

Наставно–научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На 336. тој седници Наставно–научног већа Математичког факултета, одржаној 18. новембра 2016. године, одређени смо за чланове комисије за преглед и оцену докторске дисертације „Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним p -модификованим нормама и њиховим дуалима” кандидата Стефана Милошевића. После прегледа рукописа који је кандидат предао комисији, подносимо Наставно–научном већу Математичког факултета следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидата

Стефан Милошевић рођен је 1988. године. Математички факултет у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписао је 2007. године и дипломирао 2011. године, са просечном оценом 9,63. Исте године уписао је Мастер студије на Математичком факултету у Београду, студијски програм Математика, модул Теоријска математика и примене и положио све испите са просечном оценом 10. Мастер рад под насловом „Бесконечнодимензионе квантне групе” одбранио је 2012. године (ментор Зоран Ракић). Докторске студије на Математичком факултету у Београду, модул Теоријска математика и примене, уписао је 2012. године и положио испите предвиђене планом и програмом студија са просечном оценом 10. Од 2011. до 2014. године радио је као сарадник у настави, а од 2014. године до данас ради као асистент за научну област Математичка анализа на Математичком факултету Универзитета у Београду.

2. Научни и стручни рад

2.1. Објављене и прихваћене публикације у часописима са SCI листе

- [1] Danko Jocić, Stefan Milošević, *Refinements of operator Cauchy–Shwarz and Minkowski inequalities for p -modified norms and related norm inequalities*, Linear Algebra and its Applications, vol. 488, pp. 284–301, (2016), Print ISSN: 0024–3795, M21, доступно на

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379515005741>

- [2] Danko Jocić, Stefan Milošević, Vladimir Đurić, *Norm inequalities for elementary operators and other inner product type integral transformers with the spectra contained in the unit disc*, Filomat, vol. 31, no. 2, pp. 187–206, (2017), Print ISSN: 0354–5180, Online ISSN: 2406–0933, M22, доступно на <http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/publikacije/filomat/2017/31-2/31-2-3-3269.pdf>
- [3] Danko Jocić, Đorđe Krtinić, Milan Lazarević, Petar Melentijević, Stefan Milošević, *Refinements of inequalities related to Landau-Grüss inequalities for elementary operators acting on ideals associated to p -modified unitarily invariant norms*, прихваћено за штампу у Complex Analysis and Operator Theory, Print ISSN: 1661–8254, Online ISSN: 1661–8262, M22, доступно на <https://link.springer.com/article/10.1007/s11785-016-0622-8>.

2.2. Објављене и прихваћене публикације у часописима који нису на SCI листи

- [4] Stefan Milošević, *Norm inequalities for elementary operators related to contractions and operators with spectra contained in the unit disk in norm ideals*, Advances in Operator Theory, vol. 1, no. 2, pp. 147–156 (2016), Online ISSN: 2538–225X, доступно на http://aot-math.org/article_40568.html.

2.3. Учешће на пројектима:

„Постори функција и оператори на њима”, Министарство просвете, науке и технолошког развоја, no. 174017, (2014–).

3. Структура дисертације

Докторска дисертација „Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним p -модификованим нормама и њиховим дуалима” написана је на $vi+62+iii$ стране. Структура рукописа је следећа:

Насловне стране, подаци о члановима комисије, резиме, садржај

1. Предговор

2. Увод и основни појмови

2.1. Сингуларне вредности

2.2. Оператор монотоне и оператор конвексне функције

2.3. Гељфандов интеграл

3. Неједнакости Коши–Шварца у Шатеновим идеалима

3.1. Основна неједнакост и спектрални оператори дефекта

3.2. Неједнакости у Шатеновим идеалима

4. Неједнакости Коши–Шварца у идеалима компактних оператора индукованим p -модификованим нормама

4.1. Основне неједнакости

4.2. Неједнакости везане за Q норме неких класа елементарних оператора

5. Примене неједнакости за оператор монотоне и оператор конвексне функције

5.1. Неједнакост Кларксон–МекКартија

5.2. Профињене неједнакости Коши–Шварца и Минковског за p -модификоване норме

5.3. Профињене Грисове неједнакости за p -модификоване норме

Литература (број библиографских јединица је 25)

Биографија аутора

4. Приказ садржаја дисертације

Дисертација се састоји од претходно наведених пет поглавља. Прво поглавље је предговор, где је представљен проширени контекст у коме се разматра научна проблематика везана за предмет ове дисертације. Остала четири поглавља представљају уже тематске целине, у којима су представљени резултати аутора дисертације, заједно са неопходном теоријском позадином и најважнијим резултатима других математичара, повезаних са и релевантних за истраживачку тематику разматрану и развијану у овој дисертацији.

У предговору су само дате основне информације о елементарним операторима и трансформацијама типа скаларног производа (т.с.п.), као њиховим недискретним уопштењима линеарних трансформација на просторима ограничених оператора, односно на идеалима компактних оператора на Хилбертовом простору. Уведен је и основни терминолошки оквир неопходан за излагање добијених резултата, који обухвата дефиницију елементарних оператора, трансформација т.с.п, укључујући деривације и уопштене деривације, идеале компактних оператора, унитарно инваријантне норме, међу којима су Ки Фанове норме од нарочите методолошке важности због примене Ки Фановог доминационог својства. Такође се указује и на предстојећу улогу оператор монотоних, оператор конвексних и оператор конкавних функција у овом раду.

У глави 2 дат је увод у тематику и прецизно су дефинисани основни појмови неопходни за даља излагања. Почине се са основним својствима сингуларних вредности, дефинисане су симетрично нормирајуће функције, као и идеали компактних оператора одређени тим нормама. Даље, за унитарно инваријантне норме су приказана својства монотоности и полунепрекидности одоздо, а на крају је дефинисано p -модификовање симетрично нормирајућих функција. Надаље се дефинишу појмови оператор монотоних, оператор конвексних и оператор конкавних функција, као и неке од основних неједнакости међу нормама за различите операторе изражене помоћу таквих функција. Између осталог,

за конкавну функцију $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, за ограничене позитивно дефинитне операторе A_k и за $\alpha_k \in [0, 1]$ везане условом $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, такве су неједнакости

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k f(A_k) \right\| \right\| \leq \left\| \left\| f \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k \right) \right\| \right\|,$$

$$\left\| \left\| f \left(\sum_{k=1}^n A_k \right) \right\| \right\| \leq \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f(A_k) \right\| \right\|,$$

као и аналогне неједнакости за конвексне функције. Након тога је описана конструкција Гелфандовог интеграла за оператор вредносне функције, показана су његова основна својства, дефинисане су трансформације т.с.п, а на крају су показане неке од основних неједнакости између норми за слабо* мерљиве и квадратно интегралбилне фамилије \mathcal{A} и \mathcal{B} , као што је

$$\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A} X \mathcal{B} d\mu \right\| \leq \sqrt{\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A} \mathcal{A}^* d\mu \right\| \left\| \int_{\Omega} \mathcal{B}^* \mathcal{B} d\mu \right\|} \|X\|,$$

где је X ограничен оператор.

У глави 3 су прво дефинисани спектрални оператор дефекта и α -спектрални оператор дефекта, па су установљене њихове основне особине. Између осталог, показана је неједнакост

$$\Delta_{A,\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n! \Gamma(\alpha)} A^{*n} A^n \cdot \Delta_{A,\alpha} \leq I,$$

које важи за ограничен оператор A , код кога је спектрални радијус $r(A) \leq 1$.

Након тога приказане су неједнакости везане за норме линеарних трансформација, везаних за контрактивне елементарне операторе и трансформације т.с.п. за Шатенове норме. Специјално, за слабо* мерљиве операторно вредносне функције \mathcal{A} и \mathcal{B} показана је неједнакост

$$\left\| \Delta_{\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}} X \Delta_{\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}} \right\|_p \leq \left\| \Delta_{\mathcal{A}^*}^{-\frac{1}{q}} \left(X - \int_{\Omega} \mathcal{A}(t)^* X \mathcal{B}(t) d\mu(t) \right) \Delta_{\mathcal{B}^*}^{-\frac{1}{r}} \right\|_p,$$

уколико је $r(\int_{\Omega} \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A} d\mu) \leq 1$, $r(\int_{\Omega} \mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B} d\mu) \leq 1$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega^n} \|\mathcal{A}_{t_1}^* \cdots \mathcal{A}_{t_n}^* f\|^2 + \|\mathcal{B}_{t_1}^* \cdots \mathcal{B}_{t_n}^* f\|^2 d\mu^n(t_1, \dots, t_n) < +\infty$, за све $f \in \mathcal{H}$. Приказане су и примене дате неједнакости за оператор једностраног помака у десно. Такође су изведене неједнакости за операторе A и B , чији су спектри садржани у јединичном диску и за које је $r(A)r(B) < 1$, које гласе

$$\left\| \Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n! \Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n \Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}} \right\|_p \leq \left\| \Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}} X \Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}} \right\|_p$$

и

$$\left\| \Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}} X \Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}} \right\|_p \leq \left\| \Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} A^{*n} X B^n \Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}} \right\|_p,$$

уколико је још $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} (\|A^{*n}f\|^2 + \|B^{*n}f\|^2) < +\infty$, за све $f \in \mathcal{H}$. Осим тога, дати су довољни услови под којима претходна неједнакост важи и када је $r(A) = r(B) = 1$.

У глави 4 наставља се са резултатима везаним за елементарне операторе и трансформације т.с.п. из претходног поглавља, али у овом случају са додатним захтевима о нормалности и комутативности бар неке од фамилија које дефинишу те линеарне трансформације. Први међу њима су Коши - Шварцове неједнакости за p -модификоване норме при $p \geq 2$.

Даље се даје неједнакост

$$\left\| \sqrt{I - \int_{\Omega} \mathcal{A}(t)^* \mathcal{A}(t) d\mu(t)} X \Delta_B \right\|_{\Phi^{(p)}} \leq \left\| X - \int_{\Omega} \mathcal{A}(t)^* X \mathcal{B}(t) d\mu(t) \right\|_{\Phi^{(p)}},$$

која важи уколико се фамилија \mathcal{A} састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, а обе трансформације $\int_{\Omega} \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A} d\mu$ и $\int_{\Omega} \mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B} d\mu$ имају спектрални радијус мањи од 1. Слична неједнакост важи и уколико се фамилија \mathcal{B} састоји међусобно комутирајућих нормалних оператора. На крају ове главе приказане су и одговарајуће неједнакости за контрактивне елементарне операторе, специјално

$$\left\| \left(I - A^* A \right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^n X B^n \left(I - B^* B \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\| \leq \|X\|,$$

као и

$$\left\| \left(I - A^* A \right)^{\frac{\alpha}{2}} X \left(I - B^* B \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\| \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} A^n X B^n \right\|,$$

које важе за нормалне контракције A и B . Осим тога приказане су и варијанте датих неједнакости за Q норме уколико је само један од оператора A и B нормална контракција, које гласе

$$\left\| \left(I - A^* A \right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^n X B^n \Delta_{B,\alpha} \right\|_{\Phi^{(p)}} \leq \|X\|_{\Phi^{(p)}},$$

где је A нормална контракција, а B такав да је $r(B) \leq 1$, као и неједнакост

$$\left\| \left(I - A^* A \right)^{\frac{\alpha}{2}} X \Delta_{B,\alpha} \right\|_{\Phi^{(p)}} \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} A^n X B^n \right\|_{\Phi^{(p)}},$$

где је још додатно $r(A)r(B) < 1$. Приказане су и сличне неједнакости у случају када је B нормална контракција.

У глави 5 прво се излажу познати резултати везани за Кларксон - МекКартијеве неједнакости за више (од два) оператора, који су добијени применом неједнакости за оператор монотоне и оператор конвексне функције. Затим се дају профићења неједнакости Коши - Шварца, Минковског и Ландау - Гриси за p -модификоване операторне норме.

Изражавање нових резултата почиње идентитетом

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right|^2 + \sum_{n=1}^N \left| A_n \left(cI + \sqrt{c^2 I - \sum_{n=1}^N A_n^* A_n} \right)^{-1} \sum_{m=1}^N A_m^* X B_m - c X B_n \right|^2 \\ = c^2 \sum_{n=1}^N |X B_n|^2, \end{aligned}$$

где су A_n, B_n и X ограничени оператори, $c \geq |\sum_{n=1}^N A_n^* A_n|^{1/2}$ и $d > 0$, који је примењен за профињене Коши - Шварцове неједнакости за p -модификоване операторне норме

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right\|_{\Phi^{(p)}} &= \left\| \left(\left| \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \left(\left| \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right|^2 + \sum_{n=1}^N \left| A_n \left(\left\| \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right\|^{\frac{1}{2}} I \right. \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. \left(\left\| \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right\| I - \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \sum_{m=1}^N A_m^* X B_m - \left\| \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right\|^{\frac{1}{2}} X B_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\sum_{n=1}^N B_n^* X^* X B_n \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi^{(p)}}, \end{aligned}$$

за све $0 < p \leq 2$, док је за све $2 \leq p < +\infty$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right\|_{\Phi^{(p)}} &= \left\| \left| \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right|^p \right\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \left| \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right|^p + \sum_{n=1}^N \left| A_n \left(\left\| \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right\|^{\frac{1}{2}} I \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. \left(\left\| \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right\| I - \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \sum_{m=1}^N A_m^* X B_m - \left\| \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right\|^{\frac{1}{2}} X B_n \right|^p \right\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{n=1}^N B_n^* X^* X B_n \right\|_{\Phi^{(p/2)}}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Нови идентитет

$$\begin{aligned} \left| X - \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right|^2 + \sum_{n=1}^N \left| A_n \left(I + \left(I - \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \sum_{m=1}^N A_m^* X B_m - X B_n \right|^2 \\ = \left| \left(I - \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} X \right|^2 + \sum_{n=1}^N |A_n X - X B_n|^2, \end{aligned}$$

даје нову профињену допуну Шварц-Кошијеве неједнакости за p модифико-

ване операторне норме

$$\begin{aligned}
& (N+1)^{\frac{p}{2}-1} \left\| \left| X - \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right|^p + \sum_{n=1}^N \left| A_n \left(I + \left(I - \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \sum_{m=1}^N A_m^* X B_m - X B_n \right|^p \right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\
& \leq \left\| \left| \left(I - \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right) X \right|^p + \sum_{n=1}^N \left| A_n X - X B_n \right|^p \right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\
& \leq (N+1)^{1-\frac{p}{2}} \left\| \left| X - \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right|^p + \sum_{n=1}^N \left| A_n \left(I + \left(I - \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \sum_{m=1}^N A_m^* X B_m - X B_n \right|^p \right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\
& \leq (N+1)^{1-\frac{p}{2}} \left(\left\| X - \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n \right\|_{\Phi^{(q)}}^p \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^N \left\| A_n \left(I + \left(I - \sum_{n=1}^N A_n^* A_n \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \sum_{m=1}^N A_m^* X B_m - X B_n \right\|_{\Phi^{(q)}}^p \right),
\end{aligned}$$

под додатним условима да је $\sum_{n=1}^N A_n^* A_n$ контракција, $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(q)}}(\mathcal{H})$ и $0 < p \leq q$. Такође, из првог идентитета је затим изведена и профињена неједнакост Минковског за p -модификоване операторне норме

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n=1}^N C_n \right\|_{\Phi^{(p)}}^p \\
& \leq \left\| \left| \sum_{n=1}^N C_n \right|^p + \left(\sum_{n=1}^N \|C_n\|_{\Phi^{(p)}} \right)^{-\frac{p}{2}} \sum_{n=1}^N \|C_n\|_{\Phi^{(p)}}^{-\frac{p}{2}} \left\| C_n \|_{\Phi^{(p)}} \sum_{m=1}^N C_m - \sum_{m=1}^N \|C_m\|_{\Phi^{(p)}} C_n \right|^p \right\|_{\Phi} \\
& \leq \sum_{n=1}^N \frac{\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}^{1-p}}{\left(\sum_{n=1}^N \|C_n\|_{\Phi^{(p)}} \right)^{1-p}} \|C_n\|_{\Phi}^p = \left(\sum_{n=1}^N \|C_n\|_{\Phi^{(p)}} \right)^p,
\end{aligned}$$

где су $C_1, \dots, C_N \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ и $p \geq 2$.

Такође је из идентитета

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^N A_n^* \right) X \left(\sum_{n=1}^N B_n \right) \right|^2 \\
& + \sum_{1 \leq m < n \leq N} \alpha_m \alpha_n \left| (\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n) \left(cI + \left(c^2 I - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \left| \sum_{n=1}^N A_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \right. \\
& \times \left. \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^N A_n^* \right) X \left(\sum_{n=1}^N B_n \right) \right) - cX(\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n) \right|^2 \\
& = c^2 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left| X \sum_{n=1}^N B_n \right|^2 \right),
\end{aligned}$$

при $c \geq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^N A_n \right|^2 \right\|^{1/2}$, а A_n, B_n и X су ограничени оператори, између осталог, изведено следеће профињење операторне Ландау - Грисове неједнакости за p -модификоване норме

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^N A_n^* \right) X \left(\sum_{n=1}^N B_n \right) \right\|_{\Phi(p)} \\ & \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^N A_n \right|^2 \right\|^{1/2} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left| X \sum_{n=1}^N B_n \right|^2 \right\|_{\Phi(p/2)}. \end{aligned}$$

5. Закључак и предлог

Рукопис „Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним p -модификованим нормама и њиховим дуалима” кандидата Стефана Милошевић садржи битан научни допринос у Теорији оператора. Доказан је низ процена норми различитих класа елементарних оператора, као и низ профињења познатих операторних неједнакости. Кандидат се успешно бави научним радом у овој области, до сада је објавио три рада на SCI листи, као и један самосталан рад, чији резултати представљају суштински део ове дисертације.

На основу изложеног, комисија предлаже да се рукопис „Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним p -модификованим нормама и њиховим дуалима” кандидата Стефана Милошевића **прихвати** као докторска дисертација, као и да се одреди комисија за њену одбрану.

Београд, 10.11.2017.

проф. др Данко Јоцић, редовни професор (ментор)

проф. др Драган Ђорђевић, редовни професор

др Ђорђе Кртинић, доцент
