



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У  
НОВОМ САДУ



Стеван Цветићанин

**Фракционо и тополошко уопштење  
једначине телеграфичара као модел  
електричног вода**

**ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА**

Нови Сад, 2017.





## КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, <b>РБР:</b>	
Идентификациони број, <b>ИБР:</b>	
Тип документације, <b>ТД:</b>	Монографска документација
Тип записа, <b>ТЗ:</b>	Текст, штампани материјал
Врста рада, <b>ВР:</b>	Докторска дисертација
Аутор, <b>АУ:</b>	Стеван Цветићанин
Ментори, <b>МН:</b>	др Душан Зорица и др Милан Рапаић
Наслов рада, <b>НР:</b>	Фракционо и тополошко уопштење једначине телеграфичара као модел електричног вода
Језик публикације, <b>ЈП:</b>	Српски
Језик извода, <b>ЈИ:</b>	Српски/Енглески
Земља публиковања, <b>ЗП:</b>	Република Србија
Уже географско подручје, <b>УГП:</b>	АП Војводина
Година, <b>ГО:</b>	2017.
Издавач, <b>ИЗ:</b>	Ауторски репринт
Место и адреса, <b>МА:</b>	Факултет техничких наука, 21 000 Нови Сад, Трг ДоситејаОбрадовића 6
Физички опис рада, <b>ФО:</b> (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5 / 84 / 54 / 0 / 16/ 21/ 0
Научна област, <b>НО:</b>	Електротехничко и рачунарско инжењерство
Научна дисциплина, <b>НД:</b>	Електроенергетика
Предметна одредница/Кључне речи, <b>ПО:</b>	Једначина телеграфичара, фракционе конститутивне релације, тополошка уопштења елементарног кола електричног вода
<b>УДК</b>	
Чува се, <b>ЧУ:</b>	Библиотека Факултета техничких наука, Универзитет Нови Сад
Важна напомена, <b>ВН:</b>	
Извод, <b>ИЗ:</b>	Предмет истраживања су фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара као модела електричног вода. Фракционо уопштење се огледа у томе што су класичне конститутивне релације електричних елемената замењене фракционим. Модификација конститутивних релација омогућује да се узму у обзир коначно време релаксације и поларизације диелектрика, као и формирања магнетског поља, односно историја процеса поларизације и магнетизације. Тополошко уопштење огледа се у томе што елементарно коло вода, поред стандардних елемената, има кондензатор и у редној грани којим се моделира ефекат нагомилавања наелектрисања дуж електричног вода, односно коначно време релаксације.
Датум прихватања теме, <b>ДП:</b>	26. 1. 2017.
Датум одбране, <b>ДО:</b>	
Чланови комисије, <b>КО:</b>	Председник: др Владимир Стрезоски, редовни професор Члан: академик Теодор Атанацковић, професор емеритус Члан: др Томислав Шекара, ванредни професор Члан: др Јован Микуловић, ванредни професор Члан, ментор: др Милан Рапаић, ванредни професор Члан, ментор: др Душан Зорица, виши научни сарадник
	Потпис ментора





## KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, <b>ANO</b> :	
Identification number, <b>INO</b> :	
Document type, <b>DT</b> :	Monographic documentation
Type of record, <b>TR</b> :	Text, printed material
Contents code, <b>CC</b> :	PhD thesis
Author, <b>AU</b> :	Stevan Cvetičanin
Mentors, <b>MN</b> :	dr Dušan Zorica and dr Milan Rapaić
Title, <b>TI</b> :	Fractional and topological generalization of telegraphers's equation in transmission line modeling
Language of text, <b>LT</b> :	Serbian
Language of abstract, <b>LA</b> :	Serbian/ English
Country of publication, <b>CP</b> :	Republic of Serbia
Locality of publication, <b>LP</b> :	AP of Vojvodina
Publication year, <b>PY</b> :	2017.
Publisher, <b>PB</b> :	Autor reprint
Publication place, <b>PP</b> :	Faculty of Technical Sciences, 21 000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, <b>PD</b> : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)</small>	5 / 84 / 54 / 0 / 16/ 21/ 0
Scientific field, <b>SF</b> :	Electrical and Computer Engineering
Scientific discipline, <b>SD</b> :	Power systems
Subject/Key words, <b>S/KW</b> :	Telegraphers's equation, fractional constitutive relations, topological generalizations of elementary circuit of transmission line
<b>UC</b>	
Holding data, <b>HD</b> :	Library of the Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
Note, <b>N</b> :	
Abstract, <b>AB</b> :	The subject of research is the fractional and topological generalization of the telegraphers's equation in transmission line modeling. The fractional generalization is reflected in the fact that the classical constitutive relations of electrical elements are replaced by the fractional ones. The modification of constitutive relations allows for taking into account the finite relaxation and polarization time of dielectric material, as well as the creation of the magnetic field, it also allows for taking into account the history of polarization and magnetization processes. The topological generalization of the elementary circuit of transmission line, in addition to the standard elements, introduces a capacitor in the series branch, which models the effect of charge accumulation along the transmission line, i.e., the finite relaxation time.
Accepted by the Scientific Board on, <b>ASB</b> :	26. 1. 2017.
Defended on, <b>DE</b> :	
Defended Board, <b>DB</b> :	
President:	dr Vladimir Strezoski, full professor
Member:	academician Teodor Atanacković, professor emeritus
Member:	dr Tomislav Šekara, associate professor
Member:	dr Jovan Mikulović, associate professor
Member, Mentor:	dr Milan Rapaić, associate professor
Member, Mentor:	dr Dušan Zorica, associate research professor

Mentor's sign



# Садржај

<b>Предговор</b>	<b>III</b>
<b>1 Фракциони рачун, математички алати и нотација</b>	<b>1</b>
1.1 Фракциони рачун . . . . .	1
1.1.1 Интеграл нецелог реда . . . . .	1
1.1.2 Изводи нецелог реда . . . . .	2
1.2 Интегралне трансформације . . . . .	3
1.2.1 Лапласова трансформација . . . . .	4
1.2.2 Фуријеова трансформација . . . . .	4
1.3 Аналитички и нумерички методи за инверзију . . . . .	4
1.3.1 Елементи комплексне анализе . . . . .	5
1.3.2 Метод контурне интеграције . . . . .	6
1.3.3 Пост-Видерова инверзиона формула . . . . .	6
1.3.4 Де Хугов алгоритам . . . . .	7
<b>2 Једначина телеграфичара</b>	<b>9</b>
2.1 Елементи теорије електричних кола . . . . .	9
2.1.1 Кирхофови закони . . . . .	9
2.1.2 Конститутивне релације елемената . . . . .	10
2.2 Формулација ЈТ у временском домену . . . . .	11
2.2.1 Једначина простирања таласа . . . . .	13
2.2.2 Једначина дифузије . . . . .	13
2.2.3 Једначина статичке дисипације . . . . .	14
2.2.4 Таласно-дифузна једначина . . . . .	14
2.2.5 Дифузно-дисипативна једначина . . . . .	14
2.2.6 Једначина телеграфичара . . . . .	14
2.3 Формулација ЈТ у комплексном домену . . . . .	15
2.4 Гранични услови и функције преноса . . . . .	16
2.4.1 Полубесконачан вод . . . . .	17
2.4.2 Вод коначне дужине . . . . .	17
2.5 Фреквенцијска анализа ЈТ и специјалних случајева . . . . .	19
2.5.1 Једначина простирања таласа . . . . .	19
2.5.2 Једначина дифузије . . . . .	20
2.5.3 Једначина статичке дисипације . . . . .	20
2.5.4 Таласно-дифузна једначина . . . . .	21
2.5.5 Дифузно-дисипативна једначина . . . . .	22
2.5.6 Једначина телеграфичара . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара</b>	<b>25</b>
3.1	Фракционо уопштење једначине телеграфичара . . . . .	25
3.1.1	Конститутивне релације фракционих елемената . . . . .	25
3.1.2	Фракциона једначина телеграфичара . . . . .	27
3.2	Тополошка уопштења ФЈТ . . . . .	29
3.2.1	Топологије таласно-дифузних процеса . . . . .	31
3.2.2	Топологије дифузно-дисипативних процеса . . . . .	33
3.2.3	Специјалне топологије . . . . .	38
3.3	Формулација уопштеног модела електричног вода . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Транзијентни одзив и фреквенцијска анализа</b>	<b>47</b>
4.1	Анализа аргумента функције $\psi$ . . . . .	49
4.2	Анализа сингуларитета коефицијента простирања . . . . .	50
4.3	Импулсни одзив . . . . .	53
4.3.1	Случај када $k$ , осим $s = 0$ , нема других тачака гранања . . . . .	54
4.3.2	Случај када $k$ , осим $s = 0$ , има једну реалну негативну тачку гранања . . . . .	56
4.3.3	Случај када $k$ , осим $s = 0$ , има пар конјуговано комплексних тачака гранања . . . . .	57
4.4	Фреквенцијска анализа . . . . .	58
4.4.1	Асимптотска анализа за ниске учесталости . . . . .	60
4.4.2	Асимптотска анализа за високе учесталости . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Графички приказ, верификација и тумачење резултата</b>	<b>63</b>
5.1	Еволуција импулног одзива у времену на дискретним позицијама	63
5.2	Просторни профили импулног одзива у дискретним тренуцима веремења . . . . .	69
5.2.1	Профили дифузног карактера . . . . .	69
5.2.2	Профили таласног карактера . . . . .	72
5.3	Фреквенцијске карактеристике . . . . .	74
	<b>Закључак</b>	<b>79</b>
	<b>Литература</b>	<b>81</b>



# Предговор

Предмет истраживања ове докторске дисертације су фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара као модела електричног вода. При моделирању вода коришћен је Хевисајдов приступ, односно вод је издељен на инфитезималне секције, а свака од њих замењена је елементарним електричним колом. Фракционо уопштење се огледа у томе што су класичне конститутивне релације динамичких (акумулационих) електричних елемената замењене фракционим, односно извод по времену који фигурише у њима замењен је изводом нецелог реда Риман-Лиувиловог типа. Описана модификација конститутивних релација омогућује да се на иновативан начин узму у обзир ефекти коначног времена релаксације и поларизације диелектрика, као и формирања спрежног магнетског поља у медијуму између проводника, односно омогућује да се у обзир узме историја процеса поларизације и магнетизације.

Суштина тополошког уопштења огледа се у томе што елементарно коло, поред стандардних елемената у редној грани (калема и отпорника који моделирају индуктивне и дисипативне феномене), као и кондензатора и отпорника у оточној грани (којим се описују капацитивни и дисипативни феномени), има и капацитивни елемент (кондензатор) у редној грани којим се моделира ефекат нагомилавања наелектрисања у проводнику, односно коначно време релаксације, као и утицај кретања везаних наелектрисања на магнетску спрегу. Различитим повезивањем елемената редне гране елементарног кола (отпорника, калема и додатог кондензатора) добијено је осам различитих топологија. За сваку од ових топологија дат је математички модел у виду парцијалне фракционе диференцијалне једначине којом је описана зависност напона вода од позиције и времена. За сваку топологију дати су изрази за подужну редну импедансу и подужну оточну адмитансу, као и израз за коефицијент простирања сигнала дуж вода. На основу математичког модела извршена је класификација тополошких уопштења према томе које физичке феномене узимају у обзир (таласно-дифузне, дифузно-дисипативне или процесе нижег реда од статичке дисипације). Математички модел сваке од ових топологија садржи класичну једначину телеграфичара као један од многобројних специјалних случајева на које може да се сведе. Након излагања свих тополошких уопштења, њихових математичких модела и класификације дато је детаљно извођење математичког модела за једну, изабрану, топологију. Приступом и корацима који су коришћени за извођење тог модела може се извести математички модел било које од наведених топологија.

Поред извођења уопштене фракционе једначине телеграфичара, као математичког модела електричног вода, дат је и детаљан поступак за добијање ана-

литичког решења саме једначине, користећи се Лапласовом трансформацијом и методом контурне интеграције. Аналитичко решење зависи од броја и положаја тачака гранања коефицијента простирања изабране топологије и изведено је за све могуће случајеве тачака гранања, чиме је уједно добијен и транзијентни одзив вода као система, за чији се одзив сматра напон између проводника вода. Такође, урађена је фреквенцијска анализа модула и аргумента функције преноса вода у зависности од тачака гранања коефицијента простирања.

На крају дисертације дат је графички приказ и верификација решења поређењем са већ познатим и признатим методима за добијање инверзне Лапласове трансформације. Графички су приказани временски и просторни профили одзива вода и тумачење процеса који доминирају моделом, таласно-дифузни или дифузно-дисипативни, као и утицај броја и положаја тачака гранања, а све то у зависности од изабраних параметара модела.

Разлози за уопштавање класичне једначине телеграфичара, коју је формулисао О. Хевисајд [1], леже у томе што она не укључује одређене феномене, као што су, на пример, ефекат нагомилавања наелектрисања у проводницима или меморијски ефекти процеса поларизације и магнетизације изолационог медијума. Занемаривање наведених ефеката је потпуно оправдано у многим практично интересантним случајевима: електрични водови који су начињени од добрих проводника и изолатора, или водови електроенергетског система којима се преносе сигнали веома ниских учесталости. Међутим, при моделирању (малих) система на веома високим учесталостима, као што су *CMOS on-chip* и тракасти водови на микро нивоу (*microstrip line*), додатни ефекти, поред оних који су већ укључени у класичну једначину телеграфичара, морају се узети у обзир. У циљу решавања ових проблема, постоји мноштво уопштења једначине телеграфичара, а у многим од њих се, уместо класичних елемената, користе елементи моделирани изводима нецелог реда.

Садржај докторске дисертације подељен је на пет глава. У првој глави дати су најважнији елементи фракционог рачуна, својства и нотација оператора фракционог интегралења и фракционог диференцирања. Такође, наведне су неке од теорема комплексне анализе, као и две коришћене интегралне трансформације: Лапласова и Фуријеова. На крају галве дат је један аналитички и један нумерички метод за одређивање инверзне Лапласове трансформације: Пост-Видерова инверзиона формула и Де Хугов алгоритам.

Друга глава резервисана је за класичну једначину телеграфичара, њено извођење, како у временском, тако и у комплексном домену, као и за њене специјалне случајеве попут једначине простирања таласа, једначине дифузије и једначине статичке дисипације, као и једначина које су њихова комбинација. Извршена је и фреквенцијска анализа модула и аргумента фундаменталног решења једначине телеграфичара и њених специјалних случајева. Такође су дате и функције преноса полубесконачног и коначног вода, с тим што су за коначан вод наведене три различите ситуације: када је крај вода отворен, када је крају вода кратко спојен и када је на крај вода прикључен потрошач.

Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара су представљена у трећој глави, где је урађена и њихова детаљна анализа и класификација

## ПРЕДГОВОР

према према својствима и физичким процесима које узимају у обзир. Подела и закључци су изведени на основу топологије елемнатрног кола, реда једначине којом се одговарајућа топологија моделира, као и коефицијента простирања који одговара одређеној топологији. Јасно су наведене предности и мане свих топологија. На крају треће главе дато је детаљно извођење математичког модела изабране топологије, које за резултат има уопштену фракциону једначину телеграфичара.

Четврта глава посвећена је одређивању аналитичког решења уопштене једначине телеграфичара помоћу Лапласове трансформације и метода контурне интеграције, односно транзијентном одзиву електричног вода моделираног изабраном топологијом. Урађена је и фреквенцијска анализа модула и аргумента фундаменталног решења, односно функције преноса вода. Пошто се за различите параметре вода јављају и различити случајеви броја и положаја тачака гранања коефицијента простирања, аналитичко решење и фреквенцијска анализа су урађени за све могуће случајеве.

У последњој, петој глави, графички су приказани добијени резултати у виду временских и просторних профила транзијентног одзива. На временским профилима, поред анализе и дискусије, уједно је извршена и верификација добијених решења поређењем са решењима који су добијени коришћењем Де Хуговог алгоритма и Пост-Видерове инверзионе формуле. Просторни профили су послужили за дискусију и потврду исправности који процеси, таласно-дифузни или дифузно-дисипативни, доминирају у зависности од избора параметара модела, односно реда једначине. Затим је и фреквенцијском анализом модула и аргумента функције преноса извршена анализа и потврда класификације процеса, у зависности од параметара, као и анализа доприноса тачака гранања процесима који се одвијају на воду.

Након последње главе дисертације изложен је резиме дисертације, наведени су закључци проистекли из истраживања и добијених резултата, а дати су и могући правци даљег истраживања. На самом крају наведен је списак коришћене литературе и дата је кључна документацијска информација.

Оригинални научни допринос дисертације садржан је у трећем, четвртом и петом поглављу и резултат је истраживања чији је део садржан у раду [2] објављеном у научном часопису, као и у два конференцијска рада [3, 4].



# *Захвалница*

Искористио бих ову прилику да изразим велику захвалност својим менторима, др Душану Зорици и др Милану Рапаићу, на огромном разумевању, пренесеном знању, утрошеном времену, безграничном стрпљењу и несебичној помоћи сваке врсте.

Такође бих се захвалио драгим професорима др Владимиру Стрезоском и академику Теодору Атанацковићу, члановима комисије, на помоћи и пренесеном знању, како из области које су уско везане за дисертацију, тако из многих других сфера науке и општег образовања.

Велику захвалност дугујем уваженим професорима др Томиславу Шекари и др Јовану Микуловићу, члановима комисије, на стручној помоћи и сугестијама, као и на срдачном односу и посвећеном времену.

Захвалио бих се свим колегама и пријатељима на подршци и помоћи приликом истраживања и писања дисертације, а посебно Радивоју Вујановићу и Филипу Крстићу на помоћи техничке природе.

Мајци Мирославки, брату Александру, деди Стевану и баби Анђи се захваљујем што су ми омогућили да се школујем и да уопште добијем прилику академског образовања, као и на резервној подршци свих ових година.

Највећу захвалност свакако дугујем мојој вољеној супрузи Сузани на безграничном стрпљењу, разумевању и љубави коју ми је пружила, како бих истрајао и успешно окончао и овај корак у животу.



# 1. Фракциони рачун, математички алати и нотација

## 1.1 Фракциони рачун

Основне дефиниције и својства интеграла и извода нецелог реда наведени су у овом одељку. Много више детаља из области фракционог рачуна и његове веома широке примене може се наћи у богатој литератури посвећеној овој материји, види нпр. [5, 6, 7, 8, 9].

### 1.1.1 Интеграл нецелог реда

Риман-Лиувиллов (*Georg Friedrich Bernhard Riemann, Joseph Liouville*) фракциони интеграл реда  $\xi > 0$ , дефинисан је конволуционим интегралом

$${}_0I_t^\xi f(t) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_0^t (t - \tau)^{\xi-1} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} * f(t), \quad (1.1)$$

где је са  $\Gamma$  означена Ојлерова (*Leonhard Euler*) гама функција, а  $*$  означава операцију конволуције, која је за каузалне сигнале дефинисана на следећи начин  $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$ . Када је ред интеграла целобројан, Риман-Лиувиллов фракциони интеграл се своди на класичан, тј. на добро познату Кошијеву (*Augustin Louis Cauchy*) формулу за вишеструку ( $n$ -тоструку) интеграцију

$${}_0I_t^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} * f(t). \quad (1.2)$$

Треба имати на уму да је  $\Gamma$  функција уопштење факторијела такво да важи  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , за све позитивне целобројне вредности  $n$ . Са  $I^\xi$  је означен оператор интеграћења реда  $\xi$ , а са  $I$  у случају када је  $\xi = 1$ , односно када се ради о класичној једнострукој интеграцији. Када је у питању интеграција нултог реда фракциони интеграл конвергира, у слабом смислу, самој подинтегралној функцији.

Слично класичној вишеструкој интеграцији (1.2), Риман-Лиувиллов оператор фракционе интеграције (1.1), поседује својства полугрупе, што значи да за њега важи асоцијативност, али такође поседује и својство комутативности, односно важи  ${}_0I_t^\xi {}_0I_t^\zeta = {}_0I_t^\zeta {}_0I_t^\xi = {}_0I_t^{\xi+\zeta}$  ( $\xi, \zeta > 0$ ). Лапласова трансформација (биће дефинисана у одељку 1.2.1 изразом (1.11)) фракционог интеграла је  $\mathcal{L} [{}_0I_t^\xi f(t)](s) = s^{-\xi} F(s)$ .

### 1.1.2 Изводи нецелог реда

Постоје бројни начини за дефинисање оператора фракционог диференцирања. За проблеме који су разматрани у овој тези природно се наметнуо (што ће бити показано касније) фракциони извод Риман-Лувиловог типа који се дефинише на следећи начин

$${}_0D_t^\xi f(t) = \frac{d^{[\xi]}}{dt^{[\xi]}} {}_0I_t^{[\xi]-\xi} f(t), \quad (1.3)$$

где  $[\xi]$  означава најмањи цео број већи или једнак  $\xi$ . Аналогно нотацији за интеграцију, са  $D^\xi$  је означен оператор фракционог диференцирања реда  $\xi$ , а само са  $D$  у случају када је  $\xi = 1$ , односно када је у питању класично једноструко диференцирање. Није тешко закључити да се Риман-Лиувилев фракциони извод своди на класичан када је ред извода целобројан. Посебно, када је ред фракционог извода  $\xi \in (0, 1)$ , Риман-Лиувилев фракциони извод, дефинисан као (1.3), постаје

$${}_0D_t^\xi f(t) = \frac{d}{dt} {}_0I_t^{1-\xi} f(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{t^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)} * f(t) \right). \quad (1.4)$$

Лапласова трансформација фракционог извода, датог изразом (1.4), јесте

$$\mathcal{L} \left[ {}_0D_t^\xi f(t) \right] (s) = s^\xi F(s) - \left[ {}_0I_t^{1-\xi} f(t) \right]_{t=0} = s^\xi F(s). \quad (1.5)$$

Последња једнакост у изразу (1.5) важи само када је функција  $f(t)$  ограничена у нули. Израз сличан изразу (1.5) важи у случају фракционих извода вишег реда. Нестандардна форма почетних услова, задатих преко фракционог интеграла, води и до алтернативних дефиниција фракционих извода, укључујући и Капутов (*Michele Caputo*), који се, за  $\xi \in (0, 1)$ , дефинише на следећи начин

$${}^c D_t^\xi f(t) = {}_0I_t^{1-\xi} \frac{d}{dt} f(t) = \frac{t^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)} * \frac{df(t)}{dt}. \quad (1.6)$$

Пошто ће се у овој тези користити само Риман-Лиувилев фракциони извод Капутов извод и његова својства неће се детаљније излагати и анализирати.

### Комулација фракционог интеграла и фракционог извода

За разлику од фракционих интеграла који међусобно комутирају, фракциони интеграл и фракциони извод, у општем случају, не комутирају, а то се може показати на следећи начин

$$\begin{aligned} I^\xi D^\zeta f(t) &= I^\xi D I^{1-\zeta} f(t) = D I I^\xi D I^{1-\zeta} f(t) = D I^\xi I D I^{1-\zeta} f(t) \\ &= D I^\xi I^{1-\zeta} f(t) - D I^\xi \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\ &= D I^{1+\xi-\zeta} f(t) - D I^\xi \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0}. \end{aligned} \quad (1.7)$$



Тако да се (1.7) за  $\xi > \zeta$  ( $0 < \xi, \zeta < 1$ ) своди на

$$\begin{aligned}
 I^\xi D^\zeta f(t) &= D I^{1+\xi-\zeta} f(t) - D I^\xi \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\
 &= D I I^{\xi-\zeta} f(t) - D I^\xi \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\
 &= I^{\xi-\zeta} f(t) - \left[ {}_0I_t^{\xi-\zeta} f(t) \right]_{t=0} - D I^\xi \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\
 &= I^{\xi-\zeta} f(t),
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

а слично, за  $\zeta > \xi$  (1.7) се своди на

$$\begin{aligned}
 I^\xi D^\zeta f(t) &= D I^{1+\xi-\zeta} f(t) - D I^\xi \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\
 &= D I^{1-(\zeta-\xi)} f(t) - D I^\xi \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\
 &= D^{\zeta-\xi} f(t) - D I^\xi \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\
 &= D^{\zeta-\xi} f(t).
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Треба уочити да последње једнакости у изразима (1.8) и (1.9) важе уколико је  $f(t)$  ограничена у нули, односно ако су задовољени услови  $\left[ {}_0I_t^{\xi-\zeta} f(t) \right]_{t=0} = 0$  и  $\left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} = 0$ .

### Комутација фракционих извода

Фракциони изводи Риман-Лиувиловог типа, у општем случају, нису комутативни оператори, односно релација  ${}_0D_t^\xi {}_0D_t^\zeta = {}_0D_t^\zeta {}_0D_t^\xi = {}_0D_t^{\xi+\zeta}$  не важи у општем случају. Користећи се дефиницијом фракционог извода Риман-Лиувиловог типа (1.4) може се писати

$$\begin{aligned}
 D^\xi D^\zeta f(t) &= D I^{1-\xi} D I^{1-\zeta} f(t) = D D I I^{1-\xi} D I^{1-\zeta} f(t) \\
 &= D^2 I^{2-\xi} D I^{1-\zeta} f(t) = D^2 I^{1-\xi} I D I^{1-\zeta} f(t) \\
 &= D^2 I^{1-\xi} I^{1-\zeta} f(t) - D^2 I^{1-\xi} \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\
 &= D D I I^{1-(\xi+\zeta)} f(t) - D^2 I^{1-\xi} \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\
 &= D I^{1-(\xi+\zeta)} f(t) - D^2 I^{1-\xi} \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} \\
 &= D^{\xi+\zeta} f(t) - D^2 I^{1-\xi} \left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0},
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

из чега следи да  ${}_0D_t^\xi {}_0D_t^\zeta = {}_0D_t^{\xi+\zeta}$  важи под условом да је  $\left[ {}_0I_t^{1-\zeta} f(t) \right]_{t=0} = 0$ .

## 1.2 Интегралне трансформације

Фракционе диференцијалне једначине, које описују различита тополошка уопштења модела електричног вода, биће решаване и анализиране применом интегралних трансформација, Лапласове (*Pierre-Simon Laplace*) и Фуријеове (*Jean-Baptiste Joseph Fourier*).

### 1.2.1 Лапласова трансформација

Лапласова трансформација, која се углавном користи за каузалне сигнале, једна је од најчешће коришћених интегралних трансформација у инжењерству. Главне примене су јој за добијање аналитичког решења, као и анализа и симулација транзијентних процеса у системима. За каузалне сигнале дефинише се на следећи начин

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + i\omega, \quad \sigma > 0, \quad t > 0, \quad (1.11)$$

где  $F(s)$  представља (комплексни) лик а  $f(t)$  оригинал функције над којом се примењује трансформација.

Пресликавање из комплексног у временски домен, добијање оригинала из комплексног лика функције, врши се применом инверзне Лапласове трансформације која је дефинисана као

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t > 0. \quad (1.12)$$

### 1.2.2 Фуријеова трансформација

Фуријеова трансформација је такође једна од најзначајних интегралних трансформација у техници. Њена најчешћа примена, поред добијања аналитичког решења, јесте фреквенцијска анализа, односно анализа понашања и одзива система на простопериодичну побуду. Сама трансформација дефинисана је изразом

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

где  $F(\omega)$  представља (комплексни) лик а  $f(t)$  оригинал функције.

Применом инверзне Фуријеове трансформације из комплексног лика добија се оригинал функције, враћање из фреквенцијског у временски домен, на следећи начин

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Много више детаља о овим, али и другим интегралним трансформацијама, може се наћи у [10, 11, 12, 13, 14].

## 1.3 Аналитички и нумерички методи за инверзију

Инверзна Лапласова трансформација се, поред одређивања по дефиницији, може добити многобројним аналитичким и нумеричким поступцима. Најчешћи разлози за налажење оригинала алтернативним начином су потреба за провером решења добијеног по дефиницији или због тога што је добијање решења по дефиницији превише комплексно и/или превише споро. Неки од

најпознатијих аналитичких метода за добијање инверзне Лапласове трансформације су метод контурне интеграције и Пост-Видерова (*Emil Leon Post, David Vernon Widder*) инверзиона формула, док се Де Хугов (*Frank de Hoog*) алгоритам показао као врло користан и практичан нумерички метод за инверзију. Наведена три метода ће бити појашњена у наставку, а пре њих ће бити дате неке теореме комплексне анализе на којима се ови методи заснивају, као и теореме које ће се користити у накнадној анализи.

### 1.3.1 Елементи комплексне анализе

Литература која се бави комплексном анализом, као и њеном широком применом, веома је обимна. Теореме које следе у наставку биће дате без сувишних детаља и без доказа, а преузете су из следеће литературе [11, 12, 15].

#### Квадратни корен

Квадратни корен комплексног броја  $z$  има два, конјуговано комплексна, решења која се могу записати на следећи начин

$$\omega_{1/2} = \sqrt{z} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \sqrt{|z| + \operatorname{Re} z} + i \operatorname{sgn} [\operatorname{Im} z] \sqrt{|z| - \operatorname{Re} z} \right). \quad (1.15)$$

#### Основна Кошијева теорема

Ако је функција  $f(z)$  аналитичка у једноструко повезаној области  $G$ , тада је

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (1.16)$$

где је  $\gamma$  затворена контура унутар области  $G$ .

#### Кошијева интеграциона теорема

Нека је функција  $f(z)$  аналитичка на затвореној, део по део глаткој, контури  $\gamma$ , као и у области  $G$  унутар контуре  $\gamma$ . Тада, за произвољну тачку  $z \in G$ , важи

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad (1.17)$$

#### Кошијева теорема о остацима

Нека је  $\gamma$  позитивно оријентисана контура унутар које је функција  $f(z)$  аналитичка свуда осим у коначном скупу тачака  $D$ , при чему је свака тачка скупа  $D$  изоловани сингуларитет (отклоњив, пол или есенцијални) функције  $f(z)$ . Тада је

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_k \in D} \operatorname{Res} [f(z), a_k]. \quad (1.18)$$

### Принцип аргумента

Нека је  $\gamma$  позитивно оријентисана контура која не садржи нуле нити полове функције  $f(z)$ . Ако је  $N$  укупан број нула, а  $P$  укупан број полова функције  $f(z)$  унутар области која је оивичена контуром  $\gamma$ , узимајући и њихове вишеструкости, тада је

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = 2\pi(N - P), \quad (1.19)$$

при чему је  $\Delta_\gamma \arg f(z)$  прираштај аргумента функције  $f(z)$  када се независно променљива  $z$  креће дуж контуре  $\gamma$  у позитивном математичком смеру.

### 1.3.2 Метод контурне интеграције

Метод контурне интеграције један је од аналитичких метода за одређивање инверзне Лапласове трансформације, а заснива се на дефиницији инверзне Лапласове трансформације. Инверзна Лапласова трансформација,  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} F(s)e^{st} ds$ , где је  $\Gamma_0$  контура параметризована са  $s = \sigma_0 + i\omega$ ,  $\omega \in (-\infty, \infty)$ , може да се одреди коришћењем основне Кошијеве теореме (1.16) или Кошијеве теореме о остацима (1.18), где се затворена позитивно оријентисана контура  $\Gamma$  бира тако да контура  $\Gamma_0$  буде њен део. Наиме, уколико унутар контуре  $\Gamma$  функција  $F(s)$  нема изолованих сингуларитета (функција  $F(s)$  је аналитичка унутар  $\Gamma$ ), онда је инверзна Лапласова трансформација дата изразом

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma-\Gamma_0} F(s)e^{st} ds, \quad (1.20)$$

а уколико изоловани сингуларитети постоје, тада је инверзна Лапласова трансформација дата са

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma-\Gamma_0} F(s)e^{st} ds + \sum_{a_k \in D} \text{Res} [F(s)e^{st}, a_k], \quad (1.21)$$

где је  $D$  скуп свих изолованих сингуларитета функције  $F(s)$  унутар контуре  $\Gamma$ , а интеграл по  $\Gamma - \Gamma_0$  је збир интеграла по свим контурама које чине контуру  $\Gamma$ , осим контуре  $\Gamma_0$ .

### 1.3.3 Пост-Видерова инверзиона формула

Једна од алтернатива одређивању инверзне Лапласове трансформације по дефиницији је Пост-Видерова инверзиона формула

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)](t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{d^k F(s)}{ds^k} \Big|_{s=\frac{k}{t}}, \quad t > 0, \quad (1.22)$$

види [10, 16, 17]. На основу (1.22) види се да је, теоријски, потребно одредити израз за бесконачни извод лика.

### 1.3.4 Де Хугов алгоритам

Де Хугов алгоритам је нумерички метод за израчунавање инверзне Лапласове трансформације у случају када је  $f(t)$  реалан сигнал. Алгоритам је објављен 1982. године у раду „*An improved method for numerical inversion of Laplace transform*”, [18]. Наиме, из дефиниције инверзне Лапласове трансформације (1.12), као и симетрије  $F(s)$  у односу на реалну осу, при комплексној конјугацији аргумента, односно  $F(\bar{s}) = \bar{F}(s)$ , следе и алтернативни изрази за одређивање оригинала

$$f(t) = \frac{2}{\pi} e^{\sigma t} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [F(s)] \cos(\omega t) d\omega \quad (1.23)$$

$$= -\frac{2}{\pi} e^{\sigma t} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} [F(s)] \cos(\omega t) d\omega \quad (1.24)$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{\sigma t} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [F(s) e^{i\omega t}] d\omega, \quad (1.25)$$

где је  $s = \sigma + i\omega$ . Након дискретизације трапезоидним правилом са кораком  $\frac{\pi}{T}$ , добијају се следеће апроксимације оригинала

$$f_1(t) = \frac{2}{T} e^{\sigma t} \left( \frac{F(\sigma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ F\left(\sigma + \frac{ik\pi}{T}\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right), \quad (1.26)$$

$$f_2(t) = -\frac{2}{T} e^{\sigma t} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ F\left(\sigma + \frac{ik\pi}{T}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right), \quad (1.27)$$

$$f_3(t) = \frac{1}{T} e^{\sigma t} \left( \frac{F(\sigma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ F\left(\sigma + \frac{ik\pi}{T}\right) e^{ik\pi T} \right] \right). \quad (1.28)$$

Иако су формулације  $f(t)$ , дате са (1.23 - 1.25), еквивалентне, њихове дискретизације, (1.26 - 1.28), нису. Апроксимације (1.26 - 1.28) могу се записати преко оригинала  $f(t)$  и сума које представљају грешку (одступање од оригинала) на следећи начин

$$f_1(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\sigma kT} (f(2kT + t) + e^{2\sigma t} f(2kT - t)), \quad (1.29)$$

$$f_2(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\sigma kT} (f(2kT + t) - e^{2\sigma t} f(2kT - t)), \quad (1.30)$$

$$f_3(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\sigma kT} f(2kT + t). \quad (1.31)$$

У Де Хуговом раду претпостављено је да апроксимација (1.28) најбрже конвергира ка оригиналу, јер грешка не садржи члан експоненцијално растући са вре-

## 1. Фракциони рачун, математички алати и нотација

---

меном  $e^{2\sigma t}$ , види (1.31). Такође, како би се убрзала конвергенција реда, којим се апроксимирана оригинал, коришћен је  $\varepsilon$ -алгоритам, види [19].

## 2. Једначина телеграфичара

Глава је посвећена основним законима и релацијама из теорије електричних кола, са акцентом на једначину телеграфичара и кола са расподељеним параметрима, односно електричне водове. За једначину телеграфичара дато је детаљно извођење, како у временском, тако и у комплексном домену, као и одговарајући гранични услови и функције преноса у зависности од тога да ли је вод (полу)бесконачан или коначан, а ако је коначан и шта је прикључено на његовом крају. Такође, урађена је фреквенцијска анализа једначине и њених специјалних случајева, односно одговарајућих фундаменталних решења.

### 2.1 Елементи теорије електричних кола

Одељак је посвећен основним правилима, законитостима и елементима теорије електричних кола (без извођења, доказивања и детаљнијег објашњавања), који свакако припадају и електромагнетици, али се у њој изучавају из другог аспекта. За више детаља на располагању је веома богата домаћа и страна литература из теорије електричних кола, [20, 21, 22, 23], и електромагнетике [24, 25, 26].

#### 2.1.1 Кирхофови закони

Пре свих релација дата су два основна закона теорије електричних кола: први (струјни) Кирхофов (*Gustav Robert Kirchhoff*) закон

$$\sum_{\text{за чвор}} i_k(t) = 0, \quad k \in \{1, n\}, \quad n - \text{број грана које се стичу у чвор}, \quad (2.1)$$

који се заснива на једначини континуитета, и други (напонски) Кирхофов закон

$$\sum_{\text{по затвореној контури}} u_k(t) = 0 \quad k \in \{1, n\}, \quad n - \text{број сегмената на које је издељена контура}, \quad (2.2)$$

који се заснива на конзервативности електричног поља (када је то испуњено). Ови закони важе за електрична кола у којима су величине (напони, струје, флуксеви...) временски константне или (релативно) споро променљиве, односно закони важе ако је таласна дужина (осциловања променљивих величина) знатно већа од димензија кола које се моделира и анализира помоћу ових закона.

### 2.1.2 Конститутивне релације елемената

Наведене су конститутивне релације само за основне електричне елементе, односно само за оне који ће бити коришћени у даљем излагању. Такође, наведено је за сваки елемент који физички феномени се њим моделирају.

#### Отпорник

Отпорник представља елемент којим се моделирају дисипативни феномени, тзв. Џулови (*James Prescott Joule*) губици, односно прелазак електричне енергије у топлотну. У конститутивној релацији отпорника, познатијој као Омов (*Georg Simon Ohm*) закон, напон и струја су директно пропорционалне величине

$$i_R(t) = G u_R(t) \quad \Leftrightarrow \quad u_R(t) = R i_R(t), \quad (2.3)$$

где је са  $G[S]$  означена електрична проводност (реципрочна вредност отпорности), а са  $R[\Omega]$  електрична отпорност. Конститутивне релације отпорника у комплексном домену су готово идентичне релацијама у временском домену (2.3)

$$I_R(s) = G U_R(s) \quad \Leftrightarrow \quad U_R(s) = R I_R(s). \quad (2.4)$$

#### Калем

Калем представља акумулациони елемент којим се моделира феномен складиштења електричне енергије у виду енергије магнетског поља. У конститутивној релацији калема напон је сразмеран изводу струје по времену

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau \quad \Leftrightarrow \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad (2.5)$$

где је са  $L[H]$  означена индуктивност. Конститутивне релације калема у комплексном домену имају следећу форму

$$I_L(s) = Y_L(s) U_L(s) \quad \Leftrightarrow \quad U_L(s) = Z_L(s) I_L(s), \quad (2.6)$$

где је са  $Y_L(s) = \frac{1}{sL}[S]$  означена адмитанса, а са  $Z_L(s) = sL[\Omega]$  (за  $i_L(0) = 0$ ) импеданса калема.

#### Кондензатор

Кондензатор представља акумулациони елемент којим се моделира феномен складиштења електричне енергије у виду енергије електричног поља и ефекат нагомилавања наелектрисања. У конститутивној релацији кондензатора напон је сразмеран интегралу струје у времену

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

Конститутивне релације кондензатора у комплексном домену имају следећу форму

$$I_C(s) = Y_C(s) U_C(s) \quad \Leftrightarrow \quad U_C(s) = Z_C(s) I_C(s), \quad (2.8)$$



где  $Y_C(s) = sC[S]$  (за  $u_C(0) = 0$ ) представља адмитансу, а  $Z_C(s) = \frac{1}{sC}[\Omega]$  импедансу кондензатора.

У изразима за импедансе калема и кондензатора  $s$  и  $\frac{1}{s}$  представљају комплексне ликове (Лапласове трансформације) оператора диференцирања и интегралења у времену, респективно.

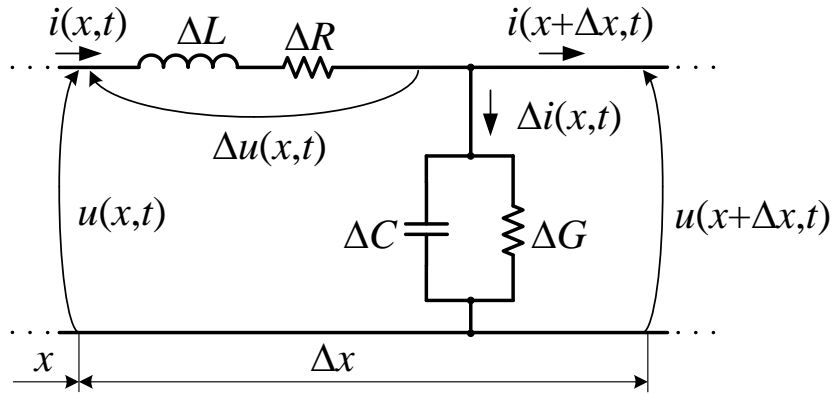
## 2.2 Формулација ЈТ у временском домену

Уопштено говорећи, једначинама (и електричним колима) са расподељеним параметрима се описују физички процеси у којима постоји просторна расподела физичких величина од интереса, било да је у питању провођење топлоте, кретање флуида, деформације материјала или пренос електричних сигнала. У електротехници, свакако најбољи пример система који се описује једначинама са расподељеним параметрима, јесу електрични водови. У неким областима електротехнике, као што је нпр. електроенергетика, водови у великој већини случајева сасвим добро могу да се апроксимирају колима са концентрисаним параметрима, пре свега због веома ниске учесталости. Међутим, у специфичним задацима електроенергетике, као што су водови дужине неколико хиљада километара, колима са расподељеним параметрима ће свакако много боље моделирати физички процеси од интереса. Још бољи примери се могу наћи у другим областима електротехнике: електроника и телекомуникације, где се моделирају водови чији сигнали су учесталости и до реда терахерца. У таквим системима не може се занемарити просторна расподела сигнала и они се описују једначинама са расподељеним параметрима. Један од најважнијих, најсвеобухватнијих и најстаријих математичких модела електричног вода свакако је једначина телеграфичара (ЈТ).

Једначину телеграфичара први је формулисао, а затим и објавио у свом делу *Electromagnetic Theory*, О. Хевисајд (*Oliver Heaviside*), види [1]. Њена најчешћа примена је у областима које укључују пренос електричног сигнала и електричне енергије, али у суштини она омогућује да се опише и разуме много шири спектар феномена, укључујући и простирање таласа, провођење топлоте, губици у преносу. Једначина телеграфичара интегрише једначину простирања таласа, једначину дифузије, као и једначину статичке дисипације, што ће бити појашњено касније.

Као математички модел електричног вода, ЈТ узима у обзир чињеницу да током преноса електричне енергије и сигнала постоји пад напона и губитак (отицање) струје дуж вода. Хевисајд је извео једначину тако што је електрични вод изделио на редну везу сегмената, дужине  $\Delta x$ , а затим сваки сегмент заменио елементарним електричним колом приказаном на слици 2.1. Губици енергије (снага губитака), моделирани су дисипативним елементима: редном отпорности  $\Delta R$  и паралелном (оточном) проводности  $\Delta G$ . Магнетски ефекти су моделирани редном индуктивношћу  $\Delta L$ , док је капацитивни феномен узет у обзир увођењем паралелне (оточне) капацитивности  $\Delta C$ . Уколико је вод хомоген оправдана је претпоставка да ће пад напона и смањење струје, услед цурења због несавршености изолатора, бити пропорционални са дужином вода. Због тога

## 2. Једначина телеграфичара



Слика 2.1: Хевисајдово елементарно коло електричног вода.

могу се писати следеће релације

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} \left[ \frac{\text{H}}{\text{m}} \right], \quad R = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} \left[ \frac{\Omega}{\text{m}} \right], \quad C = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \left[ \frac{\text{F}}{\text{m}} \right], \quad G = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \left[ \frac{\text{S}}{\text{m}} \right],$$

где су  $R$ ,  $L$ ,  $G$ , и  $C$  подужне вредности редне отпорности и индуктивности, и оточне проводности и капацитивности, респективно.

С обзиром да су фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара предмет изучавања ове тезе, односно да је то њен суштински допринос, у наставку ће бити дато детаљно извођење и анализа класичне ЈТ, како у временском, тако и у комплексном домену.

Једначина телеграфичара у временском домену биће изведена коришћењем елементарног Хевисајдовим кола, Кирхофових закона, као и преласком на континуум. На основу напонског Кирхофовог закона, писаног за контуру по ободу елементарног кола са слике 2.1, добија се једначина

$$u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = -\Delta u(x, t) = -\left( \Delta L \frac{\partial}{\partial t} + \Delta R \right) i(x, t), \quad (2.9)$$

а на основу струјног Кирхофовог закона једначина

$$i(x + \Delta x, t) - i(x, t) = -\Delta i(x, t) = -\left( \Delta C \frac{\partial}{\partial t} + \Delta G \right) u(x + \Delta x, t). \quad (2.10)$$

Једначине (2.9) у (2.10) представљају систем алгебарских једначина којима је описано елементарно коло. Након дељења са  $\Delta x$  (2.9) и (2.10) постају

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = -\frac{\Delta u(x, t)}{\Delta x} = -\left( \frac{\Delta L}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta R}{\Delta x} \right) i(x, t), \quad (2.11)$$

$$\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = -\frac{\Delta i(x, t)}{\Delta x} = -\left( \frac{\Delta C}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta G}{\Delta x} \right) u(x + \Delta x, t). \quad (2.12)$$

Преласком на континуум, односно пуштањем да у (2.11) и (2.12)  $\Delta x$  тежи нули, добија се систем парцијалних диференцијалних једначина

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = - \left( L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) i(x, t), \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = - \left( C \frac{\partial}{\partial t} + G \right) u(x, t), \quad (2.14)$$

познат као **једначине телеграфичара**, којим су описани напон и струја дуж вода. Уврштавањем (2.14) у (2.13), претходно диференцираној по  $x$ , добија се класична **једначина телеграфичара** по напону

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \left( LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial}{\partial t} + RG \right) u(x, t). \quad (2.15)$$

Аналогно томе, уврштавањем (2.13) у (2.14), претходно диференцираној по  $x$ , добија се класична ЈТ по струји

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} i(x, t) = \left( LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial}{\partial t} + RG \right) i(x, t). \quad (2.16)$$

Функције које описују напон и струју вода, на позицији  $x$  и у тренутку  $t$ ,  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$ , добијају се решавањем парцијалних диференцијалних једначина (2.15) и (2.16), респективно, уз одговарајуће граничне и почетне услове.

Урађена је анализа ЈТ, за специјалне вредности параметара, како би се видели њени (под)случајеви, односно физички процеси и једначине које она интегрише у себе.

### 2.2.1 Једначина простирања таласа

Једначина простирања таласа (ЈПТ),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t), \quad (2.17)$$

добија се редукцијом једначине телеграфичара за  $R = 0$  и  $G = 0$ , односно тако што се при моделирању вода занемаре дисипативни елементи. Константа  $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  [m/s] у (2.17) представља брзину простирања таласа.

### 2.2.2 Једначина дифузије

Једначина дифузије (ЈД),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t), \quad (2.18)$$

односно једначина провођења топлоте, тј. други Фиков (*Adolf Eugen Fick*) закон, добија се занемаривањем једног акумулационог и једног дисипативног елемента из различитих грана елементарног кола вода ( $R = 0$  и  $C = 0$  или  $G = 0$  и  $L = 0$ ). Константа  $D$  [m<sup>2</sup>/s] представља коефицијент дифузије и једнака је  $\frac{1}{LG}$  или  $\frac{1}{RC}$ , у зависности од тога који пар елемената је занемарен.

### 2.2.3 Једначина статичке дисипације

Једначина статичке дисипације(ЈСД),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = K^2 u(x, t), \quad (2.19)$$

добија се занемаривањем акумулационих елемената ( $L = 0$  и  $C = 0$ ), односно када вод има само дисипативне елементе,  $R$  и  $G$ . Дакле, ЈСД-ом су описани само статички дисипативни феномени. Константа  $K = \sqrt{RG}[\text{m}^{-1}]$  представља коефицијент статичког слабљења сигнала дуж вода.

### 2.2.4 Таласно-дифузна једначина

Таласно-дифузна једначина (ТДЈ),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t), \quad (2.20)$$

добија се занемаривањем једног од дисипативних елемената ( $R = 0$  или  $G = 0$ ), где је  $D = \frac{1}{LG}$  или  $D = \frac{1}{RC}$ , у зависности од тога који је елемент занемарен.

### 2.2.5 Дифузно-дисипативна једначина

Дифузно-дисипативна једначина (ДДЈ),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \left( \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} + K^2 \right) u(x, t). \quad (2.21)$$

добија се занемаривањем једног од акумулационих елемената ( $L = 0$  или  $C = 0$ ), где је поново  $D = \frac{1}{LG}$  или  $D = \frac{1}{RC}$ , у зависности од тога који је елемент занемарен, а  $K = \sqrt{RG}$ .

### 2.2.6 Једначина телеграфичара

Једначина телеграфичара (2.15), коришћењем константи  $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $D = \frac{1}{LG} + \frac{1}{RC}$  и  $K = \sqrt{RG}$ , уведених у специјалним случајевима (2.17 - 2.19) може се преписати у облику

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} + K^2 \right) u(x, t), \quad (2.22)$$

на основу чега се може закључити да су у обзир узети таласни, дифузни, као и процеси статичке дисипације, односно да су њоме интегрисане једначине свих претходно наведених специјалних случајева.

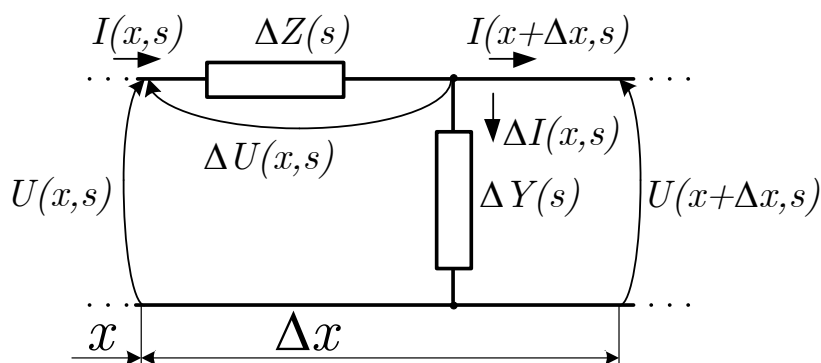
## 2.3 Формулација ЈТ у комплексном домену

Коришћењем Лапласове трансформације конститутивних релација елементарних кола који се јављају у елементарном Хевисајдовом колу: отпорника (2.4), калема (2.6) и кондензатора (2.8), једначина телеграфичара се може формулисати у комплексном домену. Показаће се да се добија Лапласова трансформација ЈТ дате са (2.22).

Нека су са

$$\Delta Z(s) = s\Delta L + \Delta R \text{ } [\Omega] \text{ и } \Delta Y(s) = s\Delta C + \Delta G \text{ } [S] \quad (2.23)$$

означене редна импеданса и паралелна адмитанса сегмента вода дужине  $\Delta x$  са слике 2.2, респективно, при чему су уважени одговарајући нулти почетни услови,  $u(x, 0) = 0$  и  $i(x, 0) = 0$ . Подужна редна импеданса и подужна оточна



Слика 2.2: Елементарно коло вода - комплексни домен.

адмитанса вода су дефинисане релацијама

$$Z(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z(s)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( s \frac{\Delta L}{\Delta x} + \frac{\Delta R}{\Delta x} \right) = sL + R \text{ } [\Omega/\text{m}], \quad (2.24)$$

$$Y(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Y(s)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( s \frac{\Delta C}{\Delta x} + \frac{\Delta G}{\Delta x} \right) = sC + G \text{ } [S/\text{m}]. \quad (2.25)$$

Посматрајући коло са слике 2.2 и примењујући готово идентичне кораке као у временском домену при извођењу (2.15), види одељак 2.2, може се записати систем алгебарских једначина

$$U(x + \Delta x, s) - U(x, s) = -\Delta U(x, s) = -\Delta Z(s) I(x, s), \quad (2.26)$$

$$I(x + \Delta x, s) - I(x, s) = -\Delta I(x, s) = -\Delta Y(s) U(x + \Delta x, s), \quad (2.27)$$

који након дељења са  $\Delta x$  и пуштања да  $\Delta x$  тежи нули прелази у систем диференцијалних једначина, **једначине телеграфичара** у комплексном домену,

$$\frac{\partial U(x, s)}{\partial x} = -Z(s) I(x, s), \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial I(x, s)}{\partial x} = -Y(s) U(x, s). \quad (2.29)$$

## 2. Једначина телеграфичара

Поново, диференцирањем по  $x$  и комбиновањем новонасталих и једначина (2.28) и (2.29) добијају се две готово идентичне диференцијалне једначине, прва за напон

$$\frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} + k_T^2(s) U(x, s) = 0, \quad (2.30)$$

а друга за струју

$$\frac{\partial^2 I(x, s)}{\partial x^2} + k_T^2(s) I(x, s) = 0, \quad (2.31)$$

(аналогично ЈТ у комплексном домену), где

$$k_T(s) = \sqrt{\psi_T(s)} = \sqrt{Z(s) Y(s)}$$

представља тзв. коефицијент простирања (пропагације), а  $\psi(s)$  је само помоћна функција, тј. поткорена вредност  $k(s)$ .

Једначина (2.30) је хомогена диференцијална једначина другог реда (посматрано само у односу на просторну координату), као и једначина (2.31), а њено опште решење је

$$U(x, s) = A(s) e^{xk_T(s)} + B(s) e^{-xk_T(s)}, \quad (2.32)$$

док се  $A(s)$  и  $B(s)$  одређују на основу граничних услова, чиме се добија партикуларно решење.

### 2.4 Гранични услови и функције преноса

Посматра се електрични вод, описан једначином телеграфичара у комплексном домену (2.30), на чијем је једном крају, у тачки  $x = 0$ , постављен извор напона. Математички је тиме дефинисан гранични услов

$$u(0, t) = u_0(t), \text{ односно } U_0(s) = \mathcal{L}[u_0(t)]. \quad (2.33)$$

Комбиновањем (2.32) и (2.33) следи релација  $B(s) = U_0(s) - A(s)$ , помоћу које се решење ЈТ у комплексном домену (2.32) може записати у следећој форми

$$U(x, s) = U_0(s) e^{-xk_T(s)} - \frac{1}{2} A(s) \operatorname{sh}(xk_T(s)), \quad (2.34)$$

при чему је коришћена дефиниција синуса хиперболичког,  $\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ .

Функције преноса (ФП) вода за напон и струју, односно фундаментално решење (тачније његова Лапласова трансформација) једначине телеграфичара (2.22), дефинисане су изразима

$$W(x, s) = \frac{U(x, s)}{U_0(s)} \text{ и } W_I(x, s) = \frac{I(x, s)}{U_0(s)} \quad (2.35)$$

и представљају количник комплексних ликова напона, односно струје, на позицији  $x$  и побудног напона  $U_0(s)$ , односно напона извора на који је вод прикључен.

Функција преноса,  $W(x, s)$ , добија се из (2.34) уважавајући и други гранични услов за напон, који пре свега зависи од тога да ли је вод (полу)бесконачан или коначан, а ако је коначне дужине и чиме је затворен, односно шта је прикључено на другом крају вода.

Функција преноса за струју  $W_I(x, s)$  (2.35)<sub>2</sub> се може изразити преко функције преноса за напон  $W(x, s)$  (2.35)<sub>1</sub> и дата је изразом

$$W_I(x, s) = \frac{1}{Z_x(x, s)} W(x, s), \quad (2.36)$$

где је  $Z_x(x, s)$  функција која представља еквивалентну импедансу дела вода почевши од позиције  $x$  до краја вода. Израз за импедансу  $Z_x(x, s)$  се добија из граничних услова на крају вода и карактеристичне импедансе вода  $Z_C(s) = \sqrt{\frac{Z(s)}{Y(s)}}$ , где су  $Z(s)$  и  $Y(s)$  подужна редна импеданса и подужна оточна адмитанса вода, респективно, дате изразима (2.24) и (2.25), за детаље види [20, 21, 22].

### 2.4.1 Полубесконачан вод

Када се има (полу)бесконачан вод,  $x \geq 0$ , а под претпоставком да је снага извора на који је тај вод прикључен коначна, за други (напонски) гранични услов логично се намеће  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s) = 0$ . Такође, тај услов очигледно мора да задовољи и струја,  $\lim_{x \rightarrow \infty} I(x, s) = 0$ . Уважавајући ове граничне услове долази се до израза за функцију преноса

$$W_\infty(x, s) = e^{-xk_T(s)} \quad (2.37)$$

и импедансу

$$Z_{x\infty}(x, s) = Z_C(s) = \text{const.} \quad (2.38)$$

### 2.4.2 Вод коначне дужине

Када је у питању вод коначне дужине  $l$  потребно је као граничне услове уважити релације које морају да задовоље изрази за напон, импедансу и струју на крају вода, односно за  $x = l$ .

#### **Вод коначне дужине са отвореном везом на крају**

Када се има вод коначне дужине **са отвореном везом на крају** (празан ход) логично се намећу следећи гранични услови

$$Z(x, s) \Big|_{x=l} \rightarrow \infty, \quad I(x, s) \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial U(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (2.39)$$

који заједно са решењем (2.34) дају следеће изразе за функцију преноса за напон

$$W_{PH}(x, s) = \frac{\text{ch}((l-x)k_T(s))}{\text{ch}(lk_T(s))}, \quad (2.40)$$

## 2. Једначина телеграфичара

где је функција  $\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$  косинус хиперболички, и израз за импедансу

$$Z_{xPH}(x, s) = Z_C(s) \operatorname{ctgh}((l - x) k_T(s)), \quad (2.41)$$

а  $\operatorname{ctgh} y = \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} y}$  представља котангенс хиперболички.

### Вод коначне дужине са кратким спојем на крају

Када се има вод коначне дужине **са кратким спојем на крају** намећу се следећи гранични услови

$$Z(x, s) \Big|_{x=l} = 0, \quad U(x, s) \Big|_{x=l} = 0, \quad (2.42)$$

који заједно са решењем (2.34) дају следеће изразе за функцију преноса за напон

$$W_{KS}(x, s) = \frac{\operatorname{sh}((l - x) k_T(s))}{\operatorname{sh}(l k_T(s))} \quad (2.43)$$

и израз за импедансу

$$Z_{xKS}(x, s) = Z_C(s) \operatorname{tgh}((l - x) k_T(s)), \quad (2.44)$$

где је  $\operatorname{tgh} y = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}$  функција тангенс хиперболички.

### Вод коначне дужине затворен импедансом $Z_P$

У случају када је вод **затворен импедансом**  $Z_P$  (прикључен потрошач на крају вода) гранични услови су

$$Z(x, s) \Big|_{x=l} = Z_P(s), \quad I(x, s) \Big|_{x=l} = \frac{U(l, s)}{Z_P(s)}, \quad (2.45)$$

који уз решење (2.34) дају израз за функцију преноса за напон

$$W_{ZP}(x, s) = \frac{Z_P(s) \operatorname{ch}((l - x) k_T(s)) + Z_C(s) \operatorname{sh}((l - x) k_T(s))}{Z_P(s) \operatorname{ch}(l k_T(s)) + Z_C(s) \operatorname{sh}(l k_T(s))} \quad (2.46)$$

и израз за импедансу

$$Z_{xZP}(x, s) = Z_C(s) \frac{Z_P(s) \operatorname{ch}((l - x) k_T(s)) + Z_C(s) \operatorname{sh}((l - x) k_T(s))}{Z_P(s) \operatorname{ch}(l k_T(s)) + Z_C(s) \operatorname{sh}(l k_T(s))}. \quad (2.47)$$

Важно је напоменути да ефекат рефлексије није разматран. Детаљна извођења за све наведене случајеве граничних услова, било са разматраним ефектом рефлексије, било без ефекта рефлексије, могу се наћи у литератури теорије електричних кола [20, 21, 22, 23].



## 2.5 Фреквенцијска анализа ЈТ и специјалних случајева

Користећи се Фуријеовом трансформацијом, у овом одељку дата је фреквенцијска анализа фундаменталног решења ЈТ и њених специјалних случајева, наведених у одељку 2.2. Случајеви су анализирани за (полу)бесконачан вод побуђен Дираковим (*Paul Adrien Maurice Dirac*) сигналом, чиме су наметнути следећи гранични услови у временском

$$u(0, t) = u_0(t) = \delta(t) \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.48)$$

односно њихов еквивалент у фреквенцијском

$$U(0, \omega) = \mathcal{F}[u_0(t)] = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, \omega) = 0 \quad (2.49)$$

домену. За процесе који имају коначну брзину простирања и коефицијент слабења нула, као што нпр. таласни процеси, важе другачији (крајњи) гранични услови

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arg U(x, \omega) = -\infty \text{ и } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg U(x, \omega) = -\infty. \quad (2.50)$$

Без губитка општости, анализа је урађена за нулте почетне услове,  $u(x, 0) = 0$  и  $i(x, 0) = 0$ .

У наставку ће бити дати комплексни ликови једначина за сваки од специјалних случајева ЈТ, као и модул и аргумент одговарајуће функције преноса. Такође, биће дати изрази за модул у децибелима, где је  $|W_\infty(x, s)|_{\text{dB}}$  дефинисано као  $20 \log_{10} |W_\infty(x, s)|$ , и, иако није уобичајено да се аргумент изражава у логаритамској расподели, биће дати и изрази,  $\log |\arg W_\infty(x, s)|$ . Мотив за то јесте што је веза између аргумента и кружне учесталости у логаритамској расподели линеарна (прецизније речено афина),  $\log |\arg W_\infty(x, s)| \sim \omega$ , уз одговарајући коефицијент правца. На овај начин, проценом коефицијента правца, олакшава се тумачење карактеристика из графичког приказа на основу чега се може једноставно извршити класификација неког процеса, односно да ли је у питању процес таласне, дифузне или природе сличне статичкој дисипацији, што ће бити од нарочите користи у одељцима 4.4 и 5.3.

За одређивање израза за реални и имагинарни део коефицијента простирања, у свим случајевима, биће коришћена теорема о квадратном корену комплексног броја, (1.15).

### 2.5.1 Једначина простирања таласа

Након примене Фуријеове трансформације на једначину простирања таласа (2.17) добија се њен лик у фреквенцијском домену

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \omega) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 U(x, \omega), \quad (2.51)$$

а након уважавања граничних услова, (2.49)<sub>1</sub> и (2.50), и функција преноса, односно импулсни одзив,

$$W_\infty(x, s) = e^{-ix \frac{\omega}{c}}. \quad (2.52)$$

## 2. Једначина телеграфичара

Из (2.52) је очигледно да нема промене модула у зависности од позиције (ово важи само за једнодимензиони простор) и кружне учесталости, а да аргумент линеарно опада и са растојањем од извора, координатом  $x$ , и са (кружном) учесталošћу  $\omega$ .

$$|W_{\infty}(x, s)| = 1 \text{ и } \arg W_{\infty}(x, s) = -x \frac{\omega}{c}, \quad (2.53)$$

односно

$$|W_{\infty}(x, s)|_{\text{dB}} = 0 \text{ и } \log |\arg W_{\infty}(x, s)| = \log x + \log \frac{\omega}{c}. \quad (2.54)$$

Такође из (2.53)<sub>2</sub>, односно из (2.54)<sub>2</sub>, види се да за бесконачну брзину простирања,  $c$ , нема промене аргумента, што је и за очекивати јер је пропација трепутна.

### 2.5.2 Једначина дифузије

Комплексни лик ЈД (2.18) је

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \omega) = i \frac{\omega}{D} U(x, \omega), \quad (2.55)$$

а одговарајућа функција преноса, уз граничне услове (2.49),

$$W_{\infty}(x, s) = e^{-x \sqrt{\frac{\omega}{2D}}} e^{-ix \sqrt{\frac{\omega}{2D}}}. \quad (2.56)$$

На основу (2.56) ирази за модул и аргумент функције преноса су очигледни

$$|W_{\infty}(x, s)| = e^{-x \sqrt{\frac{\omega}{2D}}} \text{ и } \arg W_{\infty}(x, s) = -x \sqrt{\frac{\omega}{2D}}, \quad (2.57)$$

односно

$$|W_{\infty}(x, s)|_{\text{dB}} = -20x \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \log e \text{ и } \log |\arg W_{\infty}(x, s)| = \log x + \frac{1}{2} \log \frac{\omega}{2D}. \quad (2.58)$$

Треба уочити да је код дифузије аргумент корена функција кружне учесталости, за разлику од једначине простирања таласа, односно двоструко мањег нагиба у логаритамској расподели. Такође за бесконачан коефицијент дифузије,  $D$ , функција преноса дифузије ће имати иста својства као и таласни процеси за бесконачну брзину простирања,  $c$ , односно неће бити ни промене модула нити промене аргумента.

### 2.5.3 Једначина статичке дисипације

У случају статичке дисипације не постоји временска зависност, а самим тим ни фреквенцијска, тако да је у питању хомогена диференцијална једначина другог реда

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) - K^2 u(x) = 0, \quad (2.59)$$

којој одговара следеће решење

$$u(x) = e^{-xK}, \quad (2.60)$$

на полубесконачном домену, из чега је јасно да нема промене аргумента (аргумент функције преноса је нула), а да модул експоненцијално опада само са просторном координатом  $x$

$$|u(x)| = e^{-xK}, \quad (2.61)$$

односно линеарно

$$|u(x)|_{\text{dB}} = -20xK \log e, \quad (2.62)$$

гледано у децибелима.

### 2.5.4 Таласно-дифузна једначина

Применом Фуријеове трансформације на таласно-дифузну једначину, (2.20), добија се њен комплексни лик

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \omega) = \left( -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + i\frac{\omega}{D} \right) U(x, \omega), \quad (2.63)$$

а уз граничне услове и функција преноса

$$W_\infty(x, s) = e^{-\frac{x\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{1 + \left(\frac{c^2}{\omega D}\right)^2 - 1}} e^{-i\frac{x\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{1 + \left(\frac{c^2}{\omega D}\right)^2 + 1}}. \quad (2.64)$$

На основу функције преноса (2.64) изрази за модул и аргумент су

$$|W_\infty(x, s)| = e^{-\frac{x\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{1 + \left(\frac{c^2}{\omega D}\right)^2 - 1}} \quad \text{и} \quad \arg W_\infty(x, s) = -\frac{x\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{1 + \left(\frac{c^2}{\omega D}\right)^2 + 1}, \quad (2.65)$$

из чега је јасно да имају сложену зависност од учесталости. Међутим, може се показати асимптотском анализом, да се при веома високим учесталостима таласно-дифузни процеси понашају као чисто таласни, види (2.53),

$$|W_\infty(x, s)| \sim e^{-\frac{xc}{2D}} \quad \text{и} \quad \arg W_\infty(x, s) \sim -x\frac{\omega}{c}, \quad \text{за } \omega \rightarrow \infty, \quad (2.66)$$

јер за  $D \rightarrow \infty$  таласно-дифузна једначина прелази у класичну ЈПТ, а тада модул, (2.66)<sub>1</sub>, тежи јединици. При ниским учесталостима доминирају чисто дифузна својства

$$|W_\infty(x, s)| \sim e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2D}}} \quad \text{и} \quad \arg W_\infty(x, s) \sim -x\sqrt{\frac{\omega}{2D}}, \quad \text{за } \omega \rightarrow 0, \quad (2.67)$$

види (2.57).

У овом случају, као и у наредним, за апсимптотску анализу коришћена је апроксимација  $(1 + y)^p \sim 1 + py$ , за  $|y| \ll 1$ .

### 2.5.5 Дифузно-дисипативна једначина

Дифузно-дисипативна једначина

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \omega) = \left( K^2 + i \frac{\omega}{D} \right) U(x, \omega), \quad (2.68)$$

односно њој одговарајућа функција преноса

$$W_\infty(x, s) = e^{-\frac{xK}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{DK^2}\right)^2 + 1 + 1}} e^{-i \frac{xK}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{DK^2}\right)^2 + 1 - 1}}, \quad (2.69)$$

такође има сложену зависност модула и аргумента од учесталости

$$|W_\infty(x, s)| = e^{-\frac{xK}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{DK^2}\right)^2 + 1 + 1}} \quad \text{и} \quad \arg W_\infty(x, s) = -\frac{xK}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{DK^2}\right)^2 + 1 - 1}. \quad (2.70)$$

Аналогно, као код таласно-дифузних процеса, асимптотском анализом може се закључити да при високим учесталостима дифузно-дисипативни процеси имају карактер сличнији дифузији

$$|W_\infty(x, s)| \sim e^{-x \sqrt{\frac{\omega}{2D}}} \quad \text{и} \quad \arg W_\infty(x, s) \sim -x \sqrt{\frac{\omega}{2D}}, \quad \text{за } \omega \rightarrow \infty, \quad (2.71)$$

види (2.57), а при нижим учесталостима дисипацији

$$|W_\infty(x, s)| \sim e^{-xK} \quad \text{и} \quad \arg W_\infty(x, s) \sim -\frac{x\omega}{2DK} \rightarrow 0, \quad \text{за } \omega \rightarrow 0, \quad (2.72)$$

види (2.61), јер за  $D \rightarrow \infty$  дифузно-дисипативна једначина прелази у чисто дисипативну, па аргумент (2.72)<sub>2</sub> постаје нула на свим учесталостима.

### 2.5.6 Једначина телеграфичара

Након примене Фуријеове трансформације на једначину телеграфичара, (2.22), добија се

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, \omega) = \left( K^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + i \frac{\omega}{D} \right) U(x, \omega), \quad (2.73)$$

а уважавајући граничне услове и одговарајућа функција преноса

$$W_\infty(x, s) = e^{-\frac{xK}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{Kc}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{K^2 Dc}\right)^2 (c^2 - 2(KD)^2) + 1 - \left(\frac{\omega}{Kc}\right)^2 + 1}} \times e^{-i \frac{xK}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{Kc}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{K^2 Dc}\right)^2 (c^2 - 2(KD)^2) + 1 + \left(\frac{\omega}{Kc}\right)^2 - 1}}. \quad (2.74)$$

## 2.5. Фреквенцијска анализа ЈТ и специјалних случајева

Функција преноса у овом случају свакако има најсложенију фреквенцијску зависност модула

$$|W_{\infty}(x, s)| = e^{-\frac{xK}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{Kc}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{K^2 Dc}\right)^2 (c^2 - 2(KD)^2) + 1 - \left(\frac{\omega}{Kc}\right)^2 + 1}}, \quad (2.75)$$

и аргумента

$$\arg W_{\infty}(x, s) = -\frac{xK}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{Kc}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{K^2 Dc}\right)^2 (c^2 - 2(KD)^2) + 1 + \left(\frac{\omega}{Kc}\right)^2 - 1} \quad (2.76)$$

од кружне учесталости  $\omega$ . У случају високих учесталости доминирају таласна својства, па су изрази за модул и аргумент

$$|W_{\infty}(x, s)| \rightarrow 1 \text{ и } \arg W_{\infty}(x, s) \sim -x \frac{\omega}{c}, \text{ када } \omega \rightarrow \infty, \quad (2.77)$$

види (2.53), а у случају ниских учесталости до изражаја долазе својства статичке дисипације, тако да су тада изрази за модул и аргумент

$$|W_{\infty}(x, s)| \sim e^{-xK} \text{ и } \arg W_{\infty}(x, s) \sim -\frac{x\omega}{2KD} \sqrt{1 - \left(\frac{KD}{c}\right)^2} \rightarrow 0, \text{ када } \omega \rightarrow 0, \quad (2.78)$$

види (2.61). У специјалном случају када  $D \rightarrow \infty$  и  $c \rightarrow \infty$  једначина (2.73) прелази у (2.59), односно ЈТ прелази у ЈСД, а због тога и аргумент (2.78)<sub>2</sub> постаје нула на свим учесталостима. Важно је још напоменути, због (2.78)<sub>2</sub>, да је  $c > KD$ , односно  $\left(\frac{KD}{c}\right)^2 < 1$ , за свако  $R, L, G, C > 0$ .

Овим је завршена подела и анализа специјалних случајева једначине телеграфичара, што ће бити од користи касније за класификацију и тумачење њених фракционих и тополошких уопштења.



### **3. Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара**

Класична једначина телеграфичара у обзир узима само феномене простирања поремећаја и дисипације енергије, а многи други феномени: ефекат потискивања, ефекат близине, меморијски ефекти материјала, нису узети у обзир класичном једначином телеграфичара, што представља мотивацију за њено уопштење. Уколико се жели узети у обзир неки феномен који класична ЈТ не покрива, математички модел се мора уопштити тако да описује све процесе од интереса.

Постоје многобројни начини да се уопшти једначина телеграфичара, а овде су за то коришћена два приступа. Први је фракционо уопштење, односно уопштење конститутивних релација електричних елемената елементарног кола вода коришћењем фракционог рачуна, а други је топлошко уопштење, односно промена структуре елементарног кола вода, било различитим повезивањем постојећих и/или додавањем нових елемената.

Оригинални научни допринос дат је у одељцима 3.2 и 3.3.

#### **3.1 Фракционо уопштење једначине телеграфичара**

Конститутивне релације елемената елементарног кола, дате у одељку 2.1.2, уопштене су у оквиру теорије фракционог рачуна и добијене су конститутивне релације фракционих елемената. Појашњено је и који феномени на који начин се тиме узимају у обзир. Такође, дата је фракциона једначина телеграфичара, као и неки кораци њеног извођења и тумачење који процеси доминирају у зависности од реда извода који фигуришу у једначини. У наставку су наведене неке публиковане примене фракционог рачуна у електрици, које су од интереса за тезу, са акцентом на различитим начинима уопштења једначине телеграфичара користећи се елементима фракционог рачуна.

##### **3.1.1 Конститутивне релације фракционих елемената**

Конститутивне релације динамичких елемената: калема и кондензатора, се уопштавају у оквиру теорије фракционог рачуна, чиме се омогућује модели-

### 3. Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара

рање меморијских ефеката које такви елементи могу поседовати. Разлози за такво моделирање, као и последице које произилазе из таквог приступа, биће дате у опису фракционих елемената.

#### Фракциони калем

Код класичног калема веза између флукса (флукс вектора магнетске индукције),  $\phi(t)$  [Wb], и јачине струје кроз калем која изазива тај флукс,  $i_L(t)$ , линеарна је и тренутна,  $\phi(t) = L i_L(t)$ . Уколико се уведе претпоставка да флукс кроз калем не зависи само од тренутне вредности струје него и од њене историје, што је потпуно оправдано ако се имају у виду хистерезис и меморијски ефекат материјала, математичка релација која би описивала такву везу била би

$$\phi(t) = L_{\alpha} {}_0I_t^{1-\alpha} i_L(t), \quad t > 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (3.1)$$

где је  $L_{\alpha}$  фракциона индуктивност, изражена у [Hs $^{\alpha-1}$ ], а оператор  ${}_0I_t^{1-\alpha}$  представља Риман-Лиувилев фракциони интеграл (1.1). Након примене Фарадејевог (*Michael Faraday*) закона електромагнетске индукције на релацију (3.1) добија се израз за конститутивну релацију фракционог калема

$$u_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L_{\alpha} \frac{d}{{}_0D_t^{\alpha}} i_L(t) = L_{\alpha} {}_0D_t^{\alpha} i_L(t), \quad t > 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (3.2)$$

где оператор  ${}_0D_t^{\alpha}$  представља Риман-Лиувилев фракциони извод реда  $\alpha \in (0, 1)$ , види (1.4).

Калем фракционог реда, моделиран помоћу релације (3.2), понаша се као елемент чија су својства између својстава отпорника и класичног калема, односно као активно-индуктиван елемент. Такав елемент се може посматрати као (редна) веза класичног калема и фреквенцијски зависног отпорника чија отпорност је степена функција учесталости, као што је и реактанса калема, и то тако да је степен учесталости једнак реду фракционог извода  $\alpha$ . Овакав елемент припада посебној класи елемената, *CPE (constant phase element)*, код којих је фазни померај између напона и струје константан, односно независан од учесталости, а у овом случају би износио  $\varphi_L = \frac{\alpha\pi}{2}$  [rad]. Ово има за последицу да је и однос активне и реактивне снаге константан (независан од учесталости) и то тако да важи  $\frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}$ , што може бити веома корисно за моделирање у електроенергетици. Треба истаћи још једну чињеницу, а то је да иако се фракциони калем понаша као активно-индуктиван елемент, односно поседује својства и отпорника и калема, код њега су при временски константним струјама и активна и реактивна снага једнаке нули.

Приступ моделирању процеса преко оваквог фракционог калема, са сличном конститутивном релацијом, коришћен је у [27] за моделирање калема са магнетским језгром.

#### Фракциони кондензатор

Аналогно као код калема, код класичног кондензатора веза између количине наелектрисања,  $q(t)$  [C], и напона кондензатора,  $u_C(t)$ , линеарна је и тренутна,  $q(t) = C u_C(t)$ . Ако се жели узети у обзир меморијски ефекат, односно



претпоставити да наелектрисање зависи од историје напона, што је оправдано с обзиром да се поларизација диелектрика у реалности не дешава тренутно, тада је

$$q(t) = C_\gamma {}_0I_t^{1-\gamma} u_c(t), \quad t > 0, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (3.3)$$

где је са  $C_\gamma$  означена фракциона капацитивност, изражена у  $[Fs^{\gamma-1}]$ , а  ${}_0I_t^{1-\gamma}$  опет представља фракциони интеграл Риман-Лиувиловог типа. Примењујући везу између протекле количине наелектрисања и јачине електричне струје,  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ , на (3.3) долази се до конститутивне релације фракционог кондензатора

$$i_c(t) = \frac{d}{dt} q(t) = C_\gamma \frac{d}{dt} {}_0I_t^{1-\xi} u_c(t) = C_\gamma {}_0D_t^\xi u_c(t), \quad t > 0, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (3.4)$$

где је  ${}_0D_t^\gamma$  Риман-Лиувилев фракциони извод реда  $\gamma \in (0, 1)$ .

Фракциони кондензатор, моделиран као (3.4), понаша се као елемент чија су својства између својстава отпорника и класичног кондензатора, односно као активно-капацитиван елемент. Овакав елемент је аналоган (паралелној) вези класичног кондензатора и фреквенцијски зависног отпорника, где је опет отпорност степена функција учесталости, а степен једнак реду извода. Као и фракциони калем, и овај елемент припада *CPE* класи, с тим што је сада фазни померај између напона и струје  $\varphi_c = -\frac{\gamma\pi}{2}$ , такође независан од учесталости. Због тога је и код фракционог кондензатора однос активне и реактивне снаге независан од учесталости,  $\frac{Q}{P} = -\operatorname{tg} \frac{\gamma\pi}{2}$ . Наравно, и овде су за временски константне сигнале све снаге једнаке нули.

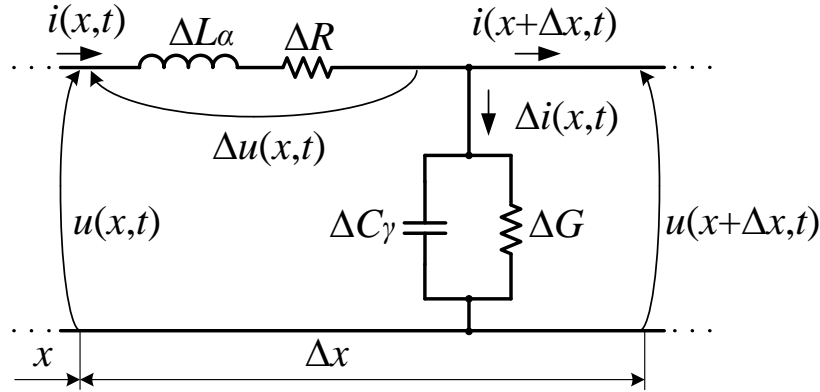
Конститутивне релације кондензатора моделиране изводима нецелог реда су посебно коришћене у [28, 29, 30, 31, 32] за описивање електрохемијских двослојних кондензатора (*electrochemical double-layer capacitors*, у даљем тексту *ED-LC*), такође познатих као суперкондензатори или ултракондензатори, са различитим тополошким претпоставкама њихових еквивалентних електричних кола. Један од првих и најпознатијих елемената типа фракционог кондензатора је Варбургова (*Emil Gabriel Warburg*) импеданса код које је  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

### 3.1.2 Фракциона једначина телеграфичара

Једначина телеграфичара, (2.15), погодна је за описивање веома широког спектра практичних проблема, али она занемарује одређене ефекте који могу бити од значаја. Нпр. процеси поларизације и магнетизације изолационог медијума се не дешавају тренутно и зависе од историје дејства вектора електричног поља и вектора магнетске индукције, а класична  $\mathbf{J} \mathbf{T}$  то не узима у обзир. Занемаривање меморијских ефеката поларизације и магнетизације, наравно, више је него оправдано када се разматра простирање нискофреквенцијских сигнала помоћу добрих водова у великим системима (електроенергетски систем, телекомуникациони системи итд.). Међутим, ти ефекти се не могу занемарити увек, поготово када је у питању простирање сигнала веома високе учесталости на системима малих димензија, нпр. *CMOS on-chip* и траксти водови на микро нивоу (*microstrip lines*).

### 3. Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара

Један од начина да се уваже претходно поменути ефекти, као и многи други, јесте математичко моделирање електричног вода помоћу фракционог рачуна. Наиме, моделирању вода се може приступити на готово исти начин као што је то урадио Хевисајд, тј. као што је показано у одељку 2.2, с том разликом што су у елементарном колу са слике 3.1 уместо класичних претпостављени фракциони динамички елементи, као из претходног одељка, 3.1.1.



Слика 3.1: Елементарно коло електричног вода са фракционим елементима.

Примењујући Кирхофове законе на коло са слике 3.1 и преласком на континуум, као у одељку 2.2, долази се до **фракционих једначина телеграфичара**, записаних у форми система фракционих парцијалних диференцијалних једначина

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = - (L_{\alpha} {}_0 D_t^{\alpha} + R) i(x, t), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = - (C_{\gamma} {}_0 D_t^{\gamma} + G) u(x, t), \quad (3.6)$$

где су са  $L_{\alpha}$  [ $\text{Hs}^{\alpha-1}/\text{m}$ ] и  $C_{\gamma}$  [ $\text{Fs}^{\gamma-1}/\text{m}$ ] обележене подужна фракциона индуктивност и подужна фракциона капацитивност, а  $\alpha$  и  $\gamma$  ( $\in (0, 1)$ ) представљају ред фракционог извода. Уврштавањем (3.6) у (3.5), претходно диференцираној по просторној координати  $x$ , долази се до **фракционе једначине телеграфичара (ФЈТ)** по напону

$$(L_{\alpha} C_{\gamma} {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} + L_{\alpha} G {}_0 D_t^{\alpha} + C_{\gamma} R {}_0 D_t^{\gamma} + RG) u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad (3.7)$$

где је коришћен услов  $\left[ {}_0 I_t^{1-\gamma} u(x, t) \right]_{t=0} = 0$  због ког, на основу (1.10), важи композиција  $D^{\alpha} D^{\gamma} = D^{\alpha+\gamma}$ .

Јасно је да ова једначина покрива све што покрива класична ЈТ, види одељак 2.2, али у много ширем смислу, јер (3.7) поред класичних обухвата и фракциону таласну једначину (фракциону једначину простирања таласа) и фракциону једначину дифузије (ФТ) и ФЈД), као и њихове комбинације заједно са једначином статичке дисипације. Види се да ће се (3.7) за  $\alpha + \gamma \in (0, 1)$  свести на

(сложенију) ФЈД, а за  $\alpha + \gamma \in (1, 2)$  на фракциону таласно-дифузну једначину (ФТДЈ).

У циљу превазилажења наведених недостатака класичне ЈТ, у последње време, појавиле су се различита уопштења ЈТ и модела електричног вода. Многи од ових модела засновани су управо на фракционим конститутивним релацијама калема и кондензатора, уместо класичним, укљученим у елементарно коло вода, види слику 2.1. Фракциони модел електричног вода који укључује калем, кондензатор и отпорник, фракционог реда, као и фреквенцијски зависну проводност, развијен је за *CMOS on-chip* водове за фреквенције реда терахерца у раду [33], док је у [34] развијен фракциони модел за *CMOS on-chip composite right/left handed transmission line* (у даљем тексту *CRLHT-line*), на истом фреквенцијском опсегу.

ФЈТ, са изводима нецелог реда по веремну, разматране су у [35, 36, 37, 38, 39], и решаване су, како аналитичким, тако и нумеричким методима, на коначном или полубесконачном домену, док је у [40, 41] укључен и члан који представља побудни сигнал. ФЈТ чији су чланови фракционе диференцијације реда,  $\alpha$  и  $\beta$ , у опсегу од нула до два, разматрана је у [42, 43]. Вишечлана (*multi-term*) ФЈТ са изводима реда  $n\alpha$ , где је  $\alpha$  између нула и један, а  $n$  природан број, разматрана је у [44], док су у [45], поред извода реда  $\alpha$  и  $\alpha - 1$ ,  $\alpha \in (1, 2)$ , укључени и линеарни члан непознате функције, као и побудни сигнал. У [46, 47] највиши ред извода нецелог реда по времену не прелази један, чиме су обухваћени процеси дифузног карактера.

ФЈТ са нецелим изводима по простору, реда између нула и један, као и са класичним првим и другим изводом по времену разматрана је у [48], док је у [49], иста једначина, у коју је још укључен и побудни члан, решена коришћењем метода таласића (*wavelet methods*).

ФЈТ са нецелим изводима и по простору и по времену, са два извода по времену различитог реда (први између један и два и други између нула и један) и фракционим Лапласијаном, разматрана је у [50, 51], док су у [52] изводи по времену реда  $2\gamma$  и  $\gamma$ , где је  $0 < \gamma < 1$ . Једначине са несиметричним фракционим изводима по простору и изводима по времену реда  $2\alpha$  и  $\alpha$ , односно  $\alpha + 1$  и  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , у којима постоји линеарни члан непознате функције, разматране су и решаване у [53] и [54], респективно, користећи Лапласову и Фуријеову трансформацију.

## 3.2 Тополошка уопштења ФЈТ

У овом одељку дата су нека од могућих тополошких (и фракционих) уопштења модела електричног вода, као и уопштена фракциона једначина телеграфичара којом се такав вод моделира. За свако од уопштења дата је схема и математички модел у виду фракционе парцијалне диференцијалне једначине (без извођења) којом је описана зависност напона између проводника вода од позиције и времена,  $u(x, t)$ . Такође, за сваку топологију, дати су изрази за редну подужну импедансу  $Z(s)$  и за коефицијент простирања  $k(s)$ , 2.32, односно његову поткорену вредност  $\psi(s)$ , види одељак 2.3.

### 3. Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара

Тополошке промене се огледају у томе што је претпостављено да у редној грани, поред отпорности  $\Delta R$  и фракционе индуктивности  $\Delta L_\alpha$ , за разлику од топологије ФЈТ са схеме на слици 3.1, постоји и фракциона капацитивност  $\Delta C_\beta$ . Разлог за додавање кондензатора баш у редну грану је то што се жели узети у обзир нагомилавање наелектрисања дуж проводне гране, као и утицај „кретања” везаних наелектрисања на магнетско поље, односно магнетску спрегу, као и на Џулове губитке. Топологије ће се међусобно разликовати по начину повезивања елемената у редној грани ( $\Delta R$ ,  $\Delta L_\alpha$  и  $\Delta C_\beta$ ), а елементе је могуће повезати на осам различитих начина.

Што се тиче оточне гране, њене тополошке промене неће се разматрати, јер неће имати за последицу ниједан нови математички модел, односно једначину, у односу на оне које ће бити добијене променом топологије редне гране. Тако да ће топологија оточне гране остати идентична као на моделу са слике (2.1), односно састојаће се од паралелне везе оточне проводности  $\Delta G$  и оточне капацитивности  $\Delta C_\gamma$ . Пошто у оточној грани неће бити никаквих тополошких манипулација израз за подужну оточну адмитансу биће исти за све топологије елементарног кола

$$Y(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Y(s)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C_\gamma s^\gamma + \Delta G}{\Delta x} = C_\gamma s^\gamma + G \text{ [S]}. \quad (3.8)$$

Приликом извођења математичког модела, за сваку од топологија, претпостављени су нулти (фракциони) почетни услови

$$\left[ {}_0 I_t^{1-\xi} f(x, t) \right]_{t=0} = 0 \quad (3.9)$$

где је  $\xi = \alpha, \beta, \gamma$  и  $\xi \in (0, 1)$ , а  $f(t)$  је одгаварајући напон или струја. Овим су обезбеђени услови за композицију фракционих оператора, види (1.8 - 1.10). Детаљно извођење ће бити дато накнадно и то само за једну топологију, јер су кораци за добијање математичког модела било које топологије готово идентични. Важно је напоменути да услов (3.9) нема значаја код квазистационарног стања, односно код анализе простопериодичних режима.

Као и код стандардног модела вода и класичне ЈТ, види одељак (2.2), у математичким моделима неће фигурисати вредности параметера из елементарног кола вода,  $\Delta R$ ,  $\Delta L_\alpha$ ,  $\Delta C_\beta$ ,  $\Delta G$  и  $\Delta C_\gamma$ , већ фракциони подужни параметри вода,  $R$ ,  $L_\alpha$ ,  $C_\beta$ ,  $G$  и  $C_\gamma$ .

Топологије су, на основу математичког модела, класификоване у три групе у зависности које феномене покривају. Класификација је извршена на основу највишег реда једначине, односно разлике највишег реда извода по времену уз линеарни члан и други извод по простору (разлика највишег реда извода леве и десне стране једначине). Тако, ако ред једначине припада интервалу  $(0, 2)$  том једначином се могу описати сви процеси од статичке дисипације, преко дифузије, до таласних процеса (укључујући и фракционе); ако је ред једначине у интервалу  $(0, 1)$  та једначина може да узме у обзир само процесе од статичке дисипације до дифузивних (укључујући и фракционе и класичне); и уколико је ред једначине из интервала  $(-1, 1)$  у питању је специјалан случај који уважава феномене на интервалу од статичке дисипације до дифузије, али и феномене нижег реда од статичке дисипације.

Како би једначине биле прегледније и једноставније за тумачење уведене су и фракционе временске константе

$$\tau_\alpha = \frac{L_\alpha}{R} [s^\alpha], \quad \tau_\beta = RC_\beta [s^\beta], \quad \tau_\gamma = \frac{C_\gamma}{G} [s^\gamma], \quad (3.10)$$

којим се описују процеси пражњења нагомилане енергије у акумулационим елементима: пражњење фракционе индуктивности  $L_\alpha$  преко отпорности  $R$ , пражњење фракционе капацитивности  $C_\beta$  преко отпорности  $R$  и пражњење фракционе капацитивности  $C_\gamma$  преко проводности  $G$ , респективно.

Такође, уведене су и ознаке за импедансе елемената редне гране елементарног кола

$$\Delta Z_R = \Delta R [\Omega], \quad \Delta Z_\alpha = s^\alpha \Delta L_\alpha [\Omega], \quad \Delta Z_\beta = \frac{1}{s^\beta \Delta C_\beta} [\Omega], \quad (3.11)$$

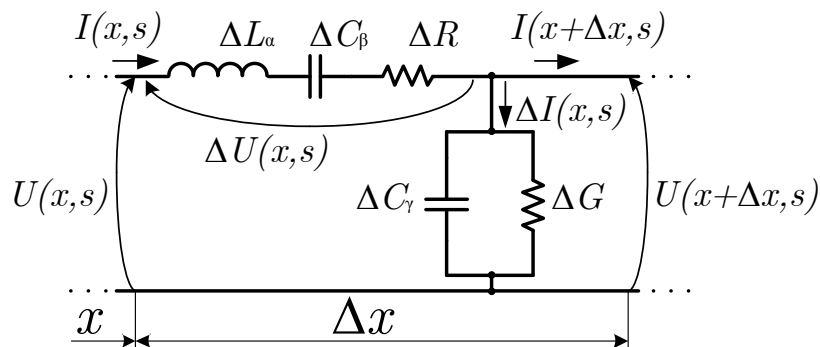
док  $K = \sqrt{RG} [m^{-1}]$  представља коефицијент статичког слабљења, као што је већ речено у одељку 2.2.

### 3.2.1 Топологије таласно-дифузних процеса

Топологије код којих највиши ред одговарајуће једначине (разлика највишег реда извода уз чланове  $u(x, t)$  и уз  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$ ) припада интервалу  $(0, 2)$ , односно које уважавају читав спектар процеса од статичке дисипације до чисто таласних процеса, наведене су у наставку.

#### Редна веза отпорника, калема и кондензатора

Нека су елементи редне гране: отпорник отпорности  $\Delta R$ , фракциони калем индуктивности  $\Delta L_\alpha$  и фракциони кондензатор капацитивности  $\Delta C_\beta$ , редно везани, као на схеми са слике 3.2,



Слика 3.2: Схема тополошког уопштења елементарног кола вода.

### 3. Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара

тада је израз за подужну редну импедансу

$$Z(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z_\alpha + \Delta Z_R + \Delta Z_\beta}{\Delta x} = \frac{L_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + RC_\beta s^\beta + 1}{C_\beta s^\beta}. \quad (3.12)$$

Недостатак ове топологије је њена физичка бесмисленост за временски константне и нискофреквентне сигнале, јер се тада кондензатор понаша као прекид, односно за  $s = i\omega$  и  $\omega \rightarrow 0$  важи  $\Delta Z \sim \Delta Z_\beta \rightarrow \infty$ . Други недостатак је што сва три елемента имају јединствену струју, а то значи да Џулови губици на отпорнику и магнетско поље калема настају само као последица „кретања” везаног наелектрисања (уз претпоставку да кроз фракциони кондензатор нема кретања слободних наелектрисања). Међутим, поред ових недостатака, моделирање вода на овај начин је дало добре резултате у неким проблемима микро- и наноелектронике на веома широком спектру учесталости, све до реда десетина гигахерца.

Једначина која одговара топологији са слике 3.2 је

$$K^2(\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} + \tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\beta \tau_\gamma {}_0D_t^{\beta+\gamma} + \tau_\beta {}_0D_t^\beta + \tau_\gamma {}_0D_t^\gamma + 1)u(x, t) = \tau_\beta {}_0D_t^\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t). \quad (3.13)$$

Једначина (3.13) је реда  $\alpha + \gamma (= \alpha + \beta + \gamma - \beta)$ , а како су  $\alpha, \gamma \in (0, 1)$ , јасно је да је ред једначине  $\alpha + \gamma \in (0, 2)$ , односно да се ради о фракционој таласно-дифузној једначини.

Коефицијент простирања дат је изразом

$$k^2(s) = \psi(s) = K^2 \frac{(\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\beta s^\beta + 1)(\tau_\gamma s^\gamma + 1)}{\tau_\beta s^\beta}. \quad (3.14)$$

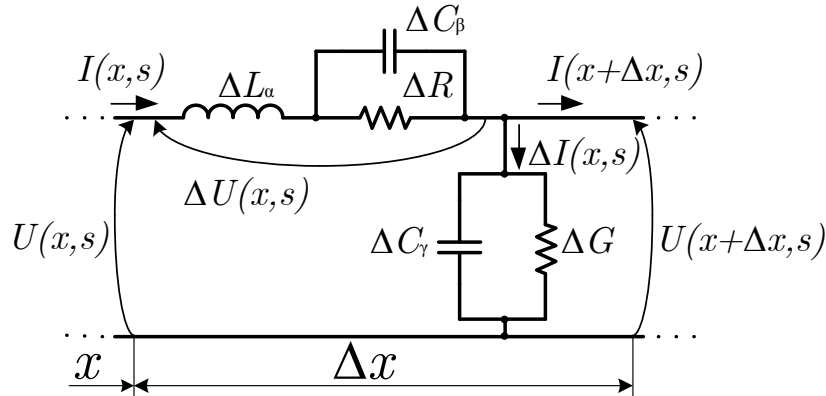
Из израза 3.14 је јасно да за временски константне сигнале ( $s = i\omega$  и  $\omega \rightarrow 0$ ) статички коефицијент слабљења  $k(0)$  неће бити (као код већине других топологија)  $k(0) = K = \sqrt{RG}$ , него ће да тежи бесконачности, што према изразу за функцију преноса (2.37) имплицира да неће постојати пренос временски константног сигнала. Ово је последица редно везаног кондензатора у редној грани.

#### **Редна веза калема са паралелном везом отпорника и кондензатора**

Када је калем  $\Delta L_\alpha$ , везан редно са паралелном везом отпорника  $\Delta R$  и кондензатора  $\Delta C_\beta$ , елементарно коло вода изгледа као на схеми са слике 3.3. Подужна импеданса редне гране тада је дефинисана следећим изразом

$$Z(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z_\alpha + \Delta Z_R \parallel \Delta Z_\beta}{\Delta x} = \frac{RL_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + L_\alpha s^\alpha + R}{RC_\beta s^\beta + 1}. \quad (3.15)$$

Ова топологија је интересантна са више аспеката. Као прво, кондензатор  $\Delta C_\beta$ , који се на временски константним сигнаlima понаша као прекид, неће изазвати прекид читаве редне гране, односно вод ће преносити и временски константне сигнале. Друго, на снагу Џулових губитка, која се развија на отпорнику



Слика 3.3: Схема тополошког уопштења елементарног кола вода.

$\Delta R$ , утицаће само кретање слободних наелектрисања, јер су  $\Delta R$  и  $\Delta C_\beta$  везани паралелно па струја кроз њих није иста. Магнетска спрега, односно магнетско поље кроз контуру коју чине проводници вода, последица је кретања и слободног и везаног наелектрисања у редној грани, пошто је струја калема  $\Delta L_\alpha$  збир струја отпорника  $\Delta R$  и кондензатора  $\Delta C_\beta$ , види слику 3.3.

Математички модел топологије са слике 3.3 описан је следећом једначином

$$K^2(\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} + \tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\gamma} + \tau_\alpha {}_0D_t^\alpha + \tau_\gamma {}_0D_t^\gamma + 1)u(x, t) = (\tau_\beta {}_0D_t^\beta + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad (3.16)$$

Једначина (3.16) истог је реда као и (3.13) ( $\alpha + \gamma \in (0, 2)$ ), што представља разлику највишег ред извода по времену с леве стране и највишег ред извода по времену с десне стране знака једнакости. Овај модел вода такође обухвата читав спектар феномена од статичке дисипације до чисто таласних, а једначина (3.16) припада класи фракционих таласно-дифузивних једначина.

Коефицијент простирања дефинисан је изразом

$$k^2(s) = \psi(s) = K^2 \frac{(\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha s^\alpha + 1)(\tau_\gamma s^\gamma + 1)}{\tau_\beta s^\beta + 1} \quad (3.17)$$

и разликује се од претходног (3.14) за веома важан детаљ. Наиме, у овом случају, када су у питању временски константни сигнали ( $s = i\omega$  и  $\omega \rightarrow 0$ ) статички коефицијент слабљења биће једнак  $k(0) = K = \sqrt{RG}$ , односно одговараће класичном случају статичке дисипације, види одељак 2.2.3.

### 3.2.2 Топологије дифузно-дисипативних процеса

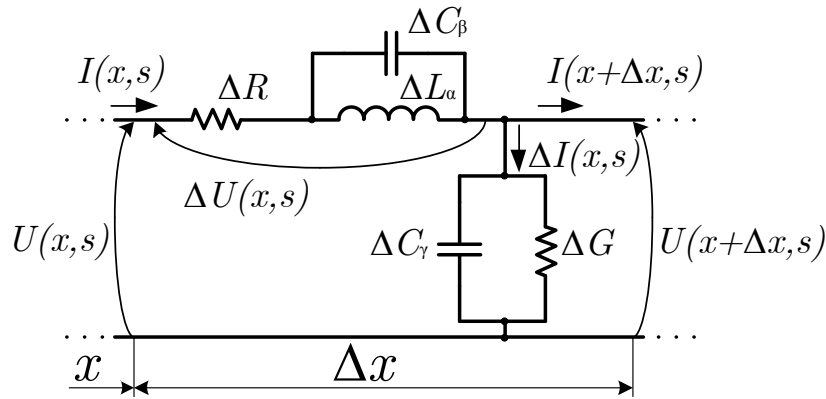
У ову класу сврстане су топологије код којих ред једначине, математичког модела, припада интервалу  $(0, 1)$ , што представља класу фракционих дифузно-дисипативних једначина, а која могу да узму у обзир спектар феномена између статичке дисипације и класичне дифузије, види одељке 2.2.2 и 2.2.3.

**Редна веза отпорника са паралелном везом калема и кондензатора**

На схеми са слике 3.4 приказан је трећи начин уопштења елементарног кола, где је отпорник отпорности  $\Delta R$  везана на ред са паралелном везом калема индуктивности  $\Delta L_\alpha$  и кондензатором капацитивности  $\Delta C_\beta$ . Оваква топологија елементарног кола вода има за последицу да снагу дисипације на отпорнику  $\Delta R$  изазива збир калема и кодензатора, односно струје која генерише магнетско поље и струје везаних наелектрисања. Такође, код ове топологије, „кретање” везаних наелектрисања не учествује у стварању магнетског поља. На основу елементарног кола вода, чија је схема дата на слици 3.4, израз за подужну импедансу редне гране је

$$Z(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z_R + \Delta Z_\alpha \parallel \Delta Z_\beta}{\Delta x} = \frac{RL_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + L_\alpha s^\alpha + R}{L_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + 1}, \quad (3.18)$$

која за временски константне сигнале тежи само отпорности отпорника  $\Delta R$ , односно за  $s = i\omega$  и  $\omega \rightarrow 0$  добија се  $\Delta Z \rightarrow \Delta Z_R$ .



Слика 3.4: Схема тополошког уопштења елементарног кола вода.

Једначина која моделира ову топологију је

$$K^2(\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} + \tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\gamma} + \tau_\alpha {}_0D_t^\alpha + \tau_\gamma {}_0D_t^\gamma + 1)u(x, t) = (\tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad (3.19)$$

и реда је  $\gamma$ . Једначина 3.19 припада класи фракционих дифузно-дисипативних једначина и уважава процесе од статичке дисипације до дифузије.

Коефицијент простирања, у случају топологије са слике 3.4, дефинисан је изразом (3.20)

$$k^2(s) = \psi(s) = K^2 \frac{(\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha s^\alpha + 1)(\tau_\gamma s^\gamma + 1)}{\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + 1}, \quad (3.20)$$

из ког се може закључити да ће коефицијент статичког слабљења бити  $k(0) = K = \sqrt{R\bar{G}}$ .

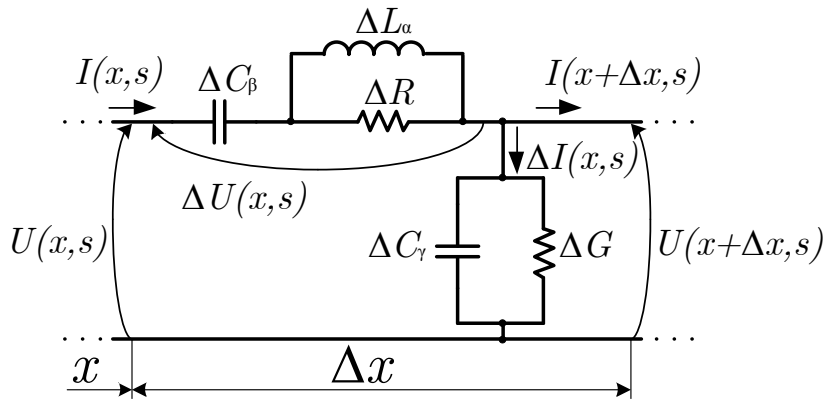


**Редна веза кондензатора са паралелном везом отпорника и калема**

Редна грана елементарног кола приказаног на слици 3.5 састоји се од кондензатора  $\Delta C_\beta$  редно повезаног са паралелном везом калема  $\Delta L_\alpha$  и отпорника  $\Delta R$ . Подужна импеданса редне гране дата је следећим изразом

$$Z(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z_\alpha \parallel \Delta Z_R + \Delta Z_\beta}{\Delta x} = \frac{RL_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + L_\alpha s^\alpha + R}{L_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + RC_\beta s^\beta}, \quad (3.21)$$

на основу које се може закључити да ова топологија има исти недостатак као и топологија из одељка 3.2.1, а то је да се, због кондензатора  $\Delta C_\beta$ , редна грана понаша као прекид за временски константне сигнале, јер за  $s = i\omega$  и  $\omega \rightarrow 0$  важи  $\Delta Z \sim \Delta Z_\beta \rightarrow \infty$ . У овом случају, струја услед које се јављају Џулови губици различита је од струје која ствара магнетско поље, али су обе последица „кретања” искључиво везаног наелектрисања, што физички није смислено.



Слика 3.5: Схема тополошког уопштења елементарног кола вода.

Математички модел топологије 3.5 описан је једначином 3.22

$$K^2 (\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} + \tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\gamma} + \tau_\alpha {}_0D_t^\alpha + \tau_\gamma {}_0D_t^\gamma + 1) u(x, t) = (\tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\beta {}_0D_t^\beta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad (3.22)$$

која је реда  $\gamma$  и припада класи фракционих дифузно-дисипативних једначина.

Коефицијент простирања за топологију са слике 3.5 је

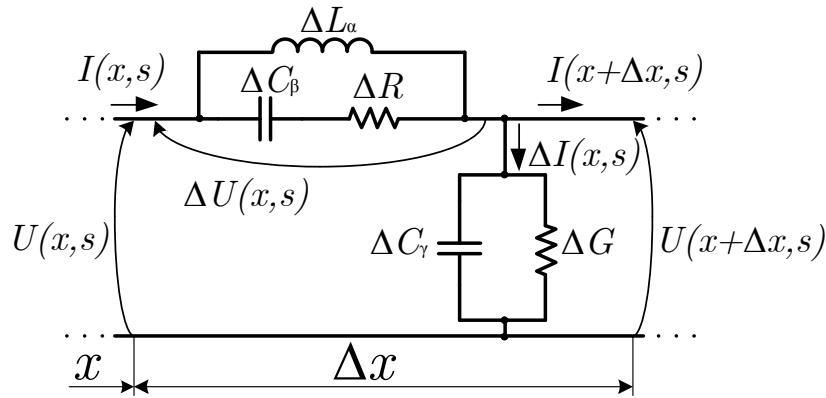
$$k^2(s) = \psi(s) = K^2 \frac{(\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha s^\alpha + 1)(\tau_\gamma s^\gamma + 1)}{\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\beta s^\beta}, \quad (3.23)$$

на основу кога се може закључити да неће бити простирања временски константног сигнала, као и код топологије из одељка 3.2.1, јер статички коефицијент слабљења  $k(0) \rightarrow \infty$  када  $\omega \rightarrow 0$ .

**Паралелна веза калема са редном везом отпорника и кондензатора**

Када су елементи редне гране повезани као на схеми са слике 3.6, односно када је фракциони калем  $\Delta L_\alpha$  повезан паралелно са редном везом отпорника  $\Delta R$  и фракционог кондензатора  $\Delta C_\beta$ , израз за подужну импедансу је

$$Z(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z_\alpha \parallel (\Delta Z_R + \Delta Z_\beta)}{\Delta x} = \frac{RL_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + L_\alpha s^\alpha}{L_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + RC_\beta s^\beta + 1}. \quad (3.24)$$



Слика 3.6: Схема тополошког уопштења елементарног кола вода.

Код ове топологије магнетско поље настаје само услед кретања слободног наелектрисања, док Џулови губици настају само услед „кретања” везаног наелектрисања. Специфичност ове топологије је што за временски константне сигнале уопште неће постојати слабљење напонског сигнала дуж вода, јер ће импеданса редне гране бити нула,  $\Delta Z \sim \Delta Z_\alpha \rightarrow 0$  за  $s = i\omega$ ,  $\omega \rightarrow 0$ , те ће и промена напона дуж вода,  $\Delta U(x, \omega)$ , бити нула. Ово својство последица је тога што се калем индуктивности  $\Delta L_\alpha$  налази сам у горњој редној грани, а калем се за временски константне сигнале понаша као кратак спој. Важно је напоменути да без обзира што нема губитка напона, губици струје ће постојати, јер проводност (адмитанса) оточне гране није нула за временски константне сигнале, види израз за оточну адмитансу, (3.8).

Једначина којом се математички моделира ова топологија је

$$K^2 (\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} + \tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\gamma} + \tau_\alpha {}_0D_t^\alpha) u(x, t) = (\tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\beta {}_0D_t^\beta + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad (3.25)$$

и као код већине топологија реда је  $\gamma$ , односно уважава додифузне процесе.

Из израза за коефицијент простирања

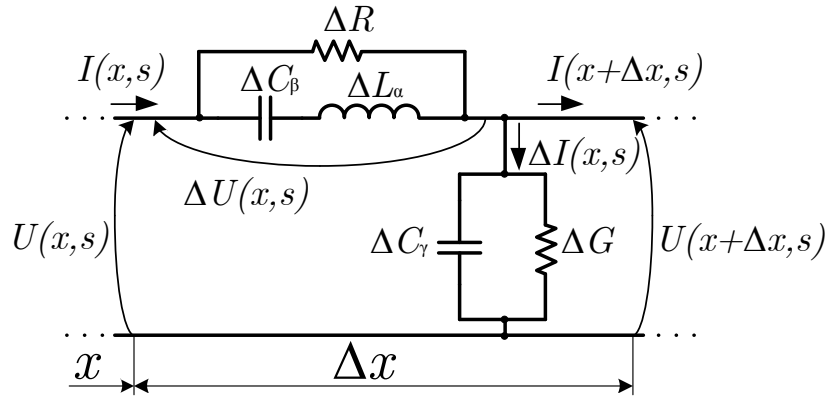
$$k^2(s) = \psi(s) = K^2 \frac{(\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha s^\alpha) (\tau_\gamma s^\gamma + 1)}{\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\beta s^\beta + 1} \quad (3.26)$$

може се извести исти закључак као из израза за импедансу 3.24, а то је да неће постојати слабење временски константног сигнала, јер је  $k(0) = 0$ .

### Паралелна веза отпорника са редном везом калема и кондензатора

У овом случају редна грана састоји се од отпорника  $\Delta R$  паралелно везаног са редном везом капацитивности  $\Delta C_\beta$  и индуктивности  $\Delta L_\alpha$ , види схему са слике 3.7. Подужна импеданса дефинисана је изразом

$$Z(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta Z_\alpha + \Delta Z_\beta) \parallel \Delta Z_R}{\Delta x} = \frac{RL_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + R}{L_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + RC_\beta s^\beta + 1}. \quad (3.27)$$



Слика 3.7: Схема тополошког уопштења елементарног кола вода.

На основу топологије са слике 3.7 јасно је да ће Џулови губици настајати само услед кретања слободног наелектрисања, струје кроз отпорник, а магнетско поље само услед „кретања” везаног наелектрисања, струја кроз кондензатор и калем. Такође, на основу израза (3.27) може се закључити да ће за временски константне сигнале подужна импеданса вода  $Z(s)$  тежити само подужној отпорности вода  $R$ , што је последица  $\Delta Z_\beta \rightarrow \infty$ , за  $s = i\omega$ ,  $\omega \rightarrow 0$  (доња редна грана) види слику 3.7.

Математички модел топологије вода са слике 3.7 дефинисан је једначином (3.28),

$$\begin{aligned} & K^2 (\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} + \tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\gamma {}_0D_t^\gamma + 1) u(x, t) \\ &= (\tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\beta {}_0D_t^\beta + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

која је реда  $\gamma$  и припада класи фракционих дифузно-дисипативних једначина. Коефицијент простирања дефинисан изразом 3.29

$$k^2(s) = \psi(s) = K^2 \frac{(\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + 1)(\tau_\gamma s^\gamma + 1)}{\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\beta s^\beta + 1} \quad (3.29)$$

### 3. Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара

за временски константне сигнале своди се на коефицијент слабљења статичке дисипације,  $k(0) = K = \sqrt{RG}$ .

#### 3.2.3 Специјалне топологије

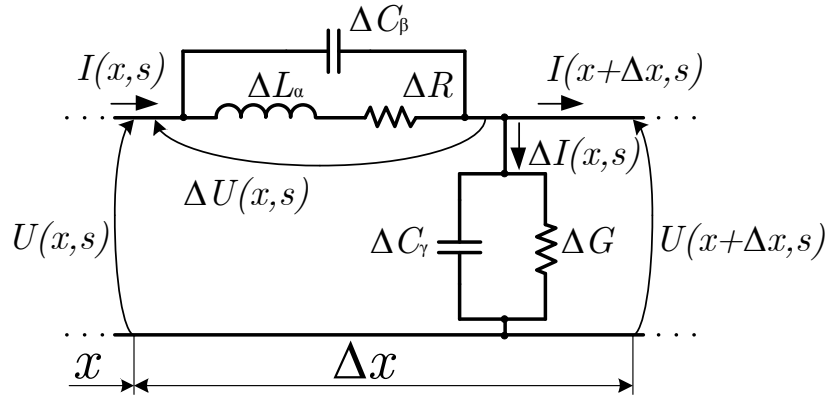
У ову групу спадају топологије које су математички моделиране једначинама реда из интервала  $(-1, 1)$ , што значи да се њима описују процеси чија су својства нешто између својстава статичке дисипације и својстава процеса који би био описан једначином

$$\int_0^t u(x, \tau) d\tau = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t). \quad (3.30)$$

#### Паралелна веза кондензатора са редном везом калема и отпорника

Код топологије где је елементарно коло вода уопштено као на слици 3.8, односно где је кондензатор  $\Delta C_\beta$  паралелно везан са редном везом калема  $\Delta L_\alpha$  и  $\Delta R$ , израз за подужну редну имепдасну је

$$Z(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta Z_\alpha + \Delta Z_R) \parallel \Delta Z_\beta}{\Delta x} = \frac{L_\alpha s^\alpha + R}{L_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + R C_\beta s^\beta + 1}. \quad (3.31)$$



Слика 3.8: Схема тополошког уопштења елементарног кола вода.

Топологија са слике 3.8 има за последицу да иста струја, кретање слободних наелектрисања, изазива Џулове губитке и ствара магнетско поље, а да „кретање” везаног наелектрисања не учествује ни у једном од та два феномена. Подужна редне имепданса вода  $Z(s)$ , за временски константне сигнале, тежиће подужној отпорности  $R$ , види израз (3.31).

Једначина којом се математички моделује топологија са слике 3.8 је

$$K^2 (\tau_\alpha \tau_\gamma {}_0D_t^{\alpha+\gamma} + \tau_\alpha {}_0D_t^\alpha + \tau_\gamma {}_0D_t^\gamma + 1) u(x, t) = (\tau_\alpha \tau_\beta {}_0D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\beta {}_0D_t^\beta + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t). \quad (3.32)$$

Из (3.32) види се да је једначина реда  $\gamma - \beta$ , што значи да за  $\gamma > \beta$  описује процесе између статичке дисипације и класичне дифузије, а за  $\gamma < \beta$  процесе између статичке дисипације и процеса који би били описани једначином (3.30).

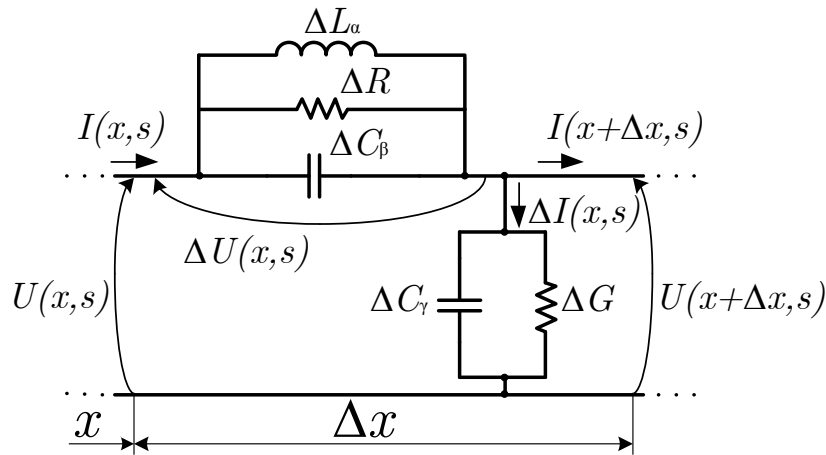
Коефицијент простирања дефинисан је изразом

$$k^2(s) = \psi(s) = K^2 \frac{(\tau_\alpha s^\alpha + 1)(\tau_\gamma s^\gamma + 1)}{\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\beta s^\beta + 1}, \quad (3.33)$$

и временски константне сигнале своди се на коефицијент слабљења статичке дисипације,  $k(0) = K = \sqrt{RG}$ .

### Паралелна веза отпорника, калема и кондензатора

Код топологије чије је елементарно коло приказано на слици 3.9 сва три елемента редне гране,  $\Delta L_\alpha$ ,  $\Delta R$  и  $\Delta C_\beta$ , везана су паралелно. Због овакве везе елемента струја која ствара магнетско поље, струја која изазива ефекат Џулових губитака и „кретање” везаног наелектрисања су три потпуно независне струје, а њихова сума представља укупну струју редне гране  $I(x, s)$ .



Слика 3.9: Схема тополошког уопштења елементарног кола вода.

На основу схеме 3.9 подужној импеданси редне гране одговара следећи израз

$$Z(s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Z_\alpha \parallel \Delta Z_\beta \parallel \Delta Z_R}{\Delta x} = \frac{RL_\alpha s^\alpha}{RL_\alpha C_\beta s^{\alpha+\beta} + L_\alpha s^\alpha + R}. \quad (3.34)$$

Из (3.34) види се да ће за временски константне сигнале редна импеданса бити нула, јер за  $\omega \rightarrow 0$  ( $s = i\omega$ ) следи  $\Delta Z \sim \Delta Z_\alpha \rightarrow 0$ . То значи да неће постојати губици у преносу временски константних сигнала, као код топологије 3.2.2.

Ова топологија моделира се једначином (3.35)

$$\begin{aligned} & K^2 (\tau_\alpha \tau_\gamma {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} + \tau_\alpha {}_0 D_t^\alpha) u(x, t) \\ & = (\tau_\alpha \tau_\beta {}_0 D_t^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha {}_0 D_t^\alpha + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3. Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара

која је реда  $\gamma - \beta$ , као и (3.32), што значи да за  $\gamma > \beta$  описује дифузно-дисипативне процесе, а за  $\gamma < \beta$  процесе нижег реда од статичке дисипације.

Коефицијента простирања дефинисан изразом (3.36),

$$k^2(s) = \psi(s) = K^2 \frac{\tau_\alpha s^\alpha (\tau_\gamma s^\gamma + 1)}{\tau_\alpha \tau_\beta s^{\alpha+\beta} + \tau_\alpha s^\alpha + 1}, \quad (3.36)$$

за временски константне сигнале је нула ( $k(0) = 0$ ), што значи да при преносу неће бити слабљења временски константних сигнала, као код топологије 3.2.2.

Још једно важно својство разликује специјалне топологије од прве и друге групе топологија, таласно-дифузних и дифузно-дисипативних. Наиме, код свих топологија коефицијент простирања је количник степених функција кружне учесталости  $\omega$  ( $s = i\omega$ ), с тим што је код првих шест топологија степена функција у бројиоцу, функције  $k(\omega)$ , вишег реда од степене функције у имениоцу за свако  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ . То значи да када учесталост тежи у бесконачност,  $\omega \rightarrow \infty$ , и коефицијент простирања тежи у бесконачност,  $k(\omega) |_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$ , чиме функција преноса (2.37) постаје нула, а то значи да практично престаје пренос сигнала. С друге стране, код специјалних топологија, степена функција у бројиоцу, функције  $k(\omega)$ , нижег је реда од степене функције у имениоцу, за  $\beta > \gamma$ , тако да за  $\omega \rightarrow \infty$  следи  $k(\omega) \rightarrow 0$ , а то значи да модул функције преноса (2.37) тежи у јединицу, односно да ће се пренос сигнала одвијати без губитака.

До истих закључка се могло доћи анализом имеданси, односно адмитанси елементарног кола. Наиме, код свих топологија адмитанса (проводност) оточне гране,  $\Delta Y(s)$ , тежи у бесконачност за  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $s = i\omega$ , и то са степеном  $\gamma$ . Код специјалних топологија и адмитанса редне гране (реципрочна вредност импедансе у редној грани,  $\Delta Z(s)$ ) тежи у бесконачност за  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $s = i\omega$ , и то са степеном  $\beta$ . Дакле, код специјалних топологија, за  $\beta < \gamma$ , односно када је капацитивни карактер израженији код  $\Delta C_\gamma$  него код  $\Delta C_\beta$ , за  $\omega \rightarrow \infty$  проводност оточне гране је „бесконачно пута већа” (брже тежи у бесконачност) него проводност редне гране па се читав вод понаша као кратак спој, те због тога нема преноса напона. С друге стране, када је  $\beta > \gamma$ , односно када је  $\Delta C_\beta$  ближе по својствима класичном кондензатору него што је то  $\Delta C_\gamma$ , за  $\omega \rightarrow \infty$  проводност редне гране је „бесконачно пута већа” од проводности оточне гране, због чега се вод практично понаша као идеалан па се пренос напонског сигнала одвија без губитака.

Овим су представљене све топологије и њихови математички модели, дата су тумачења феномена који уважавају поједине топологије, као и дијапазон процеса који може да покрије свака од њих.

Важно је уочити да је код свих топологија најсложенији (нормирани) члан поткореног дела коефицијента простирања, ( $k$ )  $\psi$ , облика

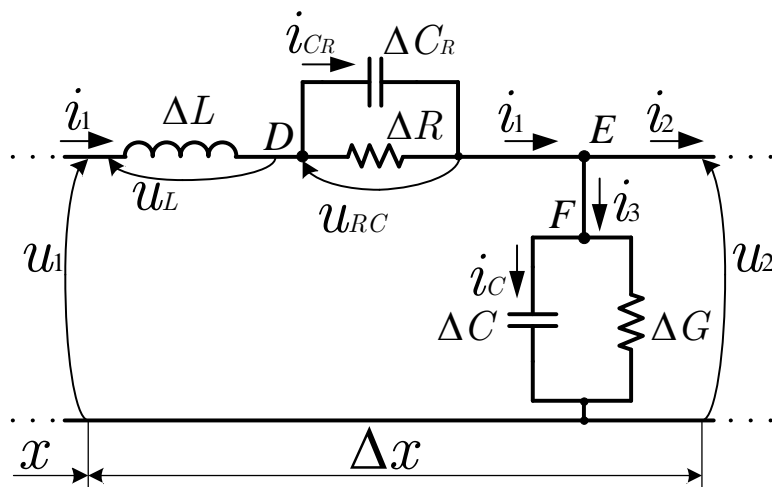
$$s^{\xi+\zeta} + as^\xi + b = 0, \quad \xi, \zeta \in (0, 1), \quad a, b > 0, \quad (3.37)$$

где  $a$  и  $b$  зависе од параметара  $R, L, G$  и  $C$  и топологије, што имплицира да је анализа тачака гранања коефицијента простирања независна од топологије елементарног кола.

### 3.3 Формулација уопштеног модела електричног вода

Анализом спроведеном у одељку 3.2 установљено је да само две топологије могу да моделирају и таласне и дифузне процесе, што их чини знатно погоднијим за опис много ширег спектра феномена и издваја их као најинтересантније за даљу анализу. Недостатак топологије редне везе отпорника, калема и кондензатора је што не дозвољава пренос временски константних сигнала (кондензатор се понаша као прекид), а и ефекат Џулових губитака је последица „кретања” везаних наелектрисања, што не одговара физичком смислу Џуловог ефекта (претварање кинетичке енергије електрона у топлотну енергију). Такође, уколико струја кроз фракциони кондензатор постоји само услед кретања везаног наелектрисања, у редној грани уопште не постоји струја услед кретања слободних наелектрисања, па самим тим ни допринос њиховог кретања Џуловим губицима, а у том случају и магнетско поље је последица само струје везаних наелектрисања, што је такође недостатак овог модела. Топологија редне везе калема са паралелном везом отпорника и кондензатора, види слику 3.10, нема ових недостатака: постоји пренос временски константних сигнала, магнетско поље је последица кретања обе врсте наелектрисања, а Џулови губици настају само услед кретања слободних наелектрисања.

Наведена својства топологије са слике 3.10 чине да управо она буде одабрана за модел електричног вода, те ће бити дато детаљно извођење математичког модела, као и испитивање његових својстава. Кораци који ће бити изнети су потпуно примењиви на формулацију модела и анализу било које топологије. Елементарно коло ће наравно тополошки бити идентично као на схеми са слике 3.3, с тим што ће поједини параметри бити другачије означени, види слику 3.10. Пре свега, код фракционих акумулационих елемената изостављени су



Слика 3.10: Елементарно коло изабране топологије.

### 3. Фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара

индекси  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  који су указивали на ред извода у конститутивној релацији самог елемента. Уз капацитивност у редној грани додат је индекс  $R$  као би асоцирао да је то капацитивност из редне гране, као и да је та капацитивност паралелно са  $R$ , а не са  $G$ . Такође, на схеми су обележени одговарајући чворови, струје и напони како би се олакшало постављање и разумевање једначина математичког модела, који ће бити представљен као систем парцијалних фракционих диференцијалних једначина, али и на алтернативан начин, преко уопштене фракционе једначине телеграфичара (УФЈТ), види [2].

При формулацији математичког модела електричног вода, чије је елементарно коло приказано на слици 3.10, коришћен је први (струјни) Кирхофов закон за чворове  $D, E$  и  $F$ , као и други (напонски) Кирхофов закон за контуру по ободу елементарног кола, а као резултат добијен је следећи систем алгебарских једначина

$$i_1 = \frac{u_{RC}}{\Delta R} + i_{CR}, \quad i_1 = i_2 + i_3, \quad i_3 = i_C + \Delta G u_2, \quad (3.38)$$

$$u_L + u_{RC} + u_2 - u_1 = 0. \quad (3.39)$$

У складу са конститутивним релацијама фракционих елемената, (3.2) и (3.4), добијене су следеће везе између струје и напона елемената елементарног кола

$$u_L = \Delta L {}_0D_t^\alpha i_1, \quad i_{CR} = \Delta C_R {}_0D_t^\beta u_{RC}, \quad i_C = \Delta C {}_0D_t^\gamma u_2.$$

Узимајући у обзир да је модел приказан на слици 3.10 просторна дискретизација реалног вода (материјала) и да се једна ћелија, моделирана елементарним колом, простире на интервалу од  $x$  до  $x + \Delta x$ , након увођења смена

$$i_1 = i(x, t), \quad i_2 = i(x + \Delta x, t), \quad u_1 = u(x, t), \quad u_2 = u(x + \Delta x, t),$$

систем (3.38 - 3.39) прелази у

$$\Delta R i(x, t) = u_{RC}(x, t) + \Delta R \Delta C_R {}_0D_t^\beta u_{RC}(x, t), \quad (3.40)$$

$$i(x + \Delta x, t) - i(x, t) = -\Delta C {}_0D_t^\gamma u(x + \Delta x, t) - \Delta G u(x + \Delta x, t), \quad (3.41)$$

$$u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = -\Delta L {}_0D_t^\alpha i(x, t) - u_{RC}(x, t). \quad (3.42)$$

Да би се добиле диференцијалне једначине, и по простору, које описују физичке процесе на воду мора се прећи из дискретног у континуални домен. То ће бити учињено у два корака. Као први корак, нека се све једначине система (3.40 - 3.42) поделе са  $\Delta x$  чиме се добија следећи систем

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} i(x, t) = \frac{u_{RC}(x, t)}{\Delta x} + \Delta R \Delta C_R {}_0D_t^\beta \frac{u_{RC}(x, t)}{\Delta x}, \quad (3.43)$$

$$\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = -\frac{\Delta C}{\Delta x} {}_0D_t^\gamma u(x + \Delta x, t) - \frac{\Delta G}{\Delta x} u(x + \Delta x, t), \quad (3.44)$$

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = -\frac{\Delta L}{\Delta x} {}_0D_t^\alpha i(x, t) - \frac{u_{RC}(x, t)}{\Delta x}. \quad (3.45)$$



### 3.3. Формулација уопштеног модела електричног вода

Као други корак, нека се претпоставе следећи параметри модела: подужна индуктивност, подужна отпорност, подужна капацитивност и подужна проводност, респективно, као

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} \left[ \frac{\text{Hs}^{\alpha-1}}{\text{m}} \right], \quad R = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} \left[ \frac{\Omega}{\text{m}} \right], \quad C = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \left[ \frac{\text{Fs}^{\gamma-1}}{\text{m}} \right], \quad G = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \left[ \frac{\text{S}}{\text{m}} \right],$$

Фракционо и тополошки уопштење математичког модела електричног вода, након што се у систему једначина (3.43 - 3.45) пусти да  $\Delta x \rightarrow 0$ , описано је системом **уопштених фракционих једначина телеграфичара**

$$Ri(x, t) = (\tau_0 D_t^\beta + 1) u'(x, t), \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -(C_0 D_t^\gamma + G) u(x, t), \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -L_0 D_t^\alpha i(x, t) - u'(x, t), \quad (3.48)$$

где

$$u'(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_{RC}(x, t)}{\Delta x}$$

представља подужни напон, а

$$\tau = \frac{R}{W_R} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta W_R}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta R}{\Delta x}}{\frac{\Delta W_R}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta W_R} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta R \Delta C_R) [s^\beta],$$

фракциону временску константу, при чему је  $\Delta W_R = \frac{1}{\Delta C_R} \left[ \frac{1}{\text{Fs}^{\beta-1}} \right]$ , односно реципрочна вредност фракционе капацитивности у редној грани, наравно уз претпоставку да наведене граничне вредности постоје.

У наставку, почетни проблем на полубесконачном домену,  $x \in [0, \infty)$ , и на временском интервалу  $t > 0$ , према систему једначина (3.46 - 3.48) биће постављен и решен у складу са следећим почетним

$$u'(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0, \quad \text{and} \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad (3.49)$$

и граничним условима

$$u(0, t) = u_0(t) \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.50)$$

Уопштена фракциона једначина телеграфичара биће изведена из система једначина (3.46 - 3.48). Прво, комбиновањем једначина (3.46) и (3.48) добија се

$$\left( \tau L_0 D_t^{\alpha+\beta} + L_0 D_t^\alpha + R \right) i(x, t) = - \left( \tau_0 D_t^\beta + 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \quad (3.51)$$

где је коришћена композиција фракционих извода (1.10), под претпоставком  $[{}_0 I_t^{1-\alpha} i(x, t)]_{t=0} = 0$ , што произилази из почетних услова (3.49)<sub>2</sub>. Друго, након

диференцирања (3.51) по  $x$ , и комбиновања са (3.47), добија се **уопштена фракциона једначина телеграфичара**

$$\begin{aligned} & (\tau LC {}_0D_t^{\alpha+\beta+\gamma} + \tau LG {}_0D_t^{\alpha+\beta} + LC {}_0D_t^{\alpha+\gamma} + LG {}_0D_t^{\alpha} \\ & + RC {}_0D_t^{\gamma} + RG)u(x, t) = (\tau {}_0D_t^{\beta} + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \end{aligned} \quad (3.52)$$

при чему је опет коришћена композициона формула (1.10), као и почетни услов (3.49)<sub>3</sub>, односно услов да је  $\left[ {}_0I_t^{1-\gamma} u(x, t) \right]_{t=0} = 0$ .

Еквивалентна форма уопштене фракционе једначине телеграфичара, (3.52), такође се добија из система једначина (3.46) - (3.48). Наиме, примењујући фракциони интерал реда  $\beta$  на једначину (3.46), користећи (1.8) и (1.9) заједно са  $\left[ {}_0I_t^{1-\beta} u'(x, t) \right]_{t=0} = 0$ , уз почетни услов (3.49)<sub>1</sub>, добија се

$$R {}_0I_t^{\beta} i(x, t) = \left( {}_0I_t^{\beta} + \tau \right) u'(x, t).$$

Ова једначина у комбинацији са (3.48) даје

$$\left( R {}_0I_t^{\beta} + L {}_0D_t^{\alpha} {}_0I_t^{\beta} + \tau L {}_0D_t^{\alpha} \right) i(x, t) = - \left( \tau + {}_0I_t^{\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \quad (3.53)$$

при чему су коришћена правила комутације фракционог интеграла и Риман-Лиувиловог фракционог извода, (1.8) и (1.9), уз почетни услов (3.49)<sub>2</sub>, односно услов да је  $\left[ {}_0I_t^{1-\alpha} i(x, t) \right]_{t=0} = 0$ . Еквивалента форма УФЈТ добија се диференцирањем (3.53) по  $x$  и комбиновањем са (3.47)

$$\begin{aligned} & (\tau LC {}_0D_t^{\alpha+\gamma} + \tau LG {}_0D_t^{\alpha} + LC {}_0D_t^{\alpha+\gamma} {}_0I_t^{\beta} + LG {}_0D_t^{\alpha} {}_0I_t^{\beta} \\ & + RC {}_0D_t^{\gamma} {}_0I_t^{\beta} + RG {}_0I_t^{\beta})u(x, t) = \left( \tau + {}_0I_t^{\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \end{aligned} \quad (3.54)$$

где су опет коришћена композициона правила (1.8) и (1.9), узимајући у обзир ограниченост почетних услова (3.49)<sub>3</sub>, из чега произилази  $\left[ {}_0I_t^{1-\gamma} u(x, t) \right]_{t=0} = 0$  и  $\left[ {}_0I_t^{1+\beta-\gamma} u(x, t) \right]_{t=0} = 0$ .

Систем једначина (3.46 - 3.48), заједно са почетним условима (3.49), еквивалентан је уопштеној фракционој једначини телеграфичара (3.52), као и њеној еквивалентној форми (3.54). Тако да, једначину (3.52), односно (3.54), треба решавати са нултим почетним условима, јер су они већ узети у обзир приликом извођења.

Важно је уочити да уопштена фракциона једначина телеграфичара (3.52) има веома широк дијапазон једначина на које се своди за специјалне случајеве параметара.

За  $\tau = 0$ , односно за  $C_R = 0$ , специјалан случај УФЈТ је фракциона једначина телеграфичара (3.7), приказана у одељку 3.1.2. Дакле, УФЈТ, аналогно класичној једначини телеграфичара чији су специјални случајеви анализирани у одељку 2.2, као специјалне случајеве има: фракциону таласно-дифузну једначину

(аналогну таласно-дифузној једначини (2.20) са фракционим изводима уместо целобројних временских извода), фракциону дифузно-дисипативну једначину (аналогну дифузно-дисипативној једначини (2.21)), као и све остале једначине у којима се јављају целобројни временски изводи, види одељак 2.2.

Уопштена фракциона једначина телеграфичара (3.52) има општији израз уз члан са другим парцијалним просторним изводом у односу на фракциону једначину телеграфичара (3.7), те ће њени специјални случајеви бити: фракциона таласно-дифузна и фракциона дифузно-дисипативна једначина са општијим чланом уз други парцијални извод по простору. Може се приметити да су општији изрази претходно наведених фракционих диференцијалних једначина последица тополошке модификације елементарног кола вода настале додавањем кондензатора у његову редну грану.



## 4. Транзијентни одзив и фреквенцијска анализа

Глава је посвећена одрђивању аналитичког решења почетног проблема на полубесконачном домену ( $x \in [0, \infty)$ ,  $t > 0$ ) система једначина који описује уопштени фракциони модел електричног вода, (3.46 - 3.48), уважавајући почетне (3.49) и граничне (3.50) услове. Методом контурне интеграције решен је еквивалентан проблем, УФЈТ (3.52), са нултим почетним (3.49) и граничним (3.50) условима. Такође, урађена је фреквенцијска анализа УФЈТ по угледу на фреквенцијску анализу ЈТ и њених специјалних случајева у одељку 2.5.

Цела глава представља оригинални научни допринос.

Наком поступка бездимензионисања и нормализације систем једначина (3.46 - 3.48) постаје

$$\frac{R}{L} \left( \frac{C}{G} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} i(x, t) = \left( \tau_0 D_t^\beta + 1 \right) u'(x, t), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = - \left( {}_0 D_t^\gamma + 1 \right) u(x, t), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = - {}_0 D_t^\alpha i(x, t) - u'(x, t), \quad (4.3)$$

укључујући бездимензионисане и нормализоване почетне

$$u'(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0, \quad \text{и} \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad (4.4)$$

као и бездимензионисане и нормализоване граничне услове

$$u(0, t) = u_0(t) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.5)$$

Систем једначина (4.1 - 4.3) добијен је из система (3.46 - 3.48), поступком бездимензионисања и нормализације увођењем бездимензијских величина

$$T = \left( \frac{C}{G} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \ell = \frac{1}{\sqrt{LG}} \left( \frac{C}{G} \right)^{\frac{\alpha}{2\gamma}}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \bar{\tau} = \tau \left( \frac{G}{C} \right)^{\frac{\beta}{\gamma}},$$

$$\bar{u} = \frac{u}{U_n}, \quad \bar{u}' = \frac{\ell}{U_n} u', \quad I = U_n \sqrt{\frac{G}{L}} \left( \frac{C}{G} \right)^{\frac{\alpha}{2\gamma}}, \quad \bar{i} = \frac{i}{I},$$

где је  $U_n$  номинална вредност напона извора  $u_0$ , прикљученог на почетак вода, види (3.50)<sub>1</sub>. Почетни (3.49) и гранични (3.50) услови такође су нормализовани по том принципу. Цртице изнад зависних и независних променљивих, које означавају да су у питању бездимензионисане и нормализоване величине, ради једноставнијег записа, уклоњене су у систему (4.1 - 4.3) и надаље ће се подразумевати да се ради о бездимензијским величинама.

Примењујући Лапласову трансформацију на систем једначина (4.1 - 4.3), за  $x \in [0, \infty)$  и  $\text{Re } s > 0$ , добија се систем једначина

$$U'(x, s) = \frac{R}{L} \left( \frac{C}{G} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \frac{1}{1 + \tau s^\beta} I(x, s), \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, s) = -(s^\gamma + 1)U(x, s), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, s) = -s^\alpha I(x, s) - U'(x, s), \quad (4.8)$$

при чему је коришћена Лапласова трансформација Риман-Лиувилевог фракционог извода (1.5). Комбинујући једначине система (4.6 - 4.8) уз акценат на изражавање напона  $U(x, s)$ , добија се

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, s) - \psi(s) U(x, s) = 0, \quad (4.9)$$

где је ( $\text{Re } s > 0$ )

$$\psi(s) = \frac{(s^{\alpha+\beta} + a s^\alpha + b)(s^\gamma + 1)}{s^\beta + a}, \quad (4.10)$$

узимајући да је  $a = \frac{1}{\tau}$ , а  $b = \frac{R}{\tau L} \left( \frac{C}{G} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$ . Поступак добијања аналитичког решења, представљен у наставку, претпоставља да параметри модела ( $\tau, L, R, G, C, \alpha, \beta, \gamma$ ), односно константе  $a$  и  $b$ , имају вредности тако да је задовољен услов:  $\arg \psi(s) \in (-\pi, \pi]$ , чиме се обезбеђује да  $\text{Re } \sqrt{\psi(s)} > 0$  за свако  $\text{Re } s > 0$ . Такође, претпостављено је да су испуњени и сви остали неопходни услови како би поступак за добијање решења и само решење били добро дефинисани. Након свега наведеног, Лапласова трансформација решења једначине (4.9) дата је изразом

$$U(x, s) = W_\infty(x, s) U_0(s), \quad (4.11)$$

где је

$$W_\infty(x, s) = e^{-xk(s)} \quad (4.12)$$

функција преноса за полубесконачан вод, односно количник комплексних ликова напона  $U(x, s)$  на произвољној позицији  $x$  и побудног сигнала (напона извора прикљученог на почетак вода)  $U_0(s) = \mathcal{L}[u_0(t)]$ . Константа  $k$ , у изразу за функцију преноса (4.12), представља коефицијент простирања који је дефинисан релацијом

$$k(s) = \sqrt{\psi(s)}. \quad (4.13)$$

Применом инверзне Лапласове трансформације на израз (4.11) добија се решење УФЈТ, уз одговарајуће почетне (4.4) и граничне (4.5) услове, као

$$u(x, t) = u_\delta(x, t) * u_0(t), \quad (4.14)$$

где

$$u_\delta = \mathcal{L}^{-1} [W_\infty(x, s)] \quad (4.15)$$

представља инверзну Лапласову трансформацију функције преноса (4.12), односно импулсни одзив система. Инверзна Лапласова трансформација функције преноса (4.15) биће одређена по дефиницији (1.12), тј. контурном интеграцијом у комплексној равни.

## 4.1 Анализа аргумента функције $\psi$

Постоје две класе параметара за које је услов  $\arg \psi(s) \in (-\pi, \pi]$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$ , задовољен: прва класа је  $\alpha + \gamma \in (0, 1]$ , а друга  $\beta = \gamma$  и  $a > 1$ . Услов  $\beta = \gamma$  имплицира да су фракциона редна и фракциона оточна капацитивност истог реда извода, док услов  $a > 1$ , што је уствари  $\tau > \frac{c}{G}$ , имплицира да је (фракционо) време релаксације (фракциона временска константа) у проводној (редној) грани краће него у изолаторској (оточној), односно  $\tau_\beta < \tau_\gamma$ , што је физички потпуно оправдано, види слику 3.10. Постоји још много вредности параметара којима релација  $\arg \psi(s) \in (-\pi, \pi]$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$ , може бити задовољена. Како није акценат на утврђивању класа параметара, даља анализа ће се спроводити за две претходно наведене задовољавајуће класе.

За  $\operatorname{Re} s > 0$ , након увођења смене  $s = \rho e^{i\varphi}$ , за  $\rho \in (0, \infty)$  и  $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , а затим раздвајања реалног и имагинарног дела функције  $\psi$ , дате са (4.10), добија се

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \psi(\rho, \varphi) = & \frac{1}{|\rho^\beta e^{i\beta\varphi} + a|^2} \left( \rho^{\alpha+2\beta+\gamma} \cos((\alpha + \gamma)\varphi) \right. \\ & + \rho^{\alpha+2\beta} \cos(\alpha\varphi) + 2a\rho^{\alpha+\beta+\gamma} \cos(\beta\varphi) \cos((\alpha + \gamma)\varphi) \\ & + 2a\rho^{\alpha+\beta} \cos(\alpha\varphi) \cos(\beta\varphi) + a^2\rho^{\alpha+\gamma} \cos((\alpha + \gamma)\varphi) \\ & + b\rho^{\beta+\gamma} \cos((\beta - \gamma)\varphi) \\ & \left. + a^2\rho^\alpha \cos(\alpha\varphi) + b\rho^\beta \cos(\beta\varphi) + ab\rho^\gamma \cos(\gamma\varphi) + ab \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \psi(\rho, \varphi) = & \frac{1}{|\rho^\beta e^{i\beta\varphi} + a|^2} \left( \rho^{\alpha+2\beta+\gamma} \sin((\alpha + \gamma)\varphi) \right. \\ & + \rho^{\alpha+2\beta} \sin(\alpha\varphi) + 2a\rho^{\alpha+\beta+\gamma} \cos(\beta\varphi) \sin((\alpha + \gamma)\varphi) \\ & + 2a\rho^{\alpha+\beta} \sin(\alpha\varphi) \cos(\beta\varphi) + a^2\rho^{\alpha+\gamma} \sin((\alpha + \gamma)\varphi) \\ & - b\rho^{\beta+\gamma} \sin((\beta - \gamma)\varphi) \\ & \left. + a^2\rho^\alpha \sin(\alpha\varphi) - b\rho^\beta \sin(\beta\varphi) + ab\rho^\gamma \sin(\gamma\varphi) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Из израза (4.16) види се да су за  $\alpha + \gamma \in (0, 1]$  сви чланови  $\operatorname{Re} \psi(\rho, \varphi)$  позитивни за свако  $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , с обзиром да  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$  и  $a, b > 0$ , а то значи да ће  $\arg \psi(\rho, \varphi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , за свако  $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Такође, ако је  $\beta = \gamma$  и  $a > 1$ , онда је  $\operatorname{Im} \psi(\rho, \varphi) \geq 0$  за свако  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , и  $\operatorname{Im} \psi(\rho, \varphi) < 0$  за свако  $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , што такође имплицира да је  $\arg \psi(\rho, \varphi) \in (-\pi, \pi)$  за свако  $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Овим је доказано да две наведене класе параметара заиста испуњавају поменуте неопходне услове,  $\arg \psi(s) \in (-\pi, \pi]$  за  $\operatorname{Re} s > 0$ .

## 4.2 Анализа сингуларитета коэффицијента простирања

Квадратни корен, као функција комплексне променљиве, има тачку гранања (ТГ) у нули. Тачаке гранања коэффицијента простирања, односно ТГ функције  $k$ , дате изразом (4.13), решења су следећих једначина

$$s^\beta + a = 0, \quad (4.18)$$

$$s^\gamma + 1 = 0, \quad (4.19)$$

$$s^{\alpha+\beta} + as^\alpha + b = 0. \quad (4.20)$$

Добро је познато да  $s^\xi$  има тачку гранања у нули, као и да функција  $s^\xi + d$ ,  $\xi \in (0, 1)$ ,  $d > 0$ , нема нула за  $\arg s \in (-\pi, \pi]$ , што имплицира да ни једначина (4.18), ни једначина (4.19), немају решења за  $\arg s \in (-\pi, \pi]$ . Што се тиче једначине (4.20), у наставку ће бити показано да ако је  $\alpha + \beta \in (0, 1]$ , тада (4.20) нема решења, док за  $\alpha + \beta \in (1, 2)$  знак критеријумске функције

$$f(a, b, \alpha, \beta) = \left( -\frac{a \sin(\alpha\pi)}{\sin((\alpha + \beta)\pi)} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{a \sin(\beta\pi)}{\sin((\alpha + \beta)\pi)} + b, \quad (4.21)$$

одређује број и природу решења једначине (4.20). Ако је  $f < 0$ , једначина (4.20) нема решења, ако је  $f = 0$ , онда једначина (4.20) има једно реално негативно решење, а ако је  $f > 0$ , онда (4.20) има пар конјуговано комплексних решења са негативним реалним делом.

Једначина (4.20), записана је коришћењем функције  $\Psi(s)$  у форми

$$\Psi(s) = s^{\alpha+\beta} + as^\alpha + b = 0, \quad \alpha, \beta \in (0, 1), \quad a, b > 0. \quad (4.22)$$

Након увођења смене  $s = \rho e^{i\varphi}$ ,  $\rho \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , за реални и имагинарни део (4.22) има се

$$\operatorname{Re} \Psi(\rho, \varphi) = \rho^{\alpha+\beta} \cos((\alpha + \beta)\varphi) + a\rho^\alpha \cos(\alpha\varphi) + b = 0, \quad (4.23)$$

$$\operatorname{Im} \Psi(\rho, \varphi) = \rho^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + \beta)\varphi) + a\rho^\alpha \sin(\alpha\varphi) = 0. \quad (4.24)$$

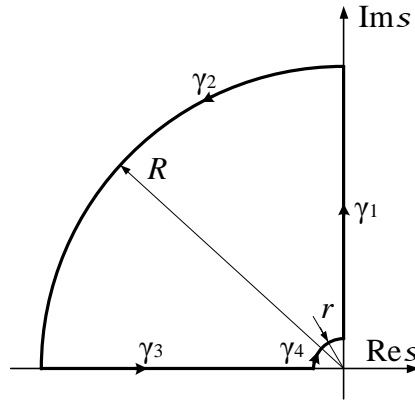
Ако је  $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$  нула функције  $\Psi$  онда је, узимајући у обзир (4.23) и (4.24) и комплексно конјугована вредност  $\bar{s}_0 = \rho_0 e^{-i\varphi_0}$ , такође нула функције  $\Psi$ , јер



је функција  $\operatorname{Re} \Psi(\rho, \varphi)$  парна у односу на аргумент  $\varphi$ , а функција  $\operatorname{Im} \Psi(\rho, \varphi)$  непарна. Због тога је тачке гранања (нуле и полове функције  $\Psi$ ) довољно тражити у горњој полуравни, односно за  $\varphi \in (0, \pi]$ . Такође, треба уочити да  $\Psi$  не може имати нуле у десној полуравни, с обзиром на то да је за  $\rho > 0$ ,  $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  и  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ , има  $\sin((\alpha + \beta)\varphi) > 0$  и  $\sin(\alpha\varphi) > 0$ , што имплицира да  $\operatorname{Im} \Psi$  не може бити нула. Ако је  $\varphi = 0$  или  $\rho = 0$  онда је једначина (4.24) задовољена, али једначина (4.23) није, јер је  $b > 0$ . Због наведених аргумената надаље ће се тачке гранања тражити само у горњој левој четвртини комплексне равни, односно само у другом квадранту.

Ако је  $\alpha + \beta \in (0, 1]$ , онда једначина (4.22) нема решење, с обзиром на то да су за  $\rho > 0$ ,  $\varphi \in (0, \pi]$ ,  $\sin((\alpha + \beta)\varphi) > 0$  и  $\sin(\alpha\varphi) > 0$ , што даље имплицира да  $\operatorname{Im} \Psi$  не може бити нула.

Ако је  $\alpha + \beta \in (1, 2)$ , користимо Кошијев принцип аргумента и контуру  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ , приказану на слици 4.1, како бисмо испитали постојање нула



Слика 4.1: Контура  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

функције  $\Psi$  у другом квадранту комплексне равни, као и њихову вишеструкост.

Параметризација контуре  $\gamma_1$  је  $s = x e^{i\frac{\pi}{2}}$ ,  $x \in (r, R)$ , уз  $r \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$ , након чега (4.23) и (4.24) прелазе у

$$\operatorname{Re} \Psi(x) = x^{\alpha+\beta} \cos \frac{(\alpha + \beta)\pi}{2} + ax^{\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + b, \quad (4.25)$$

$$\operatorname{Im} \Psi(x) = x^{\alpha+\beta} \sin \frac{(\alpha + \beta)\pi}{2} + ax^{\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} > 0. \quad (4.26)$$

На основу (4.25) и (4.26) добијају се следеће граничне вредности

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Psi(x) &= b, & \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Psi(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \Psi(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \Psi(x) &= \infty. \end{aligned}$$

Реални (4.23) и имагинарни део (4.24) делови функције  $\Psi$ , на контури  $\gamma_2$ , параметризованој са  $s = R e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , уз  $R \rightarrow \infty$ , постају

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Psi(\varphi) &= R^{\alpha+\beta} \cos((\alpha + \beta)\varphi) + aR^{\alpha} \cos(\alpha\varphi) + b, \\ \operatorname{Im} \Psi(\varphi) &= R^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + \beta)\varphi) + aR^{\alpha} \sin(\alpha\varphi), \end{aligned}$$

а модул и аргумент су

$$\begin{aligned} |\Psi(\varphi)| &= \left( R^{2(\alpha+\beta)} + 2aR^{2\alpha+\beta} \cos(\beta\varphi) + a^2R^{2\alpha} \right. \\ &\quad \left. + 2bR^{\alpha+\beta} \cos((\alpha+\beta)\varphi) \right. \\ &\quad \left. + 2abR^\alpha \cos(\alpha\varphi) + b^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim R^{\alpha+\beta}, \text{ када } R \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \tan(\arg \Psi(\varphi)) &= \frac{R^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\varphi) + aR^\alpha \sin(\alpha\varphi)}{R^{\alpha+\beta} \cos((\alpha+\beta)\varphi) + aR^\alpha \cos(\alpha\varphi) + b} \\ &\sim \tan((\alpha+\beta)\varphi), \text{ када } R \rightarrow \infty \text{ и} \\ \arg \Psi(\varphi) &\sim (\alpha+\beta)\varphi, \text{ када } R \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из (4.28) следи да је

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \arg \Psi(\varphi) = \frac{(\alpha+\beta)\pi}{2} \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right),$$

а из (4.27) да  $|\Psi(\varphi)|$  тежи у бесконачност како  $R \rightarrow \infty$ , односно да је аргумент функције  $\Psi$  по  $\gamma_2$  започиње у другом квадранту. Такође, на основу (4.28),

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi} \arg \Psi(\varphi) = (\alpha+\beta)\pi \in (\pi, 2\pi),$$

кретање  $\Psi$  по  $\gamma_2$  се завршава у доњој полуравни.

Параметризацијом  $s = xe^{i\pi}$ ,  $x \in (r, R)$ , контуре  $\gamma_3$ , за  $r \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$ , реални (4.23) и имагинарни (4.24) делови функције  $\Psi$  постају

$$\operatorname{Re} \Psi(x) = x^{\alpha+\beta} \cos((\alpha+\beta)\pi) + ax^\alpha \cos(\alpha\pi) + b, \quad (4.29)$$

$$\operatorname{Im} \Psi(x) = x^{\alpha+\beta} \sin((\alpha+\beta)\pi) + ax^\alpha \sin(\alpha\pi). \quad (4.30)$$

С обзиром да је  $\sin((\alpha+\beta)\pi) < 0$  и да је  $\sin(\alpha\pi) > 0$ , следи да постоји јединствено  $x^* \in (0, \infty)$  за које важи  $\operatorname{Im} \Psi(x^*) = 0$ . Такође и  $x = 0$  има за последицу  $\operatorname{Im} \Psi(x) = 0$ , али оно није нула и  $\operatorname{Re} \Psi$ . Из (4.30) добија се

$$(x^*)^\beta = -\frac{a \sin(\alpha\pi)}{\sin((\alpha+\beta)\pi)}. \quad (4.31)$$

Реални део  $\Psi$ , дат (4.29), тада постаје

$$\operatorname{Re} \Psi(x^*) = \left( -\frac{a \sin(\alpha\pi)}{\sin((\alpha+\beta)\pi)} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{a \sin(\beta\pi)}{\sin((\alpha+\beta)\pi)} + b. \quad (4.32)$$

Такође, према (4.29) и (4.30), добија се

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Psi(x) &= b, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Psi(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \Psi(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Из (4.30), види се да је  $\text{Im } \Psi(x) > 0$ , када  $x \in (0, x^*)$ , и  $\text{Im } \Psi(x) < 0$ , када  $x \in (x^*, \infty)$ . Због тога ће знак  $\text{Re } \Psi(x^*)$  одредити промену аргумента  $\Psi$ . Наиме, ако је  $\text{Re } \Psi(x^*) < 0$ , онда  $\Delta(\arg \Psi(s)) = 0$ , за  $s \in \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ , а ако је  $\text{Re } \Psi(x^*) > 0$ , онда  $\Delta(\arg \Psi(s)) = 2\pi$ , за  $s \in \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ . Ако нема промене аргумента функције  $\Psi$  (што ће бити показано у наставку) дуж контуре  $\gamma_4$ , онда  $\text{Re } \Psi(x^*) < 0$ , уважавајући Кошијев принцип аргумента, имплицира да  $\Psi$  нема нула у горњој левој четврт-равни (другом квадранту). Такође, ако је  $\text{Re } \Psi(x^*) > 0$ , тада постоји једна комплексна нула у другом квадранту. С обзиром да су нуле, уколико постоје, конјуговано комплексне, онда или нема уопште нула у левој полуравни ( $\text{Re } \Psi(x^*) < 0$ ), или у њој постоји пар конјуговано комплексних нула (јер је  $\text{Re } \Psi(x^*) > 0$ ). У посебном случају, када је  $\text{Re } \Psi(x^*) = 0$ , онда је и  $\Psi(s) = 0$  (с обзиром на то да  $\text{Im } \Psi(x^*) = 0$ ), што имплицира да је  $s = -x^*$  тада јединствена реална негативна нула функције  $\Psi$ .

Параметризацијом  $s = re^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , контуре  $\gamma_4$ , уз  $r \rightarrow 0$ , изрази (4.23) и (4.24) постају

$$\begin{aligned}\text{Re } \Psi(\varphi) &= r^{\alpha+\beta} \cos((\alpha + \beta)\varphi) + ar^{\alpha} \cos(\alpha\varphi) + b, \\ \text{Im } \Psi(\varphi) &= r^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + \beta)\varphi) + ar^{\alpha} \sin(\alpha\varphi),\end{aligned}$$

тако да је

$$\begin{aligned}|\Psi(\varphi)| &= \left(r^{2(\alpha+\beta)} + 2ar^{2\alpha+\beta} \cos(\beta\varphi) + a^2r^{2\alpha} + 2br^{\alpha+\beta} \cos((\alpha + \beta)\varphi) \right. \\ &\quad \left. + 2abr^{\alpha} \cos(\alpha\varphi) + b^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim b, \text{ када } r \rightarrow 0, \\ \tan(\arg \Psi(\varphi)) &= \frac{r^{\alpha+\beta} \sin((\alpha + \beta)\varphi) + ar^{\alpha} \sin(\alpha\varphi)}{r^{\alpha+\beta} \cos((\alpha + \beta)\varphi) + ar^{\alpha} \cos(\alpha\varphi) + b} \sim 0, \text{ када } r \rightarrow 0, \\ \arg \Psi(\varphi) &\sim 0, \text{ када } r \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Према томе, нема промене аргумента функције  $\Psi$  када  $s$  узима вредности дуж контуре  $\gamma_4$ .

### 4.3 Импулсни одзив

Решење система једначина (4.1 - 4.3), уважавајући почетне (4.4) и граничне (4.5) услове, дато је изразом (4.14). Да би се нашао експлицитан израз за аналитичко решење неопходно је прво одредити израз за импулсни одзив, дат са (4.15), примењујући инверзну Лапласову трансформацију по дефиницији

$$u_{\delta}(x, t) = \mathcal{L}^{-1} [e^{-xk(s)}] (x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{-xk(s)} e^{st} ds. \quad (4.33)$$

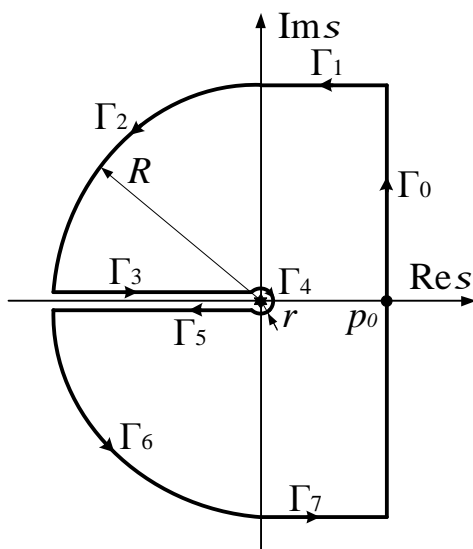
Инверзија ће бити изведена користећи Кошијеву интеграциону теорему, тврдећи да за аналитичку функцију  $f$  над једноструко повезаном облашћу  $D$  важи  $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ , где је  $\Gamma$  једноструко затворена контура у области  $D$ . Контура  $\Gamma$  ће бити изабрана у зависности од броја и положаја тачака коефицијента простирања  $k$  на различите начине тако да  $e^{-xk(s)}$  буде аналитичка функција унутар ње.

### 4.3.1 Случај када $k$ , осим $s = 0$ , нема других тачака гранања

У случају када  $k$  нема тачака гранања за Кошијеву интеграциону теорему

$$\oint_{\Gamma} e^{-xk(s)} e^{st} ds = 0 \quad (4.34)$$

контура  $\Gamma^{(1)} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7$  је изабрана као што је приказано на слици 4.2. Тада Кошијева теорема (4.34) даје следеће решење за сопствени



Слика 4.2: Контура  $\Gamma^{(1)}$ .

одзив

$$u_{\delta}^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} (e^{-xk(\rho e^{-i\pi})} - e^{-xk(\rho e^{i\pi})}) e^{-\rho t} d\rho. \quad (4.35)$$

Наиме, из интеграла дуж контура  $\Gamma_3$  (параметризоване  $s = \rho e^{i\pi}$ ,  $\rho \in (r, R)$ ) и  $\Gamma_5$  (параметризоване  $s = \rho e^{-i\pi}$ ,  $\rho \in (r, R)$ ) следи

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_3} e^{-xk(s)} e^{st} ds = \int_0^{\infty} e^{-xk(\rho e^{i\pi})} e^{-\rho t} e^{i\pi} d\rho = \int_0^{\infty} e^{-xk(\rho e^{i\pi})} e^{-\rho t} d\rho, \quad (4.36)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_5} e^{-xk(s)} e^{st} ds = \int_0^{\infty} e^{-xk(\rho e^{-i\pi})} e^{-\rho t} e^{-i\pi} d\rho = - \int_0^{\infty} e^{-xk(\rho e^{-i\pi})} e^{-\rho t} d\rho, \quad (4.37)$$

респективно, док је инверзна Лапласова трансформација, дата са (4.33),

$$u_{\delta}^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_0} e^{-xk(s)} e^{st} ds. \quad (4.38)$$

Интегрални дуж контура  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_4$ ,  $\Gamma_6$  и  $\Gamma_7$  теже нули када  $R \rightarrow \infty$ , или када  $r \rightarrow 0$ . Параметризација контура  $\Gamma_1$  је  $s = p + iR$ ,  $p \in (0, p_0)$ , тако да се вредност интеграла израчунава користећи следеће неједнакости

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_1}| &\leq \int_{\Gamma_1} |e^{-xk(s)} e^{st}| ds = \int_0^{p_0} |e^{-xk(p+iR)} e^{(p+iR)t}| dp \\ &\leq \int_0^{p_0} |e^{-xk(p+iR)}| e^{pt} dp = \int_0^{p_0} e^{-x|k(p+iR)| \cos(\arg(k(p+iR)))} e^{pt} dp. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Из (4.10) и (4.13) следи да је

$$|k(s)|^2 = \frac{|s^{\alpha+\beta} + as^\alpha + b| |s^\gamma + 1|}{|s^\beta + a|}. \quad (4.40)$$

Уводећи смену  $s = \rho e^{i\varphi}$ , уз  $\rho = \sqrt{p^2 + R^2} \sim R$  и  $\varphi = \arctan \frac{R}{p} \sim \frac{\pi}{2}$  када  $R \rightarrow \infty$ , у претходни израз, има се

$$|k(p+iR)| \sim R^{\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \quad \text{када } R \rightarrow \infty. \quad (4.41)$$

Због тога, у граничном случају  $R \rightarrow \infty$ , (4.39) постаје

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_{\Gamma_1}| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{p_0} e^{-xR^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos(\arg(k(p+iR)))} e^{pt} dp = 0,$$

када  $\arg k(s) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Аналогно томе, може се показати да  $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_{\Gamma_7}| = 0$ .

Израчунавање вредности интеграла дуж контуре  $\Gamma_2$ , параметризоване  $s = Re^{i\varphi}$ , уз  $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , своди се на следеће неједнакости

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_2}| &\leq \int_{\Gamma_2} |e^{-xk(s)} e^{st}| ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R |e^{-xk(Re^{i\varphi})} e^{Rte^{i\varphi}}| d\varphi \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R e^{-x|k(Re^{i\varphi})| \cos(\arg(k(Re^{i\varphi})))} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Опет, као у (4.41),  $k(Re^{i\varphi}) \sim R^{\frac{\alpha+\gamma}{2}}$ , када  $R \rightarrow \infty$ , заједно са  $\cos(\arg(k(Re^{i\varphi}))) > 0$  и  $\cos \varphi < 0$ , за  $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , имплицира да (4.42) постаје

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_{\Gamma_2}| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R e^{-xR^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos(\arg(k(Re^{i\varphi})))} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi = 0. \quad (4.43)$$

На сличан начин долази се до закључка да је  $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_{\Gamma_6}| = 0$ .

Параметризација контуре  $\Gamma_4$  је  $s = re^{i\varphi}$ , уз  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ , из чега се добија

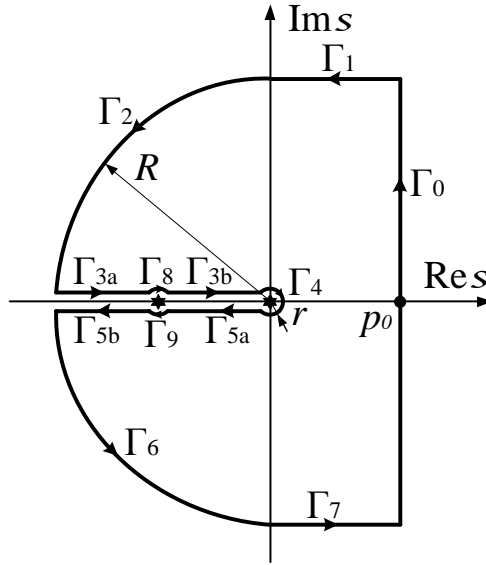
$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_4}| &\leq \int_{\Gamma_4} |e^{-xk(s)} e^{st}| ds = \int_{-\pi}^{\pi} r |e^{-xk(re^{i\varphi})} e^{rte^{i\varphi}}| d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} r |e^{-xk(re^{i\varphi})}| e^{rt \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (4.44)$$

На основу (4.40) следи да је  $|k(s)| \sim \sqrt{\frac{b}{a}}$ , када  $r \rightarrow 0$ , што уз (4.44) даје

$$\lim_{r \rightarrow 0} |I_{\Gamma_4}| = 0.$$

### 4.3.2 Случај када $k$ , осим $s = 0$ , има једну реалну негативну тачку гранања

Када  $k$  има једну тачку гранања на негативном делу реалне осе, означену са  $s_0$ , у Кошијевој интеграционој теорему (4.34) користиће се интеграциона контура  $\Gamma^{(II)} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b} \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b} \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7 \cup \Gamma_8 \cup \Gamma_9$ , приказана на слици 4.3,



Слика 4.3: Контура  $\Gamma^{(II)}$ .

добија се решење

$$u_{\delta}^{(II)}(x, t) = u_{\delta}^{(I)}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left( e^{-xk(\rho e^{-i\pi})} - e^{-xk(\rho e^{i\pi})} \right) e^{-\rho t} d\rho. \quad (4.45)$$

Интеграли дуж контура  $\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$  (параметризоване  $s = \rho e^{i\pi}$ ,  $\rho \in (|s_0| + r, R)$  за  $\Gamma_{3a}$  и  $\rho \in (|s_0| - r, r)$  за  $\Gamma_{3b}$ ) и  $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$  (параметризоване  $s = \rho e^{-i\pi}$ ,  $\rho \in (|s_0| - r, r)$  за  $\Gamma_{5a}$  и  $\rho \in (|s_0| + r, R)$  за  $\Gamma_{5b}$ ) прелазе у

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} e^{-xk(s)} e^{st} ds = \int_{\infty}^0 e^{-xk(\rho e^{i\pi})} e^{-\rho t} e^{i\pi} d\rho = \int_0^{\infty} e^{-xk(\rho e^{i\pi})} e^{-\rho t} d\rho,$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}} e^{-xk(s)} e^{st} ds = \int_0^{\infty} e^{-xk(\rho e^{-i\pi})} e^{-\rho t} e^{-i\pi} d\rho = - \int_0^{\infty} e^{-xk(\rho e^{-i\pi})} e^{-\rho t} d\rho,$$

респективно, док је инверзна Лапласова трансформација дата са (4.38).

Интеграли дуж контура  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_6$  и  $\Gamma_7$  теже у нулу када  $R \rightarrow \infty$  или  $r \rightarrow 0$ , као што је показано у одељку 4.3.1. Додатно, показаћемо да интеграли дуж контура  $\Gamma_8$  и  $\Gamma_9$  такође теже у нулу када  $r \rightarrow 0$ . Параметризација контуре  $\Gamma_8$  је

$s - s_0 = re^{i\varphi}$ , уз  $\varphi \in (0, \pi)$ , тако да је

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_8}| &\leq \int_{\Gamma_8} |e^{-xk(s)} e^{st}| ds = \int_0^\pi r |e^{-xk(s_0+re^{i\varphi})} e^{(s_0+re^{i\varphi})t}| d\varphi \\ &\leq e^{s_0 t} \int_0^\pi r |e^{-xk(s_0+re^{i\varphi})}| e^{rt \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (4.46)$$

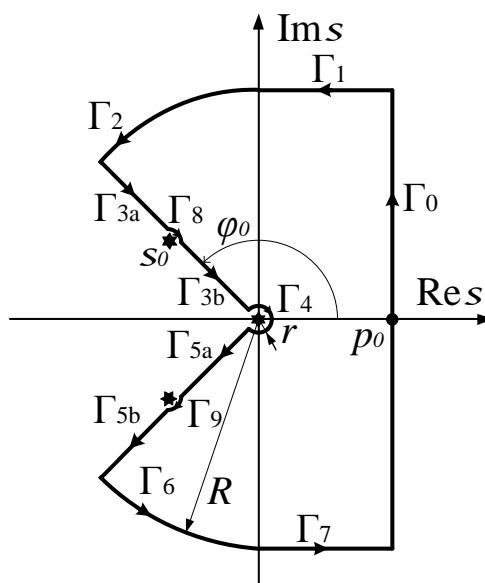
На основу (4.40), добија се

$$|k(s_0 + re^{i\varphi})|^2 \sim \frac{|s_0^{\alpha+\beta} + as_0^\alpha + b| |s_0^\gamma + 1|}{|s_0^\beta + a|}, \quad \text{када } r \rightarrow 0, \quad (4.47)$$

из чега следи, узимајући у обзир (4.46), да је  $\lim_{r \rightarrow 0} |I_{\Gamma_8}| = 0$ . На сличан начин се може показати да је и  $\lim_{r \rightarrow 0} |I_{\Gamma_9}| = 0$ .

### 4.3.3 Случај када $k$ , осим $s = 0$ , има пар конјуговано комплексних тачака гранања

Када  $k$  има пар конјуговано комплексних тачака гранања са негативним реалним делом (лева полураван), означених са  $s_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$  и  $\bar{s}_0$ , у Кошијевој интеграционој теорему (4.34) користиће се интеграциона контура  $\Gamma^{(III)} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b} \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b} \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7 \cup \Gamma_8 \cup \Gamma_9$ , приказана на слици 4.4



Слика 4.4: Контура  $\Gamma^{(III)}$ .

За сопствени одзив се добија

$$\begin{aligned} u_\delta^{(III)}(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left( e^{-k(\rho e^{i\varphi_0})x} e^{i(\varphi_0 + \rho t \sin \varphi_0)} - e^{-k(\rho e^{-i\varphi_0})x} e^{-i(\varphi_0 + \rho t \sin \varphi_0)} \right) \\ &\quad \times e^{\rho t \cos \varphi_0} d\rho, \end{aligned} \quad (4.48)$$

Интеграционе контуре  $\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}$  (параметризоване  $s = \rho e^{i\varphi_0}$ ,  $\rho \in (r, \rho_0 - r) \cup (\rho_0 + r, R)$ ) и  $\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}$  (параметризоване  $s = \rho e^{-i\varphi_0}$ ,  $\rho \in (r, \rho_0 - r) \cup (\rho_0 + r, R)$ ) дају

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty, \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_{3a} \cup \Gamma_{3b}} e^{-k(s)x} e^{st} ds &= \int_0^0 e^{-k(\rho e^{i\varphi_0})x} e^{\rho t e^{i\varphi_0}} e^{i\varphi_0} d\rho \\ &= - \int_0^\infty e^{-k(\rho e^{i\varphi_0})x} e^{i(\varphi_0 + \rho t \sin \varphi_0)} e^{\rho t \cos \varphi_0} d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty, \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_{5a} \cup \Gamma_{5b}} e^{-k(s)x} e^{st} ds &= \int_0^\infty e^{-k(\rho e^{-i\varphi_0})x} e^{\rho t e^{-i\varphi_0}} e^{-i\varphi_0} d\rho \\ &= \int_0^\infty e^{-k(\rho e^{-i\varphi_0})x} e^{-i(\varphi_0 + \rho t \sin \varphi_0)} e^{\rho t \cos \varphi_0} d\rho, \end{aligned}$$

респективно, док је инверзна Лапласова трансформација дата изразом (4.38).

Интеграл дуж контура  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_4$ ,  $\Gamma_6$  и  $\Gamma_7$  теже у нулу када  $R \rightarrow \infty$  или када  $r \rightarrow 0$ , као што је и показано у одељку 4.3.1. Треба уочити да при израчунавању интеграла дуж контуре  $\Gamma_2$ , уместо граница између  $\frac{\pi}{2}$  и  $\pi$  у (4.43), за интервал интеграције има се од  $\frac{\pi}{2}$  до  $\varphi_0$ , што не мења резултат. Слично, дуж контуре  $\Gamma_4$ , уместо граница од  $-\pi$  до  $\pi$  у (4.44), рачуна се исти интеграл, али у границама од  $-\varphi_0$  до  $\varphi_0$ , што води ка истом резултату. Такође, показано је да интеграл дуж контура  $\Gamma_8$  и  $\Gamma_9$  теже у нулу када  $r \rightarrow 0$ . Параметризација контуре  $\Gamma_8$  је  $s - s_0 = r e^{i\varphi}$ , уз  $\varphi \in (\varphi_0 - \pi, \varphi_0)$ , из чега се добијају следеће неједнакости

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_9}| &\leq \int_{\Gamma_9} |e^{-k(s)x} e^{st}| ds = \int_{-\pi+\varphi_0}^{\varphi_0} r |e^{-k(s_0+re^{i\varphi})x} e^{(s_0+re^{i\varphi})t}| d\varphi \\ &\leq e^{s_0 t} \int_{-\pi+\varphi_0}^{\varphi_0} r |e^{-k(s_0+re^{i\varphi})x}| e^{rt \cos \varphi} d\varphi, \end{aligned} \quad (4.49)$$

док се  $|k(s_0 + r e^{i\varphi})|$  понаша исто као у (4.47) када  $r \rightarrow 0$ . Због тога и према (4.49),  $\lim_{r \rightarrow 0} |I_{\Gamma_8}| = 0$  и на сличан начин  $\lim_{r \rightarrow 0} |I_{\Gamma_9}| = 0$ .

## 4.4 Фреквенцијска анализа

Фреквенцијска анализа математичког модела вода, односно функције преноса (4.12), којом је вод описан, предмет је проучавања у одељку и базира се на конференцијским радовима [3, 4].

Уколико се у израз за функцију  $\psi$  (4.10), поткорену функцију коефицијента простирања, уведе смена  $s = i\omega$ , реални и имагинарни део функције  $\psi$ , као



функције кружне учесталости су

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \psi(\omega) = & \frac{1}{\left| \omega^\beta e^{i\beta\frac{\pi}{2}} + a \right|^2} \left( \omega^{\alpha+2\beta+\gamma} \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} + \omega^{\alpha+2\beta} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right. \\ & + 2a\omega^{\alpha+\beta+\gamma} \cos \frac{\beta\pi}{2} \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} + 2a\omega^{\alpha+\beta} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} \\ & + a^2 \omega^{\alpha+\gamma} \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} + b\omega^{\beta+\gamma} \cos \frac{(\beta-\gamma)\pi}{2} \\ & \left. + a^2 \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + b\omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + ab\omega^\gamma \cos \frac{\gamma\pi}{2} + ab \right), \quad (4.50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \psi(\omega) = & \frac{1}{\left| \omega^\beta e^{i\beta\frac{\pi}{2}} + a \right|^2} \left( \omega^{\alpha+2\beta+\gamma} \sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} + \omega^{\alpha+2\beta} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right. \\ & + 2a\omega^{\alpha+\beta+\gamma} \cos \frac{\beta\pi}{2} \sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} + 2a\omega^{\alpha+\beta} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2} \\ & + a^2 \omega^{\alpha+\gamma} \sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2} - b\omega^{\beta+\gamma} \sin \frac{(\beta-\gamma)\pi}{2} \\ & \left. + a^2 \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} - b\omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} + ab\omega^\gamma \sin \frac{\gamma\pi}{2} \right). \quad (4.51) \end{aligned}$$

Примењујући правило за квадратни корен комплексног броја (1.15), добијају се изрази за реални

$$\operatorname{Re} k(\omega) = \sqrt{\frac{|\psi(\omega)| + \operatorname{Re} \psi(\omega)}{2}} \quad (4.52)$$

и имагинарни део

$$\operatorname{Im} k(\omega) = \operatorname{sgn} [\operatorname{Im} \psi(\omega)] \sqrt{\frac{|\psi(\omega)| - \operatorname{Re} \psi(\omega)}{2}} \quad (4.53)$$

кофицијента простирања  $k(\omega) = \sqrt{\psi(\omega)}$ , као функције кружне учесталости. На основу тога, једноставно се долази до израза за фреквенцијску зависност модула

$$|W_\infty(x, \omega)| = e^{-x \operatorname{Re} k(\omega)} \quad (4.54)$$

и аргумента

$$\arg W_\infty(x, \omega) = -x \operatorname{Im} k(\omega) \quad (4.55)$$

функције преноса (импулсног одзива) полубеконечног вода, као што је већ урађено за класичну ЈТ и њене специјалне случајеве у одељку 2.5. Наравно, као у 2.5, поново следе изрази за модул у децибелима

$$\begin{aligned} |W_\infty(x, \omega)|_{\text{dB}} &= -20 x \operatorname{Re} k(\omega) \log e \\ &= -20 x \sqrt{\frac{|\psi(\omega)| + \operatorname{Re} \psi(\omega)}{2}} \log e \quad (4.56) \end{aligned}$$

и логаритам апсолутне вредности аргумента

$$\begin{aligned} \log |\arg W_{\infty}(x, \omega)| &= \log (x |\operatorname{Im} k(\omega)|) \\ &= \log x + \frac{1}{2} \log \frac{|\psi(\omega)| - \operatorname{Re} \psi(\omega)}{2} \end{aligned} \quad (4.57)$$

функције преноса.

Из израза (4.50) и (4.51), види се да  $\operatorname{Re} \psi(\omega)$  и  $\operatorname{Im} \psi(\omega)$  имају веома сложену зависност од кружне учесталости, а због тога и изрази (4.52) и (4.53), реални и имагинарни део коефицијента простирања, па самим тим и изрази (4.54) и (4.55), модул и аргумент функције преноса. Због тога је из фреквенцијских карактеристика функције преноса тешко проценити параметре ( $\alpha, \beta, \gamma, a$  и  $b$ ) (бездимензијског) модела, као и процесе (таласне, дифузне и статичке дисипације) који су укључени и који доминирају у моделу. Међутим, могуће је извршити асимптотску фреквенцијску анализу за ниске и за високе учесталости и на основу тога извести одређене закључке.

#### 4.4.1 Асимптотска анализа за ниске учесталости

Када су у питању временски константни сигнали, или сигнали веома ниских учесталости, изрази за  $\operatorname{Re} \psi(\omega)$ ,  $\operatorname{Im} \psi(\omega)$  и  $|\psi(\omega)|$  понашају се на следећи начин

$$\operatorname{Re} \psi(\omega) \sim \frac{b}{a}, \quad \operatorname{Im} \psi(\omega) \sim \omega^{\gamma} \frac{b}{a} \sin \frac{\gamma\pi}{2}, \quad |\psi(\omega)| \sim \frac{b}{a}, \quad \text{за } \omega \rightarrow 0 \quad (4.58)$$

види (4.50) и (4.51), а на основу тога и израза (4.50) и (4.51), следи да је

$$\operatorname{Re} k(\omega) \sim \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} k(\omega) \rightarrow 0, \quad \text{за } \omega \rightarrow 0. \quad (4.59)$$

Модул и аргумент функције преноса, као функције кружне учесталости, су тада

$$|W_{\infty}(x, \omega)| = e^{-x \operatorname{Re} k(\omega)} \sim e^{-x \sqrt{\frac{b}{a}}} \quad \text{и} \quad \arg W_{\infty}(x, \omega) \rightarrow 0, \quad \text{за } \omega \rightarrow 0, \quad (4.60)$$

што одговара својствима статичке дисипације, види одељак 2.5. Овакав резултат могао се наслутити и на основу УФЈТ (3.52), јер ако се узме у обзир да су за временски константне сигнале чланови (3.52) уз изводе по времену једнаки нули, тада се УФЈТ и сведе на класичну једначину статичке дисипације.

#### 4.4.2 Асимптотска анализа за високе учесталости

У случају високих учесталости, изрази за  $\operatorname{Re} \psi(\omega)$ ,  $\operatorname{Im} \psi(\omega)$  и  $|\psi(\omega)|$  имају следећу зависност од  $\omega$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \psi(\omega) &\sim \omega^{\alpha+\gamma} \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}, \quad \operatorname{Im} \psi(\omega) \sim \omega^{\alpha+\gamma} \sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}, \\ \text{и } |\psi(\omega)| &\sim \omega^{\alpha+\gamma}, \quad \text{за } \omega \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.61)$$

а на основу тога и израза (4.50) и (4.51) следе и изрази који дају понашање реалног

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} k(\omega) &\sim \omega^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}}{2}} \\ &\sim \omega^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{4}, \quad \text{за } \omega \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.62)$$

и имагинарног

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} k(\omega) &\sim \omega^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{2}}{2}} \\ &\sim \operatorname{sgn} [\operatorname{Im} \psi(\omega)] \omega^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} \sin \frac{(\alpha+\gamma)\pi}{4}, \quad \text{за } \omega \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.63)$$

дела коефицијента простирања у случају високих учесталости.

На основу претходних израза могу се препознати неки карактеристични случајеви за специјалне вредности параметара  $\alpha$  и  $\gamma$ , знајући да  $\alpha + \gamma$  представља ред УФЈТ, види (3.52) или (3.54). Упут треба имати на уму изразе за фреквенцијску зависност модула,  $|W_\infty| = e^{-x \operatorname{Re} k}$ , и аргумента,  $\arg W_\infty = -x \operatorname{Im} k$ , функције преноса.

У случају када је  $\alpha + \gamma = 2$  ( $\alpha = \gamma = 1$ ), УФЈТ ће се свести на проширену ЈТ, због додатног члана  ${}_0I_t^\beta$ , види (3.54) и (2.15). Без обзира на то, једначина ће бити другог реда и, по узору на анализу из одељка 2.5, за очекивати је да при високим учесталостима до изражаја дођу таласна својства. За  $\alpha + \gamma = 2$  из израза (4.62) и (4.63) види се да је  $\operatorname{Re} k = 0$  и  $\operatorname{Im} k \sim \omega$ , односно да  $|W_\infty| \rightarrow 1$ , а  $\arg W_\infty \sim \omega$ , што потпуно одговара таласним својствима, види (2.53).

У другом специјалном случају, када је  $\alpha + \gamma = 1$ , УФЈТ се своди на дифузно-дисипативну једначину, опет проширену чланом  ${}_0I_t^\beta$ , види (2.21). Како је једначина тада првог реда очекује се да на веома високим учесталостима доминирају дифузна својства. Поново посматрајући (4.62) и (4.63) види се да ће тада, за  $\alpha + \gamma = 1$ ,  $\operatorname{Re} k \sim \sqrt{\frac{\omega}{2}}$  и  $\operatorname{Im} k \sim \sqrt{\frac{\omega}{2}}$ , што одговара дифузији, види (2.57).

Трећи, специјалан случај је за  $\alpha + \gamma = 0$ , односно  $\alpha = \gamma = 0$ , и тада се УФЈТ, због  ${}_0I_t^\beta$ , своди на проширену једначину статичке дисипације, види (2.19). Из (4.62) и (4.63), уз  $\alpha + \gamma = 0$ , следи да су у овом случају  $\operatorname{Re} k \rightarrow 1$ , односно  $|W_\infty| \sim e^{-x}$ , и  $\operatorname{Im} k \rightarrow 0$ , односно  $\arg W_\infty \rightarrow 0$ , што одговара статичкој дисипацији, види (2.61).

Сви остали случајеви вредности  $\alpha$  и  $\gamma$ , наравно за  $\alpha, \gamma \in (0, 1)$ , подељени су на два интервала којима су границе претходно наведени специјални случајеви. Тако се за  $\alpha + \gamma \in (1, 2)$  добија уопштена фракциона једначина телеграфичара или фракциона таласно-дизузна једначина, види (3.7) и (2.20), док се за  $\alpha + \gamma \in (0, 1)$ , УФЈТ своди на уопштену фракциону дифузно-дисипативну једначину, види (2.21).



## **5. Графички приказ, верификација и тумачење резултата**

У претходним главама формулисан је модел и одређено је аналитичко решење за импулсни одзив, дато са (4.15), за уопштени фракциони модел електричног вода (4.1 - 4.3), узимајући у обзир почетне (4.4) и граничне (4.5) услове. Анализирана је аналогна форма проблема, бездимензионална уопштена једначина телеграфичара (3.52), за различите случајеве броја и природе (положаја) тачака гранања коефицијента простирања  $k$  (4.13), види одељак 4.2. Различити облици импулсног одзива, у зависности од броја и природе тачака гранања, који су добијени методом контурне интеграције, види одељак 4.3, биће упоређени са решењима која су добијена помоћу Де Хуговог алгоритма и Пост-Видеровом инверзионом формулом, види одељке 1.3.4 и 1.3.3. Поређења ће бити приказана на одзиву као континуалној функцији времена на дискретним позицијама. Приказани су и анализирани и просторни профили у дискретним тренуцима времена, на којима се лако разликују доминације таласног или дифузног карактера. Такође, приказане су и фреквенцијске карактеристике модула и аргумента функције преноса вода, на основу којих је још једном потврђена класификација и анализа процеса који доминирају, као и утицај положаја и броја тачака гранања, а све то у зависности од параметара модела.

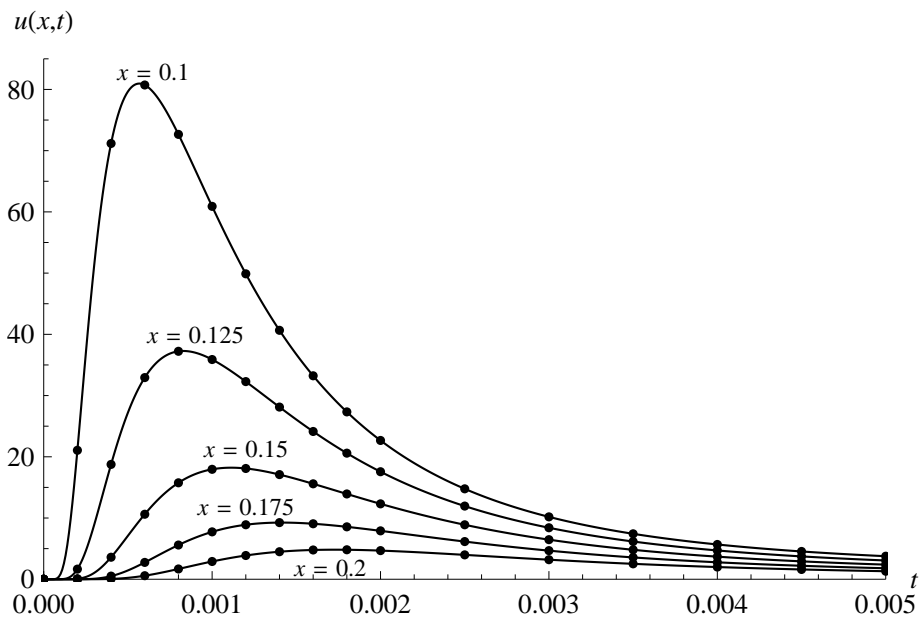
Цела глава представља оригинални научни допринос.

### **5.1 Еволуција импулног одзива у времену на дискретним позицијама**

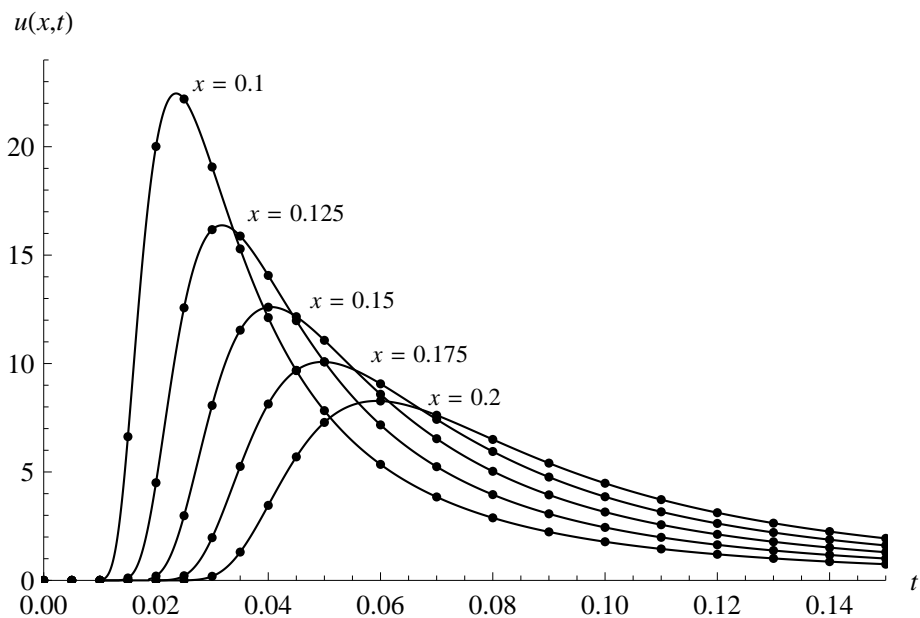
Циљ је да се истражи природа импулног одзива графичким приказом транзијентног режима, на сликама 5.1 - 5.4, као и да се изврши поређење са одзивом који је добијен нумеричким израчунавањем помоћу Де Хуговог алгоритма. Подударане између одзива добијеног аналитичким методом у одељку 4.3 (представљен пуном линијом) и нумеричког резултата добијеног Де Хуговим алгоритмом (представљен тачкама) је веома добро, као што се може и видети на наведеним сликама. За слике 5.1 - 5.5 параметри модела су изабрани тако да задовоље следеће услове:  $\beta = \gamma$  и  $a > 1$ .

Графици на сликама 5.1 и 5.2 представљају одзиве у случају када  $k$  нема тачака гранања, тако да је аналитичко решење израчунато према изразу (4.35). Конкретно, графици на слици 5.1 су за параметре  $\alpha + \beta \in (0, 1)$ , док су на слици

## 5. Графички приказ, верификација и тумачење rezultata



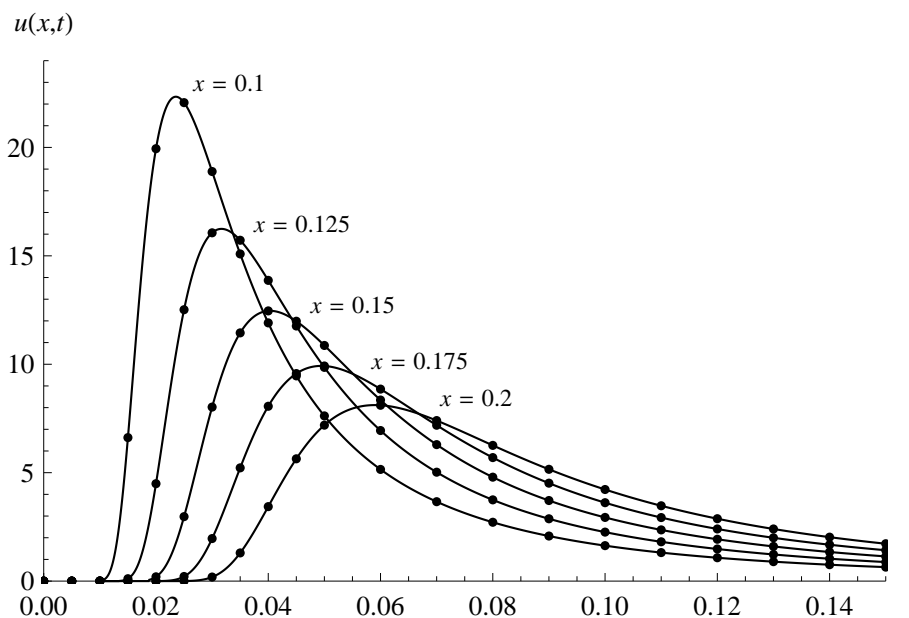
Слика 5.1: Импулсни одзив  $u(x,t)$  као функција времена  $t$  на дискретним позицијама  $x$  за параметре  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 450$ .



Слика 5.2: Импулсни одзив  $u(x,t)$  као функција времена  $t$  на дискретним позицијама  $x$  за параметре  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 4.5$ .

5.2 за параметре  $\alpha + \beta \in (1, 2)$ . Непостојање тачака гранања, у другом случају, постиже се погодним избором параметра  $b$  тако да критеријумска функција  $f$ , (4.21), буде мања од нула. У овом случају природа одзива транзијентног режима је апериодична.

Критично апериодични одзив у транзијентном режиму, израчунат помоћу аналитичког решења (4.45), приказан на слици 5.3, добијен је за  $\alpha + \beta \in (1, 2)$



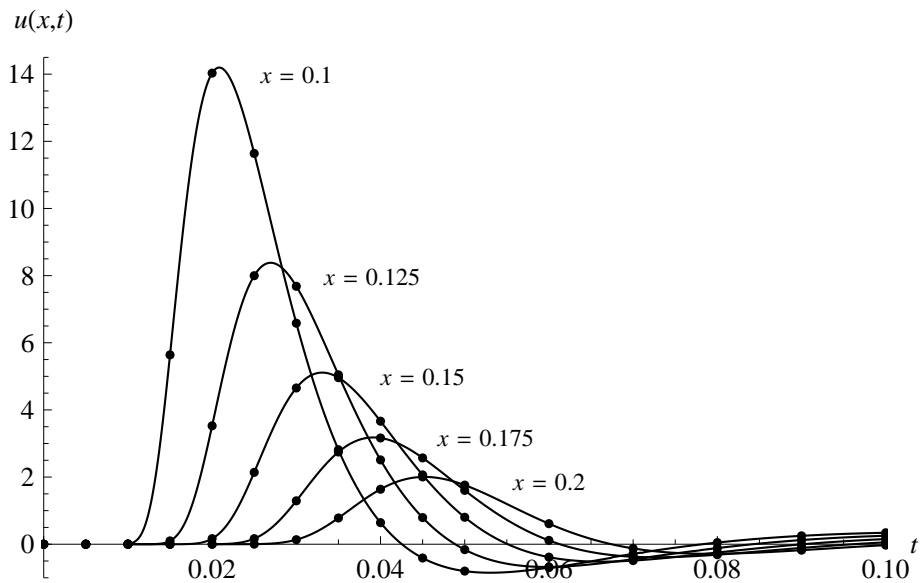
Слика 5.3: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција времена  $t$  на дискретним позицијама  $x$  за  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 9$ .

и коефицијент простирања са једном реалном негативном тачком гранања, с обзиром да је параметар модела  $b$  изабран тако да критеријумска функција  $f$ , (4.21), буде једнака нули.

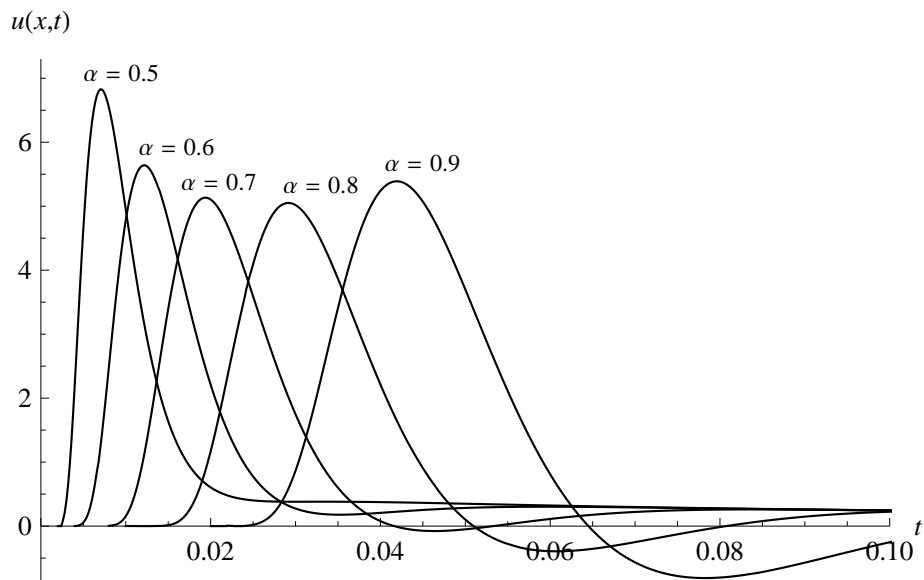
Пригушено осцилаторан одзив у транзијентном режиму, приказан на слици 5.4, добија се у случају када  $\alpha + \beta \in (1, 2)$  и када  $k$  има пар конјуговано комплексних тачака гранања, у левој полуравни, што се постиже избором параметра  $b$  тако да функција разграничења  $f$  (4.21) буде већа од нула. У овом случају вредности одзива су рачунате према аналитичком решењу (4.48).

До промене транзијентног режима импулсног одзива из апериодичног у пригушено осцилаторни, као што се може видети на сликама 5.1 - 5.4, респективно, неће доћи само због промене параметра  $b$ , него ће до промене доћи и ако се, на пример, промени параметар  $\alpha$ , као што се може видети на слици 5.5. Треба имати на уму да индуктивност фракционог реда описује елемент чија су својства између својстава отпорника ( $\alpha = 0$ ) и својстава калема ( $\alpha = 1$ ), тако да се са повећањем параметра  $\alpha$  очекује да све више долази до изражаја осцилаторан карактер решења, што се и показало на примерима приказаним на слици 5.5.

## 5. Графички приказ, верификација и тумачење резултата



Слика 5.4: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција времена  $t$  на дискретним позицијама  $x$  за  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 450$ .

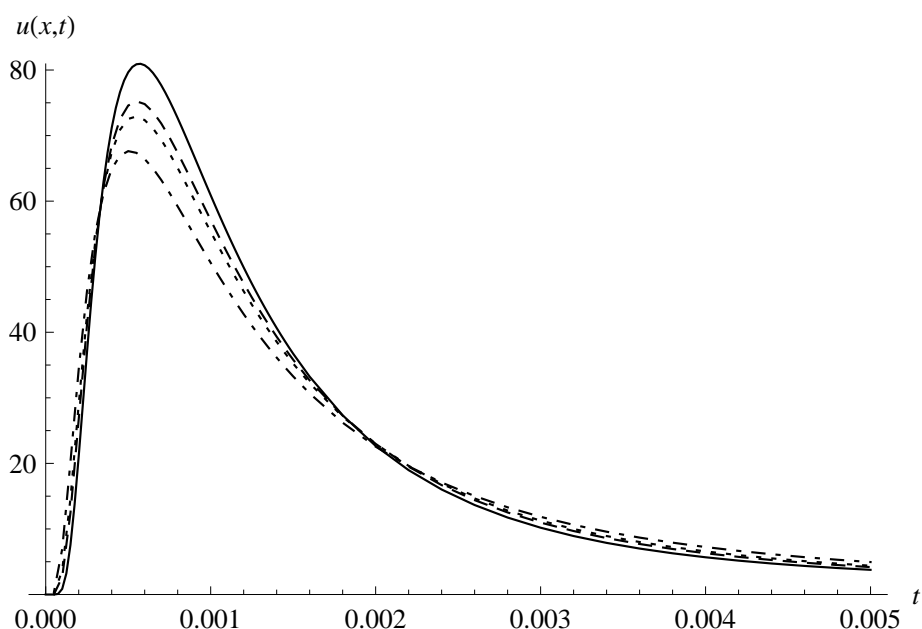


Слика 5.5: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција времена  $t$  на дискретној позицији  $x = 0.15$  за различите вредности параметра  $\alpha$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 450$ .



Поређења импулсног одзива вода добијеног методом контурне интеграције дата изразима (4.35), (4.45) и (4.48) и Пост-Видеровом инверзионом формулом, приказана су на сликама 5.6 - 5.9. Уколико функција преноса нема тачака гранања, за  $\alpha + \beta < 1$ , импулсни одзив је приказан на слици 5.6, а слика 5.7 приказује одзив вода када функција преноса нема тачака гранања за  $\alpha + \beta > 1$ . Када постоји једна негативна реална тачка гранања одзив је дат на слици 5.8, а слика 5.9 приказује одзив вода уколико функција преноса поседује пар конјуговано комплексних тачака гранања.

Како одзив (и његова тачност) добијен Пост-Видеровим методом зависи од реда коришћеног извода, сва четири случаја су израчуната за три вредности реда извода: четвртог (црта-тачка-црта линија), осмог (тачкаста линија) и дванаестог (испрекидана линија). Наравно, зна се да је израчунавање Пост-Видеровом инверзионом формулом прецизније што је коришћени ред извода већи.

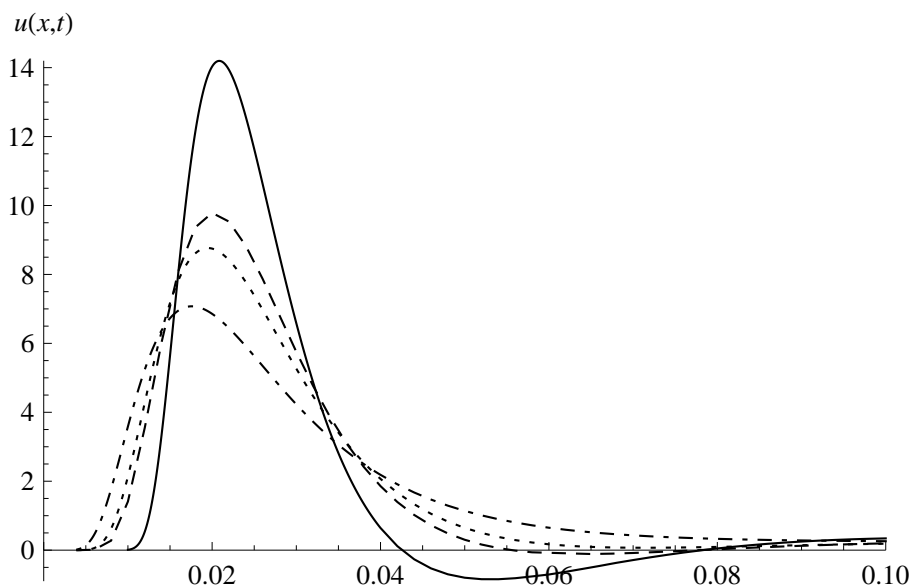


Слика 5.6: Одзив генерисан на основу аналитичког решења и Пост-Видерове инверзионе формуле, за изводе реда 4, 8 и 12, на дискретној позицији  $x = 0.1$  и за параметре  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 450$ .

Анализом графика приказаних на сликама 5.6 - 5.9 јасно се може утврдити да одзив добијен Пост-Видеровом инверзионом формулом конвергира ка аналитичком решењу у сва четири случаја. Овим се, на још један начин, показује исправност добијеног аналитичког решења.

Такође се види да је конвергенција одзива добијеног Пост-Видеровом инверзионом формулом ка одзиву аналитичког решења најбоља у случају када не постоје тачке гранања за  $\alpha + \beta < 1$ , види слику 5.6. Усложњавањем природе коефицијента простирања конвергенција се успорава и најспорија је за случај постојања две конјуговано комплексне тачке гранања, што се види са слике 5.9.





Слика 5.9: Одзив генерисан на основу аналитичког решења и Пост-Видерове инверзионе формуле, за изводе реда 4, 8 и 12, на дискретној позицији  $x = 0.1$  и за параметре  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 450$ .

## 5.2 Просторни профили импулсног одзива у дискретним тренуцима времена

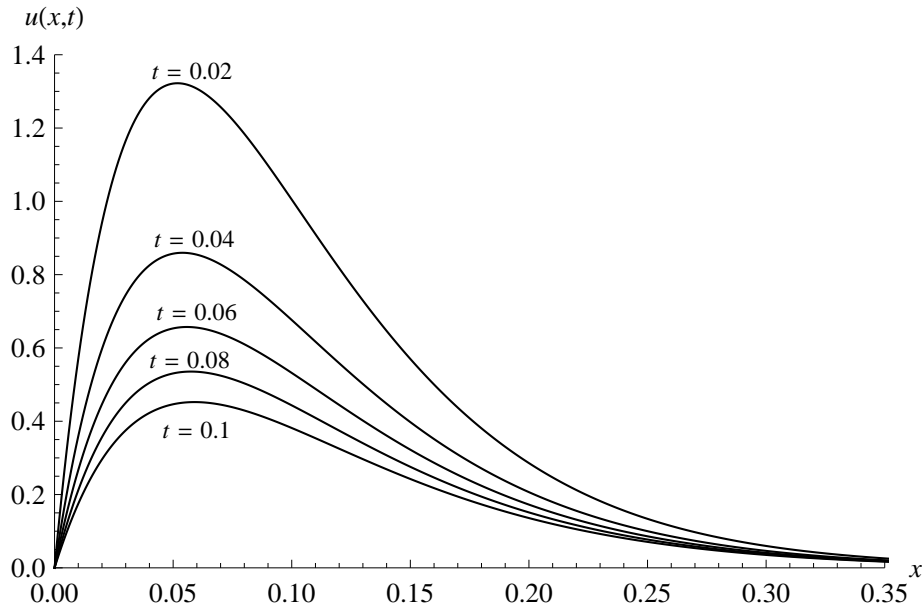
Слике 5.10 - 5.16 представљају просторну еволуцију импулсног одзива (4.15), у дискретним тренуцима времена, који одговара понашању уопштеног фракционог модела електричних водова (4.1 - 4.3), при том уважавајући почетне (4.4) и граничне (4.5), односно његовог еквивалентна, уопштене једначине телеграфичара (3.52). Очекује се да природа одзива буде, према еквивалентној форми уопштене једначине телеграфичара (3.54), дифузног типа за  $\alpha + \gamma \in (0, 1)$ , односно таласног типа за  $\alpha + \gamma \in (1, 2)$ . Опет, у оба случаја, карактер одзива зависи од броја и положаја тачака гранања функције  $k$ , (4.13), што је објашњено у одељку 4.2.

### 5.2.1 Профили дифузног карактера

Из еквивалентне форме уопштене једначине телеграфичара (3.54) може се видети да је у једначини највиши ред извода  $\alpha + \gamma$ . Због тога, ако је  $\alpha + \gamma \in (0, 1)$  за очекивати је да импулсни одзив има дифузни карактер, односно да током времена нема просторне пропације поремећаја изазваног Дираковом  $\delta$  дистрибуцијом у координатном почетку ( $x = 0$ ), или да се та пропација дешава у ограниченом домену.

Са графика приказаног на слици 5.10, који се добија у случају када је  $\beta = \gamma$ ,  $a > 1$  и  $\alpha + \gamma \in (0, 1)$ , што имплицира да  $k$ , (4.13), нема тачака гранања, може се закључити да одзив има дифузни карактер, с обзиром да се максимум одзива постепено смањује. Такође, треба уочити да се максимум удаљава од

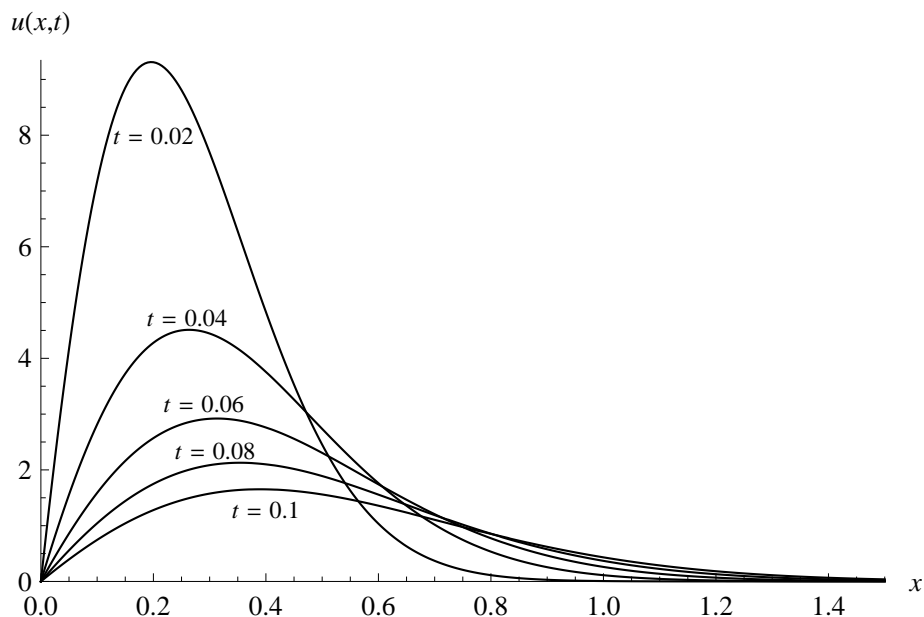
## 5. Графички приказ, верификација и тумачење резултата



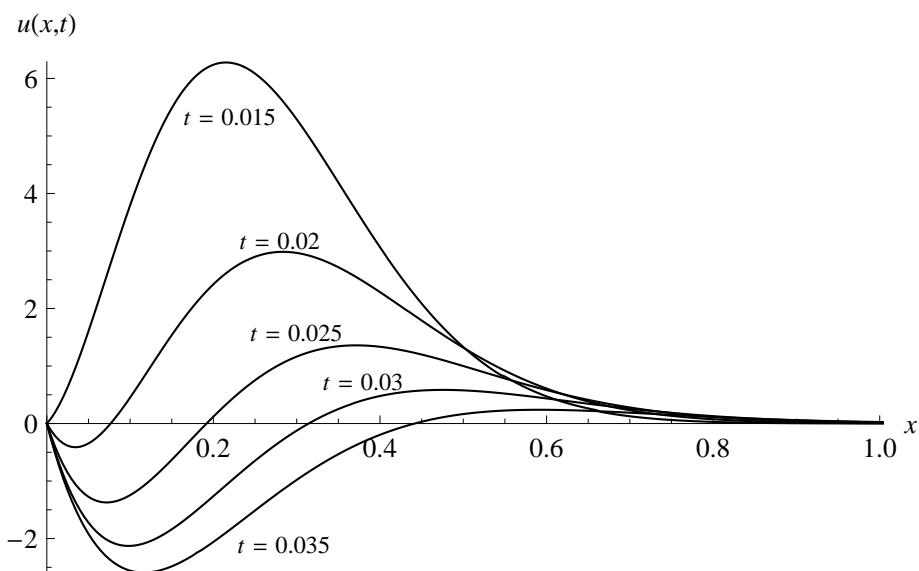
Слика 5.10: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција позиције  $x$  у дискретним тренуцима времена  $t$  за  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 450$ .

координантног почетка како време пролази, али вероватно не одлази у бесконачност како време тежи у бесконачност, јер то би био случај да доминирају таласна својства. Овај ефекат је много израженији на слици 5.11, добијеној у случају када је  $\alpha + \gamma \in (0, 1)$ ,  $\alpha + \beta \in (1, 2)$  и  $f = 0$ , што имплицира да  $k$  има једну реалну негативну тачку гранања, види (4.21). С обзиром на чињеницу да је одзив истог типа, види одељак 5.1, није приказан случај када функција  $k$  нема тачака гранања.

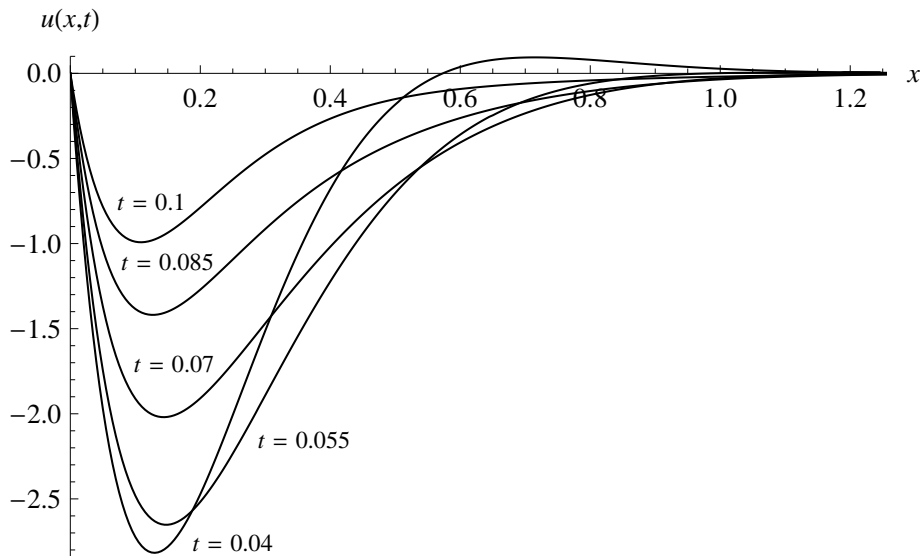
У случају када је  $\alpha + \gamma \in (0, 1)$ ,  $\alpha + \beta \in (1, 2)$  и  $f > 0$ , види (4.21), коефицијент простирања  $k$  има пар конјуговано комплексних тачака гранања са негативним реалним делом. Одговарајући импулсни одзив може се видети на графицима слика 5.12 и 5.13. Специфичност овог случаја је то што, како време пролази, одзив мења знак и како се позитиван максимум смањује, и помера дуж  $x$  правца, настаје негативан максимум који расте и такође се удаљава од координантног почетка, што се може видети на слици 5.12. На крају, одзив постаје негативног знака и постоји само један максимум који се смањује током времена, као што се може и видети на графику са слике 5.13. Овај одзив је дифузног типа, иако необичан, с обзиром да поседује и негативне вредности. Класификован је као дифузни с обзиром да постаје нула током времена, док је просторно ограничен.



Слика 5.11: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција позиције  $x$  у дискретним тренуцима времена  $t$  за  $\alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\beta = \frac{5}{6}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{3}$  и  $b = 3$ .



Слика 5.12: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција позиције  $x$  у дискретним тренуцима времена  $t$  за  $\alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\beta = \frac{5}{6}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{3}$  и  $b = 300$ .



Слика 5.13: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција позиције  $x$  у дискретним тренуцима времена  $t$  за  $\alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\beta = \frac{5}{6}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{3}$  и  $b = 300$ .

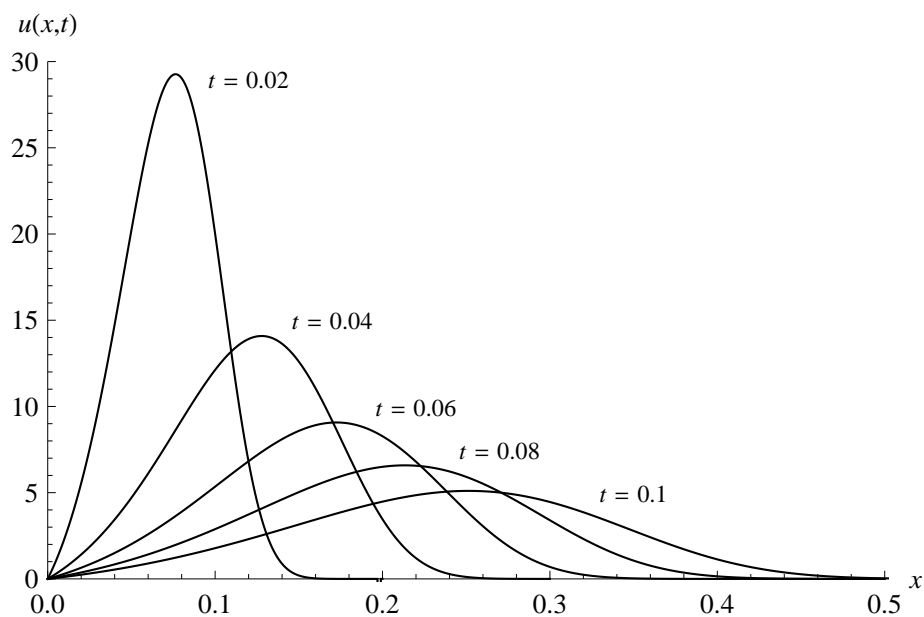
### 5.2.2 Профили таласног карактера

Импулсни одзив чији су просторни профили таласног типа, тј. када постоји просторна пропација поремећаја изазваног Дираковом  $\delta$  дистрибуцијом на граници домена, очекује се када је највиши ред извода  $\alpha + \gamma \in (1, 2)$ , што се види из евивалентне форме уопштене једначине телеграфичара (3.54). У циљу добијања графика приказаних на сликама 5.14 - 5.16, параметри модела су изабрани тако да задовоље следеће релације  $\beta = \gamma$ ,  $a > 1$ .

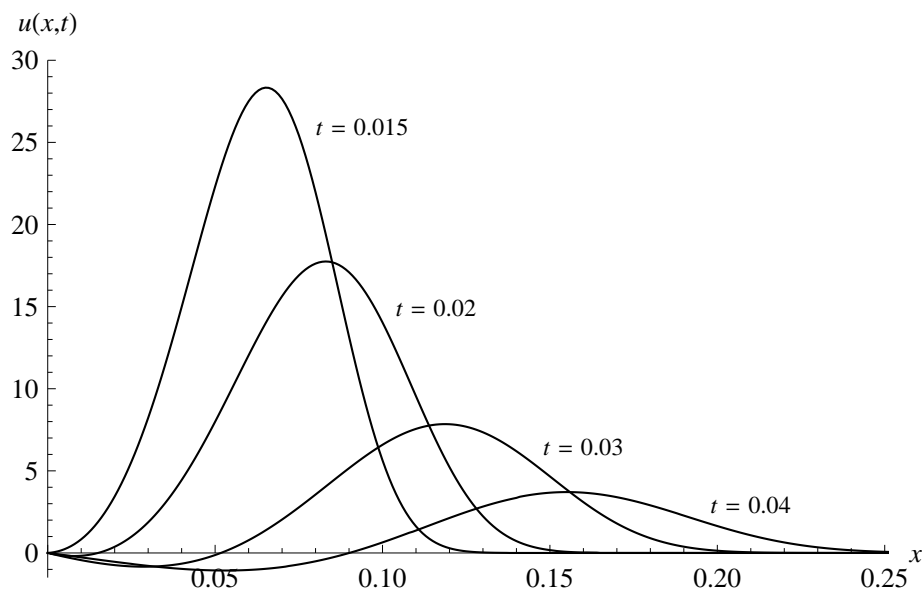
На графику са слике 5.14 види се таласни профил одзива, с обзиром да позиција максимума расте како време пролази, иако његова вредност опада. Сам максимум вероватно путује у бесконачност како време тежи у бесконачност, као што би се и очекивало код одзива таласног типа. Овде је  $\alpha + \beta \in (1, 2)$  и  $f < 0$ , што имплицира да функција  $k$  нема тачака гранања, види (4.21). Опет, с обзиром да је одзив истог типа и сличних карактеристика, види (4.21), није приказан случај када  $k$  има једну реалну негативну тачку гранања.

Импулсни одзив приказан на сликама 5.15 и 5.16 одговара случају када функција  $k$  има пар конјуговано комплексних тачака гранања са негативним реалним делом, што је последица избора параметара тако да  $\alpha + \beta \in (1, 2)$  и  $f > 0$ , види (4.21). За разлику од претходног случаја где постоји простирање само једног максимума који опада током времена, у овом случају, како време пролази, појављује се и други негативан максимум, што се може видети на графику са слике 5.15. Како време пролази, поред пропације позитивног и негативног максимума, појављује се још један нови позитиван максимум, као што се може видети на графику са слике 5.16. Почетни максимум монотono опада током простирања, док промена новонасталих максимума није монотона.

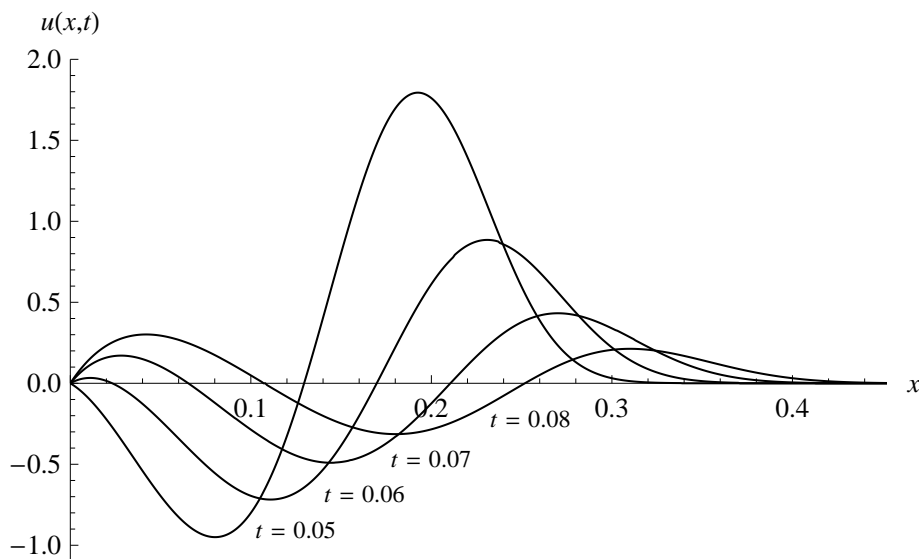
## 5.2. Просторни профили импулсног одзива



Слика 5.14: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција позиције  $x$  у дискретним тренуцима времена  $t$  за  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 4.5$ .



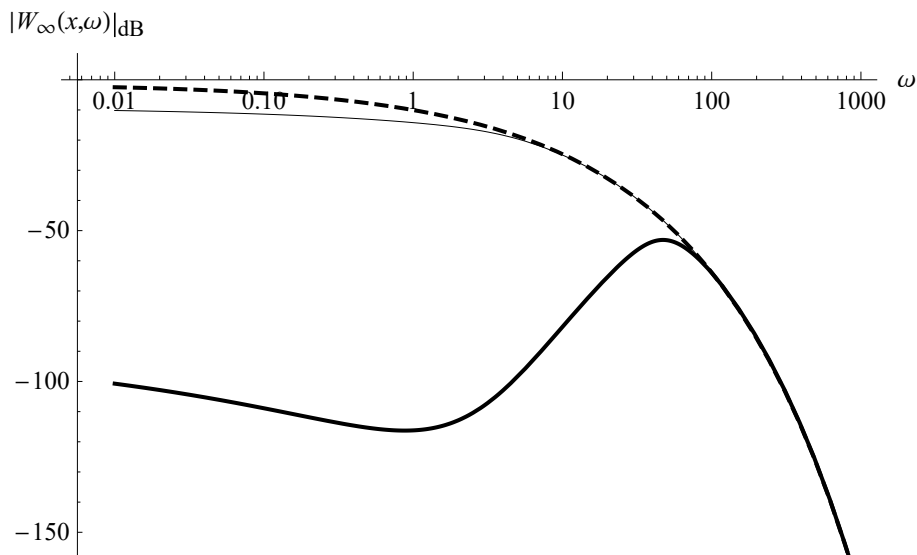
Слика 5.15: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција позиције  $x$  у дискретним тренуцима времена  $t$  за  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 450$ .



Слика 5.16: Импулсни одзив  $u(x, t)$  као функција позиције  $x$  у дискретним тренуцима времена  $t$  за  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$  и  $b = 450$ .

### 5.3 Фреквенцијске карактеристике

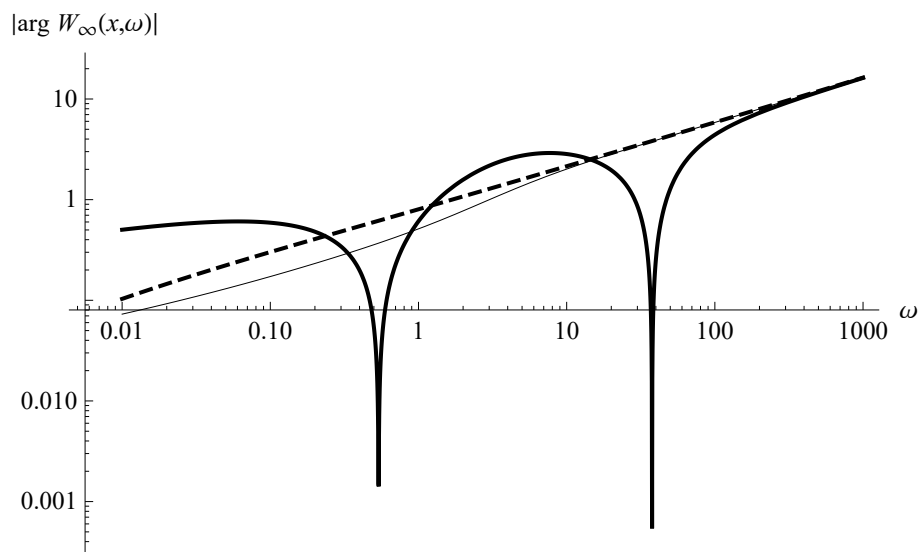
Функција преноса (4.12) електричног вода, описаног са УФЈТ (3.52), зависи од природе и броја тачака гранања коефицијента простирања  $k$ , који фигурише у њеном експоненту. Такође, ФП вода, односно својства вода, зависе и од највишег реда фракционог извода УФЈТ по времену,  $\alpha + \gamma$ .



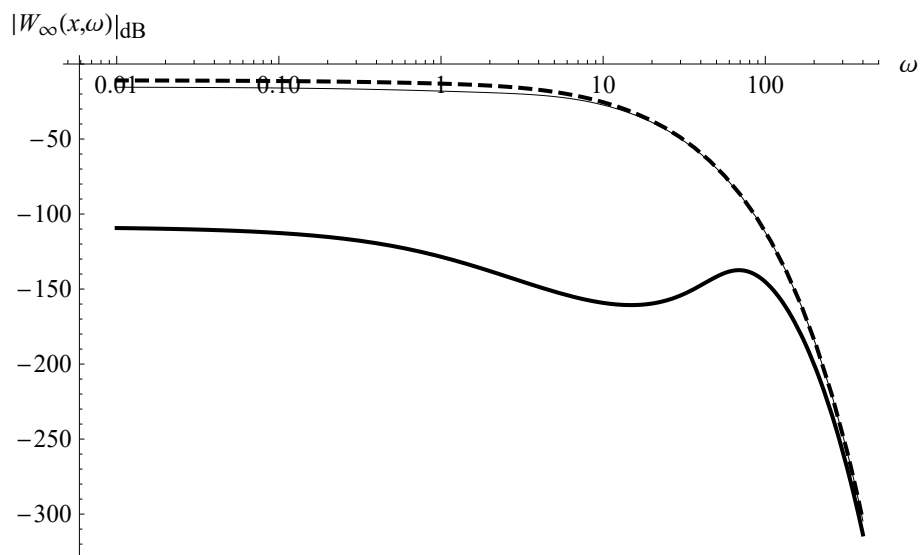
Слика 5.17: Фреквенцијска зависност модула ФП на позицији  $x = 1$ , за  $\alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\beta = \frac{5}{6}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{3}$ ,  $b_{NTG} = 0.1$ ,  $b_{RTG} = 3$  и  $b_{KKTG} = 300$ .

У овом одељку циљ је извршити фреквенцијску анализу модула (4.54) и аргумента (4.55) ФП, како би се испитале фреквенцијске карактеристике УФЈТ, односно модела електричног вода.





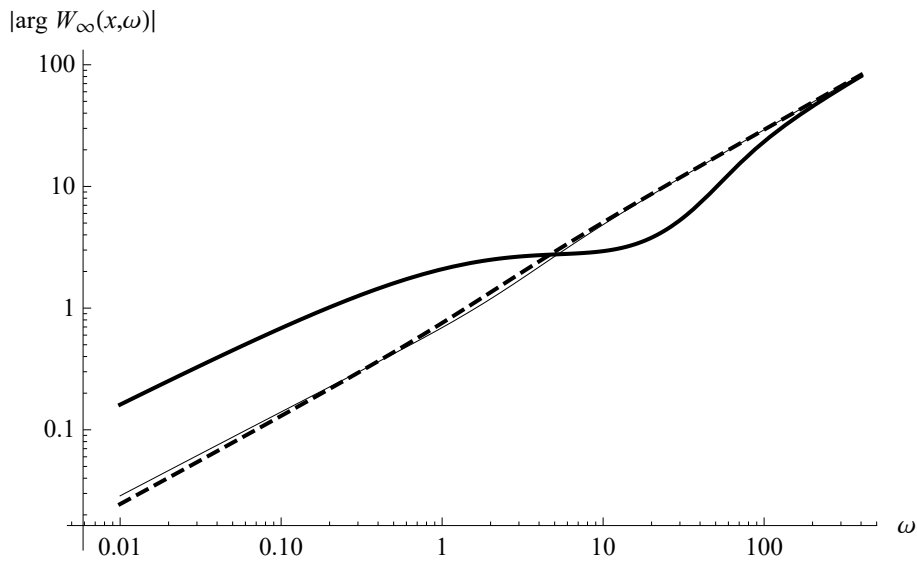
Слика 5.18: Фреквенцијска зависност аргумента ФП на позицији  $x = 1$ , за  $\alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\beta = \frac{5}{6}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{3}$ ,  $b_{\text{NTG}} = 0.1$ ,  $b_{\text{RTG}} = 3$  и  $b_{\text{KKTG}} = 300$ .



Слика 5.19: Фреквенцијска зависност модула ФП на позицији  $x = 1$ , за  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$ ,  $b_{\text{NTG}} = 4.5$ ,  $b_{\text{RTG}} = 9$  и  $b_{\text{KKTG}} = 450$ .

## 5. Графички приказ, верификација и тумачење резултата

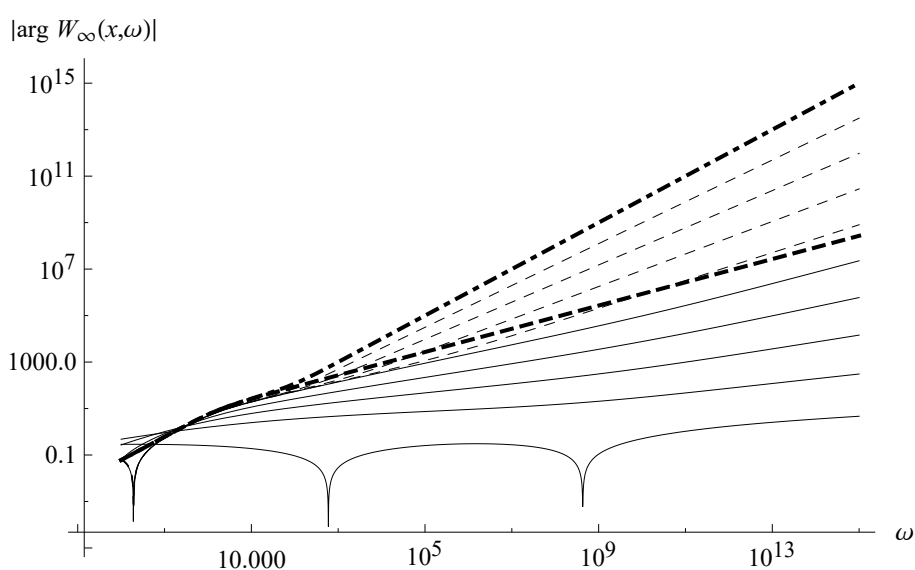
Утицај тачака гранања на фреквенцијску зависност модула (у децибелима) и (логаритма апсолутне вредности) аргумента ФП у случају дифузно-дисипативних процеса,  $\alpha + \gamma \in (0, 1)$ , приказани су на сликама 5.17 и 5.18, док су на сликама 5.19 и 5.20 приказани модул и аргумент ФП у случају таласно-дифузних процеса,  $\alpha + \gamma \in (1, 2)$ , респективно. Важно је пре анализе самих графика и извођења закључака из тога напоменути да су све величине на графицима бездимензионе. На графицима са свих наведених слика постоје по три криве, које одговарају одговарају различитим случајевима броја и положаја ТГ коефицијента простирања, а то је постигнуто променом вредности параметра  $b$ . Постојање тачке гранања  $s = 0$  подразумева се у свим случајевима. На сва



Слика 5.20: Фреквенцијска зависност аргумента ФП на позицији  $x = 1$ , за  $\alpha = \frac{5}{6}$ ,  $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$ ,  $b_{\text{NTG}} = 4.5$ ,  $b_{\text{RTG}} = 9$  и  $b_{\text{KKTG}} = 450$ .

четири графика, првом случају (када  $k$  нема тачака гранања, а  $b = b_{\text{NTG}}$ ) одговара испрекидана линија, други случај (када  $k$  има једну реалну тачку гранања, а  $b = b_{\text{RTG}}$ ) приказан је пуном тањом линијом, док је трећи случај (када  $k$  има пар конјуговано комплексних тачака гранања, а  $b = b_{\text{KKTG}}$ ) приказан пуном дебљом линијом. У прва два случаја, и за таласне и за дифузне процесе, криве које приказују модул готово да се поклапају, док у трећем случају вредност модула има немонотон карактер, види слике 5.17 и 5.19. Што се тиче аргумента функције преноса, на графицима је приказан логаритам његове апсолутне вредности, јер је такав приказ аргумента линеарна функција на високим учесталостима, чиме се једноставно на основу нагиба може одредити карактер процеса (таласно-дифузни или дифузно-дисипативни) и проценити ред једначине. Опет, прва два случаја, имају монотон карактер и готово се преклапају. У трећем случају аргумент је немонотона функција учесталости и потенцијално има и промене знака, види слике 5.18 и 5.20. Јасно је да су модул и аргумент на веома високим учесталостима сразмерни члану највишег реда ивода ( $\sim \omega^{\frac{\alpha+\gamma}{2}}$ ), тако да тада имају исто понашање без обзира који од три наведена случаја је у питању.

Квалитативно гледано, таласно-дифузни и дифузно-дисипативни карактер УФЈТ, за ниже и средње учесталости, нема значајне разлике, што се може и приметити ако се упореде слике 5.17 и 5.19, односно слике 5.18 и 5.20. Међутим, за више учесталости разлика се може уочити једино на онову нагиба функције аргумента. Наиме, на слици 5.18 где су приказани дифузно-дисипативни процеси, нагиб аргумента за високе учесталости је  $\sim \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{11}{24}$ , док је на слици 5.20, где су приказани таласно-дифузни процеси, нагиб аргумента  $\sim \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ . Овде треба имати на уму да код класичних таласних процеса аргумент ФП линеарно зависи од учесталости, код класичне дифузије аргумент је корена функција учесталости, док је код дисипативних процеса аргумент независан од учесталости, као што је приказано у одељку 2.5.



Слика 5.21: Фреквенцијска зависност аргумента ФП на позицији  $x = 1$ , за различите вредности параметара  $\alpha$  и  $\gamma$ , при чему су тање линије за  $\beta = \frac{1}{6}$ , а дебље за  $\beta = 0$ ,  $a = 2\sqrt[3]{9}$ ,  $b = 750$ .

Ова разграничења на онову аргумента су много очигледнија са слике 5.21. Наиме, дифузно-дисипативни карактер УФЈТ који се јавља за  $\alpha + \gamma \leq 1$ , добијен је за  $\alpha = 0.1$  и  $\gamma \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$ , јер, за високе учесталости, танке пуне линије леже између хоризонталне осе (статичка дисипација) и дебље испрекидане линије, према једначини

$$\left(1 + \frac{b}{1+a}\right)(\partial_t u + u) = \partial_{xx} u,$$

која представља (бездимензионисану) класичну дифузно-дисипативну једначину, добијену из (3.52) за  $\alpha = \beta = 0$  и  $\gamma = 1$ . Треба имати на уму да за  $\alpha = 0$  фракциони калем постаје отпорник, а за  $\beta = 0$  и кондензатор у редној грани постаје отпорник, чиме акумулација наелектрисања у проводнику више није узета у обзир.

Што се тиче таласно-дифузног карактера УФЈТ, који се јавља за  $\alpha + \gamma \in (1, 2)$ , он је добијен и приказан за  $\gamma = 0.9$  и  $\alpha \in \{0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$ , јер, за веома високе

## 5. Графички приказ, верификација и тумачење резултата

---

учесталости танке испрекидане линије налазе се између испрекидане дебље и дебље црта-тачка линије. Дебља црта-тачка линија оговара једначини

$$\partial_{tt}u + \left(1 + \frac{b}{1+a}\right)\partial_t u + \frac{b}{1+a}u = \partial_{xx}u,$$

која реперзентује (бездимензионисану) класичну ЈТ, добијену из (3.52) за  $\alpha = \gamma = 1$  и  $\beta = 0$ .

## Закључак

У дисертацији, чији предмет су била фракциона и тополошка уопштења једначине телеграфичара, на самом почетку изложени су елементи фракционог рачуна, комплексне анализе и интегралних трансформација, као неопходни алати и предзнања за истраживање. У наставку је дато детаљно ивођење класичне једначине телеграфичара у временском и комплексном домену. Извршена је анализа и класификација процеса и једначина које интегрише једначина телеграфичара. Такође су дате одговарајуће функције преноса електричног вода у зависности од граничних услова.

Приказана су фракциона и тополошка уопштења елементарног кола вода и дате су њима одговарајуће парцијалне фракционе диференцијалне једначине, као математички модели, на основу чега је извршена селекција уопштења по физичким процесима и феноменима која узимају у обзир. За изабрано тополошко уопштење дат је детаљан поступак формулације математичког модела.

Након формулације уопштене фракционе једначине телеграфичара за исту је одређено аналитичко решење методом контурне интеграције и извршена је фреквенцијска анализа функције преноса. Како решење зависи од параметара модела, дата је функција разграничења која на основу параметара недвосмислено одређује који облик решење је одговарајући.

На крају тезе, добијена решења су представљена у виду графика на којима је уједно извршено поређење и верификација резултата са другим аналитичким и нумеричким методима. Такође, на основу графика извршена класификација и провера који физички процеси и карактеристике доминирају моделом у зависности од изабраних параметара.

На основу истраживања спроведеног у овој дисертацији може се закључити да промене топологије елементарног кола вода, у виду додавања и/или премештања само једног елемента, могу да доведу до значајних промена у смислу карактеристика модела, односно које физичке процесе је тај модел у могућности да уважи. Процеси се крећу од таласних, преко дифузних и статичке дисипације, па све до процеса нижег реда од статичке дисипације. Показано је да се готово сви закључци о својствима модела могу извући било да се посматра топологија елементарног кола, било да се посматра једначина којом је моделиран вод за одређену топологију или анализом коефицијента простирања који одговара топологији.

На основу поступка за формулацију модела изабране топологије може се закључити да је изнети поступак примењив за формулацију модела било које

представљене топологије, али и безброј других могућих фракционих и тополошких уопштења модела електричног вода.

На основу израза за аналитичко решење следи да облик решења зависи од положаја и броја тачака гранања коефицијента простирања, што је последица одговарајућег избора параметара.

Нумеричким поређењем решења са два независна метода, може се извести закључак да су добијена аналитичка решења засигурно тачна.

На основу графичког приказа просторних профила може се закључити да изведени модел уважава нове, непознате ефекте, који нису својствене ни таласним ни дифузним процесима.

Асимптотском анализом фреквенцијских карактеристика модела вода може се закључити да је много сврсисходније и једноставније тумачити, уместо модула функције преноса, логаритам апсолутне вредности аргумента функције преноса, иако то није уобичајено.

За даље истраживање намеће се веома широк дијапазон проблема који овом дисертацијом нису узети у обзир. Пре свега требало би наћи одговарајућа решења и одзиве, са већ изнетим тополошким уопштењима, за вод коначне дужине, што може да се разграна на веома велики број потпроблема у зависности од тога чиме је вод затворен.

Истраживања би се могла спровести и у случају просторне фракционализације модела и уважавања нелокалности. Сигурно би озбиљан задатак био формулација модела који би потенцијално произашли из такве врсте уопштења, али би још тежи задатак био класификација изведених модела кроз тумачење њихових својстава и смислено придруживање физичких феномена које модел уважава. Наравно ту се отвара и питање решавања једначине, или система једначина, којом би добијени модел био описан, односно могућности добијања барем нумеричког, ако не и аналитичког, решења и његове верификације.

Верификација модела на основу експериментално добијених резултата, мерењем одзива реалних водова, како у временском тако и у фреквенцијском домену, био би веома значајан искорак у даљем истраживању.

# Литература

- [1] O. Heaviside. *Electromagnetic Theory*. Vol. II. New York: Chelsea Publishing Company, 1899.
- [2] S. M. Cvetičanin, D. Zorica, and M. R. Rapaić. "Generalized time-fractional telegrapher's equation in transmission line modeling." In: *Nonlinear Dynamics* 88 (2017), pp. 1453–1472.
- [3] S. M. Cvetičanin, M. R. Rapaić i D. Zorica. „Frequency analysis of generalized time-fractional telegrapher's equation". European Conference on Circuit Theory and Design, Catania, Italy (Septembar 4-6, 2017).
- [4] S. M. Cvetičanin, D. Zorica i M. R. Rapaić. „Frekvencijska analiza frakcionog modela električnog voda". ETRAN, Kladovo, Srbija (Jun 5-8, 2017).
- [5] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*. In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (eds A. Carpinteri, F. Mainardi). Vol. 378. CISM Courses and Lecture Notes. Wien and New York: Springer Verlag, 1997.
- [6] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier B.V., 2006.
- [7] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1999.
- [8] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, and D. Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. London: Wiley-ISTE, 2014.
- [9] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, and D. Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles*. London: Wiley-ISTE, 2014.
- [10] D. V. Widder. *The Laplace transform*. Princeton: Princeton University Press, 1946.
- [11] L. Debnath and D. Bhatta. *Integral Transforms and Their Applications*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [12] D. G. Duffy. *Transform methods for solving partial differential equation*. Second. Boca Raton: Chapman i Hall/CRC, 2004.
- [13] G. Doetsch. *Handbuch der Laplace-Transformationen I. and II*. Basel: Birkhäuser, 1950, 1955.
- [14] Z. Szmydt. *Fourier Transformation and Linear Differential Equations*. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1977.
- [15] J. Bak and D. J. Newman. *Complex Analysis*. New York: Springer, 2010.

- [16] E. L. Post. „Generalized differentiation”. Transactions of the American Mathematical Society 32 (1930), str. 723–781.
- [17] A. M. Cohen. Numerical methods for Laplace transform inversion. Vol. 5. New York: Springer, 2007.
- [18] F. R. de Hoog, J. H. Knight, and A. N. Stokes. “An improved method for numerical inversion of Laplace transforms.” In: SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 3 (1982), pp. 357–366.
- [19] P. Wynn. “On a Device for Computing the  $e_m(S_n)$  Transformation.” In: Mathematical Tables and Other Aids to Computation 10 (1956), pp. 91–96.
- [20] R. Horvat. Teorija električnih kola. Beograd: Gradjevinska knjiga, 1959.
- [21] B. D. Reljin. Teorija električnih kola I. Rešavanje kola u vremenskom domenu. Beograd: Akademska misao, 2009.
- [22] B. D. Reljin. Teorija električnih kola II. Rešavanje kola u frekvencijskom domenu. Beograd: Akademska misao, 2009.
- [23] L. O. Chua, C. A. Desoer i E. S. Kuh. Linear and nonlinear circuits. First. Sv. 1. Berkeley: McGraw-Hill, 1987.
- [24] J. V. Surutka. Elektromagnetika. Beograd: Akademska misao, 2006.
- [25] B. D. Popović. Elektromagnetika. Beograd: Gradjevinska knjiga, 1980.
- [26] Z. B. Popović i B. D. Popović. Introductory Electromagnetics. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [27] I. Schäfer and K. Krüger. “Modelling of coils using fractional derivatives.” In: Journal of Magnetism and Magnetic Materials 307 (2006), pp. 91–98.
- [28] A. Dzieliński, G. Sarwas, and D. Sierociuk. “Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models.” In: Advances in Difference Equations 2011:11 (2011), pp. 1–15.
- [29] A. Dzieliński, D. Sierociuk, and G. Sarwas. “Some applications of fractional order calculus.” In: Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 58 (2010), pp. 583–592.
- [30] I. S. Jesus and J. A. T. Machado. “Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes.” In: Nonlinear Dynamics 56 (2009), pp. 45–55.
- [31] R. Martin, J. J. Quintana, A. Ramos, and I. Nuez. “Modeling electrochemical double layer capacitor, from classical to fractional impedance.” In: Electrotechnical conference, MELECON 2008, The 14th IEEE Mediterranean. Ajaccio, Corsica, France, 2008, pp. 61–66.
- [32] J. J. Quintana, A. Ramos, and I. Nuez. “Modeling of an EDLC with fractional transfer functions using Mittag-Leffler equations.” In: Mathematical Problems in Engineering 2013 (2013), pp. 807034-1-7.
- [33] Y. Shang, W. Fei, and H. Yu. “A fractional-order RLGC model for terahertz transmission line.” In: IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest (IMS). Seattle, WA, 2013, pp. 1–3.
- [34] C. Yang-Yang and S-H. Yu. “A compact fractional-order model for terahertz composite right/left handed transmission line.” In: General Assembly and Scientific Symposium (URSI GASS), 2014 XXXIth URSI. Beijing, 2014, pp. 1–4.



## ЛИТЕРАТУРА

- [35] R. C. Cascaval, E. C. Eckstein, C. L. Frota, and J. A. Goldstein. "Fractional telegraph equations." In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 276 (2002), pp. 145–159.
- [36] J. Chen, F. Liu, and V. Anh. "Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables." In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 338 (2008), pp. 1364–1377.
- [37] S. Momani. "Analytic and approximate solutions of the space- and time-fractional telegraph equations." In: *Applied Mathematics and Computation* 170 (2005), pp. 1126–1134.
- [38] E. Orsingher and L. Beghin. "Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with brownian time." In: *Probability Theory and Related Fields* 128 (2004), pp. 141–160.
- [39] D. Zorica. „Difuzno-talasna jednačina raspodeljenog reda”. Disertacija. Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2009.
- [40] F. Huang. "Analytical solution for the time-fractional telegraph equation." In: *Journal of Applied Mathematics* 2009 (2009), pp. 890158-1-9.
- [41] W. Jiang and Y. Lin. "Representation of exact solution for the time-fractional telegraph equation in the reproducing kernel space." In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16 (2011), pp. 3639–3645.
- [42] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, and D. Zorica. "Diffusion wave equation with two fractional derivatives of different order." In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40 (2007), pp. 5319–5333.
- [43] S. Zhang. "Solution of semi-boundless mixed problem for time-fractional telegraph equation." In: *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* 23 (2007), pp. 611–618.
- [44] V. B. L. Chaurasia and R. S. Dubey. "Analytical solution for the generalized time-fractional telegraph equation." In: *Fractional Differential Calculus* 3 (2013), pp. 21–29.
- [45] S. Das, K. Vishal, P. K. Gupta, and A. Yildirim. "An approximate analytical solution of time-fractional telegraph equation." In: *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011), pp. 7405–7411.
- [46] M. R. Rapaić and Z. D. Jeličić. "Optimal control of a class of fractional heat diffusion systems." In: *Nonlinear Dynamics* 62 (2010), pp. 39–51.
- [47] M. R. Rapaić. „Optimalno i suboptimalno upravljanje klasom sistema sa raspodeljenim parametrima”. Disertacija. Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2011.
- [48] E. Orsingher and X. Zhao. "The space-fractional telegraph equation and the related fractional telegraph process." In: *Chinese Annals of Mathematics* 24B (2003), pp. 45–56.
- [49] G. Hariharan, R. Rajaraman, and M. Mahalakshmi. "Wavelet method for a class of space and time fractional telegraph equations." In: *International Journal of Physical Sciences* 7 (2012), pp. 1591–1598.
- [50] R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira, and J. Vaz Jr. "On the generalized Mittag-Leffler function and its application in a fractional telegraph equation." In: *Mathematical Physics Analysis and Geometry* 15 (2012), pp. 1–16.

- [51] R. F. Camargo, A. O. Chiacchio, and E. Capelas de Oliveira. "Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation." In: *Journal of Mathematical Physics* 49 (2008), pp. 033505-1-12.
- [52] H. Qi and X. Jiang. "Solutions of the space-time fractional Cattaneo diffusion equation." In: *Physica A* 390 (2011), pp. 1876–1883.
- [53] R. F. Camargo, R. Charnet, and E. Capelas de Oliveira. "On some fractional Green's functions." In: *Journal of Mathematical Physics* 50 (2009), pp. 043514-1-12.
- [54] S. Yakubovich and M. M. Rodrigues. "Fundamental solutions of the fractional two-parameter telegraph equation." In: *Integral Transforms and Special Functions* 23 (2012), pp. 509–519.