



Univerzitet u Novom Sadu  
Građevinski fakultet Subotica  
Studijski program: Gređevinarstvo

## **Teorijska i eksperimentalna analiza dinamičkog ponašanja jezgra visokih zgrada**

**- doktorska disertacija -**

**Mentor:**  
**prof. dr Aleksandar Prokić**

**Kandidat:**  
**mr Đerđ Varju**

**Subotica, 2017. godine**



# Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica

## KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

RBR	Redni broj:	
IBR	Identifikacioni broj:	
TD	Tip dokumentacije:	Monografska dokumentacija
TZ	Tip zapisa:	Tekstualni štampani materijal
VR	Vrsta rada:	Doktorska disertacija
AU	Ime i prezime autora:	mr Đerđ Varju
MN	Mentor:	prof. dr Aleksandar Prokić
NR	Naslov rada:	Teorijska i eksperimentalna analiza dinamičkog ponašanja jezgra visokih zgrada
JP	Jezik publikacije:	Srpski
JI	Jezik izvoda:	Srpski / Engleski
ZP	Zemlja publikovanja:	Republika Srbija
UGP	Uže geografsko područje:	Vojvodina
GO	Godina:	2017.
IZ	Izdavač:	Autorski reprint
MA	Mesto i adresa:	24000 Subotica, Kozaračka 2a
FO	Fizički opis rada:	8 / 104 / 47 / 30 / 34 / 6 (broj poglavlja / stranica / slika / tabela / referenci / priloga)
NO	Naučna oblast:	Građevinarstvo
ND	Naučna disciplina:	teorija konstrukcija
PO	Predmetna odrednica, ključne reči:	jezgro visokih zgrada, tankozidni nosač, prenosna matrica, spregnute vibracije, eksperimentalna analiza
UDK		
ČU	Čuva se:	biblioteka Građevinskog fakulteta u Subotici
VN	Važna napomena:	
IZ	Izvod:	<p>U ovoj disertaciji, izvršena su teorijska i eksperimentalna istraživanja dinamičkog ponašanja jezgra visokih zgrada. Model je zasnovan na Vlasovoj teoriji tankozidnih nosača, kao i na metodi prenosnih matrica. Jezgro se tretira kao tankozidni nosač otvorenog poprečnog preseka, koji je na dnu uklješten u temeljnu ploču, dok je na vrhu slobodan. Duž ose smicanja, jezgro je podeljeno na čvorove u nivoima spratova u kojima su redukovane mase. Poseban naglasak je stavljen na analizu uticaja poprečnih greda, međuspratnih ploča, kao i načinu oslanjanja međuspratnih ploča po spoljašnjoj konturi na dinamičke karakteristike jezgra.</p> <p>Razvijeni numerički postupak je primenjen na armiranobetonskom jezgru petnaestospratne zgrade, koja je analizirana ranije u radovima mnogih autora. U tu svrhu korišćen je računarski program TWBEIG, napisan primenom Visual Fortran programskog jezika. Analize su urađene i MKE, a dobijeni rezultati su upoređeni. Vrednosti sopstvenih frekvencija pokazuju dobro slaganje.</p> <p>Ovaj rad daje detalje i o eksperimentalnoj studiji u kojoj se primenjuje pleksiglas model u cilju pružanja eksperimentalnih podataka za proveru tačnosti i pouzdanosti numeričkih rezultata. Dobijeni rezultati su takođe upoređeni sa rezultatima dobijenim TWBEIG računarskim programom, kao i MKE.</p> <p>Predstavljeni numerički metod nudi solidnu osnovu za formiranje jednostavnog modela proračuna, a ipak obezbeđuje odgovarajući nivo preciznosti. Predloženi postupak može biti korišćen i u fazi prethodne analize zgrade, kao i u fazi konačnog projektovanja.</p>
DP	Datum prihvatanja teme od strane NN veće:	18.07.2012.
DO	Datum odbrane:	
KO	Članovi komisije:	<p>predsednik: prof. dr Đorđe Ladinović            član: prof. dr Miroslav Bešević            član: prof. dr Stanko Brčić            član: prof. dr Ilija Miličić            član: prof. dr Aleksandar Prokić</p>

## University of Novi Sad, Faculty of Civil Engineering Subotica

### KEY WORD DOCUMENTATION

ANO	Accession number:	
INO	Identification number:	
DT	Document type:	Monograph documentation
TR	Type of record:	Textual printed material
CC	Contents code:	Doctoral thesis
AU	Author:	MSc Đerđ Varju
MN	Mentor:	PhD Aleksandar Prokić, full professor
TI	Title:	Theoretical and experimental analysis of the dynamic behaviour of the tall buildings core
LT	Language of text:	Serbian
LA	Language of abstract:	Serbian / English
CP	Country of publication:	Republic of Serbia
LP	Locality of publication:	Vojvodina
PY	Publication year:	2017.
PU	Publisher:	Author's reprint
PP	Publication place:	24000 Subotica, Kozaracka 2a
PD	Physical description:	8 / 104 / 47 / 30 / 34 / 6 (number of chapters / pages / pictures / tables / references / appendix)
SF	Scientific field:	Civil Engineering
SD	Scientific discipline:	Theory of construction
SKW	Subject, Key words:	core of tall buildings, thin-walled beam, transfer matrix method, coupled vibration analysis, experimental analysis
UC		
HD	Holding data:	Library of the Faculty of Civil Engineering
N	Note:	
AB	Abstract:	<p>In this dissertation, a theoretical and experimental study of the dynamic behaviour of the tall buildings core was carried out. The model is based on the Vlasov's theory of thin-walled beams and the transfer matrix method. The core is treated as a thin wall-walled, open cross section cantilever beam. Along the shear axis the core is divided into nodes, in the level of the floors, in which the masses are reduced. Special emphasis was given to the analysis of the influence, of lintel beams, floor slabs, as well as the type of restraints along the outer edge of the floor slabs, on the dynamic characteristics of the core.</p> <p>The developed numerical procedure was applied to the fifteen-storey reinforced concrete core tall building, analyzed previously in the papers of many authors. For this purpose, the computer program TWBEIG was used, written using Visual Fortran programming language. The analyses were also performed with FEM and subsequently the results were compared. The values of natural frequencies show significant agreement.</p> <p>This paper presents details about the experimental study which applies the plexiglas model in order to provide experimental data to verify the accuracy and reliability of the numerical results. The results are also compared with the results obtained with the TWBEIG computer program, as well as with FEM. The values of frequencies show reasonable agreement.</p> <p>The proposed numerical method offers a solid base for the creation of a simple calculation model, yet provides the appropriate level of precision. It can be either used for preliminary analysis or for the final design.</p>
AS	Accepted on Scientific Board on:	18.07.2012.
DE	Defended:	
DB	Thesis Defend Board:	<p>president: Đorđe Ladinović, Ph.D., full professor          member: Miroslav Bešević, Ph.D., full professor          member: Stanko Brčić, Ph.D., full professor          member: Ilija Miličić, Ph.D., associate professor          member: Aleksandar Prokić, Ph.D., full professor</p>



**UNIVERZITET U NOVOM SADU**  
**GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA**  
**DOKTORSKA DISERTACIJA**  
podneta: 2017. godine

**TEORIJSKA I EKSPERIMENTALNA ANALIZA DINAMIČKOG  
PONAŠANJA JEZGRA VISOKIH ZGRADA**

mr Đerđ Varju

Građevinski fakultet Subotica,  
Univerzitet u Novom Sadu

***Sažetak:***

U ovoj disertaciji, izvršena su teorijska i eksperimentalna istraživanja dinamičkog ponašanja jezgra visokih zgrada. Model je zasnovan na Vlasovoj teoriji tankozidnih nosača, kao i na metodi prenosnih matrica. Jezgro se tretira kao tankozidni nosač otvorenog poprečnog preseka, koji je na dnu uklješten u temeljnu ploču, dok je na vrhu slobodan. Duž ose smicanja, jezgro je podeljeno na čvorove u nivoima spratova u kojima su redukovane mase. Poseban naglasak je stavljen na analizu uticaja poprečnih greda, međuspratnih ploča, kao i načinu oslanjanja međuspratnih ploča po spoljašnjoj konturi na dinamičke karakteristike jezgra.

Razvijeni numerički postupak je primenjen na armiranobetonskom jezgru petnaestospratne zgrade, koja je analizirana ranije u radovima mnogih autora. U tu svrhu korišćen je računarski program TWBEIG, napisan primenom Visual Fortran programskog jezika. Analize su urađene i MKE, a dobijeni rezultati su upoređeni. Vrednosti sopstvenih frekvencija pokazuju dobro slaganje.

Ovaj rad daje detalje i o eksperimentalnoj studiji u kojoj se primenjuje pleksiglas model u cilju pružanja eksperimentalnih podataka za proveru tačnosti i pouzdanosti numeričkih rezultata. Dobijeni rezultati su takođe upoređeni sa rezultatima dobijenim TWBEIG računarskim programom, kao i MKE.

Predstavljeni numerički metod nudi solidnu osnovu za formiranje jednostavnog modela proračuna, a ipak obezbeđuje odgovarajući nivo preciznosti. Predloženi postupak može biti korišćen i u fazi prethodne analize zgrade, kao i u fazi konačnog projektovanja.

**UNIVERSITY OF NOVI SAD**  
**FACULTY OF CIVIL ENGINEERING SUBOTICA**  
**PhD THESYS**  
Submitted in 2017

**THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF THE  
DYNAMIC BEHAVIOUR OF THE TALL BUILDINGS CORE**

MSc Đerđ Varju

Faculty of Civil Engineering Subotica,  
University of Novi Sad

***Abstract:***

In this dissertation, a theoretical and experimental study of the dynamic behaviour of the tall buildings core was carried out. The model is based on the Vlasov's theory of thin-walled beams and the transfer matrix method. The core is treated as a thin wall-walled, open cross section cantilever beam. Along the shear axis the core is divided into nodes, in the level of the floors, in which the masses are reduced. Special emphasis was given to the analysis of the influence, of lintel beams, floor slabs, as well as the type of restraints along the outer edge of the floor slabs, on the dynamic characteristics of the core.

The developed numerical procedure was applied to the fifteen-storey reinforced concrete core tall building, analyzed previously in the papers of many authors. For this purpose, the computer program TWBEIG was used, written using Visual Fortran programming language. The analyses were also performed with FEM and subsequently the results were compared. The values of natural frequencies show significant agreement.

This paper presents details about the experimental study which applies the plexiglas model in order to provide experimental data to verify the accuracy and reliability of the numerical results. The results are also compared with the results obtained with the TWBEIG computer program, as well as with FEM. The values of frequencies show reasonable agreement.

The proposed numerical method offers a solid base for the creation of a simple calculation model, yet provides the appropriate level of precision. It can be either used for preliminary analysis or for the final design.

# ZAHVALNICA

Ova teza je izrađena na Građevinskom fakultetu u Subotici Univerziteta u Novom Sadu pod rukovodstvom prof. dr Aleksandra Prokića. Profesoru Prokiću dugujem najveću zahvalnost što mi je omogućio da se bavim ovom aktuelnom problematikom, kao i na korisnim savetima i sugestijama tokom izrade ove disertacije.

Članovima komisije prof. dr Miroslavu Beševiću, prof. dr Đorđu Lađinoviću, prof. dr Stanku Brčiću i prof. dr Iliji Miličiću se zahvaljujem na korisnim i dobronamernim kritikama i savetima, koji su pozitivno uticali na krajnji izgled ovog rada i koji su poboljšali njegov kvalitet.

Najveći deo ove disertacije je izrađen na Katedri za inženjersku mehaniku i ovom prilikom se zahvaljujem svim članovima ove katedre na pomoć i strpljenje u toku izrade doktorske disertacije.

Za preciznu izradu eksperimentalnih modela zahvaljujem se majstoru Ferencu Pašti. Realizaciju ispitivanja pleksiglas epruvete i eksperimentalnih modela u laboratoriji za građevinske materijale na Građevinskom fakultetu u Subotici omogućio prof. dr Karolj Kasaš i prof. dr Milan Kekanović, a neposrednim učešćem pomogli su Arpad Čeh, Golub Karaman i Ferenc Szabo Batanč, zbog čega im se srdačno zahvaljujem.

Zahvalnost dugujem kolegi prof. dr Ljubomiru Budinski na korisnim savetima pri izradi računarskog programa.

Veliko hvala dr Sanji Krimer i Dijani Krtinić za lektorisanju teksta disertacije.

Iako su navedeni na poslednjem mestu mogu bez preterivanja reći da su najzaslužniji za ovu disertaciju:

- Moja deca Šara, Oršolja i Bence koja su bila moja najveća inspiracija i kojima ujedno i posvećujem ovaj rad. Hvala na razumevanju za vreme koje nisam proveo sa njima.
- Supruga Lidia čija ljubav, strpljenje, razumevanje i podrška su mi, u mnogome olakšali da završim doktorsku disertaciju.
- Moji roditelji, sestra i članovi porodice moje supruge, koji su uvek verovali u mene i nesebično podržavali moj trud i napor.

Subotica, 08. maja 2017. god.

Autor

# SADRŽAJ

<b>1.</b>	<b>UVOD</b>	<b>1</b>
1.1.	Predmet istraživanja .....	1
1.2.	Obrazloženje o potrebama istraživanja .....	2
1.3.	Cilj istraživanja .....	3
1.4.	Kratak istorijski pregled .....	4
1.5.	Kratak sadržaj rada po poglavljima .....	5
<b>2.</b>	<b>DEFINISANJE PROBLEMA</b>	<b>7</b>
2.1.	Računski model	7
2.2.	Elementi i osobine nosača .....	7
2.3.	Jednačine kretanja .....	11
<b>3.</b>	<b>REŠAVANJE PROBLEMA</b>	<b>13</b>
3.1.	Prenosna matrica polja .....	15
3.2.	Prenosna matrica čvora .....	20
3.3.	Uticaj poprečne grede na torzionu krutost jezgra .....	24
3.4.	Uticaj međuspratne ploče na torzionu krutost jezgra .....	27
3.5.	Proračun sopstvenih frekvencija nosača .....	28
<b>4.</b>	<b>NUMERIČKA VERIFIKACIJA</b>	<b>31</b>
4.1.	Analiza predloženom metodom .....	39
4.2.	Analiza MKE .....	44
4.3.	Rezultati analize .....	45

<b>5.</b>	<b>EKSPERIMENTALNA PROVERA METODE</b>	<b>54</b>
5.1.	Eksperimentalna analiza .....	57
5.2.	Numerička analiza modela .....	61
5.3.	Rezultati analize .....	65
<b>6.</b>	<b>ZAKLJUČCI</b>	<b>75</b>
<b>7.</b>	<b>LITERATURA</b>	<b>77</b>
<b>8.</b>	<b>PRILOZI</b>	<b>80</b>

## SPISAK SLIKA

Slika 2.1	Poprečni presek nosača .....	8
Slika 2.2	Proizvoljno $m$ polje nosača .....	9
Slika 2.3	Shema položaja tačke $C_m$ .....	10
Slika 3.1	Generalisana pomeranja i sile poprečnog preseka određenog koordinatom $Z$ .....	14
Slika 3.2	Generalisana pomeranja i sile na donjem i gornjem kraju polja $m$ .....	15
Slika 3.3	Generalisane sile ispod, iznad i u čvoru $m$ .....	20
Slika 3.4	Poprečni presek jezgra i osnova grede .....	24
Slika 3.5	Pomeranja i obrtanja krajeva grede pri deplanaciji jezgra .....	24
Slika 3.6	Poprečni presek jezgra i međuspratna ploča u ravni proizvoljnog čvora .....	27
Slika 4.1	Poprečni presek jezgra .....	31
Slika 4.2	Podužni presek A-A jezgra .....	32
Slika 4.3	Dijagram normirane sektorske koordinate: $\Omega$ [ $m^2$ ] i vrednosti u čvornim tačkama jezgra .....	33
Slika 4.4	Deformacioni oblik ploče pri jediničnom krivljenju jezgra .....	34
Slika 4.5	Oznake čvornih tačaka jezgra .....	35
Slika 4.6	Osnova nosača sa geometrijskim podacima potrebnim za proračun inercijalnih sila .....	38
Slika 4.7	Shema algoritma proračuna izvršnog programa TWBEIG .....	42
Slika 4.8	Donje polje i 3D slika računskog modela .....	44
Slika 4.9	Prvi, drugi i treći ton .....	45
Slika 4.10	Grafički prikaz parametarske analize za različite visine poprečnih greda $H$ .....	48
Slika 4.11	Grafički prikaz parametarske analize po debljini međuspratne ploče $DP$ .....	49
Slika 4.12	Grafički prikaz parametarske analize za različite spratne visine $L$ .....	50
Slika 4.13	Donje polje sa pločom i gredom kod računskog modela BET-1(R) .....	52
Slika 5.1	Podužni presek A-A eksperimentalnog modela .....	54
Slika 5.2	Poprečni presek jezgra eksperimentalnog modela .....	55
Slika 5.3	Lepljenje eksperimentalnog modela .....	56

<i>Slika 5.4</i>	<i>Detalji kalupa eksperimentalnog modela .....</i>	<i>56</i>
<i>Slika 5.5</i>	<i>Prikaz vezivanja eksperimentalnog modela .....</i>	<i>57</i>
<i>Slika 5.6</i>	<i>Merni lanac za određivanje sopstvenih frekvencija modela .....</i>	<i>58</i>
<i>Slika 5.7</i>	<i>Pozicija pretvarača i pravac pobuđivanja na eksperimentalnom modelu .....</i>	<i>59</i>
<i>Slika 5.8</i>	<i>Pobuđivanje modela u pravcu B-2 .....</i>	<i>59</i>
<i>Slika 5.9</i>	<i>Frekventni spektar modela, pri pobuđivanju B-1 .....</i>	<i>60</i>
<i>Slika 5.10</i>	<i>Frekventni spektar modela, pri pobuđivanju B-2 .....</i>	<i>60</i>
<i>Slika 5.11</i>	<i>Prikaz epruvete i shema merenja za određivanje modula elastičnosti pleksiglas ploča .....</i>	<i>61</i>
<i>Slika 5.12</i>	<i>Dijagram normirane sektorske koordinate: <math>\Omega</math> [mm<sup>2</sup>]......</i>	<i>64</i>
<i>Slika 5.13</i>	<i>Frekventni spektar PLX-2, pri pobuđivanju B-1 .....</i>	<i>67</i>
<i>Slika 5.14</i>	<i>Frekventni spektar modela PLX-2, pri pobuđivanju B-2 .....</i>	<i>67</i>
<i>Slika 5.15</i>	<i>Frekventni spektar modela PLX-3, pri pobuđivanju B-1 .....</i>	<i>67</i>
<i>Slika 5.16</i>	<i>Frekventni spektar modela PLX-3, pri pobuđivanju B-2 .....</i>	<i>68</i>
<i>Slika 5.17</i>	<i>Frekventni spektar modela PLX-4, pri pobuđivanju B-1 .....</i>	<i>68</i>
<i>Slika 5.18</i>	<i>Frekventni spektar modela PLX-4, pri pobuđivanju B-2 .....</i>	<i>68</i>
<i>Slika 5.19</i>	<i>Poprečni presek jezgra eksperimentalnog modela PLX-1(R) .....</i>	<i>70</i>
<i>Slika 5.20</i>	<i>Podužni presek A-A eksperimentalnog modela PLX-1(R) .....</i>	<i>71</i>
<i>Slika 5.21</i>	<i>Frekventni spektar modela PLX-1(R), pri pobuđivanju B-1 .....</i>	<i>72</i>
<i>Slika 5.22</i>	<i>Frekventni spektar modela PLX-1(R), pri pobuđivanju B-2 .....</i>	<i>72</i>
<i>Slika 5.23</i>	<i>Frekventni spektar modela PLX-3(R), pri pobuđivanju B-1 .....</i>	<i>72</i>
<i>Slika 5.24</i>	<i>Frekventni spektar modela PLX-3(R), pri pobuđivanju B-2 .....</i>	<i>73</i>
<i>Slika 5.25</i>	<i>Prvi, drugi i treći ton modela PLX-1(R) .....</i>	<i>73</i>

## SPISAK TABELA

Tabela 4.1	Vrednosti i izvodi normirane sektorske koordinate u čvornim tačkama jezgra $P_i$ .....	33
Tabela 4.2	Prikaz sile veza i momenata veza u čvornim tačkama jezgra $P_i$ .....	35
Tabela 4.3	Prikaz proračuna dela $R^{pl}$ usled sile veza $F_i$ u čvornim tačkama jezgra $P_i$ ..	36
Tabela 4.4:	Prikaz proračuna dela $R^{pl}$ usled momenata veza $M_{i(X)}$ u čvornim tačkama $P_i$ .....	36
Tabela 4.5:	Prikaz proračuna dela $R^{pl}$ usled momenata veza $M_{i(Y)}$ u čvornim tačkama $P_i$ .....	37
Tabela 4.6	Dimenzije elemenata kod primera <i>BET-0</i> .....	43
Tabela 4.7	Prikaz najniže tri sopstvene frekvencije brojnog primera <i>BET-0</i> .....	44
Tabela 4.8	Prikaz najniže tri sopstvene frekvencije računskog modela <i>BET-1</i> .....	45
Tabela 4.9	Sopstvene frekvencije računskog modela <i>BET-2</i> .....	46
Tabela 4.10	Sopstvene frekvencije računskog modela <i>BET-3</i> .....	46
Tabela 4.11	Sopstvene frekvencije računskog modela <i>BET-4</i> .....	46
Tabela 4.12	Prikaz analize uticaja poprečne grede pomoću TWBEIG .....	47
Tabela 4.13	Prikaz analize uticaja međuspratnih ploča pomoću TWBEIG .....	47
Tabela 4.14	Rezultati parametarske analize za različite visine poprečnih greda $H$ .....	49
Tabela 4.15	Rezultati parametarske analize za različite debljine ploča $DP$ .....	50
Tabela 4.16	Rezultati parametarske analize za različite spratne visine $L$ .....	51
Tabela 4.17	Rezultati uporedne analize načina oslanjanja ploče u prisustvu grede .....	52
Tabela 4.18	Rezultati uporedne analize načina oslanjanja ploče bez prisustva grede ....	53
Tabela 5.1	Geometrijski podaci elemenata numeričkog primera i eksperimentalnog modela .....	55
Tabela 5.2	Podešavanja na instrumentu pri određivanju sopstvenih frekvencija modela .....	58
Tabela 5.3	Rezultati merenja i proračuna .....	62
Tabela 5.4	Vrednosti i nagibi normirane sektorske koordinate u čvornim tačkama jezgra $P_i$ .....	64
Tabela 5.5	Prikaz i upoređenje sopstvenih frekvencija modela <i>PLX-1</i> .....	66



Tabela 5.6	Karakteristike za proračun inercijalnih sila .....	66
Tabela 5.7	Prikaz i upoređenje sopstvenih frekvencija modela <i>PLX-2</i> .....	69
Tabela 5.8	Prikaz i upoređenje sopstvenih frekvencija modela <i>PLX-3</i> .....	69
Tabela 5.9	Prikaz i upoređenje sopstvenih frekvencija modela <i>PLX-4</i> .....	69
Tabela 5.10	Prikaz uticaja grede pomoću rezultata eksperimentalne analize .....	70
Tabela 5.11	Rezultati uporedne analize načina oslanjanja ploče u prisustvu grede .....	74
Tabela 5.12	Rezultati uporedne analize načina oslanjanja ploče bez prisustva grede ....	74

# 1. UVOD

## 1.1. Predmet istraživanja

Kod veoma visokih zgrada, osiguranje odgovarajuće krutosti potrebne da bi se omogućio prijem poprečnog (horizontalnog) opterećenja od seizmičkih uticaja i dejstva vetra, postaje veoma značajno. Jedno od rešenja mogu biti ramovske konstrukcije. Drugo rešenje, koje je sve češće u upotrebi, naročito u izrazito seizmičkim oblastima, čini primena armirano-betonskih jezgara, koja se istovremeno mogu koristiti i za liftovsko okno i/ili stepenišni prostor zgrade.

Ovaj tip konstrukcije sastoji se od centralnog jezgra, simetričnog ili asimetričnog u odnosu na jednu ili obe ose, kao i perifernih stubova. S obzirom na to da je krutost jezgra mnogo veća od perifernih stubova, može se usvojiti da je celokupno horizontalno opterećenje zgrade prihvaćeno armirano-betonskim jezgrom. Imajući u vidu da je osnovni period sopstvenih vibracija ovih konstrukcija relativno duži, može se očekivati značajan doprinos viših modova vibracija kod seizmičnog odgovora konstrukcije, što zahteva njihovo što tačnije određivanje.

Debljina zida ovih jezgara obično je mnogo manja od dimenzije poprečnog preseka, koja je takođe mala u odnosu na visinu zgrade. Sem toga, krutost jezgra uvek je mnogo manja od krutosti temelja. Sve to opravdava potrebu da jezgro bude tretirano kao tankozidni nosač otvorenog poprečnog preseka, prema teoriji Vlasova, koji je na dnu uklješten u temeljnu ploču, dok je na vrhu slobodan.

Predmet istraživanja ove disertacije je teorijska i eksperimentalna analiza dinamičkog ponašanja gore opisanog centralnog jezgra, koji je na nivou spratova povezan međuspratnim pločama i poprečnim gredama. One deluju kao poprečna ukrućenja koja obezbeđuju potrebnu nedeformabilnost poprečnih preseka jezgra, pri čemu istovremeno utiču i na njihovu deplanaciju.

U radu je prikazan postupak za analizu sopstvenih poprečno-torzionih vibracija navedenog tankozidnog nosača otvorenog poprečnog preseka, uzimajući u obzir i uticaj poprečnih greda i međuspratnih ploča.

U proračunu se polazi od diferencijalnih jednačina slobodnih harmonijskih vibracija tankozidnih štapova otvorenog poprečnog preseka, izvedenih prema teoriji Vlasova. Od četiri diferencijalne jednačine kretanja, prva koja definiše podužne vibracije, nezavisna je od ostalih i neće biti razmatrana u radu. Ostale tri jednačine su spregnute diferencijalne jednačine koje opisuju međusobno povezane poprečno-torzionne vibracije. Budući da takav sistem spregnutih diferencijalnih jednačina sa navedenim graničnim uslovima (uklještenje dole, slobodan kraj gore) nema rešenje u zatvorenom obliku, u radu je definisan numerički postupak koji se zasniva na metodama početnih parametara i prenosnih matrica. Istovremeno, za prenosnu matricu polja koristi se analitičko (egzaktno) rešenje odgovarajućih diferencijalnih jednačina. Jezgro, proizvoljnog poprečnog preseka, podeljeno je u podužnom pravcu na polja konstantne debljine zidova od sprata

do sprata, a raspored masa idealizovan je tako što su koncentrisane u nivoima tavanica u zajedničkom centru masa.

Prikazani postupak je primenjen na numeričkom primeru petnaestospratnice ukružene samo jednim jezgrom, čija je statička analiza prikazana u radovima [1], [2], [3], [4], [5], [6] i [7]. Rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim pomoću MKE.

Nakon toga, da bi se odredio uticaj poprečnih greda i međuspratnih ploča na dinamičke karakteristike nosača, na istom primeru izvršene su analize za sledeće slučajeve:

- kada je uzeta u obzir samo krutost poprečne grede;
- kada je uzeta u obzir samo krutost međuspratne ploče;
- kada je zanemarena krutost oba elementa.

U cilju istraživanja uticaja visine poprečnih greda, debljine međuspratnih ploča i spratne visine na dinamičke karakteristike nosača, izvršene su sledeće parametarske analize:

- analiza pri variranju visine poprečnih greda;
- analiza pri variranju debljine međuspratnih ploča;
- analiza pri variranju spratne visine.

U navedenim primerima, međuspratne ploče su bile bez oslanjanja po spoljašnjoj ivici.

U cilju utvrđivanja uticaja graničnih uslova na spoljašnjoj ivici međuspratnih ploča na sopstvene frekvencije nosača, urađena je komparativna analiza za sledeće granične uslove:

- ploče su slobodne po spoljašnjoj ivici;
- ploče su slobodno oslonjene po spoljašnjoj ivici.

Radi provere tačnosti prikazane metode, izrađen je eksperimentalni model od pleksiglasa (Plexiglas), koji ima srazmerno istu geometriju kao i u numeričkom primeru. Udarnim testom eksperimentalno su određene prve tri sopstvene frekvencije modela. Rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim metodom opisanom u ovom radu, kao i sa rezultatom dobijenim pomoću MKE.

U cilju istraživanja uticaja poprečnih greda na dinamičke karakteristike modela, izrađeni su još i sledeći eksperimentalni modeli:

- sa gredama bez ploča;
- sa pločama bez grede;
- bez grede i ploča.

Uticaji graničnih uslova na spoljašnjoj ivici ploča, na sopstvene frekvencije modela, analizirani su na eksperimentalnim modelima kod kojih je spoljna ivica ploča delimično oslonjena na vertikalne stubove, i to u slučaju:

- modela sa gredama i pločama, oslonjen na stubove;
- modela sa pločama bez greda, oslonjen na stubove.

## **1.2. Obrazloženje o potrebama istraživanja**

Savremeni razvoj konstrukcija u građevinarstvu, mašinstvu i ostalim granama tehnike zahteva primenu sve lakših i tanjih elemenata, što zahteva korišćenje materijala veoma visokih čvrstoća. Sem toga, od velikog značaja je i ekonomičnost pri izvođenju konstrukcija, zbog čega su tankozidni elementi u prednosti u odnosu na elemente punog poprečnog preseka.

Konstrukcije od tankozidnih elemenata obezbeđuju značajnu uštedu materijala, energije i ostalih resursa pri njihovom građenju. Međutim, ovim elementima se mora, zbog njihove vitkosti, pri projektovanju i izvođenju, posvetiti posebna pažnja, što zahteva da proračun uticaja u tako tankim konstruktivnim elementima visokih zgrada bude što tačniji. Vladajući trend proračuna jeste primena odgovarajućih numeričkih metoda, zasnovanih na fizičkoj diskretizaciji konstrukcije mrežom konačnih elemenata. Međutim, željena veća tačnost izlaznih rezultata zahteva i veću gustinu mreže, odnosno veći broj konačnih elemenata. Iz ovog sledi da je za korektnu analizu potreban veći kapacitet računara, kao i više vremena. Treba imati u vidu i to da veća gustina mreže ne mora sama po sebi doprineti većoj tačnosti proračuna (size effect).

Osim toga, veliki broj ulaznih podataka usporava rad pri formiranju računskog modela, a posebno veliki broj dobijenih izlaznih podataka proračuna otežava preglednost rezultata, odnosno analizu dinamičkog ponašanja.

Sve to dovodi do potrebe da se istraži alternativna metoda rešavanja problema, odnosno da se, na efikasan način, formira računski model koji bi davao dovoljno tačne rezultate. Pri tome je neophodna preglednost i jasnoća analize izlaznih podataka, na primer, u pogledu uticaja međuspratnih ploča i poprečnih greda na dinamičko ponašanje jezgra visokih zgrada.

Pristup istraživanju u ovom radu zadovoljava postavljene zahteve. Metod proračuna obezbeđuje jednostavno formiranje računskog modela, pojednostavljivanje dobijanja rešenja uz pregledniji uvid u dobijene rezultate, kao i tačnost finalnog rešenja. Relativno mali broj nepoznatih veličina u računskom modelu jezgra zgrade omogućava dobru kontrolu računskog modela.

Imajući u vidu da rešenja u svakom polju odgovaraju analitičkom rešenju koja su egzaktna u okviru usvojenih pretpostavki u formulaciji tankozidnih štapova, sledi da diferencijalne jednačine rešene metodom prenosnih matrica obezbeđuju potrebnu tačnost rezultata.

## **1.3. Cilj istraživanja**

Cilj istraživanja je da se definiše i razvije efikasan postupak analize dinamičkih karakteristika jezgra visokih zgrada, kako bi se došlo do uvida u dinamičke karakteristike same zgrade. U radu je formulisan alternativni numerički postupak u odnosu na uobičajenu primenu MKE, koristeći metode početnih parametara i prenosnih matrica, uz oslanjanje na analitička rešenja diferencijalnih jednačina problema slobodnih vibracija tankozidnih štapova. Razvijeni postupak omogućava efikasniji pristup proračunu zgrada sa centralnim jezgrom, uz bolji uvid u dobijene rezultate.

Sekundarni cilj istraživanja, koji je takođe od praktičnog značaja, je da se odredi kvantitativna i kvalitativna mera uticaja poprečnih greda i međuspratnih ploča na krutost jezgra, kao i na dinamičke karakteristike sistema.

Istraživanje prezentovano u radu omogućava bolji uvid u dinamičko ponašanje visokih zgrada, koje u svom sastavu imaju centralno jezgro kao bitni noseći element za prijem horizontalnih uticaja. Na taj način, projektantima je omogućeno pouzdanije i ekonomičnije projektovanje konstrukcija navedenog tipa.

## **1.4. Kratak istorijski pregled**

Ubrzani porast gradskog stanovništva u razvijenim zemljama na kraju XIX veka, praćen stalnim povećanjem cena građevinskog zemljišta, uslovio je nagli porast broja visokih zgrada u urbanim sredinama i izazvao potrebu za njihovim istraživanjem i razvojem. Osim vertikalnih (gravitacionih) sila, ovakve konstrukcije treba da prime i horizontalno (poprečno) opterećenje nastalo usled dejstva vetra i/ili seizmičkih sila. Jedno od mogućih rešenja tiče se primene armirano-betonskih jezgara.

U opštem slučaju, dato jezgro ima otvor u nivoima spratova i nije simetrično, što znači da se geometrijski centar poprečnog preseka jezgra ne poklapa sa centrom smicanja. Posledica toga je da je jezgro, usled dejstva horizontalnih sila, pored savijanja, izloženo i uticaju torzije.

Jezgro, kao konstruktivni deo zgrada, ima dva bitna zadatka. Prvi se sastoji u preuzimanju horizontalnih sila radi što većeg smanjenja horizontalnog pomeranja zgrade. Drugi zadatak je da svojom torzionom krutošću zgradi obezbedi odgovarajući otpor horizontalnim i vertikalnim pomeranjima, nastalim pri obrtanju i krivljenju oko vertikalne ose.

Prilikom torzije, dolazi do deplanacije poprečnih preseka jezgra, tako da Saint Venantova teorija nije adekvatna za proračun, već se koristi Vlasovljeva teorija, koja uzima u obzir i uticaje nastale pri ograničenoj torziji jezgra.

U vezi sa prethodno navedenim, Heidebrecht i Smith [1], Liauw [2], Liauw i Luk [3] i Taranath i Smith [7], predložili su numeričke metode za proračun jezgra visokih zgrada. U ovim radovima, uticaj međuspratnih ploča i poprečnih greda uzet je u obzir u obliku bimomenata nastalih pri krivljenju preseka jezgra.

Istovremeno, u radovima Mah i Smith [8], Rutenberg, Shtarkman i Eisenberger [9] i Mendis [10], uticaj poprečne grede zamenjen je jednako raspoređenim smičućim silama u ravni otvora jezgra.

Smith i Coull su rezultate svojih dvadesetpetogodišnjih istraživanja objavili u knjizi [11], čime su značajno doprineli razvoju konstrukcijskih rešenja visokih zgrada.

Vasquez i Riddel [12] su jezgro analizirali direktnom metodom krutosti (direct stiffness method), ali bez uticaja međuspratnih ploča i poprečnih greda na krutost jezgra. U analizu su uključili i uticaj transverzalne deformacije preseka (effect of shear deformation).

Kuang i Ng [13] su analizirali dinamičko ponašanje jezgra Galerkinovom metodom, ali bez uticaja međuspratnih ploča i poprečnih greda na krutost jezgra.

Prokić i Marjanov [6] su u radu prikazali proračun jezgra visokih zgrada, statički opterećenog na torziju, primenom metode prenosnih matrica. Prilikom proračuna, u obzir su uzeti uticaji međuspratnih ploča i poprečnih greda.

Kuang i Ng [14] su prezentovali rešenje sopstvenih vibracija visokih zgrada, koje mogu biti ukružene kombinacijom okvira, jezgra i zidova (shear wall). Jednačine kretanja izvedene su primenom D'Alembertovog principa, dok su sopstvene frekvencije određene Galerkinovom metodom.

Mehtaf i Tounsi [15] su razvili metodu zasnovanu na D'Alembertovom principu za određivanje dinamičkih karakteristika visokih zgrada, ukrućenih istovremeno jezgrom i zidovima (shear walls).

Rafezy i Howson [16] su dali rešenje za određivanje najnižih sopstvenih frekvencija visokih zgrada ukrućenih istovremeno jezgrom i zidovima (shear walls). Pri proračunu, koristili su Wittrick-Williamsov algoritam. Kheyroddin, Abdollahzadeh i Mastali [17] su u radu istraživali uticaj zatvaranja otvora jezgra na nivou gornjeg sprata. Analizu su izvršili aplikacijom ETABS v.9.2. U radovima [14-17] nije uzet u obzir uticaj međuspratnih ploča i poprečnih greda na krutost sistema.

Brojni autori su razvili različite metode gde se, uz određene ograničenja, u obzir uzima uticaj klizanja, nastao pri smicanju i/ili ograničenoj torziji.

Zalka [18], [19], [20] i [21] je u svojim radovima dao predlog proračuna visokih zgrada opterećenih horizontalnim silama, a ukrućenih okvirima, zidovima i jezgrima. U svojim razmatranjima, autor je data ukrućenja zamenio stubovima ekvivalentne krutosti, dok je međuspratne ploče tretirao kao krute u svojoj ravni, zanemarujući krutost ploča na savijanje.

Kollar [22] i Pluzsik [23] su razvili metodu za analizu spregnute slobodne vibracije tankozidnih kompozitnih nosača. Proračun se bazira na Vlasovljevoj teoriji, modifikovanoj tako da je uzet u obzir uticaj klizanja pri smicanju i pri sprečenoj torziji.

Potzta i Kollar [24] su analizirali visoke zgrade (ukružene okvirima, rešetkastim nosačima, zidovima i jezgrima), pri čemu su ukrućenja zamenjena sendvič nosačima odgovarajuće krutosti. Uticaj klizanja takođe je uključen u razmatranja autora.

## **1.5. Kratak sadržaj rada po poglavljima**

U prvom poglavlju je detaljno opisan predmet istraživanja, njegova potreba i ciljevi, dobijeni rezultati kao i njihova primenljivost. Dat je i kratak istorijski pregled problematike.

Drugo poglavlje je posvećeno definisanju problema. Prikazan je računski model, njegovi elementi i osobine, kao i pretpostavke i uprošćenja koja su uzeta u obzir pri proračunu. Na kraju su definisane osnovne nepoznate, kao i jednačine kretanja, koje čine osnovu za rešavanje zadatka doktorske disertacije.

U trećem poglavlju je prikazan način rešavanja problema. Određene su komponente vektora stanja i data su rešenja jednačine kretanja korišćenjem predložene metode.

Na osnovu prikazane metode, razvijen je računarski program TWBEIG namenjen za određivanje sopstvenih frekvencija prethodno opisanog jezgra. Radi numeričke verifikacije predloženog postupka proračuna, u četvrtom poglavlju, ovim računarskim programom analizirana je AB petnaestospratnica. Taj isti objekat su koristili i mnogi drugi autori u svojim radovima kao numerički primer. Nakon toga, da bi se odredio uticaj poprečnih greda i međuspratnih ploča na dinamičke karakteristike nosača, na istom primeru izvršene su analize kada je uzeta u obzir samo krutost poprečne grede, odnosno samo krutost međuspratne ploče, te kada je zanemarena krutost oba elementa. Izvršene su još i parametarske analize u cilju istraživanja uticaja visine poprečnih greda, debljine međuspratnih ploča i spratne visine. Na kraju, urađena je komparativna analiza uticaja graničnih uslova na spoljašnjoj ivici međuspratnih ploča. Rezultati proračuna upoređeni su sa rezultatima dobijenim pomoću MKE. Nakon svakog upoređivanja, data su zapažanja sa odgovarajućim komentarima.

Eksperimentalna provera tačnosti i primenljivosti razvijene metode proračuna data je u petom poglavlju. U tom cilju, izrađen je umanjen model numeričkog primera od pleksiglasa. Njegove sopstvene frekvencije određene su udarnim testom u laboratorijskim uslovima. U cilju istraživanja uticaja poprečnih greda na dinamičke karakteristike modela, izrađeni su i ispitani još i modeli sa gredama bez ploča, sa pločama bez grede, te bez grede i ploča. Rezultati svakog eksperimenta upoređeni su tabelarno sa rezultatima dobijenim numeričkom metodom opisanom u ovom radu, kao i sa rezultatima dobijenim pomoću MKE. Radi provere uticaja graničnih uslova na spoljašnjoj ivici ploča, na sopstvene frekvencije modela, izrađeni su i ispitani i modeli kod kojih je spoljna ivica ploča delimično oslonjena na vertikalne stubove, i to model sa gredama i pločama, odnosno sa pločama bez greda. Numerička analiza kod ovih modela urađena je samo pomoću MKE. Na kraju ovog poglavlja, data su zapažanja i komentari vezani za dobijene rezultate.

U šestom poglavlju daju se završne napomene i odgovarajući zaključci. Naznačene su i smernice daljih istraživanja.

Sedmo poglavlje sadrži spisak korišćene literature, a to su naučni radovi, knjige i veb stranice.

U prilogu su date prenosne matrice između čvorova u razvijenom obliku, listing izvršnog programa TWBEIG, izlazna datoteka rezultata analize računskog modela, kalibracioni sertifikati pretvarača za merenje dinamičkog odziva i digitalnog mernog sata za merenja ugiba epruvete.

## 2. DEFINISANJE PROBLEMA

### 2.1. Računski model

Računski model kojim se aproksimira ponašanje jezgra visokih zgrada, imajući u vidu njegovu geometriju, čini tankozidni nosač proizvoljnog, otvorenog poprečnog preseka, koji je na dnu uklješten, dok je pri vrhu slobodan, tj. konzolni nosač. S obzirom na to da se u opštem slučaju centar masa i centar smicanja poprečnih preseka ne poklapaju, nosač je pored savijanja izložen i ograničenoj torziji.

Pri analizi slobodnih vibracija jezgra, biće korišćena numerička metoda, koja se zasniva na metodi početnih parametara i prenosnih matrica, pri čemu se nosač deli na čvorove (u nivoima spratova) i polja (deo nosača između čvorova). Polazi se od pretpostavke da je masa konstrukcije koncentrisana u nivou svakog sprata. U poljima, nosač se analizira kao tankozidni štap, bez mase, otvorenog nedeformibilnog poprečnog preseka (shodno Vlasovljevoj teoriji). U čvorovima se analiza vrši pomoću uslova ravnoteža sila i momenata (elastičnih i inercijalnih), kao i pomoću uslova kompatibilnosti pomeranja i obrtanja. U nastavku, navedeni tankozidni element, koji služi za računsko modeliranje jezgra, skraćeno će se zvati „nosač”. S obzirom na to da su jednačine kretanja štapa dobro poznate, izvođenje ovih jednačina u radu neće biti prikazano. Naglasak će biti stavljen samo na one osobine i elemente koji su neophodni za analizu dinamičkog ponašanja nosača.

### 2.2. Elementi i osobine nosača

Debljina zida  $t$  podeljena je srednjom površi na dva dela. Presek srednje površi sa ravni poprečnog preseka naziva se srednja linija. Koordinata duž srednje linije profila označava se sa  $s$  i naziva se lučna koordinata. Nosač se analizira u Dekartovom koordinatnom sistemu  $OXYZ$ , čija  $Z$ -osa spaja težišta pojedinih poprečnih preseka  $O$ , dok se ose  $X$  i  $Y$  biraju tako da se poklapaju sa glavnim centralnim osama inercije poprečnog preseka (vidi *Sliku 2.1*). Koordinatni sistem  $OXYZ$  zove se globalni koordinatni sistem i služi za analizu celine nosača.

Pri proračunu, pored uobičajenih pretpostavki linearne teorije elastičnosti, uvode se još i sledeće pretpostavke (prema teoriji Vlasova):

- a. Poprečni presek štapa je apsolutno krut u svojoj ravni.
- b. Klizanje u srednjoj površini štapa se zanemaruje.
- c. Linijski element upravan na srednju površ ostaje prav i upravan na srednju površ, ne menjanjući dužinu posle deformacije.



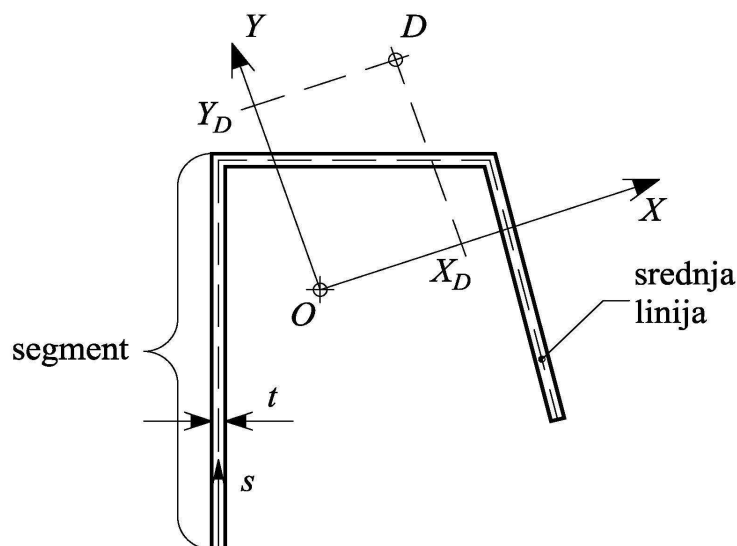
## Fizičke karakteristike materijala nosača

Materijal nosača je homogen, izotropan i idealno elastičan. Fizičke karakteristike materijala nosača su:

$E$ [MPa]	moduo elastičnosti,
$G$ [MPa]	moduo klizanja i
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	gustina mase.

## Poprečni presek nosača

Proizvoljna srednja linija poprečnog preseka aproksimira se poligonalnom linijom, pri čemu se broj strana poligona usvaja u zavisnosti od željene tačnosti. Deonica između dve krajnje tačke jedne linije naziva se segment poprečnog preseka. Segmenti u okviru poprečnog preseka imaju iste debljine  $t$ . Tačka  $D$  je centar smicanja, a  $O$  težišna tačka poprečnog preseka jezgra. Linija koja spaja centre smicanja poprečnih preseka naziva se osa smicanja. Kao što je uobičajeno u teoriji tankozidnih nosača, promena koordinata  $X$  i  $Y$  i sektorske koordinate  $\omega$  biva zanemarena po debljini zidova poprečnog preseka, odnosno duž debljine zidova usvaja se konstantna vrednost ovih veličina, jednaka njihovoj vrednosti na srednjoj liniji preseka.



Slika 2.1: Poprečni presek nosača

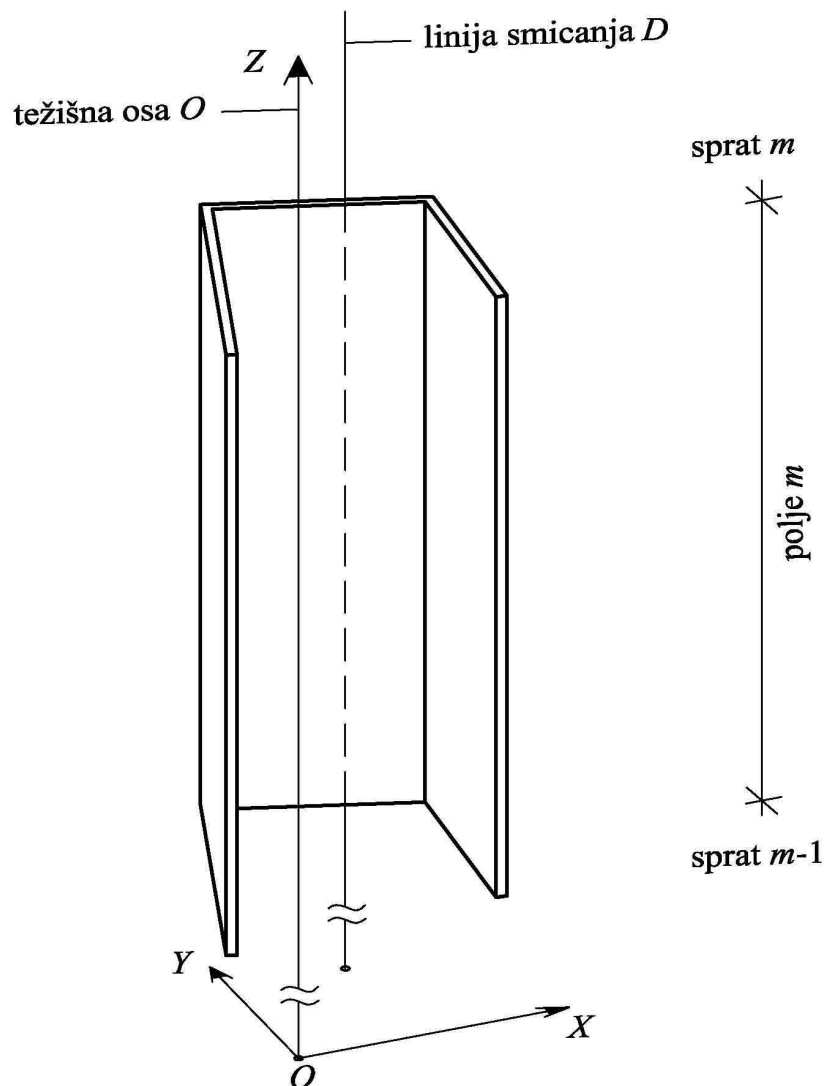
Za analizu dinamičkog ponašanja nosača, potrebne su sledeće geometrijske karakteristike poprečnog preseka:

$s$	[m]	lučna koordinata srednje linije poprečnog preseka,
$F$	[m <sup>2</sup> ]	površina poprečnog preseka,

$I_{XX}$	$[m^4]$	moment inercije poprečnog preseka u odnosu na glavnu centralnu osu $Y$ ,
$I_{YY}$	$[m^4]$	moment inercije poprečnog preseka u odnosu na glavnu centralnu osu $X$ ,
$\Omega$	$[m^2]$	dijagram normirane sektorske koordinate u odnosu na centar smicanja $D$ ,
$I_{\Omega\Omega}$	$[m^6]$	sektorski moment inercije poprečnog preseka u odnosu na centar smicanja $D$ ,
$K$	$[m^4]$	Saint Venantova torziona konstanta poprečnog preseka,
$X_D$ i $Y_D$	$[m]$	koordinate centra smicanja poprečnog preseka.

## Polje nosača

Jezgro zgrade u podužnom pravcu (po visini) sastoji se od polja čiji je broj ( $N$ ) jednak broju spratova zgrade. U nivoima spratova nalaze se međuspratne ploče i poprečne grede, koje u svojstvu konstruktivnih elemenata povezuju zidove jezgra, dok se između spratova nalaze zidovi jezgra. Označavanje (numerisanje) spratova počinje od temelja i raste prema gore. Polje sa oznakom  $m$  nalazi se između spratova sa oznakom  $m-1$  (dole) i  $m$  (gore) prema Slici 2.2.



Slika 2.2: Proizvoljno  $m$  polje nosača

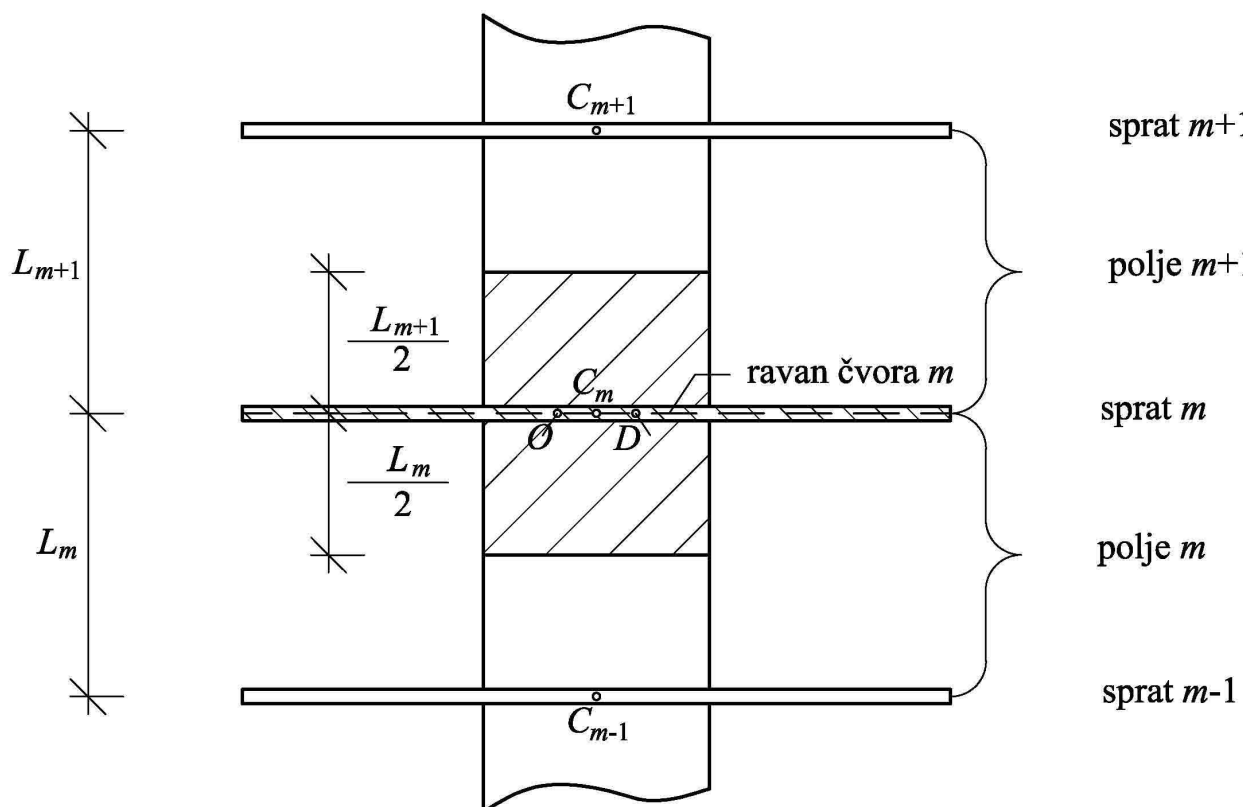
Debljine zidova svih segmenata poprečnog preseka jednake su i nepromenjive u podužnom pravcu u okviru posmatranog polja, ali se mogu menjati od polja do polja. Pri tome, geometrija srednje površi pojedinih polja ostaje ista, tako da svakom polju  $m$  odgovaraju određene geometrijske karakteristike poprečnog preseka nosača, koje se odnose samo na to polje, a to su:

$t_m$	debljina zida poprečnog preseka,
$F_m$	površina poprečnog preseka,
$I_{XX,m}$	moment inercije poprečnog preseka u odnosu na glavnu centralnu osu $Y$ ,
$I_{YY,m}$	moment inercije poprečnog preseka u odnosu na glavnu centralnu osu $X$ ,
$I_{\Omega\Omega,m}$	sektorski moment inercije poprečnog preseka u odnosu na centar smicanja $D$ ,
$K_m$	Saint Venantova torziona konstanta poprečnog preseka i
$L_m$	visina $m$ polja.

Ono što je zajedničko za sve poprečne preseke duž ose nosača jesu srednja linija, položaj težišne tačke  $O$ , centra smicanja  $D$  u ravni poprečnog preseka i normirana sektorska koordinata  $\Omega$ .

## Čvorovi nosača

Za čvorove nosača uzeti su centri smicanja  $D$  poprečnog preseka na visini spratova, tj. centar smicanja  $m$  sprata predstavlja čvor nosača  $m$  sprata.



Slika 2.3: Shema položaja tačke  $C_m$

Jezgro zgrade na nivoima spratova povezano je međuspratnim pločama, kao i poprečnim gredama. Ploče i grede deluju kao poprečna ukrućenja koja obezbeđuju potrebnu nedeformabilnost poprečnih preseka jezgra (što je u skladu sa Vlasovljevom pretpostavkom o nedeformabilnim poprečnim presecima), utičući istovremeno na njihovu deplanaciju.

U proračunu se usvaja da su mase jezgra i međuspratne ploče koncentrisane u nivou svake tavanice u zajedničkom težištu  $C_m$ , koje nazivamo centar masa u ravni čvora  $m$ . Ukupna masa, redukovana u centru masa  $C_m$ , označava se sa  $M_m$ .

Masa jezgra uzima se u obzir tako što se masa gornje polovine  $m$ -tog polja (ispod sprata  $m$ ) i masa donje polovine  $m+1$  polja (iznad sprata  $m$ ) redukuju u tačku  $C_m$  (prema Slici 2.3). Masa poprečnih greda se zanemaruje, s obzirom na to da je mala u odnosu na ukupnu masu.

## 2.3. Jednačine kretanja

Uzimajući centar smicanja za referentnu tačku poprečnog preseka, osnovne nepoznate su:

$$u_D(Z, t) = u \quad [\text{m}] \quad \text{pomeranje tačke } D \text{ u pravcu } X \text{ ose,}$$

$$v_D(Z, t) = v \quad [\text{m}] \quad \text{pomeranje tačke } D \text{ u pravcu } Y \text{ ose i}$$

$$\varphi_D(Z, t) = \varphi \quad [\text{rad}] \quad \text{obrtanje preseka oko ose smicanja.}$$

Polazeći od osnovnih pretpostavki teorije tankozidnih nosača otvorenog, nedeformabilnog poprečnog preseka, komponente pomeranja  $u_*$  i  $v_*$  proizvoljne tačke  $S$  na srednjoj liniji jezgra preseka sa koordinatama  $X$  i  $Y$  date su izrazima [25]:

$$u_* = u - \varphi \cdot (Y - Y_D), \quad (2.1)$$

$$v_* = v + \varphi \cdot (X - X_D). \quad (2.2)$$

Vertikalno pomeranje  $w_*$  proizvoljne tačke jezgra je [25]:

$$w_* = -u' X - v' Y - \varphi' \Omega, \quad (2.3)$$

gde je  $\Omega$  normirana sektorska koordinata te tačke.

Parcijalne diferencijalne jednačine poprečno-torzionih neprigušenih vibracija tankozidnog štapa date su izrazima [26]:

$$EI_{xx} u'''' - \rho I_{xx} \ddot{u}'' + \rho F \ddot{u} + \rho F Y_D \ddot{\varphi} = p_X - m_Y, \quad (2.4)$$

$$EI_{YY}v'''' - \rho I_{YY}v'' + \rho F\ddot{v} - \rho FX_D\ddot{\phi} = p_Y - m_X, \quad (2.5)$$

$$EI_{\Omega\Omega}\phi'''' - GK\phi'' - \rho I_{\Omega\Omega}\ddot{\phi} + \rho FY_D\ddot{u} - \rho FX_D\ddot{v} + \rho I_D\ddot{\phi} = m_D + m_{\Omega}, \quad (2.6)$$

gde su:

$p_X, p_Y$  spoljno raspodeljeno opterećenje po jedinici dužine štapa u pravcu ose  $X$  i  $Y$ ,

$m_Y, m_X$  spoljni raspodeljeni moment savijanja oko  $Y$  i  $X$  ose,

$m_D$  raspodeljeni torzioni moment oko ose smicanja,

$m_{\Omega}$  raspodeljni bimoment,

$I_D$  moment inercije štapa u odnosu na osu smicanja.

U jednačinama (2.3-2.6), parcijalni izvodi po koordinati  $Z$  označeni su zarezima/crtama, dok su parcijalni izvodi po vremenu  $t$  označeni tačkama.

### 3. REŠAVANJE PROBLEMA

S obzirom na to da su predmet istraživanja slobodne poprečno-torzionne vibracije nosača, spoljno opterećenje u jednačinama (2.4), (2.5) i (2.6) je jednako nuli, a dobijena rešenja mogu biti predstavljena u obliku harmonijskih funkcija:

$$\begin{aligned} u(Z,t) &= U(Z)\sin(\omega t), \\ v(Z,t) &= V(Z)\sin(\omega t), \\ \varphi(Z,t) &= \Phi(Z)\sin(\omega t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

U navedenim izrazima, funkcije  $U=U(Z)$ ,  $V=V(Z)$  i  $\Phi=\Phi(Z)$  predstavljaju amplitude osnovnih nepoznatih, koje zavise samo od (visinskog) položaja poprečnog preseka, tj. od koordinate  $Z$ . Drugi član u proizvodu na desnoj strani jednačina (3.1) je harmonijska funkcija, koja zavisi od vremena  $t$  i u kojoj je  $\omega$  sopstvena (kružna) frekvencija nosača. Unoseći izraze (3.1) u homogene jednačine (2.4), (2.5) i (2.6), dobijamo sledeći sistem spregnutih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} EI_{xx}U'''' + \rho\omega^2 I_{xx}U'' - \rho F\omega^2(U + Y_D\Phi) &= 0, \\ EI_{yy}V'''' + \rho\omega^2 I_{yy}V'' - \rho F\omega^2(V - X_D\Phi) &= 0, \\ EI_{\Omega\Omega}\Phi'''' - GK\Phi'' + \rho\omega^2 I_{\Omega\Omega}\Phi'' - \rho F\omega^2(Y_D U - X_D V + I_D\Phi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Znajući uticaje u poprečnom preseku na donjem kraju polja, uticaji na donjem kraju narednog polja mogu biti određeni primenom metoda početnih parametara i metoda prenosnih-matrica polja i čvora. Vektor stanja, odnosno vektor osnovnih nepoznatih, ima ukupno 12 komponentata: generalisana pomeranja  $U$ ,  $V$  i  $\Phi$ , njihovi prvi izvodi po koordinati  $Z$  i generalisane sile (Slika 3.1)

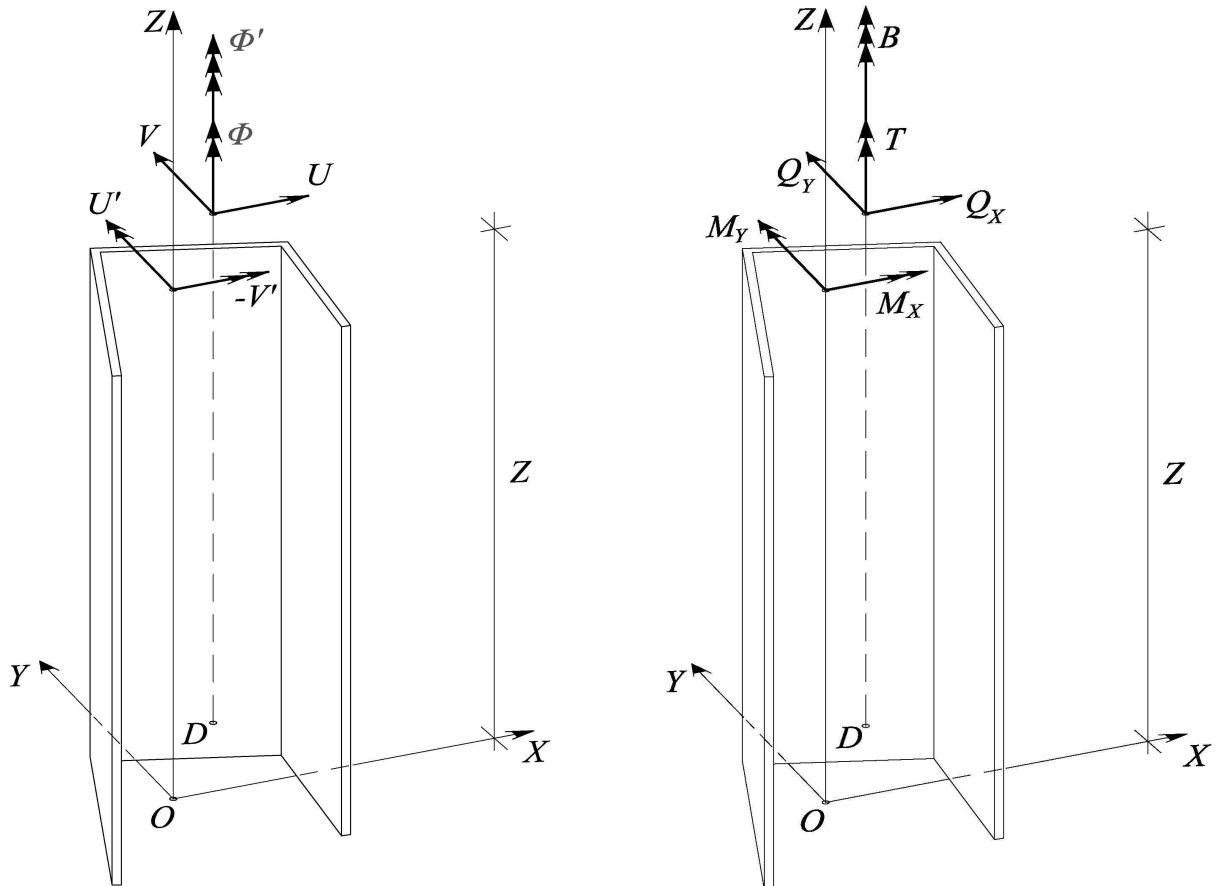
$$\{S\} = \{U, U', M_Y, Q_X, V, -V', M_X, Q_Y, \Phi, \Phi', B, T\}^T, \quad (3.3)$$

gde su:

$U'$	[rad]	obrtnje preseka oko $Y$ ose,
$-V'$	[rad]	obrtnje preseka oko $X$ ose,
$\Phi'$	[rad/m]	krivljenje preseka oko ose smicanja,
$M_Y$	[Nm]	moment savijanja oko $Y$ ose,
$Q_X$	[N]	transverzalna sila u pravcu $X$ ose,
$M_X$	[Nm]	moment savijanja oko $X$ ose,
$Q_Y$	[N]	transverzalna sila u pravcu $Y$ ose,
$B$	[Nm <sup>2</sup> ]	bimoment,

$T$  [Nm] torzioni moment oko ose smicanja.

Negativan predznak u izrazu  $-V'$  ukazuje da je smer obrtanja, koji dati izraz definiše, suprotan od pozitivnog smera obrtanja oko  $X$  ose (vidi orijentacije i međusobni položaj koordinatnih osa *Slika 3.1*).



**Slika 3.1:** Generalisana pomeranja i sile poprečnog preseka određenog koordinatom  $Z$

Kao što je poznato iz teorije tankozidnih nosača, između generalisanih sila i generalisanih pomeranja mogu biti uspostavljene sledeće zavisnosti:

$$M_Y = EI_{xx} \frac{d^2 U}{dZ^2}, \quad (3.4a)$$

$$Q_X = -\frac{dM_Y}{dZ} = -EI_{xx} \frac{d^3 U}{dZ^3}, \quad (3.4b)$$

$$M_X = -EI_{yy} \frac{d^2 V}{dZ^2}, \quad (3.4c)$$

$$Q_Y = \frac{dM_X}{dZ} = -EI_{yy} \frac{d^3 V}{dZ^3}, \quad (3.4d)$$

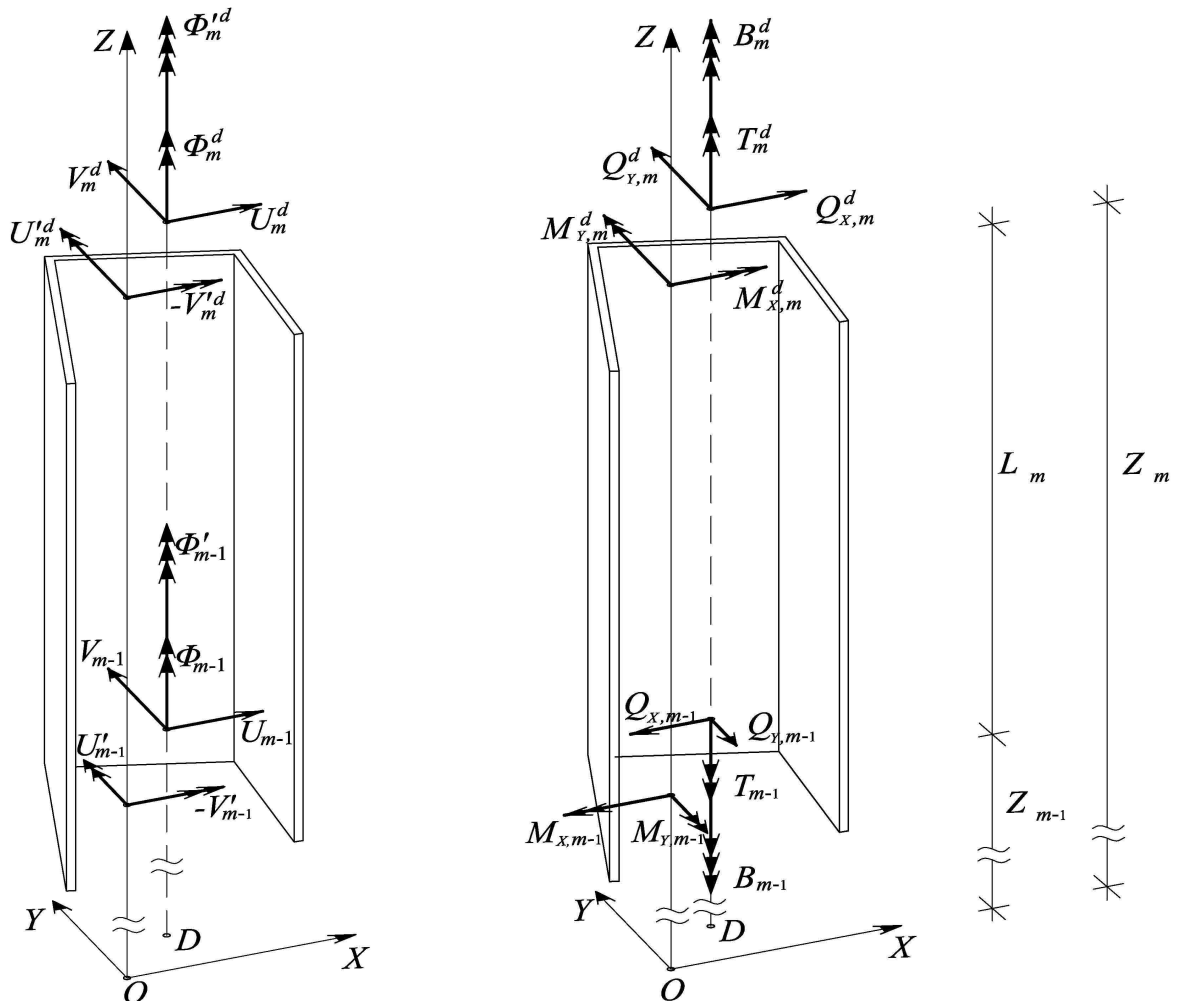
$$B = -EI_{\Omega\Omega} \frac{d^2 \Phi}{dZ^2}, \quad (3.4e)$$

$$T = -EI_{\Omega} \frac{d^3 \Phi}{dZ^3} + GK \frac{d\Phi}{dZ}. \quad (3.4f)$$

### 3.1. Prenosna matrica polja

Polje sa oznakom  $m$  nalazi se između čvorova sa oznakom  $m-1$  (donji kraj polja) i oznakom  $m$  (gornji kraj polja). Uticaji polja  $m$  na donjem kraju jednaki su uticajima beskonačno blizu iznad čvora  $m-1$ , dok su na gornjem kraju jednaki uticajima beskonačno blizu ispod čvora  $m$ . Uticaji iznad čvora imaju oznaku čvora, dok ispod čvora, osim oznake čvora, dobijaju još i oznaku  $d$  (tj. dole).

Na *Slici 3.2.* prikazani su uticaji, generalisana pomeranja i sile na donjem i gornjem kraju polja  $m$ .



Slika 3.2: Generalisana pomeranja i sile na donjem i gornjem kraju polja  $m$

Kao posledica idealizovanog rasporeda masa nosača, odnosno kada se zanemare inercijalne sile polja, iz jednačina (3.2) dobija se pojednostavljen sistem diferencijalnih jednačina:



$$EI_{XX,m} U'''' = 0, \quad (3.5)$$

$$EI_{YY,m} V'''' = 0, \quad (3.6)$$

$$\Phi'''' - k_m^2 \Phi'' = 0, \quad (3.7)$$

pri čemu je konstanta  $k_m = \sqrt{\frac{GK_m}{EI_{\Omega\Omega,m}}}$ .

Opšta rešenja jednačina (3.5), (3.6) i (3.7) su oblika:

$$U(Z) = C_1 \frac{Z^3}{6} + C_2 \frac{Z^2}{2} + C_3 Z + C_4, \quad (3.8)$$

$$V(Z) = C_5 \frac{Z^3}{6} + C_6 \frac{Z^2}{2} + C_7 Z + C_8. \quad (3.9)$$

$$\Phi(Z) = C_9 + C_{10}(k_m Z) + C_{11} \sinh(k_m Z) + C_{12} \cosh(k_m Z). \quad (3.10)$$

Koristeći metodu početnih parametara, integracione konstante  $C_1, C_2, \dots, C_{12}$  određujemo iz graničnih uslova na početku polja  $m$ , tj. beskonačno blizu iznad čvora  $m-1$ .

$$U(0) = U_{m-1} \quad \Rightarrow \quad C_4 = U_{m-1},$$

$$U'(0) = U'_{m-1} \quad \Rightarrow \quad C_3 = U'_{m-1},$$

$$M_Y(0) = M_{Y,m-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{M_{Y,m-1}}{EI_{XX,m}},$$

$$Q_X(0) = Q_{X,m-1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{Q_{X,m-1}}{EI_{XX,m}},$$

$$V(0) = V_{m-1} \quad \Rightarrow \quad C_8 = V_{m-1},$$

$$V'(0) = V'_{m-1} \quad \Rightarrow \quad C_7 = -V'_{m-1},$$

$$M_X(0) = M_{X,m-1} \quad \Rightarrow \quad C_6 = -\frac{M_{X,m-1}}{EI_{YY,m}},$$

$$Q_Y(0) = Q_{Y,m-1} \quad \Rightarrow \quad C_5 = -\frac{Q_{Y,m-1}}{EI_{YY,m}},$$

$$\Phi(0) = \Phi_{m-1},$$

$$\Phi'(0) = \Phi'_{m-1},$$

$$B(0) = B_{m-1} \quad \Rightarrow \quad C_{12} = -\frac{B_{m-1}}{k_m^2 EI_{\Omega\Omega,m}} \quad \Rightarrow \quad C_9 = \Phi_{m-1} + \frac{B_{m-1}}{k_m^2 EI_{\Omega\Omega,m}},$$

$$T(0) = T_{m-1} \quad \Rightarrow \quad C_{11} = \frac{\Phi'_{m-1}}{k_m} - \frac{T_{m-1}}{k_m^3 EI_{\Omega\Omega,m}} \quad \Rightarrow \quad C_{10} = \frac{T_{m-1}}{k_m^3 EI_{\Omega\Omega,m}}.$$

Imajući u vidu da je:

$$\frac{dU(Z)}{dZ} = C_1 \frac{Z^2}{2} + C_2 Z + C_3, \quad (3.11a)$$

$$\frac{M_Y(Z)}{EI_{xx}} = \frac{d^2U}{dZ^2} = C_1 Z + C_2, \quad (3.11b)$$

$$\frac{Q_X(Z)}{EI_{xx}} = -\frac{d^3U}{dZ^3} = -C_1, \quad (3.11c)$$

$$-\frac{dV(Z)}{dZ} = -C_5 \frac{Z^2}{2} - C_6 Z - C_7, \quad (3.12a)$$

$$\frac{M_X(Z)}{EI_{YY,m}} = -\frac{d^2V}{dZ^2} = -C_5 Z - C_6, \quad (3.12b)$$

$$\frac{Q_Y(Z)}{EI_{YY,m}} = -\frac{d^3V}{dZ^3} = -C_5, \quad (3.12c)$$

$$\Phi'(Z) = C_{10} k_m + C_{11} k_m \cosh(k_m Z) + C_{12} k_m \sinh(k_m Z), \quad (3.13a)$$

$$B(Z) = -EI_{\Omega\Omega,m} \Phi''(Z) = -EI_{\Omega\Omega,m} [C_{11} k_m^2 \sinh(k_m Z) + C_{12} k_m^2 \cosh(k_m Z)], \quad (3.13b)$$

$$\begin{aligned} T(Z) &= -EI_{\Omega\Omega,m} \Phi'''(Z) + GK_m \Phi'(Z) = \\ &= -EI_{\Omega\Omega,m} k_m^3 [C_{11} \cosh(k_m Z) + C_{12} \sinh(k_m Z)] + \\ &+ GK_m k_m [C_{10} + C_{11} \cosh(k_m Z) + C_{12} \sinh(k_m Z)], \end{aligned} \quad (3.13c)$$

za uticaje na gornjem kraju polja  $m$  u matričnom obliku, dobijamo:

a. savijanje u ravni  $X$ - $Z$ :

$$\begin{bmatrix} U_m^d \\ U_m'^d \\ M_{Y,m}^d \\ Q_{X,m}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L_m & \frac{L_m^2}{2EI_{XX,m}} & -\frac{L_m^3}{6EI_{XX,m}} \\ 0 & 1 & \frac{L_m}{EI_{XX,m}} & -\frac{L_m^2}{2EI_{XX,m}} \\ 0 & 0 & 1 & -L_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{m-1} \\ U_{m-1}' \\ M_{Y,m-1} \\ Q_{X,m-1} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

b. savijanje u ravni Y-Z:

$$\begin{bmatrix} V_m^d \\ -V_m'^d \\ M_{X,m}^d \\ Q_{Y,m}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -L_m & -\frac{L_m^2}{2EI_{YY,m}} & -\frac{L_m^3}{6EI_{YY,m}} \\ 0 & 1 & \frac{L_m}{EI_{YY,m}} & \frac{L_m^2}{2EI_{YY,m}} \\ 0 & 0 & 1 & L_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m-1} \\ -V_{m-1}' \\ M_{X,m-1} \\ Q_{Y,m-1} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

c. torzija:

$$\begin{bmatrix} \Phi_m^d \\ \Phi_m'^d \\ B_m^d \\ T_m^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} & \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} & \frac{\lambda_m - \text{sh } \lambda_m}{k_m GK_m} \\ 0 & \text{ch } \lambda_m & -\frac{k_m \text{sh } \lambda_m}{GK_m} & \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} \\ 0 & -\frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} GK_m & \text{ch } \lambda_m & \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{m-1} \\ \Phi_{m-1}' \\ B_{m-1} \\ T_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

gde je konstanta  $\lambda_m = k_m L_m$ .

Spajanjem sva tri izraza (3.14), (3.15) i (3.16), dobija se matrična relacija:

$$[\mathbf{S}_m^d] = [\mathbf{A}_{m,p}] [\mathbf{S}_{m-1}], \quad (3.17)$$

gde su:

$[\mathbf{S}_{m-1}]$  vektor uticaja beskonačno blizu iznad čvora  $m-1$ ,

$[\mathbf{S}_m^d]$  vektor uticaja beskonačno blizu ispod čvora  $m$ ,

$[\mathbf{A}_{m,p}]$  prenosna matrica polja  $m$ .

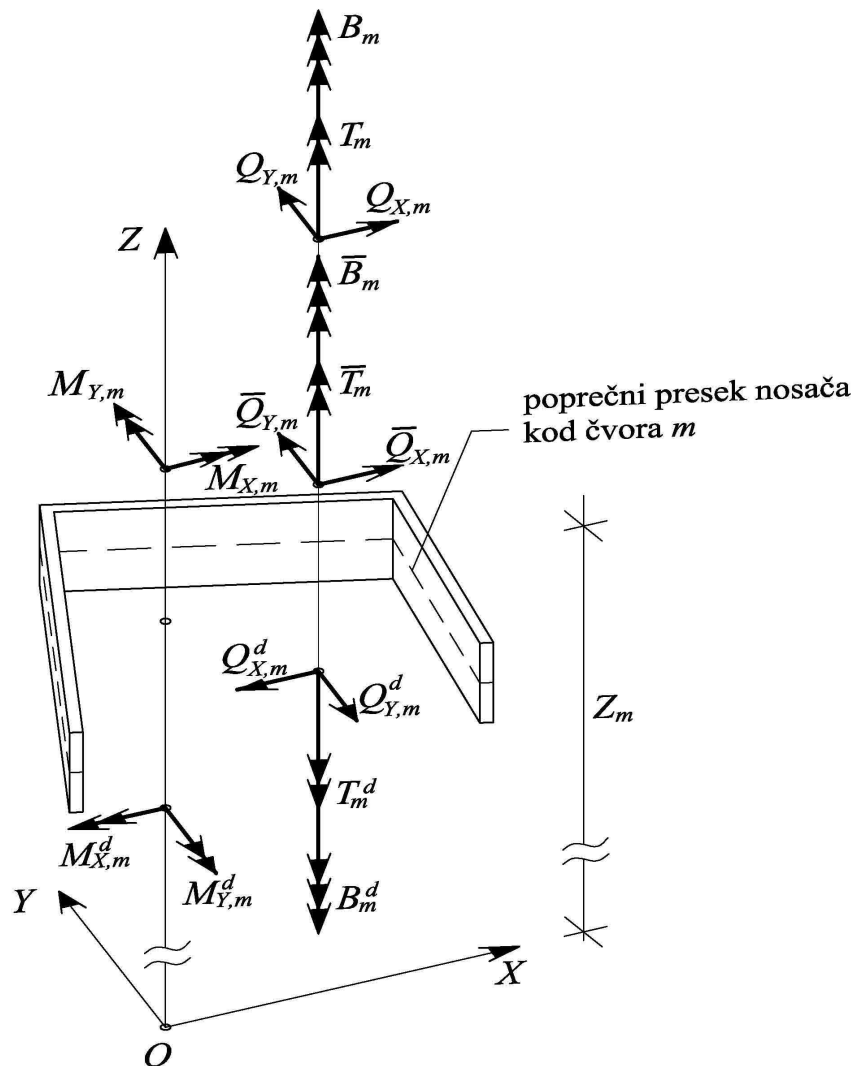
Razvijeni oblik matrične relacije (3.17) je:

$$\begin{bmatrix} U_m^d \\ U_m^{\prime d} \\ M_{Y,m}^d \\ Q_{X,m}^d \\ V_m^d \\ -V_m^{\prime d} \\ M_{X,m}^d \\ Q_{Y,m}^d \\ \Phi_m^d \\ \Phi_m^{\prime d} \\ B_m^d \\ T_m^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L_m & \frac{L_m^2}{2EI_{XX,m}} & -\frac{L_m^3}{6EI_{XX,m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L_m}{EI_{XX,m}} & -\frac{L_m^2}{2EI_{XX,m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_m & -\frac{L_m^2}{2EI_{YY,m}} & -\frac{L_m^3}{6EI_{YY,m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L_m}{EI_{YY,m}} & \frac{L_m^2}{2EI_{YY,m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} & \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} & \frac{\lambda_m - \text{sh } \lambda_m}{k_m GK_m} & \Phi_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_m \text{sh } \lambda_m}{GK_m} & \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} & \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} & \Phi_{m-1}^{\prime} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{ch } \lambda_m & \text{ch } \lambda_m & \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} & B_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\text{sh } \lambda_m GK_m}{k_m} & \text{ch } \lambda_m & \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} & T_{m-1} \end{bmatrix}$$

### 3.2. Prenosna matrica čvora

Generalisane sile u čvorovima nosača (vidi *Sliku 3.3*), deluju beskonačno blizu iznad, ispod, kao i u samom čvoru. U čvorovima nosača deluju sile, momenti i bimomenti, koji potiču od inercijalnih sila, poprečne grede i međuspratne ploče. Pored oznake čvora, oni su još i nadvučeni. Generalisane sile u čvoru  $m$  su:

- $\bar{Q}_{X,m}$  [N] inercijalna sila čvora  $m$ , u pravcu  $X$  ose,
- $\bar{Q}_{Y,m}$  [N] inercijalna sila čvora  $m$ , u pravcu  $Y$  ose,
- $\bar{T}_m$  [Nm] inercijalni torzioni moment čvora  $m$ ,
- $\bar{B}_m$  [Nm<sup>2</sup>] ukupan bimoment čvora  $m$  redukovan od grede i ploče.



*Slika 3.3: Generalisane sile ispod, iznad i u čvoru  $m$*

Prvu grupu jednačina predstavljaju uslovi kompatibilnosti generalisanih pomeranja, a drugu grupu jednačina čine uslovi ravnoteže generalisanih sila u čvorovima nosača (vidi *Sliku 3.3*).

Pri vibraciji nosača, masa  $M$  u ravni čvora izložena je ubrzanju, usled čega se u centru masa  $C$  javlja inercijalna sila i inercijalni moment. Ove inercijalne sile iz centra  $C$  se redukuju u čvor  $D$ . Pri slobodnoj harmonijskoj vibraciji nosača, poprečne komponente ubrzanja tačke  $C$  i ugaono ubrzanje poprečnog preseka jezgra jednake su:

$$\ddot{u}_C = \omega^2 (-U + Y_{\overline{CD}} \Phi) \sin \omega t, \quad (3.18)$$

$$\ddot{v}_C = \omega^2 (-V - X_{\overline{CD}} \Phi) \sin \omega t, \quad (3.19)$$

$$\ddot{\phi} = -\omega^2 \Phi \sin \omega t, \quad (3.20)$$

gde su:

$$Y_{\overline{CD}} = Y_C - Y_D \quad [\text{m}] \quad \text{projekcija odstojanja tačke } C \text{ od čvora } D \text{ na osu } Y,$$

$$X_{\overline{CD}} = X_C - X_D \quad [\text{m}] \quad \text{projekcija odstojanja tačke } C \text{ od čvora } D \text{ na osu } X.$$

Amplitude inercijalnih sila i inercionog momenta, koje se javljaju u centru mase  $C$ , pri poprečnoj vibraciji nosača, jednake su:

$$Q_X^{\text{in}} = -\omega^2 M (-U + Y_{\overline{CD}} \Phi), \quad (3.21)$$

$$Q_Y^{\text{in}} = -\omega^2 M (-V - X_{\overline{CD}} \Phi), \quad (3.22)$$

$$T_C^{\text{in}} = \omega^2 J_C \Phi, \quad (3.23)$$

gde je  $J_C$  moment inercije u odnosu na centar masa  $C$ .

Pri redukciji inercijalnih sila i momenta iz centra masa  $C$  u čvor  $D$ , dobija se:

$$\bar{Q}_X = \omega^2 M (U - Y_{\overline{CD}} \Phi), \quad (3.24)$$

$$\bar{Q}_Y = \omega^2 M (V + X_{\overline{CD}} \Phi), \quad (3.25)$$

$$\bar{T} = \omega^2 M (-Y_{\overline{CD}} U + X_{\overline{CD}} V) + \omega^2 [J_C + M (Y_{\overline{CD}}^2 + X_{\overline{CD}}^2)] \Phi. \quad (3.26)$$

Primenjujući Steinerovu teoremu, moment inercije u odnosu na osu smicanja je oblika:

$$J_D = [J_C + M (Y_{\overline{CD}}^2 + X_{\overline{CD}}^2)], \quad (3.27)$$

te se za (3.26) dobija izraz:

$$\bar{T} = \omega^2 M (-Y_{\overline{CD}} U + X_{\overline{CD}} V) + \omega^2 J_D \Phi. \quad (3.28)$$

Uslovi ravnoteže sila i momenata u čvoru  $m$  nosača su (vidi Sliku 3.3):

$$\begin{aligned}
 -M_{Y,m}^d + M_{Y,m} &= 0, \\
 -Q_{X,m}^d + Q_{X,m} + \bar{Q}_{X,m} &= 0, \\
 -M_{X,m}^d + M_{X,m} &= 0, \\
 -Q_{Y,m}^d + Q_{Y,m} + \bar{Q}_{Y,m} &= 0, \\
 -B_m^d + B_m + \bar{B}_m &= 0, \\
 -T_m^d + T_m + \bar{T}_m &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

gde je pomoću  $\bar{B}_m$  označen bimoment izazvan dejstvom poprečne grede i međuspratne ploče (vidi odeljke 3.3 i 3.4).

$$\bar{B}_m = \bar{B}_m^{gr} + \bar{B}_m^{pl} = (R_m^{gr} + R_m^{pl}) \Phi_m' = R_m \Phi_m'. \tag{3.30}$$

Kada se, u uslovima ravnoteže (3.29), inercijalne sile  $\bar{Q}_{X,m}$ ,  $\bar{Q}_{Y,m}$  i  $\bar{T}_m$ , zamene izrazima (3.24), (3.25) i (3.26), dobija se:

$$\begin{aligned}
 M_{Y,m} &= M_{Y,m}^d, \\
 Q_{X,m} &= Q_{X,m}^d - \omega^2 M_m U_m + \omega^2 M_m Y_{CD,m} \Phi_m, \\
 M_{X,m} &= M_{X,m}^d, \\
 Q_{Y,m} &= Q_{Y,m}^d - \omega^2 M_m V_m - \omega^2 M_m X_{CD,m} \Phi_m, \\
 B_m &= B_m^d - R_m \Phi_m', \\
 T_m &= T_m^d + \omega^2 M_m Y_{CD,m} U_m - \omega^2 M_m X_{CD,m} V_m - \omega^2 J_{D,m} \Phi_m.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Uzimajući u obzir uslove kompatibilnosti i jednačine ravnoteže (3.31), dobija se veza između vektora uticaja beskonačno blizu iznad i ispod čvora  $m$ :

$$[\mathbf{S}_m] = [\mathbf{A}_{m,\tilde{c}}] [\mathbf{S}_m^d], \tag{3.32}$$

gde je:

$$[\mathbf{A}_{m,\tilde{c}}] \text{ prenosna matrica čvora [27] } m.$$

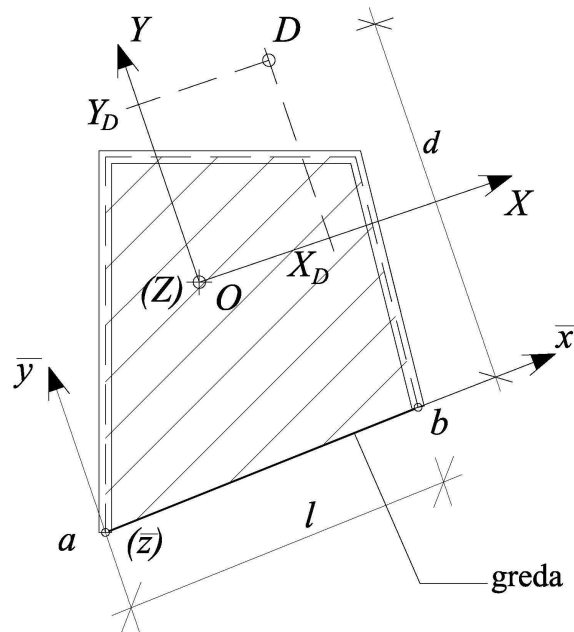
Razvijeni oblik matrične relacije (3.32) je:





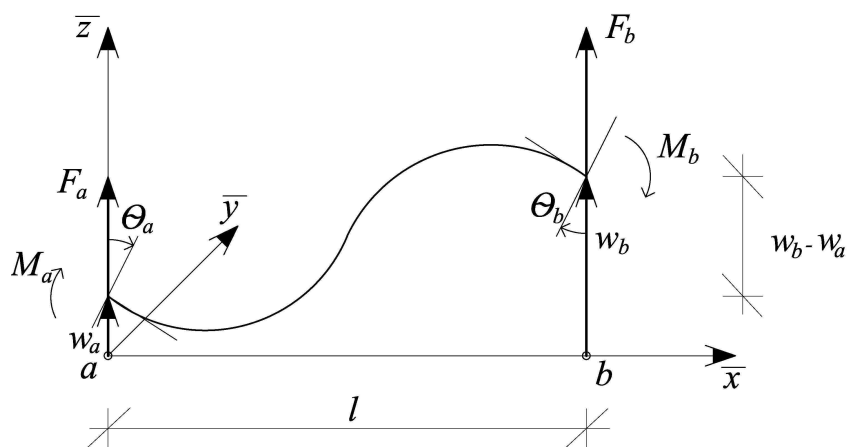
### 3.3. Uticaj poprečne grede na torzionu krutost jezgra

Poprečne grede analiziraju se u lokalnom koordinatnom sistemu grede  $a\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ . Ose  $\bar{x}$  i  $\bar{y}$  nalaze se u ravni čvora. Osa  $\bar{x}$  spaja težište pojedinih poprečnih preseka grede, dok se ose  $\bar{y}$ , odnosno  $\bar{z}$ , poklapaju sa glavnim centralnim osama inercije poprečnog preseka grede. Poprečni presek je pravougaonog oblika, a ose  $\bar{y}$  i  $\bar{z}$  su orijentisane horizontalno i vertikalno. Krajevi poprečne grede kruto su vezani za jezgro nosača u tačkama  $a$  i  $b$  (prema Slici 3.4).



Slika 3.4: Poprečni presek jezgra i osnova grede

Grede su od istog materijala kao i jezgro nosača, što znači da su fizičke karakteristike grede ( $E$ ,  $G$  i  $\rho$ ) iste kao kod jezgra.



Slika 3.5: Pomeranja i obrtanja krajeva grede pri deplanaciji jezgra

Potrebno je napomenuti da pri čistom savijanju jezgra važi Bernoullijeva pretpostavka, tako da se greda deformiše samo pri deplanaciji jezgra. Pri tome, vertikalna pomeranja  $w_a$ ,  $w_b$  i obrtanja oko  $\bar{y}$  ose  $\theta_a$ ,  $\theta_b$  u tačkama  $a$  i  $b$  moraju biti kompatibilna sa aksijalnim pomeranjima i obrtanjima u datim tačkama jezgra, izazvanim deplanacijom (prema *Slici 3.5*). Ovakva pomeranja, odnosno obrtanja, izazivaju savijanje grede, pri čemu se u tačkama veza  $a$  i  $b$  javljaju vertikalne reakcije  $F_a$ ,  $F_b$  i momenti uklještenja  $M_a$ ,  $M_b$ .

Veza između vektora pomeranja, odnosno obrtanja, i vektora sila, odnosno momenata, uzimajući pri tome u obzir i uticaj deformacije klizanja usled transverzalnih sila, data je u obliku [6]:

$$\begin{bmatrix} F_a \\ M_a \\ F_b \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{4l^3(1+\alpha)} \begin{bmatrix} 48 & -24l & -48 & -24l \\ -24l & (4+\alpha)4l^2 & 24l & (4-2\alpha)2l^2 \\ -48 & 24l & 48 & 24l \\ -24l & (4-2\alpha)2l^2 & 24l & (4+\alpha)4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ \theta_a \\ w_b \\ \theta_b \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

gde su:

$I$  moment inercije poprečnog preseka grede u odnosu na  $\bar{y}$  osu,

$l$  raspon grede,

$\alpha = \frac{12EI\beta}{l^2GA_g}$  koeficijent kojim se uzima u obzir uticaj deformacije klizanja,

$\beta$  koeficijent oblika poprečnog preseka grede,

$A_g$  površina poprečnog preseka grede.

Iz (3.33) dobija se:

$$F = -F_a = F_b = \frac{12EI}{l^3(1+\alpha)} \left[ -w_a + w_b + \frac{l}{2}(\theta_a + \theta_b) \right], \quad (3.34)$$

$$M = M_a + M_b = Fl.$$

Pomeranje i obrtanje tačaka  $a$  i  $b$ , pri deplanaciji, jednaki su [6]:

$$w_a = -\Omega_a \phi', \quad w_b = -\Omega_b \phi', \quad (3.35)$$

$$\theta_a = d \phi', \quad \theta_b = d \phi', \quad (3.36)$$

gde je  $d$  rastojanje tačaka  $a$  i  $b$  od centra smicanja (vidi *Sliku 3.4*).

Kada se izrazi (3.35) i (3.36) uvrste u (3.34-1), dobija se:

$$F = \frac{12EI}{l^3(1+\alpha)}(\Omega_a - \Omega_b + ld)\phi'. \quad (3.37)$$

Uzimajući u obzir da je  $\Omega_a - \Omega_b + ld = 2A$  [6], gde  $A$  predstavlja površinu ograničenu srednjom linijom profila jezgra i grede (šrafirana površina na *Slici 3.4*), sledi:

$$F = \frac{12EI}{l^3(1+\alpha)} \cdot 2A\phi'. \quad (3.38)$$

Dejstvo sila  $F_a$ ,  $F_b$  i momenata  $M_a$ ,  $M_b$  svodi se na opterećenje jezgra spoljnjim bimomentima [6]:

$$\bar{B}_F = -(F_a \Omega_a + F_b \Omega_b) = F(\Omega_a - \Omega_b), \quad (3.39)$$

$$\bar{B}_M = M d = F l d. \quad (3.40)$$

Ukupan bimoment izazvan dejstvom grede je:

$$\bar{B}^{gr} = \bar{B}_F + \bar{B}_M = F(\Omega_a - \Omega_b + ld) = F \cdot 2A. \quad (3.41)$$

Kada se izraz (3.38) uvrsti u (3.41), dobija se:

$$\bar{B}^{gr} = \frac{12EI}{l^3(1+\alpha)} \cdot 2A\phi' \cdot 2A = \frac{48EI}{l^3(1+\alpha)} A^2 \phi'. \quad (3.42)$$

Ako se stavi da je

$$R^{gr} = \frac{48EI}{l^3(1+\alpha)} A^2, \quad (3.43)$$

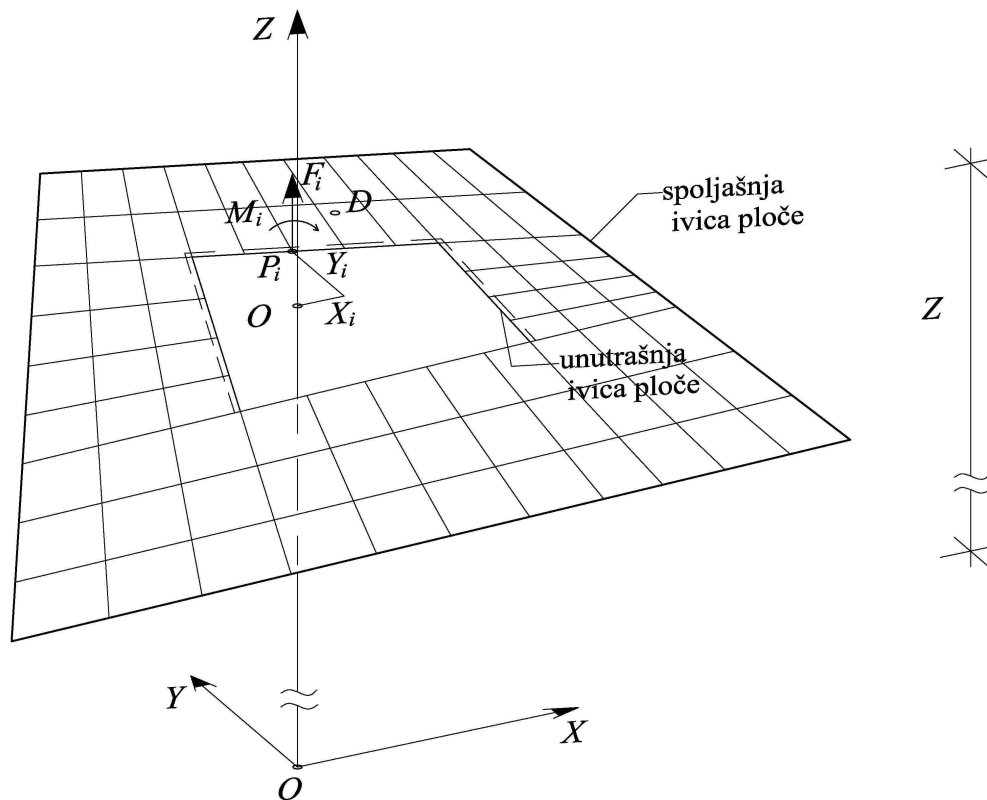
izraz (3.42) dobija oblik:

$$\bar{B}^{gr} = R^{gr} \phi', \quad (3.44)$$

gde je  $R^{gr}$  bimoment u čvoru izazvan dejstvom grede pri jediničnom krivljenju jezgra.

### 3.4. Uticaj međuspratne ploče na torzionu krutost jezgra

Međuspratna ploča ima konstantnu debljinu  $d_p$  i iste fizičke karakteristike kao jezgro. Pretpostavićemo da granični uslovi na spoljnoj konturi ne utiču bitno na uticaje u ploči, odnosno da se uticaji u ploči, nastali usled pomeranja jezgra, brzo amortizuju sa odstojanjem od jezgra. Iz tog razloga, u proračunu se razmatra samo onaj deo ploče koji se nalazi u neposrednoj blizini jezgra [6].



Slika 3.6: Poprečni presek jezgra i međuspratna ploča u ravni proizvoljnog čvora

Kod proračuna, međuspratna ploča se tretira kao površinski nosač, koji je slobodno oslonjen na jezgro nosača duž unutrašnje ivice, dok je slobodan duž spoljne ivice.

Potrebno je napomenuti da pri čistom savijanju jezgra važi Bernoullijeva pretpostavka, tako da se u ploči javljaju uticaji samo pri deplanaciji jezgra, pri čemu duž linije međusobnog kontakta, transverzalna pomeranja međuspratne ploče moraju biti kompatibilna sa aksijalnim pomeranjima poprečnog preseka jezgra izazvanih deplanacijom.

Ova pomeranja, shodno jednačini (2.3), određena su izrazom:

$$W(s)_i = -\phi' \Omega(s)_i, \quad (3.45)$$

gde je  $\Omega(s)$  normirana sektorska koordinata proizvoljne tačke  $P_i$  jezgra u ravni čvora.

S obzirom na to da ne postoji analitički izraz za nalaženje sila i momenata veza gore opisane ploče, rešenje se traži pomoću MKE. Mreža čvorova bira se tako da odgovara geometriji

unutrašnjih i spoljnih ivica ploče, uz vođenje računa o graničnim uslovima (Slika 3.6). Zadatak je da se odrede nepoznate vertikalne reaktivne sile  $F_i$  i momenti oko ose upravni na srednju liniju jezgra  $M_i$  izazvani poznatim pomeranjima i obrtanjima tačaka  $P_i$  duž profila jezgra, pri jediničnoj vrednosti krivljenja  $\varphi'=1$ .

Bimoment izazvan ovim reaktivnim silama i momentima jednak je [7]:

$$\bar{B}^{pl} = \left[ \sum_{i=1}^{N_j} F_i \Omega_i + \sum_{i=1}^{N_j} M_i \frac{d}{ds} \Omega_i \right] \varphi', \quad (3.46)$$

gde je  $N_j$  ukupan broj čvornih tačaka  $P_i$  duž jezgra.

Ako se uzme da je

$$R^{pl} = \sum_{i=1}^{N_j} F_i \Omega_i + \sum_{i=1}^{N_j} M_i \frac{d}{ds} \Omega_i, \quad (3.47)$$

izraz (3.46) je oblika:

$$\bar{B}^{pl} = R^{pl} \varphi', \quad (3.48)$$

gde je  $R^{pl}$  spoljni bimoment izazvan dejstvom ploče pri jediničnom krivljenju.

## 3.5. Proračun sopstvenih frekvencija nosača

### Prenosna matrica od čvora do čvora

Veza između vektora uticaja beskonačno blizu iznad čvora  $m-1$  i beskonačno blizu iznad čvora  $m$ , dobija se kada se matricna relacija (3.17) uvrsti u (3.32):

$$[\mathbf{S}_m] = [\mathbf{A}_{m,\tilde{c}}][\mathbf{S}_m^d] = [\mathbf{A}_{m,\tilde{c}}][\mathbf{A}_{m,p}][\mathbf{S}_{m-1}]. \quad (3.49)$$

Ako se uzme da je:

$$[\mathbf{A}_m] = [\mathbf{A}_{m,\tilde{c}}][\mathbf{A}_{m,p}], \quad (3.50)$$

dobija se:

$$[\mathbf{S}_m] = [\mathbf{A}_m][\mathbf{S}_{m-1}], \quad (3.51)$$

gde su:

$[\mathbf{S}_{m-1}]$  vektor uticaja beskonačno blizu iznad čvora  $m-1$ ,

$[\mathbf{S}_m]$  vektor uticaja beskonačno blizu iznad čvora  $m$ ,

$[\mathbf{A}_m]$  prenosna matrica između uticaja beskonačno blizu iznad čvora  $m-1$  i beskonačno blizu iznad čvora  $m$ .

Razvijeni oblik prenosne matrice dat je u Prilogu-1.

## **Sveukupna prenosna matrica nosača**

Veza vektora uticaja gornjeg čvora  $N$  i vektora uticaja čvora  $0$  nosača može se dobiti matričnom relacijom:

$$[\mathbf{S}_N] = [\mathbf{A}_N][\mathbf{S}_{N-1}] = [\mathbf{A}_N][\mathbf{A}_{N-1}][\mathbf{S}_{N-2}] = [\mathbf{A}_N][\mathbf{A}_{N-1}] \dots [\mathbf{A}_1][\mathbf{S}_0]. \quad (3.52)$$

Ako proizvod matrica u izrazu (3.52.) označavamo sa:

$$[\mathbf{A}_I^N] = [\mathbf{A}_N][\mathbf{A}_{N-1}] \dots [\mathbf{A}_1] = \prod_{i=1}^N [\mathbf{A}_{N+1-i}], \quad (3.53)$$

izraz (3.52) dobija oblik:

$$[\mathbf{S}_N] = [\mathbf{A}_I^N][\mathbf{S}_0], \quad (3.54)$$

gde je:

$[\mathbf{A}_I^N]$  prenosna matrica od čvora  $0$  do čvora  $N$ , tj. sveukupna prenosna matrica nosača.

Matrična jednačina (3.54) predstavlja sistem od 12 jednačina sa ukupno 24 nepoznatih komponenta vektora stanja na donjem i gornjem kraju nosača.

## **Frekventna jednačina sistema**

Granični uslovi nosača odgovaraju graničnim uslovima konzolnog nosača, izloženog savijanju oko glavnih inercijalnih osa ( $X$  i  $Y$ ), kao i ograničenoj torziji oko ose smicanja. Na donjem kraju, gde se nosač smatra uklještenim, granični uslovi nosača dati su po generalisanim pomeranjima, tj. na mestu  $Z=Z_0=0$ :

$$U_0 = U'_0 = V_0 = -V'_0 = \Phi_0 = \Phi'_0 = 0. \quad (3.55)$$

Na gornjem kraju, gde se nosač smatra slobodnim, granični uslovi nosača dati su po generalisanim silama, tj. na mestu  $Z=Z_N$ :

$$M_{Y,N} = Q_{X,N} = M_{X,N} = Q_{Y,N} = B_N = T_N = 0. \quad (3.56)$$

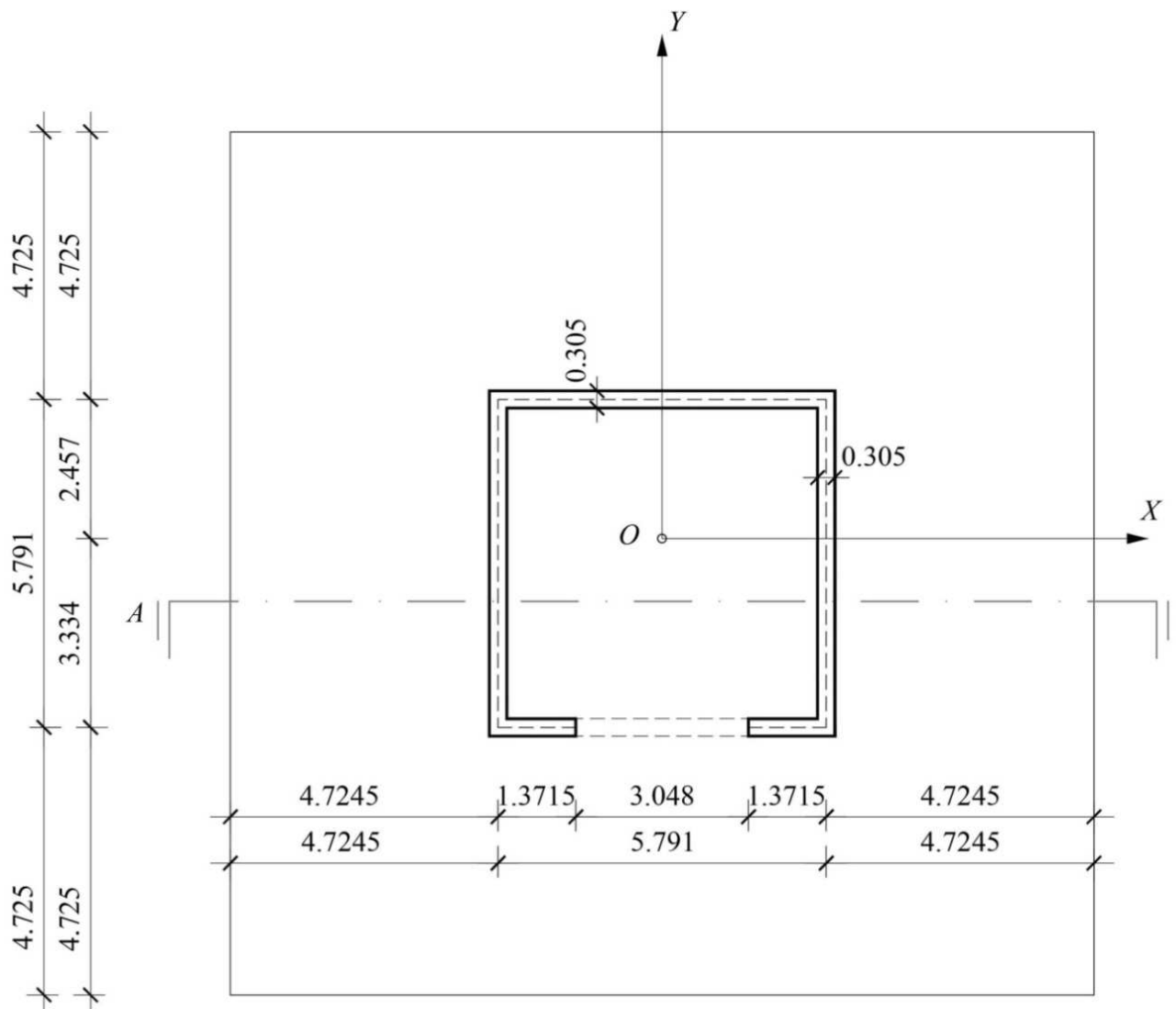
Kada se granični uslovi (3.55) i (3.56) uvrste u matricnu jednačinu (3.54) dobija se sistem od 12 homogenih algebarskih jednačina sa istim brojem nepoznatih. Ovaj sistem jednačina ima rešenje samo onda (sem trivijalnog), ako je determinanta sistema jednaka nuli:

$$\det[\mathbf{A}_I^N(\omega_j)] = 0. \quad (3.57)$$

Elementi matrice u jednačini (3.57) su rezultat "N" proizvoda elemenata prenosnih matrica od čvora do čvora, tj. dati elementi višestepeno zavise od sopstvene (kružne) frekvencije sistema. Sopstvene (kružne) frekvencije sistema dobijaju se rešenjem jednačine (3.57). Od praktičnog značaja su samo prvih nekoliko najnižih vrednosti parametra  $\omega_j$ .

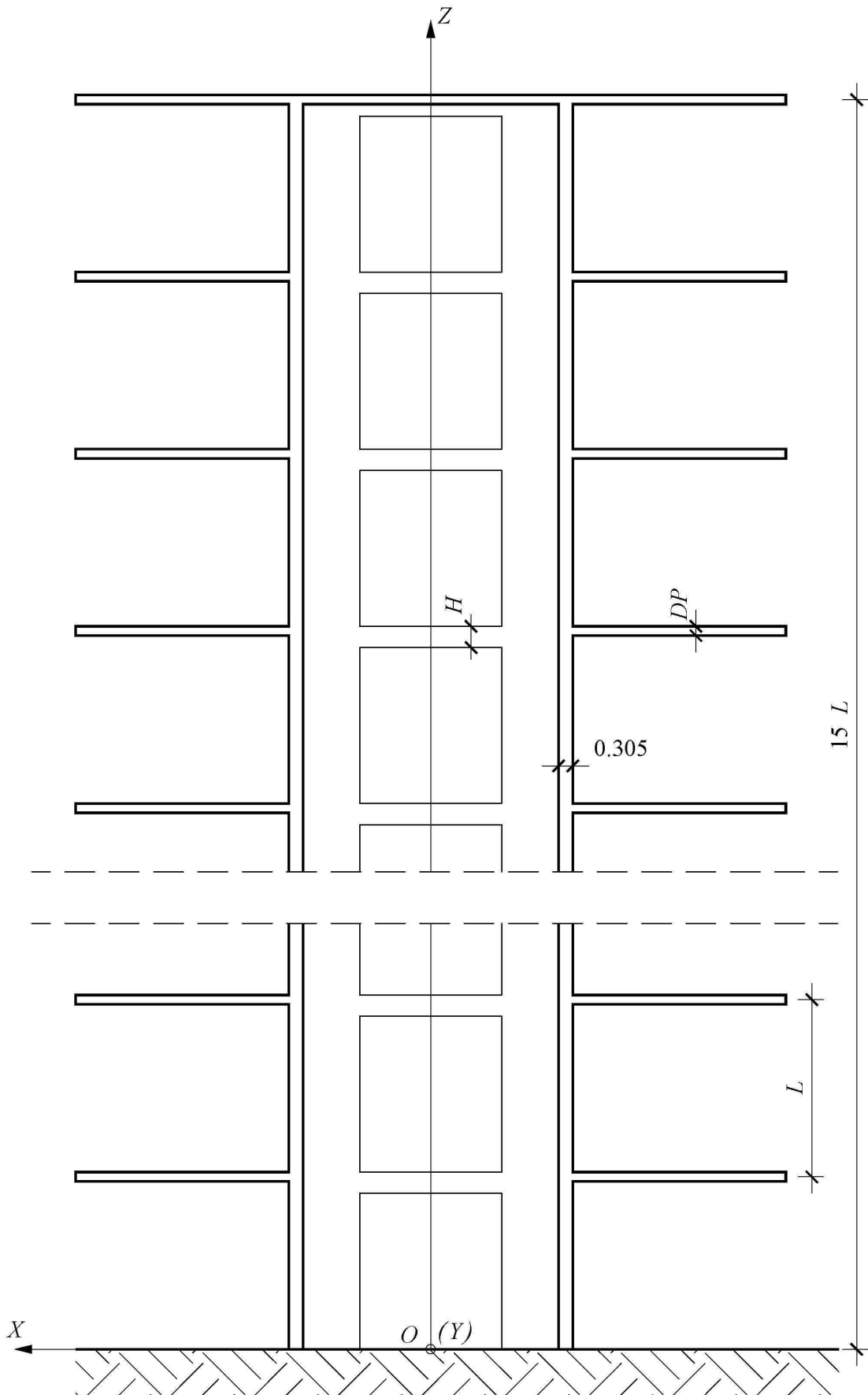
## 4. NUMERIČKA VERIFIKACIJA

Prikazana metoda primenjena je na primeru armiranobetonske petnaestospratnice, prethodno već analizirane u radovima [1-7]. Jezgro zgrade je u dnu uklješteno u temeljnu ploču, dok na vrhu stoji slobodno (Slika 4.1 i 4.2). Svi zidovi jezgra su iste debljine  $d_z=0.305$  m. Visina spratova se ne menja i jednaka je  $L=3.81$  m. Poprečni presek jezgra je otvoren, ima jednu osu simetrije (osa  $Y$ ), i konstantan je duž vertikalne ose. Poprečne grede su kruto vezane u nivoima spratova. Dimenzije svake grede su identične. Poprečni presek je pravougaonog oblika, sa širinom jednakom debljini zida jezgra, dok je visina  $H=0.457$  m. Međuspratne ploče duž unutrašnje ivice su oslonjene na jezgro, a duž spoljne konture stoje slobodno. Ploče su kvadratnog oblika sa stranama dužine 15.24 m i imaju stalnu debljinu  $DP=0.10$  m. Svi elementi su od armiranog betona fizičkih karakteristika:  $E=27.6 \cdot 10^6$  kN/m<sup>2</sup>,  $G=12.0 \cdot 10^6$  kN/m<sup>2</sup> i  $\rho=2.5492 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

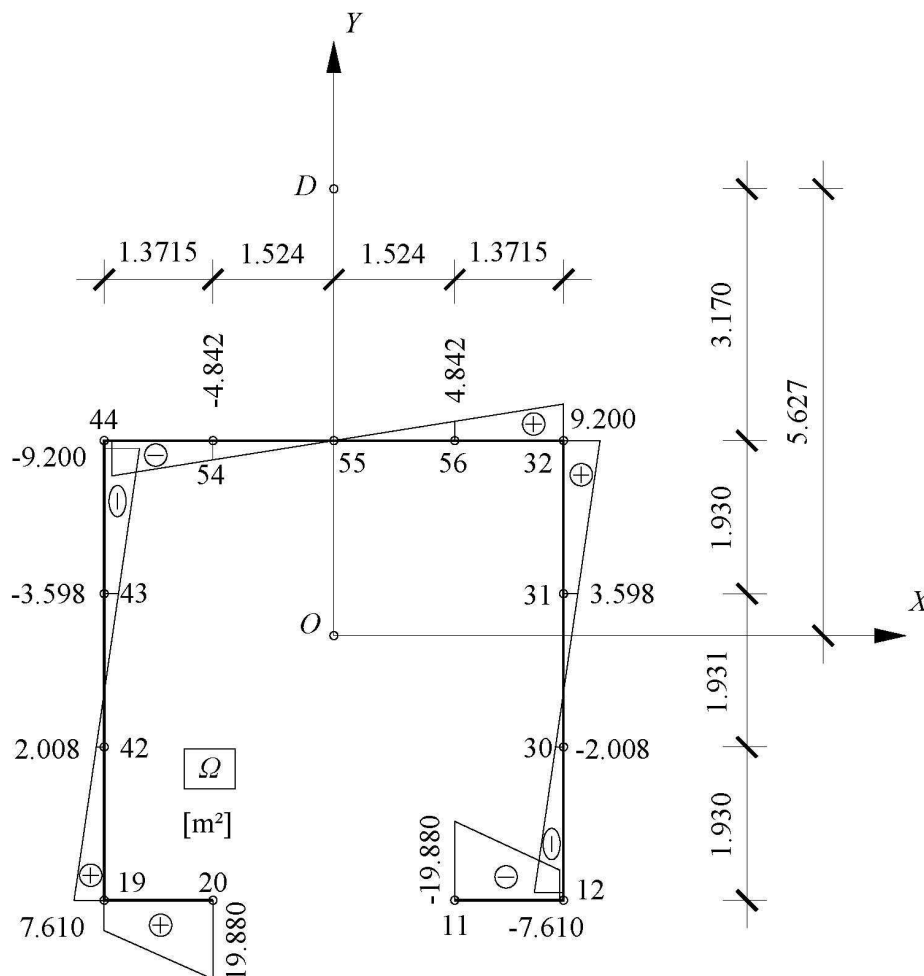


Slika 4.1: Poprečni presek jezgra





Slika 4.2: Podužni presek A-A jezgra



Slika 4.3: Dijagram normirane sektorske koordinate:  $\Omega$  [m<sup>2</sup>] i vrednosti u čvornim tačkama jezgra

Tabela 4.1: Vrednosti i izvodi normirane sektorske koordinate u čvornim tačkama jezgra  $P_i$

$P_i$	$\Omega_i$	$\theta_x = \frac{d}{dY}\Omega_i$	$\theta_y = -\frac{d}{dX}\Omega_i$
	[m <sup>2</sup> ]	[Radians]	[Radians]
11	-19.88	0	-8.946
12	-7.61	2.903	-8.946
19	7.61	-2.903	-8.946
20	19.88	0	-8.946
30	-2.008	2.903	0
31	3.598	2.903	0
32	9.2	2.903	-3.177
42	2.008	-2.903	0
43	-3.598	-2.903	0
44	-9.2	-2.903	-3.177
54	-4.842	0	-3.177
55	0	0	-3.177
56	4.842	0	-3.177

## Karakteristike jezgra

$$I_{XX}=38.77 \text{ m}^4, I_{YY}=30.51 \text{ m}^4, I_{\Omega\Omega}=300.0 \text{ m}^6 \text{ i } K=0.190 \text{ m}^4.$$

Dijagram normirane sektorske koordinate poprečnog preseka jezgra prikazan je na *Slici 4.3*. Vrednosti normirane sektorske koordinate i njenih prvih izvoda, po koordinati X, odnosno Y, u čvornim tačkama jezgra, date su u Tabeli 4.1.

## Karakteristike poprečnih greda

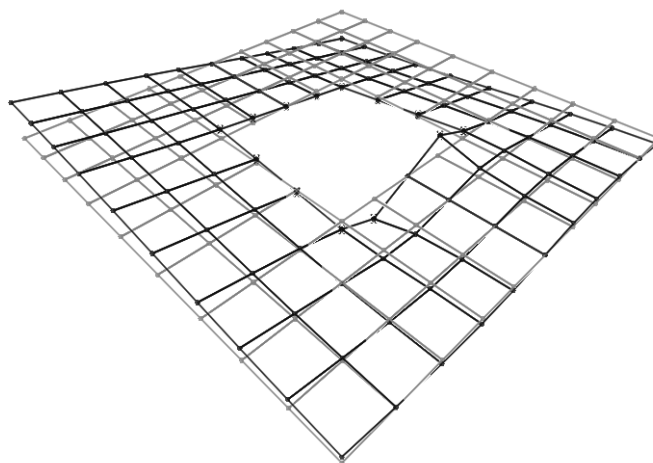
Uticaj poprečnih greda na torzionu krutost jezgra računa se prema poglavlju 3.3. Za proračun su potrebni sledeći podaci:  $I=2.462 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ ,  $l=3.048 \text{ m}$ ,  $\alpha=0.062$ ,  $\beta=1.2$ ,  $A_g=0.139 \text{ m}^2$ ,  $A=33.53 \text{ m}^2$  i  $d=8.961 \text{ m}$ .

Bimoment u čvoru izazvan dejstvom grede pri jediničnom krivljenju prema (3.43) iznosi:

$$R^{gr} = \frac{48 EI}{l^3 (1 + \alpha)} A^2 = 120.13 \cdot 10^9 \text{ Nm}^3. \quad (4.1)$$

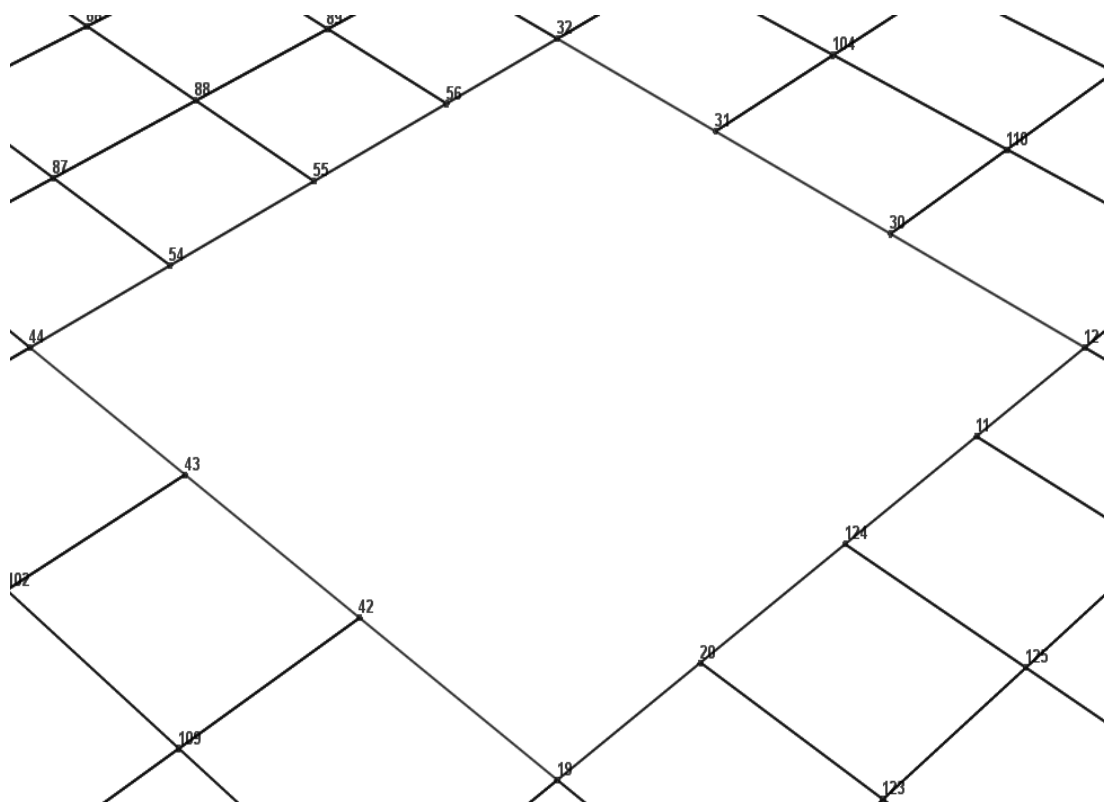
## Karakteristike međuspratnih ploča

Uticaj međuspratnih ploča na veličinu spoljnog bimomenta u čvorovima jezgra računa se prema poglavlju 3.4. pomoću aplikacije SAP 2000. Pri proračunu, potrebno je odrediti vertikalne reaktivne sile  $F_i$  i momente oko ose upravne na srednju liniju jezgra  $M_i$  izazvane poznatim pomeranjima i obrtanjima tačaka  $P_i$  duž profila jezgra, pri jediničnoj vrednosti krivljenja  $\varphi'=1$ . Deformacioni oblik ploče pri jediničnom krivljenju i granični uslovi ploče su dati na *Slici 4.4*.



*Slika 4.4: Deformacioni oblik ploče pri jediničnom krivljenju jezgra*

Čvorne tačke jezgra  $P_i$  prikazane su na Slici 4.5.



Slika 4.5: Oznake čvornih tačaka jezgra

Rezultati proračuna sa aplikacijom SAP 2000 dati su u Tabeli 4.2.

Tabela 4.2: Prikaz sile veza i momenata veza u čvornim tačkama jezgra  $P_i$

$P_i$	$F_i$	$M_{i(x)}$	$M_{i(y)}$
	[N]	[Nm]	[Nm]
11	85054919	0	51986401
12	-22149492	-10579934	14620455
19	22149354	10579896	14620485
20	-85054824	0	51986461
30	1012056	66604	0
31	305378	108337	0
32	-2205480	-5435718	-2278930
42	-1012006	-66632	0
43	-305383	-108337	0
44	2205523	5435719	-2278959
54	-923391	0	-9451
55	-14	0	14380
56	923360	0	-9418

Spoljni bimoment u čvoru jezgra pri jediničnom krivljenju  $R^{pl}$  određen je izrazom (3.47). Vrednost bimomenta dobija se kao zbir proizvoda odgovarajućih članova iz Tabele 4.2 (sa suprotnim predznakom) sa članovima iz Tabele 4.1.

Tabela 4.3: Prikaz proračuna dela  $R^{pl}$  usled sile veza  $F_i$  u čvornim tačkama jezgra  $P_i$

$P_i$	Tabela 4.2	Tabela 4.1	Rezultat proizvoda
11	-85054919	-19.88	$1690.892 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
12	22149492	-7.61	$-168.558 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
19	-22149354	7.61	$-168.557 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
20	85054824	19.88	$1690.890 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
30	-1012056	-2.008	$2.032 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
31	-305378	3.598	$-1.099 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
32	2205480	9.2	$20.290 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
42	1012006	2.008	$2.032 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
43	305383	-3.598	$-1.099 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
44	-2205523	-9.2	$20.291 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
54	923391	-4.842	$-4.471 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
55	14	0	0
56	-923360	4.842	$-4.471 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$

$$R^{pl}(F) = 3078.352 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3.$$

Tabela 4.4: Prikaz proračuna dela  $R^{pl}$  usled momenata veza  $M_{i(x)}$  u čvornim tačkama  $P_i$

$P_i$	Tabela 4.2	Tabela 4.1	Rezultat proizvoda
11	0	0	0
12	10579934	2.903	$30.714 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
19	-10579896	-2.903	$30.713 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
20	0	0	0
30	-66604	2.903	$-0.193 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
31	-108337	2.903	$-0.315 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
32	5435718	2.903	$15.780 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
42	66632	-2.903	$-0.193 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
43	108337	-2.903	$-0.315 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
44	-5435719	-2.903	$15.780 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
54	0	0	0
55	0	0	0
56	0	0	0

$$R^{pl}(M_{(x)}) = 91.972 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3.$$

Tabela 4.5: Prikaz proračuna dela  $R^{pl}$  usled momenata veza  $M_{i(y)}$  u čvornim tačkama  $P_i$

$P_i$	Tabela 4.2	Tabela 4.1	Rezultat proizvoda
11	-51986401	-8.946	$465.070 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
12	-14620455	-8.946	$130.795 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
19	-14620485	-8.946	$130.795 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
20	-51986461	-8.946	$465.070 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
30	0	0	0
31	0	0	0
32	2278930	-3.177	$-7.240 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
42	0	0	0
43	0	0	0
44	2278959	-3.177	$-7.240 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
54	9451	-3.177	$-0.030 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
55	-14380	-3.177	$0.046 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$
56	9418	-3.177	$-0.030 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3$

$$R^{pl}(M_{(y)}) = 1177.224 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3.$$

Spoljni bimoment u čvoru jezgra izazvan dejstvom ploče pri jediničnom krivljenju  $\varphi'=1$  dobija se kao zbir rezultata iz Tabela 4.3, 4.4 i 4.5:

$$R^{pl} = R^{pl}(F) + R^{pl}(M_{(x)}) + R^{pl}(M_{(y)}) = 4347.548 \cdot 10^6 \text{ Nm}^3 \quad (4.2)$$

Ako se ova vrednost upoređuje sa vrednošću bimomenta izazvanog dejstvom grede pri jediničnom krivljenju (4.1), uočava se da je mnogo manja i da procentualno iznosi svega:

$$\frac{R^{pl}}{R^{gr}} \cdot 100(\%) = \frac{4347.548 \cdot 10^6}{120.13 \cdot 10^9} \cdot 100(\%) = 3.62\%. \quad (4.3)$$

## Karakteristike za proračun inercijalnih sila u čvorovima

S obzirom na to da su spratna visina i dimenzije jezgra i ploče stalne u okviru primera, položaj centra mase  $C_m$  na svakom spratu je isti, jedino se na završnoj ploči razlikuje. Da bi se karakteristike završne ploče razlikovale od ostalih, date veličine nose donju oznaku „15”. Masa grede je zanemarena, budući da se smatra malom u odnosu na ukupnu masu sistema. Za proračun su potrebni sledeći podaci:

Masa u ravni čvora:

$$M=109322.4\text{kg} \text{ i } M_{15}=79528.2\text{kg}.$$

Projekcija odstojanja tačke  $C$  od čvora  $D$  na osu  $X$ :

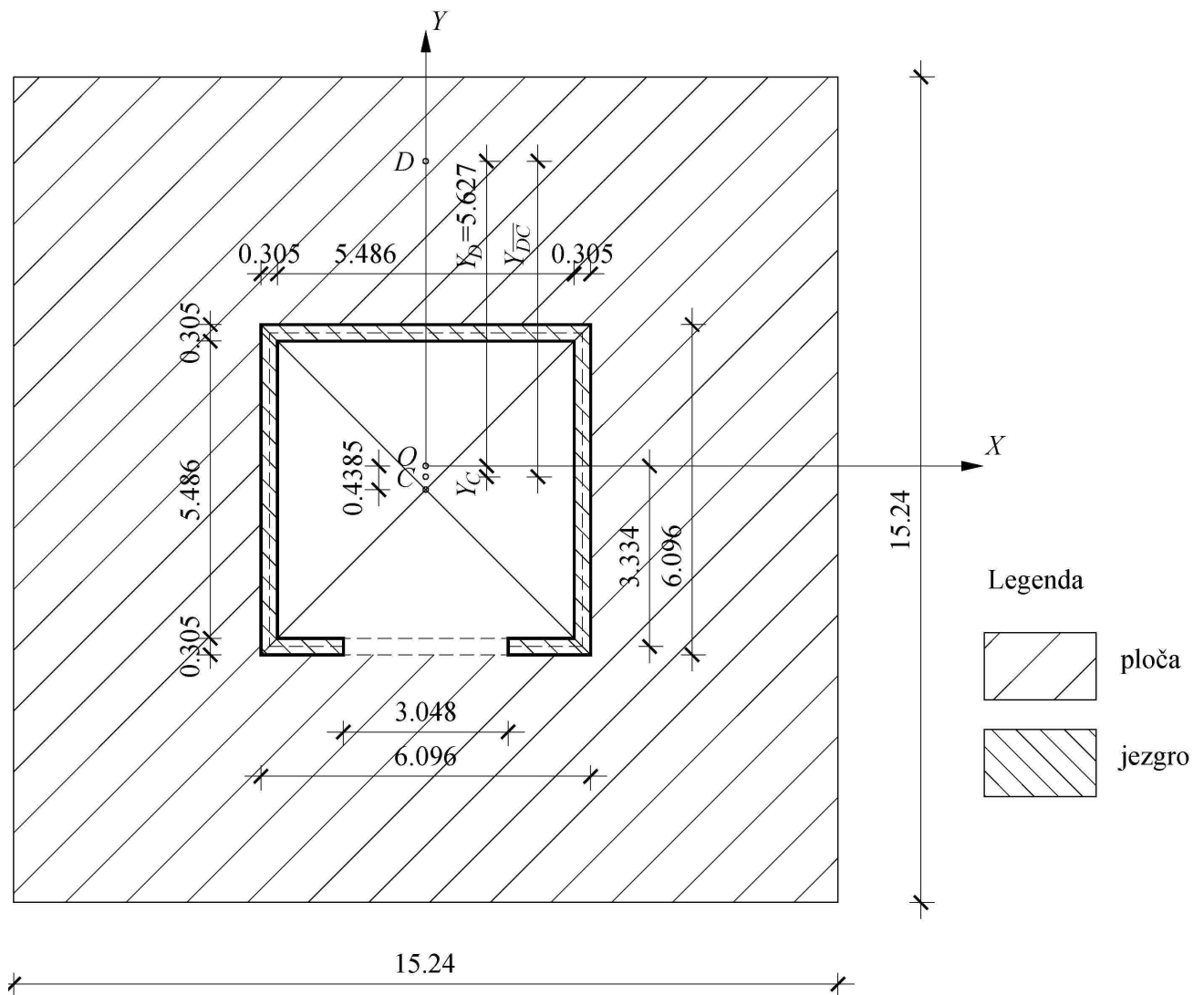
$$X_{\overline{CD}}=X_{\overline{CD},15}=0,$$

odnosno na osu  $Y$ :

$$Y_{\overline{CD}}=-5.82634\text{m} \text{ i } Y_{\overline{CD},15}=-5.901126\text{m} \text{ (vidi Sliku 4.6).}$$

Moment inercije mase u odnosu na osu smicanja prema (3.27):

$$J_D=6.624548 \cdot 10^6 \text{kgm}^2 \text{ i } J_{D,15}=5.343698 \cdot 10^6 \text{kgm}^2.$$



**Slika 4.6:** Osnova nosača sa geometrijskim podacima potrebnim za proračun inercijalnih sila

## 4.1. Analiza predloženom metodom

Na osnovu predložene metode, razvijen je računarski program TWBEIG (Thin Wall Beam EIGenfrequency analysis), koji je namenjen za određivanje sopstvenih frekvencija centralnog jezgra visokih zgrada. Program omogućava analizu kompleksnijih jezgara, kod kojih debljina zida jezgra, visina poprečne grede, debljina međuspratne ploče i spratna visina mogu biti zadate proizvoljno u granicama usvojenih ograničenja, koji su opisani u poglavlju 2, a to su:

- debljine zidova jezgra jednake su i nepromenjive u podužnom pravcu u okviru posmatranog polja, ali se mogu menjati od polja do polja;
- položaj težišne tačke  $O$  i geometrija srednje površi poprečnog preseka jezgra u pojedinim poljima ostaje ista, tako da svakom polju odgovaraju određene geometrijske karakteristike, koje se odnose samo na to polje;
- za sve poprečne preseke duž ose nosača zajednički su položaj težišne tačke  $O$ , normirana sektorska koordinata  $\Omega$  i centar smicanja  $D$ .

Potrebno je napomenuti da promena debljine zidova poprečnog preseka izaziva promenu položaja centra smicanja ali ova promena je mala i mogu se, bez većeg uticaja na tačnost proračuna, zanemariti (25). Visina poprečne grede i debljina međuspratne ploče mogu da se razlikuju od sprata do sprata.

Program je napisan na programskom jeziku Visual Fortran. Sastoji se iz tri dela, koji čine jednu celinu, i to:

- tekstualna datoteka twb.inp, koja služi za unos podataka,
- izvršni program TWBEIG.exe, koji vrši proračun i
- tekstualna datoteka twb.out, koja sadrži rezultate proračuna.

U datoteci twb.inp prvo su zadani opšti podaci modela: fizičke karakteristike nosača ( $E$ ,  $G$  i  $\rho$ ), gornja granica frekventnog opsega ( $\omega_{\max}$ ), korak za ispitivanje opsega ( $\Delta\omega$ ) i broj vrsta polja.

```
** twb.inp **
```

```
Modulus of elasticity (N/m2): E
```

```
Shear modulus (N/m2): G
```

```
Mass density (kg/m3): RO
```

```
Upper limit of frequency range (rad/s): WMAX
```

```
Frequency step (rad/s): DW
```

```
The number of segment types (1): NST
```

U nastavku su zadane karakteristike jezgra, poprečnih greda i međuspratnih ploča. Ti podaci su grupisani po vrsti polja nosača. Broj vrsta polja ( $NST$ ) zavisi od različitosti karakteristika elemenata nosača. Jednoj istoj vrsti polja pripadaju ona polja nosača čije karakteristike su jednake. Redosled davanja podataka o poljima počinje od gornjeg kraja nosača i nastavlja se prema dole.



Prvo se zadaje broj polja ( $NS$ ) koja pripadaju prvoj vrsti polja, zatim geometrijske karakteristike jezgra ( $I_{YY}$ ,  $I_{XX}$ ,  $K$ ,  $X_D$ ,  $Y_D$ ,  $I_{\Omega\Omega}$ ,  $L$ ), koordinate centra masa jezgra, masa jezgra po jedinici dužine i moment inercije mase jezgra po jedinici dužine. Kod ovih podataka  $XC2$ ,  $YC2$ ,  $MC2$  i  $JC2$  se odnosi na otvor jezgra, koji program uzima sa negativnim predznakom pri proračunu. U slučaju ako nema otvora, ovi podaci su jednaki nuli. U nastavku se daju dimenzije (širina, visina i dužina) poprečne grede i površina ograničena srednjom linijom profila jezgra i grede ( $A$ ). Na kraju su podaci vezani za međuspratne ploče: debljina ploče, krutost krivljenja ploče po jedinici debljine, koordinate centra masa ploče, masa ploče po jedinici debljine i moment inercije mase ploče po jedinici debljine. Kod debljine ploče  $DM$  se koristi kod proračuna inercijalnih sila, a  $DS$  kod proračuna bimomenta izazvan dejstvom ploče pri jediničnom krivljenju. Ova dvojnost je potrebna da bi se moglo simulirati stanje kad se uticaj krutosti ploče ne uzima u obzir pri proračunu.

Properties of the first segment type:

Number of segments:  $NS$

Moment of inertia around X and Y axis (m4):  $IX$   $IY$

St. Venant's torsional constant (m4):  $K$

The coordinates of shear center (m):  $XD$   $YD$

Sectorial moment of inertia (m6):  $IW$

Height of segment (m):  $L$

The coordinates of the center of masses of core (m):  $XC1$   $YC1$   $XC2$   $YC2$

Core mass per unit length (kg/m):  $MC1$   $MC2$

Mass moment of inertia of the core per unit length (kgm<sup>2</sup>/m):  $JC1$   $JC2$

Dimensions of lintel beam (m):  $BB$   $H$   $LB$

The area enclosed by the cross section of the core (m<sup>2</sup>):  $AA$

Thickness of slab (m):  $DM$ (mass)  $DS$ (stiffness)

The warping stiffness of the slab per unit thickness (Nm<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>):  $RP0$

The coordinates of the center mass of slab (m):  $XP$   $YP$

The mass of slab per unit thickness (kg/m):  $MP$

Mass moment of inertia of the slab per unit thickness (kgm<sup>2</sup>/m):  $JP$

Na potpuno isti način se zadaju podaci po drugoj vrsti polja, zatim po trećoj... sve do  $NST$ -toj vrsti polja.

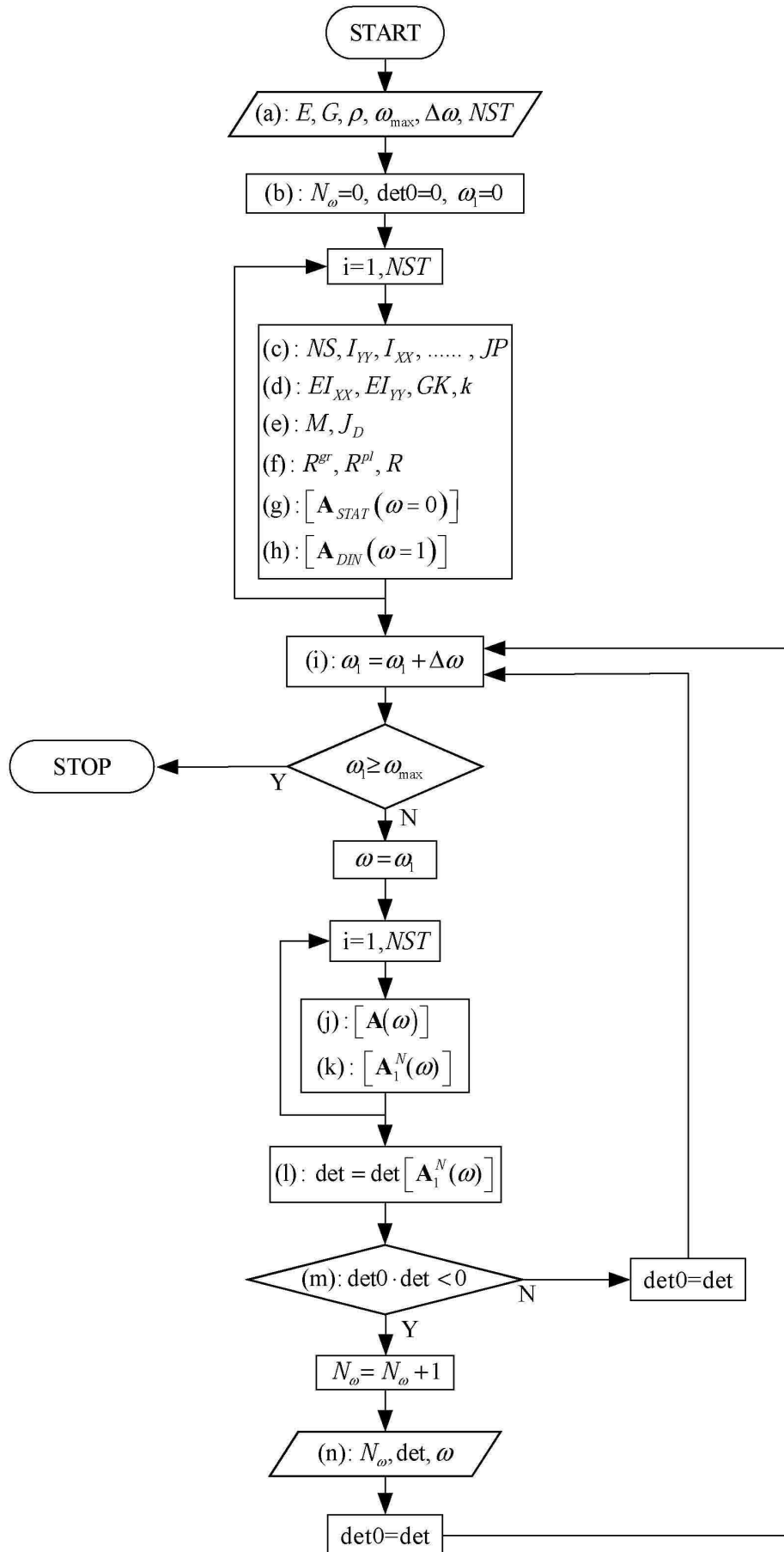
Izvršni program TWBEIG se može podeliti na više modula. Svaki modul predstavlja jedan logičan korak pri rešenju problema. Neki moduli sadrže potprogram u kojima se izvršavaju određene naredbe i/ili računске operacije. Program sopstvene frekvencije pronalazi tako što postepeno pretražuje frekventni opseg od početka do kraja sa zadatim koracima. Pri svakom koraku potrebno je odrediti prenosne matrice koje odgovaraju aktuelnoj frekvenciji. Radi lakšeg i preglednijeg proračuna prenosna matrica (3.50) se deli na statički i dinamički deo. Statički deo sadrži samo one elemente koje ne zavise od frekvencije ( $[A_{STAT}(\omega=0)]$ ). Dinamički deo sadrži one

elemente koje zavise samo od frekvencije ( $[\mathbf{A}_{DIN}(\omega=1)]$ ), a uzima se da je  $\omega=1$ . Prenosna matrica (3.50) se tada može dobiti:

$$[\mathbf{A}(\omega)] = [\mathbf{A}_{STAT}(\omega=0)] + \omega^2 \cdot [\mathbf{A}_{DIN}(\omega=1)]. \quad (4.4)$$

Vrednosti sopstvenih frekvencija jezgra određene su promenom predznaka determinante (3.57) između dva uzastopna koraka. Tačnost rešenja određena je dužinom koraka koja može biti proizvoljno zadata. Moduli programa su sledeći:

- (a) Učitavanje opštih podataka modela iz datoteke twb.inp – potprogram ULAZ0:  
 $E, G, \rho, \omega_{\max}, \Delta\omega, NST$ .
- (b) Dodavanje početne vrednosti parametrima programa – potprogram INITIAL0:  
 $N_{\omega}=0, \det_0=0, \omega_1=0$ .
- (c) Učitavanje karakteristike jezgra, poprečnih greda i međuspratnih ploča po vrstama polja nosača iz datoteke twb.inp – potprogram ULAZ1:  
 $NS, I_{YY}, I_{XX}, K, X_D, Y_D, I_{\Omega\Omega}, L, XC1, YC1, XC2, YC2, MC1, JC1, JC2, \dots, JP$ .
- (d) Proračun karakteristika krutosti jezgra – potprogram STIFF:  
 $EI_{XX}, EI_{YY}, GK, k$ .
- (e) Proračun karakteristika potrebnih kod inercijalnih sila (3.27) – potprogram INERT:  
 $M, J_D$ .
- (f) Proračun bimomenta (3.30) usled uticaja grede (3.43) i ploče (3.47) – potprogram BIMOMENT:  $R^{gr}, R^{pl}, R$ .
- (g) Određivanje statičkog dela prenosne matrice (3.50) – potprogram TRMATSTAT:  
 $[\mathbf{A}_{STAT}(\omega=0)]$ .
- (h) Određivanje dinamičkog dela prenosne matrice (3.50) – potprogram TRMATDIN0:  
 $[\mathbf{A}_{DIN}(\omega=1)]$ .
- (i) Variranje vrednosti kružne frekvencije i provera kraja analize:  
 $\omega_1 = \omega_1 + \Delta\omega, \omega_1 \geq \omega_{\max}, \omega = \omega_1$ .
- (j) Formiranje prenosne matrice (4.4) sa aktuelnom vrednošću kružne frekvencije – potprogram TRMATDIN:  $[\mathbf{A}(\omega)]$ .
- (k) Formiranje sveukupne prenosne matrice (3.53) – potprogram TRMATSYS:  
 $[\mathbf{A}_I^N(\omega)]$ .
- (l) Proračun determinante sveukupne prenosne matrice – potprogram SUBMATRSYS i LIN\_SOL\_GEN:  $\det[\mathbf{A}_I^N(\omega)]$ .
- (m) Provera promene predznaka determinante između prethodnog i trenutnog proračuna:  
 $\det_0 \cdot \det[\mathbf{A}_I^N(\omega)] < 0$ .
- (n) Upisivanje rezultata proračuna u datoteku twb.out – potprogram NATFREQOUT:  
 $N_{\omega}, \det[\mathbf{A}_I^N(\omega)], \omega$ .



Slika 4.7: Shema algoritma proračuna izvršnog programa TWBEIG

Tok proračuna u okviru modula (a)–(n), shematski je prikazan na *Slici 4.7*. Listing izvršnog programa dat je u prilogu (Prilog–2).

Na početku datoteke twb.out nalaze se podaci iz ulazne datoteke twb.inp radi prepoznavanja računskog modela. Zatim su dati rezultati proračuna za sopstvene frekvencije u posmatranom opsegu, a to su: oznaka tona ( $j$ ), vrednost determinante, odgovarajuća kružna frekvencija ( $\omega_j$ ), frekvencija i period oscilacije.

```

** twb.out **

EIGENFREQUENCY No:      1
DETER(1)=
OMEGA(1/s)=
FREQ.(Hz)=
PERIOD(sec)=

EIGENFREQUENCY No:      2
DETER(1)=
OMEGA(1/s)=
FREQ.(Hz)=
PERIOD(sec)=

itd...
    
```

Da bi se ispitati mogućnosti računarskog programa TWBEIG formiran je brojni primer sa promenljivom debljinom zida jezgra, spratne visine i dimenzije poprečne grede. Dimenzije ovih elemenata prikazani su u Tabeli 4.6. Oznaka primera je *BET-0*.

Tabela 4.6: Dimenzije elemenata kod primera *BET-0*

Sprat	Debljina zida jezgra $d_z$ [m]	Spratna visina $L$ [m]	Dimenz. popr. grede $BB / H / LB$ [m]
11. - 15.	0.30	3.50	0.30/0.40/3.048
6. - 10.	0.35	4.00	0.35/0.50/3.048
1. - 5.	0.40	4.50	0.40/0.60/3.048

Analiza je urađena i sa aplikacijom SAP2000. Rezultati obe analize su prikazani i upoređeni u Tabeli 4.7 i one pokazuju dobro slaganje. Izlazna datoteka analize data je u prilogu (Prilog–3).

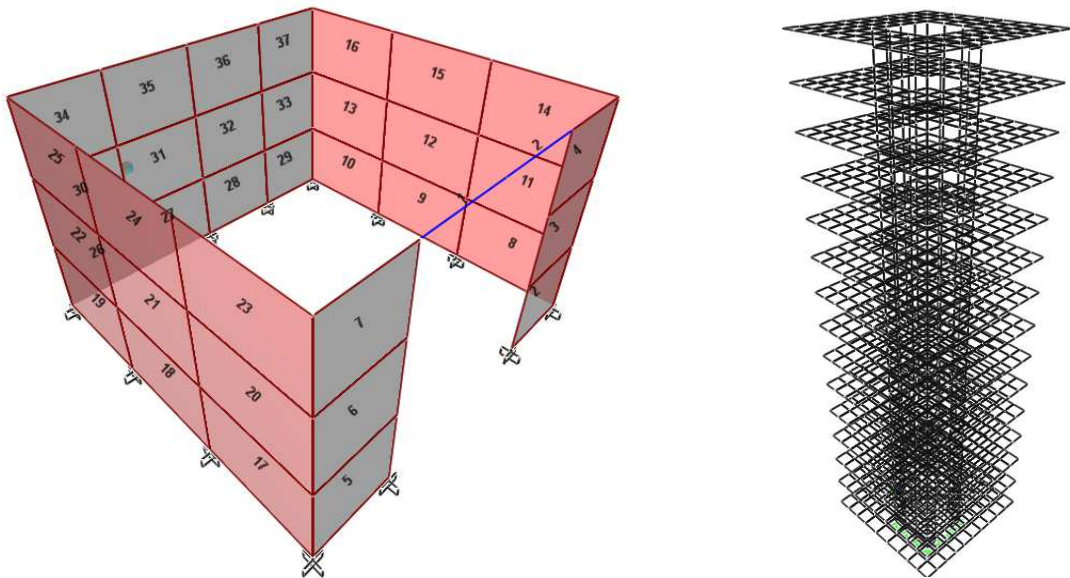
Tabela 4.7: Prikaz najniže tri sopstvene frekvencije brojnog primera *BET-0*

Sopstvene frekvencije		(1) SAP 2000	(2) TWBEIG	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
<i>j</i>	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	%
1.	$X-\Phi$	0.69104	0.72097	-4.15
2.	$Y$	0.89764	0.91037	-1.40
3.	$X-\Phi$	1.90222	1.86164	2.18

Računski model je analiziran računarskim programom TWBEIG u frekventnom opsegu  $\omega=0\div 15$  Hz. Rezultati analize prikazani su u tabeli 4.8., a izlazna datoteka analize data je u prilogu (Prilog-4).

## 4.2. Analiza MKE

Pri analizi uz pomoć aplikacije SAP 2000, uzete su iste geometrijske i fizičke karakteristike kao i kod proračuna sa TWBEIG. Jezgro je u aplikaciji SAP 2000 modelirano sa „Four-node Quadrilateral Shell” elementima. Jedno polje jezgra je sastavljeno od 36 elemenata. Čvorovi elemenata jezgra su potpuno uklješteni na nivou temeljne ploče. Poprečne grede modelirane su sa 2 „Frame Elements of Rectangular shape” elementa. Ovi elementi su međusobno, kao i sa jezgrom, kruto povezani u nivoima spratova (vidi *Sliku 4.8-1*).

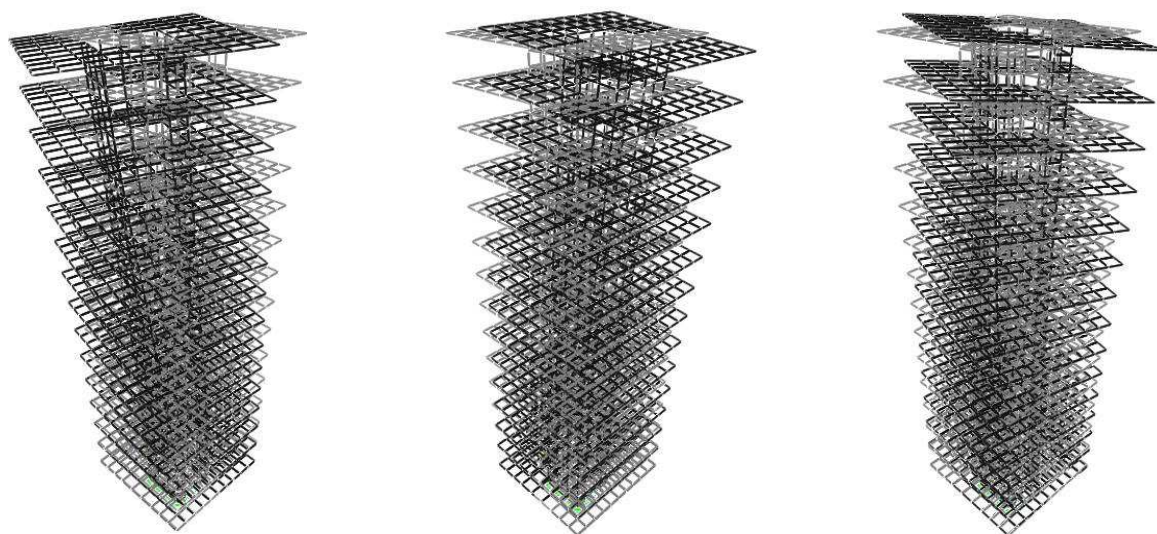


*Slika 4.8: Donje polje i 3D slika računskog modela*

Međuspratne ploče modelirane su isto pomoću „Four-node Quadrilateral Shell” elemenata. Granični uslovi odgovaraju graničnim uslovima uzetim u TWBEIG. Po spoljašnjoj ivici, čvorne

tačke konačnih elemenata ploče stoje slobodno. Slobodna oslanjanja duž unutrašnje ivice ploče ostvarena su pomoću kratkih grednih elemenata. Ovi gredni elementi su na jednom kraju kruto vezani za čvorne tačke jezgra. Drugi krajevi su vezani za odgovarajuće čvorne tačke ploče tako da ne prenose moment savijanja upravno na pravac srednje linije jezgra.

Jedna ploča je modelirana sa 90 elemenata. Ceo model je prikazan na *Slici 4.8-2*. Tri najniža tona računskog modela dobijena pomoću aplikacije SAP 2000 prikazana su na *Slici 4.9*. Prvi i treći ton odgovaraju poprečno-torzionom obliku oscilacije u pravcu  $X$  ose i oko vertikalne ose. Nosač po drugom tonu oscilira samo poprečno, u pravcu ose simetrije  $Y$ .



*Slika 4.9: Prvi, drugi i treći ton*

### 4.3. Rezultati analize

Rezultati proračuna tri najniže sopstvene frekvencije dobijeni pomoću aplikacije SAP 2000 i računarskog programa TWBEIG su dati i upoređeni u tabeli 4.8. Oznaka računskog modela je *BET-1*.

Tabela 4.8: Prikaz najniže tri sopstvene frekvencije računskog modela *BET-1*

Sopstvene frekvencije		(1) SAP 2000	(2) TWBEIG	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
$j$	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	%
1.	$X-\Phi$	0.65881	0.68453	-3.76
2.	$Y$	0.88688	0.89954	-1.41
3.	$X-\Phi$	1.82810	1.79479	1.86

Vrednosti sopstvenih frekvencija pokazuju značajno slaganje između rezultata proračuna dobijenog aplikacijom SAP 2000 i računarskim programom TWBEIG.

## Analiza uticaja ploča i greda

U cilju istraživanja uticaja poprečnih greda i međuspratnih ploča na dinamičke karakteristike jezgra, razmatrana su još tri slučaja proračuna:

- slučaj kada je samo krutost poprečne grede uzeta u obzir,  $H=0.457$  m – oznaka modela je *BET-2*;
- slučaj kada je samo krutost međuspratne ploče uzeta u obzir,  $DP=0.1$  m – sa oznakom *BET-3*;
- slučaj kada je krutost oba elementa zanemarena – oznaka je *BET-4*.

U nastavku, u Tabelama 4.9, 4.10 i 4.11 prikazani su i upoređeni rezultati proračuna za sva tri slučaja, pomoću aplikacije SAP 2000 i računarskog programa TWBEIG.

Tabela 4.9: Sopstvene frekvencije računskog modela *BET-2*

Sopstvene frekvencije		(1) SAP 2000	(2) TWBEIG	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
<i>j</i>	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	%
1.	$X-\Phi$	0.65372	0.67943	-3.78
2.	$Y$	0.88688	0.89954	-1.41
3.	$X-\Phi$	1.81109	1.78795	1.29

Tabela 4.10: Sopstvene frekvencije računskog modela *BET-3*

Sopstvene frekvencije		(1) SAP 2000	(2) TWBEIG	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
<i>j</i>	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	%
1.	$X-\Phi$	0.43713	0.45152	-3.19
2.	$Y$	0.88682	0.89954	-1.41
3.	$X-\Phi$	1.65932	1.62481	2.12

Tabela 4.11: Sopstvene frekvencije računskog modela *BET-4*

Sopstvene frekvencije		(1) SAP 2000	(2) TWBEIG	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
<i>j</i>	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	%
1.	$X-\Phi$	0.41533	0.42399	-2.04
2.	$Y$	0.88682	0.89954	-1.41
3.	$X-\Phi$	1.64112	1.60619	2.17

Da bi se sagledao uticaj krutosti poprečnih greda i međuspratnih ploča na sopstvene frekvencije jezgra, analizirana su i sledeća četiri slučaja:

- A1 promena uticaja sa i bez grede u prisustvu ploče;
- A2 promena uticaja sa i bez grede bez prisustva ploče;
- A3 promena uticaja sa i bez ploče u prisustvu grede;
- A4 promena uticaja sa i bez ploče bez prisustva grede.

Rezultati su prikazani u Tabelama 4.12 i 4.13:

Tabela 4.12: Prikaz analize uticaja poprečne grede pomoću TWBEIG

Sopstvene frekvencije		A1	A2
		$\frac{(BET-1)-(BET-3)}{(BET-3)}$	$\frac{(BET-2)-(BET-4)}{(BET-4)}$
<i>j</i>	oblik	(%)	(%)
1.	$X-\Phi$	51.61	60.25
2.	$Y$	0	0
3.	$X-\Phi$	10.46	11.32

Tabela 4.13: Prikaz analize uticaja međuspratnih ploča pomoću TWBEIG

Sopstvene frekvencije		A3	A4
		$\frac{(BET-1)-(BET-2)}{(BET-2)}$	$\frac{(BET-3)-(BET-4)}{(BET-4)}$
<i>j</i>	oblik	(%)	(%)
1.	$X-\Phi$	0.75	6.49
2.	$Y$	0	0
3.	$X-\Phi$	0.38	1.16

Na osnovu uporedne analize rezultata iz Tabele 4.12 i Tabele 4.13, može se primetiti sledeće:

- (a) Poprečne grede imaju najveći uticaj na prvu sopstvenu frekvenciju, dok je njihov uticaj na treću znatno manji. Nemaju uticaj na drugu sopstvenu frekvenciju, što je uslovljeno činjenicom da se grede ne deformišu pri drugom tonu.
- (b) Međuspratne ploče slabo utiču na porast prve sopstvene frekvencije u prisustvo grede (A3), a nešto značajnije bez prisustva grede (A4). Na porast treće sopstvene frekvencije, skoro nemaju uticaj. Na drugu sopstvenu frekvenciju, ploče nemaju nikakav uticaj iz istog razloga kao i kod grede.



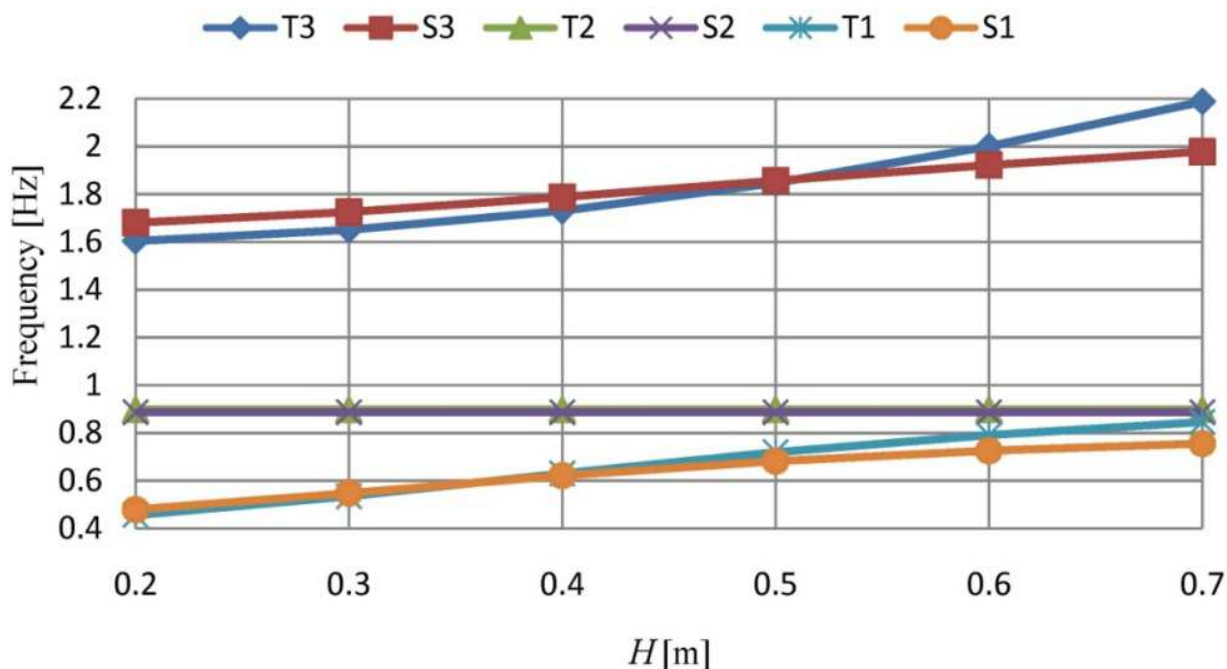
## Parametarska analiza karakteristika nosača

U cilju proučavanja uticaja visine poprečnih greda ( $H$ ), debljine međuspratnih ploča ( $DP$ ) i spratne visine ( $L$ ) na dinamičke karakteristike jezgra, urađene su sledeće parametarske analize:

- analiza pri variranju visine poprečnih greda u opsegu:  $H=0.20\div 0.70\text{m}$  sa koracima  $\Delta H=0.10\text{m}$  – oznake modela su  $BET-b20$ ,  $BET-b30$ , ... i  $BET-b70$ ;
- analiza pri variranju debljine međuspratne ploče u opsegu:  $DP=0.10\div 0.20\text{ m}$  sa koracima  $\Delta DP=0.02\text{m}$  – oznake modela su  $BET-p10$ ,  $BET-p12$ , ... i  $BET-p20$ ;
- analiza pri variranju spratne visine u opsegu:  $L=3.50\div 4.00\text{ m}$  sa koracima  $\Delta L=0.10\text{m}$  – oznake modela su  $BET-L35$ ,  $BET-L36$ , ... i  $BET-L40$ .

Pri svakoj analizi, menja se samo posmatrani parametar, dok ostali parametri ostaju konstantni. Masa ploča sa promenom debljine se takođe ne menja. Proračun je izvršen pomoću računarskog programa TWBEIG, kao i pomoću aplikacije SAP 2000. Rezultati ovih proračuna i njihovo upoređivanje dati su u Tabelama 4.14, 4.15 i 4.16.

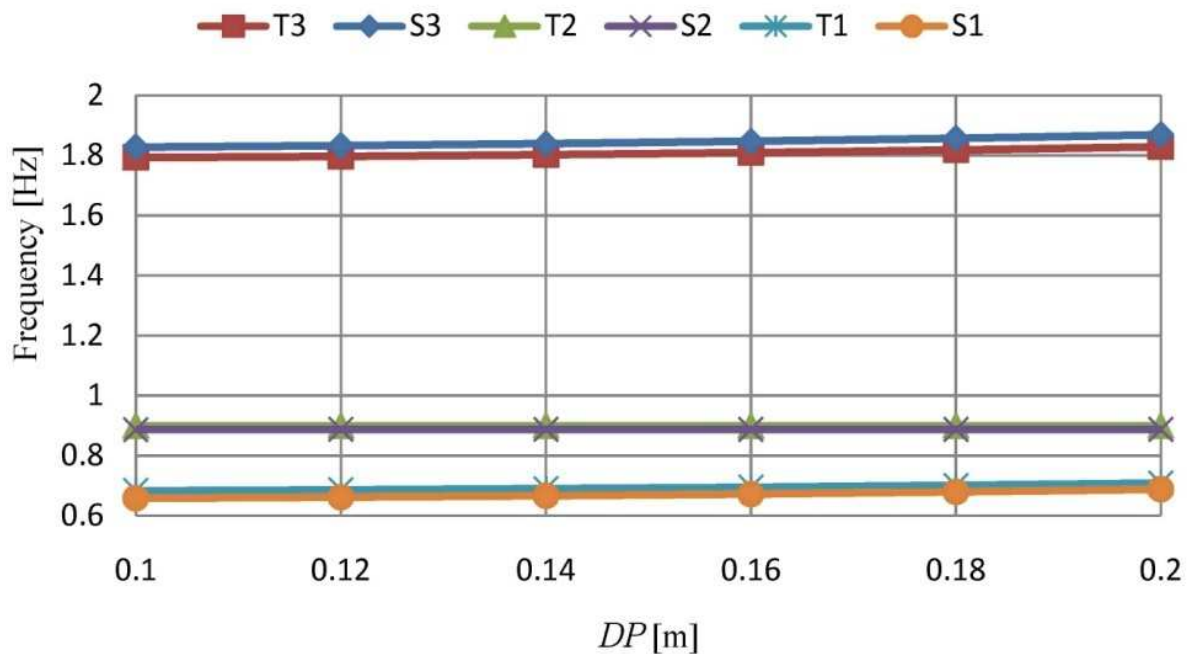
Grafički prikaz rezultata oba proračuna dat je na *Slikama 4.10, 4.11 i 4.12*. Sa „S” su označene krive dobijene aplikacijom SAP 2000, a sa „T” računarskim programom TWBEIG. Brojevi 1, 2 i 3 se odnose na redni broj sopstvene frekvencije.



*Slika 4.10: Grafički prikaz parametarske analize za različite visine poprečnih greda H*

Tabela 4.14: Rezultati parametarske analize za različite visine poprečnih greda  $H$

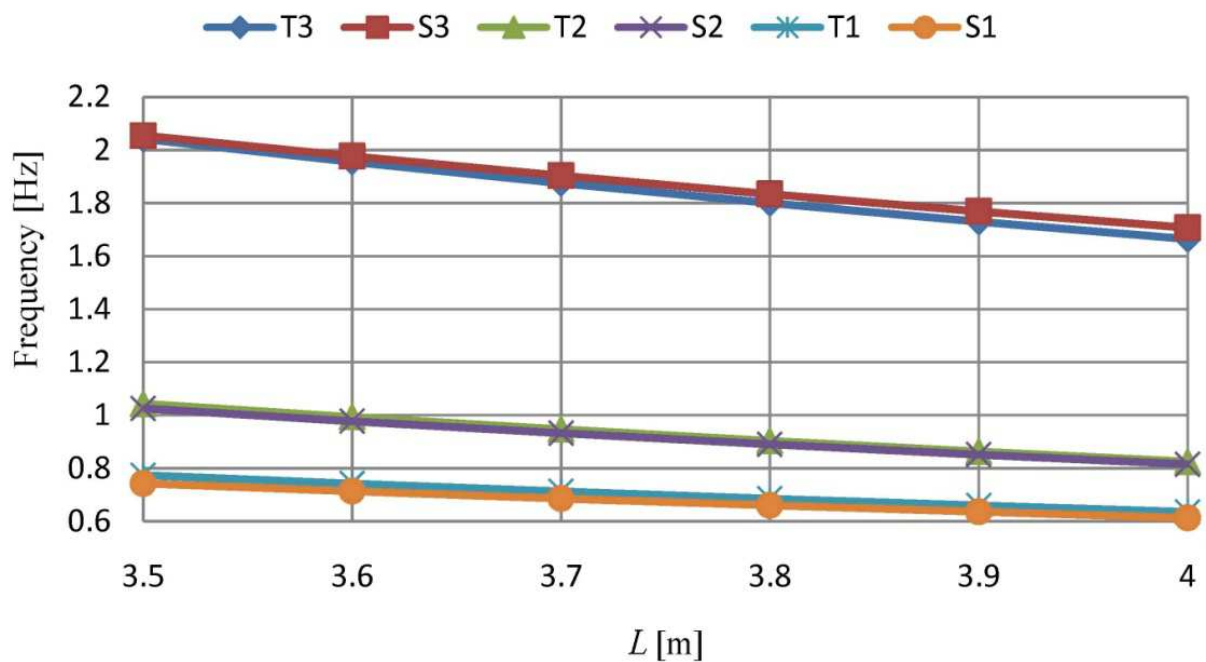
Oznaka	$H$ [m]	Sopstvene frekvencije		(1)	(2)	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
		$j$	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	
BET-b20	0.20	1.	$X-\Phi$	0.48038	0.46044	4.33
		2.	$Y$	0.88685	0.89954	-1.41
		3.	$X-\Phi$	1.68201	1.60699	4.67
BET-b30	0.30	1.	$X-\Phi$	0.54875	0.53826	1.95
		2.	$Y$	0.88687	0.89954	-1.41
		3.	$X-\Phi$	1.72641	1.65362	4.40
BET-b40	0.40	1.	$X-\Phi$	0.62230	0.63248	-1.61
		2.	$Y$	0.88688	0.89954	-1.41
		3.	$X-\Phi$	1.78879	1.73320	3.21
BET-b50	0.50	1.	$X-\Phi$	0.68270	0.72081	-5.29
		2.	$Y$	0.88689	0.89954	-1.41
		3.	$X-\Phi$	1.85791	1.84938	0.46
BET-b60	0.60	1.	$X-\Phi$	0.72638	0.79275	-8.37
		2.	$Y$	0.88689	0.89954	-1.41
		3.	$X-\Phi$	1.92349	2.00297	-3.97
BET-b70	0.70	1.	$X-\Phi$	0.75643	0.84686	-10.68
		2.	$Y$	0.88690	0.89954	-1.41
		3.	$X-\Phi$	1.97952	2.19013	-9.62



Slika 4.11: Grafički prikaz parametarske analize po debljini međuspratne ploče  $DP$

Tabela 4.15: Rezultati parametarske analize za različite debljine ploča  $DP$

Oznaka	$DP$ [m]	Sopstvene frekvencije		(1)	(2)	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
		$j$	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	%
$BET-p10$	0.10	1.	$X-\Phi$	0.65881	0.68453	-3.76
		2.	$Y$	0.88688	0.89954	-1.41
		3.	$X-\Phi$	1.82810	1.79479	1.86
$BET-p12$	0.12	1.	$X-\Phi$	0.66249	0.68819	-3.73
		2.	$Y$	0.88698	0.89954	-1.40
		3.	$X-\Phi$	1.83354	1.79973	1.88
$BET-p14$	0.14	1.	$X-\Phi$	0.66739	0.69296	-3.69
		2.	$Y$	0.88707	0.89954	-1.39
		3.	$X-\Phi$	1.84036	1.80657	1.87
$BET-p16$	0.16	1.	$X-\Phi$	0.67359	0.69993	-3.68
		2.	$Y$	0.88716	0.89954	-1.38
		3.	$X-\Phi$	1.84885	1.81580	1.82
$BET-p18$	0.18	1.	$X-\Phi$	0.68111	0.70713	-3.68
		2.	$Y$	0.88723	0.89954	-1.37
		3.	$X-\Phi$	1.85922	1.82742	1.74
$BET-p20$	0.20	1.	$X-\Phi$	0.68990	0.71620	-3.67
		2.	$Y$	0.88730	0.89954	-1.36
		3.	$X-\Phi$	1.87166	1.84174	1.63



Slika 4.12: Grafički prikaz parametarske analize za različite spratne visine  $L$

Tabela 4.16: Rezultati parametarske analize za različite spratne visine  $L$ 

Oznaka	$L$ [m]	Sopstvene frekvencije		(1)	(2)	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
		$j$	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	%
BET-L35	3.50	1.	$X-\Phi$	0.74355	0.77572	-4.15
		2.	$Y$	1.02605	1.04374	-1.69
		3.	$X-\Phi$	2.05527	2.04435	0.53
BET-L36	3.60	1.	$X-\Phi$	0.71447	0.74437	-4.02
		2.	$Y$	0.97774	0.99361	-1.60
		3.	$X-\Phi$	1.97738	1.95777	1.00
BET-L37	3.70	1.	$X-\Phi$	0.68711	0.71477	-3.87
		2.	$Y$	0.93279	0.94697	-1.50
		3.	$X-\Phi$	1.90403	1.87723	1.43
BET-L38	3.80	1.	$X-\Phi$	0.66130	0.68723	-3.77
		2.	$Y$	0.89091	0.90368	-1.41
		3.	$X-\Phi$	1.83478	1.80195	1.82
BET-L39	3.90	1.	$X-\Phi$	0.63699	0.66113	-3.65
		2.	$Y$	0.85182	0.86342	-1.34
		3.	$X-\Phi$	1.76948	1.73177	2.18
BET-L40	4.00	1.	$X-\Phi$	0.61404	0.63662	-3.55
		2.	$Y$	0.81528	0.82570	-1.26
		3.	$X-\Phi$	1.70778	1.66588	2.52

U pogledu sopstvenih frekvencija, uočeno je da uvećavanje pojedinih parametara dovodi do sledećih promena:

- Kod visine grede, javlja se intenzivni porast prve i treće sopstvene frekvencije, dok se druga sopstvena frekvencija ne menja.
- Kod debljine ploče, uočava se samo blagi porast prve i treće sopstvene frekvencije, a druga sopstvena frekvencija takođe ostaje nepromenjena.
- U slučaju spratne visine, dolazi do naglog pada svih sopstvenih frekvencija.

U pogledu upoređivanja rezultata dva proračuna može se primetiti sledeće:

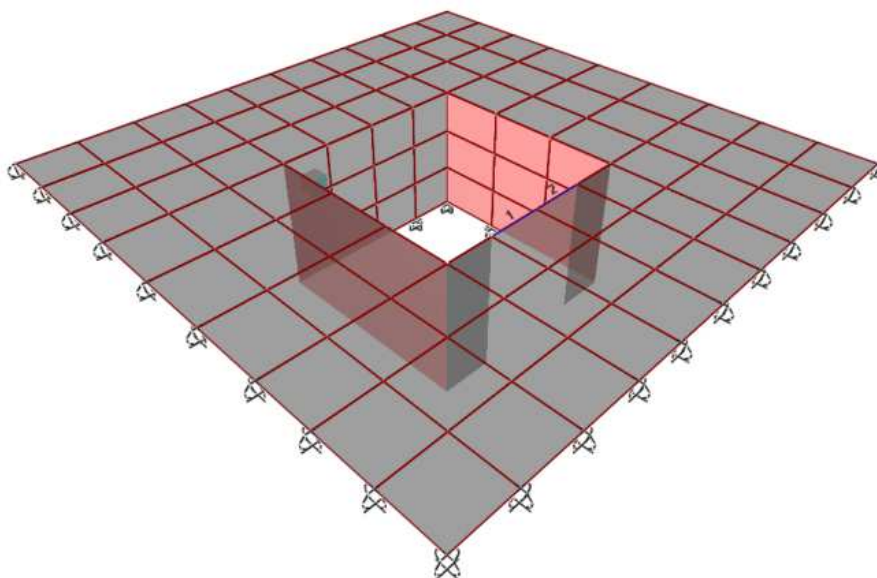
- Promenom visine grede, vrednosti prve i treće sopstvene frekvencije se dobro slažu, a kod druge je razlika jako mala i stalna je u celom analiziranom području.
- Promenom debljine ploča, vrednosti svih sopstvenih frekvencija se jako dobro slažu.
- Variranjem spratne visine, vrednosti sopstvenih frekvencija se takođe dobro slažu u posmatranom opsegu.

## Komparativna analiza uticaja oslanjanja ploče

Komparativna analiza urađena je radi utvrđivanja uticaja graničnih uslova na spoljašnjoj ivici međuspratnih ploča na sopstvene frekvencije jezgra, i to:

- ploče po spoljašnjoj ivici stoje slobodno i
- ploče su po spoljašnjoj ivici slobodno oslonjene.

Istraživanje je izvršeno na modelima sa i bez grede i one nose oznake: *BET-1(R)* i *BET-3(R)*. Analiza je urađena samo sa aplikacijom SAP 2000. Pri modeliranju vertikalna pomeranja čvornih tačaka ploče po spoljašnjoj ivici sprečena su osloncima. Na *Slici 4.13* prikazane su mreža čvorova, elementi i način oslanjanja donjeg polja jezgra i ploča.



*Slika 4.13: Donje polje sa pločom i gredom kod računskog modela BET-1(R)*

Uticaj oslanjanja po spoljašnjoj ivici ploče na sopstvene frekvencije nosača dobija se upoređivanjem rezultata proračuna modela *BET-1(R)* i *BET-3(R)* sa modelima *BET-1* i *BET-3*. Rezultati proračuna pomoću aplikacije SAP 2000 i njihovo upoređivanje prikazani su u Tabeli 4.17 i 4.18.

Tabela 4.17: Rezultati uporedne analize načina oslanjanja ploče u prisustvu grede

Sopstvene frekvencije		(1) <i>BET-1(R)</i>	(2) <i>BET-1</i>	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
<i>j</i>	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	%
1.	<i>X-Φ</i>	0.66559	0.65881	1.03
2.	<i>Y</i>	0.89957	0.88688	1.43
3.	<i>X-Φ</i>	1.83582	1.82810	0.42

Tabela 4.18: Rezultati uporedne analize načina oslanjanja ploče bez prisustva grede

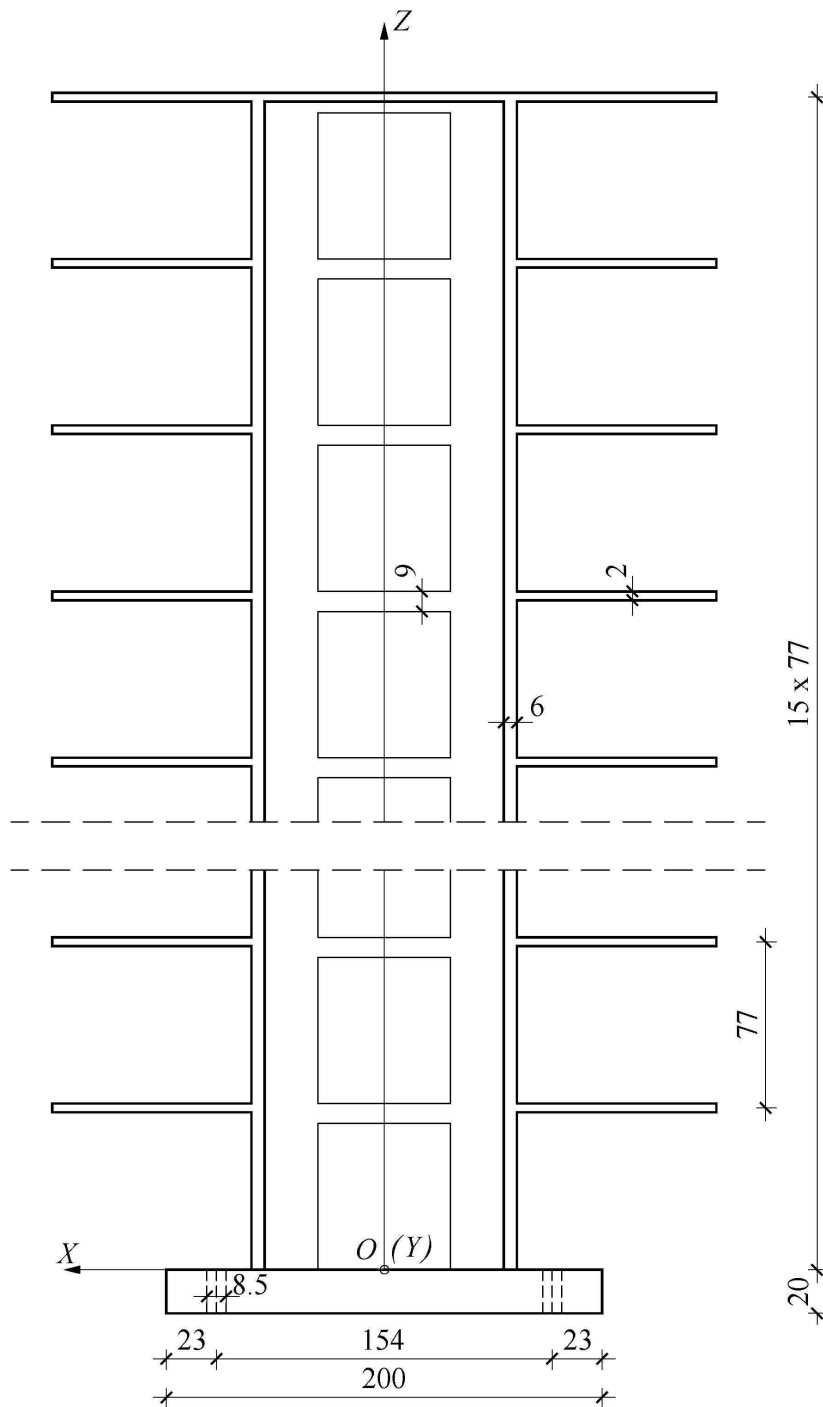
Sopstvene frekvencije		(1) <i>BET-3(R)</i>	(2) <i>BET-3</i>	$\Delta f = \frac{(1)-(2)}{(2)}$
<i>j</i>	oblik	frekv. [Hz]	frekv. [Hz]	%
1.	<i>X-Φ</i>	0.44406	0.43713	1.59
2.	<i>Y</i>	0.89951	0.88682	1.43
3.	<i>X-Φ</i>	1.66833	1.65932	0.54

Upoređivanjem rezultata iz Tabele 4.17 i Tabele 4.18, uočava se sledeće:

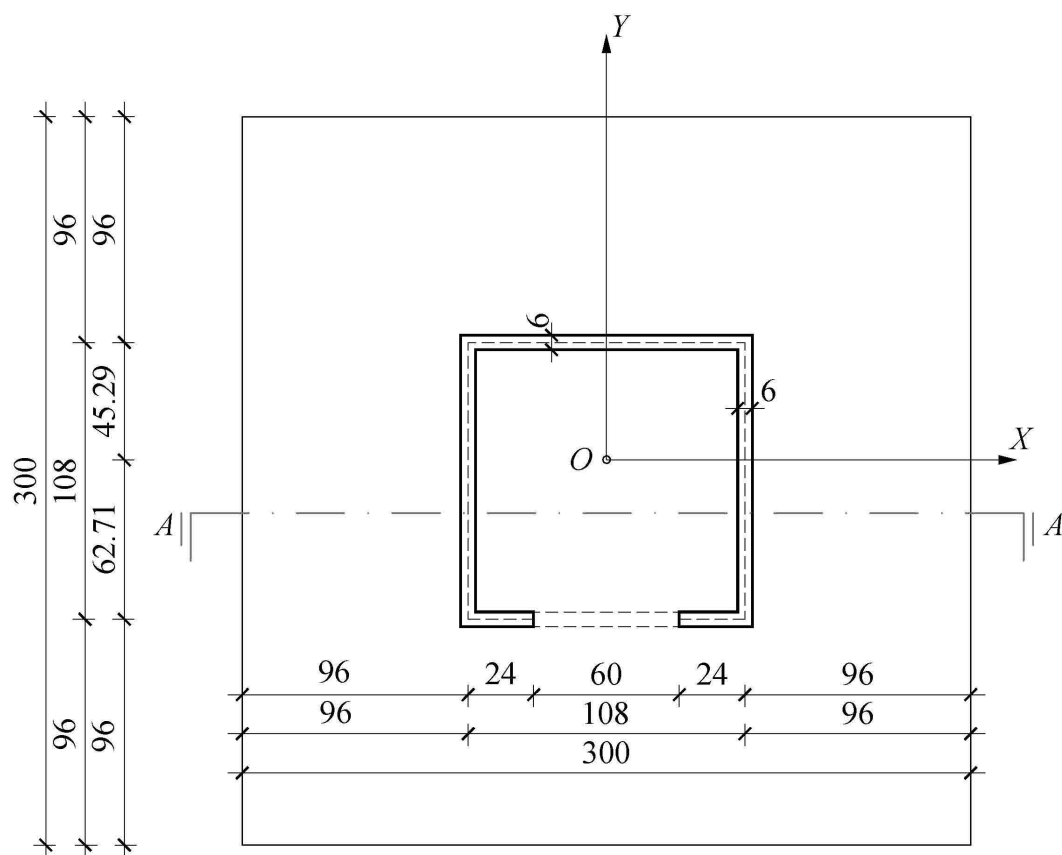
- (a) Sa oslanjanjem ploča po spoljašnjoj ivici, sve tri sopstvene frekvencije se samo neznatno povećavaju.
- (b) Oslanjanje ploča jednako utiče na drugu sopstvenu frekvenciju nosača, bez obzira na prisustvo grede, jer se grede ne deformišu pri drugom tonu.

## 5. EKSPERIMENTALNA PROVERA METODE

U cilju provere metode opisane u poglavljima 2 i 3, odnosno njene primene u poglavlju 4, izrađen je eksperimentalni model od pleksiglasa, *Slika 5.1 i 5.2*, srazmerno iste geometrije kao i numerički primer iz poglavlja 4.



*Slika 5.1: Podužni presek A-A eksperimentalnog modela*



Slika 5.2: Poprečni presek jezgra eksperimentalnog modela

Sličnost po dimenziji između elemenata numeričkog primera i eksperimentalnog modela se može videti u Tabeli 5.1.

Tabela 5.1: Geometrijski podaci elemenata numeričkog primera i eksperimentalnog modela

Geometrijske karakteristike elemenata	Numerički primer	Eksperimentalni model	Razmera
	[mm]	[mm]	
Visina poprečne grede ( $H$ )	457	9	1:50.778
Dužina poprečne grede ( $l$ )	3048	60	1:50.800
Debljina međuspratnih ploča ( $DP$ )	100	2	1:50.000
Širina međuspratnih ploča	15240	300	1:50.800
Spratna visina ( $L$ )	3810	77	1:49.481
Debljina zida jezgra	305	6	1:50.833

S obzirom na to da su pleksiglas ploče fabrički napravljene sa određenom debljinom, nije bilo moguće postići 100% geometrijsku sličnost.

Komercijalni naziv materijala eksperimentalnog modela je PLEXIGLAS XT. Elementi su sečeni brzom cirkularnom testerom na određene dimenzije, a potom lepljeni specijalnim lepkom ACRIFIX<sup>®</sup>109. Pri građenju modela, korišćen je kalup. Na Slici 5.3 i Slici 5.4 je prikazan način lepljenja modela.





*Slika 5.3: Lepljenje eksperimentalnog modela*



*Slika 5.4: Detalji kalupa eksperimentalnog modela*

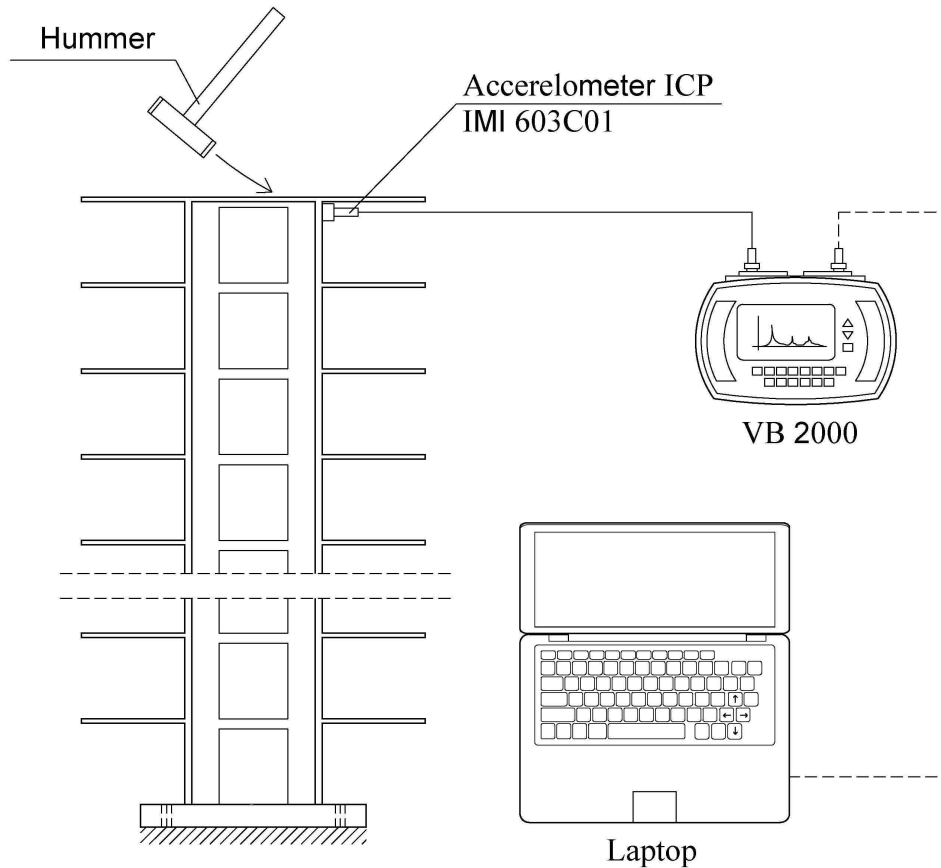
Za izradu eksperimentalnog modela korišćene su ploče debljine 2 mm, 6 mm i 10 mm. Model je na donjem delu zalepljen za dve međusobno zalepljene pleksiglas ploče debljine 10 mm. Ove ploče su pričvršćene za čeličnu ploču debljine 5 mm sa četiri zavrtnja M8. Čelična ploča je za nepokretnu podlogu takođe povezana sa četiri zavrtnja M8. Na *Slici 5.5* prikazan je eksperimentalni model i način njegovog vezivanja za nepokretnu podlogu.



*Slika 5.5: Prikaz vezivanja eksperimentalnog modela*

## **5.1. Eksperimentalna analiza**

Za merenje dinamičkog odziva modela, korišćena su dva pretvarača tipa IMI ICP® Accelerometer-a, model 603C01. Kalibracioni sertifikati dati su u prilogu (Prilog-5). Snimljeni signal je dobijen, a potom obrađen pomoću VB2000™ FFT analizatora dinamičkog signala proizvođača Commtest Instruments sa Novog Zelanda. Analizator poseduje fabrički ugrađenu funkciju Bump Test [28], jednostavnu metodu za analizu sopstvene frekvencije mašine ili konstrukcije. Pobuđivanje eksperimentalnog modela vršeno je čekićem mase od 200 g. Merni lanac prikazan je na *Slici 5.6*.



Slika 5.6: Merni lanac za određivanje sopstvenih frekvencija modela

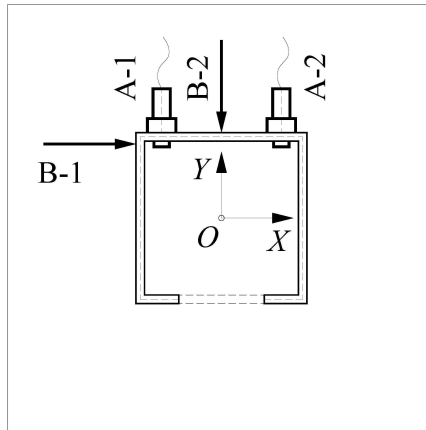
## Opis eksperimenta i „set up” instrumenta

Prilikom merenja, napravljena su četiri snimka u vremenskom domenu, koje analizator brzom Fourierovom transformacijom odmah pretvara u frekventni spektar. Primenom metode osrednjivanja, tzv. „peak hold averaging”, dobija se rezultujući frekventni spektar, koji instrument skladišti u memoriju. Nakon prebacivanja snimljenih podataka iz instrumenta u računar, ovi se dalje analiziraju softverom ASCENT 2007+ [29], razvijenim za obradu i analize vibracionih snimaka. Parametri instrumenta pri merenju dati su u Tabeli 5.2.

Tabela 5.2: Podešavanja na instrumentu pri određivanju sopstvenih frekvencija modela

Domain:	Frequency	Sensor Type:	Accelerometer
Window:	Hanning	Sensor sensitivity:	100 mV/g
Trigger:	Internal Free run	Velocity unit:	mm/s
Spectral lines:	800	Amplitude Type:	rms
Frequency unit:	Hz	Average Type:	Peak hold
Fmin:	1 Hz	No. of Averages:	4
Fmax:	100 Hz	Amplitude Scale:	Linear

Za položaj pretvarača, birane su tačke A-1 i A-2 na gornjem kraju eksperimentalnog modela (vidi *Sliku 5.7*). Pretvarači u ovoj poziciji pobuđeni su pri najniža tri tona modela, a sačuvana je i simetričnost modela. Pretvarači su za model pričvršćeni vijcima M5. Jedan pretvarač (A-1) dovoljan je za identifikaciju sopstvenih frekvencija. Drugi je korišćen samo za verifikaciju.



*Slika 5.7: Pozicija pretvarača i pravac pobuđivanja na eksperimentalnom modelu*

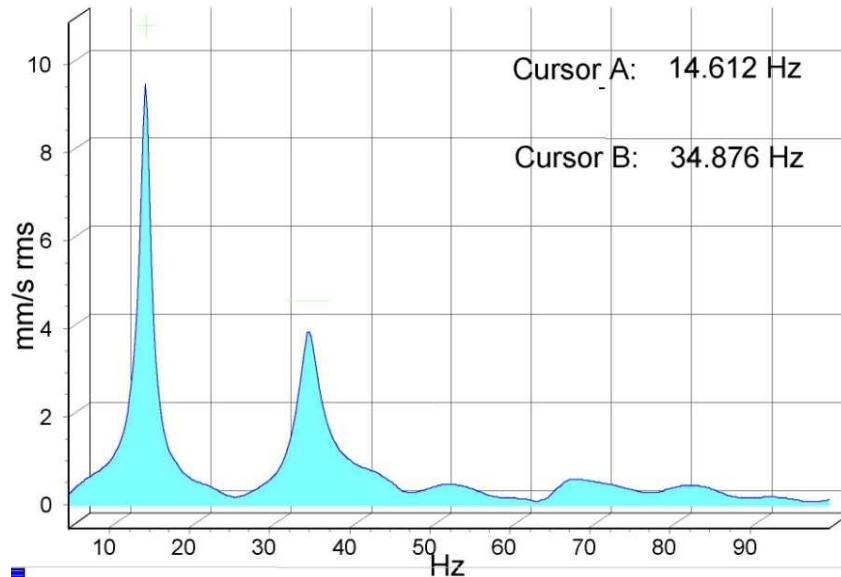
Mesta i pravci udaranja eksperimentalnog modela čekićem takođe su prikazani na *Slici 5.7*. B-1 pobuđuje prvi i treći ton, pri čemu nastaju spregnute vibracije  $X-\Phi$ . B-2 pobuđuje vibracije u pravcu  $Y$  ose što odgovara drugom tonu. Merenje je prikazano na *Slici 5.8*.



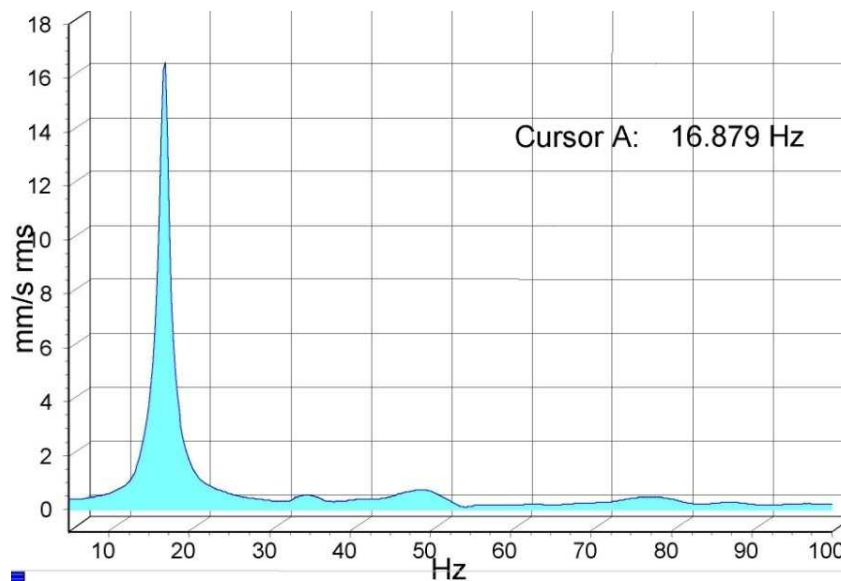
*Slika 5.8: Pobuđivanje modela u pravcu B-2*



Sopstvene frekvencije modela odgovaraju mestima vrhova na frekventnim spektrima. Dati vrhovi i pripadajuće frekvencije lako se određuju pomoću softvera ASCENT 2007+. Snimljeni frekventni spektri sa eksperimentalnog modela prikazani su na *Slici 5.9* i na *Slici 5.10*. Na ovim spektrima, kursorima su naznačeni vrhovi i pripadajuće frekvencije.



*Slika 5.9: Frekventni spektar modela, pri pobuđivanju B-1*



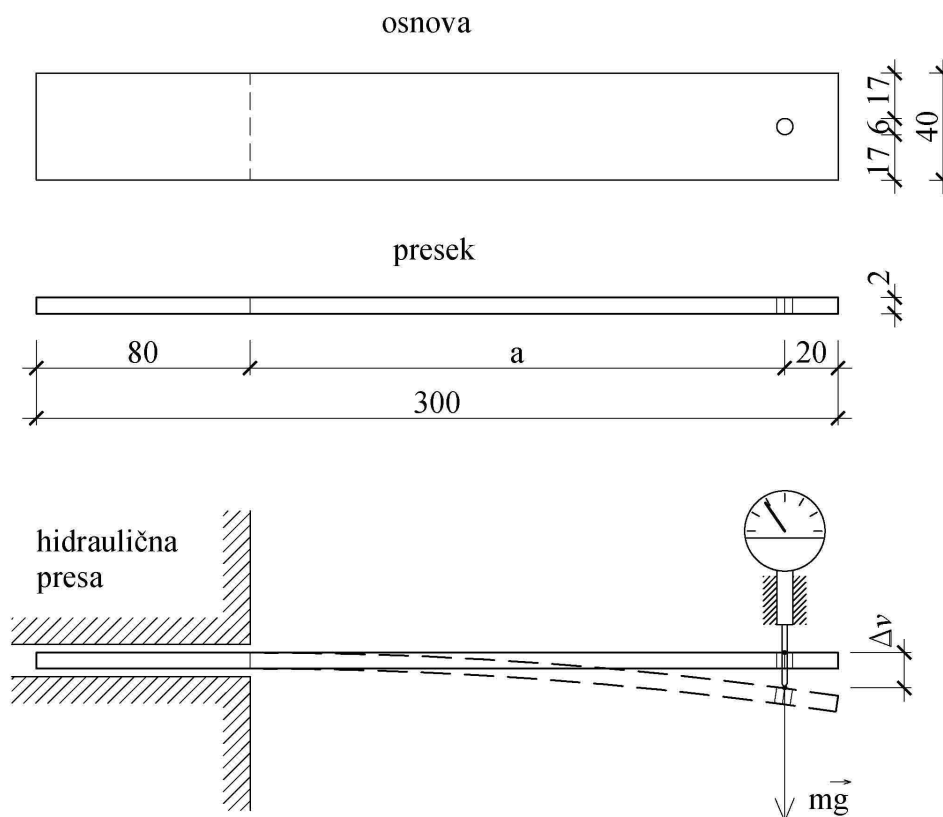
*Slika 5.10: Frekventni spektar modela, pri pobuđivanju B-2*

Navedeni način za određivanje sopstvene frekvencije dovoljno je pouzdan za ovu vrstu modela. Iako je proučavanje oblika tona van obima ovog rada, kombinacija eksperimentalnih testova i numeričkih rezultata, prikazanih u nastavku, omogućava identifikaciju oblika tona i odgovarajuće sopstvene frekvencije (prema [30] i [31]).

## 5.2. Numerička analiza modela

### Karakteristike eksperimentalnog modela

Pri numeričkoj analizi, materijal eksperimentalnog modela smatra se homogenim, izotropnim i idealno elastičnim. Od fizičkih karakteristika, moduo elastičnosti pleksiglas ploča određen je eksperimentalno. S tim ciljem, napravljene su tri epruvete (oznake *EPR-1*, *EPR-2* i *EPR-3*), dimenzija  $40 \times 6 \times 300$  mm, sa rupom od 6 mm, prema *Slici 5.11*. Jedan kraj epruvete uklješten je u hidrauličnoj presi tako da je dobijena konzola dužine 220 mm. Sila pritiska u hidrauličnoj presi prilikom ispitivanja iznosila je 15 kN. Konzola je opterećena preko rupe na slobodnom kraju, težinskom silom tega poznate mase. Pričvršćivanje tega izvedeno je pomoću tankog najlona (Damyl-a). Ugib  $\Delta v$  na mestu unošenja sila meren je digitalnim mernim satom. Kalibracioni sertifikat dat je u prilogu (Prilog-6). Opterećenje je vršeno u tri opsega, u granicama elastičnih deformacija.



**Slika 5.11:** Prikaz epruvete i shema merenja za određivanje modula elastičnosti pleksiglas ploča

Podaci o merenju i mernoj opremi:

- datum izvršenja merenja 11. mart 2014. god;
- mesto: laboratorija za građevinske materijale Građevinskog fakulteta u Subotici;

- temperatura ambijenta prilikom merenja 21 °C ;
- hidraulična presa oznake T250;
- najlon DAMYL mase 0.6 g;
- etalonirani cilindrični teg tačnosti M1 mase: 50 g, 100 g i 200 g;
- etalonirani digitalni merni sat tačnosti 0.001 mm.

Moduo elastičnosti dobijen je pomoću merenja ugiba nastalog pri dejstvu težinske sile:

$$E = \frac{mg \cdot a^3}{3I \cdot \Delta v} \quad (5.1)$$

gde je:

$m$	[g]	masa tega i najlona,
$g = 9807$	$\left[ \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \right]$	gravitaciono ubrzanje,
$a = 200$	[mm]	odstojanje sile od uklještenja,
$I = \frac{40 \cdot 6^3}{12} = 720$	[mm <sup>4</sup> ]	moment inercije površine poprečnog preseka epruvete,
$\Delta v$	[mm]	(mereni) ugib napadne tačke sile.

Uvrštavanjem navedenih vrednosti u jednačinu (5.1), dobija se:

$$E = 36.32 \frac{m}{\Delta v} \cdot 10^6 \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

Rezultati merenja i proračuna dati su u Tabeli 5.3.

Tabela 5.3: Rezultati merenja i proračuna

r.b. merenja	$m$	EPR-1		EPR-2		EPR-3	
		$\Delta v$	$E$	$\Delta v$	$E$	$\Delta v$	$E$
	[g]	[mm]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[mm]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[mm]	[N/mm <sup>2</sup> ]
1.	50.6	0.605	3036 10 <sup>3</sup>	0.614	2994 10 <sup>3</sup>	0.607	3029 10 <sup>3</sup>
2.	100.6	1.207	3028 10 <sup>3</sup>	1.223	2988 10 <sup>3</sup>	1.208	3024 10 <sup>3</sup>
3.	200.6	2.409	3024 10 <sup>3</sup>	2.452	2972 10 <sup>3</sup>	2.417	3015 10 <sup>3</sup>
Prosečna vrednost			3029 10 <sup>3</sup>		2984 10 <sup>3</sup>		3022 10 <sup>3</sup>
Ukupna prosečna vrednost		3012.2 10 <sup>3</sup> N/mm <sup>2</sup>					

Za moduo elastičnosti pleksiglas ploča, usvaja se:  $E=3000 \cdot 10^3 \text{N/mm}^2$ .

Ostale fizičke karakteristike preuzete su sa vebajta proizvođača „Evonik” [32] i glase:

$$\nu=0.37,$$

$$G=1095 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \text{ i}$$

$$\rho=1.190 \cdot 10^6 \text{ kg/mm}^3.$$

Sa ciljem da rezultati proračuna što bolje odgovaraju rezultatima ispitivanja na eksperimentalnom modelu, masa poprečne grede su uzete u obzir tokom numeričke analize. Karakteristike za proračun inercijalnih sila u čvorovima su:

$$X_{\overline{CD}}=X_{\overline{CD},15}=0 \text{ mm},$$

$$M=0.3916 \text{ kg}, M_{15}=0.2894 \text{ kg},$$

$$Y_{\overline{CD}}=-108.5 \text{ mm}, Y_{\overline{CD},15}=-110.1 \text{ mm},$$

$$J_D=8.671 \cdot 10^6 \text{ kgmm}^2 \text{ i } J_{D,15}=7.115 \cdot 10^6 \text{ kgm}^2.$$

Ukupna masa dva pretvarača zajedno sa zavrtnjem i konektorom iznosi  $2 \cdot 85 \text{ g}=170 \text{ g}$ , što čini 58.8% od redukovane mase čvora 15. Ova dodatna masa je takođe uzeta u obzir prilikom proračuna.

Karakteristike poprečnih greda su:

$$I=364.5 \text{ mm}^4, A_g=54 \text{ mm}^2, \beta=1.2, l=60 \text{ mm}, d=166.48 \text{ mm}, A=11664 \text{ mm}^2, \alpha=0.074 \text{ i}$$

$$R^{gr}=30.782 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^3.$$

Karakteristika međuspratnih ploča je:

$$R^{pl}=1.1805 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^3.$$

Karakteristike jezgra su:

$$I_{XX}=4.93474 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

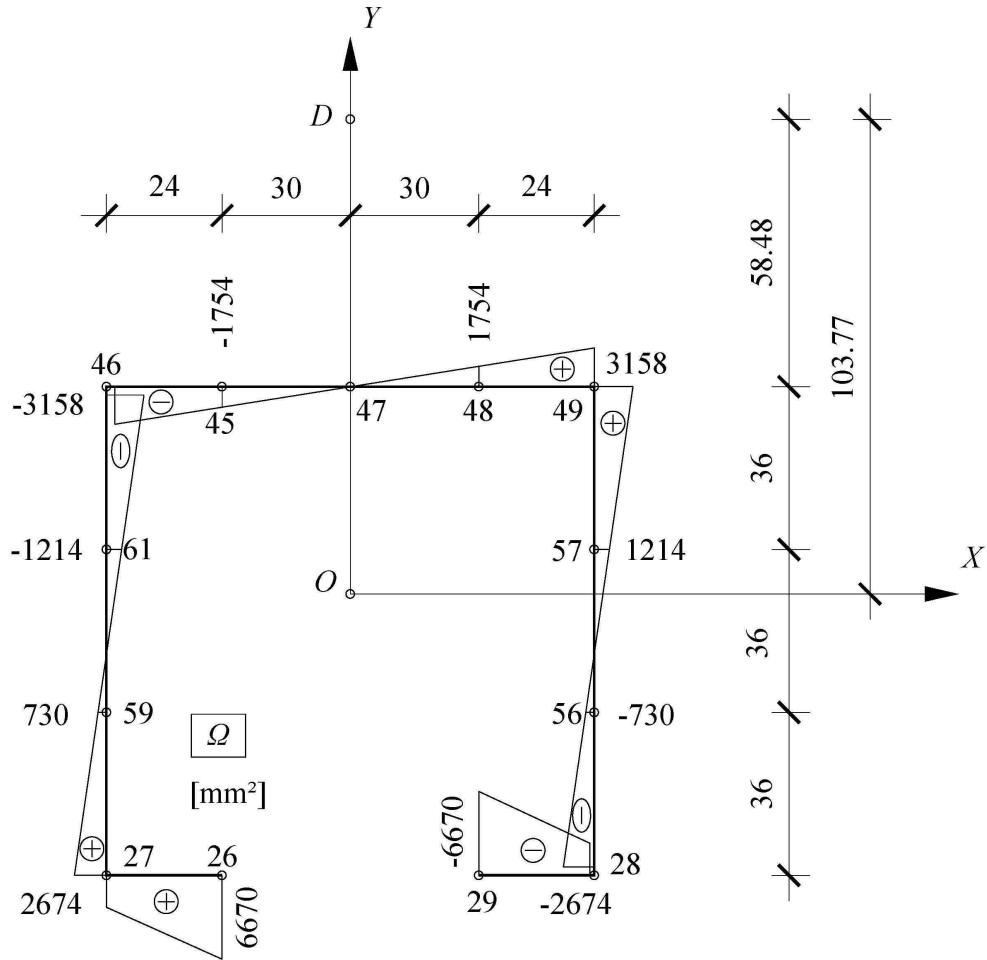
$$I_{YY}=3.82258 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_{\Omega\Omega}=12.6280 \cdot 10^9 \text{ mm}^6 \text{ i}$$

$$K=26.7840 \cdot 10^3 \text{ mm}^4.$$

Dijagram normirane sektorske koordinate poprečnog preseka jezgra je prikazan na *Slici 5.12*, a vrednosti i nagibi normirane sektorske koordinate u čvornim tačkama jezgra su dati u *Tabeli 5.4*.





Slika 5.12: Dijagram normirane sektorske koordinate:  $\Omega$  [mm<sup>2</sup>]

Tabela 5.4: Vrednosti i nagibi normirane sektorske koordinate u čvornim tačkama jezgra  $P_i$

$P_i$	$\Omega_i$	$\theta_x = \frac{d}{dY}\Omega_i$	$\theta_y = -\frac{d}{dX}\Omega_i$
Text	[mm <sup>2</sup> ]	[Radians]	[Radians]
26	6670	0	-166.5
27	2674	-54	-166.5
28	-2674	54	-166.5
29	-6670	0	-166.5
45	-1754	0	-58.5
46	-3158	-54	-58.5
47	0	0	-58.5
48	1754	0	-58.5
49	3158	54	-58.5
56	-730	54	0
57	1214	54	0
59	730	-54	0
61	-1214	-54	0

## TWBEIG analiza

Za analizu eksperimentalnog modela, računarski program TWBEIG modifikovan je u pogledu fizičkih karakteristika materijala, kao i u pogledu geometrijskih karakteristika modela. Sem toga, prilagođen je da, pri analizi, još uzima u obzir masu poprečnih greda, kao i masu pretvarača. U tu svrhu, datoteka je proširena ulaznim podacima pretvarača (sonde), a to su: masa pretvarača (*MS*), odstojanje pretvarača od centra smicanja u pravcu *Y* ose (*YS*) i sopstveni moment inercije pretvarača u odnosu na vertikalnu osu (*IS*). Novi oblik datoteke sa ulaznim podacima (twb.inp) za analizu eksperimentalnog modela je:

*** PLEXIGLAS CORE INPUT DATA (N,m) 15*0.077m ***	
Modulus of elasticity (N/m <sup>2</sup> ): E	3.000E+9
Shear modulus (N/m <sup>2</sup> ): G	1.095E+9
Mass density (kg/m <sup>3</sup> ): RO	1.190E+3
Upper limit of frequency range (rad/s): WMAX	0.480E+3
Frequency step (rad/s): DW	0.005
Number of segment's type (1): NST	1
Probe mass [kg]: MS	0.170
Distance [m]: YS	0.05548
Inert.mom. [kgm <sup>2</sup> ): IS	0.696E-3
...	

Tok proračuna i oblik datoteke sa izlaznim podacima samo se neznatno menjaju, zbog čega oni ovde nisu prikazani posebno.

## MKE analiza

Pri analizi eksperimentalnog modela sa aplikacijom SAP 2000, uzeta je u obzir masa poprečne grede. Masa pretvarača dodaje se SAP 2000 modelu u obliku „Joint Mass” u čvorovima, gde su pretvarači pričvršćeni.

### 5.3. Rezultati analize

Rezultati eksperimentalne i numeričke analize dobijeni računarskim programom TWBEIG i aplikacijom SAP 2000 su dati i upoređeni u Tabeli 5.5.

Tabela 5.5: Prikaz i upoređenje sopstvenih frekvencija modela *PLX-1*

Sopstvene frekvencije		(1) TEST	(2) TWBEIG	$\frac{(2)-(1)}{(1)}$	(3) SAP 2000	$\frac{(3)-(1)}{(1)}$
<i>j</i>	oblik	freq. [Hz]	frekv. [Hz]	(%)	frekv. [Hz]	(%)
1.	<i>X-Φ</i>	14.61	14.98	2.55	15.22	4.14
2.	<i>Y</i>	16.88	17.32	2.59	18.00	6.63
3.	<i>X-Φ</i>	34.88	36.81	5.53	33.14	-5.00

Vrednosti sopstvenih frekvencija pokazuju dobro slaganje.

## Analiza uticaja greda i ploča

Radi utvrđivanja uticaja poprečnih greda na dinamičke karakteristike jezgra, analizirana su četiri eksperimentalna modela:

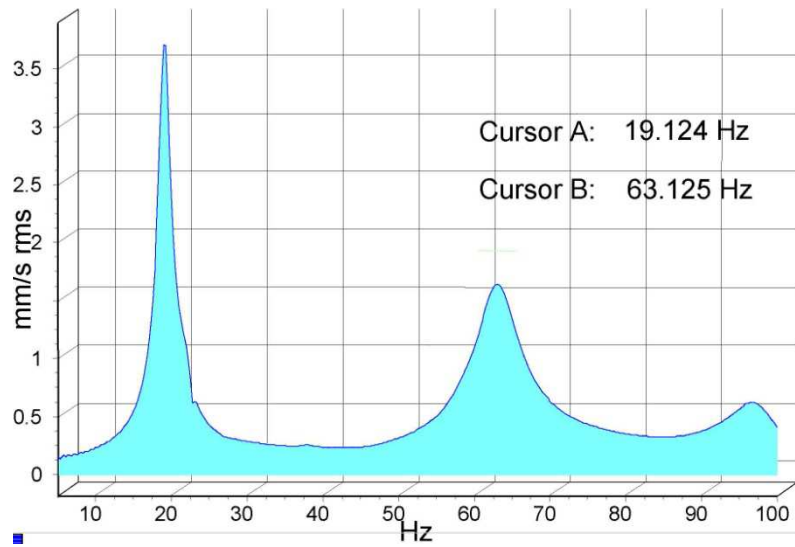
- model sa gredama i pločama – oznaka je *PLX-1*;
- model sa gredama bez ploča – oznaka je *PLX-2*;
- model sa pločama bez greda – oznaka je *PLX-3*;
- model bez greda i ploča – oznaka je *PLX-4*.

Kod eksperimentalnih modela, karakteristike za proračun inercijalnih sila se razlikuju u zavisnosti od toga da li je model bez greda i/ili bez ploča. U Tabeli 5.6 prikazane su karakteristike za proračun inercijalnih sila kod navedenih eksperimentalnih modela.

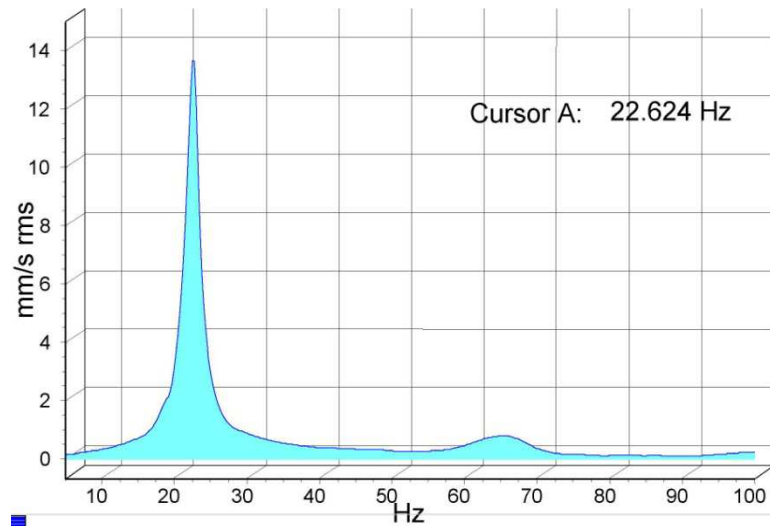
Tabela 5.6: Karakteristike za proračun inercijalnih sila

Oznaka modela	Čvor	<i>M</i>	<i>X<sub>DC</sub></i>	<i>Y<sub>DC</sub></i>	<i>J<sub>D</sub></i>
		[kg]	[mm]	[mm]	[kgmm <sup>2</sup> ]
<i>PLX-1</i>	1-14	0.3916	0.0	-108.5	8.671·10 <sup>6</sup>
	15	0.2894	0.0	-110.1	7.115·10 <sup>6</sup>
<i>PLX-2</i>	1-14	0.2084	0.0	-104.9	3.212·10 <sup>6</sup>
	15	0.1061	0.0	-106.1	1.653·10 <sup>6</sup>
<i>PLX-3</i>	1-14	0.3878	0.0	-107.9	8.576·10 <sup>6</sup>
	15	0.2855	0.0	-109.4	7.019·10 <sup>6</sup>
<i>PLX-4</i>	1-14	0.2045	0.0	-103.8	3.119·10 <sup>6</sup>
	15	0.1023	0.0	-103.8	1.559·10 <sup>6</sup>

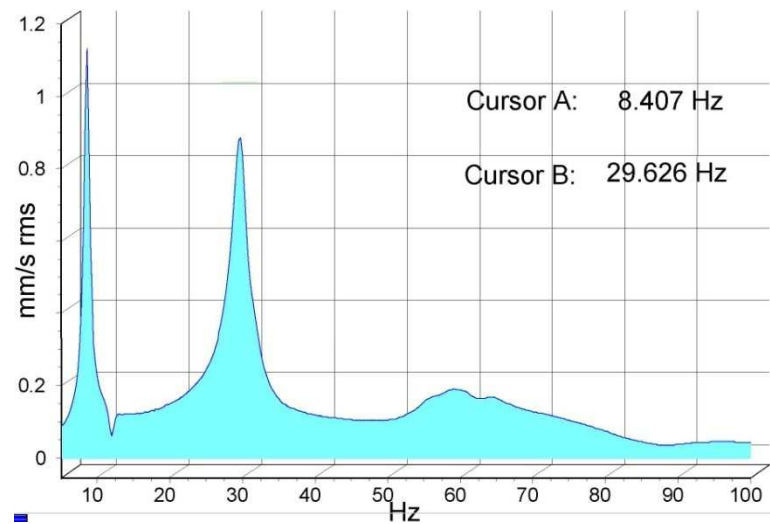
Snimljeni frekventni spektri sa navedenih eksperimentalnih modela prikazani su na *Slikama 5.13 – 5.18* u nastavku.



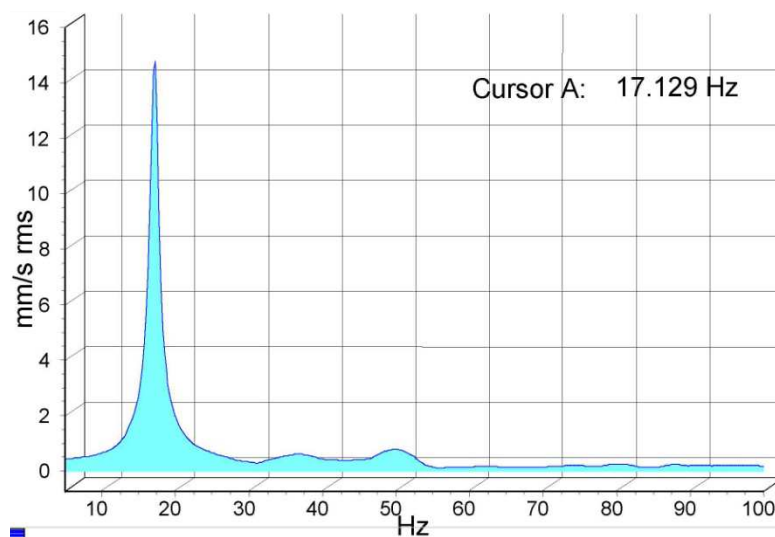
Slika 5.13: Frekventni spektar modela PLX-2, pri pobuđivanju B-1



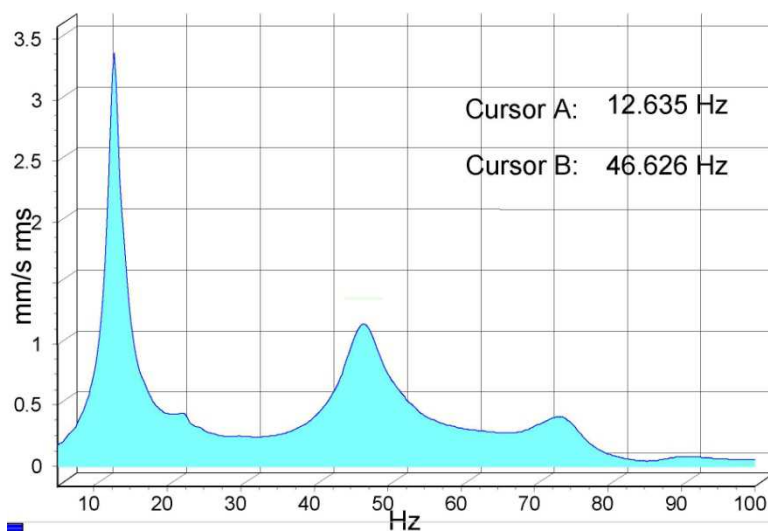
Slika 5.14: Frekventni spektar modela PLX-2, pri pobuđivanju B-2



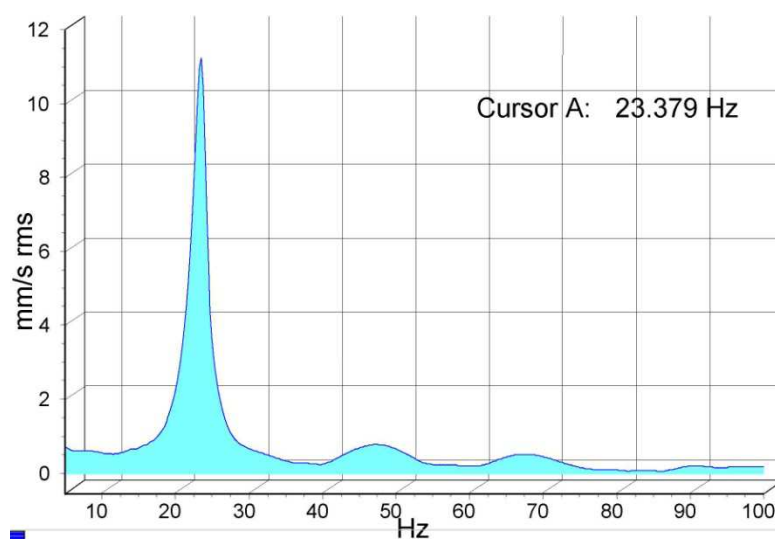
Slika 5.15: Frekventni spektar modela PLX-3, pri pobuđivanju B-1



Slika 5.16: Frekventni spektar modela PLX-3, pri pobuđivanju B-2



Slika 5.17: Frekventni spektar modela PLX-4, pri pobuđivanju B-1



Slika 5.18: Frekventni spektar modela PLX-4, pri pobuđivanju B-2

U Tabelama 5.7, 5.8 i 5.9 su prikazani i upoređeni rezultati eksperimentalne i numeričke analize dobijeni pomoću računarskog programa TWBEIG i aplikacije SAP 2000 za sva tri modela.

Tabela 5.7: Prikaz i upoređenje sopstvenih frekvencija modela *PLX-2*

Sopstvene frekvencije		(1) TEST	(2) TWBEIG	$\frac{(2)-(1)}{(1)}$	(3) SAP 2000	$\frac{(3)-(1)}{(1)}$
<i>j</i>	oblik	freq. [Hz]	frekv. [Hz]	(%)	frekv. [Hz]	(%)
1.	$X-\Phi$	19.12	19.39	1.41	20.59	7.69
2.	$Y$	22.62	23.20	2.53	24.41	7.91
3.	$X-\Phi$	63.13	65.45	3.68	59.12	-6.35

Tabela 5.8: Prikaz i upoređenje sopstvenih frekvencija modela *PLX-3*

Sopstvene frekvencije		(1) TEST	(2) TWBEIG	$\frac{(2)-(1)}{(1)}$	(3) SAP 2000	$\frac{(3)-(1)}{(1)}$
<i>j</i>	oblik	freq. [Hz]	frekv. [Hz]	(%)	frekv. [Hz]	(%)
1.	$X-\Phi$	8.41	8.52	1.38	8.65	2.86
2.	$Y$	17.13	17.62	2.85	18.05	5.37
3.	$X-\Phi$	29.63	30.81	4.00	29.06	-1.45

Tabela 5.9: Prikaz i upoređenje sopstvenih frekvencija modela *PLX-4*

Sopstvene frekvencije		(1) TEST	(2) TWBEIG	$\frac{(2)-(1)}{(1)}$	(3) SAP 2000	$\frac{(3)-(1)}{(1)}$
<i>j</i>	oblik	freq. [Hz]	frekv. [Hz]	(%)	frekv. [Hz]	(%)
1.	$X-\Phi$	12.64	13.32	5.38	13.10	3.64
2.	$Y$	23.38	24.69	5.58	24.50	4.79
3.	$X-\Phi$	46.63	50.97	9.31	49.24	5.60

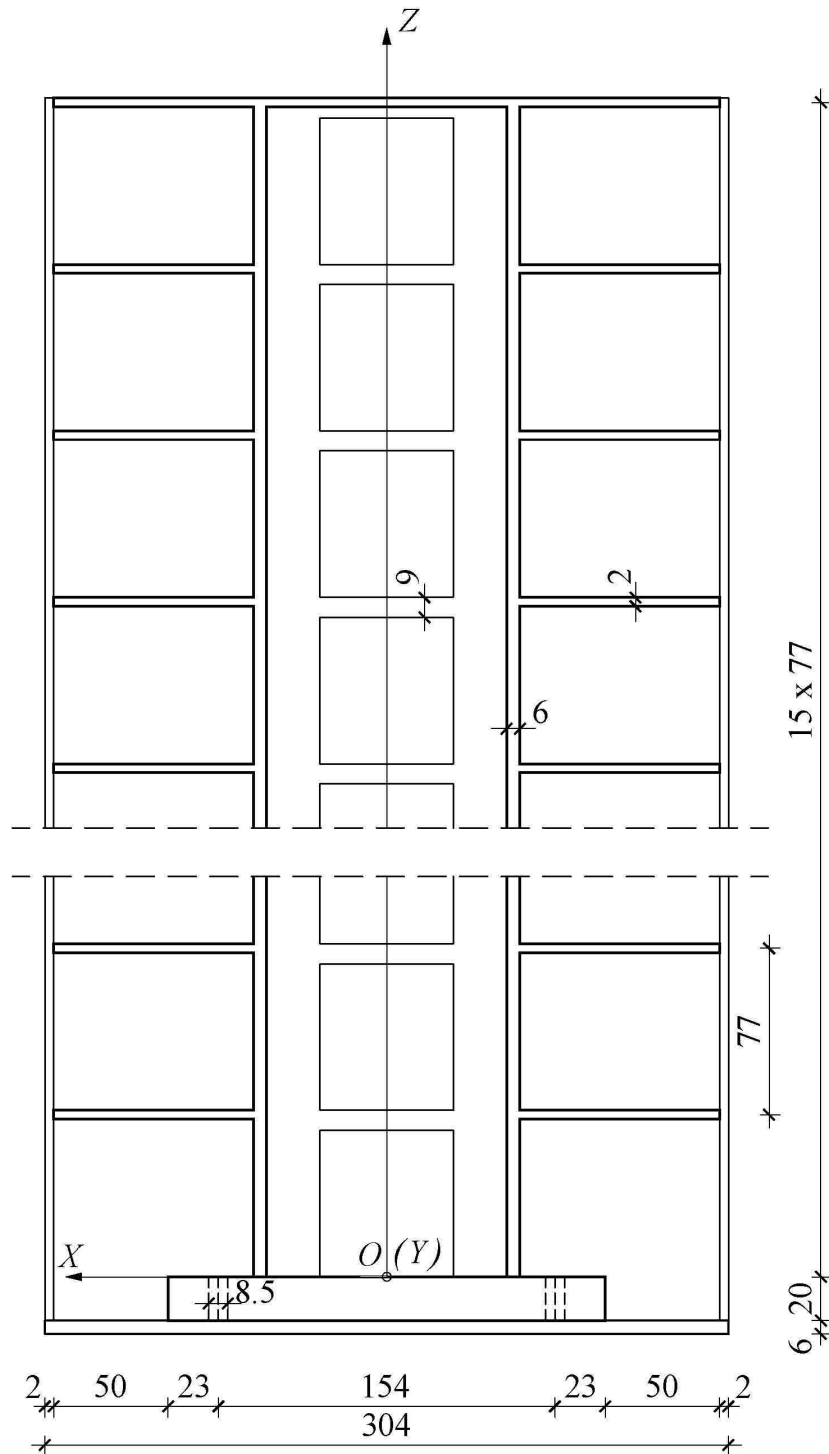
Vrednosti sopstvenih frekvencija pokazuju dobro slaganje. Najveće odstupanje primećeno je kod modela *PLX-2* i *PLX-4* koji su bez ploča. Kod ovih modela, nije obezbeđena nedeformabilnost poprečnog preseka jezgra kako je to pretpostavljeno teorijom Vlasova.

Uticaj krutosti greda na sopstvene frekvencije dobija se upoređivanjem rezultata eksperimentalne analize modela *PLX-1* sa modelom *PLX-3*. Rezultati analize su prikazani u Tabeli 5.10.

Uticaj krutosti međuspratnih ploča na sopstvene frekvencije modela u principu bi se mogao dobiti upoređivanjem rezultata eksperimenata modela sa i bez ploča, ili u prisustvu ili bez prisustva grede. Međutim, analiza modela bez ploča nema praktičnog značaja, budući da su kod stvarnih objekata ploče uvek prisutne.



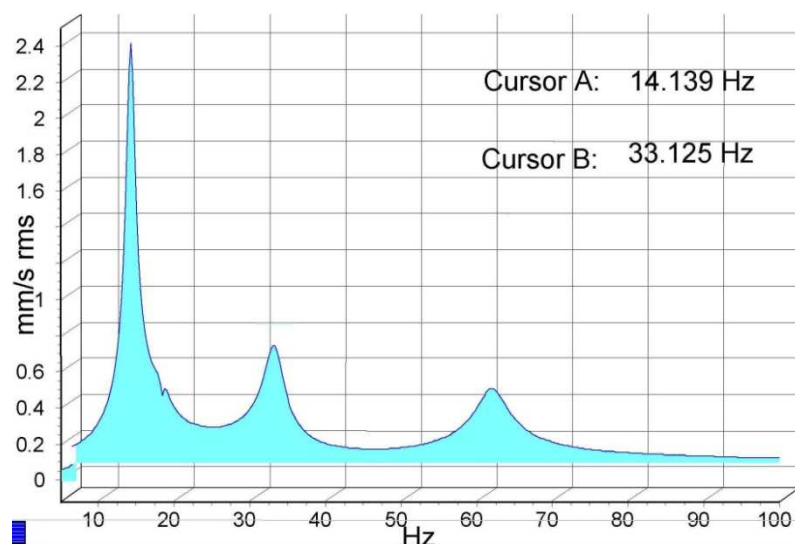
Kod ovih eksperimentalnih modela, ploče su na spoljašnjoj ivici povezane (zalepljene) sa osam komada vertikalnih stubova izrađenih od pleksiglas ploča debljine 2 mm, a širine 20 mm. Na donjem kraju, navedeni stubovi zalepljeni su na dodatnu pleksiglas ploču debljine 6 mm i dimenzija 304×304mm. Geometrijski podaci modela *PLX-1(R)* prikazani su na *Slici 5.19* i *Slici 5.20*.



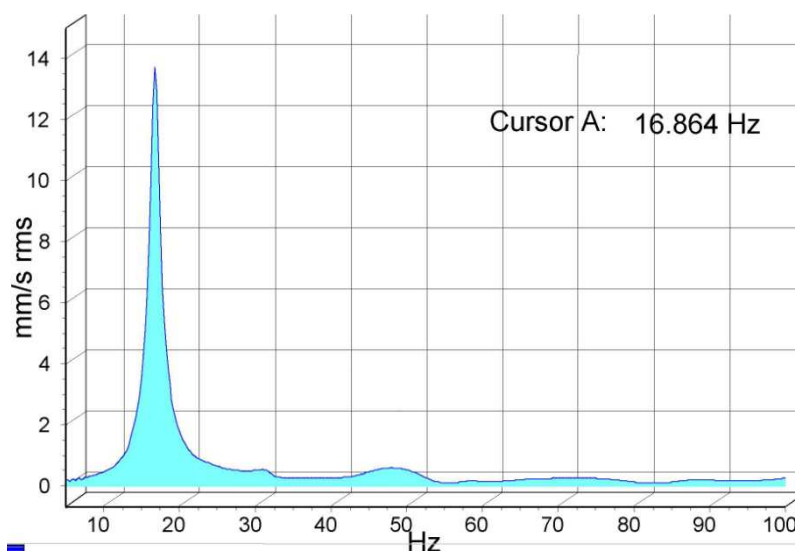
**Slika 5.20:** Podužni presek A-A eksperimentalnog modela *PLX-1(R)*

Prikaz snimljenih frekventnih spektara sa eksperimentalnih modela dat je na *Slikama 5.21* - *5.24* u nastavku.

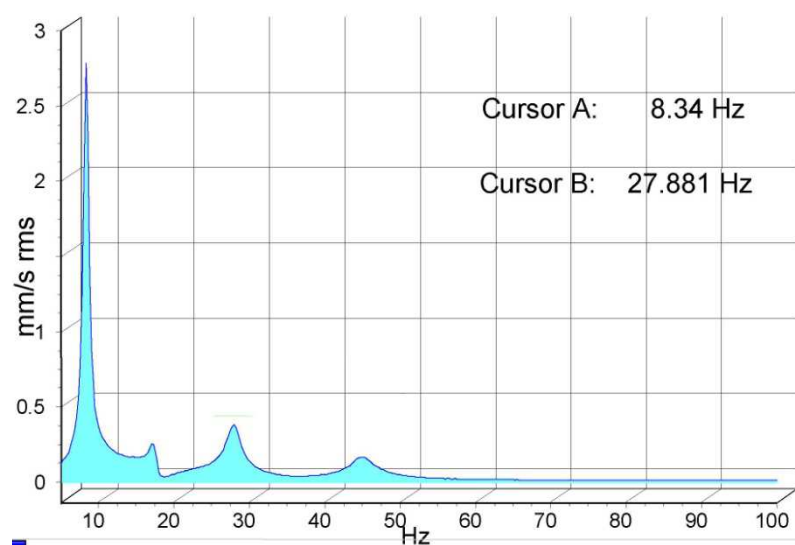




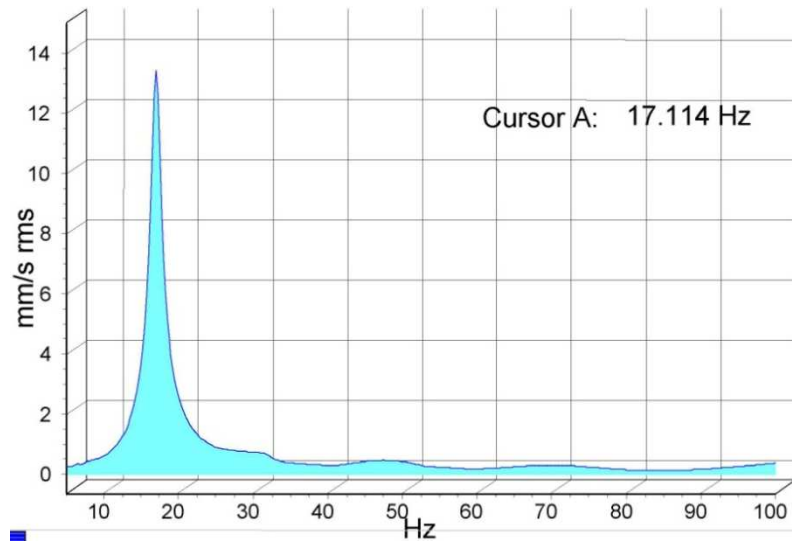
Slika 5.21: Frekventni spektar modela PLX-1(R), pri pobuđivanju B-1



Slika 5.22: Frekventni spektar modela PLX-1(R), pri pobuđivanju B-2



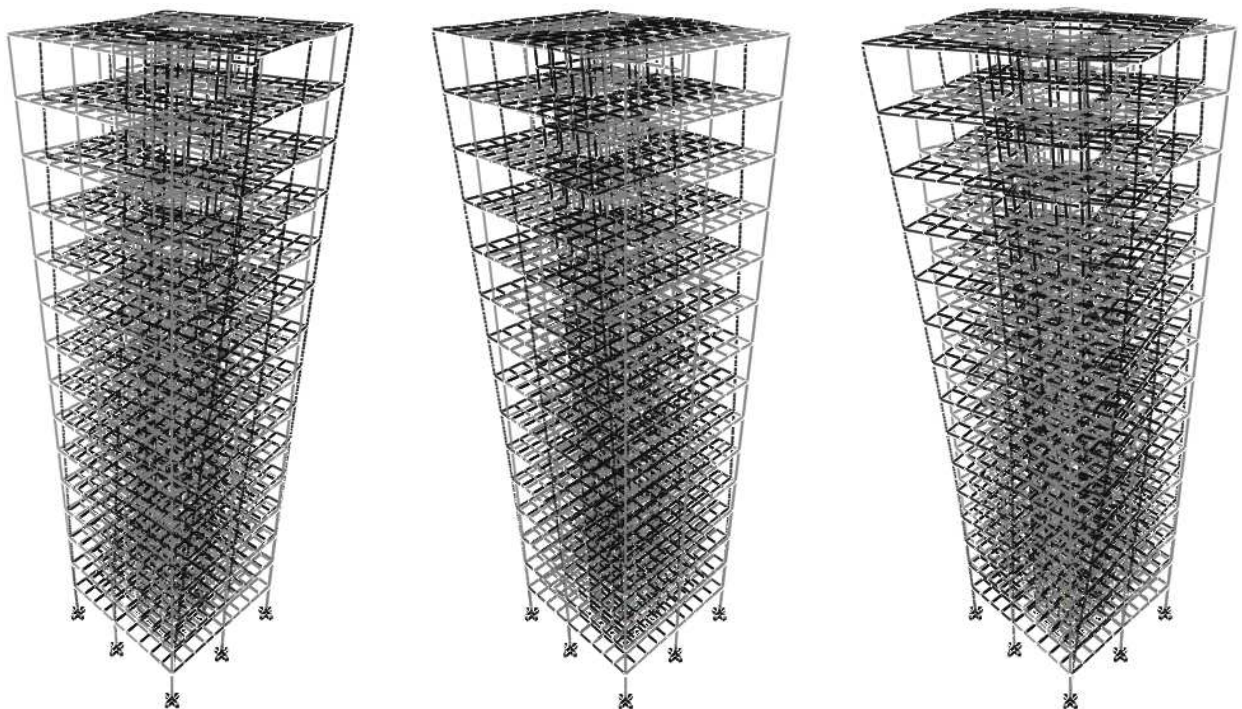
Slika 5.23: Frekventni spektar modela PLX-3(R), pri pobuđivanju B-1



Slika 5.24: Frekventni spektar modela PLX-3(R), pri pobuđivanju B-2

Numerička analiza je urađena samo aplikacijom SAP 2000. Vertikalni stubovi modelirani su sa „Frame Elements of Rectangular shape” elementima. Na nivou temeljne ploče u čvornim tačkama su uklješteni, a na nivoima ploča su međusobno kruto vezani. Slobodna oslanjanja ploče na vertikalne stubove su ostvarena pomoću kratkih grednih elemenata (kao kod modela *BET-1* u odeljku 4.2). Ovi gredni elementi su na jednom kraju kruto vezani za čvorne tačke stuba. Drugi krajevi su vezani za odgovarajuće čvorne tačke ploče tako da ne prenose moment savijanja upravno na pravac spoljašnje ivice ploče. Pri proračunu, masa stubova je uzeta u obzir.

Tri najniža tona modela *PLX-1(R)* prikazana su na *Slici 5.25*.



Slika 5.25: Prvi, drugi i treći ton modela *PLX-1(R)*

Uticaj oslanjanja po spoljašnjoj ivici ploče na sopstvene frekvencije dobija se upoređivanjem rezultata analize modela  $BET-1(R)$  i  $BET-3(R)$  sa modelima  $BET-1$  i  $BET-3$ . Rezultati eksperimentalne i numeričke analize i njihovo upoređivanje su prikazani u Tabeli 5.11 i 5.12.

Tabela 5.11: Rezultati uporedne analize načina oslanjanja ploče u prisustvu grede

Sopstvene frekvencije		TEST			SAP 2000		
		(1) $PLX-1(R)$	(2) $PLX-1$	$\frac{(1)-(2)}{(2)}$	(3) $PLX-1(R)$	(4) $PLX-1$	$\frac{(3)-(4)}{(4)}$
$j$	oblik	[Hz]	[Hz]	(%)	[Hz]	[Hz]	(%)
1.	$X-\Phi$	14.14	14.61	-3.22	14.79	15.22	-2.83
2.	$Y$	16.86	16.88	-0.12	17.91	18.00	-0.50
3.	$X-\Phi$	33.13	34.88	-5.02	31.42	33.13	-5.16

Tabela 5.12: Rezultati uporedne analize načina oslanjanja ploče bez prisustva grede

Sopstvene frekvencije		TEST			SAP 2000		
		(1) $PLX-3(R)$	(2) $PLX-3$	$\frac{(1)-(2)}{(2)}$	(3) $PLX-3(R)$	(4) $PLX-3$	$\frac{(3)-(4)}{(4)}$
$j$	oblik	[Hz]	[Hz]	(%)	[Hz]	[Hz]	(%)
1.	$X-\Phi$	8.34	8.41	-0.83	8.53	8.65	-1.39
2.	$Y$	17.11	17.13	-0.12	17.96	18.05	-0.50
3.	$X-\Phi$	27.88	29.63	-5.91	27.80	29.06	-4.34

Analizom rezultata u Tabeli 5.12 i u Tabeli 5.13, uočava se sledeće:

- (a) Ovakav način oslanjanja ploča izaziva samo malu promenu sve tri sopstvene frekvencije modela. Smanjenje nastaje jer masa dodatnih stubova ima veći uticaj na inercijalne sile nego njihova savojna krutost (i oslanjanje ploča) na ukupnu krutost sistema.
- (b) Oslanjanje ploča jednako utiče na drugu sopstvenu frekvenciju bez obzira na prisustvo grede, zato što se grede ne deformišu pri drugom tonu.

## **6. ZAKLJUČCI**

U okviru ovog rada, prikazana su numerička, kao i eksperimentalna istraživanja dinamičkih karakteristika jezgra visokih zgrada. Pri analizi, jezgro se posmatra kao tankozidni nosač otvorenog poprečnog preseka. Rad se sastoji iz tri dela:

- razvijanje numeričkog postupka za analizu dinamičkih karakteristika jezgra visokih zgrada;
- primena prikazanog postupka na numeričkom primeru;
- eksperimentalna istraživanja radi provere tačnosti prikazanog postupka.

U radu je posebna pažnja posvećena istraživanju uticaja poprečnih greda i međuspratnih ploča na dinamičke karakteristike jezgra.

Numerički postupak bazira se na Vlasovljevoj teoriji tankozidnih nosača, kao i na metodi prenosnih matrica. U računskom modelu, jezgro u vertikalnom pravcu podeljeno je na polja i čvorove. Čvorovi nosača nalaze se na osi smicanja tankozidnog nosača u nivoima spratova zgrade. Mase su redukovane u čvorove. Krutost poprečnih greda i međuspratnih ploča, koje se nalaze u nivoima spratova, uzeta je u obzir pri formiranju računskog modela.

Prikazani numerički postupak primenjen je na numeričkom primeru petnaestospratnice, koja je ukružena samo jednim jezgrom. Isti primer koristili su i brojni drugi autori za prikazivanje primene svojih istraživanja. Razvijen je računarski program TWBEIG, primenom Visual Fortran programskog jezika, radi određivanja sopstvenih frekvencija jezgra. Rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim aplikacijom SAP 2000. Na datom numeričkom primeru, urađena su sledeća istraživanja:

- analize nosača sa i bez krutosti poprečnih greda, odnosno međuspratnih ploča, u cilju istraživanja njihovog uticaja na dinamičke karakteristike nosača;
- parametarske analize u cilju istraživanja uticaja visine poprečnih greda, debljine međuspratnih ploča i spratne visine;
- komparativna analiza uticaja oslanjanja međuspratnih ploča duž spoljne ivice.

Radi eksperimentalne provere tačnosti predložene metode, izrađen je eksperimentalni model od pleksiglasa, srazmerno iste geometrije kao i osnovni numerički primer. Udarnim testom određene su prve tri sopstvene frekvencije modela. Te frekvencije takođe su određene primenom računarskog programa TWBEIG, kao i aplikacije SAP 2000. Dobijeni rezultati međusobno su upoređeni. U cilju dalje analize, izrađeni su još sledeći eksperimentalni modeli:

- sa gredama bez ploča;
- sa pločama bez grede;
- bez greda i ploča.

Na datim modelima, izvršena je analiza uticaja poprečnih greda na dinamičke karakteristike modela sa i bez prisustva ploča. Rezultati eksperimenata upoređeni su sa rezultatima TWBEIG i SAP 2000.

Na kraju su još konstruisani modeli čije su ploče po spoljašnjoj konturi delimično oslonjene na stubove. Pomoću navedenih modela, istražen je uticaj oslanjanja ploča po spoljašnjoj ivici u prisustvu greda i bez prisustva greda. Rezultati ispitivanja upoređeni su sa rezultatima SAP 2000.

Na osnovu dobijenih rezultata, kao i navedenih analiza, mogu da se donesu sledeći zaključci:

1. Predloženi numerički postupak nudi solidnu osnovu za formiranje računskog modela za određivanje sopstvenih frekvencija jezgra visokih zgrada. Osnovni parametri modela, koji opisuju strukturu i karakteristike primenjenog materijala, mogu biti lako prilagođeni aktuelnom primeru. Rešenje se dobija u jednostavnom obliku. Tačnost proračuna može se zadati proizvoljno. Relativno mali broj nepoznatih u prikazanom modelu obezbeđuje dobru kontrolu toka proračuna. Dobijeni rezultati mogu biti lako, brzo i pregledno prezentovani. Jednostavan unos parametara modela nudi mogućnost različitih uporednih i parametarskih analiza. Brze analize neophodne su za iznalaženje što ekonomičnijeg rešenja pri projektovanju. Predloženi postupak može biti korišćen i u fazi prethodne analize zgrade, kao i u fazi konačnog projektovanja [33].
2. Sopstvene frekvencije pleksiglas modela se mogu dovoljno tačno analizirati metodom prezentovanom u ovom radu [34].
3. Poprečne grede imaju, u odnosu na međuspratne ploče, mnogo veći uticaj na sopstvene frekvencije jezgra [33]. Uticaj ploča se može zanemariti čime se proračun znatno pojednostavljuje.
4. Povećavanje spratne visine izaziva smanjenje sopstvenih frekvencija.
5. Oslanjanje međuspratnih ploča po spoljašnjoj ivici samo neznatno utiče na sopstvene frekvencije [33]. Shodno tome, opravdano je zanemariti uticaj oslanjanja ploča pri dinamičkoj analizi.

Prikazanim numeričkim postupkom, baziranom na Vlasovljevoj teoriji tankozidnih nosača, zanemaren je uticaj klizanja usled smicanja i sprečene torzije. S obzirom na to da u nekim slučajevima uticaj klizanja može biti značajan, za buduća istraživanja planira se razvijanje numeričke metode koja uzima u obzir deformaciju klizanja. U zavisnosti od primenjene metode, računarski program TWBEIG će se dopuniti odgovarajućim modulima, zatim će se istraživanja proširiti i na analizu stabilnosti jezgra visokih zgrada.

U računskom modelu temelj i tlo su tretirani kao apsolutno kruti i nepomerljivi. S obzirom da su kod stvarnih objekata i temelj i tlo deformabilni, dalji pravac istraživanja će biti usmeren na analizu uticaja njihovih deformabilnosti na dinamičke karakteristike jezgra. U tom cilju računski model će se proširiti na sistem jezgro-temelj-tlo.

## LITERATURA

- [1] Heidebrecht, A.C., Smith, B.S. "Approximate analysis of open-section shear walls subject to torsional loading", *Journal of the structural division*, **99**, pp. 2355-2373, 1973
- [2] Liauw, T.C. "Torsion of multi-storey spatial core walls", *Proc. Instn. Civ. Engrs. Part 2*, **65**, pp. 601-609, 1978
- [3] Liauw, T.C., Luk, W.K. "Torsion of core walls of nonuniform section," *Journal of the Structural division*, **106**, pp. 1921-1931, 1980
- [4] Kuang, J.S., Chan, H.C. "Torsional Behaviour of Braced Thin-Walled Open Sections", *Thin-Walled Structures*, **6**, pp. 343-354, 1988
- [5] Pekau, O.A., Lin, L., Zielinski, Z.A. "Static and dynamic analysis of tall tube-in-tube structures by finite story method", *Engineering Structures*, **18(7)**, pp. 515-527, 1996
- [6] Prokić, A., Marjanov, M. "Uticaj torzije na jezgro visokih zgrada", *Izgradnja*, **56**, pp. 157-162, 2002
- [7] Smith, B.S., Taranath, B.S. "The analysis of tall core-supported structures subject to torsion", *Proc.-Inst. Civ. Eng.*, **53**, pp. 173-187, 1972
- [8] Mah, K., Smith, B.S. "Restraining action in thin-walled open section beams", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers (London)* **59** pp. 67-78, 1975
- [9] Rutenberg, A., Shatarkman, M., Eisenberger, M. "Torsional analysis methods for perforated cores", *Journal of Structural Engineering*, **112(6)**:, pp. 1207-1227, 1986
- [10] Mendis, P. "Warping analysis of concrete cores," *Struct. Design Tall Build.*, **10**, pp. 43-52, 2001
- [11] Smith, B.S., Coull, A. "Tall building structures: analysis and design", *Wiley*, New York, 1991
- [12] Vasquez, J., Riddell, R. "Thinn-walled core element for multistory buildings", *Journal of Structural Engineering*, **110(5)**, pp. 1021-1034, 1984
- [13] Ng, S.C., Kuang, J.S. "Coupled vibration of structural thin-walled cores," *Acta Mechanica Solida Sinica*, **13**, pp. 81-88, 2000
- [14] Kuang, J.S., Ng, S.C. "Coupled vibration of tall building structures," *Struct. Design Tall Spec. Build.*, **13**, pp. 291-303, 2004
- [15] Mehtaf, S.A., Tounsi, A. "Vibration characteristics of tall buildings braced by shear walls and thin-walled open-section structures," *Struct. Design Tall Spec. Build.*, **17**, pp. 203-316, 2008

- [16] Rafezy, B., Howson, W.P. "Coupled lateral-torsional frequencies of asymmetric, three-dimensional structures comprising shear-wall and core assemblies with stepwise variable cross-section," *Engineering Structures*, **31**, pp. 1903-1915, 2009
- [17] Kheyroddin, A., Abdollahzadeh, D., Mastali, M. "Improvement of open and semi-open core wall system in tall buildings by closing of the core section in the last story," *Int. J. Adv. Struct. Eng.*, **6(67)**, pp. 1-12, 2014
- [18] Zalka, K.A. "A simplified method for calculation of the natural frequencies of wall-frame buildings", *Engineering Structures*, **23(12)**, pp. 1544-1555, 2001
- [19] Zalka, K.A. "A simple method for the deflection analysis of tall wall-frame building structures under horizontal load," *Struct. Design Tall Spec. Build.*, **18(3)**, pp. 291-311, 2009
- [20] Zalka, K.A. "Maximum deflection of symmetric wall-frame buildings," *Period. Polytech. Civil Eng.*, **57(2)**, pp. 173-184, 2013
- [21] Zalka, K.A. "Maximum deflection of asymmetric wall-frame buildings under horizontal load," *Period. Polytech. Civil Eng.*, **58(4)**, pp. 387-396, 2014
- [22] Kollár, P. L. "Flexural-torsional vibration of open section composite beams with shear deformation, " *International Journal of Solids and Structures*, **38(42-43)**, pp. 7543-7558, 2001
- [23] Pluzsik, A., Kollár, P. L. "Effects of shear deformation and restrained warping on the displacements of composite beams," *Journal of reinforced plastics and composites*, **21(17)**, pp. 1517-1541, 2002
- [24] Potzta, G., Kollár, P. L. "Analysis of building structures by replacement sandwich beams," *International Journal of Solids and Structures*, **40(3)**, pp. 535-553, 2003
- [25] Prokić, A. "Matrična analiza tankozidnih konstrukcija", *Građevinski fakultet Subotica*, Subotica, 1999
- [26] Prokić, A. "Effect of bracing on linear free vibration characteristics of thin-walled beams with open cross section," *Journal of Engineering Mechanics*, **136(3)**, pp. 282-289, 2010
- [27] Ayyar, R.S., Pandya, B.N., Parthasarathy, G. "Analysis of multi-storeyed buildings of open section subjected to torsion," *Second International Meet: Structural Engineering Convention 2000*, pp. 1-11, 2000, Mumbai, India
- [28] VB 2000 Instrument reference guide, Commtest Instruments Ltd, Christchurch, New Zealand, 2006
- [29] Ascent software reference guide, Commtest Instruments Ltd, Christchurch, New Zealand, 2007
- [30] Ambrosini, D. "On free vibration of nonsymmetrical thin-walled beams," *Thin-Walled Structures*, **47**, pp. 629-636. 2009

- [31] Ambrosini, D. "Experimental validation of free vibrations from nonsymmetrical thin-walled beams," *Engineering Structures*, **32**, pp. 1324-1332. 2010
- [32] <http://www.plexiglas.net/product/plexiglas/Documents/PLEXIGLAS/211-1-PLEXIGLAS-GS-XT-en.pdf>
- [33] Varjú, Gy., Prokić, A. "The Influence of Lintel Beams and Floor Slabs on Natural Frequencies of the Tall Buildings Core - Numerical and Experimental Studies," *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, **59(4)**, pp. 511-520, 2015
- [34] Varju, Đ., Prokić, A. "Eksperimentalno određivanje sopstvenih frekvencija modela od pleksiglasa," *4. Međunarodne konferencije: Savremena dostignuća u građevinarstvu 2016*, pp. 211-219, 2016, UDK:624.072.2 : 001.891.5



## **PRILOZI**

- Prilog-1:**      **Prenosna matrica između čvora  $m-1$  i  $m$   $[A_m]$**
- Prilog-2:**      **Listing izvršnog programa: TWBEIG**
- Prilog-3:**      **Listing izlazne datoteke rezultata analize računskog modela *BET-0***
- Prilog-4:**      **Listing izlazne datoteke rezultata analize računskog modela *BET-1***
- Prilog-5:**      **Kalibracioni sertifikat pretvarača za merenje dinamičkog odziva: A-1**
- Kalibracioni sertifikat pretvarača za merenje dinamičkog odziva: A-2**
- Prilog-6:**      **Kalibracioni sertifikati digitalnog mernog sata za merenja ugiba epruvete**

## Prilog-1

Prenosna matrica između čvora  $m-1$  i  $m$   $[A_m]$ :

$$\begin{bmatrix}
 1 & L_m & \frac{L_m^2}{2EI_{XX,m}} & -\frac{L_m^3}{6EI_{XX,m}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \frac{L_m}{EI_{XX,m}} & -\frac{L_m^2}{2EI_{XX,m}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -L_m & 0 & 0 & 0 \\
 -\omega^2 M_m & -\omega^2 M_m L_m & \frac{-\omega^2 M_m L_m^2}{2EI_{XX,m}} & \frac{\omega^2 M_m L_m^3}{6EI_{XX,m}} + 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_m & -\frac{L_m^2}{2EI_{YY,m}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L_m}{EI_{YY,m}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 M_m & \omega^2 M_m L_m & \frac{\omega^2 M_m L_m^2}{2EI_{YY,m}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \omega^2 M_m Y_{\overline{CD},m} & \omega^2 M_m L_m Y_{\overline{CD},m} & \frac{\omega^2 M_m L_m^2 Y_{\overline{CD},m}}{2EI_{XX,m}} & \frac{-\omega^2 M_m L_m^3 Y_{\overline{CD},m}}{6EI_{XX,m}} & -\omega^2 M_m X_{\overline{CD},m} & \omega^2 M_m L_m X_{\overline{CD},m} & \frac{\omega^2 M_m L_m^2 X_{\overline{CD},m}}{2EI_{YY,m}} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \omega^2 M_m Y_{\overline{CD},m} & \omega^2 M_m Y_{\overline{CD},m} \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} & \omega^2 M_m Y_{\overline{CD},m} \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} & \omega^2 M_m Y_{\overline{CD},m} \frac{\lambda_m - \text{sh } \lambda_m}{k_m GK_m} \\
 -\frac{L_m^3}{6EI_{YY,m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{L_m^2}{2EI_{YY,m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 L_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\omega^2 M_m L_m^3}{6EI_{YY,m}} + 1 & -\omega^2 M_m X_{\overline{CD},m} & -\omega^2 M_m X_{\overline{CD},m} \frac{\text{sinh } \lambda_m}{k_m} & -\omega^2 M_m X_{\overline{CD},m} \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} & -\omega^2 M_m X_{\overline{CD},m} \frac{\lambda_m - \text{sinh } \lambda_m}{k_m GK_m} \\
 0 & 1 & \frac{\text{sinh } \lambda_m}{k_m} & \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} & \frac{\lambda_m - \text{sh } \lambda_m}{k_m GK_m} \\
 0 & 0 & \cosh \lambda_m & -\frac{k_m \text{sh } \lambda_m}{GK_m} & \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} \\
 0 & 0 & -R_m \text{ch } \lambda_m - \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} GK_m & \text{ch } \lambda_m + R_m \frac{k_m \text{sh } \lambda_m}{GK_m} & -R_m \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} + \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} \\
 \frac{\omega^2 M_m L_m^3 X_{\overline{CD},m}}{6EI_{YY,m}} & -\omega^2 J_{D,m} & -\omega^2 J_{D,m} \frac{\text{sh } \lambda_m}{k_m} & -\omega^2 J_{D,m} \frac{1 - \text{ch } \lambda_m}{GK_m} & -\omega^2 J_{D,m} \frac{\lambda_m - \text{sh } \lambda_m}{k_m GK_m} + 1
 \end{bmatrix}$$

## Prilog-2

### Listing izvršnog programa: TWBEIG

```
PROGRAM TWBEIG
```

```
include 'link_fnl_shared.h'  
use LIN_SOL_GEN_INT  
IMPLICIT NONE  
INTEGER :: I, NST, IST, TNS, J, II, JJ, NW  
INTEGER :: NS(10)  
REAL :: E, G, RO, WMAX  
REAL :: IX, IY, KK, IW  
REAL :: L, TLC, MC1, MC2, XC1, JC1, JC2, YC1, XC2, YC2, DM, DS, MP, JP, XP, YP, XD, YD  
REAL :: BB, H, LB, FB, IB, ALPHA, AA  
REAL :: RP0  
REAL(8) :: L2, L3, EIX, EIY, K2, K, LAM, SHL, CHL, GK  
REAL(8) :: M, M0, MN, XC, XC0, XCD, XCD0, YC, YC0, YCD, YCD0, JC, JC0, JCN, JD, JD0  
REAL(8) :: RB, RP, R  
REAL(8) :: ASTAT(12,12,10), ADIN(12,12,10), ASTAT0(12,12,10), ADIN0(12,12,10)  
REAL(8) :: A(12,12), B(12,12), C(12,12), F(12,12), HOM(6,6)  
REAL(8) :: DET0, W, DW, W1, W2, CC, FREQ, PERIOD  
REAL(8) b1(6,0), inv(6,6), x(6,0), y(6**2), deter(2), inv_deter(2), determinant  
REAL(8), PARAMETER :: WMIN=0D0  
CHARACTER(120) :: DUMMY  
OPEN(1, FILE='TWB.inp')  
OPEN(2, FILE='TWB.out')  
OPEN(3, FILE='DET.out')
```

```
! (a) Učitavanje opštih podataka modela iz datoteke twb.inp
```

```
CALL ULAZ0(E, G, RO, WMAX, DW, NST)
```

```
! (b) Dodavanje početne vrednosti parametrima programa
```

```
CALL INITIAL0(TNS, MN, JCN, TLC, NW, DET0, WMIN, DW, W1, NST, IST, ASTAT, ADIN,  
ADIN0, HOM)
```

```
DO IST=1, NST
```

```
! (c) Učitavanje karakteristike jezgra, poprečnih greda i međuspratnih ploča po vrstama  
polja nosača iz datoteke twb.inp
```

```
CALL ULAZ1(TNS, TLC, IST, NS, IX, IY, KK, IW, L, MC1, MC2, JC1, JC2, XC1, YC1, XC2,  
YC2, DM, DS, MP, JP, XP, YP, XD, YD, H, BB, LB, AA, RP0)
```

```
! (d) Proračun karakteristika krutosti jezgra
```

```
CALL STIFF(L, L2, L3, E, IX, EIX, IY, EIY, G, KK, IW, K2, K, LAM, SHL, CHL, GK)
```

```
! (e) Proračun karakteristika potrebnih kod inercijalnih sila
CALL INERT(L,MC1,MC2,JC1,JC2,XC1,YC1,XC2,YC2,DM,MP,JP,XP,YP,XD,YD,H,
M,M0,MN,XCD,XCD0,YCD,YCD0,JC,N,JD,JD0)

! (f) Proračun bimomenta usled uticaja grede i ploče
CALL BIMOMENT(E, G, BB, H, LB, AA, RB, DS, RP0, RP, R)

! (g) Određivanje statičkog dela prenosne matrice
CALL TRMATSTAT(IST,ASTAT,ASTAT0,L,L2,L3,EIX,EIY,K,R,LAM,SHL,CHL,GK)

(h) Određivanje dinamičkog dela prenosne matrice
CALL TRMATDIN0(IST,M,M0,EIY,EIX,XCD,XCD0,YCD,YCD0,ADIN,ADIN0,
L,L2,L3,K,LAM,SHL,CHL,JD,JD0,GK)
ENDDO

CALL DATAOUT0(TNS,TLC)

! (i) Variranje vrednosti frekvencije i provera kraja analize
10 W1 = W1 + DW
IF (W1>WMAX) GOTO 120 ! stop
W = W1
W2 = W*W
CALL INITIAL(F)

DO IST=1,NST

! (j) Formiranje prenosne matrice sa aktuelnom vrednošću kružne frekvencije
CALL TRMATDIN(IST,A,B,ASTAT,ASTAT0,ADIN,ADIN0,W2)

! (k) Formiranje sveukupne prenosne matrice
CALL TRMATSYS(A,B,C,F,NS,IST)
ENDDO

! (l) Proračun determinante sveukupne prenosne matrice
CALL SUBMATRSYS(C,HOM)
CALL LIN_SOL_GEN(HOM, b1, x, nrhs=0, & ainv=inv, det=deter)
determinant=abs(deter(1))*deter(2) * (deter(1))/abs(deter(1))
CALL DETOUT(W,determinant,DET0)

! (m) Provera promene predznaka determinante između prethodnog i trenutnog proračuna
IF ((determinant*DET0)< 0E0) GOTO 110 ! data out
```

```
    DET0 = determinant
    GOTO 10
110 NW = NW + 1
    DET0 = determinant

!      (n)      Upisivanje rezultata proračuna u datoteku twb.out

    CALL NATFREQOUT(NW,W,determinant,FREQ,PERIOD)
    GOTO 10
120 STOP

END PROGRAM TWBEIG
```

```
SUBROUTINE ULAZ0(E, G, RO, WMAX, DW, NST)
```

```
    INTEGER    :: NST, I
    REAL       :: E, G, RO, WMAX
    REAL(8)    :: DW
    CHARACTER(120) :: DUMMY
    DO I=1,4
        READ(1,"(A90)") DUMMY
        WRITE(2,*)DUMMY
    ENDDO
    READ(1,*) E
    WRITE(2,*) E
    DO I=1,2
        READ(1,"(A90)") DUMMY
        WRITE(2,*)DUMMY
    ENDDO
    READ(1,*) G
    WRITE(2,*) G
    DO I=1,2
        READ(1,"(A90)") DUMMY
        WRITE(2,*)DUMMY
    ENDDO
    READ(1,*) RO
    WRITE(2,*) RO
    DO I=1,2
        READ(1,"(A90)") DUMMY
        WRITE(2,*)DUMMY
    ENDDO
    READ(1,*) WMAX
    WRITE(2,*) WMAX
    DO I=1,2
        READ(1,"(A90)") DUMMY
        WRITE(2,*)DUMMY
    ENDDO
    READ(1,*) DW
    WRITE(2,*) DW
```

```
DO I=1,2
  READ(1,"(A90)") DUMMY
  WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) NST
WRITE(2,*) NST

END SUBROUTINE ULAZO
```

```
SUBROUTINE INITIAL0(TNS,MN,JCN,TLC,NW,DET0,WMIN,DW,W1,NST,IST,ASTAT,
  ADIN,ADIN0,HOM)
```

```
  INTEGER  :: TNS, I, NST, IST, J, NW
  REAL     :: TLC
  REAL(8)  :: MN, JCN
  REAL(8)  :: ASTAT(12,12,10), ADIN(12,12,10), ADIN0(12,12,10), HOM(6,6)
  REAL(8)  :: DET0, W1, WMIN, DW
  TNS = 0
  MN = 0D0
  JCN = 0D0
  TLC = 0E0
  NW = 0
  DET0 = 0D0
  W1 = WMIN - DW
  DO IST=1,NST
    DO I = 1, 12
      DO J = 1, 12
        ASTAT(I,J,IST) = 0D0
        ADIN(I,J,IST) = 0D0
        ADIN0(I,J,IST) = 0D0
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO
  DO I = 1, 6
    DO J = 1, 6
      HOM(I,J) = 0D0
    ENDDO
  ENDDO
```

```
END SUBROUTINE INITIAL0
```

```
SUBROUTINE ULAZ1(TNS,TLC,IST,NS,IX,IY,KK,IW,L,MC1,MC2,JC1,JC2,XC1,YC1,XC2,
  YC2,DM,DS,MP,JP,XP,YP,XD,YD,H,BB,LB,AA,RP0)
```

```
  INTEGER  :: I, TNS
  INTEGER  :: NS(10)
  REAL     :: IX,IY,KK,IW,L,MC1,MC2,JC1,JC2,XC1,YC1,XC2,YC2,DM,DS,MP,JP,XP,
```

```
                YP,XD,YD
REAL            :: TLC,H,BB,LB,AA,RP0
CHARACTER(120) :: DUMMY
DO I=1,5
    READ(1,"(A90)") DUMMY
    WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) NS(IST)
WRITE(2,*) NS(IST)
TNS = TNS + NS(IST)
DO I=1,2
    READ(1,"(A90)") DUMMY
    WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) IX, IY
WRITE(2,*) IX, IY
DO I=1,2
    READ(1,"(A90)") DUMMY
    WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) KK
WRITE(2,*) KK
DO I=1,2
    READ(1,"(A90)") DUMMY
    WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) XD, YD
WRITE(2,*) XD, YD
DO I=1,2
    READ(1,"(A90)") DUMMY
    WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) IW
WRITE(2,*) IW
DO I=1,2
    READ(1,"(A90)") DUMMY
    WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) L
WRITE(2,*) L
TLC = TLC + NS(IST)*L
DO I=1,2
    READ(1,"(A90)") DUMMY
    WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) XC1, YC1, XC2, YC2
WRITE(2,*) XC1, YC1, XC2, YC2
DO I=1,2
    READ(1,"(A90)") DUMMY
    WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
```

```
READ(1,*) MC1, MC2
WRITE(2,*) MC1, MC2
DO I=1,2
  READ(1,"(A90)") DUMMY
  WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) JC1, JC2
WRITE(2,*) JC1, JC2
DO I=1,2
  READ(1,"(A90)") DUMMY
  WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) BB, H, LB
WRITE(2,*) BB, H, LB
DO I=1,2
  READ(1,"(A90)") DUMMY
  WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) AA
WRITE(2,*) AA
DO I=1,2
  READ(1,"(A90)") DUMMY
  WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) DM, DS
WRITE(2,*) DM, DS
DO I=1,2
  READ(1,"(A90)") DUMMY
  WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) RP0
WRITE(2,*) RP0
DO I=1,2
  READ(1,"(A90)") DUMMY
  WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) XP, YP
WRITE(2,*) XP, YP
DO I=1,2
  READ(1,"(A90)") DUMMY
  WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) MP
WRITE(2,*) MP
DO I=1,2
  READ(1,"(A90)") DUMMY
  WRITE(2,*)DUMMY
ENDDO
READ(1,*) JP
WRITE(2,*) JP
```



END SUBROUTINE ULAZI

SUBROUTINE STIFF(L,L2,L3,E,IX,EIX,IY,EIY,G,KK,IW,K2,K,LAM,SHL,CHL,GK)

```
REAL      :: L,E,IX,IY,G,KK,IW
REAL(8)   :: L2,L3,EIX,EIY,K2,K,LAM,SHL,CHL,GK
L2 = L*L
L3 = L2*L
EIX = E*IX
EIY = E*IY
K2 = G*KK/E/IW
K = SQRT(K2)
LAM = K*L
SHL = SINH(LAM)
CHL = COSH(LAM)
GK = G*KK
```

END SUBROUTINE STIFF

SUBROUTINE INERT(L,MC1,MC2,JC1,JC2,XC1,YC1,XC2,YC2,DM,MP,JP,XP,YP,XD,YD,H,  
M,M0,MN,XCD,XCD0,YCD,YCD0,JCN,JD,JD0)

```
REAL      :: L,MC1,MC2,JC1,JC2,XC1,YC1,XC2,YC2,DM,MP,JP,XP,YP,XD,YD,H
REAL(8)   :: M,M0,MN,XC,XC0,XCD,XCD0,YC,YC0,YCD,YCD0,JC,JC0,JCN,JD,JD0
M  = (MC1 - MC2)*L + MP*DM
M0 = (MC1 - MC2)*L/2 + MP*DM + MN
XC = MP*DM*XP / M
XC0 = MP*DM*XP / M0
YC = MP*DM*YP / M
YC0 = MP*DM*YP / M0
XCD = XC - XD
XCD0 = XC0 - XD
YCD = YC - YD
YCD0 = YC0 - YD
JC  = JC1*L + MC1*L *(XC1-XC)**2 + MC1*L *(YC1-YC)**2 - JC2*L - MC2*L
      *(XC2-XC)**2 - MC2*L *(YC2-YC)**2 + JP*DM + MP*DM*(XP-XC)**2
      + MP*DM*(YP-YC)**2
JC0 = JC1*L/2 + MC1*L/2*(XC1-XC)**2 + MC1*L/2*(YC1-YC)**2 - JC2*L/2
      - MC2*L/2*(XC2-XC)**2 - MC2*L/2*(YC2-YC)**2 + JP*DM
      + MP*DM*(XP-XC)**2 + MP*DM*(YP-YC)**2 + JCN
JD  = JC + M * XCD**2 + M * YCD**2
JD0 = JC0 + M0 * XCD0**2 + M0 * YCD0**2
MN  = (MC1 - MC2)*L/2
JCN = JC1*L/2 + MC1*L/2*(XC1-XC)**2 + MC1*L/2*(YC1-YC)**2 - JC2*L/2
      - MC2*L/2*(XC2-XC)**2 - MC2*L/2*(YC2-YC)**2
```

END SUBROUTINE INERT

SUBROUTINE BIMOMENT(E, G, BB, H, LB, AA, RB, DS, RP0, RP, R)

```
REAL      :: E, G, BB, H, LB, FB, IB, ALPHA, AA
REAL      :: DS, RP0
REAL(8)   :: RB, RP, R
  FB = BB*H
  IB = BB*H**3/12
  ALPHA = 12*E*IB*1.2 / (LB**2*G*FB)
  RB = 48*E*IB / (LB**3*(1+ALPHA)) * AA**2
  RP = RP0*DS**3
  R = RB + RP
```

END SUBROUTINE BIMOMENT

SUBROUTINE TRMATSTAT(IST,ASTAT,ASTAT0,L,L2,L3,EIX,EIY,K,R,LAM,SHL,CHL,GK)

```
REAL      :: L
INTEGER   :: I, IST, J
REAL(8)   :: L2, L3, K, LAM, SHL, CHL, GK, EIX, EIY
REAL(8)   :: R
REAL(8)   :: ASTAT(12,12,10), ASTAT0(12,12,10)
  ASTAT(1,1,IST) = 1D0
  ASTAT(1,2,IST) = L
  ASTAT(1,3,IST) = L2/2 /EIY
  ASTAT(1,4,IST) = -L3/6 /EIY
  ASTAT(2,2,IST) = 1D0
  ASTAT(2,3,IST) = L /EIY
  ASTAT(2,4,IST) = -L2/2 /EIY
  ASTAT(3,3,IST) = 1D0
  ASTAT(3,4,IST) = -L
  ASTAT(4,4,IST) = 1D0
  ASTAT(5,5,IST) = 1D0
  ASTAT(5,6,IST) = -L
  ASTAT(5,7,IST) = -L2/2 /EIX
  ASTAT(5,8,IST) = -L3/6 /EIX
  ASTAT(6,6,IST) = 1D0
  ASTAT(6,7,IST) = L /EIX
  ASTAT(6,8,IST) = L2/2 /EIX
  ASTAT(7,7,IST) = 1D0
  ASTAT(7,8,IST) = L
  ASTAT(8,8,IST) = 1D0
  ASTAT( 9, 9,IST) = 1D0
  ASTAT( 9,10,IST) = SHL / K
  ASTAT( 9,11,IST) = (1D0 - CHL) /GK
  ASTAT( 9,12,IST) = (LAM-SHL) / K /GK
  ASTAT(10,10,IST) = CHL
  ASTAT(10,11,IST) = -SHL*K /GK
  ASTAT(10,12,IST) = (1D0 - CHL) /GK
  ASTAT(11,10,IST) = -R*CHL - SHL/K *GK
```

```
ASTAT(11,11,IST) = CHL + R*SHL*K/GK
ASTAT(11,12,IST) = SHL/K - R*(1D0-CHL)/GK
ASTAT(12,12,IST) = 1D0
DO I = 1, 12
  DO J = 1, 12
    ASTAT0(I,J,IST) = ASTAT(I,J,IST)
  ENDDO
ENDDO
```

END SUBROUTINE TRMATSTAT

SUBROUTINE TRMATDIN0(IST,M,M0,EIY,EIX,XCD,XCD0,YCD,YCD0,ADIN,ADIN0,L,L2,  
L3,K,LAM,SHL,CHL,JD,JD0,GK)

```
INTEGER    :: IST
REAL       :: L
REAL(8)    :: L2, L3, EIX, EIY, K, LAM, SHL, CHL, GK
REAL(8)    :: M, M0, XCD, XCD0, YCD, YCD0, JD, JD0
REAL(8)    :: ADIN(12,12,10), ADIN0(12,12,10)
REAL(8)    :: A41, B41, A85, B85, A89, B89, A49, B49, A121, B121, A125, B125, A129, B129
A41 = M
B41 = M0
ADIN(4,1,IST) = -A41
ADIN0(4,1,IST) = -B41
ADIN(4,2,IST) = -A41*L
ADIN0(4,2,IST) = -B41*L
ADIN(4,3,IST) = -A41*L2/2 /EIY
ADIN0(4,3,IST) = -B41*L2/2 /EIY
ADIN(4,4,IST) = A41*L3/6 /EIY
ADIN0(4,4,IST) = B41*L3/6 /EIY
A49 = A41*YCD
B49 = B41*YCD0
ADIN(4,9,IST) = A49
ADIN0(4,9,IST) = B49
ADIN(4,10,IST) = A49*SHL/K
ADIN0(4,10,IST) = B49*SHL/K
ADIN(4,11,IST) = A49 * (1-CHL) /GK
ADIN0(4,11,IST) = B49 * (1-CHL) /GK
ADIN(4,12,IST) = A49 * (LAM-SHL)/K /GK
ADIN0(4,12,IST) = B49 * (LAM-SHL)/K /GK
A85 = M
B85 = M0
ADIN(8,5,IST) = -A85
ADIN0(8,5,IST) = -B85
ADIN(8,6,IST) = A85*L
ADIN0(8,6,IST) = B85*L
ADIN(8,7,IST) = A85*L2/2 /EIX
ADIN0(8,7,IST) = B85*L2/2 /EIX
ADIN(8,8,IST) = A85*L3/6 /EIX
ADIN0(8,8,IST) = B85*L3/6 /EIX
```

```
A89 = A85*XCD
B89 = B85*XCD0
ADIN(8,9,IST) = -A89
ADIN0(8,9,IST) = -B89
ADIN(8,10,IST) = -A89*SHL/K
ADIN0(8,10,IST) = -B89*SHL/K
ADIN(8,11,IST) = -A89 * (1-CHL) /GK
ADIN0(8,11,IST) = -B89 * (1-CHL) /GK
ADIN(8,12,IST) = -A89 * (LAM-SHL)/K /GK
ADIN0(8,12,IST) = -B89 * (LAM-SHL)/K /GK
A121 = M *YCD
B121 = M0 *YCD0
ADIN(12,1,IST) = A121
ADIN0(12,1,IST) = B121
ADIN(12,2,IST) = A121*L
ADIN0(12,2,IST) = B121*L
ADIN(12,3,IST) = A121*L2/2 /EIY
ADIN0(12,3,IST) = B121*L2/2 /EIY
ADIN(12,4,IST) = -A121*L3/6 /EIY
ADIN0(12,4,IST) = -B121*L3/6 /EIY
A125 = M *XCD
B125 = M0 *XCD0
ADIN(12,5,IST) = -A125
ADIN0(12,5,IST) = -B125
ADIN(12,6,IST) = A125*L
ADIN0(12,6,IST) = B125*L
ADIN(12,7,IST) = A125*L2/2 /EIX
ADIN0(12,7,IST) = B125*L2/2 /EIX
ADIN(12,8,IST) = A125*L3/6 /EIX
ADIN0(12,8,IST) = B125*L3/6 /EIX
A129 = JD
B129 = JD0
ADIN(12,9,IST) = -A129
ADIN0(12,9,IST) = -B129
ADIN(12,10,IST) = -A129*SHL/K
ADIN0(12,10,IST) = -B129*SHL/K
ADIN(12,11,IST) = -A129 * (1-CHL) /GK
ADIN0(12,11,IST) = -B129 * (1-CHL) /GK
ADIN(12,12,IST) = -A129 * (LAM-SHL)/K /GK
ADIN0(12,12,IST) = -B129 * (LAM-SHL)/K /GK
```

END SUBROUTINE TRMATDINO

SUBROUTINE DATAOUT0(TNS,TLC)

```
INTEGER :: TNS
REAL    :: TLC
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) ''
```

```
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) 'Total number of segments = ',TNS
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) 'Total length of core (m) = ',TLC
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) '** THE RESULTS OF THE ANALISYS ** '
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) ''
WRITE(2,*) ''
WRITE(3,*) '** OUTPUT DATA ** '
WRITE(3,*) ''
WRITE(3,*) ''
WRITE(3,*) 'omega      determinant  det0*det'
WRITE(3,*) ''
```

END SUBROUTINE DATAOUT0

SUBROUTINE INITIAL(F)

```
INTEGER  :: I, J
REAL(8)  :: F(12,12)
DO I = 1, 12
  DO J = 1, 12
    F(I,J) = 0D0
    IF (I.EQ.J) THEN
      F(I,J) = 1D0
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO
```

END SUBROUTINE INITIAL

SUBROUTINE TRMATDIN(IST,A,B,ASTAT,ASTAT0,ADIN,ADIN0,W2)

```
INTEGER  :: I, J
REAL(8)  :: W2
REAL(8)  :: ASTAT(12,12,10), ADIN(12,12,10), ASTAT0(12,12,10), ADIN0(12,12,10)
REAL(8)  :: A(12,12), B(12,12)
DO I = 1, 12
  DO J = 1, 12
    A(I,J) = ASTAT(I,J,IST) + W2*ADIN(I,J,IST)
    B(I,J) = ASTAT0(I,J,IST) + W2*ADIN0(I,J,IST)
  ENDDO
```

ENDDO

END SUBROUTINE TRMATDIN

SUBROUTINE TRMATSYS(A,B,C,F,NS,IST)

INTEGER :: I, J, II, JJ, IST

INTEGER :: NS(10)

REAL(8) :: A(12,12), B(12,12), C(12,12), F(12,12)

REAL(8) :: CC

DO I = 1, 12

DO J = 1, 12

CC = 0D0

DO II = 1, 12

CC = CC + F(I,II) \* B(II,J)

ENDDO

C(I,J) = CC

ENDDO

ENDDO

DO I = 1, 12

DO J = 1, 12

B(I,J) = C(I,J)

ENDDO

ENDDO

DO I = 1, 12

DO J = 1, 12

CC = 0D0

DO II = 1, 12

CC = CC + B(I,II) \* A(II,J)

ENDDO

C(I,J) = CC

ENDDO

ENDDO

DO JJ = 2, NS(IST)-1

DO I = 1, 12

DO J = 1, 12

CC = 0D0

DO II = 1, 12

CC = CC + C(I,II) \* A(II,J)

ENDDO

F(I,J) = CC

ENDDO

ENDDO

DO I = 1, 12

DO J = 1, 12

C(I,J) = F(I,J)

ENDDO

ENDDO

ENDDO

END SUBROUTINE TRMATSYS

SUBROUTINE DETOUT(W,determinant,DET0)

```
REAL(8)      :: W, determinant, DET0
WRITE(*,*) W, determinant, determinant*DET0
WRITE(*,100) W, determinant, determinant*DET0
WRITE(3,100) W, determinant, determinant*DET0
100 FORMAT(F10.4, 4X, E11.4, 4X, E11.4)
```

END SUBROUTINE DETOUT

SUBROUTINE NATFREQOUT(NW,W,determinant,FREQ,PERIOD)

```
INTEGER      :: NW
REAL(8)      :: W, determinant, FREQ, PERIOD
FREQ = W/6.28318
PERIOD = FREQ**(-1)
WRITE(2,*) "
WRITE(2,*) 'EIGENFREQUENCY No:', NW
WRITE(2,*) "
WRITE(2,*) 'DETER (1)= ', determinant
WRITE(2,*) 'OMEGA (1/s)= ', W
WRITE(2,*) 'FREQ. (Hz)= ', FREQ
WRITE(2,*) 'PERIOD(sec)= ', PERIOD
WRITE(2,*) "
WRITE(2,*) "
WRITE(2,*) "
WRITE(*,*) "
WRITE(*,*) "
WRITE(*,*) 'EIGENFREQUENCY No:', NW
WRITE(*,*) 'DETER (1)= ', determinant
WRITE(*,*) 'OMEGA (1/s)= ', w
WRITE(*,*) 'FREQ. (Hz)= ', FREQ
WRITE(*,*) 'PERIOD(sec)= ', PERIOD
WRITE(*,*) "
WRITE(*,*) "
```

END SUBROUTINE NATFREQOUT

## **Prilog-3**

### **Listing izlazne datoteke rezultata analize računskog modela *BET-0***

\*\* COCNETE CORE INPUT DATA (N,m) BET-0 \*\*

Modulus of elasticity (N/m<sup>2</sup>): E  
2.7599999E+10

Shear modulus (N/m<sup>2</sup>): G  
1.2000000E+10

Mass density (kg/m<sup>3</sup>): RO  
2549.200

Upper limit of frequency range (rad/s): WMAX  
15.00000

Frequency step (rad/s): DW  
1.000000000000000E-003

The number of segment types (1): NST  
3

Properties of the first segment type:

Number of segments: NS  
5

Moment of inertia around X and Y axis (m<sup>4</sup>): IX IY  
30.03240 38.15920

St. Venant's torsional constant (m<sup>4</sup>): K  
0.1810440

The coordinates of shear center (m): XD YD  
0.0000000E+00 5.627000

Sectorial moment of inertia (m<sup>6</sup>): IW  
299.0690

Height of segment (m): L  
3.500000

The coordinates of the center of masses of core (m): XC1 YC1 XC2 YC2  
0.0000000E+00 -0.4385000 0.0000000E+00 -3.334000

Core mass per unit length (kg/m): MC1 MC2  
17715.00 2331.000



Mass moment of inertia of the core per unit length (kgm<sup>2</sup>/m): JC1 JC2  
198559.0 1822.120

Dimensions of lintel beam (m): BB H LB  
0.3000000 0.4000000 3.048000

The area enclosed by the cross section of the core (m<sup>2</sup>): AA  
33.53000

Thickness of slab (m): DM(mass) DS(stiffness)  
0.1000000 0.1000000

The warping stiffness of the slab per unit thickness (Nm<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>): RP0  
4.3475479E+12

The coordinates of the center mass of slab (m): XP YP  
0.0000000E+00 -0.4385000

The mass of slab per unit thickness (kg/m): MP  
497495.0

Mass moment of inertia of the slab per unit thickness (kgm<sup>2</sup>/m): JP  
2.2333072E+07

Properties of the second segment type:

Number of segments: NS  
5

Moment of inertia around X and Y axis (m<sup>4</sup>): IX IY  
35.04590 44.53000

St. Venant's torsional constant (m<sup>4</sup>): K  
0.2874910

The coordinates of shear center (m): XD YD  
0.0000000E+00 5.627000

Sectorial moment of inertia (m<sup>6</sup>): IW  
349.3780

Hight of segment (m): L  
4.000000

The coordinates of the center of masses of core (m): XC1 YC1 XC2 YC2  
0.0000000E+00 -0.4385000 0.0000000E+00 -3.334000

Core mass per unit length (kg/m): MC1 MC2  
20667.00 2719.000

Mass moment of inertia of the core per unit length (kgm<sup>2</sup>/m): JC1 JC2

231874.0 2077.000

Lintel beam's dimensions (m): BB H LB

0.3500000 0.5000000 3.048000

The area enclosed by the cross section of the core (m<sup>2</sup>): AA

33.53000

Thickness of slab (m): DM(mass) DS(stiffness)

0.1000000 0.1000000

The warping stiffness of the slab per unit thickness (Nm<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>): RP0

4.3475479E+12

The coordinates of the center mass of slab (m): XP YP

0.0000000E+00 -0.4385000

The mass of slab per unit thickness (kg/m): MP

495936.0

Mass moment of inertia of the slab per unit thickness (kgm<sup>2</sup>/m): JP

2.2314592E+07

Properties of the third segment type:

Number of segments: NS

5

Moment of inertia around X and Y axis (m<sup>4</sup>): IX IY

40.06310 50.90590

St. Venant's torsional constant (m<sup>4</sup>): K

0.4291410

The coordinates of shear center (m): XD YD

0.0000000E+00 5.627000

Sectorial moment of inertia (m<sup>6</sup>): IW

399.9000

Hight of segment (m): L

4.500000

The coordinates of the center of masses of core (m): XC1 YC1 XC2 YC2

0.0000000E+00 -0.4385000 0.0000000E+00 -3.334000

Core mass per unit length (kg/m): MC1 MC2

23620.00 3108.000

Mass moment of inertia of the core per unit length (kgm<sup>2</sup>/m): JC1 JC2

265297.0 2364.750

Dimensions of lintel beam (m): BB H LB  
0.4000000 0.6000000 3.048000

The area enclosed by the cross section of the core (m<sup>2</sup>): AA  
33.53000

Thickness of slab (m): DM(mass) DS(stiffness)  
0.1000000 0.1000000

The warping stiffness of the slab per unit thickness (Nm<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>): RP0  
4.3475479E+12

The coordinates of the center mass of slab (m): XP YP  
0.0000000E+00 -0.4385000

The mass of slab per unit thickness (kg/m): MP  
494364.0

Mass moment of inertia of the slab per unit thickness (kgm<sup>2</sup>/m): JP  
2.2294672E+07

Total number of segments = 15

Total length of core (m) = 60.00000

\*\* THE RESULTS OF THE ANALISYS \*\*

EIGENFREQUENCY No: 1

DETER (1)= -3.543391116575093E-003  
OMEGA (1/s)= 4.529999999999985  
FREQ. (Hz)= 0.720972474011844  
PERIOD(sec)= 1.38701550481603

EIGENFREQUENCY No: 2

DETER (1)= 1.509622981497069E-003  
OMEGA (1/s)= 5.720000000000024  
FREQ. (Hz)= 0.910367009127608  
PERIOD(sec)= 1.09845808335946

EIGENFREQUENCY No: 3

DETER (1)= -1.659845928118732E-002  
OMEGA (1/s)= 11.69699999999990  
FREQ. (Hz)= 1.86163687163710  
PERIOD(sec)= 0.537161685630244

## **Prilog-4**

### **Listing izlazne datoteke rezultata analize računskog modela *BET-1***

\*\*\* COCNRETE CORE INPUT DATA (N,m) BET-1 \*\*\*

Modulus of elasticity (N/m<sup>2</sup>): E  
2.7599999E+10

Shear modulus (N/m<sup>2</sup>): G  
1.2000000E+10

Mass density (kg/m<sup>3</sup>): RO  
2549.200

Upper limit of frequency range (rad/s): WMAX  
15.00000

Frequency step (rad/s): DW  
1.000000000000000E-003

Number of segment's type (1): NST  
1

Properties of the first segment type:

Number of segments (1): NS  
15

Moment of inertia around X and Y axis (m<sup>4</sup>): IX IY  
30.51000 38.77000

St. Venant's torsional constant (m<sup>4</sup>): K  
0.1900000

The coordinates of shear center (m): XD YD  
0.0000000E+00 5.627000

Sectorial moment of inertia (m<sup>6</sup>): IW  
300.0000

Hight of segment (m): L  
3.810000

The coordinates of the center of masses of core (m): XC1 YC1 XC2 YC2  
0.0000000E+00 -0.4385000 0.0000000E+00 -3.334000

Core mass per unit length (kg/m): MC1 MC2  
18010.00 2370.000

Mass moment of inertia of the core per unit length (kgm<sup>2</sup>/m): JC1 JC2  
201885.0 1853.210

Dimensions of lintel beam (m): BB H LB  
0.3050000 0.4570000 3.048000

The area enclosed by the cross section of the core (m<sup>2</sup>): AA  
33.53000

Thickness of slab (m): DM(mass) DS(stiffness)  
0.1000000 0.1000000

The warping stiffness of the slab per unit thickness (Nm<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>): RP0  
4.3475479E+12

The coordinates of the center mass of slab (m): XP YP  
0.0000000E+00 -0.4385000

The mass of slab per unit thickness (kg/m): MP  
497340.0

Mass moment of inertia of the slab per unit thickness (kgm<sup>2</sup>/m): JP  
2.2332100E+07

Total number of segments = 15

Total length of core (m) = 57.15000

\*\* THE RESULTS OF THE ANALISYS \*\*

EIGENFREQUENCY No: 1

DETER(1)= -2.467487110198172E-003  
OMEGA(1/s)= 4.30099999999977  
FREQ.(Hz)= 0.684525962632424  
PERIOD(sec)= 1.46086497019687

EIGENFREQUENCY No: 2

DETER(1)= 2.466485809455004E-003  
OMEGA(1/s)= 5.65200000000022  
FREQ.(Hz)= 0.899544464263850  
PERIOD(sec)= 1.11167378570703

EIGENFREQUENCY No: 3

DETER(1)= -1.969806417714456E-002  
OMEGA(1/s)= 11.2769999999992  
FREQ.(Hz)= 1.79479174159630  
PERIOD(sec)= 0.557167707441417

## Prilog-5

### Kalibracioni sertifikat pretvarača za merenje dinamičkog odziva: A-1

**~ Calibration Certificate ~**  
Per ISO 16063-21

**Model Number:** 603C01

**Serial Number:** 178631

**Description:** ICP® Accelerometer      **Method:** Back-to-Back Comparison (AT401-3)

**Manufacturer:** IMI

**Calibration Data**

**Sensitivity @ 6000 CPM**      94    **mV/g**      **Output Bias**      10.5    **VDC**  
**(9.6 mV/m/s<sup>2</sup>)**

**Sensitivity Plot**

Temperature: 74 °F (24 °C)      Relative Humidity: 54 %

**Data Points**

Mounting Surface: Stainless Steel    Fastener: Stud Mount      Fixture Orientation: Vertical  
Acceleration Level (ms<sup>2</sup>): 1.00 g (9.81 m/s<sup>2</sup>)  
The acceleration level may be limited by shaker displacement at low frequencies. If the listed level cannot be obtained, the calibration system uses the following formula to set the vibration amplitude: Acceleration Level (g) = 0.017 x (freq).  
\*The gravitational constant used for calculations by the calibration system is: 1 g = 9.80665 m/s<sup>2</sup>.

**Condition of Unit**

**As Found:** n/a

**As Left:** New Unit, In Tolerance

**Notes**

1. Calibration is NIST Traceable thru Project 822/277342 and PTB Traceable thru Project 1254.
2. This certificate shall not be reproduced, except in full, without written approval from PCB Piezotronics, Inc.
3. Calibration is performed in compliance with ISO 9001, ISO 10012-1, ANSI/NCSL Z540-1-1994 and ISO 17025.
4. See Manufacturer's Specification Sheet for a detailed listing of performance specifications.
5. Measurement uncertainty (95% confidence level with coverage factor of 2) for frequency ranges tested during calibration are as follows: 5-9 Hz; +/- 2.0%, 10-99 Hz; +/- 1.5%, 100-1999 Hz; +/- 1.0%, 2-10 kHz; +/- 2.5%.

**Technician:** Holli Parks      **Date:** 10/28/10

ACCREDITED  
CALIBRATION CERT #1862.02  
PAGE 1 of 1

**IMI SENSORS**  
A PCB PIEZOTRONICS DIV.  
Headquarters: 3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043  
Calibration Performed at: 10869 Highway 903, Halifax, NC 27839  
TEL: 888-684-0013    FAX: 716-685-3886    www.pcb.com

cal7-3371131272.38

## Kalibracioni sertifikat pretvarača za merenje dinamičkog odziva: A-2

**~ Calibration Certificate ~**  
Per ISO 16063-21

**Model Number:** 603C01

**Serial Number:** 178630

**Description:** ICP® Accelerometer      **Method:** Back-to-Back Comparison (AT401-3)

**Manufacturer:** IMI

**Calibration Data**

**Sensitivity @ 6000 CPM**      97      **mV/g**      **Output Bias**      10.8      **VDC**  
(9.8      **mV/m/s<sup>2</sup>**)

**Sensitivity Plot**

Temperature: 74 °F (24 °C)      Relative Humidity: 54 %

**Condition of Unit**


**As Found:** n/a

**As Left:** New Unit, In Tolerance


**Notes**

1. Calibration is NIST Traceable thru Project 822/277342 and PTB Traceable thru Project 1254.
2. This certificate shall not be reproduced, except in full, without written approval from PCB Piezotronics, Inc.
3. Calibration is performed in compliance with ISO 9001, ISO 10012-1, ANSI/NC SL Z540-1-1994 and ISO 17025.
4. See Manufacturer's Specification Sheet for a detailed listing of performance specifications.
5. Measurement uncertainty (95% confidence level with coverage factor of 2) for frequency ranges tested during calibration are as follows: 5-9 Hz; +/- 2.0%, 10-99 Hz; +/- 1.5%, 100-1999 Hz; +/- 1.0%, 2-10 kHz; +/- 2.5%.

**Technician:** Holli Parks      **Date:** 10/28/10



**ACCREDITED**  
CALIBRATION CERT #1862.02



**IMI SENSORS**  
A PCB PIEZOTRONICS DIV.

Headquarters: 3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043  
Calibration Performed at: 10869 Highway 903, Halifax, NC 27839  
TEL: 888-684-0013      FAX: 716-685-3886      www.pcb.com

ca17 - 33711.131240.19

PAGE 1 of 1

## Prilog-6

# Kalibracioni sertifikati digitalnog mernog sata za merenja ugiba epruvete



**INSTITUT GOŠA d.o.o.**  
Zavod za ispitivanje i kontrolu  
11420 Sm. Palanka - I srpskog ustanka 202  
tel. 026/314-044, fax: 026/314-767  
Metrološka laboratorija, tel. 026/314-322



Strana 1 od 2

### UVERENJE O ETALONIRANJU

Broj uverenja: 4185/13

Ukupan broj strana: 2

**Podnosilac zahteva:** GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA  
Kozaračka 2a, 24000 Subotica

**Naziv merila:** Merni sat - digitalni

**Proizvodjač:** HOREX

**Serijski broj:** /

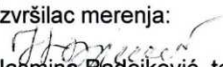
**Karakteristike merila:** opseg merenja: 0 mm do 12.7 mm,  
najmanja vred.podeljka: 0.001 mm, ident br.: 1LBKM158-1

**Datum etaloniranja:** 24.12.2013 god.

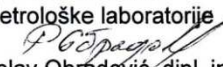
**Metoda etaloniranja:** BS 907

**Metrološka sledivost:** Rezultati su sledivi do Nacionalnog etalona za dužinu u DMDM.

Datum izdavanja uverenja: 24.12.2013 god.

Izvršilac merenja:   
Jasmina Radojković, teh. za fim

M.P.

Rukovodilac  
Metrološke laboratorije  
  
Radoslav Obradović, dipl. inž.

Ovo uverenje o etaloniranju se sme umnožavati isključivo kao celina.  
G.QR.028



Uverenje o etaloniranju br.: 4185/13

Strana 2 od 2

• Rezultati etaloniranja:

	Merene vrednosti na satu ( mm )	Rezultati merenja ( mm )		Merna nesigurnost * ( $\mu$ m )
		pri uvlačenju šipa	pri izvlačenju šipa	
1.	0.001	0.001	0.001	2.2
2.	0.002	0.002	0.002	2.2
3.	0.005	0.005	0.005	2.2
4.	0.008	0.008	0.008	2.2
5.	0.010	0.010	0.010	2.2
6.	0.050	0.049	0.050	2.2
7.	1.100	1.101	1.099	2.2
8.	2.200	2.199	2.199	2.2
9.	3.350	3.349	3.349	2.2
10.	4.460	4.461	4.461	2.2
11.	5.570	5.569	5.569	2.2
12.	6.680	6.678	6.679	2.2
13.	7.790	7.790	7.790	2.2
14.	8.900	8.900	8.899	2.2
15.	12.700	12.699	12.699	2.2

\* Navedena proširena merna nesigurnost dobivena je množenjem procenjene standardne mernе nesigurnosti faktorom obuhvata  $k = 2$  što obezbedjuje nivo poverenja od približno 95%.

- Uslovi okoline: temperatura  $(20 \pm 2)^{\circ}\text{C}$ .

Kraj uverenja o etaloniranju.

Ovo uverenje o etaloniranju se sme umnožavati isključivo kao celina.  
G.QR.028/1