УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ

Ивана Милановић

ОБРАДА ФУНКЦИЈЕ ДАТЕ ПОМОЋУ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА У ПРОЦЕСУ МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛИРАЊА

- докторска дисертација -

Нови Сад, 2014.

Предговор

Математика је саставни део опште културе савременог човека, незамењиво средство васпитања мишљења и основа целокупног научног, техничког и економског развоја.

Докторска дисертација *Обрада функције дате помоћу одређеног интеграла у процесу математичког моделирања* резултат је тринаестогодишњег искуства у раду са гимназијалцима и жеље за унапређивањем наставног процеса, увођењем нових, савремених методичких приступа настави и учењу математике.

У раду на дисертацији помогли су ми многи, због чега желим да им се овом приликом најискреније захвалим.

Највећу и неизмерну захвалност дугујем свом ментору, проф. др Ђурђици Такачи, за стрпљење, упорност, помоћ, подршку и мотивацију током свих фаза рада на дисертацији. Њене идеје, савети и примедбе у великој мери допринели су да дисертација има облик који данас има.

Захваљујем се Департману за математику и информатику на Природно–математичком факултету у Новом Саду.

Велику захвалност дугујем професорима др Драгославу Херцегу, др Арпаду Такачију, др Ненаду Теофанову и др Драгану Машуловићу на саветима и речима подршке током мојих докторских студија.

Своју захвалност изражавам и професорима др Марини Чичин–Шаин и др Мари Ђукић, које су својим сугестијама допринеле побољшању квалитета дисертације.

Посебну захвалност дугујем својој породици, на подршци, разумевању, стрпљењу и пруженој прилици да учим и радим оно што волим.

Нови Сад, фебруар 2014. Ивана Милановић

Садржај

1 Уводни део

1.1 Увод

Једна од важних улога математике јесте да опише и објасни проблеме и феномене из стварног света, истражи кључна питања о посматраном свету и тестира различите идеје, што је могуће кроз формирање математичких модела у процесу математичког моделирања [59]. Како свет у ери убрзаног научно-технолошког и друштвеног развоја постаје све сложенији, јављају се нови и тежи проблеми које треба решити. Такви проблеми захтевају веома специфична решења која захтевају и специфичне информације. Такође, постаје значајно и идентификовање услова решења, а не само резултата као једино значајних [49]. Због тога је потребно увођење нових наставних концепата и методичких приступа, тако да стицање знања буде првенствено у функцији развоја математичког мишљења и развоја одређених способности код ученика: креативности, решавања проблема, способности учења, доживотног учења, прилагођавања новим ситуацијама, коришћења различитих извора, информационе технологије и др. У том смислу, математичко моделирање у настави, засновано на идеји стицања и продубљивања математичких знања кроз примену тих знања у решавању реалних проблема, треба да представља један од веома важних методичких приступа савременом образовању, што је и предмет овог истраживања. Међутим, и даље постоји значајан јаз између спроведених истраживања и развоја математичког образовања са једне стране и реализације наставе математике са друге стране. Моделирање и даље има минорну улогу и не примењује се као методички приступ свакодневној школској наставној пракси. Формалан приступ решавању проблема и даље има велику улогу, а примери из реалног окружења или неке научне дисциплине, ако их уопште има у настави, третирају се само као илустрације, не узимајући у обзир њихов значај [6].

Са друге стране, управо природа научног развоја, карактер когнитивних процеса и практична примена знања представљају основне разлоге за увођење интердисциплинарног приступа савременом образовању [88], мада је данашња школска пракса и даље у највећој мери оријентисана ка дисциплинарном приступу и традиционалним методичким поступцима [68]. Модел васпитно-образовног система који полази од начела интердисциплинарности и интеграције научних области напушта традиционалну затвореност појединог наставног предмета у предметном систему организације васпитно-образовног процеса [78]. У гимназијалском образовању ученика посебно је значајно успоставити међупредметну корелацију која се односи на математику и друге природне науке, а управо математичко моделирање појмова, појава и процеса који се изучавају у некој другој научној дисциплини може да репрезентује успостављање система међупредметне повезаности.

На основу свега наведеног, проистекла је идеја за продубљивањем дидактичке теорије у вези са учењем математике, увођењем моделирања као савременог методичког приступа учењу математике, његовим повезивањем са наставном праксом, као и жеља да се кроз моделирање проблема из неке друге научне дисциплине оствари модернији, интердисципилнарни приступ средњошколској настави. Такав приступ има за циљ афирмацију иновативног, креативног и напредног математичког мишљења, квалитетног, структуираног и функционалног знања, које ће се у овом истраживању односити на одређене наставне садржаје математичке анализе и, коначно, остваривање планског и систематског формирања/развоја когнитивних способности и вештина ученика у настави моделирањем.

Настава математике у четвртом разреду гимназије конципирана је тако да је њен значајан део посвећен понављању и утврђивању елементарних функција. Међутим, искуства из праксе показују да ученици, кроз апстрактно и теоријско разрађивање назначених садржаја, не поседују суштинско разумевање појма функције, као ни адекватне способности у анализи функција (линеарне, експоненцијалне, логаритамске...) које су обрађивали у претходним разредима. Такође, у настави природних наука (хемија, физика...) обрађују се појмови, појаве и процеси који су у тесној вези са наведеним функцијама, али се и ти појмови обрађују изоловано, без повезивања са математичким појмовима.

Може се закључити да је актуелно и важно поставити следећа питања која захтевају дубљу анализу и доношење закључака:

- Како осмислити пројекат који ће се заснивати на процесима математичког моделирања, а чијом ће реализацијом бити остварен интердисциплинарни приступ настави, успостављена корелација назначених наставних садржаја из математике и другог наставног предмета, са посебним акцентом на ученичка знања о одређеним елементарним функцијама (линеарној, експоненцијалној, логаритамској)?
- Како одабране процесе моделирања и осмишљене моделе интегрисати у наставу математике?
- Које когнитивне активности ученик треба да реализује у процесу математичког моделирања и како у настави моделирањем остварити њихов вертикално-кумулативни поредак?

- Да ли се може увести и реализовати нова методичка концепција у обради основних својстава логаритамске и експоненцијалне функције као посебна активност усмерена на потребе и циљеве математичког моделирања?
- Како у настави моделирањем, стицање, продубљивање и проширивање знања које се односи на назначене елементарне функције може бити потпомогнуто применом рачунара са одговарајућом софтверском подршком?
- Како оценити утицај примене математичког моделирања у настави математике на квалитет стечених знања ученика четвртог разреда гимназије?

Ова докторска дисертација бави се тражењем одговора на постављена питања, са јасним циљем да се да значајан допринос савременој методици наставе математике.

У савременој литератури из области методике наставе математике истакнуте су идеје о увођењу и примени математичког моделирања као методичког приступа настави/учењу ([5][6][59]), у складу са општим циљевима савременог образовања, али и онима који су специфични за учење и наставу математике. Доминантна су схватања да:

- настава математике, кроз примену математичког моделирања које је засновано на принципима активног учења, помаже ученицима у разумевању и изучавању појава из реалног света, као и у решавању реалних проблема;
- примена математике у различитим областима реалног окружења, посебно у другим научним дисциплинама, доприноси лакшем и бољем разумевању математике, њене улоге у друштву као науке, али и као дела људске историје и културе, што позитивно утиче на ученичке ставове и однос према математици;
- примена математичких теорија у примерима моделирања подстиче мотивацију и интересовања ученика, што опет доприноси дубљем разумевању математичких садржаја и дужем задржавању математичког знања.

Аутори ([4][26][35][42][64]) који се баве осавремењивањем наставног процеса кроз примену моделирања истичу субјекатску позицију ученика, посебно развијајући идеју о могућностима стицања и развоја математичких компетенција ученика у настави моделирањем. У складу са тим, одређен број аутора ([7][10][13][33][39]) у својим радовима усредсређен је на анализу, праћење и објашњавање специфичних когнитивних активности ученика у етапама решавања проблема применом математичког моделирања.

У дидактичкој литератури ([70][71][78][88]) постоје аутори који се баве предлозима како реализовати интердисциплинарни приступ настави/учењу. Они наводе да би, у перспективи, методичке приступе настави/учењу требало тако усмеравати да глобална организација садржаја радавише не буде само наставни предмет, већ проблем или тема и то због: интегративних процеса у наукама, примена знања у пракси која не познаје границе дисциплина, сагледавања појава у њиховој целовитости и аутентичности, мултиперспективних/мултидимензионалних флексибилних процеса сазнања и природнијег, „животнијег“ приступа у стицању знања.

У математичкој литератури ([19][50][58][60][73][74]) уводе се и обрађују функције дате помоћу одређеног интеграла, са посебним акцентом на анализу логаритамске функције дате помоћу интеграла, а затим и анализу експоненцијалне функције као инверзне логаритамској. Истакнут је и дидактичко–методички значај ове концепције у обради назначених функција, првенствено због њеног доприноса у формирању напредног математичког мишљења код ученика.

У истраживачком процесу поћи ће се од назначених погледа на наставу математике као интегралног дела целокупног наставног процеса.

1.2 Циљ рада

Главни циљ:

Утврђивање степена утицаја примене математичког моделирања у интердисциплинарном приступу настави/учењу, у рачунарском окружењу, на квалитет математичког знања ученика.

Утврђивање степена утицаја свих реализованих когнитивних активности у етапама процеса моделирања, а посебно спровођења назначене методичке концепције у обради основних својстава логаритамске и експоненцијалне функције, на оствареност оптималних резултата у учењу и изучавању наставних садржаја из области функције.

У истраживачком процесу биће постигнути и следећи циљеви:

- унапређивање теоријских принципа математичког моделирања и могућности за његову примену у наставној пракси;
- осмишљавање и израда пројекта чија ће реализација омогућити ученицима да изучавају функције и њихове примене у научним проблемима кроз процес математичког моделирања;
- имплементација математичког моделирања у наставни процес;
- увођење и примена нове методичке концепције у обради основних својстава логаритамске и експоненцијалне функције на средњошколском нивоу учења математике;
- утврђивање степена утицаја увођења и примене нове методичке концепције у обради функција датих помоћу одређеног интеграла на квалитет математичког знања студената;
- осмишљавање и израда наставних материјала за изучавање експоненцијалне и логаритамске функције и њихове примене у проблемима из реалног живота кроз процес математичког моделирања;

- рационална и ефикасна употреба рачунара и одговарајућег образовног софтвера у току целог експерименталног процеса;
- израђивање инструмената (тестова знања из математике) потребних у истаживачком процесу.

Очекивани резултати истраживања треба да потврде претпоставке да примена математичког моделирања (као и све реализоване когнитивне активности у етапама процеса) у интердисциплинарном приступу настави/учењу и спровођење назначене методичке концепције у обради основних својстава логаритамске и експоненцијалне функције, у рачунарском окружењу, имају значајан утицај на квалитет математичког знања ученика. У дисертацији ће бити егзактно утврђени позитивни исходи и оптимално знање ученика-учесника у истраживачком процесу, а све у складу са претходно дефинисаним циљевима.

Такође, очекивани резултати треба да потврде претпоставке да реализација истраживачких радњи и активности код ученика утиче на [98]:

- стицање и продубљивање темељног математичког знања неопходног за наставак даљег школовања, праћење савременог научно-технолошког развоја и будуће делатности;
- развијање способности логичког мишљења, закључивања, генерализација, математичке аргументације, креативности и стваралаштва;
- развијање напредног математичког мишљења и способности математичког обликовања и представљања проблема на математичком језику, наглашено у повезивању концепта слике и концепта дефиниције појма функције;
- развијање способности постављања, формулисања и решавања проблема, способности примене наученог градива из математике и интерпретирања, упоређивања и вредновања решења у односу на изворну проблемску ситуацију;
- развијање способности употребе математичких модела и критичког приступа претпоставкама, ограничењима и примени тих модела;
- развијање навика и умећа, као што су систематичност, истрајност, прецизност и поступност;
- развијање свести о вредности математичког језика и вештина усменог и писаног комуницирања садржаја и идеја у којима је природно користити математички језик и симболе;
- развијање позитивног става према математици као науци са великим могућностима за примену у свакодневној пракси и другим наукама.

1.3 Структура рада

У другој глави дисертације направљена је анализа и критички компаративни преглед савремене литературе из области методике наставе математике, фокусирајући се на научне и стручне радове који се односе на примену математичког моделирања у средњошколској настави математике, са посебним освртом на место и улогу [12]:

- наставника, који би као субјекат наставе требало да је стручно и методички оспособљен и непосредно припремљен за часове на којима ће се примењивати моделирање, у складу са методологијом процеса моделирања, а засновано на дидактичким принципима;
- ученика, који би као субјекат наставе требало да, кроз процес моделирања, властитим снагама стиче и обликује своје математичко образовање.

У овој глави разматрана је примена одговарајућих наставних метода, облика рада и образовне технологије у реализацији математичког моделирања као савременог методичког приступа настави и учењу математике. Такође, наведени су главни разлози за примену моделирања у настави, као и евентуални проблеми са којима се наставник и ученик у раду могу суочити.

У трећој глави дисертације представљено је иницијално истраживање, као прва фаза експерименталног процеса, а које је спроведено ради утврђивања иницијалног стања у математичком знању ученика четвртих разреда гимназије са којима је реализовано експериментално истраживање. У складу са предметом (проблемом) истраживања дисертације, као и постављеним циљевима и задацима, у овој глави назначени су и детаљније објашњени: предмет иницијалног истраживања, његови циљеви и задаци, узорак (формирање експерименталне и контролне групе ученика), хипотезе, као и методе и технике које су коришћене. У овој глави описана је конструкција инструмента (иницијалног теста знања из математике) потребног за иницијално истраживање, а затим је дат тест са методичком аргументацијом у сваком задатку. Даље је извршена статистичка обрада података до којих се дошло иницијалним тестирањем, као и дискусија резултата остварених на наведеном тесту.

Настава и учење математике помоћу математичког моделирања експериментално је примењено у наставној пракси и презентовано у четвртој глави дисертације. У овој глави детаљно је објашњена реализација рада наставника и ученика експерименталне групе у свакој етапи процеса моделирања. Реализовани процес моделирања као нарочито наглашену компоненту има разумевање и примену функција у решавању проблема из хемије. Процес је осмишљен тако да се постигну оптимални резултати у учењу и изучавању наставних садржаја из области функције и да се омогући утицај на развој математичког мишљења, бољи однос ученика према настави и учењу математике, реализацију когнитивних активности ученика кроз интерактивну димензију односа ученик-ученик и наставник-ученик и кроз плански и систематски рад на рачунару. Како је математичко моделирање примењено на појмове, процесе и проблеме из хемије, изведена иновирана настава базирана је и на теоријским основама међупредметне корелације. Због тога су у овој глави назначени различити аспекти интердисциплинарног приступа настави и учењу, облици, организационе варијанте, когнитивни процеси, као и педагошки исходи интердисциплинарне наставе.

Посебна пажња у истраживачком процесу, као што је објашњено у петој глави дисертације, посвећена је увођењу нове методичке концепције примењене на утврђивање основних својстава логаритамске и експоненцијалне функције, а према одређеним потребама и циљевима назначеног процеса математичког моделирања. Ова методичка концепција заснована је на шеми: интеграл→логаритамска функција→експоненцијална функција, са посебним акцентом на примени рачунара приликом обраде одговарајућих математичких појмова. У овој глави најпре се уводи појам функције дате помоћу одређеног интеграла, који се методолошки и садржајно објашњава кроз различите примере. Даље се помоћу интеграла уводи логаритамска функција, тако да је са ученицима понављање основних својстава логаритма реализовано применом основних својстава одређеног интеграла, а затим је уведена експоненцијална функција као инверзна логаритамској и испитана су њена основна својства. Такође, у овој глави објашњено је и како је обрада функција датих помоћу одређеног интеграла, у рачунарском окружењу, експериментално спроведена и са студентима на Природно-математичком факултету у Новом Саду. На крају главе презентовани су прикупљени објективни показатељи о томе да ли, и у којој мери, овакав приступ на часовима предавања утиче на развој математичких способности код студената, на њихове могућности, сналажење, али и на њихов однос према новом начину задавања функције.

У шестој глави дисертације презентовано је финално истраживање које је спроведено у последњој фази експерименталног процеса, ради евалуације реализованих активности током експерименталног периода, односно утврђивања финалног стања (позитивних исхода у настави и учењу математике применом одабраних методичких поступака; оптималних знања ученика). У овој глави постављен је методолошки оквир финалног истраживања (предмет овог истраживања, циљеви и задаци, хипотезе, методе и технике). Даље је наведен коришћени инструмент (финални тест знања из математике) са одговарајућим методичким објашњењима, статистичком обрадом података добијених на овом тесту, анализом резултата и тестирањем постављених статистичких хипотеза измерен је и потврђен позитиван утицај експерименталних фактора на математичка знања ученика.

Анализом уџбеника, збирки задатака и друге стручне литературе из математике намењене средњошколском узрасту дошло се до закључка да у њима нема задатака и отворених проблема из реалног света кроз које би ученици могли да практикују математичко моделирање у свакодневној наставној пракси. Због тога су у седмој глави дисертације презентовани наставни материјали који су израђени за наставнике/ученике и који могу представљати методичку основу за изучавање експоненцијалне и логаритамске функције, као и њихове примене у проблемима из реалног живота кроз процес математичког моделирања.

У осмој глави истакнут је научни допринос дисертације, наведена закључна разматрања, као и смернице за даља истраживања у циљу побољшања наставе и учења математике.

2 Теоријске основе истраживања: математичко моделирање у настави

2.1 Увод

Моделирање представља један од основних процеса људског ума и изражава нашу способност да мислимо и замишљамо, да користимо симболе и језике, да комуницирамо, да вршимо генерализације на основу искуства, да се суочавамо са неочекиваним. Оно нам омогућава да уочавамо обрасце, да процењујемо и предвиђамо, да управљамо процесима и објектима, да излажемо значење и сврху. Управо зато, моделирање се најчешће посматра као најзначајније концептуално средство које човеку стоји на располагању. *Моделирање је не само наука, него и вештина и уметност* [53].

У процесу **математичког моделирања** формира се **математички модел** који користи математички запис да опише и објасни феномене из стварног света, истражи кључна питања о посматраном свету и тестира одговарајуће идеје, посебно кад није могуће вршити експерименте у реалном окружењу или кад је скупо направити прототип. Модел се даље користи да би се направила предвиђања понашања датог феномена у датим условима [59]. У математичком моделирању, претпоставке о томе како свет функционише преносе се у језик математике, што има вишеструке предности. Прво, математички језик је прецизан, што помаже у формулисању хипотеза и идентификовању основних претпоставки о појавама и појмовима из реалног света на које ће се применити процес моделирања. Друго, математички језик је концизан, са стриктно дефинисаним правилима за извођење одређених радњи, што помаже правилној конструкцији математичког модела. Треће, на располагању су сви резултати које су математичари доказали, а приликом конструкције и рада на моделу, могу се применити различити расположиви математички ресурси, операције, дефиниције, теореме. Четврто, рачунари се могу користити за конструкцију модела, приказ графичких форми и нумеричка израчунавања. Примена рачунарске технологије омогућава визуелизацију и симулацију у моделу, рачунар реализује оперативни део, а кориснику је остављено више времена за критичко и логичко мишљење и креативност у решавању проблема. Даље, рачунари се могу користити за презентацију, анализу и верификовање модела [84].

Како се стваран свет односи на економију, екологију, хемију, инжењерство, математичко моделирање се може схватити и као активност која омогућава математичару да буде економиста, еколог, хемичар... Уместо да спроводи експерименте у стварном свету, он спроводи експерименте на математичком приказу тог света. Изазов у оваквом моделирању је „не да се произведе најобимнији модел, него да се произведе најједноставнији могући модел који укључује главне одлике посматраног феномена“ [20].

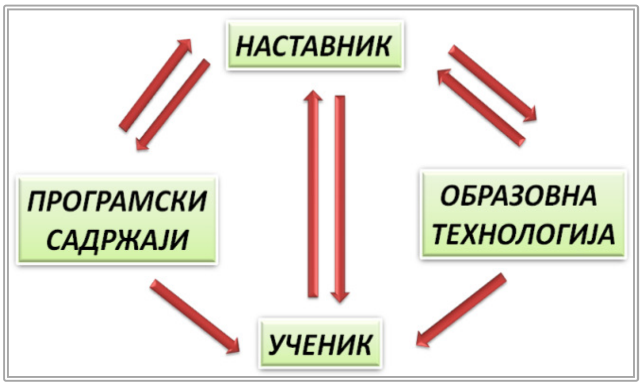
Сложени или савршени модели за исте улазне вредности дају исте излазне вредности као и реалан систем, али најчешће су прескупи и неадекватни за експериментисање. Са друге стране, сувише поједностављени модели не одсликавају на прави начин посматрани систем, а резултати који се добијају њиховом применом могу да буду неадекватни и погрешни. Зато треба пажљиво одабрати ниво апстракције, тако да резултујући модел што верније осликава посматрани систем, али да његова сложеност не буде ограничавајући фактор [53].

Постоје и друга ограничења која се јављају у току моделирања. Модел је апстракција реалности у смислу да он не може да обухвати све њене аспекте. Модел је упрошћена и идеализована слика реалности. Он нам омогућава да се суочимо са реалним светом (системом) на поједностављен начин, избегавајући његову комплексност и иреверзибилност, као и све опасности које могу проистећи из експеримената над самим реалним системом. Проблем са моделом је тај што се он по самој природи ствари усредсређује на одређене аспекте ситуације, а занемарује друге. Зато модел не садржи само објекте и атрибуте из реалног света, већ и одређене претпоставке о условима његове валидности. Процесом поједностављења он вероватно може да предвиди, и то врло прецизно, оне аспекте на које је усредсређен, док у другим може бити парцијално непрецизан. Постојање модела није довољно само по себи. Оно такође захтева његово усмеравање на најважније делове посматране ситуације, система и разумевање његових ограничења и услова у којима треба да буде третиран ([53][59]).

Неформални опис модела даје основне појмове о моделу и, мада се тежи његовој потпуности и прецизности, он то најчешће није. Приликом изградње **неформалног описа**, управо ради елиминисања поменутих недостатака, врши се подела на *објекте, описне промењиве и правила интеракција објеката*. Објекти су делови из којих је модел изграђен, описне промењиве описују стања у којима се објекти налазе у одређеним временским тренуцима (у описне промењиве такође спадају и параметри који описују константне карактеристике модела), док правила дефинишу како објекти модела утичу један на други у циљу промене њиховог стања. Аномалије које се јављају приликом неформалног описа модела најчешће су некомплетан, неконзистентан или нејасан опис модела. Уколико модел не садржи све ситуације које могу да наступе, тада је опис некомплетан. Уколико су у опису модела за исту ситуацију предвиђена два или више правила чијом се применом добијају контрадикторне акције, тада је опис неконзистентан, а ако у једној ситуацији треба обавити две или више акција, а да при томе није дефинисан њихов редослед, тада је опис нејасан [53]. **Формалан опис** модела користи *методологију моделирања*, одређује тип посматраних објеката на јасан и недвосмислен начин. Затим, он обезбеђује већу прецизност и потпуност описа модела. Код овог модела, користи се апстракција која усредсређује пажњу на важне особине модела, а заступљен је научно-инжењерски приступ, изградња модела се заснива на формализацији, а употреба модела на анализи добијених резултата [75].

Математичко моделирање у настави засновано је на идеји стицања и продубљивања математичких знања ученика кроз примену тих знања у решавању реалних проблема и, према савременим светским трендовима у образовању, треба да представља један од веома важних методичких приступа наставном процесу. Потребе за увођењем математичког моделирања у наставу произилазе из научно-технолошког и друштвеног напретка, где свет постаје све сложенији, са новим и комплексним проблемима које треба решити. Због тога је важно да се ученици у току свог образовања, посебно средњошколског, упознају са процесом моделирања, да науче шта и како могу да моделирају, који је крајњи циљ, развијајући свест о томе који је смисао стечених математичких знања, где се и на који начин она могу практично применити [49]. Ученици треба да савладају основна начела и принципе овог процеса, зато што ће се са процесом моделирања многи сретати и у даљем школовању и у професионалној пракси.

Како је увођење математичког моделирања као савременог методичког приступа настави сложен и комплексан процес, неопходно је објаснити га са више аспеката и у складу са основним елементима наставе математике. Основни елементи савремене наставе математике су: ученик, наставник, програмски садржаји и образовна технологија. Наведени елементи повезани су директном и повратном спрегому **дидактичком четвороуглу** (шема 2.1.), који је добијен трансформацијом дидактичког троугла (традиционална настава подразумева три елемента: ученик, наставник, програмски садржаји) услед развоја образовне технологије. У литератури се наводи и термин **дидактички тетраедар**, зато што рачунари додају настави математике једну нову димензију ([12][43]).



Шема 2.1. Систем директне и повратне спреге у дидактичком четвороуглу

У овој глави дата су теоријска објашњења математичког моделирања, узимајући у обзир најважније карактеристике савремене наставе математике. Извршена је анализа литературе из области методике математике која се односи на моделирање, са посебним освртом на место и улогу наставника и ученика као субјеката наставе. Разматран је низ фактора који утичу на креирање методичких решења, а односе се на примену одговарајућих метода и облика рада, као и образовне технологије у настави моделирањем. На крају главе назначени су главни аргументи за примену моделирања у настави, као и евентуалне потешкоће са којима се наставник и ученик у раду могу суочити.

2.2 Наставник у настави моделирањем

Наставник и ученик су субјекти наставе и, као што је већ наглашено, они делују по принципу директне и повратне спреге. Овде ћемо посебно истаћи неке важне специфичности савремене наставе математике, којих је потребно придржавати се и у настави моделирањем уколико желимо да се цео наставни процес заснива на научним и дидактичким принципима. Наставник наведено може да тумачи као смернице у своме раду, али и како треба деловати на ученике у специфичним захтевима наставе који су иницирани применом моделирања.

Наставник треба да има јасно дефинисан циљ (која су знања, умећа и навике које ученик треба да усвоји, који се наставни садржаји желе обрадити кроз моделирање...) и у току целог процеса треба да има повратну информацију од ученика о резултатима заједничког деловања. Деловање наставника је оријентисано и усмерено, са тежњом да код ученика развија математичко мишљење, критички поглед на наставне садржаје, мотивацију и жељу за успехом, које прати одговарајући систематичан и поступан рад. Затим, да код ученика подстиче креативност и, најважније, самосталност у раду [12].

Наставник треба да негује сараднички приступ који подразумева висок степен сарадње са ученицима. Ученик као субјекат наставе у великој мери самостално обликује своје образовање, али у континуалној сарадњи са наставником. Особине наставника-сарадника могу се представити следећим карактеристикама: ученицима олакшава учење, изводи неформална предавања, креира ситуације за учење, укључује ученике у доношењу одлука, креативно тражи и нуди ученицима ситуације у функцији развијања њиховог стваралаштва, развија однос међусобног поштовања и поверења, подстиче сарадњу ученика, усмерен је на напредовање ученика, тражи подлогу за своју и креативност ученика, тј. инвентивност [12].

У настави моделирањем првенствено је заступљено **активно учење**, које се заснива на радном и интелектуалном ангажовању ученика и истраживачким активностима. Према Пијажеу (Jean Piaget) „у једној речи базично начело активних метода треба да се инспирише историјом наука и може се исказати на следећи начин: разумети нешто значи самостално га открити или извршити реконструкцију путем поновног открића и треба се придржавати тог начела ако у будућности хоћемо да обликујемо људе који ће бити способни да продукују и креирају, а не само да понављају оно што већ постоји“ [22].

Из оваквог теоријског становишта следе, за активно учење, три изразито важна елемента:

- Прецизира се једна важна компонента концепта активности као унутрашње (менталне) активности: та активност (или бар један њен, за школско учење важан облик) јесте пролажење кроз оне интелектуалне процесе кроз које је прошла наука када је долазила до открића и инвенција. Дакле, ученик на скраћени начин реконструише те мисаоне процесе.
- Објекат мисаоних активности није само сопствено непосредно искуство, већ и интелектуални садржаји из појединих научних дисциплина.
- Основни циљеви активног учења су: добро разумевање онога што у науци постоји, али и усвајање интелектуалних умења за продуктивне и стваралачке активности [22].

Најважније **компоненте** које чине добар рад (који се реализује са средњошколцима, надареним ученицима...) [86] наставник може да прилагоди и укључи у наставу моделирањем на следећи начин:

- Приликом избора ***наставног садржаја*** који ће се обрадити кроз моделирање, наставник треба да планира теме рада и њихову међусобну логичку и математичку повезаност и да се оне прилагоде узрасту, предзнањима и интересовањима ученика. Када се разматра и планира примена моделирања у настави, треба узети у обзир [6]:
    - циљеве наставе математике и одговарајуће улоге моделирања;
    - распон математичких тема са садржајем који је прилагођен моделирању;
    - области из којих су примери моделирања (наука, економија, свакодневни живот...);
    - врсте примера (глобални-локални, аутентични-вештачки, отворени-затворени...);
    - приступе организацији моделирања и компоненти наставних планова и програма математике (одвојени, мешовити, интегрисани).

Квалитетан наставни садржај је неопходан и само осмишљен програм рада гарантује да тај рад има континуитет реализације и очекиване ефекте. Садржаји одабрани за моделирање нису само једноставно проширивање или продубљивање наставних тема, већ одмерени и научно структуирани материјали који имају потребан повишен ниво и усмерени су на усвајање знања и формирање тачно планираних логичких функција. Одабир наставног садржаја и тема, као и припрема за часове на којима ће се реализовати процес моделирања, захтевају од наставника више времена.

- Исправан ***педагошки приступ*** је такође неопходан. Облици и методе рада морају бити предмет брижљивог разматрања. Притом, облици и методе рада не морају бити униформни за сваки наставни садржај, већ диференцирани и што је могуће разноврснији.

Ученици морају добити прецизне инструкције за рад. Моделирање је интерактиван процес у коме и ученици утичу на своје наставнике.

- ***Способности наставника*** представљају веома важан фактор. Наставник планира и програмира рад, припрема наставне материјале и прилагођава их нивоу ученика, тражи и препоручује литературу, организује процес, мотивише и води. Он је тај који мора бити изванредан познавалац математичких садржаја, али и веома добар методичар, прилично упућен у педагошке и психолошке основе наставе моделирањем. Уколико се моделирање односи на садржаје из неке друге научне дисциплине, наставник математике треба да зна основе, теорије и принципе те друге науке.
- ***Усмереност на решавање проблема и примене*** једна је од најзначајнијих компоненти. С обзиром на то да у реалном животу и наукама постоји велики број идеја и проблема на које се може применити моделирање, изузетно је важно да се ученици обуче не само да конструишу моделе и решавају проблеме, него и да стекну одређено методолошко искуство усмерено ка новим моделима и проблемима, као и применама истраженог и наученог у науци и пракси. Решавање проблема наставник може да разложи на четири етапе, у складу са корацима у решавању проблема према Ђ. Пољи (George Pólya), а то су: разумевање проблема, разрађивање плана, реализовање плана и провера решења [45].
- ***Усмереност ка вишим нивоима математичког мишљења*** посебно је наглашена у настави моделирањем, а огледа се у сталним настојањима да се та настава усмери и даље од решавања датог проблема и примене, ка уопштавањима, новим резултатима, новим открићима и новим моделима. Зато на аналогији, анализи и синтези, индукцији и дедукцији, генерализацији и другим когнитивним активностима које карактеришу апстрактно мишљење треба инсистирати код ученика у циљу бољег разумевања математике, али и других наука и света који нас окружује.
- Добра ***комуникацијска вештина*** неопходна је на релацијама ученик-наставник и ученик-ученик. Наставник својим питањима наводи ученике да размишљају, анализирају и да сами постављају нова питања. У процесу моделирања, ученици се подстичу да говоре и мисле као математичари.
- ***Вештина учења и радне навике***. Моделирање у настави подразумева и повишен ниво способности учења, а те способности треба подстицати и усавршавати упућивањем ученика ка новим могућностима. Такође, интелектуални потенцијали морају да прате и одговарајуће радне способности. Зато се у раду мора инсистирати на читању, прављењу белешки, табела, цртању графика, формирању сопствене базе података, уопште доброј организацији учења и одговорном односу према активностима које се захтевају од ученика.
- ***Индивидуалне разлике између ученика*** у процесу моделирања су неминовне. Неки ће ученици са лакоћом приступати проблему, креирању и решавању модела, а да би се избегло одсуство мотивације, ученицима који слабије пролазе кроз овај процес биће потребна додатна пажња наставника.

- Подстицање ***креативности*** једна је од компоненти коју такође треба истаћи у оваквом наставном окружењу. Сви ученици морају добити сталну шансу за стваралачко исказивање. Наставник треба да их подстиче да износе оригинална математичка решења проблема, дају идеје за конструкције модела, исказују своје интуитивне утиске, истражују и експериментишу са моделима, наслућују...
- ***Помоћна средства за учење***, а пре свега наставни материјали, математичка и друга научна литература, интернет, представљају изворе за проналажење различитих примера и проблема за моделирање. Овој групи средстава треба додати и штампу, радио и телевизију, као и остала савремена аудио-визуелна и комуникацијска средства.
- ***Интеграција садржаја***. Овим подразумевамо да је неопходно да наставник укаже ученицима на међусобну повезаност како математичких садржаја, тако и садржаја других наставних предмета, који се у процесу моделирања интегришу у једну логичку целину.
- ***Планирање и развој***, као и добра координација у оквиру целог програма рада су неопходни. Програм мора бити развојни и усмерен у правцу развоја потенцијала ученика. Планирање је процес који подразумева не само поступно дефинисање наставних садржаја, већ и планирање сваке етапе моделирања. Сам процес планирања треба поставити флексибилно, тако да се, у случају потребе могу направити измене и допуне плана.
- ***Процена*** реализације плана рада у настави моделирањем, у погледу динамике и квалитета, је сталан посао наставника. Праћење напретка ученика и ефикасности предвиђених процедура води ка бржем напретку ученика. Зато методе праћења и оцењивања рада ученика морају бити разноврсне и добро припремљене, с обзиром на то да њихови критеријуми у настави моделирањем углавном нису експлицитно дефинисани. Треба утицати не само на усвајање наставног садржаја, већ и на свестран развој личности и индивидуалности ученика. Вреднује се степен овладаности знањима која су дефинисана образовним стандардима, али и напредак ученика у поређењу са почетним стањем, мотивисаност и заинтересованост за рад и активност, као и задовољство наставом која се реализује [86].
- ***Мобилност и флексибилност*** наставника и наставног садржаја подразумевају извесну слободу неопходну за „кретање“ сваког од ученика унутар и изван планираних процедура и активности.

Можемо да закључимо да су **улоге наставника** у овако конципираној настави вишеструке и можемо их класификовати на следећи начин [22]:

- наставничка улога;
- мотивациона улога;
- улога процењивача;
- сазнајно-дијагностичка улога;
- улога регулатора социјалних односа;
- улога партнера у интерактивном раду.

Да би интегрисао моделирање у наставу као што је наведено, наставник мора да поседује одговарајуће математичке, дидактичке и друге компетенције. Из тог разлога, математичко моделирање би се током образовања наставника требало изучавати у склопу обавезног предмета, што би могло бити структуирано на много различитих начина, зато што моделирање представља велику област и садржи много важних аспеката. У овим разматрањима, имајући у виду назначене улоге наставника, могу се посебно истаћи најважније **компетенције наставника** у настави моделирањем [34]:

- ***теоријске компетенције*** (знања о методологији моделирања, циљеви/перспективе за моделирање, врсте задатака за моделирање);
- ***компетентност задатака*** (способност да се креирају, анализирају и реше проблеми кроз процес моделирања);
- ***наставна компетенција*** (способност планирања и извршавања часова моделирања и способност одговарајуће интервенције код ученика у току процеса моделирања);
- ***компетенција дијагнозе*** (способност да се идентификују фазе ученичког рада у процесу моделирања и дијагноза ученичких проблема током тих фаза);
- ***компетенција процене*** (оцењивање постигнућа ученика након моделирања, критеријуми за оцењивање, тестови знања као показатељи напретка у наставном процесу).

Због значаја познавања **методологије моделирања** и његове заснованости на **дидактичким принципима**, ови појмови детаљно се обрађују у следећим поглављима.

2.2.1 Методологија моделирања

У односу на теоријске основе моделирања које су изнете у поглављу 2.1, моделирање на нивоу средњошколског образовања јесте поједностављено, али, уз правилан формални опис и конструкцију модела, биће испуњени захтеви методологије моделирања, ослањајући се на његове конвенције и правила.

Функција у математици представља зависност једне променљиве (y) од друге променљиве (x) и управо та (функционална) зависност је оно што овај појам издваја од других појмова који се изучавају у математици [56].

Појам функције у себи садржи дијалектичке црте савременог математичког мишљења, односно, учи нас да математичке величине посматрамо у њиховој променљивости, међусобној вези и условљености. Управо то је оно чиме можемо описати покретљивост и динамичност појава реалне стварности, као и условљеност и повезаност реалних величина. Када се моделирају појаве из реалног света, код којих се јавља узрочно-последична веза између две или више променљивих величина, добија се функција као математички модел за изучавану појаву [56].

По мишљењу неких аутора, у методологији моделирања полази се од прелиминарног, нултог стања, па се преко анализе и синтезе система врши верификација модела, вредновање, анализа и извођење модела. Такође, неки аутори наводе да израда модела може да има следећи ток: етапа концептуализације модела, етапа имплементације и етапа резултата [41].

Математичко моделирање у настави има следеће етапе ([4][10][39][56]):

Прва етапа у моделирању: реална ситуација

Ова етапа подразумева изучавање одређених појава из реалног света. И у традиционалним облицима наставе присутно је моделирање једноставнијих појава и проблема који нас окружују у свакодневним ситуацијама. Уколико наставник тежи савременој настави математике, значајну улогу у томе може да има моделирање појава, процеса и проблема који су у вези са одређеном научном дисциплином (првенствено у природним наукама: хемији, физици, биологији...). У овој етапи следи наставниково кратко излагање теме на коју ће се односити моделирање и реалне ситуације која је у вези са задатом темом.

У првој етапи посебно су важни: способност опажања реалних појава и процеса, логички и научно заснован одабир теме, креативност наставника и ученика у одабиру теме и ученичко разумевање онога што је предмет моделирања.

Прелаз из прве у другу етапу

У циљу поступног увођења ученика у проблем и његовог формулисања, наставник даје објашњења о посматраној реалној ситуацији, као и о појмовима који ће се изучавати кроз процес моделирања.

Акценат је овде још увек на активностима наставника, али приликом описивања реалне ситуације пожељно је и ангажовање ученика, у складу са њиховим интересовањима и могућностима. Реализује се постављање задатка, поједностављење, интерпретација и друго. Ученик се подстиче да поставља питања и размишља.

Друга етапа у моделирању: реалан проблем

У другој етапи формулише се реалан проблем. Приликом формулације проблема важно је истаћи јасну границу проблема у односу на његову околину, односно обухватити појмове од интереса и значаја за одабрану тему и описану реалну ситуацију, као и за цео процес моделирања. Одређивање граница проблема важно је да би се посматрани проблем одвојио од свог окружења. Такође, наставник може ученике да информише о литератури која ће се користити или да ученици сами истражују и налазе изворе информација о задатој теми и постављеном проблему.

Прелаз из друге у трећу етапу

Када је реалан проблем формулисан, спроводи се избор и утврђивање поступака за његово решавање.

Могуће је да наставник са ученицима врши декомпозицију, тј. разлагање проблема на делове ради одређивања његових важних атрибута. Код ученика се развија способност прикупљања и организовања података. Приступа се анализи улазних информација, што обухвата квантификовање, димензионирање, категоризовање и систематизовање релевантних објеката, релација, акција и образаца, елиминисање ирелевантних и опис поступка за њихово прибављање, а затим се врши распоређивање података који су оцењени као значајни [33], као и евентуално предвиђање резултата моделирања, ради дефинисања хипотезе, израде претпоставки и конструкције математичког модела.

Прилагођавањем ситуација из реалног проблема математичким садржајима, користећи претпоставке, формулације и друго, добија се математички модел. Потребно је добро познавање и разумевање математичких садржаја, али и појаве, проблема који се истражује. Модел треба да задржи само оне карактеристике оригинала које су важне за сврху његове примене, а важан је и избор типа модела, што зависи од конкретног система и методичког, управљачког задатка. Приказивање реалног проблема на неком од формалних језика (математичком) представља његов формални модел. Како се формално описивање не може применити свеобухватно и идеално тачно, тада формални модели не описују реалне проблеме, већ њихову хомоморфију. У основи, модели се у настави користе за приказивање само важних карактеристика неке реалне појаве, те зато и кажемо да су они апстракција и никад потпуно верна слика реалности [41].

Према концепцији математичког моделирања, „транслација“ реалног проблема (модела) на математички проблем (модел) назива се *математизација*. Разликују се два типа математизације: хоризонтална и вертикална математизација [25]. У *хоризонталној математизацији*, ученици се користе математичким алатима који им омогућавају да организују и реше неки проблем смештен у реалну ситуацију. Активности на прелазу из друге у трећу етапу моделирања представљају примере хоризонталне математизације: идентификација или опис неке посебне математике у неком општем (реалном) контексту, шематизација, визуелизација проблема са различитих аспеката, откривање регуларности и трансформација реалног проблема у математички проблем [48].

Трећа етапа у моделирању: математички модел

Уколико су у претходним корацима рада правилно спроведене све потребне активности, у трећој етапи моделирања следи математички модел. У овој етапи ученици углавном обављају екстерне репрезентације, у виду графика или формуле. Усмене изјаве ученика су првенствено на математичком нивоу, а само делимично на нивоу који се односи на реалност. Трансформација реалности у математику је овде завршена.

Прелаз из треће у четврту етапу

Рад на прелазу из треће у четврту етапу моделирања подразумева примену стеченог математичког знања: правила, дефиниција, аксиома, теорема и сл., утврђених математичких концепата и разноврсних проверених метода, при чему се ученик подстиче на исправно расуђивање, критичко, стваралачко и логичко мишљење.

Вертикална математизација је процес реорганизације проблема унутар једног математичког система. Активности у овом кораку моделирања примери су вертикалне математизације: представљање релација формулама, доказивање регуларности, сређивање модела, коришћење различитих модела, комбиновање и интеграција модела и друго. Имплементацијом различитих активности, ученик математичким радом, и у складу са вертикалном математизацијом, треба да дође до математичког решења [48].

„Хоризонтална математизација инволвира кретање из света живота у свет симбола, док вертикална математизација значи кретање унутар света симбола“ (Freudenthal) [48].

Четврта етапа у моделирању: математичко решење

У овој етапи, ученици углавном записују своје резултате и математичка решења која су добили радом на математичком моделу.

Прелаз из четврте у пету етапу

Приступа се тумачењу решења математичког проблема, интерпретацији добијених математичких резултата и извођењу генерализација, али у оквирима реалног проблема.

Спроводи се *дематематизација* [25], што значи да се математичко решење враћа у окружење у којем је реалан проблем постављен, на основу чега се добија решење реалног проблема.

Пета етапа у моделирању: решење реалног проблема

Уколико су правилно реализовани претходни кораци, у овој етапи следи решење реалног проблема.

Прелаз из пете у шесту етапу

Потребно је спровести разматрање и проверу решења, анализу добијених резултата, процену, као и логичку и квантитативну проверу модела. У процесу верификације модела треба да се утврди да ли је структура модела обликована онако како је очекивано, што се може постићи путем тестирања модела према дефинисаним захтевима. Валидација модела реализује се тако што се упоређују релевантни показатељи модела у односу на почетни реалан проблем. Проблем валидације модела проистиче из чињенице да је модел увек поједностављен приказ реалног система који је предмет моделирања. Ако је модел из класе динамичких, могуће је и утврђивање динамичког понашања модела у дефинисаном временском периоду [41]. Ученике такође треба подстицати да упореде добијени модел са неким сличним моделима који су конструисани у истој области, или припадају истој класи модела, и да постављени проблем повежу са неким сличним проблемима које су изучавали.

Шеста етапа у моделирању: евалуација

Након што су извршене све неопходне анализе модела и решења, у овој етапи, модел се или прихвата или одбацује.

Уколико је модел прихваћен, следи дискусија. Ученици треба да формирају и искажу критичке ставове о примени моделирања и реализованом процесу, сопственом раду и учешћу других ученика, али и флексибилност у евентуалним корекцијама модела. Ученици могу појединачно (или у групама) да презентују своје моделе и резултате рада и једни другима да дају оцене, уз сугестије наставника. У овој етапи подразумевамо да ученици износе закључке и о вредности и примењивости модела, као и критички однос модела према другим моделима (постојећим и будућим) [75]. Наставник треба да пружи подршку ученицима у њиховим личним сазнајним процесима, као што су: саморегулисано учење и праћење напретка према циљу, вредновање успеха и способност самосталних измена поступка у случају потешкоћа.

Прелаз из шесте у другу етапу

Ако модел није прихваћен, потребно је вратити се на реалан проблем и поновити процес.

Наставник треба да укаже ученицима да понављање процеса не значи неуспех, већ потребу да се изврше одговарајуће модификације и елиминишу недостаци настали у првобитном процесу моделирања. Код ученика треба развијати упорност, систематичност и истрајност у раду, да би се постигао жељени циљ.

Прелаз из шесте у седму етапу

Ако је модел прихваћен, на овом прелазу између етапа пише се извештај.

Наставник припрема ученике за последњу етапу, уводи их у писање извештаја и помаже им у сређивању бележака. Са ученицима се вежба уредно вођење техничке документације и усваја се једна општа култура рада.

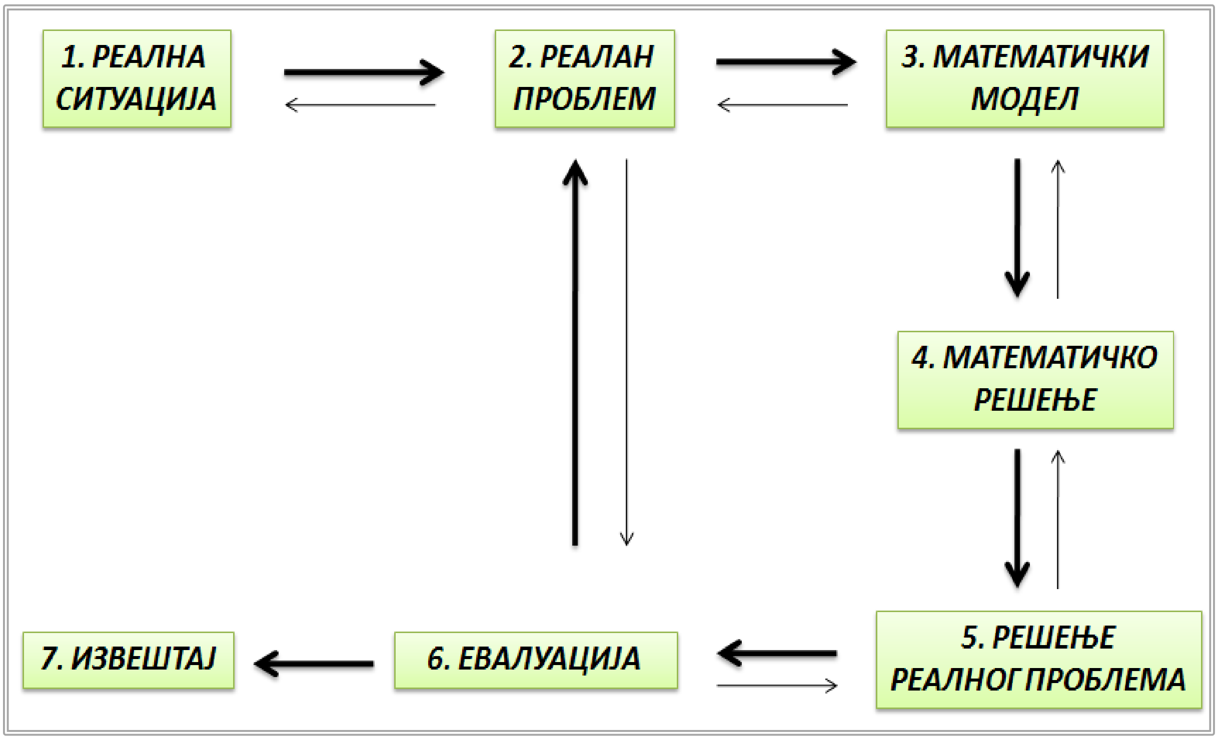
Седма етапа у моделирању: извештај

У завршној етапи добија се извештај. Документовање активности у настави моделирањем укључује неформално и формално описивање свих извршених радњи у току целог процеса моделирања.

Наведене етапе могу се представити са четири основне, а то су: *разумевање проблема, конструисање модела, примена математике и презентовање резултата*, што је у складу са четири етапе у решавању проблема према Ђ. Пољи [7].

У свакој од наведених етапа, наставник помаже ученику да превазиђе проблеме настале у току рада, као и да га усмери на прави пут у случају да му се јаве неке конфликтне ситуације, које су овде могуће, јер је често потребно веома апстрактне садржаје прилагодити обичним стварима [56].

На шеми 2.2. представљен је процес математичког моделирања (дидактички круг моделирања) ([13][62]).



Шема 2.2. Процес математичког моделирања

2.2.2 Дидактички принципи у настави моделирањем

Веома је важно да наставник, у сарадњи са ученицима, реализује наставни процес у складу са **дидактичким (наставним) принципима**. У настави математике истакнуто је осам основних принципа, а то су: принцип научности наставе, принцип ситематичности, принцип повезаности теорије са праксом, принцип свесности и активности ученика у настави, принцип очигледности, принцип трајности, принцип доступности и принцип индивидуализације.

Настава у којој се примењује моделирање представља један од веома погодних репрезената савремене наставе, посматрано из преспективе ових принципа, с обзиром на то да је сваки од њих заступљен у току реализације процеса моделирања.

- ***Принцип научности***. Приликом одабира тема на које ће се односити моделирање, наставник треба да води рачуна да оне буду научно засноване. Циљ треба да буде усвајање и продубљивање оних знања која су у савременој науци (наукама) сигурно утврђена и, по могућности, усвајање неког новог научног појма. Ако се у процесу моделирања поставља реалан проблем који потиче из неке научне дисциплине, користе се они термини који су у тој науци усвојени. Приликом конструкције математичког модела и решавања проблема, ученици треба да користе математичке теорије, у складу са њиховим сазнајним могућностима. Ученичка активност развија се у правцу научног, теоријског мишљења. Модел је приказана теорија. За разлику од теорије која је општа, модел је примењљив на одређену ситуацију-конкретан процес (систем) и омогућава да се теорија провери на делу, тако да се кроз моделирање поједностављују и апстрахују неки кључни елементи те теорије. Такође, кроз моделирање се проучава реалан систем и теорије о њему. Модел се може изградити само ако је теорија претходно формулисана, тј. модел не може постојати ако нема теорије. Теорија предвиђа и повезује узрок и последицу, а модел омогућава испитивање закључака теорије. Теорија служи да објасни понашање система, да се изгради модел на основу кључних елемената теорије. Модел се теоријом предвиђа, објашњава и повезује са системом [75].
- ***Принцип систематичности***. Процес моделирања одвија се по строго утврђеном редоследу етапа и у наредну етапу прелази се након што су ученици реализовали све потребне претходне радње. Наставник води рачуна да се не прелази у даље етапе уколико ученици имају потешкоћа у некој претходној. Етапе моделирања се логички надовезују, а тај пут треба да прате и ученичка сазнања. У почетним етапама, ученици баратају одређеним чињеницама, а у даљим фазама врше генерализације.
- ***Принцип повезаности теорије са праксом***. Примена математичког моделирања у настави један је од веома погодних методичких поступака за исказивање овог принципа. Ученицима су неопходна теоријска математичка знања као услов и претпоставка за разумевање реалног света. Кроз решавање реалних проблема моделирањем огледа се настојање да ученици у овом процесу продубљеније схвате математичку теорију, као и да могу практично применити и проверити истинитост претходно усвојених знања. Један од циљева наставе моделирањем је управо тај да ученици схвате значај математичких знања која стичу, као и њихову повезаност, да утврђују зависност и узајамну условљеност различитих појмова, појава и процеса, тако да научена знања буду у функцији решавања реалних проблема и животних потреба.
- ***Принцип свесности и активности ученика у настави***. Овај дидактички принцип може се узети за основни у моделирању. Прелазак из реалне ситуације на реалан проблем представља стварање проблемске ситуације. У току конструкције модела и математичког рада са моделима, ученици се подстичу да мисле, а не да меморишу. Учење је путем

открића. У процесу моделирања, ученици исказују сазнања до којих су дошли личним интелектуалним напором. Такође, ученици треба да покажу разумевање и јасно то излажу речима. Рад кроз активно усвајање и примењивање знања доприноси бољем сналажењу ученика у неким новим или сличним ситуацијама и појавама које нас окружују. Наставник код ученика развија иницијативу за учешће у раду, самосталност и стваралачки карактер рада.

- ***Принцип очигледности***. Моделирање укључује: опажање (ради издвајања реалног проблема из реалног окружења), мишљење (које су методе и поступци погодни за конструкцију и рад на моделу, која математичка знања користити у решавању постављеног проблема) и праксу (примена метода, алгоритама и поступака са циљем изналажења решења реалног проблема). Ученици образују представе и појмове на основу приказивања појава изреалног света у процесу моделирања.
- ***Принцип трајности.*** Истакнути циљ моделирања у настави јесте усвајање знања, умећа и навика која су темељна, функционална и трајна. У току процеса потребно је да ученик раније стечена знања и можда неке етапе примењује и понавља више пута. Тиме се постиже утврђивање и вежбање. На овај начин, ученици ће имати могућност да се таквим (суштинским) знањем даље служе у остваривању нових наставних и практичних циљева.
- ***Принцип доступности***. Различити модели користе се на свим нивоима образовања, од основног до високошколског. Потребе и предности примене моделирања као методичког приступа настави посебно се истичу у средњошколском образовању. У одабиру појава, појмова који ће се моделирати, наставник треба да води рачуна да обим и ниво буду одговарајући узрасним способностима ученика. Модели не треба да буду ни тривијални ни лаки јер ученици треба да усвоје и прошире знања, стекну умећа и навике уз одређене напоре. Тривијални модели могу да произведу код ученика и мањак мотивације за рад. Са друге стране, веома сложени модели могу негативно да утичу на ученичку спремност и вољу за радом. Такође, и у настави моделирањем потребно је применити следећа дидактичка правила: од лакшег ка тежем, од познатог ка непознатом, од простог ка сложеном, од ближег ка даљем.
- ***Принцип индивидуализације***. Примена моделирања у настави пружа услове за активан рад већег броја ученика. Иницијатива у одређеним етапама процеса може бити дата одређеној групи ученика, у складу са обимом и нивоом сложености којима су дорасли и који су им доступни. Темпо рада требало би да буде прилагођен индивидуалним особеностима ученика, а да при том сви буду активно укључени, тако да се код сваког ученика развијају позитивне диспозиције. Наставник сваком ученику пружа одговарајућу подршку и помоћ код насталих потешкоћа. У пракси је често присутна ситуација да ни сва одељења истог разреда нису погодна за примену моделирања и зато треба обратити пажњу на потребе, склоности, афинитете и могућности које су реално присутне у одељењу као целини ([46][82][95][96]).

2.3 Ученик у настави моделирањем

Савремена настава математике усмерена је на младог човека, који се третира као целовита личност чије интелектуалне потенцијале треба што више ангажовати у наставном процесу. Она се заснива на обавезним образовним стандардима на основу којих се конституишу оријентациони планови и програми рада. Такав приступ подразумева и део наставе који се поставља флексибилно и варира зависно од интересовања ученика, а учење се надовезује на та интересовања ученика, при чему је *мотивација за учење лична (унутрашња)* [86].

У систему повратних спрега, ученику је дато средишње место, а самим тим и учењу. Ученик пролази кроз одређене фазе учења где је:

- мотивација-почетна фаза;
- вежбање и примена-главна фаза;
- трансфер знања-завршна фаза у учењу [12].

Ученик кроз наставу и учење стиче одговарајуће **компетенције**. Компетенција се може објаснити на следећи начин: „то је лична спремност да се делује као одговор на изазов у датој ситуацији” [26]. Формирање компетенција не може се директно посматрати, међутим, могуће је пратити понашање ученика и његове активности у току рада на постављеним задацима. Године 2006. *(Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December for lifelong learning (2006/962/EC))* утврђено је осам кључних компетенција за перманентно (доживотно) учење, међу којима се налазе математичке компетенције и основне компетенције у науци и технологији [79]. Из објашњења појма компетенције произилази да се под **математичком компетенцијом** подразумева спремност (ученика) да адекватно делује (примени математичка знања) као одговор на одређену врсту математичког изазова у датој ситуацији ([26][49]). Другим речима, *математичка компетенција ученика је способност развоја и примене математичког знања како би се решио низ проблема у свакодневним ситуацијама.* Нагласак је на процесима и активностима, као и на знању. На различитим нивоима, математичке компетенције укључују способности и вољу за коришћењем математичких начина мишљења (логичко и просторно мишљење) и приказивања (формуле, модели, конструкције, графови, графикони) [90].

У оквиру математичких компетенција наводи се осам карактеристичних компетенција (слика 2.1.) ([15][42][98]):

- ***Математичко мишљење и закључивање***. Ова способност укључује постављање питања карактеристичних за математику (Постоји ли...? Ако постоји, колико? Како ћемо пронаћи...?); познавање врста одговора које математика нуди за наведена питања;

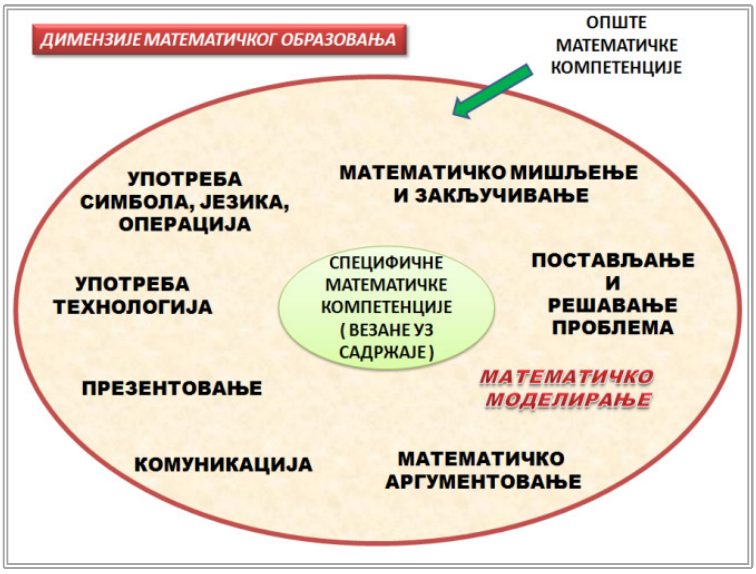
разликовање различитих врста изјава (дефиниција, теорема, хипотеза, примера итд...); разумевање и баратање распоном и границама математичких концепата.

- ***Математичко аргументовање.*** Ова способност укључује разумевање шта је то доказивање и како се оно разликује од осталих врста математичког закључивања; праћење и испитивање редоследа разноврсних математичких аргумената; осећај за хеуристику (Шта се може, а шта се не може догодити и зашто?); креирање и изражавање математичких аргумената.
- ***Комуникација.*** Ова компетенција укључује способност изражавања математичких садржаја на разне начине у усменом, писаном и другом облику, као и разумевање туђих радова и изјава изражених на исти начин.
- ***Постављање и решавање проблема***. Ова способност укључује постављање, формулисање и дефинисање разних врста математичких проблема и њихово решавање на различите начине.
- ***Презентовање***. Ова способност укључује кодирање, декодирање, превођење, разликовање и интерпретацију различитих облика презентовања математичких објеката и ситуација, као и разумевање односа између различитих презентација; одабир подесног облика презентације; прелажење из једног облика презентације у други, према ситуацији и сврси.
- ***Употреба симбола, формалног и техничког језика и операција***. Ова способност укључује декодирање и интерпретацију симболичког и формалног језика и разумевање његове везе с природним језиком; превођење из природних језика у симболички/ формални језик; баратање са изјавама и изразима који садрже симболе и формуле; употребу променљивих, решавање једначина, рачунање.
- ***Употреба алата и технологија***. Ова способност укључује познавање и употребу разних помоћних алата (укључујући алате информационе технологије) који могу помоћи при математичким активностима и познавање ограничења таквих помоћних алата.
- ***Математичко моделирање.*** Обухвата пет основних компетенција које ученици треба да стекну и развију кроз математичко моделирање, а које у потпуности прате дидактички круг моделирања и усклађене су са одговарајућим етапама овог процеса [35]:
    - ***Разумевање реалних проблема и конструкција модела заснованог на реалном окружењу.*** Специфичне компетенције овде укључују способност формирања претпоставки које се односе на проблем и поједностављење ситуације; препознавање специфичности које утичу на ситуацију, њихово именовање и идентификовање кључних варијабли; изградња релација између варијабли; проналажење расположивих информација, као и разликовање важних и неважних информација.
    - ***Превођење модела из реалности у математичке структуре.*** Специфичне компетенције овде укључују способност математизације релевантних чињеница и њихових релација; њихово поједностављење, ако је неопходно, а такође и редуковање њиховог броја и комплексности; одабир адекватне математичке нотације и презентовање ситуација графички.

○ ***Решавање математичког проблема у оквиру математичког модела.*** Одговарајуће специфичне компетенције које се овде наводе су способност употребе хеуристичких стратегија (рашчлањивање проблема на његове делове, успостављање веза са сличним или аналогним проблемима, анализа различитих аспеката проблема, варијација специфичности и расположивих података), као и способност примене математичког знања у циљу решавања проблема.

○ ***Интерпретација математичких резултата у оквирима контекста или стварности.*** Специфичне компетенције које ученици стичу су следеће: способност интерпретације математичких резултата у реалном контексту; генерализација решења која може бити посебно усмерена на специфичну ситуацију; презентовање решења проблема; дискусија о решењима.

○ ***Утврђивање валидности решења модела.*** Специфичне компетенције овде укључују формирање критичког става према моделу и његовим решењима и евентуално кориговање неких делова модела, или понављање целог процеса моделирања, ако решење не одговара реалној ситуацији; размишљање о процесима моделирања.



Слика 2.1. Димензије математичког образовања ученика

У складу са изложеним, компетенцију ученика која се односи на моделирање можемо објаснити као способност ученика да уз помоћ наставника, или самостално и креативно, спроведе све етапе математичког моделирања у одређеном контексту [4]. Из објашњења следи да компетенције моделирања имају циљ едукативног карактера и подразумевају наставни приступ где ће ученици довољно често бити мотивисани да пролазе цео процес моделирања.

Компетенције које ученици стичу математичким моделирањем могу да се класификују у три нивоа, тако да сваки ниво обухвата карактеристичне способности ученика [64].

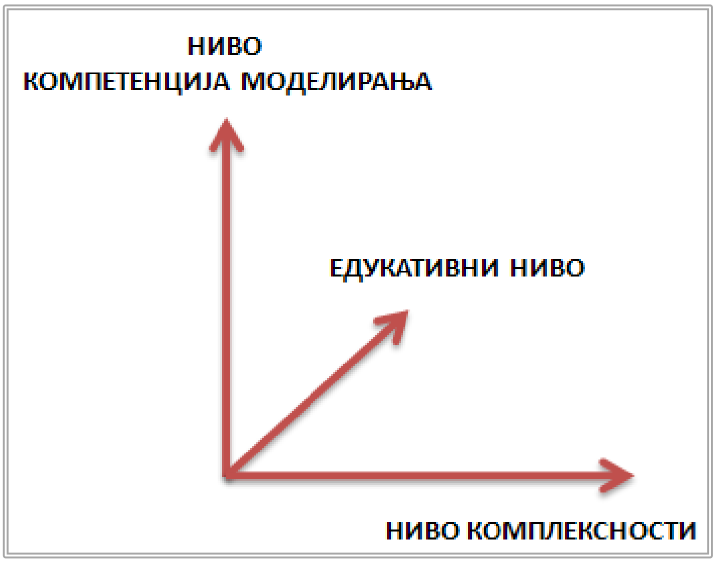
- ***Први ниво (рекогниција)*** - на овом нивоу, ученик треба да буде у могућности да:
  - препознаје математичке моделе;
  - опише процес моделирања;
  - разуме основне карактеристике, разлике и границе у етапама моделирања.
- ***Други ниво (аутономност)*** - овај ниво захтева способности, вештине и спремност ученика да:
  - анализира и структуира проблеме, врши апстракције;
  - ради на моделу;
  - усваја различите перспективе модела;
  - коригује модел;
  - интерпретира резултате и дискутује;
  - проверава модел, али и цео процес.
- ***Трећи ниво (метарефлексија)*** - формирање сложенијих компетенција одговара највишем нивоу на којем ученик може да:
  - критички анализира модел;
  - одређује критеријуме за евалуацију модела;
  - дискутује о процесу моделирања;
  - дискутује о примени и значају математике.

Ученици чије компетенције припадају другом нивоу биће у могућности да самостално или уз помоћ наставника реше проблем моделирањем. Без обзира на промене у контексту или обиму проблема, ученици би требало да су способни да прилагоде свој модел или да развију нове процедуре решавања у циљу прилагођавања новим околностима. На трећем нивоу, концепт моделирања се добро разуме, развијена је способност критичког расуђивања и препознавања релевантних узајамних односа у моделу. Овај ниво подразумева и разматрање улоге и примене моделирања у различитим научним областима.

Подела компетенција везаних за моделирање развијена је према нивоима у циљу:

- приказа обима потребних ученичких способности укључених у моделирање;
- координације и усклађивања планова и програма, као и одабира одговарајућег наставног садржаја и материјала;
- дескриптивне, нормативне и метакогнитивне помоћи за процену постигнућа ученика;
- формулисања циљева учења (проширивање компетенција у вези са моделирањем, надградња математичких компетенција...).

Представљени нивои компетенција у вези са моделирањем могу се сматрати једном од три димензије наставног процеса у којима су од значаја активности моделирања, као што је приказано на слици 2.2 [64].



Слика 2.2. Различити погледи на развој експертизе у моделирању

Анализа компетенција у моделирању омогућава да се опише, објасни и процени ученички развој и напредак кроз следеће *три димензије: степен покривености, технички ниво и радијус деловања.* Степен покривености одређује обим могућности ученика и њиховог самосталног рада у току моделирања. На техничком нивоу испитује се која математичка знања ученици могу да користе и колико су у томе флексибилни. Радијус деловања односи се на различите реалне контексте и домене рада у којима су ученици способни да примењују моделирање [64].

Из наведеног произилази закључак да упознавање са процесом моделирања и његова континуирана примена у наставној пракси треба да омогуће ученицима да [90]:

- *постављају проблеме, реше их плански и разноврсним методама и поступцима, а затим да интерпретирају, упоређују и вреднују решења и поступке;*
- *моделирају ситуације и процесе из других дисциплина и свакодневног, приватног, професионалног и друштвеног живота;*
- *изграђују ново математичко знање моделирањем ситуација и решавањем проблема.*

Усвајајући наставне садржаје, ученик у настави моделирањем усваја знања одређеног нивоа и развија креативност. Реализацијом наставе моделирањем код ученика се формирају и одређена умећа и навике, развијају способности и, уопште, утиче се на формирање личности ученика, што је детаљније објашњено у следећем поглављу.

2.3.1 Образовни циљеви наставе моделирањем

Промене у глобалном приступу наставном процесу, упоредо са развојем когнитивних наука, резултирале су могућностима за нова разматрања, како о природи ученичког мишљења, тако и о стратегијама наставе и учења. За ове промене посебно је заслужан Пијаже и његове конструктивистичке идеје. Уз Пијажеов когнитивни конструктивизам усвојена је и Блумова (Benjamin S. Bloom) таксономија циљева образовног процеса, која ученику додељује субјекатску позицију у настави и учењу и обухвата све фазе стицања нових знања [97].

Према Блумовој таксономији, могу се разликовати три области циљева учења: *когнитивна* (обухвата циљеве учења који су повезани са знањем, разумевањем и мишљењем), *афективна* (обухвата циљеве повезане са ставовима, интересовањима и уверењима) и *психомоторичка област* (обухвата циљеве који су усмерени на вештине и умећа). Свака од наведених области је систематизована тако да циљеве учења распоређује хијерархијски, од нижег ка вишем нивоу комплексности. Сваки ниво ових области карактеришу специфичне активности (кључни глаголи за дати ниво), на основу којих је могуће прецизно одредити обим и квалитет исхода учења усмерених на ученичка знања, ставове и вештине ([83][97]).

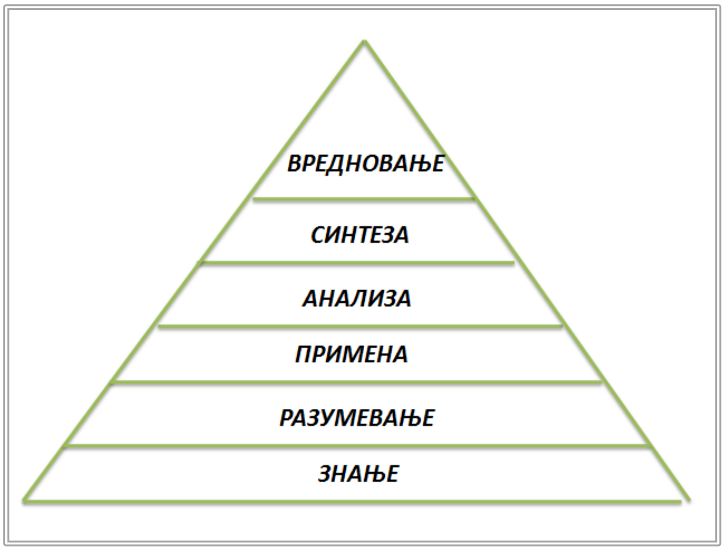
Когнитивне активности које ученик спроводи, односно способности и вештине које се формирају/развијају код ученика у настави моделирањем, а о којима је било речи и у претходним поглављима, могу се разматрати и према назначеној таксономији, тако да се утврди на који је начин моделирање као методички приступ усклађен са наведеним циљевима.

Унутар **когнитивне области**, Блум разликује 6 категорија-нивоа учења, а то су: знање, разумевање, примена, анализа, синтеза и вредновање (слика 2.3). Редослед нивоа је такав да подразумева њихово навођење од најједноставнијег ка најсложенијем и од конкретног ка апстрактном [83]. Како је у моделирању највише заступљена когнитивна област циљева учења, она је даље у тексту подробније описана.

- ***Знање.*** Знање се овде дефинише као сећање, односно позивање на одговарајуће информације које су ученици меморисали изучавајући претходне наставне садржаје. То препознавање и подсећање може се односити на конкретну терминологију, специфичне чињенице, методе и средства који су у вези са тим специфичностима, али и на сложеније принципе и теорије. Овом нивоу одговарају одређене активности које ученици могу да реализују на почетку процеса моделирања. На пример: ученик треба да *именује* појаву која се посматра, да је *опише,* да зна да *идентификује и наброји* чињенице које се на дату појаву односе. Даље, то су акције *означавања и дефинисања проблема.*

- ***Разумевање.*** Разумевање се дефинише као способност ученика да одреди смисао и значење наставних порука, укључујући усмену, писмену и графичку комуникацију. Овај когнитивни ниво подразумева и преношење тих информација у други облик, њихову интерпретацију или уопштавање. У почетним етапама моделирања, ученици такође спроводе одређене активности које одговарају овом нивоу. На пример: ученик треба да *разуме* и *тумачи* постављени проблем, да може да га *разматра*, као и да реализује одговарајућа *предвиђања*. Ученик треба да *даје примере* за могуће улазне информације, да их *сажима* и, на основу тога, *наводи* и *класификује* релевантне податке, а затим да учествује у њиховом *објашњавању*.
- ***Примена.*** Примена се дефинише као способност употребе знања, научених општих правила и поступака у новој и конкретној ситуацији, а у циљу проналажења једног или најбољег решења постављеног проблема. За конструкцију математичког модела и за рад на моделу, ради долажења до математичког решења, посебно су значајне активности које одговарају трећем нивоу. На пример: ученик треба да *примени* неку методу, *изврши* математичке поступке и *спроведе* радње, да то *демонстрира*, да у току рада зна правилно да *конструише* графике, *развија* алгоритме, *рачуна*, *открива*, *утврђује* и *успоставља* нове везе између математичких појмова и поступака, *операционализује* информације са којима располаже, *проширује* своја знања итд...Овде је најважније да ученик зна да *реши математички проблем*.
- ***Анализа.*** Аналитички ниво дефинише се као способност растављања проблема на његове саставне делове и утврђивање односа међу њима, тако да ти односи, тј. њихова организациона структура, буду јасни и разумљиви. Испитивање саставних делова проблема (реалног/математичког) одвија се у смеру идентификовања узрока, развијања и извођења дивергентних закључака, а у циљу проналажења доказа, који ће подржати даље генерализације. Примена моделирања у настави укључује активности карактеристичне за четврти ниво, као што су, на пример, следеће: ученик треба да *упоређује* добијено решење са неким ранијим проблемима и њиховим решењима, да *разликује* чињенице од закључка, да *истиче* тачне и исправне закључке, да *анализира* решење и добијене резултате. Уколико су ученици добили различите моделе за један реалан проблем, пожељно је да наставник омогући објективно *супротстављање* њихових решења, са циљем да се дође до најадекватнијег.
- ***Синтеза.*** Синтеза представља способност да се на основу претходно примењеног знања и вештина саставе елементи и делови у једну нову, кохерентну целину.У складу са карактеристикама активности које припадају овом нивоу, у процесу моделирања ученик треба да развија *способност комбинације* добијениих решења (аналитичког, графичког и сл.) и њиховог *генерисања* у једну нову целину која ће представљати решење реалног проблема и која ће бити основ за утврђивање да ли се модел прихвата или одбија. Затим, ученик треба да изврши евентуално *модификацију* и *реконструкцију*.
- ***Вредновање.*** Евалуативни ниво подразумева да ученик треба да стекне способност процене вредности рада (материјала, методе, пројекта, модела...) и извођење закључака на

основу одређених критеријума и стандарда.Овом нивоу одговарају одређене активности у завршним етапама моделирања. На пример: ученик треба да *проверава* и *процењује* модел, *критички* приступи утврђивању његове *вредности*, да би се на темељу тога писао извештај или се поступак враћа на почетне етапе ([30][81][97]).



Слика 2.3.Шест хијерархијских нивоа учења

Социјално-афективна област је неодвојиво повезана са когнитивном, јер је за сваки когнитивни циљ потребан неки афективни ангажман (мотивација, спремност за иновативне поступке у настави и учењу). Математичко моделирање посебно може да утиче на то да ученик сагледа шири значај математике за друштво и да цени математику као дисциплину, која на посебан начин развија логичко мишљење и размишљање [83].

Примена моделирања у настави треба да утиче на ученичку спремност за *пажљиво слушање, посматрање, размишљање и образлагање*. Даље, код ученика се може развијати спремност да *памти и учи*, да *више пута изводи одређене радње*. У одређеним етапама процеса, наставник развија код ученика спремност да се модел подвргава *критици и контроли* и да се утврди *логичка тачност* модела и решења. Такође, развија се и спремност на *садржајну прихватљивост* модела, евентуално *отклањање грешака*, затим спремност на *проверавање, комбиновање*. Уколико се модел не прихвата, ученик треба да покаже спремност на његово *одбацивање,*као и *издржљивост* (зато што се цео поступак моделирања понавља). На крају моделирања, ученик треба да искаже спремност за *рационалну аргументацију* приликом презентације свог модела и добијених решења.

Такође, овде се постављају захтеви реализације циљева социјалног учења, што је веома значајно, јер, у току моделирања, ученици треба да сарађују једни са другима. То су следећа два главна циља [83]:

- Ученик учи како да ефикасно сарађује са другима: да другима саопшти разумљиво своје ставове, идеје, гледишта, способности, знање и индивидуално израђена решења реалног/математичког проблема; да не имитира радње других ученика, али да ипак узима у обзир идеје других; да поседује менталну дисциплину.
- Ученик учи да запажа емоције код себе и других и да влада њима: да слуша друге, артикулише личну интуицију, подноси критику и буде толерантан на фрустрацију.

Психомоторичка област у настави има релативно подређену улогу, али у настави математичким моделирањем она има наглашен значај зато што ученици у процесу моделирања треба да усвоје: уредно и прегледно писање израза и једначина, сређено писање у одговарајућим табелама, коректно бележење преноса, скицирање (дијаграма), адекватну примену рачунара, писање извештаја и, што је најважније, правилну конструкцију самог модела.

Треба истаћи да су психомоторички циљеви уско везани са когнитивним циљевима (нпр. познавање математичких операција, разумевање задатка). Такође, повезани су са афективним циљевима као што су воља за тачност и уредност у раду током процеса моделирања, као и увид у смисао и корист тога[83].

2.4 Образовна технологија у настави моделирањем

Савремена настава математике заснива се на дидактичком четвороуглу, у коме је један од четири кључна елемента и образовна технологија. Образовна технологија подразумева организацију (наставне методе и облике), реализацију и евалуацију наставног процеса применом наставних техника, као скупа различитих наставних средстава које ученик и наставник примењују у раду. Информациона технологија укључује информационе технике (рачунарски хардвер, софтвер, комуникационе мреже за електронску размену између физички удаљених рачунара, уређаје и адаптере који конвертују информације у дигитални формат) и адекватно коришћење дигиталних информација како би се унапредиле људске способности и могућности квалитетнијег обављања различитих делатности. Дакле, под информационом технологијом у образовању подразумева се проучавање карактеристика и могућности електронских извора информација (данас најчешће рачунара са приступом интернету) и адекватна примена савремених дидактичких медија у функцији иновирања образовне технологије [87].

Интензивна примена рачунара у свим сферама људске делатности утицала је на то да су се рачунари почели успешно користити и у сфери васпитно-образовног рада. Рачунари уводе промене у начину учења и ефикасности стицања знања, у структуирању и презентовању различитих наставних садржаја, у организацији и реализацији наставе. Рачунари при том не искључују „класичне учионице“ ни друга наставна средства, већ се додају као нова технологија која интегрише позитивне елементе традиционалне наставе.

Мења се положај наставника и ученика, уз обезбеђену бољу размену повратних информација и већу комуникацију на релацији наставник-ученик. Примена рачунара подстиче логичко и критичко мишљење, креативност, мотивисаност за рад и повећава активно учешће ученика у процесу учења. Рачунарско окружење обезбеђује већу индивидуализацију наставе. Ученици се у складу са својим могућностима и интересовањима оспособљавају да самостално напредују у раду, да се врате на садржаје који им нису довољно јасни и да добију додатне и повратне информације. У настави уз помоћ рачунара, наставнику је омогућена стална контрола, односно праћење напредовања ученика, као и објективније вредновање и оцењивање рада и постигнућа. Важно је истаћи да рачунар не може да замени наставника, већ помаже и наставнику и ученику у остваривању циљева и оптималних исхода наставе и учења ([72][87]).

Уз претходно наведено, **потенцијали примене рачунара у настави математике** огледају се и у следећим практичним могућностима [16]:

- ***различити облици приказивања*** (директна доступност различитих облика приказивања математичких садржаја и поступан прелазак из једног облика у други, нпр. из симболичког у графички, доступност динамичких приказа);
- ***експериментални рад*** (могућност да ученици самостално, кроз експериментисање дођу до нових сазнања, идеја и решења проблема);
- ***елементаризовање математичких поступака*** (употреба рачунара омогућава коришћење елементарних метода које су избегаване због захтевних рачунања);
- ***модуларитет*** (могућност директног позивања наредби, без извођења корака алгоритма и поступака рачунања).

Значај примене рачунара у процесу моделирања је вишеструк:

- Приликом прикупљања података везаних за посматрану реалну појаву, ученику и наставнику доступан је велики број информација (употреба интернета). Тако одабране теме и појмови могу бити интересантнији и занимљивији за ученике, а то утиче на јаче повезивање математике са стварним животом и другим наставним предметима.
- Ствара се нови поглед на многе области математике и других наука, вишеструко се сагледава реалан проблем и траже различити начини његовог решавања. Уместо да експериментишу на реалном објекту, у лабораторији, ученици могу да врше експеримент на рачунару.
- Конструкција модела може се извести на рачунару, што омогућава брже извођење операција: могу се узети у обзир различити случајеви, велики број улазних информација може се обрадити, сортирати, могу им се доделити табеле и графичке интерпретације, а од посебног значаја је визуелизација проблема и наставног садржаја који се обрађује кроз моделирање. Уочава се боље разумевање математичких појмова код већег броја ученика, развија се истраживачки приступ математичким чињеницама, чиме је обезбеђен прави

приступ проблемској настави. Пажња ученика је појачана и они могу боље да уоче значај математичких садржаја.

- Примена рачунара је значајна и у току рада на моделу, када се примењују математичке методе и поступци. На овај начин, ученици се више усмеравају ка идејама и решавању задатака, а рачунар обавља већину „оперативног“ посла, чиме се постиже и уштеда времена у раду. Развија се посебан однос према математичком доказивању, а могуће је направити и такве моделе и симулације да се одређене математичке и друге научне чињенице могу увести без строгог извођења, а ако је доказивање нужно, рачунари и у томе могу да помогну.
- Могуће је пратити зависност решења проблема од улазних података. Сви добијени резултати могу се чувати, а по потреби и кориговати ако је потребна корекција и самог модела. Решења са којима ученик овде располаже могу бити веома прецизна, иако не морају бити у облику на које је ученик навикао у класичним израдама математичких задатака.
- Ученику се указује на значај употребе технологије у учењу и решавању ширег спектра реалних проблема.
- Оспособљавање ученика за самосталну примену рачунара у процесу моделирања у даљем образовању и професионалном раду [72].

Може се закључити да употреба рачунара захтева одређене промене у настави. Оне могу настати у односу на циљеве, садржаје наставе, наставне методе и облике рада. Овде, истакнути циљеви су: оријентација на апликације, **моделирање**, аутентичност и решавање проблема, нагласак на аспекте презентације и интерпретације унутар математике, усредсређивање на адекватну изградњу концепата, дискусија о могућностима и границама математичких поступака, оријентација на фундаменталне математичке процедуре, интердисциплинарност, инклузија историјских и социо-психолошких аспеката и различити социјални циљеви наставе математике. Могућности експериментисања, повезивања различитих врста приказа, динамички прикази, извршавање алгоритамских и нумеричких операција помоћу рачунара проширују старе садржаје или уводе нове, који нису били визуелно могући у традиционалној настави. Помоћу рачунара, ученици могу да понављају своје поступке и истраживања на великом броју примера како би проверили хипотезе све док не утврде тачност својих претпоставки, а затим да их верификују као научне чињенице [17].

2.4.1 Образовни софтвер *GeoGebra*

У току експерименталног истраживања које је представљено у дисертацији коришћен је бесплатан образовни софтвер ***GeoGebra*** (верзије 3.2 и 4.0). *GeoGebra* је рачунарски алат који обухвата појмове из геометрије, алгебре и калкулуса, а повезивањем иконичког и симболичког представљања доноси бројне могућности. Иконичка презентација је представљање или предочавање података на степену који је прелаз између дословне, реалистичке презентације и симболичке, потпуно апстрактне презентације. Иконичка презентација задржава основне елементе или контуре стварности, док је у симболичкој веза са стварношћу само конвенционална. *GeoGebra* нуди иконичко и симболичко представљање објеката паралелно у геометријском и алгебарском прозору. Ово паралелно представљање среће се у теорији електронског учења, а често и у дидактикама природних наука.

Стечено знање се овде појављује као **енактивно-**кроз активност, обраду и рад, као **иконичко-**кроз слике и **симболичко-**кроз симболе и језик.

Могућност интерактивне манипулације објектима је главна и највећа предност нових медија у односу на традиционално учење. Ученици могу самостално да откривају нове особине, да проверавају наслућене особине, докажу их и, ако је потребно, да их коригују. Кроз активну компоненту учења долази до изражаја и принцип активног учења. Ученик који повезује различита представљања исте ствари или појма лакше ће моћи да препозна више ситуација у којима се та ствар или појам појављује [65].

GeoGebra се због могућности динамичког приказа и интерактивности математичких објеката у настави може користити за **објашњавање, истраживање и моделирање математичких и других концепата** и њихових међусобних односа. Пољин концепт за решавање проблема може се уградити у динамичко окружење *GeoGebra*-е за учење, а затим се могу анализирати **три правца у употреби *GeoGebra*-е** [91]:

- ***први правац***-употреба *GeoGebra*-е као когнитивног алата за извршавање процедуралних задатака у краћем времену, што омогућава да ученици спроводе и оне когнитивне активности које одговарају вишим нивоима мишљења;
- ***други правац***-употреба *GeoGebra*-е ради проширивања когнитивних могућности тих задатака;
- ***трећи правац***-моделирање у *GeoGebra* окружењу.

Ова три правца смештена у Пољин концепт могу се представити као у табели 2.1 [27].

Табела 2.1. Три правца у употреби GeoGebra-e

	ОБЈАСНИТИ	***ИСТРАЖИТИ***	***МОДЕЛИРАТИ***
РАЗУМЕВАЊЕ ПЛАНА	• описати дате податке • идентификовати непознато	• обезбедити ученицима материјал за рад • тражити од ученика да истраже проблем • водити ученике у идентификовању непознатог	• увести предмет моделирања • идентификовати дате податке • описати непознато
РАЗРАЂИВАЊЕ ПЛАНА	• како променљиве međусобно утичу • направити стратегију	• питати ученике за везе међу променљивим • водити ученике у креирању стратегије	• уводити математичке објекте • анализирати зависности међу објектима
РЕАЛИЗОВАЊЕ ПЛАНА	• сакупити нове податке манипулишући математичким објектима како би се дошло до решења • постављати усмерена питања	• усмеравати ученике у интеракцији математичких објеката ради прикупљања више података • усмеравати ученике да уочавају законитости на основу прикупљених података	• манипулисати са објектима ради утврђивања ваљаности конструкције модела • поставити претпоставке • тестирати претпоставке
ПРОВЕРА РЕШЕЊА	• поновити поступак • постављати “шта-ако” питања	• подстицати ученике на разматрање алтернатива • подстицати ученике да постављају “шта-ако” питања	• променити улазне величине • креирати проблем који описује тренутно стање • поставити нови проблем

2.5 Методе и облици рада у настави моделирањем

Математичко моделирање представља савремени методички приступ настави па, у том смислу, у наставни процес у којем се примењује моделирање треба укључити и разноврсне методе и облике рада. Овде се наводе оне које су најприхватљивије, и у свом обиму се значајно користе, што не значи да су и једино заступљене у моделирању.

Наставне методе:

- метода усменог излагања;
- метода раговора и хеуристичка метода;
- проблемска метода;
- метода демонстрације.

Када наставник уводи ученике у тему на коју ће се односити моделирање, даје уводна објашњења о реалној ситуацији, код формулације и дефинисања проблема, постављања задатка, разумевања проблема и евентуалног поједностављења, акценат је на активностима наставника и може се применити **метода усменог излагања**. Она подразумева вербално презентовање садржаја на које ће се односити моделирање. Усмено излагање је много више него проста каталогизација готових појмова у постојећу мисаону инфраструктуру. Овде је укључено ученичко активно разумевање информација, селекција важног од неважног, разумевање контекста и односа у коме су дате нове информације, евентуална реорганизација, проширење, реструктуирање података који су дати. Активности наставника приликом примене ове методе активног учења су многобројне. За наставника, ова метода је сложена и тражи ангажовање, јер потребно је утврдити претходна знања и повезати их са новим садржајима у процесу моделирања. Наставник реализује припрему, подстицање и мотивисање ученика, дефинисање нових појмова, објашњавање непознатих речи, наводи литературу која ће се користити и друго...Наставник својом свестраном активношћу ствара услове за активно, мисаоно укључивање ученика. Активности ученика манифестују се на плану постављања питања, тражења информација и објашњења, повезивања нових и старих садржаја, вођења бележака, извођења првих закључака [86].

Било би пожељно да, у зависности од природе и комплексности реалне ситуације и постављеног проблема, метода усменог излагања већ у почетним етапама моделирања пређе у **методу разговора**. Метода разговора је основа на којој се реализује интерактивно (кооперативно) учење. Интерактивно учење започиње оног тренутка кад наставник покуша да кроз дијалог подстиче самосталност ученика, да усмерава ученикову мисаону креативност, да ученика задржи на важним карактеристикама реалног проблема, да провери да ли је изложени садржај стигао до ученика, да ли га ученици разумеју и које врсте потешкоћа имају са изложеном материјом. Питања наставника морају бити осмишљена и припремљена. Разлога за коришћење методе разговора је више, а најважнији су повећана мотивација ученика за рад и учење у току моделирања, активно ангажовање ученика, подстицање развоја виших менталних функција, развијање и вежбање техника интелектуалног рада, оспособљавање ученика за доношење одлука, дијалог, уочавање различитих погледа... [86].

Ова метода може се осавременити увођењем **хеуристичке методе**. Хеуристички разговор (по Пољи, „хеуристички дијалог“) у настави моделирањем подразумева да наставник поставља проблем и питањима води ученике ка математичком моделу и решењу математичког, односно реалног проблема, али сазнања долазе као резултат учениковог личног деловања, као његово откриће. Образовни учинак овде је већи, а наставник помаже ученицима на местима која они теже савладавају. Пратећи рад, наставник може код ученика уочити црте њихове креативности [32].

Када је формулисан проблем и када је потребно конструисати математички модел, а затим радом доћи до математичког решења, акценат је на **проблемској методи**. Нагласак је на умном раду ученика и на њиховим математичким способностима. Овде ученици треба да изврше правилан избор извора за проучавање проблема, да издвајају потребне теоријске чињенице, мисаоно их обраде и практично примењују, да постављају и проверавају хипотезе, језички обликују и записују резултате рада. У петој и шестој етапи, нагласак је на разматрању добијеног решења, на исказивању решења реалног проблема, на тражењу других начина његовог решавања. Активност наставника је овде умањена. Он усмерава рад и пружа одговарајућу помоћ и подршку ученицима. Кроз примену управо ове методе постиже се најповољнији развој математичког мишљења и утиче се на трајност ученичких знања [31].

Метода демонстрације подразумева приказивање одређених практичних радњи. Ова метода обухвата све оне облике учења у којима је извесна активност практична, али је неопходно и разумевање смисла практичних радњи. У процесу моделирања, овде подразумевамо употребу рачунара, технике прављења табела, графика, учење технике посматрања и бележења промена у моделу, као и ученичко презентовање модела и практичних активности које су реализовали. Активности ученика усмерене су на разумевање смисла практичних радњи (поступака), практично извођење, техничко и методолошко усавршавање наученог, повећање тачности, брзине и прецизности код рачунања, примена одговарајућих операција и изношења поступака. Овим учењем ученици стичу умећа (како се нешто ради), наспрам знања које представља скуп одређених, мање или више систематизованих информација [86].

Наставни облици:

- фронтални;
- диференцирани;
- индивидуални.

У уводном делу наставе моделирањем, најчешће је заступљен фронтални облик рада са ученицима, заједно са методом усменог излагања наставника. Након поступног увођења ученика у процес, следе друге наставне методе које могу да укључе и диференциране облике рада. Диференцирани облик рада један је од социјалних облика наставе који подразумева самосталну активност ученика. Диференцирана настава у реализацији моделирања води рачуна о конкретној ситуацији у одељењу, уважава разлике међу ученицима и тежи да се оптимално испоље математичке и друге способности ученика. У њој се успоставља јединство наставне активности наставника и школске активности ученика. Наставни процес треба да пружи више од информација, и у ту сврху потребно је да сви ученици у одељењу буду активни [11]. Од диференцираних облика у настави моделирањем могу се применити рад у групи и/или рад у пару.

Групни рад реализује се у два облика: рад у хомогеним и рад у нехомогеним групама. Код *хомогених група* користи се позитивна интеракција између ученика који имају специфична знања у појединим областима и који разменом својих сазнајних искустава утичу на интелектуални напредак целе групе [86]. Недостатак овог облика је у томе што ниво ученичких способности одређује и ниво активности ученика у току целог процеса моделирања и што подела према успеху појачава осећај инфериорности код слабијих ученика, као и немогућност комуницирања, упоређивања и рада са бољим ученицима [11].

Зато се препоручује рад са *нехомогеним групама*. На избор тог облика наставе утиче карактер рада, наставна средства, а такође и време које наставник има на распологању. Улога наставника у овом облику учења је да организује рад групе, али и да дискретно води процес рада. Групни рад ученика у процесу моделирања не искључује *индивидуални рад* сваког од њих, јер групни рад представља обједињење индивидуалних радова свих чланова групе. Важно питање у примени групног рада ученика је питање контроле рада ученика и повратна информација. Контролу рада спроводи наставник у току читавог процеса. Он поставља групи питања о свакој етапи која се реализује. Контролна питања могу постављати и сами ученици, нпр. чланови једне групе члановима друге групе [11].

Артикулација часова моделирања (у раду са нехомогеном групама) може да садржи пет етапа ([11][86][94]):

- Фронтални облик (увод у моделирање);
- Подела ученика и задатака по групама;
    - Бројчани састав може бити различит, најкорисније је састављати групе од 4-6 ученика.
    - Саставе група не треба често мењати.
    - Задаци могу бити исти за све групе, а могу бити и диференцирани по групама, као и диференцирани у оквиру групе за сваког члана (на пример: одговарајуће групе могу имати главну улогу у одређеним етапама моделирања).
    - За групни рад потребно је размотрити и одговарајући распоред клупа у учионици.
- Самостални рад групе (рад на моделу);
    - У свакој групи ученик који има супериорна знања за дату област у суштини преузима улогу вође групе. Врши се и подела улога у групи, с тим што те улоге не морају увек бити идентичне. Често се врши ротација улога у групи на наредном часу, тако да се сви ученици опробају у свим улогама у групи. Тиме се постиже да у свакој ситуацији сви ученици буду мотивисани и да координација рада групе буде оптимална.
    - Групе треба да раде приближно истим темпом.
    - Контрола индивидуалног рада чланова групе остварује се у самој групи.
    - Рад групе треба да утиче на развој социјализације.

- Заједнички пленарни рад свих група (верификација модела, дискусија решења, извештај);
    - За извештај о раду читаве групе наставник одређује једног члана групе.
    - Ефикасан облик контроле и оцене групног рада је и извештај ученика о раду групе и дискусија.
- Вредновање знања (компетенције дијагнозе и процене су већ наглашене као веома важне компетенције наставника, посебно зато што је у настави моделирањем теже оцењивати);
    - Наставник обједињује рад свих група и даје оцену извршеног рада.
    - Наставник даје оцену рада ученика у групама. Она представља стимуланс за развој стваралачке активности. Постоји неколико могућности оцењивања активности: оцена часа, оцена решења проблема, оцена самосталног рада целе групе, оцена теста знања након моделирања.

У појединим одељењима може се уочити одсуство жеље за радом у групи и тежња за индивидуализацијом. У таквој средини, моделирање у настави може се реализовати кроз **рад у паровима**, с тим да сваки пар има исте задатке и пролази кроз исте етапе моделирања. Уз сталне инструкције наставника, парови извршавају задатке. Ученици у пару требало би да буду комплементарни по својим ставовима и особинама и да њихов рад доприноси социјализацији. Наставник треба да води рачуна о томе који се ученици међусобно слажу, да ли су искључиви или толерантни и да ли умеју да сарађују. Препорука је да се повезују ученици мањих способности са способнијим ученицима [94]. Артикулација часова моделирања (рад у паровима) садржи исте етапе као и код групног рада.

2.6 Аргументи за примену моделирања у настави

У данашње време, присутан је светски тренд ка примени моделирања у образовању, на школском и факултетском нивоу. Моделирање је фаворизовано у разним активностима наставе, као што је решавање проблема, активно учење и изучавање појава из реалног света и различитих научних дисциплина. Постоје различити разлози за фаворизовање моделирања у настави математике, али и других наставних предмета. Могу се издвојити **четири основна аргумента** [6], која су углавном заснована на општим циљевима образовања, као и на циљевима који су специфични за учење и подучавање математике:

- ***Прагматични аргументи***. Настава математике тежи да помогне ученицима да разумеју реалне ситуације и решавају реалне проблеме. У том смислу, моделирање је неопходно.
- ***Формативни аргументи.*** Кроз математички рад, ученици треба да стекну основне компетенције (као што је способност да се суочавају са различитим врстама проблема и да

их решавају) или ставове (као што је отвореност ка новим ситуацијама). Моделирање је један од важних начина за постизање наведених циљева.

- ***Културолошки аргументи***. Ученици треба да проналазе изворе за размишљање у математичким темама, да стварају свеобухватну и уравнотежену слику математике као науке и као дела људске историје и културе. У техничко-технолошком развоју друштва, компетенције конструкције, анализе и критичког става према математичким моделима су од великог значаја. То је значајно и у односу на појединца у смислу могућности у његовом образовању и у односу на целокупно друштво, у смислу друштвених потреба за адекватно образованим појединцима као носиоцима рада и стваралаштва. Моделирање као резултат људског деловања, историје и праксе, доприноси промовисању ових аспеката.
- ***Психолошки аргументи***. Математички садржаји могу да мотивишу ученике кроз одговарајуће примере моделирања, а то опет може да допринесе дубљем разумевању математичких садржаја и дужем задржавању математичких знања. Такође, моделирање може позитивно да утиче на ученичке ставове и однос према математици.

Сваки наставник, математичар или дидактичар може да наглашава различите циљеве у настави математике и може да има различите аргументе за укључивање моделирања у процес наставе. Међутим, савремени светски трендови у математичком образовању подразумевају ширење спектра циљева и аргумената, па се на тај начин сви аргументи прихватају као важни [6]. Због тога, важан део математичких компетенција треба да буде моделирање са својом реалистичком, контекстуалном, едукативном, епистемолошком, когнитивном и социо-критичком перспективом [5].

Поставља се питање, каква је стварна ситуација у наставној пракси? У свакодневној наставној пракси, примена математичког моделирања такође је у порасту. Међутим, још увек постоји значајан јаз између истраживања и развоја математичког образовања са једне стране и реализације наставе математике са друге стране. У већини земаља, моделирање још увек има минорну улогу у свакодневној школској и факултетској наставној пракси. Формални приступ решавању проблема и даље има велику улогу, а апликативни примери се примењују, ако их уопште има у настави, само као илустрације, не узимајући у обзир њихов значај. Ово је последица одређених потешкоћа и препрека у примени моделирања са којима се суочавају наставници и ученици. Наводимо неке од њих [6]:

- ***Препреке с аспекта наставе и оцењивања***. Моделирање захтева много времена, а као засебна наставна целина не налази се у наставним плановима и програмима за редовну средњошколску наставу математике. Моделирање је теже проценити, а оно што није испитано и оцењено често не узимају озбиљно у обзир ни ученици, а ни наставници.
- ***Препреке код ученика***. Моделирање чини математичке лекције и испитивање захтевнијима, па су тестови знања и други облици провере стечених знања ученицима мање предвидиви.

- ***Препреке код наставника***. Моделирање чини процесе учења и подучавања захтевнијим, зато што су потребна додатна нематематичка знања и квалификације, као и способност наставника да управља ситуацијама које настају у току спровођења моделирања. Дакле, улога наставника се променила. Такође, наставници често не знају да одаберу и прилагоде адекватне примере за моделирање у редовној настави, а сваки пример мора бити и додатно прилагођен за одељење, што захтева улагање много додатног труда, рада и напора. Али, за готово сваку математичку тему постоји велики број примера за моделирање свих врста: у уџбеницима, збиркама, наставним јединицама, књигама или чланцима, што је све доступно наставницима.

Промене у наставној пракси треба да се одвијају у правцу ширег спектра циљева, употребе више апликација, аутентичних примера, више отворених проблема итд... Следеће активности такође би могле повољно утицати на отклањање потешкоћа и бољу ситуацију када је реч о примени моделирања као методичког приступа савременој настави:

- шире образовање наставника, у циљу стицања нових знања, способности и, посебно, ставова, што би помогло наставнику да одговори на захтеве наставе моделирањем;
- утврђивање одговарајућег начина процењивања и вредновања;
- употреба рачунара у настави, која свакако пружа нове могућности за израду садржаја доступног за ученике и има позитивне последице за математичко моделирање [6].

Сваку евентуалну препреку или потешкоћу са којом се суочи, наставник не треба да доживљава као баријеру у настави моделирањем, већ као својеврстан изазов у свом раду и као могућност да искаже своја знања, креативност и способност прилагођавања новим ситуацијама и новим трендовима.

3 Иницијално експериментално истраживање

3.1 Увод

Математичка знања представљају неопходну основу и кључни су услов за примену математичког моделирања у настави, при чему ученици треба да прошире постојећа, али и стекну нова знања. Математичко моделирање, које је експериментално примењено у наставном процесу у току овог истраживања и детаљно објашњено у следећој глави дисертације, захтевало је ученичка знања о функцијама, посебно о линеарној, експоненцијалној и логаритамској функцији. Због тога је било веома значајно да се, пре реализације процеса моделирања, добије правовремен и објективни увид у квантитет и квалитет ученичких знања о поменутим појмовима [55].

Према важећем наставном плану и програму за гимназије, појам *функције* обрађује се у првом разреду. У оквиру наставне теме „Елементи математичке логике и теорије скупова“, обрађују се програмски садржаји који се односе на појам функције, дефиницију и начин задавања функције, графичко и таблично приказивање стања, појава и процеса, композицију функција и инверзну функцију. Појам *линеарне функције* такође се обрађује у првом разреду, што укључује програмске садржаје који се односе на линеарну функцију и њено испитивање (својства, график). Знања о експоненцијалној и логаритамској функцији ученици стичу у другом разреду гимназије. Наставна тема „Експоненцијална и логаритамска функција“ обухвата програмске садржаје који се односе на *експоненцијалну функцију* и њено испитивање, затим на појам *логаритма* и његове особине и на *логаритамску функцију* и њено испитивање. Проширивање и продубљивање стечених знања о функцијама са ученицима даље се спроводи у четвртом разреду.

Утврђивање предзнања ученика са којима је реализовано целокупно истраживање спроведено је кроз иницијално истраживање, чија је методологија дефинисана у другом поглављу ове главе. Одређени су и детаљно објашњени: предмет иницијалног истраживања, циљеви и задаци, узорак, хипотезе, као и методе, технике и инструменти коришћени у току истраживања.

Треће поглавље представља интерпретацију резултата иницијалног истраживања. Прво је описана конструкција иницијалног теста знања из математике, а затим је дат тест са методичком аргументацијом у сваком задатку. Даље се приступило статистичкој обради података до којих се дошло иницијалним тестирањем ученика.

У четвртом поглављу ове главе, спроведена је дискусија о резултатима које су ученици постигли на иницијалном тесту. Тестиране су постављене хипотезе и дате су смернице за спровођење даљег експерименталног рада.

3.2 Методолошки оквир иницијалног истраживања

Да би се истраживање у методичком смислу правилно реализовало, потребно је конструисати његову методолошку основу ([40][85]), уз поштовање формалних правила која важе за истраживања у настави. Ово истраживање спроведено је у првом полугодишту школске 2011/2012. године са ученицима четвртог разреда следећих гимназија:

- *„Исидора Секулић“ у Новом Саду;*
- *Шеста београдска гимназија у Београду;*
- *„Светозар Марковић“ у Новом Саду.*

<u>Предмет истраживања</u>

Како су у истраживање били укључени ученици три гимназије, предмет истраживања је усмерен на испитивање квантитета и квалитета знања тих ученика из математичке анализе, а које се односи на одређене наставне теме и садржаје који су се изучавали у претходним разредима. Предмет истраживања дефинисан је на следећи начин: анализирање иницијалног стања у знању ученика које се односи на појам функције, посебно линеарне, експоненцијалне и логаритамске функције.

Ови математички садржаји одабрани су због тога што су:

- одређени као основни за процес математичког моделирања који предстоји у следећој фази експерименталног рада;
- прописани наставним планом и програмом одређеног разреда, са бројем наставних јединица, нису обухватили цело тематско подручје, али заокружени су;
- усклађени са когнитивним способностима ученика;
- усклађени са предзнањима која ученици четвртог разреда гимназије треба да поседују;
- по свом садржају такви да могу позитивно да утичу на мотивисаност ученика у току истраживања.

Циљеви истраживања

Први циљ је утврђивање *обима и квалитета ученичких знања* из оних области које ће представљати математичку основу моделирања. Потребно је утврдити колико су ученици усвојили наставне садржаје који се односе на функције, посебно линеарну, експоненцијалну и логаритамску функцију.

Други циљ је утврђивање *еквивалентности* група које учествују у истраживању.

Трећи циљ је утврђивање *корелације* између успеха који су ученици остварили из математике у претходним разредима и резултата које су остварили на иницијалном тестирању.

Задаци истраживања

У складу са претходно постављеним циљевима истраживања, могу се формулисати његови задаци:

- Након формирања група ученика (експерименталне и контролне), израдити иницијални тест усклађен са потребама иницијалног истраживања, а затим ученике који учествују у истраживању тестирати тим тестом.
- На основу резултата иницијалног теста доћи до објективних показатеља и сазнања да ли, и у којој мери, ученици поседују потребна одговарајућа знања и да ли у односу на та знања постоји потребна уједначеност група (и ученика у оквиру сваке групе).
- Утврдити у којој мери ученици могу да примене стечена знања у решавању конкретних проблема.
- Прикупљање повратних информација је од велике важности за наставника који ће реализовати експерименталну наставу. На основу ових информација, наставник може да предвиди и планира које математичке садржаје треба у току експерименталног наставног процеса додатно поновити, утврдити, на које појмове ставити акценат, где ће ученици имати евентуалне потешкоће, а које ће проблемске ситуације ученици моћи са лакоћом да реше.

Узорак истраживања

Истраживање је спроведено на намерном узорку од 254 ученика, у 12 одељења из три гимназије. На избор одељења утицале су чињенице о стручној спреми, годинама искуства и резултатима рада наставника који су реализовали наставу математике са овим ученицима у претходна три разреда на природно-математичком и општем смеру, чиме је задовољен критеријум уједначености рада наставника [12]. Други критеријум који се односи на уједначеност подразумевао је проверавање следећих варијабли истраживања: пол ученика (дихотомна варијабла), општи успех и успех из математике (континуиране варијабле, у распону од 2.00 до 5.00) [52]. У анализи општег успеха, за сваког ученика, а

затим за одељење, израчуната је средња вредност успеха на крају првог, другог и трећег разреда. У анализи успеха из математике, за сваког ученика и за одељење узимала се у обзир средња вредност оцена из овог предмета на крају првог, другог и трећег разреда.
На основу добијених података, приступило се подели ученика (тј. одељења) у две гупе:

- експериментална група (Е-група), 128 ученика (по 3 одељења Гимназије „Исидора Секулић“ и Гимназије „Светозар Марковић“);
- контролна група (К-група), 126 ученика (по 3 одељења Гимназије „Светозар Марковић“ и Шесте београдске гимназије).

Затим су, у складу са овом поделом, анализиране наведене варијабле истраживања, а добијени резултати представљени су у табелама 3.1. и 3.2.

Табела 3.1. Полна структура ученика у експерименталној и контролној групи

Група	***Дечаци***	***%***	***Девојчице***	***%***
Е-група	56	43.75	72	56.25
К-група	59	46.83	67	53.17

Табела 3.2. Успех ученика у експерименталној и контролној групи

Група	***Средња вредност општегуспеха***	***Средња вредност успеха из математике***
Е-група	4.49	3.58
К-група	4.39	3.64

Полна структура група је таква да је број девојчица већи и у експерименталној и у контролној групи, али без значајнијих одступања у некој од група.

Успех ученика обе групе је уједначен. Мало бољи општи успех у претходна три разреда имају ученици експерименталне групе, што представља занемарљиву разлику у односу на контролну групу, док су незнатно бољи успех из математике постигли ученици контролне групе.

Из свега наведеног може се извести закључак да између Е-групе и К-групе постоји *уједначеност* према дефинисаним варијаблама која је потребна за даљи ток истраживања.

<u>Хипотезе истраживања</u>

Постављене су следеће две хипотезе и њихове алтернативне:

H_{01}: Разлика К-групе и Е-групе у знању из математике из области функције, посебно линеарне, експоненцијалне и логаритамске функције није статистички значајна.
H_{a1}: Разлика К-групе и Е-групе у знању из математике из области функције, посебно линеарне, експоненцијалне и логаритамске функције је статистички значајна.

H_{02}: Корелација између успеха ученика из математике у прва три разреда гимназије и остварених резултата у току иницијалног истраживања у обе групе није статистички значајна.
H_{a2}: Корелација између успеха ученика из математике у прва три разреда гимназије и остварених резултата у току иницијалног истраживања у обе групе је статистички значајна.

Методе истраживања

На основу дефинисаног предмета истраживања, циљева и задатака, у овом истраживању примењене су дескриптивна, статистичка и експериментална метода. *Дескриптивна метода* је коришћена за утврђивање основних теоријских поставки, практичних решења предмета истраживања и код прикупљања података, обраде и интерпретације резултата истраживања. У анализи и обради података добијених у току истраживања, примењене су и одговарајуће *статистичке методе*. *Експериментална метода са паралелним групама* примењена је у делу рада који се односи на утврђивање и упоређивање знања ученика контролне и експерименталне групе [92].

Технике истраживања

Теоријска анализа садржаја примењена је приликом проучавања садржаја наставних планова и програма, уџбеника и наставних приручника за математику (посебно математичку анализу) у гимназији, као и друге литературе релевантне за експериментални рад. Техником *анкетирања* добијени су подаци о општем успеху и успеху ученика из математике у претходна три разреда. Техником *тестирања,* која је подразумевала „стандардизован поступак, помоћу којег се изазива нека одређена активност, а онда се та активност мери и вреднује тако да се индивидуални резултат упореди с резултатима који су добијени код других индивидуа у једнакој ситуацији или упоређивањем са једнозначно постављеним критеријумом“, испитана су знања ученика према постављеним циљевима и задацима истраживања ([2][38]).

Инструменти истраживања

Овде подразумевамо васпитно-образовни материјал који је употребљен у току истраживања, а може се класификовати на следећи начин [12]:

- *материјали експеримента* (уџбеници, збирке задатака, рачунар, дидактички материјали намењени наставнику и/или ученицима и протокол који је вођен од стране наставника у Е-групи и К-групи за време реализације истраживања);
- *испитни инструменти* (анкетни лист за прикупљање података о ученицима који су учествовали у истраживању и задаци објективног типа-иницијални тест знања из математике).

3.3 Резултати иницијалног истраживања

3.3.1 Иницијални тест знања из математике

Као иницијални тест знања коришћен је *неформални тест*, са циљем да се утврде предзнања ученика-учесника истраживања из области функције. Иницијални тест припада групи *тестова брзине* и *инвентарских тестова.* У анализи резултата узимао се у обзир број тачних одговора које је дао ученик у прописаном времену (овде су одређена два школска часа за израду иницијалног теста), а са циљем да наставник инвентарише знања ученика потребна за усвајање нових и проширивање старих математичких садржаја у настави моделирањем ([14][38]).

У иницијалном тесту дато је 15 задатака којима се проверавају ученичка знања о функцијама, тако да су посебно обрађене линеарна, експоненцијална и логаритамска функција.

Задаци су усмерени према потребама за специфичним и прецизно дефинисаним математичким знањима и могућностима за њихово продубљивање, а која произилазе из природе појмова и проблема које ће ученици истраживати у експерименталној настави. Ученици ће у процесу математичког моделирања обрађивати научне појмове и проблеме из хемије, као што су: брзина хемијске реакције и њена константа, концентрација реактаната који у њој учествују, одређивање реда реакције и утицај температуре на брзину реакције.

Како између одговарајућих наведених реалних величина и појмова у хемији постоји функционална зависност, ученици треба да поседују основна знања о томе шта је функција (1. и 2. задатак).

С обзиром на то да ће функције представљати математичке моделе у процесу моделирања, ученици треба да познају и основна својства функције (3. задатак).

Решавање реалних проблема применом моделирања укључује и способност ученика да правилно анализирају различите добијене математичке моделе (4. задатак).

Одређивање реда реакције и константе њене брзине у вези је са линеарном функцијом, односно њеним својствима (5. и 6. задатак).

Утицај температуре на бризну реакције, односно њену константу, може се представити експоненцијалном функцијом, што у хемији описује Аренијусова једначина (8. и 9. задатак).

Како параметри ове једначине, као што су фактор фреквенције и енергија активације, утичу на промену константе брзине, код ученика се испитује знање о томе како параметри који фигуришу у експоненцијалној функцији утичу на промене вредности те функције (10. и 11. задатак).

Имајући у виду да за математичко решавање постављених проблема може бити од користи да се приступи логаритмовању Аренијусове једначине (15. задатак), ученици треба да знају како да експоненцијални облик једначине трансформишу у подеснији, логаритамски облик (7. задатак).

Приликом одређивања фактора фреквенције и енергије активације у логаритамском облику Аренијусове једначине, ученици треба да примењују особине логаритма (14. задатак).

Како је логаритамска функција инверзна експоненцијалној, овде је било погодно испитати да ли ученици знају да одреде инверзну функцију функције која је задата графички (12. задатак), односно аналитички (13. задатак).

Наведени задаци могу се класификовати у две групе ([38][55]):

- *задаци рекогниције (везане форме) – вишеструки избор*

  Сваки задатак у овој групи садржи четири понуђена одговора (прост тип задатка вишеструког избора) од којих је само један тачан (осим 1. задатка, где су два тачна одговора, а понуђено их је пет). Предложени нетачни одговори такође су прихватљиви, тако да их ученик који није сигуран у одговор може заокружити као тачан. Тачни одговори нису дати сви на истом месту. Ако је у задатку обележен само тачан одговор (односно тачни одговори у 1. задатку), али не и нетачан, ученику се додељује 1 бод, уколико је означен и један нетачан одговор, без обзира на то да ли је означен и тачан, даје се 0 бодова.
- *задаци репродукције (слободне форме) – есејски/допуњавање*

  Задаци у овој групи подразумевају различите захтеве који укључују темељна знања, више рада, израчунавања, навођење дефиниција, допуњавање, присећање... Ако је ученик тачно одговорио на захтев постављен у задатку, добија 1 бод, иначе добија 0 бодова.

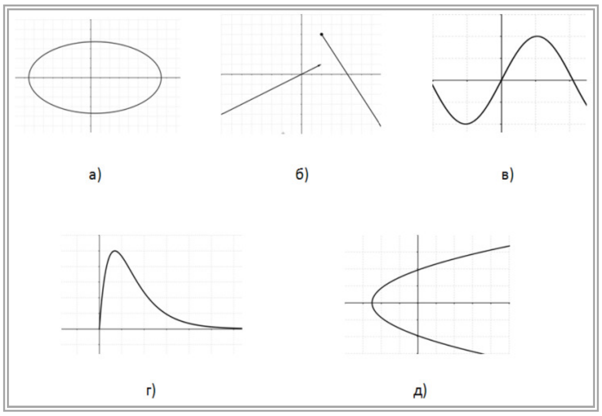
Иницијални тест дат је ученицима у следећој форми:

ИНИЦИЈАЛНИ ТЕСТ

Име и презиме ученика ____

Школа, разред и одељење ____

1. Који од следећих графика представља график функције? (заокружити тачне одговоре)



Коментар:

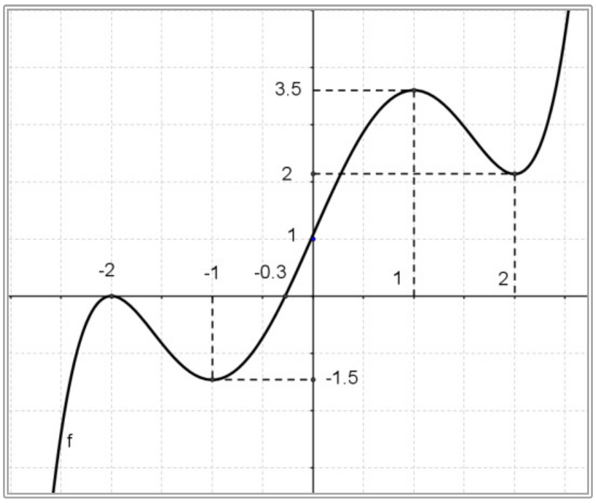
У математичкој литератури ([21][60]), овај задатак наводи се као један од задатака који могу да представљају добру методичку основу и који су веома погодни за испитивање знања ученика о појму функције. Велики број ученика заокружио је као тачан одговор график дат под а) и/или д) (зато што елипса и парабола имају једначине-погрешан закључак), што значи да не разликују криве другог реда од функције. Велики број ученика није заокружио тачан одговор под г), сматрали су да није представљен график функције зато што не постоји за негативне вредности независно промењиве.

2. Написати дефиницију функције.

Коментар:

Ученици углавном нису усвојили дефиницију функције на прави начин, што се може закључити на основу њихових формулација. Чак и они ученици који су заокружили тачне одговоре у 1. задатку имају проблем да напишу формалну дефиницију функције.

3. На слици је дат график функције *f*. Попунити празна места.

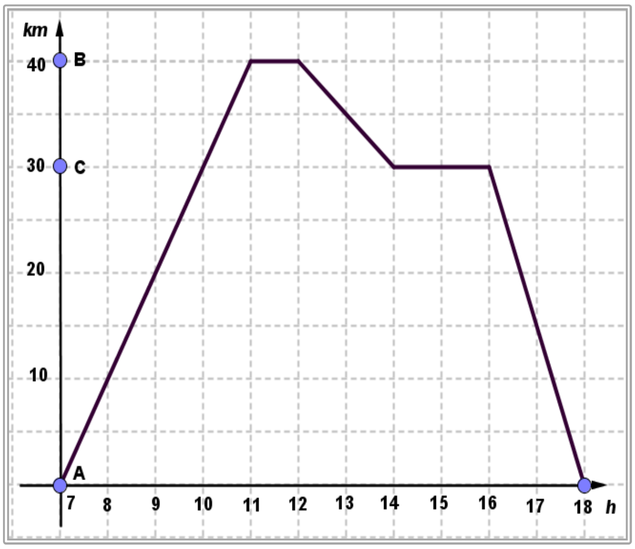


а) домен функције f је: $D =$ _____________;
б) скуп вредности функције f је: $\overline{D} =$ _____________;
в) нуле функције f: _____________;
г) пресек функције f са y-осом: _____________;
д) знак функције f: $y > 0$ за $x \in$ _____________, а $y < 0$ за $x \in$ _____________;
ђ) монотоност функције f: функција је растућа за $x \in$ _____________, а опадајућа за $x \in$ _____________;
е) екстремне вредности функције f: тачке максимума функције су _____________, а тачке минимума функције су _____________.

Коментар:

Овај задатак дат је са циљем да се испитају знања ученика о основним својствима функције кроз анализу функције на основу њеног графика. Највећи проблем је представљало одређивање екстремних вредности, јер ученици не знају да функција може имати више локалних екстрема. Код појединих ученика уочено је да не знају правилно да прочитају са графика вредности независно и зависно променљивих.

4. На графику је приказано кретање бициклисте од места A до места C и B и назад, у зависности од времена.



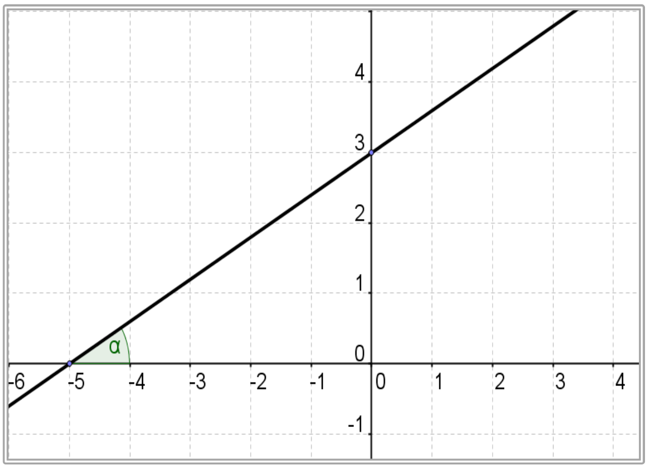
Одговорити на следећа питања:

а) У колико је сати бициклиста кренуо из места *A*? ________
б) У колико сати је прошао кроз место *C* у одласку? ________
в) Колико се задржао у месту *B*? ________
г) За које време је у повратку стигао из места *B* у место *C*? ________
д) Колико је био удаљен од места *A* у 17 часова? ________

Коментар:

Задатак је дат са циљем да се испитају способности ученика за решавање проблема из реалног живота, а који је представљен математичким моделом, и њихово закључивање о описаној појави. Код четвртог питања уочен је проблем. Неки ученици читали су податке са графика „здесна налево“, тј. да је најпре посматрано време 11 часова, а затим 10 часова, што је свакако погрешно.

5. На слици је дат график линеарне функције $y = kx + n$. Попунити празна места:



а) $tg\alpha =$ __________; б) $k =$ __________; в) $n =$ __________;
г) $y = 0$ за $x =$ ______________, а $x = 0$ за $y =$ _____________;
д) $y > 0$ за $x \in$ ______________, а $y < 0$ за $x \in$ _____________.

Коментар:

Задатак је дат са циљем да се испитају способности и знања ученика у анализирању линеарне функције која је овде задата графички, посебно о коефицијенту правца праве која представља график функције и одсечку на *y*-оси. Због нуле функције која је у тачки са негативном првом координатом, ученици погрешно закључују да је $tg\alpha = \frac{3}{-5}$ и не уочавају везу између k и $tg\alpha$. Такође, неки ученици не знају да ли n представља одсечак на *x*- или *y*-оси.

6. Дата је линеарна функција облика $y = kx + n$. Које од следећих тврђења је тачно? (заокружити тачан одговор)

а) Функција је монотоно растућа ако је $k < 0$, и монотоно опадајућа ако је $k > 0$.
б) Функција је монотоно растућа ако је $k = 0$, и монотоно опадајућа ако је $k = 0$.
в) Функција је монотоно растућа ако је $k > 0$, и монотоно опадајућа ако је $k < 0$.
г) Монотоност функције не зависи од вредности k.

Коментар:

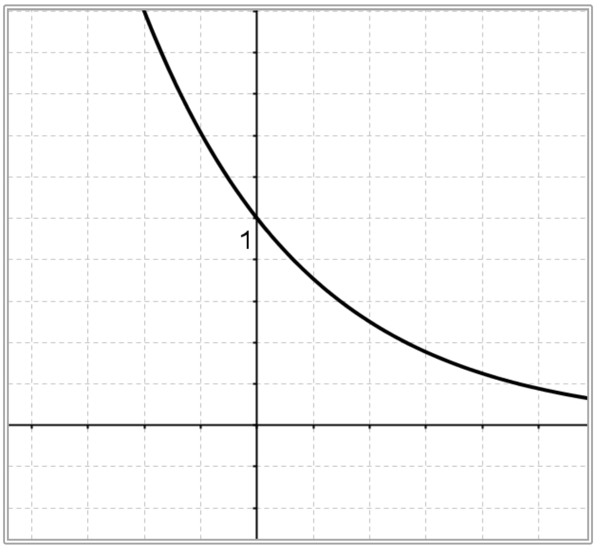
Ученик треба да одговори на питање које се односи на везу између монотоности линеарне функције и коефицијента правца k. Поједини ученици уопште не узимају у обзир постојање везе међу овим појмовима и погрешно заокружују одговор под г).

7. Решење једначине $a^x = b$, за $a \in R^+\backslash\{1\}$ и $b > 0$ је ________________________ .

Коментар:

У овом задатку испитују се знања која се односе на увођење логаритма као решења експоненцијалне једначине. Ученици не знају дефиницију логаритма, а такође не знају ни правилно да примене познату еквиваленцију да за свако $a \in R^+\backslash\{1\}$, свако $x \in R$, свако $b > 0$ важи: $a^x = b <=> \log_a b = x$.

8. График које функције је приказан на слици? (заокружити тачан одговор)

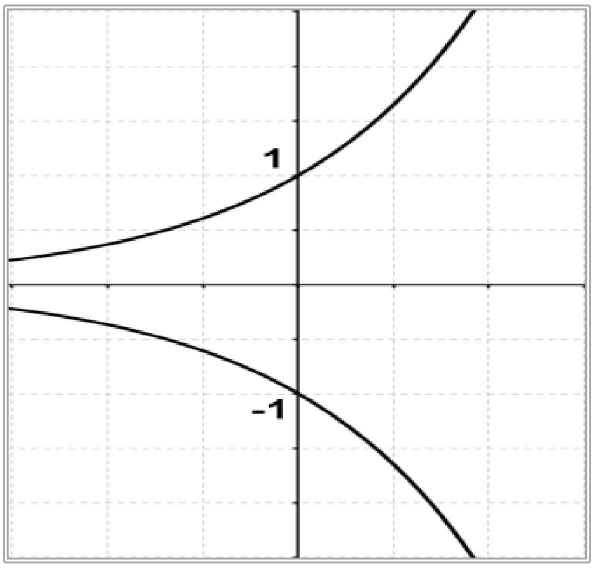


а) $f(x) = log_2 x$ б) $f(x) = 2^x$ в) $f(x) = log_{1/2} x$ г) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Коментар:

У овом задатку, ученици би требало да закључе да ли је на слици представљен график експоненцијалне или логаритамске функције. Ако тачно утврде да је реч о експоненцијалној функцији, треба даље, на основу графика, да закључе да је функција монотоно опадајућа, па основа мора бити у интервалу (0,1), одакле следи тачан одговор под г). Већина ученика која је погрешно одговорила заокружила је одговор под б).

9. На слици су приказани графици две функције. Које две? (заокружити тачан одговор)

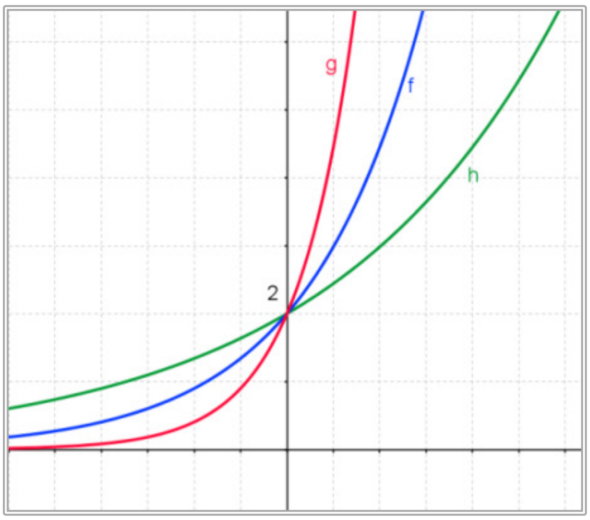


а) $f(x) = e^x$ и $g(x) = -e^x$ б) $f(x) = e^x$ и $g(x) = e^{-x}$
в) $f(x) = lnx$ и $g(x) = e^x$ г) $f(x) = lnx$ и $g(x) = ln(-x)$

Коментар:

У овом задатку потребно је најпре да ученици на основу домена датих функција закључе да на слици није функција $f(x) = lnx$ (зато што је она дефинисана само за $x > 0$). Даље је требало закључити да су на слици графици функција $f(x) = e^x$ и $g(x) = -e^x$, на основу чињенице да су графици функција $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симетрични у односу на x-осу, а не графици функција $y = f(x)$ и $y = f(-x)$, што је представљало извесну потешкоћу.

10. На слици су приказани графици три функције: $y = 2e^{2x}$, $y = 2e^{4x}$, $y = 2e^{8x}$. Које од наведених тврђења је тачно? (заокружити тачан одговор)

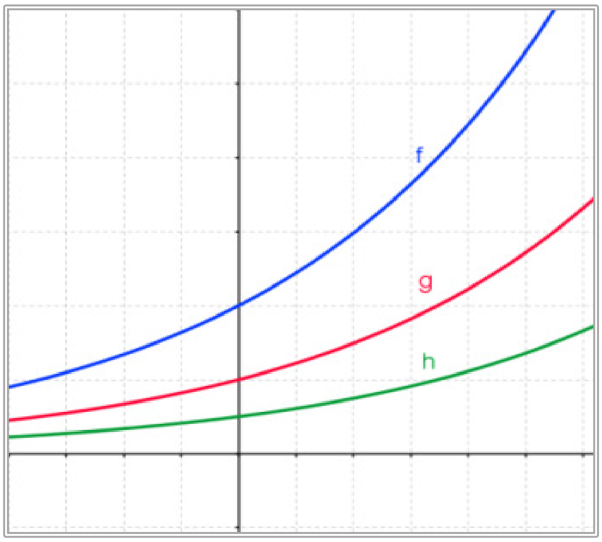


а) $f(x) = 2e^{2x}$, $g(x) = 2e^{4x}$, $h(x) = 2e^{8x}$ б) $h(x) = 2e^{2x}$, $f(x) = 2e^{4x}$, $g(x) = 2e^{8x}$
в) $g(x) = 2e^{2x}$, $f(x) = 2e^{4x}$, $h(x) = 2e^{8x}$ г) $f(x) = 2e^{2x}$, $h(x) = 2e^{4x}$, $g(x) = 2e^{8x}$

Коментар:

Овде се захтева од ученика анализа функције облика $y = ae^{bx}$, односно да знају како вредност параметра b утиче на вредност функције. Питање је, да ли са повећањем вредности b функција брже или спорије расте, и која од дате три функције описује најбржи, а која наспорији раст?

11. На слици су приказани графици три функције: $y = \frac{1}{2}e^{2x}$, $y = e^{2x}$, $y = 2e^{2x}$. Које од наведених тврђења је тачно? (заокружити тачан одговор)

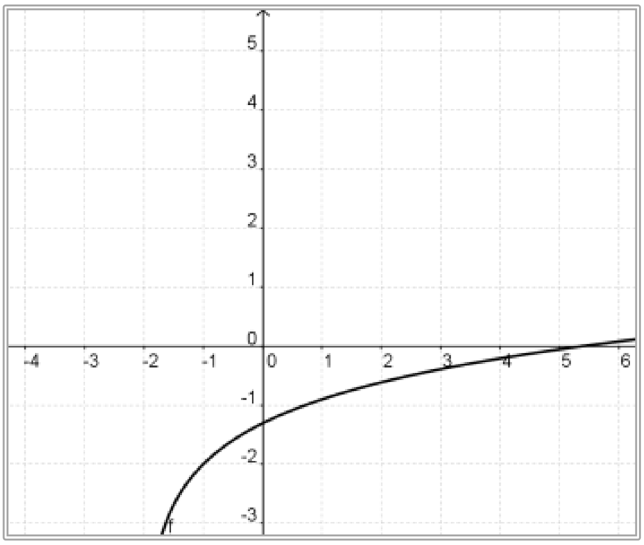


а) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, $g(x) = e^{2x}$, $h(x) = 2e^{2x}$ б) $h(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = 2e^{2x}$
в) $h(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, $g(x) = e^{2x}$, $f(x) = 2e^{2x}$ г) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, $h(x) = e^{2x}$, $g(x) = 2e^{2x}$

Коментар:

Слично као у 10. задатку, овде се даље захтева од ученика анализа функције облика $y = ae^{bx}$, односно да знају како вредност параметра a утиче на вредност функције. Ученици нису имали већих потешкоћа приликом решавања овог и претходног задатка.

12. На слици је дат график функције $y = f(x)$. На истој слици скицирати график њене инверзне функције.



Коментар:

Од ученика се захтева да знају графички да представе инверзну функцију функције чији је график дат у задатку. Већина ученика конструисала је праву $y = x$, што значи да имају основна знања о симетрији графика функција f и f^{-1} у односу на дату праву. Међутим, многи ученици нису правилно конструисали график инверзне функције зато што нису узимали у обзир да ако график функције f садржи тачке $(x, 0)$ и $(0, y)$, онда график функције f^{-1} мора да садржи тачке $(0, x)$ и $(y, 0)$.

13. Дата је функција $f(x) = 3e^{\frac{1}{3}(x+2)}$. Која је њена инверзна функција? (заокружити тачан одговор)

а) $f^{-1}(x) = 3ln\frac{x}{3} - 2$ б) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}ln\,3x - 2$

в) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - 2$ г) $f^{-1}(x) = 3e^{3x} + 2$

Коментар:

Од ученика се овде такође захтева да знају да одреде инверзну функцију. Они ученици који су знали формална правила за одређивање инверзне функције тачно су решили задатак. Уочава се да појединци не знају да изведу правилан рачунски поступак одређивања инверзне функције ако је функција задата аналитички, али знају да одреде график инверзне функције за функцију задату графички (као у претходном задатку). У одговорима под а) и б) подразумева се да је домен понуђених функција R^+, јер је то кодомен функције f.

14. Одредити вредност израза $\log_2 8 - 2\log_6 3 - \log_6 4$.

Коментар:

Овај задатак [24] испитује знања ученика о особинама логаритма. Ученици су имали потешкоћа у примени правила за сабирање и одузимање логаритама, као и код примене правила које се односи на логаритам степена.

15. Решити једначину $x^{2\,lg\,x} = 10x^2$.

Коментар:

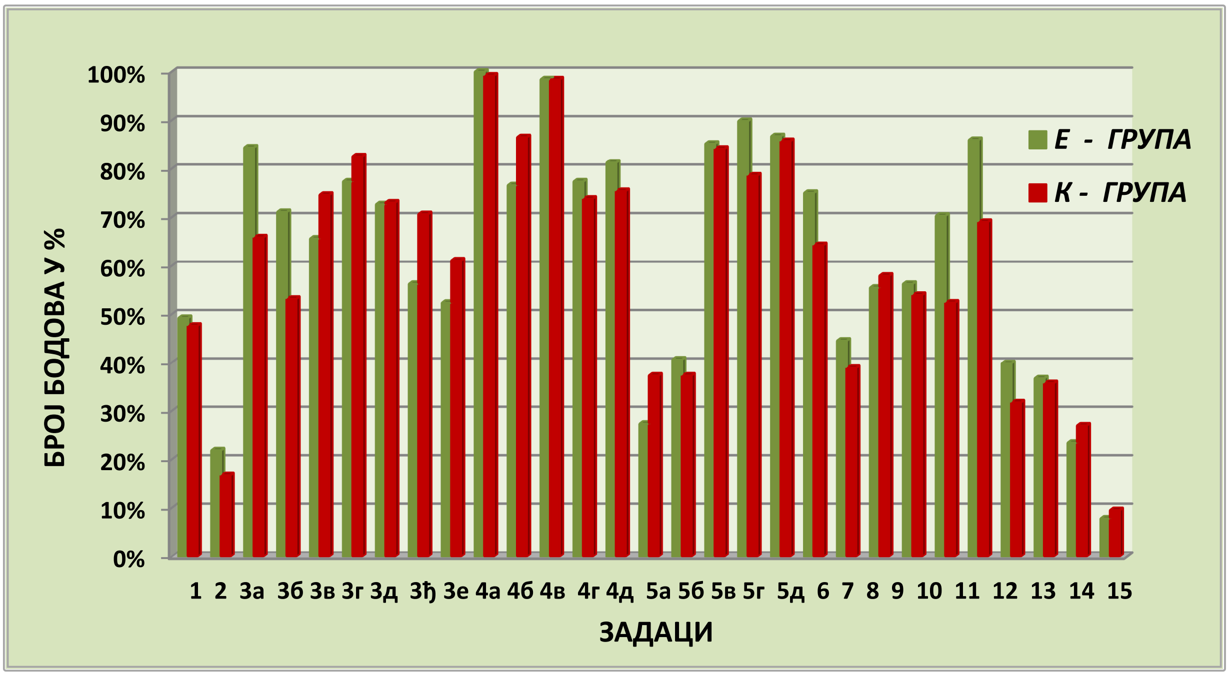
У овом задатку [24], ученици су показали најслабије знање. Мали број ученика знао је најпре да одреди за које вредности x је израз $x^{2\,lg\,x}$ дефинисан, а да је затим потребно приступити логаритмовању једначине и примени правила која се односе на својства логаритма.

3.3.2 Статистичка обрада резултата

Иницијални тест садржао је 15 задатака, од којих је сваки задатак бодован са једним бодом, осим трећег, четвртог и петог задатка. Ови задаци садржали су више питања, а свако питање бодовано је једним бодом. Тако је 3. задатак укупно бодован са 7 бодова, 4. задатак са 5 бодова и 5. задатак са 5 бодова, па је максималан број бодова на иницијалном тесту био 29. Резултати иницијалног теста по задацима у процентима приказани су у табели 3.3. и на графикону 3.1.

Табела 3.3. Резултати иницијалног теста по задацима у процентима

Задатак	*Е-група*	*К-група*	*Просек*	*Задатак*	*Е-група*	*К-група*	*Просек*
1.	49.219%	47.619%	48.425%	***5.б)***	40.625%	37.302%	38.976%
2.	21.875%	16.667%	19.291%	***5.в)***	85.156%	84.127%	84.646%
3.а)	84.375%	65.873%	75.197%	***5.г)***	89.844%	78.571%	84.252%
3.б)	71.094%	53.175%	62.205%	***5.д)***	86.719%	85.714%	86.220%
3.в)	65.625%	74.603%	70.079%	***6.***	75.000%	64.286%	69.685%
3.г)	77.344%	82.540%	79.921%	***7.***	44.531%	38.889%	41.732%
3.д)	72.656%	73.016%	72.835%	***8.***	55.469%	57.937%	56.693%
3.ђ)	56.250%	70.635%	63.386%	***9.***	56.250%	53.968%	55.118%
3.е)	52.344%	61.111%	56.693%	***10.***	70.313%	52.381%	61.417%
4.а)	100.000%	99.206%	99.606%	***11.***	85.938%	69.048%	77.559%
4.б)	76.563%	86.508%	81.496%	***12.***	39.844%	31.746%	35.827%
4.в)	98.438%	98.413%	98.425%	***13.***	36.719%	35.714%	36.220%
4.г)	77.344%	73.810%	75.591%	***14.***	23.438%	26.984%	25.197%
4.д)	81.250%	75.397%	78.346%	***15.***	7.813%	9.524%	8.661%
5.а)	27.344%	37.302%	32.283%	***Σ***	**62.392%**	**60.071%**	**61.241%**



Графикон 3.1. Упоредни хистограм иницијалног теста

Ученици Е-групе су у просеку урадили тачно 62.392% иницијалног теста, а ученици К-групе 60.071%, тако да су сви ученици који су тестирани у просеку урадили 61.241% иницијалног теста. Најуспешније су решени задаци 4.а) и 4.в) (решавање једноставнијег задатка у реалном контексту). Задатак 4.а) је у просеку решен са 99.606% и 4.в) у просеку са 98.425%.

Најслабије решени задаци су: 15. задатак (логаритамска једначина) са 8.661%, 2. задатак (дефиниција функције) са 19.291%, 14. задатак (особине логаритма) са 25.197% и 5.а) задатак (одређивање тангенса угла који дата права захвата са x-осом) са 32.283%.

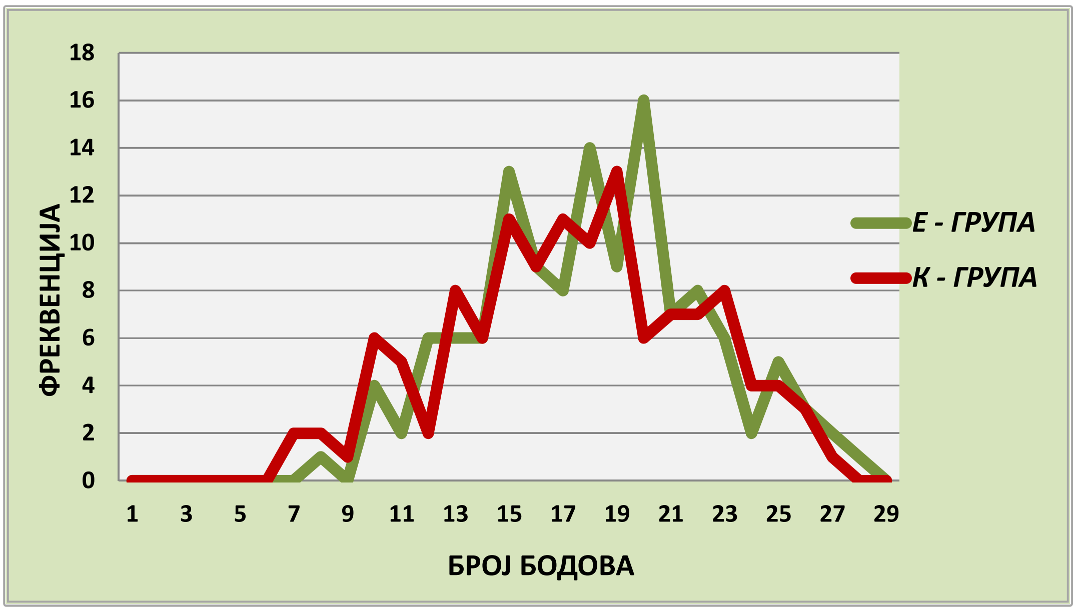
Е-група је успешније решила задатке 1, 2, 3.а), 3.б), 4.а), 4.в), 4.г), 4.д), 5.б), 5.в), 5.г), 5.д), 6, 7, 9, 10, 11, 12. и 13, а К-група задатаке 3.в), 3.г), 3.д), 3.ђ), 3.е), 4.б), 5.а), 8, 14. и 15.

Сваки задатак тачно је решио бар један ученик, међутим, ни један ученик није тачно решио све задатке.

Ученици Е-групе су у просеку освојили 18.094 бодова, а ученици К-групе 17.421 бодова. *Расподела броја бодова* приказана је у табели 3.4. Најмањи број бодова на иницијалном тесту је 7 бодова (К-група), а највећи 28 (Е-група). Највећа фреквенција је око 19 бодова у К-групи и око 20 бодова у Е-групи. Очигледно је да је *расподела фреквенција*, приказана на графикону 3.2, у обе групе нормална са извесним модификацијама, што је и очекивано код оваквих истраживања.

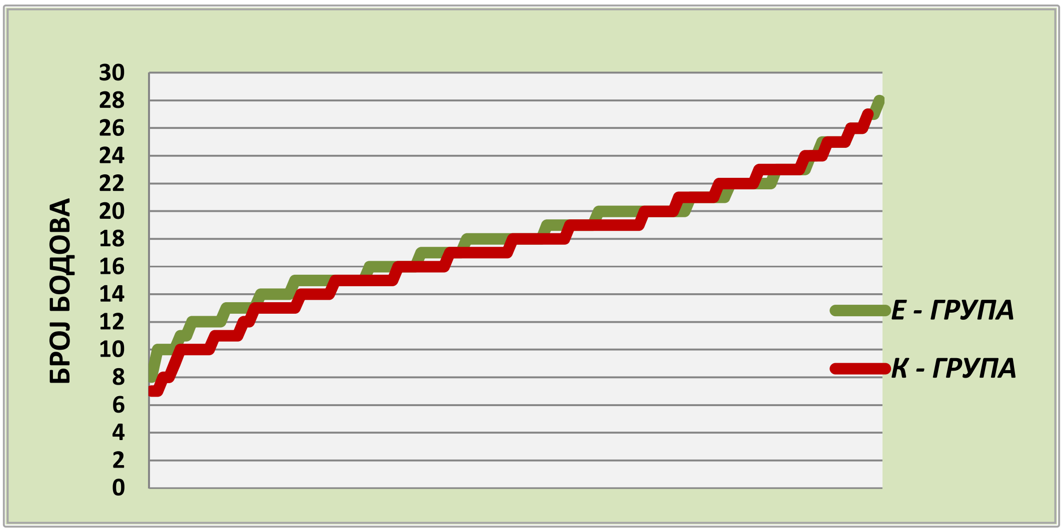
Табела 3.4. Расподела броја бодова на иницијалном тесту

Број бодова	***Број ученика Е-групе***	***Број ученика К-групе***	***Број бодова***	***Број ученика Е-групе***	***Број ученика К-групе***
7	0	2	***19***	9	13
8	1	2	***20***	16	6
9	0	1	***21***	7	7
10	4	6	***22***	8	7
11	2	5	***23***	6	8
12	6	2	***24***	2	4
13	6	8	***25***	5	4
14	6	6	***26***	3	3
15	13	11	***27***	2	1
16	9	9	***28***	1	0
17	8	11	***29***	0	0
18	14	10	***Број ученика***	***128***	***126***
			Просечан број бодова	***18.094***	***17.421***



Графикон 3.2. Фреквенција бодова на иницијалном тесту

Анализирајући графикон 3.3. може се уочити незнатна разлика у *дистрибуцији броја бодова* на иницијалном тестирању између експерименталне и контролне групе, јер се криве дистрибуције скоро поклапају, што представља повољан исход иницијалног теста.



Графикон 3.3. Дистрибуција броја бодова на иницијалном тесту

Статистичка обрада иницијалног теста реализована је на основу бодовног постигнућа ученика анализом средњих вредности. Статистичка обрада рађена је *Студентовим t-тестом разлике аритметичких средина два велика независна узорка* (Student's t-test), који показује да ли постоји статистички значајна разлика у резултатима експерименталне и контролне групе (табела 3.5).

Табела 3.5. Статистички резултати иницијалног теста

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		*Е-група*	*К-група*
Бројност узорка	**n**	128	126
Средња вредност броја бодова	$\bar{x}$	18.094	17.421
Варијанса	s^2	17.802	21.190
Стандардна девијација	**σ**	4.219	4.603
Коефицијент варијације	**V**	23.319%	26.423%
Проценат освојених бодова	**%**	62.392	60.071
Стандардна грешка аритметичке средине	$\sigma\bar{x}$	0.373	0.410
Апсолутна разлика аритметичких средина	$D\bar{x}$	0.673	
Стандардна грешка разлике аритметичких средина	$\sigma d\bar{x}$	0.554	
Критички однос	**t**	1.215	
Степени слободе	**df**	252	
Ниво значајности	**0.05**	1.960	
Ниво значајности	**0.01**	2.576	

Израчунате мере варијације не показују смер варијације у односу на аритметичку средину, као ни облик распореда фреквенција. Ту информацију добијамо на основу *мере асиметрије и спљоштености.* Распоред је симетричан кад фреквенције вредности обележја равномерно опадају или расту почев од аритметичке средине, а асиметричан кад елементи скупа показују тенденцију груписања око вредности обележја изнад или испод средње вредности. У зависности од односа фреквенције средњих вредности и фреквенције осталих вредности обележја, распоред је више или мање спљоштен (табела 3.6) [69].

Табела 3.6. Коефицијенти асиметрије и спљоштености на иницијалном тесту

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		***Е-група***	***К-група***
Коефицијент асиметрије	k_A	0.052	–0.126
Коефицијент спљоштености	k_S	2.510	2.383

У статистичкој обради сваког (па тако и иницијалног) теста може се одредити статистичка вредност на основу које ће се *проценити поузданост теста.* Како је иницијални тест коришћен у овом делу истраживања састављен од дихотомних (бинарних) задатака, могуће је применити формулу KR-20 (Kuder-Richardson’s Formula 20), за утврђивање поузданости наведеног теста. Параметри који су потребни за примену ове формуле добијени су на основу обједињених података за обе групе (табела 3.7).

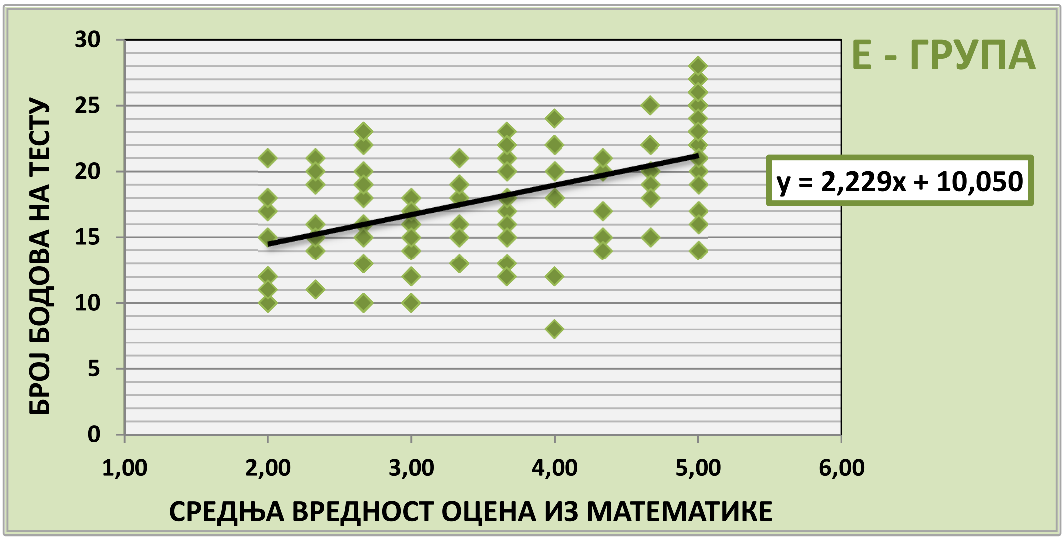
Табела 3.7. Одређивање коефицијента поузданости иницијалног теста

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА			***Коефицијент поузданости теста***
Бројност узорка	**N**	254	**0.753**
Средња вредност броја бодова	$\bar{x}$	17.760	
Варијанса теста	V_t	19.519	
Број задатака на тесту	**k**	29	
Индекси лакоће и тежине задатака	p_i , q_i	$\sum_{i=1}^{29} p_i q_i = 5.322$	

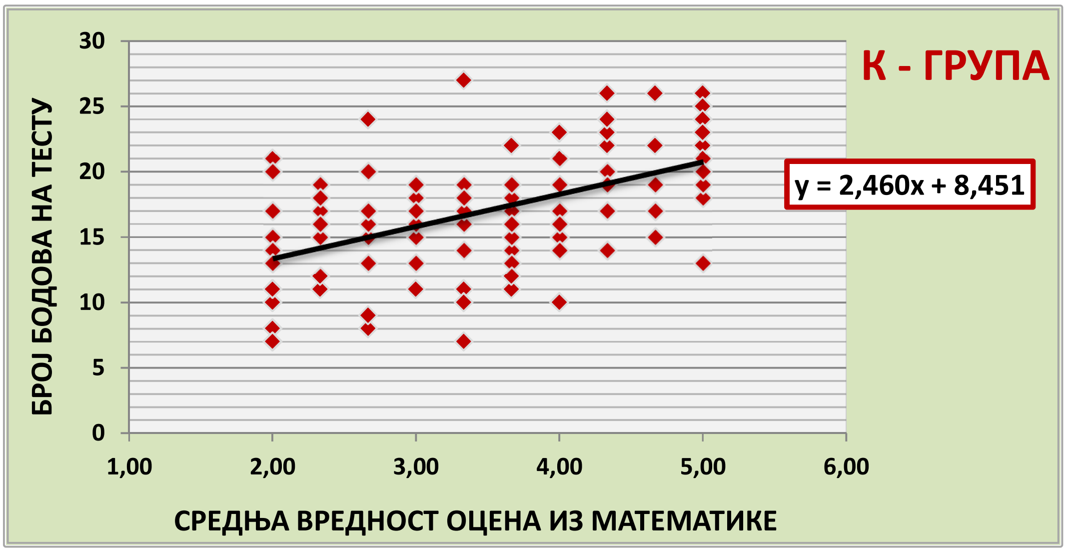
У овој фази истраживања, могуће је проценити да ли је, и у којој мери, успех ученика из математике повезан са резултатима иницијалног тестирања, односно може се утврдити да ли између успеха из математике и успеха на иницијалном тесту постоји линеарна зависност. То укључује одређивање *једначине регресије и коефицијента корелације* [69]. Успех ученика из математике (средња вредност оцена на крају првог, другог и трећег разреда) означен је независно промењивом x, а укупан број бодова освојених на иницијалном тесту означен је зависно промењивом y . Добијени статистички резултати су нумерички представљени у табели 3.8, а графички представљени на графиконима 3.4. и 3.5.

Табела 3.8. Корелациони и регресиони статистички резултати

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		Е-група	К-група
Пирсонов коефициент корелације	r	0.544	0.529
Коефициент детерминације	r^2	0.296	0.280
Коефициент алијенације	$1-r^2$	0.704	0.720
Регресиона константа	a	10.050	8.451
Коефициент регресије	b	2.229	2.460
Стандардна грешка линеарне регресије	σS	3.554	3.922



Графикон 3.4. Дијаграм дисперзије за Е-групу



Графикон 3.5. Дијаграм дисперзије за К-групу

Да би се испитала *статистичка значајност везе између успеха ученика из математике и резултата добијених на иницијалном тесту*, извршено је тестирање Пирсоновог коефицијента (Pearson's Coefficient) линеарне корелације r. Параметри потребни за овај тест дати су у табели 3.9.

Табела 3.9. Тестирање коефицијента линеарне корелације

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		***Е-група***	***К-група***
Бројност узорка	**n**	128	126
Пирсонов коефицијент корелације	**r**	0.544	0,529
Критички однос	**t**	7.277	6.997
Степени слободе	**df**	126	124
Ниво значајности	**0.05**	1.980	
Ниво значајности	**0.01**	2.617	

3.4 Дискусија резултата

Стандардна девијација је најважнија и најчешће употребљавана мера варијабилности и, са коефицијентом варијације, указује на хомогеност тестираних група. За Е-групу је стандардна девијација 4.219, што је мање од трећине средње вредности броја бодова на иницијалном тесту, и коефицијент варијације је 23.319%, што је мање од 30%. За К-групу је стандардна девијација 4.603, што је мање од трећине средње вредности броја бодова на иницијалном тесту, и коефицијент варијације је 26.423%, што је мање од 30%. Одавде закључујемо да су **Е-група и К-група хомогене у знању из математике из области функције, посебно линеарне, експоненцијалне и логаритамске функције, које је испитано на иницијалном тесту.**

На основу података добијених у табели 3.5. може се приступити статистичком тестирању прве нулте постављене хипотезе. Како је $t = 1.215 < t_{(252;\,0.05)} = 1.960$, тврдимо да **разлика Е-групе и К-групе у знању из математике из области функције, посебно линеарне, експоненцијалне и логаритамске функције, није статистички значајна.** Прва нулта хипотеза се не одбацује јер је ризик већи од 5%.

За Е-групу, коефицијент асиметрије већи је од нуле, па добијамо позитивну асиметрију (удесно). Међутим, како је $|k_A| \leq 0.25$, закључујемо да се ради о малој асиметрији. Како је коефицијент спљоштености је $k_S = 2.510$, закључујемо да је расподела незнатно шира (спљоштенија) од нормалне (код нормалне расподеле је $k_S = 3$). За К-групу, коефицијент асиметрије мањи је од нуле, па добијамо негативну асиметрију (улево). Међутим, како је $|k_A| \leq 0.25$, закључујемо да се и овде ради о малој асиметрији. За ову групу израчунат коефицијент спљоштености је $k_S = 2.383$, што значи да је, као и код Е-групе, расподела само мало шира од нормалне. Одавде следи да обе групе имају расподелу блиску нормалној и да међу ученицима нема екстремних разлика које се односе на њихово знање испитано иницијалним тестом (мања одступања детектована су у Е-групи).

За иницијални тест утврђен је коефицијент поузданости 0.753, чиме је потврђено да се дати тест може сматрати **поузданим**, односно, можемо се ослонити на резултате који су добијени његовом применом. **Валидност** се постигла одабиром задатака који су везани за одговарајуће наставне теме. Иницијалним тестом проверавало се знање из области функција, што је у сагласности са наставним плановима и програмима за гимназије. На резултате иницијалног теста није могао да утиче оцењивач, чиме се обезбедила **објективност**. Ученици К-групе остварили су 21, а ученици Е-групе 20 различитих резултата, што је више од половине броја могућих резултата на иницијалном тесту (30). То значи да овај тест омогућава разликовање ученика на основу њихових резултата. По успеху на датом тесту, јасно су раздвојени бољи ученици од слабијих, што иницијални тест чини **осетљивим**. Иницијални тест је такође **економичан**, јер се за релативно кратко време дошло до сазнања о ученичким предзнањима, и **обухватан,** јер садржи кључна питања из области из којих се вршило испитивање.

Пирсонов коефицијент корелације, који даје информацију о повезаности успеха ученика из математике у претходна три разреда и укупног броја бодова освојених на иницијалном тесту, позитиван је у обе групе. У Е-групи је $r = 0.544$, а у К-групи је $r = 0.529$, тако да можемо закључити да између наведених варијабли постоји умерена позитивна веза и зависност. Међутим, мала вредност коефицијента детерминације од 0.296 за Е-групу, односно 0.280 за К-групу, показује нам да је назначена зависно промењлива условљена са 29.6% у Е-групи и са 28% у К-групи вредностима независно промењливе, а са чак 70.4% у Е-групи и 72% у К-групи другим факторима.

На основу података добијених у табели 3.9, може се приступити статистичком тестирању друге нулте постављене хипотезе. За Е-групу је $t = 7.277 > t_{(126;\,0.05)} = 1.980$. Због тога одбацујемо другу нулту и прихватамо њену алтернативну хипотезу и са сигурношћу од 95% тврдимо да **у Е-групи постоји статистички значајна веза између успеха ученика из математике и резултата добијених на иницијалном тесту**. Како је $t = 7.277 > t_{(126;\,0.01)} = 2.617$, одбацујемо другу нулту и прихватамо њену алтернативну хипотезу и са 99% сигурности у Е-групи. За К-групу је $t = 6.997 > t_{(124;\,0.05)} = 1.980$. Због тога одбацујемо другу нулту и прихватамо њену алтернативну хипотезу и са сигурношћу од 95% тврдимо да и **у К-групи постоји статистички значајна веза између успеха ученика из математике и резултата добијених на иницијалном тесту**. Како је $t = 6.997 > t_{(124;\,0.01)} = 2.617$, одбацујемо другу нулту и прихватамо њену алтернативну хипотезу и са 99% сигурности у К-групи.

Утврђена је уједначеност група на основу одговарајућих варијабли и, на основу реализованог иницијалног теста, његове детаљне обраде и статистичке анализе, утврђено је да не постоји статистички значајна разлика између К-групе и Е-групе у знању из математике из области функције, посебно линеарне, експоненцијалне и логаритамске функције. На основу ових чињеница закључујемо да између К-групе и Е-групе постоји **еквивалентност група** потребна за даљи ток истраживања и веома значајна за експериментални рад који следи.

Одговори које су ученици дали и резултати спроведеног иницијалног теста наставнику су указали на следеће:

- Поједини математички садржаји нису у довољној мери усвојени, тако да их је потребно додатно имплементирати код ученика новим методичким приступима и поступцима у раду. Из тог разлога може бити веома сврсисходно повезивање ових садржаја са садржајима неког другог наставног предмета (у овом истраживању то је хемија) и њихово укључивање у одговарајућим етапама моделирања ради бољег разумевања и усвајања.
- Знања о појединим математичким садржајима су веома функционална, трајна и темељна. Ова знања ученици треба у што већој мери да искористе у експерименталном процесу и тиме их додатно уграде у једну свеобухватну структуру свог математичког знања.

Такође, наставник може да претпостави које ће ситуације ученицима представљати потешкоће, а које ће проблеме решавати са лакоћом. Смернице добијене на овај начин значајне су зато што у великој мери утичу на даљи рад наставника и ученика, одабир његових метода и облика, одабир тема за моделирање, временску организацију моделирања, као и прилагођавање наставног процеса стварним могућностима ученика.

4 Експериментално истраживање: математичко моделирање у интердисциплинарном приступу настави и учењу

4.1 Увод

Примена математичког моделирања у циљу стицања и проширивања математичког знања кроз изучавање и решавање проблема из других наставних предмета омогућава успостављање међупредметне корелације у настави.

У поглављу 4.2 ове главе наведене су теоријске поставке међупредметне корелације. С обзиром на то да је успостављање ове корелације веома сложен и комплексан процес, у раду су наведени различити аспекти интердисциплинарног приступа проучавању наставних садржаја. Даље су описани различити облици, организационе варијанте, као и когнитивни процеси и педагошки исходи интердисциплинарне наставе, са циљем да се укаже да ова настава пружа шири спектар могућности у односу на традиционалну.

У поглављу 4.3 наведени су аргументи за примену математичког моделирања у хемији, а затим детаљно описана два процеса моделирања, односно активности ученика и наставника у свакој етапи експерименталног рада. Рад је реализован на часовима редовне наставе математике, хемије и рачунарства и информатике, са ученицима експерименталне групе која је одређена у поглављу 3.2.

4.2 Интердисциплинарни приступ настави и учењу

У савременим концепцијама гимназије, кроз разноврсне пројекте, налаже се захтев за **међупредметном корелацијом**. Вертикална и хоризонтална корелација наставних предмета одређује специфичне начине, облике и методе рада наставника који су у складу са реалним потребама и могућностима ученика, а усмерени су ка остваривању претходно дефинисаних васпитно-образовних, функционалних и комуникацијских наставних задатака [78]. За међупредметно повезивање постоје три основна разлога [88]:

- природа научног развоја;
- карактер сазнајног процеса;
- практична примена знања.

Међутим, данашња школска пракса је и даље у највећој мери оријентисана ка дисциплинарном приступу и традиционалним методама рада. Многи наставници нису отворени за промене, па се новим идејама приступа са великим опрезом, а значајнија подршка наставника један је од суштинских фактора за увођење иновација [68].

Наставни систем који се формира на основу начела интердисциплинарног приступа настави и учењу има следеће важне одреднице: *корелацију, интеграцију и координацију*. Корелација подразумева повезивање наставних садржаја два или више предмета. Треба истаћи да није важно само повезивати знања у току процеса учења, већ и у исходу имати знања повезана у системску целину. У тој целини су кроз процес интеграције обједињена и здружена знања која су стечена у различитим научним областима. Координација подразумева хармонично функционисање делова те целине и укључује активности управљања процесом међупредметног повезивања, као и активности које усклађено реализују два или више наставника ([68][78]).

У складу са наведеним основним одредницама, **интердисциплинарну наставу (интегративну, тематску наставу)** можемо схватити као [88]:

- комплексно истраживање и усвајање знања из различитих области о питањима из реалног окружења ученика (што је уједно и један од главних аспеката математичког моделирања);
- рационално кретање кроз наставне области и обједињавање различитих елемената у логичке мисаоне целине које реално одражавају животну стварност;
- јединствена заједничка чворишта у знању која подстичу ученике да проналазе нове односе, стварају нове моделе, системе и структуре;
- примењену методологију и језик више дисциплина ради истраживања главне теме, проблема или искустава;
- спајање више предметних области у једну, онако како ученици у свакодневној пракси савладавају предмете и појаве, сливајући их у јединствен процес;
- нов начин размишљања;
- припрема за примену знања у новим ситуацијама (трансфер знања) применом усвојених мисаоних модела.

Најчешћа су **три облика интеграције наставе -** *потпун, делимичан и блоковски*. Потпуна интеграција остварује се спајањем различитих наставних садржаја у јединствен курс; делимична, избором из наставног материјала и заједничком обрадом оних садржаја који су сродни; блоковска, изградњом слободно програмираних аутономних блокова или издвајањем делова заједничког програма који се интегрисано обрађују и утврђују [88].

У **организацији интегративног наставног процеса** издвајају се следеће варијанте:

- интегришу се садржаји оних предмета који улазе у исту образовну област и при томе се једнака пажња посвећује садржајима из тих предмета;
- интегришу се садржаји оних предмета који улазе у исту образовну област или исти образовни блок, а основу чини један наставни предмет;
- интегришу се сродни садржаји из различитих наставних предмета и свима се посвећује једнака пажња;
- интегришу се садржаји из сродних наставних предмета, али један предмет је основни, а садржаји осталих служе као илустрација;
- интегришу се садржаји међусобно удаљених наставних области и блокова што је карактеристично за променљиви део наставног плана (према потребама локалне средине);
- интегришу се општеобразовни садржаји, полазећи од специфичности школе [88].

У савременој настави, увођење интердисциплинарности и тематског планирања, који треба да омогуће флексибилан, мултидимензионалан и мултимедијски приступ проблемима [70], представља стратегију васпитно-образовног рада усмерену ка **педагошким циљевима** који су у сагласности са циљевима примене математичког моделирања као савременог методичког приступа настави:

- ***увођење ученика у интегративне процесе данашњице***, где се све више успостављају везе између појединих научних дисциплина, што се одражава на научно-технолошки развој друштва и подразумева тимски рад стручњака различитих профила;
- ***примене знања у пракси која не познаје границе дисциплина*** и захтева коришћење разнородних знања, односно трансфер знања (преношење знања из једне области/дисциплине у другу или са теорије на праксу);
- ***сагледавање појава, стицање, продубљивање, утврђивање и употреба функционалног знања о појмовима и садржају градива у њиховој целовитости и аутентичности***, до чега се долази сазнањем кроз различите медије, врсте знања и методе сазнања, карактеристичне за различите дисциплине;
- ***подстицање мултиперспективних/мултидимензионалних флексибилних процеса сазнања***, које се не ограничава унапред на оквире појединачних дисциплина, већ осветљава реалан проблем са различитих страна, што даље подстиче на тражење нових путева приликом његовог решавања; интердисциплинарни приступ понавља пут којим се сазнање развијало кроз историју при решавању животних и стога често интердисциплинарних проблема, да би се тек после, вештачком класификацијом, дисциплине поделиле у посебне целине;

- ***природнији, „животнији" приступ у стицању знања у настави*** који је сличнији ученичкој интуицији и истраживању околине него апстрактном језику дисциплина;
- ***интегралност са стваралачким процесима истраживача и ученика*** ([71][93]).

Повезана са наведеним циљевима, интердисциплинарна настава није само начин приступања сазнању, већ и циљ сам за себе. Поред тога што може бити циљ, она представља и контекст за достизање бројних педагошких циљева. Усмереност на различите садржаје и дисциплине укључује, ангажује и стога развија способности у *различитим областима интелигенције*: логичко-математичке, просторно-визуелне, језичке, интерперсоналне и интраперсоналне. Бивајући усмерена на различите ресурсе и решења истог проблема, интердисциплинарна настава директно подстиче дивергентно мишљење које је кључни елемент креативног мишљења, а своди се на стваралачку способност долажења до што већег броја идеја, различитих решења за исти проблем и оригиналних или необичних, нестереотипних решења. Усмерење је на проблем, а не на учење садржаја, и из тог разлога критичко мишљење, укључујући логичке, евалуативне и вредносне процесе, природно долази у први план. Знања и вештине из различитих области савладавају се на једном проблему, односно теми [68].

Као што је истакнуто, интердисциплинарност у настави захтева *дивергентне когнитивне процесе* (усмерене на задатке отвореног типа који захтевају вишеструка решења проблема), у односу на традиционалну наставу која се заснива на конвергентним когнитивним процесима (усмереним на задатке затвореног типа који захтевају једно тачно решење проблема). Ова дихотомија когнитивних процеса може се трансформисати у *димензионални модел* који се састоји од пет типова задатака. Тип 1 подразумева познавање свих елемената проблема и метода долажења до тачног решења које је унапред детерминисано. Тип 2 даје могућност избора начина долажења до тачног решења. Тип 3 подразумева избор метода долажења до решења, као и избор могућих решења. Тип 4 подразумева само јасно одређен проблем, а методе и решења откривају се и креирају; док тип 5 подразумева животне ситуације, где се самостално формулише проблем и проналазе адекватне методе и решења [70]. Како моделирање укључује отворене задатке, његова примена у настави обухвата више нивое наведеног модела (задатке типа 3, 4 и 5), чиме се код ученика подстиче унутрашња мотивација, креативност, продукција новог и различитог. Моделирање, као облик проблемско-истраживачког приступа, мобилише ученике у мери њихових способности и степена развоја, те они вођени личном радозналошћу могу, уз помоћ наставника и других ученика који су на различитим нивоима развоја, да прате „зону свог наредног развоја" [68].

У приручнику за самовредновање и вредновање рада школе Министарства просвете Републике Србије се међу седам кључних области наводе *настава и учење*. У оквиру ове области, наставни процес означен је као подручје вредновања чији су важни показатељи *корелација и примена знања*. Истиче се да наставници треба да подстичу ученике да користе знања и искуства из различитих предмета и да их повезују у смислену целину са новим знањима. Ученици такође треба да се оспособљавају да стечена школска знања примењују у свакодневном животу. Наставници кроз тимски рад, који позитивно утиче на успостављање међупредметне корелације, могу и са ученицима да осмишљавају програме и садржаје за активности које захтевају примену знања, довођењем ученика у ситуације да примене научено. Пракса која углавном одговара наведеном опису вреднује се као највиши (четврвти) ниво [9].

У гимназијском образовању ученика, посебно је значајно успостављање међупредметне корелације која се односи на математику и друге природне науке, као што су хемија и физика. Може се остварити ланчани корелацијски низ увођењем нових тема, чиме се обогаћују наставни садржаји различитих наставних предмета. Модел васпитно-образовног система који полази од начела интердисциплинарности и интеграције научних области напушта традиционалну затвореност појединог наставног предмета у предметном систему организације васпитно-образовног процеса [78]. Управо математичко моделирање појмова, појава и процеса који се изучавају у некој другој научној дисциплини може да репрезентује успостављање система међупредметне повезаности.

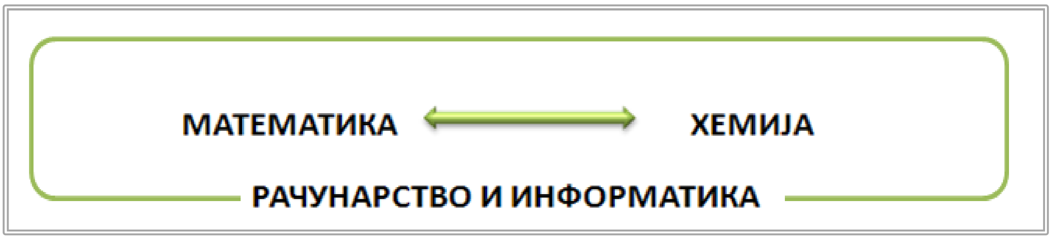
4.3 Математичко моделирање хемијских реакција

Математичко моделирање примењено је у изучавању појмова и решавању проблема из хемије из следећих разлога:

Интердисциплинарност у данашњој наставној пракси још увек није интегрисана у наставне планове и програме у довољној мери (или је уопште нема) и још увек се своди на теоријска разматрања, уопштене коментаре и закључке наставника, педагога, дидактичара, који најчешће не садрже опис проблема који се могу појавити у процесу рада и истраживања, а решавање тих проблема неопходно је да би се могло утицати на евентуалне незадовољавајуће исходе [68]. Због тога је у дисертацији представљен конкретан пројекат делимичног типа интеграције садржаја наставних предмета математике и хемије, са посебном пажњом посвећеном садржајима из математике.

У овом раду примењена су следећа три типа интердисциплинарних веза: *интердисциплинарне непосредне везе у наставном процесу*, *ментално посредоване везе* и *посредовано примењене везе*. Интердисциплинарне непосредне везе у експерименталном наставном процесу успостављене су кроз обрађивање појмова и решавање проблема из хемије у процесу математичког моделирања чија је основа у математици. У раду је одређено основно садржајно језгро из наставних предмета чији су се садржаји повезивали и изведене су везе између појмова математике и хемије, што је реализовано у етапама процеса моделирања. Успостављене су и ментално посредоване везе, зато што се у настави математике и хемије формирају когнитивне способности и сличне вештине потребне гимназијалцима у њиховој будућој професионалној делатности. С обзиром на то да су се појмови усвојени у математици примењивали у проучавању садржаја хемијске кинетике, пројекат је омогућио и успостављање посредовано примењених веза [88].

Како је моделирање реализовано у рачунарском окружењу, од значаја је била и припрема ученика за рад на рачунару у процесу моделирања, која је спроведена кроз активности у настави рачунарства и информатике, као и упознавање са опцијама, наредбама и могућностима образовног софтвера *GeoGebra* потребним за рад. На основу наведеног можемо рећи да пројекат репрезентује успостављање система међупредметне повезаности који је шематски приказан на следећој шеми.



Шема 4.1. Међупредметна корелација

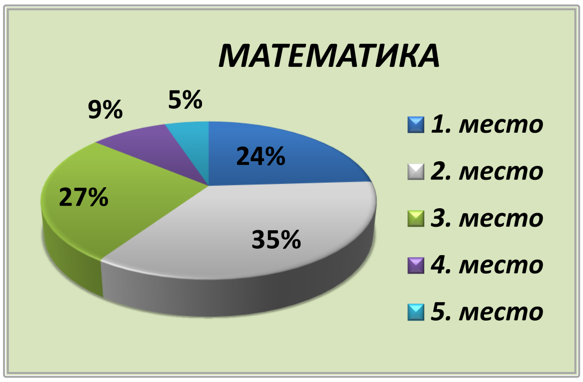
У складу са потребама и могућностима, експериментални наставни процес реализован је у трајању од девет школских часова, кроз сарадњу и кооперативни рад ученика и наставника математике, хемије и рачунарства и информатике.

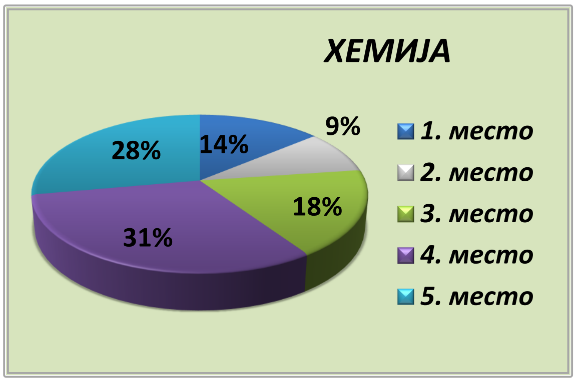
Код ученика је уочено да често имају погрешна предубеђења да је хемија наука у којој математичка знања и вештине нису неопходни. Такви ставови имају за последицу да ученици заинтересовани за математику не показују интересовања за истраживања у хемији, али и обрнуто. Ученици заинтересовани за хемију приступају математици као науци која је тешка за разумевање. Међутим, постоји велики број математички нетривијалних тема у хемији које се могу обрадити у средњошколској настави [18]. Овај пројекат, између осталог, има за циљ промену оваквих ставова код ученика.

Такође се може истаћи и глобална недовољна мотивисаност ученика за учење хемије, па је у настави потребно спроводити другачији приступ учењу и подучавању који би ишао у правцу развијања свести код ученика о значају и могућностима хемије. Овај наставни предмет један је од веома важних за даље школовање, посебно гимназијалаца, и представља важну компоненту научно-технолошког развоја друштва. У складу са савременим дидактичко-методичким концепцијама наставе, другачији приступ може се реализовати и применом математичког моделирања у изучавању хемијских појмова, појава и процеса.

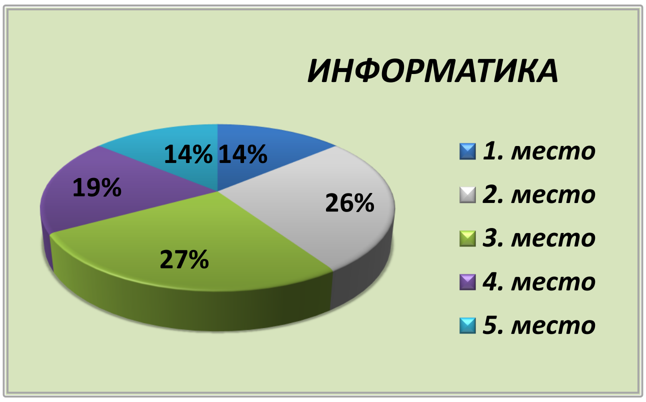
Да би се статистички утврдила мотивација ученика за изучавање појединих наставних предмета, са учесницима овог истраживања спроведена је анонимна анкета. Од ученика се тражило да рангирају предмете од 1. до 5. места према интересовању и мотивацији, односно личном примарном опредељењу. Понуђени предемети били су: математика, физика, хемија, рачунарство и информатика и остало (било који предмет који није наведен). На графикону 4.1. приказан је проценат предмета са којим је сваки означен као најомиљенији, тј. да је у рангирању заузео прво место. За математику на првом месту определио се највећи проценат ученика (27%), а за хемију као омиљени предмет определило се само 14%. Исти проценат ученика (14%) означио је информатику на првом месту. Ово је веома лош показатељ, с обзиром на чињеницу да је управо увођење информационе технологије у свакодневну наставу и примена рачунара у многим научним дисциплинама тежња савременог васпитно-образовног рада. Математика је међу два најважнија предмета код 59% ученика, хемија код 23% ученика, а информатика код 40% ученика, што је приказано на графиконима 4.2.а) и 4.2.б).

Графикон 4.1. Мотивација ученика за учење наставних предмета





Графикон 4.2.а) Мотивација ученика за учење математике и хемије



Графикон 4.2.б) Мотивација ученика за учење информатике

Хемијска кинетика је област хемије која се бави проучавањем брзине одвијања хемијских реакција. У оквиру ове области проучава се одређивање брзине хемијске реакције, утицај појединих фактора на брзину реакције и механизам одвијања реакције [61]. С обзиром на тематику којом се бави, у хемијској кинетици посебно су значајне и наглашене математичке компетенције.

4.3.1 Процес математичког моделирања

У поглављу 2.2.1 одређено је и теоријски објашњено седам етапа математичког моделирања у настави. У овом поглављу описана су два процеса моделирања која су реализована током експерименталног рада и у складу са назначеним теоријским поставкама.

4.3.1.1 Процес математичког моделирања – брзина и ред хемијске реакције

Прва етапа: реална ситуација

Разни су примери хемијских реакција које се одвијају у реалном окружењу, а сам појам хемијске реакције један је од веома важних у хемији. Ради поједностављивања, у овом раду са ученицима разматрана је реална ситуација која се односи на једноставније хемијске реакције у којима учествује један реактант и настаје један производ. У складу са наведеним, ученицима је дата табела (табела 4.1.) у којој су приказане вредности концентрације c једног реактанта, које су измерене током његове разградње у хемијској реакцији, у одређеном времену t и на одређеним температурама T [67].

Табела 4.1. Вредности концентрације реактанта у одређеном времену и на одређеним температурама

$c\ (\frac{mol}{dm^3})$					
$t\ (min)$	**$T = 25\,°C$**	**$T = 30\,°C$**	**$T = 35\,°C$**	**$T = 40\,°C$**	**$T = 45\,°C$**
0	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750
15	0.648	0.622	0.590	0.556	0.520
30	0.562	0.530	0.490	0.440	0.400
45	0.514	0.467	0.410	0.365	0.324
60	0.460	0.410	0.365	0.315	0.270
75	0.414	0.378	0.315	0.275	0.235
90	0.385	0.336	0.290	0.243	0.205

Прелаз из прве у другу етапу

Проучавање одвијања хемијских реакција укључује одређивање брзине и реда реакције, као и испитивање утицаја концентрације реактанта (која подразумева количину раствореног реактанта у јединици запремине) на брзину реакције. Уводно објашњавање и упознавање са наведеним основним појмовима којима ће се бавити процес моделирања спроводи наставник хемије са ученицима кроз разговор, без формалног дефинисања тих појмова, уз одговарајуће активности поједностављивања, а у складу са описаном реалном ситуацијом.

Друга етапа: реалан проблем

Ученицима је био постављен следећи проблем:

Одредити ред реакције, а затим одредити константу брзине реакције и време у којем реактант достиже концентрацију $c = 0.6\ \frac{mol}{dm^3}$ *на температури* $T = 25\,°C$.

Прелаз из друге у трећу етапу

У овом кораку било је потребно успоставити корелацију одговарајућег наставног садржаја из математике и хемије у циљу формалног објашњења појмова у проблему, а прилагођено математичком поступку. То је подразумевало да ученици уз помоћ наставника:

- идентификују кључне појмове који се односе на проблем и да их повежу са претходно обрађеним лекцијама, а да основу траже у знању које поседују;
- изврше математизацију, односно да постављени проблем трансформишу у математички проблем који има прецизне математичке претпоставке и услове.

У даљем излагању описана је успостављена корелација садржаја математике и хемије која је била потребна за решавање проблема, у складу са назначеним когнитивним активностима наставника и ученика.

Функција - концентрација реактанта

Искуства из праксе, као и резултати на иницијалном тесту, указују на то да ученици имају проблема са препознавањем, а посебно са разумевањем појма функције. Због тога је са ученицима поновљена формална дефиниција функције, са посебним освртом на две променљиве величине које се мењају у зависности једна од друге и у тесној су вези једна са другом. Идеја је овде даље била да се појам функције приближи и објасни ученицима и у реалном контексту који се односи на постављени проблем. Од ученика се захтевало да анализирају податке дате у табели 4.1, а затим да препознају, односно идентификују и наведу променљиве величине. Подаци су наведени тако да постоје три променљиве: време, концентрација и температура. Променљиве величине могу бити: зависно и независно променљиве, а која ће од променљивих бити зависна а која независна зависи од постављеног циља. У складу са податком који је дат у проблему ($T = 25\ °C$), ученици су направили разлику између датих величина, наводећи да се у раду може ограничити на две променљиве: време и концентрацију, а да температура буде константна. Ученици су даље једноставно успоставили однос између променљивих величина и означили време t као независно променљиву, а концентрацију c као зависно променљиву. Како вредности променљиве t припада потпуно одређена вредност друге променљиве c, тада је $\boldsymbol{c}$ **у функцији од** $\boldsymbol{t}$, симболички:

$$c = c(t). \tag{1}$$

На овај начин, ученицима је било омогућено да активно учествују у објашњењу појма функције, при чему су појединцима конфликтну ситуацију стварале ознаке t и c за променљиве. Међутим, важно је да ученици усвајају различите могућности означавања променљивих (а не само x и y). Ученици су закључили да за свако време t постоји тачно једна вредност концентрације c и претпоставили да је могуће одредити правило по којем се вредности c мењају у зависности од t. Да би прешли у следећу фазу рада, наставник је усмерио пажњу ученика и на разматрања о брзини промене концентрације у времену.

Извод функције - брзина и ред хемијске реакције

Уочено је да ученици на питање „Шта је извод функције?“ дају нетачне одговоре: „...то је број...“; „...то је резултат кад тражимо први извод преко таблица...“ Значи да ученици не разумеју довољно појам првог извода функције, а још веће потешкоће настају уколико се од њих затражи да појам извода повежу са појмом брзине. У овом кораку моделирања, идеја је била да се поред понављања формалне дефиниције првог извода ученицима садржајно и методолошки приближи овај појам, његов физички смисао и појам брзине кроз увођење појма брзине хемијске реакције.

Посматрајмо функцију која описује промене концентрације у времену. Ако се независно променљива која представља време у којем се прати концентрација промени од t до $t + \Delta t$, тада ће се и зависно променљива, тј. концентрација, променити од $\mathrm{c}(t)$ до $\mathrm{c}(t + \Delta t)$. Ту промену ученици су представили изразом:

$$\mathrm{c}(t + \Delta t) - \mathrm{c}(t). \tag{2}$$

У формалном смислу, израз се назива прираштај функције, а овде, прираштај концентрације.

Да би одредили просечну брзину промене концентрације, ученици су промену саме концентрације поделили са протеклим временом (прираштај независно променљиве):

$$\frac{\mathrm{c}(t + \Delta t) - \mathrm{c}(t)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Дакле, ученици су примењивали знања која су стекли изучавајући први извод функције и уз помоћ наставника извели закључак да израз (3) представља просечну брзину промене концентрације од $\mathrm{c}(t)$ до $\mathrm{c}(t + \Delta t)$ у времену од t до $t + \Delta t$. Другим речима, просечна брзина промене концентрације је однос промене од зависно променљиве и промене од независно променљиве.

Ученицима је јасно да је могуће одредити просечну брзину промене концентрације у неком временском интервалу. Недоумице су настале кад им је постављено питање „Како одредити ту брзину у неком тренутку t?“ За долажење до одговора на ово питање требало је сугерисати ученицима да се просечна брзина може посматрати на све краћим и краћим интервалима, што доводи до граничног процеса када $\Delta t \to 0$. Због тога је наставник подсетио ученике на примену лимеса функције, који овде (као гранична вредност количника прираштаја) може да се интерпретира као тренутна брзина промене концентрације у тренутку t. Ученици на основу описаног математичког резоновања добијају следеће:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{c}(t + \Delta t) - \mathrm{c}(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

У математици израз (4) представља дефиницију првог извода функције:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{c}(t + \Delta t) - \mathrm{c}(t)}{\Delta t} = \mathrm{c}'(t). \tag{5}$$

Кроз математизацију појмова у постављеном проблему са ученицима је поновљен поступак одређивања **првог извода функције**, уз напомену да се исти поступак може спровести и код одређивања извода било које друге функције.

Даље активности са ученицима реализоване су уз помоћ наставника хемије, где је истакнуто да добијени израз (5) представља и формалну дефиницију *брзине хемијске реакције*, која се у хемији означава:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{c}(t+\Delta t)-\mathrm{c}(t)}{\Delta t} = \mathrm{c}'(t), \qquad v = \pm\, \mathrm{c}'(t). \tag{6}$$

Брзина увек мора имати позитивну вредност, па се позитиван предзнак узима уколико се посматра промена концентрације производа (тада је $\mathrm{c}'(t) > 0$), односно негативан предзнак ако се посматра промена концентрације реактанта (тада је $\mathrm{c}'(t) < 0$), као што је случај у постављеном проблему. Како је јединица за концентрацију $\frac{mol}{dm^3}$, важи да је јединица за брзину хемијске реакције $\frac{mol}{dm^3 s}$.

Наставник хемије је затим ученике упознао са једним од основних закона хемијске кинетике на основу којег је могуће брзину реакције у којој учествују реактанти A и B представити и на следећи начин:

$$v = k c_A^m c_B^n. \tag{7}$$

Константа k назива се *константа брзине хемијске реакције*, c_A и c_B су концентрације реактаната A и B, редом. Константа брзине хемијске реакције представља вредност специфичну за одговарајућу реакцију и услове при којима се она одиграва. Експоненти m и n концентрација реактаната зависе од механизма реакције, а уколико је он једноставнији, често одговарају коефицијентима изједначене хемијске реакције.

Збир експонената концентрација свих реактаната неке хемијске реакције, назива се и *ред реакције*. Реакције су најчешће нултог, првог или другог реда (мада постоје и трећег, четвртог,..., n-тог реда, али су веома ретке). Јединица за константу брзине хемијске реакције износи: $\frac{mol^{1-r}}{dm^{3-3r}s}$, $r = m + n$, јер јединица за брзину хемијске реакције ма ког реда увек износи $\frac{mol}{dm^3 s}$.

Како брзина реакције која се испитује у процесу моделирања у нашем случају зависи само од једног реактанта, чија је концентрација означена са c, из (7) следи:

$$v = k c^m, \tag{8}$$

тако да је m одговарајући експонент који уједно представља и *ред хемијске реакције* ([61][67]).

Како се у постављеном проблему прати промена концентрације реактанта, где концентрација опада са временом, ученици су повезали изразе (6) и (8), тако да су добили нови израз:

$$\mathrm{c}'(t) = -k(\mathrm{c}(t))^m, \text{ или скраћено } \mathrm{c}' = -k\mathrm{c}^m. \tag{9}$$

То значи да за [67]:

- реакцију нултог реда ($m = 0$) важи да је брзина хемијске реакције константна;
- реакцију првог реда ($m = 1$) важи да је је брзина хемијске реакције пропорционална концентрацији реактанта;
- реакцију другог реда ($m = 2$) важи да је је брзина хемијске реакције пропорционална квадрату концентрације реактанта.

Како у изразу (9) не фигурише температура, било је оправдано сматрати је у овом проблему константном величином, па се и ред реакције може одредити на било којој температури. У процесу моделирања биће и експериментално потврђено да температура не утиче на ред реакције, што је уз рачунарску подршку веома једноставно.

Даље активности укључиле су осмишљавање и планирање рада, а у циљу конструкције математичког модела у рачунарском окружењу. Ученици су реалан проблем прилагодили математичким садржајима, дали му математичко значење и смисао, тако да је већина ученика могла да предвиди да ће математички модел бити дат као функција, тако да најбоље одговара подацима из табеле 4.1. (за $T = 25\ °C$) [33] и представља правило по којем се концентрација реактанта смањује.

Ученици су предложили да се одреди функција која описује зависност концентрације c од времена t, међутим било је неопходно да наставник пружи одговарајуће видове помоћи, сугестије и смернице, па је тако сугерисано ученицима да испитају предложену линеарну зависност, али и линеарну зависност природног логаритма концентрације lnc, као и реципрочне вредности концентрације $\frac{1}{c}$ од времена t. Рад са линеарним функцијама позитивно утиче на активности ученика, зато што су им те функције познате од раније, а у њиховој анализи могу да учествују и слабији ученици. У складу са наведеним, после дискусије о могућим поступцима и математичким методама, уз потребну одговарајућу креативност у раду, ученици су приступили конструкцији три математичка модела [36]. На почетку конструкције, појединим ученицима је представљало проблем како да организују податке из табеле 4.1, а прилагођено постављеним захтевима, посебно зато што су морали да воде рачуна о томе да ће у другом и трећем моделу вредности за lnc, односно $\frac{1}{c}$ представљати зависно променљиве, а не c као у првом моделу.

Такође, наставник је ученицима скренуо пажњу на мали интервал на којем се посматрају добијене вредности концентрације c, а што произилази из природе представљене реалне ситуације.

Конструкција првог модела. Ученици су користили табеларни приказ и у табелу унели вредности независно промењиве (време t) и зависно промењиве (концентрација c). Затим су на основу тих података формирали листу тачака, користећи наредбу *NapraviListu*. Листи тачака је додељен графички приказ, вредности времена биле су на апсциси, а вредности концентрације на ординати. Даље су приступили „фитовању кривих“ [33] и добили линеарну функцију, користећи наредбу *FitLinearni*, зато што је одлучено да ће се испитивати линеарна зависност.

Конструкција другог модела. Ученици су користили табеларни приказ и у табелу унели вредности времена t као независно промењиве, али су приликом конструкције овог модела као зависно промењиву величину посматрали вредности природног логаритма концентрације lnc. Затим су, у складу са овим подацима, поновили поступак који је примењен за конструкцију првог модела и добили другу линеарну функцију.

Конструкција трећег модела. Спроведена је аналогно конструкцији претходна два модела, с том разиком што су ученици, када су користили табеларни приказ, у табелу унели податке тако да су вредности времена t представљале независно промењиву, а реципрочне вредности концентрације $\frac{1}{c}$ зависно промењиву величину, и тако добили трећу линеарну функцију.

Ученици су имали проблем код формирања листе тачака, зато што се тачке нису виделе у координатном систему, па је било потребно прилагодити га реалним подацима, а што је у рачунарском окружењу било веома једноставно.

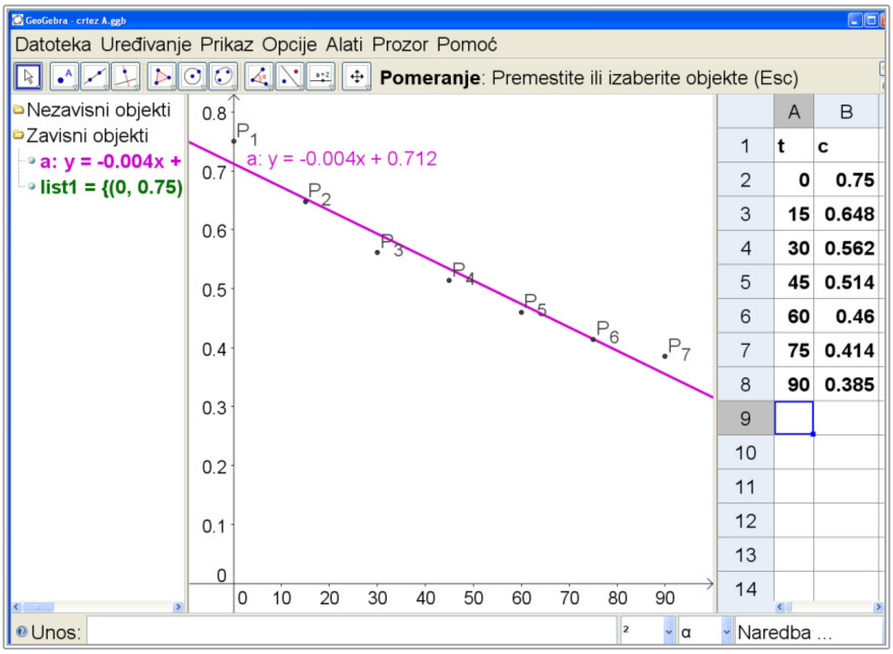
Примењујући поступак који је спроведен и овде објашњен, ученици су у оквиру домаћег рада самостално конструисали први, други и трећи модел према подацима који су дати у табели 4.1. и на тепературама: $T = 30\ °C, T = 35\ °C, T = 40\ °C$ и $T = 45\ °C$.

Трећа етапа: математички модел

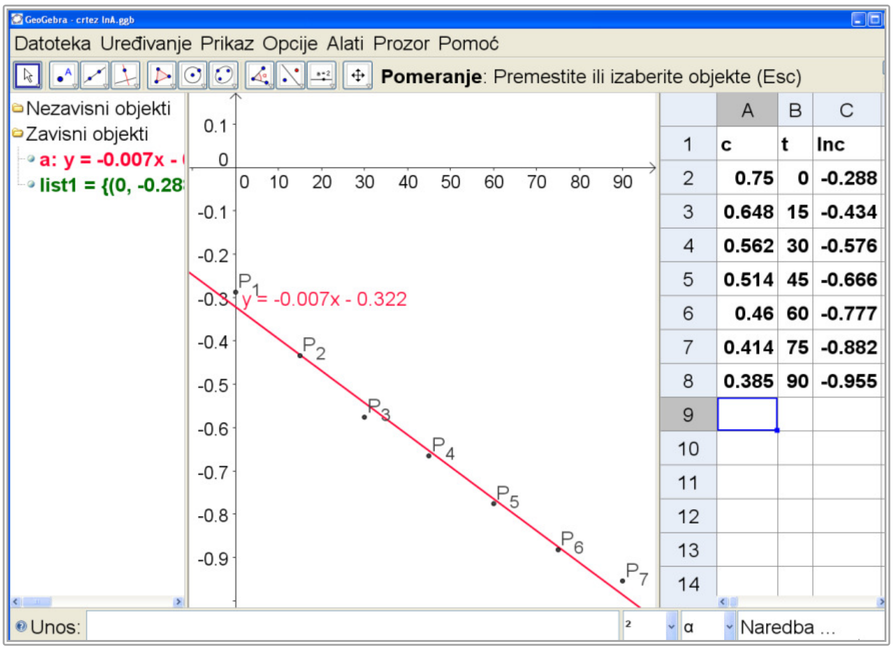
Први модел. Ученици су на основу описаног рада у рачунарском окружењу добили линеарну функцију, чији је аналитички израз $y = -0.004x + 0.712$ добијен у алгебарском прозору и прилагођен уведеним ознакама за промењиве: $c = -0.004t + 0.712$, а график у геометријском прозору *GeoGebra*-е. Ова линеарна функција представља први математички модел, приказан на слици 4.1.

Други модел. Ученици су добили линеарну функцију, чији је аналитички израз $y = -0.007x - 0.322$, односно $lnc = -0.007t - 0.32$, у складу са назначеним промењивим величинама. Ова линеарна функција представља други математички модел, приказан на слици 4.2.

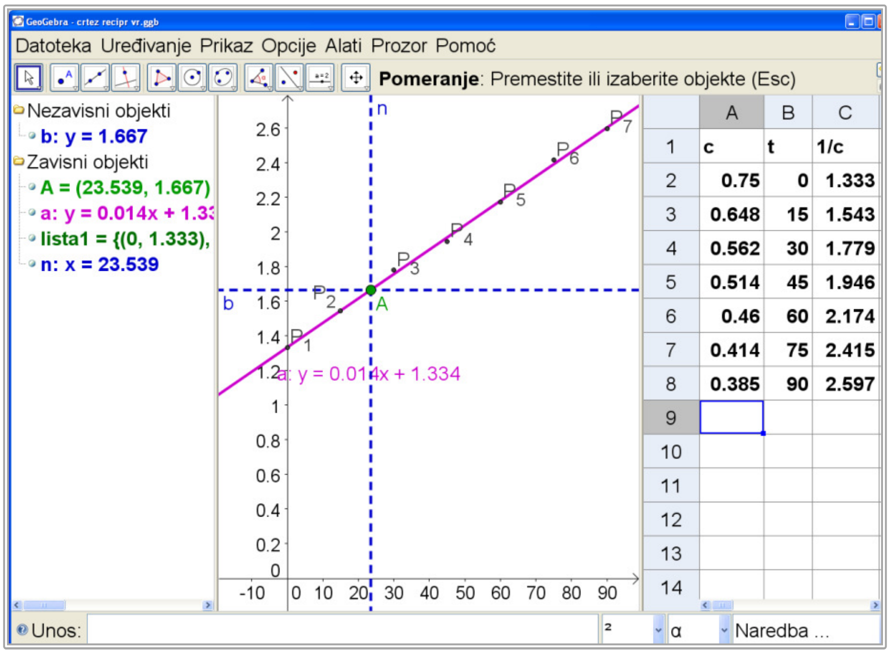
<u>*Трећи модел*</u>. Добијена линеарна функција, чији је аналитички израз $y = 0.014x + 1.334$, односно $\frac{1}{c} = 0.014t + 1.334$, представља трећи математички модел, приказан на слици 4.3.



Слика 4.1. Примена GeoGebra-е у процесу моделирања-први математички модел



Слика 4.2. Примена GeoGebra-е у процесу моделирања-други математички модел



Слика 4.3. Примена GeoGebra-е у процесу моделирања-трећи математички модел

Да би дошли до математичких модела у трећој етапи, било је важно да ученици у претходним корацима знају правилно да унесу податке који се односе на променљиве. Такође, уз помоћ рачунара, ученици су били у могућности да примене три начина задавања функције. Приликом формирања табеле вредности променљивих, ученици су представили функцију табеларно, након фитовања следило је графичко представљање функције у геометријском прозору *GeoGebra*-е, док је у алгебарском прозору добијен аналитички израз функције која представља математички модел.

Прелаз из треће у четврту етапу

Прелаз из треће у четврту етапу подразумевао је математички рад, резоновање и аргументовање у циљу решавања проблема, што је захтевало примену математичког знања, али и омогућило његово продубљивање.

Линеарна зависност концентрације, природног логаритма концентрације, односно реципрочне вредности концентрације од времена представљена је следећим аналитичким изразима:

први модел $c = a_1 t + b_1; \quad a_1, b_1 = const; \quad c = -0.004t + 0.712;$

други модел $lnc = a_2 t + b_2; \quad a_2, b_2 = const; \quad lnc = -0.007t - 0.322;$

трећи модел $\frac{1}{c} = a_3 t + b_3; \quad a_3, b_3 = const; \quad \frac{1}{c} = 0.014t + 1.334 .$

С обзиром на чињеницу да је приликом конструкције модела извршена линеаризација проблема, наставник је са ученицима спровео дискусију о добијеним линеарним функцијама.

Ученицима је од раније познато да линеарна функција пресликава скуп R на скуп R. Међутим, у складу са реалним контекстом проблема и на основу добијених модела, ученици су закључили да за сва три модела мора да важи услов $t \geq 0$, док c и $\frac{1}{c}$ узимају вредности из скупа R^+ (реактант никада не нестаје у потпуности, па c не може бити једнако 0), а lnc има вредности из скупа R^-.

Поједини ученици навели су да се нуле датих функција могу добити за $t = \frac{-b_i}{a_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, док су други, узимајући у обзир наведено, сматрали да је потпуно оправдано што на сликама нису нацртали пресек са x-осом, c, lnc и $\frac{1}{c}$ не могу бити једнаки 0.

Било је важно да се са ученицима утврди шта је коефицијент правца и одсечак на y-оси праве која је график дате функције. Овде су ученици показали највише несигурности у знању. Даље се развијала дискусија о томе како коефицијент правца праве утиче на монотоност функције. Ако је $a_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, функција ће бити монотоно растућа, а за $a_i < 0$, монотоно опадајућа. Закључак је био да су прва и друга добијена функција монотоно опадајуће, а трећа монотоно растућа. Неки ученици су затим правилно дефинисали одсечак на y-оси: „то је вредност зависно промењљиве када је независно промењљива једнака 0“. Ако је c_0 концентрација на почетку реакције, када је $t = 0$, онда је за посматране функције према теорији: $b_1 = c_0$, $b_2 = lnc_0$ и $b_3 = \frac{1}{c_0}$. Овде је требало нагласити да у пракси, у моделима, тачка чија друга координата представља експериментално добијени податак у тренутку $t = 0$ не мора нужно припадати графику функције која је резултат фитовања.

Како је на основу модела било потребно одредити ред реакције који је у вези са брзином, а математички са првим изводом, ученици су уз помоћ сугестивних питања наставника поставили следећи помоћни задатак.

Одредити први извод по c, $c = c(t)$, функција које су добијене у процесу моделирања. Напреднији ученици долазе до тачних решења:

а) ако је $c = a_1 t + b_1$, онда је $c' = a_1$;
б) ако је $lnc = a_2 t + b_2$, онда је $\frac{1}{c} c' = a_2$, одакле следи да је: $c' = a_2 c$;
в) ако је $\frac{1}{c} = a_3 t + b_3$, онда је $\frac{-1}{c^2} c' = a_3$, одакле следи да је: $c' = -a_3 c^2$; $a_i, b_i = const.$

Одређивање првог извода под а) ученицима није представљало проблем, док су мањих потешкоћа имали приликом решавања задатка под б) и в).

Даље су ученици дискутовали која од добијене три функције најбоље одговара датим подацима. „...Види се са графика да је то функција која представља трећи модел...“, ово је био најчешћи коментар. Међутим, визуелна метода није довољан аргумент за елиминацију прве и друге добијене функције. Због тога је наставник указао ученицима на опцију *Rsquare* која постоји у *GeoGebra*-и и која представља вид статистичког теста који проверава колико дате тачке одговарају графику функције, рачунајући коефицијент детерминације (R^2) чије су вредности у распону од 0 до 1. Што тачке више одговарају графику функције која описује врсту зависности, вредност коефицијента детерминације ближа је 1 [51]. Примена наредбе такође омогућава и да се ученици упознају са могућностима *GeoGebra*-е које се односе на употребу статистичких опција и наредби уграђених у софтверу. Ученицима је на овај начин истакнут и значај примене математичке статистике, која може да има веома важну улогу у решавању проблема моделирањем. Ученици су затим израчунали R^2 за сваки модел и добили следеће вредности:

први модел: $R^2 = 0.962$; други модел: $R^2 = 0.990$; трећи модел: $R^2 = 0.999$.

Како је коефицијент детерминације израчунат за трећи модел најближи 1 у односу на друга два, ученици долазе до математичког решења:

$$\frac{1}{c} = 0.014t + 1.334.$$

Коефицијент правца праве која представља график функције добијене приликом конструкције трећег модела износи $a_3 = 0.014$.

Први извод ове функције је:

$$c' = -a_3c^2 = \frac{-0.014}{(0.014t + 1.334)^2},$$

што значи да се брзина промене вредности концентрације, односно брзина хемијске реакције може представити следећим изразом:

$$v = -c' = a_3c^2 = \frac{0.014}{(0.014t + 1.334)^2}.$$

У циљу решавања проблема, ученици су даље требали да реше једначину:

$$\frac{1}{0.6} = 0.014t + 1.334.$$

Неки ученици су до решења дошли на класичан начин:

$$1.667 = 0.014t + 1.334 \;\Rightarrow\; t = 23.786.$$

Други ученици су користили трећи математички модел за решавање једначине. Они су на графику функције одредили тачку *A* коју су добили у пресеку графика функције и праве $y = 0.6^{-1}$. Тачка A добијена је применом наредбе *Preseci*[1/0.6,*funkcija*], а у алгебарском прозору добијене су координате тачке $A(23.539\ , 1.667)$. Решење је апсциса тачке A, односно ови ученици добили су да је $t = 23.539$ (слика 4.3).

Аналогним резоновањем и математичким аргументовањем као што је овде назначено, ученици су у оквиру домаћег рада конструисали први, други и трећи модел и дошли до одговарајућих математичких решења и на температурама: $T = 30\ °C$, $T = 35\ °C$, $T = 40\ °C$ и $T = 45\ °C$.

Четврта етапа: математичко решење

Ученици су записивали своје резултате које су добили математичким радом на моделима.

Прелаз из четврте у пету етапу

На прелазу из четврте у пету етапу било је потребно утврдити на који начин математички модели одговарају објашњеним појмовима у хемији и на који начин се може доћи до решења реалног проблема. Математичка решења до којих су дошли одређивањем првог извода анализираних функција, ученици су исказали на следећи начин:

а) брзина промене концентрације је константна;
б) брзина промене концентрације је сразмерна вредности концентрације;
в) брзина промене концентрације је сразмерна квадрату вредности концентрације.

Математичким радом и на основу добијених резултата, а у складу са назначеном теоријом из хемије, ученици су извели и одговарајућа уопштавања:

- Реакција је нултог реда ако експериментални подаци следе законитост
$c = a_1 t + c_0$, где је $a_1 = -k$ (k константа брзине реакције).
- Реакција је првог реда ако експериментални подаци следе законитост
$lnc = a_2 t + lnc_0$, где је $a_2 = -k$ (k константа брзине реакције).
- Реакција је другог реда ако експериментални подаци следе законитост
$\frac{1}{c} = a_3 t + \frac{1}{c_0}$, где је $a_3 = k$ (k константа брзине реакције).

Математичким радом на конструисаним моделима, ученици су такође могли да потврде да ред реакције не зависи од температуре на којој се реакција одвија, зато што експериментални подаци на свим температурама следе исту законитост.

Пета етапа: решење реалног проблема

Након поступног и систематичног рада који је подразумевао примену математичких знања, али и знања из хемије и одговарајућих компетенција, уз адекватну помоћ и подршку наставника, ученици су дошли до решења реалног проблема:

- *Хемијска реакција за коју су дати подаци у табели 4.1. је другог реда, независно од тога на којој се температури одвија.*
- *Константа брзине ове хемијске реакције на температури од 25˚C износи* $0.014\ \frac{dm^3}{mol\,min}$.
- *Реактант достиже концентрацију од 0.6* $\frac{mol}{dm^3}$ *на температури од 25˚C после приближно* 23.5 *минута од почетка реакције.*

Прелаз из пете у шесту етапу

Ученици су анализирали кораке у раду, разматрали да ли су правилно применили математичка знања и проверавали добијена решења. У циљу прихватања функције $\frac{1}{c} = 0.014t + 1.334$ као математичког модела постављеног реалног проблема, ученици нису узимали у обзир део графика функције за негативне вредности независно променљиве (слика 4.3), јер би то значило да се промена концентрације реактанта прати и за негативне вредности времена, што није могуће. У том смислу, узимала се у обзир рестрикција добијене функције: $\frac{1}{c} = 0.014t + 1.334, t \geq 0$, у складу са условом који је одређен у претходним корацима. Прихватање функције као модела датог реалног проблема следило је и на основу статистичког теста који је спроведен, односно израчунавања коефицијента детерминације R^2 за сваки модел.

Шеста етапа: евалуација

На основу изложеног, и након консултација са наставником хемије о добијеним решењима, модел је прихваћен. Ученици су презентовали своје резултате рада, где су описали и објаснили цео процес моделирања са критичким освртом на лични рад и ангажовање, али и рад других ученика, као и на рад и сарадњу наставника, а коначну евалуацију су реализовали наставник математике и наставник хемије.

Прелаз из шесте у седму етапу

За ученике је овакав начин рада био нов и знатно другачији од традиционалне наставе, тако да је наставник заједно са ученицима поново указао на релевантне одреднице моделирања које су посебно истакнуте током писања извештаја. Одређене су најзначајније математичке идеје, кораци у раду и резултати.

Седма етапа: извештај

Током рада, ученици су водили белешке и све записивали у своје свеске, а извештај у сређеној верзији представљен је у овом излагању.

4.3.1.2 Процес математичког моделирања – утицај температуре на брзину хемијске реакције

Прва етапа: реална ситуација

У процесу математичког моделирања који је описан у претходном поглављу, ученици су одредили ред једне једноставније хемијске реакције. У другом процесу моделирања, реална ситуација је такође била усмерена на посматрану реакцију за коју су дати подаци у табели 4.1, у којој учествује један реактант и настаје један производ (*реактант→производ*).

Прелаз из прве у другу етапу

Решавање проблема у процесу моделирања који је описан у претходном поглављу доводи до закључка да се брзина хемијске реакције смањује уколико се концентрације реактанта смањују. Међутим, моделиран је један систем под константним условима, како би константа брзине хемијске реакције била стална и могла се одредити за одређену реакцију при тим условима. Ипак, константа брзине хемијске реакције је вредност зависна од природе реактанта, присуства катализатора и температуре. У зависности од природе реактанта, односно, од хемијске реакције која се посматра, константа брзине има различите вредности за различите реакције. Уколико се у систем уведе катализатор, брзина хемијске реакције се повећава у зависности од додатог катализатора. Коначно, постоји значајна зависност брзине хемијске реакције од температуре. Примера ради, магнезијум у систему са хладном водом реагује врло споро. Уколико се магнезијум уведе у топлу воду, реакција настајања магнезијум-хидроксида и водоника је приметно бржа. Дакле, са порастом температуре, примећен је и пораст брзине реакције ([61][67]). Иако је та законитост уочена, потребно је одредити на који се тачно начин мења брзина са променом температуре.

Како се на различитим температурама одвијају и различити судари молекула реактанта, могуће је одредити и фактор фреквенције који описује фреквентност тих судара у току посматране реакције. Да би се реакција одиграла, молекулима реактанта потребно је довести одређену енергију, односно енергију активације [67], чија се вредност такође може одредити у току процеса моделирања. Увођење нових појмова који ће бити обрађени у процесу моделирања спровео је наставник хемије кроз разговор са ученицима.

Друга етапа: реалан проблем

Ученицима је био постављен следећи проблем:

Испитати утицај температуре на брзину реакције, а затим за дату хемијску реакцију одредити фактор фреквенције и енергију активације.

Прелаз из друге у трећу етапу

Постављени проблем захтевао је кооперативни рад ученика и наставника математике и хемије који је био усмерен на испитивање утицаја температуре на брзину реакције, са којом је у непосредној вези и њена константа, са циљем да се прецизирају и утврде математичке компетенције и знања ученика потребна за решавање проблема. Активности ученика у овом делу процеса биле су усмерене у правцу прилагођавања реалног проблема математичким садржајима, користећи потребне претпоставке, формулације и друго. Заједнички рад наставника и ученика односио се на:

- идентификацију и опис неопходних математичких поступака у контексту постављеног реалног проблема;
- формулацију и визуелизацију компоненти проблема са различитих аспеката;
- превођење реалног проблема у математички.

Реализација назначених когнитивних активности омогућила је овде успостављање следећа два корелацијска низа:

- експоненцијална функција - утицај температуре на брзину реакције (Аренијусова једначина);
- основна својства логаритма - Аренијусова једначина (логаритамски облик).

Експоненцијална функција - утицај температуре на брзину реакције

Од свих могућих база a које можемо користити за експоненцијалну функцију $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, испоставља се да се база *e* користи чешће него све остале базе заједно. Разлог је тај што формуле и резултати неких процеса које проучавају математичка анализа и друга подручја више математике попримају најједноставнији облик ако се користи баш та база [3]. Број *e* се врло често среће као основа у експоненцијалним функцијама које се интензивно користе у моделирању и решавању великог броја проблема из стварног света, што је случај и у нашем процесу моделирања. Због тога је овде утврђивање и проширивање знања ученика било усмерено на **експоненцијалну функцију** облика:

$$y = e^x, \tag{10}$$

а затим:

$$y = pe^{qx};\ p, q \in R, \tag{11}$$

што је детаљно посебно објашњено у следећој глави дисертације.

Даље је било потребно да се објашњени математички појмови повежу у наставном низу са одговарајућим појмовима из хемије, чиме је истакнута методичка оправданост спроведене анализе експоненцијалне функције.

На часу хемије, наставник је ученицима навео да се зависност температуре и константе брзине реакције може представити на следећи начин [67]:

$$k = Ae^{\frac{-E_a}{RT}}. \tag{12}$$

Овај израз се у хемији назива Аренијусова једначина, где је k константа брзине реакције, A фактор фреквенције који зависи од учесталости судара молекула током хемијске реакције, R универзална гасна константа ($8.314\, JK^{-1}mol^{-1}$), T температура изражена у келвинима, а E_a енергија активације која представља количину енергије коју је потребну довести молекулима како би се хемијска реакција одиграла и својствена је свакој реакцији понаособ.

Како свакој температури припада потпуно одређена вредност константе, ученици су Аренијусову једначину која описује зависност темературе и константе брзине реакције повезали са аналитичким изразом експоненцијалне функције дате под (11). То су представили на следећи начин:

$$k = pe^{q\frac{1}{T}}, p = A\,, q = -\frac{E_a}{R}. \tag{13}$$

Да би Аренијусову једначину у потпуности прилагодили анализираном облику експоненцијалне функције (11), ученици су означили константу брзине реакције као зависно промењљиву, а реципрочну вредност температуре као независно промењљиву, такође и зато што ученици у раду много лакше прихватају експоненцијалну функцију облика $y = pe^{qx}$, него функцију облика $y = pe^{q\frac{1}{x}}$.

У претходном процесу моделирања, ученици су помоћу математичког модела одредили константу брзине реакције на основу добијених података о концентрацијама реактанта на одређеној температури. Међутим, поставља се следеће питање: Ако су нам у изразу (12) познате величине T, односно $\frac{1}{T}$, и k, како одредити параметре A и E_a?

- Уз помоћ рачунара могуће их је веома једноставно одредити: фитовањем се добија функција облика $y = pe^{qx}$, односно $k = pe^{q\frac{1}{T}}$, која најбоље одговара улазним вредностима за $\frac{1}{T}$ и излазним вредностима за k, одакле следе вредности за p и q, односно A и E_a.
- Ученике је потребно упознати и са другим математичким поступком израчунавања ових параметара, који у раду не подразумева нужно рачунарску подршку. То је могуће свођењем Аренијусове једначине на логаритамски облик, што је захтевало примену одговарајућих математичких знања, тако да је у наставном процесу добијен други корелацијски низ.

Основна својства логаритма - Аренијусова једначина (логаритамски облик)

На основу резултата иницијалног истраживања, дошло се до закључка да ученици располажу слабим знањем о логаритамској функцији и да садржаји који се односе на овај математички појам нису усвојени ни у квалитативном ни у квантитативном смислу. Детектовани лоши резултати на иницијалном тесту иницирали су додатни рад наставника математике са ученицима, у циљу понављања, утврђивања и проширивања знања о назначеној функцији и основним особинама логаритма. Са ученицима су спроведене веома важне, али и захтевне и сложене активности, а реализовани рад детаљно је посебно објашњен у следећој глави дисертације.

Реализација ових активности позитивно је утицала на усвајање суштинског знања о **логаритамској функцији** и **логаритмима**, а у даљем експерименталном раду већи број ученика знао је правилно да примени особине логаритма, односно правила логаритмовања на израз који представља Аренијусову једначину, у складу са уведеним ознакама: $k = pe^{q\frac{1}{T}}$, тако да су добили:

$$lnk = ln\, pe^{q\frac{1}{T}},$$

односно

$$lnk = q\,\frac{1}{T} + ln\, p. \tag{14}$$

Добијени израз представља логаритамски облик Аренијусове једначине, а како је $p = A$ и $q = -\frac{E_a}{R}$, израз се може записати и на следећи начин:

$$lnk = -\frac{E_a}{R}\frac{1}{T} + ln\, A. \tag{15}$$

Ако су експерименталним методом добијене вредности за k_1 и k_2 на температурама T_1 и T_2, тада на основу (14) важи:

$$\begin{gathered} ln\, k_1 = q\,\frac{1}{T_1} + ln\, p, \\ ln\, k_2 = q\,\frac{1}{T_2} + ln\, p. \end{gathered} \tag{16}$$

Одузимањем друге једначине од прве, ученици су добили следеће:

$$ln\frac{k_2}{k_1} = \frac{q(T_1 - T_2)}{T_1T_2}, \quad ln\frac{k_2}{k_1} = \frac{-\frac{E_a}{R}(T_1 - T_2)}{T_1T_2}, \tag{17}$$

одакле је могуће израчунати вредност параметра q, тј. $-\frac{E_a}{R}$, а самим тим и E_a, зато што у изразу не фигурише параметар p, тј. A. Даље је могуће, из једне од једначина у систему (16), израчунати и p, односно A.

Током експерименталног рада који је описан у претходном поглављу, утврђено је да је посматрана реакција заправо реакција другог реда. Ученицима је такође познато да константа брзине реакције зависи од температуре на којој се реакција одвија. Због тога су у даљем раду ученици користили резултате до којих су дошли у претходном процесу моделирања, где су конструисали трећи модел за сваку температуру дату у табели 4.1. посебно, и помоћу тих модела одредили константе брзине k_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ на датим температурама. Затим су температуре претворили у Келвине, а добијене константе брзине у $\frac{dm^3}{mols}$, што је приказано у табели 4.2.

Табела 4.2. Вредности коефицијента k на различитим температурама

Редни број мерења	Температура T (K)	Константа $k(\frac{dm^3}{mols})$
1.	298.15	0.000233
2.	303.15	0.000300
3.	308.15	0.000400
4.	313.15	0.000516
5.	318.15	0.000650

Ученици су имали два приступа конструкцији математичког модела (у даљем тексту четврти и пети модел) који најбоље одговарају подацима из табеле 4.2, а у складу са одређеним теоријским поставкама.

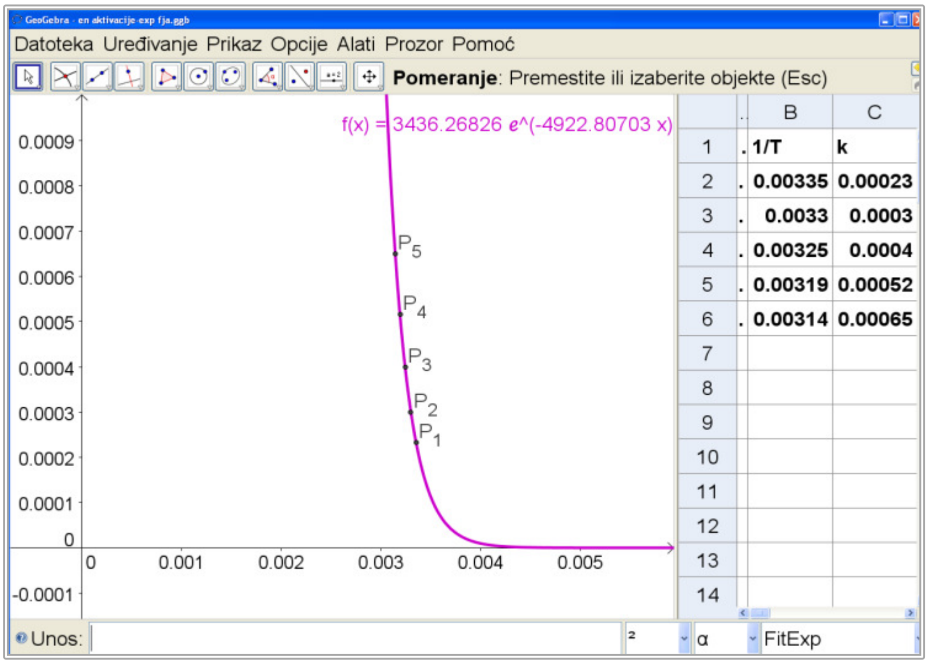
Конструкција четвртог модела. Једна група ученика користила је табеларни приказ, тако да су у табелу прво унели вредности температуре T, затим израчунали одговарајуће реципрочне вредности $\frac{1}{T}$ и унели вредности константе брзине k. Затим су формирали листу тачака, користећи наредбу *NapraviListu*, вредности $\frac{1}{T}$ посматрали су као независно промењиве величине, а вредности k као зависно промењиве. Листи тачака доделили су графички приказ и приступили фитовању. На основу теоријских разматрања реалног проблема, ова група ученика је за фитовање користила наредбу *FitExp*.

Конструкција петог модела. Друга група ученика примењивала је сличан поступак у конструкцији модела, с том разликом што су ови ученици у табели рачунали и вредности природног логаритма константе брзине lnk, а затим их означили као зависно промењиве. Када су формираној листи доделили графички приказ, ученици ове групе приступили су фитовању, али користећи наредбу *FitLinearni.*

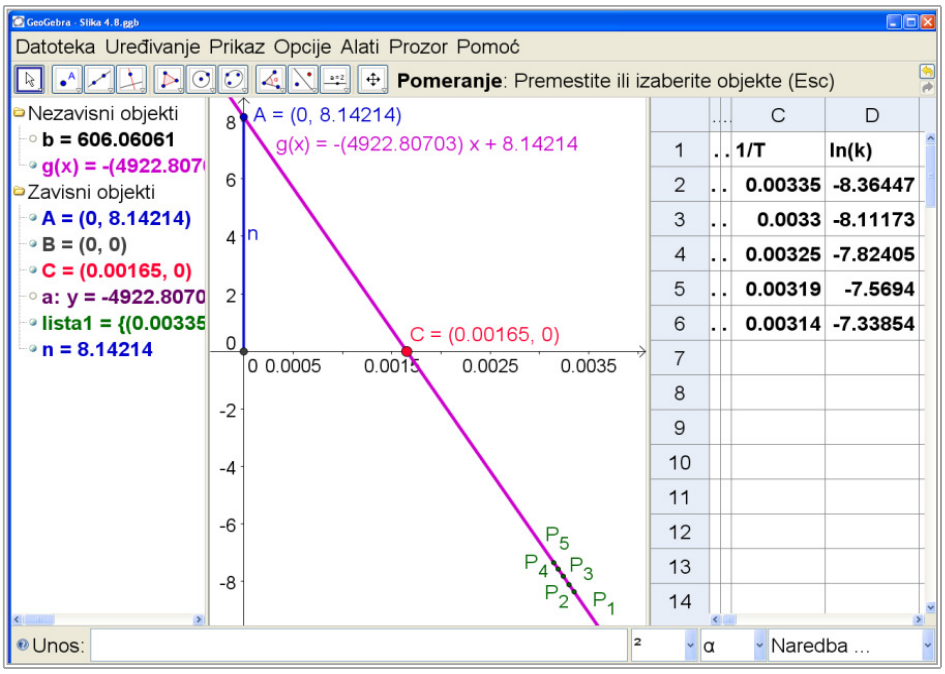
Трећа етапа: математички модел

Четврти модел. На основу првог приступа конструкцији модела, ученици су добили експоненцијалну функцију чији је аналитички израз $y = 3436.26826\, e^{-4922.80703\, x}$ добијен у алгебарском прозору и прилагођен дефинисаним променљивим величинама: $k = 3436.26826\, e^{-4922.80703 \frac{1}{T}}$, а график у геометријском прозору *GeoGebra*-е. Ова експоненцијална функција представља четврти модел који је приказан на слици 4.4.

Пети модел. Добијена линеарна функција представља пети модел, приказан на слици 4.5. Аналитички израз ове функције, добијен у алгебарском прозору, гласи: $y = -4922.80703x + 8.1421$, а прилагођен уведеним ознакама: $lnk = -4922.80703 \frac{1}{T} + 8.14214$. Графички приказ функције ученици су добили у геометријском прозору *GeoGebra*-е.



Слика 4.4. Примена GeoGebra-е у процесу моделирања-четврти математички модел



Слика 4.5. Примена GeoGebra-е у процесу моделирања-пети математички модел

На основу ових модела, ученици су даље математичким радом требали да дођу до решења проблема. Важно је истаћи да добијени модели и њихова конструкција подстичу ученике и на визуелно резоновање о проблему, али и о наставним садржајима који су теоријски обрађени, као и о успостављеној вези између изучаваних научних појмова. На овај начин, визуелизација може у великој мери да олакша рад ученицима, што директно утиче на процес учења и усвајања знања.

Прелаз из треће у четврту етапу

У даљем раду било је потребно да ученици примене знања о основним особинама логаритма, линеарној и експоненцијалној функцији, као и компетенције усмерене на испитивање својстава ових функција.

Ученици који су конструисали четврти модел анализирали су добијену експоненцијалну функцију, чији је аналитички израз:

$$k = 3436.26826\, e^{-4922.80703\frac{1}{T}}.$$

На основу модела, и у складу са реалним контекстом проблема, ученици су овде навели да T (а самим тим и $\frac{1}{T}$) и k узимају вредности из скупа R^{+}.

Већина ученика је правилно закључила да функција нема нуле. Појединцима се чинило да се на њиховој слици део графика функције поклапа са делом x-осе, што им је представљало конфликтну ситуацију, али је за добијену функцију x-оса хоризонтална асимптота.

Посматрани аналитички израз ученици су повезали са изразом (13) и тако одредили одговарајуће параметре: $p = 3436.26826$ и $q = -4922.80703$. Како је $p > 0$ и $q < 0$, али и на основу визуелног резоновања, ученици су дошли до закључка да је функција монотоно опадајућа.

Ученици који су конструисали пети модел анализирали су добијену линеарну функцију, чији је аналитички израз:

$$lnk = -4922.80703\frac{1}{T} + 8.14214.$$

Анализа ове функције ученицима није представљала проблем. Сличан поступак спроведен је и при решавању проблема у претходном процесу моделирања.

И овде T (а самим тим и $\frac{1}{T}$) може узимати вредности само из скупа R^+, док су вредности lnk из R.

Нулу функције ученици су добили у пресеку графика функције и x-осе, што су уз помоћ рачунара одредили веома прецизно (тачка C на слици 4.5). То значи да је $lnk = 0$ када је $\frac{1}{T} = \frac{-8.14214}{-4922.80703} = 0.00165$, односно да за $T = \frac{1}{0.00165} = 606.06061$ следи $k = e^0 = 1$.

Аналитички израз ове функције ученици су повезали са изразом (14) и израчунали коефицијент правца праве $q = -4922.80703$, а како је $q < 0$, функција је монотоно опадајућа. Ученици су даље одредили одсечак на y-оси, који је овде $lnp = 8.14214$, и на основу добијеног податка израчунали и p, $p = e^{8.14214} = 3436.26361$.

Четврта етапа: математичко решење

Решења до којих су ученици дошли математичким радом на моделима су $p = 3436.26826$ (односно $p = 3436.26361$) и $q = -4922.80703$, а како важи да је $p = A$ и $q = -\frac{E_a}{R}$, коначно следи $A = 3436.26826$ (односно $A = 3436.26361$) и $E_a = 40928.217$.

Прелаз из четврте у пету етапу

На прелазу са математичког решења на решење реалног проблема, ученици су спроводили активности тумачења, интерпретације резултата и извођења закључака у контексту реалног проблема. Ученици су извели и одговарајућа уопштавања, која су била у пуној сагласности са обрађеном теоријом. Описани приступ омогућио је ученицима да помоћу модела проучавају реалан процес и теорије које се на њега односе и да кроз моделирање, које је примењено на конкретну ситуацију-процес, прикажу општу теорију и провере је на делу.

Пета етапа: решење реалног проблема

Ученици су исказали решења постављеног реалног проблема, уз сугестије наставника да воде рачуна и о мерним јединицама (којима у математичком раду нису придавали пажњу):

- *Брзина реакције експоненцијално расте са порастом температуре.*
- *Фактор фреквенцијехемијске реакцијеза коју су дати подаци у табели 4.1. износи приближно* $3436.3\,\frac{dm^3}{mol\,\mathbf{s}}$.
- *Енергија активације за ову реакцију износи приближно* $40.9kJ$.

Прелаз из пете у шесту етапу

У овом кораку моделирања, ученици су уз помоћ наставника утврдили да ли су у току процеса адекватно применили раније стечена знања из математике, али и знања из хемије о новим појмовима које су дефинисали у почетним корацима моделирања. Ученици су такође дискутовали о добијеним решењима проблема и истакли да се радом на оба модела долази до истих решења. Због тога су овде биле од значаја активности које су ученици спроводили, као што су процењивање, упоређивање и верификовање модела. Применом основних особина логаритма, као што је размотрено и наведено на прелазу из друге у трећу етапу моделирања, ученици су могли једноставно да конвертују један модел у други. Сви су се сложили да се за $T \geq 0$ обе функције могу прихватити као математички модели реалног проблема.

Шеста етапа: евалуација

Као и у претходном процесу моделирања, спроведене су консултације са наставником хемије, тако да су модели били прихваћени. Посебно је истакнута предност примене математичког моделирања у односу на спровођење експеримента: промене брзине реакције у зависности од температуре у експерименталном окружењу могу се пратити само за неке одређене вредности температуре. Ове промене се у математичком моделу могу пратити и на бесконачно великим и на бесконачно малим температурама.

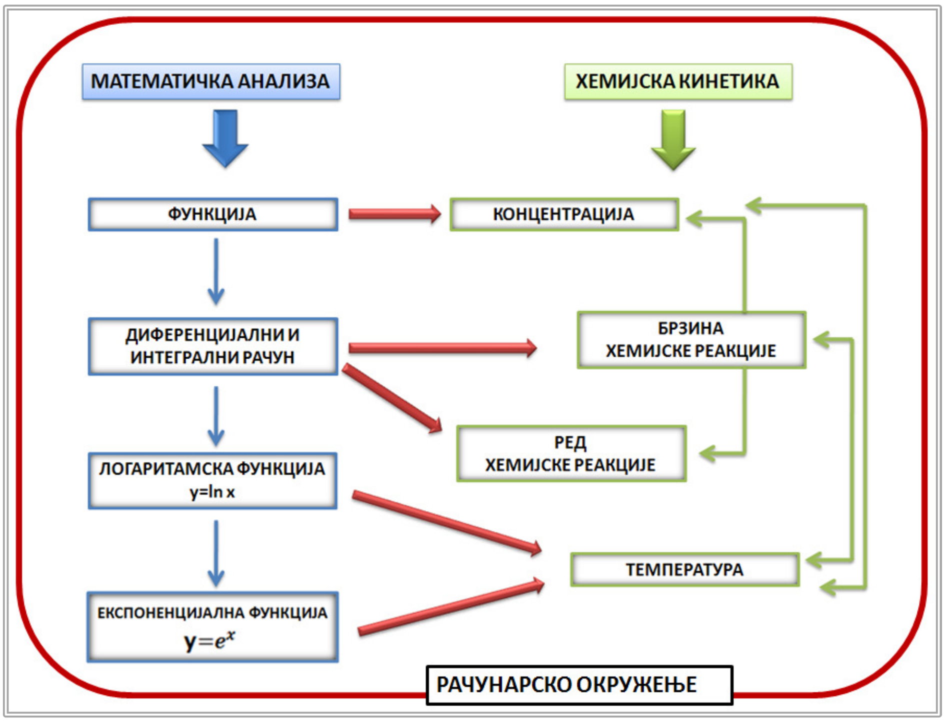
Прелаз из шесте у седму етапу

Модели су били прихваћени, па су ученици прешли на последњу етапу моделирања.

Седма етапа: извештај

Извештај укључује документовање свих активности моделирања, као што је претходно детаљно објашњено.

Кроз експериментални рад, у етапама оба процеса математичког моделирања успостављена је корелација математичких и хемијских појмова. Систематизовано и обједињено за оба процеса, ова корелација може се представити шематски, као што је приказано на шеми 4.2 [37].

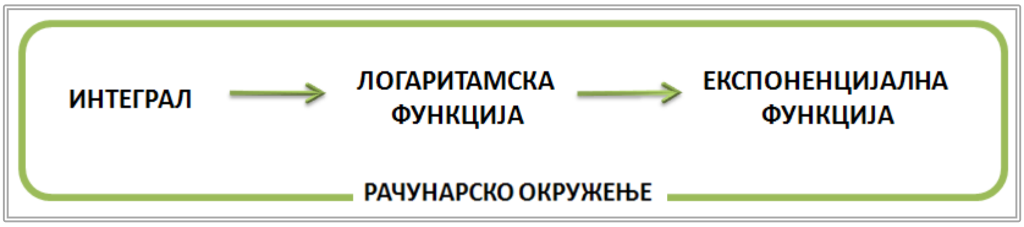


Шема 4.2. Успостављање корелације математичких и хемијских појмова у процесу математичког моделирања

5 Експериментално истраживање: обрада функције дате помоћу одређеног интеграла

5.1 Увод

Према важећем наставном плану и програму за гимназије, у другом разреду, ученици треба да усвоје одређена знања о експоненцијалној функцији, а затим и о логаритамској као њеној инверзној у оквиру наставне теме „Експоненцијална и логаритамска функција“. У четвртом разреду, стечена знања утврђују се и проширују у оквиру наставне теме „Реалне функције једне реалне променљиве“, која претходи наставним темама „Извод функције“ и „Интеграл“. Међутим, у истраживању које је предмет дисертације, на утврђивање наведеног наставног садржаја примењена је другачија методичка концепција, која је реализована према следећој шеми:



Шема 5.1. Шематски приказ методичке концепције у обради логаритамске и експоненцијалне функције

Увођење наведене концепције представља значајну новину у средњошколској настави математике и карактерише је одговарајући дидактичко-методички значај [60]. Пошто су ученици усвојили одређена знања о диференцијалном и интегралном рачуну, понављање основних својстава логаритамске функције са ученицима реализовано је применом основних својстава одређеног интеграла, у рачунарском окружењу, да би се затим експоненцијална функција увела као инверзна логаритамској. Интерпретација једног математичког појма кроз форме другог утиче на то да ученици лакше уочавају и схватају суштину, буду мотивисани за рад, и да при том увежбавају и стичу рутину у примени раније стечених знања. Знање које се стиче кроз различита представљања лакше се задржава, а способност да се знање транспонује у други облик повећава флексибилност и успех код решавања математичких проблема. На овај начин, у настави је заступљен оперативни принцип, где ученик уз помоћ наставника треба да испита и објасни задржавање особина, односа и функционалне зависности математичких објеката при операцијама трансформације [65].

У методици наставе математике развијени су материјали који се односе на наведену шему и прилагођени су средњошколском нивоу. У овим наставним материјалима [74], својства интеграла користе се као математичка подлога за учење и подучавање о основним својствима природног логаритма, која даље представљају базу за увођење функције облика $y = e^x$.

Математичари Ghorpade и Limaye у својој књизи [19] детаљно обрађују *calculus*, односно појмове више математике, и посебно поглавље посвећују елементарним трансцедентним функцијама где истичу логаритамску и експоненцијалну као најзначајније. Такође, они анализу функције $y=lnx$ спроводе помоћу диференцијалног и интегралног рачуна, затим следи формално увођење броја e и потом на исти начин анализирају функцију $y = e^x$. Наведене функције означили су као главне репрезенте логаритамских и експоненцијалних функција у ширем смислу.

У другом поглављу ове главе уводи се функција помоћу интеграла, што се даље објашњава и знање продубљује кроз задатке, са посебним акцентом на везу између неодређеног и одређеног интеграла, при чему је од посебног значаја визуелизација појмова који су обрађени применом *GeoGebra*-е.

У трећем поглављу је, према објашњеној концепцији, са ученицима извршена детаљна анализа логаритамске функције, да би се у четвртом поглављу увела експоненцијална функција као њена инверзна и испитале њене основне особине.

Увођење и реализација новог методичког приступа обради функција датих помоћу интеграла, у рачунарском окружењу, на високошколском нивоу учења математике, као и утврђивање степена утицаја примењених нових поступака у раду на квалитет знања студената, презентовано је у петом поглављу ове главе.

5.2 Функција дата помоћу одређеног интеграла

Почетну фазу у раду представљало је наставниково усмено излагање, односно образлагање тематике. Наведено је шта ће се обрађивати, контекст у којем се налази наставни садржај у односу на садржај математичког моделирања, централни појмови (функција, интеграл, логаритамска функција, експоненцијална функција), поступци (усаглашени са применом образовног софтвера *GeoGebra*), општи и специфични значај, као и циљеви којима рад треба да допринесе [83]. Рад је реализован у трајању од четири школска часа (односно пет часова, што је зависило од одељења, тј. интересовања и могућности ученика у тим одељењима).

Функција дата помоћу интеграла дефинише се на следећи начин [60]:

Ако је дат интервал I на скупу реалних бројева, a фиксни елемент интервала I, t произвољни елемент интервала I, и ако је f интеграбилна функција на I, може се дефинисати функција $F: I \to R$ дата са:

$$F(t) = \int_{a}^{t} f(x)dx.$$

Наставник је ученицима увео функцију F помоћу интеграла [29]:

Нека је дат интервал $[a, b]$, *t произвољни елемент интервала* $[a, b]$ *и непрекидна функција f на интервалу* $[a, b]$. *Тада можемо дефинисати функцију* $F: [a, b] \to R$ *дату са:*

$$\boldsymbol{F(t) = \int_{a}^{t} f(x)dx.} \tag{*}$$

Напомена. Дефиниција (*) је дата у овом облику зато што се у средњошколској настави математике не изучава појам несвојственог интеграла. Приликом дефинисања функције дате интегралом, у литератури се независно променљива углавном означава са x. Овде је означена са t, зато што *GeoGebra* не омогућава да се горња граница интеграла означи са x. На овај начин се ученици такође подстичу и навикавају да у раду, у зависности од проблемске ситуације, користе и друге ознаке за променљиве величине (а не нужно x и y).

Дефиниција функције F представља добру математичку основу, међутим, она у даљем раду треба да прерасте и у добру сазнајну основу. Због тога је ученицима дато неколико задатака са циљем да се појам функције дате интегралом поступно усвоји и кроз наставне активности методолошки и садржајно изгради као појам разумљив и близак ученицима. Изградњом овог појма и математичких структура које се на њега односе, кроз различите задатке развија се више (напредно) математичко мишљење ученика (*advanced mathematical thinking*). Ученици кроз постојећа знања треба да конструишу нова знања о уведеној функцији F, при чему се развија математичка креативност и процес логичког, дивергентног мишљења о својствима које ће поседовати функција F, али све то уз строго дефинисање функције F и логичку дедукцију. Такво мишљење ученика овде се базира на формалној дефиницији функције F и системском извођењу теорије [60].

Раду се приступило на акциони, иконички и симболички начин, тако да у сваком задатку ученик прође пут од физичке операције, преко менталне операције до појма дефинисане функције *F*. Кроз задатке, рад наставника и ученика усмерен је у два правца: визуелно-просторни (који ће водити ка вербално-дедуктивном) и идејно-симболички (у коме ће појам бити описан симболима) [12].

У току решавања задатака, фомулисани су концепт слике и концепт дефиниције. Концепт слике обухвата целокупну когнитивну структуру повезану са неким појмом. Овде се мисли и на мисаоне моделе, слике, и све сазнајне процесе формиране на основу искуства са стварима и објектима. Концепт дефиниције приказује се као начин да се помоћу речи и симболички представе одређени појмови. Операционализовање ова два концепта кроз различите примере и њихово комбиновање треба да води ка разумевању и прихватању појма функције дате интегралом ([12][60][66]).

Наставник је према дидактичком принципу - од једноставнијег ка сложенијем примеру - поставио ученицима четири задатка, где је, ради поједностављивања, водио рачуна да подинтегралне функције буду непрекидне на посматраним интервалима у сваком задатку. Такође, у задацима су дате подинтегралне функције које су познате ученицима: квадратна, експоненцијална и тригонометријска.

Први задатак:

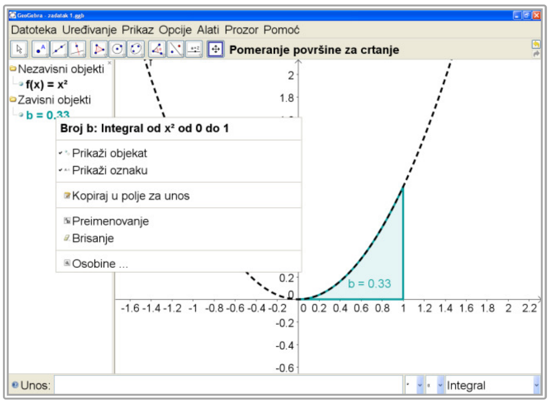
одредити $\int_0^1 x^2 dx$.

Први задатак ученицима не представља проблем, зато што су и раније решавали одређене интеграле у којима су границе константне величине. Међутим, овде је било важно да постављени проблем повежу са дефиницијом функције дате под (*). То значи да се, као и у свим задацима који обрађују функције, и у овом задатку тражи од ученика да одреде вредност функције $F(t) = \int_0^t x^2 dx$, за $t = 1$, односно $F(1)$ $(a = 0)$.

Иако је задатак веома једноставан, дат је са циљем да се обезбеди поступан методички прелаз ка следећим задацима.

Ученици су даље, користећи наредбу *Integral*, у геометријском прозору *GeoGebra*-е добили геометријску интерпретацију датог интеграла, графички приказ површине фигуре ограничене графиком функције $f(x) = x^2$, x-осом и правама $x = 0, x = 1$. У алгебарском прозору следила је нумеричка вредност те површине, односно датог интеграла, која је једнака вредности функције $F(1)$ (слика 5.1):

$$F(1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Слика 5.1. Примена GeoGebra-е у првом задатку

Други задатак:

- ***а) одредити*** $\int_0^t x^2 dx$,
- ***б) одредити*** $\int x^2 dx$,
- ***в) објаснити везу између решења добијених под а) и б).***

а) На почетку решавања овог задатка, конфликтну ситуацију ученицима представља решавање одређеног интеграла у коме је горња граница непозната величина. У коришћеном софтверу *GeoGebra* не може се радити са функцијама две променљиве без претходног дефинисања једне од њих. Ученици се на овај начин подстичу да идентификују и наведу променљиве величине, а затим да уоче како је потребно одредити променљиву t као горњу границу интеграла, што је могуће увођењем *Klizača*, који репрезентује различите вредности t. Померајући клизач, ученици су могли да закључе да свакој фиксираној вредности t одговара тачно једна вредност интеграла $\int_0^t x^2 dx$ (слика 5.2).

Кроз когнитивне активности успостављања везе између вредности t и вредности интеграла, као независно и зависно променљивих величина, уводи се нова функција F: $F(t) = \int_0^t x^2 dx$, која различитим вредностима независно променљиве t додељује вредност интеграла $\int_0^t x^2 dx$. Директним израчунавањем ученици добијају:

$$F(t) = \int_0^t x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^t = \frac{t^3}{3}.$$

За разлику од првог задатка, у којем је решење интеграла био број, тј. вредност функције F, за $t = 1$, у овом задатку решење интеграла је функција F, тако да се за различите вредности независно променљиве добијају различите вредности функције F.

На пример: ако је $t = 2$, следи да је $F(2) = \frac{8}{3}$.

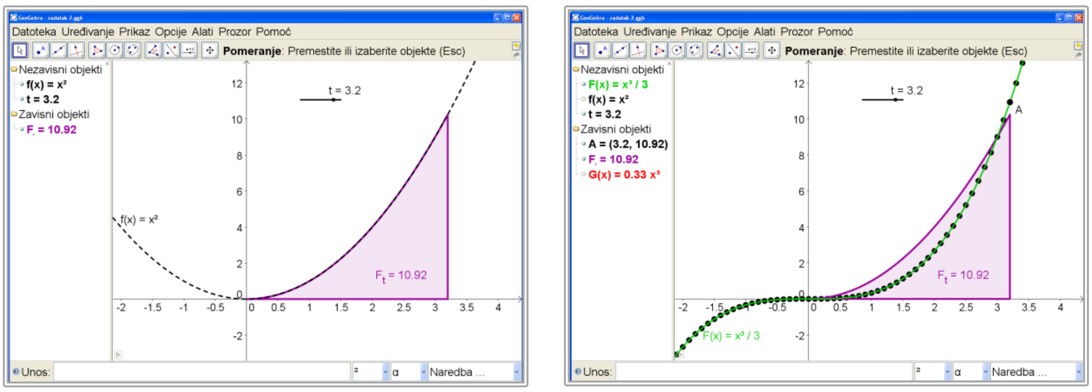
Ако је $t = 0$, следи да је $F(0) = 0$, па је тачка са координатама $(0,0)$ нула функције F, што је ученицима било очигледно, с обзиром на чињеницу да је одређени интеграл једнак нули када су горња и доња граница једнаке.

Даље је било потребно да се изврши визуелизација функције, односно да се нацрта график функције F дате интегралом. Нека тачка A има координате $(t, F(t))$. На слици 5.2, број F_t представља вредност функције F у тачки t, која се визуелно мења *Klizačem*, односно $F_t = \int_0^t x^2 dx$ за посматрано t. Према томе, $A\big(t, F(t)\big) = A(t, F_t)$. У софтверу *GeoGebra*, вредност функције F у тачки t није могуће „именовати" са $F(t)$, па је због тога уместо $F(t)$ уведена ознака F_t.

Добијене различите вредности броја F_t ученици прате у алгебарском прозору, тако да су даље користили опцију *Uključi trag* за тачку A и померали задати *Klizač* за вредности t. Поједини ученици коментарисали су да добијени график „личи на график функције x^3", док су бољи ученици закључили да тачка A описује график уведене функције F (слика 5.2).

Као додатну проверу ученици су нацртали, у истом прозору, график функције $F(x) = \frac{x^3}{3}$ директним задавањем и проверили да се тачка A креће по графику функције F.

Према дефиницији функције F, број F_t може бити и позитиван и негативан. У геометријском прозору, ученици могу да анлизирају добијену површину која је геометријска интерпретација вредности функције F у тачки t. Нумеричка вредност те површине мора бити позитивна. Због тога је у овој фази рада било веома важно да ученици повежу концепт слике са концептом дефиниције, тако да правилно закључе да је нумеричка вредност добијене површине увек једнака апсолутној вредности броја F_t.



Слика 5.2. Примена GeoGebra-е у другом задатку

б) Овај део задатка је ученицима био лак, тако да су сви ученици дошли до решења: $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C,\ C = const$. Према дефиницији неодређеног интеграла, решење задатка је скуп функција $\left\{\frac{x^3}{3} + C\right\}$. У овом делу рада погодно је са ученицима утврдити чињеницу да је свака функција из тог скупа примитивна функција за функцију $f(x) = x^2$:

$$(\frac{x^3}{3} + C)' = x^2,$$

и да се оне међусобно разликују за константу C.

Визуелизација решења неодређеног интеграла могућа је једноставним уносом подинтегралне функције. Ученици су применом *GeoGebra*-е добили график функције и њен аналитички израз $G(x) = \frac{x^3}{3}$ (слика 5.2). То сугерише ученицима да рачунар за решење неодређеног интеграла $\int x^2dx$ узима функцију из скупа $\left\{\frac{x^3}{3} + C\right\}$, за коју је $C = 0$.

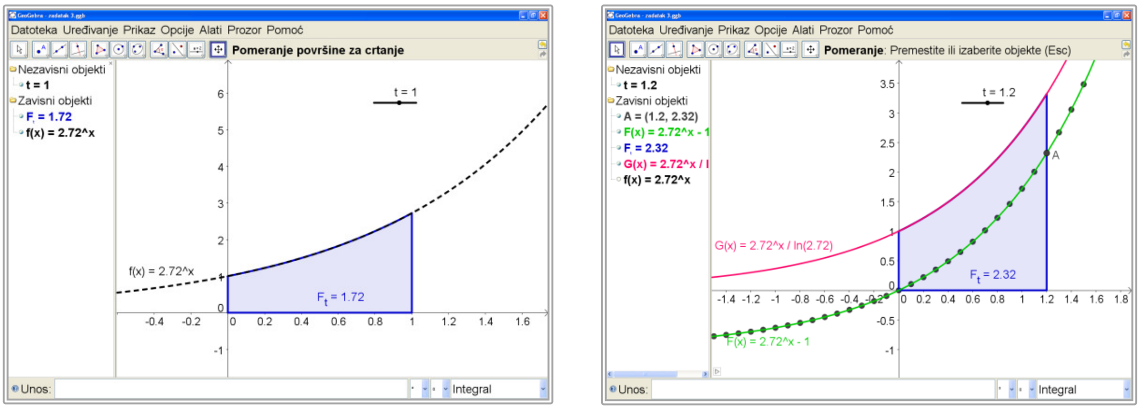
в) За функцију F, одређену у делу задатка под а), важи да је $F'(x) = x^2$, одакле следи да је и функција F примитивна функција за функцију $f(x) = x^2$ ($F' = f$). То значи да функција F припада скупу $\left\{\frac{x^3}{3} + C\right\}$, F добијамо за $C = 0$, односно важи да је: $F(x) = G(x) + 0$.

Следећа три задатка ученици су самостално решавали, пролазећи све етапе у раду и примењујући поступке који су детаљно описани у решењу другог задатка.

Трећи задатак:

а) ***одредити*** $\boldsymbol{\int_0^t e^x dx}$,
б) ***одредити*** $\boldsymbol{\int e^x dx}$,
в) ***објаснити везу између решења добијених под а) и б).***

а) Решење интеграла је функција $F(t) = \int_0^t e^x dx = e^x\Big|_0^t = e^t - 1$, тако да се за различите вредности независно промењиве t добијају различите вредности функције F, што је приказано на слици 5.3.



Слика 5.3. Примена GeoGebra-е у трећем задатку

б) $\int e^x dx = e^x + C,\ C = const$, тако да је решење овог задатка скуп свих примитивних функција за функцију $f(x) = e^x$: $\{e^x + C\}$.

$G(x) = e^x$ је функција из наведеног скупа за коју је $C = 0$, функција G представља решење до којег су ученици дошли применом *GeoGebra*-е (слика 5.3).

в) Како је у овом задатку $F'(x) = e^x$, F је примитивна функција за функцију $f(x) = e^x$. То значи да функција F припада скупу функција $\{e^x + C\}$, F добијамо за $C = -1$, односно важи да је: $F(x) = G(x) - 1$.

Четврти задатак:

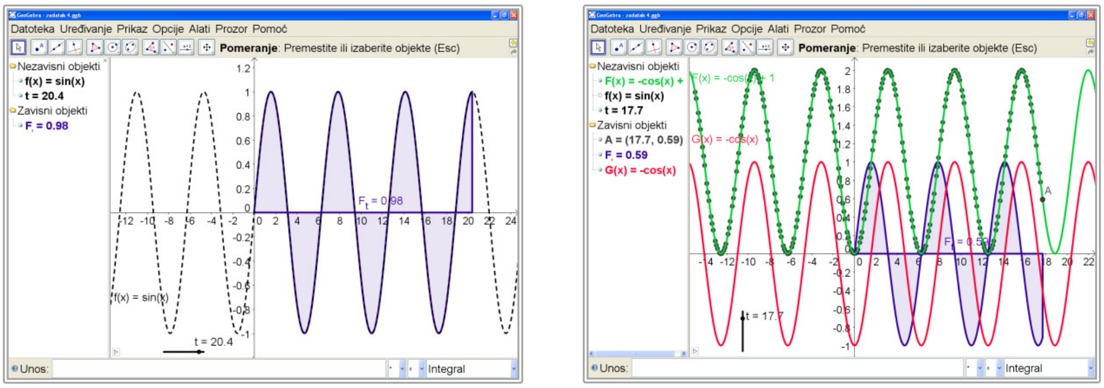
- ***а) одредити*** $\int_0^t \sin x\, dx$,
- ***б) одредити*** $\int \sin x\, dx$,
- ***в) објаснити везу између решења добијених под а) и б).***

а) Решење интеграла је функција $F(t) = \int_0^t \sin x\, dx = -\cos x\,\big|_0^t = -\cos t + 1$, тако да се за различите вредности независно променљиве t добијају различите вредности функције F, што је приказано на слици 5.4.

б) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,\ C = const$, па као и у претходним задацима, ученици долазе до закључка да је решење овог задатка скуп свих примитивних функција за функцију $f(x) = \sin x$, односно $\{-\cos x + C\}$.

$G(x) = -\cos x$ је функција из наведеног скупа за коју је $C = 0$, функција G представља решење применом *GeoGebra*-е.

в) $F'(x) = \sin x$, па је F је примитивна функција за функцију f. Одавде следи да је међу функцијама из скупа $\{-\cos x + C\}$ и функција F, која се добија за $C = 1$. Функције F и G се разликују за константу, односно важи да је $F(x) = G(x) + 1$.



Слика 5.4. Примена GeoGebra-е у четвртом задатку

Разматрања домена функције F наставник спроводи кроз дискусију, водећи рачуна о дефиницији (*), односно да је функција f непрекидна на интервалу $[a, t]$. Следећа два примера представљају још један корак ка понављању, разумевању, примени дефиниције (*) и разјашњавању домена функције F.

Пример: Да ли је функција F дата са:

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{2x - x^2}\, dx,\ t \in R,$$

добро дефинисана?

У овом случају, функција $f(x) = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{x(2 - x)}$ дефинисана је и непрекидна на интервалу $[0,2]$, јер је $x(2 - x) \geq 0$ за $x \in [0,2]$.

Следи да, у складу са дефиницијом (*), функција F није добро дефинисана зато што је подинтегрална функција f дефинисана и непрекидна на интервалу $[0,2]$. Према томе, променљива t може имати вредности само из наведеног интервала.

Са ученицима треба нагласити да у претходним задацима променљива t може имати вредности из скупа R, зато што је подинтегрална функција у сваком задатку на том скупу дефинисана и непрекидна.

Пример: Да ли је функција F дата са:

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{x}\, dx,\ t \geq 0,$$

добро дефинисана?

Функција F није добро дефинисана у смислу дефиниције (*). Подинтегрална функција је непрекидна на интервалу $(0, \infty)$, али није непрекидна на интервалу $[0, r]$, за $r > 0$.

Овај пример представља и основу за увођење логаритамске функције помоћу одређеног интеграла.

Такође, ако посматрамо, на пример, инеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, подинтегрална функција f дата са $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ јесте интеграбилна на интервалу $[0,1]$, али на том интервалу није непрекидна. Због тога је посматрани интеграл несвојствен, али као што је већ назначено, несвојствени интеграли се у раду неће изучавати.

На основу свега наведеног, уз правилно тумачење дефиниције (*), оправдано је што се на овом нивоу учења не уводи појам несвојственог интеграла.

5.3 Логаритамска функција

Спроведене активности описане у претходном поглављу представљале су методичку основу за увођење логаритамске функције са основом *e* помоћу интеграла.

Нека је дата функција F помоћу интеграла:

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx.$$

У смислу дефиниције (*), сада је $a = 1$, а подинтегрална функција f, дата са $f(x) = \frac{1}{x}$, је непрекидна на интервалима $[1, r]$ и $[r, 1]$, за $r > 0$. По дефиницији (*), то значи да је функција F дефинисана на истим интервалима. Како је у ствари $r \in (0, \infty)$, са ученицима можемо да:

дефинишемо функцију $F: (0, \infty) \to R$ *дату са:*

$$\boldsymbol{F(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx.} \qquad (**)$$

Након што је дефинисана функција F, природан следећи корак у раду био је да ученици кроз кооперативни рад са наставником испитају ток функције F (**) ([19][29][63][74]).

Испитивање тока функције F (**)

а) Домен функције F

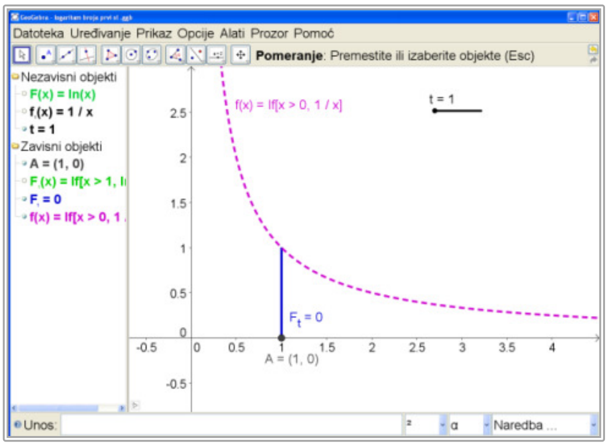
На основу дефиниције функције, следи да је *домен* $D_F = (0, \infty)$.

б) Нула функције F

Ученицима је познато да је одређени интеграл једнак нули када су горња и доња граница једнаке. Због тога су одредили вредност функције F за $t = 1$, односно вредност интеграла чије су обе границе једнаке 1 (слика 5.5):

$$F(1) = \int_1^1 \frac{1}{x}dx = 0.$$

То значи да *функција* F *има нулу у тачки* $t = 1$.



Слика 5.5. Примена GeoGebra-е у одређивању нуле функције F

в) Монотоност функције F

Примењујући знања стечена кроз решавање задатака који су презентовани у претходном поглављу, ученици су закључили да је F примитивна функција за подинтегралну функцију f, па је: $F'(t) = \frac{1}{t}$. Како за свако $t > 0$ важи да је $\frac{1}{t} > 0$, први извод функције F је за посматране вредности t увек позитиван.

Следи закључак да је *функција* F *растућа на интервалу* $(0, \infty)$, *што значи да* F *нема екстремних вредности.*

Напомена: Са ученицима математичке гимназије и са студентима могуће је одредити први извод функције F по дефиницији:

Нека је дато $t \in (0, \infty)$ и нека је дато h, такво да је $t + h \in (0, \infty)$. Тада је:

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_1^{t+h} \frac{1}{x}dx - \int_1^{t} \frac{1}{x}dx\right) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \frac{1}{x}dx.$$

Како је подинтегрална функција $f(x) = \frac{1}{x}$ непрекидна на интервалу $(0, \infty)$, она је непрекидна и на сваком затвореном подинтервалу $[t, t+h]$, па на основу теореме о средњој вредности постоји $\mu \in (t, t+h)$, такво да је: $\int_t^{t+h} \frac{1}{x} dx = (t+h-t)\frac{1}{\mu} = h\frac{1}{\mu}$ и $\lim_{h\to 0} \mu = t$.

Одавде следи да је:

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h \frac{1}{\mu} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{t}.$$

*г) **Знак функције F***

Ученици су овде користили резултате до којих су дошли приликом одређивања нула и испитивања монотоности функције F.

- Како је показано да је $F(1) = 0$ и да је функција F растућа на $(0, \infty)$, из $t > 1$ следи $F(t) > F(1)$, тј. $F(t) > 0$.

То значи да је *функција F позитивна на интервалу* $(1, \infty)$.

Код одређивања знака функције, примена рачунара је за ученике веома важна. У алгебарском прозору *GeoGebra*-е, број F_t представља вредност функције F у тачки t, која се визуелно мења *Klizačem*, односно: $F_t = \int_1^t \frac{1}{x} dx$ за посматрано t.

Када је $t > 1$, горња граница одређеног интеграла $\int_1^t \frac{1}{x} dx$ већа је од доње границе, док је подинтегрална функција позитивна на основу дефиниције (**), па је број F_t у овом случају позитиван и једнак површини испод криве $f(x) = \frac{1}{x}$ у границама од 1 до t (слика 5.6.a):

$$F_t = \int_1^t \frac{1}{x} dx > 0.$$

- Из истих разлога као у претходном случају, из $t \in (0,1)$ следи $F(t) < F(1)$, тј. $F(t) < 0$.

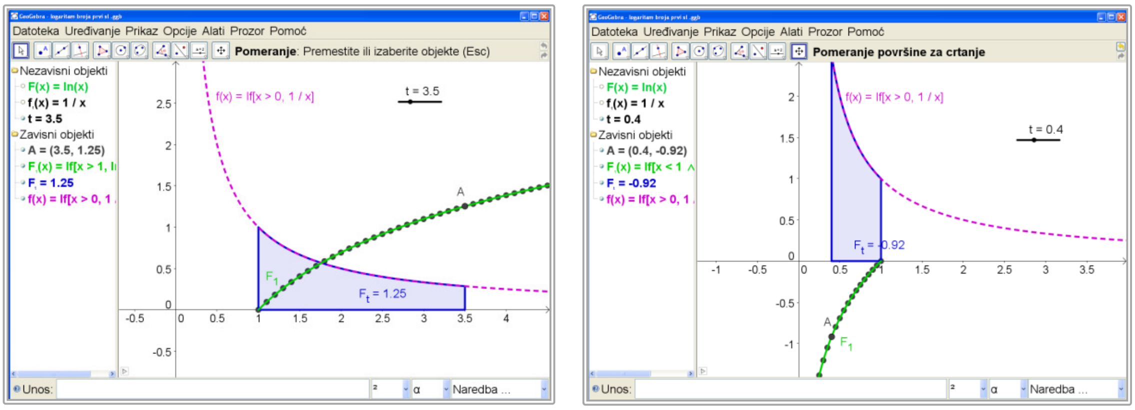
Значи да је *функција F негативна на интервалу* $(0,1)$.

У овом случају, посебно је значајно да ученици повежу концепт слике са концептом дефиниције. За $t \in (0,1)$ важи:

$$F_t = \int_1^t \frac{1}{x} dx = -\int_t^1 \frac{1}{x} dx < 0,$$

негативан број F_t ученици добијају и анализирају у алгебарском прозору *GeoGebra*-е. У геометријском прозору, површина испод криве $f(x) = \frac{1}{x}$ је позитивна, изнад x-осе, и додељује јој се вредност интеграла са промењеним границама, $\int_t^1 \frac{1}{x} dx > 0$.

Међутим, померајући *Klizač* за вредности $t \in (0,1)$, ученици су уочили да се са повећањем t површина смањује, што им је представљало конфликтну ситуацију. На први поглед, то су схватили као супротност чињеници да је функција F растућа. Због тога је уследила наставникова помоћ и објашњење настале ситуације. Са повећањем t, повећава се и број F_t $(F_t < 0)$, али се са повећањем броја F_t смањује површина, зато што је за $t \in (0,1)$ њена нумеричка вредност једнака апсолутној вредности броја F_t(слика 5.6. б).



а) *б)*

Слика 5.6. Примена GeoGebra-е у одређивању монотоности и знака функције F

д) Непрекидност функције F

Да би доказали да је функција F непрекидна на интервалу $(0, \infty)$, потребно је доказати да је F непрекидна у свакој тачки $t_0 \in (0, \infty)$.

Функција F је непрекидна у тачки $t_0 \in (0, \infty)$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји број $\delta > 0$ (δ зависи од ε и t_0), тако да за све $t \in (0, \infty)$ са особином $|t - t_0| < \delta$ важи неједнакост $|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$.

Нека је дато произвољно $t_0 \in (0, \infty)$.

- Ако је $t_0 < t$, тада је:

$$|F(t) - F(t_0)| = \left|\int_1^t \frac{1}{x} dx - \int_1^{t_0} \frac{1}{x} dx\right| = \left|\int_{t_0}^t \frac{1}{x} dx\right|$$

$$= |(t - t_0) f(\mu)| = |t - t_0||f(\mu)| = |t - t_0| \left|\frac{1}{\mu}\right| < |t - t_0| \frac{1}{t_0}.$$

Како је функција $f(x) = \frac{1}{x}$ непрекидна на интервалу $(0, \infty)$, следи да је она непрекидна и на сваком затвореном подинтервалу $[t_0, t]$, па на основу теореме о средњој вредности постоји $\mu \in (t_0, t)$, такво да је: $\int_{t_0}^{t} \frac{1}{x} dx = (t - t_0) \frac{1}{\mu}$.

Како је $t_0 < \mu < t$, важи да је: $\frac{1}{t} < \frac{1}{\mu} < \frac{1}{t_0}$.

Према томе, за произвољно $\varepsilon > 0$, узимајући $\delta = t_0 \varepsilon$, закључујемо да из $|t - t_0| < \delta$ следи $|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$.

- Ако је $t_0 > t$, постоји број $k > 1$ тако да важи $\frac{t_0}{k} < t$, па је тада:

$$|F(t) - F(t_0)| = \left|\int_1^t \frac{1}{x} dx - \int_1^{t_0} \frac{1}{x} dx\right| = \left|\int_{t_0}^{t} \frac{1}{x} dx\right|$$

$$= |(t - t_0) f(\mu)| = |t - t_0||f(\mu)| = |t - t_0| \left|\frac{1}{\mu}\right| < |t - t_0| \frac{1}{t} < |t - t_0| \frac{k}{t_0}.$$

Како је сада $t < \mu < t_0$, важи: $\frac{1}{t} > \frac{1}{\mu} > \frac{1}{t_0}$. Како је $\frac{t_0}{k} < t < t_0$, важи: $\frac{1}{t} < \frac{k}{t_0}$.

Према томе, за произвољно $\varepsilon > 0$, узимајући $\delta = \frac{t_0 \varepsilon}{k}$, закључујемо да из $|t - t_0| < \delta$ следи $|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$.

Овим смо доказали да је *функција F непрекидна на интервалу* $(0, \infty)$.

ђ) Ограниченост функције F

Докажимо прво да функција F није ограничена са горње стране.

Нека је $n \geq 2$, природан број. Тада је:

$$F(n) = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx \geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}, \tag{1}$$

зато што за свако $0 < x \leq k$ важи да је $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{k}$.

Покажимо даље да низ са општим чланом $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ није Кошијев, односно да не конвергира. То значи да треба показати да постоји $\varepsilon > 0$, тако да за свако $n_0 \in N$ постоји $n > n_0$ и постоји $p \in N$, тако да важи $|a_{n+p} - a_n| > \varepsilon$. Узмимо да је $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Из

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p},$$

следи да за $n = p$ имамо:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = |a_{2n} - a_n| \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4},$$

за сваки природан број $n \geq 2$. Према томе, наведени низ није Кошијев и зато не конвергира, односно важи да је:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = +\infty\,. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи да F није ограничена са горње стране.

Покажимо сада да F није ограничена са доње стране. Нека је $n \geq 2$, природан број. Тада је:

$$F\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{1}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x}dx = -\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}dx = -\sum_{k=2}^{n} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k-1}} \frac{1}{x}dx \leq -\sum_{k=2}^{n} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k-1}} (k-1)dx = -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}, \tag{3}$$

зато што за свако $0 < x \leq \frac{1}{k-1}$ важи да је $\frac{1}{x} \geq k - 1$, тј. $-\frac{1}{x} \leq -(k-1)$.

Сада из (2) и (3) следи да F није ограничена са доње стране.

Овим смо доказали да *функција F није ограничена на интервалу* $(0, \infty)$.

Како F није ограничена и како је показано да је F (строго) растућа на $(0, \infty)$, следи да је:

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty\,, \lim_{t\to 0^+} F(t) = -\infty.$$

Такође, овде можемо закључити да је *y-оса вертикална асимптота функције F*.

е) Функција F је бијекција

Да би функција F била бијекција, потребно је доказати да је инјективна и сирјективна.

- F је инјективна

Доказано је да је функција F растућа, одакле следи да је F *инјективна.*

- F је сирјективна

Нека је $y \in R$.

Из $lim_{t\to 0^+} F(t) = -\infty$ следи да постоји број $t_0 \in (0,\infty)$, такав да је $F(t_0) < y$.

Из $lim_{t\to +\infty} F(t) = +\infty$ следи да постоји број $t_1 \in (0,\infty)$, такав да је $F(t_1) > y$.

Функција F је непрекидна на интервалу $(0,\infty)$, што значи да је непрекидна и на затвореном подинтервалу $[t_0, t_1]$. Одавде следи да постоји број $t \in [t_0, t_1]$, такав да је $F(t) = y$. Овим је доказано да је *функција F сирјективна.*

Број е

Доказано је да је функција F бијекција, па следи да постоји јединствен позитиван реалан број t, такав да важи $F(t) = 1$. Нека је то број *e*:

$$\boldsymbol{F(e) = 1.}$$

Приликом одређивања домена, нуле, монотоности и знака функције F, ученицима је додељена главна улога у раду, док је наставник пружао смернице и одговарајуће видове помоћи у раду. Међутим, испитивање тока функције под д), ђ) и е) захтевало је да главни носилац рада буде наставник, зато што су докази веома тешки и компликовани ученицима, док ученици учествују у њима кроз дискусију, постављање питања, аргументовање и примену математичких знања. Извођење наведених формалних доказа у средњошколској настави математике веома је важно, зато што, између осталог, могу позитивно да утичу на развој вишег математичког мишљења и когнитивних способности ученика.

У следећој фази рада, наставник је поставио задатак са циљем да се докажу три важна својства функције F, која ће ученици даље повезати са основним својствима логаритма.

Пети задатак:

Дата је функција F (**). Доказати:

а) за свако $\boldsymbol{a, b \in (0,\infty)}$ важи: $\boldsymbol{F(ab) = F(a) + F(b)}$,
б) за свако $\boldsymbol{a, b \in (0,\infty)}$ важи: $\boldsymbol{F(\frac{a}{b}) = F(a) - F(b)}$,
в) за свако $\boldsymbol{a \in (0,\infty)}$ и $\boldsymbol{k \in R}$ важи: $\boldsymbol{F(a^k) = kF(a)}$.

а) На слици 5.7. је $F(a) = F_a = \int_1^a \frac{1}{x}dx$, $F(b) = F_b = \int_1^b \frac{1}{x}dx$ и $F(ab) = F_1 = \int_1^{ab} \frac{1}{x}dx$, тако да треба да важи $F_1 = F_a + F_b$.

$$F(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{x}dx = \int_1^a \frac{1}{x}dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x}dx$$

$$= \int_1^a \frac{1}{x}dx + \int_1^b \frac{1}{ua}adu = \int_1^a \frac{1}{x}dx + \int_1^b \frac{1}{u}du$$

$=F(a)+F(b)$ (смена: $u=\frac{x}{a}$).

б) Доказ овог својства сваки ученик самостално изводи, по сличном принципу као у делу задатка под а). На слици 5.7. је $F(\frac{a}{b})=F_2=\int_1^{\frac{a}{b}}\frac{1}{x}dx$, тако да треба да важи $F_2=F_a-F_b$.

в) Ако је $k=0$, тада је тривијално $F(a^0)=0F(a)$, зато што важи да је $F(a^0)=F(1)=0$.

Нека је $k\neq 0$, тада имамо да је:

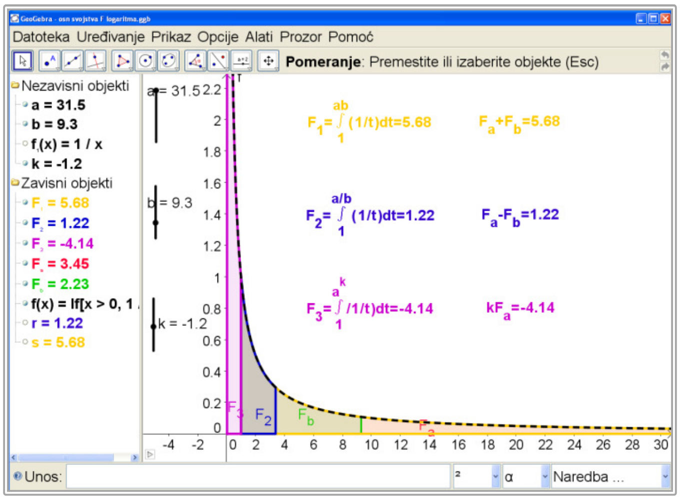
$$F(a^k)=\int_1^{a^k}\frac{1}{x}dx$$

$$=\int_1^{a}\frac{1}{u^k}ku^{k-1}du=k\int_1^{a}\frac{1}{u}du$$

$$=kF(a)\ (\text{смена:}u=x^{\frac{1}{k}}).$$

На слици 5.7. је $F(a^k)=F_3=\int_1^{a^k}\frac{1}{x}dx$, тако да треба да важи $F_3=kF_a$.

Доказивање наведених својстава било је лакше уз примену рачунара и *GeoGebra*-е, зато што су ученици могли и визуелно да закључују о односима површина које су геометријске интерпретације посматраних интеграла, а у алгебарском прозору могли су и нумерички да прате однос вредности тих површина, као и вредности функције F у траженим тачкама (слика 5.7).



Слика 5.7. Примена GeoGebra-е у петом задатку

Након што је испитан ток функције F, ученици су требали да скицирају график функције, што су самостално радили у својим свескама. Затим је извршена визуелизација ове функције помоћу рачунара и увођење логаритамске функције.

Нека тачка A има координате $(t, F(t))$. Како је број F_t дефинисан као вредност функције F у тачки t, односно: $F_t = \int_1^t \frac{1}{x} dx$ за посматрано t, важи да је $A\big(t, F(t)\big) = A(t, F_t)$. Ученицима је овакав приступ у раду сада познат и једноставан за усвајање, зато што су сличан поступак већ спроводили у изради задатака који су објашњени у претходном поглављу.

Поставља се питање где ће се налазити тачка A. Развија се дискусија о могућим одговорима, а један од ученика каже да „тачка A припада кружници“, што је нетачно.

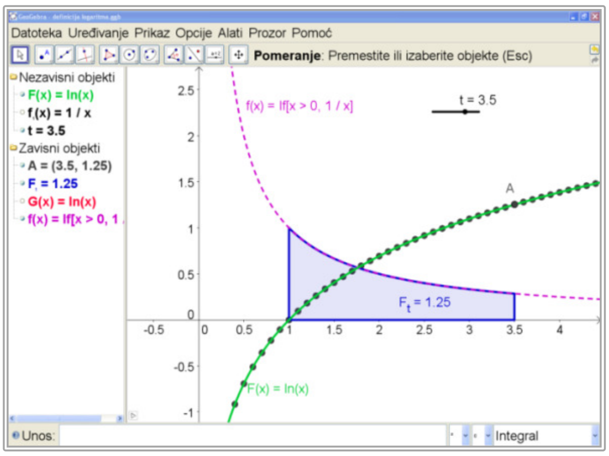
Узимамо у разматрање предлог другог ученика који ће довести до тачног одговора, што је даље реализовано уз помоћ *GeoGebra*-е. Ученици су користили опцију *Uključi trag* за тачку A и померали задати *Klizač* за вредности t. Већина ученика уочава да тачка A припада графику логаритамске функције.

Као додатну проверу, у истом прозору нацртали су график логаритамске функције директним задавањем. Тачка A креће се по графику функције $y = ln\, x$ (слика 5.8).

Даље су ученици упоредили график функције који су скицирали у свескама са графиком добијеним применом *GeoGebra*-е и извршили одговарајуће корекције.

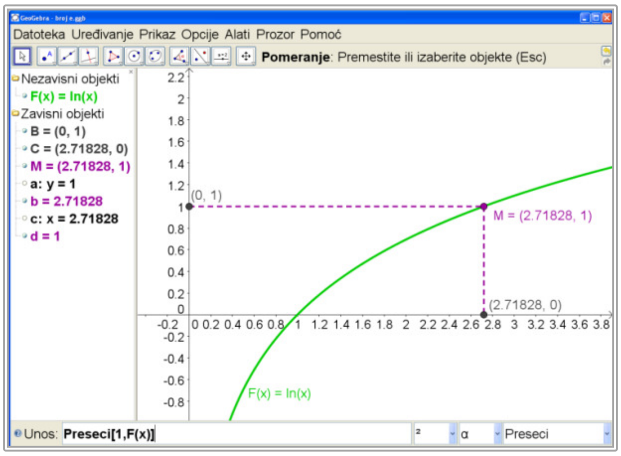
То значи да функција F дефинисана преко (**) одговара **логаритамској функцији** ([19][50][58][74]):

$$\boldsymbol{F(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx = ln\, x \Big|_1^t = ln\, t}, \quad \boldsymbol{t} > 0.$$



Слика 5.8. Примена GeoGebra-е у визуелизацији логаритамске функције

У испитивању тока функције F увели смо број e, па је сада могуће одредити и његову приближну вредност. Појединци су се снашли на следећи начин: на графику логаритамске функције $F(x) = ln\,x$ датом у геометријском прозору *GeoGebra*-е (слика 5.9) одредили су тачку M са ординатом једнаком 1 применом наредбе $Preseci\,[1, F(x)]$. Вредност апсцисе тачке M једнака је броју e, $e \approx 2.71828$.



Слика 5.9.Примена GeoGebra-е у одређивању броја e

У следећој фази рада, од ученика се захтевало да резултате до којих су дошли испитивањем тока функције F искажу у форми која им је позната од раније, а односе се на логаритамску функцију $ln\,x$:

- функција $ln\,x$ дефинисана је на интервалу $(0, \infty)$, кодомен функције је R;
- нула логаритамске функције $ln\,x$ је тачка $(1,0)$, тј. $ln\,1 = 0$;
- важи да је $ln\,x > 0$ за $x > 1$, и $ln\,x < 0$ за $x \in (0,1)$;
- функција $ln\,x$ је на интервалу $(0, \infty)$ растућа (и нема екстремних вредности), непрекидна и неограничена;
- функција $ln\,x$ има вертикалну асимптоту, једначина те праве је $x = 0$;
- функција $ln\,x$ је бијекција;
- важи да је $ln\,e = 1$.

Тврђења доказана у петом задатку ученици су затим требали да повежу са основним правилима логаритмовања, што су записали на следећи начин:

- за свако $a, b \in (0, \infty)$ важи: $ln\,ab = ln\,a + ln\,b$;
- за свако $a, b \in (0, \infty)$ важи: $ln\frac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$;
- за свако $a \in (0, \infty)$ и $k \in R$ важи: $lna^k = klna$.

5.4 Експоненцијална функција

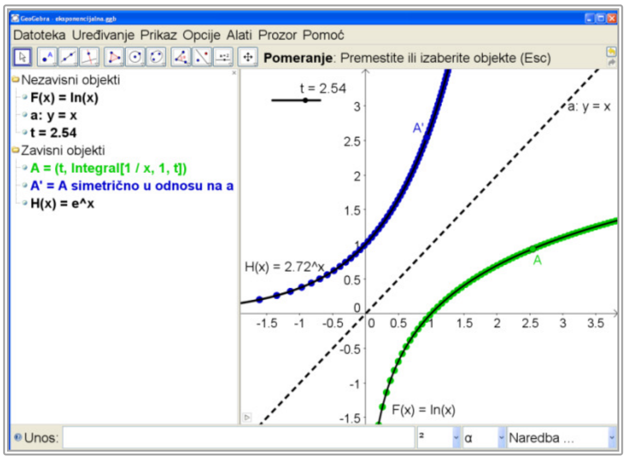
Како је логаритамска функција бијекција, за сваки реалан број x можемо дефинисати јединствен број $y = e^x$ за који важи $ln y = ln\, e^x = x$, односно за сваки реалан број x и сваки позитиван реалан број y важи:

$$\boldsymbol{e^x = y <=> ln y = x.}$$

Функција $H: R \to (0, \infty)$ дата са $H(x) = e^x$ позната је као **експоненцијална функција**, која је инверзна логаритамској функцији ([19][74]).

Како важи да је $ln 1 = 0$ и $ln e = 1$, сада на основу дефиниције експоненцијалне функције имамо да је: $e^0 = 1$ и $e^1 = e$.

Од ученика се тражило да прикажу графички везу између логаритамске функције дате помоћу одређеног интеграла и експоненцијалне, као њене инверзне, што су урадили на следећи начин: дефинисали су тачку $A = (t, Integral\left[\frac{1}{x}, 1, t\right])$ и опцијом *Uključi trag* нацртали логаритамску функцију (траг тачке *A*). Следила је помоћ наставника: инверзна функција ће бити симетрична датој, у односу на праву $y = x$. Због тога су сви даље дефинисали нову тачку *A'* симетричну тачки *A* у односу на праву $y = x$ помоћу наредбе *Osna simetrija*. Активирањем опције *Uključi trag* за тачку *A'* добили су график функције $y = e^x$, што је приказано на слици 5.10. Као додатну проверу, у истом прозору нацртали су график експоненцијалне функције директним задавањем $H(x) = e^x$, тачка *A'* се креће по графику функције H.



Слика 5.10. Примена GeoGebra-е у визуелизацији експоненцијалне функције

Ученици су у својим свескама претходно нацртали график логаритамске функције, па се од њих тражило да у истом координатном систему, као што су то урадили на рачунару, и у свесци скицирају график експоненцијалне функције. То им је било веома једноставно. Знали су да график функције H мора бити симетричан графику функције F у односу на праву $y = x$, и да график функције H садржи тачку $(0,1)$, зато што график функције F садржи тачку $(1,0)$. На основу доказаних својстава логаритамске функције, ученици су даље испитивали ток експоненцијалне функције H.

а) Домен функције H

Према дефиницији, домен функције H је скуп R.

б) Нуле функције H

Ученици сада лако долазе до закључка да функција нема нуле. Скуп вредности експоненцијалне функције једнак је домену логаритамске функције, а то је интервал $(0, \infty)$.

в) Знак функције H

На основу дефиниције, следи да је експоненцијална функција позитивна за све вредности независно промењиве.

г) Монотоност функције H

Како је логаритамска функција растућа на $(0, \infty)$, за свако $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ важи:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ln x_1 < ln x_2,$$

па самим тим и

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow ln x_1 \leq ln x_2,$$

или еквивалентно:

$$ln x_2 < ln x_1 \Rightarrow x_2 < x_1.$$

Нека је $y_1 = ln x_1$ и $y_2 = ln x_2$ где $y_1, y_2 \in R$, односно $x_1 = e^{y_1}$ и $x_2 = e^{y_2}$. Тада претходна импликација постаје:

$$y_2 < y_1 \Rightarrow e^{y_2} < e^{y_1},$$

што значи да је и експоненцијална функција растућа на R.

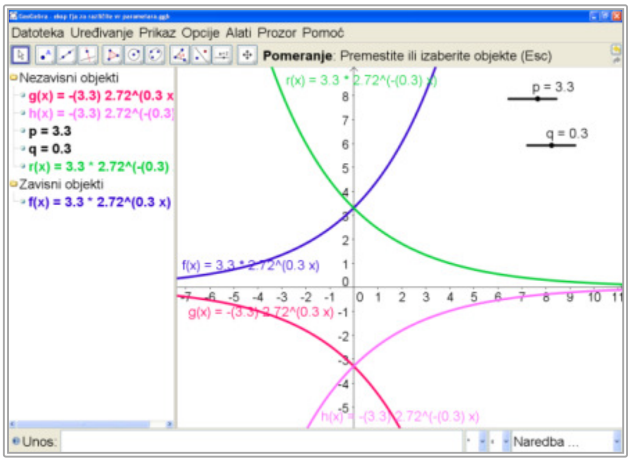
На основу овог доказа, било је могуће са ученицима извести и одговарајуће уопштавање: ако је посматрана функција монотона и бијекција, она има инверзну функцију, која је такође монотона, у истом смислу монотоности као и та функција.

Према потребама за математичким аргументовањем у процесу моделирања који је објашњен у поглављу 4.3.1.2, од ученика се захтевало и да испитају како у експоненцијалној функцији облика:

$$y = pe^{qx};\ p, q \in R,$$

различите вредности параметара p и q утичу на монотоност, тако да се дискусија реализовала у *GeoGebra* окружењу. Ученици су узимали различите вредности за p и q, ове параметре су увели помоћу опције *Klizač* (слика 5.11). Извели су следеће закључке:

- ако је $p > 0$ и $q > 0$ функција је монотоно растућа;
- ако је $p > 0$ и $q < 0$ функција је монотоно опадајућа;
- ако је $p < 0$ и $q > 0$ функција је монотоно опадајућа;
- ако је $p < 0$ и $q < 0$ функција је монотоно растућа.



Слика 5.11. Примена GeoGebra-е у испитивању монотоности експоненцијалне функције за различите вредности параметара

д) Ограниченост функције H

Експоненцијалном функцијом се скуп R пресликава на скуп R^+, tj. интервал $(0, \infty)$, па следи да H није ограничена са горње стране на скупу R. С обзиром на то да логаритамска функција има вертикалну асимптоту, праву $x = 0$, експоненцијална, као њена инверзна, има хоризонталну асимптоту, праву $y = 0$, тако да је са доње стране ограничена бројем 0. Како је показано да је H (строго) растућа на R, следи да је:

$$\lim_{x \to +\infty} H(x) = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} H(x) = 0.$$

На крају, наставник је поставио задатак, са циљем да се докажу три важна својства функције H, тако да ученици у раду користе доказана основна својства логаритма.

Шести задатак:

Доказати:

а) ***за свако*** $\boldsymbol{a, b \in R}$ ***важи:*** $\boldsymbol{e^a e^b = e^{a+b}}$,

б) ***за свако*** $\boldsymbol{a, b \in R}$ ***важи:*** $\boldsymbol{\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}}$,

в) ***за свако*** $\boldsymbol{a, b \in R}$ ***важи:*** $\boldsymbol{(e^a)^b = e^{ab}}$.

а) $ln(e^a e^b) = lne^a + ln\, e^b = alne + blne$

$= a + b = (a+b)lne$

$= lne^{a+b}.$

Како важи да је логаритамска функција инјективна, следи да је: $e^a e^b = e^{a+b}$.

Доказ под б) и в) ученици изводе самостално, али уз напомену наставника да у раду примењују поступак који је описан под а).

5.5 Обрада функције дате помоћу одређеног интеграла – рад са студентима

Обрада функције, посебно логаритамске, дате помоћу одређеног интеграла, а затим обрада експоненцијалне функције као инверзне логаритамској, што је објашњено у претходним поглављима ове главе, реализоване су према постављеним потребама и циљевима процеса математичког моделирања. У овом поглављу објашњено је како је обрада функције дате помоћу одређеног интеграла спроведена на часовима математике, према одговарајућим васпитно-образовним циљевима изучавања наставних садржаја математичке анализе, са студентима прве године студија физике на Природно-математичком факултету у Новом Саду, наставни предмет Математика 1, у трајању од три школска часа, на крају зимског семестра академске 2012/2013. године.

Да би се у наставном процесу постигли оптимални исходи, за реализацију ових часова потребно је да су испуњени одређени предуслови. Студенти треба да буду:

- Упознати са основним својствима функције и анализом функције на основу њеног графичког приказа. Такође је важна способност правилног читања одговарајућих података са графика функције.
- Упознати са анализом функције користећи први извод, односно график њене изводне функције.
- Упознати са геометријском интерпретацијом одређеног интеграла.

- Упознати са појмом примитивне функције, фундаменталним теоремама калкулуса и основним својствима одређеног интеграла.
- Отворени за рад са новим и различитим начинима задавања функције [73].

5.5.1 Методологија рада

Предмет истраживања спроведеног са студентима физике је увођење и реализација, а затим анализирање ефикасности новог методичког приступа високошколској настави математике и примене образовног софтвера *GeoGebra* у процесу учења наставних садржаја математичке анализе, односно у обради функција датих помоћу одређеног интеграла.

Циљ истраживања је да се функције дате помоћу интеграла обраде савременим методичким приступом у рачунарском окружењу и традиционалним наставним методама. Затим да се експерименталним путем утврде ефекти оба начина рада и њихов утицај на квалитет математичког знања студената, као и оствареност оптималних резултата у изучавању одабраних наставних садржаја из области функције.

У оквиру постављеног циља, издвојени су следећи задаци истраживања:

- Израдити одговарајуће наставне материјале за обраду функција датих помоћу интеграла и утврђивање знања о фундаменталним теоремама калкулуса.
- Реализовати планиране активности у настави савременим методичким поступцима у рачунарском окружењу, а затим традиционалним наставним поступцима са студентима приближно једнаких предзнања.
- Израдити инструмент (тест знања) потребан у истраживачком процесу, а затим резултате реализоване наставе измерити тим тестом једнаким за све студенте.
- На основу резултата теста утврдити који методички поступак обезбеђује боље образовне ефекте, а затим утврдити оптималност обима наставних садржаја и нивоа образовних захтева [85].

Узорак истраживања. Истраживање је спроведено на 70 студената физике. Након што је извршена анализа резултата које су ови студенти остварили на колоквијуму из математичке анализе (наставни садржаји: функције), формиране су две групе - експериментална (Е-група) и контролна (К-група). Студенти су на колоквијуму остварили укупно 16 различитих резултата - од минималних 0 бодова, до максималних 15 бодова. Методом случајног одабира, исти број студената (евентуално са разликом ±1 студент) који су остварили идентичан резултат на колоквијуму, распоређен је у Е-групу, односно К-групу, као што је приказано у табели 5.1. Формиране групе састојале су се од по 35 студената. Учесници одабрани у устраживању представљају репрезентативан узорак зато што су групе састављене од студената свих нивоа предзнања и сличне дистрибуције резултата колоквијума из математичке анализе. На овај начин обезбеђена је уједначеност група на основу предзнања студената из области у којој је истраживање спроведено.

Табела 5.1. Дистрибуција студената обе групе према резултатима колоквијума

Број бодова *(колоквијум)*	***Број студената*** *Е-група/К-група*	***Број бодова*** *(колоквијум)*	***Број студената*** *Е-група/К-група*	***Број бодова*** *(колоквијум)*	***Број студената*** *Е-група/К-група*
15	2 / 1	***9***	1 / 1	***3***	2 / 3
14	0 / 1	***8***	1 / 1	***2***	4 / 4
13	1 / 1	***7***	2 / 3	***1***	1 / 1
12	1 / 1	***6***	3 / 2	***0***	10 / 10
11	1 / 1	***5***	4 / 3		
10	1 / 1	***4***	1 / 1		

Постављена је хипотеза истраживања и њена алтернативна:

H_0: Разлика Е-групе и К-групе у знању, разумевању и анализи функција датих помоћу одређеног интеграла, као и примени знања диференцијалног и интегралног рачуна није статистички значајна.
H_a: Разлика Е-групе и К-групе у знању, разумевању и анализи функција датих помоћу одређеног интеграла, као и примени знања диференцијалног и интегралног рачуна је статистички значајна.

Примењене су методе, инструменти и технике које су примењене и у експерименталном раду са ученицима. *Теоријска анализа садржаја* примењена је приликом проучавања литературе из математичке анализе прилагођене раду са студентима. *Дескриптивна метода* коришћена је при утврђивању основних теоријских поставки, практичних решења предмета истраживања и код прикупљања података, обраде и интерпретације резултата експерименталног истраживања. *Експериментална метода* са паралелним групама примењена је у делу рада који се односи на утврђивање и упоређивање знања студената Е-групе и К-групе. При анализи и обради података добијених у експерименталном делу истраживања примењене су и одговарајуће *статистичке методе* - мере дескриптивне статистике и метода статистике закључивања. *Техником тестирања* испитана су знања студената према постављеном циљу и дефинисаним задацима истраживања. *Васпитно-образовни материјал* употребљен у току истраживања укључио је: материјале експеримента (израђени наставни материјали за обраду функција датих помоћу интеграла намењени наставнику и студентима, рачунари и протокол који је вођен од стране наставника у Е-групи и К-групи за време истраживања) и испитни инструмент (задаци објективног типа, односно, тест знања).

Рад са експерименталном групом студената

Прва етапа рада

Како студенти нису били упознати са појмом несвојственог интеграла, наставник је увео функцију F помоћу интеграла на исти начин као и у раду са ученицима, што је објашњено у поглављу 5.2:

Нека је дат интервал $[a,b]$, t *произвољни елемент интервала* $[a,b]$ *и непрекидна функција* f *на интервалу* $[a,b]$. *Тада можемо дефинисати функцију* $F:[a,b]\to R$ *на следећи начин:*

$$\boldsymbol{F(t)=\int_a^t f(x)dx.} \tag{*}$$

Реализација наставе се затим заснивала на решавању различитих проблемских задатака [73] изложених у наставним материјалима и уз примену рачунара. Наставник је поставио задатке тако да су дате подинтегралне функције непрекидне на посматраним интервалима и већ познате студентима: квадратна, линеарна, константна и тригонометријска функција.

Спроведене даље активности обухватиле су самосталан рад студената на припремљеном наставном материјалу, али и активан рад наставника, у смислу пружања одговарајућих видова помоћи студентима. Са проблемима који су овде постављени студенти се нису сретали у ранијем школовању, тако да су сугестије и смернице наставника биле неопходне. Овако постављена концепција рада на часовима позитивно утиче на спремност студента да води „рационалан“ дијалог на релацијама наставник-студент и студент-студент, чиме се код студената развија способност комуникације и кооперације у раду [83].

Друга етапа рада

За функцију:

1. $\boldsymbol{f(x)=x^2}$

2. $\boldsymbol{f(x)=x-4}$

3. $\boldsymbol{f(x)=3}$

4. $\boldsymbol{f(x)=-\sin x}$

а) одредити $\int_0^1 f(x)dx$,

б) одредити $\int_0^t f(x)dx$,

в) одредити $\int f(x)dx$,

г) објаснити везу између решења добијених под б) и в).

У другој етапи рада, примењена је иста методичка концепција као и у раду са ученицима, тако да су приликом решавања ових задатака студенти, уз помоћ наставника, спроводили активности које су детаљно описане и објашњене у поглављу 5.2 (задаци 1 - 4.).

Решавање наведених задатака у рачунарском окружењу има одговарајући методички значај, како у раду са ученицима, тако и са студентима. Одабрани приступ омогућава реализацију когнитивних активности, неопходних за суштинско разумевање прве и друге фундаменталне теореме калкулуса и изградњу појма функције дате помоћу интеграла. Посебно се истиче остварен активан утицај на способност ученика/студената за извршавање упоређивања, апстраховања и уопштавања. Ове активности усмеравају ученике/студенте на извођење закључка да је свака функција F облика $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ примитивна за подинтегралну функцију f, односно да је $F' = f$, што управо представља прву фундаменталну теорему калкулуса. Такође је визуелно показано како се примитивна функција може добити и помоћу одређеног интеграла, тј. помоћу површине између подинтегралне функције и x-осе. Рад на различитим постављеним проблемима доприноси објашњењу Њутн-Лајбницове (друге фундаменталне) теореме, с обзиром на то да се у доказу ове теореме посматра примитивна функција F функције f, где је F дата помоћу одређеног интеграла: $F(t) = \int_a^t f(x)dx$, што ученицима, али и студентима, представља проблем за прихватање и разумевање.

<u>Трећа етапа рада</u>

Нека је функција F дата помоћу одређеног интеграла $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, ***где је:***

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x) = x - 4$

3. $f(x) = 3$

4. $f(x) = -\sin x$

а) у задацима 1 - 3. попунити табелу:

t	-2	-1	0	1	2
$F(t)$					

а) у 4. задатку попунити табелу:

t	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$F(t)$					

б) одредити домен и кодомен функције F,

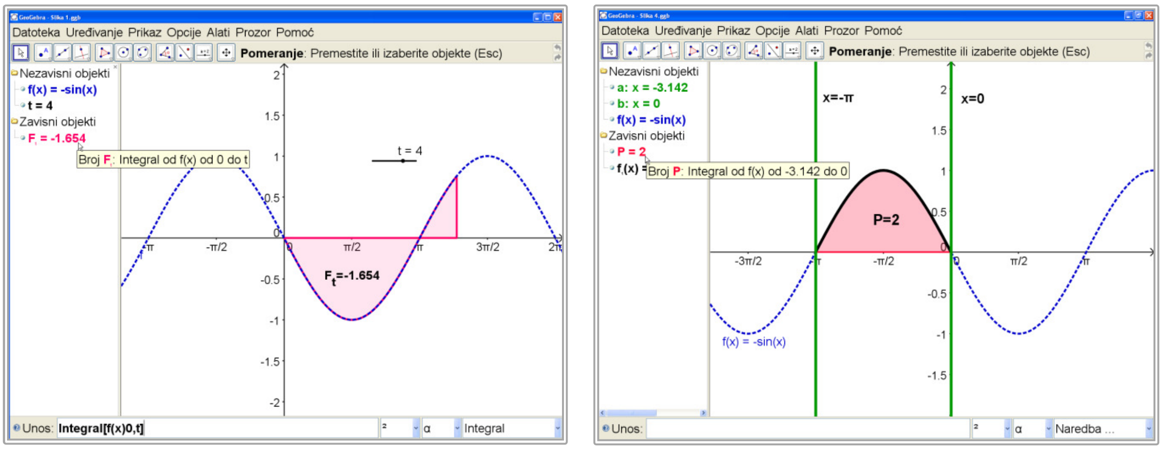
в) одредити знак функције f,

г) одредити интервале монотоности функције F.

У наведеним задацима, постављају се захтеви да се испитају нека основна својства функција датих помоћу интеграла, оних које су студенти одредили у претходној етапи рада. Овде је истакнута идеја о стицању и продубљивању знања студената о функцији датој помоћу интеграла кроз анализу тих функција. Такође, овакав приступ омогућава разумевање и примену релације $F^{'} = f$, односно трансфер знања са назначених наставних садржаја калкулуса на конкретне проблеме, тако да студенти у раду повезују својства функције F са својствима функције f. Од студената се у сваком задатку захтева спровођење аналогних когнитивних процеса мишљења, резоновања и аргументовања, тако да је у даљем тексту детаљно објашњен методички приступ решавању 4. задатка.

а) Студентима се поставља захтев да за одређене вредности независно променљиве t израчунају вредност функције $F(t) = \int_0^t f(x)dx$. На пример, да би израчунали $F(-\pi)$, потребно је да студенти повежу задатак са дефиницијом (*) и да одреде $F(t) = \int_0^t(-\sin x)\, dx$ за $t = -\pi$ $(a = 0)$, односно $F(-\pi) = \int_0^{-\pi}(-\sin x)\, dx$. Решавање задатка студенти су свели на извршавање практичних операција, на израчунавање одређеног интеграла слично као и у другој етапи рада, у овом примеру: $F(-\pi) = \int_0^{-\pi}(-\sin x)\, dx = -\cos x\,\Big|_{-\pi}^{0} = -2$, применом Њутн-Лајбницове теореме.

Наставник је даље усмерио рад тако да студенти наведена конкретна израчунавања повежу са геометријском интерпретацијом одређеног интеграла, коју су добили применом *GeoGebra*-е приликом решавања 4. задатка под б) у другој етапи рада (слика 5.12.а). Важно је било поставити студентима следеће питање: Ако је позната нумеричка вредност површине P фигуре ограничене графиком функције f, x-осом и правама $x = 0$, $x = b$, да ли можете да одредите вредност $F(b)$? Конкретније: Ако површина фигуре ограничене графиком функције $f(x) = -\sin x$, x-осом и правама $x = -\pi$, $x = 0$ износи $P = 2$ (слика 5.12.б), да ли можете да одредите вредност $F(-\pi)$?



а) *б)*

Слика 5.12. Примена GeoGebra-е у израчунавању одређеног интеграла и његовој геометријској интерпретацији у четвртом задатку

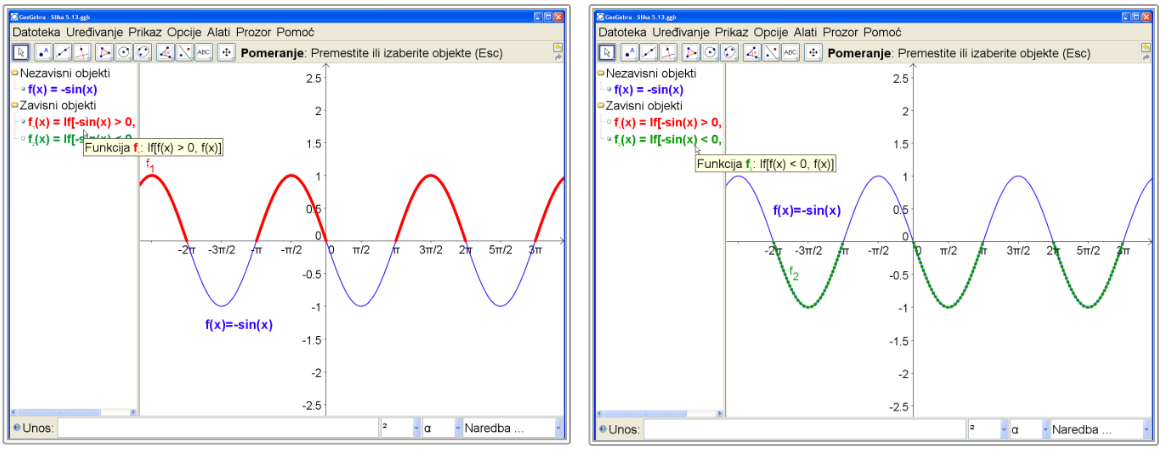
Како је овде је $P = \int_{-\pi}^{0}(-\sin x)\,dx = 2$, уз одговарајућу способност опажања, за разјашњавање ситуације уз помоћ графичког приказа подинтегралне функције f (слика 5.12.б), студенти су израчунали вредност $F(-\pi)$. Она је једнака нумеричкој вредности површине P, али са негативним предзнаком. Током рада, одређивање предзнака представља студентима конфликтну ситуацију. Због тога је посебно важно да студенти кроз разговор са наставником закључе како се приликом одређивања предзнака мора истовремено водити рачуна о томе да ли је доња граница мања или већа од горње границе интеграла, као и о знаку подинтегралне функције на посматраном интервалу.

Коначно, у циљу даљег подстицања математичког мишљења и способности генерализовања, описани методички приступ омогућио је наставнику да постави питање: Да ли се вредност функције F може одредити и ако аналитички израз подинтегралне функције f није познат? Такође, од студената се тражило да детектују и образложе претпоставке и услове потврдног одговора на постављено питање.

Захтев задатка, тј. одређивање вредности функције F дате помоћу одређеног интеграла, усклађен је са могућностима да се кроз рад на задатку са студентима утврде стечена знања о основним својствима одређеног интеграла. Два начина за одређивање вредности функције F указују на то да се одређени интеграл може израчунати са и без примене Њутн-Лајбницове теореме, чиме се код студената подстиче „комбинаторно мишљење“ [83].

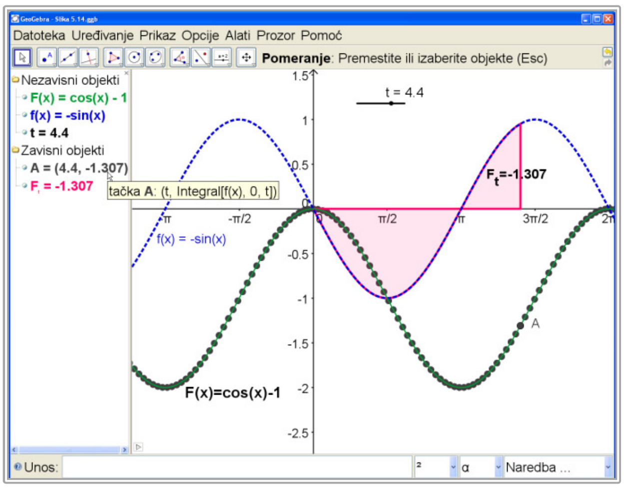
б) У овом делу задатка, од студената се захтева разумевање и примена дефиниције (*) у циљу одређивања домена и кодомена функције F. Податке који су дати у овој дефиницији студенти треба да трансформишу у информације, које затим трансформишу у знања о функцији F, тако да у одговору правилно закључе да је домен функције F скуп R, зато што је на том скупу подинтегрална функција f дефинисана и непрекидна, и да је кодомен функције F скуп R.

в) Студенти су једноставно одредили знак функције f, чији је аналитички израз дат, међутим овде је било предложено да се знак функције одреди и на основу графичког приказа функције (слика 5.13), а затим да се упореде резултати.



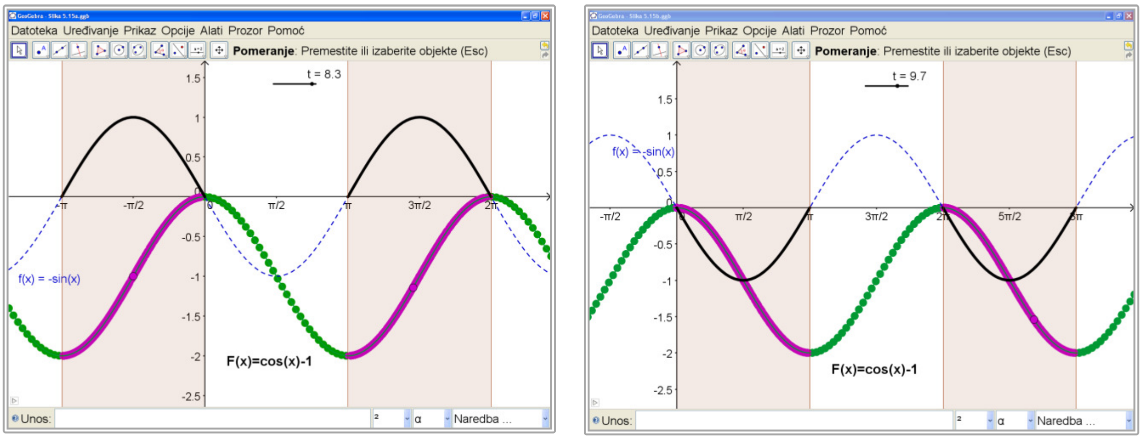
Слика 5.13. Примена GeoGebra-е у одређивању знака фунцкије f у четвртом задатку

г) Већина студената је овде применила исту стратегију, тако што су на класичан начин одредили интервале монотоности функције F, користећи њен график, који су конструисали уз помоћ *GeoGebra*-е у другој етапи рада (4. задатак б) (слика 5.14). Уочено је да ови студенти у току решавања задатка нису повезали својства функције F са својствима функције f. Овакав начин рада је очекиван, а узрокован је искуствима која се код ученика/студената утемељују кроз традиционалне начине рада приликом испитивања својстава неке функције.



Слика 5.14. Примена GeoGebra-е у конструкцији графика фунцкије F дате помоћу интеграла у четвртом задатку

Због тога је наставник усмерио пажњу студената на графичке приказе функција F и f у истом геометријском прозору *GeoGebra*-е. Ради лакшег визуелног резоновања, студентима је предложено да дискутују о монотоности функције F на одређеним интервалима, на пример: на интервалима $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 2\pi)$, односно на $(0, \pi)$ и $(2\pi, 3\pi)$, а затим да добијене податке повежу са подацима добијеним под в) (слика 5.15). Примена рачунара на овај начин помаже у процесу успостављања везе између знака функције f и монотоности функције F.



Слика 5.15. Примена GeoGebra-е у одређивању монотоности фунцкије F дате помоћу интеграла у четвртом задатку

Појединци су, позивајући се на релацију $F' = f$, уочили да успостављена веза произилази и као директна последица назначене релације. Због тога је и овде било могуће извршити одговарајуће генерализације. Бољи студенти закључили су да за сваку функцију облика $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ важи да F расте на оним интервалима на којима је f позитивна, а опада на оним интервалима на којима је f негативна, и да је испитивање монотоности функције дате помоћу одређеног интеграла могуће и само на основу графика подинтегралне функције, јер је $F' = f$.

Кроз рад на изложеном наставном материјалу и одабраним методичким поступцима, студенти су могли да, на основу више појединачних примера, комбиновањем концепта слике и концепта дефиниције функције дате помоћу интеграла, стварају претпоставке, потврђују правила и изграђују структуре које се односе на ове функције. Позивајући се на ранија искуства студената у испитивању функције на основу графика њене изводне функције, уопштавање произилази и из чињенице да се то испитивање увек спроводи на исти начин, без обзира на начин задавања функције. Уочавање и усвајање релације $F' = f$, као веома важне за анализу функције F, омогућава студентима да даље испитују њена својства, екстремне вредности, интервале конвексности и превојне тачке, а на основу графика функције f.

Рад са контролном групом студената

У раду са К-групом, наставник је користио исте задатке у наведеним етапама рада, али без примене рачунара у наставном процесу. То значи да су студенти ове групе такође били упознати са појмом функције дате помоћу интеграла, али је рад на постављеним задацима подразумевао извођење одговарајућих операција, што је резултирало стицањем и продубљивањем, у највећој мери, искључиво формалног знања студената.

Студенти К-групе су у задацима под а) и в), који су били дати у другој етапи, једноставним радом израчунали одређени и неодређени интеграл, али без визуелизације добијених решења. За разлику од студената Е-групе, који су због рада у рачунарском окружењу имали конфликтну ситуацију приликом решавања и визуелизације одређеног интеграла са променљивом t у горњој граници, студенти К-групе су, примењујући исти класичан поступак као и под а), дошли до решења задатака под б). Само су појединци правилно објаснили везу између решења под б) и в), па је наставник на крају друге етапе морао да укаже студентима на релацију $F^{'} = f$.

У трећој етапи, задатке под а) студенти К-групе решавали су тако што су извршавали практичне операције, примењујући Њутн-Лајбницову теорему, слично као што су радили и студенти Е-групе у почетним фазама ове етапе. У складу са потребама задатака под б) и г), студенти К-гупе су се снашли на следећи начин: самостално су цртали график функције F, тако што су одредили њен аналитички израз и у координатни систем уносили тачке $(t, F(t))$ које су одредили под а), а што свакако није водило до довољно тачних и прецизних резултата. Затим су на основу графика одредили домен, кодомен и монотоност функције F. Овакав начин рада је био очекиван, зато што се у средњошколској настави математике често користи у анализи функција. Задатке под в) студенти су решавали на класичан начин, без графичког приказа функције f. Истичемо да је мањи број студената у току треће етапе користио дефиницију (*) и релацију $F^{'} = f$.

За разлику од методичког приступа раду са Е-групом, који се заснивао на методи хеуристичког разговора и проблемској методи, у чијим су основама учење откривањем, односно истраживачки усмерена настава у рачунарском окружењу, рад са К-групом био је заснован на традиционалном приступу обради функција, са фронталним и индивидуалним обликом рада. Уочено је да је примена класичних наставних метода и облика рада у испитивању својстава функција у мањој мери подстицала и усмеравала студенте да самостално „откривају“ појам функције дате помоћу интеграла, начела и законе у математичким садржајима који су обрађени. Ипак, требало би нагласити да су увођењем и обрадом функција датих помоћу интеграла и класичним наставним методама проширени и обогаћени садржаји математичке анализе у високошколској настави математике.

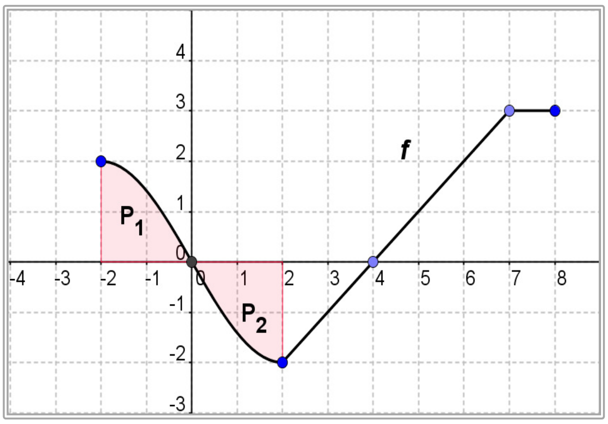
5.5.2 Резултати тестирања студената са дискусијом

За процену постигнућа студената, конструисан је мерни инструмент - неформални тест који се састојао од десет задатака слободне форме. Тест припада групи дијагностичких тестова. Након завршетка експерименталног рада, студенти обе групе били су тестирани овим тестом. На основу теста добијена је представа (дијагноза) о напредовању студената, односно о утицају примене нове методичке концепције у обради функција на квалитет знања студената с обзиром на одабране наставне садржаје. Резултати истраживања који су овде представљени указују на позитивне аспекте и предности одабраног методичког приступа и рада уз помоћ рачунара, али и на неке недостатке. Прикупљени су објективни показатељи о томе да ли је, и у којој мери, овакав приступ на часовима предавања утицао на развој математичких способности код студената, на њихове могућности, сналажење, али и на њихов однос према новом начину задавања функције. Уочени су проблеми, препреке и потешкоће са којима су се студенти суочили у току рада. Коначно, на основу добијених резултата, одређује се оствареност предвиђених циљева и оптималних исхода наставе и учења.

Тест је студентима био дат у следећој форми:

ТЕСТ

Дата је функција $F(t) = \int_{-2}^{t} f(x)dx$, где је функција f дефинисана и непрекидна на интервалу $[-2, 8]$. График функције f је приказан на слици, тако да је $P_1 = P_2 = 2.5$.



1. Попунити табелу:

t	-2	0	2	3	4	7	8
$F(t)$							

2. Одредити домен функције F.

3. Одредити кодомен функције F.

4. Одредити интервале на којима функција F расте. Одредити интервале на којима функција F опада.

5. За које вредности независно променљиве t функција F достиже локални минимум, а за које локални максимум?

6. Одредити интервале на којима је функција F конвексна. Одредити интервале на којима је функција F конкавна.

7. Одредити превојне тачке функције F.

8. Која је веза између функцијаf и F?

9. Нацртати тачке $(t, F(t))$ у координатном систему и скицирати график функцијеF.

10. Одредити скуп вредности функције F.

Коментар:

Да би се испитало суштинско разумевање функције дате помоћу одређеног интеграла, на тесту је функција f задата графички, без њеног аналитичког израза. График функције f дат је тако да су његови делови обрађени у задацима из наставних материјала.

Студенти су задатке као што су прва четири на тесту решавали у току наставе, а одговарајућа методичка објашњења дата су у оквиру треће етапе рада. На часовима обраде функције дате интегралом, студенти су испитивали њену монотоност, али нису одређивали њене екстремне вредности, конвексност и превојне тачке. Због тога су на тесту дати 5, 6. и 7. задатак, са циљем да одговори студената омогуће наставнику даљи увид у степен усвојености и разумевања релације $F' = f$ и њихову способност у испитивању својстава функције дате интегралом на основу графика њене подинтегралне функције. На овај начин било је могуће утврдити нивое знања студената, као и њихове могућности у трансформацији тих знања и развоју вишег математичког мишљења. У 8. задатку, од студената се захтева да математичким симболима и/или речима искажу везу између функција F и f. У 9. задатку било је потребно да студенти на основу добијених тачака $(t, F(t))$ и испитаних својстава функције F нацртају њен график. Последњи задатак је дат са циљем да се испита да ли студенти праве разлику између кодомена и скупа вредности функције.

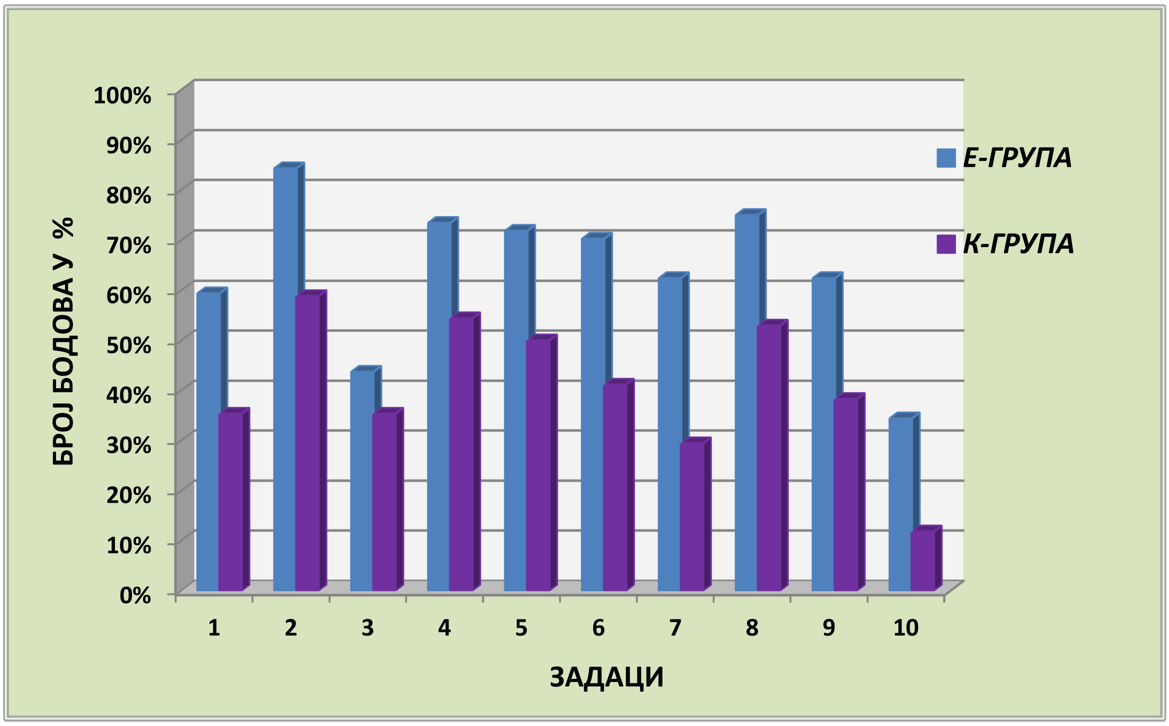
Сваки задатак је бодован са једним бодом, па је максималан број бодова на тесту био 10. За погрешан одговор, или неурађен задатак, студенту се доделило 0 бодова. У 4, 5. и 6.

задатку студенту се доделило пола бода уколико је тачно одговорио на једно од два постављена питања.

Тест је радило 66 студената, 3 студента из Е-групе и 1 студент из К-групе нису радили тест. Студенти Е-групе су у просеку тачно урадили 63.750% теста, а студенти К-групе 40.735% теста. У обе групе постојали су студенти који су остварили максималан број бодова, као и они који нису освојили ни један бод. Резултати теста по задацима у процентима приказани су у табели 5.2. и на графикону 5.1.

Табела 5.2. Резултати теста по задацима у процентима

Задатак	*Е-група*	*К-група*	*Задатак*	*Е-група*	*К-група*
1.	59.375%	35.294%	*6.*	70.313%	41.176%
2.	84.375%	58.824%	*7.*	62.500%	29.412%
3.	43.750%	35.294%	*8.*	75.000%	52.941%
4.	73.438%	54.412%	*9.*	62.500%	38.235%
5.	71.875%	50.000%	*10.*	34.375%	11.765%



Графикон 5.1. Упоредни хистограм теста

Студенти нису имали проблема код одређивања домена функције, тако да је у обе групе најуспешније решен 2. задатак. Код обе групе примећени су слаби резултати у 3. и 10. задатку. То значи да студенти нису у потпуности усвојили дефиницију функције дате помоћу одређеног интеграла и само мали број студената је тачно одредио кодомен функције. Међутим, истичемо да су слаби резултати у овим задацима такође последица недовољних и погрешних представа о појмовима кодомена и скупа вредности функције, које се код ученика формирају још на основношколском и средњошколском нивоу учења. Из праксе је познато да наставници не истичу у довољној мери разлику између ова два појма или их чак и поистовећују у току обраде функција.

Током рада са групама, највише се инсистирало на разумевању и примени везе између функција F и f, међутим, најчешћи погрешан одговор студената у 8. задатку био је: „F је изводна функција за функцију f”.

Нешто слабији резултат остварен је и у 1. задатку, што није било очекивано. У овом задатку, студенти су требали да за одређене вредности независно променљиве t израчунају вредности функције $F(t)$. Поједини студенти правилно су повезали вредност $F(t)$ са површином фигуре ограничене графиком функције f и x-осом у границама интеграције, али нису тачно решили цео задатак. Анализом њихових радова, долазимо до закључка да су погрешни одговори за неке вредности функције F били узроковани недовољним разумевањем геометријске интерпретације одређног интеграла и/или непрецизним извођењем потребних рачунских операција. Такође, запажамо да су неки студенти покушали да одреде аналитички израз функције f, наводећи да је f на интервалу $[-2,2]$ разломљена рационална функција.

У 4. задатку било је потребно да студенти испитају монотоност функције F, што је рађено у току експерименталног процеса, тако да је остварен добар резултат био и очекиван. Поједини студенти, који су погрешно решили задатак, навели су да F расте на интервалу $(2,8)$, а опада на интервалу $(-2,2)$, међутим на овим интервалима је F конвексна, односно конкавна, што су требали да одреде у 6. задатку.

Студенти Е-групе су на тесту остварили добре резултате у задацима са којима се нису сретали током часова обраде функције дате помоћу интеграла. То значи да су тестом детектоване способности студената Е-групе које одговарају нивоу креативне примене стечених знања и да одабрани методички приступ омогућава трансфер са нивоа репродуктивне примене знања на виши ниво знања. У овим задацима (6. и 7. задатак) остварена је и највећа разлика између група.

Занимљиво је и то да, иако су студенти обе групе постигли лошији резултат у 3. задатку, код овог задатка остварена је и најмања разлика између група.

Да би се утврдило да ли је разлика у резултатима Е-групе и К-групе статистички значајна, реализована је обрада теста на основу бодовног постигнућа студената, *Студентовим t-тестом разлике аритметичких средина два независна узорка*. Добијени статистички резултати представљени су у табели 5.3.

Табела 5.3. Статистички резултати теста

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		***Е-група***	***К-група***
Број студената	**n**	32	34
Средња вредност броја бодова	$\bar{x}$	6.375	4.074
Варијанса	s^2	7.887	11.381
Стандардна девијација	**σ**	2.808	3.374
Коефицијент варијације	**V**	44.053%	82.816%
Стандардна грешка аритметичке средине	$\sigma\bar{x}$	0.496	0.579
Апсолутна разлика аритметичких средина	$D\bar{x}$	2.842	
Стандардна грешка разлике аритметичких средина	$\sigma d\bar{x}$	0.762	
Критички однос	**t**	3.019	
Степени слободе	**df**	64	
Ниво значајности	**0.01**	2.660	

Израчунати коефицијенти варијације за Е-групу и К-групу (табела 5.3.) већи су од 30%, што значи да су *обе групе нехомогене у тестираном знању*. Резултати указују на значајна одступања од просека, с тим да су разлике између најмањег и највећег броја бодова које су студенти освојили на тесту мање изражене у Е -групи него у К-групи. Овде треба напоменути да је значајан варијабилитет детектован и у односу на просечан успех који су тестирани студенти остварили на писменом делу испита из наставног предмета Математика 1. Анализом резултата испита такође је утврђено да студенти прве године студија физике нису хомогени ни у знању које се односи на друге обрађене математичке садржаје и шири спектар наставних тема.

На основу резултата добијених у табели 5.3, може се приступити статистичком тестирању нулте постављене хипотезе. Како је $t = 3.019 > t_{(64;\ 0.01)} = 2.660$, одбацује се нулта хипотеза и прихвата алтернативна хипотеза, са сигурношћу од 99% тврдимо: **разлика Е-групе и К-групе у знању, разумевању и анализи функција датих помоћу одређеног интеграла, као и примени знања диференцијалног и интегралног рачуна, статистички је значајна**.

Међутим, у обе групе био је очекиван нешто бољи резултат на тесту од оствареног. Студенти физике били су тестирани две недеље након обраде функција датих помоћу одређеног интеграла, тако да нису у потпуности усвојили појам и својства ових функција. Потребно је да прође одређени временски период да би студенти повезали сва знања о функцијама која су стекли у току школовања и да би их на прави начин примењивали када је то потребно. Такође, сматрамо да би резултати на факултетском нивоу били бољи уколико би се презентована методичка концепција примењивала и током обраде наведених наставних садржаја математичке анализе у средњошколској настави математике.

6 Финално експериментално истраживање

6.1 Увод

Експериментални наставни процес, усмерен ка постављеним циљевима, завршава одређеним исходима и резултатима, па је потребно спровести **евалуацију**, односно контролу, праћење и вредновање његових циљева. Овај део истраживања подразумева експериментално утврђивање остварености циљева и задатака експерименталног рада са гимназијалцима, који се трансформишу у квалитативне и квантитативне промене у постигнућу и развоју ученика [89].

Резултати добијени у истраживању имају двоструки значај. Прво, могућа је евалуација учења и рада у току експерименталне наставе. Информације о резултатима учења показују ученику шта је постигао и шта би могао да постигне уз одговарајућу активност и услове. Упознавање ученика са тренутним постигнућем и у одговарајућим условима могућим постигнућем може значајно подстакнути ученика да постиже више тј. да се не задовољава постигнутим. Друго, евалуација омогућава наставнику да добије важне повратне информације које су показатељи да ли су се, и у којој мери, ученици приближили жељеним, очекиваним циљевима и задацима који су постављени у експерименталној настави. Резултати до којих се долази у процесу евалуације наставнику су значајни и у смислу смерница код одређивања, модификовања и прилагођавања нових методичких приступа и њихових васпитно-образовних циљева у наставној пракси [89].

Финално експериментално истраживање спроведено је у циљу евалуације реализованог експерименталног рада који је био усмерен на основни аспект наставног процеса: утврђивање, проширивање, продубљивање и стварање функционалних математичких знања ученика, а која се првенствено односе на садржаје математичке анализе - функцију, посебно линеарну, експоненцијалну и логаритамску функцију и извод функције.

У другом поглављу ове главе дат је и објашњен методолошки оквир финалног истраживања.

У трећем поглављу наведен је финални тест знања из математике са методичким објашњењима за сваки задатак, а затим су, на основу статистичке обраде података добијених на финалном тестирању, презентовани резултати истраживања.

У четвртом поглављу ове главе спроведена је дискусија о резултатима, са посебним освртом на разлике у резултатима ученика са којима је реализована иновативна настава и ученика са којима је реализована традиционална настава. Тестиране су постављене хипотезе и дата закључна разматрања о финалном истраживању.

6.2 Методолошки оквир финалног истраживања

Ово истраживање спроведено је у другом полугодишту школске 2011/2012. године са ученицима Е-групе и К-групе које су одређене у 3. глави дисертације.

Предмет истраживања

Као што је назначено у уводном поглављу ове главе, предмет завршног дела истраживачког процеса је вредновање и испитивање сврсисходности примене осмишљених нових дидактичких модела наставе, усмерених ка циљевима наставе у гимназији, применом образовног софтвера *GeoGebra* и реализације рада током експерименталног периода, односно анализирање финалног стања (позитивних исхода у настави и учењу математике применом одабраних методичких поступака; оптималних знања ученика).

Претпостављамо да боље резултате постижу ученици са којима су садржаји математичке анализе обрађени новим, савременим методичким поступцима, у односу на ученике са којима су исти наставни садржаји обрађени и поновљени традиционалним методичким поступцима.

Циљеви истраживања

Циљ је утврђивање, експерименталним путем, степена утицаја примене математичког моделирања у интердисциплинарном приступу настави/учењу, спровођења нове методичке концепције у обради основних својстава логаритамске и експоненцијалне функције, у рачунарском окружењу, на квалитет математичког знања ученика и оствареност оптималних резултата у учењу и изучавању наставних садржаја из области функције. Резултати истраживања треба егзактно да укажу на постигнуте оптималне исходе у настави, који даље могу бити основ за увођење промена у наставном процесу.

Задаци истраживања

Из општег циља произилазе и конкретни задаци истраживања:

- Израдити финални тест, усклађен са потребама финалног истраживања, а затим ученике који учествују у истраживању тестирати тим тестом.
- Утврдити да ли примена математичког моделирања у интердисциплинарном приступу настави/учењу уз помоћ рачунара омогућава продубљивање суштинског знања из математике и утиче на његову трајност и примењивост.
- Утврдити да ли примена моделирања утиче на способност ученика да решавају проблеме из реалног контекста и задатке који захтевају рад на математичким моделима.
- Утврдити да ли реализација назначене методичке концепције у анализи логаритамске и експоненцијалне функције уз помоћ рачунара утиче на развој одговарајућих математичких компетенција ученика.
- Утврдити да ли боље резултате из математике након експерименталног рада постижу дечаци или девојчице.
- Утврдити на које ученике је (према њиховом досадашњем успеху из математике) експериментална настава посебно утицала.

Узорак истраживања

У истраживању су учествовали ученици Е-групе и К-групе као што је одређено у 3. глави дисертације. Сви ученици из одељења у Е-групи похађали су наставу у којој су учествовали у активностима и радњама које су биле предвиђене у току спровођења експерименталног наставног процеса. Такође, сви ученици из одељења у К-групи похађали су наставу у којој су се назначени наставни садржаји обрађивали, понављали и утврђивали традиционалним методичким поступцима. Међутим, у анализи резултата финалног истраживања у обзир ће бити узети само резултати оних ученика који су учествовали и у иницијалном истраживању.

Хипотезе истраживања

Постављена је следећа основна нулта хипотеза и њена алтернативна:

H_{01}: *Разлика у резултатима ученика Е-групе и К-групе на финалном тесту није статистички значајна.*
H_{a1}: *Разлика у резултатима ученика Е-групе и К-групе на финалном тесту је статистички значајна.*

У овом истраживању могуће је утврдити да ли постоје значајне разлике између резултата дечака и резултата девојчица у Е-групи на финалном тесту. Тако је постављена друга нулта хипотеза и њена алтернативна:

H_{02}: *Разлика у резултатима према полу у Е-групи на финалном тесту није статистички значајна.*
H_{a2}: *Разлика у резултатима према полу у Е-групи на финалном тесту је статистички значајна.*

Према потребама и могућностима истраживања, ученици Е-групе били су подељени у три подгрупе, на основу успеха из математике који су остварили у претходна три разреда:

- А-подгрупа: средња вредност оцена из математике на крају првог, другог и трећег разреда је у интервалу $[2.00; 3.00)$;
- Б-подгрупа: средња вредност оцена из математике на крају првог, другог и трећег разреда је у интервалу $[3.00; 4.00]$;
- В-подгрупа: средња вредност оцена из математике на крају првог, другог и трећег разреда је у интервалу $(4.00; 5.00]$.

Затим су постављене следеће хипотезе:

H_{03}: Разлика у резултатима подгупа А, Б и В на иницијалном тесту није статистички значајна.
H_{a3}: Разлика у резултатима подгупа А, Б и В на иницијалном тесту је статистички значајна.
H_{04}: Разлика у резултатима подгупа А, Б и В на финалном тесту није статистички значајна.
H_{a4}: Разлика у резултатима подгупа А, Б и В на финалном тесту је статистички значајна.

Такође, могуће је утврдити да ли, и у којој мери, постоји зависност између резултата на иницијалном тесту и резултата на финалном тесту ученика Е-групе и К-групе. Тако су постављене следеће хипотезе:

H_{05}: Корелација између резултата на иницијалном тесту и резултата на финалном тесту ученика Е-групе није статистички значајна.
H_{a5}: Корелација између резултата на иницијалном тесту и резултата на финалном тесту ученика Е-групе је статистички значајна.
H_{06}: Корелација између резултата на иницијалном тесту и резултата на финалном тесту ученика К-групе није статистички значајна.
H_{a6}: Корелација између резултата на иницијалном тесту и резултата на финалном тесту ученика К-групе је статистички значајна.

Методе, технике и инструменти истраживања

Примењене су оне *методе*, *инструменти* и *технике* које су одређене и објашњене у оквиру иницијалног истраживања.

Испитни инструмент је овде подразумевао:

- финални тест знања из математике.

6.3 Резултати финалног истраживања

6.3.1 Финални тест знања из математике

У истраживању је коришћен финални тест, који као и иницијални тест спада у *неформалне тестове*. Финални тест припада групи *тестова брзине* и *дијагностичких тестова*. За финално мерење знања ученика одређена су два школска часа. Садржај финалног теста посвећен је одређеним наставним садржајима, а намена овог теста је да се утврде напредовања, својства, способности, тешкоће и недостаци код појединих ученика у савладавању тих садржаја, а који су били заступљени у току експерименталне наставе. Помоћу финалног теста добија се и представа (дијагноза) о томе како је ученик савладао сваки поједини аспект назначених садржаја ([14][38]). Поред испитивања обима знања везаних за функције, финални тест испитује и способност ученика за примену тих знања, као и разумевање и схватање узајамних односа обрађених математичких појмова [85].

Финални тест садржи 12 задатака који су класификовани у две групе: *задаци вишеструког избора* и *есејски задаци*, као што је објашњено у поглављу 3.3.1. Неформални тест не захтева проверавање свих метријских карактеристика [85], али треба напоменути да финални тест поседује све потребне особине, као и иницијални тест: валидност, поузданост, објективност, осетљивост, обухватност и практичност.

У финалном тесту дати су задаци у којима се проверавају ученичка знања о функцијама, тако да су посебно обрађене линеарна, експоненцијална и логаритамска функција и први извод функције.

Задаци су у финалном тесту дати тако да захтевају од ученика више математичког знања, рада, резоновања, па су због тога сложенији, тежи и комплекснији од задатака на иницијалном тесту. То потврђује и чињеница да је аритметичка средина индекса лакоће задатака на иницијалном тесту 0.612, а на финалном 0.513. Према наведеним индексима, иницијални тест припада групи нешто лакших тестова, док финални тест има индекс који се може сматрати веома оптималним.

Финални тест дат је ученицима у следећој форми:

ФИНАЛНИ ТЕСТ

Име и презиме ученика ____

Школа, разред и одељење ____

1. Написати дефиницију функције.

2. **Који од наведених израза дефинишу y као функцију од x? (заокружити тачне одговоре)**

а) $x = -2$ б) $y = -2$ в) $x^2 + y^2 = 1$ г) $y = \begin{cases} -1, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2x - 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

3. **Одредити реалан број a тако да је једнакошћу $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ a, & x \geq 1 \end{cases}$ одређена функција $f: R \to R$. (заокружити тачан одговор)**

а) $a = 1$ б) не постоји такав реалан број в) $\forall\, a \in R$ г) $a = 3$

Коментар:

Резултати иницијалног теста указали су на чињеницу да ученици имају проблема да дају прецизну дефиницију функције. На финалном тесту се такође захтевало од ученика да напишу ову дефиницију (1. задатак), са циљем да се утврди да ли је, и у којој мери, објашњавање и приближавање појма функције у реалном контексту, кроз моделирање, утицало код ученика на процес формализације назначеног појма и одређеност при навођењу његове формалне дефиниције [54].

Други и трећи задатак ([28][60]) дати су са циљем да се утврди да ли је експериментални рад, који је реализован са ученицима Е-групе, довео до побољшања схватања појма функције, његовог бољег прихватања, развијања осећаја за дедуктивно расуђивање и до превазилажења спознајних конфликата узрокованих претходним искуством [54]. Такође, требало је испитати и да ли утврђивање појма функције кроз појмове хемијске кинетике доводи знање ученика до нивоа стварног разумевања, а посебно нивоа примене стеченог знања у конкретним проблемима.

Многим ученицима конфликтну ситуацију при закључивању представљао је израз у другом задатку под б). Појединци сматрају да израз не представља функцију, зато што у њему не фигурише x. Неким ученицима проблем су представљали и други задатак под г), као и трећи задатак, зато што се у овим примерима разматрају функције дате по деловима.

4. **За које реалне бројеве p и q је права $(2p - 3q + 3)x + (5p - 6q)y = 3 + 2p$ паралелна x-оси, а на y-оси одсеца одсечак -3? (заокружити тачан одговор)**

а) $p = -3, q = -3$ б) $p = \frac{6}{5}, q = \frac{2}{3}$ в) $p = 3, q = 3$ г) $p = 3, q = 0$

5. **У линеарној функцији $f(x) = (a - 1)x - (a + 2)$ одредити реалан број a, тако да је нула функције тачка чија је апсциса једнака 5. (заокружити тачан одговор)**

а) $a = \frac{7}{4}$ б) $a = -7$ в) $a = \frac{4}{7}$ г) $a = 7$

6. **Одредити параметар k, тако да график функције $y = \frac{3k-1}{k-2}x + 2k - 1$ гради са x-осом оштар угао. (заокружити тачан одговор)**

а) $k \in (\frac{1}{3}, 2)$ б) $k \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [2, \infty)$ в) $k \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$ г) $k \in (2, \infty)$

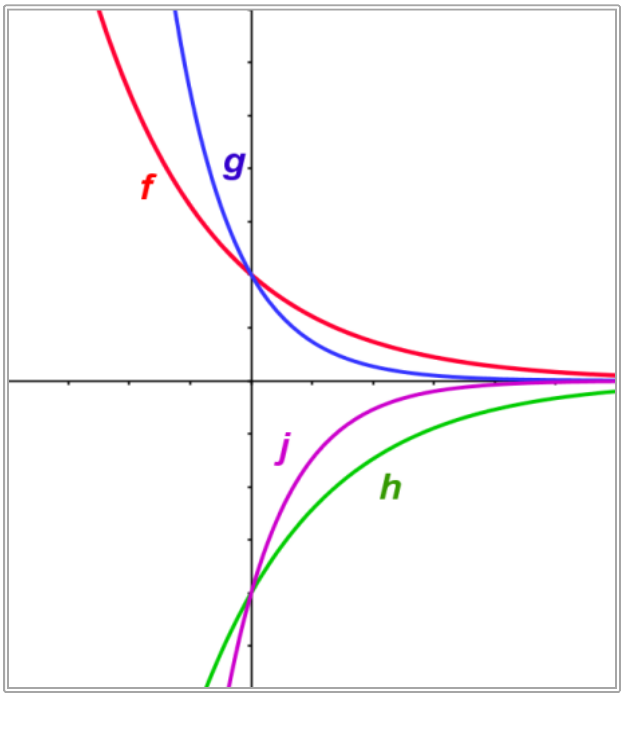
Коментар:

Како су у току моделирања линеарне функције представљале математичке моделе, четврти, пети и шести задатак [23] дати су са циљем да се испитају ученичка знања о неким основним својствима ове функције.

Обухватност четвртог задатка огледа се у томе да ученик, према условима датим у задатку, мора најпре правилно да трансформише једначину праве у експлицитни облик, а затим да одреди шта је коефицијент правца праве и одсечак на y-оси. Такође, захтева се и да ученик примени знања о коефицијенту правца праве у случају када је она паралелна x-оси, што је код појединих ученика створило проблем јер нису били сигурни да ли је тада $k = 0$ или $k = \infty$.

У шестом задатку, ученик треба да примени знање које се односи на везу између коефицијента правца праве која представља график линеарне функције и угла који права захвата са x-осом, а затим да правилно реши линеарну неједначину.

7. **На слици су приказани графици функција $y = e^{-x}$, $y = e^{-2x}$, $y = -2e^{-x}$, $y = -2e^{-2x}$. Које од наведених тврђења је тачно? (заокружити тачан одговор)**



а) $f(x) = e^{-2x}$ $g(x) = e^{-x}$ $h(x) = -2e^{-x}$ $j(x) = -2e^{-2x}$
б) $f(x) = -2e^{-x}$ $g(x) = -2e^{-2x}$ $h(x) = e^{-x}$ $j(x) = e^{-2x}$
в) $f(x) = e^{-x}$ $g(x) = e^{-2x}$ $h(x) = -2e^{-2x}$ $j(x) = -2e^{-x}$
г) $f(x) = e^{-x}$ $g(x) = e^{-2x}$ $h(x) = -2e^{-x}$ $j(x) = -2e^{-2x}$

8. Одредити параметар k, тако да функција $f(x) = -4e^{(k^2-k)x}$ буде монотоно опадајућа. (заокружити тачан одговор)

а) $k \in (0,1)$ б) $k \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ в) $\forall\, k \in R$ г) $k \in (0, \infty)$

Коментар:

Према потребама за математичким аргументовањем у процесу моделирања, где је експоненцијална функција представљала математички модел, са ученицима су детаљно обрађене логаритамска функција, а затим и експоненцијална, као њена инверзна. У раду је посебна пажња посвећена, између осталог, функцији облика $y = pe^{qx};\ p, q \in R$.

У седмом и осмом задатку, од ученика се тражи анализа назначене функције, тј. да се утврди да ли ученици знају како различите вредности параметара p и q утичу на облик функције, односно њену монотоност.

У седмом задатку, од значаја је и способност визуелног расуђивања, на основу графика функција (модела) који су ученицима дати у задатку.

9. Дата је функција $f(x) = \frac{2}{1+e^x}$, вредност $f^{-1}(1)$ је: (заокружити тачан одговор)

а) 0 б) 1 в) e г) $ln2$

10. Експлицитни аналитички израз функције која је имплицитно дефинисана једначином $ln(x^2-1) + 3ln(y+2) = 3$ је: (заокружити тачан одговор)

а) $y = e\sqrt[3]{x^2-1} - 2$ б) $y = \frac{e^9}{x^2-1} + 2$ в) $y = \frac{e}{\sqrt[3]{x^2-1}} - 2$ г) $y = \frac{3}{ln(x^2-1)} - 2$

Коментар:

Девети и десети задатак [8] дати су са циљем да се испита да ли су обим и дубина интерпретације садржаја о логаритамској функцији утицали на то да ученици усвоје знања о основним својствима ове функције и у квантитативном и квалитативном смислу. Поставља се питање, да ли је обрада основних својстава логаритма помоћу одређеног интеграла утицала на трајност и функционалност тих знања и да ли се тиме може обезбедити трансфер са назначених наставних садржаја на ситуације у постављеним проблемима?

У деветом задатку се од ученика захтева да изведу правилан рачунски поступак одређивања инверзне функције ако је функција задата аналитички, примењујући основна својства логаритма, односно еквиваленцију: $e^x = y <=> lny = x$, за сваки реалан број x и сваки позитиван реалан број y. Уколико су тачно одредили инверзну функцију, на крају, ученици треба да одреде вредност логаритамске функције $f(x) = ln(\frac{2}{x} - 1)$ у тачки $x = 1$.

Десети задатак поново испитује знања ученика која се односе на особине логаритма и захтева примену основних правила логаритмовања. Задатак је дат и са циљем да се ученицима поново истакну два облика аналитичког израза функције (имплицитни и експлицитни), о чему је такође било речи у току процеса моделирања, а искуства из праксе указују на чињеницу да ученици имају одређене потешкоће у раду када им је функција дата у имплицитном облику.

11. Написати дефиницију првог извода функције.

12. Тачка се креће по закону који је дефинисан једначином $s = 5t^2 + 10t$, где је t време у секундама, а s пут у метрима. Попунити празна места :

а) Прираштај пута за $t = 20$ и $\Delta t = 0,1$ је___________________________________*m*.

б) Средња брзина кретања у интервалу $t \in [20;\ 20,1]$ је ______________________*m/s*.

в) Тренутна брзина у тренутку $t = 20$ је ___________________________________*m/s*.

Коментар:

Ученици са којима је спроведено истраживање су на узрасту на којем постоји могућност, али и потреба, да се реализује формална обрада и утврђивање појмова више математике [54]. Тако и први извод функције захтева разумевање и усвајање његове формалне дефиниције. У циљу превазилажења потешкоћа ученика проистеклих из формалног захтева које овај појам има у основи свог објашњења, у процесу моделирања је, кроз увођење појма брзине хемијске реакције, поново формално дефинисан појам првог извода. Због свега наведеног, кроз одговоре на једанаести задатак, могуће је утврдити способност ученика за формалним дефинисањем првог извода функције.

Дванаести задатак [8] дат је са циљем да се, на основу одговора ученика, дође до показатеља о потенцијалу ученика за решавање проблема из реалног контекста на основу математичког модела. Претпоставка је да ученици са којима је реализована настава моделирањем могу боље да разумеју смисао оваквог и сличних задатака и да га лакше повезују са математичком теоријом. У овом задатку, математички модел је дат, а од ученика се захтева да спроведу поступак који води до тачног решења. То укључује превођење проблема у математичке структуре, које се у овом случају односе на први извод функције, рад на моделу, долажење до математичког решења и, на крају, интерпретацију математичког резултата у оквиру контекста задатка.

6.3.2 Статистичка обрада резултата

Финални тест садржао је 12 задатака од којих је сваки задатак бодован једним бодом, осим дванаестог задатка који се састојао од три питања, а свако питање бодовано је посебно, једним бодом, па је максималан број бодова на финалном тесту био 14. Резултати финалног теста по задацима у процентима приказани су у табели 6.1. и на графикону 6.1.

Од 254 ученика са којима је спроведено иницијално истраживање, 31 ученик није радио финални тест (из Е-групе било је одсутно 13 ученика, а из К-групе 18 ученика), тако да је овај тест радило 223 ученика.

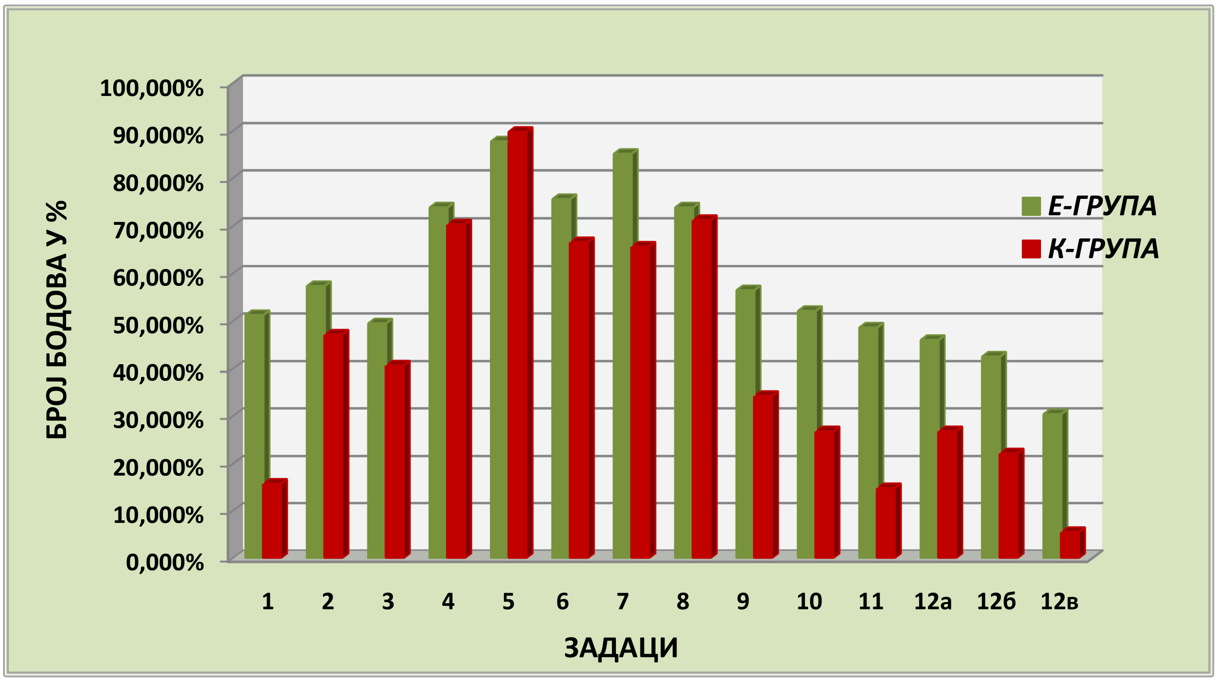
Табела 6.1. Резултати финалног теста по задацима у процентима

Задатак	*Е-група*	*К-група*	*Задатак*	*Е-група*	*К-група*
1.	51.304%	15.741%	***8.***	73.913%	71.296%
2.	57.391%	47.222%	***9.***	56.522%	34.259%
3.	49.565%	40.741%	***10.***	52.174%	26.852%
4.	73.913%	70.370%	***11.***	48.696%	14.815%
5.	87.826%	89.815%	***12.а)***	46.087%	26.852%
6.	75.652%	66.667%	***12.б)***	42.609%	22.222%
7.	85.217%	65.741%	***12.в)***	30.435%	5.556%

У просеку, ученици Е-групе тачно су урадили 59.379% финалног теста, а ученици К-групе 42.725%. Подаци у табели и графикону показују да је Е-група постигла бољи успех од К-групе у свим задацима, осим у 5. задатку.

У обе групе, најуспешније је решен 5. задатак (нула линеарне функције), јер су се ученици у свом раду често сретали са оваквим типом задатка, а такође и зато што се у четвртом разреду гимназије, у оквиру наставне теме „Реалне функције једне реалне промењиве“, између осталог, посебна пажња посвећује одређивању нула реалних функција. Ученици Е-групе су у процесу моделирања анализирали линеарне функције које су представљале конструисане моделе, где су дискутовали и о нулама тих функција, па је добијени резултат на финалном тесту био и очекиван. У Е-групи, веома успешно решен је и 7. задатак (експоненцијална функција). Ученици су сличне задатке имали и на иницијалном тесту. Ученици Е-групе су у току експерименталног рада посебно испитивали експоненцијалну функцију, што су могли да примене приликом решавања овог задатка. К-група је остварила одличан успех у решавању 8. задатка (монотоност експоненцијалне функције).

Лош резултат је код обе групе постигнут у 12. задатку (први извод функције), што је и било претпостављено, с обзиром на чињеницу да проблеми са реалним контекстом нису присутни у наставној пракси (или веома ретко). Обе групе оствариле су лошије резултате и у 11. задатку (дефиниција првог извода функције), што није било очекивано, зато што су први извод функције ученици изучавали само неколико недеља пре финалног тестирања. Такође, ученици К-групе су веома лоше урадили и 1. задатак.



Графикон 6.1. Упоредни хистограм финалног теста

Најмања разлика између експерименталне и контролне групе уочена је код најлакшег, 5. задатка.

За ово истраживање је посебно значајно уочити у којим су задацима разлике у резултатима група биле израженије.

- Највеће разлике су код 1. и 11. задатка. Ученици Е-групе боље су се снашли са формалним дефинисањем математичких појмова. То упућује на закључак да су појам функције и њеног извода овим ученицима садржајно и методолошки приближени и њихове дефиниције додатно утврђене кроз обрађивање научних појмова из хемије у процесу моделирања.
- Е-група је била знатно ефикаснија у решавању 12. задатка. Ученици који су учествовали у експерименталној настави боље су решили реалан проблем са

математичким моделом, који је захтевао примену математичког знања о првом изводу функције приликом његовог решавања. Међутим, овде ипак треба истаћи да су и у овом и у претходном задатку били очекивани нешто бољи резултати ученика Е-групе.

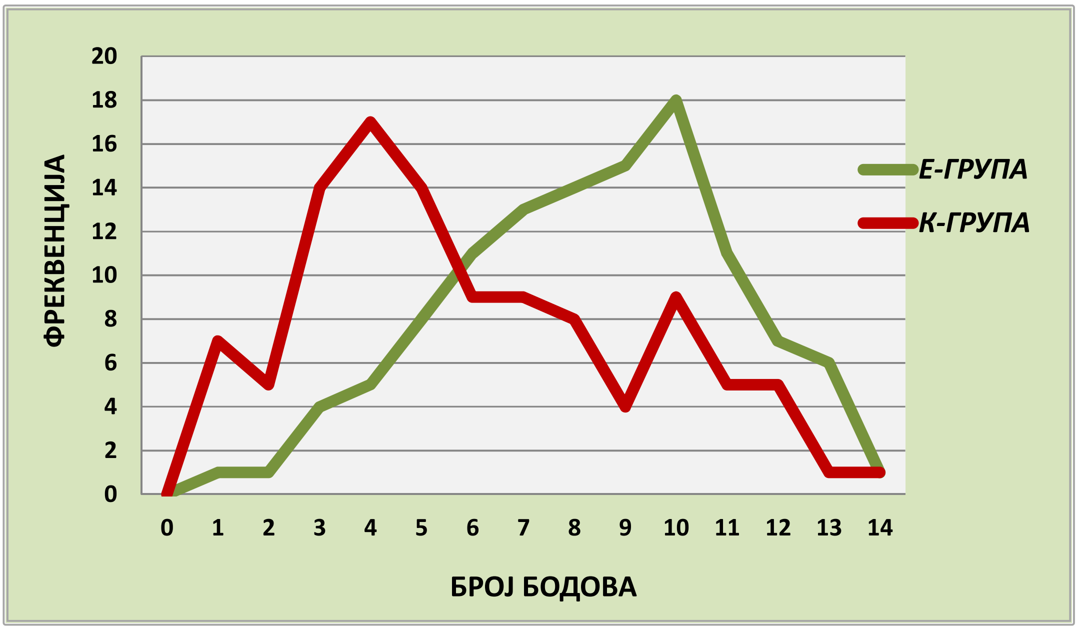
- Е-група је била значајно боља и у 10. задатку, где је било потребно применити основна својства логаритма, што указује да су примењени методички концепти у експерименталном наставном процесу имали ефекта на ученике са којима је реализован, односно на њихово сналажење у проблему из ове области.

Ученици Е-групе су у просеку освојили 8.313 бодова, а ученици К-групе 5.981 бодова. *Расподела броја бодова* приказана је у табели 6.2. Сваки задатак је тачно решио бар један ученик и у обе групе је по један ученик тачно решио све задатке. Најмањи број освојених бодова на финалном тесту је 1, у обе групе.

Табела 6.2. Расподела броја бодова на финалном тесту

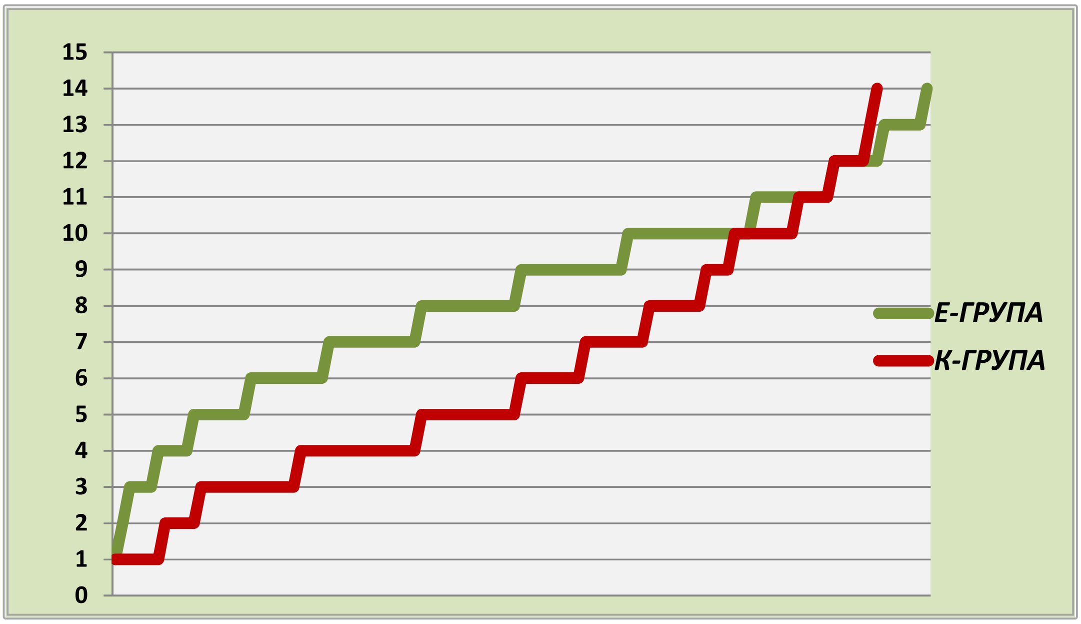
Број бодова	***Бројученика Е - групе***	***Број ученика К - групе***	***Број бодова***	***Број ученика Е - групе***	***Број ученика К - групе***
0	0	0	***8***	14	8
1	1	7	***9***	15	4
2	1	5	***10***	18	9
3	4	14	***11***	11	5
4	5	17	***12***	7	5
5	8	14	***13***	6	1
6	11	9	***14***	1	1
7	13	9	***Број ученика***	***115***	***108***
			Просечан број бодова	***8.313***	***5.981***

Највећа фреквенција је око 10 бодова у Е-групи и око 4 бода у К-групи. *Расподела фреквенција*, приказана на графикону 6.2, у обе групе блиска је нормалној са одређеним модификацијама. Врх криве која описује расподелу је релативно близу средњој вредности броја бодова у групи. На графикону 6.2. може се уочити бољи резулатат Е-групе у односу на К-групу: криве расподеле и њихови врхови су на иницијалном тесту били веома близу, док су на финалном тесту крива расподеле резулата Е-групе и њен врх видно померени у десну страну у односу на врх криве расподеле К-групе.



Графикон 6.2. Фреквенција бодова на финалном тесту

Графикон 6.3. такође указује на разлику у постигнућима група. Док су се код иницијалног теста *криве дистрибуције* бодова у растућем низу скоро поклапале, код финалног теста међу њима постоји изражена разлика.



Графикон 6.3. Дистрибуција броја бодова на финалном тесту

Да би се и статистички потврдило да у резултатима експерименталне и контролне групе постоји значајна разлика, урађена је статистичка обрада финалног теста на основу бодовног постигнућа ученика анализом средњих вредности. Статистичка обрада рађена је *Студентовим t-тестом разлике аритметичких средина два велика независна узорка.* Добијени статистички резултати представљени су у табели 6.3.

Табела 6.3. Статистички резултати финалног теста

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		***Е - група***	***К - група***
Бројност узорка	**n**	115	108
Средња вредност броја бодова	$\bar{x}$	8.313	5.981
Варијанса	s^2	7.603	10.299
Стандардна девијација	**σ**	2.757	3.209
Коефицијент варијације	**V**	33.169%	53.652%
Проценат освојених бодова	**%**	59.379	42.725
Стандардна грешка аритметичке средине	$\sigma\bar{x}$	0.257	0.309
Апсолутна разлика аритметичких средина	$D\bar{x}$	2.332	
Стандардна грешка разлике аритметичких средина	$\sigma d\bar{x}$	0.402	
Критички однос	**t**	5.801	
Степени слободе	**df**	221	
Ниво значајности	**0.05**	1.960	
Ниво значајности	**0.01**	2.576	

У циљу одређивања смера варијације у односу на аритметичку средину, као и облика распореда фреквенција код обе групе, израчунати су *коефицијенти асиметрије и спљоштености.* Ови резултати приказани су у табели 6.4.

Табела 6.4. Коефицијенти асиметрије и спљоштености на финалном тесту

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		***Е - група***	***К - група***
Коефицијент асиметрије	k_A	–0.267	0.464
Коефицијент спљоштености	k_S	2.503	2.275

Применом формуле KR-20, као и код иницијалног теста, процењена је *поузданост финалног теста*, који је такође састављен од дихотомних задатака. Параметри потребни за примену ове статистичке формуле добијени су на основу обједињених података за обе групе и представљени у табели 6.5.

Табела 6.5. Одређивање коефицијента поузданости финалног теста

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА			***Коефицијент поузданости теста***
Бројност узорка	**N**	223	**0.770**
Средња вредност броја бодова	$\bar{x}$	7.184	
Варијанса теста	V_t	10.232	
Број задатака на тесту	**k**	14	
Индекси лакоће и тежине задатака	p_i , q_i	$\sum_{i=1}^{14} p_i q_i = 2.915$	

У даљем раду, на основу резултата добијених на финалном тесту, било је могуће испитати *утицај експерименталних фактора на процес учења и успех према полу ученика.* При статистичкој обради разеултата, примењен је Студентов t-тест разлике аритметичких средина два велика независна узорка, што је приказано у табели 6.6.

Табела 6.6. Статистички резултати финалног теста према полу ученика у Е-групи

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		***Дечаци***	***Девојчице***
Бројност узорка	**n**	54	61
Средња вредност броја бодова	$\bar{x}$	8.481	8.164
Варијанса	s^2	7.160	8.073
Стандардна девијација	**σ**	2.676	2.841
Коефицијент варијације	**V**	31.549%	34.802%
Проценат освојених бодова	**%**	60.582	58.314
Стандардна грешка аритметичке средине	$\sigma\bar{x}$	0.364	0.364
Апсолутна разлика аритметичких средина	$D\bar{x}$	0.318	
Стандардна грешка разлике аритметичких средина	$\sigma d\bar{x}$	0.515	
Критички однос	**t**	0.617	
Степени слободе	**df**	113	
Ниво значајности	**0.05**	1.980	
Ниво значајности	**0.01**	2.617	

Подела ученика Е-групе на основу успеха из математике, која је наведена у поглављу 6.2, извршена је у циљу испитивања статистичке значајности разлике у средњим вредностима броја бодова на иницијалном, а такође и на финалном тесту између формираних подгрупа. Затим је примењена анализа варијансе, односно F-тест (Fisher's F-test), којим је тестиран *однос између варијансе међугрупног варијабилитета и варијансе унутаргрупног варијабилитета*. За процену добијених F-вредности коришћена је пост-хок анализа, односно Такијев тест (Tukey's HSD-test). Резултати су приказани у табели 6.7.

Табела 6.7. Упоредни статистички резултати иницијалног и финалног теста

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		***Иницијални тест***			***Финални тест***		
Број ученика	**n**	**А**	**Б**	**В**	**А**	**Б**	**В**
		38	48	42	36	40	39
Средња вредност броја бодова	$\bar{x}$	16.079	16.729	21.119	5.806	8.400	10.538
Унутаргрупни варијабилитет	V_u	1668.647			446.931		
Међугрупни варијабилитет	V_m	628.050			419.639		
Степени слободе	df_u	***Унутаргрупни варијабилитет***		125	***Унутаргрупни варијабилитет***		112
	df_m	***Међугрупни варијабилитет***		2	***Међугрупни варијабилитет***		2
Варијанса	s_u^2	***Унутаргрупни варијабилитет***		13.349	***Унутаргрупни варијабилитет***		3.990
	s_m^2	***Међугрупни варијабилитет***		314.025	***Међугрупни варијабилитет***		209.819
Критички однос	**F**	23.524			52.580		
Ниво значајности за F	**0.05**	3.069			3.077		
	0.01	4.779			4.800		
Критична вредност за HSD	**0.05**	3.356			3.365		
	0.01	4.200			4.220		
Критички однос 0.05	**HSD**	1.886			1.087		
Критички однос 0.01	**HSD**	2.360			1.363		

Да би се испитала *статистичка значајност корелације између резултата на иницијалном тесту и резултата на финалном тесту које су остварили ученици Е-групе и ученици К-групе*, спроведено је тестирање Пирсоновог коефицијента линеарне корелације r, које се заснива на Студентовом распореду за n-2 степена слободе, а добијена t вредност даље се тумачи на исти начин као код класичног t-теста. Добијени статистички резултати приказани су у табели 6.8.

Табела 6.8. Тестирање коефицијента линеарне корелације

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		***Е - група***	***К - група***
Бројност узорка	**n**	115	108
Пирсонов коефициент корелације	**r**	<u>0.624</u>	<u>0.534</u>
Коефициент детерминације	$\mathbf{r^2}$	0.389	0.285
Коефициент алијенације	$\mathbf{1-r^2}$	0.611	0.715
Регресиона константа	**a**	0.937	–0.531
Коефициент регресије	**b**	0.419	0.372
Стандардна грешка линеарне регресије	**σS**	2.165	2.727
Критички однос	**t**	<u>8.482</u>	<u>6.499</u>
Степени слободе	**df**	113	106
Ниво значајности	**0.05**	1.981	1.983
Ниво значајности	**0.01**	2.620	2.623

6.4 Дискусија резултата

При анализи и дискусији резултата до којих смо дошли статистичком обрадом података добијених на финалном тесту, и који су презентовани у претходном поглављу, прво је испитана хомогеност група у знању које се проверавало овим тестом. За К-групу стандардна девијација је 3.209, што у односу на средњу вредност броја бодова показује да је у овој групи присутно значајно одступање од просека. Такође, и на основу велике вредности коефицијента варијације од 53.652%, може да се закључи да су у К-групи изражене разлике између највећег и најмањег броја бодова које су ученици освојили на финалном тесту, па следи да **К-група није хомогена** у знању које смо испитали овим тестом. За Е-групу, стандардна девијација је 2.757, што у односу на средњу вредност броја бодова показује да у овој групи постоје мања одступања од просека него што је то случај у К-групи. Коефицијент варијације од 33.169% указује на чињеницу да је и у Е-групи присутан одређен варијабилитет у односу на просек бодова, али како је добијена вредност мало изнад 30%, можемо да закључимо да је **Е-група релативно хомогена** у знању које смо испитали финалним тестом.

На основу података добијених у табели 6.3, извршено је статистичко тестирање прве нулте постављене хипотезе. Како је $t = 5.801 > t_{(221;\,0.05)} = 1.960$, онда на нивоу значајности 0.05 одбацујемо прву нулту и прихватамо прву алтернативну хипотезу. Важи и да је $t = 5.801 > t_{(221;\,0.01)} = 2.576$. Због тога одбацујемо прву нулту и прихватамо прву алтернативну хипотезу и на нивоу значајности 0.01, па са сигурношћуод 99% тврдимо да је **разлика у резултатима ученика Е-групе и К-групе на финалном тесту статистички значајна.**

За К-групу коефицијент асиметрије већи је од нуле, па добијамо позитивну асиметрију (удесно). Како је $|k_A| \in (0.25; 0.5]$, можемо да закључимо да се ради о умереној (средњој) асиметрији. Коефицијент спљоштености је $k_S = 2.275$. Како је $k_S < 3$, закључујемо да је расподела мало шира (спљоштенија) од нормалне. За Е-групу, коефицијент асиметрије мањи је од нуле, па добијамо негативну асиметрију (улево). Међутим, како је $|k_A| \in (0.25; 0.5]$, закључујемо да је и у Е-групи присутна умерена асиметрија, али мања него у К-групи. Коефицијент спљоштености је $k_S = 2.503$. Како је $k_S < 3$, закључујемо да је расподела мало шира од нормалне. Добијени резултати за коефицијенте асиметрије и спљоштености потврђују да су расподеле у обе групе и даље блиске нормалној, али са израженијим одступањима у резултатима него што је то био случај на иницијалном тестирању.

За финални тест, израчуната је вредност коефицијента поузданости од 0.770, што значи да је овај тест **поуздан**, тако да се можемо ослонити на резултате који су добијени. Као и на иницијалном тесту, и на финалном је обезбеђена **валидност**, одговарајућим одабиром задатака, а како на резултате финалног теста није могао да утиче оцењивач, закључујемо да је дати тест и **објективан**. На финалном тесту, ученици обе групе остварили су 14 различитих резултата од могућих 15. То значи да се на основу резултата финалног теста могу разликовати ученици, јасно су раздвојени добри ученици од слабијих, па је овај тест и **осетљив**. Финални тест је такође **економичан** и **обухватан**, јер садржи кључна питања из оних области математике из које се вршило испитивање и на које се односило спроведено истраживање, а у складу са постављеним методичким концепцијама у раду.

На основу података добијених у табели 6.6, може се приступити статистичком тестирању друге нулте постављене хипотезе. Како је $t = 0.617 < t_{(113;\, 0.05)} = 1.980$, тврдимо да **разлика у резултатима према полу у Е-групи на финалном тесту није статистички значајна.** Друга нулта хипотеза се не одбацује јер је ризик већи од 5%.

На основу података добијених у табели 6.7, може се приступити статистичком тестирању треће и четврте нулте постављене хипотезе. Како је $F = 23.524 > F_{(125;2;\, 0.01)} = 4.779$, а такође и $F = 52.580 > F_{(112;2;\, 0.01)} = 4.800$, одбацују се трећа и четврта нулта хипотеза, а њихове алтернативне прихватају на нивоу значајности 0.01. Тврдимо са сигурношћу од 99% да је **разлика у резултатима подгупа А, Б и В на иницијалном али и финалном тесту статистички значајна**.

На основу добијених HSD-вредности на Такијевом тесту, можемо да закључимо између којих подгупа је изражена разлика. Добијена HSD-вредност од 2.360 мања је од апсолутне вредности разлике аритметичких средина броја бодова на иницијалном тесту између подгрупа А и В, и између подгрупа Б и В. Са сигурношћу од 99% тврдимо да постоји статистички значајна разлика између добијених резултата код подгрупа А и В, а такође и код подгрупа Б и В. Како је добијена HSD-вредност од 1.363 мања од све три апсолутне вредности разлика аритметичких средина броја бодова на финалном тесту између подгрупа, постоји статистички значајна разлика између тих резултата у све три подгрупе. Ово тврдимо са сигурношћу од 99%.

На основу података добијених у табели 6.8, може се приступити статистичком тестирању пете и шесте нулте постављене хипотезе. Како је $t = 8.482 > t_{(113;\,0.01)} = 2.620$, а такође и $t = 6.499 > t_{(106;\,0.01)} = 2.623$, одбацују се пета и шеста нулта хипотеза, а њихове алтернативне прихватају на нивоу значајности 0.01. Тврдимо са сигурношћу од 99% да је **корелација између резултата на иницијалном тесту и резултата на финалном тесту које су остварили ученици Е-групе, а такође и ученици К-групе, статистички значајна.**

Истичемо да је у Е-групи добијена F-вредност од 23.524 на иницијалном тесту значајно мања од добијене F-вредности од 52.580 на финалном тесту. Због тога можемо да закључимо да експериментални фактори више утичу на процес учења и успех код ученика који су у претходна три разреда имали бољи успех из математике. То значи да су методички приступи примењени у раду са Е-групом више погодовали ученицима који су и у редовној настави добијали високе оцене (четворке и петице) и код таквих ученика су, на основу овог истраживања, детектовани бољи резултати.

Резултати добијени на основу статистичког испитивања корелације између резултата на иницијалном тесту и резултата на финалном тесту које су остварили ученици Е-групе и ученици К-групе такође потврђују да је реализован експериментални рад у овом истраживачком процесу резултирао већим ефектима код бољих ученика. То следи и из чињенице да је вредност Пирсоновог коефицијента од 0.624 за Е-групу већа од вредности Пирсоновог коефицијента од 0.534 за К-групу.

7 Математичко моделирање проблема из реалног живота

7.1 Увод

Да би се математичко моделирање, као методички приступ учењу, у потпуности интегрисало у наставни процес, важно је да се ученици упознају са процесом моделирања и да, током свог школовања, у континуитету раде са математичким моделима. Ово је могуће реализовати тако што ће ученици на часовима математике, у оквиру одређених наставних тема, решавати проблеме из реалног света, примењујући процес моделирања. Постављени задаци требало би да буду у вези са претходно обрађеним математичким садржајима одабране теме и не морају нужно да захтевају ученичка знања из других научних области.

У овој глави дисертације, припремљени су наставни материјали који могу представљати методичку основу за примену моделирања на часовима редовне наставе математике у другом разреду гимназије, након обраде свих садржаја који су прописани у оквиру наставне теме „Експоненцијална и логаритамска функција“.

7.2 Наставни материјали

Припремљени наставни материјали ([3][45][76][77][80]) садрже 20 задатака, тако да су за пет задатака дата детаљна методичка објашњења, у складу са методологијом моделирања која је теоријски објашњена у поглављу 2.2.1 и примењена у експерименталном истраживању (објашњено у поглављу 4.4.1). На основу искустава стечених у наставној пракси и раду са средњошколцима, овде се предлаже да ученици:

- у првој фази рада на проблемима из реалног живота решавају задатке у којима је дата функција која представља математички модел, а рачунар се може користити као подршка у раду и за могућност провере решења (у наставним материјалима: радни лист (1), задаци 1-3; радни лист (2), задаци 1-8);

- у другој фази рада решавају задатке у којима математички модел није дат, при чему се његова конструкција, као и остале активности, могу реализовати уз помоћ рачунара (у наставним материјалима: радни лист (1), задаци 4-5; радни лист (2), задаци 9-15).

Радом на предложеним наставним материјалима може се плански и систематски утицати на способности које ученици треба да стекну и развијају кроз моделирање, али и на друге математичке способности, као што су способност решавања математичких проблема, математичко аргументовање, математичко мишљење и закључивање, комуникација, презентовање и употреба алата и образовне технологије. Примена рачунара и одговарајућег софтвера у раду на овом наставном материјалу подразумева да наставник поступно, по могућности пре израде задатака, упозна ученике са начином рада, могућностима, опцијама и наредбама које постоје у одабраном софтверу, а које ће се примењивати приликом решавања задатака.

РАДНИ ЛИСТ (1): ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА – МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ

1. задатак

Прва етапа: реална ситуација

Тестирање ученика. Наставник математике је, одмах након увођења нове методе, ученицима једног одељења дао тест. Да би се испитао квалитет методе, ово одељење је тестирано сваког месеца истим наставним материјалом. Просечан број бодова b на тесту након t месеци дат је формулом: $b = 86 - 13ln(t+1)$.

Прелаз из прве у другу етапу

Ученик може да уочи да је реална ситуација о којој се говори у задатку веома честа у настави, а то је тестирање ученика. Наставник затим поставља реалан проблем у вези са описаном ситуацијом.

Друга етапа: реалан проблем

а) Колики је био просечан број бодова на првом тесту? (заокружи одговор)
1) 13 2) 86 3) 73 4) 51

б) Колики је био просечан број бодова на тесту након 7 месеци? (заокружи одговор на најближи цео број)
1) 54 2) 58 3) 59 4) 61

в) После колико месеци је просечан број бодова на тесту био 50? (заокружи одговор на најближи цео месец)
1) 15 месеци 2) 16 месеци 3) 17 месеци 4) 20 месеци

Прелаз из друге у трећу етапу

Први корак у решавању проблема је његово разумевање. Ученик треба да идентификује и наведе променљиве величине у задатку: број бодова на тесту и број месеци. Без анализе формуле која је дата у задатку, ученик може да предвиди да, што је тест касније дат, број бодова ће се смањивати услед процеса заборављања. На овај начин, ученик успоставља однос између променљивих и може да обележи број месеци t као независно променљиву, а број бодова b као зависно променљиву.

Трећа етапа: математички модел

У овој етапи, наставник може да усмери пажњу ученика на формулу која је дата у задатку. Од ученика се очекује да закључе да дата формула представља аналитички израз опадајуће логаритамске функције. Наставник треба да продискутује са ученицима како функција дата са $b = 86 - 13ln(t+1)$ описује промене у броју бодова у зависности од месеца у ком је тест дат и то представља математички модел у задатку.

Прелаз из треће у четврту етапу

С обзиром на то да је модел дат, ученици треба да означе, односно утврде и остале податке који су дати и који се траже. Ученици могу да направе план даљег рада: у задатку под а) и б) одредити вредност зависно променљиве, ако је позната вредност независно променљиве, док у делу под в) треба одредити вредност независно променљиве, при чему је позната вредност зависно променљиве, односно:

а) израчунати b, ако је $t = 0$; б) израчунати b, ако је $t = 7$; в) израчунати t, ако је $b = 50$.

Ученици даље треба да реализују различите активности, као што је, на пример, прилагођавање модела описаној реалној ситуацији и постављеном проблему. У том смислу, наставник може ученицима поставити питање о домену дате логаритамске функције, а затим да се он разматра у реалном контексту задатка, тако да ученици дођу до закључка како мора да важи услов $t \geq 0$. Такође, овде се захтева примена математичких правила и метода, прецизно рачунање и извођење потребних операција. Приликом решавања задатка под в), ученик треба да примени алгоритам сличан оном са којим се већ сретао приликом решавања једноставнијих логаритамских једначина, што посебно захтева да ученик користи еквиваленцију: $e^x = y <=> lny = x$, за сваки реалан број x и сваки позитиван реалан број y. Математички рад ученика у овом задатку подразумева следеће:

а) $t = 0$
$b = 86 - 13ln(0+1) = 86 - 13ln1 = 86 - 13 = 73$

б) $t = 7$
$b = 86 - 13ln(7+1) = 86 - 13ln8 = 86 - 27.033 = 58.967$

в) $b = 50$

$50 = 86 - 13ln(t + 1)$

$ln(t + 1) = \frac{36}{13}$

$t = e^{\frac{36}{13}} - 1$, па је $t = 14.946$.

Четврта етапа: математичко решење

Уколико је ученик правилно спровео потребне активности, долази до коначног математичког решења: а) $b = 73$, б) $b = 58.967$, в) $t = 14.946$.

Прелаз из четврте у пету етапу

У овом кораку, ученик треба да приступи тумачењу и интерпретацији добијених резултата у контексту решења реалног проблема, а према постављеним захтевима задатка.

Пета етапа: решење реалног проблема

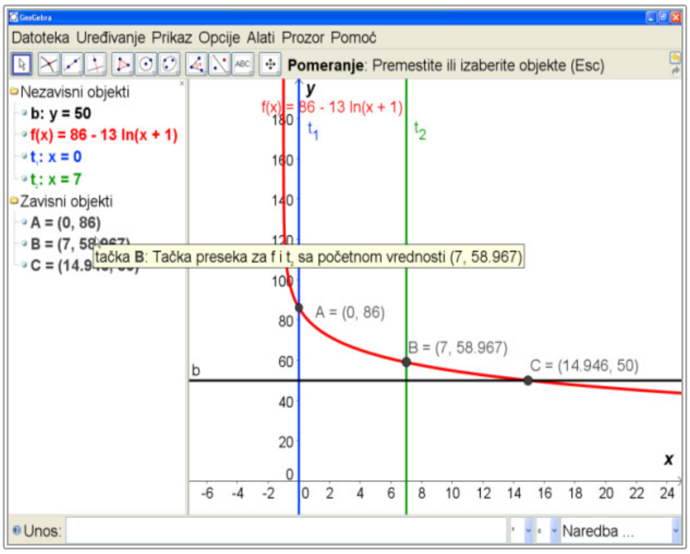
Од ученика се очекује да на правилан начин, својим речима, искаже решење реалног проблема, што је у овом задатку веома једноставно: број бодова на првом тесту био је 73, на тесту након 7 месеци, тај број износио је 59, а након 15 месеци, тај број пао је на 50.

Прелаз из пете у шесту етапу

Ученици треба да анализирају кораке у свом раду и утврде да ли су на правилан начин применили математичка знања. Овде предлажемо да се ученицима сугерише на могућност провере решења помоћу рачунара, уз примену *GeoGebra*-е. Ученици се тако подстичу на употребу едукативних алата, али и на размишљање о различитим начинима долажења до решења (алгебарски и геометријски).

Шеста етапа: евалуација

У коришћеном софтверу, независно променљива се може означити са x, а зависно променљива са y. У овом примеру је $y = f(x)$, где је $f(x) = 86 - 13ln(x + 1)$. Једноставним уносом аналитичког израза функције f ученик добија график ове функције. Провера решења реализује се одређивањем пресечних тачака функције f и правих $x = 0$, $x = 7$, тј. $y = 50$, као што је приказано на слици 7.1. Описани начин провере решења треба практиковати и у другим задацима, зато што он развија код ученика способност визуелизације математичког модела, али и проблема у целини, као и способност презентовања рада на рачунару. Овим се ученици враћају у одређене етапе процеса, што је у складу са могућностима дидактичког круга којим се процес моделирања представља.



Слика 7.1. Примена GeoGebra-е у првом задатку

<u>2. задатак</u>

Прва етапа: реална ситуација

Јачина звука. Због изузетне осетљивости људског уха (у распону од 1000 милијарди према 1), за мерење јачине звука у том распону корисније је имати логаритамску скалу него апсолутну скалу. Мерна јединица зове се децибел (*decibel-dB*). Ако је I јачина мереног звука, изражена у W/m^2, број децибела D тог звука израчунава се по формули: $D = a\log\frac{I}{I_0}$, где су a и I_0 константе логаритамске скале јачине звука.

Тако на пример, авион са ракетним мотором производи звук јачине $10^3\ W/m^2$, што на логаритамској скали износи 150 децибела. Вредност од 120 децибела представља границу бола, при чему људско ухо региструје звук јачине $10^0\ W/m^2$.

Прелаз из прве у другу етапу

Кроз разговор о реалној ситуацији која се у задатку односи на јачину звука, наставник може да укаже ученицима на то како је постављање реалног проблема управо иницирано чињеницом да је корисније изразити ту јачину у децибелима.

Друга етапа: реалан проблем

а) ***Одреди број децибела нормалног разговора који производи звук јачине*** $\mathbf{3.16 \cdot 10^{-6}\ W/m^2}$**.**

б) ***Ако градски саобраћај производи звук од 89.29 децибела, колика је јачина тог звука?***

Прелаз из друге у трећу етапу

Као и у претходном задатку, ученик треба да идентификује независно промењиву и зависно промењиву величину: јачину звука и број децибела којима се јачина звука може изразити. Међутим, у овом задатку, потребно је да ученик уочи и направи разлику између ових (промењивих) величина и константних величина: константи a и I_0. Уколико наставник спроведе дискусију о проблемима који су постављени под а) и б), ученици треба самостално да закључе да податак који је дат под а) (или б), о једној од четири величине о којима се говори, није довољан да би се решио проблем. Тиме се усмерава ученичка пажња на непознате, услове и податке који су дати у оквиру описа реалне ситуације и у формулацији проблема.

Трећа етапа: математички модел

На основу претходног задатка, овде се очекује да ученик самостално тумачи формулу дату у задатку и да интерпретира функцију дату са $D = a\,log\,\frac{I}{I_0}$ као математички модел.

Прелаз из треће у четврту етапу

Утврђивање стратегије за решавање проблема ученик може да спроводи сам или уз помоћ наставника. То најпре подразумева ученичке активности увођења помоћног проблема у циљу одређивања константи a и I_0. Ученик треба да процени податке који су дати о авиону и граници бола и да на основу њих изведе користан закључак, односно да утврди да су ти подаци довољни да би одредио непознате константе.

Даље активности укључују примену резултата добијених решавањем помоћног проблема и одређивање: а) вредности зависно промењиве D, ако је вредност независно промењиве $I = 3.16 \cdot 10^{-6}$; б) вредности независно промењиве I, ако је вредност зависно промењиве $D = 89.29$.

Да би прво решио помоћни проблем, ученик треба да, примењујући математички модел уз постављен услов $I > 0$ и дате податке, постави, а затим и реши систем од две једначине са две непознате:

$$150 = a\,log\,\frac{10^3}{I_0} \text{ и } 120 = a\,log\,\frac{10^0}{I_0}\,.$$

Ако се од прве једначине одузме друга, добија се:

$$150 = a\,log\,\frac{10^3}{I_0} \text{ и } 30 = a\,log\,\frac{10^3}{I_0} - a\,log\,\frac{10^0}{I_0}\,,$$

односно:

$150 = a\, log\frac{10^3}{I_0}$

$30 = a\,(log\frac{10^3}{I_0} - log\frac{10^0}{I_0})$

$150 = a\, log\frac{10^3}{I_0}$

$30 = a\, log\frac{\frac{10^3}{I_0}}{\frac{1}{I_0}}$ *за свако* $a \in R\backslash\{0\}$ *важи:* $a^0 = 1$

----------------------------------- *за свако* $a \in R^+\backslash\{1\}$ *и* $x, y \in (0, \infty)$ *важи:* $log_a\frac{x}{y} = log_a x - log_a y$

$150 = a\, log\frac{10^3}{I_0}$

$30 = 3a\, log 10$ *за свако* $a \in R^+\backslash\{1\}$, $x \in (0, \infty)$ *и* $k \in R$ *важи*: $log_a x^k = k\, log_a x$

$150 = a\, log\frac{10^3}{I_0}$

$a = 10$ *за свако* $a \in R^+\backslash\{1\}$ *важи*: $log_a a = 1$

$15 = log\frac{10^3}{I_0}$

$a = 10$

$10^{15} = \frac{10^3}{I_0}$ *за свако* $a \in R^+\backslash\{1\}$, $x \in R$ *и* $y \in R^+$ *важи:* $log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$

$a = 10$

Коначно, $I_0 = 10^{-12}$ и $a = 10$.

Када израчуна константе, ученик даље спроводи математички рад, у циљу решавања проблема под а) и б):

а) $I = 3.16 \cdot 10^{-6}$

$D = 10 log\frac{3.16\cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 64.99687$

б) $D = 89.29$

$89.29 = 10\, log\frac{I}{10^{-12}}$

$\frac{8929}{1000} = logI - log10^{-12}$

$\frac{8929}{1000} = logI + 12$

$I = 10^{\frac{8929}{1000}-12}$

Следи да је $I = 85 \cdot 10^{-5}$.

Као што је наведено, од ученика се посебно захтева да остваре везу између елемената знања која се односе на основне особине логаритма. На овај начин се код ученика развијају различите могућности за примену математике и у том смислу примена знања у решавању реалних проблема представља један од начина ефикасног коришћења математичких знања [2].

Четврта етапа: математичко решење

Ученици записују коначне математичке резултате: а) $D = 64.99687$, б) $I = 85 \cdot 10^{-5}$.

Прелаз из четврте у пету етапу

Као и у претходном задатку, и овде се тумаче добијени математички резултати у реалном контексту. Ученике треба подстаћи и на одговарајућа уопштавања, тако да изведу закључак да се помоћу формуле $D = 10\, log \frac{I}{10^{-12}}$ може у децибелима изразити јачина звука произвољног извора.

Пета етапа: решење реалног проблема

Ученици треба да искажу решење реалног проблема, водећи рачуна и о мерним јединицама. У свом математичком раду ученици им често не придају важност, али за комплетно решење реалног проблема важно је да се правилно користе и одговарајуће мерне јединице.

Прелаз из пете у шесту етапу

На прелазу из пете у шесту етапу, ученике треба подстицати на активности анализе добијених резултата, као и провере модела. Задатак представља добру методичку основу за успостављање везе између математике и физике. У том смислу, ученике треба усмерити да разговор о моделу и добијеним резултатима спроведу уз консултације са наставником физике. Тако ће моћи да упореде математички модел са формулом која се у физици користи за изражавање јачине звука у децибелима ($D = 10\, log \frac{I}{I_0}$) и да схвате физички смисао константе I_0 (I_0 је јачина најмањег звука које људско ухо може да региструје, праг чујности; то је стандардизована величина и износи $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$).

Шеста етапа: евалуација

Као што је предложено, ученици спроводе проверу решења на часу физике, па се након консултација са наставником физике, модел, заједно са тачно одређеним константама a и I_0, може прихватити.

<u>3. задатак</u>

Прва етапа: реална ситуација

Биологија мора. Интензитет светлости која продире у воду смањује се по формули $I = I_0 e^{-kd}$, где је I интензитет светлости, d стопа испод површине воде, а k је коефицијент смањења интензитета.

Мерења у Саргашком мору утврдила су да половина светлости с површине достиже дубину од 73.6 стопа.

Прелаз из прве у другу етапу

Ученици могу својим речима да опишу реалну ситуацију - море и светлост која продире у воду и промену интензитета те светлости у зависности од дубине мора. Кроз краћи опис ситуације спроводи се и њено поједностављивање, а ученици се постепено уводе у реалан проблем.

Друга етапа: реалан проблем

а) На којој дубини мора, израженој у стопама, ће остати само 1% светлости?
б) Ако је интензитет светлости на једној дубини мора осам пута већи од интензитета на другој дубини, за колико стопа се разликују те две дубине?

Прелаз из друге у трећу етапу

Когнитивне активности, као што су идентификовање, навођење, означавање и разликовање података и непознатих, ученик је спроводио и у претходним задацима. Због тога се овде захтева да назначене активности ученик реализује самостално. Величина I_0 није експлицитно објашњена у задатку, што ученицима може да створи конфликтну ситуацију, на основу које појединци могу да закључе да сви подаци који су дати нису довољни за решавање проблема.

Трећа етапа: математички модел

Без обзира на можда недовољно разумевање величине I_0, ученици могу закључити да формула $I = I_0 e^{-kd}$ представља математички модел.

Прелаз из треће у четврту етапу

У циљу објашњења величине I_0, наставник може да поставља сугестивна питања о томе који услов важи за d, а у складу са реалним контекстом задатка. Како је са d означена дубина мора, неки ученици ће можда рећи да мора бити $d > 0$, међутим, важно је да сви уоче да d може бити и једнако 0. Ученик треба да означи $d = 0$ као почетни услов, повеже га са моделом, закључи да је тада $I = I_0$ и објасни да величина I_0 представља интензитет светлости на површини мора. Такође, ученик треба да постави помоћни проблем, у циљу одређивања константне величине, тј. коефицијента k, аналогно као у претходном задатку. На овај начин се код ученика развијају способности за самостално постављање и одређивање стратегија за решавање проблема помоћу математичког модела:

- у помоћном проблему: одредити вредност k, ако важи да је $I = \frac{I_0}{2}$ за $d = 73.6$;
- у проблему: а) одредити вредност независно промењиве, ако је $I = 0.01I_0$; б) ако је I_1 интензитет светлости на дубини d_1, I_2 интензитет светлости на дубини d_2, $I_1 = 8I_2$, одредити разлику $d_2 - d_1$ (утврђено је да је на већој дубини мора слабији интензитет светлости).

Ученици у свом математичком раду треба да примењују правила логаритмовања, али неопходна је и примена ученичких знања о основним својствима експоненцијалне функције у циљу решавања једначина.
Како за $d = 73.6$ важи да је $I = \frac{I_0}{2}$, на основу модела следи:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-73.6\,k}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-73.6\,k}$$ *природни логаритам обе стране једначине*

$$ln\frac{1}{2} = ln e^{-73.6\,k}$$ *за свако* $a \in R^+\backslash\{1\}$, $x \in (0, \infty)$ *и* $k \in R$ *важи*: $log_a x^k = k\, log_a x$

$$ln\frac{1}{2} = -73.6\,kln e$$ *за свако* $a \in R^+\backslash\{1\}$ *важи*: $log_a a = 1$

$$k = -\frac{1}{73.6} ln\frac{1}{2}$$

Следи да је $k = 0.00942$.

Ако је ученик правилно спровео описани поступак и израчунао вредност коефицијента k, он може даље да примењује математичке методе и алгоритме за решавање проблема а) и б).

а) Како је $k = 0.00942$ и важи да је $I = 0.01I_0$, на основу модела следи:

$$0.01I_0 = I_0 e^{-0.00942d}$$

$$0.01 = e^{-0.00942d}$$

$$ln0.01 = ln\, e^{-0.00942d}$$

$$ln0.01 = -0.00942d\; ln e$$

$$d = -\frac{1}{0.00942} ln0.01\,,$$

па је $d = 488.988$.

б) Примењујући модел за две вредности независно промењиве, d_1 и d_2: $I_1 = I_0 e^{-kd_1}$ и $I_2 = I_0 e^{-kd_2}$, уз услов $I_1 = 8I_2$, добија се:

$$I_0 e^{-0.00942 d_1} = 8 I_0 e^{-0.00942 d_2}$$
$$e^{-0.00942 d_1} = 8 e^{-0.00942 d_2}$$
$$\frac{e^{-0.00942 d_1}}{e^{-0.00942 d_2}} = 8$$

за свако $a \in R^+$ *и* $x, y \in R$ *важи:* $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$$e^{-0.00942 d_1 + 0.00942 d_2} = 8$$
$$ln\, e^{-0.00942 d_1 + 0.00942 d_2} = ln\, 8$$
$$0.00942(-d_1 + d_2)\, ln\, e = ln\, 8$$
$$d_2 - d_1 = \frac{ln\, 8}{0.00942}$$

Следи да је $d_2 - d_1 = 220.75$.

Четврта етапа: математичко решење

Коначно математичко решење је: а) $d = 488.98$; б) $d_2 - d_1 = 220.75$.

Прелаз из четврте у пету етапу

Ученици спроводе активности интерпретације резултата, тумачења решења и друго. Могуће је да прелаз са математичких на реална решења, који је веома важан, ученици ураде спонтано (несвесно).

Пета етапа: решење реалног проблема

Ученици могу да искажу решење на следећи начин: у Саргашком мору, до дубине од приближно 489 стопа, допире само 1% светлости и, ако је интензитет светлости на једној дубини Саргашког мора осам пута већи од интензитета на другој дубини, те две дубине се разликују за приближно 221 стопу.

Прелаз из пете у шесту етапу

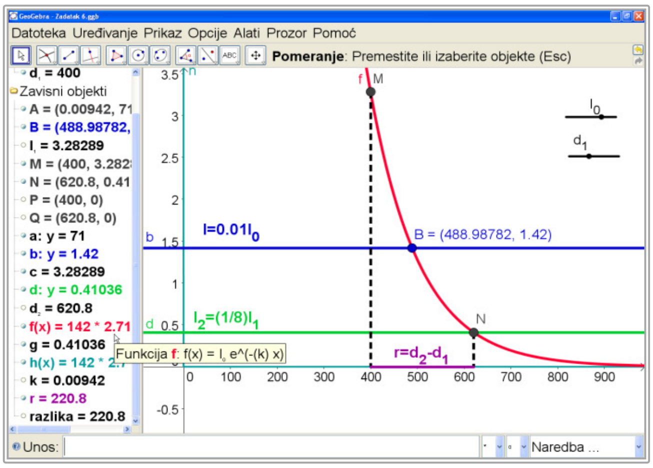
Ученици треба самостално да утврде да ли су у току рада адекватно применили раније стечена знања. Такође, треба да разматрају начине и могућности провере решења у рачунарском окружењу. Поступак је сличан као и у 1. задатку, с том разликом што се овде захтевају веће способности и вештине ученика у раду са рачунаром.

Шеста етапа: евалуација

Како вредност I_0 није позната, ученик ову величину може да представи помоћу опције *Klizač*. За проверу решења помоћног проблема, ученику је познато $d = 73.6$ и да је $I = \frac{I_0}{2}$, а k је непознато. Због тога је потребно да ученик унесе аналитичке изразе за функције $y = I_0 e^{-73.6x}$ (тако да x репрезентује непознато k) и $y = \frac{I_0}{2}$. У пресеку графика ових функција, добија се тачка A, чија је прва координата једнака вредности коефицијента k, $k = x(A)$. У даљем раду на рачунару, x репрезентује независно променљиву величину d, па је $I = f(x)$, где је $f(x) = I_0 e^{-kx}$. Уносом аналитичког израза функције f, ученик реализује и графичку интерпретацију модела. Померајући *Klizač* за I_0, ученик визуелно илуструје модел за различите вредности интензитета светлости на површини мора.

Затим, ученик треба да закључи да у пресеку графика функција f и $y = 0.01I_0$ настаје тачка B, чија прва координата представља дубину мора на којој је присутан 1% светлости. На овај начин извршава се провера решења проблема под а) (слика 7.2).

За проверу решења проблема под б), ученик најпре мора да одреди тачке M и N на графику функције f тако да њихове прве координате представљају независно променљиве d_1 и d_2. Како вредности за d_1 и d_2 нису познате, неопходно је једну од ових променљивих увести помоћу *Klizača*, на пример d_1. Тада се на графику функције f добија тачка M, уносом њених координата $\left(d_1, f(d_1)\right)$. Нека је $I_1 = f(d_1)$. По услову задатка је $I_1 = 8I_2$, па ученик може да одреди тачку N као пресек графика функција f и $y = \frac{I_1}{8}$. Тада је $d_2 = x(N)$. Коначно, потребно је да ученик израчуна нумеричку вредност разлике $d_2 - d_1$, а померајући *Klizač* за d_1 може и да потврди да је ова разлика при задатом услову увек константна (слика 7.2).



Слика 7.2. Примена GeoGebra-е у трећем задатку

<u>4. задатак</u>

Прва етапа: реална ситуација

Радиоактивни распад. Лабораторија има узорак од 100mg радиоактивног изотопа кобалта-60 (^{60}Co), који се распада са годишњом стопом од 13%.

Прелаз из прве у другу етапу

У овом задатку, реална ситуација односи се на познат природни феномен са којим су се ученици можда и раније упознали на часовима хемије, а то је распадање радиоактивних елемената и њихових изотопа. Уколико ученици имају нека сазнања о томе, наставник може да им постави питања у вези са појмовима о којима се говори у описаној ситуацији, а затим да им постави проблем.

Друга етапа: реалан проблем

a) ***Колика ће количина узорка остати после 18 година?***
б) ***Одредити полуживот* кобалта-60.***
**Полуживот је време када ће остати половина првобитне количине кобалта-60.*

Прелаз из друге у трећу етапу

Након што је проблем постављен, од ученика се захтева анализа података и њихова интерпретација. То значи да ученик прво треба да детектује и разликује промењиве и константне величине о којима се говори у задатку, а затим да за њих уведе одговарајуће ознаке. Тако се, на пример, са m може означити количина кобалта након t година од почетка распада, са m_0 његова количина на почетку распада, а са k стопа распада. Успостављањем узајамног односа између промењивих величина, ученик учествује у објашњавању реалног проблема, што је овде утврђивање количине кобалта у зависности од броја година распадања, при константној стопи распада. Даље активности које истичемо су формирање претпоставки и предвиђање. Ученик интуитивним резоновањем, али и на основу рада у претходним задацима, може да предвиди да се количина кобалта смањује по неком правилу и да је за решавање проблема неопходно утврдити ту правилност. Како је ово први задатак у наставном материјалу у којем није дат математички модел, код ученика се утиче и на развој способности осмишљавања и планирања рада, првенствено у циљу конструкције модела.

То подразумева да ученик најпре утврди почетни услов и претпоставку задатка. На почетку распада кобалта је $t=0$, при чему је $m=m_0=100$, док је стопа распада у свакој години иста и износи $k=0.13$. Даље, ученик може поступно да рачуна количину кобалта у свакој наредној години:

$$
\begin{aligned}
t=1 \qquad & m = 100 - 0.13 \cdot 100 = 100(1-0.13) \\
& \quad = 100 \cdot 0.87 \\
& \quad = 87 \\
t=2 \qquad & m = 87 - 0.13 \cdot 87 = 87(1-0.13) \\
& \quad = 87 \cdot 0.87 \\
& \quad = 100 \cdot 0.87 \cdot 0.87 \\
& \quad = 75.69 \\
t=3 \qquad & m = 75.69 - 0.13 \cdot 75.69 = 75.69(1-0.13) \\
& \quad = 75.69 \cdot 0.87 \\
& \quad = 100 \cdot 0.87 \cdot 0.87 \cdot 0.87 \\
& \quad = 65.85
\end{aligned}
$$

Ученик може да рачуна вредност за m и у неким наредним годинама. Наставник треба да сугерише овакав начин записивања резултата у сваком кораку, да би ученици лакше уочили правилности које се јављају приликом израчунавања.

Наравно, описани поступак поступног израчунавања није погодан за решавање проблема који су постављени у задатку. Због тога се од ученика очекује да утврди правилност у спроведеним израчунавањима, да закључи да се то правило може представити неком опадајућом функцијом, односно, да добијене резултате интегрише у једну математичку формулу.

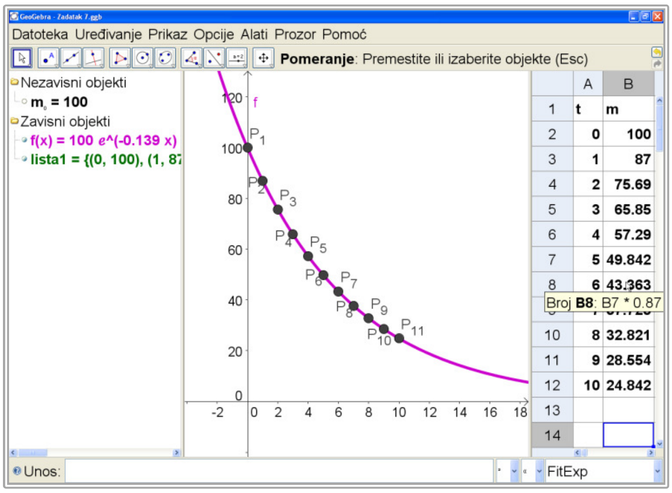
Међутим, активности на прелазу из друге у трећу етапу моделирања ученици такође могу усмерити на конструкцију математичког модела и у *GeoGebra* окружењу. У овом софтверу, ученици могу да користе табеларни приказ променљивих величина које могу организовати тако да се у првој колони налазе вредности независно променљиве t, а у другој вредности зависно променљиве m. Овде је довољно да ученик за m унесе њену почетну вредност: $m = m_0 = 100$. Вредност променљиве m у свакој наредној години добија једноставним множењем вредности зависно променљиве из претходне године бројем 0.87. Важно је сугерисати ученицима да је за прецизнији рад на рачунару овде потребно да израчунају вредности m за више година. Даље је потребно да ученик на основу података из табеле састави листу тачака, користећи наредбу *NapraviListu*, а затим да јој додели графички приказ. Како је овај наставни материјал предвиђен за рад са ученицима након обраде експоненцијалне и логаритамске функције, на овом нивоу решавања задатака из моделирања очекује се да ученици сами визуелно закључе да експоненцијална функција најбоље описује дате податке. Фитовањем, уз помоћ наредбе *FitExp*, добија се експоненцијална функција која најбоље одговара подацима из табеле.

Конструкција модела захтева код ученика постојање капацитета за систематично и логичко мишљење, што укључује индуктивно резоновање, засновано на обрасцима и математичким правилима која ученик треба да користи да би дошао до решења нерутинског проблема.

Трећа етапа: математички модел

Радом на класичан начин, без рачунара, кроз синтезу резултата добијених на прелазу из друге у трећу етапу и знања о експоненцијалној функцији, ученик добија математички модел: $m = 100 \cdot 0.87^t$.

Радом на рачунару, ученик такође добија експоненцијалну функцију која представља математички модел. Аналитички израз ове функције, $f(x) = 100e^{-0.139x}$, добија се у алгебарском прозору, а прилагођен уведеним ознакама за променљиве гласи: $m = 100e^{-0.139t}$, док се график добија у геометријском прозору *GeoGebra*-е (слика 7.3).



Слика 7.3. Примена GeoGebra-е у четвртом задатку-математички модел

Прелаз из треће у четврту етапу

Када су конструисана два математичка модела, може се навести даљи план рада, примењујући оба модела: а) одредити вредност зависно променљиве m, ако је вредност независно променљиве $t = 18$; б) одредити вредност независно променљиве t, ако је вредност зависно променљиве $m = \frac{m_0}{2} = 50$.

Такође, наставник може да подели ученике у две групе, тако да једна група до математичког решења дође радом на првом конструисаном моделу, а да друга група дође до решења радом на другом моделу и уз примену рачунара. У складу са реалним контекстом проблема, ученици треба да уоче да важи $t \geq 0$, код оба модела.

Математички рад ученика на првом моделу подразумева следећи поступак:

а) $t = 18$

$m = 100 \cdot 0.87^{18} = 8.15$

б) $m = 50$

$50 = 100 \cdot 0.87^{t}$

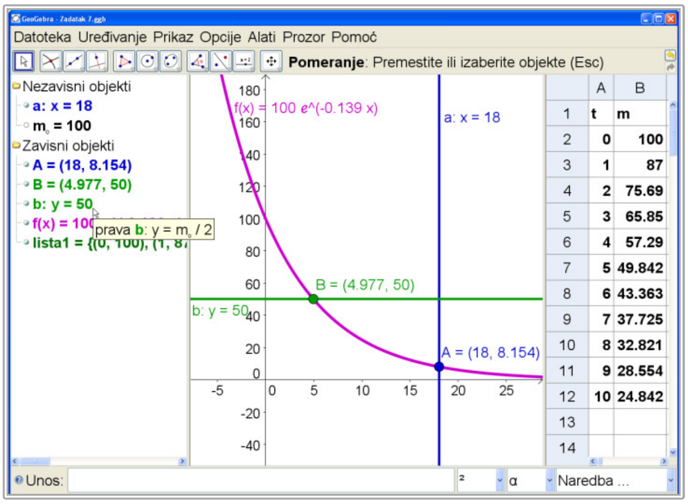
$\frac{1}{2} = 0.87^{t}$ *природни логаритам обе стране једначине*

$ln\frac{1}{2} = ln0.87^{t}$ *за свако* $a \in R^{+}\backslash\{1\}$, $x \in (0, \infty)$ *и* $k \in R$ *важи*: $log_a x^k = k\, log_a x$

$ln\frac{1}{2} = tln0.87$

$t = \frac{ln\frac{1}{2}}{ln0.87}$, па је $t = 4.98$.

Математички рад на другом моделу, уз помоћ рачунара, ученици треба да реализују тако што ће одредити пресечне тачке A и B функције f и правих $x = 18$, $y = 50$, редом, у циљу израчунавања друге координате таче A, односно прве координате тачке B, као што је приказано на слици 7.4. Ако правилно спроведе рад на рачунару, ученик добија да је $y(A) = 8.154$ и $x(B) = 4.977$ (уколико је одабрао да рачунар исказује резултате заокружене на 3 децимале).



Слика 7.4. ПрименаGeoGebra-е у четвртом задатку-рад на математичком моделу

Четврта етапа: математичко решење

Свака група записује своје резултате које је добила радом на моделу.

Прелаз из четврте у пету етапу

Своје активности ученици могу да реализују у оквиру група или заједнички, интерпретацијом резултата и тумачењем решења обе групе. На прелазу ка решењу реалног проблема, наставник може поставити питања о томе да ли, и на који начин, резултати и конструисани модели могу да доведу до решења реалног проблема и у неким другим задацима. Ученик се на тај начин подстиче да изврши уопштавање добијених резултата и тако дође до формула које би се могле користити и у другим проблемима распада радиоактивних елемената и њихових изотопа. Уколико правилно спроведе когнитивне активности генерализовања, ученик би требало да закључи да распад радиоактивних елемената следи законитост:

- $m = m_0(1-k)^t$, где је m количина радиоактивног елемента након t година од почетка распада, m_0 његова количина на почетку распада, и k годишња стопа континуираног распада; полуживот радиоактивног елемента је $t_{1/2} = \frac{ln\frac{1}{2}}{ln(1-k)}$; односно
- $m = m_0 e^{-rt}$, где је $r > 0$ константа распада, при чему је $r = -ln(1-k)$; $t_{1/2} = \frac{ln2}{lnr}$.

Пета етапа: решење реалног проблема

Ученици треба да искажу решења реалног проблема до којих су дошли математичким радом.

Прелаз из пете у шесту етапу

Наставник може да развије са ученицима дискусију о решењима до којих су дошли радом на оба модела. Анализом резултата, ученици ће доћи до закључка да се применом и првог и другог модела долази до истих решења. До истог закључка ученици могу да дођу провером и поређењем конструисаних модела. Подсећајући ученике на својство експоненцијалних функција да за свако $a \in R^+$ и $x, y \in R$ важи $(a^x)^y = a^{xy}$, наставник може да сугерише ученицима да функцију $m = 100e^{-0.139t}$ запишу у облику $m = 100(e^{-0.139})^t$, а затим да је упореде са функцијом $m = 100 \cdot 0.87^t$. Како је $e^{-0.139} = 0.87$, променом основе експоненцијалне функције, један модел се једноставно конвертује у други. Разматрање и верификовање модела и добијених резултата, посебно оних који су изведени у процесу уопштавања, ученици могу да реализују и кроз разговор са наставником хемије.

Шеста етапа: евалуација

Кроз спроведене ученичке активности процењивања и утврђивања валидности конструисаних модела, могуће је доношење одлуке да се оба модела прихватају.

<u>5. задатак</u>

Прва етапа: реална ситуација

Животни век. Табела која је дата у задатку приказује очекивани животни век људи рођених у Америци, током одређених година двадесетог века, почевши од 1900. године.

Године после 1900.	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**
Животни век (у годинама)	54.1	62.9	69.7	73.7	76.9

Прелаз из прве у другу етапу

На почетку рада, ученици могу кратко да продискутују са наставником и наброје неке факторе који по њиховом мишљењу позитивно утичу на животни век људи, који у овом задатку представља реалну ситуацију. Сви ће се сигурно сложити да је реално очекивати продужење људског века, с обзиром на напредак човечанства, посебно у развијеним државама.

Друга етапа: реалан проблем

а) Ако је особа рођена 1995. године, колики је њен очекивани животни век?
б) Које године је рођена особа чији је очекивани животни век 67 година?

Прелаз из друге у трећу етапу

Ученици могу да разматрају податке који су дати у табели, што укључује препознавање и означавање променљивих величина у задатку. Како су ове активности спроведене и у претходним задацима, требало би да ученици, без потешкоћа, одреде независно променљиву величину - године током 20. века (што се може означити са t) и зависно променљиву величину - животни век, такође изражен у годинама (што се може означити са v). Потребно је да се подаци из табеле прилагоде математичком поступку, па ученицима може представљати проблем како ће приказати број година у даљем раду. Међутим, подаци у табели дати су тако да сугеришу ученику да за променљиву t узима само број година протеклих од 1900. године, зато што се у задатку ова година може представити са $t = 0$.

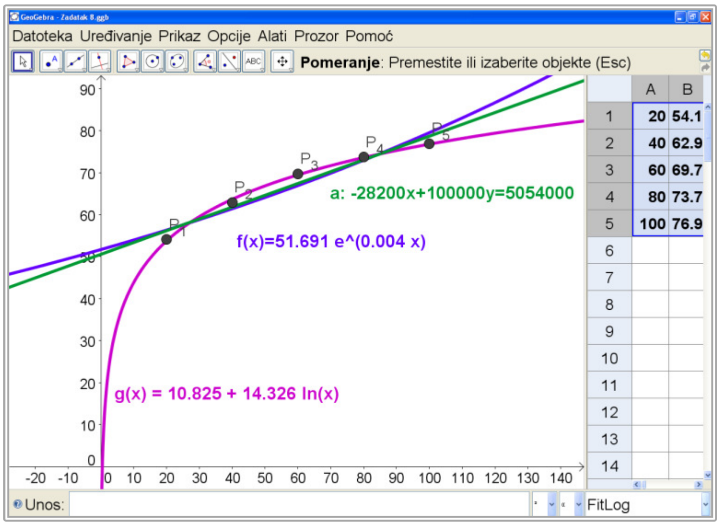
Решавање претходних задатака, уз примену аналогног резоновања, треба да представља когнитивни подстицај за ученике, тако да уоче да и у овом задатку треба одредити правило на основу којег би се могао проценити животни век у зависности од године, након 1900. године. Ове активности су веома важне, зато што позитивно утичу на способност ученика у превођењу реалног проблема на математички проблем.

На основу искуства стеченог у раду на претходним проблемима, већина ученика ће моћи самостално да закључи како ће математички модел бити дат као функција, коју треба одредити тако да најбоље одговара подацима из табеле и описује наведену зависност.

У циљу конструкције модела применом *GeoGebra*-е, ученици треба да примене процедуру као у претходном задатку, што подразумева формирање табеларног приказа података, тако да се у првој колони налазе вредности независно променљиве, а у другој зависно променљиве, затим састављање листе тачака и графичко приказивање те листе. Ученици су претходно већ упознати са опцијом „фитовања кривих“, па је вероватно да ће већина ученика применити наредбу *FitExp*, као и у 4. задатку, да би добили експоненцијалну функцију. Наставник може да подстакне ученике даље на размишљање, постављањем питања о томе која је још функција обрађена на претходним часовима. Тиме се ученичко резоновање усмерава на логаритамску функцију, док ће неки ученици сигурно споменути и линеарну, зато што им је ова функција позната и од раније. Линеарну и логаритамску функцију, које најбоље одговарају датим подацима, ученици добијају применом наредби *FitLinearni* и *FitLog*. За разлику од претходног задатка, где ученици на рачунару треба да конструишу један модел, овај задатак отвара могућност конструкције три модела.

Трећа етапа: математички модел

Реализацијом назначених активности, ученици добијају линеарну, експоненцијалну и логаритамску функцију које представљају математичке моделе, као што је приказано на слици 7.5. Прилагођени ознакама за променљиве, аналитички изрази ових функција су: $-28200t + 100000v = 5054000$, $v = 51.691e^{0.004t}$ и $v = 10.825 + 14.326\, ln\, t$.



Слика 7.5. Примена GeoGebra-е у петом задатку-математички модел

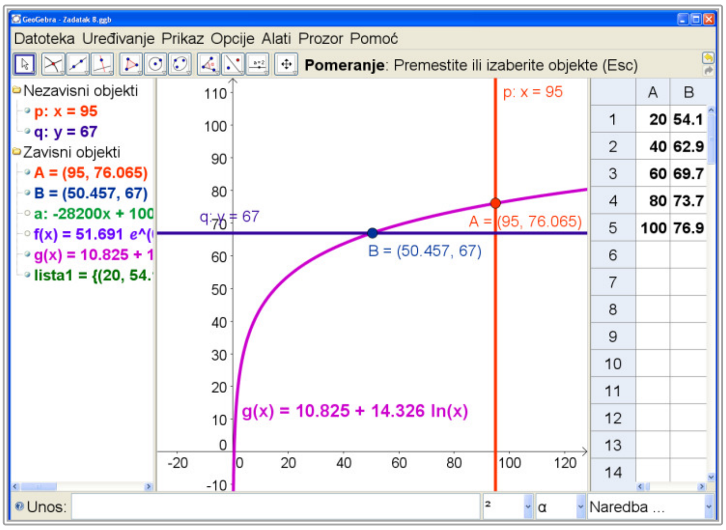
Прелаз из треће у четврту етапу

На основу визуелног резоновања, ученици могу да одаберу логаритамску функцију као математички модел за дате податке, уз услов $t > 0$, и даље утврде план рада:

а) ако је особа рођена 1995. године, према уведеним ознакама и начину приказивања података на x-оси, овде је $t = 95$, па за ту вредност независно променљиве треба одредити вредност зависно променљиве v;
б) за $v = 67$ одредити t, тако да добијена вредност за t представља број година након 1900. године.

Наставник може предложити ученицима да до математичког решења дођу радом на логаритамском моделу, али уз помоћ рачунара. На овај начин ће интерактивност, која се постиже конструкцијом и радом на моделу у рачунарском окружењу, бити додатно наглашена ученицима.

Резултати до којих ученици треба да дођу су приказани на слици 7.6. Потребно је одредити тачке A и B, које се налазе у пресеку правих $x = 95$ и $y = 67$, и графика функције g, респективно, одакле следи да је за $t = 95$ (што би била симулација за 1995. годину) $v = 76.065$, односно, за $v = 67$ (што би била симулација животног века од 67 година) се добија $t = 50.457$.



Слика 7.6.ПрименаGeoGebra-е у петом задатку-рад на математичком моделу

Четврта етапа: математичко решење

Ученици треба да записују своје резултате које су добили радом на моделу.

Прелаз из четврте у пету етапу

Ученици спроводе активности аналогно као и у претходним задацима.

Пета етапа: решење реалног проблема

За особе рођене 1995. године, очекује се животни век од 76 година, а нешто краћи очекивани животни век, 67 година, имају особе рођене 1950. године.

Прелаз из пете у шесту етапу

У овом задатку, наставник треба да посвети посебну пажњу последњим корацима у процесу моделирања. Постављени задатак је веома погодан за развој когнитивних вештина, као што су разматрање и проверавање добијених решења, што даље утиче на способности процењивања и просуђивања валидности, односно евалуације модела.

Наставник може да пита ученике да ли је продужење животног века линеарно са годинама реално и да ли је реално могуће да се у кратким временским интервалима животни век нагло повећава. На тај начин се ученик усмерава на интуитивно закључивање и доношење одлуке да је потпуно разумно да се прихвати математички модел дат растућом логаритамском функцијом, код које се раст успорава, али без ограничења.

Даље, наставник може да презентује податке о очекиваном људском веку, објављене у америчком националном извештају (http://www.cdc.gov/NCHS/data/n vsr/nvsr58/nvsr58_19.pdf) или да их ученик сам потражи на интернету, а затим да их упореди са резултатима добијеним помоћу логаритамског модела. Према тим подацима, очекивани људски век особе рођене 1995. године је 75.8 година, што је веома близу резултата добијеног помоћу модела. Такође, може се тражити да ученици предвиде колики ће бити људски век особе која ће се родити у неким будућим годинама, на пример 2020. године. Према моделу, за ове особе предвиђа се људски век од 79.412 година, док ће, према проценама наведеним у извештају, он износити око 79.5 година. Овде, оправдавање математичких решења и самог модела ученик реализује упоређујући их са подацима и проценама до којих се дошло неким другим статистичким методама.

Конфликтна ситуација, међутим, може настати ако се ученицима постави захтев да процене колики се људски век очекује за особе које ће се родити, на пример, 2400. године. Процена на основу модела је да ће те особе имати људски век од око 100 година, што је ипак мало вероватно. То значи да у предвиђањима која се односе на далеку будућност модел може бити веома непрецизан.

Шеста етапа: евалуација

На крају процеса, ученици ће извести закључак да се модел прихвата, зато што је у великој мери сагласан са подацима из наведеног извештаја, али је при томе важно формирање њихових критичких ставова о вредности математичког модела, његовим могућностима, али и ограничењима.

РАДНИ ЛИСТ (2): ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА – МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ

1. задатак

Астрономија. За посматрање звезда које нису видљиве голим оком, у астрономији се користе оптички инструменти. Међутим, и ти инструменти имају своја ограничења, која се изражавају у ограничавајућим магнитудама. За оптички телескоп, пречника D у инчима (1 инч једнак је 2.54 *cm*), ограничавајућа магнитуда L израчунава се по формули: $L = 8.8 + 5.1 logD$.

а) Израчунати ограничавајућу магнитуду за телескоп пречника 6 инча.
б) Израчунати пречник телескопа чија ограничавајућа магнитуда износи 20.6.

2. задатак

Киселост (pH) раствора. Киселост раствора изражава се његовом pH вредношћу, која се израчунава по формули: $\mathrm{pH} = -log[\mathrm{H_3O^+}]$, где је $[\mathrm{H_3O^+}]$ концентрација водоникових јона у раствору у јединицама *mol/l*.

У просеку, млеко има pH вредност три пута већу од лимете, док, са друге стране, млеко има упола мању pH вредност од наранџе.

Ако је просечна pH вредност наранџе 3.2, колико износи просечна концентрација водоникових јона у лимети?

3. задатак

Земљотреси. Чарлс Рихтер (Charles Richter), амерички геолог, је 1935. године дефинисао магнитуду земљотреса као: $M = log\frac{I}{S}$, где је I интензитет земљотреса (мерен као амплитуда сеизмографа која се чита 100 km од епицентра земљотреса), а S је интензитет стандардног земљотреса (чија је амплитуда 1 микрон или 10^4 cm).

Земљотрес који се догодио у Калифорнији 1933. године имао је магнитуду од 6.3 јединица Рихтерове скале. Земљотрес са магнитудом 8.3 јединица Рихтерове скале догодио се на Аљасци 1964. године.

Колико пута је био јачи земљотрес на Аљасци од земљотреса у Калифорнији?

4. задатак

Месечна отплата хипотеке. Математички модел $t = 16.625\, ln\left(\frac{s}{s-750}\right)$ за $s > 750$, апроксимира дужину отплате хипотеке на кућу од 150000 долара, при камати од 6% у виду месечних отплата. У моделу t је дужина отплате хипотеке изражена у годинама, а s је месечна рата у $.

а) Помоћу модела проценити дужину отплате хипотеке од 150000 $ при месечној камати од 6%, када је месечна рата 897.72 $ и када је месечна камата 1659.24 $.
б) Проценити укупно плаћен износ током трајања хипотеке, у случају месечне рате од 897.72 $ и у случају месечне рате од 1659.24 $.
в) Проценити укупан износ камате у случају месечне рате од 897.72 $ и у случају месечне рате од 1659.24 $.
г) Како гласи вертикална асимптота функције која представља модел?
Интерпретирати је у контексту постављеног проблема.

5. задатак

Ширење заразе. Вирус грипа шири се по формули $P(t) = 50 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$, где је P број заражених људи након t дана.

а) Колико људи је било заражено на почетку ширења вируса?
б) Колико људи је било заражено после недељу дана?
в) После колико времена ће бити заражено 1000 људи?

6. задатак

Рекламе. Путем телевизијске рекламе компанија жели да упозна што више људи велике градске агломерације са својим новим производом. Утврђено је да се број људи N (у милионима) који су били упознати са производом након t дана рекламирања може рачунати по формули: $N = 2(1 - e^{-0.037t})$.

а) Колики је максималан број људи који може бити упознат са новим производом путем рекламе?
б) Колико је људи упознато са новим производом после 10 дана?
в) Колико дана треба да траје рекламна капања да би 80% могућих гледалаца било упознато са новим производом?

7. задатак

Радиоактивни распад. Бомбардовање атмосфере космичким зрацима производи неутроне, који у реакцији са азотом производе радиоактивни угљеник-14 (^{14}C). Радиоактивни ^{14}C преко угљен-диоксида улази у сва жива ткива. Током живота биљке или животиње, количина изотопа ^{14}C одржава се на константном нивоу. Кад организам једном угине, изотоп ^{14}C се распада по формули: $A = A_0 e^{-0.000124t}$, где је A његова количина након t година. Ако је у тренутку смрти у примерку лобање било 500 *mg* изотопа ^{14}C, израчунати:

а) Колико ће бити изотопа ^{14}C после 15000 година?
б) Старост лобање откривене на археолошком налазишту, ако је у њој преостало још 10% изворне количине изотопа ^{14}C.
в) Представити формулу која је дата у задатку помоћу експоненцијалне функције са основом 2.

8. задатак

Радиоактивни распад. Радиоактивни изотоп злата ^{198}Au користи се за дијагностиковање и третман болести јетре. У јетру је убризгано 6 *mg* узорка ^{198}Au. Овај узорак се након једног дана распада на 4.6 mg. Преостала количина овог узорка ^{198}Au након t дана може се представити формулом: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

а) Израчунати константу распада λ изотопа ^{198}Au.
б) Израчунати полуживот изотопа ^{198}Au.
в) Написати формулу која описује количину преосталог узорка ^{198}Au као функцију полуживота овог изотопа.

9. задатак

Медицина. Једна ћелија леукемије убризгана у миша поделиће се на 2 ћелије за приближно пола дана. На крају дана, те две ћелије ће се поделити на 4 ћелије. То удвајање ће се наставити све док њихов број не достигне 1 милијарду, а миш ће тада угинути са ћелијама леукемије у сваком делу свог тела.

После приближно колико дана ће миш угинути?

<u>10. задатак</u>

Инвестирање. У првих 10 година, фонд је давао годишњи принос од 21.36%. Претпоставимо да новац уложен у тај фонд наставља да даје принос од 21.36% на годишњем нивоу.

После колико година ће се новац уложен у тај фонд удвостручити?

<u>11. задатак</u>

Популација. 2005. године, популација Русије је износила 143 милиона становника и била је у опадању, са годишњом стопом од 0.37%. У исто време, популација Нигерије је износила 129 милиона становника и била је у порасту, са годишњом стопом од 2.56%. Претпоставимо да су се промене у броју становника ове две државе одвијале као што је наведено и у годинама после 2005.

а) Које године ће се број становника ове две државе изједначити?
б) Колико ће људи живети у овим државама када се њихове популације изједначе?

<u>12. задатак</u>

Популација. Године 1995, процењена популација становника у Етиопији износила је 88 милиона становника. Светска банка проценила је да ће популација Етиопије до 2030. године расти по годишњој стопи од 1.67%.

а) Написати аналитички израз функције која моделира раст популације Етиопије, узимајући 1995. годину као нулту.
б) Према моделу, колика ће бити очекивана популација становништва Етиопије 2015. године? А 2030. године?
в) Нацртати график функције из ставке 1) на интервалу од 1995. до 2030. године.

<u>13. задатак</u>

Власништво. Табела која је дата у задатку приказује проценат људи у Америци који су били власници својих домова, током одређених година двадесетог века, а након 1900. године.

Година	**1940.**	**1950.**	**1960.**	**1970.**	**1980.**	**1990.**	**2000.**
Проценат власника домова	43.6	55.0	61.9	62.9	64.4	64.2	67.4

а) Одредити математички модел који највише одговара подацима из табеле.
б) Проценити проценат власника домова у 2013. години.
в) Упоредити проценат власника домова 1950. године, који је дат у табели, са процентом власника домова те године израчунатим помоћу модела.

14. задатак

Интернет. Од 1994. до 2000. године, број интернет чворова растао је веома брзо, као што је приказано у табели:

Година	**1994.**	**1995.**	**1996.**	**1997.**	**1998.**	**1999.**	**2000.**
Број чворова (у милионима)	2.2	4.9	9.5	16.1	29.7	43.2	72.4

а) Проценити број интернет чворова у 2012. години.
б) Стварни број интернет чворова у 2012. години је био око 888.2 милиона. Како се то слаже са проценом из ставке 1)?

15. задатак

Понуда и потражња. Акумулатори се продају широм дисконтног ланца трговина. Маркетиншка компанија утврдила је табеле зависности цене од потражње и понуде, где је t број акумулатора које по цени од p евра по комаду купци желе да купе, а трговина жели да прода:

Зависност цене од потражње	
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{p = D(t)}$**(€)**
1000	91
2000	73
3000	64
4000	56
5000	53

Зависност цене од понуде	
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{p = S(t)}$ **(€)**
1000	9
2000	26
3000	34
4000	38
5000	41

а) Проценити потражњу (до најближег броја комада) уз цену од 50 € по комаду.
б) Проценити понуду (до најближег броја комада) уз цену од 50 € по комаду.
в) Да ли је цена од 50 € стабилна или је вероватно да ће расти или падати? Објаснити.

8 Закључак

„Математика је основа свих наука...Свака друга наука утолико мање греши, уколико се више заснива на математици...Могуће је направити бродове који плове без једара, возила која се сама крећу, летилице помоћу којих човек лети као птица...У свему томе ће му само математика помоћи.“

Роџер Бекон (Roger Bacon, 1212 - 1294.)

Математика је кључна у намери човечанства да упозна и разуме природу која га окружује, али и друштвени миље у којем живи и ради. Она је база научно-техничког и технолошког прогреса. Како се математика сусреће и користи у различитим облицима живота и рада, математичка знања, вештине и способности потребне су сваком човеку, посебно у делатностима које су везане за природне науке, економију, технику и технологију [47]. Савремена методика наставе математике укључује примену оних метода и начина рада који развијају жељене способности упоредо са усвајањем одговарајућег обима суштинског знања. При томе, способности имају приоритет, зато што њихов адекватан развој омогућава ефикасно стицање знања, а не обрнуто [1].

Математичко моделирање, које је предмет дисертације, несумњиво припада савременим методичким приступима који утичу на формирање свестрано образоване личности, развијају математичко мишљење и способности логичког расуђивања, перцепције, визуелизације, имагинације, интуиције, креативности, оријентације у нестандардним ситуацијама...[1].

Појам функције најбоље описује међусобну повезаност, условљеност математичких величина, узрочно-последичне везе реалних величина, покретљивост и динамичност појава и процеса који се изучавају у различитим научним дисципилнама.

У дисертацији представљен је пројекат заснован на теоријским принципима математичког моделирања, чија је реализација омогућила ученицима да изучавају функције и њихове примене у научним проблемима. Експериментални наставни процес је са својим конструктивистичким правцем био оријентисан ка стицању, продубљивању и утврђивању теоријских знања ученика из области функције кроз њихову практичну примену и ка усвајању система умећа и навика. У експерименталном раду, математичко моделирање примењено је на решавање проблема из хемијске кинетике, што је укључило и одговарајуће наставне садржаје ове научне дисциплине. Међупредметним повезивањем и успостављањем корелације појмова математике и друге науке, у раду је остварен и савремен, интердисциплинарни приступ средњошколској настави.

Кроз експериментални рад истакнуте су и потврђене вишеструке предности примене математичког моделирања као савременог методичког приступа у односу на традиционалне методе и поступке у наставној пракси. Моделирање омогућава ученицима да реализацијом разноврсних когнитивних активности самостално стичу знања и развијају математичке компетенције. Кроз активности моделирања, ученици лакше усвајају апстрактне математичке појмове, што води ка стварном разумевању сложених математичких теорија и правила, ка могућностима за њихово повезивање са реалним светом и примену у реалним проблемима. У почетним етапама моделирања, код ученика се развија способност правилног схватања смисла постављених проблема, који даље захтевају проналажење и формулисање идеја за његово решавање. Приликом конструкције и рада на математичким моделима, активности ученика усмерене су на математичке методе, алгоритме и поступке долажења до математичког решења. Све то захтева али и подстиче правилно математичко мишљење, аргументовање и логичко закључивање, као и способност за решавање нетривијалних проблема. Такође, развија се осећај за имагинацију и смисао за интуитивност, односно способност предвиђања резултата и исправних путева решења проблема. Ученици се оспособљавају да прецизно износе своје мисли, да сами предлажу могућа решења и да о њима дискутују [47]. У завршним етапама моделирања, ученици спроводе активности провере добијеног математичког решења, његове интерпретације у реалном контексту и презентовање резултата, што укључује формирање критичког става о прихватљивости решења, али и спремност да се поступак евентуално понови. На овај начин развијају се стваралачке способности, лична интересовања, креативност и мотивација, уз уважавање индивидуалних могућности ученика.

Увођење иновативног интердисциплинарног приступа настави кроз математичко моделирање научних проблема, ученицима учење математике чини интересантнијим и животнијим. Интердисциплинарни приступ прати природни пут стицања и примене знања која у пракси не познају границе наука. Спровођењем стратегија које се базирају на теоријским основама интердисциплинарне наставе, реализује се активан наставни процес у којем ученици кроз комуникацију са наставником, али и другим ученицима, стичу, анализирају, синтетизују и вреднују одређена сазнања, и на тај начин долазе до одговора, закључака и уопштавања, са највећом могућом мером генерализације и трансфера знања [44]. Повезивање математичког садржаја са садржајима другог наставног предмета омогућава ученицима да схватају и интегришу математичке концепте и идеје у једном ширем концептуалном оквиру. На овај начин се посебно истиче општост, заснованост, одређеност и примењљивост математичких знања. Такође, код ученика се формира научни поглед на свет и проблеме који га окружују и са којима ће се сретати у даљем научном раду и професионалној пракси. Интердисциплинарни приступ учењу и подучавању има важну улогу у интелектуалном развоју и оспособљавању појединаца који ће својим функционалним знањем, искуством и способностима моћи да одговоре на изазове савременог друштва.

Рационална и ефикасна примена рачунара такође представља иновацију уведену у експерименталном наставном процесу. У експерименталној настави, уз помоћ рачунара и рачунарског образовног софтвера *GeoGebra*, као систему свих елемената дидактичког четвороугла повезаних повратним спрегама, обрађени су одабрани наставни садржаји на савремен начин и усклађени са захтевима моделирања.

Кроз експериментални рад посебно је истакнут дидактички значај примене рачунара у настави. Најважнији значај примене рачунара је у визуелизацији наставних садржаја. Представљањем садржаја помоћу рачунарских графичких приказа или анимација математичких и других научних принципа, теорема или проблема, визуелно учење допуњује вербално учење и код ученика омогућава потпуну перцепцију [57]. Овде посебно истичемо визуелизацију функција, и у складу са дидактичким принципом очигледности, могућност успостављања веза између својстава функција и њихове прецизне графичке презентације.

Приликом решавања научних проблема кроз процес моделирања, рачунари омогућавају ученицима да обраде већи број улазних информација, лакшу и бржу консртрукцију више математичких модела него што је то било могуће у традиционалним начинима рада, а да при томе буду усредсређени на математичка резоновања, рад и закључивања. Рачунарско окружење пружа ученицима могућност да истражују математичке концепте, да на једноставнији начин формулишу и проверавају хипотезе, да доказују и потврђују теорије и законитости које важе у природним наукама (хемији, физици...). Када изводе експеримент у лабораторији и реалном окружењу, ученици могу да прате процесе и дешавања у ограниченим условима. Рад на рачунару у процесу моделирања омогућава ученицима да прецизно приказују процесе (хемијске, физичке...), узимајући у обзир широк распон различитих услова за постављене проблеме.

У експерименталној настави уведена је и нова методичка концепција у обради и утврђивању основних својстава логаритамске и експоненцијалне функције, као посебна активност усмерена на потребе и циљеве процеса моделирања, и усклађена са наставним садржајима који су у овом процесу обрађени. Заснована на шеми: интеграл → логаритамска функција → експоненцијална функција, и реализована уз примену рачунара, примењена методичка концепција представља значајну иновацију у средњошколској настави математике.

У почетним етапама реализације концепције уведен је појам функције дате помоћу одређеног интеграла, који је садржајно и методолошки објашњен кроз различите задатке, са посебним акцентом на везу између неодређеног и одређеног интеграла. Одабрани приступ омогућио је ученицима да на основу више појединачних примера стварају претпоставке, потврђују правила и изграђују структуре које се односе на појам функције дате интегралом. Формирањем овог појма и увођењем ученика у математичке структуре и релације које се на њега односе, посебно се позитивно утиче на развој напредног математичког мишљења. Ученици кроз постојећа знања конструишу нова знања о функцији датој помоћу интеграла, при чему се развија математичка креативност и логичко, дивергентно мишљење, али све то уз формално дефинисање функције. Такође, увођење и обрада функције дате помоћу интеграла представља добру методичку основу за истраживање прве и друге фундаменталне теореме калкулуса.

Рад у рачунарском окружењу доприноси бољем разумевању и стварању геометријских представа о функцији датој помоћу интеграла, кроз експериментисање и проверу резултата. У том смислу, визуелизација овде омогућава перцепцију и подстиче процес мишљења, што резултира бољим прихватањем и разумевањем назначене функције. Примена рачунара има значајан позитиван утицај на формирање доброг концепта слике, што комбиновањем са формулисаним концептом дефиниције води ка усвајању појма функције дате помоћу интеграла.

Даље је помоћу интеграла уведена логаритамска функција, тако да се концепција структуирања наставног садржаја заснивала на обради логаритамске функције применом основних својстава одређеног инеграла. На овај начин, у раду је креиран нов приступ, погодан за истраживање, уз могућност откривања особина, односа, функционалне зависности и непримећених узрочно-последичних веза међу наведеним појмовима, и то у одговарајућем редоследу. Такође, овакав приступ у обради логаритамске функције захтева способност примене знања о функцији датој помоћу интеграла и укључује трансформацију ученичких знања, првенствено аналогијом и резоновањем, уз одговарајући степен стваралаштва у раду.

У последњим етапама реализације одабране концепције, уведена је експоненцијална функција, као инверзна логаритамској, и испитана су њена основна својства.

Експериментално истраживање спроведено је на намерном узорку од 223 гимназијалца четвртог разреда, који су били подељени у две групе (експерименталну и контролну). Групе су имале приближно једнак број ученика и биле уједначене на основу општег успеха и оцена из математике у претходна три разреда. На почетку експерименталног процеса, спроведено је иницијално истраживање, ради утврђивања иницијалног стања у математичком знању ученика. Анализом резултата иницијалног тестирања ученика одабраног узорка утврђена је уједначеност група на основу предзнања из области функције. У току експерименталног процеса, са ученицима експерименталне групе изведена је настава применом описаних нових методичких концепата и приступа настави/учењу. Са ученицима контролне групе изведена је настава тако да су се одабрани наставни садржаји обрађивали, понављали и утврђивали применом традиционалних наставних метода, без увођења нових методичких поступака у раду. На крају експерименталног процеса, спроведено је финално истраживање, ради евалуације реализованих активности током експерименталног периода, односно утврђивања финалног стања (исхода у настави и учењу математике применом одабраних методичких поступака; знања ученика). Анализа резултата финалног тестирања показала је позитиван утицај примене математичког моделирања (као и свих реализованих когнитивних активности у етапама процеса) у интердисциплинарном приступу настави/учењу, спровођења назначене методичке концепције у обради основних својстава логаритамске и експоненцијалне функције, у рачунарском окружењу, на квалитет математичког знања ученика и оствареност оптималних резултата у учењу и изучавању наставних садржаја из области функције. t-тест је показао да се, са вероватноћом од 99%, може закључити да су резултати ученика експерименталне групе значајно бољи од резултата ученика контролне групе. Кроз егзактно потврђивање позитивног дејства експерименталних фактора на математичка знања ученика остварен је и главни циљ истраживања.

Изучавање функције, посебно логаритамске, дате помоћу интеграла, на средњошколском нивоу, отворило је пут и дало идејну основу за увођење нове методичке концепције у обради функција датих помоћу интеграла, у рачунарском окружењу, и на високошколском нивоу учења математике.

У експерименталном наставном процесу који је реализован са студентима, приступило се на начин слично као и у раду са гимназијалцима. Након увођења појма функције дате помоћу интеграла, усвајање појма остварено је кроз рад на различитим проблемима и уз примену рачунара. Разлика је у томе што су ученици средње школе детаљно обрађивали логаритамску функцију дату помоћу интеграла, док су студенти даље стицали и продубљивали знања о назначеном појму кроз анализу различитих функција датих помоћу интеграла.

Решавање постављених проблема, уз активно учење и примену знања из калкулуса, има одговарајући методички значај. Студентима је омогућено стварање очигледних и јасних представа о појму функције дате помоћу интеграла и њеним својствима, путем преношења појма у више конкретних ситуација (проблема). Може се закључити да анализа ових функција за студенте представља изазов из више разлога. Прво, зато што су функције дате помоћу интеграла. Друго, студенти истовремено морају да испитују и повезују својства функције дате интегралом са својствима подинтегралне функције. Треће, аналитички израз подинтегралне функције не мора бити познат, већ само њен график. Вузуелизација функција датих помоћу интеграла, на рачунару, а у комбинацији са симболичким записима и дефиницијама, има изразито позитиван утицај на процес учења математике. Рад на рачунару кроз динамичку акцију омогућава наставнику да приказује математичке концепте и процесе, а студентима да их истражују. Решавањем разноврсних примера у рачунарском окружењу, студенти се усмеравају на општији концепт који је представљен класом примера и који представља основу за каснији формалнији рад. Овакав начин рада и код студената утиче на унапређивање приступа решавању проблема који се односе на функције. Подстиче се флексибилно математичко мишљење, аргументовање и закључивање, способност истраживања, способност апстраховања, упоређивања и уопштавања, активан став према новим и непознатим проблемима, храброст за размишљање, иако пут решења није одмах очигледан ([66] [83]). Студенти се такође подстичу на употребу рачунара који у значајној мери може да им помогне на њиховом путу ка проширивању постојећих и стицању нових математичких знања.

Експериментално испитивање ефикасности увођења и реализације новог методичког приступа високошколској настави математике и примене образовног софтвера *GeoGebra* у обради одабраних појмова калкулуса, посебно функција датих помоћу интеграла, реализовано је на Природно-математичком факултету у Новом Саду. Истраживање је спроведено на 66 студената прве године студија физике, који су били подељени у две групе. Групе су укључиле студенте свих нивоа предзнања и сличне дистрибуције резултата колоквијума из математичке анализе (наставни садржаји: функције). Анализа резултата овог истраживања показала је да се може закључити следеће: група студената са којима су одабрани наставни садржаји математичке анализе обрађени осмишљеним новим поступцима у раду показала је статистички значајно боље резултате у знању, разумевању и анализи функција датих помоћу интеграла, као и примени знања диференцијалног и интегралног рачуна, од групе студената са којима су исти садржаји обрађени класичним начином рада.

Дисертација је теоријско-експерименталног карактера и, у складу са тим, истакнути су њени научни доприноси савременој методици наставе математике.

Теоријски допринос дат је кроз направљен критички компаративни преглед савремене литературе из области методике наставе математике, усредсређујући се на научне и стручне радове који се односе на примену математичког моделирања и интердисциплинарног приступа у настави. Дата су теоријска разматрања примене различитих наставних метода, облика рада и информационе технологије у настави моделирањем, узимајући у обзир све елементе савременог дидактичког четвороугла. У раду је посебна пажња посвећена проучавању литературе из математичке анализе, намењене средњошколском и високошколском нивоу учења математике.

Посебно се истиче допринос експерименталног дела дисертације, који се односи на примену нових методичких приступа изучавању наставних садржаја из области функције у наставном процесу. Допринос се огледа у иновацији средњошколске наставе математике, применом математичког моделирања, интердисциплинарног приступа и кроз успостављање корелације математичких појмова са појмовима неке друге науке. Изразито важан допринос дисертације је у увођењу и реализацији нове методичке концепције у обради функција датих помоћу интеграла, посебно у обради логаритамске, а затим и експоненцијалне функције на средњошколском нивоу учења математике. Допринос се такође огледа и у примени новог приступа обради појмова математичке анализе, са посебним акцентом на функције дате помоћу интеграла на високошколском нивоу учења математике, што је увело одговарајуће иновације и у раду са студентима. У дисертацији је представљен и детаљно објашњен целокупан експериментални наставни процес реализован са ученицима, односно студентима, уз планску и систематску примену рачунара током целог процеса. Експерименталним делом, који се односи на спроведена истаживања, емпиријски је утврђен утицај предложених нових методичких поступака у раду на квалитет знања ученика, односно студената, из области функције.

Важно је да се математичко моделирање, уз примену рачунара, као савремени методички приступ настави/учењу у потпуности интегрише у наставном процесу. То би се могло остварити применом моделирања на свим нивоима математичког образовања, тако да се ученици упознају са овим процесом и раде са математичким моделима у оквиру ширег спектра наставних тема. Израдом наставних материјала на крају дисертације постављена је методичка основа и дат предлог за изучавање експоненцијалне и логаритамске функције, као и њихове примене у једноставнијим примерима из реалног живота, применом моделирања. Потребна је израда и систематска примена и других материјала, по могућности, у свакој наставној теми. Даље се предлаже повезивање наставних садржаја математике и са другим садржајима хемије, али и физике, астрономије, биологије, решавањем сложенијих проблема из ових наука кроз процес моделирања, што би, надамо се, допринело и унапређивању интердисциплинарног приступа настави/учењу. Дисертација и наведени предлози отварају могућности за спровођење нових истраживања у циљу даљег испитивања утицаја предложених иновативних приступа на знања из различитих специфичних области математике и других наука.

Следећа истраживања би се такође могла односити на увођење и обраду функција датих помоћу интеграла методичким приступом, примењеним у раду са студентима физике и презентованим у дисертацији, и то са студентима математике, са ученицима општег, природно-математичког и математичког смера гимназије. Таква истраживања омогућила би даљу анализу успешности учења предложеним методичким поступцима према узрасту, образовној оријентацији и/или интелектуалним способностима испитаника. Потребна је даља реформа учења односно подучавања и других појмова математичке анализе применом рачунара, што би обогатило старе и увело у наставу нове, савремене математичке садржаје.

9 Литература

[1] Abdulhamid, S.M., (2008), Modelling As an Aid in Teaching Mathematics, *Leonardo Journal of Sciences*, 7:12, 187-195.

[2] Антонијевић, Р., (2006), Повезаност знања у настави, *Педагогија* LXI (1), 71-85.

[3] Barnett, R.A., Ziegler, M.R., Byleen, K.E., (2006), *Primijenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti, 8. izdanje,* Zagreb: Mate.

[4] Blomhøj, M., Jensen, T.H., (2003), Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning, *Teaching Mathematics and its Applications,* 22 (3), 123-139.

[5] Blomhøj, M., (2009), Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling, in: Blomhøj, M., Carreira, S. (Eds.): *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*, 1-18, Rosklide: Rosklide University.

[6] Blum, W., (1993), Mathematical modelling in mathematics education and instruction, in: *Teaching and learning mathematics in context*, Edited by Breiteig (etc.), 3-14, Chichester: Horwood.

[7] Blum, W., Borromeo Ferri, R., (2009), Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?, *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45-58.

[8] Богославов, Т.В., (1993), *Збирка решених задатака из математике 4*, Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

[9] Бојанић, М. и сар., (2005), *Приручник за самовредновање и вредновање рада школе*, Београд: Министарство просвете и спорта Републике Србије.

[10] Borromeo Ferri, R., (2006), Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 86-95.

[11] Varošanec, S., (2004), *Metodika nastave matematike*, Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, PMF-matematički odjel.

[12] Вукобратовић, Р., (2010), Од увођења појма функције до његовог формирања, магистарски рад, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду.

[13] Galbraith, P., Stillman, G., (2006), A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 143-162.

[14] Гојков, Г., (2003), *Докимологија*, Вршац: Виша школа за образовање васпитача.

[15] Gracin, D.G., (2007), Matematička pismenost, *Matematika i škola*, VIII (40), 201-210.

[16] Gracin, D.G., (2008), Računalo u nastavi matematike (1. dio), *Matematika i škola* X (46), 10-15.

[17] Gracin, D.G., (2008), Računalo u nastavi matematike (2. dio), *Matematika i škola* X (47), 81-87.

[18] Gutman, I., (2008), The chemical formula C_nH_{2n+2} and its mathematical background, *The teaching of mathematics* XI (2), 53-61.

[19] Ghorpade, S.R., Limaye, B.V., (2006), *A Course in Calculus and Real Analysis*, New York: Springer.

[20] De Vries, G., (2001), *What is Mathematical Modeling*, Canada: Department of Mathematical Sciences, University of Alberta.

[21] Elia, I. et al., (2007), Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533-556.

[22] Ивић, И., Пешикан, А., Антић, С., (2001), *Активно учење,* Београд: Институт за психологију.

[23] Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2000), *Математика 1-збирка задатака и тестова за I разред гимназија и техничких школа,* Београд: Круг.

[24] Ивановић, Ж., Огњановић, С., (2000), *Математика 2-збирка задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа,* Београд: Круг.

[25] Jablonka, E., Gellert, U., (2007), Mathematisation-Demathematisation, in: Gellert, U., Jablonka, E. (Eds.): *Mathematisation and Demathematisation-Social, Philosophical and Educational Ramifications*, 1-18, Rotterdam: Sense Publishers.

[26] Jensen, T.H., (2007), Assessing mathematical modelling competency, in: Haines, C.R., Galbraith, P., Blum, W., Khan, S. (Eds.): *Mathematical Modelling (ICTMA 12) Education, Engineering and Economics*, 141-148, Chichester: Horwood.

[27] Karadag, Z., McDougall, D., (2009), Dynamic worksheets: Visual learning with the guidance of Polya, *MSOR Connections*, 9 (2), 13-16.

[28] Кечкић, Ј.Д., (1998), *Математика са збирком задатака за први разред гимназије,* Београд: Наука.

[29] Кечкић, Ј.Д., (2006), *Математика са збирком задатака за четврти разред гимназије*, Београд: Кечкић.

[30] Krathwohl, D.R., (2002), A Revision of Bloom´s Taxonomy: An Overview, *Theoryinto Practice*, 41 (4), 212-218.

[31] Kurnik, Z., (2002), Problemska nastava, *Matematika i škola* III (15), 196-202.

[32] Kurnik, Z., (2007), Nastavni sat matematike, *Matematika i škola* VIII (38), 99-104.

[33] Lesh, R., Doerr, H.M., (2003), *Beyond Contructivism-Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching,* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[34] Marković, Z., (2011), Matematičko modelovanje u matematičkom obrazovanju, *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, III (4), 35-50.

[35] Maaß, K., (2006), What are modelling competencies?, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 113-142.

[36] Милановић, И., Раичевић, В., (2011), Утврђивање реда хемијске реакције помоћу математичког модела, *Педагошка стварност* LVII (1-2), 120-131.

[37] Milanović, I., Vukobratović, R., Raičević, V., (2012), Mathematical modelling of the effect of temperature on the rate of a chemical reaction, *Croatian journal of education*, 14 (3), 681-709.

[38] Милошевић, Д., (2009), Тестови у настави математике, *Настава математике* LIV (2-3), 53-59.

[39] Mousoulides, N.G., Christou, C., Sriraman, B., (2008), A Modelling Perspective on the Teaching and Learning of Mathematical Problem Solving, *Mathematical Thinking and Learning* 10, 293-304.

[40] Мужић, В., (1973), *Методологија педагошког истраживања*, Сарајево: Завод за издавање уџбеника.

[41] Надрљански, Ђ., Надрљански, М., (2005), *Кибернетика у образовању*, Сомбор: Учитељски факултет у Сомбору.

[42] Niss, M., Jensen, T.H., (2007), *Competencies and Mathematical Learning-ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*, English translation of part I-VI of the report from the Danish KOM-projekt, Denmark: IMFUFA.

[43] Olive, J. et al., (2010), Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies, in Hoyles, C. and Lagrange, J.B. (Eds.): *Mathematical Education and Tehnology-Rethinking the Terrain, The* 17^{th} *ICMI Study*, 133-177, New York: Springer.

[44] Papotnik, A. i sar., (2008), Konceptualne i kurikularne osnove međupredmetne korelacije u funkciji projektnoga nastavnog rada**,** *Školski vjesnik-Časopis za pedagoška iškolska pitanja*, 57 (3-4), 311-319.

[45] Polya, G., (1973), *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, 2^{nd} edition, Princeton: Princeton University Press.

[46] Poljak, V., (1984), *Didaktika*, Zagreb: Školska knijga.

[47] Романо, Д.А., (2007), Размишљање о математичком образовању, *IV Symposium "Technology, Informatics and Education for Learning and Knowledge Society"*, Novi Sad, 26 - 27. 01. 2007, Институт за педагошка истраживања Београд, Центар за примену науке, технологије и информатике Нови Сад, Природно-математички факултет Нови Сад, 82-90.

[48] Романо, Д.А., (2009), Теорије математичког образовања, први дио: PME-теорија, *Истраживање математичког образовања* I (1), 23-35.

[49] Sekerák, J., (2010), Phases of mathematical modelling and competence of high school students*, The teaching of mathematics*, XIII (2), 105-112.

[50] Spivak, M., (2008), *Calculus, 4th edition*, Houston: Publish or Perish.

[51] Steel, R.G.D., Torrie, J.H., Dickey, D.A., (1996), *Principles and Procedures of Statistics: A Biometrical Approach,* New York: McGraw-Hill.

[52] Сузић, Н., (2007), *Примењена педагошка методологија*, Бања Лука: ХБС.

[53] Takači, A., (2008), *Development of Computer-aided Methods in Teaching Mathematics and Science*, Novi Sad: Faculty of Science, University of Novi Sad.

[54] Такачи, Ђ., Пешић, Д., Милутиновић, М., (2005), Усвајање појма непрекидности функције, *Педагошка стварност* LI (5-6), 387-397.

[55] Такачи, Ђ., Ђукић, М., Будински, Н., (2007), Обрада резултата теста вишеструког избора, *Настава математике* LII (1), 23-29.

[56] Такачи, Ђ. и сар., (2010), Математичко моделирање заступљености пушења, *Педагошка стварност* 56 (7-8), 617-629.

[57] Takači, Dj., Dimovski, I.N., (2011), Animations made in Matlab and their application for didactic purposes, *Croatian Journal of Education*, 13 (1/2011), 99-137.

[58] Tall, D., (1975), *A Long-Term Learning Schema for Calculus and Analysis*, UK, Coventry: Mathematics Institute, University of Warwick.

[59] Tall, D., (1977), Cognitive Conflict and the Learning of Mathematics, *Paper pressented at the 1st Conference of The International Group for the Psychology of Mathematical Education*, Utrecht, Holland.

[60] Tall, D., (1992), *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof*, UK, Coventry: Mathematics Institute, University of Warwick.

[61] Upadhyay, S. K., (2006), *Chemical Kinetics and Reaction Dynamics*, Dordreht: Springer.

[62] Haines, C.R., Crouch, R., (2010), Remarks on modeling cycle and interpretation of behaviours, in: Lesh, R.A., Galbraith, P.L., Haines, C.R., Harford, A. (Eds.): *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies (ICTMA13)*, 145-154, New York, London: Springer.

[63] Hadžić, O., Takači, Đ., (2010), *Matematičke metode za studente prirodnih nauka*, Novi Sad: Symbol.

[64] Henning, H., Keune, M., (2007), Levels of Modelling Competencies, in: Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.W., Niss, M. (Eds.): *Modelling and Applications in Mathematics Education, The* 14^{th} *ICMI Study*, 225-233, New York: Springer.

[65] Херцег, Д., Херцег Ђ., (2007), *GeoGebra-динамичка геометрија и алгебра*, Нови Сад: Природно-математички факултет у Новом Саду.

[66] Херцег, Д., Херцег Ђ., (2009), Интерполација и GeoGebra, *Педагошка стварност* LV (9-10), 897-908.

[67] House, J.E., (2007), *Principles of Chemical Kinetics, Second Edition*, London: AcademicPress.

[68] Шевкушић, С., Шефер, Ј., (2006), Акционо истраживање новог приступа у настави познавања друштва у четвртом разреду основне школе, *Настава и васпитање* 3, 269-283.

[69] Шекарић, М., (2010), *Статистичке методе*, Београд: Унивезитет Сингидунум.

[70] Шефер, Ј., (2002), Један модел за развијање курикулума и евалуацију ученика, *Зборник института за педагошка истраживања* 34, 79-95.

[71] Шефер, Ј., (2005), *Креативне активности у тематској настави*, Београд: Институт за педагошка истраживања.

[72] Šuljić, Š., (2003), Izazovi moderne tehnologije, *Matematika i škola* IV (19), 161-167.

Интернет ресурси

[73] http://apcentral.collegeboard.com/apc/public/repository/AP_CurricModCalculusFunctionsDefined.pdf (приступљено 14. 7. 2012.)

[74] http://banach.millersville.edu/~BobBuchanan/math161/NatLog/main.pdf (приступљено 22. 2. 2011.)

[75] http://ccd.uns.ac.rs/aus/miss/miss_doc/Stari%20Materijali/Predavanja/Modeliranje%20i%20simulacija%20sistema%20-Teorija%202.pdf (приступљено 7. 7. 2011.)

[76] http://courtneytrabue.com/GMC/106-New/w4/C4-TestA.pdf (приступљено 3. 12. 2012.)

[77] http://courtneytrabue.com/GMC/106-New/w4/C4-TestB.pdf (приступљено 2. 2. 2012.)

[78] http://ebookbrowse.com/pismeni-korelacijsko-integracijski-sustav-doc-d54314435 (приступљено 23. 2. 2011.)

[79] http://europa.eu/legislation_summaries/education_training_youth/lifelong_learning/c11090_en.htm (приступљено 22. 11. 2012.)

[80] http://highered.mcgraw-hill.com/sites/dl/free/0072867388/374777/ch05.pdf (приступљено 2. 12. 2012.)

[81] http://learningdesignresources.wikispaces.com/file/view/EducationalObjectivesBloom.pdf (приступљено 22. 11. 2012.)

[82] http://sites.dmi.rs/personal/hercegd/metodika/Nastavni%20principi.ppt (приступљено 21. 11. 2010.)

[83] http://sites.dmi.rs/personal/hercegd/metodika/Izlaganje%20%2051-94%20sredjeno.doc (приступљено 21. 11. 2010.)

[84] http://staffweb.cms.gre.ac.uk/~st40/Books/MathematicalModelling (приступљено 20. 6. 2011.)

[85] http://www.diofant.org/FAJLOVI/PDF/10.%20%20PEDAGOSKI%20ESPERIMENT.pdf (приступљено 17. 10. 2011.)

[86] http://www.diofant.org/FAJLOVI/PDF/03.%20PEDAGOSKE%20OSNOVE.pdf (приступљено 11. 9. 2011.)

[87] http://www.edu-soft.rs/cms/mestoZaUploadFajlove/informacioni_sistem_.pdf (приступљено 18. 5. 2013.)

[88] http://www.edusoft.rs/cms/mestoZaUploadFajlove/INTEGRATIVNA_NASTAVA_za_CD_.pdf (приступљено 11. 11. 2011.)
[89] http://www.ffpu.hr/fileadmin/Dokumenti/Evaluacija_02.ppt (приступљено 22. 6. 2013.)
[90] http://www.matematika.hr/kurikulum (приступљено 26. 6. 2010.)
[91] http://www.normala.hr/wp-content/uploads/2010/09/Bjelanovic.pdf (приступљено 26. 9. 2011.)
[92] http://www.pef.uns.ac.rs/index.php?option=com_phocadownload&view=category&id=94&lang=sr (приступљено 18. 2. 2012.)
[93] http://www.staraskola-mpek.edu.rs/samovrednovanje%20files/korelacija.ppt (приступљено 30. 11. 2011.)
[94] http://www.zemunskagimnazija.edu.rs/download/ObliciNastavnogRada.pps (приступљено 24. 9. 2011.)
[95] https://sites.google.com/site/licencazaradnastavnika/didaktika/4-didakticki-principi (приступљено 5. 6. 2103.)
[96] http://www.google.rs/url?url=http://www.pefja.kg.ac.rs/preuzimanje/Materijali_za_nastavu/ Didaktika/2010-2011/Nastavni_principi (приступљено 5. 6. 2103.)
[97] http://www.phy.pmf.unizg.hr/~planinic/diplomski/kprugovecki.pdf (приступљено 11. 7. 2103.)
[98] http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/MNM1-1.pdf (приступљено 12. 3. 2013.)

10 Биографија

Ивана Милановић (рођ. Келечић) рођена је 17. априла 1977. године у Зрењанину. Завршила је Гимназију „Исидора Секулић“ у Новом Саду и дипломирала на Природно-математичком факултету Универзитета у Новом Саду, на Департману за математику и информатику, смер - професор математике, са просечном оценом 9.24.

Од 1. септембра 2000. године, професор је математике у Гимназији „Исидора Секулић“ у Новом Саду. У периоду од 2001. до 2008. године радила је као професор математике и у Гимназији „Светозар Марковић“ у Новом Саду.

Коаутор је пројекта који је 2002. године достављен Министарству просвете и спорта Републике Србије - Вукобратовић Р., Келечић И.: *„Информатизација наставе математике“*.

У периоду од 2003. до 2013. године похађала је програме обуке стручног усавршавања, акредитоване од стране Министарства просвете Републике Србије, у трајању од укупно 275 сати.

У Гимназији „Исидора Секулић“ у Новом Саду, од 2010. године спроводи менторски рад са наставницима, у циљу оспособљавања наставника математике - приправника за самостално извођење васпитно-образовног рада.

Нови Сад, фебруар 2014.

Ивана Милановић

Радови и конференције

Милановић, И., *Савремена настава математике*, Међународна конференција о настави и учењу математике (МКНАМА 2010), Србија, Нови Сад, 24 - 25. август 2010. године.

Милановић, И., Вукобратовић, Р., *Положај математике у гимназијалском образовању ученика*, Прва међународна конференција гимназија 3К, Србија, Нови Сад, 10 - 11. септембар 2010. године. Рад објављен у *Зборнику радова прве међународне конференције гимназија 3К - Култура, комуникација, компјутер*, Нови Сад: Савез педагошких друштава Војводине, 93-100.

Милановић, И., Раичевић, В., *Утврђивање реда хемијске реакције*, Међународна GeoGebra конференција за југоисточну Европу, Србија, Нови Сад, 15 - 16. јануар 2011. године.

Милановић, И., Раичевић, В., (2011), Утврђивање реда хемијске реакције помоћу математичког модела, *Педагошка стварност*, LVII (1-2), 120-131.

Милановић, И., (2011), Примена образовног софтвера GeoGebra у додатној настави математике, уредник Такачи, Ђ., *Зборник радова међународне GeoGebra конференције за југоисточну Европу*, Србија, Нови Сад, 15 - 16. јануар 2011. године, Нови Сад: Природно-математички факултет у Новом Саду, Департман за математику и информатику, 99-109.

Milanović I., Raičević, V., *Mathematical modelling in Chemistry*, Pannonian Mathematical Modeling International Conference (PAMM 2011), Srbija, Novi Sad, 29 - 30. april 2011. godine.

Milanović I., Raičević V.: *Establishing Order of Chemical Reaction using Mathematical Modelling*, 34th International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics, Hrvatska, Opatija, 23 - 27. maj 2011. godine.

Милановић, И., Такачи, Ђ., Вукобратовић, Р., (2012), Увођење логаритамске функције помоћу интеграла - методички приступ, *Педагошка стварност*, LVIII (1), 61-78.

Milanović I., Raičević V.: *Application of the GeoGebra educational software in determining the geometric locus*, Computer Algebra and Dynamic Geometry Systems in Mathematical Education (CADGME 2012), Srbija, Novi Sad, 22 - 24. jun 2012. godine.

Milanović, I., Vukobratović, R., Raičević, V., (2012), Mathematical Modelling of the Effect of Temperature on the Rate of a Chemical Reaction, *Croatian Journal of Education*, 14 (3/2012), 681-709.

Milanović, I., Vukobratović, R., Raičević, V., (2012), An instance of a mathematical model in chemical kinetics, *Int. J. Knowledge Engineering and Soft Data Paradigms*, 3 (3/4), 294-308.

Милановић, И., Јовановић, М., *Анализа резултата иницијалног теста из математике*, Трећа међународна конференција гимназија 3К, Србија, Нови Сад, 02 - 03. новембар 2012. године. Рад објављен у *Зборнику радова треће међународне конференције гимназија 3К - Култура, комуникација, компјутер*, Нови Сад: Савез педагошких друштава Војводине, 83-101.

Милановић, И., Такачи, Ђ., (2012), Примена образовног софтвера GeoGebra у одређивању геометријског места тачака, *Настава и васпитање*, LXI (4), 709-722.

Vukobratović, R., Takači, Đ., **Milanović, I.**, (2014), Acquiring the Concept/Concepts of Function through Programmed Instruction in a Computer Classroom, *Croatian Journal of Education,* 15 (4/2013), 1121-1147.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР
Идентификациони број:
ИБР
Тип документације: Монографска документација
ТД
Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ
Врста рада: Докторска дисертација
ВР
Аутор: Ивана Милановић
АУ
Ментор: др Ђурђица Такачи
МН
Наслов рада: Обрада функције дате помоћу одређеног интеграла у процесу математичког моделирања
МР
Језик публикације: Српски (ћирилица)
ЈП
Језик извода: српски/енглески
ЈИ
Земља публиковања: Република Србија
ЗП
Уже географско подручје: Војводина
УГП
Година: 2014.
ГО
Издавач: Ауторски репринт
ИЗ
Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3
МА
Физички опис рада: 10/206/98/23/29/11/5/0
(број поглавља/број страна/број литер. цитата/број табела/број слика/број графикона/број шема/број прилога)
ФО
Научна област: Математика
НО
Научна дисциплина: Методика наставе математике
НД
Кључне речи: Математичко знање, математичко мишљење, функције, математичко моделирање, образовни софтвер *GeoGebra*, визуелизација, интердисциплинарни приступ

ПО
УДК:
Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
ЧУ
Важна напомена:
ВН
Извод: У докторској дисертацији презентовано је педагошко истраживање које се односи на увођење математичког моделирања као савременог методичког приступа учењу математике, његову примену у наставној пракси, као и на могућност да се кроз математичко моделирање проблема, појава и процеса који се обрађују у неком другом наставном предмету оствари модернији, интердисциплинарни приступ средњошколској настави. Све то у циљу афирмације иновативног, креативног и напредног математичког мишљења, квалитетног, структуираног и функционалног знања, које се у овом истраживању односи на одређене наставне садржаје математичке анализе. У наставни процес интегрисан је осмишљен и израђен пројекат чија је реализација омогућила успостављање међупредметне корелације, изучавање функција и њихових примена у научним проблемима кроз процесе математичког моделирања. Нарочита пажња посвећена је реализацији когнитивних активности ученика у свакој етапи процеса математичког моделирања и остваривању њиховог вертикално-кумулативног поретка. Као посебна активност усмерена на потребе и циљеве одабраних процеса математичког моделирања и усклађена са наставним садржајима који су изучавани, уведен је и примењен нови методички приступ у обради функција датих помоћу одређеног интеграла, са посебним акцентом на анализу логаритамске функције дате помоћу одређеног интеграла, а затим и анализу експоненцијалне функције, као инверзне логаритамској. Један део истраживања фокусиран је на увођење и реализацију назначене нове методичке концепције у обради функција датих помоћу одређеног интеграла и на високошколском нивоу учења математичке анализе. Испитивање ефикасности примењених нових, савремених методичких приступа у раду са ученицима, односно студентима, уз планску и систематску употребу рачунара са одговарајућом софтверском подршком, обрађено је компаративном анализом резултата педагошких експеримената. На основу резултата истраживања утврђен је позитиван утицај предложених методичких приступа на квалитет математичког знања ученика, односно студената, и оствареност оптималних резултата у учењу и изучавању наставних садржаја из области функције.
ИЗ
Датум прихватања теме од стране НН већа: 31. 10. 2013.
ДП
Датум одбране:
ДО
Чланови комисије:
КО

Председник:	др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
Члан:	др Ђурђица Такачи, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
Члан:	др Мара Ћукић, редовни професор Филозофског факултета у Новом Саду
Члан:	др Иван Анић, доцент Природно-математичког факултета у Новом Саду
Члан:	др Марина Чичин-Шаин, редовни професор Економског факултета у Ријеци

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: PhD Dissertation
CC
Author: Ivana Milanović
AU
Mentor: Đurđica Takači, PhD
MN
Title: Treatment of function given by a definite integral in a proces of mathematical modelling
XI
Language of text: Serbian (Cyrillic)
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: 10/206/98/23/29/11/5/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/schemes/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Teaching Methods of Mathematics
SD
Key words: Mathematical knowledge, mathematical thinking, functions, mathematical modeling, *GeoGebra* educational software, visualisation, interdisciplinary approach
SKW UC

Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: In this PhD dissertation pedagogical research related to introduction of mathematical modeling as a modern methodical approach to learning mathematics is presented, its application in teaching practice, as well as possibilities to achieve modern, interdisciplinary approach to high school teaching, using mathematical modeling of problems, phenomenons and processes which are being looked at in another ciruculum subject. The intention is to affirm innovative, creative and advanced mathematical thinking, high quality, structured and functional knowledge, which in this study refers to specific areas of mathematical analysis. A well thought project was designed and constructed in such a way to integrate within the teaching process, and its implementation has enabled the establishment of interdisciplinary correlation and the study of functions and their use in scientific problems through the process of mathematical modelling. Special attention is paid to the realization of cognitive activities of pupils in each stage of the process of mathematical modelling, and acheiving their vertically-cumulative order. As a separate activity focused on the goals and needs of selected processes of mathematical modeling, harmonized with teaching content being studied, a new methodical approach was introduced and applied to treat functions given by a definite integral, with special emphasis on treatment of logarithmic function given by a definite integral, and followed by treatment of the exponential function as the inverse logarithmic. A part of the research is focused on the introduction and implementation of new methodical concept in treatment of functions given by a definite integral and on university level of studying mathematical analysis. Efficiency of these new and modern methodical approaches was tested on pupils and students, with planned and systematic usage of computers and appropriate software, and processed by comparative analysis of results obtained by pedagogical experiments. Results have shown positive impact of proposed methodical approaches to the quality of pupils' and students' mathematical knowledge, and the achievement of optimal results in learning and studying of teaching content on mathematical functions.
AB
Accepted by the Scientific Board on: October 31, 2013
ASB
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB

President:	Dragoslav Herceg, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Đurđica Takači, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Mara Đukić, PhD, Full Professor, Faculty of Philosophy, University of Novi Sad
Member:	Ivan Anić, PhD, Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Marina Čičin – Šain, PhD, Full Professor, Faculty of Economics, University of Rijeka