UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Miloš Z. Petrović

HOLOMORFNO PROJEKTIVNA PRESLIKAVANJA GENERALISANIH HIPERBOLIČKIH KELEROVIH PROSTORA I UOPŠTENJA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2017.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Miloš Z. Petrović

HOLOMORPHICALLY PROJECTIVE MAPPINGS OF GENERALIZED HYPERBOLIC KAHLER SPACES AND GENERALIZATIONS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2017

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Мића Станковић, редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Нишу
Наслов:	Холоморфно пројективна пресликавања генералисаних хиперболичких Келерових простора и уопштења
Резиме:	Теза се бави многострукостима са несиметричном линеарном конексијом, испитује особине таквих многострукости при разним пресликавањима, али и открива нове многострукости снабдевене додатним структурама и испитује њихове особине. На тај начин теза представља наставак истраживања о многострукостима са несиметричном линеарном конексијом. Такође, теза је наставак истраживања из области пресликавања многострукости са несиметричном линеарном конексијом, као и инфинитезималних деформација таквих многострукости. Специјално, дефинисани су генералисани хиперболички Келерови простори као специјални генералисани Риманови простори и посматрана су холоморфно пројективна пресликавања међу таквим просторима. Многострукости са несиметричном линеарном конексијом допуштају пет линеарно независних тензора кривине. Користећи поменуте тензоре кривине могуће је посматрати геометријске објекте многострукости са несиметричном линеарном конексијом који су инваријантни при разним пресликавањима.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Диференцијална геометрија
Кључне речи:	генералисани хиперболички Келеров простор, генералисани Риманов простор, холоморфно пројективно пресликавање, скоро геодезијско пресликавање, несиметрична линеарна конексија, тензор кривине, инваријантни геометријски објект.
УДК:	514.764.3 (043.43) + 514.764.25 (043.43) + 514.763.4 (043.43)
CERIF класификација:	P150 Геометрија, алгебарска топологија
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Mića Stanković, Ph.D., full professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Holomorphically projective mappings of generalized hyperbolic Kahler spaces and generalizations
Abstract:	The thesis deals with manifolds with non-symmetric linear connection, analyzes the properties of such manifolds with respect to various mappings, but also discovers new manifolds endowed with additional structures and examines their properties. In such manner the thesis represents a continuation of investigation on manifolds with non-symmetric linear connection. Also, the thesis is a continuation of investigation in the field of the mappings of manifolds with non-symmetric linear connection, as well as infinitesimal deformations of such manifolds. Particularly, generalized hyperbolic Kahler spaces are defined as special generalized Riemannian spaces and holomorphically projective mappings between such spaces are considered. Manifolds with non-symmetric linear connection admits five linearly independent curvature tensors. By using these curvature tensors it is possible to consider geometric objects of manifolds with non-symmetric linear connection which are invariant with respect to various mappings.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Differential geometry
Key Words:	generalized hyperbolic Kahler space, generalized Riemannian space, holomorphically projective mapping, almost geodesic mapping, non-symmetric linear connection, curvature tensor, invariant geometric object.
UDC:	514.764.3 (043.43) + 514.764.25 (043.43) + 514.763.4 (043.43)
CERIF Classification:	P150 Geometry, algebraic topology
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Милош З. Петровић
Ментор, **МН**:	Мића С. Станковић
Наслов рада, **НР**:	Холоморфно пројективна пресликавања генералисаних хиперболичких Келерових простора и уопштења
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2017.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	7/vi+106/91/0/7/0/1
Научна област, **НО**:	математичке науке
Научна дисциплина, **НД**:	диференцијална геометрија
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Риманова геометрија / генералисани хиперболички Келеров простор, генералисани Риманов простор, холоморфно пројективно пресликавање, скоро геодезијско пресликавање, несиметрична линеарна конексија, тензор кривине, инваријантни геометријски објект.
УДК	514.764.3 (043.3) + 514.764.25 (043.3) + 514.763.4 (043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	Теза се бави многострукостима са несиметричном линеарном конексијом, испитује особине таквих многострукости при разним пресликавањима, али и открива нове многострукости снабдевене додатним структурама и испитује њихове особине. На тај начин теза представља наставак истраживања о многострукостима са несиметричном линеарном конексијом. Такође, теза је наставак истраживања из области пресликавања многострукости са несиметричном линеарном конексијом, као и инфинитезималних деформација таквих многострукости. Специјално, дефинисани су генералисани хиперболички Келерови простори као специјални генералисани Риманови простори и посматрана су холоморфно пројективна пресликавања међу таквим просторима. Многострукости са несиметричном линеарном конексијом допуштају пет линеарно независних тензора кривине. Користећи поменуте тензоре кривине могуће је посматрати геометријске објекте многострукости са несиметричном линеарном конексијом који су инваријантни при разним пресликавањима.
Датум прихватања теме, **ДП**:	(25.1.2017.) 06.02.2017.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Miloš Z. Petrović
Mentor, **MN**:	Mića S. Stanković
Title, **TI**:	Holomorphycally projective mappings of generalized hyperbolic Kahler spaces and generalizations
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2017
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	7/vi+106/91/0/7/0/1
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	differential geometry
Subject/Key words, **S/KW**:	Riemannian geometry / generalized hyperbolic Kahler space, generalized Riemannian space, holomorphically projective mapping, almost geodesic mapping, non-symmetric linear connection, curvature tensor, invariant geometric object.
UC	514.764.3 (043.3) + 514.764.25 (043.3) + 514.763.4 (043.3)
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:	The thesis deals with manifolds with non-symmetric linear connection, analyzes the properties of such manifolds with respect to various mappings, but also discovers new manifolds endowed with additional structures and examines their properties. In such manner the theme represents a continuation of investigation on manifolds with non-symmetric linear connection. Also, the thesis is a continuation of investigation in the field of the mappings of manifolds with non-symmetric linear connection, as well as infinitesimal deformations of such manifolds. Particularly, generalized hyperbolic Kahler spaces are defined as special generalized Riemannian spaces and holomorphically projective mappings between such spaces are considered. Manifolds with non-symmetric linear connection admits five linearly independent curvature tensors. By using these curvature tensors it is possible to consider geometric objects of manifolds with non-symmetric linear connection which are invariant with respect to various mappings.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	(25.1.2017.) 06.02.2017.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member:	
Member:	
Member, Mentor:	

Sadržaj

Uvod

Ajnštajnova teorija relativnosti se smatra jednom od najlepših po formi i najfundamentalnijih teorija u istoriji nauke. Iako je čitav jedan vek potrošen u nastojanjima da se ona poboljša, još uvek nije dobila oblik koji bi pomirio svetsku naučnu javnost. Ni sam A. Ajnštajn nije bio zadovoljan svojom opštom teorijom relativnosti, pa je do kraja svog života radio na stvaranju teorije koja bi ujedinila teoriju gravitacije i teoriju elektromagnetizma. Godine 1945. u radu [9] i 1946. godine u radu [11] sa svojim saradnikom E.G. Štrausom koristio je kompleksan osnovni tenzor g_{ij}, koji nije bio simetričan, već je njegov realni deo bio simetričan, a imaginarni deo antisimetričan. Počev od 1950. godine A. Ajnštajn je u radovima posvećenim stvaranju jedinstvene teorije polja koristio realan simetričan osnovni tenzor. L.P. Ajzenhart [14] je 1951. godine definisao prostor sa nesimetričnim osnovnim tenzorom koji je nazvao „generalisani Rimanov prostor".

Inicijalni radovi A. Ajnštajna u kojima je počeo sa korišćenjem nesimetričnog osnovnog tenzora uticali su na razvoj tzv. nesimetrične teorije gravitacije (NGT) koja je bila tema Dž. Mofatove doktorske disertaciji odbranjene na Univerzitetu Kembridž. Godine 1995. Dž. Mofat [55] je formulisao novu verziju nesimetrične teorije gravitacije u kojoj su generalisani Rimanovu prostori zadržali fundamentalnu ulogu koju su imali i ranije. Od nedavnih rezultata pomenimo rezultate T. Jansena i T. Prokopeca [29, 30] u kojima predlažu eventualna poboljšanja i probleme u NGT. Iako NGT možda još uvek nije postigla uspeh koji su njeni tvorci očekivali, razvili su se prostori koji su jako interesantni sa geometrijske tačke gledišta.

Na svakoj diferencijabilnoj mnogostrukosti postoji beskonačno mnogo koneksija. Od posebnog interesa u ovoj tezi biće nesimetrične linearne koneksije. Geometrijom takvih koneksija su se bavili na primer E. Brinis, F. Graif, M. Pastori, M. Prvanović, S.M. Minčić i mnogi drugi. Hajzenberg je 1917. godine prvi uveo pojam linearne koneksije koja nije neophodno simetrična. U slučaju nesimetrične linearne koneksije postoji čak 5 linearno nezavisnih tenzora krivine [47]. Jedan od najvećih matematičara današnjice M. Gromov je o Rimanovom tenzoru krivine rekao sledeće: „Tenzor krivine Rimanove mnogostrukosti je maleno čudovište polilinearne algebre čija potpuna geometrijska interpretacija ostaje nejasna".

Kao specijalan slučaj generalisanih Rimanovih prostora definišu se generalisani eliptički, hiperbolički i parabolički Kelerovi prostori, pogledati [52, 58, 61]. U ovoj tezi se razmatraju holomorfno projektivna preslikavanjima generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora, kao i uopštenjima kako pomenutih prostora tako i preslikavanjima među njima. Takođe, razmatraju se i holomorfno projektivna preslikavanja generalisanih eliptičkih i paraboličkih Kelerovih prostora, kao i sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina za egzistenciju nekih specijalnih infinitezimalnih transformacija mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom. Teza se sastoji iz sedam poglavlja, i to:

1 Pregled osnovnih pojmova teorije mnogostrukosti sa linearnom koneksijom

2 Specijalna skoro geodezijska preslikavanja prvog tipa mnogostrukosti sa linearnom koneksijom

3 Generalisani eliptički Kelerovi prostori

4 Generalisani hiperbolički Kelerovi prostori

5 Generalisane parabolički Kelerove mnogostrukosti

6 Specijalna skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

7 F-planarna preslikavanja i transformacije mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom.

Prvo poglavlje se sastoji od pet odeljaka. Prvi odeljak je posvećen mnogostrukostima sa simetričnom linearnom koneksijom. Definiše se najpre pojam mnogostrukosti, a zatim tangetni prostor, vektorska i tenzorska polja, linearna koneksija i tenzor krivine. Drugi odeljak se koncentriše na Rimanove mnogostrukosti, pri čemu je posebna pažnja posvećena Rimanovoj metrici. U trećem odeljku je dat pregled rezultata koji se tiču mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom, a koje ćemo kasnije tokom čitave disertacije koristiti. Četvrti odeljak je posvećen Ajzenhartovim generalisanim Rimanovim prostorima. Podsetili smo se kako je L.P. Ajzenhart eksplicitno definisao koneksiju pomoću generalisane Rimanove metrike. Takođe, navedene su osobine Rimanovih tenzora krivine tipa $(0,4)$ izvedenih od strane S.M. Minčića. Konačno, u petom odeljku su dati osnovni pojmovi koji se tiču preslikavanja mnogostrukosti sa linearnim koneksijama, a koji će nam biti neophodni za dalje izlaganje.

Drugo poglavlje se sastoji od dva odeljka. Prvi odeljak je posvećen skoro geodezijskim preslikavanjima mnogostrukosti sa simetriňom linearnom koneksijom. U ovom odeljku je dat pregled definicija skoro geodezijskih linija i skoro geodezijskih preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom, koje je dao N.S. Sinjukov [71, 72]. Zatim su dati potrebni i dovoljni uslovi za skoro geodezijska preslikavanja sa nesimetričnom linearnom koneksijom koje su dali V.E. Berezovski, J. Mikeš i A. Vanžurová [5]. Drugi odeljak je posvećem skoro geodezijskim linijama i skoro geodezijskim preslikavanjima mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom [66, 75]. Takođe, u ovom odeljku su prezentovani rezultati koji se tiču specijalnih skoro geodezijskih preslikavanja prvog tipa mnogostrukosti sa nesimetičnom linearnom koneksijom [64].

Treće poglavlje se sastoji od četiri odeljka. U prvom odeljku su posmatrana holomorfno projektivna preslikavanja generalisanih eliptičkih Kelerovih prostora i pronađena su dva nova nelinearna sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina za egzistenciju takvih preslikavanja. Drugi odeljak je posvećen ekvitorzionim holomorfno projektivna preslikavanja generalisanih eliptičkih Kelerovih prostora, pomenuti nelinearni sistemi iz prvog odeljka su transformisani su u linearne sisteme sledeći ideju V.V. Domaševa i J. Mikeša [7]. U trećem odeljku su definisani novi generalisani eliptički Kelerovi prostori, dok su u četvrtom odeljku posmatrana holomorfno projektivna, kao i ekvitorziona holomorfno projektivna preslikavanja među takvim prostorima.

Četvrto poglavlje je centralno poglavlje ove doktorske disertacije i većim delom je bazirano na rezulatatima rada [58]. U prvom odeljku su definisani generalisani hiperbolički Kelerovi prostori i pokazane određene osobine koje poseduju tenzori krivine takvih prostora. U drugom odeljku se posmatraju holomorfno projektivna i ekvitorziona holomorfno projektivna preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora i dokazana je invarijatnost određenih geometrijskih objekata i jednog tenzora pri takvim preslikavanjima. Treći odeljak sadrži otvoreni problem, a to je pronalaženje svih mogućih tenzora invarijantnih pri ekvitorzionim holomorfno projektivnim preslikavanjima generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora. U četvrtom odeljku su definisani novi generalisani hiperbolički Kelerovi prostori i u petom odeljku su posmatrana ekvitorziona holomorfno projektivna preslikavanja među takvim prostorima.

Peto poglavlje se sastoji od tri odeljka. U prvom odeljku su definisane generalisane m-parabolički Kelerove mnogostrukosti i posmatrana su holomorfno projektivna preslikavanja među takvim mnogostrukostima [42, 61]. U drugom odeljku su uvedena specijalna kanonička specijalna kanonička skoro geodezijska preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora i pronalaze se neki invarijantni geometrijski objekti pri takvim preslikavanjima [19, 60]. Treći odeljak je posvećen specijalnim kanoničkim preslikavanjima među generalisanim paraboličkim Kelerove mnogostrukostima [19, 60].

Šesto poglavlje se sastoji od tri odeljka. U prvom odeljku su osnovne jednačine skoro geodezijskih preslikavanja drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom transformisane u mešoviti sistem Košijevog tipa. U drugom i trećem odeljku su uvedena specijalna skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom, generalisanih Rimanovih i generalisanih eliptičkih i hiperboličkih Kelerovih prostora [59].

Sedmo poglavlje je posvećeno F-planarnim preslikavanjima i transformacijama mnogostrukosti sa linearnom koneksijom koje su uveli J. Mikeš i N.S. Sinjukov [40]. U prvom odeljku je dat pregled F-planarnih preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom i nesimetričnom linearnom koneksijom. U drugom odeljku su dati novi sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina za egzistenciju infinitezimalnih F-planarnih transformacija mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom [65]. Kao specijalan slučaj, u trećem i četvrtom odeljku, dobijaju se sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina za egzistenciju infinitezimalnih geodezijskih i holomorfno projektivnih transfromacija generalisanih Rimanovih, eliptičkih i hiperboličkih Kelerovih prostora.

Iskoristio bih priliku da se zahvalim mentoru prof. dr Mići Stankoviću, jer je prihvatio obavezu mentora, pročitao čitav tekst disertacije i dao niz sugestija za njegovo poboljšanje. Prof. dr Milanu Zlatanoviću sam zahvalan na pomoći koju mi je pružio ne samo tokom doktorskih studija, već u toku čitavog mog školovanja na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Nišu. Prof. dr Ljubici Velimirović sam zahvalan na pomoći i podršci koju mi je pružila tokom doktorskih studija. Prof. dr Predragu Stanimiroviću, sam zahvalan jer mi je pružio mogućnost za saradnju koja je bila osvrt u druge oblasti matematike i računarskih nauka. Prof. dr Zoranu Rakiću dugujem veliku zahvalnost jer me je primio u naučni tim projekta „Geometrija, obrazovanje i vizuelizacija sa primenama“, čiji je evidencioni broj 174012, u okviru kog je ova disertacija napisana. Zahvalnost dugujem i profesoru Leopoldu Verstraelenu koji mi je na samom početku doktorskih studija preporučio određenu literaturu koja mi je veoma pomogla da razumem temu kojom se bavim. Mojim prijateljima Stanislavu Nikolaenku i dr Ivanu Limončenku, sam zahvalan na bezbrojnim diskusijama, kako privatnim tako i naučnim, koje su mi u pojedinim trenucima izrade disertacije bile značajna moralna podrška. Ipak, najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici na beskrajnoj podršci i razumevanju.

Kruševac, 2.7.2017. godine Miloš Z. Petrović

Poglavlje 1

Pregled osnovnih pojmova teorije mnogostrukosti sa linearnom koneksijom

U ovom poglavlju ćemo dati najpre kratak pregled osnovnih pojmova koji se tiču mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom i Rimanovih mnogostrukosti. Izlaganje ćemo nastaviti o mnogostrukostima sa nesimetričnom linearnom koneksijom i Ajzenhartovim generalisanim Rimanovim prostorima. Konačno, izlaganje ćemo završiti pojmovima koji su nam neophodni za posmatranje preslikavanja i transformacija mnogostrukosti sa linearnom koneksijom. Svi delovi ovog poglavlja su poznati i pojedini delovi se mogu naći u monografijama i knjigama [8, 13, 31, 32, 37, 41, 54, 56].

1.1 Mnogostrukosti sa linearnom koneksijom

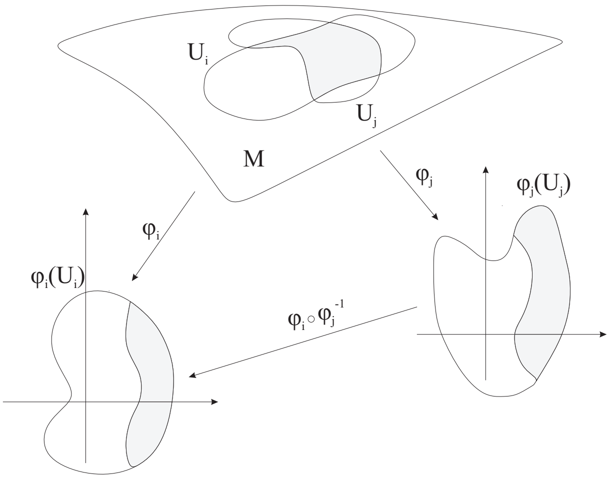
Osnovna ideja diferencijalne geometrije „aproksimacija" geometrijskih objekata linearnim objektima. Stoga ćemo se u ovoj sekciji podsetiti kako pojma diferenicijabilne mnogostrukosti tako i osnovnih pojmova multilinearne algebre, tangetnog vektora i tangetnog prostora, vektorskih i tenzorskih polja, a zatim linearne koneksije i tenzora krivine mnogostrukosti sa linearnom koneksijom.

1.1.1 Pojam mnogostrukosti

Zbog prirodnog postojanja prostora koji ni na koji način ne mogu biti smešteni kao hiperpovrši u ambijentni prostor, kao na primer Poenkareova gornja poluravan kao model Neeuklidske geometrije, kao i prostor-vreme koji se razmatra u teoriji relativnosti, jako je važna mogućnost definisanja „unutrašnje geometrije" bez pozivanja na spoljašnji (ambijentni) prostor $\mathbb{R}^{n+1}$. Da bi se u tome uspelo bilo je neophodno saznanje, sa jedne strane da je „prva fundamentalna forma" nezavisna od spoljašnjeg (ambijentnog) prostora $\mathbb{R}^{n+1}$, kao i Gaus-Boneova teorema, dok je sa druge strane, sa globalnog aspekta, bilo važno uvesti pojam „mnogostrukosti". Pojam diferencijabilne mnogostrukosti igra esencijalnu ulogu u produžavanju diferencijalnog računa sa realnog n-dimenzionog prostora $\mathbb{R}^n$ na opštije prostore.

Definicija 1.1.1 (Diferencijabilna mnogostrukost)**.** *Diferencijabilna mnogostrukost dimenzije n je skup M zajedno sa familijom injektivnih preslikavanja $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $i \in I$, otvorenih skupova U_i, $i \in I$ u $\mathbb{R}^n$, takvih da su ispunjeni sledeći uslovi:*

(a) $M = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(U_i)$,



Slika 1.1: Karte na diferencijabilnoj mnogostrukosti

(**b**) *za svaki par indekasa $i, j \in I$ takvih da je $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = W \neq \emptyset$ skupovi $\varphi_i^{-1}(W)$ i $\varphi_j^{-1}(W)$ su otvoreni u $\mathbb{R}^n$ i preslikavanje $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ je diferencijabilno.*

Uređen par (U_i, φ_i) takav da $p \in \varphi_i(U_i)$ naziva se parametrizacija *ili* sistem koordinata *mnogostrukosti M u tački p. Skup $\varphi_i(U_i)$ naziva se koordinatna okolina tačke p. Familija $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ koja ispunjava uslove* (**a**) *i* (**b**) *naziva se* diferencijabilna struktura *na mnogostrukosti M.*

Karta na diferencijabilnoj mnogostrukosti M je uređen par (U, φ), gde je $U \subset M$ otvoren skup, dok je $\varphi : U \to \varphi(U)$ homeomorfizam.Dve karte (U_i, φ_i) i (U_j, φ_j) na diferencijabilnoj mnogostrukosti M indukuju preslikavanje $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$, videti Sliku 1.1. Ukoliko je funkcija $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ iz Definicije 1.1.1 r puta neprekidno diferencijabilna, t.j. klase C^r mnogostrukost M naziva se *C^r-mnogostrukost*. U nastavku ćemo pod terminom diferencijabilna mnogostrukost uvek smatrati da se radi o C^r-mnogostrukosti, gde je r dovoljno veliki prirodan broj. Takođe, uvek ćemo pretpostavljati da mnogostrukosti zadovoljavaju T_2-aksiomu, t.j. da se radi o *Hausdorfovom* topološkom prostoru.

1.1.2 Tangetni prostor

Neka je M n-dimenziona diferencijabilna mnogostrukost i $p \in M$ fiksirana tačka. Tangetnim prostorom na mnogostrukosti M u tački p smatraćemo n-dimenzion skup „vektora pravaca“, sa početkom u tački p ka svim pravcima na mnogostrukosti M. Pošto nema ambijentnog prostora, ovaj pojam je unutrašnjeg karaktera. Postoji više načina da se uvede pojam tangetnog vektora na mnogostrukosti.

Definicija 1.1.2 (Geometrijska definicija)**.** Tangetni vektor *na mnogostrukosti M u tački $p \in M$ je klasa ekvivalencije diferencijabilnih krivih $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ koje ispunjavaju uslov $c(0) = p$, gde je relacija ekvivalencije $\sim$ definisana sa*

$$c \sim c^* \Leftrightarrow (\varphi \circ c)(0) = (\varphi \circ c^*)(0),$$

za svaku kartu (U, φ) koja sadrži tačku p.

Ukratko: tangetni vektori su tangente krivih koje leže na mnogostrukosti.

Definicija 1.1.3 (Algebarska definicija)**.** Tangetni vektor *X u tački $p \in M$ je diferenciranje (operator diferenciranja) definisan na skupu*

$$\mathscr{F}_p(M) := \{f : M \to \mathbb{R} | f \text{ je diferencijabilna}\} / \sim,$$

gde je relacija ekvivalencije $\sim$ definisana deklarišući da je $f \sim f^*$ ako i samo ako se funkcije f i f^* poklapaju u okolini tačke p. Za vrednost $X(f)$ kažemo da je izvod funkcije f u pravcu vektora X.

Ova definicija se može preciznije formulisati na sledeći način: X je preslikavanje $X : \mathscr{F}_p(M) \to \mathbb{R}$ sa osobinama

- $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in \mathscr{F}_p(M)$, *($\mathbb{R}$-linearnost)*
- $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(g)$ *za* $f, g \in \mathscr{F}_p(M)$. *(zakon proizvoda)*

(Da bi ova pravila imala smisla funkcije f i g moraju biti definisane u okolini tačke p).

Ukratko: tangetni vektori su diferenciranja na skalarnim funkcijama.

Definicija 1.1.4 (Fizička definicija)**.** Tangetni vektor *u tački $p \in M$ je definisan kao n-torka realnih brojeva $(a^i)_{i=1,\dots,n}$ u koordinatnom sistemu $x^1, \dots, x^n$ (t.j. u karti), na takav način da u bilo kom drugom koordinatnom sistemu $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n$ (t.j. u bilo kojoj drugoj karti) isti vektor je dat odgovarajućom n-torkom $(\tilde{a}^i)_{i=1,\dots,n}$, gde je*

$$\tilde{a}^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\Big|_p a^j.$$

Ukratko: tangetni vektori su elementi prostora $\mathbb{R}^n$ čije se koordinate pri promeni koordinatnog sistema transformišu na poseban način.

Definicija 1.1.5 (Tangetni prostor)**.** Tangetni prostor *T_pM na mnogostrukosti M u tački $p \in M$ je skup svih tangetnih vektora u tački p. Po definiciji T_pM i T_qM su disjuntni za različite tačke p i q.*

Za otvoren skup $U \subset \mathbb{R}^n$, tangetni prostor se identifikuje prostorom $T_pU := \{p\} \times \mathbb{R}^n$ koji je snabdeven standardnom bazom $(p, e_1), \dots, (p, e_n)$. Vektor e_i odgovara krivoj $c_i(t) := p + t \cdot e_i$ (geometrijska definicija) i diferenciranje je dato parcijalnim izvodom $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial u^i}\big|_p$ (algebarska definicija).

Specijalni tangetni vektori (u algebarskoj definiciji) su parcijalni izvodi $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ definisani sa

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f) := \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}\Big|_{\varphi(p)},$$

u karti (U, φ) koja sadrži tačku p. Koristi se još i oznaka $\partial_i|_p$ umesto $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$.

Teorema 1.1.1. *Tangetni prostor u tački p na n-dimenzionoj diferencijabilnoj mnogostrukosti M je n-dimenzion realan vektorski prostor koji je u bilo kom koordinatnom sistemu $x^1, \dots, x^n$, u datoj karti, razapet vektorima*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p.$$

Za bilo koji tangetni vektor X u tački p imamo

$$X = \sum_{i=1}^n X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

1.1.3 Vektorska i tenzorska polja

Iz Teoreme 1.1.1 vidimo da su komponente tangetnog vektora $X(x^i)$ izvodi koordinatnih funkcija x^i u pravcu X.

Definicija 1.1.6 (Vektorsko polje)**.** Diferencijabilno vektorsko polje *na diferencijabilnoj mnogostrukosti M je pridruživanje tački $p \in M$ vektora $X_p \in T_pM$ takvo da u svakoj karti (U, φ), $\varphi : U \to V$ sa koordinatama $x^1, \ldots, x^n$, kooficijenti $X^i : U \to \mathbb{R}$ u reprezentaciji*

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

jesu diferencijabilne funkcije.

Za skalarnu funkciju $f : M \to \mathbb{R}$ simbol fX označava vektorsko polje $(fX)_p := f(p) \cdot X_p$ (može se reći da je skup vektorskih polja modul nad prstenom funkcija f definisanih na M), dok simbol $Xf = X(f)$ označava funkciju $Xf(p) := X_p(f)$ (drugim rečima, Xf je izvod funkcije f u pravcu vektorskog polja X).

Neka su $V_1, \ldots, V_s$ i W realni vektorski prostori. Preslikavanje $F : V_1 \times \ldots \times V_s \to W$ je $\mathbb{R}$-multilinearno ako je $\mathbb{R}$-linearno u svakom „slotu“, što znači da je za svaki $1 \leq i \leq s$ i $v_j \in V_j$ $(j \neq i)$, preslikavanje

$$v \to A(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_s),$$

$\mathbb{R}$-linearno.

Definicija 1.1.7. *Neka je V realan vektorski prostor i V^* njemu dualan vektorski prostor. Neka su $r \geq 0$ i $s \geq 0$ celi brojevi takvi da je $(r, s) \neq (0, 0)$. Multilinearna funkcija $F : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{R}$ naziva se* tenzor tipa (r, s) nad vektorskim prostorom V kontravarijantnog stepena r i kovarijantnog stepena s.

Skup svih tenzora tipa (r, s) nad vektorskim prostorom V označava se $T_s^r(V)$. Tenzori iz skupa $T_0^r(V)$ nazivaju se kontravarijantni tenzori, specijalno elementi skupa $T_0^1(V) = V$ nazivaju se *kontravarijantni vektori* ili 1*-forme*. Elementi prostora $T_s^0(V)$ nazivaju se *kovarijantni tenzori*, specijalno, elementi skupa $T_s^0(V) = V^*$ nazivaju se *kovarijantni vektori* ili *linearne forme*.

Skup $T_s^r(V)$ je vektorski prostor sa operacijama sabiranja odnosno oduzimanja

$$\begin{aligned}&(A \pm B)(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s) = \\ &\quad A(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s) \pm B(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s),\end{aligned}$$

i množenja realnim brojevima

$$(rA)(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s) = rA(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s).$$

Pored operacija sabiranja odnosno oduzimanja koje su definisane za tenzore istog tipa, bilo koja dva tenzora prozvoljnog tipa možemo množiti. Neka su $A \in T_s^r(V)$ i $B \in T_q^p(V)$, tada je tenzor $A \otimes B \in T_{s+q}^{r+p}(V)$ *tenzorski proizvod* tenzora A i B definisan sa

$$\begin{aligned}&(A \otimes B)(\omega^1, \ldots, \omega^{r+p}, v_1, \ldots, v_{s+q}) = \\ &\quad A(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s) B(\omega^{r+1}, \ldots, \omega^{r+p}, v_1, \ldots, v_{s+q}).\end{aligned}$$

Tenzorsko polje tipa (r, s) na mnogostrukosti M može biti definisano kao tenzor tipa (r, s) nad $\mathscr{F}(M)$-modulom $\mathscr{X}(M)$, t.j. kao $\mathscr{F}(M)$-linearno preslikavanje

$$A : \mathscr{X}^*(M)^r \times \mathscr{X}(M)^s \to \mathscr{F}(M),$$

gde $\mathscr{X}(M)$ označava skup svih diferencijabilnih vektorskih polja na mnogostrukosti M, $\mathscr{X}^*(M)$ označava skup svih 1-formi na mnogostrukosti M, $\mathscr{X}^*(M)^r = \mathscr{X}^*(M) \times \cdots \times \mathscr{X}^*(M)$ i $\mathscr{X}(M)^s = \mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)$.

Takođe, *tenzorsko polje* tipa (r,s) na mnogostrukosti M se može definisati kao preslikavanje koje svakoj tački $p \in M$ pridružuje tenzor A_p tipa (r,s) na tangetnom prostoru T_pM u tački p, t.j.

$$A_p : \underbrace{(T_pM)^* \times \ldots \times (T_pM)^*}_{\text{r puta}} \times \underbrace{(T_pM) \times \ldots \times (T_pM)}_{\text{s puta}} \to \mathbb{R},$$

pri čemu je pridruživanje $p \mapsto A_p$ diferencijabilno ili glatko.

Neka je (U,φ), $\varphi = (x^i)$, karta na mnogostrukosti M. Baza prostora svih tenzora tipa (r,s) data je sa

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\Big|_p \otimes \mathrm{d}x^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}|_p\Big)_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1,\ldots,n}$$

gde je

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}|_p\Big)(\mathrm{d}x^{k_1},\ldots,\mathrm{d}x^{k_r},\frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{l_s}})$$
$$:= \delta^{k_1}_{i_1}\cdot\cdots\cdot\delta^{k_r}_{i_r}\cdot\delta^{j_1}_{l_1}\cdot\cdots\cdot\delta^{j_s}_{l_s}.$$

Poređenjem odgovarajućih koeficijenata dobijamo koeficijente tenzora

$$A_p = \sum A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\cdot\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s},$$

a kada primenimo prethodni izraz na elemente baze dobijamo

$$A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = A_p\big(\mathrm{d}x^{i_1},\ldots,\mathrm{d}x^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\big).$$

Posmatrajmo sada još jednu kartu (U',φ'), $\varphi' = (x'^i)$ na mnogostrukosti M, takvu da je $U \cap U' \neq \varnothing$, pri čemu je promena koordinata data sa

$$x'^i = x'^i(x^1,\ldots,x^n) \quad \text{i} \quad x^i = x^i(x'^1,\ldots,x'^n).$$

S obzirom da je

$$\mathrm{d}x^{j_m} = \frac{\partial x^{j_m}}{\partial x'^{i_p}}\mathrm{d}x'^{i_p} \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^q}\frac{\partial x'^q}{\partial x^i},$$

lako možemo pronaći da se u preseku koordinatnih okolina $U \cap U'$, tenzorske komponente transformišu prema dobro poznatoj formuli

$$A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(x) = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{p_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_r}}{\partial x'^{p_r}}\frac{\partial x'^{q_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x'^{q_s}}{\partial x^{j_s}}A'^{p_1\ldots p_r}_{q_1\ldots q_s}(x'). \tag{1.1}$$

Date funkcije $A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(x)$ u koordinatnim okolinama određuju tenzor ukoliko u preseku dveju koordinatnih okolina zadovoljavaju zakon transformacije (1.1). Pretpostavljaćemo da su tenzori i svi ostali geometrijski objekti koje ćemo koristiti dovoljan broj puta neprekidno diferencijabilni, t.j. da pripadaju klasi C^r za dovoljno veliki prirodan broj r. Za bilo koji tenzor A tipa (r,s), gde je $r \geq 2$ i $s \geq 2$, definišemo tenzor koji je simetričan u odnosu na par „gornjih“ odnosno „donjih“ indekasa, respektivno, u smislu operacije koja se zove *simetrizacija bez deljenja* i označava se (,). Takođe, definišemo tenzor antisimetričan po paru indekasa istog tipa, u smislu operacije koja se zove *antisimetrizacija bez deljenja* i označava [,]. Na primer,

$$A^{i_1\dots i_r}_{(j_1 j_2)\dots j_s} = A^{i_1\dots i_r}_{j_1 j_2 j_3\dots j_s} + A^{i_1\dots i_r}_{j_2 j_1 j_3\dots j_s},$$

i

$$A^{i_1\dots i_r}_{[j_1 j_2]\dots j_s} = A^{i_1\dots i_r}_{j_1 j_2 j_3\dots j_s} - A^{i_1\dots i_r}_{j_2 j_1 j_3\dots j_s}.$$

Primedba 1.1.1. *U multilinearnoj algebri tenzori se definišu kao elementi prostora koji se naziva* tenzorski proizvod*, u smislu sledećih kanonskih izomorfizama, t.j. linearnih preslikavanja:*

$$\mathrm{Mult}\Big((T_pM^*)^r, (T_pM)^s; \mathbb{R}\Big) \cong \mathrm{Hom}\Big(\big(\bigotimes_{i=1}^{r} T_pM^*\big) \otimes \big(\bigotimes_{j=1}^{s} T_pM\big); \mathbb{R}\Big)$$
$$\cong \Big(\big(\bigotimes_{i=1}^{r} T_pM^*\big) \otimes \big(\bigotimes_{j=1}^{s} T_pM\big)\Big)^* \cong \big(\bigotimes_{i=1}^{r} T_pM\big) \otimes \big(\bigotimes_{j=1}^{s} T_pM\big)^*,$$

gde Mult *označava skup multilinearnih preslikavanja, a* Hom *označava skup homomorfizama.*

Definicija 1.1.8 (Trag tenzora)**.** *Neka je A tenzor tipa $(1,1)$, $A_p : T_pM \to T_pM$. Definišimo* kontrakciju *ili* trag *CA sa*

$$CA|_p = \mathrm{Tr}(A_p) = \sum_i \langle A_p E_i, E_i \rangle,$$

gde je $E_1, \dots, E_n$ ortonormirana baza za T_pM. U proizvoljnoj bazi $b_1, \dots, b_n$ takvoj da je $Ab_j = \sum_i A^i_j b_i$, trag se može izraziti formulom $\sum_i A^i_i$, kao što je i uobičajeno.

Neka je A tenzor tipa $(1,s)$. Tada za svaki $i \in \{1, \dots, s\}$ i fiksirane vektore X_j, $j \neq i$,

$$A(X_1, \dots, X_{i-1}, -, X_{i+1}, \dots, X_s)$$

je tenzor tipa $(1,1)$, čija se kontrakcija (ili trag) označava C_iA:

$$C_iA(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_s) = \sum_{j=1}^{n} \langle A(X_1, \dots, X_{i-1}, E_j, X_{i+1}, \dots, X_s), E_j \rangle.$$

Trag tenzora A tipa $(1,s)$ je tenzor C_iA tipa $(0, s-1)$.

Primedba 1.1.2. *Uobičajeno korišćenje traga matrice nema smisla u slučaju tenzora tipa $(0,2)$. Umesto toga moramo posmatrati trag pridruženog tenzora tipa $(1,1)$: neka je A tenzor tipa $(0,2)$ i neka je $A^\sharp$ pridruženi tenzor tipa $(1,1)$, definisan relacijom*

$$A(X,Y) = \langle A^\sharp X, Y \rangle = g(A^\sharp X, Y),$$

sada definišemo $\mathrm{Tr}_g A := \mathrm{Tr} A^\sharp$.

U Ričijevoj notaciji, $Tr(A^i_j)$ se jednostavno označava A^i_i.

U slučaju Rimanove metrike imaćemo $\mathrm{Tr}_g(g) = n$. U slučaju indefinitne metrike, treba imati u vidu činjenicu da u ortonormiranoj bazi $E_1, \dots, E_n$, za koju važi $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}\varepsilon_i$, vektor X ima reprezentaciju $X = \sum_i \varepsilon_i \langle X, E_i \rangle E_i$. Shodno tome, formula za trag glasi

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_i A^i_i = \sum_i \varepsilon_i \langle AE_i, E_i \rangle.$$

1.1.4 Linearna koneksija i tenzor krivine

Da bismo mogli da poredimo vrednosti vektorskih polja u različitim tačkama diferencijabilne mnogostrukosti, odnosno da bismo mogli da „povezujemo“ dovoljno bliske tangetne prostore na mnogostrukosti, neophodan nam je pojam linearne koneksije (povezanosti). Kao sinonim pojma „linearna koneksija“ vrlo često se koristi termin „afina koneksija“, što će biti slučaj i u ovoj disertaciji. Napomenimo da se u nekim knjigama pravi razlika između pojmova afine i linearne koneksije, kao na primer u [56].

Definicija 1.1.9 (Linearna koneksija)**.** Linearna koneksija ∇ *na diferencijabilnoj mnogostrukosti M je preslikavanje*

$$(X,Y) \to \nabla_X Y,$$

koje paru diferencijabilnih vektorskih polja X i Y pridružuje treće diferencijabilno vektorsko polje $\nabla_X Y$ tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) $\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y,$

(ii) $\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2,$

(iii) $\nabla_X (fY) = f \cdot \nabla_X Y + (X(f)) \cdot Y,$

za funkcije $f, g \in C^\infty(M)$ i $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1.2. *Svaka mnogostrukost dopušta linearnu koneksiju.*

Proverimo sada kako se linearna koneksija izražava u svojim komponentama u karti (U,φ) mnogostrukosti M. Označimo i-to koordinatno vektorsko polje E_i karte (U,φ), koje je u tački $p \in U$ reprezentovano krivom $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$. Drugim rečima za datu realno-vrednosnu funkciju f definisanu na U, $E_i f = \partial_i (f \circ \varphi^{-1})$. Proizvoljna vektorska polja X i Y su izražena sa $X = X^i E_i$ i $Y = Y^j E_j$, gde su X^i i Y^j realno-vrednosne funkcije definisane na U. Koristeći osobine linearne koneksije imamo

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j E_j) \\ &= (XY^j)E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j \\ &= (XY^j)E_j + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j \\ &= XY^k E_k + X^i Y^j L^k_{ij} E_k \\ &= (XY^k + X^i Y^j L^k_{ij}) E_k.\end{aligned}$$

Lema 1.1.1. *Pretpostavimo da je M mnogostrukost prekrivena samo jednom kartom. Tada postoji $1-1$ korespondencija između linearnih koneksija na M i izbora n^3 glatkih funkcija $\{L^h_{ij}\}$ na M određenih pravilom*

$$\nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij}) \partial_k.$$

Definicija 1.1.10 (Liova zagrada)**.** *Neka su X i Y dva (diferencijabilna) vektorska polja na mnogostrukosti M i neka je $f : M \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Relacijom*

$$[X,Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

se definiše vektorsko polje $[X,Y]$, koje se naziva Liova zagrada *vektorskih polja X i Y i označava se $\mathscr{L}_X Y$. U tački $p \in M$ imamo $[X,Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$.*

Tenzor krivine R linearne koneksije ∇ je tenzorsko polje tipa $(1,3)$ definisano sa

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Tenzor krivine R može se predstaviti pomoću lokalnih komponenti R^h_{ijk} sa

$$R = R^h_{ijk} \partial_h \otimes \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k,$$

gde je

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial L^h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial L^h_{ik}}{\partial x^j} + L^r_{ij} L^h_{rk} - L^r_{ik} L^h_{rj}.$$

Primedba 1.1.3. *U literaturi se vrlo često za tenzor krivine uzima suprotni znak, t.j. tenzor krivine se definiše na sledeći način*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z.$$

Isto važi i za komponente tenzora krivine R^h_{ijk} koje su vrlo često određene sa

$$R^h_{ijk} = \frac{L^h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{L^h_{ij}}{\partial x^k} + L^r_{ij} L^h_{rk} - L^r_{ik} L^h_{rj}.$$

Definicija 1.1.11 (Diferenciranje tenzorskih polja)**.** *Neka je A tenzor tipa (r,s) i neka je Z proizvoljno fiksirano vektorsko polje.* Kovarijantni izvod tenzorskog polja *A u pravcu vektorskog polja Z je dat sa*

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z A)(X^1,\dots,X^r,Y_1,\dots,Y_s) &:= \nabla_Z(A(X^1,\dots,X^r,Y_1,\dots,Y_s)) \\
&+ \sum_{i=1}^{r} A(X^1,\dots,X^{i-1},\nabla_Z X^i, X^{i+1},\dots,X^r,Y_1,\dots,Y_s) \\
&- \sum_{j=1}^{r} A(X^1,\dots,X^r,Y_1,\dots,Y^{j-1},\nabla_Z Y^j, Y^{j+1},\dots,Y_s).
\end{aligned}$$

Takođe, $\nabla_Z A$ je tenzorsko polje tipa (r,s), dok je ∇A tenzorsko polje tipa $(r,s+1)$ određeno formulom

$$(\nabla A)(Z,X^1,\dots,X^r,Y_1,\dots,Y_s) := (\nabla_Z A)(X^1,\dots,X^r,Y_1,\dots,Y_s).$$

U Ričijevom računu notacija je sledeća

$$\begin{aligned}
\nabla_k A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = \frac{\partial}{\partial x^k} A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} &+ L^{i_1}_{kp} A^{p i_2\dots i_r}_{j_1\dots j_s} + L^{i_2}_{kp} A^{i_1 p i_3\dots i_r}_{j_1\dots j_s} \\
&+ \dots + L^{i_r}_{kp} A^{i_1 i_2\dots i_{r-1} p}_{j_1\dots j_s} \\
&- L^p_{k j_1} A^{i_1\dots i_r}_{p j_2\dots j_s} - L^p_{k j_2} A^{i_1\dots i_r}_{j_1 p j_3\dots j_s} \\
&- \dots - L^p_{k j_s} A^{i_1\dots i_r}_{j_1 j_2\dots j_{s-1} p}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.1.3. *Tenzor krivine R simetrične linearne koneksije ∇ poseduje sledeće osobine:*

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,
2. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,
3. $(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0$.

U Ričijevom računu prethodne jednačine glase:

1. $R^h_{ijk} = -R^h_{ikj}$,
2. $R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} = 0$,
3. $\nabla_i R^h_{ljk} + \nabla_j R^h_{lki} + \nabla_k R^h_{lij} = 0$.

Identitet 2. u Teoremi 1.1.3 naziva se prvi Bjankijev identitet ili samo Bjankijev identitet, dok se za identitet 3. u Teoremi 1.1.3 koristi tradicionalan naziv drugi Bjankijev identitet ili sve češće ilustrativniji termin diferencijalni identitet.

Definicija 1.1.12 (Ričijev tenzor)**.** *Prva kontrakcija tenzora krivine $R(X,Y)Z$ linearne koneksije data sa*

$$(C_1 R)(Y,Z) = \mathrm{Tr}(X \to R(X,Y)Z)$$

naziva se Ričijev tenzor *i označava se* $\mathrm{Ric}(Y,Z)$*, ili kratko* $\mathrm{Ric} = C_1 R$*. U Ričijevoj notaciji Ričijev tenzor je definisan sa* $R_{ij} = R^p_{ijp}$*.*

1.2 Rimanova mnogostrukost

Prva fundamentalna forma elementarne površi je skalarni proizvod koji je definisan kao restrikcija uobičajenog Euklidskog skalarnog proizvoda na svaki tangetni prostor. Međutim, u slučaju kada ambijentni prostor ne postoji potrebno je pronaći način na koji bi se definisao skalarni proizvod na svakom tangetnom prostoru.

Prostor $L^2(T_pM;\mathbb{R}) = \{\alpha : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ je bilinearno}\}$ ima bazu

$$\{\mathrm{d}x^i|_p \otimes \mathrm{d}x^j|_p \mid i,j = 1,\dots,n\},$$

gde $\mathrm{d}x^i$ čine dualnu bazu u dualnom prostoru

$$(T_pM)^* = L(T_pM;\mathbb{R}),$$

definisanu sa

$$\mathrm{d}x^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j, \\ 0, & \text{ako je } i \neq j. \end{cases}$$

Bilinearne forme $\mathrm{d}x^i|_p \otimes \mathrm{d}x^j|_p$ su definisane svojim vrednostima na baznim elementima (vrednosti na ostalim elementima će se lako dobiti koristeći osobinu linearnosti)

$$(\mathrm{d}x^i|_p \otimes \mathrm{d}x^j|_p)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big|_p\right) := \delta^i_k \delta^j_l = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = k \text{ i } j = l, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uzimajući bazne elemente za argumente, iz reprezentacije

$$\alpha = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot \mathrm{d}x^i|_p \otimes \mathrm{d}x^j|_p$$

dobijamo sledeći izraz

$$\alpha_{ij} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

U Ričijevom računu, forma α se reprezentuje tenzorom α_{ij}.

Definicija 1.2.1 (Rimanova metrika, Rimanova mnogostrukost)**.** Rimanova metrika g *na mnogostrukosti* M *je pridruživanje* $p \mapsto g(p) \in L^2(T_pM;\mathbb{R})$ *koje ispunjava sledeće uslove:*

1. $g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$ *za sve* X,Y*, (simetričnost)*

2. $g_p(X,X) > 0$ *za* $X \neq 0$*, (pozitivna definitnost)*

3. *Koeficijenti* g_{ij} *u svakoj lokalnoj reprezentaciji, t.j. u svakoj karti*

$$g_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) \cdot \mathrm{d}x^i|_p \otimes \mathrm{d}x^j|_p$$

   jesu diferencijabilne funkcije. (diferencijabilnost)

Uređen par (M,g) *naziva se* Rimanova mnogostrukost.

Kada se govori o Rimanova metrici često se upotrebljava termin *metrički tenzor*. U lokalnim koordinatama metrički tenzor je dat matricom funkcija (g_{ij}). U Ričijevom računu se jednostavno koristi notacija g_{ij}.

Rimanova metrika g definiše u svakoj tački p unutrašnji proizvod g_p na tangetnom prostoru T_pM, stoga se često koristi notacija $\langle X,Y\rangle$ umesto $g_p(X,Y)$. Pojmovi uglova i dužina su određeni ovim unutrašnjim proizvodom, kao što su isti ovi pojmovi određeni prvom fundamentalnom formom na elementarnim površima. Dužina, odnosno norma vektora X je data sa $\|X\| := \sqrt{g(X,X)}$, dok je ugao β između dva tangetna vektora X i Y određen relacijom $\cos\beta \cdot \|X\| \cdot \|Y\| = g(X,Y)$.

Ukoliko se uslov pozitivne definitnosti zameni slabijim uslovom nedegenerisanosti (što znači da $g(X,Y) = 0$ za sve Y implicira $X = 0$), onda se dolazi do pojma pseudo-Rimanove mnogostrukosti. Kao specijalan slučaj imamo Lorencovu metriku, koja je metrika signature $(-,+,+,+)$, takve metrike imaju važnu ulogu u opštoj teoriji relativnosti. U ovom slučaju tangetni prostori se modeluju prostorom Mikovskog $\mathbb{R}^4_1$ (umesto Euklidskim prostorom) sa metrikom

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenzor g_{ij} u opštoj teoriji relativnosti igra ulogu *gravitacionog potencijala* ili *gravitacionog polja*. On daje metričku formu na mnogostrukosti imajući u vidu gravitaciju koja dolazi od materije koja je sadržana u prostoru.

Generalisani inverzi u prostorima sa indefinitnom metrikom jesu aktuelna tema linearne algebre. Neke vrste generalisanih inverza u prostorima sa indefinitnim unutrašnjim proizvodom posmatrane su u radovima [1, 63].

Teorema 1.2.1. *Na svakoj Rimanovoj mnogostrukosti* (M,g) *postoji jedinstvena linearna koneksija* ∇ *koja ispunjava uslove*

(i) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$*, (kompatibilnost sa metrikom)*

(ii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$*, (simetričnost)*

pri čemu je $[\cdot,\cdot]$ *Liova zagrada.*

Jedinstvena koneksija iz Teoreme 1.2.1 naziva se *Rimanova koneksija* ili *koneksija Levi-Čivita* i određena je formulom

$$\begin{aligned}2\langle\nabla_X Y, Z\rangle =& X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\ & - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle.\end{aligned}$$

Tenzor krivine R Rimanove mnogostrukosti M je tenzorsko polje tipa $(1,3)$ definisano sa

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

gde je ∇ Rimanova koneksija na M.

U Ričijevom računu komponente tenzora krivine Rimanove mnogostrukosti su određene na sledeći način

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_s R^s_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^s},$$

gde je

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^h_{rk} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^h_{rj}.$$

Funkcije Γ^h_{ij} se nazivaju Kristofelovi simboli i eksplicitno su određeni pomoću metričkog tenzora $g_{ij} = \langle\partial_i, \partial_j\rangle$ i njemu inverznog tenzora $g^{ij} := (g_{ij})^{-1}$ na sledeći način

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}g^{hp}\big(\partial_i g_{jp} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij}\big).$$

Prethodna formula određuje Rimanovu koneksiju u svakoj karti. Rimanov tenzor krivine R tipa $(0,4)$ definisan je sa

$$R(X,Y,Z,V) := \langle R(X,Y)Z, V\rangle = g(R(X,Y)Z,V),$$

ili u komponentama

$$R_{ijkl} = g_{si}R^s_{jkl}.$$

Lema 1.2.1 (Osobine Rimanovog tenzora krivine)**.** *Rimanov tenzor krivine R tipa $(0,4)$ poseduje sledeće osobine*

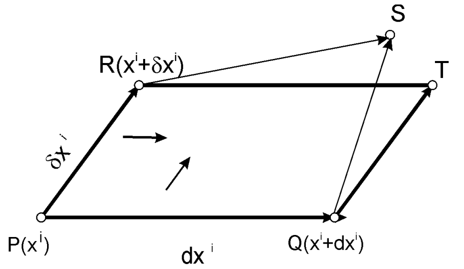
1. $\langle R(X,Y)Z,V\rangle = -\langle R(X,Y)V,Z\rangle$,
2. $\langle R(X,Y)Z,V\rangle = \langle R(Z,V)X,Y\rangle$.

U Ričijevom računu prethodne jednačine glase

1. $R_{ijkl} = -R_{jikl}$,
2. $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Koristeći algebarske simetrije Teoreme 1.1.3 i Leme 1.2.1 osobine Rimanovog tenzora krivine tipa $(0,4)$ možemo zapisati na sledeći način

1. $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$,
2. $3R_{[ijk]l} = R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$,
3. $3\nabla_{[i}R_{jk]lm} = \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijklm}$.



Slika 1.2: Tenzor torzije

1.3 Mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

Primetimo da za određivanje jedinstvene koneksije na Rimanovoj mnogostrukosti nije bio dovoljan uslov kompatibilnosti sa Rimanovom metrikom (uslov (i) u Teoremi 1.2.1), već je bio neophodan i uslov simetričnosti (uslov (ii) u Teoremi 1.2.1)

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0.$$

U slučaju kada linearna koneksija ∇ nije simetrična možemo posmatrati tenzorsko polje T tipa $(1,2)$ definisano sa

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$

koje se naziva *tenzor torzije* linearne koneksije, videti Sliku 1.2 [44]. Na mnogostrukosti M sa nesimetričnom linearnom koneksijom $\underset{1}{\nabla}$ druga nesimetrična linearna koneksija $\underset{2}{\nabla}$ je određena na sledeći način [68]

$$\underset{2}{\nabla}_X Y = \underset{1}{\nabla}_Y X + [X,Y],\, X,Y \in T_p(M),$$

gde $[\cdot,\cdot]$ označava Liovu zagradu.

Komponente nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{2}{\nabla}$ jesu funkcije L^h_{ij} i L^h_{ji}, respektivno, određene sa

$$\underset{1}{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = L^h_{ij}\partial_h \quad \text{i} \quad \underset{2}{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = L^h_{ji}\partial_h.$$

Komponente simetričnog dela ∇ nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{2}{\nabla}$ jesu funkcije $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ određene sa

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = L^h_{\underline{ij}}\partial_h,$$

pri čemu je

$$L^h_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}\big(L^h_{ij} + L^h_{ji}\big).$$

U slučaju simetrične linearne koneksije postoji samo jedna vrsta kovarijantnog diferenciranja tenzorskih polja.

Imajući u vidu nesimetričnost koeficijenata L^h_{ij} nesimetrične linearne koneksije moguće je posmatrati četiri vrste kovarijantnog diferenciranja tenzora a^i_j:

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\nabla}_m a^i_j &\equiv a^i_{j\underset{1}{|}m} = \partial_m a^i_j + L^i_{pm} a^p_j - L^p_{jm} a^i_p,\\
\underset{2}{\nabla}_m a^i_j &\equiv a^i_{j\underset{2}{|}m} = \partial_m a^i_j + L^i_{mp} a^p_j - L^p_{mj} a^i_p,\\
\underset{3}{\nabla}_m a^i_j &\equiv a^i_{j\underset{3}{|}m} = \partial_m a^i_j + L^i_{pm} a^p_j - L^p_{mj} a^i_p,\\
\underset{4}{\nabla}_m a^i_j &\equiv a^i_{j\underset{4}{|}m} = \partial_m a^i_j + L^i_{mp} a^p_j - L^p_{jm} a^i_p.
\end{aligned}
$$

Napomenimo da je A. Ajnštajn [10] koristio prvu i drugu vrstu kovarijantnog diferenciranja tenzora.

Kovarijantno difereciranje u odnosu na linearnu koneksiju ∇ koja je simetričan deo nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{2}{\nabla}$ je određeno sa

$$
\nabla_m a^i_j \equiv a^i_{j;m} = \partial_m a^i_j + L^i_{\underline{pm}} a^p_j - L^p_{\underline{jm}} a^i_p.
$$

1.3.1 Tenzori krivine mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

Koristeći četiri vrste kovarijatnog diferenciranja S.M. Minčić je posmatrao razne identitete Ričijevog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom [43, 44, 46, 45, 51] i pokazao da je među dvanaest tenzora krivine koji se javljaju u identitetima Ričijevog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom pet linearno nezavisnih [47]. U nastavku ćemo koristiti sledećih pet linearno nezavisnih tenzora krivine mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom:

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta}{R}(X,Y)Z =& \underset{\theta}{\nabla}_X \underset{\theta}{\nabla}_Y Z - \underset{\theta}{\nabla}_Y \underset{\theta}{\nabla}_X Z - \underset{\theta}{\nabla}_{[X,Y]} Z, \ \ \theta = 1,2;\\
\underset{3}{R}(X,Y)Z =& \underset{2}{\nabla}_X \underset{1}{\nabla}_Y Z - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{2}{\nabla}_X Z + \underset{2}{\nabla}_{\underset{1}{\nabla}_Y X} Z - \underset{1}{\nabla}_{\underset{2}{\nabla}_X Y} Z;\\
\underset{4}{R}(X,Y)Z =& \underset{2}{\nabla}_X \underset{1}{\nabla}_Y Z - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{2}{\nabla}_X Z + \underset{2}{\nabla}_{\underset{2}{\nabla}_Y X} Z - \underset{1}{\nabla}_{\underset{1}{\nabla}_X Y} Z;\\
\underset{5}{R}(X,Y)Z =& \frac{1}{2}\big(\underset{1}{\nabla}_X \underset{1}{\nabla}_Y Z - \underset{2}{\nabla}_Y \underset{1}{\nabla}_X Z + \underset{2}{\nabla}_X \underset{2}{\nabla}_Y Z - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{2}{\nabla}_X Z\\
&+ \underset{1}{\nabla}_{[Y,X]} Z + \underset{2}{\nabla}_{[Y,X]} Z \big).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Na dalje ćemo koristiti bazna vektorska polja

$$
X = \partial_i, \ Y = \partial_j, \ Z = \partial_k,
$$

u tom slučaju relacije iz (1.2) postaju

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta}{R}(X,Y)Z =& \underset{\theta}{\nabla}_X \underset{\theta}{\nabla}_Y Z - \underset{\theta}{\nabla}_Y \underset{\theta}{\nabla}_X Z, \ \ \theta = 1,2;\\
\underset{3}{R}(X,Y)Z =& \underset{2}{\nabla}_X \underset{1}{\nabla}_Y Z - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{2}{\nabla}_X Z + \underset{2}{\nabla}_{\underset{1}{\nabla}_Y X} Z - \underset{1}{\nabla}_{\underset{2}{\nabla}_X Y} Z;\\
\underset{4}{R}(X,Y)Z =& \underset{2}{\nabla}_X \underset{1}{\nabla}_Y Z - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{2}{\nabla}_X Z + \underset{2}{\nabla}_{\underset{2}{\nabla}_Y X} Z - \underset{1}{\nabla}_{\underset{1}{\nabla}_X Y} Z;\\
\underset{5}{R}(X,Y)Z =& \frac{1}{2}\big(\underset{1}{\nabla}_X \underset{1}{\nabla}_Y Z - \underset{2}{\nabla}_Y \underset{1}{\nabla}_X Z + \underset{2}{\nabla}_X \underset{2}{\nabla}_Y Z - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{2}{\nabla}_X Z \big).
\end{aligned}
$$

Relacije među tenzorima krivine $\underset{\theta}{R}$ $(\theta = 1,\ldots,5)$ i tenzora krivine R su izvedene u radu [47]:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{R}(X,Y)Z =&R(X,Y)Z+\frac{1}{2}\nabla_X T(Z,Y)-\frac{1}{2}\nabla_Y T(Z,X)+\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\\
&-\frac{1}{4}T(T(Z,X),Y),\\
\underset{2}{R}(X,Y)Z =&R(X,Y)Z-\frac{1}{2}\nabla_X T(Z,Y)+\frac{1}{2}\nabla_Y T(Z,X)+\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\\
&-\frac{1}{4}T(T(Z,X),Y),\\
\underset{3}{R}(X,Y)Z =&R(X,Y)Z+\frac{1}{2}\nabla_X T(Z,Y)+\frac{1}{2}\nabla_Y T(Z,X)-\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\\
&+\frac{1}{4}T(T(Z,X),Y)+\frac{1}{2}T(T(Y,X),Z),\\
\underset{4}{R}(X,Y)Z =&R(X,Y)Z+\frac{1}{2}\nabla_Z T(Z,Y)+\frac{1}{2}\nabla_Y T(Z,X)-\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\\
&+\frac{1}{4}T(T(Z,X),Y)+\frac{1}{2}T(T(Y,X),Z),\\
\underset{5}{R}(X,Y)Z =&R(X,Y)Z+\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)+\frac{1}{4}T(T(Z,X),Y).
\end{aligned}$$

M. Prvanović je u radu [68] posmatrala četiri tenzora krivine nesimetrične linearne koneksije i dala njihovu geometrijsku interpretaciju koristeći pojam paralelnog pomeranja u odnosu na nesimetrične linearne koneksije $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{2}{\nabla}$. Najpre ćemo predstaviti geometrijske interpretacije dveju vrste paralelnog pomeranja i torzije koje je dala F. Graif u radu [18], a zatim ćemo se osvrnuti na geometrijske interpretacije tenzora krivine koje je dala M. Prvanović [68].

Geometrijska interpretacija dveju vrsta paralelnog pomeranja i torzije. F. Graif [18] je dala geometrijsku interpretaciju dveju vrsta paralelnog pomeranja i torzije, kao što sledi. Posmatrajmo u tangetnom prostoru površinski element određen pomoću dva infinitezimalna vektora sa početkom u tački $P(x^i)$, i neka su krajevi ovih vektora tačke $Q(x^i+dx^i)$ i $R(x^i+\delta x^i)$.

Koristeći istu vrstu paralelnog pomeranja, na primer prvu vrstu, vektora dx^i duž δx^i i δx^i duž dx^i, dobićemo dve različite tačke S i T za krajeve. Zaista,

$$\begin{aligned}
\underset{T}{x^i}-\underset{S}{x^i} &= \underset{1}{d}(\delta x^i)-\underset{1}{\delta}(dx^i)=(L^i_{pm}-L^i_{mp})dx^p\delta x^m\\
&=2L^i_{\underset{\vee}{pm}}dx^p\delta x^m = T^i_{pm}dx^p\delta x^m.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Međutim, izračunavajući $\delta(dx^i)$ u odnosu na prvu vrstu paralelnog pomeranja i $d(\delta x^i)$ u odnosu na drugu vrstu paralelnog pomeranja dobićemo

$$d(\delta x^i)=\underset{2}{d}(\delta x^i)=-L^i_{mp}\delta x^p dx^m,\ \delta(dx^i)=\underset{1}{\delta}(dx^i)=-L^i_{pm}\delta x^m dx^p,$$

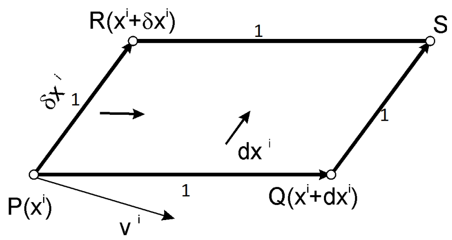
sada na osnovu (1.3) dobijamo

$$\underset{T}{x^i}-\underset{S}{x^i}=\underset{2}{d}(\delta x^i)-\underset{1}{\delta}(dx^i)=0,$$

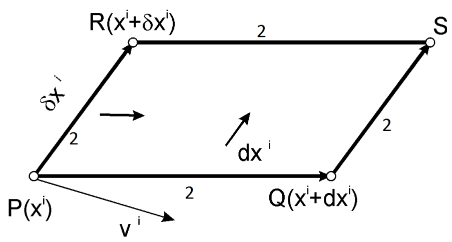
t.j. tačke S i T se poklapaju i dobijamo infinitezimalni paralelogram $PQSR$ [44].

Geometrijske interpretacije tenzora krivine. Da bi dobila geometrijsku interpretaciju prvog tenzora krivine F. Graif [18] je koristila prvu vrstu paralelnog pomeranja vektora v^i duž cele zatvorene konture *PQSR* (videti Sliku 1.3) i za priraštaj dobila [44]

$$\underset{1}{\Delta} v^i = \underset{1}{R}{}^i_{jmn} v^j dx^m \delta x^n.$$



Slika 1.3: Geometrijska interpretacija prvog tenzora krivine



Slika 1.4: Geometrijska interpretacija drugog tenzora krivine

Analogno, koristeći drugu vrstu paralelnog pomeranja vektora v^i duž cele zatvorene konture *PQSR* (videti Sliku 1.4) F. Graif [18] je dobila geometrijsku interpretaciju drugog tenzora krivine [44]

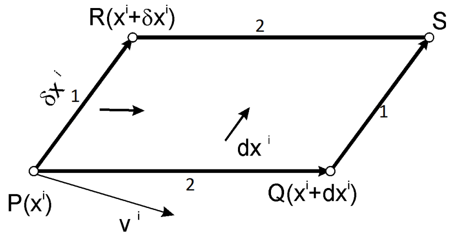
$$\underset{2}{\Delta} v^i = \underset{2}{R}{}^i_{jmn} v^j dx^m \delta x^n.$$

M. Prvanović [68] je koristila prvu vrstu paralelnog pomeranja za dve suprotne strane paralelograma *PQSR*, dok je za druge dve suprotne strane pomenutog paralelograma koristila drugu vrstu paralelnog pomeranja (videti Sliku 1.5) i na taj način dobila [44]

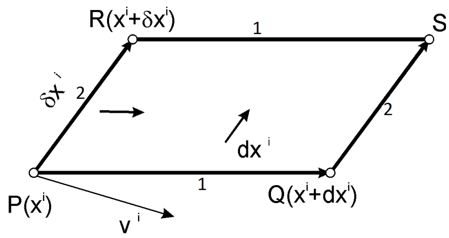
$$\underset{3}{\Delta} v^i = -\underset{3}{R}{}^i_{jnm} v^j dx^m \delta x^n.$$

Promenom vrste paralelnog pomeranja duž suprotnih stranica paralelograma (videti Sliku 1.6) dobila je [44]

$$\underset{4}{\Delta} v^i = \underset{4}{R}{}^i_{jmn} v^j dx^m \delta x^n.$$



Slika 1.5: Geometrijska interpretacija trećeg tenzora krivine



Slika 1.6: Geometrijska interpretacija četvrtog tenzora krivine

S.M. Minčić je u radu [48] ispitao sve mogućnosti koje se javljaju pri promeni vrste paralelnog pomeranja vektora duž paralelograma $PQSR$, ukupno ih ima $2^4 = 16$ (4 strane i 2 vrste paralelnog pomeranja). Na taj način S.M. Minčić [48] je dobio geometrijske interpretacije tenzora i pseudotenzora krivine nesimetrične linearne koneksije.

1.3.2 Osobine tenzora krivine mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

U ovoj podsekciji ćemo prikazati osnovne osobine pet linearno nezavisnih tenzora krivine $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,5$ mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom. Upotrebimo oznaku

$$\sum_{CS(X,Y,Z)} \underset{\theta}{R}(X,Y)Z,$$

da označimo

$$\sum_{CS(X,Y,Z)} \underset{\theta}{R}(X,Y)Z = \underset{\theta}{R}(X,Y)Z + \underset{\theta}{R}(Y,Z)X + \underset{\theta}{R}(Z,X)Y, \;\; \theta = 1,\dots,5.$$

Teorema 1.3.1. [50] *Tenzori krivine* $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,5$ *mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom poseduju sledeće osobine*

$$\begin{aligned}
\underset{1}{R}(X,Y)Z &= -\underset{1}{R}(Y,X)Z, & \sum_{CS(X,Y,Z)} \underset{1}{R}(X,Y)Z &\neq 0,\\
\underset{2}{R}(X,Y)Z &= -\underset{2}{R}(Y,X)Z, & \sum_{CS(X,Y,Z)} \underset{2}{R}(X,Y)Z &\neq 0,\\
\underset{3}{R}(X,Y)Z &\neq -\underset{3}{R}(Y,X)Z, & \sum_{CS(X,Y,Z)} \underset{3}{R}(X,Y)Z &\neq 0,\\
\underset{4}{R}(X,Y)Z &\neq -\underset{4}{R}(Y,X)Z, & \sum_{CS(X,Y,Z)} \underset{4}{R}(X,Y)Z &= 0,\\
\underset{5}{R}(X,Y)Z &\neq -\underset{5}{R}(Y,X)Z, & \sum_{CS(X,Y,Z)} \underset{5}{R}(X,Y)Z &= 0.
\end{aligned}$$

1.4 Ajzenhartovi generalisani Rimanovi prostori

Generalisani Rimanov prostor u Ajzenhartovom smislu (videti [14, 15, 16, 17]) je diferencijabilna mnogostrukost M snabdevena metrikom g koja je u opštem slučaju nesimetrična. Prema tome, metrika g se može predstaviti na sledeći način

$$g(X,Y) = \underline{g}(X,Y) + \underset{\vee}{g}(X,Y).$$

Ovde $\underline{g}$ označava simetričan deo metrike g, a $\underset{\vee}{g}$ označava antisimetričan deo od g, t.j.

$$\underline{g}(X,Y) = \frac{1}{2}(g(X,Y)+g(Y,X)) \ \text{ i } \ \underset{\vee}{g}(X,Y) = \frac{1}{2}(g(X,Y)-g(Y,X)).$$

Nesimetrična linearna koneksija $\underset{1}{\nabla}$ generalisanog Rimanovog prostora (M,g) je eksplicitno određena jednačinom

$$g(\underset{1}{\nabla}_X Y,Z) = \frac{1}{2}(Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(Y,X)),$$

gde je $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ i $Z = \partial_k$.

1.4.1 Kovarijantni tenzori krivine generalisanog Rimanovog prostora

U ovoj podsekciji ćemo predstaviti osnovne osobine kovarijantnih tenzora krivine generalisanog Rimanovog prostora. Upotrebićemo oznaku $\sum_{CS(\cdot,\cdot,\cdot)}$ da označimo

$$\begin{aligned}
\sum_{CS(X,Y,Z)} B(X,Y,Z,W) =& B(X,Y,Z,W)+B(Y,Z,X,W)\\
&+B(Z,X,Y,W),
\end{aligned}$$

gde je B proizvoljno tenzorsko polje tipa $(0,4)$.

Tenzor krivine tipa $(0,4)$ uobičajenog Rimanovog prostora definisan sa

$$R(X,Y,Z,W) := \underline{g}(R(X,Y)Z,W),$$

poseduje sledeće osobine

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) = -R(Y,X,Z,W),$$

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y),$$

$$\begin{aligned}\sum_{CS(X,Y,Z)} R(X,Y,Z,W) &= \sum_{CS(X,Y,W)} R(X,Y,Z,W)\\ &= \sum_{CS(Y,Z,W)} R(X,Y,Z,W) = 0.\end{aligned}$$

Označimo tenzore krivine tipa $(0,4)$ generalisanog Rimanovog prostora sa

$$\underset{\theta}{R}(X,Y,Z,W) := \underline{g}(\underset{\theta}{R}(X,Y)Z,W),\ \ \theta = 1,\ldots,5.$$

Teorema 1.4.1. [50] *Tenzori krivine* $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\ldots,5$, *generalisanog Rimanovog prostora poseduju sledeće osobine:*

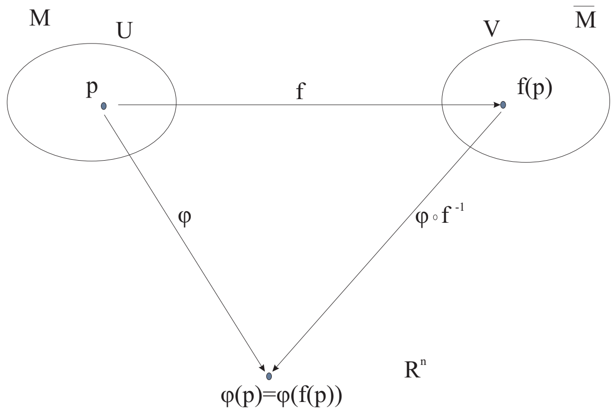
$$\begin{aligned}
&\underset{1}{R}(X,Y,Z,W) = -\underset{1}{R}(X,Y,W,Z) = -\underset{1}{R}(Y,X,Z,W),\\
&\underset{2}{R}(X,Y,Z,W) = -\underset{2}{R}(X,Y,W,Z) = -\underset{2}{R}(Y,X,Z,W),\\
&\underset{3}{R}(X,Y,Z,W) = -\underset{3}{R}(X,Y,W,Z),\\
&\underset{4}{R}(X,Y,Z,W) = -\underset{4}{R}(X,Y,W,Z),\ \sum_{CS(W,Y,X)} \underset{4}{R}(X,Y,Z,W) = 0,\\
&\underset{3}{R}(X,Y,Z,W) - \underset{3}{R}(Z,W,X,Y) = \underset{4}{R}(Z,W,X,Y) - \underset{4}{R}(X,Y,Z,W),\\
&\underset{5}{R}(X,Y,Z,W) = \underset{5}{R}(Z,W,X,Y),\ \sum_{CS(W,Y,X)} \underset{5}{R}(X,Y,Z,W) = 0.
\end{aligned}$$

1.5 Preslikavanja i transformacije mnogostrukosti sa linearnom koneksijom

U ovoj sekciji ćemo pomenuti pojmove koji su važni za proučavanje preslikavanja mnogostrukosti sa linearnom koneksijom, a koji se mogu naći u monografijama [41, 42, 72].

***Zajednički koordinatni sistem* pri preslikavanju.** Neka je $f : M \to \overline{M}$ difeomorfizam mnogostrukosti M i $\overline{M}$. Ako je (U,φ) karta na mnogostrukosti M takva da $p \in U$, tada je $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$ karta takva da $f(p) \in f(U)$. U tom slučaju tačke p i $f(p)$ imaju iste lokalne koordinate. Kada ovakav postupak primenimo na bilo koje dve tačke p i $f(p)$, onda je na mnogostrukostima M i $\overline{M}$ uveden *zajednički koordinatni sistem pri preslikavanju* f, videti Sliku 1.7.

***Zajednička mnogostrukost* pri preslikavanju.** Neka je $f : M \to \overline{M}$ difeomorfizam mnogostrukosti M i $\overline{M}$. Ako je $\{(U_i,\varphi_i) \mid i \in I\}$ atlas na mnogostrukosti M, tada je $\{(f(U_i), \varphi_i \circ f^{-1}) \mid i \in I\}$ atlas na mnogostrukosti $\overline{M}$. U tom slučaju možemo pretpostaviti da se mnogostrukosti M i $\overline{M}$ poklapaju, jer su topologija i diferencijabilna struktura ovih dveju mnogostrukosti iste.



Slika 1.7: Zajednički koordinatni sistem pri preslikavanju

***Tenzor deformacije koneksije* pri preslikavanju.** Neka su M i $\overline{M}$ mnogostrukosti sa linearnim koneksijama ∇ i $\overline{\nabla}$ i neka je $f : M \to \overline{M}$ difeomorfizam. U tom slučaju možemo pretpostaviti da su koneksije ∇ i $\overline{\nabla}$ definisane na istoj mnogostrukosti $M \equiv \overline{M}$. Tenzor razlike koneksija ∇ i $\overline{\nabla}$

$$P = \overline{\nabla} - \nabla,$$

je tenzorsko polje tipa $(1,2)$ i naziva se *tenzor deformacije* koneksija ∇ i $\overline{\nabla}$ pri preslikavanju f.

Analogno, možemo posmatrati tenzor deformacije nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{\theta}{\overline{\nabla}}$ i $\underset{\theta}{\nabla}$ pri preslikavanju f

$$\underset{\theta}{P} = \underset{\theta}{\overline{\nabla}} - \underset{\theta}{\nabla}, \ \theta \in \{1,2\}.$$

Tenzor deformacije P simetričnih delova $\overline{\nabla}$ i ∇ nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{\theta}{\nabla}$ i $\underset{\theta}{\nabla}$, respektivno, pri preslikavanju f zadovoljava

$$P(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\underset{\theta}{P}(X,Y) + \underset{\theta}{P}(Y,X)\big), \ \theta \in \{1,2\}.$$

Tenzori krivine R i $\overline{R}$ simetričnih linearnih koneksija ∇ i $\overline{\nabla}$, respektivno, zadovoljavaju relaciju [72], str. 170

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z =& R(X,Y)Z + \nabla_X P(Z,Y) - \nabla_Y P(Z,X)\\ &+ P(P(Z,Y),X) - P(P(Z,X),Y).\end{aligned}$$

Tenzori krivine $\underset{\theta}{R}$ i $\underset{\theta}{\overline{R}}$, $\theta = 1,\dots,5$ zadovoljavaju sledeće relacije [54]

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{1}{R}(X,Y)Z + \underset{1}{\nabla}_X \underset{1}{P}(Z,Y) - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{1}{P}(Z,X)\\ &+ \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,X),Y) + \underset{1}{P}(Z,\underset{1}{T}(Y,X)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{2}{R}(X,Y)Z + \underset{2}{\nabla}_X \underset{2}{P}(Y,Z) - \underset{2}{\nabla}_Y \underset{2}{P}(X,Z)\\ &+ \underset{2}{P}(X,\underset{2}{P}(Y,Z)) - \underset{2}{P}(Y,\underset{2}{P}(X,Z)) + \underset{2}{P}(\underset{1}{T}(X,Y),Z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{3}{R}(X,Y)Z + \underset{2}{\nabla}_X \underset{1}{P}(Z,Y) - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{1}{P}(X,Z)\\ &+ \underset{1}{P}(X,\underset{1}{P}(Z,Y)) - \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(X,Z),Y) + \underset{1}{T}(\underset{1}{P}(X,Y),Z),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{4}{R}(X,Y)Z + \underset{2}{\nabla}_X \underset{1}{P}(Z,Y) - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{1}{P}(X,Z)\\
&+ \underset{1}{P}(X,\underset{1}{P}(Z,Y)) - \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(X,Z),Y) + \underset{1}{T}(\underset{1}{P}(X,Y),Z),\\
\underset{5}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{5}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}\Big(\underset{3}{\nabla}_X \underset{1}{P}(Z,Y) - \underset{4}{\nabla}_Y \underset{1}{P}(Z,X)\\
&\quad + \underset{4}{\nabla}_X \underset{1}{P}(Y,Z) - \underset{3}{\nabla}_Y \underset{1}{P}(X,Z)\\
&\quad + \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(Y,\underset{1}{P}(Z,X))\\
&\quad + \underset{1}{P}(X,\underset{1}{P}(Y,Z)) - \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(X,Z),Y)\Big).
\end{aligned}
$$

1.5.1 Mešoviti sistemi PDJ u tenzorskom obliku

Ova podsekcija je posvećena osnovnim pojmovima lokalne teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina u tenzorskom obliku, koji su od suštinske važnosti pri proučavanju preslikavanja, transformacija i deformacija uopštenih geometrijskih prostora. Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ koordinatni domen mnogostrukosti M sa linearnom koneksijom ∇. Sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina Košijevog tipa u odnosu na kovarijatni izvod ; koji odgovara simetričnoj linearnoj koneksiji ∇ i m nepoznatih tenzorskih polja $Y^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma}}(x)$, $\sigma = 1,\dots,m$, tipa (p_σ, q_σ) ima sledeći oblik [37, 72]

$$
\underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma};k}(x) = \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} k}(x, \underset{1}{Y}, \dots, \underset{m}{Y}), \tag{1.4}
$$

gde indeksi $i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}, j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma}, k$ uzimaju vrednosti od 1 do n.

Na desnoj strani sistema (1.4) nalaze se tenzorske funkcije tipa (p_σ, q_σ) konstruisane na osnovu konačnog broja tenzorskih operacija sa nepoznatim tenzorskim poljima $\underset{\sigma}{Y}$, $\sigma = 1,\dots,m$ i pomoću komponenti nekih poznatih objekata uključujući i komponente linearne koneksije ∇.

Uslovi integrabilnosti u tenzorskom obliku sistema (1.4) su dati sa [37, 72]

$$
\begin{aligned}
\underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma};[lm]} \equiv& \underset{\sigma}{Y}{}^{\alpha i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma}} R^{i_1}_{\alpha lm} + \dots + \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma -1}\alpha}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma}} R^{i_{p_\sigma}}_{\alpha lm}\\
&- \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{\alpha j_2 \dots j_{q_\sigma}} R^{\alpha}_{j_1 lm} - \dots - \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma -1}\alpha} R^{\alpha_{p_\sigma}}_{j_{q_\sigma} lm}\\
=& \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} l;m} - \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} m;l},
\end{aligned}
$$

gde smo iskoristili identitet Ričijevog tipa koji odgovara simetričnoj linearnoj koneksiji ∇.

Na isti način koristeći prvi ili drugi identitet Ričijevog tipa koji odgovaraju nesimetričnim linearnim koneksijama $\underset{1}{\nabla}$ ili $\underset{2}{\nabla}$, odnosno odgovarajućim kovarijantnim izvodima $\underset{1}{|}$ ili $\underset{2}{|}$, respektivno, dobijamo uslove integrabilnosti u sledećim oblicima

$$
\begin{aligned}
\underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma}\underset{1}{|}[lm]} \equiv& \underset{\sigma}{Y}{}^{\alpha i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma}} \underset{1}{R}{}^{i_1}_{\alpha lm} + \dots + \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma -1}\alpha}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma}} \underset{1}{R}{}^{i_{p_\sigma}}_{\alpha lm}\\
&- \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{\alpha j_2 \dots j_{q_\sigma}} \underset{1}{R}{}^{\alpha}_{j_1 lm} - \dots - \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma -1}\alpha} \underset{1}{R}{}^{\alpha_{p_\sigma}}_{j_{q_\sigma} lm} + \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma}\underset{1}{|}p} \underset{1}{T}{}^{p}{}_{lm}\\
=& \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} l\underset{1}{|}m} - \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p_\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q_\sigma} m\underset{1}{|}l},
\end{aligned}
$$

ili

$$
\begin{aligned}
\underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q\sigma} \underset{2}{|} [lm]} \equiv & \underset{\sigma}{Y}{}^{\alpha i_2 \dots i_{p\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q\sigma}} \underset{2}{R}{}^{i_1}_{\alpha lm} + \cdots + \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p\sigma-1}\alpha}_{j_1 j_2 \dots j_{q\sigma}} \underset{2}{R}{}^{i_{p\sigma}}_{\alpha lm} \\
& - \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p\sigma}}_{\alpha j_2 \dots j_{q\sigma}} \underset{2}{R}{}^{\alpha}_{j_1 lm} - \cdots - \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q\sigma-1}\alpha} \underset{2}{R}{}^{\alpha_{p\sigma}}_{j_{q\sigma} lm} - \underset{\sigma}{Y}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q\sigma} \underset{1}{|} p} \underset{1}{T}{}^{p}{}_{lm} \\
= & \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q\sigma} l \underset{2}{|} m} - \underset{\sigma}{F}{}^{i_1 i_2 \dots i_{p\sigma}}_{j_1 j_2 \dots j_{q\sigma} m \underset{2}{|} l}.
\end{aligned}
$$

Isto tako možemo iskoristiti kovarijantno diferenciranje treće i četvrte vrste, kao i razne kombinacije identiteta Ričijevog tipa, pa ćemo dobiti uslove integrabilnosti u drugim oblicima.

1.5.2 Geodezijske linije i geodezijska preslikavanja

Geodezijske linije Rimanovog prostora i mnogostrukosti sa linearnom koneksijom igraju ulogu koju prave linije igraju u Euklidskom prostoru. Naime, geodezijske linije su onoliko „prave“ koliko je to moguće u zakrivljenim prostorima. Neka je (M,∇) mnogostrukosti sa linearnom koneksijom i neka je $(U,\varphi)=(x^i)$ karta na mnogostrukosti M. Neka je $c : I \to M$, $t \mapsto c(t) = x(t) = (x^1(t),\dots,x^n(t))$, I je otvoreni interval na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ i $c \subset U \subset M$, diferencijabilna kriva na n-dimenzionoj mnogostrukosti M i $\lambda = \dot{x}$ odgovarajući tangetni vektor („vektor brzine“) duž krive c. Da bismo definisali pojam geodezijske linije biće nam neophodan pojam *rekurentnog vektorskog polja*.

Definicija 1.5.1. *Vektorsko polje X duž krive c je* rekurentno *duž c ako postoji realna funkcija $\sigma : I \to \mathbb{R}$ takva da je $\nabla_\lambda X = \sigma \otimes X$, što bi u komponentama glasilo*

$$X^h_{;i}\lambda^i \equiv \frac{\mathrm{d}X^h}{\mathrm{d}t} + \Gamma^h_{ij}\lambda^i X^j = \sigma X^h. \tag{1.5}$$

Definicija 1.5.2. *Kriva $c \in C^2$ na mnogostrukosti M sa linearnom koneksijom ∇ je* geodezijska *ako je tangetno vektorsko polje regularno duž krive c.*

U slučaju kada je $\sigma(t) = 0$ u (1.5) dobijamo specijalan slučaj rekurentnosti koji je takođe važan koncept kod mnogostrukosti sa linearnom koneksijom.

Definicija 1.5.3. *Vektorsko polje duž krive c je* paralelno duž *c ako važi $\nabla_\lambda X = 0$, ili u komponentama*

$$X^h_{;i}\lambda^i \equiv \frac{\mathrm{d}X^h}{\mathrm{d}t}\Gamma^h_{ij}\lambda^i X^j = 0.$$

Definicija 1.5.4. *Difeomorfizam $f : M \to \overline{M}$ mnogostrukosti M i $\overline{M}$ sa linearnim koneksijama ∇ i $\overline{\nabla}$ naziva se* geodezijsko preslikavanje *ako svaku geodezijsku liniju u odnosu na koneksiju ∇ preslikava u liniju koja je geodezijska u odnosu na koneksiju $\overline{\nabla}$.*

Geometrijski objekti mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom koji su invarijantna pri geodezijskim preslikavanjima jesu:

- Tomasov projektivni parametar definisan sa

$$\Pi(X,Y) = \nabla_X Y - \frac{1}{n+1}\big(X \cdot \mathrm{Tr}(U \to \nabla_U Y) - Y \cdot \mathrm{Tr}(V \to \nabla_X V)\big),$$

  ili u komponentama

$$\Pi^h_{ij} = L^h_{ij} - \frac{1}{n+1}\big(\delta^h_i \Gamma^p_{pj} + \delta^h_j \Gamma^p_{pi}\big).$$

- Vejlov tenzor projektivne krivine definisan sa

$$
\begin{aligned}
W(X,Y)Z =& R(X,Y)Z + \frac{1}{n+1} X \cdot \big(\mathrm{Ric}(Y,Z) - \mathrm{Ric}(Z,Y)\big) \\
&- \frac{1}{(n+1)(n-1)} \Big(\big(n\mathrm{Ric}(X,Y) + \mathrm{Ric}(Y,X)\big) \cdot Z \\
&+ \big(n\mathrm{Ric}(X,Z) + \mathrm{Ric}(Z,X)\big) \cdot Y \Big),
\end{aligned}
$$

  ili u komponentama

$$
\begin{aligned}
W^h_{ijk} =& R^h_{ijk} + \frac{1}{n+1} \delta^h_i \left(R_{jk} - R_{kj}\right) \\
&- \frac{1}{(n+1)(n-1)} \Big((nR_{ij} + R_{ji})\delta^h_k - (nR_{ik} + R_{ki})\delta^h_j \Big).
\end{aligned}
$$

Kako je u Rimanovom prostoru Ričijev tenzor simetričan, to Vejlov projektivni tenzor krivine Rimanovog prostora dobija oblik

$$
W(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{(n-1)} \big(\mathrm{Ric}(X,Y) \cdot Z - \mathrm{Ric}(X,Z) \cdot Y\big),
$$

ili u komponentama

$$
W^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{(n-1)} \left(R_{ij}\delta^h_k - R_{ik}\delta^h_j\right).
$$

Više o teoriji geodezijskih preslikavanja specijalnih Rimanovih prostora i njihovim uopštenjima pogledati u [20, 21, 22, 26, 33, 35, 37, 41, 42].

Poglavlje 2

Specijalna skoro geodezijska preslikavanja prvog tipa mnogostrukosti sa linearnom koneksijom

Uopštavajući pojam geodezijske linije N.S. Sinjukov je u radu [71] uveo pojam skoro geodezijske linije mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom. Takođe, definisao je skoro geodezijsko preslikavanje prostora sa simetričnom linearnom koneksijom kao preslikavanje $f : M \to \overline{M}$ koje svaku geodezijsku liniju mnogostrukosti M sa simetričnom linearnom koneksijom ∇ preslikava u skoro geodezijsku liniju mnogostrukosti $\overline{M}$ sa simetričnom linearnom koneksijom $\overline{\nabla}$. Veliki doprinos teoriji skoro geodezijskih preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom su dali V.E. Berezovski i J. Mikeš [4].

2.1 Skoro geodezijska preslikavanja mnogostrukosti

U ovoj sekciji prikazaćemo osnovne definicije skoro geodezijskih linija i osnovne jednačine skoro geodezijskih preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom, koje su prezentovane u radu [5]. Originalne definicije koje je dao N.S. Sinjukov [71] mogu se naći u monografiji [72].

2.1.1 Skoro geodezijske linije mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom

Neka je (M,∇) mnogostrukost sa simetričnom linearnom koneksijom ∇ i neka je $c : I \to M$ glatka kriva na mnogostrukosti M, definisana na otvorenom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, koja ispunjava uslov regularnosti

$$c'(t) = \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0, t \in I. \tag{2.1}$$

Označimo sa $D = span(X_1, X_2)$ linearan (vektorski) prostor razapet vektorskim poljima X_1 i X_2 duž krive c. Za distribuciju D kažemo da je paralelna duž krive c ako kovarijantni izvodi baznih vektorskih polja X_1 i X_2 duž krive c pripadaju distribuciji D [5].

Pojam paralelne distribucije omogućava sledeću definiciju skoro geodezijske linije koja se može naći u radu [5].

Definicija 2.1.1. [5] *Glatka kriva c na mnogostrukosti M sa simetričnom linearnom koneksijom ∇, koja zadovoljava uslov regularnosti* (2.1)*, naziva se skoro geodezijskom linijom ako postoji dvodi-*

menziona (diferencijabilna) distribucija D paralelna duž krive c (u odnosu na linearnu koneksiju ∇*) tako da za bilo koji tangentni vektor krive c, njegova paralelna translacija duž krive c (u bilo koju drugu tačku) pripada distribuciji D.*

Ekvivalentno, kriva c je skoro geodezijska linija ako postoje vektorska polja X_1 i X_2 paralelna duž krive c t.j. koja zadovoljavaju uslov [5]

$$\nabla\xi X_i = a^j X_j, \tag{2.2}$$

za neke realne diferencijabilne funkcije $a^j(t)$, $t \in I$, i realne diferencijabilne funkcije $b^i(t)$, $t \in I$, takve da je $\xi = b^1 X_1 + b^2 X_2$.

U radu [5] je data još jedna karakterizacija skoro geodezijskih linija, kao što sledi. Uvedene su sledeće oznake [5]

$$\underset{1}{\xi} := \nabla_\xi \xi, \quad \underset{2}{\xi} := \nabla_\xi \underset{1}{\xi}. \tag{2.3}$$

Ako su vektorska polja ξ i $\underset{1}{\xi}$ linearno nezavisna u svakoj tački krive c, onda kriva c nije geodezijska linija, pa možemo pisati $D = \mathrm{span}(\{\xi, \underset{1}{\xi}\})$ [5]. Kriva c je skoro geodezijska linija ako i samo ako $\xi_2 \in D$ [5].

2.1.2 Potrebni i dovoljni uslovi za skoro geodezijska preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom

Kao što smo već napomenuli N.S. Sinjukov je 1963. godine uveo definiciju skoro geodezijskog preslikavanja mnogostrukosti sa linearnom koneksijom bez torzije.

Definicija 2.1.2. [N.S. Sinjukov [71], 1963] *Difeomorfizam* $f : M \to \overline{M}$ *mnogostrukosti sa linearnom koneksijom je skoro geodezijsko preslikavanje ako svaku geodezijsku liniju mnogostrukosti* M *preslikava u skoro geodezijsku liniju mnogostrukosti* $\overline{M}$.

Očigledno je da je skoro geodezijsko preslikavanje uopštenje geodezijskog preslikavanja mnogostrukosti sa linearnom koneksijom. Postavlja se pitanje zašto N.S. Sinjukov nije definisao skoro geodezijsko preslikavanje kao difeomorfizam $f : M \to \overline{M}$ koji svaku skoro geodezijsku liniju mnogostrukosti M preslikava u skoro geodezijsku liniju mnogostrukosti $\overline{M}$? Može se pokazati da bi se takvo preslikavanje redukovalo na geodezijsko preslikavanje, jer je klasa skoro geodezijskih linija znatno šira od klase geodezijskih linija mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom [42].

Koristeći činjenicu da je preslikavanje $f : M \to \overline{M}$ difeomorfizam mnogostrukosti M i $\overline{M}$, možemo prihvatiti uobičajenu konvenciju da su simetrične linearne koneksije ∇ i $\overline{\nabla}$ definisane na istoj mnogostrukosti $M \equiv \overline{M}$. Tenzor deformacije koneksija ∇ i $\overline{\nabla}$ je tenzorsko polje tipa $(1,2)$ koje se označava sa P i određeno je sa

$$P(X,Y) = \overline{\nabla}(X,Y) - \nabla(X,Y), \quad X,Y \in \mathscr{X}(M). \tag{2.4}$$

Pored tenzora deformacije koneksije, V.E. Berezovski, J. Mikeš i A. Vanžurová su koristili i tenzorsko polje tipa $(1,3)$, koje su označili istim simbolom P, a koje je definisano sa

$$P(X,Y,Z) = \sum_{CS(X,Y,Z)} \nabla_Z P(X,Y) + P(P(X,Y),Z), \tag{2.5}$$

gde $X,Y,Z \in \mathscr{X}(M)$ i $\sum_{CS(\cdot,\cdot,\cdot)}$ označava

$$\sum_{CS(X,Y,Z)} B(X,Y,Z) = B(X,Y,Z) + B(Y,Z,X) + B(Z,X,Y), \tag{2.6}$$

za proizvoljno tenzorsko polje B tipa (r,s), pri čemu je $r+s \geq 3$.

Napomenimo da je N.S. Sinjukov koristio tenzorski račun za predstavljanje potrebnih i dovoljnih uslova za egzistenciju skoro geodezijskih preslikavanja (videti monografiju [72]). V.E. Berezovski, J. Mikeš i A. Vanžurová [5] su nedavno dali elegantnu formulaciju potrebnog i dovoljnog uslova za egzistenciju skoro geodezijskog preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom.

Propozicija 2.1.1 ([5], 2014). *Difeomorfizam $f: M \to \overline{M}$ mnogostrukosti M i $\overline{M}$ sa simetričnim linearnim koneksijama ∇ i $\overline{\nabla}$, respektivno, je skoro geodezijsko preslikavanje ako i samo ako važi sledeći uslov*

$$P(X_1,X_2,X_3) \wedge P(X_4,X_5) \wedge X_6 = 0,\ X_i \in \mathscr{X}(M),\ i = 1,\dots,6,$$

gde je $P(X_1,X_2,X_3)$ određeno sa (2.5)*, $P(X_4,X_5)$ je definisano sa* (2.4) *i $\wedge$ označava spoljašnji proizvod.*

Klasifikacija skoro geodezijskih preslikavanja N.S. Sinjukov [72] je odredio tri tipa skoro geodezijskih preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom, označivši klase tipova skoro geodezijskih preslikavanja sa π_1, π_2 i π_3. Klasifikaciju različitih tipova skoro geodezijskih preslikavanja je izvršio u odnosu na tenzor deformacije koneksije (detalji se mogu naći u monografijama [42] i [72]).

Doprinos V.E. Berezovskog i J. Mikeša klasifikaciji skoro geodezijskih preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom: V.E. Berezovski i J. Mikeš su u radu [2] pokazali da ukoliko je dimenzija afino povezane mnogostrukosti bez torzije veća od 5, ne postoje drugi tipovi skoro geodezijskih preslikavanja osim π_1, π_2 i π_3.

2.2 Slučaj mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

Posmatrajući skoro geodezijska preslikavanja mnogostrukosti sa linearnom koneksijom, pretpostavljajući da koneksija nije nužno simetrična M.S. Stanković je u radovima [74, 75, 76] dobio rezultate koji su analogni rezultatima N.S. Sinjukova koji se tiču skoro geodezijskih preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom linearna koneksijom, a koji se mogu naći u monografiji [72].

2.2.1 Skoro geodezijske linije mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

Neka je $(\overline{M},\underset{1}{\overline{\nabla}})$ mnogostrukost sa nesimetričnom linearnom koneksijom $\underset{1}{\overline{\nabla}}$ i neka je $l: x^h = x^h(t)$, $t \in I$, glatka kriva na mnogostrukosti $\overline{M}$. Ako sa $\underset{\theta}{||}$ označimo kovarijantni izvod vrste θ, $\theta = 1,2$ u odnosu na nesimetričnu linearnu koneksiju $\underset{1}{\overline{\nabla}}$, kriva l je skoro geodezijska linija vrste θ, $\theta \in \{1,2\}$, ako tangentni vektor $\lambda^h(t) = \mathrm{d}x^h(t)/dt \neq 0$, krive l zadovoljava jednačinu [75]

$$\overline{\lambda}^h_{(2)} = \overline{a}(t)\lambda^h + \overline{b}(t)\overline{\lambda}^h_{(1)},$$

gde je $\overline{\lambda}^h_{(1)} = \lambda^h_{\underset{\theta}{||}p}\lambda^p$, $\overline{\lambda}^h_{(2)} = \overline{\lambda}^h_{(1)\underset{\theta}{||}p}\lambda^p$, $\theta \in \{1,2\}$, dok su $\overline{a}(t)$ i $\overline{b}(t)$ funkcije realnog parametra t.

Definicija 2.2.1. [74] *Neka su M i $\overline{M}$ mnogostrukosti sa nesimetričnim linearnim koneksijama $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{1}{\overline{\nabla}}$, respektivno, i neka je* $\dim(M) = \dim(\overline{M}) = n > 2$. *Difeomorfizam $f : M \to \overline{M}$ je skoro geodezijsko preslikavanje vrste θ, $\theta \in \{1,2\}$, ako svaku geodezijsku liniju mnogostrukosti M preslikava u skoro geodezijsku liniju vrste θ, $\theta \in \{1,2\}$, mnogostrukosti $\overline{M}$.*

Mnogostrukosti M i $\overline{M}$ možemo posmatrati u zajedničkom sistemu koordinata u odnosu na preslikavanje $f : M \to \overline{M}$. U odgovarajućim tačkama možemo posmatrati komponenete tenzora deformacije koneksije

$$P^i_{jm} = \overline{L}^i_{jm} - L^i_{jm}.$$

Potreban i dovoljan uslov da bi preslikavanje $f : M \to \overline{M}$ bilo skoro geodezijsko je dat u Teoremi 2.2.1.

Teorema 2.2.1. [74] *Preslikavanje $f : M \to \overline{M}$ mnogostrukosti M i $\overline{M}$ sa nesimetričnim linearnim koneksijama je skoro geodezijsko preslikavanje vrste θ, $\theta \in \{1,2\}$ ako i samo ako komponente tenzora deformacije P^i_{jm} pri preslikavanju f identički zadovojavaju uslov*

$$(P^i_{\alpha\beta\underset{1}{|}\gamma} + P^i_{\delta\alpha}P^\delta_{\beta\gamma})\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = bP^i_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + a\lambda^h,$$

gde su a i b invarijante (skalarne funkcije).

2.2.2 Specijalna klasa skoro geodezijskih preslikavanja prvog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

V.E. Berezovski i J. Mikeš su u radu [3] definisali specijalan tip skoro geodezijskih preslikavanja prvog tipa mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom, zahtevajući da komponente tenzora deformacije koneksije P^i_{jm} zadovoljavaju uslov

$$P^i_{jm;n} + P^p_{jm}P^i_{pn} = a_{jm}\delta^i_n,$$

gde ; označava kovarijantni izvod u odnosu na simetričnu linearnu koneksiju ∇, a_{jm} je tenzor tipa $(0,2)$ i δ^i_n je Kronekerova delta. V.E. Berezovski i J. Mikeš su odgovarajuću klasu skoro geodezijskih preslikavanja označili π_1^* [3].

U radu [64] su uvedena specijalna skoro geodezijska preslikavanja prvog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom. Klasu takvih preslikavanja smo označili $\underset{1}{\pi_1^*}$ odnosno $\underset{2}{\pi_1^*}$ u zavisnosti od toga da li se radi o skoro geodezijskim preslikavanjima prve ili druge vrste. Komponente tenzora deformacije $P^i_{jm} = \overline{L}^i_{jm} - L^i_{jm}$, pri preslikavanju mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom koje pripada klasi $\underset{1}{\pi_1^*}$ ispunjavaju uslov

$$P^i_{jm\underset{1}{|}n} + P^p_{mn}P^i_{pj} = a_{jm}\delta^i_n, \tag{2.7}$$

gde je sa $\underset{1}{|}$ označen kovarijantni izvod prve vrste u odnosu na nesimetričnu linearnu koneksiju $\underset{1}{\nabla}$, a_{jm} je tenzor tipa $(0,2)$ i δ^i_n je Kronekerova delta.

Sa ciljem da dobijemo uslove integrabilnosti relacije (2.7), diferencirajmo pomenutu relaciju koristeći prvu vrstu kovarijantnog diferenciranja. Zatim izvršimo kontrakciju po indeksima i i k. Nakon primene prvog identiteta Ričijevog tipa i sređivanja dobijamo [64]

$$
\begin{aligned}
(N-1)a_{jm\underset{1}{|}n} =& P^p_{jm}\underset{1}{R}{}^q_{pqn} - P^q_{pm}\underset{1}{R}{}^p_{jqn} - P^q_{jp}\underset{1}{R}{}^p_{mqn} \\
&- T^p_{pn}a_{jm} + T^p_{qn}P^r_{mp}P^q_{rj} - a_{mn}P^q_{qj} \\
&+ a_{mq}P^q_{nj} + (P^r_{nq} - P^r_{qn})P^p_{rm}P^q_{pj} \\
&- (N-1)P^p_{mn}a_{pj} + P^p_{mn}P^r_{jq}P^q_{rp} - P^p_{mq}P^r_{jn}P^q_{rp},
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

gde je $\underset{1}{R}{}^i_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm}L^i_{pn} - L^p_{jn}L^i_{pm}$ prvi tenzor krivine i $T^i_{jm} = L^i_{jm} - L^i_{mj}$ je tenzor torzije koji odgovara komponentama nesimetrične linearne koneksije L^i_{jm}.

Jednačine (2.7) i (2.8) predstavljaju sistem diferencijalnih jednačina Košijevog tipa u odnosu na kovarijantni izvod prve vrste. Na osnovu prethodne diskusije može se formulisati sledeća

Teorema 2.2.2. [64] *Neka su M i $\overline{M}$ dve n-dimenzione mnogostrukosti snabdevene koeficijentima nesimetričnih linearnih koneksija L^i_{jm} i $\overline{L}^i_{jm}$, respektivno. Mnogostrukost M dopušta skoro geodezijsko preslikavanje tipa π^*_1 na mnogostrukost $\overline{M}$ ako i samo ako postoji rešenje P^i_{jm} i a_{jm} sistema diferencijalnih jednačina Košijevog tipa* (2.7) *i* (2.8).

Uslovi integrabilnosti sistema diferencijalnih jednačina Košijevog tipa (2.7) i (2.8) imaju sledeći oblik

$$
\begin{aligned}
&P^p_{jm}\underset{1}{R}{}^q_{pqk} - P^q_{pm}\underset{1}{R}{}^p_{jqk} - P^q_{jp}\underset{1}{R}{}^p_{mqk} - T^q_{qk}a_{jm} + T^p_{qk}P^r_{mp}P^q_{rj} = \\
&A_{jmk}\delta^i_n + A_{jmn}\delta^i_k + P^p_{mn}P^r_{jk}P^i_{rp} - P^p_{mk}P^r_{jn}P^i_{rp} + P^r_{[nk]}P^p_{rm}P^i_{pj} + a_{m[n}P^i_{k]j},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(N-1)&(a_{pm}\underset{1}{R}{}^p_{jnk} + a_{jp}\underset{1}{R}{}^p_{mnk} + T^p_{nk}A_{jmp} = a_{jm}\underset{1}{R}{}^q_{[kqn]} - P^r_{m[k}P^p_{rj}\underset{1}{R}{}^q_{pqn]} \\
&+ P^p_{jm}B^q_{pq[nk]} - a_{pm}\underset{1}{R}{}^p_{j[kn]} + P^r_{m[k}P^q_{rp}\underset{1}{R}{}^p_{jqn]} - P^q_{pm}B^p_{jq[nk]} - a_{jp}\underset{1}{R}{}^p_{m[kn]} \\
&+ P^r_{p[k}P^q_{rj}\underset{1}{R}{}^p_{mqn]} - P^q_{jp}B^p_{mq[nk]} - C^p_{p[nk]}a_{jm} + C^p_{q[nk]}P^r_{mp}P^q_{rj} - (T^p_{pn}A_{jmk})_{[nk]} \\
&+ a_{mp}T^p_{q[n}P^q_{k]j} - T^p_{q[n}P^s_{pk]}P^r_{sm}P^q_{rj} + T^p_{[kn]}P^r_{mp}a_{rj} - T^p_{q[n}P^r_{mp}P^s_{jk]}P^q_{sr} \\
&- A_{m[nk]}P^q_{qj} + a_{m[n}P^r_{jk]}P^q_{rq} + A_{mqk}P^q_{nj} + 2\big(a_{[nq}P^p_{k]m} - a_{q[n}P^p_{k]m}\big)P^q_{pj} \\
&- \big(P^s_{q[k}P^r_{sn]} - P^s_{[nk]}P^r_{sq}\big)P^p_{rm}P^q_{pj} + a_{rm}\big(P^r_{[nq}P^q_{k]j} - P^r_{q[n}P^q_{k]j}\big) \\
&- \big(P^r_{[nq}P^s_{mk]} - P^r_{q[n}P^s_{mk]}\big)P^p_{sr}P^q_{pj} + 2P^r_{[nk]}P^p_{rm}a_{pj} - \big(P^r_{[nq}P^s_{jk]} - P^r_{q[n}P^s_{jk]}\big)P^p_{rm}P^q_{sp} \\
&- (N-1)a_{m[n}a_{k]j} + (N-1)P^r_{[nk]}P^p_{rm}a_{pj} - (N-1)(P^p_{mn}A_{pjk})_{[nk]} \\
&+ a_{m[n}P^r_{jq}P^q_{rk]} + \big(P^s_{[nk]}P^p_{sm}P^r_{jq} - P^s_{q[k}P^p_{sm}P^r_{jn]}\big)P^q_{rp} + P^p_{m[n}a_{jq}P^q_{k]p} - P^p_{mq}a_{j[n}P^q_{k]p} \\
&- \big(P^p_{m[n}P^s_{qk]} - P^p_{mq}P^s_{[nk]}\big)P^r_{sj}P^q_{rp} + 2P^p_{m[n}P^p_{mk]}a_{rp} \\
&- P^p_{m[n}P^r_{jq}P^s_{pk]}P^q_{sr} + P^p_{mq}P^r_{j[n}P^s_{pk]}P^q_{sr},
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
A_{jmn} = a_{jm\underset{1}{|}n} = \frac{1}{N-1}\Big(&P^p_{jm}\underset{1}{R}{}^q_{pqn} - P^q_{pm}\underset{1}{R}{}^p_{jqn} - P^q_{jp}\underset{1}{R}{}^p_{mqn} - T^p_{pn}a_{jm} \\
&+ T^p_{qn}P^r_{mp}P^q_{rj} - a_{mn}P^q_{qj} + a_{mq}P^q_{nj} \\
&+ (P^r_{nq} - P^r_{qn})P^p_{rm}P^q_{pj} - (N-1)P^p_{mn}a_{pj} \\
&+ P^p_{mn}P^r_{jq}P^q_{rp} - P^p_{mq}P^r_{jn}P^q_{rp}\Big),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
B^i_{jmnk} &= \underset{1}{R}^i_{jmn\underset{1}{|}k} = \underset{1}{R}^i_{jmn,k} + L^i_{pk}\underset{1}{R}^p_{jmn} - L^p_{jk}\underset{1}{R}^i_{pmn} - L^p_{mk}\underset{1}{R}^i_{jpn} - L^p_{nk}\underset{1}{R}^i_{jmp},\\
C^i_{jmn} &= T^i_{jm\underset{1}{|}n} = T^i_{jm,n} + L^i_{pn}T^p_{jm} - L^p_{jn}T^i_{pm} - L^p_{mn}T^i_{jp}.
\end{aligned}$$

2.2.3 Relacije među tenzorima krivine mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom pri skoro geodezijskim preslikavanjima tipa π_1^*

U ovom pododeljku ćemo dokazati relacije koje zadovoljavaju tenzori krivine nesimetrične linearne koneksije pri skoro geodezijskim preslikavanjima tipa $\underset{1}{\pi}_1^*$. Kod mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom sve četiri vrste kovarijantnog diferenciranja mogu se izraziti pomoću prve vrste kovarijantnog diferenciranja. Shodno tome, dovoljno je posmatrati skoro geodezijska preslikavanja prve vrste. Na dalje ćemo takvu klasu preslikavanja označavati jednostavno π_1^* smatrajući da se radi o specijalnim skoro geodezijskim preslikavanjima prve vrste.

Kao što ćemo videti nije teško dokazati relacije koje zadovoljavaju tenzori krivine mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom pri skoro geodezijskim preslikavanjima tipa π_1^*.

Teorema 2.2.3. [64] *Neka su M i $\overline{M}$ dve n-dimenzione mnogostrukosti, snabdevene u svakoj karti komponentama nesimetričnih linearnih koneksija L^i_{jm} i $\overline{L}^i_{jm}$, respektivno. Ako je difeomorfizam $f : M \to \overline{M}$ skoro geodezijsko preslikavanje tipa π_1^*, definisano sa* (2.7)*, onda važe sledeće relacije među tenzorima krivine $\underset{\theta}{R}^i_{jmn}$ i $\underset{\theta}{\overline{R}}^i_{jmn}$ vrste θ ($\theta = 1,\dots,5$):*

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}^i_{jmn} =& \underset{1}{R}^i_{jmn} + a_{jm}\delta^i_n - P^p_{mn}P^i_{pj} - a_{jn}\delta^i_m + P^p_{nm}P^i_{pj} + P^p_{jm}P^i_{pn}\\
&- P^p_{jn}P^i_{pm} + T^p_{mn}P^i_{jp},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\underset{2}{\overline{R}}^i_{jmn} =& \underset{2}{R}^i_{jmn} + a_{mj}\delta^i_n - P^p_{jn}P^i_{pm} + T^i_{np}P^p_{mj} - T^p_{nm}P^i_{pj} - T^p_{nj}P^i_{mp}\\
&- a_{nj}\delta^i_m + P^p_{jm}P^i_{pn} - T^i_{mp}P^p_{nj} + T^p_{mn}P^i_{pj} + T^p_{mj}P^i_{np} + P^p_{mj}P^i_{np}\\
&- P^p_{nj}P^i_{mp} + T^p_{nm}P^i_{pj},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}^i_{jmn} =& \underset{3}{R}^i_{jmn} + a_{jm}\delta^i_n - P^p_{mn}P^i_{pj} + T^i_{np}P^p_{jm} - T^p_{nj}P^i_{pm} - T^p_{nm}P^i_{jp}\\
&- a_{nj}\delta^i_m + P^p_{jm}P^i_{pn} + P^p_{jm}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm} + P^p_{nm}T^i_{pj}\\
&+ P^p_{nm}P^i_{[pj]},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\underset{4}{\overline{R}}^i_{jmn} =& \underset{4}{R}^i_{jmn} + a_{jm}\delta^i_n - P^p_{mn}P^i_{pj} + T^i_{np}P^p_{jm} - T^p_{nj}P^i_{pm} - T^p_{nm}P^i_{jp}\\
&- a_{nj}\delta^i_m + P^p_{jm}P^i_{pn} + P^p_{jm}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm} + P^p_{mn}T^i_{pj}\\
&+ P^p_{mn}P^i_{[pj]},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
\underset{5}{\overline{R}}^i_{jmn} = \underset{5}{R}^i_{jmn} + \frac{1}{2}\Big(& a_{jm}\delta^i_n - P^p_{mn}P^i_{pj} - T^p_{nj}P^i_{pm} - T^p_{nm}P^i_{jp} - a_{jn}\delta^i_m\\
&+ P^p_{nm}P^i_{pj} - T^i_{mp}P^p_{jn} + a_{mj}\delta^i_n - P^p_{jn}P^i_{pm}\\
&+ T^i_{np}P^p_{mj} - a_{nj}\delta^i_m + 2P^p_{jm}P^i_{pn} + T^p_{mn}P^i_{pj}\\
&+ T^p_{mj}P^i_{np} - P^p_{jn}P^i_{mp} + P^p_{mj}P^i_{np} - P^p_{nj}P^i_{pm}\Big).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dokaz. Tenzori krivine prve vrste mnogostrukosti M i $\overline{M}$ zadovoljavaju relaciju

$$\underset{1}{\overline{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^{i}{}_{jmn} + P^{i}_{jm\underset{1}{|}n} - P^{i}_{jn\underset{1}{|}m} + P^{p}_{jm}P^{i}_{pn} - P^{p}_{jn}P^{i}_{pm} + T^{p}_{mn}P^{i}_{jp}. \tag{2.14}$$

Prema (2.7) relacija (2.14) postaje (2.9).

Tenzori krivine druge vrste mnogostrukosti M i $\overline{M}$ zadovoljavaju relaciju

$$\underset{2}{\overline{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} + P^{i}_{mj\underset{2}{|}n} - P^{i}_{nj\underset{2}{|}m} + P^{p}_{mj}P^{i}_{np} - P^{p}_{nj}P^{i}_{mp} + T^{p}_{nm}P^{i}_{pj}. \tag{2.15}$$

Koristeći (2.8) jednačina (2.15) dobija oblik

$$\begin{aligned}\underset{2}{\overline{R}}{}^{i}{}_{jmn} =& \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} + P^{i}_{mj\underset{1}{|}n} + T^{i}_{np}P^{p}_{mj} - T^{p}_{nm}P^{i}_{pj} - T^{p}_{nj}P^{i}_{mp} - P^{i}_{nj\underset{1}{|}m} - T^{i}_{mp}P^{p}_{nj}\\ &+ T^{p}_{mn}P^{i}_{pj} + T^{p}_{mj}P^{i}_{np} + P^{p}_{mj}P^{i}_{np} - P^{p}_{nj}P^{i}_{mp} + T^{p}_{nm}P^{i}_{pj}.\end{aligned}$$

Sada na isti način kao u prethodnom slučaju dokazujemo relaciju (2.10).

Tenzori krivine treće vrste mnogostrukosti M i $\overline{M}$ zadovoljavaju relaciju

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}{}^{i}{}_{jmn} =& \underset{3}{R}{}^{i}{}_{jmn} + P^{i}_{jm\underset{2}{|}n} - P^{i}_{nj\underset{1}{|}m} + P^{p}_{jm}P^{i}_{np} - P^{p}_{nj}P^{i}_{pm}\\ &+ P^{p}_{nm}T^{i}_{pj} + P^{p}_{nm}P^{i}_{[pj]}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Koristeći (2.7) i (2.8) jednačina (2.16) postaje

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}{}^{i}{}_{jmn} =& \underset{3}{R}{}^{i}{}_{jmn} + P^{i}_{jm\underset{1}{|}n} + T^{i}_{np}P^{p}_{jm} - T^{p}_{nj}P^{i}_{pm} - T^{p}_{nm}P^{i}_{jp}\\ &- P^{i}_{nj\underset{1}{|}m} + P^{p}_{jm}P^{i}_{np} - P^{p}_{nj}P^{i}_{pm} + P^{p}_{nm}T^{i}_{pj} + P^{p}_{nm}P^{i}_{[pj]}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Sada, iz (2.7) i (2.17) sledi (2.11).

Analogno možemo dokazati relaciju (2.12).

Tenzori krivine pete vrste mnogostrukosti M i $\overline{M}$ zadovoljavaju relaciju

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{5}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{2}\big(& P^{i}_{jm\underset{3}{|}n} - P^{i}_{jn\underset{4}{|}m} + P^{i}_{mj\underset{4}{|}n} - P^{i}_{nj\underset{3}{|}m} + P^{p}_{jm}P^{i}_{pn}\\ &- P^{p}_{jn}P^{i}_{mp} + P^{p}_{mj}P^{i}_{np} - P^{p}_{nj}P^{i}_{pm}\big).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Koristeći (2.7) jednačina (2.18) dobija oblik

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{5}{R}{}^{i}{}_{jmn} + \frac{1}{2}\Big(& P^{i}_{jm\underset{1}{|}n} - T^{p}_{nj}P^{i}_{pm} - T^{p}_{nm}P^{i}_{jp} - P^{i}_{jn\underset{1}{|}m} - T^{i}_{mp}P^{p}_{jn}\\ &+ P^{i}_{mj\underset{1}{|}n} + T^{i}_{np}P^{p}_{mj} - P^{i}_{nj\underset{1}{|}m} + T^{p}_{mn}P^{i}_{pj} + T^{p}_{mj}P^{i}_{np}\\ &+ P^{p}_{jm}P^{i}_{pn} - P^{p}_{jn}P^{i}_{mp} + P^{p}_{mj}P^{i}_{np} - P^{p}_{nj}P^{i}_{pm}\Big).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Sada, iz (2.7) i (2.19) dobijamo (2.13), čime se dokaz teoreme završava. □

U Lemi 2.2.1 ćemo dokazati relacije koje se odnose na tenzor a_{jm} koji figuriše u relaciji (2.7), a koje ćemo u nastavku koristiti.

Lema 2.2.1. [64] *Tenzor a_{jm} iz relacije* (2.7) *zadovoljava relacije*

$$\begin{aligned}\big(N-1\big)a_{jm} =&\overline{R}_{\underset{1}{}jm}-R_{\underset{1}{}jm}+\big(P^p_{mq}-P^p_{qm}\big)P^q_{pj}-P^p_{jm}P^q_{pq}\\&+P^p_{jq}P^q_{pm}-T^p_{mq}P^q_{jp},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(1-N\big)a_{mj} =& -\underset{2}{\overline{R}}_{jm}+\underset{2}{R}_{jm}-P^p_{jq}P^q_{pm}+T^q_{qp}P^p_{mj}-T^p_{qm}P^q_{pj}-T^p_{qj}P^q_{mp}\\&+P^p_{jm}P^q_{pq}-T^q_{mp}P^p_{qj}+T^p_{mq}P^q_{pj}+T^p_{mj}P^q_{qp}+P^p_{mj}P^q_{qp}\\&-P^p_{qj}P^q_{mp}+T^p_{qm}P^q_{pj},\\
\big(1-N^2\big)a_{mj} =& -\underset{3}{\overline{R}}_{jm}+\underset{3}{R}_{jm}+N\Big(-\underset{3}{\overline{R}}_{mj}+\underset{3}{R}_{mj}-P^p_{jq}P^q_{pm}+T^q_{qp}P^p_{mj}-T^p_{qm}P^q_{pj}\\&-T^p_{qj}P^q_{mp}+P^p_{mj}P^q_{pq}+P^p_{mj}P^q_{qp}-P^p_{qm}P^q_{pj}+P^p_{qj}T^q_{pm}+P^p_{qj}P^q_{[pm]}\Big)\\&-P^p_{mq}P^q_{pj}+T^q_{qp}P^p_{jm}-T^p_{qj}P^q_{pm}-T^p_{qm}P^q_{jp}+P^p_{jm}P^q_{pq}+P^p_{jm}P^q_{qp}\\&-P^p_{qj}P^q_{pm}+P^p_{qm}T^q_{pj}+P^p_{qm}P^q_{[pj]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(1-N^2\big)a_{mj} =& -\underset{4}{\overline{R}}_{jm}+\underset{4}{R}_{jm}+N\Big(-\underset{4}{\overline{R}}_{mj}+\underset{4}{R}_{mj}-P^p_{jq}P^q_{pm}+T^q_{qp}P^p_{mj}\\&-T^p_{qm}P^q_{pj}-T^p_{qj}P^q_{mp}+P^p_{mj}P^q_{pq}+P^p_{mj}P^q_{qp}-P^p_{qm}P^q_{pj}+P^p_{jq}T^q_{pm}\\&+P^p_{jq}P^q_{[pm]}\Big)-P^p_{mq}P^q_{pj}+T^q_{qp}P^p_{jm}-T^p_{qj}P^q_{pm}-T^p_{qm}P^q_{jp}\\&+P^p_{jm}P^q_{pq}+P^p_{jm}P^q_{qp}-P^p_{qj}P^q_{pm}+P^p_{mq}T^q_{pj}+P^p_{mq}P^q_{[pj]},\\
\frac{(1-N)}{2}(a_{jm}+a_{mj}) =& -\underset{5}{\overline{R}}_{jm}+\underset{5}{R}_{jm}+\frac{1}{2}\Big(-P^p_{mq}P^q_{pj}-T^p_{qj}P^q_{pm}-T^p_{qm}P^q_{jp}\\&+P^p_{qm}P^q_{pj}-T^q_{mp}P^p_{jq}-P^p_{jq}P^q_{pm}+T^q_{qp}P^p_{mj}+2P^p_{jm}P^q_{pq}\\&+T^p_{mq}P^q_{pj}+T^p_{mj}P^q_{qp}-P^p_{jq}P^q_{mp}+P^p_{mj}P^q_{qp}-P^p_{qj}P^q_{pm}\Big),\end{aligned}$$

gde je $\underset{\theta}{R}_{jm}=\underset{\theta}{R}^p_{jmp}$ *i* $\underset{\theta}{\overline{R}}_{jm}=\underset{\theta}{\overline{R}}^p_{jmp}$, $\theta=1,\dots,5.$

Dokaz. Kontrakcijom u (2.9) po indeksima i i n dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}_{jm} =&\underset{1}{R}_{jm}+Na_{jm}-P^p_{mq}P^q_{pj}-a_{jm}+P^p_{qm}P^q_{pj}\\&+P^p_{jm}P^q_{pq}-P^p_{jq}P^q_{pm}+T^p_{mq}P^q_{jp},\end{aligned}$$

čime je dokazana prva relacija ove leme. Druga relacija se dokazuje analogno, a da bismo dokazali treću relaciju izvršimo najpre kontrakciju u (2.11) po indeksima i i n

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}_{jm} =&\underset{3}{R}_{jm}+Na_{jm}-P^p_{mq}P^q_{pj}+T^q_{qp}P^p_{jm}-T^p_{qj}P^q_{pm}-T^p_{qm}P^q_{jp}-a_{mj}\\&+P^p_{jm}P^q_{pq}+P^p_{jm}P^q_{qp}-P^p_{qj}P^q_{pm}+P^p_{qm}T^q_{pj}+P^p_{qm}P^q_{[pj]}.\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}a_{mj} =& -\underset{3}{\overline{R}}_{jm}+\underset{3}{R}_{jm}+Na_{jm}-P^p_{mq}P^q_{pj}+T^q_{qp}P^p_{jm}-T^p_{qj}P^q_{pm}-T^p_{qm}P^q_{jp}\\&+P^p_{jm}P^q_{pq}+P^p_{jm}P^q_{qp}-P^p_{qj}P^q_{pm}+P^p_{qm}T^q_{pj}+P^p_{qm}P^q_{[pj]},\end{aligned}$$

što dalje implicira

$$
\begin{aligned}
a_{mj} = &-\underset{3}{\overline{R}}_{jm} + \underset{3}{R}_{jm} + N\Big(-\underset{3}{\overline{R}}_{mj} + \underset{3}{R}_{mj} + Na_{mj} - P^p_{jq}P^q_{pm} + T^q_{qp}P^p_{mj} \\
&- T^p_{qm}P^q_{pj} - T^p_{qj}P^q_{mp} + P^p_{mj}P^q_{pq} + P^p_{mj}P^q_{qp} - P^p_{qm}P^q_{pj} + P^p_{qj}T^q_{pm} + P^p_{qj}P^q_{[pm]}\Big) \\
&- P^p_{mq}P^q_{pj} + T^q_{qp}P^p_{jm} - T^p_{qj}P^q_{pm} - T^p_{qm}P^q_{jp} + P^p_{jm}P^q_{pq} + P^p_{jm}P^q_{qp} - P^p_{qj}P^q_{pm} \\
&+ P^p_{qm}T^q_{pj} + P^p_{qm}P^q_{[pj]},
\end{aligned}
$$

čime je dokazana treća relacija ove leme. Na isti način možemo dokazati preostale relacije. □

Invarijantni geometrijski objekti skoro geodezijskog preslikavanja tipa $\widetilde{\pi}_1^*$ mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

Neka je $f : M \to \overline{M}$ skoro geodezijsko preslikavanje mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom tipa π_1^*. Pretpostavimo da tenzor deformacije koneksije u odnosu na preslikavanje f ispunjava dodatni uslov

$$P^p_{mj}P^i_{np} = P^p_{nj}P^i_{mp}. \tag{2.20}$$

Podklasu klase skoro geodezijskih preslikavanja mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom tipa π_1^* određenu uslovom (2.20) u odnosu na tenzor deformacije koneksije označavaćemo $\widetilde{\pi}_1^*$.

Definicija 2.2.2. [64] *Skoro geodezijsko preslikavanje $f : M \to \overline{M}$ mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom je* ekvitorziono skoro geodezijsko preslikavanje *ako je u zajedničkom koordinatnom sistemu pri preslikavanju f ispunjen uslov*

$$T^i_{jm} = \overline{T}^i{}_{jm}, \tag{2.21}$$

gde su T^i_{jm} i $\overline{T}^i{}_{jm}$ tenzori torzija mnogostrukosti M i $\overline{M}$, respektivno.

Tenzor deformacije koneksije P^i_{jm} pri ekvitorzionom skoro geodezijskom preslikavanju je simetričan po donjim indeksima j i m, t.j. važi

$$P^i_{jm} = P^i_{mj}. \tag{2.22}$$

Nakon kontrakcije u (2.20) po indeksima i i n dobijamo

$$P^p_{mj}P^q_{qp} = P^p_{qj}P^q_{mp}. \tag{2.23}$$

Koristeći (2.22) i (2.23) jednačina (2.9) Teoreme 2.2.3 dobija oblik

$$\underset{1}{\overline{R}}{}^i{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} + a_{jm}\delta^i_n - a_{jn}\delta^i_m + T^p_{mn}P^i_{jp}, \tag{2.24}$$

dok prva jednačina Leme 2.2.1 postaje

$$\big(N-1\big)a_{jm} = \underset{1}{\overline{R}}_{jm} - \underset{1}{R}_{jm} - T^p_{mq}P^q_{jp}. \tag{2.25}$$

Sada, iz (2.24) i (2.25) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^i{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} &+ \frac{1}{N-1}\Big(\underset{1}{\overline{R}}_{jm} - \underset{1}{R}_{jm} - T^p_{mq}\overline{L}^q_{jp} + T^p_{mq}L^q_{jp}\Big)\delta^i_n \\
&- \frac{1}{N-1}\Big(\underset{1}{\overline{R}}_{jn} - \underset{1}{R}_{jn} - T^p_{nq}\overline{L}^q_{jp} + T^p_{nq}L^q_{jp}\Big)\delta^i_m \\
&+ T^p_{mn}\overline{L}^i_{jp} - T^p_{mn}L^i_{jp}.
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

Jednačina (2.26) se na osnovu (2.21) može zapisati u obliku

$$\underset{1}{W}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{1}{\overline{W}}{}^{i}{}_{jmn},$$

gde je

$$\begin{aligned}\underset{1}{W}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{1}{R}{}^{i}{}_{jmn} &- \frac{1}{N-1}\big(\underset{1}{R}{}_{jm} - T^{p}_{mq}L^{q}_{jp}\big)\delta^{i}_{n}\\ &+ \frac{1}{N-1}\big(\underset{1}{R}{}_{jn} - T^{p}_{nq}L^{q}_{jp}\big)\delta^{i}_{m} - T^{p}_{mn}L^{i}_{jp},\end{aligned} \tag{2.27}$$

i geometrijski objekat $\underset{1}{\overline{W}}{}^{i}{}_{jmn}$ je definisan na isti način.

Analogno, koristeći Teoremu 2.2.3 i Lemu 2.2.1 možemo konstruisati geometrijske objekte $\underset{\theta}{W}{}^{i}{}_{jmn}, \theta = 2, \dots, 5$, koji su definisani na sledeći način:

$$\begin{aligned}\underset{2}{W}{}^{i}{}_{jmn} =& \underset{2}{R}{}^{i}{}_{jmn} - \underset{2}{\omega}{}_{jm}\delta^{i}_{n} + \underset{2}{\omega}{}_{jn}\delta^{i}_{m} - T^{i}_{np}L^{p}_{mj} + T^{p}_{nm}L^{i}_{pj} + T^{p}_{nj}L^{i}_{mp}\\ &+ T^{i}_{mp}L^{p}_{mj} - T^{p}_{mn}L^{i}_{pj} - T^{p}_{mj}L^{i}_{np} - T^{p}_{nm}L^{i}_{pj},\end{aligned} \tag{2.28}$$

gde je

$$\begin{aligned}\underset{2}{\omega}{}_{jm} = \frac{1}{N-1}\Big(&\underset{2}{R}{}_{jm} - T^{q}_{pq}L^{p}_{mj} + T^{p}_{qm}L^{q}_{pj} + T^{p}_{qj}L^{q}_{mp} + T^{q}_{mp}L^{p}_{qj}\\ &- T^{p}_{mq}L^{q}_{pj} - T^{p}_{mj}L^{q}_{qp} - T^{p}_{qm}L^{q}_{pj}\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{3}{W}{}^{i}{}_{jmn} =& \underset{3}{R}{}^{i}{}_{jmn} - \underset{3}{\omega}{}_{jm}\delta^{i}_{n} + \underset{3}{\omega}{}_{nj}\delta^{i}_{m} - T^{i}_{np}L^{p}_{jm} + T^{p}_{nj}L^{i}_{pm}\\ &+ T^{p}_{nm}L^{i}_{jp} - T^{i}_{pj}L^{p}_{nm},\end{aligned} \tag{2.29}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\underset{3}{\omega}{}_{jm} = \frac{1}{N^2-1}\underset{3}{R}{}_{mj} &- \frac{N}{N^2-1}\Big(-\underset{3}{R}{}_{jm} - T^{q}_{qp}L^{p}_{jm} + T^{p}_{qj}L^{q}_{pm} + T^{p}_{qm}L^{q}_{jp} + T^{q}_{pj}L^{p}_{qm}\Big)\\ &+ \frac{1}{N^2-1}\Big(-T^{q}_{pq}L^{p}_{mj} + T^{p}_{qm}L^{q}_{pj} + T^{p}_{qj}L^{q}_{mp} - T^{q}_{pm}L^{p}_{qj}\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{4}{W}{}^{i}{}_{jmn} =& \underset{4}{R}{}^{i}{}_{jmn} - \underset{4}{\omega}{}_{jm}\delta^{i}_{n} + \underset{4}{\omega}{}_{nj}\delta^{i}_{m} - T^{i}_{np}L^{p}_{jm} - T^{p}_{nj}L^{i}_{pm}\\ &- T^{p}_{nm}L^{i}_{jp} + T^{q}_{pj}L^{p}_{mq},\end{aligned} \tag{2.30}$$

gde je

$$\begin{aligned}\underset{4}{\omega}{}_{jm} = \frac{1}{N^2-1}\underset{4}{R}{}_{mj} &- \frac{N}{N^2-1}\Big(-\underset{4}{R}{}_{jm} - T^{q}_{qp}L^{p}_{jm} + T^{p}_{qj}L^{q}_{pm} + T^{p}_{qm}L^{q}_{jp} + T^{q}_{pj}L^{p}_{qm}\Big)\\ &+ \frac{1}{N^2-1}\Big(-T^{q}_{pq}L^{p}_{mj} + T^{p}_{qm}L^{q}_{pj} + T^{p}_{qj}L^{q}_{mp} - T^{q}_{pm}L^{p}_{qj}\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{5}{W}{}^{i}{}_{jmn} = \underset{5}{R}{}^{i}{}_{jmn} &- \frac{1}{2}(\underset{5}{\omega}{}_{jm} + \underset{5}{\omega}{}_{mj})\delta^{i}_{n} + \frac{1}{2}(\underset{5}{\omega}{}_{jn} + \underset{5}{\omega}{}_{nj})\delta^{i}_{m}\\ &+ \frac{1}{2}\Big(T^{p}_{nj}L^{i}_{pm} + T^{p}_{nm}L^{i}_{jp} + T^{i}_{mp}L^{p}_{jn} - T^{i}_{np}L^{p}_{mj}\\ &- T^{p}_{mn}L^{i}_{pj} - T^{p}_{mj}L^{i}_{np}\Big),\end{aligned} \tag{2.31}$$

gde je

$$\begin{aligned}\underset{5}{\omega}_{jm} = \frac{-2}{N^2-3N+2}\underset{5}{R}_{jm} + \frac{1}{N-2}\Big(\underset{5}{R}_{mj} + \frac{1}{2}\big(T^p_{qm}L^q_{pj} + T^p_{qj}L^q_{mp} + T^q_{jp}L^p_{mq} \\ - T^q_{qp}L^p_{jm} - T^p_{jq}L^q_{pm} - T^p_{jm}L^q_{qp}\big)\Big) \\ + \frac{1}{N^2-3N+2}\big(-T^p_{qj}L^q_{pm} - T^p_{qm}L^q_{jp} - T^q_{mp}L^p_{jq} + T^q_{qp}L^p_{mj} \\ + T^p_{mq}L^q_{pj} + T^p_{mj}L^q_{qp}\Big).\end{aligned}$$

Konačno, može se formulisati sledeća

Teorema 2.2.4. [64] *Geometrijski objekti* $\underset{\theta}{W}{}^i{}_{jmn}, \theta = 1,\dots,5$, *mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom M, definisani sa* (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) *i* (2.31), *respektivno, su invarijantni pri ekvitorzionom skoro geodezijskom preslikavanju* $f : M \to \overline{M}$ *tipa* $\widetilde{\pi}^*_1$.

Poglavlje 3

Generalisani eliptički Kelerovi prostori

Klasične (eliptičke) Kelerove prostore je prvi razmatrao ruski matematičar P.A. Širokov pod imenom A-prostori, dok je nezavisno od njega te iste prostore posmatrao nemački matematičar E. Keler, videti [42]. Međutim, u literaturi se ustalio naziv Kelerovi prostori u čast nemačkog matematičara E. Kelera.

Rimanov prostor (M,g) realne dimenzije $2n \geq 4$ naziva se *Kelerov prostor* ako pored metrike g na mnogostrukosti M postoji tenzorsko polje F tipa $(1,1)$ koje ispunjava [42]

$$\begin{aligned} F^2 &= -I, \\ g(X,FX) &= 0, \\ \nabla F &= 0, \end{aligned}$$

gde je ∇ koneksija Levi-Čivita određena metrikom g, dok je X proizvoljno tangentno vektorsko polje na mnogostrukosti M. Holomorfno projektivna preslikavanja eliptičkih Kelerovih prostora su veoma izučavana poslednjih nekoliko decenija, videti na primer [36, 41, 42]. Holomorfno projektivna preslikavanja među generalisanim eliptičkim Kelerovim prostorima su izučavana u radovima. Osobina očuvanja torzije generalisanih Rimanovih prostora je potpuno nezavisna od vrste preslikavanja koju posmatramo tako da su u radovima [52, 79, 81, 82] posmatrana ekvitorziona holomorfno projektivna preslikavanja generalisanih eliptičkih Kelerovih prostora, dok su radovi [80, 91] posvećeni ekvitorzionim konformnim i koncirkularnim preslikavanjima generalisanih Rimanovih prostora.

3.1 HP preslikavanja generalisanih eliptičkih Kelerovih prostora

Generalisani eliptički Kelerovi prostori su definisani u radu [52], koristeći definiciju uobičajene Kelerove mnogostrukosti i definiciju generalisanog Rimanovog prostora.

Definicija 3.1.1 (Generalisani Kelerov prostor)**.** [52] *Generalisana Rimanova mnogostrukost M sa nesimetričnim osnovnim tenzorom g_{ij} naziva se* generalisani Kelerov prostor *ako postoji tenzor F_i^h tipa $(1,1)$ na mnogostrukosti M takav da važi*

$$F_p^h F_i^p = -\delta_i^h, \tag{3.1}$$

$$g_{\underline{pq}} F_i^p F_j^q = g_{\underline{ij}},\ g^{\underline{ij}} = g^{\underline{pq}} F_p^i F_q^j, \tag{3.2}$$

$$F^h_{i\underset{1}{|}j} = 0,\ F^h_{i\underset{2}{|}j} = 0, \tag{3.3}$$

gde $\underset{\theta}{|}$ označava kovarijantno diferenciranje vrste θ $(\theta \in \{1,2\})$ u odnosu na metrički tenzor g_{ij}.

Jednačine (3.1) i (3.2) očigledno impliciraju

$$F_{ij}+F_{ji}=0, \text{ gde je } F_{ij}=g_{\underline{ip}}F^p_j, \tag{3.4}$$

i

$$F^{ij}+F^{ji}=0, \text{ gde je } F^{ij}=g^{\underline{ip}}F^j_p. \tag{3.5}$$

Definicija 3.1.2 (Holomorfno planarna kriva)**.** [52, 72] *Kriva $l : x^h = x^h(t)$, $t \in I$ generalisanog Kelerovog prostora $\mathbb{GK}_n = (M,g,F)$ koja ispunjava uslov regularnosti $\lambda^h(t) = \frac{\mathrm{d}x^h(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0, t \in I$ naziva se* holomorfno (analitički) planarna kriva *ako zadovoljava sledeću običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda*

$$\frac{\mathrm{d}\lambda^h}{dt}+\Gamma^h_{pq}\lambda^p\lambda^q=\rho_1(t)\lambda^h+\rho_2(t)F^h_p\lambda^p,$$

gde su ρ_1 i ρ_2 neke funkcije parametra t.

Definicija 3.1.3 (Holomorfno projektivno preslikavanje)**.** [52, 72] *Difeomorfizam $f : \mathbb{GK}_n \to \overline{\mathbb{GK}}_n$ generalisanih Kelerovih prostora $\mathbb{GK}_n = (M,g,F)$ i $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ naziva se* holomorfno projektivno (HP) preslikavanje *ako svaku holomorfno planarnu krivu mnogostrukosti M preslikava u holomorfno planarnu krivu mnogostrukosti $\overline{M}$.*

Neka su M i $\overline{M}$ dve generalisane Kelerove mnogostrukosti realne dimenzije $2n \geq 4$, sa metričkim tenzorima g_{ij} i $\overline{g}_{ij}$, respektivno. Posmatrajmo mnogostrukosti M i $\overline{M}$ u zajedničkom koordinatnom sistemu pri preslikavanju $f : M \to \overline{M}$.

Teorema 3.1.1. [52, 72] *Generalisani Kelerov prostor $\mathbb{GK}_n$ dopušta HP preslikavanje na generalisani Kelerov prostor $\overline{\mathbb{GK}}_n$ ako i samo ako u zajedničkom pri preslikavanju sistemu koordinata generalisani Kristofelovi simboli prostora $\mathbb{GK}_n$ i $\overline{\mathbb{GK}}_n$ ispunjavaju*

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}=\Gamma^h_{ij}+\psi_{(i}\delta^h_{j)}-\psi_pF^p_{(i}F^h_{j)}+\xi^h_{ij}, \tag{3.6}$$

gde je ψ_i kovektor i ξ^h_{ij} je antisimetričan tenzor, određen sa

$$\xi^h_{ij}=\frac{1}{2}(\overline{\Gamma}^h_{[ij]}-\Gamma^h_{[ij]}). \tag{3.7}$$

Simetrizacijom jednačine (3.6) po indeksima i i j, a nakon toga kontrakcijom po indeksima h i j dobijamo

$$\left(\overline{\Gamma}^p_{\underline{ip}}-\Gamma^p_{\underline{ip}}\right)=2(n+1)\psi_i. \tag{3.8}$$

Primenjujući Vos-Vejl formulu u poslednjoj relaciji dobijamo

$$\psi_i=\frac{\partial\psi}{\partial x^i}, \tag{3.9}$$

gde je funkcija ψ definisana sa

$$\psi:=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\det\overline{\underline{g}}}{\det\underline{g}}\right). \tag{3.10}$$

U radu [62] smo koristili dve vrste kovarijantnog diferenciranja da izvedemo dva ekvivalentna oblika potrebnih i dovoljnih uslova za egzistenciju HP preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora.

Teorema 3.1.2. [62] *Generalisani Kelerov prostor* $\mathbb{GK}_n = (M, g, F)$ *dopušta HP preslikavanje na generalisani Kelerov prostor* $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ *ako i samo ako u zajedničkom pri preslikavanju sistemu koordinata simetričan deo* $\overline{g}_{\underline{ij}}$ *metričkog tenzora* $\overline{g}_{ij}$ *ispunjava*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \left(\psi_i \overline{g}_{\underline{jk}} - \psi_p F_i^p F_k^p \overline{g}_{\underline{pj}} + \overline{g}_{\underline{pj}} \xi_{ik}^p\right)_{(ij)}, \tag{3.11}$$

gde je ψ_i *kovektor određen sa* (3.9) *i* ξ_{ij}^h *je antisimetričan tenzor određen sa* (3.7).

Dokaz. Označimo sa $\underset{1}{||}$ kovarijantno diferenciranje prve vrste u odnosu na metrički tenzor $\overline{g}_{ij}$. Tada važi

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} - \overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{||}k} = \overline{g}_{\underline{pj}}\left(\overline{\Gamma}_{ik}^p - \Gamma_{ik}^p\right) + \overline{g}_{\underline{ip}}\left(\overline{\Gamma}_{jk}^p - \Gamma_{jk}^p\right).$$

Zamenjujući (3.6) u prethodnu jednačinu i uzimajući u obzir $\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{||}k} = 0$ i relaciju (3.4) dobijamo (3.11).

Da dokažemo obrnuti smer uvedimo pomoćni tenzor

$$Q_{ijk} = \overline{g}_{\underline{kp}}\left(\overline{\Gamma}_{ij}^p - \Gamma_{ij}^p - \psi_{(i}\delta_{j)}^p + \psi_q F_{(i}^q F_{j)}^p - \xi_{ij}^p\right).$$

Pošto je tenzor ξ_{ij}^h antisimetričan deo tenzora deformacije $P_{ij}^h = \overline{\Gamma}_{ij}^h - \Gamma_{ij}^h$, možemo zaključiti da je

$$Q_{ijk} = \overline{g}_{\underline{kp}}\left(\overline{\Gamma}_{\underline{ij}}^p - \Gamma_{\underline{ij}}^p - \psi_{(i}\delta_{j)}^p + \psi_q F_{(i}^q F_{j)}^p\right),$$

t.j. tenzor Q_{ijk} je simetričan u odnosu na indekse i i j.

Jednačinu (3.11) možemo zapisati u sledećem obliku

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{\underline{pj}}\left(\psi_{(i}\delta_{k)}^p - \psi_q F_i^q F_k^p + \xi_{ik}^p\right) + \overline{g}_{\underline{ip}}\left(\psi_{(j}\delta_{k)}^p - \psi_q F_j^q F_k^p + \xi_{jk}^p\right). \tag{3.12}$$

Sa druge strane imamo

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = \overline{g}_{\underline{pj}}\left(\overline{\Gamma}_{ik}^p - \Gamma_{ik}^p\right) + \overline{g}_{\underline{ip}}\left(\overline{\Gamma}_{jk}^p - \Gamma_{jk}^p\right). \tag{3.13}$$

Iz (3.12) i (3.13) zaključujemo da je $Q_{ikj} + Q_{jki} = 0$, t.j. tenzor Q_{ijk} je antisimetričan u odnosu na indekse i i k.

Sada, možemo zaključiti da tenzor Q_{ijk} zadovoljava

$$Q_{ijk} = Q_{jik} = -Q_{kij} = -Q_{ikj} = Q_{jki} = Q_{kji} = -Q_{ijk},$$

t.j.

$$Q_{ijk} = \overline{g}_{\underline{kp}}\left(\overline{\Gamma}_{ij}^p - \Gamma_{\underline{ij}}^p - \psi_{(i}\delta_{j)}^p + \psi_q F_{(i}^q F_{j)}^p - \xi_{ij}^p\right) = 0,$$

što dalje implicira (3.6), čime se završava dokaz. □

Analogno se dokazuje sledeća

Teorema 3.1.3. [62] *Generalisani Kelerov prostor* $\mathbb{GK}_n = (M, g, F)$ *dopušta HP preslikavanje na generalisani Kelerov prostor* $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ *ako i samo ako u zajedničkom pri preslikavanju sistemu koordinata simetričan deo* $\overline{g}_{\underline{ij}}$ *metričkog tenzora* $\overline{g}_{ij}$ *zadovoljava*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{2}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \left(\psi_i \overline{g}_{\underline{jk}} - \psi_p F_i^p F_k^p \overline{g}_{\underline{pj}} - \overline{g}_{\underline{pj}} \xi_{ik}^p\right)_{(ij)}, \tag{3.14}$$

gde je ψ_i *kovektor određen sa* (3.9) *i* ξ_{ij}^h *je antisimetričan tenzor određen sa* (3.7).

Primedba 3.1.1. [62] *Iz* (3.9) *se vidi da kovektor* ψ_i *zavisi od metrike* $\overline{\underline{g}}$, *pa možemo zaključiti da su sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina* (3.11) *i* (3.14) *nelinearni.*

3.2 Ekvitorziona HP preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora

HP preslikavanje generalisanih Kelerovih prostora koje očuvava tenzor torzije naziva se *ekvitorziono HP preslikavanje* [79].

Posledica 3.2.1. [62]*Generalisani Kelerov prostor* $\mathbb{GK}_n = (M, g, F)$ *dopušta ekvitorziono HP preslikavanje na generalisani Kelerov prostor* $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ *ako i samo ako u zajedničkom pri preslikavanju sistemu koordinata generalisani Kristofelovi simboli druge vrste prostora* $\mathbb{GK}_n$ *i* $\overline{\mathbb{GK}}_n$ *zadovoljavaju*

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_{(i}\delta^h_{j)} - \psi_p F^p_{(i} F^h_{j)}, \tag{3.15}$$

gde je ψ_i *kovektor određen sa* (3.9).

U slučaju HP preslikavanja Kelerovih prostora jednačine analogone jednačinama Levi-Čivita koje važe u teoriji geodezijskih preslikavanja su date u Teoremi 3.2.1.

Teorema 3.2.1. [7] *Generalisani Kelerov prostor* $\mathbb{K}_n = (M, g, F)$ *dopušta HP preslikavanje na generalisani Kelerov prostor* $\overline{\mathbb{K}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ *ako i samo ako metrički tenzor* $\overline{g}_{ij}$ *prostora* $\overline{\mathbb{K}}_n$ *ispunjava*

$$\overline{g}_{ij;k} = 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \left(\psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_p F^p_i \overline{g}_{pk} F^p_j\right)_{(ij)},$$

pri čemu ; *označava kovarijantni izvod u odnosu na metriku g, dok je kovektor* ψ_i *određen sa*

$$\psi_i = \frac{1}{2(n+1)}\left(\overline{\Gamma}^p_{ip} - \Gamma^p_{ip}\right), \tag{3.16}$$

gde je $n = \dim(M) = \dim(\overline{M})$.

Posledica 3.2.2 i Posledica 3.2.3 direktno slede iz Teoreme 3.1.2 i Teoreme 3.1.3.

Posledica 3.2.2. [62] *Generalisani Kelerov prostor* $\mathbb{GK}_n = (M, g, F)$ *dopušta HP preslikavanje na generalisani Kelerov prostor* $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ *ako i samo ako u zajedničkom pri preslikavanju sistemu koordinata simetričan deo* $\overline{g}_{\underline{ij}}$ *metričkog tenzora* $\overline{g}_{ij}$ *zadovoljava*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{1}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \left(\psi_i \overline{g}_{\underline{jk}} - \psi_p F^p_i F^p_k \overline{g}_{\underline{pj}}\right)_{(ij)}, \tag{3.17}$$

gde je ψ_i *kovektor određen sa* (3.9).

Posledica 3.2.3. [62] *Generalisani Kelerov prostor* $\mathbb{GK}_n = (M, g, F)$ *dopušta HP preslikavanje na generalisani Kelerov prostor* $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ *ako i samo ako u zajedničkom pri preslikavanju sistemu koordinata simetričan deo* $\overline{g}_{\underline{ij}}$ *metričkog tenzora* $\overline{g}_{ij}$ *zadovoljava*

$$\overline{g}_{\underline{ij}\underset{2}{|}k} = 2\psi_k \overline{g}_{\underline{ij}} + \left(\psi_i \overline{g}_{\underline{jk}} - \psi_p F^p_i F^p_k \overline{g}_{\underline{pj}}\right)_{(ij)}, \tag{3.18}$$

gde je ψ_i *kovektor određen sa* (3.9).

Primedba 3.2.1. [62] *Na isti način kao u* Primedbi 3.1.1 *možemo zaključiti da su sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina* (3.17) *i* (3.18) *nelinearni.*

Prateći ideju korišćenu u radu [7] transformisaćemo sisteme parcijalnih diferencijalnih jednačina (3.17) i (3.18) u linearne sisteme parcijalnih diferencijalnih jednačina. Prvo ćemo dokazati jedan pomoćni rezultat, koji je produženje rezultata koji važi u slučaju uobičajenih Rimanovih mnogostrukosti [41].

Lema 3.2.1. [41] *Neka su M i $\overline{M}$ dve Rimanove mnogostrukosti sa metričkim tenzorima g_{ij} i $\overline{g}_{ij}$, respektivno. Stavimo $\widetilde{g}_{ij} = e^{-2\psi}\overline{g}_{ij}$ i označimo sa ; kovarijantno diferenciranje u odnosu na metrički tenzor g_{ij}. Tada važi*

$$\left(\widetilde{g}^{ij}\right)_{;k} = -\widetilde{g}_{\underline{pq};k}\widetilde{g}^{pi}\widetilde{g}^{qj}, \tag{3.19}$$

gde je $\widetilde{g}^{ij}$ tenzor tipa $(2,0)$ dualan tenzoru $\widetilde{g}_{ij}$.

Lema 3.2.2. [62] *Neka su M i $\overline{M}$ dve generalisane Rimanove mnogostrukosti sa nesimetričnim osnovnim tenzorima g_{ij} i $\overline{g}_{ij}$, respektivno. Stavimo $\widetilde{g}_{ij} = e^{-2\psi}\overline{g}_{ij}$ i označimo sa $\underset{\theta}{|}$ kovarijantno diferenciranje vrste θ $(\theta \in \{1,2\})$ u odnosu na metrički tenzor g_{ij}. Tada važi*

$$\left(\widetilde{g}^{ij}\right)_{\underset{\theta}{|}k} = -\widetilde{g}_{\underline{pq}\underset{\theta}{|}k}\widetilde{g}^{pi}\widetilde{g}^{qj}, \ \theta = 1,2, \tag{3.20}$$

gde je $\widetilde{g}^{ij}$ tenzor tipa $(2,0)$ dualan tenzoru $\widetilde{g}_{ij}$.

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Leme 3.2.1. Kada primenimo kovarijantno diferenciranje vrste θ $(\theta \in \{1,2\})$ na relaciju

$$\widetilde{g}_{ip}\widetilde{g}^{pj} = \delta_i^j,$$

dobijamo

$$\widetilde{g}_{ip\underset{\theta}{|}k}\widetilde{g}^{pj} + \widetilde{g}_{ip}(\widetilde{g}^{pj})_{\underset{\theta}{|}k} = 0,$$

Kompozicijom u poslednjoj relaciji sa $\widetilde{g}^{iq}$, dobijamo

$$\begin{aligned} 0 =& \widetilde{g}_{qp\underset{\theta}{|}k}\widetilde{g}^{pj}\widetilde{g}^{qi} + \widetilde{g}_{qp}\widetilde{g}^{qi}\left(\widetilde{g}^{pj}\right)_{\underset{\theta}{|}k} \\ =& \widetilde{g}_{qp\underset{\theta}{|}k}\widetilde{g}^{pj}\widetilde{g}^{qi} + \delta_p^i\left(\widetilde{g}^{pj}\right)_{\underset{\theta}{|}k} = \widetilde{g}_{qp\underset{\theta}{|}k}\widetilde{g}^{pj}\widetilde{g}^{qi} + \left(\widetilde{g}^{ij}\right)_{\underset{\theta}{|}k}, \end{aligned}$$

čime se dokaz završava. □

V.V. Domašev i J. Mikeš [7] su potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju HP preslikavanja Kelerovih prostora dali u obliku koji je naveden u Teoremi 3.2.2.

Teorema 3.2.2. [7] *Kelerov prostor $\mathbb{K}_n = (M,g,F)$ dopušta netrivijalno HP preslikavanje na Kelerov prostor $\overline{\mathbb{K}}_n = (\overline{M},\overline{g},F)$ ako i samo ako u zajedničkom pri preslikavanju sistemu koordinata važi*

$$a_{ij;k} = (\lambda_i g_{\underline{jk}})_{(ij)} + \overline{\lambda}_{(i}F_{j)k}, \tag{3.21}$$

gde je

$$a_{ij} = \widetilde{g}^{pq}g_{pi}g_{qj}, \quad \widetilde{g}^{ij} = e^{2\psi}\overline{g}^{ij} \quad \lambda_i = -\psi_p\widetilde{g}^{pq}g_{qi} = \left(a_{pq}g^{pq}\right)_{\underset{1}{|}i},$$

$$\overline{\lambda}_i = \lambda_q F_i^q = -\psi_s F_p^s \widetilde{g}^{pq}g_{qi}, \quad F_{kj} = F_k^p g_{pj},$$

dok su kovektor ψ_i i funkcija ψ definisani sa (3.9) *i* (3.10)*, tim redom.*

Sada možemo dokazati glavni rezultat ovog odeljka.

Teorema 3.2.3. [62] *Neka su* $\mathbb{GK}_n = (M, g, F)$ *i* $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ *generalisani Kelerovi prostori i neka je* $f : M \to \overline{M}$ *ekvitorziono preslikavanje. Preslikavanje* f *je holomorfno projektivno ako i samo ako u zajedničkom pri preslikavanju sistemu koordinata važi*

$$a_{ij\underset{1}{|}k} = (\lambda_i g_{\underline{jk}})_{(ij)} + \overline{\lambda}_{(i}F_{j)k}, \tag{3.22}$$

gde smo označili

$$a_{ij} = \widetilde{g}^{pq} g_{\underline{pi}} g_{\underline{qj}}, \quad \widetilde{g}^{ij} = e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{ij}} \quad \lambda_i = -\psi_p \widetilde{g}^{pq} g_{\underline{qi}} = \left(a_{pq} g^{\underline{pq}}\right)_{\underset{1}{|}i},$$

$$\overline{\lambda}_i = \lambda_q F^q_i = -\psi_s F^s_p \widetilde{g}^{pq} g_{\underline{qi}}, \quad F_{kj} = F^p_k g_{\underline{pj}},$$

dok su kovektor ψ_i *i funkcija* ψ *definisani sa* (3.9) *i* (3.10)*, tim redom.*

Dokaz. Na osnovu Posledice 3.2.2 generalisani Kelerov prostor $\mathbb{GK}_n = (M, g, F)$ dopušta ekvitorziono HP preslikavanje na generalisani Kelerov prostor $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ ako i samo ako je ispunjen uslov (3.17).

Sledeći ideju V.V. Domaševa i J. Mikeša [7] stavimo

$$\widetilde{g}_{ij} = e^{-2\psi} \overline{g}_{\underline{ij}}, \tag{3.23}$$

gde je funkcija funkcija ψ data sa (3.10).

Tenzor $\widetilde{g}_{ij}$ očigledno zadovoljava

$$\widetilde{g}_{ij\underset{1}{|}k} = 2\psi_k \widetilde{g}_{ij} + \left(\psi_i \widetilde{g}_{kj} - \psi_q F^q_{(i} F^p_{k)} \widetilde{g}_{pj}\right)_{(ij)}. \tag{3.24}$$

Sada, iz Leme 3.2.2 i prethodne jednačine sledi

$$\left(\widetilde{g}^{ij}\right)_{\underset{1}{|}k} = -\left(\psi_p \widetilde{g}^{pi} \delta^j_k - \psi_p F^p_q \widetilde{g}^{qi} F^j_k\right)_{(ij)}.$$

Nakon spuštanja indekasa i i j u prethodnoj jednačini i korišćenjem činjenice da je metrički tenzor $g_{\underline{ij}}$ kovarijantno konstantan u odnosu na prvu vrstu kovarijantnog diferenciranja, dobijamo da je

$$\left(\widetilde{g}^{pq} g_{\underline{pi}} g_{\underline{qj}}\right)_{\underset{1}{|}k} = -\left(\psi_p \widetilde{g}^{pq} g_{\underline{qi}} g_{\underline{kj}} - \psi_p F^p_q \widetilde{g}^{qs} g_{\underline{si}} F^t k g_{\underline{tj}}\right)_{(ij)}, \tag{3.25}$$

što se može zapisati u obliku

$$a_{ij\underset{1}{|}k} = \left(\lambda_i g_{\underline{jk}} + \overline{\lambda}_i F_{jk}\right)_{(ij)}, \tag{3.26}$$

gde smo iskoristili $F_{kj} = F^p_k g_{\underline{pj}} \overset{(3.4)}{=} -F_{jk}$ i označili

$$a_{ij} = \widetilde{g}^{pq} g_{\underline{pi}} g_{\underline{qj}},\ \lambda_i = -\psi_p \widetilde{g}^{pq} g_{\underline{qi}},\ \overline{\lambda}_i = -\psi_s F^s_p \widetilde{g}^{pq} g_{\underline{qi}}. \tag{3.27}$$

Iz teorije F-planarnih preslikavanja sledi da se kompleksna struktura očuvava pri HP preslikavanju generalisanih Kelerovih prostora $\mathbb{GK}_n = (M, g, F)$ i $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$, videti [42]. U slučaju prostora $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, g, \overline{F} = F)$ jednačina (3.5) glasi

$$\overline{g}^{\underline{ip}} F^j_p + \overline{g}^{\underline{jq}} F^i_q = 0,$$

što dalje implicira

$$\widetilde{g}^{ip}F^j_p + \widetilde{g}^{jq}F^i_q = 0. \tag{3.28}$$

Sada možemo izraziti vektor $\overline{\lambda}_i$ sa

$$\overline{\lambda}_i \overset{(3.27)}{=} -\psi_s F^s_p \widetilde{g}^{pq} g_{\underline{qi}} \overset{(3.28)}{=} \psi_s F^q_p \widetilde{g}^{sp} g_{\underline{qi}} \overset{(3.2)}{=} -\psi_s \widetilde{g}^{sp} g_{\underline{pq}} F^q_i \overset{(3.27)}{=} \lambda_q F^q_i. \tag{3.29}$$

Kontrakcijom u (3.26) sa $g^{\underline{ij}}$ i uzimajući u obzir da je tenzor $g^{\underline{ij}}$ kovarijantno konstantan u odnosu na prvu vrstu kovarijantnog diferenciranja dobijamo

$$\begin{aligned}\left(a_{pq}g^{\underline{pq}}\right)_{\underset{1}{|}k} &= \lambda_p g_{\underline{qk}} g^{\underline{pq}} + \lambda_q g_{\underline{pk}} g^{\underline{pq}} + \overline{\lambda}_p F_{qk} g^{\underline{pq}} + \overline{\lambda}_q F_{pk} g^{\underline{pq}} \\ &\overset{(3.29)}{=} \lambda_p \delta^p_k + \lambda_q \delta^q_k + \lambda_s F^s_p g^{\underline{pq}} F^t_q g_{\underline{tk}} + \lambda_s F^s_\beta g^{\underline{qp}} F^t_p g_{\underline{tk}} \\ &\overset{(3.5)}{=} 2\lambda_k - \lambda_s F^q_p g^{\underline{ps}} F^t_\beta g_{\underline{tk}} - \lambda_s F^p_q g^{\underline{qs}} F^t_\alpha g_{\underline{tk}} \overset{(3.1)}{=} 4\lambda_k,\end{aligned} \tag{3.30}$$

što dokazuje da je λ_k gradijentni vektor.

Tenzor $a_{ij} = \widetilde{g}^{pq} g_{\underline{pi}} g_{\underline{qj}}$ zadovoljava

$$\begin{aligned}a_{pq}F^p_i F^q_j &= e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{st}} g_{\underline{sp}} g_{\underline{tq}} F^p_i F^q_j \overset{(3.4)}{=} e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{st}} g_{\underline{ip}} g_{\underline{jq}} F^p_s F^q_t \\ &= e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{st}} g_{\underline{ip}} g_{\underline{jq}} \overline{F}^p_s \overline{F}^q_t \overset{(3.2)}{=} e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{pq}} g_{\underline{pi}} g_{\underline{qj}} = a_{ij},\end{aligned}$$

čime se dokaz direktnog dela ove teoreme završava.

Da bismo dokazali suprotan smer označimo $\widetilde{g}^{pq} = a_{pq} g^{\underline{pi}} g^{\underline{qj}}$, gde je a_{ij} simetričan tenzor. Prema tome tenzor $\widetilde{g}^{ij}$ je takođe simetričan. Tenzor $\widetilde{g}^{ij}$ očigledno zadovoljava (3.25). Nakon podizanja indekasa i korišćenja Leme 3.2.2, iz jednačine (3.25) dobijamo (3.24).

Kristofelovi simboli $\widetilde{\Gamma}^h_{ij}$ metrike $\widetilde{g}$ i generalisani Kristofelovi simboli Γ^h_{ij} metrike g zadovoljavaju

$$\widetilde{\Gamma}^p_{pj} = \frac{1}{2}\partial_j \ln(\det \widetilde{g}), \qquad \Gamma^q_{qj} = \frac{1}{2}\partial_j \ln(\det \underline{g}),$$

i

$$\widetilde{\Gamma}^p_{pj} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{pq}\partial_j \widetilde{g}_{pq} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{pq}\left(\widetilde{g}_{pq\underset{1}{|}j} + \Gamma^s_{pj}\widetilde{g}_{sq} + \Gamma^s_{qj}\widetilde{g}_{sp}\right) \overset{(3.24)}{=} 2\psi_j + \Gamma^p_{pj},$$

što dalje implicira

$$\psi_j = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\Gamma}^p_{pj} - \Gamma^p_{pj}\right) = \frac{1}{4}\partial_j \ln\left(\frac{\det \widetilde{g}}{\det \underline{g}}\right).$$

Ovo znači da je vektor ψ_j gradijent, t.j.

$$\psi_j = \frac{\partial \psi}{\partial x^j},$$

za funkciju ψ datu sa

$$\psi := \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\det \widetilde{g}}{\det \underline{g}}\right).$$

Sada možemo lako proveriti da relacija (3.17) važi, što dokazuje da je preslikavanje f holomorfno projektivno. □

Analogno se može dokazati sledeća

Teorema 3.2.4. [62] *Neka su* $\mathbb{GK}_n = (M, g, F)$ *i* $\overline{\mathbb{GK}}_n = (\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ *generalisani Kelerovi prostori i neka je* $f : M \to \overline{M}$ *ekvitorziono preslikavanje. Preslikavanje* f *je holomorfno projektivno ako i samo ako važi*

$$a_{ij\underset{2}{|}k} = (\lambda_i g_{\underline{jk}})_{(ij)} + \overline{\lambda}_{(i}F_{j)k}, \tag{3.31}$$

pri čemu je

$$\widetilde{g}^{ij} = e^{2\psi}\overline{g}^{\underline{ij}}, \quad a_{ij} = \widetilde{g}^{pq}g_{\underline{pi}}g_{\underline{qj}}, \quad \lambda_i = -\psi_p\widetilde{g}^{pq}g_{\underline{qi}} = \left(a_{pq}g^{\underline{pq}}\right)_{\underset{2}{|}i},$$

$$\overline{\lambda}_i = \lambda_q F^q_i = -\psi_s F^s_p \widetilde{g}^{pq}g_{\underline{qi}}, \quad F_{kj} = F^p_k g_{\underline{pj}},$$

Primedba 3.2.2. [62] *Sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina* (3.22) *i* (3.31) *su linearni u odnosu na nepoznati tenzor* a_{ij} *tipa* $(2,0)$, *sa koeficijentima koji zavise od metričkog tenzora* $g_{\underline{ij}}$.

3.3 Generalisani eliptički Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu

Primetimo da su linearna koneksija $\underset{1}{\nabla}$, a samim tim i koneksija $\underset{2}{\nabla}$ generalisanovog Kelerovog prostora određene generalisanom Rimanovom metrikom. Uslovi $\underset{1}{\nabla}F = 0$ i $\underset{2}{\nabla}F = 0$ su dosta restriktivni u odnosu na kompleksnu strukturu F generalisanog Kelerovog prostora uvedenog Definicijom 3.1.1. U dokazu Teoreme 18.4 u [77] je primećeno da iz uslova $\underset{1}{\nabla}F = 0$ i $\underset{2}{\nabla}F = 0$ sledi $\nabla F = 0$, pri čemu ∇ označava simetričan deo nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{2}{\nabla}$. S tim u vezi važi i rezultat naveden u Lemi 3.3.1.

Lema 3.3.1. *Za tenzorsko polje* F *tipa* $(1,1)$ *bilo koja dva od sledeća tri uslova impliciraju treći:*

(i) $\underset{1}{\nabla}F = 0$,

(ii) $\underset{2}{\nabla}F = 0$,

(iii) $\nabla F = 0$.

Dokaz. Dokaz sledi iz činjenice da se nesimetrične linearne koneksije $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{2}{\nabla}$ mogu se predstaviti pomoću svog simetričnog dela ∇ i tenzora torzije $\underset{1}{T}$

$$\underset{1}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\underset{1}{T}(X,Y), \tag{3.32}$$

i

$$\underset{2}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\underset{1}{T}(X,Y), \tag{3.33}$$

tim redom. □

Na osnovu Leme 3.3.1 definisaćemo opštije generalisane Kelerove prostore od onih koji su definisani u radu [52].

Definicija 3.3.1. *Generalisani Rimanov prostor* (M,g) *naziva se* generalisani Kelerov prostor u Ajzenhartovom smislu *ako na mnogostrukosti* M *postoji tenzorsko polje* F *tipa* $(1,1)$ *koje zadovoljava*

$$F^2 = -I, \tag{3.34}$$

$$\underline{g}(FX,FY) = \underline{g}(X,Y), \tag{3.35}$$

$$\nabla F = 0, \tag{3.36}$$

gde je ∇ koneksija Levi-Čivita koja odgovara simetričnom delu $\underline{g}$ metrike g i I je identičan operator.

Teorema 3.3.1. *Tenzori krivine $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,4$ i tenzor torzije $\underset{1}{T}$ generalisanog Kelerovog prostora u Ajzenhartovom smislu (M,g,F) zadovoljavaju relacije*

$$\begin{aligned}\underset{1}{R}(X,Y)FZ =& F(\underset{1}{R}(X,Y)Z) + \frac{1}{2}\underset{1}{T}(FZ,\underset{1}{T}(Y,X))\\ &+ \frac{1}{2}F(\underset{1}{T}(Z,\underset{1}{T}(Y,X))) + \underset{1}{S}(X,Y,Z),\end{aligned} \tag{3.37}$$

gde je $\underset{1}{S}$ tenzorsko polje tipa $(1,3)$ određeno u komponentama sa

$$\underset{1}{S}{}^h{}_{ijk} = \Big(\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h{}_{pj\underset{1}{|}k}F^p_i + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^h_{pj}(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ik}F^p_q) - \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p{}_{ij\underset{1}{|}k}F^h_p - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^p_{ij}(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_p - \underset{1}{T}{}^q_{pk}F^h_q)\Big)_{[jk]};$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{R}(X,Y)FZ =& F(\underset{2}{R}(X,Y)Z) + \frac{1}{2}\underset{1}{T}(FZ,\underset{1}{T}(Y,X))\\ &+ \frac{1}{2}F(\underset{1}{T}(Z,\underset{1}{T}(Y,X))) + \underset{2}{S}(X,Y,Z),\end{aligned} \tag{3.38}$$

pri čemu je $\underset{2}{S}$ tenzorsko polje tipa $(1,3)$ određeno u komponentama sa

$$\underset{2}{S}{}^h{}_{ijk} = \Big(\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h{}_{jp\underset{1}{|}k}F^p_i + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^h_{jp}(\underset{1}{T}{}^p_{kq}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ki}F^p_q) - \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p{}_{ji\underset{1}{|}k}F^h_p - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^p_{ji}(\underset{1}{T}{}^h_{kq}F^q_p - \underset{1}{T}{}^q_{kp}F^h_q)\Big)_{[jk]}$$

$$\underset{3}{R}(X,Y)FZ = F(\underset{3}{R}(X,Y)Z) + \underset{3}{S}(X,Y,Z), \tag{3.39}$$

gde $\underset{3}{S}$ označava tenzorsko polje tipa $(1,3)$ dato u komponentama sa

$$\begin{aligned}\underset{3}{S}{}^h{}_{ijk} =& \Big(\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h{}_{pj\underset{2}{|}k}F^p_i + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^h_{pj}(\underset{1}{T}{}^p_{kq}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ki}F^p_q)\\ &- \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p{}_{ij\underset{2}{|}k}F^h_p - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^p_{ij}(\underset{1}{T}{}^h_{kq}F^q_p - \underset{1}{T}{}^q_{kp}F^p_q)\\ &- \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h{}_{kp\underset{1}{|}j}F^p_i - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^h_{kp}(\underset{1}{T}{}^p_{qj}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ij}F^p_q)\\ &+ \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p{}_{ki\underset{1}{|}j}F^h_p + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^p_{ki}(\underset{1}{T}{}^h_{qj}F^q_p - \underset{1}{T}{}^q_{pj}F^h_q)\Big)_{[jk]},\end{aligned}$$

$$\underset{4}{R}(X,Y)FZ + F(\underset{3}{R}(Y,X)Z) = \underset{4}{S}(X,Y,Z), \tag{3.40}$$

gde je $\underset{4}{S}$ tenzorsko polje tipa $(1,3)$ određeno sa

$$\begin{aligned}\underset{4}{S}{}^h{}_{ijk} =& \Big(\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h{}_{pj\underset{4}{|}k}F^p_i + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^h_{pj}(\underset{1}{T}{}^p_{kq}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ik}F^p_q)\\ &- \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p{}_{ji\underset{4}{|}k}F^h_p - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^p_{ji}(\underset{1}{T}{}^h_{kq}F^q_p - \underset{1}{T}{}^q_{pk}F^h_q)\\ &+ \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h{}_{kp\underset{3}{|}j}F^p_i + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^h_{kp}(\underset{1}{T}{}^p_{qj}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ji}F^p_q)\\ &- \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p{}_{ik\underset{3}{|}j}F^h_p - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^p_{ik}(\underset{1}{T}{}^h_{qj}F^q_p - \underset{1}{T}{}^q_{jp}F^h_q)\Big)_{[jk]}.\end{aligned}$$

Dokaz. Koristeći (3.32) i (3.36) i prvi identitet Ričijevog tipa (jednačina (9) u [43])

$$-F(\underset{1}{R}(X,Y)Z)+\underset{1}{R}(X,Y)FZ-\underset{1}{\nabla}_{\underset{1}{T}(Y,X)}FZ=0, \tag{3.41}$$

dobijamo relaciju (3.37).

Zamenom relacija (3.33) i (3.36) u drugi identitet Ričijevog tipa (jednačina (13) u [43])

$$\underset{2}{\nabla}_Z\underset{2}{\nabla}_Y FX-\underset{2}{\nabla}_Y\underset{2}{\nabla}_Z FX=\underset{2}{R}(Z,Y)FX-F(\underset{2}{R}(Z,Y)X)+\underset{2}{\nabla}_{\underset{1}{T}(Y,Z)}FX,$$

dobijamo dokaz relacije (3.38).

Primenimo sada odgovarajući identitet Ričijevog tipa (jednačina (58′) u [43])

$$\underset{2}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_Y FX-\underset{1}{\nabla}_Y\underset{2}{\nabla}_Z FX=\underset{3}{R}(Z,Y)FX-F(\underset{3}{R}(Z,Y)X),$$

koji zajedno sa relacijama (3.32), (3.33) i (3.36) implicira (3.39).

Da dokažemo (3.40) primetimo prvo da je

$$F^h_{i\underset{3}{|}j}=\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h_{pj}F^p_i-\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p_{ji}F^h_p, \tag{3.42}$$

i

$$F^h_{i\underset{4}{|}j}=\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h_{jp}F^p_i-\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p_{ij}F^h_p, \tag{3.43}$$

gde smo iskoristili (3.36).

Nakon primene četvrte i treće vrste kovarijantnog diferenciranja u relacijama (3.42) i (3.43), tim redom, dobijamo

$$\begin{aligned}F^h_{i\underset{3}{|}j\underset{4}{|}k}=&\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h{}_{pj\underset{4}{|}k}F^p_i+\frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^h_{pj}(\underset{1}{T}{}^p_{kq}F^q_i-\underset{1}{T}{}^q_{ik}F^p_q)\\&-\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p{}_{ji\underset{4}{|}k}F^h_p-\frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^p_{ji}(\underset{1}{T}{}^h_{kq}F^q_p-\underset{1}{T}{}^q_{pk}F^h_q)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}F^h_{i\underset{4}{|}k\underset{3}{|}j}=&\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h{}_{kp\underset{3}{|}j}F^p_i+\frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^h_{kp}(\underset{1}{T}{}^p_{qj}F^q_i-\underset{1}{T}{}^q_{ji}F^p_q)\\&-\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p{}_{ik\underset{3}{|}j}F^h_p-\frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^p_{ik}(\underset{1}{T}{}^h_{qj}F^q_p-\underset{1}{T}{}^q_{jp}F^h_q).\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir prethodne dve relacije i odogovarajući identitet Ričijevog tipa (jednačina (56′) u [46])

$$\underset{4}{\nabla}_Z\underset{3}{\nabla}_Y FX-\underset{3}{\nabla}_Y\underset{4}{\nabla}_Z FX=\underset{4}{R}(Z,Y)FX+F(\underset{3}{R}(Y,Z)X),$$

dobijamo (3.38), čime kompletiramo dokaz. □

U Posledici 3.3.1 su navedene relacije koje ispunjavaju tenzori krivine $\underset{\theta}{R}$, $\theta=1,\dots,4$ tipa $(0,4)$ i tenzor torzije $\underset{1}{T}$ tipa $(0,3)$, pri čemu su tenzorska polja $\underset{\theta}{S}$, $\theta=2,\dots,4$ tipa $(0,4)$ koja odgovaraju tenzorskim poljima $\underset{\theta}{S}$, $\theta=2,\dots,4$, iz Teoreme 3.3.1, određena sa

$$\underset{\theta}{S}(X,Y,Z,W):=\underline{g}(\underset{\theta}{S}(X,Y)Z,W),\ \ \theta=2,\dots,4. \tag{3.44}$$

Posledica 3.3.1. *Tenzori krivine $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,4$ tipa $(0,4)$, tenzori torzije tipa $(1,2)$ i $(0,3)$, i tenzorska polja $\underset{\theta}{S}$, $\theta = 1,\dots,3$ tipa $(0,4)$ generalisanog Kelerovog prostora u Ajzenhartovom smislu (M,g,F) zadovoljavaju*

$$\begin{aligned}
\underset{1}{R}(X,Y,FZ,W)+\underset{1}{R}(X,Y,Z,FW) =& \frac{1}{2}\big(\underset{1}{T}(W,FZ,\underset{1}{T}(Y,X)) - \underset{1}{T}(FW,Z,\underset{1}{T}(Y,X))\big)\\
&+\underset{1}{S}(W,Z,Y,X),\\
\underset{2}{R}(X,Y,FZ,W)+\underset{2}{R}(X,Y,Z,FW) =& -\frac{1}{2}\big(\underset{1}{T}(W,\underset{1}{T}(Y,X),FZ) + \underset{1}{T}(FW,Z,\underset{1}{T}(Y,X))\big)\\
&+\underset{2}{S}(W,Z,Y,X),\\
\underset{3}{R}(X,Y,FZ,W)+\underset{3}{R}(X,Y,Z,FW) =& \underset{3}{S}(W,Z,Y,X),\\
\underset{4}{R}(X,Y,FZ,W)-\underset{3}{R}(Y,X,Z,FW) =& \underset{3}{S}(W,Z,Y,X).
\end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz direktno sledi iz Teoreme 3.3.1 koristeći osobine tenzora krivine i (3.34) i (3.35). □

3.4 HP preslikavanja generalisanih eliptičkih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu

U slučaju generalisanih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu takođe imamo invarijantan geometrijski objekat koji je analogan Tomasovom projektivnom parametru teorije geodezijskih preslikavanja.

Teorema 3.4.1. [79] *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu dimenzije $n>2$ i neka je $f: M\to\overline{M}$ HP preslikavanje, tada je geometrijski objekat definisan sa*

$$\Gamma^h_{\underline{ij}} - \frac{1}{n+2}\big(\Gamma^p_{pi}\delta^h_j + \Gamma^p_{pj}\delta^h_i + \Gamma^q_{qp}F^p_{(i}F^h_{j)}\big), \tag{3.45}$$

invarijantan pri preslikavanju f.

3.4.1 Ekvitorziona HP preslikavanja generalisanih eliptičkih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu

U ovom pododeljku ćemo posmatrati ekvitorziona HP preslikavanja među generalisanim Kelerovim prostorima u Ajzenhartovom smislu i potražiti geometrijske objekte koji su invarijantni pri takvim preslikavanjima.

Teorema 3.4.2. *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu i neka je $f: M\to\overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje, tada je geometrijski objekat definisan sa*

$$\begin{aligned}
\underset{1}{P}{}^h_{ijk} = \underset{1}{R}{}^h_{ijk} + \frac{1}{n+2}\Big[&\delta^h_j \underset{1}{Q}_{ik} - \delta^h_k \underset{1}{Q}_{ij} + \delta^h_i \underset{1}{Q}_{[jk]} + F^h_k \underset{1}{Q}_{pj}F^p_i\\
&- F^h_j \underset{1}{Q}_{pk}F^p_i + F^h_i \underset{1}{Q}_{pj}F^p_k - F^h_i \underset{1}{Q}_{pk}F^p_j\\
&+\frac{1}{2}\Big(F^h_j\Gamma^r_{pr}\big(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ik}F^p_q\big)\Big)_{[jk]}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}F^h_i\Gamma^r_{pr}\big(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_j-\underset{1}{T}{}^p_{qj}F^q_k+2\underset{1}{T}{}^q_{kj}F^p_q\big)\\
&+\frac{1}{2}\Gamma^r_{pr}F^p_i\big(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_j-\underset{1}{T}{}^h_{qj}F^q_k+2\underset{1}{T}{}^q_{kj}F^h_q\big)\\
&+\frac{1}{2}\Big(\Gamma^r_{pr}F^p_j\big(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_i-\underset{1}{T}{}^q_{ik}F^h_q\big)\Big)_{[jk]}-\underset{1}{T}{}^h_{jk}\Gamma^p_{ip}\\
&-\delta^h_i\Gamma^q_{pq}\underset{1}{T}{}^p_{jk}-F^h_p\underset{1}{T}{}^p_{jk}\Gamma^r_{qr}F^q_i-\Gamma^r_{pr}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jk}F^h_i\Big],
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{Q}{}_{ij}=\underset{1}{R}{}_{ij}+\frac{1}{n+2}\Bigg(&-\Gamma^q_{pq}\underset{1}{T}{}^p_{ji}+\frac{n}{2(n+2)}\Gamma^s_{ps}F^p_i\underset{1}{T}{}^q_{rj}F^r_q\\
&-\frac{n+1}{n+2}F^r_p\underset{1}{T}{}^p_{jr}\Gamma^s_{qs}F^q_i-\frac{3n+4}{2}\Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jr}F^r_i\Bigg)_{(ij)},
\end{aligned}
$$

invarijantan pri preslikavanju f.

Analogno, možemo razmatrati tenzor krivine druge vrste i na taj način dobiti još jedan geometrijski objekat koji je invarijantan pri ekvitorzionom HP preslikavanju generalisanih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu.

Teorema 3.4.3. *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu i neka je $f:M\to\overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje, tada je geometrijski objekat definisan sa*

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{P}{}^h_{ijk}=\underset{2}{R}{}^h_{ijk}+\frac{1}{n+2}\Big[&\delta^h_j\underset{2}{Q}{}_{ik}-\delta^h_k\underset{2}{Q}{}_{ij}+\delta^h_i\underset{2}{Q}{}_{[jk]}+F^h_k\underset{2}{Q}{}_{pj}F^p_i\\
&-F^h_j\underset{2}{Q}{}_{pk}F^p_i+F^h_i\underset{2}{Q}{}_{pj}F^p_k-F^h_i\underset{2}{Q}{}_{pk}F^p_j\\
&+\frac{1}{2}\Big(F^h_j\Gamma^r_{pr}\big(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_i-\underset{1}{T}{}^q_{ik}F^p_q\big)\Big)_{[jk]}\\
&+\frac{1}{2}F^h_i\Gamma^r_{pr}\big(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_j-\underset{1}{T}{}^p_{qj}F^q_k+2\underset{1}{T}{}^q_{kj}F^p_q\big)\\
&+\frac{1}{2}\Gamma^r_{pr}F^p_i\big(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_j-\underset{1}{T}{}^h_{qj}F^q_k+2\underset{1}{T}{}^q_{kj}F^h_q\big)\\
&+\frac{1}{2}\Big(\Gamma^r_{pr}F^p_j\big(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_i-\underset{1}{T}{}^q_{ik}F^h_q\big)\Big)_{[jk]}+\underset{1}{T}{}^h_{jk}\Gamma^p_{ip}\\
&+\delta^h_i\Gamma^q_{pq}\underset{1}{T}{}^p_{jk}+F^h_p\underset{1}{T}{}^p_{jk}\Gamma^r_{qr}F^q_i+\Gamma^r_{pr}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jk}F^h_i\Big],
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{Q}{}_{ij}=\underset{2}{R}{}_{ij}+\frac{1}{n+2}\Bigg(&\Gamma^q_{pq}\underset{1}{T}{}^p_{ji}+\frac{n}{2(n+2)}\Gamma^s_{ps}F^p_i\underset{1}{T}{}^q_{rj}F^r_q\\
&+\frac{n+1}{n+2}F^r_p\underset{1}{T}{}^p_{jr}\Gamma^s_{qs}F^q_i+\frac{n}{2}\Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jr}F^r_i\Bigg)_{(ij)},
\end{aligned}
$$

invarijantan pri preslikavanju f.

Tenzori krivine treće i četvrte vrste će nam omogućiti da pronađemo još neke invarijantne geometrijske objekte ekvitorzionog HP preslikavanja.

Teorema 3.4.4. *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu i neka je $f: M \to \overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje, tada su geometrijski objekti određeni sa*

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta}{P}{}^h_{ijk} = \underset{\theta}{R}{}^h_{ijk} + \frac{1}{n+2}\Big[& \delta^h_j \underset{\theta}{Q}_{ik} + \delta^h_i \underset{\theta}{Q}_{[jk]} - \delta^h_k \underset{\theta}{Q}_{ij} + F^h_k \underset{\theta}{Q}_{pj} F^p_i - F^h_j \underset{\theta}{Q}_{pk} F^p_i \\
& + F^h_i \big(\underset{\theta}{Q}_{pj} F^p_k - \underset{\theta}{Q}_{pk} F^p_j \big) - \delta^h_j \underset{1}{T}{}^p_{ik} \Gamma^q_{pq} - \delta^h_i \underset{1}{T}{}^p_{jk} \Gamma^q_{pq} \\
& + F^h_j \underset{1}{T}{}^p_{qk} F^q_i \Gamma^r_{pr} + F^h_i \underset{1}{T}{}^p_{qk} F^q_j \Gamma^r_{pr} + \frac{1}{2} F^h_j \Gamma^r_{pr} \big(\underset{1}{T}{}^p_{kq} F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ki} F^p_q \big) \\
& - \frac{1}{2} F^h_k \Gamma^r_{pr} \big(\underset{1}{T}{}^p_{qj} F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ij} F^p_q \big) + \frac{1}{2} \Gamma^r_{pr} F^p_i \big(\underset{1}{T}{}^h_{kq} F^q_j - \underset{1}{T}{}^h_{qj} F^q_k \big) \\
& + \frac{1}{2} F^h_i \Gamma^r_{pr} \big(\underset{1}{T}{}^p_{kq} F^q_j - \underset{1}{T}{}^p_{qj} F^q_k \big) + \frac{1}{2} \Gamma^r_{pr} F^p_j \big(\underset{1}{T}{}^h_{kq} F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ki} F^h_q \big) \\
& - \frac{1}{2} \Gamma^r_{pr} F^p_k \big(\underset{1}{T}{}^h_{qj} F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ij} F^h_q \big) - \underset{1}{T}{}^h_{ji} \Gamma^p_{kp} - \underset{1}{T}{}^h_{ki} \Gamma^p_{jp} \\
& + \underset{1}{T}{}^h_{pi} F^p_j \Gamma^r_{qr} F^q_k + \underset{1}{T}{}^h_{pi} F^p_k \Gamma^r_{qr} F^q_j \Big], \quad \theta = 3,4,
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta}{Q}_{ij} = \underset{\theta}{R}_{ij} + \frac{1}{n+2} \bigg(& \frac{n}{n-2} \underset{1}{T}{}^r_{pi} F^p_r \Gamma^s_{qs} F^q_j + \frac{1}{n-2} \underset{1}{T}{}^r_{pq} F^p_r F^q_i \psi_j \\
& + \frac{1}{2} \underset{1}{T}{}^r_{pi} F^p_j \Gamma^s_{qs} F^q_r \bigg)_{(ij)}, \quad \theta = 3,4,
\end{aligned}
$$

invarijantni pri preslikavanju f.

Konačno, peti tenzor krivine generalisanog Kelerovog prostora u Ajzenhartovom smislu će nam dati tenzor koji je analogan tenzoru holomorfne krivine običnog Kelerovog prostora.

Teorema 3.4.5. *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu i neka je $f: M \to \overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje, tada je tenzor određen sa*

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{P}{}^h_{ijk} = \underset{5}{R}{}^h_{ijk} + \frac{1}{n+2}\Big[& -\delta^h_k \underset{5}{R}_{ji} + \delta^h_j \underset{5}{R}_{ki} + F^h_k \underset{5}{R}_{jp} F^p_i - F^h_j \underset{5}{R}_{kp} F^p_i \\
& + 2F^h_i \underset{5}{R}_{jp} F^p_k \Big],
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

invarijantan pri preslikavanju f.

Dokaz. Tenzori krivine $\underset{5}{R}$ i $\underset{5}{\overline{R}}$ generalisanih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$, respektivno, zadovoljavaju relaciju

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\overline{R}}(X,Y)Z = & \underset{5}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}\Big(\underset{1}{\nabla}_X \underset{1}{P}(Z,Y) - \underset{2}{\nabla}_Y \underset{1}{P}(Z,X) + \underset{2}{\nabla}_X \underset{1}{P}(Y,Z) - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{1}{P}(X,Z) \\
& + \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(Y,\underset{1}{P}(Z,X)) + \underset{1}{P}(X,\underset{1}{P}(Y,Z)) - \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(X,Z),Y) \Big) \\
& + \underset{1}{P}(\underset{1}{T}(Z,X),Y) + \underset{1}{P}(\underset{1}{T}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(Y,\underset{1}{T}(Z,X)) - \underset{1}{P}(X,\underset{1}{T}(Z,Y)).
\end{aligned}
$$

Pošto je preslikavanje f ekvitorziono, bilinearna forma $\underset{1}{P}$ je simetrična, prema tome poslednja relacija se može zapisati u sledećem obliku

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\overline{R}}(X,Y)Z = & \underset{5}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}(\underset{1}{\nabla}_X + \underset{2}{\nabla}_X)\underset{1}{P}(Y,Z) - \frac{1}{2}(\underset{1}{\nabla}_Y + \underset{2}{\nabla}_Y)\underset{1}{P}(X,Z) \\
& + \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(Y,\underset{1}{P}(Z,X)),
\end{aligned}
$$

t.j.

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{5}{R}(X,Y)Z + \nabla_X \underset{1}{P}(Y,Z) - \nabla_Y \underset{1}{P}(X,Z) \\ &+ \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(Y,\underset{1}{P}(Z,X)).\end{aligned}$$

Ostatak dokaza je ostavljen čitaocu. □

Poglavlje 4

Generalisani hiperbolički Kelerovi prostori

U radu [58] smo definisali generalisane hiperboličke Kelerove prostore kao specijalan slučaj Ajzenhartovih generalisanih Rimanovih prostora i dodatnim uslovima u odnosu na skoro-produkt strukturu. U ovom poglavlju ćemo prezentovati rezultate rada [58]. Pošto je generalisani hiperbolički Kelerov prostor snabdeven nesimetričnom metrikom, on dopušta pet linearno nezavisnih tenzora krivine. Najpre ćemo prezentovati osobine tenzora krivine, kao i odgovarajućih Ričijevih tenzora generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora. Zatim ćemo posmatrati HP kao i ekvitorziona HP preslikavanja među generalisanim hiperboličkim Kelerovim prostorima i pronaći geometrijske objekte koji su invarijantni pri takvim preslikavanjima.

4.1 Generalisanih hiperbolički Kelerovi prostori

Mnogostrukost M dimenzije n naziva se *lokalno produkt prostor* ako se može pokriti sistemom karti tako da u bilo kom preseku karti (U,u^h) i $(U',u^{h'})$ važi [90]

$$u^{a'}=u^{a'}(u^a),\quad u^{x'}=u^{x'}(u^x),\quad \det|\partial_a u^{a'}|\neq 0,\quad \det|\partial_x u^{x'}|\neq 0,$$

gde indeksi a,b,c uzimaju vrednosti $1,2,\dots,p$, dok indeksi x,y,z uzimaju vrednosti $p+1,p+2,\dots,p+q=n$.

Lokalno produkt prostor naziva se *hiperbolički Kelerov prostor* ako postoji pozitivno definitna Rimanova metrika i skoro-produkt struktura $F_i^h\neq\delta_i^h$ koja ispunjava uslove [90]

$$F_p^hF_i^p=\delta_i^h,$$
$$g_{\alpha\beta}F_i^\alpha F_j^\beta=-g_{ij},$$
$$\nabla_kF_i^h=0,$$

gde je ∇ operator kovarijantnog diferenciranja u odnosu na koneksiju Levi-Čivita koja odgovara metričkom tenzoru g_{ij}.

Kao što je dobro poznato za Kelerove mnogostrukosti se vezuje algebra kompleksnih brojeva. Skup kompleksnih brojeva

$$\{a+ib\mid a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\},$$

čini komutativnu asocijativnu algebru nad $\mathbb{R}$ dimenzije dva [89]. Štaviše, skup kompleksnih brojeva čini polje. Godine 1948. P.K. Rašajski je bio prvi koji je posmatrao sličnu vrstu mnogostrukosti, ali ovog puta povezanih sa algebrom dvostrukih brojeva [6], odnosno skupom para-kompleksnih brojeva

$$\{a+ib\mid a,b\in\mathbb{R},\ i^2=1\},$$

koji čini komutativnu asocijativnu algebru dimenzije dva [89]. Algebra para-kompleksnih brojeva ima delitelje nule, tako da ne čini polje [89].

Godine 1949. B.A. Rozenfild je dao eksplicitnu definiciju para-Kelerovih mnogostrukosti [6]. On je uporedio definiciju koju je dao P.K. Rašajski sa Kelerovom definicijom i zaključio da su prostori koje je uveo P.K. Rašajski (lokalno) realni modeli para-Kelerovih mnogostrukosti. Pregled para-kompleksne geometrije je dat u [6].

T. Otsuki i J. Taširo su uveli pojam holomorfno (analitički) planarne krive, čime su otpočeli teoriju holomorfno projektivnih preslikavanja klasičnih Kelerovih prostora. U određenom vremenskom periodu XX veka jedan od glavnih istraživačkih pravaca sovjetske i japanske škole diferencijalne geometrije bio je izučavanje holomorfno projektivnih preslikavanja.

M. Prvanović [67] je 1971. godine otpočela teoriju holomorfno projektivnih preslikavanja među lokalno produkt prostorima, a kao specijalan slučaj posmatrala je holomorfno projektivna preslikavanja hiperboličkih Kelerovih prostora. Između ostalog, M. Prvanović je u radu [67] uvela pojam para-holomorfnog tenzora krivine i eksplicitno izrazila tenzor krivine prostora konstantne para-holomorfne sekcione krivine. Kada govorimo o preslikavanjima hiperboličkih Kelerovih prostora koja očuvavaju holomorfno (analitički) planarne krive, poštujući terminologiju koju je uvela M. Prvanović u radu [67] koristićemo termin „holomorfno projektivna preslikavanja“, iako se u današnje vreme za takva preslikavanja sve češće koriristi termin „para-holomorfno projektivna preslikavanja“. Takođe, hiperbolički Kelerovi prostori se nazivaju još i „para-Kelerove mnogostrukosti“.

Generalisani klasični (eliptički) Kelerovi prostori su prvi put definisani u radu [52] kao specijalan slučaj L.P. Ajzenhartovih generalisanih Rimanovih prostora. Na isti način, u radu [58] su definisani generalisani hiperbolički Kelerovi prostori.

Definicija 4.1.1. [58] *Generalisani Rimanov prostor* (M,g) *naziva se* generalisani hiperbolički Kelerov prostor *ako na mnogostrukosti M postoji tenzorsko polje F tipa* $(1,1)$ *koje ispunjava*

$$F^2 = I, \tag{4.1}$$

$$\underline{g}(FX,FY) = -\underline{g}(X,Y), \tag{4.2}$$

$$\underset{1}{\nabla} F = 0 \ \ i \ \ \underset{2}{\nabla} F = 0, \tag{4.3}$$

gde I označava identičan operator.

Teorema 4.1.1. [58] *Tenzori krivine* $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,4$ *i tenzor torzije* $\underset{1}{T}$ *generalisanog hiperboličkog Kelerovog prostora* (M,g,F) *zadovoljavaju sledeće relacije:*

(i) $\underset{1}{T}(X,Y) = F(\underset{1}{T}(FX,Y)),$

(ii) $\underset{1}{R}(X,Y)FZ = F(\underset{1}{R}(X,Y)Z),$

(iii) $\underset{2}{R}(X,Y)FZ = F(\underset{2}{R}(X,Y)Z),$

(iv) $\underset{3}{R}(X,Y)FZ = F(\underset{3}{R}(X,Y)Z),$

(v) $$\underset{4}{R}(X,Y)FZ + F(\underset{3}{R}(Y,X)Z) = F\big(\underset{4}{\nabla}_X \underset{1}{T}(Z,Y) - \underset{3}{\nabla}_Y \underset{1}{T}(X,Z) + \underset{1}{T}(X,\underset{1}{T}(Z,Y)\big) - \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(X,Z),Y)).$$

Dokaz. (i) Na osnovu definicija kovarijantnih izvoda prve i druge vrste iz (4.3) dobijamo

$$\underset{1}{T}(FU,Y) = F(\underset{1}{T}(U,Y)).$$

Stavljajući $U = FX$ u prethodnoj relaciji i koristeći osobinu (4.1) dobijamo (i).

(ii) Na osnovu (4.3) imamo

$$\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_Y FX - \underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_Z FX = 0.$$

Nakon primene prvog identiteta Ričijevog tipa (jednačina (9) u [43]), dobijamo

$$-F(\underset{1}{R}(X,Y)Z) + \underset{1}{R}(X,Y)FZ - \underset{1}{\nabla}_{\underset{1}{T}(Y,X)} FZ = 0,$$

t.j.

$$-F(\underset{1}{R}(X,Y)Z) + \underset{1}{R}(X,Y)FZ = 0,$$

gde smo iskoristili $\underset{1}{\nabla}F = 0$.

(iii) Da dokažemo ovaj deo koristićemo drugi identitet Ričijevog tipa (jednačina (13) u [43]), t.j.

$$\underset{2}{\nabla}_Z\underset{2}{\nabla}_Y FX - \underset{2}{\nabla}_Y\underset{2}{\nabla}_Z FX = \underset{2}{R}(Z,Y)FX - F(\underset{2}{R}(Z,Y)X) + \underset{2}{\nabla}_{\underset{1}{T}(Y,Z)} FX. \tag{4.4}$$

Prema $\underset{2}{\nabla}F = 0$ jednačina (4.4) postaje

$$\underset{2}{R}(Z,Y)FX - F(\underset{2}{R}(Z,Y)X) = 0,$$

čime se završava dokaz dela (iii).

(iv) Pimenjujući odgovarajući identitet Ričijevog tipa (jednačina $(58')$ u [43]), imamo

$$\underset{2}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_Y FX - \underset{1}{\nabla}_Y\underset{2}{\nabla}_Z FX = \underset{3}{R}(Z,Y)FX - F(\underset{3}{R}(Z,Y)X).$$

Koristeći (4.3) u prethodnoj relaciji dobijamo (iv).

(v) Iz (4.3), a na osnovu definicija kovarijantnih izvoda treće i četvrte vrste dobijamo

$$\underset{3}{\nabla}_Y FX = F(\underset{1}{T}(X,Y)) \ \text{ i } \ \underset{4}{\nabla}_Z FX = F(\underset{1}{T}(Z,X)),$$

što dalje implicira

$$\underset{4}{\nabla}_Z\underset{3}{\nabla}_Y FX = F(\underset{4}{\nabla}_Z\underset{1}{T}(X,Y)) + F(\underset{1}{T}(Z,\underset{1}{T}(X,Y)))$$

i

$$\underset{3}{\nabla}_Y\underset{4}{\nabla}_Z FX = F(\underset{3}{\nabla}_Y\underset{1}{T}(Z,X)) + F(\underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Z,X),Y)).$$

S druge strane, odgovarajući identitet Ričijevog tipa (jednačina $(56')$ u [46]) glasi

$$\underset{4}{\nabla}_Z\underset{3}{\nabla}_Y FX - \underset{3}{\nabla}_Y\underset{4}{\nabla}_Z FX = \underset{4}{R}(Z,Y)FX + F(\underset{3}{R}(Y,Z)X).$$

Iz poslednje tri relacije dobijamo (v), čime je dokaz teoreme završen. $\square$

Označimo tenzor krivine tipa $(0,4)$ sa

$$\underset{\theta}{R}(X,Y,Z,W) := \underline{g}(\underset{\theta}{R}(X,Y)Z,W), \ \ \theta = 1,\ldots,4,$$

i tenzor torzije tipa $(0,3)$ sa

$$\underset{1}{T}(X,Y,Z) := \underline{g}(X,\underset{1}{T}(Y,Z)).$$

Posledica 4.1.1. [58] *Tenzori krivine* $\underset{\theta}{R}$ *tipa* $(0,4)$, $\theta = 1,\dots,4$ *i tenzor torzije* $\underset{1}{T}$ *tipa* $(0,3)$ *generalisanog hiperboličkog Kelerovog prostora* (M,g,F) *zadovoljavaju*

$$
\begin{aligned}
(i)\ & \underset{1}{R}(X,Y,Z,FW) + \underset{1}{R}(X,Y,FZ,W) = 0,\\
(ii)\ & \underset{2}{R}(X,Y,Z,FW) + \underset{2}{R}(X,Y,FZ,W) = 0,\\
(iii)\ & \underset{3}{R}(X,Y,Z,FW) + \underset{3}{R}(X,Y,FZ,W) = 0,\\
(iv)\ & \underset{4}{R}(X,Y,Z,FW) + \underset{3}{R}(Y,X,FZ,W) = \underset{3}{\nabla}_Y \underset{1}{T}(FW,X,Z) - \underset{4}{\nabla}_X \underset{1}{T}(FW,Z,Y),\\
& \qquad + \underset{1}{T}(FW,\underset{1}{T}(X,Z),Y) - \underset{1}{T}(FW,X,\underset{1}{T}(Z,Y)),\\
(v)\ & \underset{4}{R}(X,Y,Z,FW) - \underset{3}{R}(Y,X,Z,FW) = \underset{3}{\nabla}_Y \underset{1}{T}(FW,X,Z) - \underset{4}{\nabla}_X \underset{1}{T}(FW,Z,Y),\\
& \qquad + \underset{1}{T}(FW,\underset{1}{T}(X,Z),Y) - \underset{1}{T}(FW,X,\underset{1}{T}(Z,Y)).
\end{aligned}
$$

Dokaz. Dokaz direktno sledi iz Teoreme 4.1.1, koristeći osobine tenzora krivine kao i osobine produkt strukture date sa (4.1) i (4.2). $\square$

Teorema 4.1.2. [58] *Ričijevi tenzori* $\underset{\theta}{\mathrm{Ric}}(X,Y) = \mathrm{Tr}\big(U \to \underset{\theta}{R}(U,X)Y\big), \theta = 1,\dots,5$ *generalisanog hiperboličkog Kelerovog prostora* (M,g,F) *poseduju sledeće osobine:*

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) = & -\underset{1}{\mathrm{Ric}}(X,Y)\\
& + \mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(X,U)} \Big(\frac{1}{2}\nabla_U \underset{1}{T}(Y,X) + \frac{1}{4}\underset{1}{T}\big(\underset{1}{T}(Y,X),U\big)\Big)\Big)\\
& + \mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(FX,U)} \Big(\frac{1}{2}\nabla_U \underset{1}{T}(FY,FX) + \frac{1}{4}\underset{1}{T}\big(\underset{1}{T}(FY,FX),U\big)\Big)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) = & -\underset{2}{\mathrm{Ric}}(X,Y)\\
& - \mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(X,U)} \Big(\frac{1}{2}\nabla_U \underset{1}{T}(Y,X) + \frac{1}{4}\underset{1}{T}\big(\underset{1}{T}(Y,X),U\big)\Big)\Big)\\
& - \mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(FX,U)} \Big(\frac{1}{2}\nabla_U \underset{1}{T}(FY,FX) + \frac{1}{4}\underset{1}{T}\big(\underset{1}{T}(FY,FX),U\big)\Big)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{3}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) = & -\underset{3}{\mathrm{Ric}}(X,Y) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CS(U,X)} \nabla_U \underset{1}{T}(Y,X)\Big)\\
& - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(U,X)} \underset{1}{T}\big(\underset{1}{T}(Y,X),U\big)\Big)\\
& + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CS(U,FX)} \nabla_U \underset{1}{T}(FY,FX)\Big)\\
& - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(U,FX)} \underset{1}{T}\big(\underset{1}{T}(FY,FX),U\big)\Big)\\
& - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(U \to \underset{1}{T}\big(\underset{1}{T}(X,U),Y\big)\Big)\\
& - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(U \to \underset{1}{T}\big(\underset{1}{T}(FX,U),FY\big)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{4}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) =& -\underset{4}{\mathrm{Ric}}(X,Y) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CS(U,X)} \nabla_U \underset{1}{T}(Y,X)\Big)\\
&- \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(U,X)} \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Y,X),U)\Big)\\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CS(U,FX)} \nabla_U \underset{1}{T}(FY,FX)\Big)\\
&- \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(U,FX)} \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(FY,FX),U)\Big)\\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(X,U),Y)\Big)\\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(FX,U),FY)\Big),\\
\underset{5}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) =& -\underset{5}{\mathrm{Ric}}(X,Y) + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(U,X)} \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Y,X),U)\Big)\\
&+ \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big(U \to \sum_{CA(U,FX)} \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(FY,FX),U)\Big).
\end{aligned}
$$

Dokaz. Glavna ideja dokaza je da se iskoriste relacije između tenzora krivine $\underset{\theta}{R}\,(\theta = 1,\dots,5)$ i Rimanovog tenzora krivine R, kao i dobro poznate osobine koje ima Ričijev tenzor hiperboličkog Kelerovog prostora.

Na osnovu relacije koju ispunjavaju tenzori krivine R i $\underset{1}{R}$ lako dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\mathrm{Ric}}(Y,Z) = \mathrm{Ric}(Y,Z) &+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \sum_{CA(Y,U)} \nabla_U \underset{1}{T}(Z,Y)\big)\\
&+ \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\big(U \to \sum_{CA(Y,U)} \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Z,Y),U)\big),
\end{aligned}
$$

stoga je

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) =& \mathrm{Ric}(FX,FY)\\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \sum_{CA(FX,U)} \nabla_U \underset{1}{T}(FY,FX)\big)\\
&+ \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\big(U \to \sum_{CA(FX,U)} \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(FY,FX),U)\big).
\end{aligned}
$$

Ričijev tenzor hiperboličkog Kelerovog prostora zadovoljava [67]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(FX,FY) = -\mathrm{Ric}(X,Y) = -\underset{1}{\mathrm{Ric}}(X,Y) &+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \sum_{CA(X,U)} \nabla_U \underset{1}{T}(Y,X)\big)\\
&+ \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\big(U \to \sum_{CA(X,U)} \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Y,X),U)\big).
\end{aligned}
$$

Iz poslednje dve relacije dobijamo dokaz prve relacije ove teoreme. Provera preostalih relacija ove teoreme je analogna. □

Primenom ciklične sume u relacijama među Ričijevim tenzorima datim u Teoremi 4.1.2 dobijamo Posledicu 4.1.2.

Posledica 4.1.2. [58] *Ričijevi tenzori* $\underset{\theta}{\mathrm{Ric}}(X,Y) = \mathrm{Tr}\big(U \to \underset{\theta}{R}(U,X)Y\big), \theta = 1,\dots,5$ *generalisanog hiperboličkog Kelerovog prostora* (M,g,F) *imaju sledeće osobine:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{CS(X,Y)} \underset{1}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) = &- \sum_{CS(X,Y)} \underset{1}{\mathrm{Ric}}(X,Y) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(FX,U),FY)\big) \\
&- \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(X,U),Y)\big), \\
\sum_{CS(X,Y)} \underset{2}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) = &- \sum_{CS(X,Y)} \underset{2}{\mathrm{Ric}}(X,Y) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(FX,U),FY)\big) \\
&- \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(X,U),Y)\big), \\
\sum_{CS(X,Y)} \underset{3}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) = &- \sum_{CS(X,Y)} \underset{3}{\mathrm{Ric}}(X,Y) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(FX,U),FY)\big) \\
&- \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(X,U),Y)\big), \\
\sum_{CS(X,Y)} \underset{4}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) = &- \sum_{CS(X,Y)} \underset{4}{\mathrm{Ric}}(X,Y) + \frac{3}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(FX,U),FY)\big) \\
&+ \frac{3}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(X,U),Y)\big), \\
\sum_{CS(X,Y)} \underset{5}{\mathrm{Ric}}(FX,FY) = &- \sum_{CS(X,Y)} \underset{5}{\mathrm{Ric}}(X,Y) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(FX,U),FY)\big) \\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(X,U),Y)\big).
\end{aligned}
$$

4.2 HP preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora

Kao i u slučaju klasičnih (eliptičkih) Kelerovih prostora, holomorfno (analitički) planarna kriva u generalisanom hiperboličkom Kelerovom prostoru je određena običnom diferencijalnom jednačinom drugog reda u Ojlerovom obliku.

Definicija 4.2.1. [67, 69] *Kriva* $l : I \to M$ *generalisanog hiperboličkog Kelerovog prostora* (M,g,F) *koja ispunjava uslov regularnosti* $\lambda(t) = \frac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0$, $t \in I$, *je* holomorfno planarna *ako za neke funkcije* ρ_1 *i* ρ_2 *parametra t sledeća obična diferencijalna jednačina važi*

$$\nabla_{\lambda(t)}\lambda(t) = \rho_1(t)\lambda(t) + \rho_2(t)F\lambda(t),$$

gde ∇ *označava koneksiju Levi-Čivita koja odgovara simetričnom delu* $\underline{g}$ *metrike g.*

Definicija 4.2.2. [67, 69] *Neka su* (M,g,F) *i* $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ *generalisani hiperbolički Kelerovi prostori dimenzije* $n>2$. *Difeomorfizam* $f:M\to\overline{M}$ *naziva se* HP preslikavanje *ako svaku holomorfno planarnu krivu prostora* (M,g,F) *preslikava u holomorfno planarnu krivu prostora* $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$.

Potreban i dovoljan uslov za egzistenciju HP preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora je naveden u Teoremi 4.2.1.

Teorema 4.2.1. [67, 69] *Neka su* (M,g,F) *i* $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ *hiperbolički Kelerovi prostori dimenzije* n $(n>2)$. *Difeomorfizam* $f:M\to\overline{M}$ *je HP preslikavanje ako i samo ako važi*

$$P(X,Y)=\psi(X)Y+\psi(Y)X+\psi(FX)FY+\psi(FY)FX, \tag{4.5}$$

gde $X,Y\in T_p(M)$, ψ *je linearna forma i* $P(X,Y)=\overline{\nabla}_XY-\nabla_XY$, *pri čemu su* $\overline{\nabla}$ *i* ∇ *simetrične linearne koneksije, koje odgovaraju simetričnim delovima* $\underline{\overline{g}}$ *i* $\underline{g}$, *metrika* $\overline{g}$ *i* g, *tim redom.*

Potreban i dovoljan uslov za egzistenciju HP preslikavanja hiperboličkih Kelerovih prostora dat u terminima tenzora deformacije $\underset{1}{P}(X,Y)$ naveden je u Teoremi 4.2.2.

Teorema 4.2.2. [67, 69, 58] *Neka su* (M,g,F) *i* $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ *generalisani hiperbolički Kelerovi prostori dimenzije* n $(n>2)$. *Difeomorfizam* $f:M\to\overline{M}$ *je HP preslikavanje ako i samo ako važi*

$$\underset{1}{P}(X,Y)=\psi(X)Y+\psi(Y)X+\psi(FX)FY+\psi(FY)FX+\xi(X,Y), \tag{4.6}$$

gde $X,Y\in T_p(M)$, ψ *je linearna forma i* ξ *je antisimetrično tenzorsko polje tipa* $(1,2)$.

U indeks notaciji jednačina (4.6) glasi

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}=\Gamma^h_{ij}+\psi_{(i}\delta^h_{j)}+\psi_pF^p_{(i}F^h_{j)}+\xi^h_{ij}, \tag{4.7}$$

gde su Γ^h_{ij} i $\overline{\Gamma}^h_{ij}$ generalisani Kristofeli simboli druge vrste, ψ_i je kovektor i ξ^h_{ij} je antisimetričan tenzor.

Generalisani Kristofelovi simboli prve vrste zadovoljavaju [54], str. 11

$$\Gamma_{i.jk}+\Gamma_{j.ik}=g_{\underline{ij},k},\ \Gamma_{i.jk}+\Gamma_{k.ij}=g_{\underline{ik},j}. \tag{4.8}$$

Stoga,

$$|\underline{g}|_{,k}=|\underline{g}|g^{\underline{ij}}g_{\underline{ij},k}=|\underline{g}|g^{\underline{ij}}(\Gamma_{i.jk}+\Gamma_{j.ik})=|\underline{g}|(\Gamma^j_{jk}+\Gamma^i_{ik}),$$

t.j.

$$\frac{|\underline{g}|_{,k}}{2|\underline{g}|}=\Gamma^p_{pk}.$$

Analogono, koristeći drugu relaciju iz (4.8) može se pokazati da je [54]

$$\frac{|\underline{g}|_{,k}}{2|\underline{g}|}=\Gamma^p_{kp},$$

što dalje implicira

$$\underset{1}{T}{}^p_{kp}=\Gamma^p_{kp}-\Gamma^p_{pk}=0. \tag{4.9}$$

Antisimetrizacijom u (4.7) po indeksima i i j dobijamo

$$\xi^h_{ij}=\frac{1}{2}\big(\overline{\Gamma}^h_{ij}-\overline{\Gamma}^h_{ji}\big)-\frac{1}{2}\big(\Gamma^h_{ij}-\Gamma^h_{ji}\big). \tag{4.10}$$

Iz relacija (4.9) i (4.10) zaključujemo da važi

$$\xi^p_{ip} = \frac{1}{2}\big(\underset{1}{\overline{T}}{}^p_{ip} - \underset{1}{T}{}^p_{ip}\big) = 0. \tag{4.11}$$

Kontrakcijom po indeksima h i j u relaciji (4.7) dobijamo

$$\overline{\Gamma}^p_{ip} - \Gamma^p_{ip} = (n+2)\psi_i. \tag{4.12}$$

Sada, iz (4.7), (4.10) i (4.12) imamo

$$\begin{aligned}\Gamma^h_{\underline{ij}} - \frac{1}{n+2}\big(\Gamma^p_{pi}\delta^h_j + \Gamma^p_{pj}\delta^h_i + \Gamma^q_{qp}F^p_{(i}F^h_{j)}\big)\\ = \overline{\Gamma}^h_{\underline{ij}} - \frac{1}{n+2}\big(\overline{\Gamma}^p_{pi}\delta^h_j + \overline{\Gamma}^p_{pj}\delta^h_i + \overline{\Gamma}^q_{qp}F^p_{(i}F^h_{j)}\big),\end{aligned} \tag{4.13}$$

gde $\underline{ij}$ označava simetrizaciju sa deljenjem.

Koristeći činjenicu da se struktura F očuvava pri HP preslikavanjima i na osnovu prethodne diskusije važi sledeća

Teorema 4.2.3. [58] *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani hiperbolički Kelerovi prostora dimenzije $n>2$ i neka je $f : M \to \overline{M}$ HP preslikavanja, tada je geometrijski objekat*

$$\Gamma^h_{\underline{ij}} - \frac{1}{n+2}\big(\Gamma^p_{pi}\delta^h_j + \Gamma^p_{pj}\delta^h_i + \Gamma^q_{qp}F^p_{(i}F^h_{j)}\big), \tag{4.14}$$

invarijantan pri preslikavanju f.

Primedba 4.2.1. [67, 69] *Geometrijski objekat* (4.14) *je analogan Tomasovom projektivnom parametru iz teorije geodezijskih preslikavanja.*

4.2.1 Ekvitorziona HP preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora

Ekvitorziona HP preslikavanja među generalisanim klasičnim (eliptičkim) Kelerovim prostorima su razmatrana u radu [78]. U ovoj podsekciji ćemo prezentovati rezultate koji se tiču ekvitorzionih HP preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora, a koji su publikovani u radu [58] .

Definicija 4.2.3. [58] *Preslikavanje $f : M \to \overline{M}$ generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora naziva se* ekvitorziono preslikavanje *ako očuvava tenzor torzije $\underset{1}{T}$, t.j. ako važi $\underset{1}{T} = \underset{1}{\overline{T}}$.*

Ako je $f : M \to \overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora, onda antisimetrično tenzorsko polje ξ iz (4.6) identički iščezava. Zaista, [58]

$$\begin{aligned}2\xi(X,Y) =& \underset{1}{P}(X,Y) - \underset{1}{P}(Y,X)\\ =& \underset{1}{\overline{\nabla}}(X,Y) - \underset{1}{\nabla}(X,Y) - \underset{1}{\overline{\nabla}}(Y,X) + \underset{1}{\nabla}(Y,X)\\ =& \underset{1}{\overline{T}}(X,Y) - \underset{1}{T}(X,Y) = 0.\end{aligned}$$

Tako da je tenzor deformacije $\underset{1}{P}$ pri preslikavanju f simetrična bilinearna forma data sa [58]

$$\underset{1}{P}(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X + \psi(FX)FY + \psi(FY)FX. \tag{4.15}$$

Teorema 4.2.4. [58] *Neka su* (M,g,F) *i* $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ *generalisani hiperbolički Kelerovi prostori i neka je* $f: M\to\overline{M}$ *ekvitorziono HP preslikavanje, tada su geometrijski objekti dati sa*

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta}{P}{}^h_{ijk} = \underset{\theta}{R}{}^h_{ijk} + \frac{1}{n+2}\Big[&\delta^h_j(\underset{\theta}{R}_{ik} - \underset{\theta}{Q}_{ik}) - \delta^h_k(\underset{\theta}{R}_{ij} - \underset{\theta}{Q}_{ij}) \\
&+ \delta^h_i(\underset{\theta}{R}_{[jk]} - \underset{\theta}{Q}_{[jk]})\Big] \\
&- F^h_k(\underset{\theta}{R}_{pj} - \underset{\theta}{Q}_{pj})F^p_i + F^h_j(\underset{\theta}{R}_{pk} - \underset{\theta}{Q}_{pk})F^p_i \\
&- F^h_i\big((\underset{\theta}{R}_{pj} - \underset{\theta}{Q}_{pj})F^p_k - (\underset{\theta}{R}_{pk} - \underset{\theta}{Q}_{pk})F^p_j\big) \\
&(-1)^{\theta-1}\big(\underset{1}{T}{}^h_{jk}\Gamma^s_{is} + \delta^h_i\Gamma^s_{ps}\underset{1}{T}{}^p_{jk} \\
&+ F^h_p\underset{1}{T}{}^p_{jk}\Gamma^s_{qs}F^q_i + \Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jk}F^h_i\big)\Big],\quad \theta=1,2,
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta}{Q}_{ij} = \frac{(-1)^{\theta-1}}{n+2}\Big(&\Gamma^s_{ps}\underset{1}{T}{}^p_{ji} + \frac{n-1}{n-2}F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{jq}\Gamma^s_{rs}F^r_i + \frac{1}{n-2}F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{iq}\Gamma^s_{rs}F^r_j \\
&+ \frac{n-1}{n-2}\Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jr}F^r_i + \frac{1}{n-2}\Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{ir}F^r_j \\
&+ \frac{1}{n-2}\big(F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{rp}F^r_j\Gamma^s_{is} + \Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{ri}F^r_j\big)_{(ij)}\Big),\quad \theta=1,2,
\end{aligned}
$$

invarijantni pri preslikavanju f.

Dokaz. Tenzori krivine $\underset{1}{R}$ i $\underset{1}{\overline{R}}$ generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$, respektivno, zadovoljavaju relaciju [49]

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{1}{R}(X,Y)Z + \underset{1}{\nabla}_X\underset{1}{P}(Z,Y) - \underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{P}(Z,X) \\
&+ \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,X),Y) + \underset{1}{P}(Z,\underset{1}{T}(Y,X)).
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Označimo

$$\underset{1}{\psi}(X,Y) = \underset{1}{\nabla}_Y\psi(X) - \psi(X)\psi(Y) + \psi(FX)\psi(FY).$$

Zamenjujući (4.15) u (4.17) dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{1}{R}(X,Y)Z + Y\cdot\underset{1}{\psi}(Z,X) - X\cdot\underset{1}{\psi}(Z,Y) + Z\cdot\sum_{CA(X,Y)}\underset{1}{\psi}(X,Y) \\
&- FX\cdot\underset{1}{\psi}(FZ,Y) + FY\cdot\underset{1}{\psi}(FZ,X) \\
&- FZ\cdot\big(\underset{1}{\psi}(FX,Y) - \underset{1}{\psi}(FY,X)\big) \\
&+ \underset{1}{T}(Y,X)\cdot\psi(Z) + Z\cdot\psi(\underset{1}{T}(Y,X)) \\
&+ F(\underset{1}{T}(Y,X))\cdot\psi(FZ) + \psi(F(\underset{1}{T}(Y,X)))\cdot FZ.
\end{aligned}
$$

Poslednja relacija u lokalnim koordinatama glasi

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}{}^h_{ijk} = \underset{1}{R}{}^h_{ijk} &+ \delta^h_j \underset{1}{\psi}_{ik} - \delta^h_k \underset{1}{\psi}_{ij} + \delta^h_i \underset{1}{\psi}_{[jk]} \\
&- F^h_k \underset{1}{\psi}_{pj} F^p_i + F^h_j \underset{1}{\psi}_{pk} F^p_i - F^h_i (\underset{1}{\psi}_{pj} F^p_k - \underset{1}{\psi}_{pk} F^p_j) \\
&+ \underset{1}{T}{}^h_{jk} \psi_i + \delta^h_i \psi_p \underset{1}{T}{}^p_{jk} + F^h_p \underset{1}{T}{}^p_{jk} \psi_q F^q_i + \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{jk} F^h_i .
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Kontrakcijom po indeksima h i k u (4.18) i korišćenjem (4.9) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}_{ij} = &\underset{1}{R}_{ij} - n \underset{1}{\psi}_{ij} + \underset{1}{\psi}_{[ji]} + \underset{1}{\psi}_{(pq)} F^p_i F^q_j \\
&+ \psi_p \underset{1}{T}{}^p_{ji} + F^q_p \underset{1}{T}{}^p_{jq} \psi_r F^r_i + \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{jr} F^r_i ,
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

gde su $\underset{1}{R}_{ij} = \underset{1}{R}{}^p_{ijp}$ i $\underset{1}{\overline{R}}_{ij} = \underset{1}{\overline{R}}{}^p_{ijp}$ komponente Ričijevih tenzora $\underset{1}{\mathrm{Ric}}(X,Y)$ i $\underset{1}{\overline{\mathrm{Ric}}}(X,Y)$, respektivno.

Antisimetrizacijom u (4.19) po indeksima i i j dobijamo

$$
\begin{aligned}
(n+2)\underset{1}{\psi}_{[ij]} = &\underset{1}{R}_{[ij]} - \underset{1}{\overline{R}}_{[ij]} + 2\psi_p \underset{1}{T}{}^p_{ji} + F^q_p \underset{1}{T}{}^p_{jq} \psi_r F^r_i - F^q_p \underset{1}{T}{}^p_{iq} \psi_r F^r_j \\
&+ \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{jr} F^r_i - \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{ir} F^r_j .
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Simetrizacijom u (4.19) po indeksima i i j dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}_{(ij)} = &\underset{1}{R}_{(ij)} - n \underset{1}{\psi}_{(ij)} + 2 \underset{1}{\psi}_{(pq)} F^p_i F^q_j + F^q_p \underset{1}{T}{}^p_{jq} \psi_r F^r_i + F^q_p \underset{1}{T}{}^p_{iq} \psi_r F^r_j \\
&+ \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{jr} F^r_i + \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{ir} F^r_j ,
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

zatim kompozicijom sa F^i_p i F^j_q u poslednjoj relaciji dobijamo

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}_{(pq)} F^p_i F^q_j = &\underset{1}{R}_{(pq)} F^p_i F^q_j - n \psi_{(pq)} F^p_i F^q_j + 2\psi_{(ij)} + F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{rp} F^r_j \psi_i \\
&+ F^q_p \underset{1}{T}{}^p_{rq} F^r_i \psi_j + \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{ri} F^r_j + \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{rj} F^r_i .
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

U lokalnim koordinatama, prva relacija Posledice 4.1.2 glasi

$$
\underset{1}{R}_{(pq)} F^p_i F^q_j = -\underset{1}{R}_{(ij)} - \frac{1}{2} \underset{1}{T}{}^p_{rq} \underset{1}{T}{}^q_{ps} F^r_i F^s_j - \frac{1}{2} \underset{1}{T}{}^p_{iq} \underset{1}{T}{}^q_{pj} ,
\tag{4.23}
$$

a ista relacija važi u prostoru $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$, t.j.

$$
\underset{1}{\overline{R}}_{(pq)} \overline{F}{}^p_i \overline{F}{}^q_j = -\underset{1}{\overline{R}}_{(ij)} - \frac{1}{2} \underset{1}{\overline{T}}{}^p_{rq} \underset{1}{\overline{T}}{}^q_{ps} \overline{F}{}^r_i \overline{F}{}^s_j - \frac{1}{2} \underset{1}{\overline{T}}{}^p_{iq} \underset{1}{\overline{T}}{}^q_{pj} .
\tag{4.24}
$$

Koristeći činjenicu da se tenzor torzije i struktura F očuvavaju pri ekvitorzionim HP preslikavanjima i zamenjujući (4.23) i (4.24) u (4.22) dobijamo

$$
\begin{aligned}
-\underset{1}{\overline{R}}_{(ij)} = &- \underset{1}{R}_{(ij)} - n \underset{1}{\psi}_{(pq)} F^p_i F^q_j + 2 \underset{1}{\psi}_{(ij)} + F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{rp} F^r_j \psi_i + F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{rp} F^r_i \psi_j \\
&+ \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{ri} F^r_j + \psi_p F^p_q \underset{1}{T}{}^q_{rj} F^r_i .
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Sumirajući relacije (4.21) i (4.25) dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{1}{\psi}_{(pq)}F_i^pF_j^q = -\underset{1}{\psi}_{(ij)} + \frac{1}{n-2}\big(&F_p^q\underset{1}{T}{}^p_{jq}\psi_rF_i^r + \psi_pF_q^p\underset{1}{T}{}^q_{jr}F_i^r \\ &+F_q^p\underset{1}{T}{}^q_{rp}F_j^r\psi_i + \psi_pF_q^p\underset{1}{T}{}^q_{ri}F_j^r\big)_{(ij)}.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Nakon zamene (4.26) u (4.25) dobijamo

$$\begin{aligned}(n+2)\underset{1}{\psi}_{(ij)} =& \underset{1}{R}_{(ij)} - \underset{1}{\overline{R}}_{(ij)} + \frac{n}{n-2}\big(F_p^q\underset{1}{T}{}^p_{jq}\psi_rF_i^r + \psi_pF_q^p\underset{1}{T}{}^q_{jr}F_i^r\big)_{(ij)} \\ &+ \frac{2}{n-2}\big(F_q^p\underset{1}{T}{}^q_{rp}F_j^r\psi_i + \psi_pF_q^p\underset{1}{T}{}^q_{ri}F_j^r\big)_{(ij)}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Sada, sumirajući (4.20) i (4.27) dobijamo (ovde ispravljamo računsku grešku nastalu u radu [58])

$$\begin{aligned}2(n+2)\underset{1}{\psi}_{ij} =& 2\underset{1}{R}_{ij} - 2\underset{1}{\overline{R}}_{ij} + 2\psi_p\underset{1}{T}{}^p_{ji} + \frac{2n-2}{n-2}F_p^q\underset{1}{T}{}^p_{jq}\psi_rF_i^r + \frac{2}{n-2}F_p^q\underset{1}{T}{}^p_{iq}\psi_rF_j^r \\ &+ \frac{2n-2}{n-2}\psi_pF_q^p\underset{1}{T}{}^q_{jr}F_i^r + \frac{2}{n-2}\psi_pF_q^p\underset{1}{T}{}^q_{ir}F_j^r \\ &+ \frac{2}{n-2}\big(F_q^p\underset{1}{T}{}^q_{rp}F_j^r\psi_i + \psi_pF_q^p\underset{1}{T}{}^q_{ri}F_j^r\big)_{(ij)}.\end{aligned}$$

Koristeći (4.12) u prethodnoj relaciji dobijamo

$$(n+2)\underset{1}{\psi}_{ij} = \underset{1}{R}_{ij} - \underset{1}{\overline{R}}_{ij} + \underset{1}{\overline{Q}}_{ij} - \underset{1}{Q}_{ij}, \tag{4.28}$$

gde je $\underset{1}{Q}_{ij}$ definisan sa

$$\begin{aligned}\underset{1}{Q}_{ij} = \frac{1}{n-2}\Big(&\Gamma^s_{ps}\underset{1}{T}{}^p_{ji} + \frac{n-1}{n-2}F_p^q\underset{1}{T}{}^p_{jq}\Gamma^s_{rs}F_i^r + \frac{1}{n-2}F_p^q\underset{1}{T}{}^p_{iq}\Gamma^s_{rs}F_j^r \\ &+ \frac{n-1}{n-2}\Gamma^s_{ps}F_q^p\underset{1}{T}{}^q_{jr}F_i^r + \frac{1}{n-2}\Gamma^s_{ps}F_q^p\underset{1}{T}{}^q_{ir}F_j^r \\ &+ \frac{1}{n-2}\big(F_q^p\underset{1}{T}{}^q_{rp}F_j^r\psi_i + \psi_pF_q^p\underset{1}{T}{}^q_{ri}F_j^r\big)_{(ij)}\Big),\end{aligned} \tag{4.29}$$

i $\underset{1}{\overline{Q}}_{ij}$ je definisan na isti način u prostoru $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$.

Konačno, nakon zamene (4.12) i (4.28) u (4.18) dobijamo

$$\underset{1}{P}{}^h_{ijk} = \underset{1}{\overline{P}}{}^h_{ijk},$$

gde je geometrijski objekat $\underset{1}{P}{}^h_{ijk}$ definisan sa (4.16), dok je geometrijski objekat $\underset{1}{\overline{P}}{}^h_{ijk}$ definisan na isti način. Pošto generalisani Kristofelovi simboli nisu tenzori, ovaj geometrijski objekat nije tenzor. Analogno možemo razmotriti slučaj kada je $\theta = 2$. □

Teorema 4.2.5. [58]*Neka su* (M,g,F) *i* $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ *generalisani hiperbolički Kelerovi prostori i neka* *je $f: M \to \overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje, tada su geometrijski objekti definisani sa*

$$\begin{aligned}\underset{\theta}{P}{}^h_{ijk} = \underset{\theta}{R}{}^h_{ijk} + \frac{1}{n+2}\Big[&\delta^h_j(\underset{\theta}{R}_{ik} - \underset{\theta}{Q}_{ik}) - \delta^h_k(\underset{\theta}{R}_{ij} - \underset{\theta}{Q}_{ij}) + \delta^h_i(\underset{\theta}{R}_{[jk]} - \underset{\theta}{Q}_{[jk]})\big] \\ &- F^h_k(\underset{\theta}{R}_{pj} - \underset{\theta}{Q}_{pj})F^p_i + F^h_j(\underset{\theta}{R}_{pk} - \underset{\theta}{Q}_{pk})F^p_i \\ &- F^h_i\big((\underset{\theta}{R}_{pj} - \underset{\theta}{Q}_{pj})F^p_k - (\underset{\theta}{R}_{pk} - \underset{\theta}{Q}_{pk})F^p_j\big) \\ &+ (-1)^{\theta-1}\big(\underset{1}{T}{}^h_{jk}\Gamma^s_{is} + \delta^h_i\Gamma^s_{ps}\underset{1}{T}{}^p_{jk} \\ &+ F^h_p\underset{1}{T}{}^p_{jk}\Gamma^s_{qs}F^q_i + \Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jk}F^h_i\big)\Big], \quad \theta = 3,4,\end{aligned} \tag{4.30}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\underset{\theta}{Q}_{ij} = \frac{(-1)^{\theta-1}}{n+2}\Big(&\Gamma^s_{ps}\underset{1}{T}{}^p_{ji} + \frac{n-1}{n-2}F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{jq}\Gamma^s_{rs}F^r_i + \frac{1}{n-2}F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{iq}\Gamma^s_{rs}F^r_j \\ &+ \frac{n-1}{n-2}\Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jr}F^r_i + \frac{1}{n-2}\Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{ir}F^r_j \\ &+ \frac{1}{n-2}\big(F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{rp}F^r_j\Gamma^s_{is} + \Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{ri}F^r_j\big)_{(ij)}\Big), \quad \theta = 3,4,\end{aligned}$$

invarijantni pri preslikavanju f.

Dokaz. Tenzori krivine $\underset{3}{R}$ i $\underset{3}{\overline{R}}$ generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$, respektivno, zadovoljavaju relaciju [49]

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{3}{R}(X,Y)Z + \underset{2}{\nabla}_X\underset{1}{P}(Z,Y) - \underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{P}(X,Z) \\ &+ \underset{1}{P}(X,\underset{1}{P}(Z,Y)) - \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(X,Z),Y) + \underset{1}{T}(\underset{1}{P}(X,Y),Z).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Označimo

$$\underset{\theta}{\psi}(X,Y) = \underset{\theta}{\nabla}_Y\psi(X) - \psi(X)\psi(Y) + \psi(FX)\psi(FY), \ \theta = 1,2.$$

Sada na osnovu definicija kovarijantnih izvoda prve i druge vrste zaključujemo da je

$$\underset{2}{\psi}(X,Y) = \underset{1}{\psi}(X,Y) + \psi(\underset{1}{T}(X,Y)). \tag{4.32}$$

Zamenjujući (4.15) u (4.31) i koristeći (4.32), dobijamo da je

$$\begin{aligned}\underset{3}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{3}{R}(X,Y)Z + Y\cdot\underset{1}{\psi}(Z,X) + Y\cdot\psi(\underset{1}{T}(Z,X) + Z\cdot\sum_{CA(X,Y)}\underset{1}{\psi}(Y,X) + Z\cdot\psi(\underset{1}{T}(Y,X)) \\ &- X\cdot\underset{1}{\psi}(Z,Y) - FX\cdot\underset{1}{\psi}(FZ,Y) + FY\cdot\underset{1}{\psi}(FZ,X) + FY\cdot\psi(\underset{1}{T}(FZ,X)) \\ &- FZ\cdot\big(\underset{1}{\psi}(FX,Y) - \underset{1}{\psi}(FY,X)\big) + FZ\cdot\psi(\underset{1}{T}(FY,X)) + \underset{1}{T}(Y,Z)\cdot\psi(X) \\ &+ \underset{1}{T}(X,Z)\cdot\psi(Y) + \underset{1}{T}(FY,Z)\cdot\psi(FX) + \underset{1}{T}(FX,Z)\cdot\psi(Y).\end{aligned}$$

Ostatak dokaza je analogan dokazu Teoreme 4.2.4. □

Teorema 4.2.6. [58] *Neka su* (M,g,F) *i* $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ *generalisani hiperbolički Kelerovi prostori i neka je* $f : M \to \overline{M}$ *ekvitorziono HP preslikavanje, tada je tenzor definisan sa*

$$\underset{5}{P}{}^h_{ijk} = \underset{5}{R}{}^h_{ijk} + \frac{1}{n+2}\Big[\underset{5}{R}_{ki}\delta^h_j - \underset{5}{R}_{ji}\delta^h_k + \underset{5}{R}_{kp}F^p_i F^h_j - \underset{5}{R}_{jp}F^p_i F^h_k + 2\underset{5}{R}_{kp}F^p_j F^h_i\Big],$$

invarijantan pri preslikavanju f.

Dokaz. Tenzori krivine $\underset{5}{R}$ i $\underset{5}{\overline{R}}$ generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$, respektivno, zadovoljavaju relaciju [49]

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{5}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}\Big(\underset{1}{\nabla}_X \underset{1}{P}(Z,Y) - \underset{2}{\nabla}_Y \underset{1}{P}(Z,X) + \underset{2}{\nabla}_X \underset{1}{P}(Y,Z) - \underset{1}{\nabla}_Y \underset{1}{P}(X,Z)\\ &+ \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(Y,\underset{1}{P}(Z,X)) + \underset{1}{P}(X,\underset{1}{P}(Y,Z)) - \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(X,Z),Y)\Big)\\ &+ \underset{1}{P}(\underset{1}{T}(Z,X),Y) + \underset{1}{P}(\underset{1}{T}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(Y,\underset{1}{T}(Z,X)) - \underset{1}{P}(X,\underset{1}{T}(Z,Y)).\end{aligned}$$

Pošto je preslikavanje f ekvitorziono, bilinearna forma $\underset{1}{P}$ je simetrična, stoga se poslednja relacija može zapisati u obliku

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{5}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}(\underset{1}{\nabla}_X + \underset{2}{\nabla}_X)\underset{1}{P}(Y,Z) - \frac{1}{2}(\underset{1}{\nabla}_Y + \underset{2}{\nabla}_Y)\underset{1}{P}(X,Z)\\ &+ \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(Y,\underset{1}{P}(Z,X)),\end{aligned}$$

t.j.

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{5}{R}(X,Y)Z + \nabla_X \underset{1}{P}(Y,Z) - \nabla_Y \underset{1}{P}(X,Z)\\ &+ \underset{1}{P}(\underset{1}{P}(Z,Y),X) - \underset{1}{P}(Y,\underset{1}{P}(Z,X)).\end{aligned}$$

Zamenom (4.15) u poslednju relaciju dobijamo

$$\begin{aligned}\underset{5}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{5}{R}(X,Y)Z - X\cdot\psi(Y,Z) + Y\cdot\psi(X,Z)\\ &- FX\cdot\psi(Y,FZ) + FY\cdot\psi(X,FZ)\\ &+ 2\psi(X,FY)\cdot FZ,\end{aligned} \tag{4.33}$$

gde smo označili

$$\psi(X,Y) = \nabla_Y\psi(X) - \psi(X)\psi(Y) + \psi(FX)\psi(FY).$$

U lokalnim koordinatama, jednačina (4.33) glasi

$$\underset{5}{\overline{R}}{}^h_{ijk} = \underset{5}{R}{}^h_{ijk} - \delta^h_k\psi_{ji} + \delta^h_j\psi_{ki} - F^h_k\psi_{jp}F^p_i + F^h_j\psi_{kp}F^p_i + 2\psi_{kp}F^p_j F^h_i. \tag{4.34}$$

Kontrakcijom u poslednjoj relaciji po indeksima h i k dobijamo

$$\underset{5}{\overline{R}}_{ij} = \underset{5}{R}_{ij} - (n+2)\psi_{ji}. \tag{4.35}$$

Zamenjujući (4.35) u (4.34) dobijamo dokaz teoreme. □

4.3 Otvoren problem

U slučaju kada je generalisana (nesimetrična) Rimanova metrika g simetrična, generalisani hiperbolički Kelerov prostor svodi se na uobičajeni hiperbolički Kelerov prostor. Tada se tenzori krivine $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,5$ svode na Rimanov tenzor krivine R, dok se geometrijski objekti $\underset{\theta}{P}{}^h_{ijk}$, $\theta = 1,\dots,4$ i tenzor $\underset{5}{P}{}^h_{ijk}$ svode na para-holomorfno projektivni tenzor krivine [67]

$$P^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \frac{1}{n+2}\Big(R_{ki}\delta^h_j - R_{ji}\delta^h_k + R_{kp}F^p_iF^h_j - R_{jp}F^p_iF^h_k \\ + 2R_{kp}F^p_jF^h_i\Big).$$

Otvoreno je pitanje da li postoji još neki tenzor koji će se svesti na para-holomorfno projektivni tenzor krivine u uobičajenom hiperboličkom Kelerovom prostoru, i ukoliko je odgovor pozitivan, koliki je maksimalan broj takvih tenzora?

4.4 Generalisanih hiperbolički Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu

Na isti način kao što smo u Definiciji 3.3.1 uveli generalisane Kelerove prostore u Ajzenhartovom smislu, možemo definisati generalisane hiperboličke Kelerove prostore u Ajzenhartovom smislu.

Definicija 4.4.1. *Generalisani Rimanov prostor* (M,g) *naziva se* generalisani hiperbolički Kelerov prostor u Ajzenhartovom smislu *ako na mnogostrukosti* M *postoji tenzorsko polje* F *tipa* $(1,1)$ *koje ispunjava*

$$F^2 = I, \tag{4.36}$$
$$\underline{g}(FX,FY) = -\underline{g}(X,Y), \tag{4.37}$$
$$\nabla F = 0, \tag{4.38}$$

gde je ∇ *koneksija Levi-Čivita koja odgovara simetričnom delu* $\underline{g}$ *metrike* g *i* I *označava identičan operator.*

Propozicija 4.4.1. *Neka je* (M,g,F) *generalisani hiperbolički Kelerov prostor u Ajzenhartovom smislu, tada tenzori krivine* $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,4$ *i tenzor torzije* $\underset{1}{T}$ *zadovoljavaju*

$$\begin{aligned}\underset{1}{R}(X,Y)FZ =& F(\underset{1}{R}(X,Y)Z) + \frac{1}{2}\underset{1}{T}(FZ,\underset{1}{T}(Y,X)) \\ &+ \frac{1}{2}F(\underset{1}{T}(Z,\underset{1}{T}(Y,X))) + \underset{1}{S}(X,Y,Z),\end{aligned} \tag{4.39}$$

pri čemu je $\underset{1}{S}$ *tenzorsko polje tipa* $(1,3)$ *određeno u komponentama sa*

$$\underset{1}{S}{}^h{}_{ijk} = \Big(\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^h{}_{pj\underset{1}{|}k}F^p_i + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^h_{pj}(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ik}F^p_q) - \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^p{}_{ij\underset{1}{|}k}F^h_p - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^p_{ij}(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_p - \underset{1}{T}{}^q_{pk}F^h_q)\Big)_{[jk]};$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{R}(X,Y)FZ =& F(\underset{2}{R}(X,Y)Z) + \frac{1}{2}\underset{1}{T}(FZ,\underset{1}{T}(Y,X)) \\ &+ \frac{1}{2}F(\underset{1}{T}(Z,\underset{1}{T}(Y,X))) + \underset{2}{S}(X,Y,Z),\end{aligned} \tag{4.40}$$

gde je $\underset{2}{S}$ tenzorsko polje tipa $(1,3)$ određeno sa

$$\underset{2}{S}{}^{h}{}_{ijk} = \Big(\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{h}{}_{jp\underset{1}{|}k}F^{p}_{i} + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{h}_{jp}(\underset{1}{T}{}^{p}_{kq}F^{q}_{i} - \underset{1}{T}{}^{q}_{ki}F^{p}_{q}) - \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{p}{}_{ji\underset{1}{|}k}F^{h}_{p} - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{p}_{ji}(\underset{1}{T}{}^{h}_{kq}F^{q}_{p} - \underset{1}{T}{}^{q}_{kp}F^{h}_{q})\Big)_{[jk]}$$

$$\underset{3}{R}(X,Y)FZ = F(\underset{3}{R}(X,Y)Z) + \underset{3}{S}(X,Y,Z), \tag{4.41}$$

gde je $\underset{3}{S}$ tenzorsko polje tipa $(1,3)$ definisano u komponentama sa

$$\begin{aligned}\underset{3}{S}{}^{h}{}_{ijk} =&\Big(\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{h}{}_{pj\underset{2}{|}k}F^{p}_{i} + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{h}_{pj}(\underset{1}{T}{}^{p}_{kq}F^{q}_{i} - \underset{1}{T}{}^{q}_{ki}F^{p}_{q})\\
&- \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{p}{}_{ij\underset{2}{|}k}F^{h}_{p} - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{p}_{ij}(\underset{1}{T}{}^{h}_{kq}F^{q}_{p} - \underset{1}{T}{}^{q}_{kp}F^{p}_{q})\\
&- \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{h}{}_{kp\underset{1}{|}j}F^{p}_{i} - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{h}_{kp}(\underset{1}{T}{}^{p}_{qj}F^{q}_{i} - \underset{1}{T}{}^{q}_{ij}F^{p}_{q})\\
&+ \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{p}{}_{ki\underset{1}{|}j}F^{h}_{p} + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{p}_{ki}(\underset{1}{T}{}^{h}_{qj}F^{q}_{p} - \underset{1}{T}{}^{q}_{pj}F^{h}_{q})\Big)_{[jk]},\end{aligned}$$

$$\underset{4}{R}(X,Y)FZ + F(\underset{3}{R}(Y,X)Z) = \underset{4}{S}(X,Y,Z), \tag{4.42}$$

gde je $\underset{4}{S}$ tenzorsko polje tipa $(1,3)$ određeno sa

$$\begin{aligned}\underset{4}{S}{}^{h}{}_{ijk} =&\Big(\frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{h}{}_{pj\underset{4}{|}k}F^{p}_{i} + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{h}_{pj}(\underset{1}{T}{}^{p}_{kq}F^{q}_{i} - \underset{1}{T}{}^{q}_{ik}F^{p}_{q})\\
&- \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{p}{}_{ji\underset{4}{|}k}F^{h}_{p} - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{p}_{ji}(\underset{1}{T}{}^{h}_{kq}F^{q}_{p} - \underset{1}{T}{}^{q}_{pk}F^{h}_{q})\\
&+ \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{h}{}_{kp\underset{3}{|}j}F^{p}_{i} + \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{h}_{kp}(\underset{1}{T}{}^{p}_{qj}F^{q}_{i} - \underset{1}{T}{}^{q}_{ji}F^{p}_{q})\\
&- \frac{1}{2}\underset{1}{T}{}^{p}{}_{ik\underset{3}{|}j}F^{h}_{p} - \frac{1}{4}\underset{1}{T}{}^{p}_{ik}(\underset{1}{T}{}^{h}_{qj}F^{q}_{p} - \underset{1}{T}{}^{q}_{jp}F^{h}_{q})\Big)_{[jk]}.\end{aligned}$$

Propozicija 4.4.2. *Tenzori krivine $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,4$, tipa $(0,4)$ i tenzori torzija tipa $(1,2)$ i $(0,3)$, kao i tenzorska polja $\underset{\theta}{S}$, $\theta = 1,\dots,4$ tipa $(0,4)$ generalisanog hiperboličkog Kelerovog prostora u Ajzenhartovom smislu (M,g,F) zadovoljavaju*

$$\begin{aligned}\underset{1}{R}(X,Y,FZ,W) + \underset{1}{R}(X,Y,Z,FW) =&\frac{1}{2}\big(\underset{1}{T}(W,FZ,\underset{1}{T}(Y,X)) - \underset{1}{T}(FW,Z,\underset{1}{T}(Y,X))\big)\\
&+ \underset{1}{S}(W,Z,Y,X),\\
\underset{2}{R}(X,Y,FZ,W) + \underset{2}{R}(X,Y,Z,FW) =&-\frac{1}{2}\big(\underset{1}{T}(W,\underset{1}{T}(Y,X),FZ) + \underset{1}{T}(FW,Z,\underset{1}{T}(Y,X))\big)\\
&+ \underset{2}{S}(W,Z,Y,X),\\
\underset{3}{R}(X,Y,FZ,W) + \underset{3}{R}(X,Y,Z,FW) =&\underset{3}{S}(W,Z,Y,X),\\
\underset{4}{R}(X,Y,FZ,W) - \underset{3}{R}(Y,X,Z,FW) =&\underset{4}{S}(W,Z,Y,X).\end{aligned}$$

4.5 HP preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu

U ovom odeljku ćemo posmatrati HP preslikavanja među generalisanim hiperboličkim Kelerovim prostorima u Ajzenhartovom smislu. Kako su generalisani hiperbolički Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu uvedeni Definicijom 4.4.1 opštiji od generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora datih Definicijom 4.1.1, posmatraćemo geometrijske objekte u opštijim prostorima koji su invarijantni pri ekvitorzionim HP preslikavanjima.

Teorema 4.5.1. [58, 67, 69] *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani hiperbolički Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu dimenzije $2n\geq 4$. Difeomorfizam $f:M\to\overline{M}$ je HP preslikavanje ako i samo ako važi*

$$\underset{1}{P}(X,Y)=\psi(X)Y+\psi(Y)X+\psi(FX)FY+\psi(FY)FX+\xi(X,Y), \tag{4.43}$$

gde $X,Y\in T_p(M)$, ψ je linearna forma i ξ je antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$.

Lako je proveriti [58]

$$\overline{\Gamma}^p_{ip}-\Gamma^p_{ip}=(n+2)\psi_i. \tag{4.44}$$

U slučaju HP preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu imamo invarijantan geometrijski objekat koji je analogan Tomasovom projektivnom parametru iz teorije geodezijskih preslikavanja.

Teorema 4.5.2. [58] *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu dimenzije $2n\geq 4$ i neka je $f:M\to\overline{M}$ HP preslikavanje, tada je geometrijski objekat*

$$\Gamma^h_{\underline{ij}}-\frac{1}{n+2}\left(\Gamma^p_{pi}\delta^h_j+\Gamma^p_{pj}\delta^h_i+\Gamma^q_{qp}F^p_{(i}F^h_{j)}\right),$$

invarijantan pri preslikavanju f.

4.5.1 Ekvitorziona HP preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu

Ekvitorziona HP preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu se mogu razmatrati analogno ekvitorzionim HP preslikavanjima generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora uvedenih u radu [58]. Neka je $f:M\to\overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora u Ajzenhartovom smislu, tada je tenzor deformacije $\underset{1}{P}$ pri preslikavanju f simetrična bilinearna forma data sa [58]

$$\underset{1}{P}(X,Y)=\psi(X)Y+\psi(Y)X+\psi(FX)FY+\psi(FY)FX.$$

Teorema 4.5.3. *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani hiperbolički Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu i neka je $f:M\to\overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje, tada je geometrijski objekat definisan sa*

$$\begin{aligned}\underset{1}{P}{}^h_{ijk}=\underset{1}{R}{}^h_{ijk}+\frac{1}{n+2}\Big[&\delta^h_j\underset{1}{Q}_{ik}-\delta^h_k\underset{1}{Q}_{ij}+\delta^h_i\underset{1}{Q}_{[jk]}-F^h_k\underset{1}{Q}_{pj}F^p_i\\&+F^h_j\underset{1}{Q}_{pk}F^p_i-F^h_i\big(\underset{1}{Q}_{pj}F^p_k-\underset{1}{Q}_{pk}F^p_j\big)\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\big(F^h_j\Gamma^r_{pr}(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_i-\underset{1}{T}{}^q_{ik}F^p_q)\big)_{[ij]}\\
&-\frac{1}{2}F^h_i\Gamma^r_{pr}(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_j-\underset{1}{T}{}^p_{qj}F^q_k+2\underset{1}{T}{}^q_{kj}F^p_q)\\
&-\frac{1}{2}\Gamma^r_{pr}F^p_i(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_j-\underset{1}{T}{}^h_{qj}F^q_k+2\underset{1}{T}{}^q_{kj}F^h_q)\\
&-\frac{1}{2}\big(\Gamma^r_{pr}F^p_j(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_i-\underset{1}{T}{}^q_{ik}F^h_q)\big)_{[ij]}\\
&-\underset{1}{T}{}^h_{jk}\Gamma^p_{ip}-\delta^h_i\Gamma^q_{pq}\underset{1}{T}{}^p_{jk}-F^h_p\underset{1}{T}{}^p_{jk}\Gamma^r_{qr}F^q_i\\
&-\Gamma^r_{pr}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jk}F^h_i\Big],
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{Q}_{ij}=\underset{1}{R}_{ij}-\frac{1}{n+2}\Big(&\Gamma^q_{pq}\underset{1}{T}{}^p_{ji}+\frac{n}{2(n-2)}(\Gamma^s_{ps}F^p_i\underset{1}{T}{}^q_{rj}F^r_q)\\
&+\frac{n-1}{n-2}F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{jq}\Gamma^s_{rs}F^r_i-\frac{1}{n-2}F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{iq}\Gamma^s_{rs}F^r_j\\
&+\frac{1}{n-2}\big(\Gamma^s_{is}\underset{1}{T}{}^p_{qr}F^q_pF^r_j+F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{rq}F^r_j\Gamma^s_{is}\big)_{(ij)}\\
&+\frac{1}{2}\big(\Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jr}F^r_i\big)_{[ij]}\Big),
\end{aligned}
$$

invarijantan pri preslikavanju f.

Teorema 4.5.4. *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani hiperbolički Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu i neka je $f:M\to\overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje, tada je geometrijski objekat*

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{P}{}^h_{ijk}=\underset{2}{R}{}^h_{ijk}+\frac{1}{n+2}\Big[&\delta^h_j\underset{2}{Q}_{ik}-\delta^h_k\underset{2}{Q}_{ij}+\delta^h_i\underset{2}{Q}_{[jk]}-F^h_k\underset{2}{Q}_{pj}F^p_i\\
&+F^h_j\underset{2}{Q}_{pk}F^p_i-F^h_i\big(\underset{2}{Q}_{pj}F^p_k-\underset{2}{Q}_{pk}F^p_j\big)\\
&+\frac{1}{2}\big(F^h_j\Gamma^r_{pr}(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_i-\underset{1}{T}{}^q_{ik}F^p_q)\big)_{[ij]}\\
&+\frac{1}{2}F^h_i\Gamma^r_{pr}(\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_j-\underset{1}{T}{}^p_{qj}F^q_k+2\underset{1}{T}{}^q_{kj}F^p_q)\\
&+\frac{1}{2}\Gamma^r_{pr}F^p_i(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_j-\underset{1}{T}{}^h_{qj}F^q_k+2\underset{1}{T}{}^q_{kj}F^h_q)\\
&+\frac{1}{2}\big(\Gamma^r_{pr}F^p_j(\underset{1}{T}{}^h_{qk}F^q_i-\underset{1}{T}{}^q_{ik}F^h_q)\big)_{[ij]}\\
&+\underset{1}{T}{}^h_{jk}\Gamma^p_{ip}+\delta^h_i\Gamma^q_{pq}\underset{1}{T}{}^p_{jk}+F^h_p\underset{1}{T}{}^p_{jk}\Gamma^r_{qr}F^q_i\\
&+\Gamma^r_{pr}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jk}F^h_i\Big],
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{Q}_{ij}=\underset{2}{R}_{ij}+\frac{1}{n+2}\Big(&\Gamma^q_{pq}\underset{1}{T}{}^p_{ji}-\frac{n-1}{2(n-1)}(\Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{jr}F^r_i)_{[ij]}\\
&+\frac{n}{2(n-1)}(\Gamma^s_{is}\underset{1}{T}{}^p_{qr}F^q_pF^r_j-F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{rq}F^r_j\Gamma^s_{is}+\Gamma^s_{ps}F^p_i\underset{1}{T}{}^q_{rj}F^r_q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Gamma^s_{is}\underset{1}{T}{}^p_{qr}F^q_pF^r_j - F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{rq}F^r_j\Gamma^s_{is}\big)_{(ij)}\\
&+\frac{n-2}{2(n-1)}\big(F^q_p\underset{1}{T}{}^p_{jq}\psi_rF^r_i\big)_{(ij)}\Big),
\end{aligned}
$$

invarijantan pri preslikavanju f.

Teorema 4.5.5. *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani hiperbolički Kelerovi prostori u Ajzenhartovom smislu i neka je $f:M\to\overline{M}$ ekvitorziono HP preslikavanje, tada su geometrijski objekti*

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta}{P}{}^h_{ijk} = \underset{\theta}{R}{}^h_{ijk} + \frac{1}{n+2}\Big[&\delta^h_j\underset{\theta}{Q}_{ik} - \delta^h_j\underset{1}{T}{}^p_{ik}\Gamma^s_{ps} + \delta^h_i\underset{\theta}{Q}_{[jk]} - \delta^h_i\underset{1}{T}{}^p_{jk}\Gamma^s_{ps}\\
&- \delta^h_k\underset{\theta}{Q}_{ij} - F^h_k\underset{\theta}{Q}_{pj}F^p_i + F^h_j\underset{\theta}{Q}_{pk}F^p_i - F^h_j\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_i\Gamma^s_{ps}\\
&- F^h_i\underset{\theta}{Q}_{pj}F^p_k + F^h_i\underset{\theta}{Q}_{pk}F^p_j - F^h_i\underset{1}{T}{}^p_{qk}F^q_j\Gamma^s_{ps}\\
&- \frac{1}{2}\big(F^h_j\Gamma^s_{ps}(\underset{1}{T}{}^p_{kq}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ki}F^p_q)\big)_{[jk]}\\
&- \frac{1}{2}\Gamma^s_{ps}F^p_i(\underset{1}{T}{}^h_{kq}F^q_j - \underset{1}{T}{}^h_{qj}F^q_k) - \frac{1}{2}F^h_i\Gamma^s_{ps}(\underset{1}{T}{}^p_{kq}F^q_j - \underset{1}{T}{}^p_{qj}F^q_k)\\
&- \frac{1}{2}\Gamma^s_{ps}F^p_j(\underset{1}{T}{}^h_{kq}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ki}F^h_q) + \frac{1}{2}\Gamma^s_{ps}F^p_k(\underset{1}{T}{}^h_{qj}F^q_i - \underset{1}{T}{}^q_{ij}F^h_q)\\
&- \underset{1}{T}{}^h_{ji}\Gamma^p_{kp} - \underset{1}{T}{}^h_{ki}\Gamma^p_{jp} - \underset{1}{T}{}^h_{pi}F^p_j\Gamma^r_{qr}F^q_k - \underset{1}{T}{}^h_{pi}F^p_k\Gamma^r_{qr}F^q_j\Big],\quad \theta=3,4,
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta}{Q}_{ij} = \underset{\theta}{R}_{ij} &+ \frac{n-4}{4(n^2-4)}\big(\Gamma^s_{ps}F^p_q\underset{1}{T}{}^q_{rj}F^r_i\big)_{[ij]}\\
&- \frac{1}{n+2}\underset{1}{T}{}^p_{ji}\Gamma^s_{ps} - \frac{1}{4(n+2)}\underset{1}{T}{}^r_{pi}F^p_j\Gamma^s_{qs}F^q_r\\
&- \frac{1}{2(n+2)}\big(\underset{1}{T}{}^r_{pi}F^p_r\Gamma^s_{qs}F^q_j\big)_{[ij]},\quad \theta=3,4,
\end{aligned}
$$

invarijantni pri preslikavanju f.

Poglavlje 5

Generalisane paraboličke Kelerove mnogostrukosti

U novije vreme HP preslikavanjima među paraboličkim Kelerovim mnogostrukostima su se bavili H. Čuda, J. Mikeš, P. Peška i M. Šiha [70, 57]. Mnogi rezultati o HP preslikavanjima paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti mogu se naći u odličnoj monografiji [42]. U ovom poglavlju ćemo najpre prezentovati rezultate rada [61], t.j. definisaćemo generalisane m-paraboličke Kelerove mnogostrukosti i posmatrati HP preslikavanja među takvim mnogostrukostima. Zatim ćemo se baviti specijalnim kanoničkim preslikavanjima drugog tipa među generalisanim paraboličkim Kelerovim mnogostrukostima, sledeći rezultate rada [60].

5.1 Generalisane m-paraboličke Kelerove mnogostrukosti

Paraboličke Kelerove prostore je prvi razmatrao V.V. Višnevski kao parabolički analogon A-prostora, koji su kasnije dobili naziv parabolički Kelerovi prostori [42]. Rimanova mnogostrukost (M,g) parne dimenzije $n>2$ naziva se *m-parabolička Kelerova mnogostrukost* ako pored metrike g na mnogostrukosti M postoji tenzorsko polje F tipa $(1,1)$ takvo da je $\operatorname{rank}(F)=m\leq\frac{n}{2}$ i da važe sledeći uslovi [42]

$$\begin{aligned} F^2 &= 0, \\ g(X,FX) &= 0 \\ \nabla F &= 0, \end{aligned}$$

gde je ∇ koneksija Levi-Čivita određena metrikom g, dok je X proizvoljno tangentno vektorsko polje na mnogostrukosti M.

5.1.1 HP preslikavanja generalisanih m-paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti

Generalisani eliptički i hiperbolički Kelerovi prostori su definisani u radovima [52] i [58], respektivno. Koristeći definiciju uobičajene m-paraboličke Kelerove mnogostrukosti (Definicija 13.7 u [42]) i definiciju generalisanog Rimanovog prostora u radu [61] smo definisali generalisane m-paraboličke Kelerove mnogostrukosti.

Definicija 5.1.1. [61] *Generalisana Rimanova mnogostrukost* (M, g) *parne dimenzije* $n > 2$ *naziva se* generalisana m-parabolička Kelerova mnogostrukost *ako postoji tenzorsko polje* F *tipa* $(1,1)$ *na mnogostrukosti* M *takvo da je* $\operatorname{rank}(F) = m \leq \frac{n}{2}$ *i ispunjava sledeće uslove*

$$F^2 = 0, \tag{5.1}$$
$$\underline{g}(X, FX) = 0 \tag{5.2}$$
$$\nabla F = 0, \tag{5.3}$$

gde ∇ *označava koneksiju Levi-Čivita koja odgovara simetričnom delu* $\underline{g}$ *metrike* g*, dok je* X *proizvoljno tangentno vektorsko polje na mnogostrukosti* M*. U slučaju kada je* $\operatorname{rank}(F) = m = \frac{n}{2}$ *mnogostrukost* (M, g) *naziva se* generalisana parabolička Kelerova mnogostrukost.

Definicija 5.1.2. [42, 61] *Kriva* $l : I \to M$ *na generalisanoj m-paraboličkoj Kelerovoj mnogostrukosti* M *sa metrikom* g *koja ispunjava uslov regularnosti* $\lambda(t) = \frac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0, t \in I$*, naziva se* holomorfno (analitički) planarna kriva *ako za neke funkcije* ρ_1 *i* ρ_2 *parametra* t *važi obična diferencijalna jednačina*

$$\nabla_{\lambda(t)}\lambda(t) = \rho_1(t)\lambda(t) + \rho_2(t)F\lambda(t),$$

gde ∇ *označava koneksiju Levi-Čivita koja odgovara simetričnom delu* $\underline{g}$ *metrike* g*.*

Teorema 5.1.1. [42, 61]*Potreban i dovoljan uslov za egzistenciju HP preslikavanja* $f : M \to \overline{M}$ *generalisanih m-paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti* M *i* $\overline{M}$ *je dat u obliku*

$$\underset{1}{P}(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X + \varphi(X)FY + \varphi(Y)FX + \xi(X,Y), \tag{5.4}$$

gde je φ *linearna forma, dok je* ψ *gradijentna forma, t.j.* $\psi(X) = \nabla_X \phi$*, gde je* ϕ *funkcija. Ovde je* $\psi(X) = \varphi(FX)$ *i* ξ *je antisimetrično tenzorsko polje tipa* $(1,2)$*.*

Dokaz. Neka je $f : M \to \overline{M}$ HP preslikavanje generalisanih m-paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti M i $\overline{M}$. Tada važi [41]

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \psi(X)Y + \psi(Y)X + \varphi(X)FY + \varphi(Y)FX. \tag{5.5}$$

gde je φ 1-forma i ψ je gradijentna forma takva da važi $\psi(X) = \varphi(FX)$.

Pošto je

$$\overline{\nabla}_X Y = \underset{1}{\overline{\nabla}}_X Y - \underset{1}{\overline{T}}(X,Y)$$

i

$$\nabla_X Y = \underset{1}{\nabla}_X Y - \underset{1}{T}(X,Y),$$

iz relacije (5.5) možemo zaključiti da (5.4) važi za antisimetrično tenzorsko polje ξ definisano sa

$$\xi(X,Y) = \underset{1}{\overline{T}}(X,Y) - \underset{1}{T}(X,Y),$$

što dokazuje direktan deo ove teoreme. Obrnuti smer se jednostavno dokazuje. $\square$

Naš cilj u radu [61] bio je da preformulišemo uslov (5.4) u terminima simetričnog dela $\underline{g}$ metrike g i kovarijantnog izvoda prve vrste u odnosu na metriku g.

Teorema 5.1.2. [61] *Generalisana m-parabolička Kelerova mnogostrukost M sa metrikom g dopušta HP preslikavanje na generalisanu m-paraboličku Kelerovu mnogostrukost $\overline{M}$ sa metrikom $\overline{g}$ ako i samo ako simetričan deo $\underline{\overline{g}}$ metrike $\overline{g}$ ispunjava*

$$\begin{aligned}\underset{1}{\nabla}_Z\underline{\overline{g}}(X,Y) = 2\psi(Z)\underline{\overline{g}}(X,Y) + \sum_{CS(X,Y)} \Big(&\psi(X)\underline{\overline{g}}(Y,Z) + \varphi(X)\underline{\overline{g}}(Y,FZ) \\ &+ \underline{\overline{g}}(\xi(X,Z),Y)\Big),\end{aligned} \tag{5.6}$$

gde je φ linearna forma, ψ je gradijentna forma takva da važi $\psi(X) = \varphi(FX)$ i ξ je antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$.

Dokaz. Pošto je metrika $\underline{\overline{g}}$ kovarijantno konstantna pri kovarijantnom izvodu prve vrste (koji odgovara koneksiji $\underset{1}{\overline{\nabla}}$), nije teško proveriti relaciju

$$\underset{1}{\nabla}_Z\underline{\overline{g}}(X,Y) = \underline{\overline{g}}(\underset{1}{P}(X,Z),Y) + \underline{\overline{g}}(X,\underset{1}{P}(Y,Z)). \tag{5.7}$$

Nakon zamene izraza za $\underset{1}{P}(X,Y)$ iz (5.4) u prethodnu jednačinu i koristeći (5.3) dobijamo (5.6).

Dokažimo sada obrnuti deo tvrđenja. Analogno dokazu Teoreme 3.1 u [41] uvedimo pomoćno tenzorsko polje $\underset{1}{Q}$ tipa $(1,3)$ definisano sa [61]

$$\underset{1}{Q}(X,Y,Z) = \underline{\overline{g}}\big(Z, \underset{1}{P}(X,Y) - \sum_{CS(X,Y)} \big(\psi(X)Y + \varphi(X)FY\big) - \xi(X,Y)\big). \tag{5.8}$$

Pošto je metrika $\underline{\overline{g}}$ simetrična, relacija (5.6) dobija oblik

$$\begin{aligned}\underset{1}{\nabla}_Z\underline{\overline{g}}(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} \Big(&\psi(Z)\underline{\overline{g}}(X,Y) + \psi(X)\underline{\overline{g}}(Z,Y) \\ &- \varphi(X)\underline{\overline{g}}(FZ,Y) + \underline{\overline{g}}(\xi(X,Z),Y)\Big),\end{aligned} \tag{5.9}$$

dok relacija (5.7) postaje

$$\underset{1}{\nabla}_Z\underline{\overline{g}}(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} \underline{\overline{g}}(\underset{1}{P}(X,Z),Y). \tag{5.10}$$

Sada iz (5.9) i (5.10) dobijamo

$$\sum_{CS(X,Y)} \underset{1}{Q}(X,Z,Y) = 0,$$

t.j. tenzorsko polje $\underset{1}{Q}$ je antisimetrično u odnosu na prvi i treći argument. Tenzorsko polje $\underset{1}{Q}$ je očigledno simetrično u odnosu na prvi i drugi argument. Ove činjenice obezbeđuju validnost sledećeg niza jednakosti

$$\begin{aligned}\underset{1}{Q}(X,Y,Z) &= \underset{1}{Q}(Y,X,Z) = -\underset{1}{Q}(Z,X,Y) = -\underset{1}{Q}(X,Z,Y) \\ &= \underset{1}{Q}(Y,Z,X) = \underset{1}{Q}(Z,Y,X) = -\underset{1}{Q}(X,Y,Z),\end{aligned}$$

što dalje implicira $\underset{1}{Q}(X,Y,Z) = 0$.

Metrika $\underline{\overline{g}}$ je regularna i tenzorsko polje $\underset{1}{Q}$ definisano sa (5.8) identički iščezava, tako da možemo zaključiti da važi

$$\underset{1}{P}(X,Y) - \sum_{CS(X,Y)} \big(\psi(X)Y + \varphi(X)FY\big) - \xi(X,Y) = 0,$$

čime se dokaz teoreme završava. □

Koristeći kovarijantni izvod druge vrste može se dokazati sledeća

Teorema 5.1.3. [61] *Generalisana m-parabolička Kelerova mnogostrukost M sa metrikom g dopušta HP preslikavanje na generalisanu m-paraboličku Kelerovu mnogostrukost $\overline{M}$ sa metrikom $\overline{g}$ ako i samo ako simetričan deo $\underline{\overline{g}}$ metrike $\overline{g}$ zadovoljava*

$$\begin{aligned}\underset{2}{\nabla}_Z\underline{\overline{g}}(X,Y) = 2\psi(Z)\underline{\overline{g}}(X,Y) + \sum_{CS(X,Y)} \Big(&\psi(X)\underline{\overline{g}}(Y,Z) + \varphi(X)\underline{\overline{g}}(Y,FZ) \\ &- \underline{\overline{g}}(\xi(X,Z),Y)\Big),\end{aligned} \tag{5.11}$$

gde je φ linearna forma, ψ je gradijentna forma takva da je $\psi(X) = \varphi(FX)$ i ξ je antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$.

Primedba 5.1.1. [61] *Važno je napomenuti da je bilo koji od uslova* (5.6) *i* (5.11) *ekvivalentan uslovu* [41]

$$\nabla_Z\underline{\overline{g}}(X,Y) = 2\psi(Z)\underline{\overline{g}}(X,Y) + \sum_{CS(X,Y)} \Big(\psi(X)\underline{\overline{g}}(Y,Z) + \varphi(X)\underline{\overline{g}}(Y,FZ)\Big), \tag{5.12}$$

gde ∇ označava simetričan deo nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{2}{\nabla}$.

5.1.2 Relacije među tenzorima krivine generalisanih m-paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti pri HP preslikavanjima

Relacije među tenzorima krivine $\underset{\theta}{R}$ i $\underset{\theta}{\overline{R}}$ $(\theta = 1,\dots,5)$ generalisanih m-paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti M i $\overline{M}$, respektivno, pri HP preslikavanju su date u Teoremi 5.1.4.

Teorema 5.1.4. [61] *Neka je $f : M \to \overline{M}$ HP preslikavanje i neka su $\underset{\theta}{R}$ i $\underset{\theta}{\overline{R}}$ tenzori krivine vrste θ $(\theta = 1,\dots,5)$ generalisanih m-paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti M i $\overline{M}$, respektivno. Tada su ispunjene sledeće relacije*

$$\begin{aligned}\underset{1}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{1}{R}(X,Y)Z - \psi(Z,Y)X + \psi(Z,X)Y - \varphi(Z,Y)FX \\ &+ \varphi(Z,X)FY + \big(\varphi(Y,X) - \varphi(X,Y)\big)FZ \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{CA(X,Y)} \big(\overline{\nabla}_X\underset{1}{\overline{T}}(Z,Y) - \nabla_X\underset{1}{T}(Z,Y)\big) \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)} \big(\underset{1}{\overline{T}}(\underset{1}{\overline{T}}(Z,Y),X) - \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Z,Y),X)\big),\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{\overline{R}}(X,Y)Z =& \underset{2}{R}(X,Y)Z - \psi(Z,Y)X + \psi(Z,X)Y - \varphi(Z,Y)FX \\ &+ \varphi(Z,X)FY + \big(\varphi(Y,X) - \varphi(X,Y)\big)FZ \\ &- \frac{1}{2}\sum_{CA(X,Y)} \big(\overline{\nabla}_X\underset{1}{\overline{T}}(Z,Y) - \nabla_X\underset{1}{T}(Z,Y)\big) \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)} \big(\underset{1}{\overline{T}}(\underset{1}{\overline{T}}(Z,Y),X) - \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Z,Y),X)\big),\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{3}{R}}(X,Y)Z =& \underset{3}{R}(X,Y)Z - \psi(Z,Y)X + \psi(Z,X)Y - \varphi(Z,Y)FX \\
&+ \varphi(Z,X)FY + \big(\varphi(Y,X) - \varphi(X,Y)\big)FZ \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{CS(X,Y)} \big(\overline{\nabla}_X \overline{\underset{1}{T}}(Z,Y) - \nabla_X \underset{1}{T}(Z,Y)\big) \\
&- \frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)} \big(\overline{\underset{1}{T}}(\overline{\underset{1}{T}}(Z,Y),X) - \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Z,Y),X)\big) \\
&- \frac{1}{2}\big(\overline{\underset{1}{T}}(\overline{\underset{1}{T}}(Y,X),Z) - \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Y,X),Z)\big),
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{4}{R}}(X,Y)Z =& \underset{4}{R}(X,Y)Z - \psi(Z,Y)X + \psi(Z,X)Y - \varphi(Z,Y)FX \\
&+ \varphi(Z,X)FY + \big(\varphi(Y,X) - \varphi(X,Y)\big)FZ \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{CS(X,Y)} \big(\overline{\nabla}_X \overline{\underset{1}{T}}(Z,Y) - \nabla_X \underset{1}{T}(Z,Y)\big) \\
&- \frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)} \big(\overline{\underset{1}{T}}(\overline{\underset{1}{T}}(Z,Y),X) - \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Z,Y),X)\big) \\
&+ \frac{1}{2}\big(\overline{\underset{1}{T}}(\overline{\underset{1}{T}}(Y,X),Z) - \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Y,X),Z)\big),
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\underset{5}{R}}(X,Y)Z =& \underset{5}{R}(X,Y)Z - \psi(Z,Y)X + \psi(Z,X)Y - \varphi(Z,Y)FX \\
&+ \varphi(Z,X)FY + \big(\varphi(Y,X) - \varphi(X,Y)\big)FZ \\
&- \frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)} \big(\overline{\underset{1}{T}}(\overline{\underset{1}{T}}(Z,Y),X) - \underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Z,Y),X)\big),
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

gde je $\varphi(X,Y)$ definisana sa

$$\varphi(X,Y) = \nabla_Y \varphi(X) - \psi(X)\varphi(Y) - \varphi(X)\psi(Y), \tag{5.18}$$

dok je $\psi(X,Y)$ definisana sa

$$\psi(X,Y) = \varphi(FX,Y) = \nabla_Y \psi(X) - \psi(X)\psi(Y). \tag{5.19}$$

Dokaz. Tenzori krivine R i $\overline{R}$ simetričnih linearnih koneksija ∇ i $\overline{\nabla}$, respektivno, zadovoljavaju dobro poznatu relaciju [41]

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z =& R(X,Y)Z + \nabla_X P(Z,Y) - \nabla_Y P(Z,X) \\
&+ P(P(Z,Y),X) - P(P(Z,X),Y),
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

gde je $P(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$.

Pošto je tenzor deformacije P dat sa

$$
\begin{aligned}
P(X,Y) &= \frac{1}{2}\big(\underset{1}{P}(X,Y) + \underset{1}{P}(Y,X)\big) \\
&= \varphi(FX)Y + \varphi(FY)X + \varphi(X)FY + \varphi(Y)FX,
\end{aligned}
$$

relacija (5.20) postaje [41]

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z =& R(X,Y)Z - \psi(Z,Y)X + \psi(Z,X)Y - \varphi(Z,Y)FX \\
&+ \varphi(Z,X)FY + \big(\varphi(Y,X) - \varphi(X,Y)\big)FZ,
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

gde su $\varphi(X,Y)$ i $\psi(X,Y)$ definisane sa (5.18) i (5.19), tim redom.

Tenzori krivine R i $\underset{1}{R}$ zadovoljavaju relaciju

$$R(X,Y)Z = \underset{1}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{2}\nabla_X \underset{1}{T}(Z,Y) + \frac{1}{2}\nabla_Y \underset{1}{T}(Z,X) - \frac{1}{4}\underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Z,Y),X) + \frac{1}{4}\underset{1}{T}(\underset{1}{T}(Z,X),Y),$$

a ista relacija važi i za tenzore krivine $\overline{R}$ i $\underset{1}{\overline{R}}$

$$\overline{R}(X,Y)Z = \underset{1}{\overline{R}}(X,Y)Z - \frac{1}{2}\overline{\nabla}_X \underset{1}{\overline{T}}(Z,Y) + \frac{1}{2}\overline{\nabla}_Y \underset{1}{\overline{T}}(Z,X) - \frac{1}{4}\underset{1}{\overline{T}}(\underset{1}{\overline{T}}(Z,Y),X) + \frac{1}{4}\underset{1}{\overline{T}}(\underset{1}{\overline{T}}(Z,X),Y).$$

Zamenom prethodne dve relacije u (5.21) dobijamo (5.13). Relacije (5.14)–(5.17) se mogu dokazati analogno. □

Primedba 5.1.2. [61] *Napomenimo da se relacije* (5.13)–(5.17) *mogu dobiti direktno zamenom izraza* (5.4) *u relacije među tenzorima krivine* $\underset{\theta}{R}$ *i* $\underset{\theta}{\overline{R}}$, $\theta = 1,\dots,5$, *koje su analogne relaciji* (5.20)*, a koja važi za obične tenzore krivine.*

Otvoren problem. [61] Mogu li se nelinearni sistemi (5.6) i (5.11) transformisati u linearne sisteme parcijalnih diferencijalnih jednačina u odnosu na kovarijantne izvode prve i druge vrste? Isto pitanje se javilo u slučaju nelinearnog sistema (5.12) i odgovor je bio pozitivan.

5.2 Specijalna kanonička skoro geodezijska preslikavanja generalisanih Rimanovih prostora

Skoro geodezijska preslikavanja tipa $\pi_2(e), e = \pm 1$, prostora sa afinom koneksijom na Rimanov prostor su razmatrana u radovima [38, 84], dok je rad [19] posvećen kanonočkim skoro geodezijskim preslikavanjima tipa $\pi_2(e=0)$, među Rimanovim prostorima sa afinor strukturom, i specijalno među paraboličkim Kelerovim prostorima.

U radu [60] smo produžili i unapredili rezultate rada [19]. Naime, razmatrali smo kanonička skoro geodezijska preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$ među generalisanim Rimanovim prostorima. Takođe, definisali smo generalisane paraboličke Kelerove mnogostrukosti i posmatrali kanonička skoro geodezijska preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$, među takvim mnogostrukostima. Šira klasa metrike kojom su snabdevene mnogostrukosti razmatrane u radu [60] nam je omogućila da pronađemo još neke invarijantne geometrijske objekte kanoničkih skoro geodezijskih preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$, nego što je to bio slučaj u radu [19].

Osnovne jednačine kanoničkih skoro geodezijskih preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}2(0,F)$*,* $\theta \in \{1,2\}$*,* među generalisanim Rimanovim mnogostrukostima su date sa [60]

$$\underset{\theta}{P}(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} \varphi(X)FY + (-1)^{(\theta-1)}K(X,Y), \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}\sum_{CS(X,Y)} \Big(\underset{\theta}{\nabla}_Y FX - (-1)^\theta K(FY,X)\Big) \\ = \sum_{CS(X,Y)} \big(\mu(X)FY - \mu(FX)Y\big),\end{aligned} \tag{5.23}$$

gde $X,Y \in \mathscr{X}(M)$, φ je 1-forma, K je antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$ definisano sa

$$K(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\underset{1}{P}(X,Y) - \underset{1}{P}(Y,X)\big) = \frac{1}{2}\big(\underset{2}{P}(Y,X) - \underset{2}{P}(X,Y)\big),$$

i F je tenzorsko polje tipa $(1,1)$ koje ispunjava uslov

$$F^2 = 0.$$

Ako struktura F zadovoljava dodatni uslov

$$\mathrm{Tr}(F) = F^p_p = 0,$$

onda ćemo odgovarajuću klasu preslikavanja označavati $\underset{\theta}{\pi}_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$.

Kanoničko skoro geodezijsko preslikavanje $f : M \to \overline{M}$ tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$, ima osobinu *osobinu reciprociteta*, ako je njemu inverzno preslikavanje $f^{-1} : \overline{M} \to M$ takođe kanoničko skoro geodezijsko preslikavanje tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(0,F)$. Skoro geodezijska preslikavanja mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom koja imaju osobinu reciprociteta su izučavana u [75, 83], kao analogija rezultata koji se tiču mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom datih u [72]. Pošto tenzori defomacija $\underset{1}{P}$ i $\underset{1}{\overline{P}}$ nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{1}{\overline{\nabla}}$, pri preslikavanjima f i f^{-1}, respektivno, zadovoljavaju relaciju

$$\underset{1}{\overline{P}}(X,Y) = -\underset{1}{P}(X,Y),\ \ X,Y \in \mathscr{X}(M),$$

bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti

$$\overline{\varphi} = -\varphi, \quad \overline{F} = F, \quad \overline{K} = -K,$$

ili u komponentama

$$\overline{\varphi}_i = -\varphi_i, \quad \overline{F}^h_i = F^h_i, \quad \overline{K}^h_{ij} = -K^h_{ij}. \tag{5.24}$$

Potreban i dovoljan uslov da bi skoro geodezijsko preslikavanje $f : M \to \overline{M}$ tipa $\underset{\theta}{\pi}_2$, $\theta \in \{1,2\}$, zadovoljavalo osobinu reciprociteta izražen je relacijom

$$F^2 = \alpha I + \beta F,$$

gde I označava identičan operator, dok su α i β skalarne funkcije.

5.2.1 Invarijantni geometrijski objekti

Koristićemo tenzorski račun da pronađemo invarijantne geometrijske objekte skoro geodezijskih preslikavanja $f : M \to \overline{M}$, tipa $\underset{\theta}{\pi}_2$, $\theta \in \{1,2\}$. Označimo sa $\underset{\theta}{|}$ i $\underset{\theta}{||}$ kovarijantne izvode vrste $\theta = 1,\dots,4$, koji odgovaraju generalisanim Kristofelovim simbolima Γ^h_{ij} i $\overline{\Gamma}^h_{ij}$, tim redom.

U lokalnim koordinatama osnovna jednačina (5.22) glasi

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} = \varphi_{(i} F^h_{j)} + K^h_{ij}, \tag{5.25}$$

gde je φ_i kovarijantni vektor koji odgovara linearnoj formi φ, dok su F^h_i i K^h_{ij} komponente tenzorskih polja F i K, respektivno.

Koristeći kovarijantno diferenciranje prve vrste i jednačinu (5.25), dobijamo da je

$$F^h_{i\underset{1}{||}j} = F^h_{i\underset{1}{|}j} + \varphi_p F^p_i F^h_j + K^h_{pj} F^p_i - K^p_{ij} F^h_p. \tag{5.26}$$

Pored latinskih indekasa koristićemo i grčke indekse α, β i γ koji će takođe uzimati vrednosti od 1 do $n = \dim(M)$. Kontrakcijom relacije (5.26) po indeksima j i h i koristeći (5.24), dobijamo

$$\overline{F}^\alpha_{i\underset{1}{||}\alpha} + \frac{1}{2}\overline{K}^\alpha_{p\alpha}\overline{F}^p_i - \frac{1}{2}\overline{K}^p_{i\alpha}\overline{F}^\alpha_p = F^\alpha_{i\underset{1}{|}\alpha} + \frac{1}{2}K^\alpha_{p\alpha}F^p_i - \frac{1}{2}K^p_{i\alpha}F^\alpha_p, \tag{5.27}$$

t.j. tenzor $\underset{1}{A}_i$ definisan sa

$$\underset{1}{A}_i = F^\alpha_{i\underset{1}{|}\alpha} + \frac{1}{2}K^\alpha_{p\alpha}F^p_i - \frac{1}{2}K^p_{i\alpha}F^\alpha_p, \tag{5.28}$$

je invarijantan pri preslikavanju f.

Analogno, koristeći kovarijantno difereciranje vrste θ ($\theta = 2,3,4$) možemo dokazati da su tenzori $\underset{\theta}{A}_i$, $\theta = 2,3,4$, definisani sa

$$\begin{aligned}
\underset{2}{A}_i &= F^\alpha_{i\underset{2}{|}\alpha} + \frac{1}{2}K^\alpha_{\alpha p}F^p_i - \frac{1}{2}K^p_{\alpha i}F^\alpha_p,\\
\underset{3}{A}_i &= F^\alpha_{i\underset{3}{|}\alpha} + \frac{1}{2}K^\alpha_{p\alpha}F^p_i - \frac{1}{2}K^p_{\alpha i}F^\alpha_p,\\
\underset{4}{A}_i &= F^\alpha_{i\underset{4}{|}\alpha} + \frac{1}{2}K^\alpha_{\alpha p}F^p_i - \frac{1}{2}K^p_{i\alpha}F^\alpha_p,
\end{aligned} \tag{5.29}$$

invarijantni pri preslikavanju f.

U netrivijalnom slučaju, kada je $F^h_i \neq 0$, koji je od posebne važnosti za nas, postoji tenzor tipa $(1,1)$ $\overset{*}{F}{}^h_i \neq 0$ takav da je $\overset{*}{F}{}^\alpha_\beta F^\beta_\alpha = n = \dim(M)$. Nakon kontrakcije relacije (5.26) sa $\overset{*}{F}{}^j_h$, dobijamo

$$n\varphi_p F^p_i = (F^\alpha_{i\underset{1}{||}\beta} - F^\alpha_{i\underset{1}{|}\beta})\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha - K^\alpha_{p\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^p_i + K^p_{i\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^\alpha_p. \tag{5.30}$$

Iz (5.24) imamo

$$F^h_i = \overline{F}^h_i,$$

tako da možemo zaključiti

$$\overset{*}{F}{}^h_i = \overset{*}{\overline{F}}{}^h_i.$$

Takođe, uslov (5.24) obezbeđuje relaciju

$$K^h_{ij} = \frac{1}{2}(K^h_{ij} - \overline{K}^h_{ij}). \tag{5.31}$$

Sada, iz (5.26), koristeći (5.30)–(5.31), dobijamo

$$\underset{1}{B}{}^h_{ij} = \underset{1}{\overline{B}}{}^h_{ij},$$

gde je tenzor $\underset{1}{B}{}^h_{ij}$ definisan sa

$$\begin{aligned}\underset{1}{B}{}^h_{ij} =& F^h_{i\underset{1}{|}j} - \frac{1}{n}\Big(F^\alpha_{i\underset{1}{|}\beta} + \frac{1}{2}K^\alpha_{\gamma\beta}F^\gamma_i - \frac{1}{2}K^\gamma_{i\beta}F^\alpha_\gamma\Big)\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^h_j \\ &+ \frac{1}{2}K^h_{\gamma j}F^\gamma_i - \frac{1}{2}K^\gamma_{ij}F^h_\gamma,\end{aligned} \tag{5.32}$$

dok je tenzor $\underset{1}{\overline{B}}{}^h_{ij}$ definisan sa

$$\underset{1}{\overline{B}}{}^h_{ij} = \overline{F}{}^h_{i\underset{1}{||}j} - \frac{1}{n}\Big(\overline{F}{}^\alpha_{i\underset{1}{||}\beta} + \frac{1}{2}\overline{K}{}^\alpha_{\gamma\beta}\overline{F}{}^\gamma_i - \frac{1}{2}\overline{K}{}^\gamma_{i\beta}\overline{F}{}^\alpha_\gamma\Big)\overset{*}{\overline{F}}{}^\beta_\alpha\overline{F}{}^h_j + \frac{1}{2}\overline{K}{}^h_{\gamma j}\overline{F}{}^\gamma_i - \frac{1}{2}\overline{K}{}^\gamma_{ij}\overline{F}{}^h_\gamma.$$

Analogno, možemo dokazati da su tenzori $\underset{\theta}{B}{}^h_{ij}$, $\theta = 2,3,4$, definisani sa

$$\begin{aligned}\underset{2}{B}{}^h_{ij} =& F^h_{i\underset{2}{|}j} - \frac{1}{n}\Big(F^\alpha_{i\underset{2}{|}\beta} + \frac{1}{2}K^\alpha_{\beta\gamma}F^\gamma_i - \frac{1}{2}K^\gamma_{\beta i}F^\alpha_\gamma\Big)\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^h_j \\ &+ \frac{1}{2}K^h_{j\gamma}F^\gamma_i - \frac{1}{2}K^\gamma_{ji}F^h_\gamma, \\ \underset{3}{B}{}^h_{ij} =& F^h_{i\underset{3}{|}j} - \frac{1}{n}\Big(F^\alpha_{i\underset{3}{|}\beta} + \frac{1}{2}K^\alpha_{\gamma\beta}F^\gamma_i - \frac{1}{2}K^\gamma_{\beta i}F^\alpha_\gamma\Big)\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^h_j \\ &+ \frac{1}{2}K^h_{\gamma j}F^\gamma_i - \frac{1}{2}K^\gamma_{ji}F^h_\gamma, \\ \underset{4}{B}{}^h_{ij} =& F^h_{i\underset{4}{|}j} - \frac{1}{n}\Big(F^\alpha_{i\underset{4}{|}\beta} + \frac{1}{2}K^\alpha_{\beta\gamma}F^\gamma_i - \frac{1}{2}K^\gamma_{i\beta}F^\alpha_\gamma\Big)\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^h_j \\ &+ \frac{1}{2}K^h_{j\gamma}F^\gamma_i - \frac{1}{2}K^\gamma_{ij}F^h_\gamma,\end{aligned} \tag{5.33}$$

takođe invarijantni pri preslikavanju f.

Prethodna diskusija uopštava Teoremu 1 u [19] na slučaj generalisanih Rimanovih mnogostrukosti. Naime, tenzori $\underset{\theta}{A}{}^h_{ij}$, $\theta = 1,\dots,4$, dati sa (5.28) i (5.29) jesu generalizacije tenzora $A_i = F^\alpha_{i;\alpha}$, dok su tenzori $\underset{\theta}{B}{}^h_{ij}$, $\theta = 1,\dots,4$, definisani sa (5.32) i (5.33) uopštenja tenzora B^h_{ij} koji je dat sa

$$B^h_{ij} = F^h_{i;j} - \frac{1}{n}F^\alpha_{i;\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^h_j, \tag{5.34}$$

gde ; označava kovarijantno diferenciranje u odnosu na koneksiju Levi-Čivita. Očigledno je da su tenzori $A_i = F^\alpha_{i;\alpha}$ i B^h_{ij} invarijantni pri preslikavanju f generalisanih Rimanovih mnogostrukosti.

5.3 Specijalna kanonička skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa generalisanih paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti

Koristili smo Ajzenhartovu ideju generalisanih Rimanovih prostora da uopštimo pojam paraboličke Kelerove mnogostrukosti. Naime, u radu [60] smo razmatrali paraboličke Kelerove mnogostrukosti snabdevene generalisanom Rimanovom metrikom, koja je u opštem slučaju nesimetična.

Definicija 5.3.1. [60] *Generalisana Rimanova mnogostrukost M sa metrikom g naziva se* generalisana parabolička Kelerova mnogostrukost *ako postoji tenzorsko polje F tipa $(1,1)$ na M takvo da važi*

$$F^2 = 0, \quad \nabla F = 0, \quad g(X,Y) = \omega g(X,FY), \ \omega = \pm 1, \ X,Y \in T_p(M),$$

gde ∇ označava koneksiju Levi-Čivita koja odgovara simetričnom delu $\underline{g}$ metrike g.

U nastavku ćemo razmatrati generalisane paraboličke Kelerove mnogostrukosti za koje je $\omega = 1$ u Definiciji 5.3.1. Neka su M i $\overline{M}$ dve generalisane paraboličke Kelerove mnogostrukosti parne dimenzije $n > 2$, sa metrikama g i $\overline{g}$, respektivno i tangetnom strukturom F. Kao i u slučaju uobičajenih paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti uslovi

$$F^2 = 0 \ \text{ i } \ \mathrm{Tr}(F) = F^p_p = 0$$

su ispunjeni.

Za antisimetrično tenzorsko polje K određeno sa

$$K(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\underset{1}{\overline{T}}(X,Y) - \underset{1}{T}(X,Y)\big), \tag{5.35}$$

sada važi

$$\begin{aligned}\underset{1}{\nabla}_Y FX + K(Y,FX) =& \nabla_Y FX + \frac{1}{2}\underset{1}{T}(Y,FX) + \frac{1}{2}\underset{1}{\overline{T}}(Y,FX) - \frac{1}{2}\underset{1}{T}(Y,FX)\\ =& \nabla_Y FX + \frac{1}{2}\underset{1}{\overline{T}}(Y,FX).\end{aligned}$$

Analogno možemo dokazati relaciju

$$\underset{2}{\nabla}_Y FX - K(Y,FX) = \nabla_Y FX + \frac{1}{2}\underset{2}{\overline{T}}(Y,FX).$$

Prema tome, osnovne jednačine (5.22) i (5.23) kanoničkih skoro geodezijskih preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$ (sa unapred definisanom *tangetnom strukturom* F) među generalisanim paraboličkim Kelerovim mnogostrukostima imaju oblik

$$\begin{aligned}&\underset{\theta}{P}(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} \varphi(X)FY + (-1)^{(\theta-1)}K(X,Y),\\ &\frac{1}{2}\sum_{CS(X,Y)} \underset{\theta}{\overline{T}}(Y,FX) = \sum_{CS(X,Y)} \big(\mu(X)FY - \mu(FX)Y\big),\end{aligned}$$

gde $X,Y \in \mathscr{X}(M)$, φ je 1-forma, dok je K antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$ određeno sa (5.35).

Dobro je poznato da je struktura F lokalno integrabilna ako i samo ako na mnogostrukosti postoji simetrična linearna koneksija ∇ u odnosu na koju je struktura F kovarijantno konstantna, t.j. $\nabla F = 0$. Prema tome, zaključujemo da je struktura F na generalisanoj paraboličkoj Kelerovoj mnogostrukosti lokalno integrabilna. Ova činjenica nam omogućava da posmatramo još jednu strukturu $\overset{*}{F}$ takvu da je uslov [19]

$$F^h_\alpha \overset{*}{F}{}^\alpha_i + \overset{*}{F}{}^h_\alpha F^\alpha_i = \delta^h_i, \tag{5.36}$$

ispunjen na svakoj karti generalisane paraboličke Kelerove mnogostrukosti.

U radu [19] je dokazano da je geometrijski objekat

$$\Gamma^h_{ij} - \frac{1}{n+1} F^h_{(i}\Gamma^\alpha_{j)\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha \tag{5.37}$$

invarijantan pri kanoničkom skoro geodezijskom preslikavanju tipa $\pi_2(e=0)$ paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti. U Teoremi 5.3.1 ćemo prezentovati generalizaciju geometrijskog objekta definisanog sa (5.37), u slučaju kanoničkog skoro geodezijskog preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$ generalisanih paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti.

Teorema 5.3.1. [60] *Neka je $f : M \to \overline{M}$ kanoničko skoro geodezijsko preslikavanje tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$, generalisanih paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti M i $\overline{M}$. Tada su geometrijski objekti $\underset{\theta}{C}{}^h_{ij}$, $\theta = 1,\dots,4$ definisani sa*

$$\begin{aligned}\underset{1}{C}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \Bigg[\frac{1}{n+1}\Big(\Gamma^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p + \frac{1}{n}\big[F^\alpha_{p\underset{1}{|}\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha + \frac{1}{2}K^\alpha_{\gamma\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^\gamma_p \\ - \frac{1}{2}K^\gamma_{p\beta}F^\alpha_\gamma\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha\big]\overset{*}{F}{}^p_i + \frac{1}{2}K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p\Big)F^h_j\Bigg]_{(ij)} + \frac{1}{2}K^h_{ij},\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{C}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \Bigg[\frac{1}{n+1}\Big(\Gamma^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p + \frac{1}{n}\big[F^\alpha_{p\underset{2}{|}\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha + \frac{1}{2}K^\alpha_{\beta\gamma}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^\gamma_p \\ - \frac{1}{2}K^\gamma_{\beta p}F^\alpha_\gamma\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha\big]\overset{*}{F}{}^p_i + \frac{1}{2}K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p\Big)F^h_j\Bigg]_{(ij)} + \frac{1}{2}K^h_{ij},\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}\underset{3}{C}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \Bigg[\frac{1}{n+1}\Big(\Gamma^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p + \frac{1}{n}\big[F^\alpha_{p\underset{3}{|}\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha + \frac{1}{2}K^\alpha_{\gamma\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^\gamma_p \\ - \frac{1}{2}K^\gamma_{\beta p}F^\alpha_\gamma\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha\big]\overset{*}{F}{}^p_i + \frac{1}{2}K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p\Big)F^h_j\Bigg]_{(ij)} + \frac{1}{2}K^h_{ij},\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}\underset{4}{C}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \Bigg[\frac{1}{n+1}\Big(\Gamma^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p + \frac{1}{n}\big[F^\alpha_{p\underset{4}{|}\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha + \frac{1}{2}K^\alpha_{\beta\gamma}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^\gamma_p \\ - \frac{1}{2}K^\gamma_{p\beta}F^\alpha_\gamma\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha\big]\overset{*}{F}{}^p_i + \frac{1}{2}K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p\Big)F^h_j\Bigg]_{(ij)} + \frac{1}{2}K^h_{ij},\end{aligned} \tag{5.41}$$

invarijantni pri preslikavanju f.

Dokaz. Kontrakcijom osnovne jednačine (5.25) sa $\overset{*}{F}{}^j_h$, dobijamo

$$\begin{aligned}(\overline{\Gamma}^p_{iq} - \Gamma^p_{iq})\overset{*}{F}{}^q_p &= \varphi_i F^p_q\overset{*}{F}{}^q_p + \varphi_q\overset{*}{F}{}^q_p F^p_i + K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p \\ &= n\varphi_i + \varphi_q(\overset{*}{F}{}^q_p F^p_i + F^q_p\overset{*}{F}{}^p_i - F^q_p\overset{*}{F}{}^p_i) + K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p \\ &\overset{(5.36)}{=} n\varphi_i + \varphi_q\delta^q_i - \varphi_q F^q_p\overset{*}{F}{}^p_i + K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}(n+1)\varphi_i &= (\overline{\Gamma}^p_{iq} - \Gamma^p_{iq})\overset{*}{F}{}^q_p + \varphi_q F^q_p\overset{*}{F}{}^p_i - K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p \\ &\overset{(5.36)}{=} (\overline{\Gamma}^p_{iq} - \Gamma^p_{iq})\overset{*}{F}{}^q_p + \frac{1}{n}\Big[(F^\alpha_{p\underset{1}{\|}\beta} - F^\alpha_{p\underset{1}{|}\beta})\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha - K^\alpha_{\gamma\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^\gamma_p \\ &\quad + K^\gamma_{p\beta}F^\alpha_\gamma\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha\Big]\overset{*}{F}{}^p_i - K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Sada, nakon zamene (5.42) u osnovnu jednačinu (5.25) dobijamo

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \frac{1}{n+1}\Big[\Big((\overline{\Gamma}^p_{iq} - \Gamma^p_{iq})\overset{*}{F}{}^q_p + \frac{1}{n}\big[(F^\alpha_{p\underset{1}{||}\beta} - F^\alpha_{p\underset{1}{|}\beta})\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha - K^\alpha_{\gamma\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^\gamma_p \\ + K^\gamma_{p\beta}F^\alpha_\gamma\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha\big]\overset{*}{F}{}^p_i - K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p\Big)F^h_j\Big]_{(ij)} + K^h_{ij}.\end{aligned}$$

Iz prethodne jednačine, koristeći (5.30)–(5.31), dobijamo sledeću relaciju

$$\begin{aligned}&\overline{\Gamma}^h_{ij} - \Big[\frac{1}{n+1}\Big(\overline{\Gamma}^p_{iq}\overset{*}{\overline{F}}{}^q_p + \frac{1}{n}\big[\overline{F}^\alpha_{p\underset{1}{||}\beta}\overset{*}{\overline{F}}{}^\beta_\alpha + \frac{1}{2}\overline{K}^\alpha_{\gamma\beta}\overset{*}{\overline{F}}{}^\beta_\alpha\overline{F}^\gamma_p - \frac{1}{2}\overline{K}^\gamma_{p\beta}\overline{F}^\alpha_\gamma\overset{*}{\overline{F}}{}^\beta_\alpha\big]\overset{*}{\overline{F}}{}^p_i \\ &\qquad + \frac{1}{2}\overline{K}^p_{iq}\overset{*}{\overline{F}}{}^q_p\Big)\overline{F}^h_j\Big]_{(ij)} + \frac{1}{2}\overline{K}^h_{ij} = \\ &\Gamma^h_{ij} - \Big[\frac{1}{n+1}\Big(\Gamma^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p + \frac{1}{n}\big[F^\alpha_{p\underset{1}{|}\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha + \frac{1}{2}K^\alpha_{\gamma\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha F^\gamma_p - \frac{1}{2}K^\gamma_{p\beta}F^\alpha_\gamma\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha\big]\overset{*}{F}{}^p_i \\ &\qquad + \frac{1}{2}K^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p\Big)F^h_j\Big]_{(ij)} + \frac{1}{2}K^h_{ij},\end{aligned}$$

čime se dokazuje da je geometrijski objekat $\underset{1}{C}{}^h_{ij}$ definisan sa (5.38) invarijantan pri preslikavanju f.

Na sličan način možemo zaključiti da su geometrijski objekti $\underset{\theta}{C}{}^h_{ij}$, $\theta = 2,3,4$, određeni jednačinama (5.39)–(5.41) invarijantni pri preslikavanju f. $\square$

U slučaju dveju afino povezanih mnogostrukosti sa torzijom, možemo posmatrati preslikavanje koje očuvava torziju tzv. ekvitorziono preslikavanje. Jednačina (5.35) u lokalnim koordinatama glasi $K^h_{ij} = \frac{1}{2}(\overline{T}{}^h_{ij} - T^h_{ij})$. Stoga, geometrijski objekti $\underset{\theta}{C}{}^h_{ij}$, $\theta = 1,\dots,4$ definisani sa (5.38)–(5.41) pri ekvitorzionom kanoničkom skoro geodezijskom preslikavanju tipa $\underset{\theta}{\pi}{}_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$, generalisanih paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti poprimaju sledeći oblik [60]

$$\underset{\theta}{C}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \Big[\frac{1}{n+1}\Big(\Gamma^p_{iq}\overset{*}{F}{}^q_p + \frac{1}{n}F^\alpha_{p\underset{\theta}{|}\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha\overset{*}{F}{}^p_i\Big)\Big]_{(ij)}, \ \theta = 1,\dots,4. \tag{5.43}$$

Primetimo da geometrijski objekti dati sa (5.38)–(5.41) i (5.43) nisu tenzori, jer generalisani Kristofelovi simboli Γ^h_{ij} nisu tenzori (videti, [54], str. 10).

Geometrijski objekat [19, 60]

$$C^h_{ij} = \Gamma^h_{\underline{ij}} - \frac{1}{n+1}F^h_{(i}\Gamma^\alpha_{j)\beta}\overset{*}{F}{}^\beta_\alpha, \tag{5.44}$$

gde $\Gamma^h_{\underline{ij}}$ označava simetričan deo od Γ^h_{ij}, je očigledno invarijantan pri kanoničkom skoro geodezijskom preslikavanju tipa $\underset{\theta}{\pi}{}_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$, generalisanih paraboličkih Kelerovih mnogostrukosti. Ovaj geometrijski objekat je tenzor kao i geometrijski objekat definisan sa (5.37).

Primedba 5.3.1. [60] *Geometrijski objekti, definisani sa* (5.38)–(5.41), (5.43) *i* (5.44) *su generalizacije tenzora definisanog sa* (5.37).

Poglavlje 6

Specijalna skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

U ovom poglavlju ćemo prezentovati rezultate rada [59]. Dakle, najpre ćemo se baviti specijalnim skoro geodezijskim preslikavanjima drugog tipa među mnogostrukostima sa nesimetričnom linearnom koneksijom. Zatim ćemo isti tip preslikavanja posmatrati među generalisanim Rimanovim prostorima, kao i među generalisanim eliptičkim i hiperboličkim Kelerovim prostorima.

6.1 Skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

Postoje dve vrste skoro geodezijskih preslikavanja drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom $\underset{\theta}{\pi}_2$, $\theta \in \{1,2\}$ [75]. Osnovne jednačine ovih preslikavanja su date u radovima [66, 75]

$$\begin{aligned} \underset{\theta}{P}(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} \Big(\psi(X)Y + \sigma(X)FY\Big) \\ + (-1)^{\theta-1}K(X,Y),\, \theta \in \{1,2\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

gde $X,Y \in \mathscr{X}(M)$, ψ i σ su 1-forme, K je antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$ i F je tenzorsko polje tipa $(1,1)$ koje ispunjava

$$\begin{aligned} &\sum_{CS(X,Y)} \Big(\underset{\theta}{\nabla}_Y FX + e\sigma(X)Y + (-1)^{\theta-1}K(FY,X)\Big) = \\ &\sum_{CS(X,Y)} \Big(\mu(X)FY + \nu(X)Y\Big),\ X,Y \in \mathscr{X}(M),\ \theta \in \{1,2\}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

za neke 1-forme μ i ν.

Sistemi diferencijalnih jednačina (6.1) i (6.2) mogu se transformisati u nelinearne mešovite sisteme Košijevog tipa u odnosu na kovarijantni izvod prve i druge vrste na isti način kao u slučaju skoro geodezijskih preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom [72]. Stoga, na isti način kao u [72], str. 175, u radu [66] smo uveli tenzorsko polje $\underset{1}{Q}$ tipa $(1,2)$ definisano sa

$$\underset{1}{Q}(X,Y)=\sum_{CS(X,Y)}\Big(-F^2X\sigma(Y)-K(FY,X)+\mu(X)FY+\nu(X)Y\Big). \tag{6.3}$$

U slučaju kada je $\theta=1$ uslov (6.2) se može zapisati u obliku

$$\underset{1}{\nabla}_Y FX+\underset{1}{\nabla}_X FY=\underset{1}{Q}(X,Y),$$

što dalje implicira

$$\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_Y FX+\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_X FY=\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{Q}(X,Y). \tag{6.4}$$

Razmotrimo sada sledeći izraz

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{Q}(X,Z)-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{Q}(X,Y)+\underset{1}{\nabla}_X\underset{1}{Q}(Y,Z)=\\
&\quad\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_Z FX+\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_X FZ-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_Y FX\\
&\quad-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_X FY+\underset{1}{\nabla}_X\underset{1}{\nabla}_Z FY+\underset{1}{\nabla}_X\underset{1}{\nabla}_Y FZ=\\
&\quad\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_Z FX-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_Y FX+\underset{1}{\nabla}_X\underset{1}{\nabla}_Z FY-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_X FY\\
&\quad+\underset{1}{\nabla}_X\underset{1}{\nabla}_Y FZ-\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_X FZ+2\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_X FZ=\\
&\quad\underset{1}{R}(Y,Z)FX-F\big(\underset{1}{R}(Y,Z)X\big)-\underset{1}{\nabla}_{T(Z,Y)}FX\\
&\quad+\underset{1}{R}(X,Z)FY-F\big(\underset{1}{R}(X,Z)Y\big)-\underset{1}{\nabla}_{T(Z,X)}FY\\
&\quad+\underset{1}{R}(X,Y)FZ-F\big(\underset{1}{R}(X,Y)Z\big)-\underset{1}{\nabla}_{T(Y,X)}FZ+2\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_X FZ,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

gde smo iskoristili prvi Ričijev identitet [51]

$$\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{\nabla}_Y FX-\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{\nabla}_Z FX=\underset{1}{R}(Z,Y)FX-F\big(\underset{1}{R}(Z,Y)X\big)-\underset{1}{\nabla}_{T(Y,Z)}FX.$$

Iz (6.5) primenjujući osobinu prvog tenzora krivine $\underset{1}{R}(Y,Z)X=-\underset{1}{R}(Z,Y)X$ lako možemo dobiti sledeći sistem Košijevog tipa

$$\begin{aligned}
\underset{1}{V}(Z,X)=&\underset{1}{\nabla}_X FZ,\\
\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{V}(Z,X)=&-2F\big(\underset{1}{R}(X,Z)Y\big)-\underset{1}{R}(Y,X)FZ\\
&+\underset{1}{R}(Y,Z)FX+\underset{1}{R}(X,Z)FY\\
&+F\big(\underset{1}{R}(Z,Y)X+\underset{1}{R}(Y,X)Z-\underset{1}{R}(X,Z)Y\big)\\
&+\underset{1}{V}(X,T(Z,Y))+\underset{1}{V}(Y,T(Z,X))+\underset{1}{V}(Z,T(Y,X))\\
&+\underset{1}{\nabla}_Y\underset{1}{Q}(X,Z)-\underset{1}{\nabla}_Z\underset{1}{Q}(X,Y)+\underset{1}{\nabla}_X\underset{1}{Q}(Y,Z),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

u odnosu na tenzorska polja F i $\underset{1}{V}$. Na osnovu prve jednačine iz (6.6) jednačina (6.4) dobija oblik

$$\underset{1}{V}(X,Y)+\underset{1}{V}(Y,X)=\underset{1}{Q}(Z,X),$$

koji je algebarskog karaktera u odnosu na $\underset{1}{V}$ i $\underset{1}{Q}$. Poslednja jednačina zajedno sa (6.6) daje mešoviti sistem Košijevog tipa u odnosu na kovarijantni izvod prve vrste.

Analogno možemo razmatrati skoro geodezijska preslikavanja tipa $\underset{2}{\pi}_2$. Pri čemu ćemo koristiti drugi identitet Ričijevog tipa [51]

$$\underset{2}{\nabla}_Z \underset{2}{\nabla}_Y FX - \underset{2}{\nabla}_Y \underset{2}{\nabla}_Z FX = \underset{2}{R}(Z,Y)FX - F(\underset{2}{R}(Z,Y)X) + \underset{2}{\nabla}_{T(Y,Z)}FX,$$

i osobinu drugog tenzora krivine $\underset{2}{R}(Y,Z)X = -\underset{2}{R}(Z,Y)X$. Iz (6.5) na isti način kao u slučaju kovarijantnog izvoda prve vrste lako možemo dobiti sledeći mešoviti sistem Košijevog tipa u odnosu na kovarijantni izvod druge vrste

$$\begin{aligned} \underset{2}{V}(Z,X) =& \underset{2}{\nabla}_X FZ, \\ \underset{2}{\nabla}_Y \underset{2}{V}(Z,X) =& -2F(\underset{2}{R}(X,Z)Y) - \underset{2}{R}(Y,X)FZ \\ & + \underset{2}{R}(Y,Z)FX + \underset{2}{R}(X,Z)FY \\ & + F\big(\underset{2}{R}(Z,Y)X + \underset{2}{R}(Y,X)Z - \underset{2}{R}(X,Z)Y\big) \\ & + \underset{2}{V}(X,T(Z,Y)) + \underset{2}{V}(Y,T(Z,X)) + \underset{2}{V}(Z,T(Y,X)) \\ & + \underset{2}{\nabla}_Y \underset{2}{Q}(X,Z) - \underset{2}{\nabla}_Z \underset{2}{Q}(X,Y) + \underset{2}{\nabla}_X \underset{2}{Q}(Y,Z), \end{aligned} \tag{6.7}$$

gde je $\underset{2}{Q}(X,Z) = \underset{2}{V}(X,Z) + \underset{2}{V}(Z,X)$.

Sistem diferencijalnih jednačina (6.6) i (6.7) je nelinearan, što dovodi do poteškoća pri proučavanju skoro geodezijskih preslikavanja drugog tipa kako u slučaju mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom [72], tako i u slučaju mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom [75]. Stoga ćemo se u nastavku baviti nekim specijalnim tipovima skoro geodezijskih preslikavanja drugog tipa mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom.

Potreban i dovoljan uslov da bi generalisani Rimanov prostor dopuštao skoro geodezijsko preslikavanje drugog tipa na drugi generalisani Rimanov prostor je dat u Teoremi 6.1.1.

Teorema 6.1.1. [59] *Generalisani Rimanov prostor (M,g) dimenzije $n>2$ dopušta skoro geodezijsko preslikavanje tipa $\underset{\theta}{\pi}_2$ $(\theta \in \{1,2\})$ na generalisani Rimanov prostor $(\overline{M},\overline{g})$ ako i samo ako postoji rešenje sledećeg nelinearnog mešovitog sistema Košijevog tipa*

$$\begin{aligned} \underset{\theta}{V}(X,Z) =& \underset{\theta}{\nabla}_Z FX, \\ \underset{\theta}{\nabla}_Y \underset{\theta}{V}(X,Z) =& -2F(\underset{\theta}{R}(Z,X)Y) - \underset{\theta}{R}(Y,Z)FX \\ & + \underset{\theta}{R}(Y,X)FZ + \underset{\theta}{R}(Z,X)FY \\ & + F\big(\underset{\theta}{R}(X,Y)Z + \underset{\theta}{R}(Y,Z)X - \underset{\theta}{R}(Z,X)Y\big) \\ & + \underset{\theta}{V}(Z,T(X,Y)) + \underset{\theta}{V}(Y,T(X,Z)) + \underset{\theta}{V}(X,T(Y,Z)) \\ & + \underset{\theta}{\nabla}_Y \underset{\theta}{Q}(Z,X) - \underset{\theta}{\nabla}_X \underset{\theta}{Q}(Z,Y) + \underset{\theta}{\nabla}_Z \underset{\theta}{Q}(Y,X), \end{aligned} \tag{6.8}$$

gde je $\underset{\theta}{\nabla}$ nesimetrična linearna koneksija određena metrikom g, $\underset{\theta}{R}$ je tenzor krivine vrste θ i tenzorsko polje $\underset{\theta}{Q}$ je definisano sa

$$\underset{\theta}{Q}(X,Y) = \underset{\theta}{V}(X,Y) + \underset{\theta}{V}(Y,X).$$

6.2 Specijalna skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa

Motivisani radom [73] definisali smo specijalna skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom [66]. Takođe, posmatrali smo specijalna skoro geodezijska preslikavanja drugog tipa među generalisanim Rimanovim prostorima, kao i među generalisanim običnim (eliptičkim) i hiperboličkim Kelerovim prostorima [59].

Definicija 6.2.1. [66] *Skoro geodezijsko preslikavanje drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom je tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F)$, $e=\pm1$, $\theta\in\{1,2\}$, ako tenzorsko polje F tipa $(1,1)$ koje figuriše u osnovnim jednačinama zadovoljava*

$$F^2 = eI, \quad \nabla F = 0, \tag{6.9}$$

gde je $e=\pm1$ i I označava identični operator.

Osnovne jednačine skoro geodezijskih preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F)$, $e=\pm1$, $\theta\in\{1,2\}$ su date jednačinom (6.1), gde tenzorsko polje F zadovoljava jednačinu (6.9) i jednačinu [66]

$$\begin{aligned}&\sum_{CS(X,Y)}\left(\frac{(-1)^{\theta-1}}{2}T(Y,FX)+e\sigma(X)Y+(-1)^{\theta-1}K(FY,X)\right)=\\&\sum_{CS(X,Y)}\Big(\mu(X)FY+\nu(X)Y\Big),\ X,Y\in\mathscr{X}(M),\ \theta\in\{1,2\},\end{aligned} \tag{6.10}$$

za neke 1-forme μ i ν.

Skoro geodezijska preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F)$, $e=\pm1$, $\theta\in\{1,2\}$, među generalisanim Rimanovim prostorima su uopštenja holomorfno projektivnih preslikavanja klasičnih (eliptičkih) i hiperboličkih Kelerovih prostora. Naime, u slučaju skoro geodezijskih preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F)$, $e=\pm1$, $\theta\in\{1,2\}$, tenzorsko polje F zadovoljava diferencijalnu jednačinu, dok su u slučaju HP preslikavanja klasičnih (eliptičkih) i hiperboličkih Kelerovih prostora kompleksna i produkt struktura su unapred definisane.

Primer 6.2.1. [59] *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani Kelerovi prostori dimenzije $2n\geq4$ i neka je $f:M\to\overline{M}$ HP preslikavanje, tada je*

$$\begin{aligned}F^2&=-I,\\ \nabla F&=\overline{\nabla}F=0,\end{aligned}$$

i tenzor deformacije $\underset{1}{P}(X,Y)$ ima oblik [79]

$$\underset{1}{P}(X,Y)=\sum_{CS(X,Y)}\Big(\psi(X)Y-\psi(FX)FY\Big)+\xi(X,Y),$$

gde je ξ antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$. Tako da, možemo zaključiti da su HP preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora samo specijalan slučaj skoro geodezijskih preslikavanja tipa $\underset{1}{\pi}_2(-1,\nabla F)$.

Primer 6.2.2. [59] *Neka su* (M,g,F) *i* $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ *generalisani hiperbolički Kelerovi prostori dimenzije* $2n \geq 4$ *i neka je* $f: M \to \overline{M}$ *HP preslikavanje, tada je*

$$F^2 = I,$$
$$\nabla F = \overline{\nabla} F = 0,$$

i tenzor deformacije $\underset{1}{P}(X,Y)$ *ima oblik* [58]

$$\underset{1}{P}(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} \Big(\psi(X)Y + \psi(FX)FY\Big) + \xi(X,Y),$$

gde je ξ *antisimetrično tenzorsko polje tipa* $(1,2)$*. Tako da, možemo zaključiti da su HP preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora samo specijalan slučaj skoro geodezijskih preslikavanja tipa* $\underset{1}{\pi}_2(1,\nabla F)$.

Kao direktnu posledicu Teoreme 6.1.1 dobijamo potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju skoro geodezijskih preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F)$, $e = \pm 1$ $(\theta \in \{1,2\})$, među generalisanim Rimanovim prostorima.

Posledica 6.2.1. [59] *Generalisani Rimanov prostor* (M,g) *dimenzije* $n > 2$ *dopušta skoro geodezijsko preslikavanje tipa* $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F)$, $e = \pm 1$, $(\theta \in \{1,2\})$ *na generalisani Rimanov prostor* $(\overline{M},\overline{g})$ *ako i samo ako važi*

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{\theta-1}}{2}\underset{\theta}{\nabla}_Y T(Z,FX) = &-2F(\underset{\theta}{R}(Z,X)Y) - \underset{\theta}{R}(Y,Z)FX \\
&+ \underset{\theta}{R}(Y,X)FZ + \underset{\theta}{R}(Z,X)FY \\
&+ F\big(\underset{\theta}{R}(X,Y)Z + \underset{\theta}{R}(Y,Z)X - \underset{\theta}{R}(Z,X)Y\big) \\
&+ \underset{\theta}{V}(Z,T(X,Y)) + \underset{\theta}{V}(Y,T(X,Z)) + \underset{\theta}{V}(X,T(Y,Z)) \\
&+ \underset{\theta}{\nabla}_Y \underset{\theta}{Q}(Z,X) - \underset{\theta}{\nabla}_X \underset{\theta}{Q}(Z,Y) + \underset{\theta}{\nabla}_Z \underset{\theta}{Q}(Y,X),
\end{aligned}$$

gde su nesimetrična linearna koneksija $\underset{\theta}{\nabla}$ *i tenzor krivine* $\underset{\theta}{R}$ $(\theta \in \{1,2\})$ *određeni metrikom g, dok je tenzorsko polje* $\underset{\theta}{Q}$ $(\theta \in \{1,2\})$ *definisano sa*

$$\underset{\theta}{Q}(X,Y) = \frac{(-1)^{\theta-1}}{2}\Big(T(Y,FX) + T(X,FY)\Big).$$

Dokaz. Tenzorsko polje $\underset{\theta}{V}$ iz Teoreme 6.1.1 dobija oblik

$$\begin{aligned}
\underset{\theta}{V}(X,Y) = \underset{\theta}{\nabla}_Y FX &= \nabla_Y FX + \frac{(-1)^{\theta-1}}{2}T(Y,FX) \\
&\overset{(6.9)}{=} \frac{(-1)^{\theta-1}}{2}T(Y,FX),\ \theta \in \{1,2\},
\end{aligned}$$

čime se kompletira dokaz. □

Tenzor razlike P simetričnih linearnih koneksija $\overline{\nabla}$ i ∇ zadovoljava

$$P(X,Y)=\frac{1}{2}\big(\underset{\theta}{P}(X,Y)+\underset{\theta}{P}(Y,X)\big),\ \theta\in\{1,2\}. \tag{6.11}$$

U Teoremi 6.2.1 su navedene relacije među tenzorima krivine $\underset{\theta}{R}$ i $\underset{\theta}{\overline{R}}$, $\theta=1,\dots,5$ generalisanih Rimanovih prostora (M,g) i $(\overline{M},\overline{g})$ pri specijalnim skoro geodezijskim preslikavanjima tipa $\underset{\theta}{\pi}2(e,\nabla F)$, $e=\pm1$, $(\theta=1,2)$.

Teorema 6.2.1. [59] *Neka su (M,g) i $(\overline{M},\overline{g})$ generalisani Rimanovi prostori i neka je $f:M\to\overline{M}$ skoro geodezijsko preslikavanje tipa $\underset{\theta}{\pi}2(e,\nabla F)$, $e=\pm1$, $\theta\in\{1,2\}$. Tada među tenzorima krivine $\underset{\theta}{R}$ i $\underset{\theta}{\overline{R}}$, $\theta\in\{1,\dots,5\}$ važe sledeće relacije*

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\overline{R}}(X,Y)Z=&\underset{1}{R}(X,Y)Z-\sum_{CA(X,Y)}\Big(\lambda(Z,Y)X+\mu(Z,Y)FX-\nabla_XK(Z,Y)\\
&-\frac{1}{4}\overline{T}(\overline{T}(Z,Y),X)+\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\Big),\\
\underset{2}{\overline{R}}(X,Y)Z=&\underset{2}{R}(X,Y)Z-\sum_{CA(X,Y)}\Big(\lambda(Z,Y)X+\mu(Z,Y)FX+\nabla_XK(Z,Y)\\
&-\frac{1}{4}\overline{T}(\overline{T}(Z,Y),X)+\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\overline{R}}(X,Y)Z=&\underset{3}{R}(X,Y)Z-\sum_{CA(X,Y)}\Big(\lambda(Z,Y)X+\mu(Z,Y)FX+\frac{1}{4}\overline{T}(\overline{T}(Z,Y),X)\\
&-\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)+\frac{1}{2}\overline{T}(\overline{T}(Y,X),Z)-\frac{1}{2}T(T(Y,X),Z)\Big)\\
&+\sum_{CS(X,Y)}\nabla_XK(Z,Y),\\
\underset{4}{\overline{R}}(X,Y)Z=&\underset{4}{R}(X,Y)Z-\sum_{CA(X,Y)}\Big(\lambda(Z,Y)X+\mu(Z,Y)FX+\frac{1}{4}\overline{T}(\overline{T}(Z,Y),X)\\
&-\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)-\frac{1}{2}\overline{T}(\overline{T}(Y,X),Z)+\frac{1}{2}T(T(Y,X),Z)\Big)\\
&+\sum_{CS(X,Y)}\nabla_ZK(X,Y),\\
\underset{5}{\overline{R}}(X,Y)Z=&\underset{5}{R}(X,Y)Z-\sum_{CA(X,Y)}\Big(\lambda(Z,Y)X+\mu(Z,Y)FX\Big)\\
&+\sum_{CS(X,Y)}\Big(\frac{1}{4}\overline{T}(\overline{T}(Z,Y),X)-\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\Big),
\end{aligned}$$

gde su λ i η simetrične bilinearne forme date sa

$$\begin{aligned}
\lambda(X,Y)=&\nabla_Y\psi(X)+e\sigma(X)\sigma(Y)-\psi(X)\psi(Y)\\
&-\sum_{CS(X,Y)}\sigma(X)\psi(FY),\\
\eta(X,Y)=&\nabla_Y\sigma(X)-\sum_{CS(X,Y)}\sigma(X)\sigma(FY).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Dokaz. Tenzori krivine R i $\overline{R}$ simetričnih linearnih koneksija ∇ i $\overline{\nabla}$, respektivno, zadovoljavaju relaciju (1.5), dok tenzori krivine $\underset{1}{R}$ i R ispunjavaju

$$\begin{aligned}\underset{1}{R}(X,Y)Z =& R(X,Y)Z+\frac{1}{2}\nabla_X T(Z,Y)-\frac{1}{2}\nabla_Y T(Z,X)\\ &+\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)-\frac{1}{4}T(T(Z,X),Y).\end{aligned} \tag{6.13}$$

Sada iz (1.5) i (6.13) dobijamo

$$\begin{aligned}&\underset{1}{\overline{R}}(X,Y)Z-\frac{1}{2}\nabla_X\overline{T}(Z,Y)+\frac{1}{2}\nabla_Y\overline{T}(Z,X)\\ &-\frac{1}{4}\overline{T}(\overline{T}(Z,Y),X)+\frac{1}{4}\overline{T}(\overline{T}(Z,X),Y)=\\ &\underset{1}{R}(X,Y)Z-\frac{1}{2}\nabla_X T(Z,Y)+\frac{1}{2}\nabla_Y T(Z,X)-\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\\ &+\frac{1}{4}T(T(Z,X),Y)+\nabla_X P(Z,Y)-\nabla_Y P(Z,X)\\ &+P(P(Z,Y),X)-P(P(Z,X),Y).\end{aligned} \tag{6.14}$$

Na osnovu (6.1) i (6.11) zaključujemo

$$P(X,Y)=\sum_{CS(X,Y)}\big(\psi(X)Y+\sigma(X)FY\big), \tag{6.15}$$

i

$$\begin{aligned}\nabla_Z(\overline{T}(X,Y)-T(X,Y)) =& \nabla_Z(\underset{1}{P}(X,Y)-\underset{1}{P}(Y,X))\\ =& 2\nabla_Z K(X,Y).\end{aligned} \tag{6.16}$$

Sada, koristeći (6.9) i zamenjujući (6.15) i (6.16) u relaciju (6.14) dokazujemo prvu relaciju ove teoreme. Analogno možemo dokazati preostale relacije ove teoreme. □

6.2.1 Invarijantni geometrijski objekti

Skoro geodezijsko preslikavanje $f: M \to \overline{M}$ drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom ima osobinu reciprociteta (videti [72, 75]), ako je njemu inverzno preslikavanje $f^{-1}: \overline{M} \to M$ skoro geodezijsko preslikavanje drugog tipa mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom i odgovara istoj strukturi F. Pošto tenzori deformacije $\underset{1}{P}$ i $\underset{1}{\overline{P}}$ nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{1}{\overline{\nabla}}$ pri preslikavanjima f i f^{-1}, respektivno, zadovoljavaju relaciju

$$\underset{1}{\overline{P}}(X,Y)=-\underset{1}{P}(X,Y),$$

bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti [72, 75]

$$\overline{\psi}=-\psi,\quad \overline{\sigma}=-\sigma,\quad \overline{F}=F,\quad \overline{K}=-K. \tag{6.17}$$

Propozicija 6.2.1. [59, 75] *Neka su (M,g) i $(\overline{M},\overline{g})$ dva generalisana Rimanova prostora,* $\dim(M)=\dim(\overline{M})=n>2$. *Potreban i dovoljan uslov da bi skoro geodezijsko preslikavanje $f: M \to \overline{M}$ tipa $\underset{\theta}{\pi}_2$, $\theta \in \{1,2\}$, zadovoljavalo osobinu reciprociteta izražen je relacijom*

$$F^2=\alpha I+\beta F, \tag{6.18}$$

gde tenzorsko polje F odgovara preslikavanju f, dok su α i β invarijante (skalarne funkcije).

Pošto tenzorsko polje F koje odgovara skoro geodezijskom preslikavanju tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F), e = \pm 1, \theta \in \{1,2\}$ ispunjava uslov $F^2 = eI$, gde je $e = \pm 1$, na osnovu Propozicije 6.2.1 zaključujemo da skoro geodezijska preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F), e = \pm 1, \theta \in \{1,2\}$, imaju osobinu reciprociteta.

Naš cilj je da pronađemo geometrijske objekte koji su invarijantni pri skoro geodezijskim preslikavanjima tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F), e = \pm 1, \theta \in \{1,2\}$. Za rešavanje istog problema u slučaju skoro geodezijskih preslikavanja prvog i trećeg tipa među mnogostrukostima sa nesimetričnom linearnom koneksijom neophodno je bilo pretpostaviti da skoro geodezijsko preslikavanje očuvava torziju mnogostrukostima sa nesimetričnom linearnom koneksijom [64].

Definicija 6.2.2. [59, 64] *Neka su (M,g) i $(\overline{M},\overline{g})$ dva generalisana Rimanova prostora,* $\dim(M) = \dim(\overline{M}) = n > 2$. *Skoro geodezijsko preslikavanje $f: M \to \overline{M}$ je* ekvitorziono skoro geodezijsko preslikavanje *ako očuvava tenzor torzije, t.j. ako važi*

$$\underset{1}{T} = \underset{1}{\overline{T}},$$

gde su $\underset{1}{T}$ i $\underset{1}{\overline{T}}$ tenzori torzija generalisanih Rimanovih prostora (M,g) i $(\overline{M},\overline{g})$, respektivno.

Neka su (M,g) i $(\overline{M},\overline{g})$ dva generalisana Rimanova prostora i neka je $f: M \to \overline{M}$ ekvitorziono skoro geodezijsko preslikavanje tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F), \theta \in \{1,2\}$, $e = \pm 1$, onda antisimetrično tenzorsko polje K iz osnovnih jednačina (6.1) identički iščezava. Zaista, videti [58], str. 11

$$\begin{aligned}2K(X,Y) =&\underset{1}{P}(X,Y) - \underset{1}{P}(Y,X)\\ =&\underset{1}{\overline{\nabla}}(X,Y) - \underset{1}{\nabla}(X,Y) - \underset{1}{\overline{\nabla}}(Y,X) + \underset{1}{\nabla}(Y,X)\\ =&\overline{T}(X,Y) - T(X,Y) = 0.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Ako pretpostavimo

$$\mathrm{Tr}(F) = 0, \tag{6.20}$$

onda na osnovu Teoreme 6.2.1 dobijamo

$$\begin{aligned}\big(n-1\big)\lambda(X,Y) =& -\underset{1}{\overline{\mathrm{Ric}}}(X,Y) + \underset{1}{\mathrm{Ric}}(X,Y) + \eta(X,FY)\\ &+ \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big(Z \to \sum_{CA(Y,Z)} \overline{T}(\overline{T}(X,Y),Z)\Big)\\ &- \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big(Z \to \sum_{CA(Y,Z)} T(T(X,Y),Z)\Big),\end{aligned} \tag{6.21}$$

gde su $\underset{1}{\overline{\mathrm{Ric}}}(X,Y) = \mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{\overline{R}}(U,X)Y\big)$ i $\underset{1}{\mathrm{Ric}}(X,Y) = \mathrm{Tr}\big(U \to \underset{1}{R}(U,X)Y\big)$ Ričijevi tenzori prve vrste.

Pretpostavljajući

$$\nabla_Y \sigma(X) = \overline{\nabla}_Y \sigma(X), \tag{6.22}$$

i

$$\sigma(X)\sigma(FY) + \sigma(Y)\sigma(FX) = 0, \tag{6.23}$$

simetrična bilinearna forma η iz (6.12) dobija oblik

$$\eta(X,Y) = \nabla_Y \sigma(X) = \frac{1}{2}\big(\nabla_Y \sigma(X) - \overline{\nabla}_Y \overline{\sigma}(X)\big). \tag{6.24}$$

Prethodna razmatranja dovode do definicije nove klase skoro geodezijskih preslikavanja drugog tipa među generalisanim Rimanovim prostorima.

Definicija 6.2.3. [59] *Neka su* (M,g) *i* $(\overline{M},\overline{g})$ *generalisani Rimanovi prostori i neka je* $f: M \to \overline{M}$ *skoro geodezijsko preslikavanje tipa* $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F)$, $\theta \in \{1,2\}$, $e=\pm 1$. *Preslikavanje* f *je skoro geodezijsko preslikavanje tipa* $\underset{\theta}{\widetilde{\pi}}_2(e,\nabla F)$, $\theta \in \{1,2\}$, $e=\pm 1$, *ako važe uslovi* (6.22) *i* (6.23).

Sada smo u mogućnosti da dokažemo egzistenciju nekih invarijantnih geometrijskih objekata skoro geodezijskih preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\widetilde{\pi}}_2(e,\nabla F), \theta \in \{1,2\}, e=\pm 1$. Definišimo geometrijske objekte [59]

$$\begin{aligned}\underset{1}{\widetilde{W}}(X,Y)Z = \underset{1}{R}(X,Y)Z + \sum_{CA(X,Y)} \Big(&\underset{1}{\omega}(Z,X)Y - \frac{1}{2}\nabla_X\sigma(Z)FY \\ &- \frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\Big),\end{aligned} \tag{6.25}$$

gde je

$$\underset{1}{\omega}(Z,X) = \frac{1}{n-1}\Big(\underset{1}{\mathrm{Ric}}(Z,X) - \frac{1}{2}\nabla_{FX}\sigma(Z) - \frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)} \mathrm{Tr}\big(Y \to T(T(Z,X),Y)\big)\Big),$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{\widetilde{W}}(X,Y)Z = \underset{2}{R}(X,Y)Z + \sum_{CA(X,Y)} \Big(&\underset{2}{\omega}(Z,X)Y - \frac{1}{2}\nabla_X\sigma(Z)FY \\ &- \frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\Big),\end{aligned} \tag{6.26}$$

pri čemu je

$$\underset{2}{\omega}(Z,X) = \frac{1}{n-1}\Big(\underset{2}{\mathrm{Ric}}(Z,X) - \frac{1}{2}\nabla_{FX}\sigma(Z) - \frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)} \mathrm{Tr}\big(Y \to T(T(Z,X),Y)\big)\Big);$$

$$\begin{aligned}\underset{3}{\widetilde{W}}(X,Y)Z = \underset{3}{R}(X,Y)Z + \sum_{CA(X,Y)} \Big(&\underset{3}{\omega}(Z,X)Y - \frac{1}{2}\nabla_X\sigma(Z)FY \\ &+ \frac{1}{4}T(T(Z,Y),X) + \frac{1}{2}T(T(Y,X),Z)\Big),\end{aligned} \tag{6.27}$$

gde je

$$\begin{aligned}\underset{3}{\omega}(Z,X) = \frac{1}{n-1}\Big(&\underset{3}{\mathrm{Ric}}(Z,X) - \frac{1}{2}\nabla_{FX}\sigma(Z) + \frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)} \mathrm{Tr}\big(Y \to T(T(Z,X),Y)\big) \\ &+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(Y \to T(T(X,Y),Z)\big)\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{4}{\widetilde{W}}(X,Y)Z = \underset{4}{R}(X,Y)Z + \sum_{CA(X,Y)} \Big(&\underset{4}{\omega}(Z,X)Y - \frac{1}{2}\nabla_X\sigma(Z)FY \\ &+ \frac{1}{4}T(T(Z,Y),X) - \frac{1}{2}T(T(Y,X),Z)\Big),\end{aligned} \tag{6.28}$$

gde je

$$\begin{aligned}\underset{4}{\omega}(Z,X) = \frac{1}{n-1}\Big(&\underset{4}{\mathrm{Ric}}(Z,X) - \frac{1}{2}\nabla_{FX}\sigma(Z) + \frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)} \mathrm{Tr}\big(Y \to T(T(Z,X),Y)\big) \\ &- \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(Y \to T(T(X,Y),Z)\big)\Big);\end{aligned}$$

$$\underset{5}{\widetilde{W}}(X,Y)Z = \underset{5}{R}(X,Y)Z + \sum_{CA(X,Y)} \Big(\underset{5}{\omega}(Z,X)Y - \frac{1}{2}\nabla_X \sigma(Z)FY \Big) \\ - \sum_{CS(Y,X)} \frac{1}{4} T(T(Z,Y),X), \tag{6.29}$$

pri čemu je

$$\underset{5}{\omega}(Z,X) = \frac{1}{n-1}\Big(\underset{5}{\mathrm{Ric}}(Z,X) - \frac{1}{2}\nabla_{FX}\sigma(Z) - \frac{1}{4}\sum_{CS(Y,X)} \mathrm{Tr}\big(Y \to T(T(Z,X),Y)\big)\Big).$$

Teorema 6.2.2. [59] *Neka su (M,g) i $(\overline{M},\overline{g})$ generalisani Rimanovi prostori dimenzije $n>2$ i neka je $f : M \to \overline{M}$ ekvitorziono skoro geodezijsko preslikavanje tipa $\underset{\theta}{\widetilde{\pi}}_2(e,\nabla F), \theta \in \{1,2\}$, $e=\pm 1$, takvo da je ispunjen uslov* (6.20)*, tada su geometrijski objekti $\underset{\theta}{\widetilde{W}}$, $\theta = 1,\ldots,5$, definisani sa* (6.25)–(6.29) *invarijantni pri preslikavanju f.*

Dokaz. Iz relacija (6.17)–(6.19), (6.21), (6.24) i Teoreme 6.2.1 sledi da je geometrijski objekat $\underset{1}{\widetilde{W}}$ definisan jednačinom (6.25) invarijantan pri preslikavanju f. Koristeći preostale relacije Teoreme 6.2.1 dobićemo četiri nova invarijantna geometrijska objekta $\underset{\theta}{\widetilde{W}}$, $\theta = 2,\ldots,5$ preslikavanja f. □

6.3 Specijalna skoro geodezijska preslikavanja generalisanih Kelerovih prostora

U ovom odeljku ćemo predstaviti rezultate rada [59]. Naime, razmatraćemo skoro geodezijska preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\widetilde{\pi}}_2(e,\nabla F)$, $e=\pm 1$, $\theta \in \{1,2\}$, generalisanih eliptičkih i hiperboličkih Kelerovih prostora sa istim kompleksnim odnosno produkt strukturama, respektivno. Prvo ćemo dokazati jedan pomoćni rezultat.

Lema 6.3.1. [59] *Neka su M i $\overline{M}$ generalisani Rimanovi prostori dimenzije $2n \geq 4$ i neka je $f : M \to \overline{M}$ skoro geodezijsko preslikavanje tipa $\underset{\theta}{\pi}_2(e,\nabla F), e=\pm 1, \theta \in \{1,2\}$. Ako je ispunjen uslov* (6.20) *i $\nabla F = \overline{\nabla} F$, onda linearna forma σ koja se javlja u osnovnim jednačinama* (6.1) *i* (6.10) *ima sledeći oblik*

$$\sigma(X) = e\psi(FX), \; e = \pm 1. \tag{6.30}$$

Dokaz. Primetimo prvo da je uslov $\nabla F = \overline{\nabla} F$ ekvivalentan uslovu

$$P(FX,Y) - F(P(X,Y)) = 0. \tag{6.31}$$

Sada, zamenom izraza (6.15) u prethodnu relaciju dobijamo

$$(\sigma(FX) - \psi(X))FY = (e\sigma(X) - \psi(FX))Y,$$

što dalje implicira

$$\mathrm{Tr}\big(Y \to (\sigma(FX) - \psi(X))FY\big) = \mathrm{Tr}\big(Y \to (e\sigma(X) - \psi(FX))Y\big),$$

gde Tr označava trag linearnog preslikavanja. Koristeći (6.20) u prethodnoj jednačini dobijamo (6.30), čime je dokaz završen. □

Sada smo u mogućnosti da dokažemo egzistenciju nekih invarijantnih geometrijskih objekata ekvitorzionog skoro geodezijskog preslikavanja tipa $\underset{\theta}{\widetilde{\pi}}_2(-1,\nabla F)$, $\theta\in\{1,2\}$ [59]:

$$\underset{1}{\widetilde{W}}(X,Y)Z=\underset{1}{R}(X,Y)Z+\sum_{CA(X,Y)}\Big(\underset{1}{\omega}(Z,X)Y+\frac{1}{2}\nabla_X\psi(FZ)FY \\ -\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\Big), \tag{6.32}$$

gde je

$$\underset{1}{\omega}(Z,X)=\frac{1}{n-1}\Big(\underset{1}{\mathrm{Ric}}(Z,X)+\frac{1}{2}\nabla_{FX}\psi(FZ)-\frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)}\mathrm{Tr}\big(Y\to T(T(Z,X),Y)\big)\Big);$$

$$\underset{2}{\widetilde{W}}(X,Y)Z=\underset{2}{R}(X,Y)Z+\sum_{CA(X,Y)}\Big(\underset{2}{\omega}(Z,X)Y+\frac{1}{2}\nabla_X\psi(FZ)FY \\ -\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)\Big), \tag{6.33}$$

pri čemu je

$$\underset{2}{\omega}(Z,X)=\frac{1}{N-1}\Big(\underset{2}{\mathrm{Ric}}(Z,X)+\frac{1}{2}\nabla_{FX}\psi(FZ)-\frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)}\mathrm{Tr}\big(Y\to T(T(Z,X),Y)\big)\Big);$$

$$\underset{3}{\widetilde{W}}(X,Y)Z=\underset{3}{R}(X,Y)Z+\sum_{CA(X,Y)}\Big(\underset{3}{\omega}(Z,X)Y+\frac{1}{2}\nabla_X\psi(FZ)FY \\ +\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)+\frac{1}{2}T(T(Y,X),Z)\Big), \tag{6.34}$$

gde je

$$\underset{3}{\omega}(Z,X)=\frac{1}{n-1}\Big(\underset{3}{\mathrm{Ric}}(Z,X)+\frac{1}{2}\nabla_{FX}\psi(FZ)+\frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)}\mathrm{Tr}\big(Y\to T(T(Z,X),Y)\big) \\ +\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(Y\to T(T(X,Y),Z)\big)\Big);$$

$$\underset{4}{\widetilde{W}}(X,Y)Z=\underset{4}{R}(X,Y)Z+\sum_{CA(X,Y)}\Big(\underset{4}{\omega}(Z,X)Y+\frac{1}{2}\nabla_X\psi(FZ)FY \\ +\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X)-\frac{1}{2}T(T(Y,X),Z)\Big), \tag{6.35}$$

pri čemu je

$$\underset{4}{\omega}(Z,X)=\frac{1}{n-1}\Big(\underset{4}{\mathrm{Ric}}(Z,X)+\frac{1}{2}\nabla_{FX}\psi(FZ)+\frac{1}{4}\sum_{CA(X,Y)}\mathrm{Tr}\big(Y\to T(T(Z,X),Y)\big) \\ -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(Y\to T(T(X,Y),Z)\big)\Big);$$

$$\underset{5}{\widetilde{W}}(X,Y)Z=\underset{5}{R}(X,Y)Z+\sum_{CA(X,Y)}\Big(\underset{5}{\omega}(Z,X)Y+\frac{1}{2}\nabla_X\psi(FZ)FY\Big) \\ -\sum_{CS(Y,X)}\frac{1}{4}T(T(Z,Y),X), \tag{6.36}$$

pri čemu je

$$\underset{5}{\omega}(Z,X) = \frac{1}{n-1}\Big(\underset{5}{\mathrm{Ric}}(Z,X) + \frac{1}{2}\nabla_{FX}\psi(FZ) - \frac{1}{4}\sum_{CS(Y,X)} \mathrm{Tr}\big(Y \to T(T(Z,X),Y)\big)\Big).$$

Teorema 6.3.1. [59] *Neka su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},F)$ generalisani eliptički Kelerovi prostori dimenzije $2n \geq 4$ i neka je $f : M \to \overline{M}$ ekvitorziono skoro geodezijsko preslikavanje tipa $\underset{\theta}{\widetilde{\pi}}_2(-1,\nabla F)$, $\theta \in \{1,2\}$, tada, linearna forma ψ iz osnovnih jednačina* (6.1) *preslikavanja f zadovoljava*

$$(\psi(Z))^2 = (\psi(FZ))^2. \tag{6.37}$$

Geometrijski objekti $\underset{\theta}{\widetilde{W}}$, $\theta = 1,\dots,5$ definisani sa (6.32)–(6.36) *su invarijantni pri preslikavanju f.*

Dokaz. Pošto su (M,g,F) i $(\overline{M},\overline{g},\overline{F})$ generalisani Kelerovi prostori, uslovi $\mathrm{Tr}(F) = 0$ i $\nabla F = \overline{\nabla} F = 0$ su ispunjeni (videti Primer 6.2.1). Stoga, primenjujući Lemu 6.3.1 zaključujemo da linearna forma σ koja se javlja u osnovnim jednačinama (6.1) i (6.10) preslikavanja f ima oblik

$$\sigma(X) = -\psi(FX), \tag{6.38}$$

i uslov (6.23) ima sledeći oblik

$$\psi(FX)\psi(Z) + \psi(FZ)\psi(X) = 0. \tag{6.39}$$

Stavljajući $X = FZ$ u (6.39) dobijamo (6.37).

U ovom slučaju simetrična bilinearna forma η definisana drugom relacijom u (6.12) dobija oblik

$$\begin{aligned}\eta(X,Y) &\overset{(6.23)}{=} \nabla_Z\sigma(X) \overset{(6.22)}{=} \frac{1}{2}\big(\nabla_Z\sigma(X) + \overline{\nabla}_Z\sigma(X)\big)\\ &\overset{(6.17)}{=} \frac{1}{2}\big(\nabla_Z\sigma(X) - \overline{\nabla}_Z\overline{\sigma}(X)\big)\\ &\overset{(6.38)}{=} \frac{1}{2}(-\nabla_Z\psi(FX) + \nabla_Z\overline{\psi}(\overline{F}X)).\end{aligned}$$

Ostatak dokaza sledi iz Teoreme 6.2.2. □

Teorema 6.3.2. [59] *Generalisani hiperbolički Kelerov prostor (M,g,F) dimenzije $2n \geq 4$ ne dopušta netrivijalno ekvitorziono skoro geodezijsko preslikavanje tipa $\underset{\theta}{\widetilde{\pi}}_2(1,\nabla F)$, $\theta \in \{1,2\}$, na generalisani hiperbolički Kelerov prostor $(\overline{M},\overline{g},F)$.*

Dokaz. Primetimo prvo da uslov (6.23) dobija sledeći oblik

$$\psi(FX)\psi(Z) + \psi(FZ)\psi(X) = 0. \tag{6.40}$$

Stavljajući $X = FZ$ u (6.40) dobijamo

$$(\psi(Z))^2 + (\psi(FZ))^2 = 0,$$

što dalje implicira

$$\psi(Z) = 0 \;\text{ i }\; \psi(FZ) = 0.$$

Poslednja relacija dovodi do trivijalnog preslikavanja, čime je dokaz ove teoreme završen. □

Poglavlje 7

F-planarna preslikavanja i transformacije mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

Uopštavanjući pojam analitički planarne krive J. Mikeš i N.S. Sinjukov su u radu [40] uveli pojam F-planarne krive afino povezane mnogostrukosti bez torzije. Klasa F-planarnih krivih je naravno šira i od klase geodezijskih linija. Preslikavanje $f : M \to \overline{M}$ mnogostrukosti M i $\overline{M}$ sa simetričnim linearim koneksijama ∇ i $\overline{\nabla}$, i afinor strukturama F i $\overline{F}$, respektivno, naziva se *F-planarno preslikavanje*, ako svaku F-planarnu krivu mnogostrukosti M preslikava u $\overline{F}$-planarnu krivu mnogostrukosti $\overline{M}$. Rezultati o F-planarnim preslikavanjima mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom mogu se naći u odličnim monografijama [41, 42].

7.1 F-planarna preslikavanja mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

Zbog kompletnosti izlaganja najpre ćemo navesti dva pomoćna rezultata.

Lema 7.1.1. [24, 41] *Neka je V vektorski prostor dimenzije n, $Q : V \times V \to V$ simetrično bilinearno preslikavanje i $F : V \to V$ linearno preslikavanje. Ako za svaki vektor $\lambda \in V$ važi*

$$Q(\lambda,\lambda) = \rho_1(\lambda)\lambda + \rho_2(\lambda)F(\lambda),$$

gde su $\rho_1(\lambda)$ i $\rho_2(\lambda)$ funkcije sa argumentima iz vektorskog prostora V, tada, postoje linearne forme ψ i φ takve da važi

$$Q(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X + \varphi(X)F(Y) + \varphi(Y)F(X),$$

za bilo koje vektore $X,Y \in V$.

Lema 7.1.2. [41] *Neka je V vektorski prostor dimenzije n i neka su $Q : V \to V$ i $F : V \to V$ linearna preslikavanja. Ako za svaki vektor $\lambda \in V$ važi*

$$Q(\lambda) = \rho_1(\lambda)\lambda + \rho_2(\lambda)F(\lambda)$$

gde su $\rho_1(\lambda)$ i $\rho_2(\lambda)$ funkcije na V, tada, postoje konstante a i b takve da važi

$$Q(X) = aX + bF(X),$$

za bilo koji vektor $X \in V$.

Definicija 7.1.1. [65] *Kriva $l : I \to M$ na mnogostrukosti M sa nesimetričnom linearnom koneksijom $\underset{1}{\nabla}$ i afinor strukturom F, koja ispunjava uslov regularnosti $\lambda(t) = \frac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0, t \in I$, naziva se* F-planarna kriva mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom *ukoliko je ispunjen sledeći uslov*

$$\nabla_{\lambda(t)}\lambda(t) = \rho_1(t)\lambda(t) + \rho_2(t)F\lambda(t),$$

gde je ∇ simetričan deo nesimetrične linearne koneksije $\underset{1}{\nabla}$, dok su ρ_1 i ρ_2 neke funkcije parametra t.

Lako se zaključuje da važi

$$\underset{1}{\nabla}_{\lambda(t)}\lambda(t) = \underset{2}{\nabla}_{\lambda(t)}\lambda(t) = \nabla_{\lambda(t)}\lambda(t)$$

odnosno da F-planarna kriva koja odgovara nesimetričnoj linearnoj koneksiji $\underset{1}{\nabla}$ istovremeno odgovara nesimetričnoj linearnoj koneksiji $\underset{2}{\nabla}$ i obrnuto.

Definicija 7.1.2. [42, 65] *Neka su M i $\overline{M}$ dve n-dimenzione mnogostrukosti sa nesimetričnim linearnim koneksijama $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{1}{\overline{\nabla}}$, i afinor strukturama F i $\overline{F}$, respektivno. Difeomorfizam $f : M \to \overline{M}$ naziva se* F-planarno preslikavanje*, ako svaku F-planarnu krivu mnogostrukosti M preslikava u $\overline{F}$-planarnu krivu mnogostrukosti $\overline{M}$.*

Teorema 7.1.1. [42] *Neka su M i $\overline{M}$ dve n-dimenzione mnogostrukosti dimenzije $n > 2$ sa simetričnim linearnim koneksijama ∇ i $\overline{\nabla}$, i afinor strukturama F i $\overline{F}$, respektivno. Ako je $f : M \to \overline{M}$ F-planarno preslikavanje, onda se afinor struktura F očuvava pri preslikavanju f, dok tenzor deformacije $P(X,Y)$ koneksija ∇ i $\overline{\nabla}$ dobija oblik*

$$P(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} (\psi(X)Y + \varphi(X)FY),\ X,Y \in \mathscr{X}(M), \tag{7.1}$$

za neke linearne forme ψ i φ, gde je K antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$. Obrnuto, ako tenzor deformacije nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\overline{\nabla}}$ i $\underset{1}{\nabla}$ pri preslikavanju f ispunjava uslov (7.1)*, onda je f F-planarno preslikavanje.*

Teorema 7.1.2. [42, 65] *Neka su M i $\overline{M}$ dve mnogostrukosti dimenzije $n > 2$ sa nesimetričnim linearnim koneksijama $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{1}{\overline{\nabla}}$, i afinor strukturama F i $\overline{F}$, respektivno. Ako je $f : M \to \overline{M}$ F-planarno preslikavanje, onda se afinor struktura F očuvava pri preslikavanju f, dok tenzor deformacije $\underset{1}{P}(X,Y)$ dobija oblik*

$$\underset{1}{P}(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} (\psi(X)Y + \varphi(X)FY) + K(X,Y),\ X,Y \in \mathscr{X}(M), \tag{7.2}$$

za neke linearne forme ψ i φ, gde je K antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$. Obrnuto, ako tenzor deformacije nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\overline{\nabla}}$ i $\underset{1}{\nabla}$ pri preslikavanju f ispunjava uslov (7.2)*, onda je f F-planarno preslikavanje.*

Dokaz. Dokaz je baziran na dokazu teoreme koja važi u slučaju F-planarnih preslikavanja mnogostrukosti sa simetričnim linearnim koneksijama [41]. Neka je $l : I \to M$ geodezijska linija na mnogostrukosti M sa nesimetričnom linearnom koneksijom $\underset{1}{\nabla}$, koja ispunjava uslov regularnosti $\lambda(t) = \frac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0, t \in I$, parametrizovana prirodnim parametrom

$$\underset{1}{\nabla}_{\lambda}\lambda = \nabla_{\lambda}\lambda = 0. \tag{7.3}$$

Pod pretpostavkom da je f F-planarno preslikavanje, kriva l se preslikava u $\overline{F}$-planarnu krivu na mnogostrukosti $\overline{M}$ sa nesimetričnom linearnom koneksijom $\underset{1}{\overline{\nabla}}$, koja zadovojava uslov regularnosti i jednačinu

$$\underset{1}{\overline{\nabla}}_{\lambda(t)}\lambda(t) = \overline{\rho}_1(t)\lambda(t) + \overline{\rho}_2(t)\overline{F}\lambda(t), \quad t \in I, \tag{7.4}$$

za neke funkcije $\overline{\rho}_1$ i $\overline{\rho}_2$ parametra t.

Iz (7.3) i (7.4) imamo

$$\underset{1}{P}(\lambda(t), \lambda(t)) = \overline{\rho}_1(t)\lambda(t) + \overline{\rho}_2(t)\overline{F}\lambda(t), \quad t \in I,$$

što dalje implicira da u svakoj tački $p \in M$ važi

$$\underset{1}{P}(\lambda, \lambda) = \rho_1(\lambda)\lambda + \rho_2(\lambda)\overline{F}\lambda, \text{ za svaki tangentni vektor } \lambda \in T_pM, \tag{7.5}$$

gde su ρ_1 i ρ_2 funkcije koje zavise od λ.

Tenzor deformacije $\underset{1}{P}$ se može predstaviti na sledeći način

$$\underset{1}{P}(X,Y) = P(X,Y) + K(X,Y), \; X,Y \in \mathscr{X}(M), \tag{7.6}$$

gde je P tenzor deformacije simetričnih delova ∇ i $\overline{\nabla}$ nesimetričnih linearnih koneksija $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{1}{\overline{\nabla}}$, dok je K antisimetrično tenzorsko polje tipa $(1,2)$, određeno sa

$$K(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\underset{1}{P}(X,Y) - \underset{1}{P}(Y,X)\big).$$

Iz jednačina (7.5) i (7.6) sledi da je

$$P(\lambda, \lambda) = \rho_1(\lambda)\lambda + \rho_2(\lambda)\overline{F}\lambda, \text{ za svaki tangentni vektor } \lambda \in T_pM.$$

Kao u dokazu odgovarajuće teoreme u slučaju mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom (videti, [41], str. 218) možemo primeniti Lemu 7.1.1 na simetričnu bilinearnu formu P iz prethodne jednačine i dobijamo

$$P(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} (\psi(X)Y + \varphi(X)\overline{F}Y), \; X,Y \in \mathscr{X}(M), \tag{7.7}$$

za neke linearne forme ψ i φ.

Sada iz (7.6) i (7.7) dobijamo

$$\underset{1}{P}(X,Y) = \sum_{CS(X,Y)} (\psi(X)Y + \varphi(X)\overline{F}Y) + K(X,Y), \; X,Y \in \mathscr{X}(M). \tag{7.8}$$

Preslikajmo sada specijalnu F-planarnu krivu mnogostrukosti M koja ispunjava uslov regularnosti i uslov

$$\underset{1}{\nabla}_{\lambda(t)}\lambda(t) = F\lambda(t), \quad t \in I, \tag{7.9}$$

na $\overline{F}$-planarnu krivu mnogostrukosti $\overline{M}$ koja takođe ispunjava uslov regularnosti i uslov

$$\underset{1}{\overline{\nabla}}_{\lambda(t)}\lambda(t) = \overline{\rho}_1(t)\lambda(t) + \overline{\rho}_2(t)\overline{F}\lambda(t), \quad t \in I, \tag{7.10}$$

gde su $\overline{\rho}_1$ i $\overline{\rho}_2$ neke funkcije parametra t.

Iz (7.9) i (7.10) imamo

$$\underset{1}{P}(\lambda(t),\lambda(t)) = F\lambda(t) + \overline{\rho}_1(t)\lambda(t) + \overline{\rho}_2(t)\overline{F}\lambda(t), \quad t \in I,$$

što dalje implicira da u svakoj tački $p \in M$ važi

$$\underset{1}{P}(\lambda,\lambda) = F\lambda + \rho_1(\lambda)\lambda + \rho_2(\lambda)\overline{F}\lambda, \text{ za svaki tangentni vektor } \lambda \in T_pM,$$

gde su ρ_1 i ρ_2 funkcije od λ.

Koristeći izraz za tenzor deformacije $\underset{1}{P}$ dat u (7.8) u prethodnoj jednačini dobijamo

$$F\lambda = \widetilde{\rho}_1(\lambda)\lambda + \widetilde{\rho}_2(\lambda)\overline{F}\lambda.$$

Sada, na osnovu Leme 7.1.2 postoje konstante a i b takve da je

$$\overline{F} = aF + bI, \tag{7.11}$$

t.j. struktura F je očuvana.

Konačno, iz (7.8) i (7.11) dobijamo da formula (7.2) važi. Lako se može proveriti da važi formula (7.2) koja obezbeđuje egzistenciju F-planarnog preslikavanja $f : M \to \overline{M}$, čime se dokaz teoreme završava. □

Definicija 7.1.3. [72, 41] *Afinor strukturu F nazivamo e-strukturom ako ispunjava uslov*

$$F^2 = eI, \ e = \pm 1, 0,$$

pri čemu je I identičan operator.

U posebnom slučaju F-planarno preslikavanje se svodi na skoro geodezijsko, videti [41], str. 219.

Teorema 7.1.3. [41, 42] *Neka je $f : M \to \overline{M}$ netrivijalno F-planarno preslikavanje mnogostrukosti M i $\overline{M}$ sa simetričnim linearnim koneksijama ∇ i $\overline{\nabla}$, i afinor strukturama F i $\overline{F}$, respektivno. Ako je $\nabla F = \overline{\nabla}\overline{F} = 0$ i $\operatorname{rank}\|F - \rho I\| \geq 4$, gde je ρ funkcija, tada je preslikavanje f skoro geodezijsko tipa $\pi_2(e)$ i afinor struktura F je e-struktura.*

U slučaju mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom može se dokazati sledeća

Teorema 7.1.4. *Neka je $f : M \to \overline{M}$ netrivijalno F-planarno preslikavanje mnogostrukosti M i $\overline{M}$ sa nesimetričnim linearnim koneksijama $\underset{1}{\nabla}$ i $\underset{1}{\overline{\nabla}}$, i afinor strukturama F i $\overline{F}$, respektivno. Ako je $\nabla F = \overline{\nabla}\overline{F} = 0$ i $\operatorname{rank}\|F - \rho I\| \geq 4$, gde je ρ funkcija, tada je preslikavanje f skoro geodezijsko tipa $\underset{1}{\pi}_2(e, \nabla F)$ i afinor struktura F je e-struktura.*

7.2 Potrebni i dovoljni uslovi za infinitezimalne F-planarne transformacije mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom

Radovi [53, 85, 87, 88] su posvećeni infinitezimalnim deformacijama generalisanih Rimanovih prostora i mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom. Analogno infinitezimalnim F-planarnim transformacijama mnogostrukosti sa simetričnom linearnom koneksijom koje su posmatrane u radu [25], u radu [65] smo posmatrali infinitezimalne F-planarne transformacije mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom.

Definicija 7.2.1. [53] *Transformacija mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom data sa*

$$\bar{x} = x + z(x)\,\varepsilon, \tag{7.12}$$

gde je ε *infinitezimalni parametar naziva se* infinitezimalna deformacija mnogostrukosti *određena vektorskim poljem* $z = (z^i)$.

Geometrijski objekat $\mathscr{A} = \mathscr{A}(x,\varepsilon)$ koji zavisi od tačke $x \in M$ i od infinitezimalnog parametra ε, može se razviti u stepeni red

$$\mathscr{A}(x,\varepsilon) = \mathscr{A}(x) + \varepsilon\delta\mathscr{A}(x) + \varepsilon^2\delta^2\mathscr{A}(x) + \dots,$$

gde se koeficijenti $\delta\mathscr{A}(x), \delta^2\mathscr{A}(x), \dots$, nazivaju redom prva, druga, itd., varijacija geometrijskog objekta $\mathscr{A}$ pri infinitezimalnoj transformaciji određenoj sa (7.12). *Glavni deo* geometrijskog objekta $\mathscr{A}(x,\varepsilon)$ je $\mathscr{A}(x) + \varepsilon\delta\mathscr{A}(x)$, videti [53].

Definicija 7.2.2. [65] *Infinitezimalna transformacija* (7.12) *mnogostrukosti M sa nesimetričnom linearnom koneksijom* $\underset{1}{\nabla}$ *i afinor strukturom F naziva se* infinitezimalna F-planarna transformacija*, ako svaku F-planarnu krivu mnogostrukosti M peslikava u krivu čiji je glavni deo F-planarna kriva.*

Teorema 7.2.1. [65] *Mnogostrukost M sa nesimetričnom linearnom koneksijom* $\underset{1}{\nabla}$ *i afinor strukturom F dopušta infinitezimalnu F-planarnu transformaciju ako i samo ako važi*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_Z\underset{1}{\nabla}(X,Y) &= \psi(X)Y + \psi(Y)X + \varphi(X)FY + \varphi(Y)FX,\ X,Y \in \mathscr{X}(M),\\ \mathscr{L}_Z FX &= aX + bFX,\ X \in \mathscr{X}(M), \end{aligned}$$

gde su ψ i φ linearne forme, a i b su funkcije i $\mathscr{L}_Z$ je Liov izvod u pravcu vektorskog polja Z.

Primedba 7.2.1. [65] *Analizom dokaza* Teoreme 1 *u* [25]*, lako se može uvideti da se rezultat pomenute teoreme može produžiti na slučaj mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom, kao što je navedeno u* Teoremi 7.2.1.

Teorema 7.2.2. [65] *Mnogostrukost M sa nesimetričnom linearnom koneksijom* $\underset{1}{\nabla}$ *i afinor strukturom F dopušta infinitezimalnu F-planarnu transformaciju ako i samo ako je ispunjen bilo koji od sledećih pet uslova*

$$\underset{0}{(\mathrm{A})}\left\{\begin{array}{l} z^i_{;j} = z^i_{,j},\\ z^i_{j;k} = -z^p R^i_{jkp} - \frac{1}{2}(T^i_{jk;p}z^p - z^i_p T^p_{jk} + z^p_j T^i_{pk} + z^p_k T^i_{jp})\\ \qquad\quad + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \varphi_i F^h_j + \varphi_j F^h_i,\\ F^i_{j;p}z^p = z^i_p F^p_j - z^p_j F^i_p + a\delta^i_j + bF^i_j, \end{array}\right.$$

$$\underset{1}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{\underset{1}{|}j} = z^i_j, \\ z^i_{j\underset{1}{|}k} = -z^p \underset{1}{R}{}^i_{jkp} - (T^i_{jp}z^p)\underset{1}{|} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \varphi_i F^h_j + \varphi_j F^h_i, \\ F^i_{j\underset{1}{|}p} z^p = z^i_p F^p_j - z^p_j F^i_p + T^i_{ps}F^s_j z^p + T^s_{jp}F^i_s z^p + a\delta^i_j + bF^i_j, \end{cases}$$

$$\underset{2}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{\underset{2}{|}j} = z^i_j, \\ z^i_{j\underset{2}{|}k} = -z^p \underset{2}{R}{}^i_{jkp} - T^i_{pj\underset{2}{|}k}z^p - T^i_{pk}z^p_j - T^p_{kj}z^i_p - T^i_{jk\underset{2}{|}p}z^p \\ \qquad -(T^i_{sj}T^s_{kp} + T^i_{sk}T^s_{pj} + T^i_{sp}T^s_{jk})z^p + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \varphi_i F^h_j + \varphi_j F^h_i, \\ F^i_{j\underset{2}{|}p} z^p = z^i_p F^p_j - z^p_j F^i_p - T^i_{ps}F^s_j z^p - T^s_{jp}F^i_s z^p + a\delta^i_j + bF^i_j, \end{cases}$$

$$\underset{3}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{\underset{3}{|}j} = z^i_j, \\ z^i_{j\underset{3}{|}k} = -z^p \underset{3}{R}{}^i_{jkp} + T^p_{jk}z^i_p - T^i_{jp}z^p_k + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i + \varphi_i F^h_j + \varphi_j F^h_i, \\ F^i_{j\underset{3}{|}p} z^p = z^i_p F^p_j - z^p_j F^i_p - T^i_{ps}F^s_j z^p + a\delta^i_j + bF^i_j, \end{cases}$$

$$\underset{4}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{\underset{4}{|}j} = z^i_j, \\ z^i_{j\underset{4}{|}k} = -z^p \underset{4}{R}{}^i_{jkp} - (T^i_{pj\underset{4}{|}k} + T^i_{sj}T^s_{pk} + T^i_{sk}T^s_{pj})z^p - T^i_{pk}z^p_j + \psi_i\delta^h_j \\ \qquad +\psi_j\delta^h_i + \varphi_i F^h_j + \varphi_j F^h_i, \\ F^i_{j\underset{4}{|}p} z^p = z^i_p F^p_j - z^p_j F^i_p + T^i_{ps}F^s_j z^p + a\delta^i_j + bF^i_j, \end{cases}$$

gde su ψ_i i φ_i kovektori, a i b su funkcije, i δ^h_i je Kronekerova delta.

Dokaz. Uprkos tome što koeficijenti L^h_{ij} nesimetrične linearne koneksije $\underset{1}{\nabla}$ nisu tenzori, Liov izvod $\mathscr{L}_z L^h_{ij}$ jeste tenzor (videti na primer [53]). U radu [53] je pokazano da se Liov izvod koeficijenata L^i_{jk} nesimetrične linearne koneksije $\underset{1}{\nabla}$ može izraziti na sledećih pet načina

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_z L^i_{jk} =& z^i_{;jk} + z^p R^i_{jkp} + \frac{1}{2}(T^i_{jk;p}z^p - z^i_p T^p_{jk} + z^p_j T^i_{pk} + z^p_k T^i_{jp}), \\ \mathscr{L}_z L^i_{jk} =& z^i_{\underset{1}{|}jk} + z^p \underset{1}{R}{}^i_{jkp} + (T^i_{jp}z^p)\underset{1}{|}, \\ \mathscr{L}_z L^i_{jk} =& z^i_{\underset{2}{|}jk} + z^p \underset{2}{R}{}^i_{jkp} + T^i_{pj\underset{2}{|}k}z^p + T^i_{pk}z^p_j + T^p_{kj}z^i_p + T^i_{jk\underset{2}{|}p}z^p \\ &+ (T^i_{sj}T^s_{kp} + T^i_{sk}T^s_{pj} + T^i_{sp}T^s_{jk})z^p, \\ \mathscr{L}_z L^i_{jk} =& z^i_{\underset{3}{|}jk} + z^p \underset{3}{R}{}^i_{jkp} - T^p_{jk}z^i_p + T^i_{jp}z^p_k, \\ \mathscr{L}_z L^i_{jk} =& z^i_{\underset{4}{|}jk} + z^p \underset{4}{R}{}^i_{jkp} + (T^i_{pj\underset{4}{|}k} + T^i_{sj}T^s_{pk} + T^i_{sk}T^s_{pj})z^p + T^i_{pk}z^p_j, \end{aligned} \tag{7.13}$$

gde je R^h_{ijk} tenzor krivine koji odgovara komponentama $L^h_{\underline{ij}}$ pridružene simetrične linearne koneksije ∇, dok su $\underset{\theta}{R}{}^h_{ijk}$ $(\theta \in \{1,\ldots,4\})$ tenzori krivine koji odgovaraju komponentama L^h_{ij} nesimetrične linearne koneksije $\underset{1}{\nabla}$.

Za Liov izvod tenzora F^i_j važi [86]

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_z F^i_j =& F^i_{j;p} z^p - z^i_p F^p_j + z^p_j F^i_p, \\
\mathscr{L}_z F^i_j =& F^i_{j\underset{1}{|}p} z^p - z^i_p F^p_j + z^p_j F^i_p - T^i_{ps} F^s_j z^p - T^s_{jp} F^i_s z^p, \\
\mathscr{L}_z F^i_j =& F^i_{j\underset{2}{|}p} z^p - z^i_p F^p_j + z^p_j F^i_p + T^i_{ps} F^s_j z^p + T^s_{jp} F^i_s z^p, \\
\mathscr{L}_z F^i_j =& F^i_{j\underset{3}{|}p} z^p - z^i_p F^p_j + z^p_j F^i_p + T^i_{ps} F^s_j z^p, \\
\mathscr{L}_z F^i_j =& F^i_{j\underset{4}{|}p} z^p - z^i_p F^p_j + z^p_j F^i_p - T^i_{ps} F^s_j z^p.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Dokaz sada sledi iz Teoreme 7.2.1, koristeći (7.13) i (7.14). □

7.3 Potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju infinitezimalne geodezijske transformacije

Potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju infinitezimalnih geodezijskih transformacija Rimanovih prostora mogu se naći, na primer u [12, 41]. Pošto je svaka infinitezimalna geodezijska transformacija specijalna infinitezimalna F-planarna transformacija (u slučaju $F^h_i = \rho\delta^h_i$ ili $\varphi_i = 0$), lako možemo dobiti Posledicu 7.3.1 i Posledicu 7.3.2 iz Teoreme 7.2.1 i Teoreme 7.2.2, respektivno.

Posledica 7.3.1. [65] *Mnogostrukost M sa nesimetričnom linearnom koneksijom $\underset{1}{\nabla}$ dopušta infinitezimalnu geodezijsku transformaciju ako i samo ako važi*

$$\mathscr{L}_Z \underset{1}{\nabla}(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X, \ X, Y \in \mathscr{X}(M),$$

gde je ψ linearna forma i $\mathscr{L}_Z$ je Liov izvod u pravcu vektorskog polja Z.

Posledica 7.3.2. [65] *Mnogostrukost M sa nesimetričnom linearnom koneksijom $\underset{1}{\nabla}$ i afinor strukturom F dopušta infinitezimalnu geodezijsku transformaciju ako i samo ako je ispunjen bilo koji od sledećih pet uslova*

$$(\underset{0}{\mathrm{B}}) \begin{cases} z^i_{;j} = z^i_j, \\ z^i_{j;k} = -z^p R^i_{jkp} - \frac{1}{2}(T^i_{jk;p} z^p - z^i_p T^p_{jk} + z^p_j T^i_{pk} + z^p_k T^i_{jp}) \\ \qquad + \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i, \end{cases}$$

$$(\underset{1}{\mathrm{B}}) \begin{cases} z^i_{\underset{1}{|}j} = z^i_j, \\ z^i_{j\underset{1}{|}k} = -z^p \underset{1}{R}{}^i_{jkp} - (T^i_{jp} z^p)\underset{1}{|} + \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i, \end{cases}$$

$$(\underset{2}{\mathrm{B}}) \begin{cases} z^i_{\underset{2}{|}j} = z^i_j, \\ z^i_{j\underset{2}{|}k} = -z^p \underset{2}{R}{}^i_{jkp} - T^i_{pj\underset{2}{|}k} z^p - T^i_{pk} z^p_j - T^p_{kj} z^i_p - T^i_{jk\underset{2}{|}p} z^p \\ \qquad -(T^i_{sj} T^s_{kp} + T^i_{sk} T^s_{pj} + T^i_{sp} T^s_{jk}) z^p + \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i, \end{cases}$$

$$(\underset{3}{\mathrm{B}}) \begin{cases} z^i_{\underset{3}{|}j} = z^i_j, \\ z^i_{j\underset{3}{|}k} = -z^p \underset{3}{R}{}^i_{jkp} + T^p_{jk} z^i_p - T^i_{jp} z^p_k + \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i, \end{cases}$$

$$
\underset{4}{(\mathrm{B})}\begin{cases} z^i_{\underset{4}{|}j} = z^i_j, \\ z^i_{j\underset{4}{|}k} = -z^p \underset{4}{R}{}^i_{jkp} - (T^i_{pj\underset{4}{|}k} + T^i_{sj}T^s_{pk} + T^i_{sk}T^s_{pj})z^p - T^i_{pk}z^p_j \\ \qquad\qquad + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i, \end{cases}
$$

gde je ψ_i kovektor, a i b su funkcije, dok δ^h_i označava Kronekerov delta simbol.

7.4 Infinitezimalne HP transformacije generalisanih Kelerovih prostora

Infinitezimalne HP transformacije Kelerovih prostora su prvi posmatrali Š. Išihara i Š.-I. Tačibana [27, 28], videti [41, 42].

Definicija 7.4.1. [41] *Infinitezimalna transformacija* (7.12) *generalisanog Kelerovog prostora $\mathbb{GK}_n = (M,g,F)$, naziva se* infinitezimalna HP transformacija*, ako svaku holomorfno planarnu krivu preslikava u krivu čiji je glavni deo holomorfno planarna kriva.*

Posmatraćemo infinitezimalne HP transformacije generalisanih Kelerovih prostora, koje su zapravo specijalan slučaj infinitezimalnih F-planarnih transformacija mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom [25, 65].

Teorema 7.4.1. [62] *Generalisani Kelerov prostor $\mathbb{GK}_n = (M,g,F)$ dopušta infinitezimalnu HP transformaciju ako i samo ako su ispunjeni uslovi*

$$
\mathscr{L}_z\Gamma^h_{ij} = \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i - \psi_pF^p_iF^h_j - \psi_pF^p_jF^h_i \quad i \quad \mathscr{L}_zF^h_i = 0,
$$

gde je ψ_i kovektor i $\mathscr{L}_z$ je Liov izvod u pravcu z.

7.4.1 Sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina za egzistenciju infinitezimalne HP transformacije generalisanih Kelerovih prostora

Generalisani Kelerovi prostori su snabdeveni širom klasom metrike od uobičajenih Kelerovih prostora. Stoga smo u mogućnosti da pored postojećih, uspostavimo nove uslove za egzistenciju infinitezimalnih holomorfno projektivnih transformacija generalisanih Kelerovih prostora [62]. Kao posledicu Teoreme 7.2.2, dobijamo pet ekvivalentnih sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina za egzistenciju infinitezimalne HP transformacije generalisanog Kelerovog prostora.

Posledica 7.4.1. [62] *Generalisani Kelerov prostor $\mathbb{GK}_n = (M,g,F)$ dopušta infinitezimalnu HP transformaciju ako i samo ako važi bilo koji od sledećih pet uslova*

$$
\underset{0}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{;j} = z^i_j, \\ z^i_{j;k} = -z^pR^i_{jkp} - \frac{1}{2}(T^i_{jk;p}z^p - z^i_pT^p_{jk} + z^p_jT^i_{pk} + z^p_kT^i_{jp}) \\ \qquad\qquad + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j - \psi_pF^p_jF^i_k - \psi_pF^p_kF^i_j, \\ F^i_{j;p}z^p = z^i_pF^p_j - z^p_jF^i_p, \end{cases}
$$

$$
\underset{1}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{\underset{1}{|}j} = z^i_j, \\ z^i_{j\underset{1}{|}k} = -z^p\underset{1}{R}{}^i_{jkp} - (T^i_{jp}z^p)\underset{1}{|} + \psi_j\delta^i_k + \psi_k\delta^i_j - \psi_pF^p_jF^i_k - \psi_pF^p_kF^i_j, \\ F^i_{j\underset{1}{|}p}z^p = z^i_pF^p_j - z^p_jF^i_p + T^i_{ps}F^s_jz^p + T^s_{jp}F^i_sz^p, \end{cases}
$$

$$
\underset{2}{(\mathrm{A})}\begin{cases}
z^i_{\underset{2}{|}j} = z^i_j, \\
z^i_{j\underset{2}{|}k} = -z^p \underset{2}{R}{}^i_{jkp} - T^i_{pj\underset{2}{|}k} z^p - T^i_{pk} z^p_j - T^p_{kj} z^i_p - T^i_{jk\underset{2}{|}p} z^p \\
\qquad -(T^i_{sj}T^s_{kp} + T^i_{sk}T^s_{pj} + T^i_{sp}T^s_{jk}) z^p + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j - \psi_p F^p_j F^i_k - \psi_p F^p_k F^i_j, \\
F^i_{j\underset{2}{|}p} z^p = z^i_p F^p_j - z^p_j F^i_p - T^i_{ps} F^s_j z^p - T^s_{jp} F^i_s z^p,
\end{cases}
$$

$$
\underset{3}{(\mathrm{A})}\begin{cases}
z^i_{\underset{3}{|}j} = z^i_j, \\
z^i_{j\underset{3}{|}k} = -z^p \underset{3}{R}{}^i_{jkp} + T^p_{jk} z^i_p - T^i_{jp} z^p_k + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j - \psi_p F^p_j F^i_k - \psi_p F^p_k F^i_j, \\
F^i_{j\underset{3}{|}p} z^p = z^i_p F^p_j - z^p_j F^i_p - T^i_{ps} F^s_j z^p,
\end{cases}
$$

$$
\underset{4}{(\mathrm{A})}\begin{cases}
z^i_{\underset{4}{|}j} = z^i_j, \\
z^i_{j\underset{4}{|}k} = -z^p \underset{4}{R}{}^i_{jkp} - (T^i_{pj\underset{4}{|}k} + T^i_{sj}T^s_{pk} + T^i_{sk}T^s_{pj}) z^p - T^i_{pk} z^p_j + \psi_j \delta^i_k \\
\qquad + \psi_k \delta^i_j - \psi_p F^p_j F^i_k - \psi_p F^p_k F^i_j, \\
F^i_{j\underset{4}{|}p} z^p = z^i_p F^p_j - z^p_j F^i_p + T^i_{ps} F^s_j z^p,
\end{cases}
$$

gde je $T^h_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^h_{ij} - \Gamma^h_{ji})$ tenzor torzije, ψ_i je kovektor, δ^i_j je Kronekerova delta, dok su R^h_{ijk} komponente tenzora krivine koji odgovaraju Kristofelovim simbolima $\Gamma^h_{\underline{ij}}$ i $\underset{\theta}{R}{}^h_{ijk}$, $\theta = 1,\dots,4$ su komponente tenzora krivine $\underset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,4$, koji odgovaraju generalisanim Kristofelovim simbolima Γ^h_{ij}.

7.5 Infinitezimalne HP transformacije generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora

U ovom odeljku ćemo posmatrati infinitezimalne HP transformacije generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora, koje su specijalan slučaj infinitezimalnih F-planarnih transformacija mnogostrukosti sa nesimetričnom linearnom koneksijom [25, 65].

Teorema 7.5.1. *Generalisani hiperbolički Kelerov prostor (M,g,F) dopušta infinitezimalnu HP transformaciju ako i samo ako su ispunjeni uslovi*

$$
\mathscr{L}_z \Gamma^h_{ij} = \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i + \psi_p F^p_i F^h_j + \psi_p F^p_j F^h_i \quad i \quad \mathscr{L}_z F^h_i = 0,
$$

gde je ψ_i kovektor i $\mathscr{L}_z$ je Liov izvod u pravcu z.

7.5.1 Sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina za egzistenciju infinitezimalne HP transformacije generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora

Kao posledicu Teoreme 7.2.2, dobijamo pet ekvivalentnih sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina za egzistenciju infinitezimalne HP transformacije generalisanog hiperboličkog Kelerovog prostora.

Posledica 7.5.1. *Generalisani hiperbolički Kelerov prostor (M,g,F) dopušta infinitezimalnu HP transformaciju ako i samo ako važi bilo koji od sledećih pet uslova*

$$
\underset{0}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{;j}=z^i_j,\\ z^i_{j;k}=-z^pR^i_{jkp}-\frac{1}{2}(T^i_{jk;p}z^p-z^i_pT^p_{jk}+z^p_jT^i_{pk}+z^p_kT^i_{jp})\\ \qquad\quad +\psi_j\delta^i_k+\psi_k\delta^i_j+\psi_pF^p_jF^i_k+\psi_pF^p_kF^i_j,\\ F^i_{j;p}z^p=z^i_pF^p_j-z^p_jF^i_p, \end{cases}
$$

$$
\underset{1}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{\underset{1}{|}j}=z^i_j,\\ z^i_{j\underset{1}{|}k}=-z^p\underset{1}{R}{}^i_{jkp}-(T^i_{jp}z^p)\underset{1}{|}+\psi_j\delta^i_k+\psi_k\delta^i_j+\psi_pF^p_jF^i_k+\psi_pF^p_kF^i_j,\\ F^i_{j\underset{1}{|}p}z^p=z^i_pF^p_j-z^p_jF^i_p+T^i_{ps}F^s_jz^p+T^s_{jp}F^i_sz^p, \end{cases}
$$

$$
\underset{2}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{\underset{2}{|}j}=z^i_j,\\ z^i_{j\underset{2}{|}k}=-z^p\underset{2}{R}{}^i_{jkp}-T^i_{pj\underset{2}{|}k}z^p-T^i_{pk}z^p_j-T^p_{kj}z^i_p-T^i_{jk\underset{2}{|}p}z^p\\ \qquad\quad -(T^i_{sj}T^s_{kp}+T^i_{sk}T^s_{pj}+T^i_{sp}T^s_{jk})z^p+\psi_j\delta^i_k+\psi_k\delta^i_j+\psi_pF^p_jF^i_k+\psi_pF^p_kF^i_j,\\ F^i_{j\underset{2}{|}p}z^p=z^i_pF^p_j-z^p_jF^i_p-T^i_{ps}F^s_jz^p-T^s_{jp}F^i_sz^p, \end{cases}
$$

$$
\underset{3}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{\underset{3}{|}j}=z^i_j,\\ z^i_{j\underset{3}{|}k}=-z^p\underset{3}{R}{}^i_{jkp}+T^p_{jk}z^i_p-T^i_{jp}z^p_k+\psi_j\delta^i_k+\psi_k\delta^i_j+\psi_pF^p_jF^i_k+\psi_pF^p_kF^i_j,\\ F^i_{j\underset{3}{|}p}z^p=z^i_pF^p_j-z^p_jF^i_p-T^i_{ps}F^s_jz^p, \end{cases}
$$

$$
\underset{4}{(\mathrm{A})}\begin{cases} z^i_{\underset{4}{|}j}=z^i_j,\\ z^i_{j\underset{4}{|}k}=-z^p\underset{4}{R}{}^i_{jkp}-(T^i_{pj\underset{4}{|}k}+T^i_{sj}T^s_{pk}+T^i_{sk}T^s_{pj})z^p-T^i_{pk}z^p_j+\psi_j\delta^i_k\\ \qquad\quad +\psi_k\delta^i_j+\psi_pF^p_jF^i_k+\psi_pF^p_kF^i_j,\\ F^i_{j\underset{4}{|}p}z^p=z^i_pF^p_j-z^p_jF^i_p+T^i_{ps}F^s_jz^p, \end{cases}
$$

gde je $T^h_{ij}=\frac{1}{2}(\Gamma^h_{ij}-\Gamma^h_{ji})$ *tenzor torzije,* ψ_i *je kovektor,* δ^i_j *je Kronekerova delta, dok su* R^h_{ijk} *komponente tenzora krivine koji odgovaraju Kristofelovim simbolima* $\Gamma^h_{\underline{ij}}$ *i* $\underset{\theta}{R}{}^h_{ijk}$, $\theta=1,\dots,4$ *su komponente tenzora krivine* $\underset{\theta}{R}$, $\theta=1,\dots,4$, *koji odgovaraju generalisanim Kristofelovim simbolima* Γ^h_{ij}.

Literatura

[1] Z. Al-Zhour, *Extension and generalization properties of the weighted Minkowski inverse in a Minkowski space for an arbitrary matrix*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 70, (2015), 954–961.

[2] V.E. Berezovski, J. Mikeš, *On a classification of almost geodesic mapings of affine connection spaces*, Acta Univ. Palacki. Olomouc, Fac. Rer. Nat. Math., Vol. 35, (1996), 21–24.

[3] V.E. Berezovski, J. Mikeš, *On special almost geodesic mappings of type π_1 of spaces with affine connection*, Acta Univ. Palacki. Olomouc Fac. Rer. Nat. Math. 43, (2004), 21–26.

[4] V.E. Berezovski, J. Mikeš, *Almost geodesic mappings of spaces with affine connection*, J. Math. Sci., Vol. 207, No. 3, (2015), 389–409.

[5] V.E. Berezovski, J. Mikeš, A. Vanžurová, *Fundamental PDE'S of the canonical almost geodesic mappings of type $\tilde{\pi}_1$*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), Vol. 37, No. 3, (2014), 647–659.

[6] V. Cruceanu, P. Fortuny, P.M. Gadea, *A survey on paracomplex geometry*, Rocky Mt. J. Math. 26, (1996), 83–115.

[7] V.V. Domashev, J. Mikeš, *Theory of holomorphically projective mappings of Kählerian spaces*, Mat. Zametki, Vol. 23, No. 2, (1978), 297–303.

[8] M.P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Bikhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1992.

[9] A. Einstein, *A generalization of the relativistic theory of gravitation*, Annals of Mathematics, Vol. 46, No. 4, (1945), 578–584.

[10] A. Einstein, *Relativistic theory of the non-symmetric field, Appendix II in: The meaning of relativity*, 5^{th} edit., Princeton Univ. Press, New Jersey, 1955.

[11] A. Einstein, E.G. Straus, *A generalization of the relativistic theory of gravitation II*, Annals of Mathematics, Vol. 47, No. 4, (1946), 731–741.

[12] L.P. Eisenhart, *Riemannian geometry*, Princeton Univ. Press., Princeton, 1926.

[13] L.P. Eisenhart, *Non-Riemannian geometry*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 8, Providence, RI, 1990, reprint of the 1927 original.

[14] L.P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces I*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 37, No. 5, (1951), 311–315.

[15] L.P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces, II*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 38, (1952), 505–508.

[16] L.P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces and general relativity*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 39, No. 6, (1953), 546–551.

[17] L.P. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces and general relativity II*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 40, No. 6, (1954), 463–466.

[18] F. Graif, *Sulla posibilita di construire paralelogrami chiusi in alcune varieta a torsione*, Boll. d. Un. math. Ital., *Ser. III,* 7, (1952), 132–135.

[19] T.I. Hryhor'eva, *Invariant geometric objects of the canonical almost-geodesic mapping* $\pi_2(e = 0)$, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 54, No. 10, (2002), 1602–1610.

[20] G.S. Hall, D.P. Lonie, *The principle of equivalence and projective structure in spacetimes*, Class. Quantum Grav. 24 (2007), 3617–3636.

[21] G.S. Hall, D.P. Lonie, *The principle of equivalence and cosmological metrics*, J. Math. Phys. 49, 022502 (2008).

[22] G.S. Hall, D.P. Lonie, *Projective equivalence of Einstein spaces in general relativity*, Class. Quantum Grav. 26 (2009) 125009.

[23] I. Hinterleitner, 4-*planar Mappings of Quaternionic Kähler Manifolds*, Geometric Methods in Physics, XXXI Workshop, Bialowieza, Poland, 2012. Series: Birkhäuser/Springer, Trends in Math., 187-193, (2013).

[24] I. Hinterleitner, J. Mikeš, *On* F*-planar mappings of spaces with affine connections*, Note Mat. Vol. 27, No. 1, (2007), 111–118.

[25] I. Hinterleitner, J. Mikeš, J. Stránská, *Infinitesimal* F*-planar transformations*, Russ. Math., Vol. 52, No. 4, (2008), 13–18. Transl. from Iz. VUZ Matematika, No. 4, (2008), 16–21.

[26] I. Hinterleitner, J. Mikeš, *Geodesic mappings of* (*pseudo-*) *Riemannian manifolds preserve class of differentiability,* Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14, No. 2, (2013), 575–582.

[27] S. Ishihara, *Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold*, Tohoku Math. J. II., Vol. 9, No. 3, (1957), 273–297.

[28] S. Ishihara, S.-I. Tachibana, *A note on holomorphically projective transformations of a Kählerian space with parallel Ricci tensor*, Tohoku Math. J. II., Vol. 13, No. 2, (1961), 193–200.

[29] T. Janssen, T. Prokopec, *Instabilities in the nonsymmetric theory of gravitation*, Class. Quant. Grav. Vol. 23, No. 15, (2006), 4967–4882.

[30] T. Janssen, T. Prokopec, *Problems and hopes in nonsymmetric gravity*, J. Phys. A, Math. Theor. 40, (2007), 7067–7074.

[31] W. Kühnel, *Differential geometry; curves – surfaces – manifolds*, AMS, 2006.

[32] J.M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer, New York, 2006.

[33] J. Mikeš, *On geodesic mappings of Einstein spaces*, Mathematical Notes, Vol. 28, No. 6, (1980), 922–924.

[34] J. Mikeš, *On holomorphically projective mappings of Kählerian spaces*, Ukr. Geom. Sb. 23, (1980), 90–98.

[35] J. Mikeš, *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces*, J. Math. Sci., Vol. 78, No. 3, (1996), 389–409.

[36] J. Mikeš, *Holomorphically projective mappings and their generalizations*, J. Math. Sci., New York, Vol. 89, No. 3, (1998), 1334–1353.

[37] J. Mikeš, V.A. Kiosak, A. Vanžurová, *Geodesic mappings of manifolds with affine connection*, Palacký Univ. Press, Olomouc, 2008.

[38] J. Mikeš, O. Pokorná, G. Starko, *On almost geodesic mappings $\pi_2(e)$ onto Riemannian spaces*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 72, (2004), 151–157.

[39] J. Mikeš, H. Chudá, I. Hinterleitner, *Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., Vol. 11, No. 5, (2014), 1450044.

[40] J. Mikeš, N.S. Sinyukov, *Quasiplanar mappings of spaces with affine connection*, Sov. Math. Vol. 27, No. 1, (1983), 63–70. Transl. from Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., (1983), No. 1, 55–61.

[41] J. Mikeš, A. Vanžurová, I. Hinterleitner, *Geodesic Mappings and Some Generalizations*, Palacký Univ. Press, Olomouc, 2009.

[42] J. Mikeš, et al., *Differential geometry of special mappings*, Palacký Univ. Press, Olomouc, 2015.

[43] S.M. Minčić, *Ricci identities in the space of non-symmetric affine connexion*, Matematički Vesnik, 10(25), Sv.2, (1973), 161–172.

[44] S.M. Minčić, *Generalisani Rimanovi prostori*, doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1975.

[45] S.M. Minčić, *Curvature tensors of the space of non-symmetric affine connexion, obtained from the curvature pseudotensors*, Matematički Vesnik, 13(28), (1976), 421–435.

[46] S.M. Minčić, *New commutation formulas in the non-symmetric affine connexion space*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 22(36), (1977), 189–199.

[47] S.M. Minčić, *Independent curvature tensors and pseudotensors of spaces with non-symmetric affine connexion*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolayai, 31, Differential Geometry, Budapest (Hungary), (1979), 445–460.

[48] S.M. Minčić, *Geometric interpretations of curvature tensors and pseudotensors of the spaces with non-symmetric affine connection* (na ruskom jeziku), Publ. Inst. Math., 47(61), (1990), 113–120.

[49] S.M. Minčić, M.S. Stanković, *Equitorsion geodesic mappings of generalized Riemannian spaces*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. 61, (1997), 97–104.

[50] S.M. Minčić, *Some characteristics of curvature tensors of non-symmetric affine connexion*, 12th Yugoslav Geometric Seminar (Novi Sad, 1998), Novi Sad J. Math., Vol. 29, No. 3, (1999), 169–186.

[51] S.M. Minčić, *On Ricci type identities in manifolds with non-symmetric affine connection*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 94(108), (2013), 205–217.

[52] S.M. Minčić, M.S. Stanković, Lj.S. Velimirović, *Generalized Kählerian Spaces*, Filomat 15, (2001), 167–174.

[53] S.M. Minčić, Lj.S. Velimirović, M.S. Stanković, *Infinitesimal deformations of a non-symmetric affine connection space*, Filomat 15, (2001), 175–182.

[54] S.M. Minčić, M.S. Stanković, Lj.S. Velimirović, *Generalized Riemannian spaces and spaces of non-symmetric affine connection*, Faculty of Sciences and Mathematics, Niš, 2013.

[55] J.W. Moffat, *A new nonsymmetric gravitational theory*, Physics Letters B 355, (1995), 447–452.

[56] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Interscience Publ., New York etc. Vol. 1, 1963; Vol. 2, 1969.

[57] P. Peška, J. Mikeš, H. Chudá, M. Shiha, *On holomorphically projective mappings of parabolic kahler manifolds*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 17, No. 2, (2016), 1011–1019.

[58] M.Z. Petrović, *Holomorphically projective mappings between generalized hyperbolic Kähler spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 435, No. 1, (2017), 578–592.

[59] M.Z. Petrović, *Special almost geodesic mappings of the second type between generalized Riemannian spaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), `DOI :10.1007/s40840-017-0509-5`

[60] M.Z. Petrović, *Canonical almost geodesic mappings of type* $\underset{\theta}{\pi}_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$, *between generalized parabolic Kähler manifolds*, Miskolc Mathematical Notes, (prihvaćen za štampu).

[61] M.Z. Petrović, *Holomorphically projective mappings between m-generalized parabolic Kähler manifolds*, Filomat, (2017), (prihvaćen za štampu).

[62] M.Z. Petrović, *PDE-systems for the existence of a holomorphically projective mapping between generalized Kähler spaces*, (u pripremi).

[63] M.Z. Petrović, Predrag S. Stanimirović, *Representations and computations of* $\{2,3^{\sim}\}$ *and* $\{2,4^{\sim}\}$*-inverses in indefinite inner product spaces*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 254, (2015), 157–171.

[64] M.Z. Petrović, M.S. Stanković, *Special almost geodesic mappings of the first type of non-symmetric affine connection spaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), Vol. 40, No. 3, (2017), 1353–1362.

[65] M.Z. Petrović, M.S. Stanković, *F-planar mappings and infinitesimal F-planar transformations of manifolds with non-symmetric linear connection*, (na recenziji).

[66] M.Z. Petrović, M.S. Stanković, *On almost geodesic mappings of the second type between manifolds with non-symmetric linear connection*, (na recenziji).

[67] M. Prvanović, *Holomorphically projective transformations in a locally product Riemannian spaces*, Math. Balkanica 1, (1971), 195–213.

[68] M. Prvanović, *Four curvature tensors of non-symmetric affine connexion* (na ruskom jeziku), in Proc. Conf.: "150 years of Lobachevsky geometry", Moscow (1977), 199–205.

[69] M. Prvanović, *A note on holomorphically projective transformations of the Kähler spaces*, Tensor, New Ser. 35, (1981), 99–104.

[70] M. Shiha, J. Mikeš, *The holomorphically-projective mappings of parabolically-Kählerian spaces* (na ruskom jeziku), Dep. in UkrNIINTIm Kiev, No. 1128–Uk91, 19 p., (1991).

[71] N.S. Sinyukov, *Almost geodesic mappings of affinely connected and Riemannian spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 151, (1963), 781–782.

[72] N.S. Sinyukov, *Geodesic mappings of Riemannian spaces* (na ruskom jeziku), "Nauka", Moscow, 1979.

[73] V.S. Sobchuk, J. Mikeš, O. Pokorná, *On almost geodesic mappings π_2 between semisymmetric Riemannian spaces*, XII Yugoslav Geometrical Seminar (Novi Sad, 1998). Novi Sad J. Math., Vol. 29, No. 3, (1999), 309–312.

[74] M.S. Stanković, *Almost geodesic mappings of the first type of affine spaces*, Novi Sad J. Math., Vol. 29, No. 3, (1999), 313–323.

[75] M.S. Stanković, *On a canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces*, Filomat 13, (1999), 105–114.

[76] M.S. Stanković, *On a special almost geodesic mappings of the third type of affine spaces*, Novi Sad J. Math., Vol. 31, No. 2, (2001), 125–135.

[77] M.S. Stanković, *Neka preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije*, doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2001.

[78] M.S. Stanković, S.M. Minčić, Lj.S. Velimirović, *On holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces*, Matematički Vesnik 54, (2002), 195–202.

[79] M.S. Stanković, S.M. Minčić, Lj.S. Velimirović, *On equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 54, No. 129, (2004), 701–715.

[80] M.S. Stanković, Lj.S. Velimirović, S.M. Minčić, M.Lj. Zlatanović, *Equitorsion conform mappings of generalized Riemannian spaces*, Matematički Vesnik, Vol. 61, (2009), 119–129.

[81] M.S. Stanković, M.Lj. Zlatanović, Lj.S. Velimirović, *Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the first kind*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 60, No. 3, (2010), 635–653.

[82] M.S. Stanković, M.Lj. Zlatanović, Lj.S. Velimirović, *Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the second kind*, International Electronic Journal of Geometry, Vol. 3, No. 2, (2010), 26–39.

[83] M.S. Stanković, M.Lj. Zlatanović, N.O. Vesić, *Basic equations of G-almost geodesic mappings of the second type, which have the property of reciprocity*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 65, No. 3, (2015), 787–799.

[84] H. Vavříková, J. Mikeš, O. Pokorná, G. Starko, *On fundamental equations of almost geodesic mappings of type $\pi_2(e)$*, Russ. Math., Vol. 51, No. 1, (2007), 8–12. Transl. from Iz. VUZ Matematika, No. 1, (2007), 10–15.

[85] Lj.S. Velimirović, S.M. Minčić, M.S. Stanković, *Infinitesimal deformations of curvature tensors at non-symmetric affine connection space*, Matematički Vesnik 54, (2002), 219–226.

[86] Lj.S. Velimirović, S.M. Minčić, M.S. Stanković, *Infinitesimal deformations and Lie derivative of non-symmetric affine connection space*, Acta Univ. Palacki. Olomouc., Fac. rer. nat., Mathematica 42, (2003), 111–121.

[87] Lj.S. Velimirović, S.M. Minčić, M.S. Stanković, *Infinitesimal deformation of a basic tensor of a generalized Riemannian space*, Filomat, Vol. 21, No. 2, (2007), 237–244.

[88] Lj.S. Velimirović, S.M. Minčić, M.S. Stanković, *Infinitesimal rigidity and flexibility of a non-symmetric affine connection space*, European Journal of Combinatorics, Vol. 31, No. 4, (2010), 1148–1159.

[89] S. Vukmirović, *Auto-dualne povezanosti*, doktorska disertacija, Matematički fakultet, Beograd, 2003.

[90] K. Yano, *Differential geometry of complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, New York, 1965.

[91] M.Lj. Zlatanović, I. Hinterleitner, M. Najdanović, *On equitorsion concircular tensors of generalized Riemannian spaces*, Filomat, Vol. 28, No. 3, 463–471.

Lista imena

A. Ajnštajn:	Albert Einstein (1879–1955)
L.P. Ajzenhart:	Luther Pfahler Eisenhart (1876–1965)
V.E. Berezovski:	Vladimir E. Berezovski
Bjanki:	Luigi Bianchi (1856–1928)
H. Čuda:	Hanna Chuda
V.V. Domašev:	V.V. Domashev
F. Graif:	Franca Graiff
M. Gromov:	Mikhail Leonidovich Gromov
Hajzenberg:	Werner Karl Heisenberg (1901–1976)
Hausdorf:	Felix Hausdorff (1868–1942)
I. Hinterleitner:	Irena Hinterleitner
Š. Išihara:	Shigeru Ishihara
T. Jansen:	Tomas Janssen
E. Keler:	Erich Kähler (1906–2000)
Levi-Čivita:	Tullio Levi-Civita (1873–1941)
J. Mikeš:	Josef Mikeš
S.M. Minčić:	Svetislav M. Minčić
Dž. Mofat:	John W. Moffat
T. Otsuki:	Tominosuke Otsuki
M. Pastori:	Maria Pastori (1895–1975)
P. Peška:	Patrik Peška
T. Prokopec:	Tomislav Prokopec
M. Prvanović:	Mileva Prvanović (1929–2016)
P.K. Rašajski:	Petr Konstantinovich Rashevskij (1907–1985)
Riči:	Gregorio Ricci-Cubastro (1853–1925)
B.A. Rozenfild:	Boris A. Rozenfeld (1917–2008)
M.S. Stanković:	Mića S. Stanković
M. Šiha:	Mohsen Shiha
P.A. Širokov:	Petr Alexeevich Shirokov (1895–1944)
E.G. Štraus:	Ernst Gabor Straus (1922–1983)
Š.-I. Tačibana:	Shun-Ichi Tachibana
J. Taširo:	Yoshihiro Tashiro
Tomas:	Tracy Yerkes Thomas (1899–1983)
A. Trautman:	Andrzej Trautman
A. Vanžurová:	Alena Vanžurová
Vejl:	Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955)
V.V. Višnevski:	Vladimir Vladimirovich Vishnevskij (1929–2008)

Biografija autora

Miloš Petrović rođen je 17.12.1989. godine u Kruševcu, u Republici Srbiji, gde je završio osnovnu i srednju školu. Osnovne akademske studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Nišu, upisao je školske 2008/2009 godine, a diplomirao je dana 9.9.2011. godine sa prosečnom ocenom 10 (deset). Master akademske studije, smer Matematika, Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu, upisao je školske 2011/2012 godine. Master akademske studije je završio prvi u generaciji, sa prosečnom ocenom 10 (deset). Master rad na temu „Moderna diferencijalna geometrija površi nulte srednje krivine“, pod mentorstvom prof. dr Ljubice Velimirović, odbranio je dana 13.9.2013. godine. Doktorske akademske studije matematike Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu, upisao je školske 2013/2014 godine. Sve ispite predviđene nastavnim planom i programom doktorskih akademskih studija Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu položio je sa ocenom 10 (deset). Odlukom Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu broj: 73/1-01, od 25.1.2017. godine, odobrena mu je izrada doktorske disertacije na temu „Holomorfno projektivna preslikavanja generalisanih hiperboličkih Kelerovih prostora i uopštenja“, dok je za mentora imenovan prof. dr Mića Stanković, redovni profesor Departmana za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu.

U toku studija, školske 2010/2011 i 2012/2013 godine bio je korisnik stipendije „Dositeja“ Fonda za mlade talente Ministarstva omladine i sporta Republike Srbije. Takođe, bio je dugogodišnji stipendista Fonda za podsticanje razvoja mladih talenata grada Kruševca. Za izuzetan uspeh u toku studija nagrađen je Vidovdanskom plaketom grada Kruševca 2014. godine.

Miloš Petrović je istraživač-saradnik na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Nišu, na kome je zaposlen od 2014. godine u okviru projekta Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije, pod nazivom „Geometrija, obrazovanje i vizuelizacija sa primenama“, evidencioni broj projekta je 174012, a rukovodilac projekta je prof. dr Zoran Rakić, redovni profesor Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

Spisak naučnih radova autora

Miloš Petrović je publikovao šest naučnih radova (samostalno i u koautorstvu) u časopisima sa SCI i SCIe liste i jedan naučni rad u vodećem časopisu nacionalnog značaja:

1. **Miloš Z. Petrović**, Predrag S. Stanimirović, *Representations and computations of* $\{2,3^{\sim}\}$ *and* $\{2,4^{\sim}\}$*-inverses in indefinite inner product spaces*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 254, (2015), 157–171. **– M21**

2. **Miloš Z. Petrović**, *Holomorphically projective mappings between generalized hyperbolic Kähler spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 447, No. 1, (2017), 435–451. **– M21**

3. **Miloš Z. Petrović**, Mića S. Stanković, *Special almost geodesic mappings of the first type of non-symmetric affine connection spaces*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society (2), Vol. 40, No. 3, (2017), 1353–1362. **– M22**

4. **Miloš Z. Petrović**, *Special almost geodesic mappings of the second type between generalized Riemannian spaces*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society (2), `DOI :10.1007/s40840-017-0509-5` **– M22**

5. **Miloš Z. Petrović**, *Holomorphically projective mappings between generalized m-parabolic Kähler manifolds*, Filomat, (prihvaćen za štampu). **– M22**

6. **Miloš Z. Petrović**, *Canonical almost geodesic mappings of type* $\underset{\theta}{\pi}_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$ *between generalized parabolic Kähler manifolds*, Miskolc Mathematical Notes, (prihvaćen za štampu). **– M23**

7. Milan Lj. Zlatanović, Svetislav M. Minčić, **Miloš Z. Petrović**, *Curvature tensors and pseudotensors in a generalized Finsler space*, Facta Universitatis (Niš), Series Mathematics and Informatics, Vol. 30, No. 5, (2015), 741–752. **– M51**

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

ХОЛОМОРФНО ПРОЈЕКТИВНА ПРЕСЛИКАВАЊА ГЕНЕРАЛИСАНИХ ХИПЕРБОЛИЧКИХ КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио ауторска права, нити злоупотребио интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 6. 7. 2017.

Потпис аутора дисертације:

Милош Петровић

Милош З. Петровић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

ХОЛОМОРФНО ПРОЈЕКТИВНА ПРЕСЛИКАВАЊА ГЕНЕРАЛИСАНИХ ХИПЕРБОЛИЧКИХ КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 6.7.2017.

Потпис аутора дисертације:

Милош Петровић

Милош З. Петровић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

ХОЛОМОРФНО ПРОЈЕКТИВНА ПРЕСЛИКАВАЊА ГЕНЕРАЛИСАНИХ ХИПЕРБОЛИЧКИХ КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРА И УОПШТЕЊА

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 6.7.2017.

Потпис аутора дисертације:

Милош Петровић

Милош З. Петровић