

На 339. тој седници Наставно–научног већа Математичког факултета, одржаној 24. фебруара 2017. године, одређени смо за чланове комисије за преглед и оцену докторске дисертације „Асимптотска својства решења једначина Емден–Фаулера и њихових уопштења” (тема одобрена на ванредној седници Наставно–научног већа Математичког факултета, одржаној 22. септембра 2014. године) кандидата Марије Микић. После прегледа рукописа који је кандидат предао комисији, подносимо Наставно–научном већу Математичког факултета следећи

## ИЗВЕШТАЈ

### 1. Биографија кандидата

Марија Микић рођена је 1987. године. Математички факултет у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, уписала је 2006. године. Дипломирала је 2010. године, са просечном оценом 9,50. Исте године уписала је Мастер студије на Математичком факултету у Београду, студијски програм Математика, модул Теоријска математика и примене и положила све испите са просечном оценом 10. Мастер рад под насловом „Асимптотска својства решења диференцијалних једначина” одбранила је 2011. године (ментор проф. др Јулка Кнежевић–Миљановић). Докторске студије на Математичком факултету у Београду, студијски програм Математика, уписала је 2011. године и положила испите предвиђене планом и програмом студија са просечном оценом 10. Од 2010. до 2012. радила је као сарадник у настави, а од 2012. до данас ради као асистент за научну област Диференцијалне једначине на Математичком факултету Универзитета у Београду.

### 2. Научни и стручни рад

#### 2.1. Објављене и прихваћене публикације у часописима са SCI листе

- [1] Jelena Golubović, Ana Protić, Mira Zečević, Biljana Otašević, Marija Mikić, Ljiljana Živanović, *Quantitative structure retention relationships of azole antifungal agents in reversed-phase high performance liquid chromatography*, *Talanta*, vol. 100, pp. 329–337, (2012), ISSN: 0039–9140, M21 (за област Chemistry Analytical), доступно на <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0039914012006601>.
- [2] Jelena Golubović, Ana Protić, Mira Zečević, Biljana Otašević, Marija Mikić, *Artificial neural networks modeling in ultra performance liquid chromatography method optimization of mycophenolate mofetil and its degradation products*, *Journal of Chemometrics*, vol. 28, no. 7, pp. 567–574, (2014), Online ISSN: 1099–128X, M21 (за област Mathematics Interdisciplinary Applications и Statistics & Probability), доступно на <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cem.2616/full>.
- [3] Đorđe Krtinić, Marija Mikić, *Note on asymptotical behavior of solutions of Emden-Fowler equation and the existence and uniqueness of solution of some Cauchy problem*, *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 18, no. 1, pp. 285–294 (2017), Print ISSN: 1787–2405, Online ISSN: 1787–2413, M23 (за област Mathematics), доступно на <http://mat76.mat.uni-miskolc.hu/mnotes/article/2019>.

## 2.2. Објављене и прихваћене публикације часописима који нису на SCI листи

- [4] Marija Mikić, *Note about asymptotic behaviour of positive solutions of superlinear differential equation of Emden–Fowler type at zero*, Kragujevac Journal of Mathematics, vol. 40, no. 1, pp. 105–112 (2016), Print ISSN: 1450–9628, Online ISSN: 2406–3045, M51, доступно на [https://imi.pmf.kg.ac.rs/kjm/pub/kjom40/kjm\\_40\\_1-9.pdf](https://imi.pmf.kg.ac.rs/kjm/pub/kjom40/kjm_40_1-9.pdf).

## 2.3. Рукописи који су у процесу рецензије

- [5] Đorđe Krtinić, Marija Mikić, *Refinement of Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex functions*.
- [6] Đorđe Krtinić, Marija Mikić, *Asymptotic behavior of solutions of sublinear Emden-Fowler equation in the neighborhood of zero*.
- [7] Đorđe Krtinić, Marija Mikić, *Existence and uniqueness of solution of some Cauchy problems for Emden-Fowler equation*.
- [8] Đorđe Krtinić, Marija Mikić, *On the Cauchy problem for a generalized Emden-Fowler type equation*.

## 2.4. Објављене публикације у зборницима

- [9] Marija Mikić, Marija Stamenković, *Three parametric testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative balance of heavy material particle on eccentrically rotating rough circle line*, Scientific review, series: Scientific And Engineering – Special Issue Nonlinear Dynamics S2, pp. 325–332 (2013), доступно на <http://afrodita.rcub.bg.ac.rs/~nds/304-Scientific%20Review%20Special%20Issue%20Milutin%20Malnkovic.pdf>.
- [10] Marija Mikić, Marija Stamenković, *Testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative equilibrium of heavy material particle on eccentrically rotating rough circle line, with constant angular velocity*, Proceedings of the 4th International Congress of Serbian Society of Mechanics, pp. 983–988 (2013), доступно на [http://is.fink.rs/podaci/Aleksandar\\_Nikolic/119/M1-13\\_BLAGOJEVIC\\_ROLE%20OF%20OSCILLATORY%20SHEAR%20INDEX%20IN%20PREDICTING\\_SCAN.pdf](http://is.fink.rs/podaci/Aleksandar_Nikolic/119/M1-13_BLAGOJEVIC_ROLE%20OF%20OSCILLATORY%20SHEAR%20INDEX%20IN%20PREDICTING_SCAN.pdf).

## 2.5. Саопштења на конференцијама

- [11] Marija Mikić, Marija Stamenković, *Three parametric testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative balance of heavy material particle on eccentrically rotating rough circle line, with constant angular velocity*, Symposium Nonlinear Dynamics, Milutin Milanković, Multidisciplinary and Interdisciplinary Applications, Beograd (2012).
- [12] Marija Mikić, Marija Stamenković, *Testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative equilibrium of heavy material particle on eccentrically rotating rough circle line, with constant angular velocity*, Fourth Serbian (29th Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Vrnjačka Banja (2013).
- [13] Marija Mikić, Marija Stamenković, *Three parametric testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative balance of heavy material particle on eccentrically rotating rough circle line*, 8th European Nonlinear Dynamics Conference, Beč (2014).
- [14] Marija Mikić, Julka Knežević–Miljanović, *Some asymptotic properties of second order differential equations*, XIII srpski matematički kongres, Vrnjačka Banja (2014), резиме доступан на [http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/smak/book\\_of\\_abstracts.pdf](http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/smak/book_of_abstracts.pdf).
- [15] Đorđe Krtinić, Marija Mikić, *Note of some asymptotic properties of solutions of Emden-Fowler equation*, VIII Symposium Mathematics and Applications, Beograd (2017), резиме доступан на [http://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija/s2017/apstrakt\\_krtinic\\_mikic\\_simpozijum\\_17.pdf](http://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija/s2017/apstrakt_krtinic_mikic_simpozijum_17.pdf).

## 2.6. Учешће на пројектима:

„Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала”, Министарство просвете, науке и технолошког развоја, по. 174001, (2011– ).

### 3. Структура дисертације

Докторска дисертација „Асимптотска својства решења једначина Емден–Фаулера и њихових уопштења” написана је на  $ix+57+vi$  стране. Структура рукописа је следећа:

**Насловне стране, подаци о члановима комисије, резиме, садржај**

**1. Увод**

**2. Понашање решења једначине  $y'' - x^a y^\sigma = 0$**

2.1. Случај  $\sigma < 0$

2.1.1. Понашање решења у околини нуле

2.1.2. Понашање решења дуж позитивног дела  $y$ -осе

2.1.2. Понашање решења дуж позитивног дела  $x$ -осе

2.2. Случај  $\sigma \in (0, 1)$

2.2.1. Понашање решења у околини координатног почетка

2.2.2. Постојање вертикалних асимптота

2.2.3. Понашање решења дуж позитивног дела  $y$ -осе

2.3. Случај  $\sigma > 1$

2.3.1. Помоћни резултати

2.3.2. Понашање решења у околини нуле

**3. Понашање решења једначине  $y'' + x^a y^\sigma = 0$**

3.1. Прираштај решења једначине Емден–Фаулера у случају  $\sigma < 0$

3.2. Понашање решења у околини координатног почетка

**4. Понашање решења уопштене једначине Емден–Фаулера**

4.1. Егзистенција и јединственост решења Кошијевог проблема за уопштену једначину Емден–Фаулера

4.2. Примене

**Литература** (број библиографских јединица је 17)

**Биографија аутора**

### 4. Приказ садржаја дисертације

**Глава 1** почиње описом проблема којима се бави квалитативна анализа обичних диференцијалних једначина. Након тога, даје се кратки историјски осврт на једначину Емден–Фаулера и описује мотивација за њено проучавање. Приказан је њен општи облик, као и канонски облици на које се своди одговарајућим сменама. На крају главе описана је структура садржаја дисертације.

**Глава 2** се бави проучавањем једног од канонских облика једначине Емден–Фаулера, једначином  $y'' - x^a y^\sigma = 0$ , за  $a, \sigma \in \mathbb{R}$ . Ова глава садржи најважније резултате ове дисертације. У првом делу је проучаван случај  $\sigma < 0$ . Показано је да је у случају  $\sigma \leq -1$  свако монотono решење дефинисано у некој десној околини нуле, као и да то не мора бити тачно ако је  $\sigma \in (-1, 0)$ . Такође, показано је да ако је  $a + \sigma + 1 \leq 0$  не постоји решење за које важи  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ , као и да за  $a + \sigma + 1 > 0$  постоји бесконачно много таквих решења. Уколико су решења дефинисана у некој десној околини нуле, показано је да је  $y$ -оса вертикална асимптота тих решења ако и само ако је  $a \leq -2$ , а након тога детаљно је изучено понашање решења у случају  $a > -2$ . Прецизније, показано је да уопштен Кошијев проблем  $y'' - x^a y^\sigma = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = c > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lambda \in [-\infty, \infty)$ :

– у случају  $a > -1$  има јединствено решење ако је  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ , а нема решења ако је  $\lambda = -\infty$ ;

– у случају  $-2 < a \leq -1$  нема решења ако је  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ , а има решења ако је  $\lambda = -\infty$  (у овом случају примером је показано да решења не морају бити јединствена).

Што се тиче понашања решења дуж позитивног дела  $x$ -осе, показано је да уопштен Кошијев проблем  $y'' - x^a y^\sigma = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y'(x) = \lambda \geq 0$ , где је  $x_0 > 0$ , има јединствено решење ако и само ако је  $\sigma \in (-1, 0)$ . Притом је коришћена битно различита математичка техника приликом доказа случаја  $\lambda > 0$ , односно случаја  $\lambda = 0$ . Доказан је и одговарајући резултат за леву граничну вредност у тачки  $x_0$ .

У другом делу ове главе проучен је случај  $\sigma \in (0, 1)$ . Показано је да уопштен Кошијев проблем  $y'' - x^\alpha y^\sigma = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lambda \in (0, \infty)$  нема решења ако је  $a + \sigma \leq -1$ , односно има јединствено решење ако је  $a + \sigma > -1$ . Проучен је и случај  $\lambda = 0$  и показана егзистенција решења, које овог пута не мора бити јединствено. Након тога, аналогно случају  $\sigma < 0$ , проучено је понашање решења дуж позитивног дела  $y$ -осе.

У трећем делу ове главе проучен је случај  $\sigma > 1$ . Прво је посматрана једначина  $u'' - Bu' + Au - |u|^{k-1}u = 0$ , за  $A \in \mathbb{R}$ ,  $B \neq 0$  и  $k > 1$  и описана је асимптотика њених решења у бесконачности у зависности од  $A$  и  $B$ . Након тога, на основу тих резултата, доказана је егзистенција решења једначине  $y'' - x^\alpha y^\sigma = 0$  са одређеним асимптотским понашањем у околини нуле. Показано је да:

- за  $a > -2$  и произвољно  $C > 0$  постоје решења ове једначине таква да је  $y(x) = C(1 + o(1))$  кад  $x \rightarrow 0^+$ , као и решења таква да је  $y(x) = Cx(1 + o(1))$  кад  $x \rightarrow 0^+$ , као и да сва решења имају неку од наведених асимптотика;
- ако је  $a = -2$ , онда за свако  $C > 0$  постоје решења таква да је  $y(x) = Cx(1 + o(1))$  кад  $x \rightarrow 0^+$ , као и да сва решења имају овакву асимптотику;
- ако је  $a < -2$ , онда о понашању решења одлучује вредност израза  $2a + \sigma + 3$ :
  - ако је  $2a + \sigma + 3 > 0$  онда за свако  $C > 0$  постоје решења таква да је  $y(x) = Cx(1 + o(1))$  кад  $x \rightarrow 0^+$  и сва решења имају овакву асимптотику;
  - ако је  $2a + \sigma + 3 = 0$  решење једначине у параметарском облику је  $x(\tau) = mC_2^2 e^{2\int (\frac{8}{\sigma+1}\tau^{\sigma+1} + \tau^2 + C_1)^{-\frac{1}{2}} d\tau}$ ,  $y(\tau) = nC_2\tau e^{\int (\frac{8}{\sigma+1}\tau^{\sigma+1} + \tau^2 + C_1)^{-\frac{1}{2}} d\tau}$ , где је  $(\frac{m}{n^2})^{\frac{\sigma-1}{2}} = 1$  и где су  $C_1$  и  $C_2$  константе, такве да  $C_2 > 0$  и да су изрази добро дефинисани;
  - ако је  $2a + \sigma + 3 < 0$ , онда о понашању решења одлучује вредност израза  $a + \sigma + 1$ :
    - ако је  $a + \sigma + 1 > 0$ , онда за произвољно  $C > 0$  постоје решења ове једначине, таква да је  $y(x) = Cx(1 + o(1))$  кад  $x \rightarrow 0^+$ ;
    - ако је  $a + \sigma + 1 = 0$  постоје решења таква да је  $y(x) = ((a+2) \ln x)^{\frac{1}{a+2}} \cdot x \cdot (1 + o(1))$  кад  $x \rightarrow 0^+$  и сва решења имају овакву асимптотику;
    - ако је  $a + \sigma + 1 < 0$  постоје решења таква да је  $y(x) = \left( \left( \frac{(a+2)(a+\sigma+1)}{(1-\sigma)^2} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} + o(1) \right) \cdot x^{\frac{a+2}{1-\sigma}}$  кад  $x \rightarrow 0^+$  и сва решења имају овакву асимптотику.

**Глава 3** се бави проучавањем једног од канонских облика једначине Емден-Фаулера, једначином  $y'' + x^\alpha y^\sigma = 0$ , за  $a, \sigma \in \mathbb{R}$ . У првом делу процењен је прираштај решења те једначине, а у другом на основу те процене показано је да у случају  $\sigma < 0$ ,  $a > -2$  и  $x_0 > 0$  постоји бесконачно решења те једначине дефинисаних на  $(0, x_0]$ , која задовољавају  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ . Такође, показано је да у случају  $\sigma < 0$ ,  $a \leq -2$  не постоје решења ове једначине која задовољавају  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ .

У **Глави 4** показана је егзистенција и јединственост решења уопштене једначине Емден-Фаулера, једначине облика  $y'' = q(x)f(y)$ . Ако је  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  нерастућа конвексна функција,  $\lambda > 0$  и  $q : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  таква да је  $\int_0^1 f\left(\frac{\lambda}{2} \cdot x\right) \cdot |q(x)| dx < \infty$  и  $\int_0^1 x \cdot \left(-f'\left(\frac{\lambda}{2} \cdot x\right)\right) \cdot |q(x)| dx < \infty$ , показана је егзистенција и јединственост решења уопштене једначине Емден-Фаулера, дефинисаног у некој десној околини нуле, за које важи  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lambda$ . Показана је независност наведених услова, као и одговарајуће тврђење за конкавне функције, а након тога низом примера показано је да су последице добијеног тврђења неколико резултата који су објављени у претходном периоду.

## 5. Закључак и предлог

Рукопис „Асимптотска својства решења једначина Емден-Фаулера и њихових уопштења” кандидата Марије Микић садржи битан научни допринос у Квалитативној анализи обичних диференцијалних једначина. Описани су услови под којима одговарајући гранични проблеми за једначину Емден-Фаулера имају решења, услови под којима су та решења јединствена и дата комплетна асимптотска слика тих решења. Кандидат се успешно бави научним радом у овој области, до сада је објавио три рада на SCI листи и један самосталан рад. Резултати два од наведених радова, као и три рукописа који су у процесу рецензије, представљају суштински део ове дисертације.

На основу изложеног, комисија предлаже да се рукопис „Асимптотска својства решења једначина Емден–Фаулера и њихових уопштења” кандидата Марије Микић **прихвати** као докторска дисертација, као и да се одреди комисија за њену одбрану.

Београд, 28.11.2017.

др Ђорђе Кртинић,  
доцент Математичког факултета у Београду (ментор)

---

проф. др Небојша Лажетић  
редовни професор Математичког факултета у Београду

---

проф. др Миодраг Спалевић  
редовни професор Машинског факултета у Београду

---