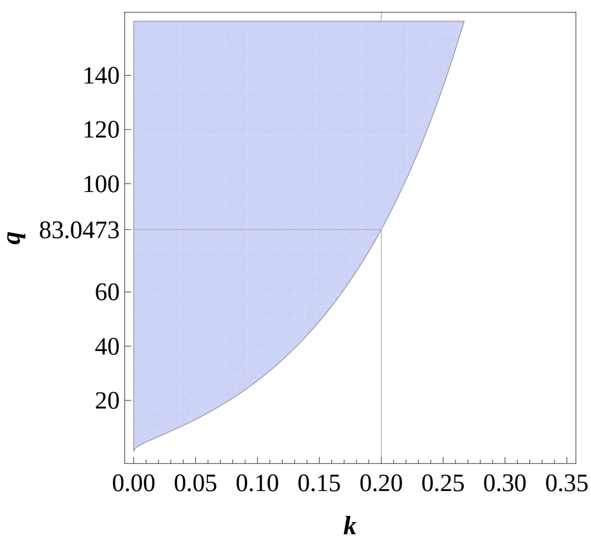
$$a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\Big[bk+(p-1)c^2K\Big]^{\frac{2}{p}}q^{\frac{2}{p}}\Big[b+(p-1)c^2\Big]^{\frac{p-2}{p}}\equiv a+S(b,c)>0.$$

Ako je ovaj uslov ispunjen, na osnovu Teoreme 4.2.1 sledi da je jednačina (4.44) L^p-stabilna reda $\tilde{\gamma}=\min\left\{\mu,\frac{1}{\ln(1+\tau)}\ln\frac{q}{(1+(kq)^{\frac{1}{p}})^p}\right\}$ u odnosu na polinomijalnu decay-funkciju.

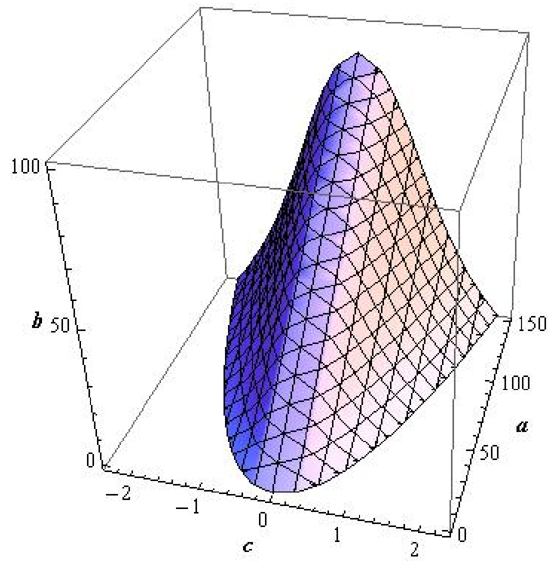
Kako je $\int_0^\infty(1+t)^{-\delta}\,dt<\infty$ za svako $\delta>1$, na osnovu Teoreme 4.2.2 sledi da je trivijalno rešenje skoro izvesno polinomijalno stabilno reda $(\tilde{\gamma}-\delta)/p$ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)=1+t$. Pošto je $\tilde{\gamma}>1$, onda je $\mu>1$ i $q-(1+\tau)(1+(kq)^{\frac{1}{p}})^p>0$.

Specijalno za $p=4$, $k=0.2$, $K=5$ i $\tau=0.02$ na Slici 4.1 se vidi da mora biti $q>(1-0.2^{1/4})^{-4}=83.0473$. Ako je $q=90$, na primer, oblast polinomijalne stabilnosti momenta četvrtog reda u odnosu na parametre $a,b>0$ i $c\in\mathbb{R}$ je prikazana na Slici 4.2.

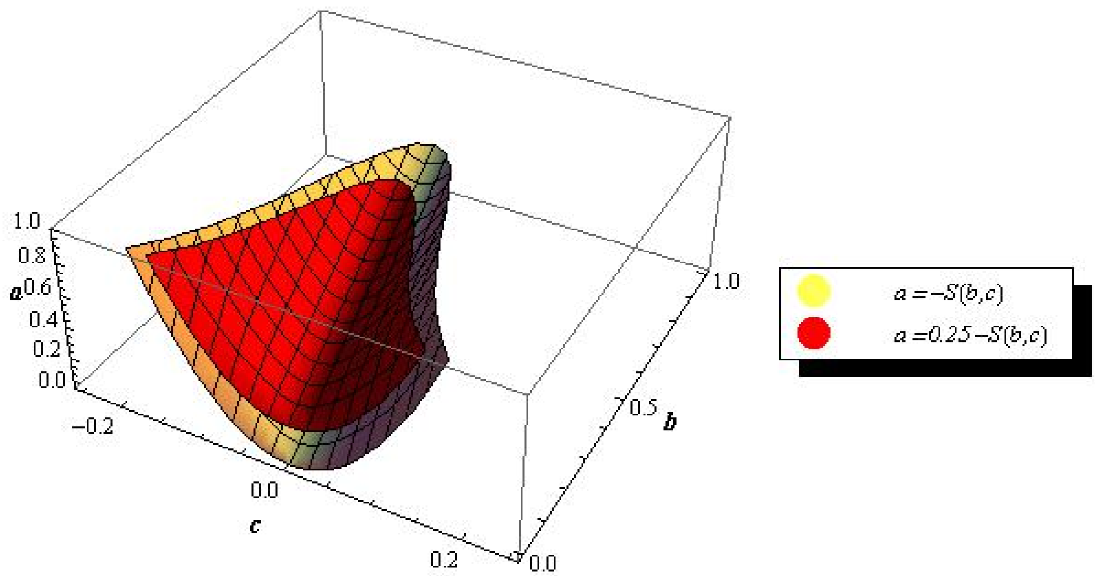
Kako je $q-(1-\tau)(1+(kq)^{1/4})^4=0.0434>0$, pri uslovu da je $\mu>1$, tj. $a+S(b,c)>0.25$, odnos oblasti stabilnosti momenta četvrtog reda i skoro izvesne stabilnosti za male vrednosti parametra a,b,c se može videti na Slici 4.3.



Slika 4.1: Grafički prikaz oblasti $q>(1-k^{1/4})^{-4}$



Slika 4.2: Grafički prikaz oblasti $a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{90(b+3c^2)(0.2b+15c^2)} = a+S(b,c) > 0$



Slika 4.3: Grafički prikaz funkcija $a = -S(b,c)$ i $a = 0.25 - S(b,c)$

Primer 4.4.2 Neka je data sledeća NSDJ sa kašnjenjem,

$$
\begin{aligned}
d[x(t)-\alpha\sin(x_2(t-\tau))] &= -\frac{1}{2(1+t)[1+\ln(1+t)]}\left[x_1(t)+\frac{x_2(t)}{6}\right]dt \\
&\quad + \frac{b\, e^{-|x_1(t)|}x_2(t-\tau)}{1+t}\, dw(t), \qquad (4.47)\\
d[x(t)-\alpha x_1(t-\tau)] &= -\frac{x_2(t)}{3(1+t)[1+\ln(1+t)]}\, dt \\
&\quad + \frac{b\, x_1(t-\tau)}{[1+t+\ln(1+t)][4+|x_2(t-\tau)|]}\, dw(t),\ \ t\geq 0,
\end{aligned}
$$

gde je $x_0=\xi\in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^2)$, $\alpha\in(0,1)$ i $b\in\mathbb{R}$ su konstante i w je skalarno Brownovo kretanje. Ako je $x=(x_1,x_2)^T$, $y=(y_1,y_2)^T$ i

$$
\bar{G}(y)=(\alpha\sin y_2,\alpha y_1)^T,\quad A=\begin{bmatrix} -1/2 & -1/12\\ 0 & -1/3\end{bmatrix},
$$

$$
\bar{g}(t,x,y)=\left(\frac{be^{-|x_1|}y_2}{1+t},\frac{b\,y_1}{[1+t+\ln(1+t)][4+|y_2|]}\right)^T,
$$

sistem (4.47) se zapisuje na sledeći način,

$$
d[x(t)-\bar{G}(x(t-\tau))]=\frac{1}{(1+t)[1+\ln(1+t)]}\,A\,x(t)+\bar{g}(t,x(t),x(t-\tau))\,dw(t), \quad (4.48)
$$

pri čemu je $\bar{G}(0)\equiv 0$, $\bar{g}(t,0,0)\equiv 0$. Takodje, na osnovu Teoreme 4.1.1 postoji jedinstveno skoro izvesno neprekidno rešenje $x(t)=(x_1(t),x_2(t))^T$, $t\in[-\tau,\infty)$ jednačine (4.47) i $\sup_{-\tau\leq t\leq\infty}E|x(t)|^p<\infty$.

Koeficijenti jednačine (4.47) sugerišu ispitivanje L^p-stabilnosti, $p\geq 2$, u odnosu na logaritamsku decay-funkciju $\lambda(t)=1+\ln(1+t)$. Pre svega, linearnom transformacijom matrice A se dobija

$$
H=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix},\quad H^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad H^{-1}AH=\begin{bmatrix} -1/3 & 0\\ 0 & -1/2\end{bmatrix}.
$$

Kako je $Q=(H^{-1})^TH^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 2\\ 2 & 10\end{bmatrix}$ i potrebno je da važi $\lambda_{\min}(Q)\,|x|^2\leq x^TQx\leq \lambda_{\max}(Q)\,|x|^2$ za svako $x\in R^2$, to je $\lambda_{\min}(Q)=c_1=3.39$, $\lambda_{\max}(Q)=c_2=10.62$.

Ako je $V(x)=(x^TQx)^{\frac{p}{2}}$, na osnovu (4.39) je

$$
\begin{aligned}
LV(t,x,y) &= p\,[(x-\bar{G}(y))^TQ(x-\bar{G}(y))]^{\frac{p}{2}-1}\\
&\quad\times\left[\psi(t)\,(x-\bar{G}(y))^TQAx+\frac{1}{2}\,\bar{g}^T(t,x,y)Q\bar{g}(t,x,y)\right]\\
&\quad+\frac{p(p-2)}{2}\,[(x-\bar{G}(y))^TQ(x-\bar{G}(y))]^{\frac{p}{2}-2}\,|(x-\bar{G}(y))^TQ\bar{g}(t,x,y)|^2,
\end{aligned}
$$

gde je $t>0, x,y\in\mathbb{R}^2$ i

$$
\psi(t)=\frac{1}{(1+t)[1+\ln(1+t)]}=\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}.
$$

Kako je $x^T QAx \le -x^T Qx$, to je

$$LV(t,x,y) \le -p\,\psi(t)V(x-\bar{G}(y)) + I_1(t,x,y) + I_2(t,x,y) + I_3(t,x,y), \qquad (4.49)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} I_1(t,x,y) &= p\psi(t)V^{\frac{p-2}{p}}(x-\bar{G}(y))\,(x-\bar{G}(y))^T QA\bar{G}(y),\\ I_2(t,x,y) &= \frac{p}{2}V^{\frac{p-2}{p}}(x-\bar{G}(y))\,\bar{g}^T(t,x,y)Q\bar{g}(t,x,y),\\ I_3(t,x,y) &= \frac{p(p-2)}{2}V^{\frac{p-4}{p}}|(x-\bar{G}(y))^T Q\bar{g}(t,x,y)|^2. \end{aligned}$$

Sa druge strane,

$$QA\bar{G}(y) = -\alpha(2\sin y_2 + y_1, \sin y_2 + 7/2\, y_1)^T, \quad |QA\bar{G}(y)|^2 < 19\,\alpha^2\,|y|^2.$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.23), za proizvoljno $\varepsilon > 0$ je

$$\begin{aligned} I_1(t,x,y) &\le \frac{p}{2}\psi(t)V^{\frac{p-2}{p}}(x-\bar{G}(y))(|x-\bar{G}(y)|^2 + |QA\bar{G}(y)|^2)\\ &< \psi(t)\,\left[\left((p-2)\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{p}{2}-1}c_1^{\frac{p}{2}}}\right)V(x-\bar{G}(y)) + \frac{19^{\frac{p}{2}}\alpha^p}{\varepsilon^{\frac{p}{2}-1}c_1^{\frac{p}{2}}}\,V(y)\right]. \end{aligned}$$

Kako je $E|\bar{G}(Y)|^p \le \alpha^p E|Y|^p$ za svako $Y \in L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; R^2)$, uslov (4.42) je ispunjen za $k = \alpha^p \in (0,1)$. Takodje, za one $X, Y \in L^p_{\mathcal{F}}(\Omega; R^2)$ koji zadovoljavaju uslov $EV(Y) < q\,EV(X-\bar{G}(Y))$, pri čemu je $q > c_2/c_1\,(1-\alpha)^{-p} > 3.13(1-\alpha)^{-p}$, važi

$$EI_1(t,X,Y) < \psi(t)\,f_1(\varepsilon)\,EV(X-\bar{G}(Y)),$$

gde je $f_1(\varepsilon) = (p-2)\varepsilon + [1 + 19^{\frac{p}{2}}\alpha^p\,q]\,c_1^{-\frac{p}{2}}\varepsilon^{-\frac{p}{2}+1}$. Sada nije teško odrediti $\varepsilon_1 = [(1+19^{\frac{p}{2}}\alpha^p\,q)/2]^{\frac{2}{p}}/c_1$ tako da je $\min_{\varepsilon>0} f_1(\varepsilon) = f_1(\varepsilon_1) = p\,\varepsilon_1$. Prema tome,

$$EI_1(t,X,Y) < p\,\varepsilon_1\,\psi(t)\,EV(X-\bar{G}(Y)). \qquad (4.50)$$

Kako je $\bar{g}^T(t,x,y)Q\bar{g}(t,x,y) < 4.5b^2\psi(t)\,|y|^2$, na sličan način se dobija

$$EI_2(t,X,Y) < 2.25b^2 p\varepsilon_2\,\psi(t)\,EV(X-\bar{G}(Y)), \qquad (4.51)$$

gde je $\varepsilon_2 = q^{\frac{2}{p}}/c_1$.

S obzirom da je $|Q\bar{g}(t,x,y)|^2 < 27b^2\psi(t)\,|y|^2$, ocena za $I_3(t,x,y)$ se može dobiti primenom nejednakosti (1.23),

$$\begin{aligned} I_3(t,x,y) &< \frac{27b^2p(p-2)}{2}\psi(t)\,V^{\frac{p-4}{p}}(x-\bar{G}(y))\,|x-\bar{G}(y)|^2|y|^2\\ &\le \frac{27b^2p(p-2)}{4}\psi(t)\,V^{\frac{p-4}{p}}(x-\bar{G}(y))\,(|x-\bar{G}(y)|^4 + |y|^4)\\ &\le \frac{27b^2(p-2)}{2}\psi(t)\left[\left((p-4)\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^{\frac{p}{4}-1}c_2^{\frac{p}{4}}}\right)V(x-\bar{G}(y)) + \frac{2}{\varepsilon^{\frac{p}{4}-1}c_2^{\frac{p}{4}}}\,V(y)\right]. \end{aligned}$$

Otuda je

$$EI_3(t,X,Y) < \frac{27b^2(p-2)}{2}\,\psi(t) f_3(\varepsilon)\, EV(X-\bar{G}(Y)),$$

gde je $f_3(\varepsilon) = (p-4)\varepsilon + 2(1+q)c_1^{-\frac{p}{2}}\varepsilon^{-\frac{p}{4}+1}$. Kako je $\min_{\varepsilon>0} f_3(\varepsilon) = f_3(\varepsilon_3) = p\varepsilon_3$ za $\varepsilon_3 = [(1+q)/2]^{\frac{4}{p}}/c_1^2$, to je

$$EI_3(t,X,Y) < \frac{27b^2p(p-2)\varepsilon_3}{2}\,\psi(t)\, EV(X-\bar{G}(Y)). \tag{4.52}$$

Zamenom (4.50), (4.51) i (4.52) u (4.49), dobija se

$$ELV(t,X,Y) < -\mu\,\psi(t)\, EV(X-\bar{G}(Y)), \tag{4.53}$$

gde je $\mu = p - p\varepsilon_1 - 2.25b^2p\varepsilon_2 - 27b^2p(p-2)\varepsilon_3/2$. Iz uslova da je $\mu > 0$, tj.

$$3.39 - \left(\frac{1+19^{\frac{p}{2}}\alpha^p q}{2}\right)^{\frac{2}{p}} - 2.25b^2 q^{\frac{2}{p}} - \frac{27b^2(p-2)}{6.78}\left(\frac{1+q}{2}\right)^{\frac{4}{p}} > 0 \tag{4.54}$$

na osnovu Posledice 4.3.4 sledi da je jednačina (4.47) logaritamski L^p-stabilna. Preciznije, za svako $\xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^2)$ je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln[1+\ln(1+t)]} < -\tilde{\gamma}, \tag{4.55}$$

pri čemu je $\tilde{\gamma} = \min\left\{\mu, \frac{1}{\ln[1+\ln(1+\tau)]}\,\ln\frac{q_1}{(1+\alpha q_1^{1/p})^p}\right\}$, $q_1 = c_1/c_2\, q$, $q > c_2/c_1\,(1-\alpha)^{-p}$ i $\tau > e-1$.

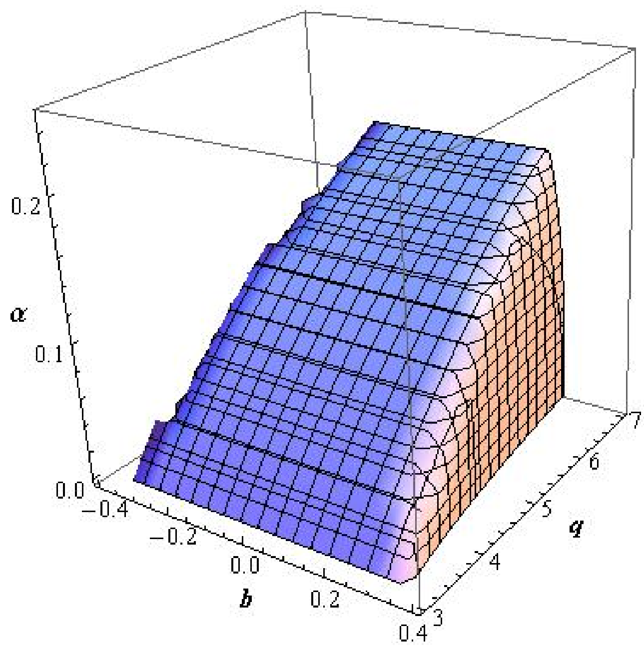
Može se primetiti da iako je uslov (4.41) ispunjen, ništa se ne može zaključiti o logaritamskoj skoro izvesnoj stabilnosti s obzirom da je $\int_0^\infty [1+\ln(1+t)]^{-\delta}\,dt = \infty$ za svako $\delta > 0$.

Neka je, na primer, $p = 4$. S obzirom da sistem (4.47) direktno zavisi od parametara α i b i indirektno od q, oblast logaritamske stabilnosti četvrtog momenta u zavisnosti od ovih parametara je data na Slici 4.4.

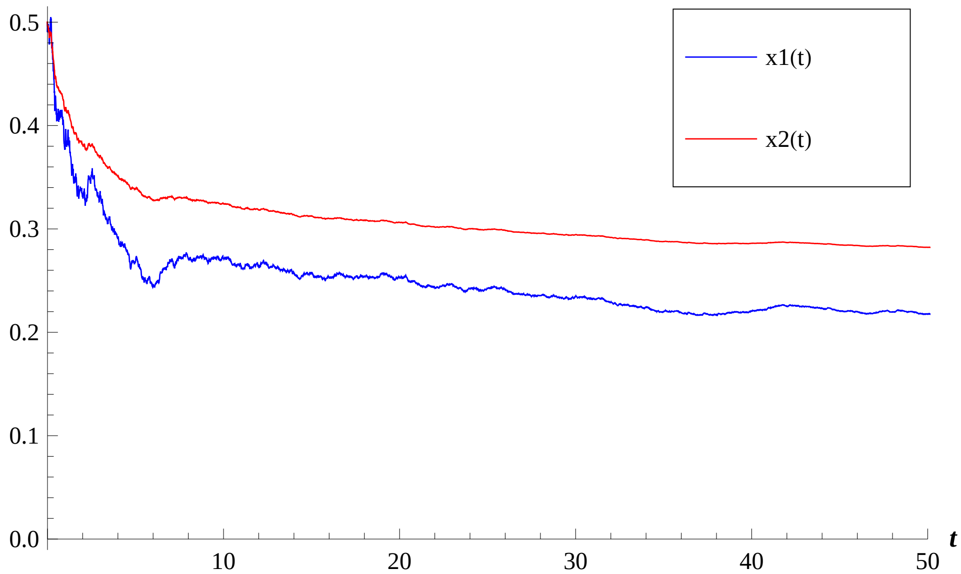
Specijalno za $\alpha = 0.1$, $b = 0.3$, $q = 5$, $\tau = 2$, $\xi = (0.5, 0.5)$, grafički prikaz trajektorija $(x_1(t), x_2(t))$ i $E|x(t)|^4$ je predstavljen na Slici 4.5 i Slici 4.6, respektivno. Sa slike se vidi da svi grafici sporije teže nuli nego eksponencijalna funkcija.

U cilju ilustrovanja logaritamske stabilnosti četvrtog momenta sistema (4.47), tj, relacije (4.55), grafik funkcije $\frac{\ln E|x(t)|^4}{\ln[1+\ln(1+t)]}$ u odnosu na $\tilde{\gamma} = -0.0218011$ je dat na Slici 4.7.

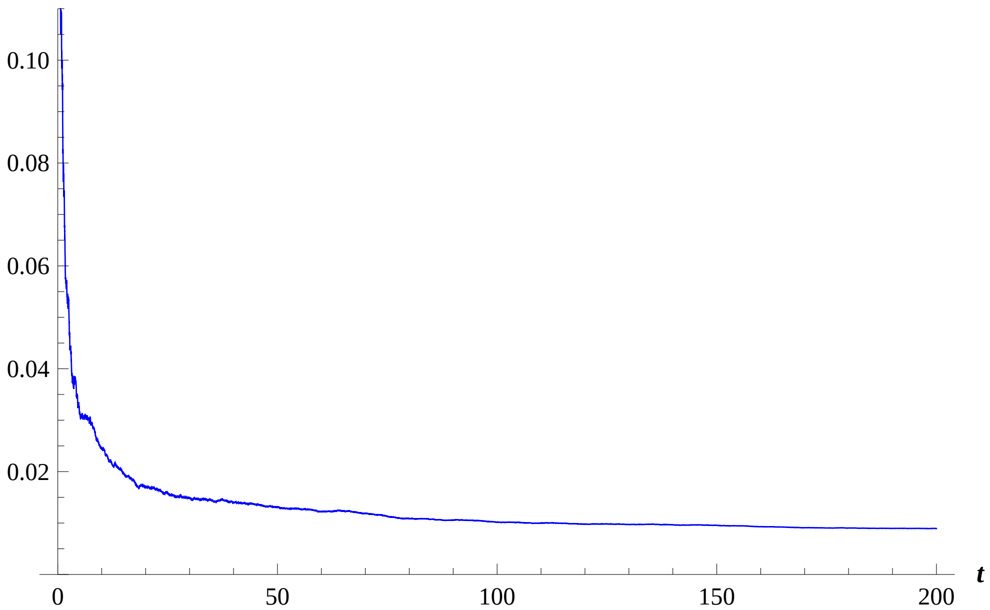
Napomena 4.4.1 Na osnovu (4.46) sledi da se ništa ne može zaključiti o eksponencijalnoj skoro izvesnoj i L^p-stabilnosti jednačine (4.44). Takodje, na osnovu (4.53), ništa se ne može zaključiti o polinomijalnoj skoro izvesnoj i L^p-stabilnosti jednačine (4.47), a tim pre ni o eksponencijalnoj stabilnosti tog sistema, što opravdava svrsishodnost tvrdjenja u ovom poglavlju.



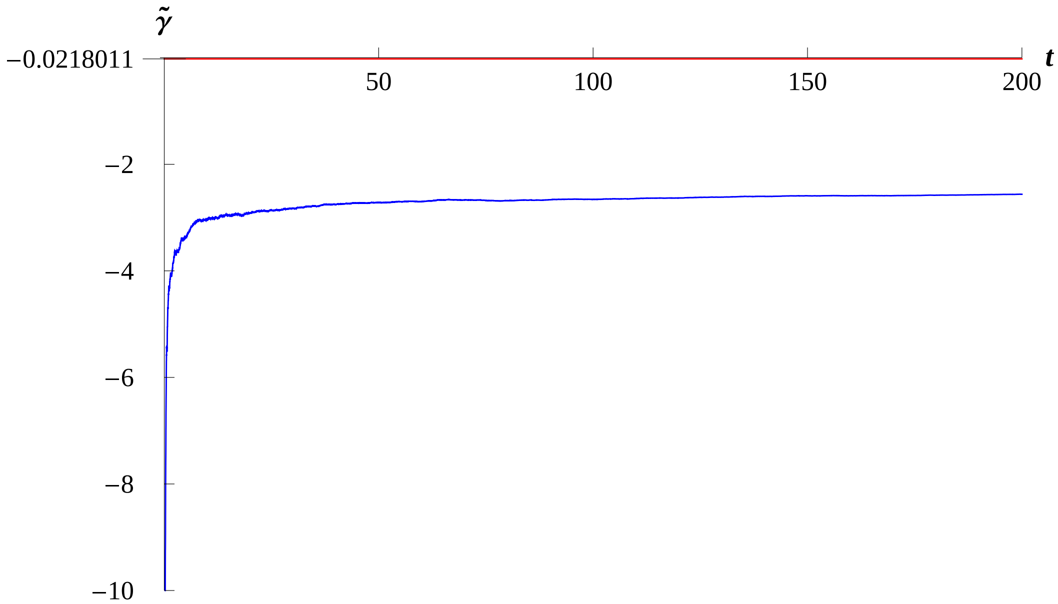
Slika 4.4: Oblast u kojoj su zadovoljeni uslovi (4.54) i $q > \frac{c_2}{c_1}(1-\alpha)^{-p}$ za $p = 4$



Slika 4.5: Trajektorije sistema (4.47) za $\alpha = 0.1$, $b = 0.3$ i $\xi = (0.5, 0.5)$



Slika 4.6: Grafik funkcije $E|x(t)|^4$ za $\alpha = 0.1$, $b = 0.3$ i $\xi = (0.5, 0.5)$



Slika 4.7: Grafik funkcije $\frac{\ln E|x(t)|^4}{\ln(1+\ln(1+t))}$ i $\tilde{\gamma} = -0.0218011$

Glava 5

Stabilnost impulsivnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa markovskim prelazima

U ovoj glavi se razmatra opšta skoro izvesna i L^p-stabilnost stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačna sa impulsima i markovskim prelazima primenom metode Razumikhina. U Poglavlju 5.1 se izlažu osnovni pojmovi i rezultati koji se odnose na egzistenciju, jedinstvenost i stabilnost impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa markovskim prelazima, uz osvrt na njihovu primenu u epidemiologiji, populacionoj dinamici i finansijama. Poglavlje 5.2 se odnosi na opštu skoro izvesnu i L^p-stabilnost i nestabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina sa pomerenim impulsima i markovskim prelazima. Kao posledica ovih rezultata, u Poglavlju 5.3 su izložena tvrdjenja o opštoj skoro izvesnoj i L^p-stabilnosti i nestabilnosti impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem i markovskim prelazima i impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa markovskim prelazima. Da bi se ilustrovala primena teorijskih rezultata iz prethodnih poglavlja, u Poglavlju 5.4, su izloženi primeri i numeričke simulacije trajektorija rešenja.

5.1 Uvodni pojmovi

Sistemima stohastičkih diferencijalnih jednačina sa impulsima se opisuju procesi koji često menjaju svoje stanje u obliku "skokova" u odredjenim fiksiranim ili proizvoljnim vremenskim trenucima. Kao posledica toga, trajektorije rešenja ovakvih sistema imaju tačke prekida, što onemogućava primenu velikog broja tvrdjenja o egzistenciji, jedinstvenosti i stabilnosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina (bez impulsa) na ovaj tip jednačina.

Deterministički sistem sa impulsima je oblika

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_k, \quad t \geq 0,\\ \Delta x|_{t=\tau_k} &= I_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

gde je $x \in \mathbb{R}^n$, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $I = [0, \infty)$, $\Delta x|_{t=\tau_k} = x(t+0) - x(t)$. Ovaj sistem se karakteriše činjenicom da pod uticajem predvidivih ili nepredvidivih okolnosti, u trenucima $t = \tau_k$ on momentalno "skače" iz stanja $x(t)$ u stanje $x(t) + I_k(x(t))$.

Mnogi procesi iz svakodnevnog života su impulsivni po svojoj prirodi. Na primer, proces disanja, zemljotresi, izbijanje epidemija u ekološkim staništima, promene brojnog stanja populacije pri trenutnim promenama uslova u staništu, variranja ekonomskog stanja države pod uticajem nepredvidjenih dešavanja na tržištu, na primer, promena cene nafte zbog velikih katastrofa na naftnim poljima ili zbog političke situacije itd. (za više detalja pogledati Oyelami [1, 136], Simeonov i Bainov [160])

Francuski matematičar P. Verhulst [165] je 1838. godine razmatrao populacioni model predstavljen jednačinom oblika

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

gde je $N(t)$ broj jedinki populacije u trenutku t, r koeficijent priraštaja populacije i K maksimalan broj jedinki koje mogu preživeti u datom staništu. Zbog primene pre svega diferencijalnog računa, uobičajeno je pretpostaviti da je veličina $N(t)$ neprekidna. U realnosti, broj jedinki neke populacije se neprekidno menja, s obzirom da je populacija stalno izložena brzim promenama uslova u staništu. Neka je $0 < t_1 < t_2 < \ldots < T$ niz vremenskih trenutaka u kojima populacija pod uticajem nepredvidjenih promena u sredini menja svoj obim. Da bi opisala realno stanje u populaciji, prethodna jednačina se transformiše u diferencijalnu jednačinu sa impulsima,

$$\begin{aligned}
&\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad t \neq t_k, \quad N(0) = N_0,\\
&N(t_k^+) = \beta_k N(t_k), \quad k = 1, 2, ...
\end{aligned}$$

gde je $N(t_k^+) = \lim_{t \downarrow t_k} N(t)$, $k = 1, 2, ...$ Ako se u trenutku t_k naglo poveća broj jedinki populacije, tj. desi se imigracija populacije, tada se takva pojava opisuje prethodnom jednačinom za $\beta_k > 1$. U slučaju iznenadnog zemljotresa, pošasti, rata i sl. može doći do naglog smanjenja broja jedinki tako da populacija nije više u mogućnosti da se oporavi, tj. dolazi do istrebljenja populacije. Ovakva pojava se opisuje prethodnom jednačinom za $\beta_k < 1$. Ako je $\beta_k = 1$ rešenje sistema se poklapa sa rešenjem klasične Verhulstove jednačine, čime se potvrdjuje da su impulsivni sistemi uopštenja klasičnih sistema diferencijalnih jednačina (bez impulsa).

Impulsivne diferencijalne jednačine se koriste u epidemiologiji za opisivanje procesa širenja ili suzbijanja epidemioloških bolesti (infekcija). Jednostavna epidemiološka jednačina je oblika

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = b\, y\,(n + a - y), \quad t \neq t_k, \quad y(0) = a,\\
&y(t_k^+) = \beta_k\, y(t_k), \quad k = 1, 2, ...
\end{aligned}$$

gde je y broj jedinki populacije, n početan broj inficiranih jedinki i b stopa rasta infekcije. U realnosti, impulsi se javljaju za vreme samog ciklusa infekcije. Ako je

$\beta_k < 1$, prethodna jednačina opisuje pojavu eksplozije infekcije, a ako je $\beta_k > 1$, pojavu ozdravljenja populacije.

Mnoge svetske poslovne organizacije i države planiraju značajnu svotu novca za buduća ulaganja. Novac potreban za ulaganje se obično dobija iz otkupnih fondova obveznica, kroz emisiju hartija od vrednosti, iz nacionalnih rezervi i sl. Osnovni cilj je da svako ulaganje dovede do značajnog finansijskog rasta. Ulaganja iz fondova omogućavaju povoljan finansijski rast samo ako je atmosfera za ulaganja takva da je finansijski rast moguć. U odredjenim situacijama, koje nije lako predvideti, ekonomija jedne države trpi neočekivanu ekonomsku recesiju. Tada se profit izgubi još u periodu ulaganja, a privredni rast države momentalno pada, odnosno pokazuje impulsivnu prirodu. Takodje, privredni rast države koja se oslanja na izvoz fosilnih derivata često pokazuje impulsivno ponašanje, s obzirom na česta kolebanja cene nafte na tržištu (za više detalja videti [136, 137]).

Neki od jednostavnijih impulsivnih matematičkih modela u ekonomiji, "makro modeli" koji uzimaju u obzir gestaciono kašnjenje i obezvredjivanje dobara, koriste se za modeliranje procesa privrednog rasta jedne kompanije ili države, pri čemu se pod gestacionim kašnjenjem podrazumeva vreme koje protekne od trenutka iniciranja plana za ulaganje do trenutka realizacije tog plana. Iz tog razloga, finansijskim stručnjacima rezultati teorije impulsivnih sistema omogućavaju da identifikuju odgovorne činioce za brzo i neregularno ulaganje, kao i iznenadan pad ulaganja u fiksnim ili promenljivim periodima investiranja (videti [91, 136, 137]).

Impulsivni stohastički model finansijskog ulaganja (videti [138]) koji sadrži prihod, osnovni kapital i vektor obezvredjivanja sa gestacionim kašnjenjem, oblika je

$$\begin{aligned}
&dx(t) = (\delta^{-1}y(t) - b\alpha_1(t)g(x(t-h)))\,dt + \sigma_1\,dw_1(t), \quad t \neq t_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,\\
&dy(t) = (\delta^{-1}y(t) + \alpha_2(t)v(t))\,dt + \sigma_2\,dw_2(t), \quad t \neq t_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,\\
&dz(t) = \beta\,dx(t), \quad t \neq t_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,\\
&\Delta x(t_k) = \beta_k\,x(t_k),
\end{aligned}$$

gde je $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, $k \to \infty$, i početni uslov

$$x(t_0 + 0) = x_0, \quad y(t_0 + 0) = y_0, \quad z(t_0 + 0) = z_0.$$

Slučajna promenljiva $x(t)$ predstavlja ulaganje, $y(t)$ nacionalni dohodak, odnosno prihod kompanije, $z(t)$ je osnovni kapital, $v(t)$ opisuje kolebanja na tržištu, dok su w_i, $i = 1, 2$ procesi Brownovog kretanja. Konstanta δ predstavlja stopu uštede, b je brzina obezvredjivanja, a $g(x(t-h))$ je funkcija obezvredjivanja sa gestacionim kašnjenjem h. Parametrima β_k, $k = 1, 2, \ldots$ se opisuju impulsi koji se dešavaju u toku perioda investiranja. Ovi parametri predstavljaju stope ulaganja u odredjenom vremenskom periodu.

Hibridni sistemi su dinamički sistemi koji pokazuju i neprekidno i diskretno ponašanje. Ovakvi sitemi kombinuju deo stanja koji uzima neprekidne vrednosti i deo stanja koji uzima diskretne vrednosti. Stohastičke diferencijalne jednačine sa markovskim prelazima [124] predstavljaju posebnu klasu hibridnih sistema koji se karakterišu vektorom stanja sa dve komponente, $x(t)$ i $r(t)$. Prva komponenta se odnosi na stanje procesa, a druga na režim rada. Ovi sistemi se menjaju u skladu sa različitim zakonima u toku nekog vremenskog perioda i u slučajnim vremenskim trenucima se prebacuju sa jednog režima rada na drugi. Najčešće je prelazak na novi režim proces bez memorije, a vreme čekanja do prelaska na novi režim je eksponencijalno raspodeljeno. Zbog toga se prelazak iz jednog režima u drugi može modelirati pomoću lanca Markova sa neprekidnim vremenom i sa konačim brojem stanja.

Kazangey i Sworder [68] 1971. godine uvode sistem sa skokovima u cilju izučavanja uticaja federalne stambene politike na stabilizaciju stambenog sektora u SAD. Upravo je lanac Markova sa konačno mnogo stanja korišćen za opisivanje uticaja kamatnih stopa na tržište nekretnina. Willsky i Rogers [172] 1979. godine razmatraju hibridne sisteme za modeliranje složenih elektro-sistema, a Sworder i Robinson [164] za kontrolu solarnih prijemnih centrala. Mariton [126] primenjuje hibridne sisteme za kontrolu automatskog upravljanja u različitim oblastima, smatrajući da se ovakvi sistemi nameću kao odgovarajuće matematičko okruženje za opisivanje realnih pojava, kao što su procesi praćenja mete u vojnoj industriji, kontrola dozvoljenog opsega greške u procesu proizvodnje itd.

S obzirom da se sistemima sa markovskim prelazima mogu modelirati mnoge pojave iz oblasti fizike i inženjerstva, poslednjih decenija se ovakvi sistemi intenzivno izučavaju. Devedesetih godina prošlog veka, Ji i Chizeck [62] i Mariton [126] proučavaju stabilnost determinističke linearne diferencijalne jednačine sa skokovima oblika

$$\dot{x}(t) = A(r(t))\, x(t),$$

gde je $r(t)$ lanac Markova koji uzima vrednosti iz konačnog skupa stanja $S = \{1, 2, \dots, N\}$. Basak, Bisi i Ghosh [10] 1996. godine razmatraju stabilnost semilinearne stohastičke diferencijalne jednačine sa markovskim prelazima,

$$dx(t) = A(r(t))\, x(t)\, dt + \sigma(x(t), r(t))\, dw(t).$$

a Mao [119] 1999. godine proučava stabilnost stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine sa markovskim prelazima,

$$dx(t) = f(t, x_t, r(t))\, dt + g(t, x_t, r(t))\, dw(t).$$

Ova jednačina može biti opisana pomoću sledećih N jednačina

$$dx(t) = f(t, x_t, i)\, dt + g(t, x_t, i)\, dw(t), \quad 1 \le i \le N,$$

preležnjem sa jedne na drugu u skladu sa prelazima lanca Markova, što je i osnovna karakteristika svih sistema sa markovskim prelazima.

U ovoj glavi se razmatra *hibridna stohastička funkcionalna diferencijalna jednačina sa pomerenim impulsima i markovskim prelazima*,

$$\begin{aligned}
&dx(t) = f(t, x_t, r(t))\, dt + g(t, x_t, r(t))\, dw(t), \quad t \ge 0, \quad t \ne t_k, \qquad (5.1)\\
&\Delta x(t_k) = I_k(t_k, x(t_k), x_{t_k}, r(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots,\\
&x(t) = \xi, \quad t \in [-\tau, 0],
\end{aligned}$$

gde je $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$ i $x(t_k^+) = \lim_{h\to 0_+} x(t_k + h)$, $x(t_k) = x(t_k^-) = \lim_{h\to 0_-} x(t_k + h)$, $t_k \geq 0$. Impulsivne perturbacije rešenja u trenutku t_k su $I_k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \times S \to \mathbb{R}^n$ gde je za $p > 0$, $PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ familija $\mathcal{F}_t$-merljivih slučajnih promenljivih $\phi = \{\phi(\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} \in PC([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ tako da je $\int_{-\tau}^0 E|\phi(\theta)|^p d\theta < \infty$, a $PC^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ je familija ograničenih, $\mathcal{F}_0$-merljivih slučajnih promenljivih iz $PC([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. Funkcionali

$$f : \mathbb{R}^+ \times PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \times S \to \mathbb{R}^n, \quad g : \mathbb{R}^+ \times PC^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \times S \to \mathbb{R}^{n\times m}$$

su Borel merljivi. Za početni uslov ξ se pretpostavlja da je $\xi \in PC^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, gde je $PC([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, $\tau = \text{const} > 0$, familija deo po deo neprekidnih funkcija $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ tako da postoje $\varphi(t^+)$, $\varphi(t^-)$ i $\varphi(t^-) = \varphi(t)$, sa normom $||\varphi|| = \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|$. Za matricu A norma je definisana sa $||A|| = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$, gde je $\lambda_{max}(\cdot)$ maksimalna sopstvena vrednost te matrice. Sa $\{r(t), t > 0\}$ je označen desno-neprekidan lanac Markova koji uzima vrednosi iz konačnog skupa stanja $S = \{1, 2, \dots, N\}$ sa generatorom $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N\times N}$ definisanim na sledeći način,

$$P\{r(t + \Delta) = j|r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & i = j \end{cases}$$

pri čemu je $\Delta > 0$, a $\gamma_{ij} \geq 0$ je gustina prelaza iz stanja r_i u r_j i $\gamma_{ii} = -\sum_{i\neq j} \gamma_{ij}$. Fiksirani trenuci t_k u kojima se dešavaju impulsi su takvi da je $t_k < t_{k+1}$ i $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$. Takodje, lanac Markova je nezavisan od m-dimenzionalnog Brownovog kretanja w.

Definicija 5.1.1 *Za n-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ se kaže da je strogo rešenje jednačine (5.1) ako zadovoljava:*

(i) $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ *je neprekidan u* $t \in [-\tau, T]\backslash\{t_k, k = 1, 2, \dots\}$ *i levo-neprekidan u* $t \in [-\tau, T] \cap \{t_k, k = 1, 2, \dots\}$;

(ii) $x(t)$ *je* $\mathcal{F}_t$*-merljiv;*

(iii) $\int_0^T |f(t, x_t, r(t))|\, dt < \infty$ *s.i.*, $\int_0^T |g(t, x_t, r(t))|^2\, dt < \infty$ *s.i.;*

(iv) $x_0 = \xi$ *s.i. i za svako* $t \in [-\tau, T]$ *integralni oblik jednačine (5.1) je skoro izvesno zadovoljen, odnosno,*

$$\begin{aligned} x(t) = \xi(0) &+ \int_0^T f(s, x_s, r(s))\, ds + \int_0^T g(s, x_s, r(s))\, dw(s) \\ &+ \sum_{0\leq t_k\leq T} I_k(t_k, x(t_k), x_{t_k}, r(t_k)). \end{aligned}$$

Definicija 5.1.2 *Rešenje $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ jednačine (5.1) je jedinstveno ako je bilo koje drugo rešenje $\{\tilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\}$ stohastički ekvivalentno sa njim, tj. ako je*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\} = 1.$$

Iako su stohastičke diferencijalne jednačine sa impulsima veoma aktuelne zbog istraživanja dinamike rešenja, nema mnogo rezultata koji se odnose na egzistenciju i jedinstvenost rešenja hibridnih sistema sa pomerenim impulsima. Kako za svako fiksirano stanje lanca Markova jednačinačina (5.1) postaje SDJ sa pomerenim impulsima, od značaja je navesti da su Alwan *et al.* [2] uopštili rezultate Ballingera i Liua [9, 106] i formulisali dovoljne uslove za egzistenciju i jedinstvenost lokalnog i globalnog adaptiranog rešenja SDJ sa pomerenim impulsima. Za hibridne stohastičke sisteme, Wu i Zhou [177] razmatraju egzistenciju i jedinstvenost rešenja SDJ sa slučajnim impulsima i markovskim prelazima pri ne-Lipschitzovim uslovima, a Liu *et al.* [99] proučavaju uopštenje jednačine (5.1), tj. impulsivni stohastički funkcionalni hibridni sistem,

$$\begin{aligned} &dx(t) = f_{i_k}(t, x_t)\, dt + g_{i_k}(t, x_t)\, dw(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}),\ i_k \in \mathcal{N}_c,\ k \in \mathbb{Z}^+, \\ &\Delta x(t) = I_{j_k}(t, x_{t^-}), \quad j_k \in \mathcal{N}_d,\ k \in \mathbb{Z}^+ \backslash \{0\}, \\ &x(t) = \xi, \quad t \in [-r, 0], \end{aligned} \tag{5.2}$$

gde je početni uslov $\xi \in \mathcal{PC}([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ (kraće $\mathcal{PC}$). Stohastički proces $x_{t^-} \in \mathcal{PC}([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ je definisan sa $x_{t^-}(s) = x(t + s)$ za $s \in [-r, 0)$ i $x_{t^-}(0) = x(t^-)$, pri čemu je $x(t^-) = \lim_{s \to t^-} x(s)$, a $\mathcal{N}_c$ i $\mathcal{N}_d$ su dva prizvoljna indeksna skupa. Za svako $i \in \mathcal{N}_c$ i $j \in \mathcal{N}_d$, je

$$f_i : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{PC} \to \mathbb{R}^n,\ g_i : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{PC} \to \mathbb{R}^{n\times m},\ I_j : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{PC} \to \mathbb{R}^n.$$

Teorema 5.1.1 (Liu *et al.* [99]) *Pretpostavimo da važi:*

(i) *Za svako $i \in \mathcal{N}_c$ i $j \in \mathcal{N}_d$, funkcionali $f_i(t, \phi)$, $g_i(t, \phi)$ i $I_j(t, \phi)$ su Borel-merljivi na $[0, T] \times \mathcal{PC}[\Theta]$ za svaki konačan podskup $\Theta \subset (-r, 0]$. Takodje, za deo po deo neprekidno $\phi \in \mathcal{PC}[-r, T]$, i $f_i(t, \phi)$ i $g_i(t, \phi)$ su deo po deo neprekidni na $[0, T]$.*

(ii) *Postoji konstanta $K > 0$ tako da je za $(t, \phi, \psi) \in [0, T] \times \mathcal{PC} \times \mathcal{PC}$, $i \in \mathcal{N}_c$,*

$$\begin{aligned} |f_i(t, \varphi) - f_i(t, \psi)| + |g(t, \varphi) - g(t, \psi)| &\le K||\varphi - \psi||, \\ |f_i(t, \varphi)|^2 + |g_i(t, \varphi)|^2 &\le K^2(1 + ||\varphi||^2). \end{aligned}$$

(iii) *$\xi \in \mathcal{PC}$ je $\mathcal{F}_0$-merljiva slučajna veličina.*

Tada postoji jedinstveno rešenje sistema (5.2) na $[0, T]$.

S obzirom da su sistemi sa markovskim prelazima važna klasa hibridnih sistema, poslednjih decenija se intenzivno istražuje stabilnost rešenja i stabilizacija sistema pomoću markovskih prelaza (za više detalja pogledati [10, 34, 120]). Pored markovskih prelaza, postoje i drugi impulsivni efekti u mnogim realnim procesima, kao i raznovrsna literatura koja opisuje dinamiku rešenja ovakvih sistema. Liu [98] 2008. godine istražuje egzistenciju, jedinstevenost i stabilnost rešenja SDJ sa impulsima primenom metode Lyapunova. Metodom Razumikhina, Peng i Jia [145] postavljaju kriterijume za L^p-stabilnost impulsivnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina. Cheng i Deng [18], 2010. godine osim eksponencijalne skoro izvesne i L^p-stabilnosti impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, ispituju i eksponencijalnu nestabilnost rešenja. Primenom metode Lyapunova, Pan i Cao [139] postavljaju dovoljne uslove pri kojima je rešenje impulsivne stohastičke diferencjalne jednačine sa konačnim kašnjenjem skoro izvesno i L^p-stabilno. Wu *et al.* [178] razmatraju problem stabilizacije rešenja impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem uzimajući u obzir prosečan interval izmedju impulsa.

Medjutim, nema mnogo literature koja se odnosi na stabilnost SDJ sa impulsima i markovskim prelazima. Medju prvima, Wu i Sun [176] 2006. godine istražuju L^p-stabilnost ovakvih sistema primenom metode Lyapunova, a 2013. godine i Gao [35] primenom iste metode ispituje stabilnost ovakvih sistema sa kašnjenjem. Korišćenjem metode Laypunov-Krasovskii, Liu i Peng [108] ispituju L^p-stabilnost nelinearnih SDJ sa kašnjenjem, impulsivnim skokovima i markovskim prelazima. Pan i Cao [140] primenom mehode Razumikhina izučavaju eksponencijalnu stabilnost SDJ (5.1) sa impulsivnim kašnjenjem i markovskim prelazima. Glavni rezultat rada [140] je naredno tvrdjenje koje se odnosi na eksponencijalnu L^p-stabilnost rešenja, u smislu Definicije 1.5.5.

Teorema 5.1.2 (Pan i Cao [140]) *Neka je* $V \in C^{1,2}([-\tau,\infty) \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}_+)$ *i neka su konstante* $p > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $d_{ik}, \bar{d_{ik}} \geq 0$, ${d_{ik}}^2 + \bar{d_{ik}}^2 \neq 0$, $\delta, \gamma_i > 0$, $i \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, *tako da važi:*

(i) $\quad c_1|x|^p \leq V(t,x,i) \leq c_2|x|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n.$

(ii) *Za svako* $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $i \in S$,

$$E\mathcal{L}V(t,\phi,i) \leq -\gamma_i \, EV(t,\phi(0),i)$$

kad god je

$$E\left[\min_{1\leq i\leq N} V(t+\theta,\phi(\theta),i)\right] \leq qe^{\lambda\tau} E\left[\max_{1\leq i\leq N} V(t,\phi(0),i)\right], -\tau \leq \theta \leq 0.$$

(iii) *Za svako* $i \in S$

$$\begin{aligned} &EV(t_k^+, \phi(0) + I_k(t_k,\phi(0),\varphi,i),i) \\ &\qquad \leq d_{ik}EV(t_k,\phi(0),i) + \bar{d_{ik}} \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} EV(t_k+\theta,\phi(\theta),i). \end{aligned}$$

(iv) $\quad \inf_{1\leq k<+\infty}\{t_k - t_{k-1}\} \geq \mu.$

(v) *Za bilo koje* $i \in S$, $\gamma_i - \lambda > \frac{\ln q}{\mu}$ *i* $q = \Big(\max_{i\in S, 1\leq k<+\infty}\{d_{ik} + \bar{d_{ik}}\}\Big)^{-1}$.

Tada je trivijalno rešenje jednačine (5.1) eksponencijalno L^p*-stabilno, pri čemu je* $\phi = \{\phi(\theta),\ -\tau \leq \theta \leq 0\}$.

U mnogim radovima koji se bave dinamikom rešenja sistema sa impulsima, stabilizacija sistema se može postići adekvatnim rasporedom i intenzitetom impulsa (za više detalja pogledati [18, 108, 139, 140, 178]). Medjutim, praktični primeri sa početka ove glave pokazuju da je ponekad teško predvideti pojavu impulsa, a tim pre i kontrolisati njihov raspored u toku odredjenog perioda. U tom slučaju, sistem koji nije eksponencijalno stabilan ne može biti stabilizovan impulsima pa je korisno ispitati neke slabije vidove stabilnosti rešenja takvog sistema. U tom smislu, rezultati rada [140] su u narednom poglavlju prošireni na skoro izvesnu i L^p-stabilnost jednačine (5.1) u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju.

5.2 Stabilnost stohastičkih diferencijalnih jednačina sa pomerenim impulsima i markovskim prelazima

Kako je predmet istraživanja stabilnost jednačine (5.1), *a priori* se pretpostavlja da f, g i I_k ispunjavaju neophodne uslove pri kojima razmatrana jednačina ima jedinstveno rešenje za $t \geq 0$ (videti Teoremu 5.1.1), odnosno, pretpostavlja se da za bilo koji početni uslov $\xi \in PC^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ postoji levo neprekidan i desno ograničen proces $x(t;\xi)$ koji zadovoljava jednačinu (5.1). Takodje, zbog jednostavnijeg ispitivanja stabilnosti, uobičajeno se pretpostavlja da je $f(t,0,i) \equiv 0$, $g(t,0,i) \equiv 0$, $I_k(t,0,0,i) \equiv 0$, tako da jednačina (5.1) ima trivijalno rešenje $x(t) \equiv 0$.

Pre navodjenja glavnih rezultata, uvode se neophodne definicije i pretostavke koje omogućavaju ispitivanje stabilnosti jednačine (5.1).

Definicija 5.2.1 *Neka je $\lambda \in C(R_+; R_+)$ strogo rastuća funkcija i $\lambda(t) \uparrow \infty$ kad $t \to \infty$. Jednačina (5.1) je L^p-stabilana reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$ ako postoje konstante $\gamma > 0$ i $M > 0$ tako da je*

$$E|x(t;\xi)|^p \leq M \cdot \lambda^{-\gamma}(t), \quad t \geq 0 \tag{5.3}$$

za svako $\xi \in PC^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^n)$, odnosno,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln E|x(t;\xi)|^p}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma.$$

Jednačina (5.1) je L^p-nestabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$ ako postoje konstante $\gamma > 0$ i $M > 0$ tako da je

$$E|x(t;\xi)|^p \geq M \cdot \lambda^{\gamma}(t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Jednačina (5.1) je skoro izvesno stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$ ako je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln |x(t;\xi)|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma \quad s.i. \tag{5.4}$$

Neka je $C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbb{R}^n\times S;\mathbb{R}_+)$ familija nenegativnih funkcija $V(t,x,i)$, neprekidnih i sa neprekidnim parcijalnim izvodima V_t,V_x,V_{xx} na $(t_{k-1},t_k]\times\mathbb{R}^n\times S$. Operator $\mathcal{L}V:(t_{k-1},t_k]\times PC^b_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)\times S\to\mathbb{R}$, pridružen jednačini (5.1), je definisan na sledeći način,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(t,\varphi,i) := {} & V_t(t,\varphi(0),i)+V_x(t,\varphi(0),i))f(t,\varphi,i) \\ & +\frac{1}{2}tr[g^T(t,\varphi,i)V_{xx}(t,\varphi(0),i)g(t,\varphi,i)]+\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}V(t,\varphi(0),j),\end{aligned}\tag{5.5}$$

gde je $V_t=\frac{\partial V}{\partial t}$, $V_x=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$ i $V_{xx}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}$.

Za decay-funkciju λ i funkciju V se uvode sledeće pretostavke:

($\mathbf{H_1}$) Decay-funkcija $\lambda\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ je strogo rastuća, $\lambda(t)\uparrow\infty$ kad $t\to\infty$,

$$\begin{aligned}&\lambda(t)=1,\quad -\tau\le t\le 0,\\ &\lambda(t+s)\le\lambda(t)\lambda(s),\quad t,s\ge 0,\\ &\sup_{t>0}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}=K=const.\end{aligned}\tag{5.6}$$

($\mathbf{H_2}$) Postoje konstante $p>0$ i $c_1,c_2>0$, tako da funkcija $V\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$ zadovoljava uslov

$$c_1|x|^p\le V(t,x)\le c_2|x|^p,\quad (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n.\tag{5.7}$$

Napomenimo da u odnosu na pretpostavku ($\mathbf{H_1}$) u Glavi 3 (relacija (3.8)), u ovom slučaju decay-funkcija osim što mora biti dodefinisana, tj. $\lambda(t)=1$ za $-\tau\le t\le 0$, mora zadovoljavati i uslov $\sup_{t>0}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}=K=$const.

Naredna dva tvrdjenja predstavljaju uopštenja Teoreme 3.1 i Teoreme 3.2 iz rada [140] koje se odnose na eksponencijalnu L^p-stabilnost jednačine (5.1). S obzirom na prirodu procesa koji se modeliraju impulsivnim stohastičkim diferencijalnim jednačinama (ISDJ), razmatranje opšte stabilnosti je neophodno u situacijama kada je rasporedom impulsa nemoguće manipulisati i stabilizovati sistem u smislu eksponencijalne L^p-stabilnosti.

Teorema 5.2.1 *Neka je $p>0$ i neka su zadovoljene pretpostavke ($\mathbf{H_1}$) i ($\mathbf{H_2}$). Takodje, neka postoje konstante $d_{ik},\bar{d_{ik}}\ge 0$, $d_{ik}^2+\bar{d_{ik}}^2\ne 0$, $\delta,\gamma>0$, $q>1$, $\eta_i\ge 0$, $i\in S$, $k=1,2,\ldots$, tako da je*

$$E\mathcal{L}V(t,\varphi,i)\le\eta_i\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}EV(t,\varphi(0),i)\tag{5.8}$$

za svako $t\in(t_{k-1},t_k]$, $i\in S$ i one $\varphi\in PC^b_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju uslov

$$E\left[\min_{1\le i\le N}V(t+\theta,\varphi(\theta),i)\right]\le q\lambda^\gamma(\tau)E\left[\max_{1\le i\le N}V(t,\varphi(0),i)\right],\quad -\tau\le\theta\le 0.\tag{5.9}$$

Ako je za svako $i \in S$,

$$\begin{aligned} &EV(t_k^+, \varphi(0) + I_k(t_k, \varphi(0), \varphi, i), i) \\ &\qquad \le d_{ik} EV(t_k, \varphi(0), i) + \bar{d_{ik}} \sup_{-\tau \le \theta \le 0} EV(t_k + \theta, \varphi(\theta), i), \end{aligned} \tag{5.10}$$

pri čemu je

$$\sup_{1 \le k < +\infty} \{t_k - t_{k-1}\} \le \delta. \tag{5.11}$$

i

$$1 < e^{(\gamma + \eta_i)\delta K} \le q \le \Big(\max_{i \in S, 1 \le k < +\infty} \{d_{ik} + \bar{d_{ik}} \lambda^\gamma(\tau)\} \Big)^{-1}, \tag{5.12}$$

tada je jednačina (5.1) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Najpre dodefinišimo lanac Markova tako da je $r(t) = r(0) = r_0$ za svako $t \in [-\tau, 0]$. Neka je $\varepsilon > 0$ tako da je $t + \varepsilon \in (t_{k-1}, t_k)$, za proizvoljno $k \in S$. Tada se primenom formule Itôa na funkciju $V(t, x(t), r(t))$ dobija

$$EV(t + \varepsilon, x(t + \varepsilon), r(t + \varepsilon)) = EV(t, x(t), r(t)) + \int_t^{t+\varepsilon} E\mathcal{L}V(s, x_s, r(s))\, ds.$$

Kad $\varepsilon \to 0$, prethodna relacija postaje

$$D^+ EV(t, x(t), r(t)) = E\mathcal{L}V(t, x_t, r(t)), \quad t \in (t_{k-1}, t_k].$$

Neka je $W(t) := \lambda^\gamma(t) EV(t, x(t), i))$ za $t \in (t_{k-1}, t_k]$ i $i \in S$. Tada je Dini-izvod

$$D^+ W(t) = \gamma \lambda^\gamma(t) \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(t, x(t), i) + \lambda^\gamma(t) E\mathcal{L}V(t, x_t, i). \tag{5.13}$$

Kako je

$$EV({t_k}^+, x_{t_k}(0) + I_k(x_{t_k}(0), x_{t_k}, i), i) = EV(t_k^+, x(t_k) + x(t_k^+) - x(t_k), i),$$

na osnovu (5.10) je

$$EV(t_k^+, x(t_k^+), i) \le d_{ik} EV(t_k, x(t_k), i) + \bar{d_{ik}} \sup_{-\tau \le \theta \le 0} EV(t_k + \theta, x(t_k + \theta), i).$$

Množenjem leve i desne strane prethodne ralacije sa $\lambda^\gamma(t_k)$, dobija se

$$\begin{aligned} W(t_k^+) &= \lambda^\gamma(t_k) EV(t_k^+, x(t_k^+), i) \\ &\le d_{ik} \lambda^\gamma(t_k) EV(t_k, x(t_k), i) + \bar{d_{ik}} \lambda^\gamma(t_k) \sup_{-\tau \le \theta \le 0} EV(t_k + \theta, x(t_k + \theta), i) \\ &= d_{ik} \lambda^\gamma(t_k) EV(t_k, x(t_k), i) + \bar{d_{ik}} \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \lambda^\gamma(t_k) EV(t_k + \theta, x(t_k + \theta), i). \end{aligned} \tag{5.14}$$

S obzirom na pretpostavku ($\mathbf{H_1}$), sledi

$$\begin{aligned} &\sup_{-\tau \le \theta \le 0} \lambda^\gamma(t_k) EV(t_k + \theta, x(t_k + \theta), i) \\ &\qquad \le \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \lambda^\gamma(t_k + \theta) \lambda^\gamma(-\theta) EV(t_k + \theta, x(t_k + \theta), i) \\ &\qquad \le \lambda^\gamma(\tau) \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \lambda^\gamma(t_k + \theta) EV(t_k + \theta, x(t_k + \theta), i). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Imajući u vidu (5.14) i (5.15), dolazi se do ocene

$$W(t_k^+) \le d_{ik} W(t_k) + \bar{d_{ik}} \lambda^\gamma(\tau) \sup_{-\tau \le \theta \le 0} W(t_k + \theta). \tag{5.16}$$

Za neko $M > 0$ takvo da je

$$\sup_{-\tau \le \theta \le 0} W(\theta) < \frac{M}{q},$$

dokažimo da je

$$W(t) < M, \quad t \in [-\tau, +\infty).$$

Kako je $q > 1$, to je $W(t) < M$ za $t \in [-\tau, 0]$. Dokažimo kontradikcijom da je

$$W(t) < M, \quad t \in (0, t_1]. \tag{5.17}$$

Pretpostavimo da postoji neko $t^* \in (0, t_1]$ za koje je

$$W(t^*) = M, \quad W(t) < M, \quad t \in [-\tau, t^*]. \tag{5.18}$$

Kako je $W(t)$ neprekidna funkcija na $[0, t_1]$, može se naći $t^{**} \in (0, t^*)$ tako da je

$$W(t^{**}) = \frac{M}{q}, \quad W(t) > \frac{M}{q}, \quad t \in (t^{**}, t^*].$$

Na osnovu (5.18) sledi

$$\begin{aligned} qW(t) &\ge M > W(t + \theta), \quad t \in [t^{**}, t^*), \quad \theta \in [-\tau, 0], \\ qW(t^*) &= qM > M > W(t^* + \theta), \end{aligned}$$

odnosno,

$$qW(t) > W(t + \theta), \quad t \in [t^{**}, t^*], \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Na osnovu ove ocene i činjenice da je za $t \ge \tau$

$$\lambda^\gamma(t) = \lambda^\gamma(t - \tau + \tau) \le \lambda^\gamma(t - \tau)\lambda^\gamma(\tau),$$

proverimo ispunjenost uslova (5.9) za $t \in [t^{**}, t^*]$ i $\varphi = x_t$,

$$\begin{aligned} q\lambda^\gamma(\tau) E\left[\max_{1 \le i \le N} V(x(t), t, i)\right] &\ge q\lambda^\gamma(\tau) EV(t, x(t), i) \\ &\ge q \frac{\lambda^\gamma(t)}{\lambda^\gamma(t - \tau)} EV(t, x(t), i) = \frac{qW(t)}{\lambda^\gamma(t - \tau)} \\ &> \frac{W(t + \theta)}{\lambda^\gamma(t - \tau)} = \frac{\lambda^\gamma(t + \theta) EV(t + \theta, x(t + \theta), i)}{\lambda^\gamma(t - \tau)} \\ &\ge EV(t + \theta, x(t + \theta), i) \\ &\ge E\left[\min_{1 \le i \le N} V(t + \theta, x(t + \theta), i)\right]. \end{aligned}$$

Prethodna relacija je takodje zadovoljena i za $t \geq \tau$ primenom monotonosti funkcije $\lambda(t)$. Prema tome, uslov (5.9) je zadovoljen. Sada se na (5.13) može primeniti uslov Razumikhina (5.8) za $t \in [t^{**}, t^*]$,

$$\begin{aligned} D^+W(t) &\leq \gamma\lambda^\gamma(t)\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}EV(t,x(t),i) + \eta_i\lambda^\gamma(t)\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}EV(t,x(t),i) \\ &\leq (\gamma+\eta_i)KW(t), \end{aligned} \tag{5.19}$$

odnosno,

$$W(t^*) \leq W(t^{**}) + (\gamma+\eta_i)K\int_{t^{**}}^{t^*} W(t)\,dt.$$

Primenom Gronwall-Bellmanove leme (Teorema 1.6.1) i uslova (5.12) i (5.11), sledi

$$M = W(t^*) \leq W(t^{**})e^{(\gamma+\eta_i)K\int_{t^{**}}^{t^*}dt} < W(t^{**})e^{(\gamma+\eta_i)Kt_1} \leq \frac{M}{q}e^{(\gamma+\eta_i)K\delta} \leq M.$$

Kako je ovo kontradikcija, važi relacija (5.17).

Na osnovu (5.16) i (5.17)

$$W(t_1^+) \leq d_{i1}W(t_1) + \bar{d_{i1}}\lambda^\gamma(\tau)\sup_{-\tau\leq\theta\leq 0}W(t_1+\theta) < M(d_{i1} + \bar{d_{i1}}\lambda^\gamma(\tau)) \leq \frac{M}{q} < M.$$

Dokažimo kontradikcijom da je

$$W(t) < M, \quad t \in (t_1, t_2]. \tag{5.20}$$

Pretpostavimo suprotno, da postoji neko $t_1^* \in (t_1, t_2]$ tako da je

$$W(t_1^*) = M, \quad W(t) < M, \quad t \in [-\tau, t_1^*).$$

Zbog neprekidnosti funkcije $W(t)$ na $(t_1, t_2]$, postoji neko $t_1^{**} \in (t_1, t_1^*]$ za koje je

$$W(t_1^{**}) = \frac{M}{q}, \quad W(t) > \frac{M}{q}, \quad t \in (t_1^{**}, t_1^*].$$

Ponavljajući prethodni postupak, može se zaključiti da je za $t \in [t_1^{**}, t_1^*]$, $\theta \in [-\tau, 0]$,

$$qW(t) > W(t+\theta),$$

a analogno oceni (5.19), za $t \in [t_1^{**}, t_1^*]$ je

$$D^+W(t) \leq (\gamma+\eta_i)KW(t).$$

Primenom Gronwall-Bellmanove leme je

$$M = W(t_1^*) < W(t_1^{**})e^{(\gamma+\eta_i)K(t_2-t_1)} \leq W(t_1^{**})e^{(\gamma+\eta_i)K\delta} \leq M,$$

što je kontradikcija, pa važi relacija (5.20).

Indukcijom sledi da je $W(t) < M$, $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k \in N$, pa je

$$W(t) < M, \quad t \in [-\tau, +\infty),$$

odnosno,

$$\lambda^\gamma(t)EV(t,x(t),i)) < M.$$

Na osnovu pretpostavke ($\mathbf{H_2}$) i prethodne ralacije konačno se dobija

$$c_1E|x(t)|^p \leq EV(t,x(t),i)) < M\lambda^{-\gamma}(t),$$

tj.

$$E|x(t)|^p < \frac{M}{c_1}\lambda^{-\gamma}(t), \quad t \in [-\tau,\infty),$$

pa je rešenje L^p-stabilno u odnosu na $\lambda(t)$. $\diamondsuit$

Napomena 5.2.1 Uslov (5.10) je krucijalan za stabilnost jednačine (5.1). Naime, ako je sistem bez impulsa nestabilan, on postaje stabilan ako se na njega deluje impulsima koji zadovoljavaju uslove (5.11) i (5.12). To znači da je za stabilnost sistema neophodno da se impulsi javljaju dovoljno često, tj. da je rastojanje izmedju impulsa dovoljno malo i da su skokovi takvi da je $\max_{i\in S,1\leq k<+\infty}\{d_{ik}+\bar{d_{ik}}\lambda^\gamma(\tau)\} < 1$.

Napomena 5.2.2 Ako je $\lambda(t) = e^t$, Teorema 5.2.1 se svodi na Teoremu 3.1 iz rada [140] koja daje dovoljne uslove za eksponencijalnu Ł^p-stabilnost jednačine (5.1).

Naredna teorema, kao i Teorema 5.2.1, odnosi se na L^p-stabilnost u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju jednačine (5.1), ali se uslovi u ovim teoremama značajno razlikuju. U narednoj teoremi se pre svega zahteva da je operator $E\mathcal{L}V$ negativan za one $\varphi \in PC^b_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju uslov Razumikhina. Takodje, neophodno je da impulsi budu takvog intenziteta i rasporeda da je zadovoljen uslov $\max_{i\in S,1\leq k<+\infty}\{d_{ik} + \bar{d_{ik}}\lambda^\gamma(\tau)\} > 1$, pri čemu je značajno najmanje rastojanje izmedju bilo koja dva impulsa, a ne najveće kao u Teoremi 5.2.1.

Teorema 5.2.2 *Neka je $p > 0$ i neka su zadovoljene pretpostavke* ($\mathbf{H_1}$) *i* ($\mathbf{H_2}$). *Takodje, neka postoje konstante $d_{ik}, \bar{d_{ik}} \geq 0$, $d_{ik}^2 + \bar{d_{ik}}^2 \neq 0$, $\rho_i, \mu, \gamma > 0$, $q > 1$, $i \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, tako da je*

$$E\mathcal{L}V(t,\varphi,i) \leq -\rho_i\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}EV(t,\varphi(0),i) \tag{5.21}$$

za svako $t \in (t_{k-1},t_k]$, $i \in S$ i one $\varphi \in PC^b_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ koji zadovoljavaju uslov

$$E\left[\min_{1\leq i\leq N} V(t+\theta,\varphi(\theta),i)\right] \leq q\lambda^\gamma(\tau)E\left[\max_{1\leq i\leq N} V(t,\varphi(0),i)\right], \quad -\tau \leq \theta \leq 0. \tag{5.22}$$

Ako je za svako $i \in S$,

$$\begin{aligned} &EV(t_k^+,\varphi(0)+I_k(t_k,\varphi(0),\varphi,i),i) \\ &\qquad \leq d_{ik}EV(t_k,\varphi(0),i) + \bar{d_{ik}}\sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} EV(t_k+\theta,\varphi(\theta),i), \end{aligned} \tag{5.23}$$

pri čemu je

$$\mu \leq \inf_{1\leq k<+\infty}\{t_k - t_{k-1}\} \tag{5.24}$$

i

$$1 < \max_{i\in S,1\leq k<+\infty}\{d_{ik} + \bar{d_{ik}}\lambda^\gamma(\tau)\} \leq q < e^{(\rho_i-\gamma)\mu K}, \tag{5.25}$$

tada je jednačina (5.1) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Iz (5.25) sledi da postoji dovoljno malo $\varepsilon > 0$ tako da je

$$\rho_i - \gamma \geq \frac{\ln(q+\varepsilon)}{\mu K}.$$

Neka je $W(t) := \lambda^\gamma(t) EV(t, x(t), i)$ za $t \in (t_{k-1}, t_k]$ i $i \in S$. Ponavljajući postupak iz dokaza Teoreme 5.2.1, dolazi se do relacije (5.13), odnosno,

$$D^+W(t) = \gamma\lambda^\gamma(t)\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}EV(t, x(t), i) + \lambda^\gamma(t)E\mathcal{L}V(t, x_t, i). \tag{5.26}$$

Primenom uslova (5.23) i osobina decay-funikcije $\lambda(t)$, kao u dokazu prethodne teoreme dobija se relacija (5.16), tj.

$$W(t_k^+) \leq d_{ik}W(t_k) + \bar{d_{ik}}\lambda^\gamma(\tau) \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} W(t_k + \theta). \tag{5.27}$$

Dokažimo da ako je za neko $M > 0$

$$\sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} W(\theta) < \frac{M}{q+\varepsilon}, \tag{5.28}$$

tada je

$$W(t) < M, \quad t \geq -\tau.$$

Na osnovu uslova (5.25) jednostavno se zaključuje da je

$$W(t) < M, \quad t \in [-\tau, 0].$$

Dokažimo kontradikcijom da je

$$W(t) < M, \quad t \in (0, t_1]. \tag{5.29}$$

Ako prethodna relacija ne bi važila, to znači da postoji neko $t^* \in (0, t_1]$ tako da je

$$W(t^*) = M, \quad W(t) < M, \quad t \in [-\tau, t^*). \tag{5.30}$$

Funkcija $W(t)$ je neprekidna na $[0, t_1]$, pa postoji $t^{**} \in [0, t^*)$ za koje je

$$W(t^{**}) = \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad W(t) > \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad t \in (t^{**}, t^*].$$

Na osnovu ovoga i (5.30) je

$$(q+\varepsilon)W(t) > W(t+\theta) \quad t \in [t^{**}, t^*], \quad \theta \in [-\tau, 0]. \tag{5.31}$$

Primenom pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i prethodne relacije, proverimo da li je ispunjen uslov (5.22),

$$\begin{aligned}
(q+\varepsilon)\lambda^\gamma(\tau)E\left[\max_{1\leq i\leq N} V(t, x(t), i)\right] \\
&\geq (q+\varepsilon)\lambda^\gamma(\tau)EV(t, x(t), i) \\
&\geq (q+\varepsilon)\frac{\lambda^\gamma(t)}{\lambda^\gamma(t-\tau)}EV(t, x(t), i) = \frac{(q+\varepsilon)W(t)}{\lambda^\gamma(t-\tau)} \\
&> \frac{\lambda^\gamma(t+\theta)EV(t+\theta, x(t+\theta), i)}{\lambda^\gamma(t-\tau)} \\
&\geq EV(t+\theta, x(t+\theta), i) \geq E\left[\min_{1\leq i\leq N} V(t+\theta, x(t+\theta), i)\right].
\end{aligned}$$

Kako je ispunjen uslov Razumikhina (5.22) kad $\varepsilon \to 0$, može se primeniti (5.21), tako da na osnovu (5.25) u (5.26) za $t \in [t^{**}, t^*]$ sledi

$$\begin{aligned} D^+W(t) &= \gamma\lambda^\gamma(t)\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}EV(t, x(t), i) + \lambda^\gamma(t)E\mathcal{L}V(t, x_t, i) \\ &\leq (\gamma - \rho_i)KW(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$M = W(t^*) \leq W(t^{**}) = \frac{M}{q+\varepsilon} < M,$$

što je kontradikcija, tako da je zadovoljena relacija (5.29). Dokažimo sada da je

$$W(t_1) \leq \frac{M}{q+\varepsilon}. \tag{5.32}$$

Pretpostavimo suprotno, da važi

$$W(t_1) > \frac{M}{q+\varepsilon}.$$

Zbog neprekidnosti funkcije $W(t)$ na $[0, t_1]$, može se naći $\bar{t} \in (0, t_1)$ tako da je

$$W(\bar{t}) = \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad W(t) > \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad t \in (\bar{t}, t_1].$$

Na isti način kako je dobijena relacija (5.33), dobija se i

$$(q+\varepsilon)W(t) > W(t+\theta) \quad t \in [\bar{t}, t_1], \quad \theta \in [-\tau, 0], \tag{5.33}$$

pa je zadovoljen uslov (5.22) za $t \in [\bar{t}, t_1]$. Na osnovu (5.26) i uslova (5.21) je

$$D^+W(t) \leq (\gamma - \rho_i)KW(t) \leq 0 \quad t \in [\bar{t}, t_1].$$

Odavde je

$$\frac{M}{q+\varepsilon} = W(t_1) \leq W(\bar{t}) = \frac{M}{q+\varepsilon},$$

što je kontradikcija, pa važi (5.32).

Na isti način se može pokazati da je

$$W(t) \leq \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad t \in (0, t_1]. \tag{5.34}$$

Zamenom (5.32), (5.28) i (5.34) u (5.27) i primenom uslova (5.24) i (5.25), sledi

$$\begin{aligned} W(t_1^+) &\leq d_{i1}W(t_1) + \bar{d_{i1}}\lambda^\gamma(\tau) \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} W(t_1+\theta) \qquad (5.35) \\ &\leq \frac{M}{q+\varepsilon}\Big(d_{i1} + \bar{d_{i1}}\lambda^\gamma(\tau)\Big) \\ &\leq \frac{M}{q+\varepsilon} \max_{i\in S, 1\leq k<+\infty}\{d_{ik} + \bar{d_{ik}}\lambda^\gamma(\tau)\} < M. \end{aligned}$$

Dokažimo da je

$$W(t) < M, \quad t \in (t_1, t_2]. \tag{5.36}$$

Pretpostavimo suprotno, da postoji $\bar{t_1} \in (t_1, t_2]$ za koje je

$$W(\bar{t_1}) = M, \quad W(t) < M, \quad t \in [-\tau, \bar{t_1}).$$

Pre svega, pokažimo da postoji $\bar{\bar{t_1}} \in (t_1, \bar{t_1})$ tako da je

$$W(\bar{\bar{t_1}}) = \frac{M}{q+\varepsilon}. \tag{5.37}$$

Neka je $W(t) > \frac{M}{q+\varepsilon}$ za svako $t \in (t_1, \bar{t_1})$. Tada je

$$(q+\varepsilon)W(t) > M > W(t+\theta), \quad t \in (t_1, \bar{t_1}), \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Nije teško proveriti, na već pokazan način, da je ispunjen uslov (5.22). Zamenom (5.21) u (5.26) jednostavno se dobija

$$D^+W(t) \leq (\gamma - \rho_i)KW(t) \leq 0, \quad t \in (t_1, \bar{t_1}).$$

Odavde, na osnovu (5.32) sledi

$$M = W(\bar{t_1}) \leq W(t_1^+) < M,$$

što je kontradikcija, pa je zadovoljena relacija (5.37). Iz (5.37) i neprekidnosti $W(t)$ na $(t_1, t_2]$, može se naći $\bar{\bar{t_1}}^* \in [\bar{\bar{t_1}}, \bar{t_1}]$ tako da je

$$W(\bar{\bar{t_1}}^*) = \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad W(t) > \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad t \in (\bar{\bar{t_1}}^*, \bar{t_1}),$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
&(q+\varepsilon)W(t) > M > W(t+\theta), \quad t \in (\bar{\bar{t_1}}^*, \bar{t_1}), \quad \theta \in [-\tau, 0] \\
&(q+\varepsilon)W(\bar{\bar{t_1}}^*) = M > W(\bar{\bar{t_1}}^* + \theta), \\
&(q+\varepsilon)W(\bar{t_1}) = (q+\varepsilon)M > M > W(\bar{t_1} + \theta).
\end{aligned}$$

Sada, na osnovu (5.26) je

$$D^+W(t) \leq (\gamma - \rho_i)KW(t) \leq 0, \quad t \in (\bar{\bar{t_1}}^*, \bar{t_1}),$$

pa je, prema tome,

$$M = W(\bar{t_1}) \leq W(\bar{\bar{t_1}}^*) = \frac{M}{q+\varepsilon} < M.$$

S obzirom da je ovo kontradikcija, važi relacija (5.36).

Dalje, pokažimo kontradikcijom da je

$$W(t_2) < \frac{M}{q+\varepsilon}. \tag{5.38}$$

U tu svrhu, razlikuju se dva slučaja. Prvo, neka je

$$W(t) > \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad t \in (t_1, t_2].$$

Tada je na osnovu (5.29) i (5.36),

$$(q+\varepsilon)W(t) > M > W(t+\theta), \quad t \in (t_1, t_2], \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

a na osnovu (5.26) i uslova (5.21),

$$D^+W(t) \leq (\gamma - \rho_i)KW(t) \leq 0, \quad t \in (t_1, t_2].$$

Primenom Gronwall-Bellmanove leme, uslova (5.24), (5.25) i relacije (5.32), sledi

$$\begin{aligned} \frac{M}{q+\varepsilon} &< W(t_2) < W(t_1^+)e^{(\gamma-\rho_i)K(t_2-t_1)} \\ &\leq W(t_1^+)e^{-(\rho_i-\gamma)K\mu} \leq \frac{W(t_1^+)}{q+\varepsilon} < \frac{M}{q+\varepsilon}, \end{aligned}$$

što je kontradikcija, pa je zadovoljena relacija (5.38).

U drugom slučaju, neka je $W(t_2) > \frac{M}{q+\varepsilon}$ i neka postoji $\tilde{t_1} \in (t_1, t_2)$ tako da je

$$W(\tilde{t_1}) \leq \frac{M}{q+\varepsilon}.$$

Tada se može naći $\tilde{\tilde{t_1}} \in [\tilde{t_1}, t_2]$ tako da je

$$W(\tilde{\tilde{t_1}}) = \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad W(t) > \frac{M}{q+\varepsilon}, \quad t \in (\tilde{\tilde{t_1}}, t_2]. \tag{5.39}$$

Odavde, na osnovu (5.29) i (5.36) je

$$(q+\varepsilon)W(t) > M > W(t+\theta), \quad t \in (\tilde{\tilde{t_1}}, t_2], \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Primenom uslova (5.21) i relacije (5.26) na već pokazani način dobija se

$$D^+W(t) \leq (\gamma - \rho_i)KW(t) \leq 0, \quad t \in (\tilde{\tilde{t_1}}, t_2].$$

Iz pretpostavke (5.39) je

$$\frac{M}{q+\varepsilon} < W(t_2) \leq W(\tilde{\tilde{t_1}}) = \frac{M}{q+\varepsilon},$$

što je kontradikcija, pa je zadovoljena relacija (5.38).

Dalje, na način kako je dobijeno (5.35), zaključuje se da je

$$W(t_2^+) < M.$$

Primenom indukcije, za $k = 1, 2, \ldots$, je $W(t) < M$, $t \in (t_{k-1}, t_k]$, odnosno,

$$W(t) < M, \quad t \in [-\tau, +\infty),$$

što povlači da je

$$E|x(t)|^p < \frac{M}{c_1}\lambda^{-\gamma}(t), \quad t \in [-\tau, +\infty),$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Napomena 5.2.3 Ako je sistem bez impulsa stabilan, on će ostati stabilan i pri dejstvu impulsa ako oni zadovoljavaju uslov (5.23), tj. ako se javljaju u dovoljno velikim razmacima tako da je $\max_{i\in S, 1\le k<+\infty}\{d_{ik}+\bar{d}_{ik}\lambda^{\gamma}(\tau)\} > 1$. Prema tome, raspored impulsa i veličina skokova od ključne su važnosti za stabilnost sistema sa impulsima.

Napomena 5.2.4 Za $\lambda(t) = e^t$, Teorema 5.2.2 se svodi na Teoremu 3.2 iz rada [140] koja se odnosi na eksponencijalnu L^p-stabilnost jednačine (5.1).

Sledeća teorema daje dovoljne uslove pri kojima je jednačina (5.1) istovremeno L^p-stabilna i skoro izvesno stabilna u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju.

Teorema 5.2.3 *Neka je $p \ge 1$ i neka su zadovoljene pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_2})$. *Takodje, neka je jednačina (5.1) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, tj. ispunjena je relacija (5.3). Ako postoje konstante $\zeta \in (0,\gamma)$ i $L > 0$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\zeta}(t)\,dt < \infty$ i ako je*

$$E\Big[|f(t,\varphi,i)|^p + |g(t,\varphi,i)|^p + |I_k(t,\varphi(0),\varphi,i)|^p\Big] < L \sup_{-\tau\le\theta\le 0} \lambda^{-\gamma}(-\theta) E|\varphi(\theta)|^p \quad (5.40)$$

za svako $i \in S$ i $t \ge 0$, tada je jednačina (5.1) skoro izvesno stabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Primenom elementarne nejednakosti (1.20), za $t \ge -\tau$ sledi

$$\begin{aligned} E\sup_{0\le s\le\tau}|x(t+s)|^p \le 4^{p-1}\Bigg[&E|x(t)|^p + E\left(\int_t^{t+\tau}|f(s,x_s,i)|\,ds\right)^p \qquad (5.41)\\ &+E\sup_{0\le s\le\tau}\left|\int_t^{t+s} g(s,x_s,i)\,dw(s)\right|^p + E\Bigg(\sum_{t\le t_k\le t+\tau}|I_k(t_k,x(t_k),x_{t_k},i)|\Bigg)^p\Bigg]. \end{aligned}$$

Na osnovu Hölderove nejednakosti, (5.40), (5.3) i $(\mathbf{H_1})$, dobija se ocena

$$\begin{aligned} E\left(\int_t^{t+\tau}|f(s,x_s,i)|\,ds\right)^p &\le \tau^{p-1}\int_t^{t+\tau} E|f(s,x_s,i)|^p\,ds \qquad (5.42)\\ &\le \tau^{p-1}L\int_t^{t+\tau}\sup_{-\tau\le\theta\le0}\lambda^{-\gamma}(-\theta)E|x(s+\theta)|^p\,ds\\ &\le \tau^{p-1}L\,M\int_t^{t+\tau}\sup_{-\tau\le\theta\le0}\lambda^{-\gamma}(-\theta)\lambda^{-\gamma}(s+\theta)\,ds\\ &\le \tau^{p-1}L\,M\int_t^{t+\tau}\lambda^{-\gamma}(s)\,ds\\ &\le \tau^{p}L\,M\lambda^{-\gamma}(t), \end{aligned}$$

a na osnovu Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti,

$$\begin{aligned} E\sup_{0\le s\le\tau}\left|\int_t^{t+s}g(s,x_s,i)\,dw(s)\right|^p &\le \tau^{\frac{p}{2}-1}L\,C_p\int_t^{t+\tau}\sup_{-\tau\le\theta\le0}\lambda^{-\gamma}(-\theta)E|x(s+\theta)|^p\,ds\\ &\le \tau^{\frac{p}{2}}L\,M\lambda^{-\gamma}(t), \qquad (5.43) \end{aligned}$$

gde je $C_p > 0$ univerzalna konstanta. Slično, primenom nejednakosti (1.20), (5.40) i (5.3) je

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{t\le t_k\le t+\tau} |I_k(t_k,x(t_k),x_{t_k},i)|\right)^p &\le v^{p-1}\, v \sup_{t\le t_k\le t+\tau} E|I_k(t_k,x(t_k),x_{t_k},i)|^p \\ &\le v^p\, L \sup_{t\le t_k\le t+\tau}\ \sup_{-\tau\le\theta\le 0} \lambda^{-\gamma}(-\theta)E|x(t_k+\theta)|^p \\ &\le v^p\, L\, M \sup_{t\le t_k\le t+\tau} \lambda^{-\gamma}(t_k) \qquad (5.44) \\ &\le v^p\, L\, M \lambda^{-\gamma}(t), \end{aligned}$$

gde je $v = \left[\frac{\tau}{\mu}\right] + 1$, $\mu \le \inf_{1\le k<+\infty}\{t_k - t_{k-1}\}$. Zamenom (5.43), (5.43) i (5.45) u (5.41), dobija se

$$E \sup_{0\le s\le\tau} |x(t+s)|^p \le H\, \lambda^{-\gamma}(t),$$

gde je $H > 0$ generisana konstanta. Za proizvoljno $\zeta \in (0,\gamma)$ i $n = 1, 2, \ldots,$ na osnovu nejednakosti Chebysheva i prethodne nejednakosti sledi

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{0\le s\le\tau} |x(n\tau+s)|^p \ge \lambda^{-(\gamma-\zeta)}(n\tau+\tau)\right\} &\le \lambda^{(\gamma-\zeta)}(n\tau+\tau)E \sup_{0\le s\le\tau} |x(n\tau+s)|^p \\ &\le H\, \lambda^{(\gamma-\zeta)}(n\tau+\tau)\lambda^{-\gamma}(n\tau) \\ &\le H\, \lambda^{-\zeta}(n\tau)\lambda^{(\gamma-\zeta)}(\tau). \end{aligned}$$

Kako je $\lambda^{-\zeta}(n\tau) \le \lambda^{-\zeta}(r)$ za $(n-1)\tau \le r \le n\tau$, to je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-\zeta}(n\tau) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \lambda^{-\zeta}(r)\, dr = \frac{1}{\tau}\int_0^{\infty} \lambda^{-\zeta}(r)\, dr < \infty.$$

Primenom Borel-Cantellijeve leme se zaključuje da postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\omega)$ tako da za skoro sve $\omega \in \Omega$, $n \ge n_0$ i $t \in [n\tau, n\tau+\tau]$ važi

$$|x(t)|^p \le \lambda^{-(\gamma-\zeta)}(n\tau+\tau) \le \lambda^{-(\gamma-\zeta)}(t), \quad s.i.$$

Konačno, skoro izvesna stabilnost jednačine (5.1), tj. relacija (5.4), neposredno sledi iz prehodne nejednakosti, čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Napomena 5.2.5 Teorema 5.2.3 se može dokazati i ako su zadovoljeni uslovi Teoreme 5.2.1 ili Teoreme 5.2.2 za $p \ge 1$, jer one daju dovoljne uslove za opštu L^p-stabilnost jednačine (5.1).

Napomena 5.2.6 Teorema 5.2.3 se svodi na Teoremu 3.7 iz rada [178] za $\lambda(t) = e^t$, $\beta = \mu$, $l = v$, koja se odnosi na skoro izvesnu stabilnost impulsivne stohastičke funkcijalne diferencijalne jednačine.

Sledeća teorema se odnosi na L^p-nestabilnost i dokazuje se metodom Lyapunova. Prednost ovog tvrdjenja je u tome što ako se dokaže L^p-nestabilnost u odnosu na, npr. polinomijalnu ili logaritamsku decay-funkciju, tim pre važi stroži vid nestabilnosti, tj. eksponencijalna nestabilnost.

Teorema 5.2.4 *Neka je $p > 0$ i neka važe pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$. Takodje, neka postoje konstante $d_{ik}, \bar{d_{ik}} \geq 0$, $d_{ik}^2 + \bar{d_{ik}}^2 \neq 0$, $\delta, \gamma > 0$, $\eta_i \geq 0$, $i \in S$, $k = 1, 2, \ldots$ tako da je*

$$E\mathcal{L}V(t, \varphi, i) \geq \eta_i \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(t, \varphi(0), i) \tag{5.45}$$

za svako $t \geq 0$, $t \neq t_k$ i $\in S$ i $\varphi \in PC^b_{\mathcal{F}_t}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. Ako je za svako $i \in S$,

$$\begin{aligned} EV(t_k^+, \varphi(0) + I_k(t_k, \varphi(0), \varphi, i), i) \geq\ & d_{ik} EV(t_k, \varphi(0), i) \\ & + \bar{d_{ik}} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} EV(t_k + \theta, \varphi(\theta), i), \end{aligned} \tag{5.46}$$

pri čemu je

$$\sup_{0 \leq k < +\infty} \{t_{k+1} - t_k\} \leq \delta, \tag{5.47}$$

$$(\lambda(\delta))^{(\gamma + \eta_i)K} \leq \inf_{1 \leq k \leq +\infty} \{d_{ik}, \bar{d_{ik}}\}, \tag{5.48}$$

tada je jednačina (5.1) L^p-nestabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Za prirodan broj n definišimo vreme zaustavljanja

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |x(t)| \geq n\},$$

pri čemu je $\inf \emptyset = \infty$. Iz ove definicije sledi da je $\tau_n \uparrow \infty$ s.i. kad $n \to \infty$ i da za svako $n \geq 1$ postoji i_n tako da je $\tau_n \in (t_{i_n - 1}, t_{i_n}]$. Takodje, očigledno je da je $t \wedge \tau_n \in (0, t_1]$ za $t \in (0, t_1)$, $n \in N$. Primenom formule Itôa na funkciju $W(s, x(s), i) = \lambda^{-\eta_i}(s) V(s, x(s), i)$ i osobine integrala Itôa (1.3), za $s \in (0, t_1]$ se dobija

$$EW(t \wedge \tau_n, x(t \wedge \tau_n), i) - EW(0^+, x(0^+), i) = \int_{0^+}^{t \wedge \tau_n} E\mathcal{L}W(s, x_s, i)\, ds.$$

Kako je

$$\mathcal{L}W(s, x_s, i) = -\eta_i \lambda^{-\eta_i}(s) \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} V(s, x(s), i) + \lambda^{-\eta_i}(s) \mathcal{L}V(s, x_s, i),$$

to je

$$\begin{aligned} E\left(\lambda^{-\eta_i}(t \wedge \tau_n) V(t \wedge \tau_n, x(t \wedge \tau_n), i)\right) - \lambda^{-\eta_i}(0) EV(0^+, x(0^+), i) \\ = \int_{0^+}^{t \wedge \tau_n} \lambda^{-\eta_i}(s) \left[-\eta_i \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(s, x(s), i) + E\mathcal{L}V(s, x_s, i)\right] ds. \end{aligned}$$

Odavde i iz (5.45) sledi

$$E[\lambda^{-\eta_i}(t \wedge \tau_n)V(t \wedge \tau_n, x(t \wedge \tau_n), i)] \geq \lambda^{-\eta_i}(0)EV(0^+, x(0^+), i).$$

Kad $n \to \infty$, na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji, prethodna relacija postaje

$$EV(t, x(t), i) \geq \frac{\lambda^{\eta_i}(t)}{\lambda^{\eta_i}(0)} EV(0^+, x(0^+), i), \quad t \in (0, t_1]. \tag{5.49}$$

Iz uslova (5.46) za $k = 1$, je

$$\begin{aligned} EV(t_1^+, x(t_1^+), i) &\geq d_{i1} EV(t_1, x(t_1), i) + \bar{d_{i1}} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} EV(t_1 + \theta, x(t_1 + \theta), i) \\ &\geq 2 \inf\{d_{i1}, \bar{d_{i1}}\} EV(t_1, x(t_1), i), \end{aligned}$$

a iz (5.49) i prethodne relacije,

$$\begin{aligned} EV(t_1^+, x(t_1^+), i) &\geq 2 \inf\{d_{i1}, \bar{d_{i1}}\} \lambda^{\eta_i}(t_1) EV(0^+, x(0^+), i) \\ &\geq 2 \inf\{d_{i1}, \bar{d_{i1}}\} \lambda^{\eta_i}(t_1) EV(0, x(0), i). \end{aligned} \tag{5.50}$$

Za $t \in (t_1, t_2]$, analogno postupku za dobijanje relacije (5.49) i primenom uslova (5.46), dobija se

$$\begin{aligned} &E\left(\lambda^{-\eta_i}(t \wedge \tau_n)V(t \wedge \tau_n, x(t \wedge \tau_n), i)\right) - \lambda^{-\eta_i}(t_1) EV(t_1^+, x(t_1^+), i) \\ &\quad = \int_{t_1^+}^{t \wedge \tau_n} \lambda^{-\eta_i}(s) \left[-\eta_i \frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} EV(s, x(s), i) + E\mathcal{L}V(s, x_s, i) \right] ds \\ &\quad \geq 0, \end{aligned}$$

odnosno,

$$EV(t, x(t), i) \geq \frac{\lambda^{\eta_i}(t)}{\lambda^{\eta_i}(t_1)} EV(t_1^+, x(t_1^+), i), \quad t \in (t_1, t_2].$$

Na osnovu (5.50), prethodna relacija postaje

$$EV(t, x(t), i) \geq 2 \inf\{d_{i1}, \bar{d_{i1}}\} \lambda^{\eta_i}(t) EV(0, x(0), i), \quad t \in (t_1, t_2].$$

Sada je iz (5.46),

$$\begin{aligned} EV(t_2^+, x(t_2^+), i) &\geq 2 \inf\{d_{i2}, \bar{d_{i2}}\} EV(t_2, x(t_2), i) \\ &\geq 2^2 \inf\{d_{i1}, \bar{d_{i1}}\} \inf\{d_{i2}, \bar{d_{i2}}\} \lambda^{\eta_i}(t_2) EV(0, x(0), i). \end{aligned}$$

Indukcijom, za $t \in (t_{m-1}, t_m]$ se zaključuje da je

$$EV(t, x(t), i) \geq 2^{m-1} \lambda^{\eta_i}(t) \prod_{k=1}^{m-1} \inf\{d_{ik}, \bar{d_{ik}}\} EV(0, x(0), i).$$

Kako je iz uslova (5.48) i (5.47)

$$\inf\{d_{ik}, \bar{d_{ik}}\} \geq (\lambda(\delta))^{(\gamma + \eta_i)K} \geq (\lambda(t_{k+1} - t_k))^{(\gamma + \eta_i)K},$$

na osnovu pretpostavke ($\mathbf{H_1}$) je

$$\prod_{k=1}^{m-1} d_{ik} \geq [\lambda(t_1 - 0)\lambda(t_2 - t_1)\ldots\lambda(t_{m-1} - t_{m-2})\lambda(t_m - t_{m-1})]^{(\gamma+\eta_i)K}$$
$$\geq (\lambda(t_m))^{(\gamma+\eta_i)K}.$$

Otuda, za $t \in (t_{m-1}, t_m]$ je

$$\begin{aligned} EV(t,x(t),i) &\geq 2^{m-1}\lambda^{\eta_i}(t)(\lambda(t_m))^{(\gamma+\eta_i)K}EV(0,x(0),i) \\ &\geq \lambda^{\eta_i}(t)(\lambda(t))^{(\gamma+\eta_i)K}EV(0,x(0),i). \end{aligned}$$

Konačno, na osnovu ($\mathbf{H_2}$) sledi

$$c_2E|x(t)|^p \geq EV(t,x(t),i)\lambda^{(K+1)\eta_i+\gamma K}(t)c_1E|x(0)|^p,$$

odnosno,

$$E|x(t)|^p \geq \frac{c_1}{c_2}\lambda^{(K+1)\eta_i+\gamma K}(t)E|\xi|^p, \quad t \geq 0,$$

čime je dokaz kompletan. $\diamondsuit$

Napomena 5.2.7 Teoreme 5.2.1-5.2.4 se mogu modifikovati za razmatranje stabilnosti impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina koje nemaju markovske prelaze, već samo impulse sa ili bez pomeraja. Ovo sledi iz činjenice da sistem (5.1) predstavlja N jednačina dobijenih za svako fiksirano stanje lanca Markova.

5.3 Impulsivne stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i markovskim prelazima

Razmotrimo specijalan oblik jednačine (5.1), *impulsivne stohastičke diferencijalne jednačine (ISDJ) sa kašnjenjem i markovskim prelazima*,

$$\begin{aligned} dx(t) &= F(t,x(t),x(t-\delta_1(t)),x(t-\delta_2(t)),...,x(t-\delta_s(t)),r(t))\,dt \\ &\quad + G(t,x(t),x(t-\delta_1(t)),x(t-\delta_2(t)),...,x(t-\delta_s(t),r(t))dw(t), \ \ t\geq 0, t\neq t_k, \\ \Delta x(t_k) &= I_k(t_k,x(t_k),x(t-\delta_1(t_k)),x(t_k-\delta_2(t_k)),...,x(t_k-\delta_s(t_k),r(t_k)), \ k=1,2,... \\ x(t) &= \xi, \ \ t\in[-\tau,0]. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Funkcije $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times s} \times S \to \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times s} \times S \to \mathbb{R}^{n\times m}$ i funkcije kašnjenja $\delta_i : \mathbb{R}_+ \to [0,\tau]$, za $i = 1,\ldots,s$ su Borel-merljive. Impulsivni skokovi procesa x u trenucima t_k su definisani preko funkcija $I_k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times s} \times S \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots$ Bez obzira na to koji su uslovi zadovoljeni za egzistenciju i jedinstvenost rešenja, pretpostavlja se da jednačina (5.51) ima jedinstveno rešenje koje je levo-neprekidno i desno ograničeno. Takodje, pretpostavlja se da jednačina ima trivijalno rešenje $x(t) \equiv 0$, tj. da je $F(t, 0, , \ldots, 0, i) \equiv 0$, $G(t, 0, , \ldots, 0, i) \equiv 0$ i $I_k(t, 0, \ldots, 0, i) \equiv 0$ za $k = 1, 2, \ldots$

Za $(t, \varphi, i) \in (t_{k-1}, t_k] \times PC^b_{\mathcal{F}_t}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \times S$, uvedimo smene

$$\begin{aligned} f(t, \varphi, i) &:= F(t, \varphi(0), \varphi(-\delta_1(t)), \ldots, \varphi(-\delta_s(t), i), \\ g(t, \varphi, i) &:= G(t, \varphi(0), \varphi(-\delta_1(t)), \ldots, \varphi(-\delta_s(t), i), \end{aligned} \tag{5.52}$$

kojima se jednačina (5.51) transformiše u jednačinu (5.1) (videti Poglavlje **??**).

Ako je $V \in C^{1,2}([-\tau, \infty) \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}_+)$, operator $LV : (t_{k-1}, t_k] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times s} \times S \to \mathbb{R}$, pridružen jednačini (5.51) je oblika

$$\begin{aligned} LV(t, x, y_1, \ldots, y_s, i) &= V_t(t, x, i) + V_x(t, x, i)\, F(t, x, y_1, \ldots, y_s, i) \\ &+ \frac{1}{2}\, tr\Big[G^T(t, x, y_1, \ldots, y_s, i)\, V_{xx}(t, x, i)\, G(t, x, y_1, \ldots, y_s, i)\Big] + \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} V(t, x, i), \end{aligned} \tag{5.53}$$

gde su γ_{ij} gustine prelaza lanca Markova $\{r(t), t \geq 0\}$.

Primetimo da je

$$LV(t, \varphi(0), \varphi(-\delta_1(t)), \ldots, \varphi(-\delta_s(t)), i) = \mathcal{L}V(t, \varphi, i). \tag{5.54}$$

Naredna dva tvrdjenja su posledice Teoreme 5.2.1 i Teoreme 5.2.2 i odnose se na opštu L^p-stabilnost jednačine (5.51). Kako su dokazi ovih tvrdjenja slični, biće dokazana samo druga teorema.

Teorema 5.3.1 *Neka je $p > 0$ i neka su zadovoljene pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$. Takodje, neka postoje konstante $d_{ik}, \bar{d_{ik}} \geq 0$, $d_{ik}^2 + \bar{d_{ik}}^2 \neq 0$, $\eta_i, \mu, \gamma > 0$, $q > 1$, $i \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, tako da je*

$$ELV(t, x, y_1, \ldots, y_s, i) \leq \eta_i \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(t, x, i) \tag{5.55}$$

za svako $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $i \in S$ i $x, y_l \in \mathbb{R}^n$, $l = 1, \ldots, s$, koji zadovoljavaju uslov

$$E\left[\min_{1 \leq i \leq N} V(t - \delta_l(t), y_l, i)\right] \leq q\lambda^\gamma(\tau) E\left[\max_{1 \leq i \leq N} V(t, x, i)\right], \quad l = 1, \ldots, s. \tag{5.56}$$

Ako za svako $i \in S$ važi

$$\begin{aligned} &EV(t_k^+, x + I_k(t_k, x, y_1, \ldots, y_l, i), i) \\ &\qquad \leq d_{ik} EV(t_k, x, i) + \bar{d_{ik}} \sup_{1 \leq l \leq s} EV(t_k - \delta_l(t), y_l, i), \end{aligned} \tag{5.57}$$

pri čemu je

$$1 < e^{(\gamma + \eta_i)\delta K} \leq q \leq \left(\max_{i \in S, 1 \leq k < +\infty} \{d_{ik} + \bar{d_{ik}} \lambda^\gamma(\tau)\}\right)^{-1}, \quad \sup_{1 \leq k < +\infty} \{t_k - t_{k-1}\} \leq \delta, \tag{5.58}$$

tada je jednačina (5.51) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Teorema 5.3.2 *Neka je $p > 0$ i neka su zadovoljene pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_2})$. *Takodje, neka postoje konstante $d_{ik}, \bar{d_{ik}} \geq 0$, $d_{ik}^2 + \bar{d_{ik}}^2 \neq 0$, $\rho_i, \mu, \gamma > 0$, $q > 1$, $i \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, tako da je*

$$ELV(t, x, y_1, \ldots, y_s, i) \leq -\rho_i \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(t, x, i) \tag{5.59}$$

za svako $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $i \in S$ i $x, y_l \in \mathbb{R}^n$, $l = 1, \ldots, s$, koji zadovoljavaju uslov

$$E\left[\min_{1\leq i\leq N} V(t-\delta_l(t), y_l, i)\right] \leq q\lambda^\gamma(\tau) E\left[\max_{1\leq i\leq N} V(t, x, i)\right], \quad l = 1, \ldots, s. \tag{5.60}$$

Ako za svako $i \in S$ važi

$$\begin{aligned} &EV(t_k^+, x + I_k(t_k, x, y_1, \ldots, y_l, i), i) \\ &\qquad \leq d_{ik} EV(t_k, x, i) + \bar{d_{ik}} \sup_{1\leq l\leq s} EV(t_k - \delta_l(t), y_l, i), \end{aligned} \tag{5.61}$$

pri čemu je

$$1 < \max_{i\in S, 1\leq k<+\infty} \{d_{ik} + \bar{d_{ik}} \lambda^\gamma(\tau)\} \leq q < e^{(\rho_i - \gamma)\mu K}, \quad \mu \leq \inf_{1\leq k<+\infty} \{t_k - t_{k-1}\}, \tag{5.62}$$

tada je jednačina (5.51) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Pošto se smenama (5.52) jednačina (5.51) transformiše u jednačinu (5.1), tvrdjenje se dokazuje primenom Teoreme 5.2.2.

Za $\varphi = \{\varphi(\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} \in PC_{\mathcal{F}_t}^b([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ najpre treba proveriti da li važi uslov Razumikhina (5.22). Imajući u vidu smene (5.52) i uslov (5.60) za $\varphi(0), \varphi(-d_l(t)) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, s$, dobija se

$$E\left[\min_{1\leq i\leq N} V(t-\delta_l(t), \varphi(-d_l(t)), i)\right] \leq q\lambda^\gamma(\tau) E\left[\max_{1\leq i\leq N} V(t, \varphi(0), i)\right], \; l = 1, \ldots, s.$$

Kako je ispunjen uslov (5.59), sledi da je

$$ELV(t, \varphi(0), \varphi(-\delta_1(t), \ldots, \varphi(-\delta_s(t), i) \leq -\rho_i \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(t, \varphi(0), i).$$

Na osnovu (5.54), ispunjen je i uslov (5.21), tj.

$$E\mathcal{L}V(t, \varphi, i) \leq -\rho_i \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(t, \varphi(0), i).$$

Kako su zadovoljene sve pretpostavke Teoreme 5.2.2, dokaz neposredno sledi na osnovu ove teoreme. $\diamondsuit$

Naredno tvrdjenje predstavlja direktnu posledicu Teoreme 5.3.2 i daje uslove L^p-stabilnosti koji se lakše proveravaju.

Posledica 5.3.1 *Neka je $p > 0$ i neka su zadovoljene pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_2})$. *Takodje, neka postoje konstante $\mu, \gamma > 0$, $q > 1$, $d_{ik}, \bar{d_{ik}} \geq 0$, $d_{ik}^2 + \bar{d_{ik}}^2 \neq 0$, ρ_{i_0}, ρ_{i_l}, pri čemu je $\rho_{i_0} > q\lambda^\gamma(\tau)\sum_{l=1}^s \rho_{i_l}$, $i \in S$, $l = 1, \ldots, s$, $k = 1, 2, \ldots$, tako da je*

$$
\begin{aligned}
&LV(t, x, y_1, \ldots, y_s, i) \\
&\qquad \leq -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\left(\rho_{i_0} \max_{1\leq i\leq N} V(t, x, i) - \sum_{l=1}^s \rho_{i_l} \min_{1\leq i\leq N} V(t - \delta_l(t), y_l, i)\right)
\end{aligned}
\tag{5.63}
$$

za svako $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $i \in S$ i $x, y_l \in \mathbb{R}^n$, $l = 1, \ldots, s$. Ako za svako $i \in S$ važi

$$
\begin{aligned}
&EV(t_k^+, x + I_k(t_k, x, y_1, \ldots, y_l, i), i) \\
&\qquad \leq d_{ik} EV(t_k, x, i) + \bar{d_{ik}} \sup_{1\leq l\leq s} EV(t_k - \delta_l(t), y_l, i),
\end{aligned}
\tag{5.64}
$$

gde je

$$
1 < \max_{i\in S, 1\leq k<+\infty}\{d_{ik} + \bar{d_{ik}}\lambda^\gamma(\tau)\} \leq q < e^{(\rho_i - \gamma)\mu K} \tag{5.65}
$$

i

$$
\mu \leq \inf_{1\leq k<+\infty}\{t_k - t_{k-1}\}, \quad \rho_i = \rho_{i_0} - q\lambda^\gamma(\tau)\sum_{l=1}^s \rho_{i_l}. \tag{5.66}
$$

tada je jednačina (5.51) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Za one $x, y_l \in \mathbb{R}^n$, $l = 1, \ldots, s$ za koje važi uslov (5.60), iz uslova (5.63) se dobija

$$
\begin{aligned}
ELV(t, x, y_1, \ldots, y_s, i) &\leq -\rho_{i_0}\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} E \max_{1\leq i\leq N} V(t, x, i) \\
&\quad + \sum_{l=1}^s \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\rho_{i_l} E \min_{1\leq i\leq N} V(t - \delta_l(t), y_l, i) \\
&\leq -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\left[\rho_{i_0} - q\lambda^\gamma(\tau)\sum_{l=1}^s \rho_{i_l}\right] E \max_{1\leq i\leq N} V(t, x, i) \\
&\leq -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\left[\rho_{i_0} - q\lambda^\gamma(\tau)\sum_{l=1}^s \rho_{i_l}\right] EV(t, x, i).
\end{aligned}
$$

Kako je za $\rho_i = \rho_{i_0} - q\lambda^\gamma(\tau)\sum_{l=1}^s \rho_{i_l}$ zadovoljen uslov (5.59), tvrdjenje neposredno sledi na osnovu Teoreme 5.3.2. $\diamondsuit$

Naredno tvrdjenje se odnosi na opštu skoro izvesnu stabilnost jednačine (5.51).

Teorema 5.3.3 *Neka je $p \geq 1$ i neka su zadovoljene pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_2})$. *Takodje, neka je jednačina (5.51) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, tj. ispunjena je relacija (5.3). Ako postoje konstante $\zeta \in (0, \gamma)$ i $L > 0$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\zeta}(t)\, dt < \infty$ i*

$$
\begin{aligned}
&|F(t, x, y_1, \ldots, y_s, i)| \vee |G(t, x, y_1, \ldots, y_s, i)| \vee |I_k(t, x, y_1, \ldots, y_s, i)| \\
&\qquad \leq L\left(|x| + \sum_{l=1}^s \lambda^{-\frac{\gamma}{p}}(\delta_l(t))|y_l|\right)
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

za svako $i \in S$ i $t \geq 0$, tada je jednačina (5.51) skoro izvesno stabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Za dokaz tvrdjenja dovoljno je proveriti ispunjenost uslova (5.40). Na osnovu elementarne nejednakosti (1.20), uslova (5.67) i smena (5.52), dobija se

$$\begin{aligned}
E\Big[|f(t,\varphi,i)|^p + |g(t,\varphi,i)|^p + |I_k(t,\varphi(0),\varphi,i)|^p\Big] \\
&\leq 3L^p E\Big[|\varphi(0)| + \sum_{l=1}^{s} \lambda^{-\frac{\gamma}{p}}(\delta_l(t))|\varphi(\delta_l(t))|\Big]^p \\
&\leq 3L^p(s+1)^{p-1}\Big[E|\varphi(0)|^p + \sum_{l=1}^{s} \lambda^{-\gamma}(\delta_l(t))E|\varphi(\delta_l(t))|^p\Big] \\
&\leq 3(L(s+1))^p \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} \lambda^{-\gamma}(-\theta)E|\varphi(\theta)|^p.
\end{aligned}$$

S obzirom da su ispunjeni svi uslovi Teoreme 5.2.3, dokaz tvrdjenja direktno sledi na osnovu te teoreme. $\diamondsuit$

Sledeće tvrdjenje se odnosi na opštu L^p-nestabilnost jednačine (5.51). Dokaz se izostavlja, s obzirom da direktno sledi primenom smena (5.52) i Teoreme 5.2.4.

Posledica 5.3.2 *Neka je $p > 0$ i neka važe pretpostavke* $(\mathbf{H_1})$ *i* $(\mathbf{H_2})$. *Takodje, neka postoje konstante $d_{ik}, \bar{d_{ik}} \geq 0$, $d_{ik}^2 + \bar{d_{ik}}^2 \neq 0$, $\delta, \gamma > 0$, $\eta_i \geq 0$, $i \in S$, $k = 1, 2, \ldots$ tako da je zadovoljen uslov*

$$ELV(t,x,y_1,\ldots,y_s,i) \geq \eta_i \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(t,x,i), \tag{5.68}$$

za svako $t \geq 0$, $t \neq t_k$ $i \in S$ i $x, y_l \in \mathbb{R}^n$, $l = 1,\ldots,s$. Ako je za svako $i \in S$,

$$\begin{aligned}
EV(t_k^+, x + I_k(t_k,x,y_1,\ldots,y_l,i),i) \\
\geq d_{ik}EV(t_k,x,i) + \bar{d_{ik}} \sup_{1\leq l\leq s} EV(t_k - \delta_l(t), y_l, i),
\end{aligned} \tag{5.69}$$

pri čemu je

$$(\lambda(\delta))^{(\gamma+\eta_i)K} \leq \inf_{1\leq k\leq+\infty}\{d_{ik}, \bar{d_{ik}}\}, \qquad \sup_{0\leq k<+\infty}\{t_{k+1} - t_k\} \leq \delta, \tag{5.70}$$

tada je jednačina (5.51) L^p-nestabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Specijalan oblik jednačine (5.51) je *impulsivna stohastička diferencijalna jednačina sa markovskim prelazima* u kojoj koeficijenti jednačine ne zavise od prošlih stanja,

$$\begin{aligned}
dx(t) &= F(t,x(t),r(t))\,dt + G(t,x(t),r(t))dw(t), \quad t \geq 0,\, t \neq t_k, \\
\Delta x(t_k) &= I_k(t_k,x(t_k),r(t_k)),\ k = 1,2,... \\
x(t) &= \xi, \quad t \in [-\tau, 0]
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Početni uslov $x(0) = \xi$ je skoro izvesno ograničena $\mathcal{F}_0$-merljiva slučajna promenljiva iz $\mathbb{R}^n$. Funkcije $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}^{n\times m}$ i impulsivni skokovi $I_k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$ su Borel-merljivi. Kao i ranije, pretpostavlja se da postoji jedinstveno levo-neprekidno i desno ograničeno rešenje jednačine (5.71) i da je $F(t, 0, i) \equiv 0$, $G(t, 0, i) \equiv 0$, $I_k(t, 0, i) \equiv 0$ za $k = 1, 2, \ldots,$ tj. da jednačina (5.71) ima trivijalno rešenje, $x(t) \equiv 0$.

Za $V \in C^{1,2}([-\tau, \infty) \times \mathbb{R}^n \times S; \mathbb{R}_+)$, operator $LV : (t_{k-1}, t_k] \times \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}$, pridružen jednačini (5.71) je oblika

$$\begin{aligned} LV(t,x,i) &= V_t(t,x,i) + V_x(t,x,i)\, F(t,x,i) \\ &\quad + \frac{1}{2}\, tr\Big[G^T(t,x,i)\, V_{xx}(t,x,i)\, G(t,x,i)\Big] + \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} V(t,x,i). \end{aligned}$$

Naredno tvrdjenje predstavlja direktnu posledicu Teoreme 5.3.1, pa se zato dokaz izostavlja.

Posledica 5.3.3 *Neka je $p > 0$ i neka su ispunjene pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$. Takodje, neka postoje konstante $\mu, \gamma > 0$, $d_{ik}, \bar{d_{ik}} \geq 0$, $d_{ik}^2 + \bar{d_{ik}}^2 \neq 0$, ρ_{i_0}, ρ_{i_l}, pri čemu je $\rho_{i_0} > q\lambda^{\gamma}(\tau) \sum_{l=1}^{s} \rho_{i_l}$, $i \in S$, $l = 1, \ldots, s$, $k = 1, 2, \ldots$ tako da je*

$$LV(t,x,i) \leq -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \rho_i \max_{1 \leq i \leq N} V(t,x,i)$$

za svako $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $i \in S$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Ako za svako $i \in S$, važi

$$EV(t_k^+, x + I_k(t_k, x, i), i) \leq d_{ik} EV(t_k, x, i),$$

pri čemu je

$$1 < \max_{i \in S, 1 \leq k < +\infty} d_{ik} \leq q < e^{(\rho_i - \gamma)\mu K}, \quad \mu \leq \inf_{1 \leq k < +\infty} \{t_k - t_{k-1}\},$$

tada je jednačina (5.71) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Sledeće tvrdjenje neposredno sledi iz Posledice 5.3.2.

Posledica 5.3.4 *Neka je $p > 0$ i neka važe pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$. Takodje, neka postoje konstante $d_{ik} > 0$, $\delta, \gamma > 0$, $\eta_i \geq 0$, $i \in S$, $k = 1, 2, \ldots,$ tako da je ispunjen uslov*

$$ELV(t,x,i) \geq \eta_i \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} EV(t,x,i)$$

za svako $t \geq 0$, $t \neq t_k$ i $\in S$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Ako je za svako $i \in S$,

$$EV(t_k^+, x + I_k(t_k, x, i), i) \geq d_{ik} EV(t_k, x, i),$$

pri čemu je

$$\lambda^{(\gamma+\eta_i)K}(\delta) \leq \inf_{1 \leq k \leq +\infty} d_{ik}, \qquad \sup_{0 \leq k < +\infty} \{t_{k+1} - t_k\} \leq \delta,$$

tada je jednačina (5.71) L^p-nestabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Za $p \geq 1$, prvi deo narednog tvrdjenja o skoro izvesnoj stabilnosti jednačine (5.71) je direktna posledica Teoreme 5.2.3. Štaviše, uz dodatni uslov, skoro izvesna stabilnost će važiti i za $0 < p < 1$.

Posledica 5.3.5 *Neka je $p \geq 1$ i neka su ispunjene pretpostavke $(\mathbf{H_1})$ i $(\mathbf{H_2})$. Takodje, neka je jednačina (5.71) L^p-stabilna reda γ u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$, tj. ispunjena je relacija (5.3). Ako postoje konstante $\zeta \in (0, \gamma)$ i $L > 0$ tako da je $\int_0^\infty \lambda^{-\zeta}(t)\, dt < \infty$ i ako je*

$$|F(t,x,i)| \vee |G(t,x,i)| \vee |I_k(t,x,i(| \leq L|x| \tag{5.72}$$

za svako $i \in S$ i $t \geq 0$, tada je jednačina (5.71) skoro izvesno stabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Štaviše, za $0 < p < 1$, ako su ispunjeni svi prethodni uslovi i ako je

$$\left(\left[\frac{\tau}{\mu} \right] + 1 \right) < L^{-p}, \tag{5.73}$$

gde je $\mu \leq \inf_{0 \leq k < +\infty} \{t_{k+1} - t_k\}$, tada je jednačina (5.71) skoro izvesno stabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t)$.

Dokaz. Za $p \geq 1$, dokaz tvrdjenja neposredno sledi na osnovu Teoreme 5.2.3. Dokažimo da tvrdjenje važi i za $0 < p < 1$.

Na osnovu uslova (5.73), može se naći dovoljno malo $\sigma > 0$ takvo da je

$$L^p(\sigma^p + C_p \sigma^{\frac{p}{2}} + v) < 1, \tag{5.74}$$

gde je $v = \left[\frac{\tau}{\mu}\right] + 1$ i C_p konstanta iz Burkhölder-Davis-Gundy nejednakosti za $0 \leq p \leq 1$.

Primenom elementarne nejednakosti (1.20), a zatim uslova (5.72), relacije (5.3) i Burkhölder-Davis-Gundy nejednakosti, za $n = 1, 2, \ldots$ se dobija

$$\begin{aligned}
E\Bigg[\sup_{(n-1)\sigma \leq t \leq n\sigma} |x(t)|^p \Bigg] \\
&\leq E|x((n-1)\sigma)|^p + E\left(\int_{(n-1)\sigma}^{n\sigma} |F(s,x_s,i)|\, ds \right)^p \\
&\quad + E \sup_{(n-1)\sigma \leq t \leq n\sigma} \left| \int_{(n-1)\sigma}^{n\sigma} G(s,x_s,i)\, dw(s) \right|^p \\
&\quad + E\left(\sum_{t \leq t_k \leq t+\tau} |I_k(t_k, x(t_k), x_{t_k}, i)| \right)^p \\
&\leq M\lambda^{-\gamma}((n-1)\sigma) + (L\sigma)^p E\Bigg[\sup_{(n-1)\sigma \leq t \leq n\sigma} |x(t)|^p \Bigg] \\
&\quad + C_p E\left(\int_{(n-1)\sigma}^{n\sigma} |G(s,x_s,i)|^2\, ds \right)^{\frac{p}{2}} + v \sup_{t \leq t_k \leq t+\tau} E|I_k(t_k, x(t_k), x_{t_k}, i)|^p \\
&\leq M\lambda^{-\gamma}((n-1)\sigma) + L^p(\sigma^p + C_p\sigma^{\frac{p}{2}} + v) E\Bigg[\sup_{(n-1)\sigma \leq t \leq n\sigma} |x(t)|^p \Bigg].
\end{aligned}$$

Na osnovu (5.74), sledi

$$E\Big[\sup_{(n-1)\sigma\le t\le n\sigma}|x(t)|^p\Big]\le M\,\kappa\,\lambda^{-\gamma}((n-1)\sigma),$$

pri čemu je $\kappa=\big[1-L^p(\sigma^p+C_p\sigma^{\frac{p}{2}}+v)\big]^{-1}$. Za proizvoljno $\delta\in(0,\gamma)$, na osnovu nejednakosti Chebysheva, prethodne relacije i pretpostavke $(\mathbf{H_1})$, dobija se

$$\begin{aligned}P\Big\{\sup_{(n-1)\sigma\le t\le n\sigma}|x(t)|^p\ge\lambda^{-(\gamma-\zeta)}(n\sigma)\Big\}&\le\lambda^{(\gamma-\zeta)}(n\sigma)E\left[\sup_{(n-1)\sigma\le t\le n\sigma}|x(t)|^p\right]\\&\le M\,\kappa\,\lambda^{(\gamma-\zeta)}(n\sigma)\lambda^{-\gamma}((n-1)\sigma)\\&\le M\,\kappa\frac{\lambda^{(\gamma-\zeta)}(n\sigma)}{\lambda^{\gamma}(n\sigma)\,\lambda^{\gamma}(\sigma)}\le M\,\kappa\,\lambda^{-\gamma}(\sigma)\,\lambda^{-\zeta}(n\sigma).\end{aligned}$$

Za $(n-1)\sigma\le t\le n\sigma$ je $\lambda^{-\zeta}(n\sigma)\le\lambda^{-\zeta}(t)$. Kako je $\int_0^\infty\lambda^{-\zeta}(t)\,dt<\infty$, skoro izvesna stabilnost jednačine (5.71) se dokazuje na osnovu Borel-Cantellijeve leme kao u drugom delu dokaza Teoreme 5.2.3. $\diamondsuit$

Napomena 5.3.1 Može se primetiti da za $0<p<1$, iz uslova (5.73) sledi da je jednačina (5.71) skoro izvesno stabilna u odnosu na proizvoljnu decay-funkciju ako je μ dovoljno veliko, tj. ako se impulsi javljaju dovoljno retko.

5.4 Primeri

U ovom Poglavlju se razmatraju primeri kojima se ilustruju prethodni teorijski rezultati. Preciznije, postavljaju se dovoljni uslovi opšte skoro izvesne stabilnosti i L^p-stabilnosti impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem i markovskim prelazima. S obzirom na koeficijente razmatranih jednačina, ispituju se logaritamska i polinomijalna skoro izvesna i L^p-stabilnost.

Primer 5.4.1 Razmotrimo logaritamsku L^p-stabilnost jednodimenzionalne semilinearne impulsivne stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i markovskim prelazima,

$$\begin{aligned}&dx(t)=\alpha(r(t))x(t)\,dt+g(t,x(t-\tau),r(t))\,dw(t),\quad t\ge0,\quad t\ne t_k,\\&\Delta x(t_k)=-0.4\Big(1+\frac{1}{k^2}\Big)x(t_k),\quad k=1,2,\ldots,\end{aligned}\tag{5.75}$$

gde je je $\{r(t),\,t\ge0\}$ levo-neprekidan lanac Markova koji uzima vrednosti iz skupa stanja $\{1,2\}$, sa generatorom

$$G=\begin{bmatrix}-3&3\\1&-1\end{bmatrix},$$

koji je nezavisan od skalarnog Brownovog kretanja w. Neka je $x_0 = \xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0], \mathbb{R})$, $t_k - t_{k-1} = 0.4$, $k = 1, 2, \ldots$, i

$$\begin{aligned}
\alpha(1) &= -\frac{a}{7(1+t)(1+\ln(1+t))}, \quad \alpha(2) = -\frac{5}{1+t},\\
g(t,x,y,1) &= \frac{t}{4(1+t)^2(1+\ln(1+t))}\ln(1+|y|),\\
g(t,x,y,2) &= \frac{1}{(1+t)^2}\Big(1 - e^{-|y|}\Big).
\end{aligned}$$

gde je parametar $a \in \mathbb{R}_+$.

Ako je funkcija Lyapunova $V(t,x,1) = V(t,x,2) = |x|^p$, uslov (5.64) se svodi za $i = 1$ i $i = 2$ na

$$\begin{aligned}
E\Big|x - 0.4\Big(1 + \frac{1}{k^2}\Big)x\Big|^p &\le E|x|^p\Big|1 - 0.4\Big(1 + \frac{1}{k^2}\Big)x\Big|^p\\
&\le 0.6^p E|x|^p + E|y|^p
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$d_{1k} = d_{2k} = 0.6^p, \quad \bar{d}_{1k} = \bar{d}_{2k} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Otuda, iz uslova (5.65) za $\lambda(t) = 1 + \ln(1+t)$ je

$$q = 0.6^p + (1 + \ln(1+\tau))^\gamma > 1. \tag{5.76}$$

Kako je $\psi(t) = \dfrac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} = \dfrac{1}{(1+t)(1+\ln(1+t))} < 1$, to je

$$|g(t,x,y,1)|^2 \le \frac{t^2\ln^2(1+|y|^2)}{16(1+t)^4\ln^2(1+t)} \le \psi(t)\frac{|y|^2}{16}.$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.23) je

$$\begin{aligned}
LV(t,x,y,1) &= -\frac{ap}{7(1+t)(1+\ln(1+t))}|x|^p + \frac{1}{2}p(p-1)|x|^{p-2}|g(t,x,y,1)|^2\\
&\le -\frac{ap}{7}\psi(t)|x|^p + \frac{1}{32}p(p-1)\psi(t)|x|^{p-2}|y|^2 \qquad (5.77)\\
&\le -\frac{ap}{7}\psi(t)|x|^p + \frac{1}{32}(p-1)(p-2)\psi(t)|x|^p + \frac{1}{16}(p-1)\psi(t)|y|^p\\
&= \Big(-\frac{ap}{7} + \frac{1}{32}(p-1)(p-2)\Big)\psi(t)|x|^p + \frac{1}{16}(p-1)\psi(t)|y|^p.
\end{aligned}$$

Prema tome, za $i = 1$ je ispunjen uslov (5.63), odnosno, važi

$$LV(t,x,y,1) \le -\rho_{10}\beta\psi(t)|x|^p + \rho_{11}\psi(t)|y|^p = -\psi(t)(\rho_{10}|x|^p - \rho_{11}|y|^p),$$

za

$$\rho_{10} = \frac{ap}{7} - \frac{1}{32}(p-1)(p-2) > 0, \quad \rho_{11} = \frac{1}{16}(p-1) > 0. \tag{5.78}$$

Slično, s obzirom da je

$$|g(t,x,y,2)|^2 \leq \frac{1}{(1+t)^4}|y|^2 \leq \frac{1}{(1+t)^2(1+\ln(1+t))^2}|y|^2 \leq \psi(t)|y|^2,$$

to je

$$\begin{aligned} LV(t,x,y,2) &\leq -\frac{5p}{1+t}|x|^p + \frac{1}{2}p(p-1)\psi(t)|x|^{p-2}|y|^2 \\ &\leq \Big(-5p + \frac{1}{2}(p-1)(p-2)\Big)\psi(t)|x|^p + (p-1)\psi(t)|y|^p \\ &= -\psi(t)(\rho_{20}|x|^p - \rho_{21}|y|^p). \end{aligned} \tag{5.79}$$

Prema tome, uslov (5.63) je ispunjen ako je

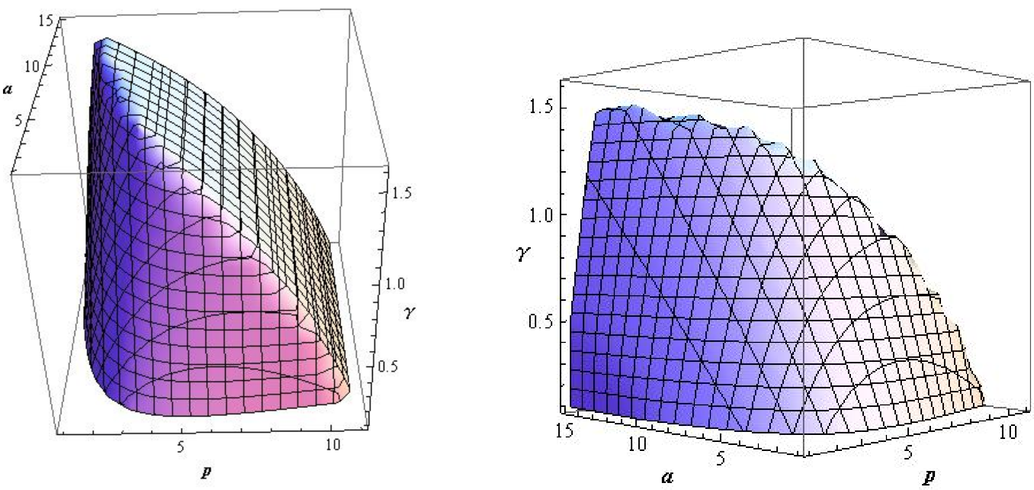
$$\rho_{20} = 5p - \frac{(p-1)(p-2)}{2} > 0, \quad \rho_{21} = p - 1 > 0. \tag{5.80}$$

Neka je

$$\rho_1 = \rho_{10} - q(1+\ln(1+\tau))^\gamma \rho_{11}, \quad \rho_2 = \rho_{20} - q(1+\ln(1+\tau))^\gamma \rho_{21}. \tag{5.81}$$

Tada je na osnovu Posledice 5.3.1 jednačina (5.75) L^p-stabilna u odnosu na decay-funkciju $\lambda(t) = 1 + \ln(1+t)$ ako je ispunjen uslov (5.65). Preciznije, imajući u vidu da je $\mu = 0.4$, iz (5.76), (5.78), (5.80) i (5.81) za logaritamsku L^p-stabilnost razmatrane jednačine neophodno je da bude ispunjen uslov (5.65), tj. da važi

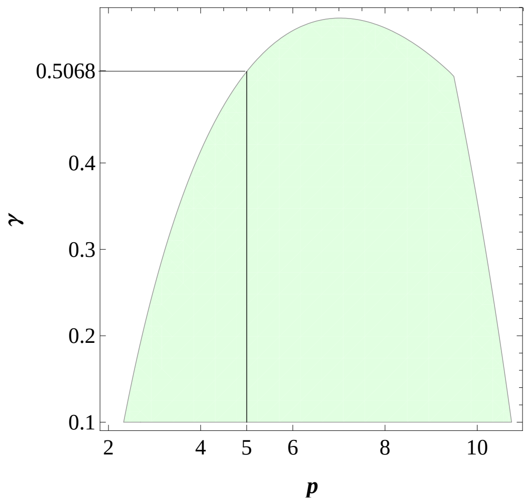
$$q < e^{(\rho_1-\gamma)0.4}, \quad q < e^{(\rho_2-\gamma)0.4}. \tag{5.82}$$



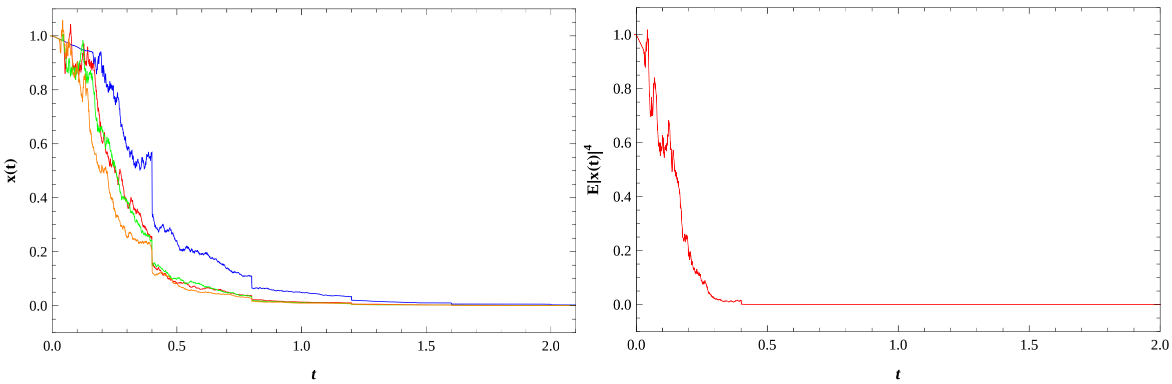
Slika 5.1: Oblast u kojoj su ispunjeni uslovi (5.78), (5.80) i (5.82) za $\tau = 1$

Konkretno, za $\tau = 1$ oblast logaritamske L^p-stabilnosti u kojoj su ispunjeni uslovi (5.78), (5.80) i (5.82), a koja zavisi od stepena stabilnosti $p > 1$, koeficijenta Lyapunova γ i parametra a, prikazana je na Slici 5.1. Iz prikazanog grafika se vidi da je za $a = 3$ moguće ispitati logaritamsku L^5-stabilnost jednačine (5.75), pa je za tako izabrano a na Slici 5.2 prikazan odnos stepena stabilnosti p i koeficijenta Lyapunova γ. Otuda, za $p = 5$ koeficijent Lyapunava ne prelazi 0.5068.

Za $p = 5$, $\tau = 1$, $t_k - t_{k-1} = 0,4$, $\xi = 1$, paralelni grafički prikaz prelaza Markova $r(t)$, trajektorije procesa $x(t)$ i impulsa $I_k(t_k)$ jednačine (5.75) prikazan je na Slikama 5.4–5.6, a četiri proizvoljne trajektorije procesa i moment rešenja $E|x(t)|^5$ na Slici 5.3.



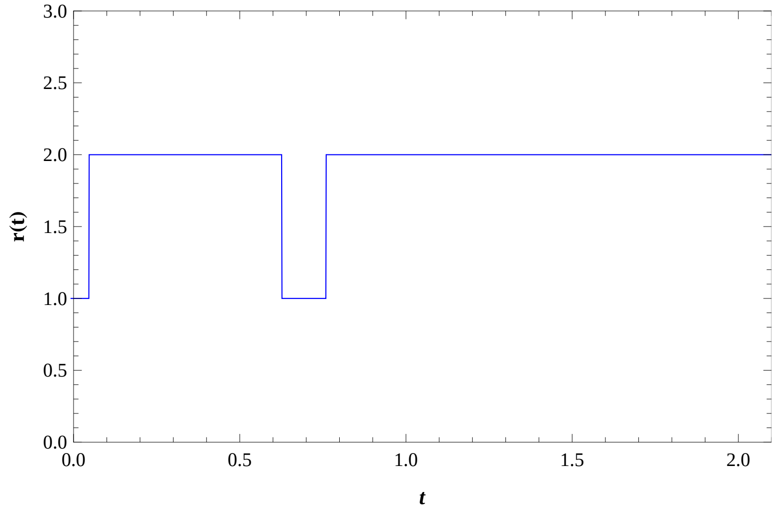
Slika 5.2: Oblast u kojoj su ispunjeni uslovi (5.78), (5.80), (5.82) za $\tau = 1$ i $a = 3$



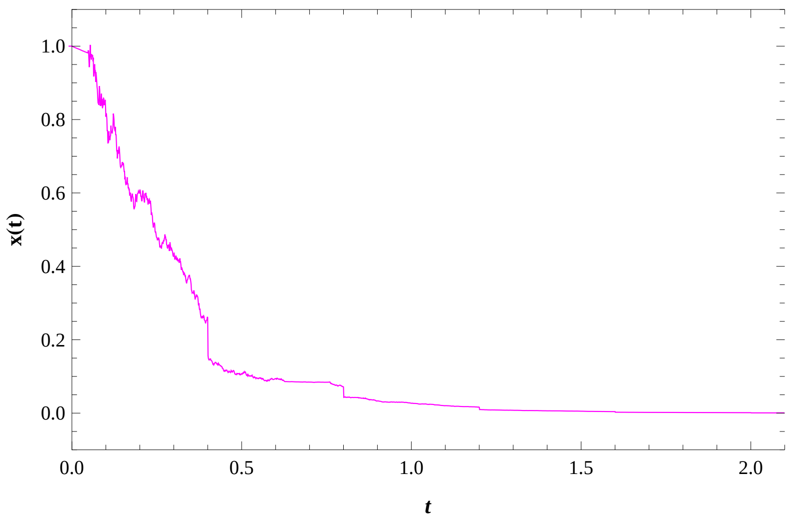
Slika 5.3: Trajektorije jednačine (5.75) (levo) i $E|x(t)|^5$ (desno) za $\tau = 1$, $\xi = 1$, $t_k - t_{k-1} = 0.4$

O logaritamskoj skoro izvesnoj stabilnosti jednačine (5.75) se ne može ništa zaključiti s obzirom da je $\int_0^\infty [1 + \ln(1+t)]^{-\zeta}\, dt = \infty$ za svako $\zeta > 0$.

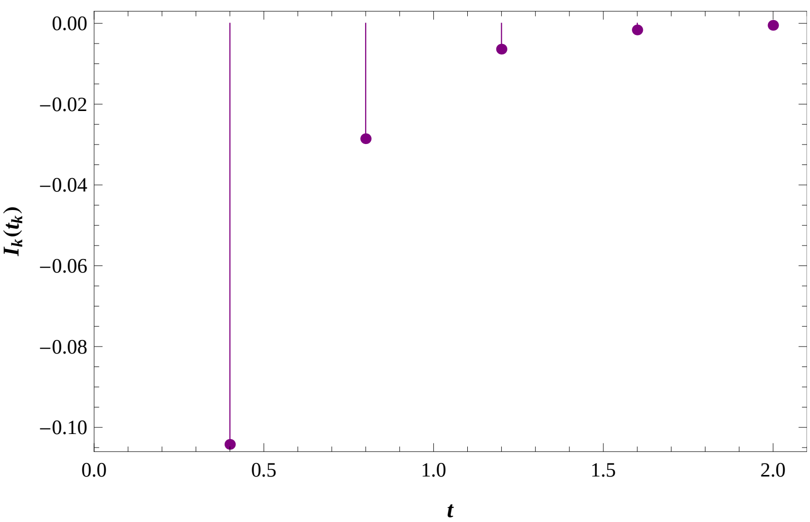
Napomena 5.4.1 Na osnovu (5.77) i (5.79) ne može se ništa zaključiti o polinomijalnoj L^p-stabilnosti jednačine (5.75), a tim pre ni o eksponencijalnoj L^p-stabilnosti ove jednačine, što opravdava svrsishodnost teorijskih rezultata ove glave.



Slika 5.4: Prelazi Markova jednačine (5.75) za $\tau = 1$, $\xi = 1$



Slika 5.5: Trajektorija jednačine (5.75) za $\tau = 1$, $\xi = 1$



Slika 5.6: Impulsi jednačine (5.75) za $\tau = 2$, $\xi = 1$, $t_k - t_{k-1} = 0.1$

Primer 5.4.2 Razmotrimo polinomijalnu L^p-stabilnost, $p \geq 1$ jednodimenzionalne stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem i markovskim prelazima,

$$
\begin{aligned}
&dx(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), r(t)\,dt + g(t, x(t), x(t-\tau), r(t)\,dw(t),\ t \geq 0,\ t \neq t_k,\\
&\Delta x(t_k) = -0.5\,x(t_k) + 0.3\,x(t_k - \tau), \quad k = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
\tag{5.83}
$$

gde je je $\{r(t),\ t \geq 0\}$ levo-neprekidan lanac Markova, nezavisan od skalarnog Brownovog kretanja w koji uzima vrednosti iz skupa stanja $\{1, 2\}$, sa generatorom

$$
G = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Početni uslov je $x_0 = \xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0], \mathbb{R})$ i $t_k - t_{k-1} = 0.1$, $k = 1, 2, \ldots$, tako da je $\delta = 0.1$. Koeficijenti jednačine su

$$
\begin{aligned}
f(t, x, y, 1) &= \frac{y}{10\sqrt{(3+t^4)}} - \frac{3x}{(1+t)^2}, \quad f(t, x, y, 2) = \frac{y}{13(1+t^2)} - \frac{3e^t x}{1+t},\\
g(t, x, y, 1) &= \frac{\ln(1+|y|)}{2(1+\ln(1+t))}, \quad g(t, x, y, 2) = \frac{1}{2}\ln\Big(1 + \frac{1}{1+t}\Big)y.
\end{aligned}
$$

Neka je funkcija Lyapunova $V(t, x, 1) = V(t, x, 2) = |x|^p$. Uslov (5.57) je

$$
E\Big|x - 0.5x + 0.3y\Big|^p = E\Big|0.5x + 0.1y\Big|^p \leq 2^{p-1}\Big(0.5^p|x|^p + 0.3^p|y|^p\Big),
$$

tako da je

$$
d_{1k} = d_{2k} = 0.5, \quad \bar{d}_{1k} = \bar{d}_{2k} = \frac{0.6^p}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots
$$

Kako koeficijenti jednačine (5.83) sugerišu ispitivanje polinomijalne L^p-stabilnosti, tj. $\lambda(t) = 1 + t$, iz uslova (5.58) sledi da mora biti

$$
q = \left(0.5 + \frac{0.6^p}{2}(1+\tau)^\gamma\right)^{-1} > 1. \tag{5.84}
$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.23) i uslova (5.56), dobija se

$$
\begin{aligned}
LV(t, x, y, 1) &\leq p|x|^{p-1}\left(\frac{|y|}{10} - 3|x|\right)\frac{1}{1+t} + \frac{p(p-1)}{4(1+t)}|y|^2|x|^{p-2}\\
&\leq -3p|x|^p\frac{1}{1+t} + \frac{p}{10(1+t)}\left(\frac{p-1}{p}|x|^p + \frac{1}{p}|y|^p\right)\\
&\quad + \frac{p(p-1)}{4(1+t)}\left(\frac{p-2}{p}|x|^p + \frac{2}{p}|y|^p\right)\\
&= \frac{1}{1+t}\left(-3p + \frac{p-1}{10} + \frac{(p-1)(p-2)}{4}\right)|x|^p + \frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{10} + \frac{p-1}{2}\right)|y|^p\\
&\leq \frac{1}{1+t}\Bigg[-3p + \frac{p-1}{10} + \frac{(p-1)(p-2)}{4}\\
&\quad + \left(\frac{1}{10} + \frac{p-1}{2}\right)\frac{(1+\tau)^\gamma}{0.5 + \frac{0.6^p}{2}(1+\tau)^\gamma}\Bigg]|x|^p.
\end{aligned}
$$

Prema tome, za $i = 1$ je ispunjen uslov (5.55) ako je

$$\eta_1 = -3p + \frac{p-1}{10} + \frac{(p-1)(p-2)}{4} + \left(\frac{1}{10} + \frac{p-1}{2}\right) \frac{(1+\tau)^\gamma}{0.5 + \frac{0.6^p}{2}(1+\tau)^\gamma} \\ > 0. \tag{5.85}$$

Analogno,

$$\begin{aligned} LV(t,x,y,2) &\leq p|x|^{p-1}\left(\frac{|y|}{13} - 3|x|\right)\frac{1}{1+t} + \frac{p(p-1)}{4(1+t)}|y|^2|x|^{p-2} \\ &\leq \frac{1}{1+t}\left(-3p + \frac{p-1}{13} + \frac{(p-1)(p-2)}{4}\right)|x|^p \\ &\quad + \frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{13} + \frac{p-1}{2}\right)|y|^p \\ &\leq \frac{1}{1+t}\Bigg[-3p + \frac{p-1}{13} + \frac{(p-1)(p-2)}{4} \\ &\quad + \left(\frac{1}{13} + \frac{p-1}{2}\right)\frac{(1+\tau)^\gamma}{0.5 + \frac{0.6^p}{2}(1+\tau)^\gamma}\Bigg]|x|^p, \end{aligned}$$

tako da je uslov (5.55) ispunjen za

$$\eta_2 = -3p + \frac{p-1}{13} + \frac{(p-1)(p-2)}{4} + \left(\frac{1}{13} + \frac{p-1}{2}\right) \frac{(1+\tau)^\gamma}{0.5 + \frac{0.6^p}{2}(1+\tau)^\gamma} \\ > 0. \tag{5.86}$$

Imajući u vidu da je $\delta = 0.1$, pored ispunjenosti uslova (5.84), (5.85), (5.86) zahteva se da je ispunjen i uslov (5.58), tj. da je

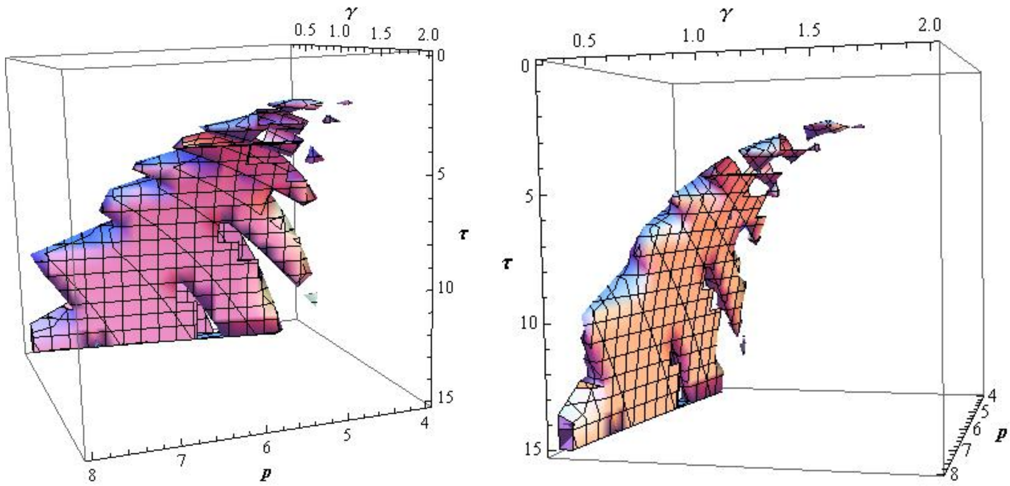
$$q \geq e^{(\gamma+\eta_1)0.1} > 1, \quad q \geq e^{(\gamma+\eta_2)0.1} > 1. \tag{5.87}$$

Tada, na osnovu Teoreme 5.3.1 jednačina (5.83) je L^p-stabilna u odnosu na polinomijalnu decay-funkciju $\lambda(t) = 1 + t$.

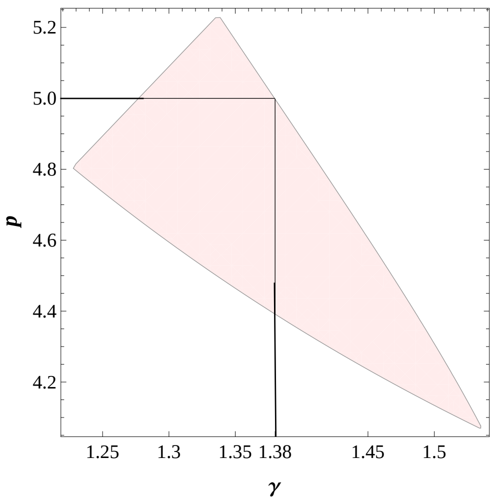
Konkretno, oblast polinomijalne L^p-stabilnosti u kojoj su ispunjeni uslovi (5.85), (5.86) i (5.87), a koja zavisi od stepena stabilnosti $p \geq 1$, koeficijenta Lyapunova γ i perioda kašnjenja τ, prikazana je na Slici 5.7. Specijalno za $\tau = 2$ na Slici 5.8 je prikazan odnos stepena stabilnosti p i koeficijenta Lyapunova γ. Prema tome, za $p = 5$ koeficijent Lyapunava ne prelazi 1.38.

Za $p = 5$, $\tau = 2$, $t_k - t_{k-1} = 0.1$, $\xi = 1$, paralelni grafički prikaz prelaza Markova $r(t)$, trajektorije procesa $x(t)$ i impulsa $I_k(t_k)$ jednačine (5.83) prikazan je na Slikama 5.10–5.12, a četiri proizvoljne trajektorije procesa i moment rešenja $E|x(t)|^5$ na Slici 5.9.

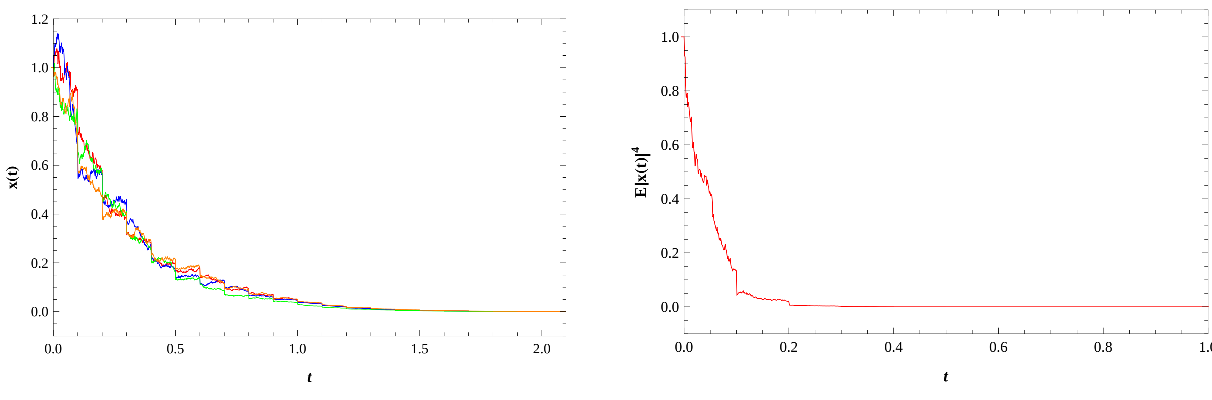
Napomena 5.4.2 Može se primetiti da je $\left(0.5 + \frac{0,6^p}{2}e^{\tau\gamma}\right)^{-1} = 0.897426 < 1$ za $\tau = 2$, $p = 5$ i $\gamma = 1.38$. Prema tome, za $\lambda(t) = e^t$ uslov (5.58) Teoreme 5.3.1 nije ispunjen, pa se o eksponencijalnoj L^p-stabilnosti, $p = 5$, jednačine (5.83) ne može ništa zaključiti. Samim tim, u potpunosti je opravdano razmatranje polinomijalne L^p-stabilnost ove jednačine.



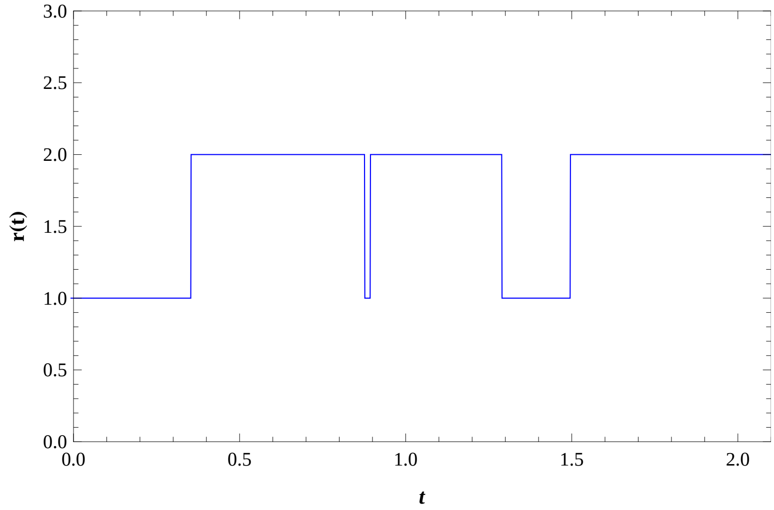
Slika 5.7: Oblast u kojoj su ispunjeni uslovi (5.85), (5.86) i (5.87)



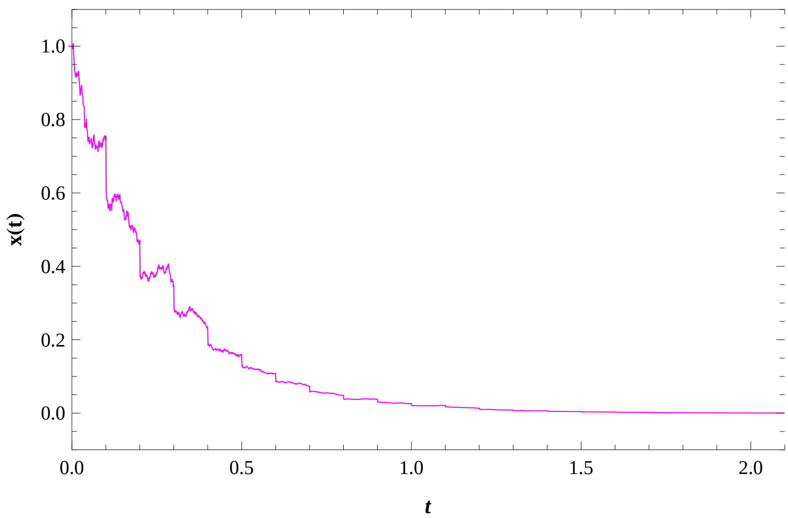
Slika 5.8: Oblast u kojoj su ispunjeni uslovi (5.85), (5.86), (5.87) za $\tau = 2$



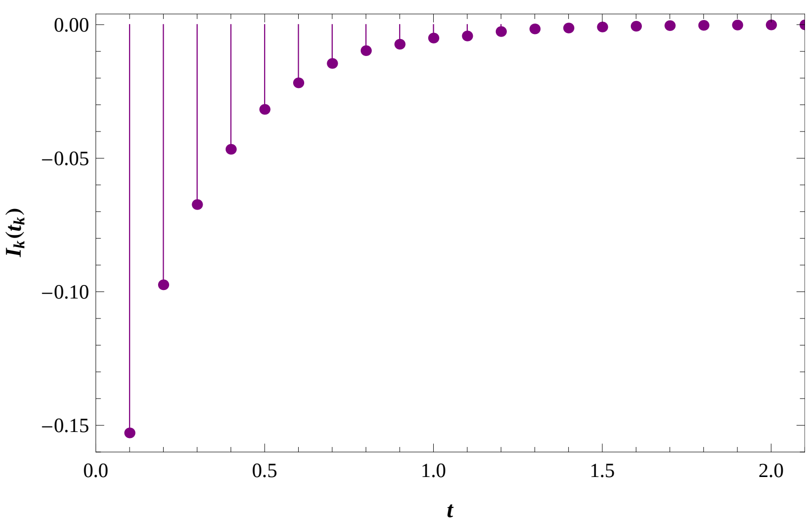
Slika 5.9: Trajektorije jednačine (5.83) (levo) i $E|x(t)|^5$ (desno) za $\tau = 2$, $\xi = 1$, $t_k - t_{k-1} = 0.1$



Slika 5.10: Prelazi Markova jednačine (5.83) za $\tau = 2$, $\xi = 1$



Slika 5.11: Trajektorija jednačine (5.83) za $\tau = 2$, $\xi = 1$



Slika 5.12: Impulsi jednačine (5.83) za $\tau = 2$, $\xi = 1$, $t_k - t_{k-1} = 0.1$

Zaključak

U ovoj disertaciji je razmatrana opšta L^p-stabilnost i skoro izvesna stabilnost više tipova stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina. Za dobijanje kriterijuma stabilnosti primenjene su metoda Lyapunova i metoda Razumikhina. Kako neke stohastičke diferencijalne jednačine nisu eksponencijalno stabilne, od velikog značaja je informacija o stabilnosti u odnosu na neku sporiju decay-funkciju, što je i bila motivacija za izradu ove doktorske disertacije.

Neka od budućih istraživanja bi se mogla odnositi na primenu metode Krasovskii-Lyapunova za ispitivanje opšte stabilnosti razmatranih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina. Na taj način bi se mogli dobiti drugačiji uslovi za stabilnost i decay-funkciju u odnosu na one koji su već dobijeni u disertaciji.

Rezultati iz ovog rada bi se mogli na odgovarajući način proširiti na različite klase stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina u odnosu na martingale i martingalne mere.

Ispitivanje opšte skoro izvesne stabilnosti, L^p-stabilnosti i L^p-nestabilnosti stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa impulsima i markovskim prelazima moglo bi se proširiti na stohastičke funkcionalne diferencijalne jednačine sa slučajno rasporedjenim impulsima i markovskim prelazima kojima se realnije opisuju procesi sa impulsivnom prirodom. Takodje, metoda Razumikhina i metoda Lyapunova bi se mogle primeniti za ispitivanje opšte L^p-stabilnosti i skoro izvesne stabilnosti hibridnih impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina kod kojih prelazi nisu definisani zakonima lanaca Markova, kao i na stohastičke neuralne mreže. Štaviše, ovim metodama bi se mogla ispitivati opšta stabilnost svih napred pomenutih tipova impulsivnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa martingalima i martingalnim merama.

Neka od budućih istraživanja bi se mogla odnositi na primenu rezultata teorije linearnih matričnih nejednakosti (eng. LMI) na ispitivanje opšte L^p-stabilnosti i skoro izvesne stabilnosti perturbovanih impulsivnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina sa markovskim prelazima i hibridnih perturbovanih impulsivnih stohastičkih funkcionalnih diferencijalnih jednačina.

Summary

In this thesis, pth moment and almost sure stability on a general decay rate for several types of stochastic functional differential equations were studied. By applying Razumikhin method and Lyapunov method stability criteria were obtained. Having in mind that some types of stochastic differential equations are not exponentially stable, the information about the stability with respect to a certain lower decay rate is very important, which was the motive for research in this paper.

Some future research could focus on application of Krasovskii-Lyapunov method for exploring the general decay stability of the already studied types of stochastic differential equations. In this way, we could get different stability and decay rate criteria with respect to those obtained in the thesis.

The research based on the modified results of this thesis could be continued for studying stability of various classes of stochastic functional differential equations with respect to martingale and martingale measures.

The research on pth moment and almost sure stability and pth moment instability on a general decay rate for stochastic functional differential equations with Markovian switching and delayed impulses could be extended to stochastic differential equations with random impulses and Markovian switching which more realistically describe processes impulsive in kind. Also, Razumikhin method and Lyapunov method could be applied in studying pth moment and almost sure stability on a general decay rate for hybrid impulsive stochastic differential equations with switching not defined by Markov chain law as well as stochastic neural networks. Moreover, these methods could be used for studying general decay stability of all the above mentioned types of impulsive stochastic differential equations with respect to martingale and martingale measures.

Some future research could be based on the application of LMI theory results to studying pth moment and almost sure stability on a general decay rate of perturbed impulsive stochastic functional differential equations with Markovian switching and hybrid perturbed impulsive stochastic functional differential equations.

Literatura

[1] S. Ale, B. Oyelami, Impulsive systems and Applications. Int. J. Math. Edu. Sci. Technol., 4 (2000) 539–544.

[2] M. Alwan, X. Liu, W. Xie, Existence, continuation, and uniqueness problems of stochastic impulsive systems with time delay, J. Franklin Inst. 347 (2010) 1317-1333.

[3] L. Arnold, Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, John Wiley, New York-London- Sydney, 1974.

[4] L. Arnold, Qualitative theory of stochastic non-linear systems, Stoch. Nonlinear Syst. in Physics, Chem. & Biol. , eds. L.Arnold & R.Lefever, Springer-Verlag, 8 (1981) 100–115.

[5] L. Arnold, W. Kleimann, Qualitative theory of stochastic systems, Probab. Anal. & Rel. Topics, ed. A.Barucha-Reid, Academic Press, NY, 3 (1981)

[6] L. Arnold, A formula connecting sample and moment stability of linear stochastic systems, SIAM J. Appl. Math. 44 (1984) 793–802.

[7] N.H. Arutunian, V.B. Kolmanovskii, Greep Theory of Nonhomogeneous Bodies, Nauka, Moscow, 1983.

[8] A. Bahar, X. Mao, Stochastic delay Lotka–Volterra model. J. Math. Anal. Appl. 292(2004) 364–380.

[9] G. Ballinger, X. Liu, Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 5(1999), 579-591.

[10] G. Basak, A. Bisi, M. Ghosh, Stability of a random diffusion with linear drift, J. Math. Anal. Appl. 202(2)(1996), 604-622.

[11] V.L. Bogomolov, Conntrol of power of hydrostation, Automat. Remote Control (4–5) (1941) 103–129.

[12] R. Bucy, Stability and positive supermartingale, J. Differential Equations 1 (1965) 151–155.

[13] D. Burkholder, B. Davis, R. Gundy, Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. 6th Berkley Symp. Math. Statis. Prob., Berkley, Univ. of California Press, 2 (1972) 223–240.

[14] T. Caraballo, K. Liu, On exponential stability criteria of stochastic partial differential equations, Stochastic Processes and their Appl. 83 (1999) 289–301.

[15] T. Caraballo, M.J. Garrido-Atienza, J. Real, Stochastic stabilization of differential systems with general decay rate, System Control Lett. 48 (2003) 397–406.

[16] M. Chappell, Bounds for average Lyapunov exponents of gradient stochastic systems, Lyapunov Exponents (Bremen, 1984), 308-321, Lecture Notes in Math. 1186, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1986.

[17] F. Chen, Global asymptotic stability in n-species non-autonomous Lotka-Volterra competitive systems with inffnite delays and feedback control, Appl. Math. Comput. 170 (2005) 1452-1468.

[18] P. Cheng, F. Deng, Global exponential stability of impulsive stochastic functional differential systems, Stat. Prob. Letters, 80 (2010) 1854-1862.

[19] P. Chow, Stability of non-linear stochastic evolution equations. J. Math. Anal. Appl. 89 (1982) 400–409.

[20] H. Cramer, On the theory of random processes, Ann. Math. 41 (1940) 215–230.

[21] B. Coleman, V.J. Mizel, On the stability of solutions of functional-differential equations. Arch. Rat. Mech. Anal. 3 (30) (1968) 173–196.

[22] R. Curtain, Stability of stochastic partial differential equations. J. Math. Anal. Appl. 79 (1981) 352–369.

[23] C. Dellacherie, Capacites et processus stochastiques, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[24] C. Dolean-Dade, P. Meyer, Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Lect. Notes Math. 124 (1970) 77–107.

[25] W. Doeblin, Sur l'équation de Kolmogoroff, Pli Cacheté à l'Académie des Sciences, Édité par B. Bru et M. Yor, CRAS, Paris, 331 (2000).

[26] J. Doob, Stochastic processes, John Wiley, New York, 1953.

[27] R. Driver, Existence and stability of solutions of a delay-differential system, Archive for Rational Mechanics and Analysis 10(1) 401–426.

[28] A.D. Drozdov, V.B. Kolmanovskii, Stability of a viscoelastic rod with a sporadic longitudinal load, J. Appl. Mech. Tech. Phys. 32(5) (1991) 772–779.

[29] A.D. Drozdov, V.B. Kolmanovskii, Stochasic stability of viscoelastic bars, Stoch. Anal. Appl. 10(3) (1992) 265–276.

[30] A.D. Drozdov, V.B. Kolmanovskii, Stability in Viscoelasticity, North-Holland, Amsterdam, 1994.

[31] L. Elsgolts, Stability of solution of differential-equations, Uspehi Mat. Nauk. 9:4 (1954) 95–112. (Russian)

[32] L. Elsgolts, S. Norkin, Introduction to the Theory and Applications of Differential Equations with Deviating Arguments, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, (105) 1973.

[33] T. Furumochi, Stability and boundedness in functional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 113 (1986) 473–489.

[34] H. Gao, Z. Fei, J. Lam, B. Du, Further results on exponential estimates of Markovian jump systems with modedependent time-varying delays, IEEE Trans. Automat. Contr. 56 (1)(2011) 223-229.

[35] L. Gao, p-Moment Stability of Stochastic Differential Delay Systems with Impulsive Jump and Markovian Switching, Math. Probl. Eng. 2013, 401538, doi:10.1155/2013/401538

[36] I. I. Gikhman, Certain differential equations with random functions, Ukr. Math. J. 2 (3) (1950) 45–69. (In Russian)

[37] I. I. Gikhman, On the theory of differential equations of random processes, Ukr. Math. J. 2 (4) (1950) 37–63. (In Russian)

[38] I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, Stochastic Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev, 1968. (In Russian)

[39] C. Grinstead, J. Snell, Itnroduction to Probability: Second Revisted Edition, AMS, 1997.

[40] K. Gu, J. Chen, V. Kharitonov, Stability of Time-Delay Systems, Springer, 2003.

[41] W. Hahn, Stability of motion, Springer, 1967.

[42] J. Hale, K. Meyer, A class of functional equations of neutral type, Memoir. Am. Math. Soc. (76) (1967) 1-65.

[43] J. Hale, Introduction to Functional Differential Equations, Springer, 1993.

[44] J. Hale, S. Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer, Berlin, 1993.

[45] J. Hale, S. Lunel, Effects of small delays on stability and control, Rapportnr. WS-528, Vrije University, Amsterdam, 1999.

[46] D. Hower, E. Perkins, Nonstandard construction of the stochastic integral and applications to stochastic differential equations, I, II, Trans. Amer. Math. Soc., 275 (1983), 1–58.

[47] Y. Hu, F. Wu, C. Huang, Robustness of exponential stability of a class of stochastic functional differential equations with infinite delay, Automatica 45 (2009) 2577–2588.

[48] R.Z. Has'minskii, Stochastic Stability of Differential Equations, Sijthoff and Noordfoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1980.

[49] Y. Huang, Q. Liu, Y. Liu, Global asymptotic stability of a general stochastic Lotka-Volterra system with delay, Appl. Math. Lett. 26 (1) (2013) 175-178.

[50] A. Ichikawa, Stability of semilinear stochastic evolution equations, J. Math. Anal. Appl. 90 (1982) 12–44.

[51] K. Itô, Stochastic integrals, Proc. Imperial Acad. Tokyo 20 (1944) 519–524.

[52] K. Itô, On a stochastic integral equation, Proc. Imperial Acad. Tokyo 22 (1946) 32–35.

[53] K. Itô, On stochastic differential equations, Memorial Math. Society 4 (1951) 1–51.

[54] K. Itô, On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J. 3 (1951) 55–65.

[55] K. Itô, On a formula of stochastic differentials, Mathematika, Sbornik perevodov inost. statei 3 (1959) 131–141.

[56] S. Janković, Diferencijalne jednacine, Prirodno-matematicki fakultet, Niš, 2002.

[57] S. Janković, M. Jovanović, The p-th moment exponential stability of neutral stochastic functional differential equations, Filomat (20) (1) (2006) 59–72.

[58] S. Janković, M. Jovanović, Analytic approximations of solutions to stochastic differential equations, Faculty of Science and Mathematics, University of Niš, 2008.

[59] S. Janković, J. Randjelović, M. Jovanović, Razumikhin-type exponential stability criteria of neutral stochastic functional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 355 (2) (2009) 811-820.

[60] S. Janković, G. Pavlović, Moment decay rates of stochastic differential equations with time-varying delay, Filomat 24(1) (2010) 115–132.

[61] C. Ji, D. Jiang, N. Shi, D. O'Regan, Existence, uniqueness, stochastic persistence and global stability of positive solutions of the logistic equation with random perturbation, Math. Meth. Appl. Sci 30 (2007) 77–89.

[62] Y. Ji, H. Chizeck, Controllability, stability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control, IEEE Trans. Automat. Contr. 35 (1990), 777-788.

[63] D. Jiang, N. Shi, A note on non-autonomus logistic equation with random perturbation, J. Math. Anal. Appl. 303 (2005) 164–172.

[64] D. Jiang, N. Shi, X. Li, Global stability and stochastic permanence of a non-autonomous logistic equation with random perturbation, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008) 588–597.

[65] R. Kalman, J. Bertram, Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov, J. Basic Engrg 88 (1960) 371–394.

[66] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[67] J. Kato, Stability problem in functional differential equations with inffnite delay, Funkcial. Ekvac. 21 (1978) 63–80.

[68] T. Kazangey, D.D. Sworder, Effective federal policies for regulating residential housing, Proc. Summer Computer Simulation Conference, 1971, 1120–1128.

[69] A. J. Khinchin, Correlation theory of stationar processes, Uspehi Matem. Nauk 5 (1939) 42–51. (in Russian)

[70] F. Klebaner, Itroduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial College Press, London, 1998.

[71] P. Kloeden, E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin, 1995.

[72] R.Z. Khasminskii, Necessary and sufficient conditions for the asymtptotic stability of linear stochastic systems, Theory Probability Appl. 12 (1967) 144–147.

[73] R.Z. Khasminskii, Stability of Systems of Differential Equations with Random Coefficients. Moscow, "Nauka", 1969.

[74] R.Z. Khasminskii and V.B. Kolmanovski, Stability of delay stochastic equations Theory Probab. & Math. Stat., Kiev 2 (1970) 111–120.

[75] V.B. Kolmanovskii, On the stability of stochastic systems with delay. Problemy Peredachi Informatsii 5 (4) (1969) 59–67. (in Russian)

[76] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, Stability and Periodic Modes of Control Systems with Aftereffect, Nauka, Moscow, 1981.

[77] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, Stability of Functional Differential Equations, Academic press, New York, 1986.

[78] V.B. Kolmanovskii, A.D. Myshkis, Applied Theory of Functional Differential Equations. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1992.

[79] V.B. Kolmanovskii, A.D. Myshkis, Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations, Springer, 1999.

[80] V.B. Kolmanovskii, L. Shaikhet, Construction of Lyapunov functionals for stochastic hereditary systems: A survey of some recent results, Math. Comput. Modelling 36 (2002) 691–716.

[81] V.B. Kolmanovskii, L. Shaikhet, About some features of general method of Lyapunov functional constructions, SACTA 6 (1) 2004.

[82] A. N. Kolmogorov, Basic notions in probability theory, ONTI, 1936. (in Russian)

[83] A. N. Kolmogorov, Analytic methods in probability theory, Uspehi Matem. Nauk, (1938) 5–41. (in Russian)

[84] N. N. Krasovskii, On the application of the second method of A. M. Lyapunov to equations with time delays [Russian]. Prikl. Mat. i Mekh. 20 (1956) 315-327.

[85] N. N. Krasovskii, On the asymptotic stability of systems with after-effect [Russian]. Prikl. Mat. i Mekh. 20 (1956) 513-518.

[86] N. N. Krasovskii, Some Problems in the Theory of Stability of Motion [Russian]. Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1959.

[87] Y. Kuang, H. Smith, Global stability for inffnite delay LotkaVolterra type systems, J. Differ. Equ. 103 (1993) 221-246.

[88] H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30 (1967) 209–245.

[89] H. Kushner, On the stability of stochastic dynamical systems. Proc. National Academy of Science 53 (1965) 8–12.

[90] V. Lakshmikantham, S. Leeda, A. Martynyuk, Stability Analysis of Nonlinear Systems, Marcel Dekker, 1989.

[91] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P.S. Simeonov, Theorem of Impulsive Differential Equations, World Scientific, 1989.

[92] J. LaSalle, Some extensions of Liapunov's second method, IRE Trans. Circ. Theor. 7 (1960) 520-527.

[93] J. LaSalle, S. Lefschetz, Stability by Lyapunov's Second Method with Applications,Academic, New York, 1961.

[94] V.A. Lebedev, On the existence of a solution of the stochastic equations with respect to a martingale and a stochastic mesure, Proc. Int. Sump. on Stoch. Diff. Equations, Vilnus, (1975), 69–89.

[95] A.M. Letov, Stability of Nonlinear Control Systems, Gostekhizdat, Moscow, 1955. (in Russian)

[96] X. Li, X. Fu, Stability analysis of stochastic functional differential equations with infinite delay and its application to recurrent neutral networks, J. Comput. Appl. Math. 234 (2) (2010) 407–417.

[97] X. Liao, X. Mao, Almost sure exponential stability of neutral differential difference equations with damped stochastic perturbations, Electronic J. of Prob, J. URL, (1) (8) (1986) 1-16.

[98] B. Liu, Stability of solutions for stochastic impulsive systems via comparison approach, IEEE Trans. Automat. Control, 53 (2008) 2128-2133.

[99] J. Liu, X. Liu, W. Xie, Existence and Uniqueness Results for Impulsive Hybrid Stochastic Delay Systems, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 17 (3) (2010) 37–54.

[100] J. Liu, X. Liu, W. Xie, Impulsive stabilization of stochastic functional differential equations, Appl. Math. Lett. 24 (3)(2011) 264-269.

[101] K. Liu, X. Xia, On the exponential stability in mean square of neutral stochastic functional differential equations, Syst. Contr. Lett. 37 (1999) 207–215.

[102] K. Liu, A. Chen, Moment decay rates of solutions of stochastic differential equations, Tohoku Math. J. 53 (2001) 81–93.

[103] K. Liu, X. Mao, Large time decay behavior of dynamical equations with random perturbation feature, Stoch. Anal. Appl. 19 (2) (2001) 295–327.

[104] K. Liu, Y. Shi, Razumikhin-type theorems of infinite dimensional stochastic functional differential equations, Systems, Control Modelling and Optimization, 202 (2006), 237–247.

[105] M. Liu, K. Wang, Global asymptotic stability of a stochastic LotkaVolterra model with infinite delays, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 17 (8) (2012) 3115-3123.

[106] X. Liu, G. Ballinger, Existence, uniqueness, and boundedness results for impulsive delay differential equations, Applicable Analysis 74 (12)(2000) 71-93.

[107] Y. Liu, X. Meng, F. Wu, General decay stability for stochastic functional differential equations with infinite delay, Int. J. Stoch. Anal. (2010), doi:10.1155/2010/875908.

[108] Z. Liu, J. Peng, p-moment stability of stochastic nonlinear delay systems with impulsive jump and Markovian switching, Stoch. Anal. Appl. 27 (5) (2009) 911–923.

[109] J. Luo, Fixed points and stability of neutral stochastic delay differential equations, J. Math. Anal. Appl., 334 (2007) 431–440.

[110] A. M. Lyapunov, The General Problem of the Stability of Motion (In Russian), Doctoral dissertation, Univ. Kharkov, 1892.

[111] X. Mao, Stability of stochastic differential equations with respect to semimartingales, Longman Scientific & Technical, 1991.

[112] X. Mao, Stability of Stochastic Differential Equations with respect to Semimartingales, Pitman Res. Notes Math. Ser. 251, Longman Scientific and Technical, England, 1991.

[113] X. Mao, Robustness of stability of nonlinear systems with stochastic delay perturbations, Syst. Contr. Lett. 19 (5) (1992) 391–400.

[114] X. Mao, Almost sure polynomial stability for a class of stochastic differential equations, Quart. J. Math. Oxford Ser. 43 (2) (1992) 339–348.

[115] X. Mao, Polynomial stability for perturbed stochastic differential equations with respect to semimartingales, Stochastic Processes Appl. 41 (1992) 101–116.

[116] X. Mao, Exponential stability in mean square of neutral stochastic differential functional equations, Syst. Contr. Lett. 26 (1995) 245–251.

[117] X. Mao, Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional differential equations, Stoch. Process. Appl. 65 (1996) 233-250.

[118] X. Mao, Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional differential, SIAM J. Math. Anal. 28 (1997) 389–401.

[119] X. Mao, Stochastic functional differential equations with Markovian switching, Functional Differential Equations 6 (1999) 375-396.

[120] X. Mao, Robustness of stability of stochastic differential delay equations with Markovian switching, Stabil. Contr. 3(1)(2000) 48-61.

[121] X. Mao, A note on the LaSalle-type theorems for stochastic differential delay equations, J. Math. Anal. Appl. 268 (2002) 125–142.

[122] X. Mao, Delay population dynamics and environmental noise, Stochast. Dynam. 5 (2) (2005) 149–162.

[123] X. Mao, M. Riedle, Mean square stability of stochastic Volterra integrodifferential equations, Syst. Contr. Lett. 55 (2006) 459–465.

[124] X. Mao, C. Yuan, Stochastic Differential Equations with Markovian Switching, Imperical college press, 2006.

[125] X. Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, Horvood, Chichester, UK, 2007. (Second edition).

[126] M. Mariton, Jump linear systems in automatic control, New York, Marcel Dekker, 1990.

[127] X. Meng, B. Yin, On the general decay stability of stochastic differential equations with unbounded delay, J. Korean Math. Soc., 49 (3) (2012) 515–536.

[128] P. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, Ilinois J. Math. 2 (1962) 193–205.

[129] P. Meyer, Decomposition of supermartingales; the uniqueness theorem, Ilinois J. Math. 7 (1963) 1–17.

[130] P. Meyer, Probability and potentials, Blaisdell, Waltham, 1966.

[131] P. Meyer, Un cours sur les intégrales stochastiques, Lecture Notes in Math. 511 (1976) 245–398.

[132] R. Miller, Nonlinear Volterra Integral Equations, Benjamin Press, Menlo Park, CA, 1971.

[133] D. Mitrinović, J. Pečarić, A. Fink, Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[134] S. Mohammed, Stochastic Functional Differential Equations.Pitman Research Notes in Mathematics 99, Boston, 1984.

[135] A.D. Myshkis, Razumikhins method in the qualitative theory of processes with delay, J. Appl. Math. Stoch. Anal. 8 (3) (1995) 233–247.

[136] B. Oyelami, Impulsive Systems and Applications to some Models. Ph.D. Thesis, Abubakar Tafawa Balewa University of Technology, Bauchi, Nigeria. 1999.

[137] B. Oyelami, S. Ale, M. Sesay, On Existence of Solutions and Stability with respect to Invariant Sets for Impulsive Differential Equations with variable times, Adv. Differ. Equat. Contr. Proc., 2008.

[138] B. Oyelami, S. Ale, Application of E^p-stability to impulsive financial model, Int. J. Appl. Math. Anal. Appl. 2 (1) (2013), 38–53.

[139] L. Pan, J. Cao, Exponential stability of impulsive stochastic functional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 382 (2011) 672-685.

[140] L. Pan, J. Cao, Exponential stability of stochastic functional differential equations with Markovian switching and delayed impulses via Razumikhin method, Advances in Difference Equations 2012 (61) (2012).

[141] P. Parks, Liapunov's method in automatic control theory, Control I Nov 1962 II Dec 1962.

[142] G. Pavlović, S. Janković, Moment exponential stability and integrability of stochastic functional differential equations, Appl. Math. Comput. 218 (2012) 6125-6134.

[143] G. Pavlović, S. Janković, Razumikhin-type theorems on general decay stability of stochastic functional differential equations with infinite delay, J. Comput. Appl. Math. 236(7) (2012) 1679-1690.

[144] G. Pavlović, S. Janković, The Razumikhin approach on general decay stability for neutral stochastic functional differential equations, J. Franklin Inst. 350 (8) (2013) 2124-2145.

[145] S. Peng, B. Jia, Some criteria on pth moment stability of impulsive stochastic functional differential equations, Stat. Prob. Letters 80 (1314) (115) (2010) 1085-1092.

[146] S. Peng, L Yang, Global Exponential Stability of Impulsive Functional Differential Equations via Razumikhin Technique, Abstr. Appl. Anal. 2010 (2010), 987372, doi:10.1155/2010/987372.

[147] G. Da Prato, J. Zabczyk, Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[148] J. Randjelović, S. Janković, On the *pth* moment exponential stability criteria of neutral stochastic functional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 266–280.

[149] B.S. Razumikhin, About stability of systems with delay, Prikladnaya Mat. Meh. 20: (4) (1956) 500–512. (Russian)

[150] B.S. Razumikhin, Method of stability investigation with post-action, DAN USSR 167 (6) (1966) 1234–1237.

[151] Y. Ren, S. Lu, N. Xia, Remarks on the existence and uniqueness of the solutions to stochastic functional differential equations with infinite delay, J. Comput. Appl. Math. 220 (2008) 364–372.

[152] Y. Ren, N. Xia, Existence, uniqueness and stability of the solutions to neutral stochastic functional differential equations with infinite delay, Appl. Math. Comput., 210 (2009) 72–79.

[153] D. Revuz, M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer, 1999.

[154] L. Shaikhet, Stability in probability of nonlinear stochastic hereditary systems, Dynam. Systems Appl. 4(2) (1995) 199–204.

[155] L. Shaikhet, About Lyapunov Functionals Construction for Difference Equations with Continuous Time, Appl. Math. Lett. 17 (2004) 985–991.

[156] L. Shaikhet, Some new aspects of Lyapunov type theorems for stochastic differential equations of neutral type, SIAM J. Control Optim. 48(7) (2010) 4481–4499.

[157] L. Shaikhet, Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Difference Equations, Springer, 2011.

[158] L. Shaikhet, Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations, Springer, 2013.

[159] Y. Shen, X. Liao, Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional differential equations, Chinese Sci. Bulletin, 44 (24) (1999) 2225-2228.

[160] P. Simeonov, D. Bainov, Systems with Impulsive Effects; Stability, Theory and Applications (Ellis Horwood), 1989.

[161] E. E. Sluckii, Sur les fonctiones éventelles continues intégrables et dérivables dans le sens stochastique, Comptes Rendus Acad. Sci. 187 (1928) 370–372.

[162] V.A. Solodovnikov, Use of operator method in studying of speed control of hydroturbines, Automa. i Telemeh. (5–20)(1941).

[163] R.L. Stratonovich, On a Method of Calculating Quantum Distribution Functions, Soviet Physics Doklady, Band 2, 1958, S. 41.

[164] D. Sworder, V. Robinson, Feedback regulators for jump parameter systems with state and control depend transution rate, IEEE Trans. Automat. Control, 18, 355–360.

[165] P. Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, Correspondance mathmatique et physique 10 (1838) 113-121.

[166] V. Volterra, Leons sur la Thorie Mathmatique de la Lutte pour la Vie. Gauthier-Villars, Paris (1931).

[167] N. Wiener, Differential spaces, J. Math. Phys. 2 (1923) 131–174.

[168] N. Wiener, The homogeneous chaos, Amer. J. Math. 60 (1930) 897–936.

[169] L. Wan, Q. Zhou, Stochastic Lotka–Volterra model with infinite delay, Stat. Prob. Lett., 79 (2009) 698–706.

[170] F. Wei, K. Wang, The existence and uniqueness of the solution for stochastic functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl., 331 (2007), 516–531.

[171] F. Wei, Y. Cai, Global Asymptotic Stability of Stochastic Nonautonomous Lotka-Volterra Models with Infinite Delay, Abstr. Appl. Anal. (2013), 351676, doi:10.1155/2013/351676.

[172] A. Willsky, B. Rogers, Stochastic stability research for complex power systems, DOE Contract, LIDS, MIT, Rep., ET–76–C–01–2295.

[173] F. Wu, S. Hu, C. Huang, Robustness of general decay stability of nonlinear neutral stochastic functional differential equations with infinite delay, Syst. Contr. Lett. 59 (2010) 195–202.

[174] F. Wu, S. Hu, Razumikhin-type theorems on general decay stability and robustness for stochastic functional differential equations, International J. Robust. Nonlinear Control, 22 (2011) 763–777.

[175] F. Wu, S. Hu, X. Mao, Razumikhin-type theorem for neutral stochastic functional differential equations with unbounded delay, Acta Math. Sci. 31 (4) (2011) 1245-1258.

[176] H. Wu, J. Sun, p-Moment stability of stochastic differential equations with impulsive jump and Markovian switching, Automatica 42 (2006) 1753-1759.

[177] S. Wu, B. Zhou, Existence and Uniqueness of Stochastic Differential Equations with Random Impulses and Markovian Switching under Non-Lipschitz Conditions, Acta Math. Sci., English Series 27 (3) (2011) 519-536.

[178] X. Wu, L. Yan, W. Zhang, L. Chen, Exponential Stability of Impulsive Stochastic Delay Differential Systems, Discrete Dynam. Nat. Soc. 2012, 296136, doi:10.1155/2012/296136.

[179] Y. Xu, F. Wu, Y. Tan, Stochastic LotkaVolterra system with infinite delay, J. Comput. Appl. Math. 232 (2) (2009) 472-480.

[180] Y. Xu, Stochastic Differential Equations with Infnite Delay and Applications, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, China, 2009.

[181] Z. Yang, E. Zhu, Y. Xu, Y. Tan, Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional differential equations with infinite delay, Acta Appl. Math. 111 (2) (2010) 219–231.

[182] J. Zabczyk, On the stability of infinite-dimensional linear stochastic systems, Banach Center Publ., PWN-Polish Scientific Publishers, 5 (1979).

[183] S. Zhou, S. Hu, Razumikhin-type theorems of neutral stochastic functional differential equations, Acta Math. Sci. 29 (1) (2009) 181–190.

[184] S. Zhou, Z. Wang, D. Feng, Stochastic functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 357 (2009) 416–426.

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	**монографска**
Тип записа, **ТЗ**:	**текстуални / графички**
Врста рада, **ВР**:	**докторска дисертација**
Аутор, **АУ**:	**Горица Павловић-Рајковић**
Ментор, **МН**:	**Светлана Јанковић**
Наслов рада, **НР**:	**ОПШТИ ТИП СТАБИЛНОСТИ СТОХАСТИЧКИХ ФУНКЦИОНАЛНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА**
Језик публикације, **ЈП**:	**српски**
Језик извода, **ЈИ**:	**енглески**
Земља публиковања, **ЗП**:	**Србија**
Уже географско подручје, **УГП**:	**Србија**
Година, **ГО**:	**2013**
Издавач, **ИЗ**:	**ауторски репринт**
Место и адреса, **МА**:	**Ниш, Вишеградска 33.**
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	**168 стр., граф. прикази**
Научна област, **НО**:	**математика**
Научна дисциплина, **НД**:	**Вероватноћа и статистика**
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	**Стохастички процеси, диференцијалне једначине, стабилност**
УДК	**519.21:517.968(043.3)**
Чува се, **ЧУ**:	**библиотека**
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	**У овој дисертацији је разматрана општа скоро извесна стабилност и L^p-стабилност више класа стохастичких функционалних диференцијалних једначина применом методе Размикина и методе Љапунова. Изложени су критеријуми опште скоро извесне и L^p-стабилности стохастичких диференцијалних једначина са временски зависним кашњењем применом методе Љапунова и критеријуми који су једноставнији за проверу, а односе се на општу скоро извесну и L^p-стабилност и L^p-интеграбилност стохастичких диференцијалних једначина са коначним кашњењем. Применом методе Размикина је испитана општа скоро извесна и L^p-стабилност стохастичких функционалних диференцијалних једначина са бесконачним кашњењем, стохастичке диференцијалне једначине са бесконачним временски зависним кашњењем и са дистрибутивним кашњењем, неутралне стохастичке функционалне диференцијалне једначине са коначним кашњењем, пертурбоване неутралне стохастичке диференцијалне једначине, стохастичке диференцијалне једначине са померeним импулсима и марковским прелазима и импилсивне стохастичке диференцијалне једначине са марковским прелазима. Применом методе Љапунова добијени су довољни услови L^p-нестабилности стохастичких функционалних диференцијалних једначина са померeним импулсима и марковским прелазима.**
Датум прихватања теме, **ДП**:	**16.9.2013.**
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Gorica Pavlović-Rajković**
Mentor, **MN**:	**Svetlana Janković**
Title, **TI**:	**GENERAL DECAY STABILITY OF STOCHASTIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2013**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**168 p. ; graphic representations**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**Probability and statistics**
Subject/Key words, **S/KW**:	**Stochastic processes, differential equations, stability**
UC	**519.21:517.968(043.3)**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		**This thesis considers *p*th moment and almost sure stability on a general decay rate of several types of stochastic functional differential equations by Razumikhin method and Lyapunov method. The general decay stability criteria obtained by Lyapunov method, for stochastic differential equations with time-varying lags, are presented in this paper. The paper also presents the criteria, easy to verify in practice, for *p*th moment and almost sure stability and *p*th moment integrability of stochastic differential equations with finite delay. The *p*th moment and almost sure stability on a general decay rate of stochastic functional differential equations with infinite delay, stochastic differential equations with infinite time-dependent delay and distributed delay, neutral stochastic functional differential equations with finite delay, perturbed neutral stochastic differential equations, stochastic functional differential equations with delayed impulses and Markovian switching and impulsive stochastic differential equations with Markovian switching, were studied by Razumikhin approach. The *p*th moment instability criteria of stochastic functional differential equations with delayed impulses and Markovian switching, were obtained by applying Lyapunov method.**
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		**September, 9th, 2013.**
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Општи тип стабилности стохастичких функционалних диференцијалних једначина

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, 12.5.2014.

Аутор дисертације:

Горица Павловић-Рајковић

Потпис докторанта:

Горица Павловић-Рајковић

Горица Павловић - Рајковић

Прилог 2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора:
Горица Павловић-Рајковић

Студијски програм:
математика

Наслов рада:
Општи тип стабилности стохастичких функционалних диференцијалних једначина

Ментор:
Светлана Јанковић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 12.5.2014.

Аутор дисертације:
Горица Павловић-Рајковић

Потпис докторанта:

Горица Павловић-Рајковић

Горица Павловић-Рајковић

Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла" да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом: Општи тип стабилности стохастичких функционалних диференцијалних једначина

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, 12.5.2014.

Аутор дисертације:
Горица Павловић-Рајковић

Потпис докторанта:

Горица Павловић-Рајковић

Горица Павловић-Рајковић