



УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА

Мр Звонимир Божиловић

**ОПТИМАЛНИ ИЗБОР ИЗВОЂАЧА РАДОВА НА ПРОЈЕКТУ
СА СТАНОВИШТА ТРОШКОВА И ВРЕМЕНА**

Докторска дисертација

Косовска Митровица, 2017. година



UNIVERSITY OF PRIŠTINA
FAKULTY OF TEHHNICAL SCIENCES

MSc Zvonimir Božilović

**THE OPTIMAL CHOICE OF PROJECT CONTRACTORS
IN TERMS OF COST AND TIME**

Doctoral dissertation

Kosovska Mitrovica, 2017.

| |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>I Аутор</i> |
| Име и презиме: Звонимир Божиловић |
| Датум и место рођења: 14.05.1965. године, Скопље |
| Садашње запослење: "Градитељ-Инжењеринг", Београд |
| <i>II Докторска дисертација</i> |
| Наслов: Оптимални избор извођача радова на пројекту са становишта трошкова и времена |
| Број страница: 278 |
| Број слика: 114 |
| Број библиографских података: 228 |
| Установа и место где је рад урађен: ФТН Косовска Митровица |
| Научна област (УДК): Грађевинарство 69:005.8:519.863(043.3) |
| Ментор: др Велимир Дутина, ред. проф., ФТН Косовска Митровица |
| <i>III Оцена и одбрана</i> |
| Датум пријаве теме: 28.11.2013. године |
| Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације: 124/3-5 од 26.02.2014. године |
| Комисија за оцену подобности теме кандидата: <ul style="list-style-type: none"> 1. др Велимир Дутина, ред. проф., ФТН Косовска Митровица - ментор 2. др Милорад Златановић, ред. проф., ГАФ Ниш - члан 3. др Љубо Марковић, ванр. проф., ФТН Косовска Митровица - члан |
| Комисија за оцену докторске дисертације: <ul style="list-style-type: none"> 1. др. Бранислав Ивковић, ред проф., ГФ Београд - председник 2. др Милорад Златановић, ред. проф., ГАФ Ниш - члан 3. др Милан Тривунић, ред. проф., ФТН Нови Сад - члан 4. др Велимир Дутина, ред. проф., ФТН Косовска Митровица - ментор 5. др Љубо Марковић, ванр. проф., ФТН Косовска Митровица - члан |
| Комисија за одбрану докторске дисертације: <ul style="list-style-type: none"> 1. др. Бранислав Ивковић, ред проф., ГФ Београд - председник 2. др Милорад Златановић, ред. проф., ГАФ Ниш - члан 3. др Милан Тривунић, ред. проф., ФТН Нови Сад - члан 4. др Велимир Дутина, ред. проф., ФТН Косовска Митровица - ментор 5. др Љубо Марковић, ванр. проф., ФТН Косовска Митровица - члан |
| Датум и одбрана дисертације: |

ЗАВХАЛНОСТ АУТОРА

Захваљујем се ментору и професорима на корисним саветима при изради ове докторске дисертације, као и компанији „Градитељ-инжењеринг“ где сам стицао практична искуства полазећи од руковођења извођењем грађевинских објеката, сарадника у пројектном бироу, руководиоца стручног тима за израду пројеката, до руководиоца Компаније.

Посебну захвалност дугујем својој породици и пријатељима на несебичној моралној подршци, разумевању и толеранцији.

Мр Звонимир С. Божиловић, дипл. инж. грађ.

ОПТИМАЛНИ ИЗБОР ИЗВОЂАЧА РАДОВА НА ПРОЈЕКТУ СА СТАНОВИШТА ТРОШКОВА И ВРЕМЕНА

АПСТРАКТ

Циљ израде дисертације је научни опис концептуалног оквира за планирање грађевинских пројеката у делу оптималног избора извођача за одговарајуће радове са становишта основних циљева времена и трошкова пројекта уз максимизацију подциљева за вредности радова фаворизованих извођачима. У првом поглављу дефинисани су: предмет и циљеви истраживања, као и методологија израде дисертације. Основни научни резултати истраживања дати су у четвртом поглављу и потврђени применом на конкретном пројекту станоградње у петом поглављу. Друго поглавље обухвата познате области управљања пројектом (VII) у теорији са указивањем на праксу: Пројекат и врсте пројеката (са истицањем избора из скупа потенцијалних извођача: једног извођача пројекта и више извођача за одговарајуће радове са условом да се један рад додели једном извођачу), Процеси УП (са истицањем методе PERT/COST), Праћење реализације и ажурирање плана пројекта, и Анализа изведеног пројекта са извођењем закључака за будуће пројекте. У трећем поглављу су изложене области једнокритеријумска оптимизација на примеру линеарног програмирања (ЛП) и два вида вишекритеријумске оптимизације: Вишекритеријумско ЛП (са истицањем методе ε -ограничења) и Вишеатрибутивна анализа (са истицањем методе Аналитичких хијерархијских процеса – АХП). Четврто поглавље садржи основне научне резултате истраживања: класификацију проблема избора више извођача на пројекту, утврђивање скупа потенцијалних извођача за одговарајуће радове или фазе пројекта и приоритета извођача, дефинисање циљева проблема избора (минимизација трајања и трошкова пројекта на вишем нивоу значајности са максимизацијом вредности радова – трошкова потенцијалних извођача на нижем нивоу у односу на критеријуме пројекта), дефиницију општих ВК МЦЛП математичких модела који су типа мешовито целобројног ЛП и укључују две врсте бинарних променљивих, развој алгоритама одређивања Парето-оптималних решења за усклађивање критеријума пројекта уз даљу оптимизацију критеријума фаворизованих извођача (n^+ од укупно n потенцијалних извођача) и постављање правила избора најповољниг решења за примену. Сматра се да потенцијални извођачи нису подједнако значајни, већ им се додељују одговарајући приоритети у зависности од техничко-кадровских потенцијала, листе пројеката на којима су учествовали код других компанија (у било којој области грађевинарства и у станоградњи), учешћа на ранијим пројектима наше компаније и др. При томе, више извођача могу имати једнаке приоритете. Утврђено је да у пракси постоје: три класе проблема са становишта параметара (времена и трошкова) радова, односно фаза пројекта и потенцијалних извођача (1. јединствени параметри независно од извођача, 2. варијанте параметара које важе за све потенцијалне извођаче исте фазе када најмање једна фаза има више потенцијалних извођача, и 3. варијанте параметара за неке потенцијалне извођаче исте фазе када најмање једна фаза има најмање један пар потенцијалних извођача са различитим варијантама параметара), два типа проблема у свакој класи (а. познати извођачи свих фаза, и б. више потенцијалних извођача за неке фазе) и две врсте за сваки тип проблема: врста-1 сви потенцијални извођачи пројекта (n) са довољним техничким капацитетима, и врста-2 има n^- извођача са ограниченим капацитетима ($n^- \leq n$). Утврђено је да проблем класе 1 имају дато трајење пројекта и

познате трошкове пројекта, те се за тип 1.а не врши избор, док се за тип 1.б врши максимизација вредности радова, односно трошкова C_j за n^+ фаворизованих извођача B_j , $j \in J^+ = \{1, \dots, n^+\} \subseteq J = \{1, \dots, n\}$, избором тих извођача на фазама на којима они конкуришу са извођачима мањих приоритета. Проблеми класе 2 и 3 имају Парето-оптимална решења са коначним бројевима могућих вредности за трајање пројекта и одговарајуће трошкове $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)}, k=1,2,\dots,q)$, сагласно методи *PERT/COST*. За одабрано $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$ као основних критеријума вишег нивоа значајности у проблему, врши се максимизација трошкова извођача $(C_j, j \in J^+)$ сагласно њиховим приоритетима (као критеријума нижих нивоа значајности у односу на критеријуме пројекта) применом методе ε -ограничења. Прво се решавају проблеми врсте 1 сматрајући да сви потенцијални извођачи имају довољне капацитете. Произилази да је за проблем а.1 потребно бирати варијанту параметара фазе за познатог извођача (када постоје варијанте, иначе се усвајају јединствени параметри), док се за случајеве б.1 по аналогији бира извођач и варијанта параметара фазе. Математички модели проблема а.1 и б.1 заснивају се на одговарајућим бинарним променљивама прве врсте са вредностима 1 (врши се избор извођача и/или варијанте параметара фазе) или 0 (не врши се избор). Проблеми а.2 и б.2 настају проширивањем одговарајућих проблема а.1 и б.1 са ограничењима за техничке капацитете n^- потенцијалних извођача ($j \in J^- \subseteq J$) посматрајући временске јединице (в.ј.) на пројекту. За њихове моделе уводе се бинарне променљиве друге врсте са вредностима 1 (ако бинарна прве врсте има вредност 1 и фаза се изводи у разматраној в.ј.) и 0 (у супротном, бинарна прве врсте има вредност 0 и фаза се обавља у разматраној в.ј. са другим извођачем или другом варијантом параметара, односно бинарна прве врсте има вредност 1 али се фаза не обавља у разматраној в.ј.). Решавање модела врсте 2 врши се применом софтвера за *УП* који подржава нивелисање ресурса. У плану пројекта са решењем модела врсте 1 потребно је уградити расположиве техничке капацитете потенцијалних извођача и минимизирати трајање пројекта усаглашавањем потребних капацитета за извођење радова и расположивих капацитета извођача. Настаје Парето-оптимално решење, ако се не промени усвојено трајање пројекта $T_p^{(k)}$ у моделу врсте 1. Ако се $T_p^{(k)}$ продужи на $T_p^{(k)+}$, добијено решење модела врсте 2 није Парето-оптимално и потребно је поновити поступак. Одредити решење k_1 модела врсте 1 које има дуже трајање пројекта $T_p^{(k_1)} = T_p^{(k)+} > T_p^{(k)}$ и ниже трошкове $C_p^{(k_1)} < C_p^{(k)}$, а затим применити софтвер за *УП*. Након налажења подкупа вредности $\{T_p^{(k_1)} > T_p^{(k_2)} > T_p^{(k_3)} > \dots\}$ са $\{C_p^{(k_1)} < C_p^{(k_2)} < C_p^{(k_3)} < \dots\}$ бира се прихватљиво решење за примену у зависности да ли се већи значај даје трајању или трошковима пројекта. При томе може да се користи вишекритеријумска анализа. У *петом поглављу* су примењени модел избора једног извођача и модели класа 1 до 3 (типови б. и врсте 1) избора више извођача на примеру пројекта станоградње. За модел 3.б.1 илустровано је постављање четири облика услова извођача са становишта рокова почетака ангажовања. Изведени су закључци да се дефинисани модели и њихови алгоритми могу успешно применити у пракси. *Шесто поглавље* садржи закључке са резултатима у дисертацији и предлоге будућих истраживања.

КЉУЧНЕ РЕЧИ: грађевински пројекти, станоградња, планирање, трајање и трошкови пројекта, потенцијални извођачи радова, фаворизовани извођачи, трошкови извођача, класификација проблема избора извођача пројекта, модели избора извођача пројекта, вишекритеријумска оптимизација

НАУЧНА ОБЛАСТ: Грађевинарство

УЖА НАУЧНА ОБЛАСТ: Грађевински менаџмент

УДК Број: 69:005.8:519.863(043.3)

THE OPTIMAL CHOICE OF PROJECT CONTRACTORS IN TERMS OF COST AND TIME

ABSTRACT

The primary focus and aim of this dissertation is to provide a scientific explanation of conceptual framework for construction project management, primarily relating to optimal selection of contractors, for the purpose of carrying out specific construction works, from the point of time and cost management, along with maximizing the subgoals for the works performed by favored contractors.

The first chapter presents the research topic and objectives as well as the applied methodologies of this paper. The main findings are presented in the fourth chapter and confirmed in the fifth chapter by presenting a specific housing project.

The second chapter deals with project management (PM) by combining a theoretical background with a practical approach (based on *PERT/COST* method).

The third chapter presents the principles of one-criterion optimization applied to linear programming (LP) and two types of multi-criteria optimization: Multi-criteria LP (the ε -constraint method) and Multi-attribute decision analysis (using the Analytic hierarchy process - AHP).

The fourth chapter includes the most significant findings of this research: classification and selection of contractors for the project; determining a group of potential contractors in order to carry out specific construction works or certain phase of project activities and priorities imposed by contractors; defining the objectives of selection (costs and time minimization and value maximization – the costs of potential contractors lower than project criteria); definition of general V_k MCLP mathematical models of mixed-integer linear programming type that include two types of binary variables, algorithms for finding Pareto-optimal solutions for the purpose of project criteria management and further optimization of the favored contractors' criteria (n^+ out of total of n potential contractors) as well as the rules for choosing the best solution. Potential contractors are not equally significant. Their position depends on technical-human resource potentials, the list of previous projects carried out in other companies (in any housing and construction field), their participation in previous projects realized by our company, etc. However, it is possible that several contractors have equal priorities. When it comes to practical experience, there are three problems to be dealt with regarding the construction works parameters (time and cost), i.e. project phase and potential contractors: (1. unique parameters regardless contractors, 2. parameters that are applied to all potential contractors while carrying out the same project phase, when at least one phase includes more potential contractors, and 3. parameters for some potential contractors performing the same phase when at least one phase includes at least one pair of potential contractors having different types of parameters); two problems to be dealt with in each section (a. all project phases contractors are known, and b. there are more potential contractors for certain project phases) and two types for each problem: type -1 all potential contractors for the project (n) along with appropriate technical capacities, and type -2 when n^- contractors have rather limited capacities ($n^- \leq n$). According to the findings, type 1 deals with specific and determined project time and costs, which means that type 1 does not require selection, unlike the type 1.b where it is necessary to carry out value maximization, i.e. the costs C_j for n^+ of favored contractors $B_j, j \in J^+ = \{1, \dots, n^+\} \subseteq J = \{1, \dots, n\}$, by choosing the contractors for the phases they have already applied for, competing with the contractors having lower priorities. The

problems in relation to types 2 and 3 are given Parapeto-optimal solutions and final numbers of potential values for project duration and certain costs $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)}, k=1,2,\dots,q)$, in accordance with the method *PERT/COST*. As for the chosen one $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$, the main criteria of higher significance level imply the process of maximizing the contractor's costs $(C_j, j \in J^+)$ in accordance with their priorities (as criteria of lower significance level in comparison to the project criteria) by applying ε -constraint method. Appropriate algorithms for finding the solution for all mentioned problems have been defined and specified.

The fifth chapter consists of the applied model of selecting one contractor as well as the models 1 and 3 (types b and type 1) for selecting more contractors, based on the example of a housing project. As for the model 3.b.1, there is an illustration of four types of conditions defining the deadline for beginning of construction works. In conclusion, all the defined models and their algorithms can be applied in practice successfully.

The sixth chapter consists of the conclusions and findings of the research and it also provides suggestions for further research activities.

Literature (93 quotations and 75 repetitions) and bibliography (228 titles) are included in *the seventh chapter*. *The eight chapter* consists of *appendices, list of images and tables*.

KEY WORDS: construction project, housing construction, planning, time and costs of project, potential contractors, favored contractors, costs of contractors, classification of a contractor selection problems, selection models, multi-criteria optimization

Field of Science: Construction

Narrow scientific field: Construction management

UDK Number: 69:005.8:519.863(043.3)

САДРЖАЈ

| | Страна |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. УВОД | 1 |
| 1.1. ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА | 2 |
| 1.2. ЦИЉ ИСТРАЖИВАЊА | 3 |
| 1.3. ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА | 3 |
| 1.4. НАУЧНЕ МЕТОДЕ У ИСТРАЖИВАЊУ | 5 |
| 1.5. ОЧЕКИВАНИ ДОПРИНОСИ ИСТРАЖИВАЊА | 5 |
| 1.6. ОРГАНИЗАЦИЈА ПРИКАЗИВАЊА ИСТРАЖИВАЊА..... | 6 |
| 2. УПРАВЉАЊЕ ПРОЈЕКТОМ У ТЕОРИЈИ И ПРАКСИ | 7 |
| 2.1. ПОЈАМ ПРОЈЕКТА И ВРСТЕ ПРОЈЕКТАТА..... | 8 |
| 2.1.1. Дефиниција пројекта | 8 |
| 2.1.2. Врсте пројектата и циљеви пројектата..... | 9 |
| 2.1.3. Ресурси на пројекту | 10 |
| 2.1.4. Избор једног пројекта из скупа потенцијалних пројектата..... | 13 |
| 2.1.5. Учесници на пројекту и проблем избора извођача | 14 |
| 2.1.5.1. Избор једног извођача пројекта - аналитички приступ | 15 |
| 2.1.5.2. Избор више извођача пројекта – аналитички приступ..... | 17 |
| 2.1.6. Информациони системи и примена софтвера..... | 17 |
| 2.1.6.1. Информациони систем предузећа и информациони систем пројекта | 17 |
| 2.1.6.2. Хардверска и софтверска структура информационог система | 18 |
| 2.1.6.3. Коришћење интернета и интранета | 19 |
| 2.1.6.4. Базе података..... | 19 |
| 2.2. ПРОЦЕСИ УПРАВЉАЊА ПРОЈЕКТОМ..... | 20 |
| 2.2.1. Планирање пројекта и врсте планова | 22 |
| 2.2.1.1. Анализа структуре пројекта | 22 |
| 2.2.1.2. Мрежни планови..... | 24 |
| 2.2.1.3. Гантови дијаграми и друге врсте дијаграма | 26 |
| 2.2.1.4. Хистограми ресурса..... | 27 |
| 2.2.1.5. План трошкова | 27 |
| 2.2.1.6. Планови чланова пројектног тима..... | 27 |
| 2.2.2. Пројектни тим и организације за управљање пројектом..... | 27 |
| 2.2.3. Планирање реализације пројекта | 28 |
| 2.2.3.1. Планирање времена | 28 |
| а) Детерминистичка и стохастичка времена..... | 28 |
| а.1) Метода критичног критичног пута (CPM, Critical Path Method) са детерминистичким временима | 28 |
| а.2) Метода оцењивања и ревизије програма (PERT, Program Evaluation and Review Technique) са стохастичким временима..... | 32 |
| б) Јединствена и вишешеструка детерминистичка времена са одговарајућим трошковима | 34 |
| в) Времена трајања активности у функцији ресурса | 34 |
| 2.2.3.2. Планирање ресурса | 36 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| а) Нивелисање ресурса типа радне снаге и механизације..... | 36 |
| б) Планирање ресурса типа материјала | 36 |
| в) Оптимизација времена пројекта и коришћења ресурса | 40 |
| 2.2.3.3. Планирање трошкова | 40 |
| а) Процена трошкова | 40 |
| б) Оптимизација времена и трошкова – Метода PERT/COST (Creashing Cost/Time Tradeoffs) | 41 |
| б.1) Одређивање времена активности и трошкова..... | 42 |
| б.2) Два проблема методе PERT/COST..... | 44 |
| Проблем 1. Минимизација трошкова $C_p(T_0)$ за дато трајање пројекта T_0 | 45 |
| Алгоритам примене ручних поступака | 45 |
| Проблем 2. Минимизација трајања пројекта $T_p(C_0)$ за дате трошкове C_0 | 46 |
| 2.2.3.4. Буџет и динамика буџета у времену..... | 46 |
| а) Облици финансирања пројекта станоградње | 47 |
| б) Одабрани проблеми одређивања динамике буџета..... | 48 |
| б.1) Планирање динамике прилива новца и минимизација трајања пројекта са расположивим ресурсима | 48 |
| б.2) Утицај динамике и висине прилива новца на полазни план и реализацију пројекта..... | 49 |
| 2.2.3.5. Планирање ризика на пројекту..... | 50 |
| 2.2.4. Праћење и контрола реализације, ажурирање плана и анализа напредовања на пројекту | 51 |
| 2.2.5. Анализа изведеног пројекта и извођење закључака за будуће пројекте .. | 57 |
| 3. ЈЕДНОКРИТЕРИЈУМСКА И ВШЕКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА (ЈКО и ВКО)..... | 58 |
| 3.1. ЈЕДНОКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА (ЈКО)..... | 59 |
| 3.1.1. Поставка проблема једнокритеријумске оптимизације | 59 |
| 3.1.2. Решавање једнокритеријумских модела ЛП и анализа..... | 61 |
| 3.2. ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА (ВКО) | 62 |
| 3.2.1. Поставка проблема вишекритеријумске оптимизације (ВКО) | 62 |
| 3.2.1.1. Вишециљно одлучивање (ВЦО) или Вишекритеријумско програмирање (ВКП)..... | 62 |
| 3.2.1.2. Вишеатрибутивно одлучивање (ВАО) или Вишекритеријумска анализа (ВКА)..... | 63 |
| 3.2.2. Решавање модела вишекритеријумског програмирања (ВКП) и анализа | 64 |
| 3.2.2.1. Основне дефиниције модела ВКП | 64 |
| а) Савршено решење, Парето-оптимална решења и коначно решење..... | 64 |
| б) Почетна анализа и налажење нових Парето-оптималних решења | 67 |
| 3.2.2.2. Одабране методе решавања модела ВКП..... | 69 |
| а) Лексикографска метода | 70 |
| Релаксирана лексикографска метода..... | 72 |
| б) Тежинска сума критеријума | 72 |
| в) Метода ε -ограничења | 72 |

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2.2.3. | Анализа осетљивости решења и параметарска анализа модела | 73 |
| | а) Анализа осетљивости решења (SA – Sensitivity Analysis)..... | 74 |
| | а.1) СА решења модела методе ε -ограничења | 74 |
| | а.2) СА решења модела методе наизменичне оптимизације сваког критеријума..... | 75 |
| | б) Параметарска анализа модела – ПА (PA – Parametric Analysis)..... | 76 |
| | б.1) ПА модела методе ε -ограничења | 76 |
| | б.2) ПА модела методе наизменичне оптимизације сваког критеријума..... | 78 |
| 3.2.2.4. | Циљно програмирање (ЦП) | 79 |
| 3.2.3. | Решавање модела вишеатрибутивног одлучивања (ВАО) и анализа..... | 80 |
| 3.2.2.1. | Основне дефиниције модела ВАО..... | 80 |
| | а) Трансформација атрибута | 82 |
| | а.1) Квантификација квалитативних атрибута | 82 |
| | а.2) Модификација атрибута истог критеријума..... | 82 |
| | а.3) Нормализација и линеаризација атрибута..... | 83 |
| | б) Дефинисање значајности ли тежина критеријума..... | 84 |
| | в) Више нивоа критеријума..... | 84 |
| | г) Превођење модела са више нивоа критеријума у „модел са једним нивоом критеријума“ | 86 |
| 3.2.3.2. | Одабране методе решавања модела ВАО | 86 |
| | а) Непосредно одређивање решења – брзо одлучивање | 87 |
| | б) Одабране једноставне методе ВАО..... | 88 |
| | б.1) Метода доминације, MAXIMIN и MINIMAX..... | 89 |
| | б.2) Лексикографска метода | 89 |
| | б.3) Методе са адитивним тежинама критеријума..... | 90 |
| | в) Метода аналитичких хијерархијских процеса (АХП) | 91 |
| | в.1) Решавање модела ВАО и предности методе АХП..... | 93 |
| | 1) Структурирање или моделирање проблема (Problem modelling) | 93 |
| | 2) Поређење парова (Pairwise comparation)..... | 94 |
| | 3) Оцењивање (Judgement scales) | 94 |
| | 4) Одређивање приоритета (Priorities derivation)..... | 95 |
| | 4.1) Приоритети критеријума | 95 |
| | 4.1.а) Непосредно дефинисање приоритета критеријума..... | 95 |
| | 4.1.б) Коришћење матрице поређења свих парова критеријума | 96 |
| | 4.2) Приоритети алтернатива | 97 |
| | 4.2.а) Непосредно дефинисање вредности критеријума за алтернативе..... | 97 |
| | 4.2.б) Коришћење матрице поређења свих парова алтернатива посматраног критеријума..... | 97 |
| | 5) Конзистентност/усаглашеност оцена (Consistency)..... | 98 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6) Агрегација/синтетизација параметра атрибута (Aggregation) | 99 |
| 6.1) Прорачун глобалних приоритета (под)критеријума нижих нивоа | 99 |
| 6.2) Прорачун глобалних приоритета атернатива критеријума виших нивоа | 99 |
| 7) Решење модела ВАО и решења подмодела нижих нивоа приоритета критеријума | 102 |
| 8) Анализа осетљивости решења (Sensitivity Analysis) | 102 |
| 9) Параметарска анализа модела (Sensitivity Analysis of the Model) | 103 |
| в.2) Нека ограничења методе АХП | 103 |
| 4. КЛАСИФИКАЦИЈА ПРОБЛЕМА ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ВИШЕ ИЗВОЂАЧА ПРОЈЕКТА, ОПШТИ МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ ВК- МЦЛП И АЛГОРИТМИ РЕШАВАЊА | 104 |
| 4.1. ЈЕДИНСТВЕНИ ПАРАМЕТРИ ЗА ФАЗЕ ПРОЈЕКТА И ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ИЗВОЂАЧЕ | 108 |
| 4.1.1. Јединствени параметри фаза пројекта, познати извођачи фаза пројекта | 108 |
| 4.1.1.1. Проблем 1.а.1. Познати извођачи фаза, извођачи са довољним капацитетима | 108 |
| Карактеристике модела МЦЛП у односу на анализу времена пројекта | 109 |
| 4.1.1.2. Проблем 1.а.2. Познати извођачи фаза, n^- извођача са ограниченим капацитетима | 110 |
| 4.1.2. Јединствени параметри фаза пројекта, неке фазе са више потенцијалних извођача | 111 |
| 4.1.2.1. Проблем 1.б.1. t^+ фаза са више потенцијалних извођача, потенцијални извођачи пројекта са довољним капацитетима | 111 |
| 4.1.2.2. Проблем 1.б.2. t^+ фаза са више потенцијалних извођача, n^- потенцијалних извођача пројекта са ограниченим капацитетима | 113 |
| 4.2. ИСТОВЕТНЕ ВАРИЈАНТЕ ПАРАМЕТАРА ПОТЕНЦИЈАЛНИХ ИЗВОЂАЧА ИСТЕ ФАЗЕ | 115 |
| 4.2.1. Познати извођачи фаза пројекта, неке фазе са варијантама параметара | 115 |
| 4.2.1.1. Проблем 2.а.1. Познати извођачи фаза, t^+ фаза са варијантама параметара, извођачи са довољним капацитетима | 116 |
| 4.2.1.2. Проблем 2.а.2. Познати извођачи фаза, t^+ фаза са варијантама параметара, n^- извођача ограничених капацитета | 117 |
| 4.2.2. Јединствене варијанте параметара фаза пројекта, неке фазе са више потенцијалних извођача | 118 |
| 4.2.2.1. Проблем 2.б.1. t^+ фаза са више потенцијалних извођача, потенцијални извођачи пројекта са довољних капацитета | 118 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2.2.2. Проблем 2.б.2. t^+ фаза са више потенцијалних извођача, n^- потенцијалних извођача пројекта ограничених капацитета..... | 118 |
| 4.3. РАЗЛИЧИТЕ ВАРИЈАНТЕ ПАРАМЕТАРА ПОТЕНЦИЈАЛНИХ ИЗВОЂАЧА НЕКИХ ФАЗА ПРОЈЕКТА | 120 |
| 4.3.1. Познати извођачи фаза пројекта са варијантама параметара неких фаза..... | 120 |
| 4.3.1.1. Проблем 3.а.1. Познати извођачи фаза, t^+ фаза са варијантама параметара, извођачи довољних капацитета..... | 121 |
| 4.3.1.2. Проблем 3.а.2. Познати извођачи фаза, t^+ фаза са варијантама параметара, n^- извођача ограничених капацитета | 121 |
| 4.3.2. Више потенцијалних извођача неких фаза, неке фазе са различитим варијантама параметара | 122 |
| 4.3.2.1. Проблем 3.б.1. t^+ фаза са више потенцијалних извођача, t^+ фаза са варијантама параметара, потенцијални извођачи пројекта довољних капацитета..... | 122 |
| 4.3.2.2. Проблем 3.б.2. t^+ фаза са више потенцијалних извођача, t^+ фаза са варијантама параметара, n^- потенцијалних извођача пројекта ограничених капацитета..... | 122 |
| 4.4. АЛГОРИТМИ РЕШАВАЊА ДЕФИНИСАНИХ МОДЕЛА ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ВИШЕ ИЗВОЂАЧА ПРОЈЕКТА | 124 |
| 4.4.1. Алгоритми решавања модела групе 1 са јединственим параметрима фаза пројекта | 124 |
| 4.4.1.1. Алгоритми решавања модела 1.а са познатим извођачима фаза пројекта | 124 |
| а) Алгоритам модела 1.а.1 са довољним капацитетима извођача | 124 |
| б) Алгоритам модела 1.а.2 са ограниченим капацитетима неких неких извођача | 125 |
| 4.4.1.2. Алгоритми решавања модела 1.б са више потенцијалних извођача неких фаза пројекта..... | 125 |
| а) Алгоритам модела 1.б.1 са довољним капацитетима потенцијалних извођача пројекта..... | 125 |
| а.1) Почетна анализа модела 1.а.1 (Етапа 1)..... | 125 |
| а.2) Нова Парето-оптимална решења модела 1.б.1 (Етапа 2) | 127 |
| 1) Кључни кораци процеса решавања модела 1.б.1 ... | 134 |
| 2) Модификација алгоритма модела 1.б.1 | 135 |
| а.3) Избор коначног решења модела 1.б.2 (Етапа 3) | 138 |
| б) Алгоритам модела 1.б.2 са ограниченим капацитетима неких потенцијалних извођача пројекта | 139 |
| б.1) Почетна анализа модела 1.а.1 (Етапа 1)..... | 139 |
| б.2) Нова Парето-оптимална решења модела 1.б.2 (Етапа 2) | 141 |
| б.3) Избор коначног решења модела 1.б.2 (Етапа 3) | 141 |
| 4.4.2. Алгоритми решавања модела групе 2 са идентичним варијантама параметара потенцијалних извођача исте фаза пројекта | 142 |
| 4.4.2.1. Алгоритми решавања модела 2.а са познатим извођачима фаза пројекта | 142 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| a) Алгоритам модела 2.а.1 са довољним капацитетима извођача | 142 |
| a.1) Почетна анализа модела 2.а.1 (Етапа 1)..... | 143 |
| a.2) Нова Парето-оптимална решења модела 2.а.1 (Етапа 2) | 146 |
| 1) Оптимизација трошкова и времена пројекта методом PERT/COST | 146 |
| Проблем 1. Минимизација C_p за дато T_0 (Основни процес 2.а.1) | 146 |
| 2) Максимизација трошкова фаворизованих извођача за Парето-решења ($C_p^{(k)}$, $T_p^{(k)}$) основног процеса (Подпроцес 2.а.1)..... | 149 |
| a.3) Избор коначног решења модела 2.а.1 (Етапа 3) | 150 |
| б) Алгоритам модела 2.а.2 са ограниченим капацитетима неких извођача | 150 |
| б.1) Почетна анализа модела 2.а.2 (Етапа 1)..... | 151 |
| б.2) Нова Парето-оптимална решења модела 2.а.2 (Етапа 2) | 151 |
| б.3) Избор коначног решења модела 2.а.2 (Етапа 3) | 151 |
| 4.4.2.2. Алгоритми решавања модела 2.б са више потенцијалних извођача неких фаза пројекта..... | 151 |
| a) Алгоритам модела 2.б.1 са довољним капацитетима потенцијалних извођача пројекта | 152 |
| б) Алгоритам модела 2.б.2 са ограниченим капацитетима неких потенцијалних извођача пројекта..... | 152 |
| 4.4.3. Алгоритми решавања модела групе 3 са различитим варијантама параметара исте фазе пројекта | 152 |
| 4.4.4. Алгоритми решавања модела са одабраним варијантама приоритета циљева пројекта и циљева фаворизованих потенцијалних извођача..... | 154 |
| 5. ПРИМЕНА ОДАБРАНИХ ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКИХ МОДЕЛА ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ИЗВОЂАЧА ПРОЈЕКТА СТАНОГРАДЊЕ..... | 160 |
| 5.1. ОПИС ГРЂЕВИНСКЕ КОМПАНИЈЕ И ОДАБРАНОГ ПРОЈЕКТА..... | 161 |
| 5.1.1. Грађевинска компанија..... | 161 |
| 5.1.2. Одабрани пројекат иградње стамбено-пословног објекта | 162 |
| 5.1.2.1. Опис пројекта | 162 |
| 5.1.2.2. Опис радова на пројекту | 162 |
| 5.2. МОДЕЛ ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ЈЕДНОГ ИЗВОЂАЧА ЗА ПРОЈЕКАТ У ЦЕЛОСТИ..... | 169 |
| 5.2.1. Потенцијални извођачи за пројекат у целости и њихове карактеристике..... | 169 |
| 5.2.2. Циљеви пројекта и приоритети циљева..... | 170 |
| 5.2.3. Вишекритеријумска анализа и избор најповољнијег извођача за пројекат у целости | 170 |
| 5.2.3.1. Сужавање листе потенцијалних извођача..... | 172 |
| 5.2.3.2. Непосредно одређивање решења – брзо одлучивање..... | 172 |
| 5.2.3.3. Приоритети критеријума модела избора..... | 173 |
| 5.2.3.4. Решавање модела применом софтвера Expert Choice | 173 |
| a) Решења модела са свим извођачима и делом извођача..... | 176 |
| б) Решења глобалног модела и парцијалних модела са свим потенцијалним извођачима | 177 |
| 5.2.3.5. Анализа осетљивости решења и параметарска анализа модела..... | 179 |
| 5.2.3.6. Избор најповољнијег извођача | 182 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.3. МОДЕЛИ ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ВИШЕ ИЗВОЂАЧА ЗА РАДОВЕ НА ПРОЈЕКТУ | 183 |
| 5.3.1. Потенцијални извођачи за делове пројекта и проблем оптималног избора извођача..... | 183 |
| 5.3.1.1. Циљеви пројекта и потенцијалних извођача за делове пројекта | 183 |
| 5.3.1.2. Приоритети циљева проблема избора..... | 183 |
| 5.3.2. Примена модела 1 са јединственим параметрима за радове..... | 184 |
| 5.3.2.1. Карактеристична Парето-оптималн решења модела 1.б.1 и избор најповољнијег решења | 185 |
| 5.3.2.2. Карактеристична Парето-оптимална решења модела 1.б.2. и избор најповољнијег решења | 195 |
| 5.3.3. Примена модела 2 са варијантама параметара за радове..... | 196 |
| 5.3.3.1. Минимизација трошкова за дато трајање пројекта..... | 200 |
| 5.3.3.2. Минимизација трајања пројекта за дате трошкове | 203 |
| 5.3.4. Примена модела 3 са варијантама параметара за извођаче..... | 205 |
| 5.3.4.1. Карактеристична Парето-решења и избор коначног решења..... | 209 |
| 5.3.4.2. Примена модела ВАО за избор коначног решења | 216 |
| 5.3.5. Проблеми оптималног избора са условима потенцијалних извођача | 218 |
| 5.4. АНАЛИЗА ПРИМЕНЕ ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКИХ МОДЕЛА ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ИЗВОЂАЧА ПРОЈЕКТА СТАНОГРАДЊЕ | 227 |
| 5.4.1. Анализа примене модела оптималног избора једног извођача пројекта..... | 227 |
| 5.4.2. Анализа примене модела оптималног избора више извођача радова на пројекту..... | 227 |
| 5.4.2.1. Анализа примене модела 1..... | 228 |
| 5.4.2.2. Анализа примене модела 2 | 229 |
| 5.4.2.3. Анализа примене модела 3 | 231 |
| 5.4.2.4. Анализа примене модела проблема са условима потенцијалних извођача | 232 |
| 6. ЗАВРШНА РАЗМАТРАЊА | 233 |
| 6.1. ЗАКЉУЧЦИ О ИСТРАЖИВАЊИМА И РЕЗУЛТАТУ ДИСЕРТАЦИЈЕ | 235 |
| 6.2. ПРЕДЛОГ БУДУЋИХ ИСТРАЖИВАЊА | 240 |
| 7. ЛИТЕРАТУРА | 241 |
| 8. ПРИЛОЗИ | 255 |
| 1. ЛИСТА СЛИКА | 256 |
| 2. ЛИСТА ТАБЕЛА | 261 |
| 9. БИОГРАФИЈА И ИЗЈАВЕ | 264 |
| Биографија аутора..... | 265 |
| Изјава о ауторству | 266 |
| Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторске дисертације ... | 267 |
| Изјава о коришћењу | 268 |

7

7

1.

УВОД

7

Оптимальни избор извођача радова на пројекту са становишта трошкова и времена јесте основни предуслов за успешно извођење сваког пројекта и остваривање постављених циљева – трошкова и времена пројекта.

Савремени услови пословања намећу потребу да сваки пословни систем (предузеће или компанија) врши непрекидно прилагођаване постојећем тржишном окружењу у одговарајућем планском периоду. Било да предузеће нуди производе или услуге, оно мора да разматра конкуренте са идентичним или сличним понудама, са једне стране и промене потреба купаца, са друге стране. При томе, посебно се истичу ситуације када предузеће ангажује извођаче или подизвођаче специјализоване за одговарајуће делове производа, које оно не може да реализује сопственим ресурсима. Такви учесници најчешће имају сопствене циљеве (вредности радова и др.) који могу да буду у међусобном конфликту и у супротности од циљева предузећа.

Организовањем свог пословања, предузеће треба да настоји да задржи и увећа своје присуство на освојеном тржишту, као и да оствари проширење на нова тржишта.

Услови пословања постављају захтеве за организационом флексибилношћу, ефикасним управљањем и циљном оријентацијом у процесу постизања бољих пословних резултата. Један од одговора на настале промене представља и приступ пројектне оријентације предузећа.

Постављањем пројекта у саму основу пословања предузећа намеће се потреба ефикасног управљања одговарајућим пројектима са основним циљем да се у датим условима остваре што повољнији резултати пословања.

Предуслови да се приступи савременом организовању пословања у предузећу створени су применом савремене теорије и информационих технологија:

- постоји посебна научна дисциплина Управљање пројектима (Пројект Манаџмент) која обједињује низ научних дисциплина у одговарајућу методологију управљања пројектима,
- доступни су софтверски пакети за управљање пројектима (Мицрософт Пројект, Примавера и др.), као и софтверски пакети за друге пратеће проблеме (планирање транспорта материјала за градилишта, планирање производње грађевинског материјала у сопственим погонима, вишекритеријумска анализа при избору добављача и подизвођача и друго).

1.1. ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА

Имајући на уму објективно стање у нашим предузећима, глобални предмет истраживања докторске дисертације представља разматрање управљања једним пројектом уз примену математичких модела и софтвера.

Разматрајући процес управљања пројектом којим се обухвата планирање и контрола пројекта, уз евентуалне корекције плана у току реализације пројекта, истражиће се стварање ефикаснијих основа за постизање бољих пословних резултата предузећа. Тежиште истраживања ће бити на фази планирања пројекта.

Полазећи од основног захтева да се најрационалније користе расположиви ресурси предузећа и остваре максимални ефекти пословања у условима када се врши ангажовање више учесника са стране, истраживање ће обухвати развој специфичне методологије за израду плана пројекта.

Сходно наведеном, истраживања у оквиру докторске дисертације ће се заснивати на следећим аспектима:

- стање у теорији и пракси управљања пројектима код нас и у развијеним земљама,
- основни елементи пројекта (време, потребни видови ресурса, финансијска средства и др.),
- дефинисање једног циља на пројекту или више циљева који су подједнако значајни или имају различите степене значајности,
- анализа потенцијалних пројеката и избор једног пројекта,
- постављање ограничења, односно услова на пројекту (рок, расположиви ресурси, висина буџета, динамика буџета и др.),
- анализа потенцијалних учесника на пројекту и евентуалних њихових циљева (вредности радова) и/или услова (рокови почетака или завршетака ангажовања, периоди ангажовања, вредности радова и сл.),
- избор једног извођача за пројекат или избор више извођача, односно подизвођача за делове пројекта на основу њихових карактеристика (техничка и кадровска опремљеност и др.) и могућих приоритета за подизвођаче који су учествовали на ранијим пројектима,
- израда варијанти планова пројекта у процесу избора више учесника на основу усаглашавања потенцијалних конфликта између интереса учесника и циљева пројекта,
- избор најповољније варијанте плана пројекта у датим условима пословања,
- уградња математичког моделовања одговарајућих проблема и теорије оптимизације у предложеној методологију планирања пројекта, и
- примена потребних софтверских пакета у процесу планирања пројекта.

У току истраживања ће се разматрати проблем који одговара одабраном конкретном пројекту у пракси из домена станоградње.

1.2. ЦИЉ ИСТРАЖИВАЊА

Циљ истраживања је да се научно познатим, признатим и примењеним методама и поступцима дефинишу ефикасни процеси који се заснивају на математичким моделима и стварају подлогу за ефикасно планирање пројекта и избор учесника на пројекту у складу са постављеним циљевима за пројекат и учеснике.

1.3. ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА

Општа хипотеза у истраживању на докторској дисертацији:

- Планирање сваког реалног пројекта представља сложен вишекритеријумски проблем, што карактерише и целокупан процес управљања пројектом.

Посебне хипотезе за фазу планирања пројекта, као предмета истраживања:

- Сваки пројекат може да се опише одговарајућим вишекритеријумским математичким моделом са скупом циљева (трајање, цена, квалитет и сл.) и скупом ограничења (расположива финансијска средства, радна снага, механизација, материјали и сл.).
- Комплексан пројекат може да представља скуп проблема вишекритеријумске оптимизације (ВКО) из класе програмирања (ВКП) или вишециљног одлучивања (ВЦО) и проблема вишекритеријумске анализе (ВКА) или вишеатрибутивне оптимизације (ВАО).
- Предузеће може доделити пројекат једном извођачу (проблем ВАО) или бирати више извођача за делове пројекта (проблем ВКП за избор извођача са одређивањем варијанти решења и проблем ВАО за избор коначног решења).
- Предузеће може да изведе део пројекта сопственим ресурсима и за остатак ангажује једног извођача (проблем ВАО) или више извођача (проблем ВКП и проблем ВАО).
- Пројекат може да има више циљева, првенствено трајање и трошкове, који су подједнако значајни или различитих приоритета.
- При избору више извођача, критеријуми пројекта су већег степена значајности од критеријума извођача којима се могу доделити одговарајући приоритети.
- Ако различита предузећа реализују исту врсту пројекта, настају посебни проблеми који исказују циљеве и ограничења одговарајућих предузећа.
- Ако једно предузеће реализује исту врсту пројекта, не мора нужно да се поставе исти критеријуми и/или иста ограничења (разлика у локацији, времену, наручиоцу, подизвођачима, квалитету, висини и/или динамици буџета и друго), тако да се ранији и нови пројекат могу разматрати као различити проблеми, односно описати различитим математичким моделима, и могу имати различита решења.

Одговарајуће хипотезе могу се поставити за фазу реализације и контролу пројекта које нису предмет детаљнијег истраживања у оквиру докторске дисертације.

Појединачне хипотезе за фазу планирања пројекта са становишта модела за избор више извођача, као предмета истраживања:

- Базични математички модел пројекта из класе вишекритеријумског мешовитог целобројно линеарног програмирања представља комбинацију релација за опис: критеријума пројекта (трајање и трошкови), графа са структуром пројекта, потреба за ресурсима, расположивих ресурса и динамике буџета. Решава се применом одговарајућег софтвера.
- Проширени математички модел пројекта уводи потенцијалне извођаче са њиховим условима и циљевима, што захтева коришћење одговарајућих бинарних променљивих.
- Наведеном проблему одговара скуп парето-оптималних решења, уколико нема савршено решење са оптималним вредностима за све критеријуме. Потребно је бирати једно коначно решење које се сматра да је најповољније у датим условима.
- Није увек могуће одредити сва парето-оптимална решења, или то није рационално. Довољно је одредити подскуп таквих решења за које се усвоји да представљају прихватљиву основу при избору коначног решења.

- Стандардни софтвер за управљање пројектима потребно је користити за детаљно планирање пројекта са усвојеним решењем о извођачима и даље управљање реализацијом пројекта.

1.4. НАУЧНЕ МЕТОДЕ У ИСТРАЖИВАЊУ

У циљу да се успешно реализују дефинисани циљеви истраживања и потврдиле или одбациле постављене хипотезе, предвиђа се коришћење следећих научних метода:

- анализа - синтеза,
- индукција - дедукција,
- конкретизација - генерализација.

За процес моделовања проблема и процес решавања проблема предвиђа се коришћење наредних метода:

- методе структурирања пројекта,
- методе процене и анализе трошкова,
- методе оптимизације времена и трошкова,
- методе вишекритеријумског програмирања,
- методе вишекритеријумске анализе и др.

1.5. ОЧЕКИВАНИ ДОПРИНОСИ ИСТРАЖИВАЊА

У оквиру предвиђеног истраживања на докторској дисертацији настојаће се остварити конкретни научни и стручни доприноси.

Научни доприноси:

- Теоријски и емпиријски развој методологије планирања пројекта са више учесника за одговарајуће делове пројекта.
- Развој општих вишекритеријумских математичких модела за планирање различитих видова пројекта са становишта циљева, ограничења и више учесника на пројекту.
- Дефинисање метода за решавање одабраних проблема планирања пројекта у складу са постављеним циљевима и условима на почетку пројекта – усаглашавање циљева потенцијалних учесника са циљевима пројекта и избор учесника на пројекту.
- Идентификовање потреба да се одреде сва парето-оптимална решења која представљају варијанте плана пројекта или да се одреди примерени скуп таквих решења који се сматра да представља прихватљиву основу за даљи избор једног решења за примену.
- Дефинисање модела вишеатрибутивног одлучивања за избор коначног решења плана пројекта са изабраним учесницима и избор ефикасног метода решавања.

Стручни доприноси:

- Конкретизација развијене методологије планирања пројекта са више учесника на одабраном пројекту у области станоградње и одабраним хипотетичким примерима пројекта.

1.6. ОРГАНИЗАЦИЈА ПРИКАЗИВАЊА ИСТРАЖИВАЊА

Излагање резултата истраживања у оквиру докторске дисертације организовано је у осам поглавља и издвојеном прилогу.

■ У поглављу 1 су изложена уводна разматрања, дефинисан је проблем и предмет истраживања и постављени су циљеви истраживања.

■ У поглављу 2 су изложени појмови значајни за управљање пројектом: пројекат и врсте планова, пројектни тим и организације за прављање пројектом, планирање реализације пројекта, праћење и контрола реализације, и анализа изведеног пројекта и извођење закључака за успешније управљање будућим пројектима.

■ У поглављу 3 укратко је приказана једнокритеријумска оптимизација (ЈКО) за моделе линеарног програмирања (ЛП) и детаљно вишекритеријумска оптимизација (ВКО). Област ВКО раздвојена је на вишециљно одлучивање (ВЦО) или вишекритеријумско програмирање (ВКП) са моделима ЛП и вишеатрибутивно одлучивање (ВАО) или вишекритеријумску анализу (ВКА). Указано је на симплекс методу за ЈКО и приказане су одабране методе за ВКП са пост-оптималном анализом и параметарском анализом. За ВАО су описане одабране једноставније методе и детаљно је изложена метода аналитичких хијерархијских процеса (АХП) са анализом осетљивости решења.

■ У поглављу 4, као најзначајнијем делу истраживања, извршена је класификација проблема избора више извођача на пројекту: јединствени параметри (времена и трошкови) фаза пројекта, јединствене варијанте параметара фаза за све потенцијалне извођаче и различите варијанте параметара неких потенцијалних извођача исте фазе. Разматрани су случајеви фаза са више потенцијалних извођача и расположиви радни капацитети (довољним или ограничени) потенцијалних извођача за пројекат. Формирани су одговарајући општи математички модели мешовито целобројног ЛП са критеријумима за пројекат и извођаче, дефинисани су алгоритми налажења Парето-оптималних решења и указано на избор коначног решења.

■ У поглављу 5 су примењени вишекритеријумски модели избора извођача на примеру пројекта станоградње. Избор једног извођача пројекта изложен је применом модела ВАО са софтвером *Expert Chose* за методу АХП из поглавља 3. Избор више извођача пројекта приказан је применом модела и алгоритама за три проблема из поглавља 4 разматрањем скупа потенцијалних извођача квалификованих за извођење одговарајућих радова и додељених приоритета. Најповољнији извођачи, односно Парето-оптимална решења за посматрана времена трајања пројекта и одговарајуће трошкове одређени су применом софтвера *Linear and Integer Programming* из пакета *WinQSB (Quantitative Systems for Business)*. Приказује се избор коначног решења непосредном анализом свих решења и применом ВАО. Планови пројекта формиран су софтвером МС Пројект. Решавани су и одабрани проблеми са условима потенцијалних извођача за периоде њиховог учешћа на пројекту. На крају је извршена анализа примене наведених модела и дате су одговарајуће препоруке.

■ У поглављу 6 дају се закључна разматрања са пегледом очекиваних научних и стручних доприноса резултата истраживања и наводе будућа истраживања у овим областима.

■ Поглавље 7 садржи литературу.

■ Поглавље 8 чине листе табела и слика.

■ Поглавље 9 укључује биографију аутора и изјаве о дисертацији.

III

1

2.

**УПРАВЉАЊЕ ПРОЈЕКТОМ
У ТЕОРИЈИ И ПРАКСИ 1**

Рационално одлучивање подразумева оптимизацију проблема у смислу налажења најбољег решења са датим ограничавајућим условима пословања, *разматрајући један критеријум или више критеријума.*

Управљање пројектом заснива се на примени мрежног планирања (МП), односно технике мрежног планирања (ТМП) која је развијена у оквиру научне области операциона истраживања (ОИ) и касније пренета у нову научну област управљање пројектом (УП).

2.1. ПРОЈЕКАТ И ВРСТЕ ПРОЈЕКТА

У овом делу излажу се појмови пројекта и елемената пројеката, врсте пројеката и могући циљеви, учесници на пројекту и проблем избора извођача, информациони системи пројекта и примена стандардног софтвера за управљање пројектима.

2.1.1. Дефиниција пројекта

У литератури постоје бројне дефиниције пројекта као непоновљивог подухвата који се предузима са одређеном намером. Одабране опште дефиниције су:

- Пројекат означава свеукупност економских, организационих и техничких мера, усмерених на изградњу новог објекта, конструкције, система, уређаја, обраду научно-истраживачке теме или извршавање других сличних задатака.¹
- Пројекат је јединствен процес који се састоји од скупа координисаних и контролисаних активности са одређеним датумима почетака и завршетака које се предузимају да би се испоручио производ у складу са постављеним захтевима, при чему постоје ограничења на време, трошкове и ресурсе.²

За разлику од пројеката у општем смислу, изградња, реконструкција, модификација и опремање објекта је увек у директној вези са грађевинаством као привредном граном. Зато се овакви пројекти могу називати „грађевински“, „архиктетонски“ или, чешће и правилније, „инвестициони пројекти“. При томе се подразумева прогресивна реализација низа активности, од саме идеје о одређеном добру, преко израде прединвестиционих студија, планске и пројектне документације до уговарања, изградње, опремања, обуке кадрова и пуштања објекта у експлоатацију. Произилази да је прихватљива дефиниција:³

¹ Petrić, J., *Operaciona istraživanja*, Naučna knjiga, Beograd, 1972., Glava 9. *Mrežno planiranje*, str. 574.

² Крчевинац, С., и др., *Операциона истраживања*, Факултет организационих наука, Београд, 2002., стр. 371-372.

³ Ivković, B., Popović, Ž., *Upravljanje projektima u građevinarstvu - Treće, izmenjeno i dopunjeno izdanje*, Građevinska knjiga a.d., Beograd, 2005., str. 1-2.

- Инвестициони пројекат представља комплексан техничко-технолошки, организациони, финансијски и правни подухват, који се састоји од скупа координираних и контролираних активности са јасно дефинисаним почетком и крајем, чији је циљ изградња, реконструкција, модификација и/или опремање објекта или објеката који су потребни власнику (инвеститору).

Слична је и дефиниција са указивањем на профит инвеститора:⁴

- Инвестициони пројекат претставља комплексан техничко-технолошки, организациони, финансијски и правни подухват чији је циљ изградња и опремање објекта или објеката за које је претходним инвестиционим студијама показано и доказано да су својом функцијом неопходни инвеститору и/или да му доносе профит.

Више пројеката могу да конкуришу за исте ресурсе, што је узроковало развојем научне дисциплине Управљање са више пројеката (*Multiple Project Management*).^{5,6} У многим случајевима пројекат формира део веће пројектне структуре, тј. разматрани пројекат је потпројекат неког већег пројекта. Зато је настала научна дисциплина Управљање програмом пројеката (*Program Management*) као одговор на потребу да се групом сродних пројеката управља на конзистентан начин у циљу остваривања користи и контроле које нису доступне када се сваким пројектом посебно управља.⁷

2.1.2. Врсте пројеката и циљеви пројекта

Пројектима се могу сматрати сви организовани подухвати у људском деловању који се предузимају са одговарајућим циљевима (табела 1).⁸

Циљеви пројекта зависе од његове природе. На грађевинским пројектима су основни наредни циљеви, који су по правилу међусобно кнфликтни.

- минимални трошкови
- минимално трајање
- максималан квалитет, односно остваривање планиране доње границе квалитета
- максимално задовољење купца/наручиоца (дизајн, опремање и др.).

Неке врсте пројекта, посебно у информационим технологијама, укључују као битан циљ задовољство учесника (креатора софтвера и осталог), што се може усвојити да важи и за грађевинске пројекте.

⁴ Ivković, B. i dr., *Upravljanje infrastrukturnim projektima*, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Katedra za menadžment, tehnologiju i informatiku u građevinarstvu, Izdavač Nacionalna agencija za regionalni razvoj, Beograd, 2012., str. 15.

⁵ Drobñaković, S., *CD: Upravljanje sa više projekata – Multi Project Management*, Vojnoizdavački zavod, Beograd, 2001.

⁶ Nikolić, I., *CD: Pm&Pm - Project Management & Multi Project Manament (upravljanje projektom i projektima) u graditeljstvu sa odabranim priložima*, Fakultet za graditeljski menadžment, Beograd, 2002-2003.

⁷ Jovanović, P., i dr., *Metode i tehnike Projektnog Menadžmenta*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2007., str. 1

⁸ ibid. Nikolić, I., 2002-2003.

2.1.3. Ресурси на пројекту

Обављање неке активности захтева коришћење одређених ресурса са одговарајућим ценама које одређују трошкове активности. *Појам ресурс* (француски *resource*) може се схватити као: избор, начин, средство, резерва. У савременом пословању схвата се као свака потреба за остваривање циљева, што могу да буду: простор, опрема и уређаји, материјали, људи и њихова знања, новац, итд. *Између функција, ресурса и послова предузећа успоставља се одговарајућа зависност у складу са циљевима предузећа* (слика 1).⁹

Табела 1. Области пословања и врсте пројеката

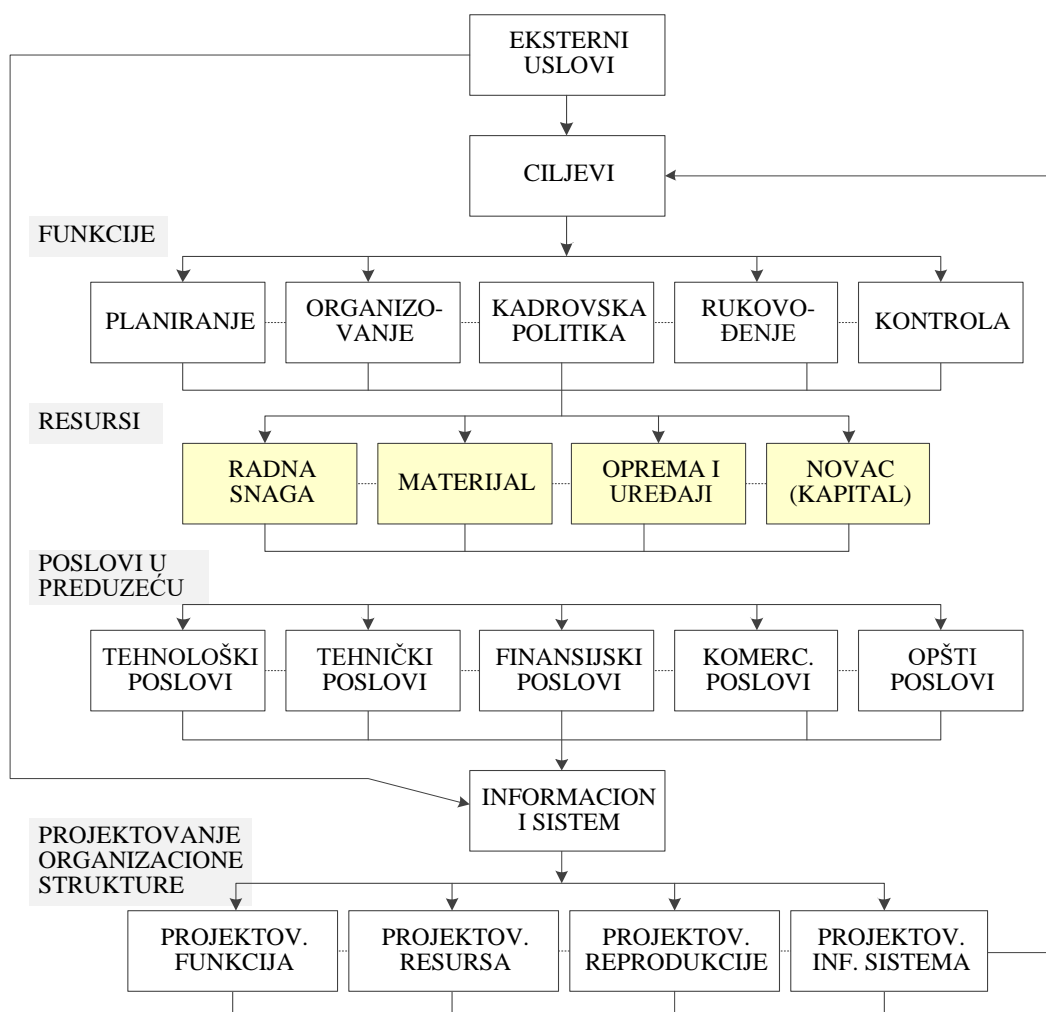
| | |
|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Научно-истраживачки и развојни пројекти | <ul style="list-style-type: none"> – нови производи, обрада нових тема, развој и имплементација информационих система, итд. – иновације – нове методе, нова организација – увођење система квалитета ИСО, итд. |
| Привредни подухвати | <ul style="list-style-type: none"> – капиталне инвестиције: енергетски објекти, индустријски и водопривредни системи, ПТТ, железница, електропривреда, путеви, итд. – производња и одржавање: монтажа производа и објеката, превентивно и корективно одржавање, генерални ремонти, итд. – изградња објеката : зграде, насеља, улице, мостови, бродови, насипи, црпне станице, ТВ станице и релеји, путна и железничка инфраструктура, телекомуникациони и електропривредни објекти, итд. – експлоатација руда и шума, – уређење земљишта, послови у пољопривреди, и сл. |
| Управљање људским ресурсима | <ul style="list-style-type: none"> – одељења, сектора, предузећа, институције, – корпорације, удружених пословних система, – друштвено-политичких заједница, регија, итд.. |
| Војни планови | <ul style="list-style-type: none"> – изградња и одржавање објеката и средстава, – асигнација ресурса и координација активности у времену и простору, – праћење развоја, опремања, дејстава и задатака, и др. |
| Друштвене и културне делатности | <ul style="list-style-type: none"> – организација семинара, саветовања, конгреса, – организација позоришних представа, културних и туристичких манифестација, – организација спортских манифестација, – организација снимања филмова, ТВ касета, музичких и видео ЦД-а, итд. |

Ресурси се могу сврстати у одговарајуће категорије, а за грађевинске пројекте су битне.¹⁰

⁹ Dutina, V., *Menadžment građevinskih preduzeća*, Univerzitet u prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica, 2006., str. 30-31.

¹⁰ Marković, Lj., „Unapređenje procesa realizacije investicionog projekta sa analizom troškova i rizika“, *Doktorska disertacija*, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, 2008., str. 56.

- радна снага
- материјали
- информације/технологија
- објекти
- средства за рад
- новац
- опрема
- механизација



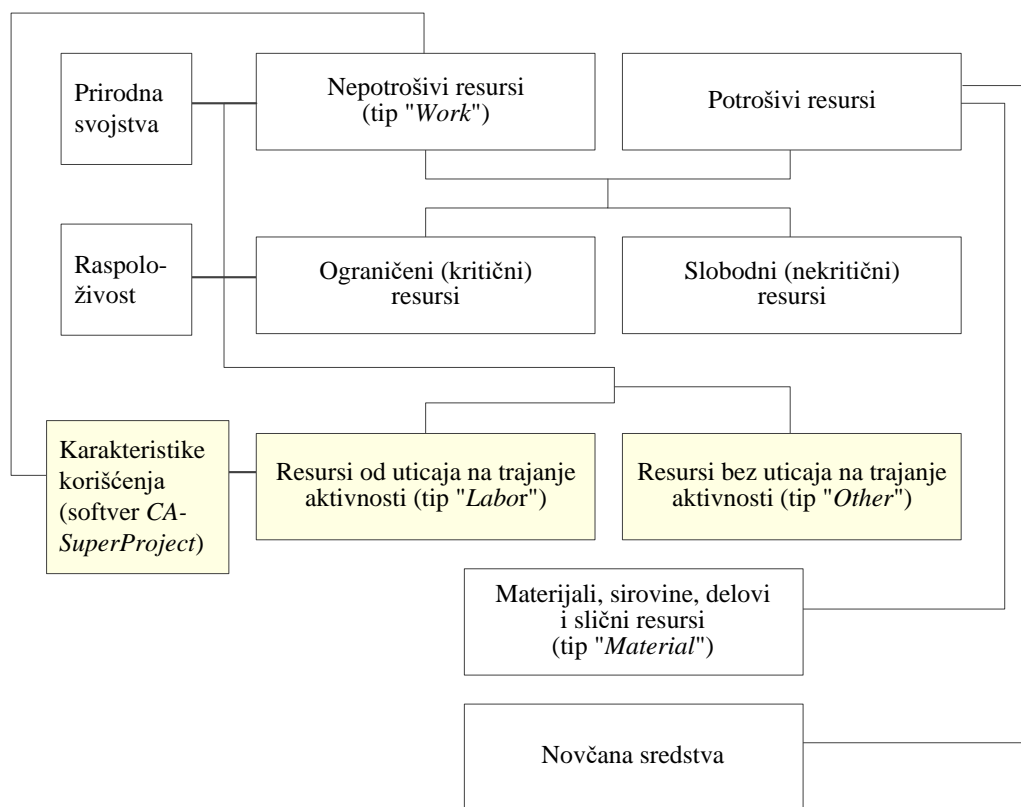
Слика 1. Међузависност функција, ресурса и послова грађевинског предузећа
[преузето из:Дутина, В., 2006., стр. 31]

Уобичајено се врши подела на ресурсе типа *Work* и типа *Material*, што је обавезна класификација за коришћење софтвера *MS Project* (слика 2).¹¹

- *Nepotrošivi ili obnovljivi resursi*, као што су: људски ресурси (радници долазе на посао svakog radnog dana, радне машине (stalno su prisutne u proizvodnoj hali ili mašinskom parku, sunčeva energija (nepresušna u danima kada nije oblačno) i drugo;
- *Potrošivi ili neobnovljivi resursi*, као што су: материјали, sirovine, опрема за уградњу и одређени инвестициони објекат, новац за покривање трошкова и слично. Многи реални пројекти, посебно у грађевинарству, користе изузетно велики број видова ових ресурса. За одређене врсте материјала се формирају одговарајућа складишта, што се детаљно разматра као веома битан сегмент организовања извођења

¹¹ Kurtanović, O., "Višekriterijalna optimizacija u procesu upravljanja projektom", *Doktorska disertacija*, Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 2012., str. 2-2.

пројекта.¹²



Слика 2. Класификација ресурса на пројекту – општи случај
[преузето из: Куртановић, О., 2012, стр. 2-2]

При планирању пројекта потребно је разматрати ресурсе са становишта њихове *доступности, односно тогиности прибављања*:

- *Ограничени или критични ресурси*, са којима се располаже у ограниченим количинама, било у целом периоду обављања пројекта или у неким од интервала тог периода.
- *Слободни или некритични ресурси*, којих има у довољним количинама и могу се набавити у потребним количинама.

Са становишта обављања активности која користи више категорија ресурса, уместо ресурса *типа "Work"* могу се разматрати *два типа ресурса* (подржава софтвер *CA-Super Project*¹³):

- *Тип ресурса "Labor"* (радна снага, механизација, енергија и др.) су непотрошиви ресурси са дефинисаним утрошцима (тзв. *интензитетима ресурса*) у временским јединицама, сагласно начину исказивања трајања одговарајуће активности, који одређују њено *трајање: већи интензитет смањује трајање и обрнуто* (мањи интензитет увећава трајање).
- *Тип ресурса "Other"* представља екипне ресурсе са карактеристикама коришћења као и ресурси типа *"Labor"*, али су без утицаја на време обављања активности.

¹² Jovanović, P., Upravljanje projektom, Grafoslog, Beograd, 2006., str. 58.

¹³ Nikolić, I. i dr., Upravljanje projektima i korišćenje CA-Super Project, RTB Bor, Institut za bakar, Bor, 1998., II Deo, str. 6-12 do 6-14.

2.1.4. Избор једног пројекта из скупа потенцијалних пројеката

Проблем избора једног пројекта из скупа потенцијалних пројеката поставља се када предузеће нема ресурса да истовремено изведе више пројеката. У области станоградње могу настати три проблема вишеатрибутивног одлучивања (ВАО):

- 1) избор величине и садржаја стамбено-пословног објекта на датој локацији (разматра се више типова објеката),
- 2) избор локације за објекат са дефинисаном величином и познатим садржајем (разматра се више локација),
- 3) избор локације и типа објекта (разматрају се више локација и више типова објеката).

Локације су у различитим деловима ужег и шерег подручја града са неједнаким елементима од значаја за градњу (цене земљишта, постојећа инфраструктура и др.), односно продају станова и пратећих садржаја (тражња, продајне цене и др.). Одређени тип објекта дефинише: укупна површина, број станова одговарајућих површина, број пословних локала датих површина, број гаража и др.). Исти тип објекта може имати релативно исти квалитет и приближне трошкове непосредне градње на свакој локацији, или постоје разлике на појединим локацијама. Основно је да различите продајне цене на локацијама остварују разлике у добити за 1m^2 корисне површине. У сваком проблему потребно је дефинисати критеријуме за одређивање најповољнијег избора. Овде се проблем 2) који је изложен у литератури на примеру избора две локације за исти тип објекта¹⁴ проширује у проблем 3) увођењем више типова објеката. Разматрају се три локација L_1 до L_3 , четири типова објеката A_1 до A_4 и шест група критеријума Φ_1 до Φ_6 . Није обавезно да се на свакој локацији разматрају сви типови објеката (табела 2). Дефинисана су три нивоа критеријума: критеријуми нивоа 1 са или без подкритеријума и подкритеријуми нивоа 2 са или без подподкритеријума на нивоу 3.^{*)} У зависности од расположивих финансија врши се избор једне локације и једног типа објекта или нека комбинација бројева локација и типова објеката.

Табела 2. Модел ВАО за избор локације и типа стамбено-пословног објекта

| Локације и објекти | | Критеријуми | | | | | | | | | | | |
|--------------------|-------|-------------|-----|---------------|---------------|---------------|-------------|-----|------------|------------|-------------|-----|------------|
| | | Φ_1 | | | | | Φ_2 | | Φ_3 | Φ_4 | Φ_5 | | Φ_6 |
| | | Φ_{11} | ... | Φ_{18} | | | Φ_{21} | ... | | | Φ_{51} | ... | |
| | | | | $\Phi_{18,1}$ | $\Phi_{18,2}$ | $\Phi_{18,3}$ | | | | | | | |
| L_1 | A_1 | $a_{11,11}$ | ... | $a_{11,18,1}$ | $a_{11,18,2}$ | $a_{11,18,3}$ | $a_{11,21}$ | ... | $a_{11,3}$ | $a_{11,4}$ | $a_{11,51}$ | ... | $a_{11,6}$ |
| | A_2 | $a_{12,11}$ | ... | $a_{12,18,1}$ | $a_{12,18,2}$ | $a_{12,18,3}$ | $a_{12,21}$ | ... | $a_{12,3}$ | $a_{12,4}$ | $a_{12,51}$ | ... | $a_{12,6}$ |
| | A_3 | $a_{13,11}$ | ... | $a_{13,18,1}$ | $a_{13,18,2}$ | $a_{13,18,3}$ | $a_{13,21}$ | ... | $a_{13,3}$ | $a_{13,4}$ | $a_{13,51}$ | ... | $a_{13,6}$ |
| L_2 | A_1 | $a_{21,11}$ | ... | $a_{21,18,1}$ | $a_{21,18,2}$ | $a_{21,18,3}$ | $a_{21,21}$ | ... | $a_{21,3}$ | $a_{21,4}$ | $a_{21,51}$ | ... | $a_{21,6}$ |
| | A_3 | $a_{23,11}$ | ... | $a_{23,18,1}$ | $a_{23,18,2}$ | $a_{23,18,3}$ | $a_{23,21}$ | ... | $a_{23,3}$ | $a_{23,4}$ | $a_{23,51}$ | ... | $a_{23,6}$ |
| | A_4 | $a_{13,11}$ | ... | $a_{24,18,1}$ | $a_{24,18,2}$ | $a_{24,18,3}$ | $a_{24,21}$ | ... | $a_{24,3}$ | $a_{24,4}$ | $a_{24,51}$ | ... | $a_{24,6}$ |
| L_3 | A_2 | $a_{52,11}$ | ... | $a_{32,18,1}$ | $a_{32,18,2}$ | $a_{32,18,3}$ | $a_{32,21}$ | ... | $a_{32,3}$ | $a_{32,4}$ | $a_{32,51}$ | ... | $a_{32,6}$ |
| Тип | | маx | ... | маx | маx | маx | мин | | маx | маx | мин | | маx |

¹⁴ Nikolić, I., Božilović, S., Kvantitativne metode i modelu u menadžmentu – Primena softvera WinQSB i Expert Choice, Univerzitet Union (sana Univerzitet Union „Nikola Tesla), Fakultet za graditeljski menadžment, Fakultet za preduzetnički biznis, Beograd, 2009., str. 260-261.

^{*)} Има 36 критеријума, посматрајући све нивое. Карактеристике објеката на локацијама дољују се за 22 критеријума без нижих нивоа и у слчади са њиховом природом (нумеричке или вербалне оцене).

Листа критеријума: Φ_1 Микролокација (Φ_{11} Улица за објекат и суседне улице, Φ_{12} Обданиште, Φ_{13} Основна школа, Φ_{14} Здравствени центар, Φ_{15} Супермаркет, Φ_{16} Позориште, Φ_{17} Паркови, Φ_{18} Рекреативни објекти, Φ_{181} Игралишта, Φ_{182} Базен за рекреацију, Φ_{183} Река/језеро), Φ_2 Макро-локација (Φ_{21} Удаљеност од центра града, Φ_{22} Градски превоз, Φ_{221} Метро, Φ_{222} Трамвај, Φ_{223} Тролејбус, Φ_{224} Аутобус, Φ_{23} Градска путна мрежа, Φ_{24} , Магистрални путеви), Φ_3 Инфраструктура, Φ_4 Тражња, Φ_5 Финансијски аспекти (Φ_{51} Трошкови, Φ_{52} Добит) и Φ_6 Потенцијалне нове локације.

2.1.5. Учесници на пројекту и проблем избора извођача

На пројекту има више учесника, од инвеститора и извођача радова до надзора и консултаната.^{15, 16} Сложени грађевински пројекат не планира, организује и изводи једна грађевинска компанија самостално (сопственим ресурсима). У пракси је присутно да компанија изводи одређене радове (мањи или већи број у зависности од расположивих ресурса), док остале или специфичне радове уступа:

- 1) једном (главном) извођачу, који одговара наведеној компанији и може ангажовати своје подизвођаче (њих контролише само главни извођач), или
- 2) већем броју извођача, који су одговорни непосредно компанији.

Избор извођача може да се врши на више начина. Инвеститор може самостално да одлучује који ће од три начина прихватити за уступање радова на изградњи свог објекта¹⁷ (табела 3). За одређене пројекте државних предузећа и установа законом је дефинисано јавно надметање.¹⁸

Tabela 3. Oblici ustupanja radova na građevinskom projektu

| | |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Јавно надметање | <ul style="list-style-type: none"> – Инвеститор објављује конкурс или позив са потребном документацију (лицитациона или конкурсна документација, односно тендерска документација). ○ Овај облик уступања радова би требало да има приоритет у односу на друге облике. Међутим, неопходно је обезбедити равноправно учешће свих заинтересованих учесника. |
| Прикупљање понуда | <ul style="list-style-type: none"> – Овај облик је бржи и једноставнији од јавног надметања, али изостанак јавног конкурса (са великом извесношћу) искључује надметање одређеног броја извођача и могући су приговори о евентуалним злоупотребама. – Ипак, непосредно прикупљање понуда има своје оправдање, те се најчешће користи у наредним случајевима: <ul style="list-style-type: none"> ○ када поступак јавног надметања није успео и постоје прогнозе да ни следеће јавно надметање не обећава коначан резултат, ○ када су радови мале вредности, ○ када је изградња објекта хитно потребна, ○ када изградња објекта захтева високо специјализовану технологију који могу да обезбеде само поједини извођачи. |

¹⁵ *ibid.* Ivković, B., Popović, Ž., 2005., str. 4.

¹⁶ *ibid.* Marković, Lj., 2008., str. 9-10.

¹⁷ Kurij, K., Beljaković, D., *Izrada planova u graditeljstvu*, Građevinska knjiga d.o.o., Beograd, 2011., str. 8-9.

¹⁸ Закон о јавним набавкама, Сл. Гласник РС бр. 124/2012, 14/2015 и 68/2015.

| | |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Непосредна погодба | <ul style="list-style-type: none"> – Зависи од жеље и намера самог инвеститора. – Овај облик, често се показује у пракси (посебно када су инвеститори државна предузећа и установе), има више недостатака у односу на раније облике, пошто се не врши ни прикупљање понуда заинтересованих. – Оправдања за непосредним погодбама су истоветна са напред наведеним за прикупљање понуда. |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Постоји више начина спровођења тендерског поступка и избора извођача радова¹⁹. За наведене спољне учеснике на пројекту одговарајуће грађевинске компаније се уобичајено користи термин кооперанти (слика 3).

2.1.5.1. Избор једног извођача пројекта – аналитички приступ

Избор једног извођача, из скупа више потенцијалних извођача, за пројекат у целости може се вршити применом модела виšekритеријумске оптимизације.

- *Модели виšekритеријумског одлучивања (ВКО)* укључују критеријуме исказане аналитичким функцијама (уобичајено трајање и трошкови пројекта) и потребним ограничењима. Познате су примене виšekритеријумског линеарног програмирања.^{20 21}
- *Модели вишатрибутивног одлучивања (ВАО)* укључују више критеријума, евентуално на више нивоа, при чему критеријуми имају квантитативне или квалитативне атрибуте. Излагане су примене методе Аналитичких хијерархијских процеса (АХП) у изворном облику²² и комбиновано са теоријом фази (*fuzzy*) скупова²³ са библиографијама мноштва радова сличних приступа. Потенцијални извођачи могу да имају варијанте понуда (табела 4).²⁴

Табела 4. Модел ВАО за избор једног извођача пројекта

| Izvođači i alternative ponuda | | Критеријуми | | | | | |
|----------------------------------|-----|-------------|------------|-----|------------|-----|------------|
| | | f_1 | f_2 | ... | f_j | ... | f_n |
| I_1 | a) | $a_{11,1}$ | $a_{11,2}$ | ... | $a_{11,j}$ | ... | $a_{11,n}$ |
| | b) | $a_{12,1}$ | $a_{12,2}$ | ... | $a_{12,j}$ | ... | $a_{12,n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| I_i | a) | $a_{i1,1}$ | $a_{i1,2}$ | ... | $a_{i1,j}$ | ... | $a_{i1,n}$ |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

¹⁹ Sudić, S., „Optimalni modeli za planiranje i upravljanje troškovima realizacije građevinskih projekata“, *Doktorska disertacija*, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, 2012., str. 24-34.

²⁰ Nikolić I., Božilović, S., "Višekriterijumsko modeliranje problema izbora podizvođača građevinskog projekta", *Izgradnja br. 8*, Beograd, 1995, str. 364-369.

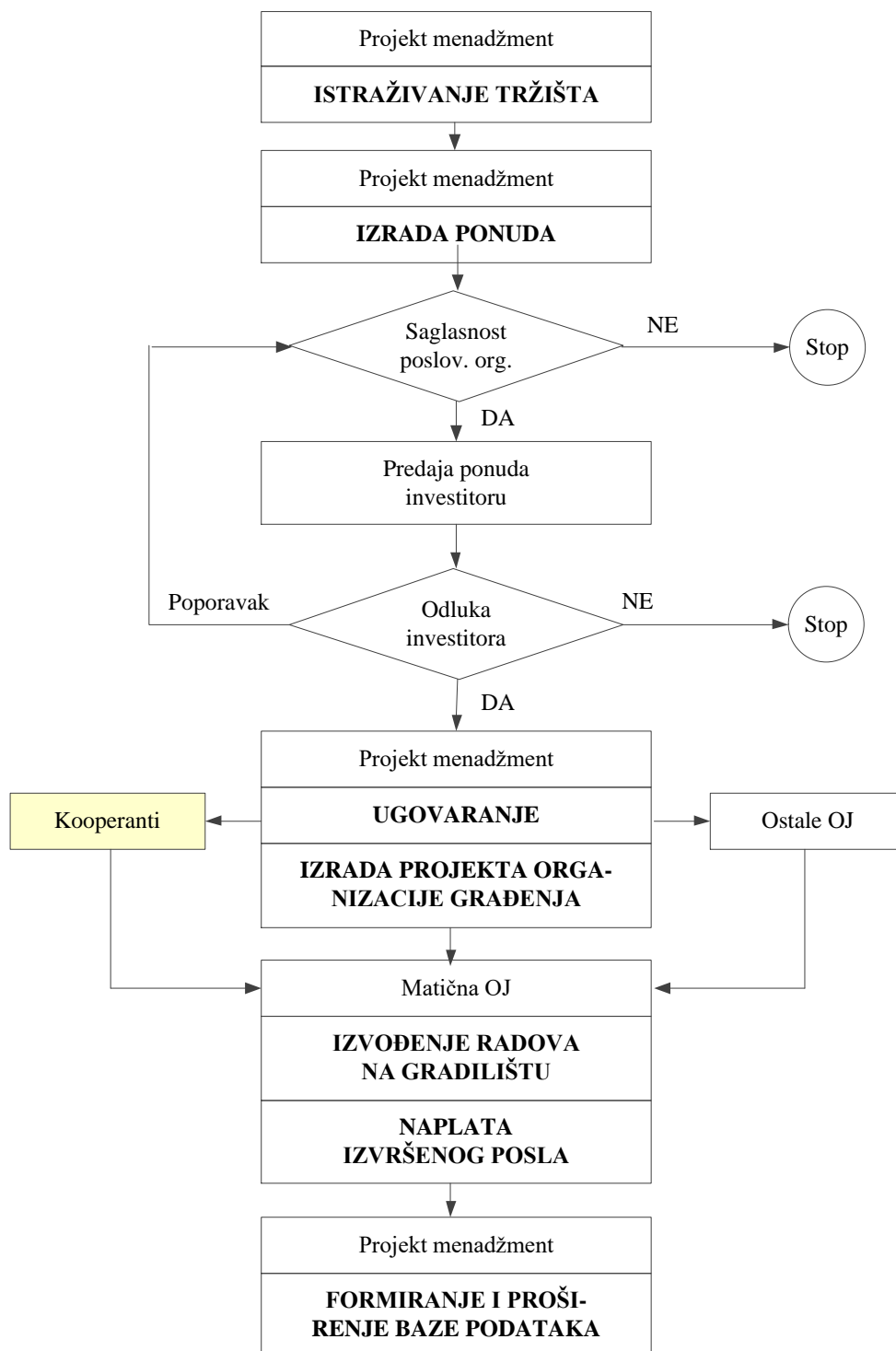
²¹ ibid. Nikolić, I., Božilović, S., 2009., str. 194.

²² K. P. Anagnostopoulos, A. P. Vavatsikos, "An AHP Model for Construction Contractor Prequalification", *European Journal of Operational Research*, Vol.6, No 3 (2006), pp.333-346

²³ Y. Li, S. Chen, and X. Nie, "Fuzzy Pattern Recognition Approach to Construction Contractor Selection Export," *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol.4, No.2, pp. 103-118, 2005.

²⁴ Nikolić, I., Borović, S., *Višekriterijumska optimizacija – metode, primena u logistici, softver*, Centar vojnih škola, Beograd, 1996., str. 217-218.

| | | | | | | | |
|------------------|-----|------------|------------|-----|------------|-----|------------|
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| I_m | a) | $a_{m1,1}$ | $a_{m1,2}$ | ... | $a_{m1,j}$ | ... | $a_{m1,n}$ |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Типови критериј. | | макс / мин | макс / мин | ... | макс / мин | ... | макс / мин |



Слика 3. Алгоритам понуда и реализација пројекта
[преузето из: Дутина, В., 2006., стр. 91]

Критеријуми модела ВАО дефинишу се сагласно карактеристикама разматраног проблема. У општем случају, критеријуми могу се сврстати у две групе.²⁵

- А. *Општи критеријуми*: Величина грађевинског предузећа (ГП), Излазак на страно тржиште, Поседовање механизације, Поседовање екипе за извођење занатских и инсталерских радова, Поседовање и квалитет технике за израду бетона, Реноме код других инвеститора где је ГП изводило радове бонитет ГП
- Б. *Посебни критеријуми*: Цена извођења радова, Рок за завршетак радова, Да ли је ГП раније изводило сличне објекте, Да ли ГП може да одговори посебним технолошким захтевима изградње објекта, Да ли ГП може да обезбеди неопходан број радника и стручног кадра.

2.1.5.2. Избор више извођача пројекта – аналитички приступ

Избор више извођача пројекта из скупа потенцијалних извођача специјализованих за одређене радове врши се са основним условом да се било који одређени део (фаза) пројекта додели само једном извођачу у циљу да он буде непосредно одговоран за извођење радова. Приказана је минимизација трајања и трошкова пројекта^{26, 27, 28, 29}. Могу се разматрати наредни критеријуми и извођачи довољних техничких и кадровских капацитета^{26, 29}.

F_1 Укупни трошкови пројекта, F_2 Динамика трошкова по месецима и кварталима, F_3 Трајање пројекта, F_4 Очекивани квалитет изведених радова, F_5 Варијанте понуда – разматра се: F_{51} Време, F_{52} Трошкови и F_{53} Услови плаћања (Φ_{531} Авансно плаћање – пре почетка радова са нижим ценама, услед тога што се извођачи финансирају без неспорне извесности да ће радови бити изведени на време и са планираним квалитетом, односно да ли ће уопште бити изведени, Φ_{532} Месечно плаћање пропорционално степену изведености радова – са стварним трошковима који могу бити већи од трошкова F_{531} , и F_{533} Плаћање након завршетка вишемесечних радова или истека одређених рокова – са вишим ценама у односу на F_{322} услед тога што извођачи финансирају сопствене радове).

Укључивање критеријума потенцијалних извођача и класификација проблема избора више извођача пројекта³⁰ детаљно се излаже у делу 4. Дефинисани математички модели се примењују у делу 5 на реалном пројекту.

²⁵ Prašević, N., „Primena višekriterijumske optimzације prilikom izbora izvođača za gradnju objekata“, *Zbornik radova, SYM-OP-IS '94*, XXI Jugoslovenski simpozijum za operaciona istraživanja, Kotor, 04.-07. oktobar, 1994., str. 767-770.

²⁶ ibid. Nikolić, I., Božilović, S., 1995, str.. 364-369.

²⁷ ibid. Nikolić, I., Borović, 1996., str.. 181-200.

²⁸ Zlatanović M., Trajković D., Models for the choice of the most favourable contractor for construction of the thermal insulation systems, *Facta universitatis, Series Architecture and Civil Engineering*, Niš, University of Niš, 2005. Vol. 2, No 5 (2003), str. 339-348.

²⁹ ibid. Nikolić, I., Božilović, S., str. 195-235.

³⁰ Božilović Z., Nikolić N., „Analytical Approach to the Selection of Performers of the Project: Classification of Problems and an Illustration of an Example“, *Journal IMK-14 Research and Development in Heavy Machinery* 21(2015), pp.107-117.

2.1.6. Информациони системи и примена софтвера

Редовно информисање о стању пројекта, фазама извршења његових активности, трошковима, искоришћености ресурса итд., *има посебан значај, јер обезбеђује да руковођење и управљање пројектом буде ефикасно и адаптивно, засновано на чињеницама а не жељама, очекивањима и надама које немају реалну подлогу.*³¹ Очигледно се подразумева информациони систем пројекта. Услов наведеном је располагање са подацима за формирање плана пројекта и подацима из плана пројекта, односно са базом података и информационим системом.³²

2.1.6.1. Информациони систем предузећа и информациони систем пројекта

Планирање и реализација инвестиционог пројекта захтева коришћење два независна, међусобно повезана информациона система (ИС):

- *ИС предузећа која учествују у реализацији инвестиционог пројекта*, на којима треба извршити одговарајућа прилагођавања да би била у потпуној функцији конкретног пројекта.
- *ИС конкретног инвестиционог пројекта*, који се пројектује у односу на карактеристике и специфичности таквог пројекта.

2.1.6.2. Хардверска и софтверска структура информационог система

Формирање ИС инвестиционог пројекта подразумева да се обезбеди потребна подршка са становишта хардвера (енг. *hardware*, *цмпутер хардваре* - физички, опипљиви део рачунара) и софтвера (енг. *software* – *рачунарски програм*). При томе, неопходно је прицавати се основних принципа компатибилности делова ИС између опреме и појединих програмских пакета како би они могли функционисати заједно у дужем временском периоду. Битнији софтверски пакети су:

- *AutoCad* за пројектовање и израду цртежа у различитим областима (електротехнике, грађевинарства, машинства, архитектуре и др.), за израду дијаграма, организационих шема, графикона, и др.
- *Primavera Project Planner* за планирање, праћење и контролу различитих врста појединачних пројеката и више пројеката који конкуришу за заједничке ресурсе.*)
- *MS Project*, *CA-SuperProject* и други стандардни софтверски пакети имају исту намену као *Primavera Project Planner*. *CA-SuperProject* омогућава нивелисање оба типа ресурса – типа радника и механиције, и типа материјла³³.
- *Expedition* (у оквиру фамилије *Primavera*) за креирање и управљање пројектном документацијом (уговори, понуде, рачуни, записници, дописи, испоруке материјала, дневни извештаји, месечне ситуације, итд.).

³¹ *ibid.* Petrić, J., 1972. стр. 555.

³² *ibid.* Marković, Lj. 2008., стр. 29-37.

*) Ова софтверска компанија има грађевинарство за циљну групу корисника/купаца, што уноси у назив новије верзије софтвера „*Примавера Пројект Планнер фор Конструкцион*“.

³³ *ibid.* Nikolić, I. I dr. 1998., Део II, стр. 6-15 до 6-19.

- *Parade* за контролу трошкова и мерење степена извршења радова на пројекту. Омогућава креирање WBS, OBS и CAS, праћење директних и индиректних трошкова, праћење и мерење прогреса, анализу зарађене вредности, креирање табеларних и графичких извештаја, формирање базе историјских података, итд.
- *MAK* (софтвер домаће производње) за вођење складишног пословања на пројекту.
- *Word* за креирање и израду различитих врста образаца и текстуалних докумената. Подржава словну и граматичку корекцију текста,
- *Excel* за табеларни прорачун различитих врста података, посебно за разноврсне математичке, статистичке и финансијске анализе и калкулације. Основна предност је могућност лаке израде различитих типова извештаја, почевши од једноставних табеларних прегледа до 2Д и 3Д графикона.
- *Power Designer, Silerrun, BP Win и ERWin, Designer 2000 и Linter* за базе података (тренутно најатрактивнији програми на тржишту софтвера).

2.1.6.3. Коришћење интернета и интранета

Интернет пружа широке могућности предузећу од претраживања литературе (о делатности предузећа, искуства сродних предузећа, одговарајућих научних радова, примера и упуштава за примену софтвера) и коришћења услуга консултатских компанија (у виду савета и/или израде плана одређеног пројекта) до преноса података о пројектима на удаљеним локацијама у седиште предузећа.

Интранет (као интерни ИС заснован на интернет технологији, web сервиса, TCP/IP и HTTP комуникационим протоколима) има намену да повеже све организационе делове предузећа у једну целину, кроз пренос одређених података из једне у друге организационе делове. Уколико предузеће не развије интранет, преостаје да максимално користи могућности *интернета* за комуникацију и прикупљање/архивирање свих значајних података.

2.1.6.4. Базе података

База података, као основни елемент информационог система, је организован и уређен скуп међусобно повезаних података са наменом да се омогући једноставно: *складиштење података исте врсте, претраживање података и манипулисање подацима*. Подаци или информације могу бити било шта од значаја за пословање исказано бројкама, текстом, цртежом, звуком и др. Постоје две групе базе податка.

- Основне *базе података за подршку на реализацији пројекта* обухватају: (1) техничке карактеристике објекта, (2) физички обим и вредност радова, (3) увоз и складиштење опреме и материјала, (4) наплату радова, (5) управљање техничком документацијом и (6) контролу продуктивности рада на градилишту, динамике одвијања радова и утрошака ресурса.³⁴
- *База историјских података* има циљ да се за све фазе реализације пројекта обезбеди систематско чување и ажурирање знања са претходно изведених пројеката, као и значајних информација о истраживању тржишта, а у циљу њиховог претраживања и коришћења за потребе доношења будућих одлука. Ова врста базе података је детаљно изложена у литератури са примерима из праксе.³⁵

³⁴ ibid. Marković, Lj., 2008., str. 35.

³⁵ ibid. Ivković, B., Popović, Ž., 2005., str. 775-877.

2.2. ПРОЦЕСИ УПРАВЉАЊА ПРОЈЕКТОМ

При разматрању процеса планирања, праћења и контроле реализације инвестиционог пројекта полази се од основних компоненти планирања: циљеви пројекта, стратегије рада, предвиђени буџет, пројекција будућих догађаја, дефинисана организациона структура, политика рада на пројекту, процедуре рада и утврђени стандардни рада.³⁶

Планови могу да буду:

- *статички* – дају укупне потребе различитих ресурса (радне снаге, материјала, механизације за извођење свих радова)
- *динамички* (изводе се из *статичких*) – приказују распоред извршења појединих радних активост и коришћења ресурса у току времена предвиђеног за грађење објекта.

Динамички планови се деле прво на оквирне и оперативне, а по садржини на планове:

- *израде одговарајућих елемената* (процена, понуда пројектне документације), и
- *извођења радова и обезбеђења капацитета и средстава* (радна снага, механизација, материјал, новчана средства, капацитети помоћних и производних погона).

Значајне су још две поделе:

- *према организационим нивоима*: предузеће, пројекат, градилишта, објекти, типски елементи пројекта или врсте радова
- *према методама израде и начуну приказивања*: нумерички планови, гантограми, циклוגрами и мрежни планови.

PMBOK дефинише девет области знања са одговарајућим процесима управљања пројектом, који се спроводе са пет група процеса.³⁷ Посебно приказани процеси са указивањем на њихове зависности у *PMBOK* обједињени су на наредној шеми (слика 4). Процесе и групе процеса дефинише *1st Edition 1996*.

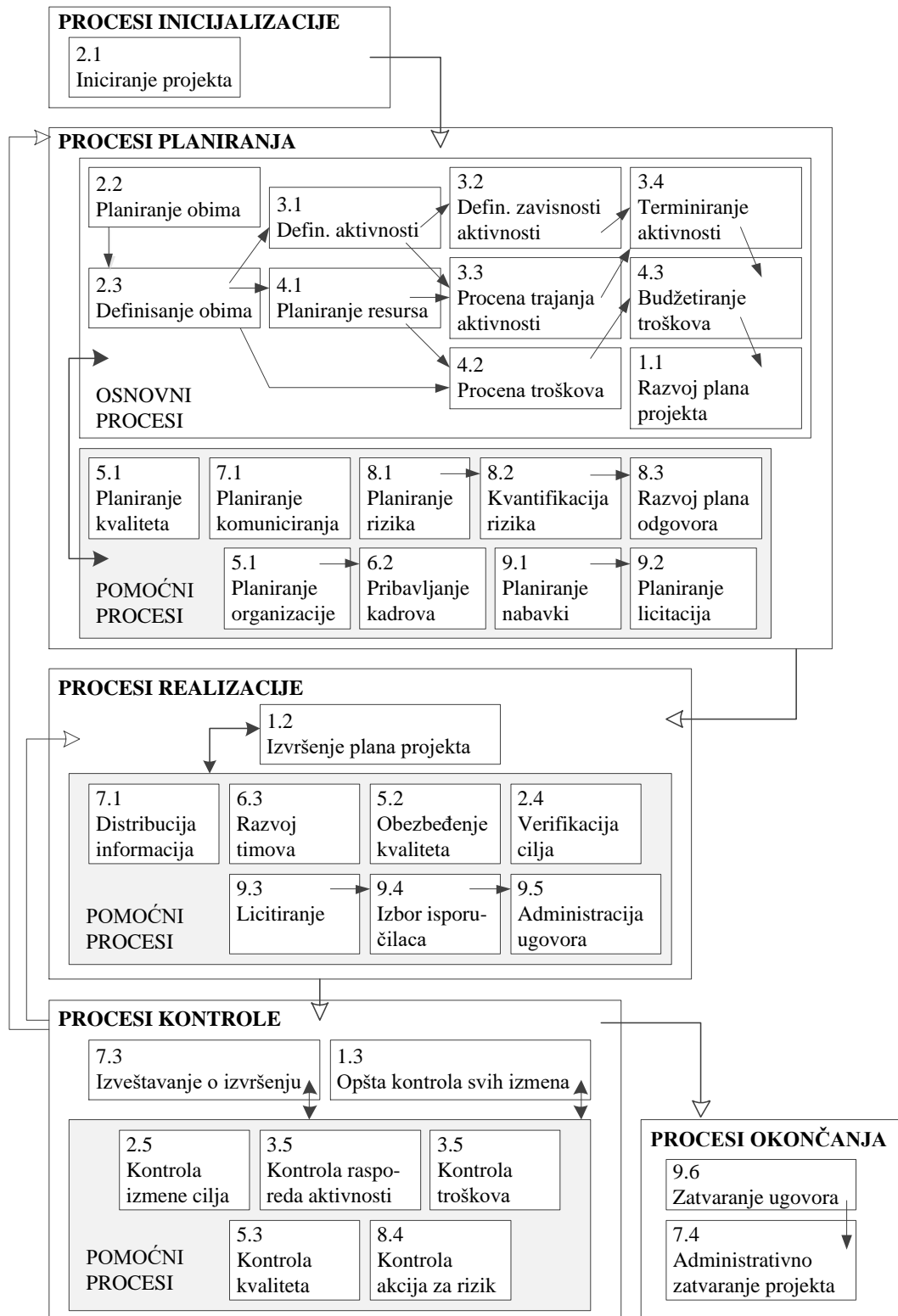
- Процеси управљања:

| | |
|------------------|-------------------|
| 1. целином | 5. квалитетом |
| 2. циљем/обимом | 6. људством |
| 3. временом | 7. комуникацијама |
| 4. ПУ трошковима | 8. ризиком |
| | 9. набавкама |
- Групе процеса:

| | |
|-----|-----------------|
| I | Иницијализација |
| II | Планирање |
| III | Реализација |
| IV | Контрола |
| V | Окончање |

³⁶ *ibid.* Marković, Lj., 2008., str. 38-86.

³⁷ PMI (Project Management Institute), *A Guide too the Project Managment Body of Knowlege - PMBOK Guide, 1st Edition 1996., 2nd Edition 2000., USA, Uper Darby, PA 19082, USA.*



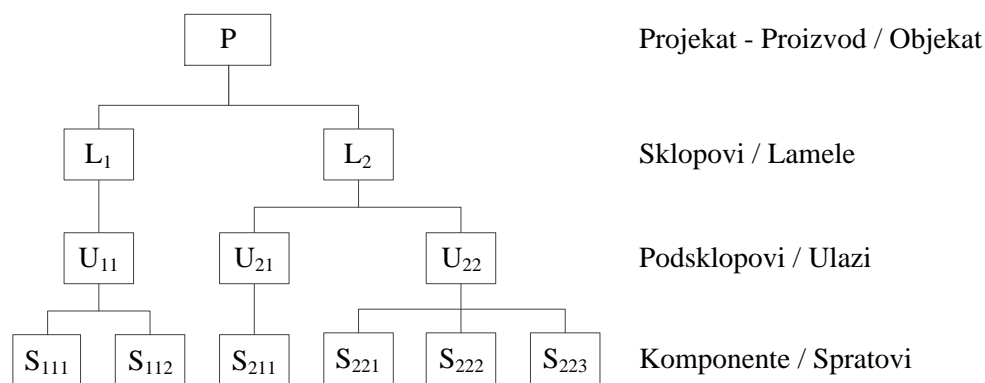
Слика 4. Основни процеси, помоћни процеси и њихове зависности за управљање пројектом [изведено из: PMBOK 2000]

2.2.1. Планирање пројекта и врсте планова

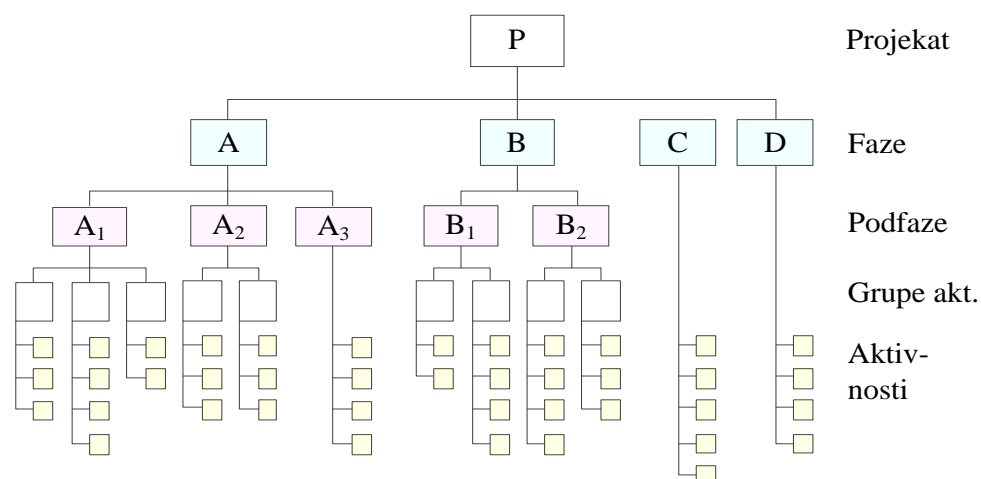
Развојем методологије управљања пројектом дефинисане су две фазе: планирање пројекта и контрола реализације пројекта. Планирање пројекта има у основи технику мрежног планирања и обухвата: анализу структуре, анализу времена, анализу ресурса и анализу трошкова.^{38 39}

2.2.1.1. Анализа структуре пројекта

Структурирање пројекта може да се врши полазећи од његових делова (слика 5.1). Тзв. производно-технолошку или компонентну структуру (PBS) *изградње одређене комплексне стамбене зграде* чине: ламеле, улази и спратови. План градње (WBS) може да има фазе, подфазе, групе активности и саме активности (слика 5.2). Руководилац пројекта уобичајено бира групе чланова и њихове руководиоце (OBS) са одговарајућим обласћенима (слика 5.3).



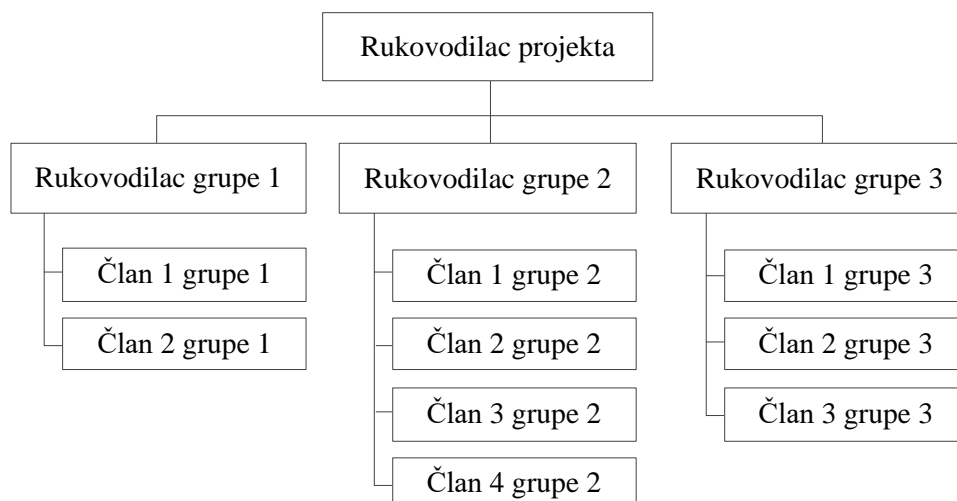
Слика 5.1. Производно-технолошка (компонентна) структура пројекта (PBS)
[изведено из: Drobњaković, S., 2001., стр. 2-9]



Слика 5.2. Организациона структура радова на пројекту (WBS)
[преузето из: Drobњaković, S., 2001., стр. 2-9]

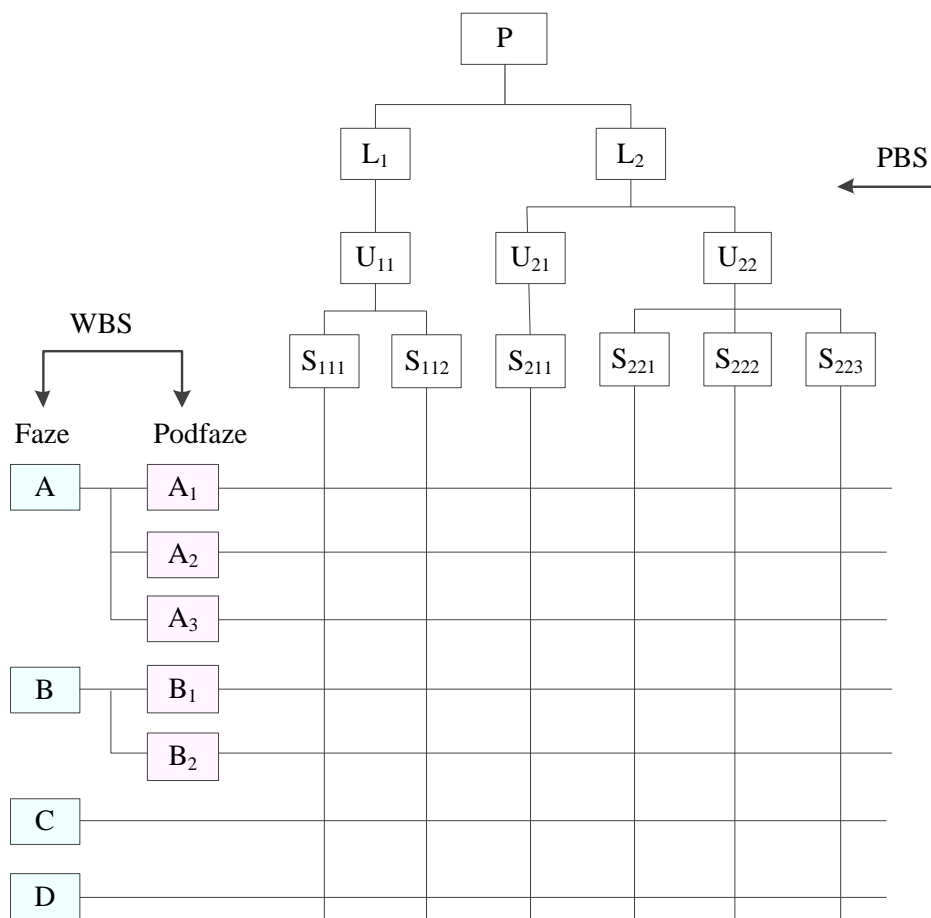
³⁸ *ibid.* Petrić, J., 1972., стр. 419-528.

³⁹ *ibid.* Jovanović, P. i dr., 2007., стр. 73-129

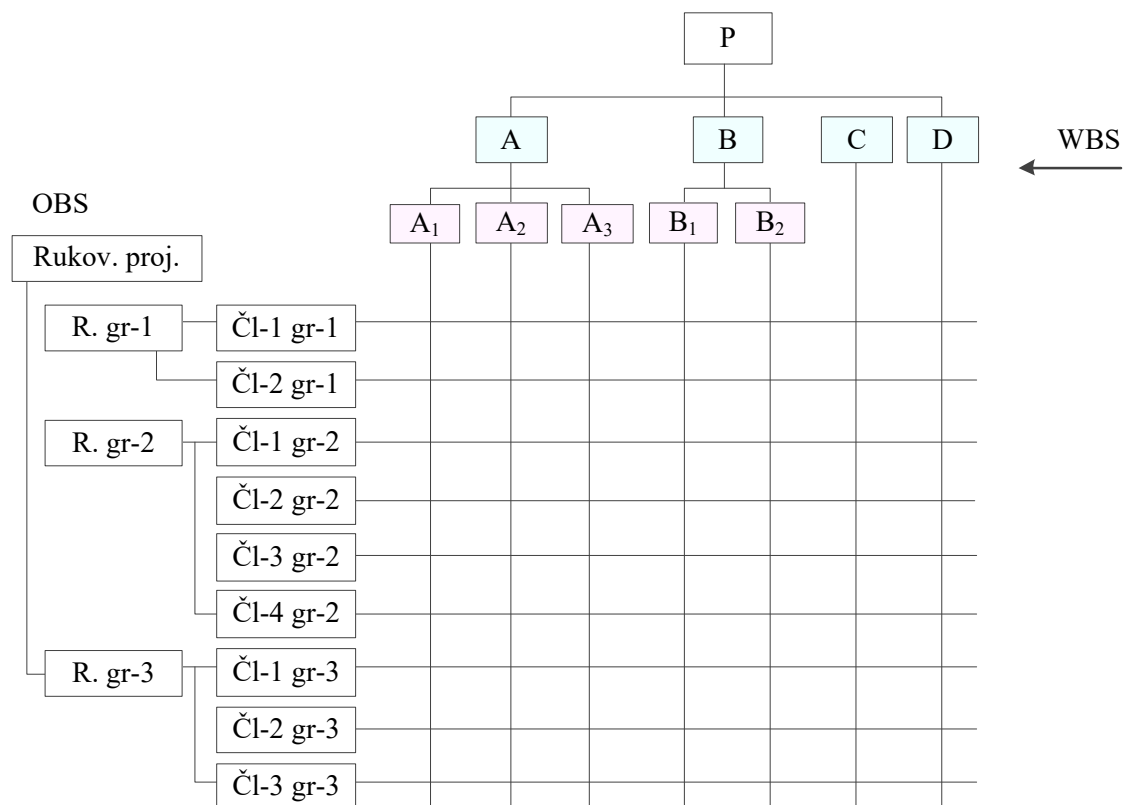


Слика 5.3. Организациона структура управљања пројектом (OBS)
[преузето из: Drobњaković, S., 2001., стр. 2-9]

Даље се установљава веза елемената PBS и WBS (слика 5.4), односно OBS и WBS (слика 5.5) или PBS и WBS.



Слика 5.4. Повезаност елемената PBS и WBS на пројекту
[преузето из: Drobњaković, S., 2001., стр. 2-10]



Слика 5.5. Повезаност елемената WBS и OBS на пројекту
[преузето из: Drobњaković, S., 2001., стр. 2-10]

2.1.1.2. Мрежни планови

Активности из WBS се приказују мрежним дијаграмима (МД), односно мрежним плановима, у циљу успостављања њихових логичких и технолошких зависности (слика 6, слика 7). МД омогућава анализу времена пројекта. Дефинисање активности у WBS јесте најзначајнији део планирања. Потребно је заузети став *шта се сматра да је активност*⁴⁰, односно који степен детаљисања усвојити при изради мрежног плана⁴¹.

Активност је елемент мрежног плана и подржава:

- јасно одређену етапу радног процеса* (захтева време и ресурсе)
- чекање* (процес који захтева само време)
- зависност активности* (*фиктивна активност* за мреже са активностима на луковима, не захтева време и ресурсе).

Постоје две методе за приказивање МД пројекта:

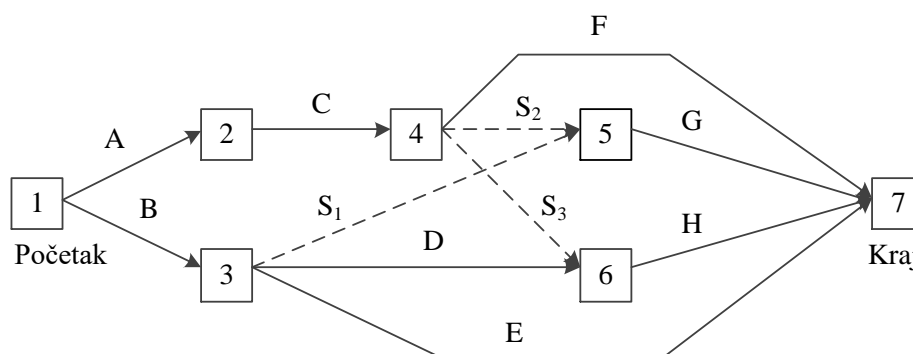
- Мрежа са активностима на луковима (слика 6).
- Мрежа са активностима у чворовима и зависностима активности на луковима (слика 7), метода предхођења (PDM).

⁴⁰ ibid. Petrić, J., 1972., стр. 574.

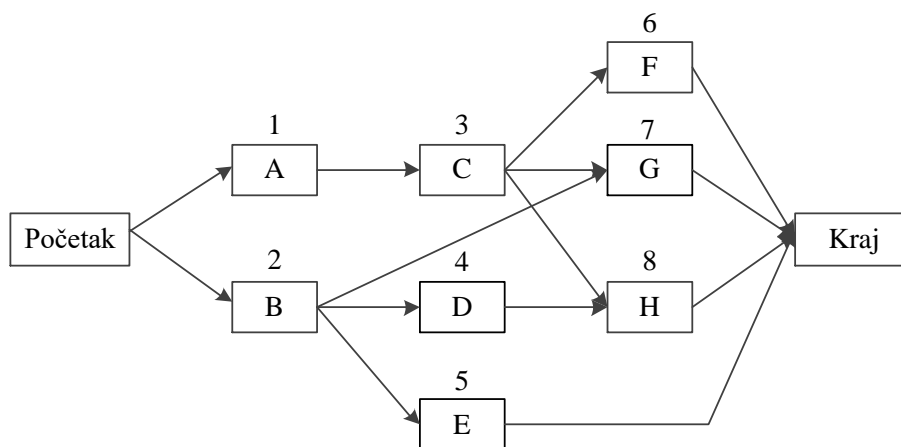
⁴¹ ibid. Kurij, K., Beljaković, D., 2011, стр. 41-43.

Мрежа са активностима на луковима подесна је када активности имају основни тип зависности FS (слика 7.1). PDM омогућава дефинисање четири облика зависности активности (слика 7.1-7.4), где L (*Leag*) означава померање B у односу на A :

- $L < 0$, померање према напред, нпр. завршетак B не може да буде раније од $|L| = -L$ временских јединица пре завршетка A (слика 7.2) зависност FF .
- $L > 0$, померање према назад, нпр. Завршетак B не може да буде раније од L временских јединица после завршетка A (слика 7.2) зависност FF .

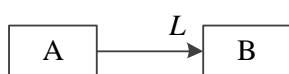


Слика 6. Мрежа са активностима на луковима и зависностима FS AON (*Activity Oriented Network*), фиктивне активности S_1 , S_2 и S_3

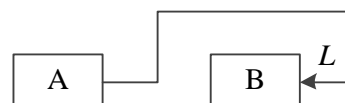


Слика 7. Мрежа са активностима у чворовима и зависностима FS EON (*Even Oriented Network*), PDM (*Precedence Diagramming Method*)

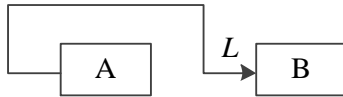
- На мрежама се врши *растућа нумерација чворова* применом тзв. *правила Фулкерсона*.
- Раније су многи аутори наглашавали да нису дозвољени пресеци лукова на мрежи (са стварним и фиктивним активностима за AON , са зависностима активности за EON). Међутим, то може бити само препорука када је могуће избећи пресеке, што за приказане примере није присутно.



Слика 7.1. Завршити A да започне B
(FS – *Finish to Start*)



Слика 7.2. Завршити A да заврши B
(FF – *Finish to Finish*)

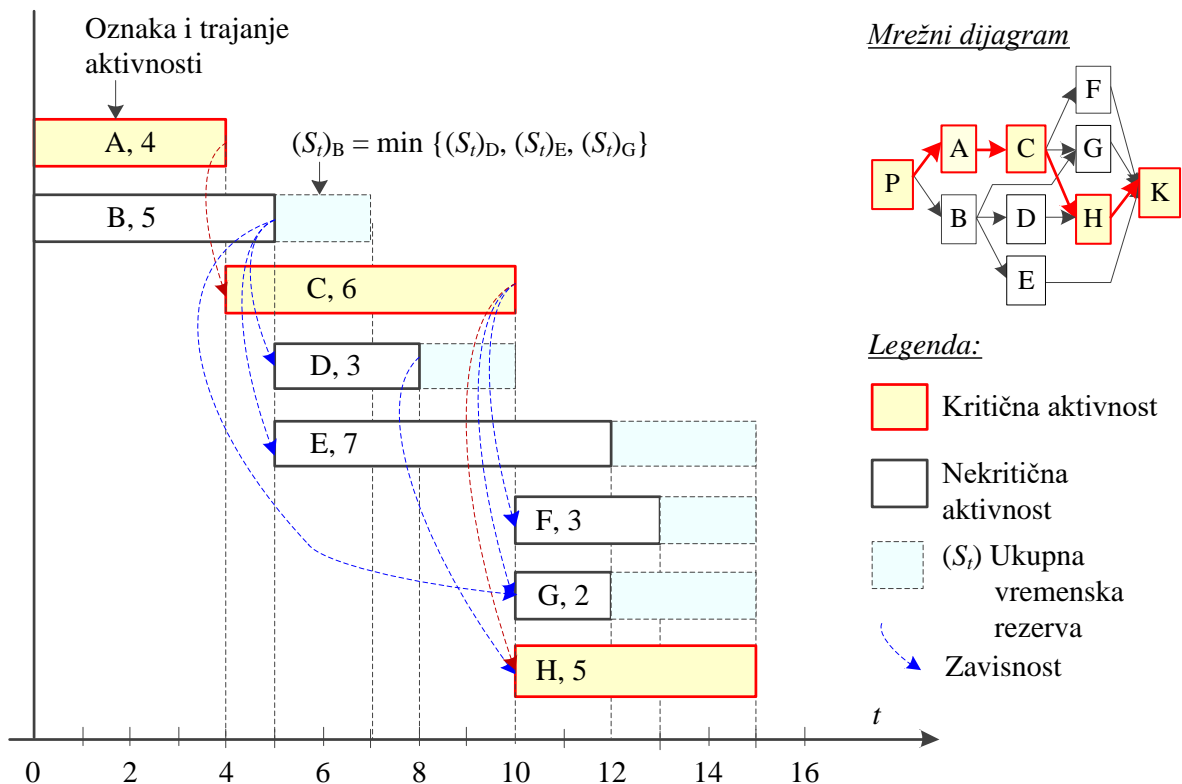
Слика 7.3. Започети А да започне В
(SS – Start to Start)Слика 7.4. Започети А да заврши В
(SF – Start to Finish)

Независно од облика МД, односно за било коју мрежу пројекта, постоје две методе за анализу времена (*CPM* са детерминистичким временима и *PERT* са стохастичким временима), а једна метода врши анализу времена и трошкова (*PERT/COST*).

2.2.1.3. Гантови дијаграми и друге врсте дијаграма

На основу мрежног плана пројекта, или независно од мреже, формира се *гантограм* за непосредно сагледавање аспекта времена на пројекту. Изнад временске осе се вертикално приказују гант-линије (или бар-линије, барови, *енгл. Bar Chart*) за активности, уважавајући њихово трајање и зависности (слика 8). *)

- **Позитивне** особине: упоредо приказивање реализације активности (новим баровима испод постојећих), односно напредовања на пројекту и поређење плана са реализацијом.
- **Негативне** особине: није подесно приказивати сложенији пројекат са великим бројем активности, *отежано приказивање – није потребно приказивати зависности активности* (није могућа анализа структуре пројекта) и немогућност приказивања активности различитих временских јединица (месец, дан, час, минут).**))



Слика 8. Гантограм (ГД) или Линејски дијаграм (ЛД)

Постоје и друге врсте дијаграма (са одговарајућим подврстама) за активности који имају велику примену у грађевинарству, као што су:⁴²

- Ортогонални планови
- Циклограми
- LOB (Line of Balace) дијаграми.

2.2.1.4. Хистограми ресурса

Гантограм са распоредом активности у времену омогућава да се изврши прорачун потребних ресурса за сваку временску јединицу пројекта, у укупном износу на основу ангажовања на одговарајућим активностима. Формирају се *хистограми* којима се сваком ресурсу *графички на ординати приказују потребе* са вертикалним баровима – стубићима.

2.2.1.5. План трошкова

Трошкови се прорачунавају поступком „одоздо према горе“ посматрајући WBS плана пројекта. Трошкови ресурса одређују трошкове активности, трошкови група активности су збир одговарајућих активности, итд. Трошкови свих делова пројекта чине укупне трошкове пројекта. При томе се, поред директних трошкова ресурса, укључују и фиксни трошкови одговарајућих елемената пројекта (активности, фаза и др.), као и фиксни трошкови самог пројекта. Извештаји са трошковима (*Cash Flow*) се формирају сагласно нивоима руковођења у предузећу, посматрајући укупне износе и трошкове за одговарајуће временске периоде (месец, квартал и др.). Из трошкова пројекта могу да се издвоје трошкови за делове пројекта и трошкови за ресурсе.

2.2.1.6. Планови чланова пројектног тима

Планови чланова пројектног тима формирају се према матрици одговорности *OBS* (слика 5.5), обухватајући захтеване елементе пројекта (временски план, план ресурса, план трошкова и др.)

2.2.2. Пројектни тим и организације за управљање пројектом

Сваки пројекат је посебан и привремени систем у оквру одређеног пословног система, те је потребно формирати одговарајућу *организацију за управљање конкретним пројектом*, различитом од организације за управљање пословним системом.⁴³ У теорији постоје два приступа дефинисању организације за управљање пројектом: класични приступ (функционална, пројектна и матрична организација) и

*) *Гантограм*, претеча технике мрежног планирања, добио је назив по Ганту (*Henry I. Gantt*), најпознатијем промотеру научног менаџмента који је унео револуцију у планирању са својом *листом дневног баланса* (око 1901. године), табели са одговарајућим активностима и њиховим временима трајања.

***) *Софтвер за УП* аутоматски генерише *Gantt Chart* самим дефинисањем листе активности и њихових зависности, независно од трајања.

⁴² *ibid.* Kurij, K., Beljaković, D., 2011, str. 45-62.

⁴³ *ibid.* Dutina, V., 2006., str. 128.

контингентијски (пројектни експедитор, пројектни координатор, матрична форма и пројектна форма).

Пројекат води *пројектни тим који чине руководиоца пројекта (пројектни менаџер, Project Manager) и чланови пројектног тима.*⁴⁴ Ако предузеће не располаже сопственим кадровима за избор руководиоца и пројектног тима, ангажује специјалисте са стране као консултанте на које делимично или у потпуности преноси управљање пројектом.

2.2.3. Планирање реализације пројекта

Планирање реализације пројекта обухвата планирање времена, ресурса, трошкова и буџета (укупни износ и динамика у времену). Наведени елементи чине *планирање у ужем смислу*. Укључивање других елемената животног циклуса пројекта, као прибављање потребне документације, разматрање квалитета, одржавање у току експлоатације и др., назива се *планирање у ширем смислу*.

2.2.3.1. Планирање времена

Обављање сваке активности пројекта захтева одговарајуће време. Тиме и реализација пројекта има одговарајуће трајање. Активности могу да имају детерминистичка или стохастичка времена.

Детерминистичка времена могу да буду јединствена или постоје активности са више варијанти за трајање и одговарајуће трошкове.

а) Детерминистичка и стохастичка времена

У зависности од природе активности пројекта примењују се две методе анализе времена за одређивање најранијих времена активности, најкаснијих времена активности и трајања пројекта. Методе су развијене за мреже са активностима на луковима (слика 9.1.а) и правила су пренета на мрежу са активностима у чворима (слика 9.1.б). Подесније је користити мрежу са активностима у чворовима, што применује софтвер за управљање пројектима.

а.1) Метода критичног критичног пута (CPM, Critical Path Method) са детерминистичким временима

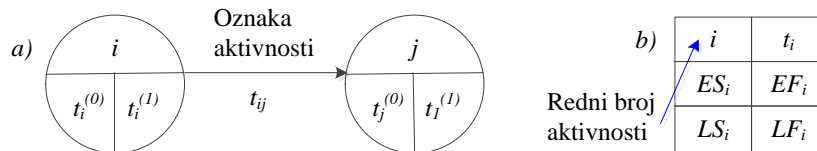
Свака активност на пројекту има *детерминистичко трајање* ако може да се обави за поуздано утврђено време (слика 9.1). Одређује се детерминистичко трајање пројекта применом *методе критичног пута – Critical Path Method (CPM)*. Методу је развила консултанска фирма **Booz Allen Hamilton Inc.** за планирање пројекта одржавања авиона Локид у морнарици САД и паралелно је примењена за планирање одржавања постројења хемијске индустрије. Прву студију о методи објавили су *Kalley* и *Walker*.⁴⁵

⁴⁴ Jovanović, P. i dr., *Projektni menadžer*, Viša škola za projektni menadžment, Beograd, 2007., str. 17-23.

⁴⁵ Kelley, J., Walker, M., „Critical-Path Planning and Scheduling“, *Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference*, 1959.

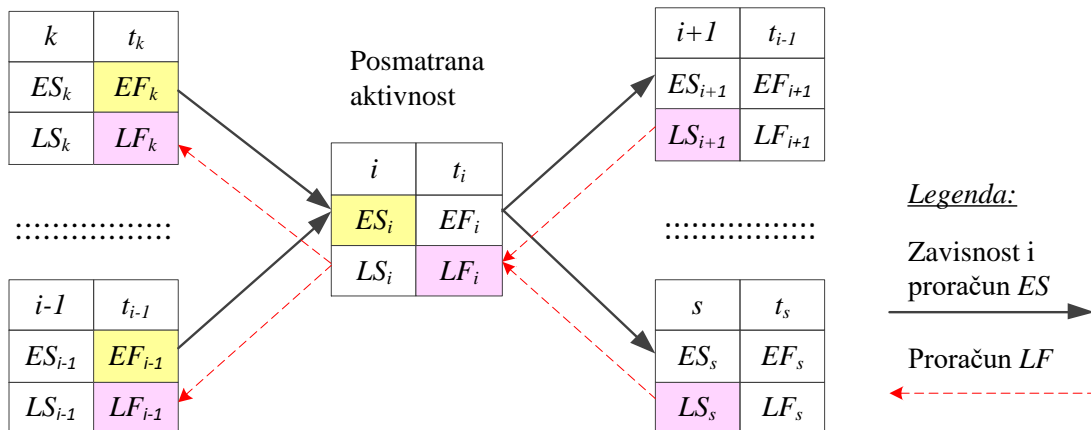
Анализа времена одвија се у две фазе, што је подесније приказивати на мрежи са активностима у чворовима коју користи и софтвер за управљање пројектима (слика 9.2):

- одређивање најранијих времена прорачуном „унапред“, од почетка према завршетку пројекта, и
- одређивање најкаснијих времена прорачуном „уназад“, од завршетка према почетку пројекта.



Слика 9.1. Подаци за активност на мрежним дијаграмима

- а) Оригинални елементи дијаграма за *CPM* (активности на луковима)
 б) новији истоветни елементи за *CPM* и *PERT* (активности у чворовима)^{46, 47}



Слика 9.2. Део мрежног дијаграма са активностима у чворовима

а) MD са активностима на луковима

- Активност A_{ij} , или Активност $(i - j)$
- i – почетни догађај активности
- j – завршни догађај активности
- t_{ij} – трајање активности
- $t_i^{(0)}$ – најраније време догађаја i
- $t_j^{(0)}$ – најраније време догађаја j
- $t_i^{(1)}$ – најкасније време догађаја i
- $t_j^{(1)}$ – најкасније време догађаја j

б) MD са активностима у чворовима

- Активност A_i
- i – чвор, активност
- t_i – трајање активност
- ES_i – најранији почетак активности
- EF_i – најранији завршетак активности
- LS_i – најкаснији почетак активности
- LF_i – најкаснији завршетак активности

Софтвер за управљање пројектима под б) користи називе: *Activity*, *Node*, *Duration*, *Start* (за *Early Start*), *Finish* (за *Early Finish*), *Late Start* и *Late Finish*.

⁴⁶ ibid. Nikolić, I. i dr., 1998., Deo I, str. 2-10.: најранији почетак и завршетак, $tp_i^{(0)}$ и $tz_i^{(0)}$, најкасниј $tp_i^{(1)}$ и $tz_i^{(1)}$.

⁴⁷ ibid. Krčević, S. i dr., 2002., str. 384.

За примену ручних поступака користе се временске јединице 0,1,2,... Такве јединице могу се превести у календарска времена. Софтвер за управљање пројекта користи календарска времена, тако што постављањем датума почетка пројекта прорачунава времена за активности.

Критична активност, критични пут и временске резерве

Критична активност има једнака најранија времена и једнака најкаснија времена:

- почетних догађаја и завршних догађаја активности на мрежи са активностима на луковима а)
- почетка и завршетка активности на мрежи са активностима на луковима б)

Или, *критична активност* има укупну временску резерву 0 (нула).

Некритична активност има различита најранија и најкаснија времена за бар један догађај на мрежи а), односно разлику најранијег и најкаснијег почетка активности или/и разлику најранијег и најкаснијег завршетка активности на мрежи б).

Пут на пројекту чине узастопне активности од почетка до завршетка пројекта. Пут највеће дужине назива се *критични пут (КП)* који чине *критичне активности* и има трајање $T^{КП}$ једнако збиру времена његових критичних активности, које је истоветно са трајањем пројекта T_n . Пuteви мањег трајања од *КП* називају се *субкритични путеви (СКП, краће СК)*. Субкритични пут *I врсте (СК-I)* има прво мање трајање од *КП*, субкритични пут *II врсте (СК-II)* има прво мање време од *СК-I* (друго мање време од *КП*) итд.

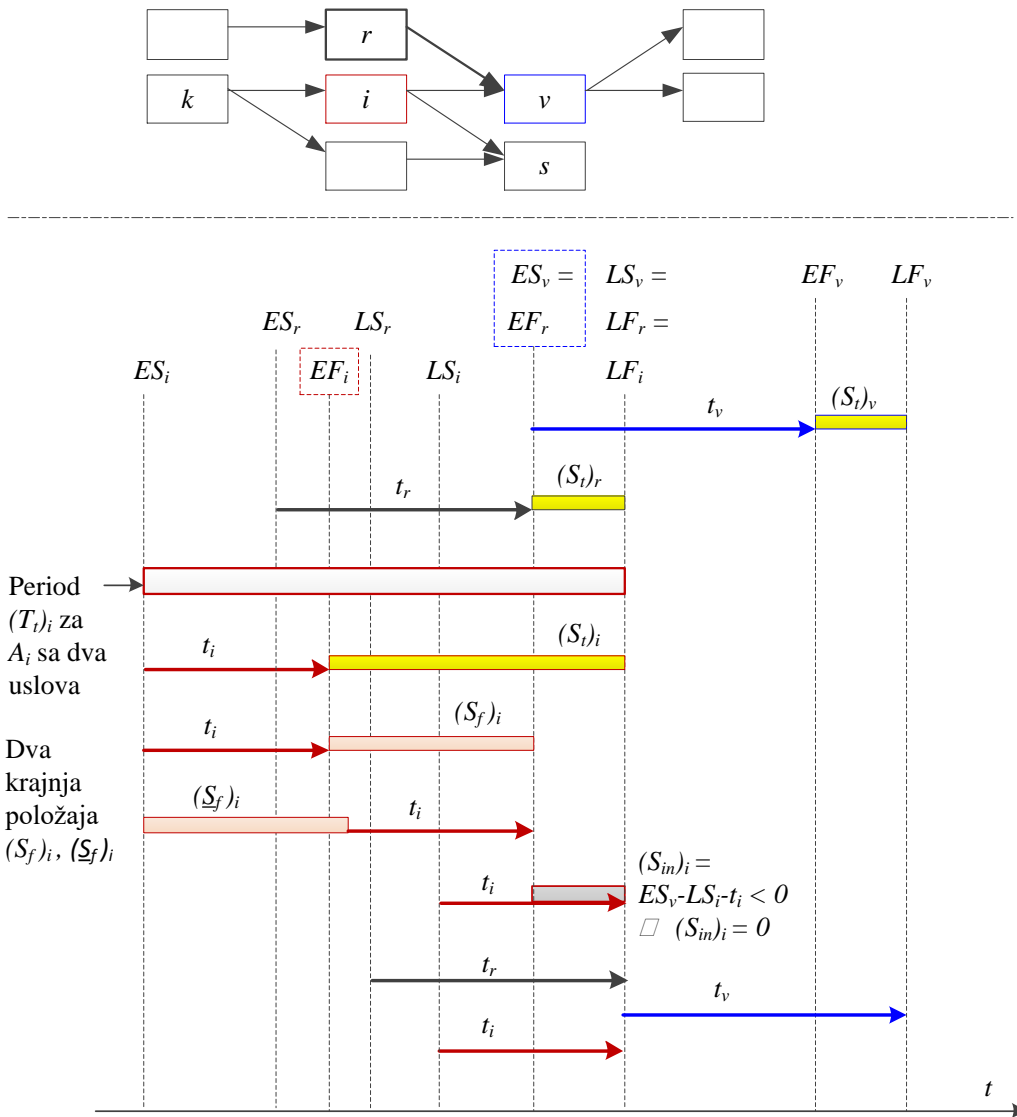
Сваки субкритични пут садржи најмање једну некритичну активност (остале могу да буду критичне) или има само некритичне активности. Пројекат може да има *више КП*, односно *више СК исте врсте*.

Временске резерве активности имају велики значај при планирању пројекта. Постоје три врсте ових резерви које је подесно приказати графички на МД са активностима у чворовима (слика 10.1). У оквиру својих временских резерви, активности могу да се помере или да им се продужи трајање, чиме се не утиче на трајање пројекта (слика 10.2).

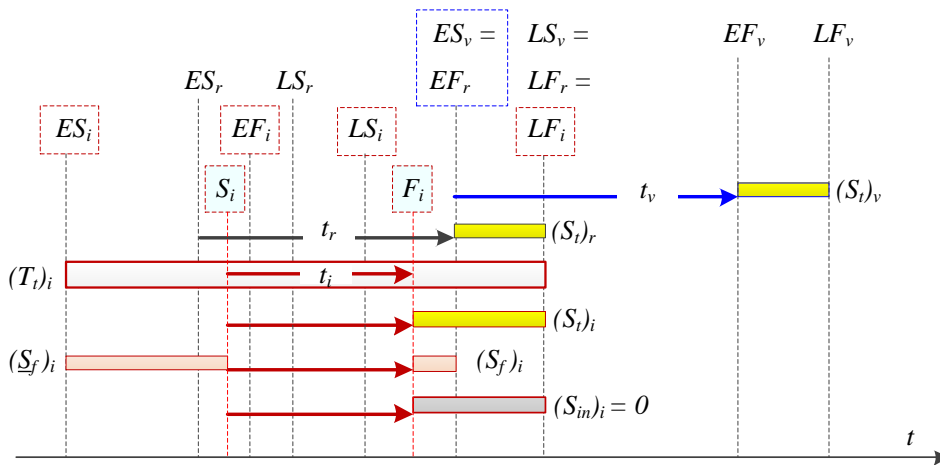
Ознаке и називи елемената активности A_{ij} на луковима и активности A_i у чворовима, уз истицање две варијанте за слободну резерву које се различито рачунају и имају идентичне вредности:

- $(T_t)_{ij}, (T_t)_i$ – могући период обављања активности
- $(S_t)_{ij}, (S_t)_i$ – укупна временска резерва (*Total Slack*)
- $(S_f)_{ij}, (S_f)_i$ – слободна временска резерва (*Free Slack*) *unapred*
- $(\underline{S}_f)_{ij}, (\underline{S}_f)_i$ – слободна временска резерва (*Free Slack*) *unazad*
- $(S_{id})_{ij}, (S_{id})_i$ – независна временска резерва (*Independent/Detashed Slack*)

Softver за управљање пројектима прорачунава укупну и слободну временску резерву.



Слика 10.1. Део мрежног дијаграма и временске резерве за три активности (приказане све резерве за A_i и само S_t за A_r и A_v)



Слика 10.2. Почетак S_i и завршетак F_i за A_i у оквиру слободне временске резерве $(S_t)_i$

**a.2) Метода оцењивања и ревизије програма
(PERT, Program Evaluation and Review Technique)
са стохастичким временима**

PERT или PERT/TIME развијена је под руководством V. Fazara у корпорацији Remington-Rand при планирању пројекта POLARIS за освајање свемира. Развој је започет 1958. године и пројекат је скраћен за две године. Математичке основе је дефинисао С. Clark.⁴⁸

Усваја се да свака активност има трајање са β – расподелом и тренутак завршетка са нормалном расподелом. У пракси се процењују три времена и прорачунавају две величине:

- a_{ij} , a_i – оптимистичко трајање активности A_{ij} на луку, односно A_i у чвору
- m_{ij} , m_i – највероватније трајање A_{ij} , односно A_i
- b_{ij} , b_i – највероватније трајање A_{ij} , односно A_i
- $(t_e)_{ij}$, $(t_e)_i$ – (математички) очекивано трајање A_{ij} , односно A_i
- $(\delta^2)_{ij}$, $(\delta^2)_i$ – варијанса активности A_{ij} , односно A_i

где:

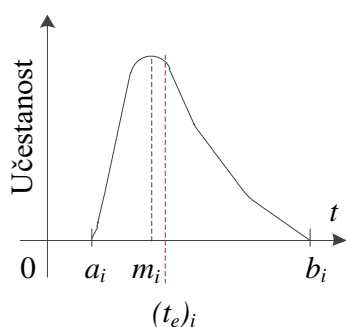
$$\begin{cases} a_{ij}, m_{ij}, b_{ij} \geq 0, & a_i, m_i, b_i \geq 0 \\ a_{ij} \leq m_{ij} \leq b_{ij}, & a_i \leq m_i \leq b_i \end{cases} \quad (1)$$

$$(t_e)_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}, \quad (t_e)_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6} \quad (2)$$

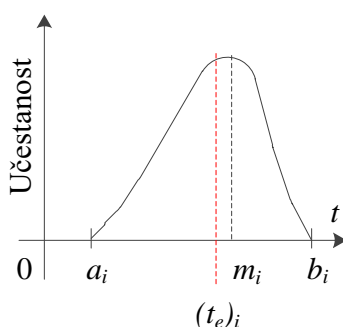
$$(\sigma^2)_{ij} = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2, \quad (\sigma^2)_i = \left(\frac{b_i - a_i}{6} \right)^2 \quad (3)$$

Може да се прорачуна дисперзија активности као квадратни корен из њене варијансе.

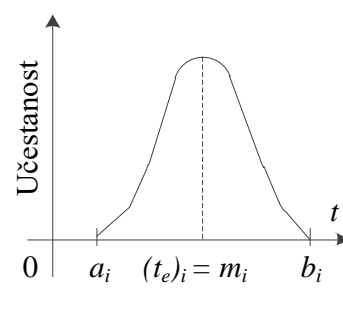
Имајући на уму МД са активностима у чворовима, положај процене m_i у односу на a_i и b_i одређује однос прорачунатог времена $(t_e)_i$ и процене m_i (слика 12.1-12.3), што утиче на поузданост података у даљој анализи времена.



Слика 11.1. $(t_e)_i > m_i$



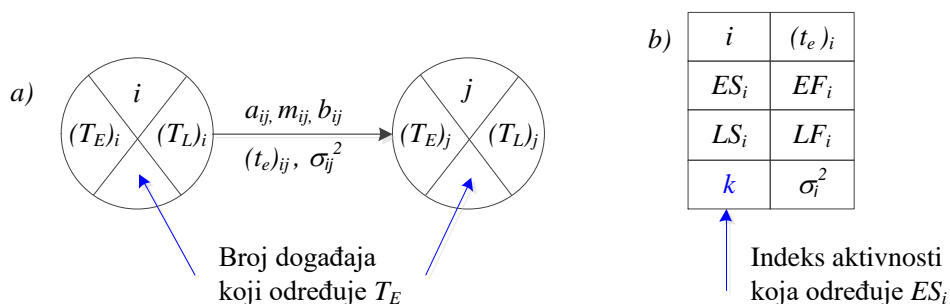
Слика 11.2. $(t_e)_i < m_i$



Слика 11.3. $(t_e)_i = m_i$

⁴⁸ Malcolm, D. G., J. H. Roseboom, C. E. Clark, W. Fazar, "Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation", *OPERATIONS RESEARCH*, Vol. 7, No. 5, September–October 1959, pp. 646–669.

Прорачун времена почетака и завршетака активности методом PERT врши истоветно као методом CPM. Уместо детерминистичких времена активности користе се очекивана трајања $(t_e)_{ij}$, односно $(t_e)_i$ (слика 12).



Слика 12. Подаци за активност на мрежним дијаграмима

- а) Оригинални елементи дијаграма за PERT (активности на луковима) и
 б) новији истоветни елементи за CPM и PERT (активности у чворовима)^{49, 50},

Под а) прорачунају се очекивана најранија/најкаснија времена догађаја при чему се користе одговарајуће ознаке. Под б) прорачунају се очекивани најранији/најкаснији почетак активности и њен на каснији почетак/завршетак (исте ознаке за CPM и PERT).

Одређивање вероватноћа одигравања догађаја (почетка активности, завршетака активности, завршетка пројекта)

Основна карактеристика методе ПЕРТ огледа се у могућности, односно потреби да се одреди вероватноћа одигравања неког догађаја, почетак или завршетак неке значајне активности или завршетак пројекта, у планираном року на основу методом прорачунатог најранијег времена. Прорачунава се одговарајући фактор вероватноће (респективно $z = ZS_i$, $z = ZF_i$ или $z = ZP$) са којим се даље одређује вероватноћа $P(z)$ остваривања разматраног рока (респективно TS_i , TF_i или TFP). За мрежу са активностима у чворовима важи:

$$ZS_i = \frac{TS_i - ES_i}{\sqrt{\sum_{KP_i} \sigma^2}}, \quad ZF_i = \frac{TF_i - EF_i}{\sqrt{\sum_{KP_i} \sigma^2 + (\sigma^2)_i}}, \quad ZP = \frac{TFP - EFP}{\sqrt{\sum_{KP} \sigma^2}} \quad (4)$$

где: TS_i, TF_i – планирани рок почетка A_i , односно завршетка A_i

ZS_i, ZF_i – фактор вероватноће за TS_i , односно TF_i

KP_i – најдужи (критични) пут са активностима које одређују почетак A_i за прорачун ZS_i посматрајући њихове варијансе

TFP – планирани рок завршетка пројекта

$EFP = T^P$ – најранији завршетак, односно трајање пројекта

При разматрању завршетка активности A_i , за прорачун ZF_i потребна је њена варијанса.

⁴⁹ ibid. Nikolić, I. i dr., 1998., Deo I, str. 2-15: најранији početak i završetak $tp_i^{(0)}$ i $tz_i^{(0)}$, најкаснији $tp_i^{(1)}$ i $tz_i^{(1)}$.

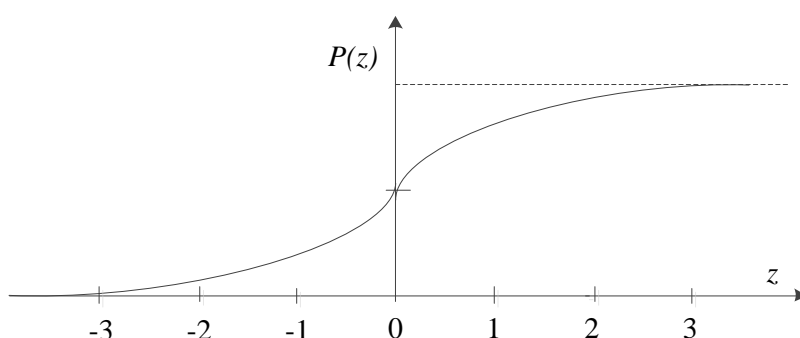
⁵⁰ ibid. Krčevinac, S. i dr., 2002., str. 402.

Вероватноћа износи $P(z)=0$ за $z < -3$ и $P(z)=1$ за $z > 3$ (слика 13). За остале вредности $-3 \leq z \leq 3$, прорачунате вероватноће $P(z)$ се у литератури дају табеларно. Одређивање $P(z)$ може да се врши и коришћењем апроксимативне криве дате аналитичким изразом (5.1) за позитивне вредности z . За негативне вредности z користи се апсолутна вредност $|z|$ у (5.2).

- Неслагања у односу на табеларне вредности настају тек на петој децимали, што је постигнуто Чебишевљевој интерполацијом.

$$P(z) = \left. \begin{aligned} &8,53353 \cdot z^6 - 118,36171 \cdot z^5 + 319,58349 \cdot z^4 \\ &- 298,54200 \cdot z^3 + 20,39639 \cdot z^2 + 118,26030 \cdot z + 50,00000 \end{aligned} \right\}, z > 0 \quad (5.1)$$

$$P(z) = 100 - P(|z|), z < 0 \quad (5.2)$$



Slika 13. Funkcija $P(z)$ за $z = ZS_i$ или $z = ZF_i$ или $z = ZP$

б) Јединствена и вишеструка детерминистичка времена са одговарајућим трошковима

Детерминистичка времена трајања активности могу бити дата као јединствени подаци или као одговарајуће варијанте података. Времена активности су зависна од трошкова, и обрнуто.

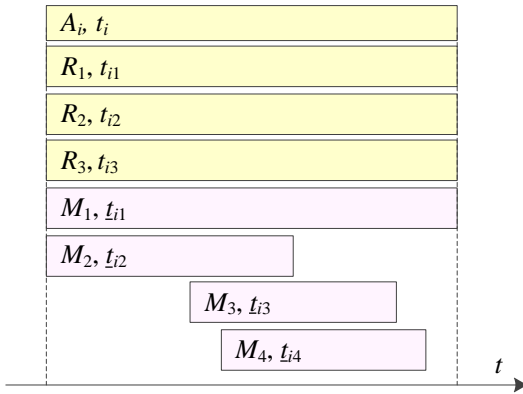
Примена методе PERT са стохастичким временима своди се на употребу математички очекиваног трајања активности при анализи времена и на избор одговарајућих времена са трошковима при анализи/оптимизацији времена и трошкова пројекта методом PERT /COST.

в) Времена трајања активности у функцији ресурса

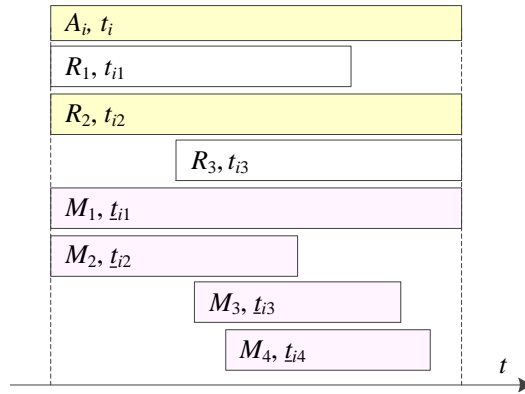
Многе активности користе више ресурса типа *Work* и *Material*. Ресурс са најдужим ангажовањем одређује трајање активности. Сматрајући да се материјали могу обезбедити у потребним количинама, трајање активности одређује ресурс *Work* са најдужим ангажовањем у времену.

Ако се користи само једна категорија ресурса *Work*, она одређује трајање активности. Када се користи више категорија овог типа ресурса, идеално је (односно, потребно је настојати тако дефинисати активности) да имају истоветно време ангажовања (слика

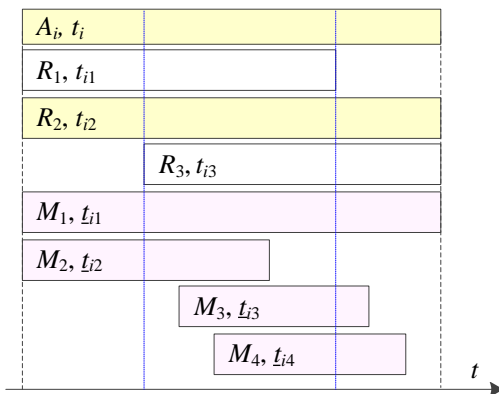
14.1). За неједнаке периоде ангажовања ресурса, трајање активности одређује категорија ресурса са најдужим периодом (слика 14.2). Посматрајући различита времена ангажовања ресурса типа *Work* на активности A_i уочава се могућност њене поделе на три зависне подактивности A_{ik} ($k = 1,2,3$), тако да свака има једнака времена за ресурсе *Work* које користи (слика 14.3-14.5).



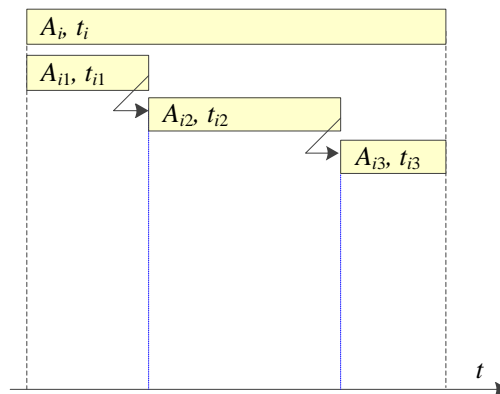
Слика 14.1. Једнака времена t_{is} ангажовања ресурса типа *Work* (R_1, R_2, R_3) на A_i



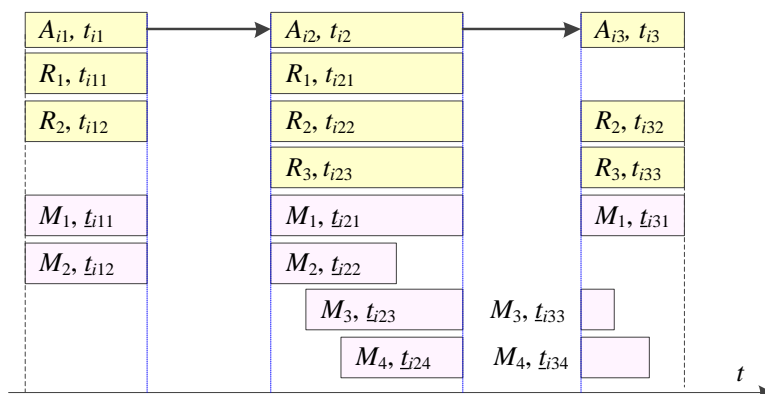
Слика 14.2. Различита времена t_{is} ангажовања ресурса типа *Work* (R_1, R_2, R_3) на A_i



Слика 14.3. Рашчлањавање A_i са неједнаким временима ангажовања ресурса типа *Work* (R_1, R_2, R_3)



Слика 14.4. Рашчлањена/подељена A_i на три зависне подактивности A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}



Слика 14.5. Три подактивности са једнаким временима ($t_{i1s}, t_{i2s}, t_{i3s}$) ангажовања ресурса типа *Work*

1

2.2.3.2. Планирање ресурса

Трајање пројекта зависи од потребних ресурса које треба свести у расположиве границе посматрајући период обављања пројекта.

а) Нивелисање ресурса типа радне снаге и механизације

За ресурсе типа *Work* се дефинишу расположиве количине у временској јединици пројекта (дан) и потребно је обезбедити да укупне потребе за посматраним ресурсом на свим активностима не прелазе расположиву количину тог ресурса у свакој временској јединици пројекта (врши се тзв. *нивелисање ресурса, односно свођење потреба за ресурсом у расположиве границе*, применом *Algoritma Gray-Kidd-a*). При томе се сукцесивно разматрају периоди са недовољно ресурса и при томе, на основу одговарајућих правила, дозвољава се обављање само приоритетних активности (стандардно правило: активности започете у ранијим периодима, критичне активности и активности са мањим укупним временским резервама) чије укупне потребе не премашују расположиве ресурсе. Остале активности се померају најмање на крај разматраног интервала.

- Алгоритам за *нивелисање више категорија ресурса типа Work*.⁵¹ Сукцесивно се посматрају интервали времена са прекорачењима ресурса и померају неприоритетне активности за које најраније у времену нема довољно одређеног ресурса (слика 16.1). То може да има за последицу померање активности које користе друге ресурсе (слика 16.2). Поступак се понавља до свођења свих ресурса у расположиве границе. Сваки стандардни софтвер за УП омогућава програмско нивелисање ресурса типа *Work*, независно од броја категорија.

б) Планирање ресурса типа материјала

Ресурсе типа *Материјал* карактеришу набавке, складиштење, трошење за обављање активности и залихе. Уобичајено се сматра да се ова врста ресурса може обезбедити у потребним количинама за план пројекта са расположивим ресурсима типа *Work*. Најчешће коришћени софтвер за УП код нас (*MS Project* и *Primavera*) врше *само прорачун потреба за ресурсима типа Material*. Напред је указано да *CA-SuperProject подржава нивелисање ресурса типа Work* (са називом *Labor*) и *типа Material*.⁵² То је *dalo osnovu da se novac razmatra kao potrošivi resursa tipa Material*.⁵³

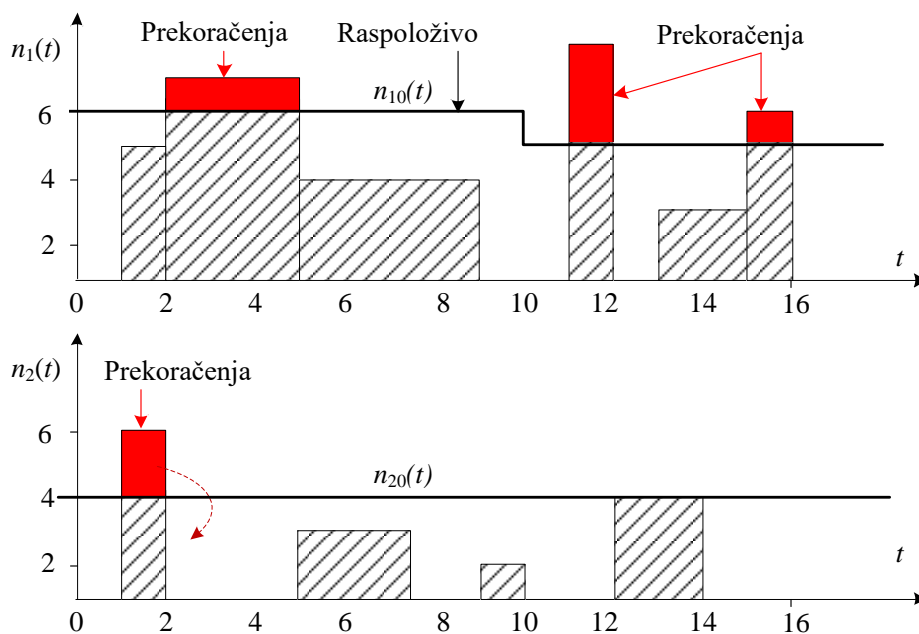
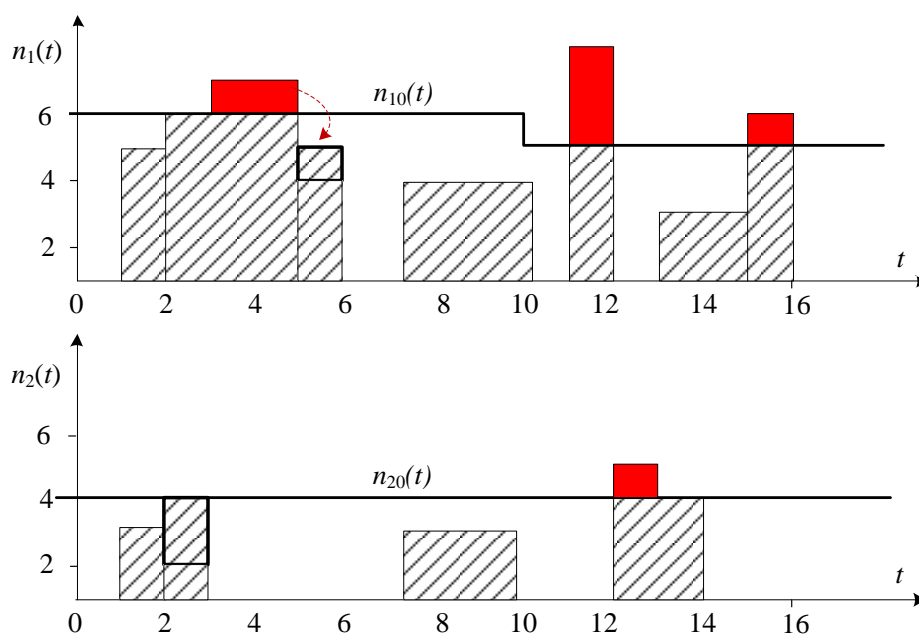
Након што се софтвером за УП утврде потребе, могуће је разматрати набавке ресурса типа *Material* и *интерактивно спроведити процес свођења потреба у расположиве границе*: аналитичар непосредно помера почетке одабраних активности из периода са негативним залихама у периоде са ненегативним залихама (дефинише одговарајуће термине у софтверу) и софтвер одређује одговарајуће минимално трајање пројекта анализом времена са нивелисањем ресурса типа *Work*.⁵⁴

⁵¹ *ibid.* Nikolić, I., i dr. 1998., I Deo, str. 2-27.

⁵² *ibid.* Nikolić, I., i dr. 1998., II Deo., str. 6-15 до 6-19.

⁵³ Rajkov, M., Božilović S., Nikolić I., "Menadžment novčanim tokovima u poslovnom poduhvatu", *Zbornik radova, SIM-OP-IS '98 - XXV Jugoslovenski simpozijum za operaciona istraživanja*, Herceg Novi, 21-24. Septembra 1998., str. 231-234.

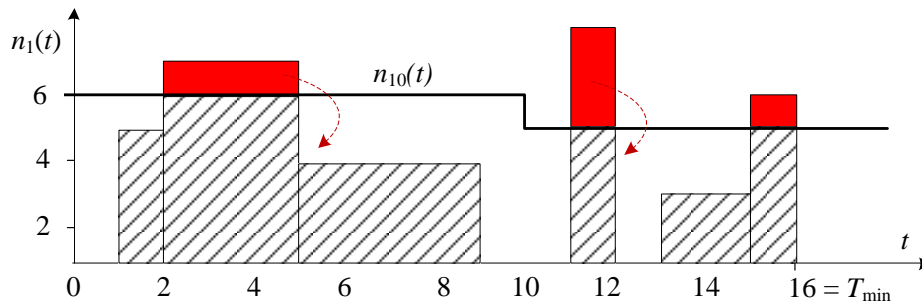
⁵⁴ Nikolić I., "Modeli nivelisanja resursa i planiranja nabavki sirovina na projektu", *IIPP, Naučno-stručni časopis Istraživanja i projektovanja za privredu*, broj 18., 2007., godina V, Institut za istraživanja i projektovanja u privredi, Beograd, str. 25-28, http://issuu.com/iipp/docs/casopis_iipp_18

Слика 15.1. *Корак 1*: Решити прекорачење R_2 које наступа раније од прекорачења R_1 Слика 15.2. *Корак 2*: Наступило је померање активности са променама потреба за оба ресурса задржавајући трајање пројекта, решити прекорачење R_1 и наставити поступак

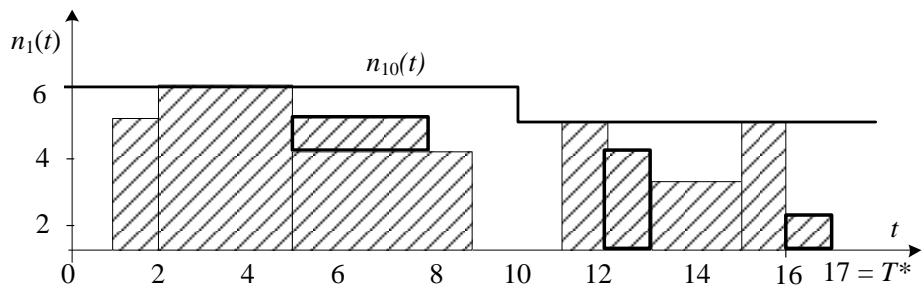
- За план са расположивим количинама (једног или више) ресурса типа *Work* (слика 16.1 и 16.2), *софтвер* прорачунава потребе ресурса типа *Material* (слика 16.3).
- *Аналитичар* врши прорачун стања (залиха) материјала са почетним залихама и планираним набавкама, када могу настати негативне залихе (слика 16.4).
- *Софтвер MS Project* подржава експорт података у *MS Excel* и *аналитичар* лако моделира анализу залиха материјала. Ако се помери термин прве набавке са $T_1 = 8$ најкасније на $T_1' = 6$ (сматрајући да је прихватљиво пристизање материјала на

почетку радног дана), мења се стање залиха и негативне су само за $t = 12$. Померањем друге набавке са $T_2 = 13$ најкасније на $T_2' = 12$, обезбеђене су ненегативне залихе, односно позитивне количине или нула (слика 16.5). Уколико није могуће померати набавке, спроводи се напред изложени интерактивни процес.

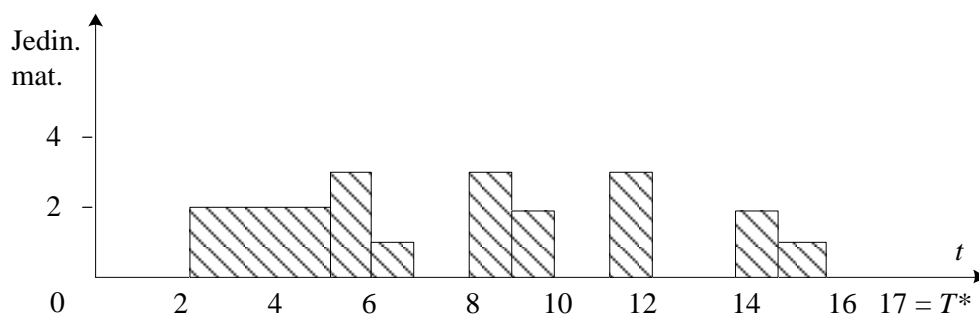
**Пример са једном категоријом ресурса типа *Work*
и једном категоријом ресурса типа *Material***



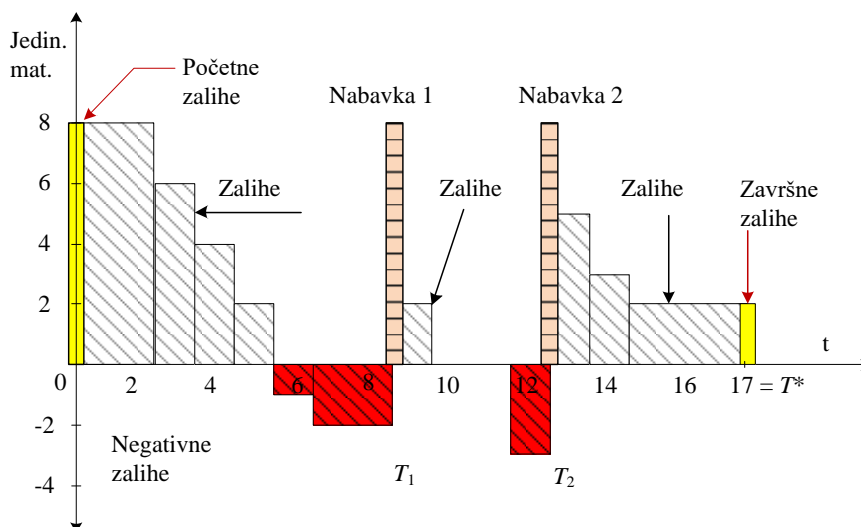
Слика 16.1. Потребе ресурса типа *Work*, расположиве количине и прекорачења (недостајуће количине) за минимално трајање пројекта $T^{min} = 16$



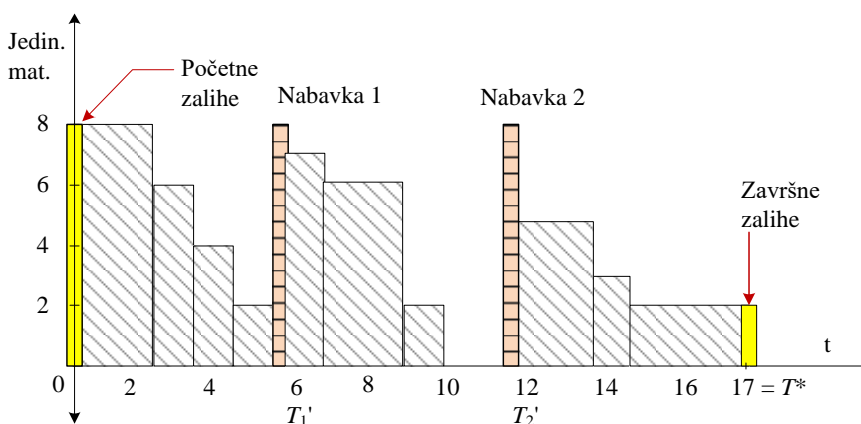
Слика 16.2. Потребе ресурса типа *Work* сведене у расположиве границе (нивелисањем) продужиле трајање пројекта $T^{min} = 16$ на $T^* = 17$



Слика 16.3. Потребе једног ресурса типа *Material* у плану са нивелисаним ресурсурсом типа *Work*



Слика 16.4. Почетне залихе, две набавке, позитивне залихе и негативне (недостајуће) залихе ресурса типа *Material* у плану са нивелисаним ресурсом типа *Work*



Слика 16.5. Стање залиха ресурса типа *Material* након померања прве и друге набавке у плану са нивелисаним ресурсом типа *Work*

- Залихе одређеног материјала у посматраном термину t једнаке су разлици кумулатива набавки и кумулатива потреба од почетка пројекта закључно са тим термином.
- Крајње залихе материјала једнаке су разлици укупних набавки и укупних потреба.

У суштини, могу се разматрати разни модели управљања залихама материјала, имајући на уму да се пројекат не може обавити без укупних потреба материјала. Почетне залихе нису неопходне, али мора да се планира почетна или прва набавка. Наводе се одабрани могући модели залиха који могу да се комбинују:

- једнаке поруцбине/набавке (као што је илустровано, одређују се термини за набавке),
- набавке у датим временским терминима са једнаким или различитим размацама (одређују се величине поруцбина),
- нормалне набавке са одговарајућим трошковима и хитне набавке са већим трошковима,

- минималне залихе (сигурносне залихе за случајеве кашњена набавки) и/или максималне залихе (дефинисане условима складиштења),
- разматрање трошкова складиштења, и сл.

в) Оптимизација трајања пројекта и коришћења ресурса

Како трајање активности зависи од ангажовања ресурса, а трајање пројекта зависи од трајања активности, прозилази да и трајање пројекта зависи од ангажовања ресурса. Разматрајући само ресурсе типа *Work*, сматрајући да ће се материјали обезбедити у потребним количинама, у општем случају могу да се поставе више једнокритеријумских и вишекритеријумских проблема.

- Минимално трајање пројекта у условима довољних ресурса
- Минималн трајање пројекта у функцији ресурса типа *Work*
- Варијанте проблема са ресурсима типа *Work*:⁵⁵
 - Минимизација максималних (расположивих количина) ресурса за минимално трајање пројекта
 - Минимизација трајања пројекта за минималне максималне ресурсе
 - Минимизација трајања пројекта за одабране варијанте максималних ресурса
 - Минимизација максималних ресурса за одабране варијенте трајања пројекта

2.2.3.3. Планирање трошкова

Трошкови су најбитнији аспект сваког сложенијег пројекта, уколико није од посебног значаја да пројекат буде завршен за што краће време и трошкови имају другостепени значај. Планирање трошкова захтева да се прво врши њихова *процена*, а затим *прорачун трошкова* у плану пројекта и њихово *приказвање* (посебним плановима) за одговарајуће делове пројекта, појединачне категорије ресурса, одабране временске периоде итд. Следи евентуална *оптимизација трајања и трошкова пројекта*.

а) Процена трошкова

Процена трошкова може да се дефинише као *процес у коме страна заинтересована за изградњу инвестиционог објекта покушава да одреди количину ресурса (радна снага, материјал, опрема време и новац)* како би се постигао неки циљ или донела одлука значајна за реализацију пројекта (добивање посла, избор извођача, оцан оправданости пројекта, планирање изградње).⁵⁶

Свака литература о планирању у грађевинарству детаљно излаже процену трошкова и одговарајуће елементе трошкова, истичући: неопходна технолошка знања проценивача, предходну анализу трошкова сличних пројеката и коришћење адекватне базе података.

- При оптимизацији организационе структуре грађевинског предузећа⁵⁷, разматрају се критеријуми: трошкови производне радне снаге (укључују

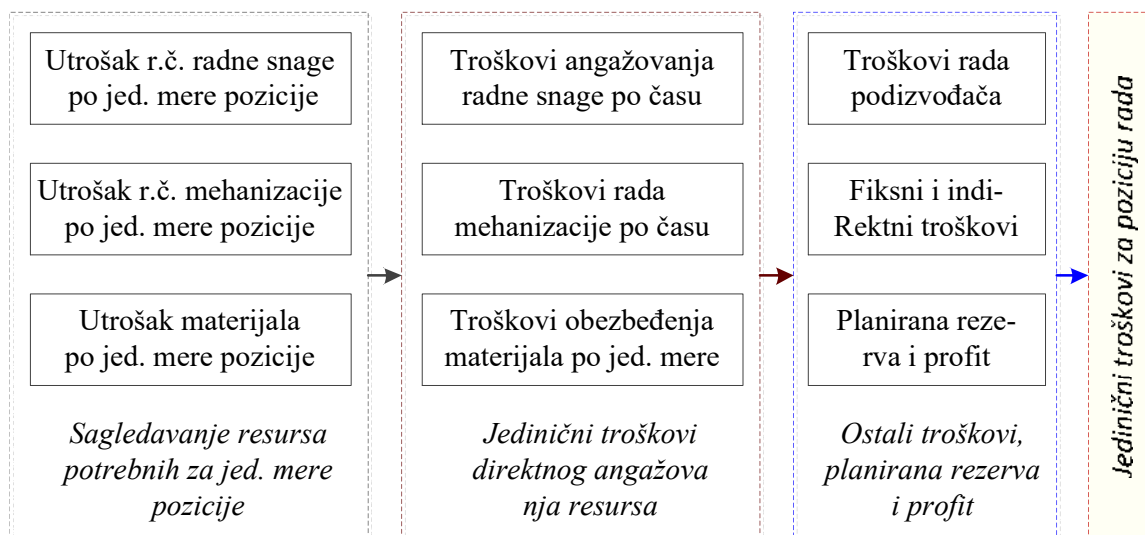
⁵⁵ Nikolić, I., "Šest osnovnih problema optimizacije vremena i resursa u procesu upravljanja projektom", *CD Zbornik radova, Simpozijum Istraživanja i projektovanja za privredu 2005*, Redakcija časopisa Istraživanja i projektovanja za privredu, Mašinski fakllet Univerziteta u Beogradu, Akademija inženjerskih nauka Srbije i Crne Gore; Beograd 06. i 07. oktobar 2005., str. 93-102.

⁵⁶ ibid. Ivković, B., Popović, Ž., 2005., str. 145.

⁵⁷ ibid. Dutina, V., 2006., str. 139-146.

трошкове одговарајућих радова), трошкови механизације (укључују коришћење и одржавање) и трошкови инжењерско-техничког кадра.

- Велики број консултантских фирми бави проценом трошкова као искључивом делатношћу.
- Прецизност процене трошкова зависи од врсте упита, расположиве техничке документације, примењене методе за процену трошкова, ажурности расположивих цена и стручности кадрова укључених у процену трошкова⁵⁸. Илуструје се један од модела за процену трошкова (слика 17).
- Управљањем пројектом датог трајања може се вршити са аспекта трошкова.⁵⁹



Слика 17. Прорачун јединичних трошкова за одређену позицију рада (Преузето из: Dutina, V., 2012., стр. 13.9, цитира се: Ivković, B., Popović, Ž., 2005.)

b) Оптимизација времена и трошкова, Метода PERT/COST (Crashing Time/Cost Tradeoffs)

Канцеларија Секретаријата Одбране САД (*DOD*) и Национална управа за аеронаутику и свемирска истраживања (*NASA*) су 1962. године донели упутство за једнообразан приступ планирању помоћу ТМП под називом *PERT/COST Systeme Design*⁶⁰. За пројекте са мање активности могу да се примене ручни поступци, а за комплексне пројекте са више активности потребно је користити моделе ЛП и софтвер^{61, 62} или софтвер за саму методу *PERT/COST*⁶³.

- Стандардни софтвер за УП може се ефикасно применити као *интерактивни поступак аналитичар – софтвер*: софтвером се одређује план са трајањем и

⁵⁸ Dutina, V., *Merenje i vrednovanje radova u građevinarstvu*, Univerzitet u Prištini, Fakultet tehničkih nauka, Kosovska Mitrovica, 2012., стр. 112-144.

⁵⁹ ibid. Sudić, S., 2012, стр. 117-129.

⁶⁰ *DOD and NASA Guide, PERT COST (PERT - TROŠKOVI)*, Office of the Secretary of Defence, National Aeronautics and Space Administration, U.S.A., June 1962.

⁶¹ Krčević, S. i dr., *Algoritmi i programi iz operacionih istraživanja*, Naučna knjiga, Beograd, 1989., Nikolić, I., Poglavlje 6.3. *Analiza troškova projekta – Primena LP*, стр. 318-329.

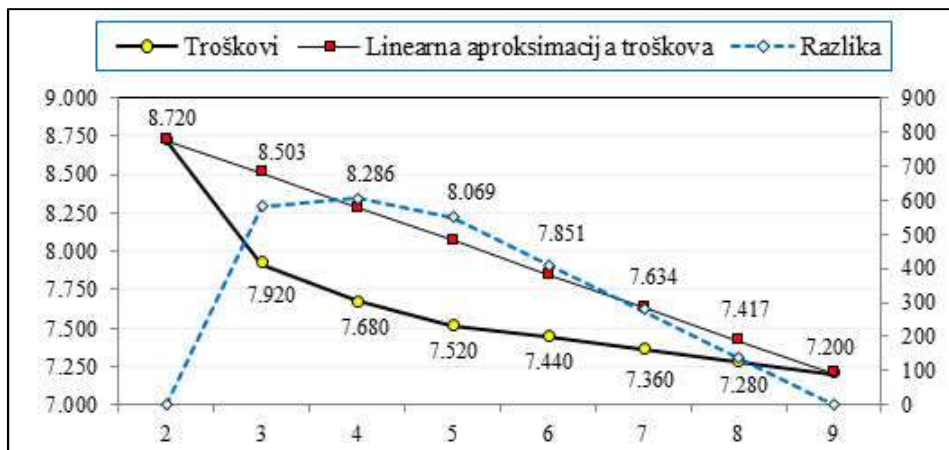
⁶² Chang Y.L., Desay K., *WinQSB (Quantitative Systems for Business)*, modul ILP (*Integer and Linear Programming*).

⁶³ ibid. *WinQSB*, modul *PERT_CPM*, Deterministic CPM i definisanje potrebnih podataka (t_m , t_w , c_n i c_w).

трошковима пројекта уважавајући расположиве ресурсе, аналитичар примењује алгоритам методе (поставља краће трајање одговарајуће критичне активности и њене трошкове) и софтвер одређује нови план са трајањем и трошковима пројекта. Следи понављање поступка.

б.1) Одређивање времена активности и трошкова

У општем случају, одређена активност може да има две варијанте маргиналних вредности за трајање и одговарајуће трошкове са допустивим међувредностима (слика 18):



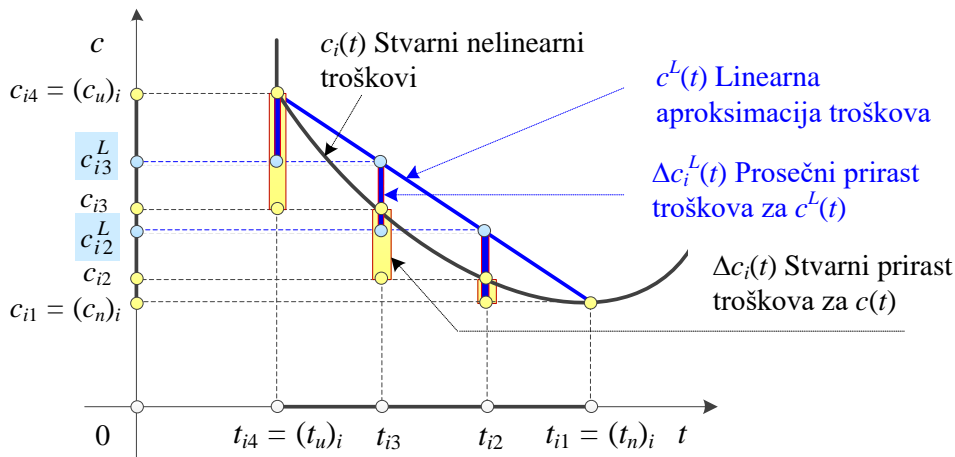
Слика 18. Стварни трошкови активности земљани радови, линеарна апроксимација трошкова и разлика (Преузето из: Petrić, J., 1972, Tablica 9.17, str. 512)

- t_n – нормално трајање са нормалним трошковима c_n настаје када се активност обавља на најповољнији начин са становишта ресурса, то је максимално трајање активности са минималним директним трошковима c_n
- t_u – усиљено трајање са усиљеним трошковима c_u је минимално трајање активности са максималним трошковима c_u када су ресурси максимално напрегнути (нпр. радници користе максимално законом дозвољено прековремено радно време) са најповољнијим распоредом (максимални интензитет ресурса, броја радника) и никакве даље мере организационе или финансијске природе (радници веће продуктивности са већим ценама) не могу скратити њено трајање.

У посебним случајевима активности могу да имају константне трошкове за допустива времена. Најчешће, трошкови су одређене функције времена.

- линеарне функције $c_i(t)$, са константним прирастом трошкова $\Delta c_i(t) = \Delta c_i = Const$ у јединици времена $t \in [(t_u)_i, (t_n)_i]$
- нелинеарне функције $c_i(t)$ којима се најчешће одређују линеарне апроксимације $c_i^L(t)$ са константним просечним прирастом трошкова $\Delta c_i^L(t) = \Delta c_i^L = Const$, $t \in [(t_u)_i, (t_n)_i]$ (слика 19)

Нека пројекат има n активности A_i са индексима у скупу I , $i \in I = \{1, \dots, n\}$.



Слика 19. Нелинеарни трошкови $c_i(t)$ и линеарна апроксимација трошкова $c_i^L(t)$, $t \in [(t_u)_i, (t_n)_i]$ са просечним прирастом трошкова $\Delta c_i^L(t) = \Delta c_i^L$

Важе релације (6.1) – (6.4).

$$c_i(t) = \begin{cases} \infty, & t > (t_n)_i \\ \text{vrednosti}, & t \in [(t_u)_i, (t_n)_i] \\ \infty, & t < (t_u)_i \end{cases} \quad (6.1)$$

$$c_i^L(t) = -a_i t + b_i, \quad a_i = \frac{(c_u)_i - (c_n)_i}{(t_n)_i - (t_u)_i}, \quad b_i = \frac{(c_u)_i (t_n)_i - (c_n)_i (t_u)_i}{(t_n)_i - (t_u)_i} \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{cases} \Delta c_i(t) = c_i(t) - c_i(t-1), & \text{linear. funkcija } c_i(t) \\ \Delta c_i(t) = \Delta c_i, & \text{nelinear. funkcija } c_i(t) \end{cases} \right\} t \in [(t_u)_i, (t_n)_i]$$

$$\left. \begin{cases} \Delta c_i(t) = \Delta c_i \\ \Delta c_i^L(t) = \Delta c_i^L \end{cases} \right\} = \frac{(c_u)_i - (c_n)_i}{(t_n)_i - (t_u)_i}, \quad \left. \begin{cases} \text{linear. funkcija } c_i(t) \\ \text{lin. aproks. } c_i^L(t) \text{ za nelin. } c_i(t) \end{cases} \right\} t \in [(t_u)_i, (t_n)_i] \quad (6.3)$$

- У општем случају могу да се разматрају карактеристични интервали времена $t \in [t_i^{k+1}, t_i^k]$, $(t_u)_i \leq t_i^{k+1} < t_i^k \leq (t_n)_i$, $k = 1, 2, \dots$ са различитим функцијама трошкова.
- Подаци за активности преносе се на пројекат (слика 20). Разматрајући само маргинална времена трајања активности и њихове трошкове одређују се подаци (7).

$M = T(t_n)$ – нормално (максимално) трајање пројекта са нормалним временима $(t_n)_i$ за све активности, $i \in I$, где индекси свих активности пројекта чине скуп I

$c_n = C_n = C(t_n, c_n) = C(M)$ – нормални (минимални) трошкови пројекта са нормалним временима $(t_n)_i$ и трошковима $(c_n)_i$ за све активности, $i \in I$

- Основна поставка *PERT/COST* не разматра ресурсе.
- Аспекти ограничених ресурса када се примењује *PERT/COST* битни су за моделе избора извођача са условима да неки или сви потенцијални извођачи пројекта имају ограничене капацитете.

Проблем 1. Минимизација трошкова $C(T_0)$ за дато трајање пројекта T_0

Решава се модел (8) са одабраним или свим допустивим временима трајања пројекта $T_0^{(k)}$. Критеријум се исказује линеарним апроксимацијама трошкова, када је потребно. Ако се не разматрају само одабрана, већ сва допустива времена пројекта T_0 , што је препоручљиво у циљу целовите анализе проблема, потребно је поставити (9).

$$\begin{cases} \min C(T_0) = \sum_{i \in I} c_i \\ T_p = T_0, \\ t_i \in [(t_n)_i, (t_u)_i], \quad i \in I \end{cases} \quad T_0 \in (M, m] \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \min C(T_0^{(k)}), & T_0^{(k)} \in (M, m] \\ T_p = T_0^{(k)}, & \text{за одбрано } k \\ t_i \in [(t_n)_i, (t_u)_i], \quad i \in I \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} T_0^{(1)} = M - 1, \\ T_0^{(k+1)} = T_0^{(k)} - 1, \quad k = 1, \dots, M - m - 1 \end{cases} \quad (9)$$

Алгоритам *PERT/COST* применом ручних поступака (Проблем 1)

Постоје *различите варијанте* примене основног концепта *PERT/COST*, које су *развијене за ручне поступак*, што није од значаја када се примењује *софтвер* за модел (8),(9). При скраћивању времена одговарајућих активности потребно је придржавати се *следећих хеуристичких принципа*.⁶⁴

- 1) Скратити активности које леже на критичном путу^(a) све док не дође до преношења критичности, тј. док се не појави још неки критични пут^(b).
- 2) Ако је могуће скратити више активности, прво скратити најјефтиније активности (скратити активности редоследом растућих додатних трошкова).
- 3) Када има више критичних путева^(b) скраћење сваког се врши за исти број временских јединица, при чему се најпре скраћују најјефтиније активности^(r).
- 4) Овакав процес спроводити све док се не постигне жељени рок завршетка пројекта или, у крајњем случају, док све активности бар на једном путу не буду имале усиљена времена трајања. Дат је *пример скраћивања плана израде прототипа мењачке кутије*.⁶⁵

PERT/COST се једноставније спроводи приказивањем поступка са одговарајућим итерацијама у табели са свим путевима мреже, што је подесно за мањи број активности.⁶⁶ Поступак је *егзактан (није хеуристички)* и скраћивање активности за 1 врем. јед. поједностављује примену.

⁶⁴ *ibid.* Petrić, J., 1972., str. 514-528.

^(a) Скраћују се и субкритични путеви (СКП) било које врсте, ако садрже скраћене активности.

^(b) Достигло се време неког СКП, односно више СКП истог трајања, ако их има више.

^(r) На почетку или након преношења критичности на СКП под 1).

^(r) Изабрати комбинацију активности са најмањим додатним трошковима за пројекат.

⁶⁵ *ibid.* Petrić, J., 1972., str. 528-531.

⁶⁶ *ibid.* Nikolić, I. i dr., 1998., Deo I, str. 2-18 do 2-26 (aktivnosti u čvorovima mreže).

Дакле, *PERT/COST* скраћује времена само потребних активности да се постигну минимални додатни трошкови на пројекту. Када се оствари минимално трајање пројекта m и одговарајући оптимални (минимални) трошкови $C_u^* < C_u$ (7), добија се уштеда трошкова у износу $C_u - C_u^*$. Активности A_i , у општем случају, могу се сврстати у три групе (10) са становишта трајања $t_i(m)$: (1) без скраћења, задржава се $(t_n)_i$, (2) делимична скраћења, није достигнуто $(t_u)_i$, (3) скраћења у потпуности, достигнуто $(t_u)_i$.

$$t_i(m) \begin{cases} = (t_n)_i, & i \in I \\ \in ((t_u)_i, (t_n)_i) \Rightarrow (t_u)_i < t_i(m) < (t_n)_i, & i \in I \\ = (t_u)_i, & i \in I \end{cases} \quad (10)$$

Проблем 2. Минимизација трајања пројекта $T_p(C_0)$ за дате трошкове C_0

Разматрају се максимално допусти трошкови C_0 и минимизира трајање пројекта $T_p(C_0)$ решавањем модела (11).

$$\begin{cases} \min T_p(C_0) \\ C_p = \sum_{i \in I} c_i \leq C_0, & C_0 \in (C_n, C_u] \\ t_i \in [(t_n)_i, (t_u)_i], & i \in I \\ t_i \Rightarrow c_i \in [(c_n)_i, (c_u)_i], & i \in I \end{cases} \quad (11)$$

где: трошкови c_i активности A_i (за *нелинеарне трошкове се користи њихова линеарна апроксимација*) одговарају потребним временима t_i , $i \in I$, да пројекат има условљено минималном трајање $T_p^*(C_0)$ са трошковима који не прелазе дату вредност C_0 .

2.2.3.4. Буџет и динамика буџета у времену

Budžet je, u opštem slučaju, spisak planiranih prihoda i rashoda pojedinca, firme, organizacije, lokalne zajednice ili države za određeni period, obično za jednu godinu.
(Wikipedia)

За грађевински пројекат битни су наредни аспекти буџета: ⁶⁷

- 1) Буџет пројекта представља финални резултат циклуса планирања.
- 2) Буџет мора бити оправдан и у целини достиган.
- 3) Основа буџета може бити базирана на историјским трошковима, извршеној процени или стандардима рада који важе за област у којој се пројекат изводи.
- 4) Буџет мора идентификовати све потребне елементе за целокупну реализацију послова.
- 5) Укупни буџет пројекта треба да садржи (детаљно описан сваки елемент):
 - распоређени буџет

⁶⁷ ibid. Marković, Lj., 2008., str. 66-67.

- менаџмент резерву
- нераспоређени буџет
- измене уговоа

Други део карактеристике 2), да буџет мора бити у целини достижан, *подразумева прибављање потребних финансијских средстава*. Ако буџет није обезбеђен на почетку пројекта, битна је динамика формирања буџета у току пројекта са терминима и износима прилива новца.⁶⁸

а) Облици финансирања пројеката станоградње

Буџет треба да обезбеди ликвидност на пројекту, односно довољно новца за благовремену исплату одговарајућих уговорних обавеза. Буџет *не може да буде мањи од укупне вредности пројекта*. Има ставова да је потребна константна ликвидност у целом периоду извођења пројекта. Али, може се усвојити да је ликвидност, већим делом, неопходна у одређеним терминима исплате трошкова (нпр. на крају месеца када се врши пресек стања на пројекту, односно утврди у којој мери су изведени планирани радови). При томе се узимају у обзир планиране набавке са терминима у току месеца.

Финансирање пројеката станоградње се делимично разликује од финансирања других грађевинских пројеката (изградња хале одређене намене, путева, мостова и сл.), односно пројеката у другим областима. Финансирање може се вршити комбиновањем наредних облика.

- 1) *Пројектно финансирање* је најчешћи облик прибављања новчаних средстава. Банке захтевају да се за уговарање кредита формира посебна за предметни пројекат и да инвеститор (грађевинска компанија) обезбеди око 30% укупне вредности пројекта. Банке контролишу напредовање на пројекту и исплаћују само документоване стварне трошкове. Камата износи око 5% на годишњем нивоу.
- 2) *Коришћење уобичајених банкарских кредита* је релативно неповољнији облик финансирања пројекта (веће камате), али постоје не мале предности (нема строге контроле извођења пројекта, односно обавезе да компанија документује реализацију пројекта и може да се уговори једнократна исплата на почетку пројекта или са планираном динамиком).
- 3) *Авансно финансирање* из предпродаје станова је повољнији облик финансирања и поред чињенице да су цене станова мање од цена уселивних станова по завршетку пројекта. Међутим, овај облик финансирања остварује прилив новца који најчешће није довољан за укупне трошкове пројекта. Зато се уобичајено комбинује са осталим облицима финансирања.
- 4) *Само-финансирање* сопственим средствима грађевинске компаније, такође, ретко може да буде довољно за обављање пројекта и потребно је да се комбинује са другим облицима финансирања. То је најповољнији облик финансирања, ако грађевинска компанија располаже довољним новцем који не може да ефикасније уложи у односу на остале облике финансирања.

⁶⁸ Nikolić, I., Božilović, S., „Modeli planiranja resursa, troškova i likvidnosti projekta – Primena tehnike mrežnog planiranja (TMP) i softvera: MS Excel, MS Project, MMS i WinQSB, *Pisana predavanja*, Univerzitet Union (sada “Union – Nikola Tesla”), Fakultet za graditeljski menadžment, Beograd, 2006., str. 153-211.

б) Одабрани проблеми одређивања динамике формирања буџета у току пројекта

Новац представља потрошиви ресурс и треба да се разматра као појединачни ресурси типа *Material* (табела 5).

Табела 5. Карактеристика два облика потрошивих ресурса – материјала и новчаних средстава

| | Материјали (више врста) | Новчана средства (један ресурс) |
|------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| Основни услов | Укупне набавке не мање од укупних потреба на пројекту | Укупан буџет (прилив новца) не мањи од укупних трошкова пројекта |
| Прилив | Почетне залихе и набавке | Почетна средства и прилив |
| Одлив | Утрошци на активностима | Исплате финансијских обавеза |
| Стање | Залихе | Ликвидност |
| Захтев у току пројекта | Ненегативне залихе у терминима коришћења | Ненегативна ликвидност у терминима исплата финансијских обавеза |
| На крају прој. | Завршне залихе | Профит или губитак |

- Како наведени прступ није раније излаган у литератури, предложено је да се стандардна методологија управљања пројектом прошири са управљањем новчаним токовима.⁶⁹
- План пројекта је потребно сачинити сагласно очекиваној динамици буџета, односно очекиваном пилуви новца у времену обављања пројекта. Даље је неопходно ажурирати план сагласно оствареној динамици буџета.⁷⁰

б.1) Планирање динамике прилива новца и минимизација трајања пројекта са расположивим ресурсима типа *Work*

Када је одређено минимално трајање пројекта T_p^* са расположивим ресурсима типа *Work* може се планирати прилив новца у циљу остваривања ликвидности у терминима за исплате трошкова. Избор термина и износа прилива може бити произвољан или сагласно одговарајућим захтевима. На пример, за дате износе прилива одређују се термини прилива (слика 21.1). Или, за дате термине прилива новца одређују се износи прилива (слика 21.2). Захтева се ликвидност на крају сваког месеца и завршетку пројекта.

Могући захтеви или услови одређивања термина прилива и/или износа прилива новца на сложеном пројекту са дужим трајањем⁷¹ могу се детаљније разматрати (табела 6). Најсложенији је проблем са датим терминима и износима прилива новца.⁷²

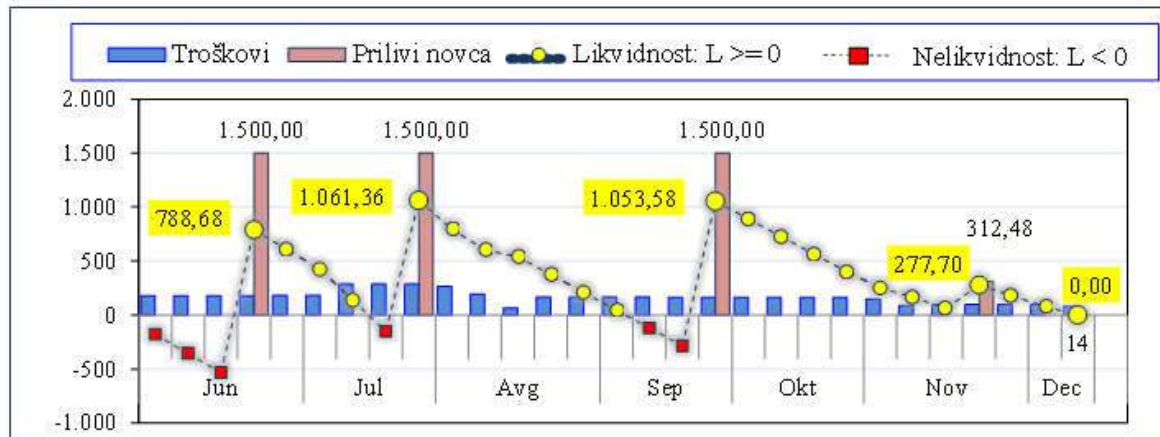
⁶⁹ Rajkov, M., Nikolić, I., "Proširenje standardne metodologije Project Managementa sa planiranjem i kontrolom toka novca", *Zbornik radova, YUPMA '99, III internacionalni simpozijum iz Project Managementa*, Zlatibor, 27-29 septembar 1999., str. 142-146.

⁷⁰ Nikolić, I. et al., "Project liquidity planning with the expected and achieved budget dynamics", *Proceedings, 3th Internat. Conference - Life Cycle Engineering and Management*, June 28-29, 2012., Belgrade, p. 227-232.

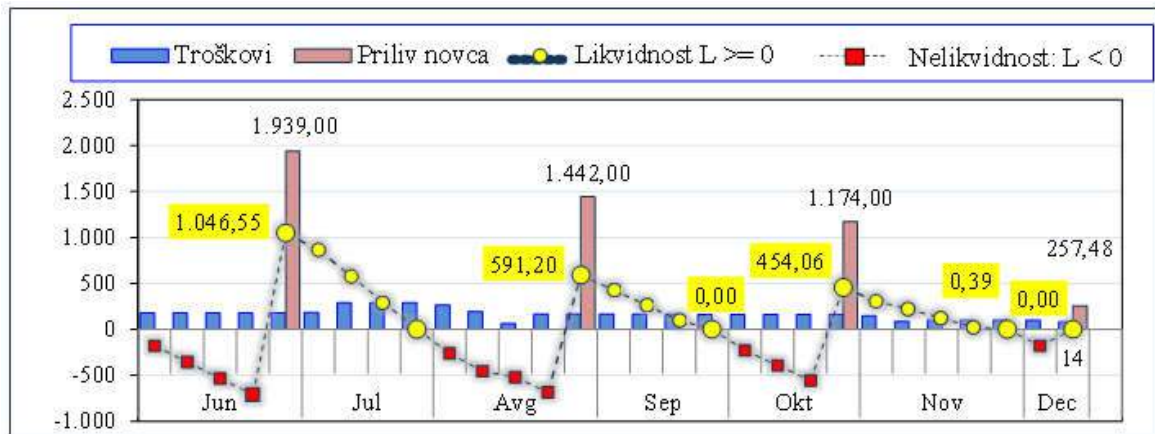
⁷¹ Nikolić, I., et al., "Planning the input and output of money to ensure liquidity on project", *SPIN 2011, VIII Meeting of businessmen and scientists "European Integration and Operations Management"*, Faculty of Organizational Sciences in Belgrade and the Serbian Chamber of Commerce, November 1-2, 2011., Belgrade, p. 289-293., <http://www.spin.fon.rs/prezentacije.php>

⁷² Božilović Z., Nikolić N., „Liquidity planning of construction project with given formation dynamics of budget and constraints for labor and mechanization“, *Annals of the Oradea University*, Volume XXIV (XIV),

- Као резултат се најчешће одређује прекораћење рока завршетка пројекта без таквих услова/захтева.



Слика 21.1. Трошкови пројекта, дата 3 једнака износа прилива новца, прорачунати термини, прорачунат 4-ти термин и прилив, и стање новца⁷³



Слика 21.2. Трошкови пројекта, дата 3 термина прилива новца (4-ти на крају пројекта), прорачунати износи прилива и стање новца⁷⁴

6.2) Утицај динамике и висине прилива новца на полазни план и реализацију пројекта

Ако није могуће сачинити план са минималним трајањем пројекта $T_p = T_p^*$ (одређен нивелацијом расположивих ресурса типа *Work*) услед недостака новца за одговарајуће термине исплата, неопходно је усагласити са власницима ресурса како планирати извођење пројекта (при томе може да наступи продужење на почетку утврђеног рока завршетка T_p^*).

2015/3, ISSN 1583-0691, pp. 33-38., <http://imtuoradea.ro/auo.fmte/doi.php?doi=10.15660/AUOFMTE.2015-3.3189>

⁷³ Božilović Z., Nikolić N., "Ilustracija planiranja likvidnosti projekta sa datim terminima priliva novca za formiranje budžeta tokom izvođenja projekta", *YuInfo 2016, XXII konferencija iz oblasti informacionih i komunikacionih tehnologija*, Kopaonik, 28.02.-02.03.2016., str. 248-251.

⁷⁴ Božilović Z., Nikolić N., "Planiranje likvidnosti prorjekta sa datim iznosima priliva novca za formiranje budžeta u toku izvođenja projekta", *Zbornik radova, YUPMA 2016, XX Internacionalni simpozijum iz projektog menadžmenta*, Zlatibor, 13.-15. maj 2016., str. 317-322.

Табела 6. Одабрани проблеми планирања динамике прилива новчаних средстава

| | n и T_p са захтевима/условима | Решења |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1 | Дати термини и износи прилива | T_p (трајање пројекта) |
| 2 | Дати термини прилива: са једнаким / различитим размацама. Истовремено: што мањи / већи износи прилива | T_p и новчани износи прилива |
| 3 | Што мањи број прилива (тј. што већи износи прилива) | T_p , термини прилива (тима и број прилива) и износи прилива |
| 4 | Што већи број прилива (тј. што мањи износи прилива) | |
| 5 | Једнаки приливи (евентуално осим последњег) | T_p , број прилива, термини прилива и износи прилива |
| 6 | Минимала ликвидност у терминима исплата, подуслов у ранијим случајевима | T_p и елементи из основних захтева |
| 7 | Хитни приливи ако нису остварени планирани приливи | T_p , термини и износи хитних прилива |

Изложени проблеми могу да настану у току реализације пројекта, са већом извесношћу него у фази почетног планирања, услед евентуалних кашњења планираних прилива новца и(или) промена цена ресурса. Решења је потребно тражити благовремено, аналогно датим препорукама и њиховим комбинацијама.

2.2.3.5. Планирање ризика на пројекту

На сваком пројекту присутан је одређени ризик да се реализација не изведе по плану, што има одговарајуће последице. Пројекти су подухвати који садрже ризик, па се остварење њихових циљева може процењивати са одређеним степеном вероватноће.⁷⁵ Може се казати:

- Ризик на пројекту представља *будући догађај који може и не мора да се догоди*. Такође, то је догађај који има одређену вероватноћу наступања, и чије су последице неочекиване и непланиране.
- Ризик ће, ако се догоди, *остварити позитиван или негативан утицај* на бар један сегмент пројекта (време, трошкови, обим пројекта, квалитет и др.).

У *PMBOK 2004* (група процеса *II Planiranje*) детаљно су изложени помоћни процеси (слика 4) који имају одговарајуће подпроцесе: *8.1 Planiranje rizika*, *8.2 Kvantifikacija rizika* и *8.3 Razvoj plana odgovora na rizik*.

- У пракси, за грађевински пројекат потребно је: посматрати узроке ризика, управљати ризиком применом адекватног модела (идентификација ризика, анализа ризика од стране инвеститора и извођача), утврдити одговоре на ризик и утврдити користи од ефикасног и ефикасног управљања ризиком пројекта.^{76, 77}

⁷⁵ Prašević, Ž. i dr., *Tenderske procedure u građevinarstvu*, Građevinski fakultet u Beogradu, 2002., str 37.

⁷⁶ ibid. Marković Lj., 2008., str. 177-197.

⁷⁷ ibid. Sudić, S., 2012, str. 44-80.

2.2.4. Праћење и контрола реализације, ажурирање плана и анализа напредовања на пројекту

Контрола пројекта, односно реализација пројекта врши се сагласно врсти пројекта. У суштини, контролу би требало вршити континуално, али се пресек стања и евидентирање актуелних података о изведеним радовима уобичајено врши месечно. Необављени планирани радови до пресека стања *преносе се у наредни период* (први радни дан након термина контроле и евидентирања) и врши *нивелисање ресурса типа Work* са планирањем материјала. Даље се разматра полазна илустрација плана пројекта (слика 8) који се понавља у наставку (слика 22.1) и ажурира (слика 22.2).

- Обављена активност А, 100% радова.
- Прекид радова В, реализовано $1+2 = 3 = 60\%$ од 5 врем. јед.
- Реализовани радови С по плану, са $4 = 66,67\%$ од 6 врем. јед.
- Активност D зависи од В која није завшена. Нека је било могуће да се након обављања 40% В (1+1 врем. јед.) започне D и обави 1 од 3 врем. јед., односно 33,33%. Произилази да на почетку, није правилно дефинисана зависност D од В типа *FS* са $L = 0$. Трбало је поставити тип *SS* са $L = 2$ (D може започети најраније 2 врем. јед. након почетка Б, односно након обављања 40% В).

Процес планирања пројекта и даље контроле реализације пројекта имају за резултат *полазни план* и одговарајуће *ажуриране планове*. У литератури је приказана примена одговарајућих ручних поступака.⁷⁸ Стандардни софтвер за управљање пројектима формира информациони систем пројекта, односно меморише полазне базе податке (*Baseline*), подржава регистровање остварених/актуелних података (*Actual Data*) и њихово меморисање (*Baseline 1, Baseline 2* итд.) на основу којих ажурира планове наставка пројекта.^{*)}

Разматрњем планираних и остварених елемената пројекта прорачунава се *успешност напредовања на пројекту* и *процењују показатељи на завршетку пројекта* који су поузданији након више контрола. На крају пројекта се утврђују *стварно остварени показатељи*.

Како се планира реализација пројекта, тако се планира и контрола реализације. У суштини, праћење и контрола представља *сталан процес* који се обавља *током целокупне реализације пројекта* и базира се на *претходно утврђеним плановима*.⁷⁹

- то је *скуп процеса* (слика 23) праћења и контроле свих битних елемената пројекта: времена, ресурса, трошкова (на основу дефинисаног система праћења и контроле са усвојеном методом, и квалитета),
- приступ који омогућава *праћење и контролу пројекта на најбољи могући начин*,
- *не постоји универзални систем* планирања, праћења и контроле, већ се за сваки пројекат мора *осмислити и формирати систем који одговара таквом пројекту*.

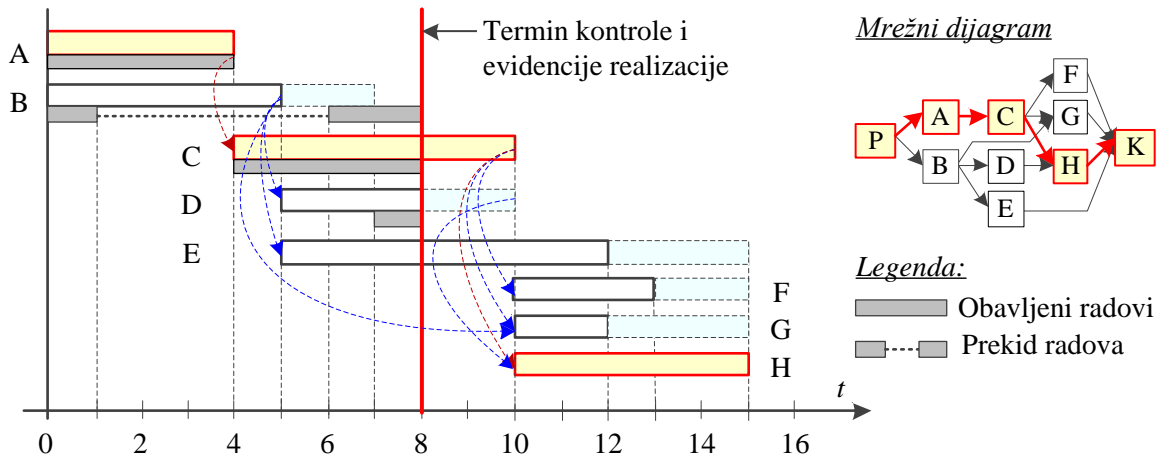
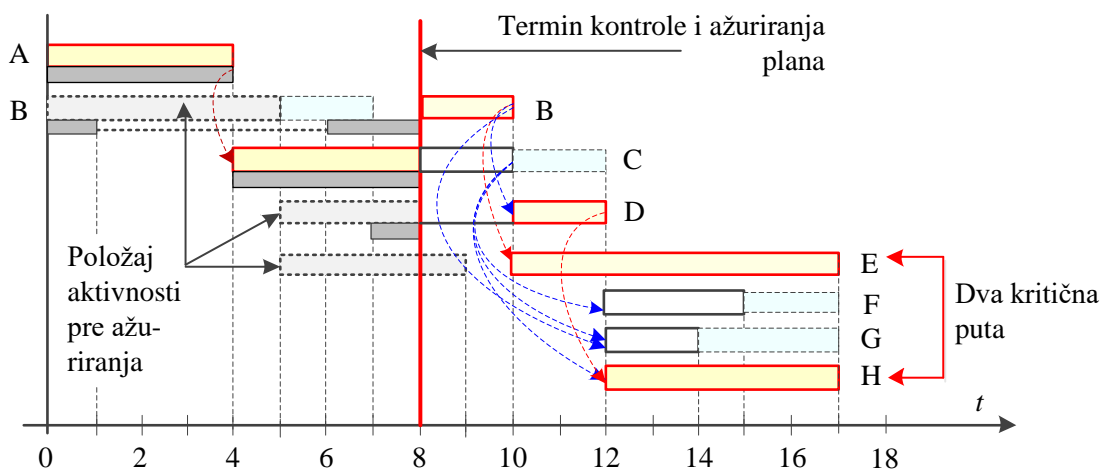
Потребно је да се укључе следеће компоненте:⁸⁰

⁷⁸ ibid. Nikolić, I., i dr. 1998., Deo I, str. 2-27 do 2-35 (delimično i potpuno balansiranje resursa) i str. 2-50 do 2-52 (realizacija i praćenje – kontrola i replaniranje).

^{*)} Софтвер *MS Project* формира ажуриране планове за 10 контрола. Ако је потребно више контрола, поступак се наставља меморисањем пројекта са новим називима.

⁷⁹ ibid. Marković, Lj., 2008., str. 66-89.

- процена (планирање)
- увид у стварно стање радова (мерење учинка)
- поређење планираног и оствареног са анализом узрока (оцена учинка)
- предузимање акција за минимизирање одступања (корективне акције).

Слика 22.1. Контрола и евидентирање реализације у термину $t = 8$ Слика 22.2. Ажурирани план пројекта након прве контроле ($k = 1$)
(продужено трајање пројекта са $T^{min} = 15$ на $T^{(1)*} = 17$)

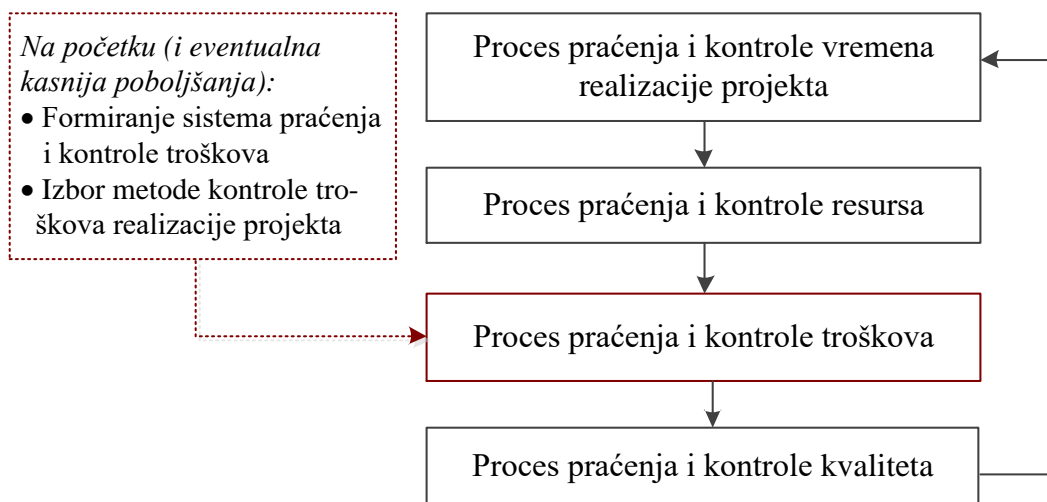
Поређење планираног и стварног стања заснива се на изради компаративних извештаја о планираним и измереним оствареним величинама (оцена учинка), за које се садржаји дефинишу усвојеним моделом контроле. У таквом поступку се вреднују остварени резултати кроз анализу варијансе и кроз анализу тренда.^{81 82}

Анализа варијансе има за циљ да што пре открије могућа одступања од планираних величина и благовремено утиче на покретање корективних акција. Потребно је истовремено посматрати трошковну и временску варијансу (слика 24), јер у свакој недостаје по један елемент. На почетку је потребно одредити праг варијансе, као критичну вредност након које се узроци поремећаја реализације морају детаљно испитати и предузети потребне мере. Анализа обухвата:

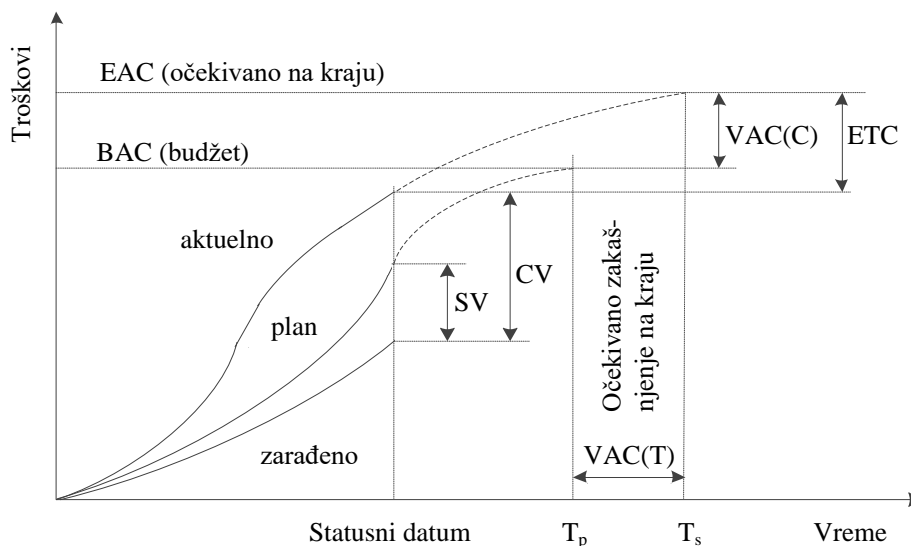
⁸¹ ibid. Marković, Lj., 2008., str. 68-71.

⁸² ibid. Sudić, S., 2012., str. 107-111.

- идентификовање варијансе
- утврђивање узрока варијансе
- оцену утицаја варијансе
- предвиђање корективних акција у зависности од величине варијансе (слика 25):
 - игнорисање (ако је варијанса унутар дозвољених граница)
 - модификација (ако је варијанса већа од дозвољене, али још увек мања од критичне, врши се модификација плана уз сагласност виших нивоа одлучивања)
 - репланирање (ако је варијанса већа од критичне, формира се нови базни план)



Слика 23. Процеси планирања и контроле реализације пројекта



Слика 24. Трошковна и временска варијанса (метода остварне или зарађене вредности)

- a) **Временска варијанса (Schedule Variance)** омогућава поређење планираних и актуелних (остварених) трошкова, што се исказује њиховом разликом или процентуално у односу на планиране трошкове (не разматра се буџет).

$$SV = \begin{cases} BCWP - BCWS \\ \frac{BCWP - BCWS}{BCWP} 100\% \end{cases} \quad (12)$$

$$CV = \begin{cases} BCWP - ACWP \\ \frac{BCWP - ACWP}{BCWP} 100\% \end{cases} \quad (13)$$

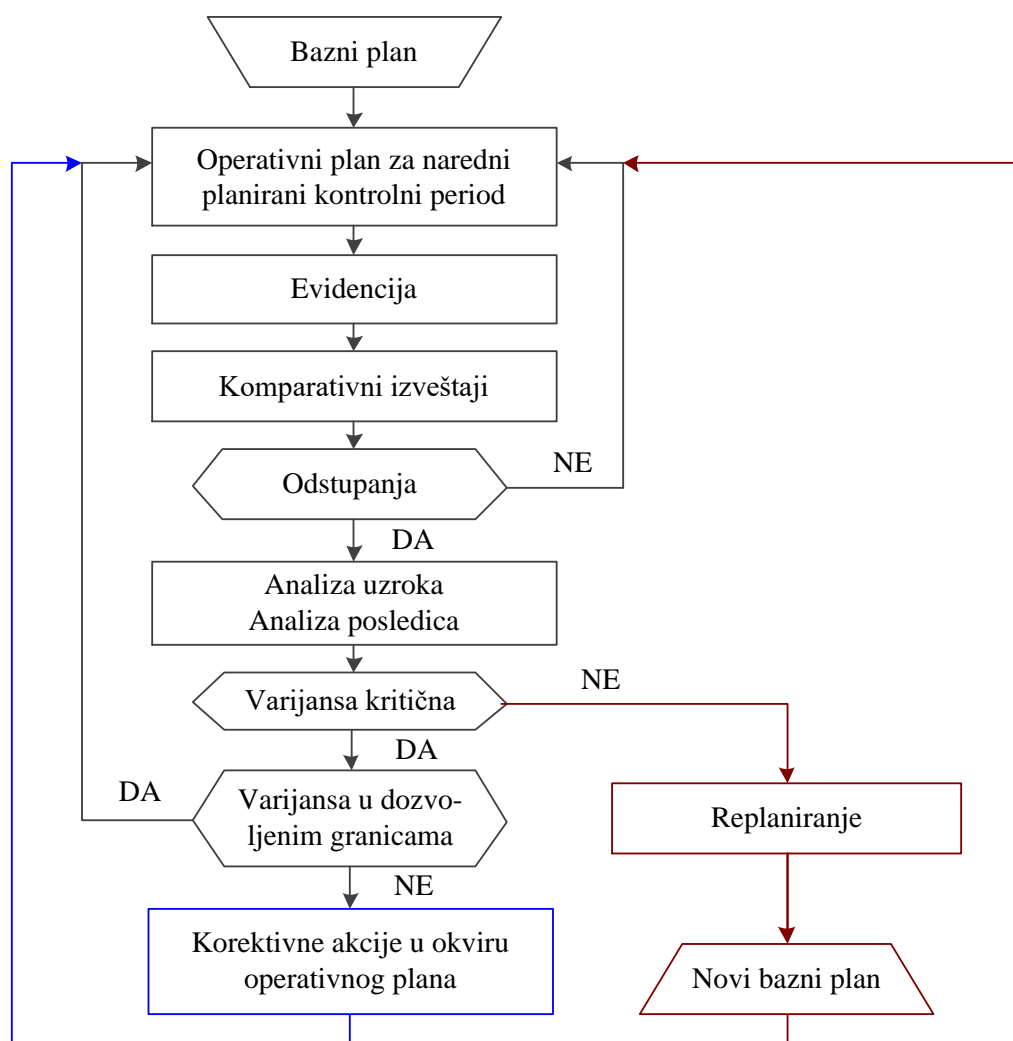
$CV = 0$, трошкови у складу са планом

$CV < 0$, прекорачење планираних трошкова

$CV > 0$, трошкови мањи од планираних

где:

$ACWP$ (*Actual Cost for Work Performed*) – стварни трошкови изведених радова



Слика 25. Алгоритам примене корективних акција
[преузето из: Marković, Lj. 2008., str.72]

Изложено разматрање варијансе времена и варијансе трошкова се уобичајено назива *метода остварене или зарађене вредности* (постоје и друге методологије за управљање

пројектима које прописују другачије формуле за прорачун појединих параметара, односно варијабли).⁸³

За варијансу трошкова је потребно да се одреди дозвољена величина, која зависи од више фактора: коришћеног модела процене трошкова, тачности извршене процене, трајања пројекта и његових делова. Анализа реализације пројекта обухвата и разматрање одговарајућих индекса, као и других параметара који се наводе у литератури.

$SV = 0$, радови се одвијају према плану

$SV < 0$, радови касне

$SV > 0$, радови обављени пре предвиђених рокова

где:

- *BCWP (Budget Cost for Work Performed)* – планирани трошкови извршених радова или зарађена вредност *ЕВ (Earned Value)*. Искazuje се трошак стварно извршених радова по планским (буџетским) трошковима и тиме интегрисане трошковне и временске компоненте пројекта
- *BCWS (Budget Cost for Work Schedule)* – планирана или буџетна сума трошкова за предвиђени рад, на основу временског плана буџета

б) *Варијанса трошкова (Cost Variance)* исказује одступање остварених трошкова од буџета, што се исказује њиховом разликом или процентуално у односу на буџет (не разматрају се планирани трошкови)

1) *CPI (Cost Performance Index)* – трошковни индекс ефикасности

$$CPI = \frac{BCWP}{ACWP} \quad (14)$$

$CPI > 1$, изузетне перформанце (остварени трошкови мањи од планираних)

$CPI = 1$, одличне перформанце (остварени трошкови једнаки са планираним)

$CPI < 1$, лоше перформанце (остварени трошкови већи од планираних)

2) *SPI (Schedule Performance Index)* – временски индекс ефикасности

$$SPI = \frac{BCWP}{BCWS} \quad (15)$$

$SPI > 1$, изузетне перформанце (радови изведени пре рока)

$SPI = 1$, одличне перформанце (радови изведени према плану)

$SPI < 1$, лоше перформанце (радови касне)

3.1) *EAC (Estimate At Completion)* за трошкове пројекта – укупна сума трошкова остварених до пресека стања плус процена трошкова преосталог рада

$$EAC = ACWP + ETC \quad (16.1)$$

где:

- *ETC (Estimate Total Cost at Completion)* – процењени/прогноzirани трошкови преосталог рада до прогнозираног завршетка пројекта

⁸³ ibid. Jovanović, P. i dr., 2007., str. 103.

3.2) *EAC* за кључне ресурсе може да се изрази у новчаним јединицама 16.2) или јединицама мере ресурса

$$EAC = \frac{BAC}{CPI} \quad (16.2)$$

где:

- *BAC (Budget at Completion)* – укупна буџетска сума планирана за посматрану величину
- 4) *VAC (Variance At Completion)* – разлика између планираних и прогнозираних величина за крај пројекта, *VAC(C)* по трошковима и *VAC(T)* по времену

$$\begin{cases} VAC(C) = BAC - EAC \\ VAC(T) = T_p - T_s \end{cases} \quad (17)$$

Анализа тренда одређене величине подразумева утврђивање законитости њеног понашања који могу имати утицај на пројекат и предвиђање будућег одвијања реализације пројекта на бази утврђених трендова битних параметара. Потребно је:⁸⁴

- анализирати садашње и историјске податке о учинку на пројекту
- оценити добијене трендове
- предвидети будућа кретања на пројекту

Ефикасно спровођење напред наведених корективних акција (мање промене у текућем оперативном плану или веће промене у процесу репланирања текућег плана и формирања новог базног плана), ако се се утврди да су потребне након оцена прикупљених података (слика 27), захтева да се сачини посебан план – *план измена*.

- *Измена* подразумева сваку промену, која (у односу на текући план, полазни или ажурирани план у неком од пресека стања на пројекту) дефинише *нови ток радова* на пројекту или *мења планиране елементе*: рокове, трошкове, ресурсе, итд.

Благовременост корективних акција захтева благовремено прикупљање реализованих параметара, њихову обраду и израду одговарајућих извештаја.⁸⁵ То су основни документи за организовање (од стране руководиоца пројекта) редовних или хитних састанака и њихово одржавање са свим кључним учесницима на пројекту:

- извођачима и подизвођачима
- инвеститором
- руководством

Подразумева се јасно утврђена одговорност за сваки аспект рада и сваког учесника на пројекту са њиховим улогама у организационој структури пројекта (матрица одговорности).

1

1

Ова метода има широку употребу у војним, индустријским и пројектима државне управе, посебно у САД. Предност методе је једноставност и брзо израчунавање параметра. Недостатак је термилошка нусаглашеност (не постоји консензус о званичним ознакама параметра, односно вариабли), што је вероватно један од главних разлога (имајући на уму и друге методологије) њене веће примене на комерцијалне пројекте.

⁸⁴ *ibid.* Marković, Lj., 2008., str. 72.

⁸⁵ *ibid.* Marković, Lj., 2008., str. 73.

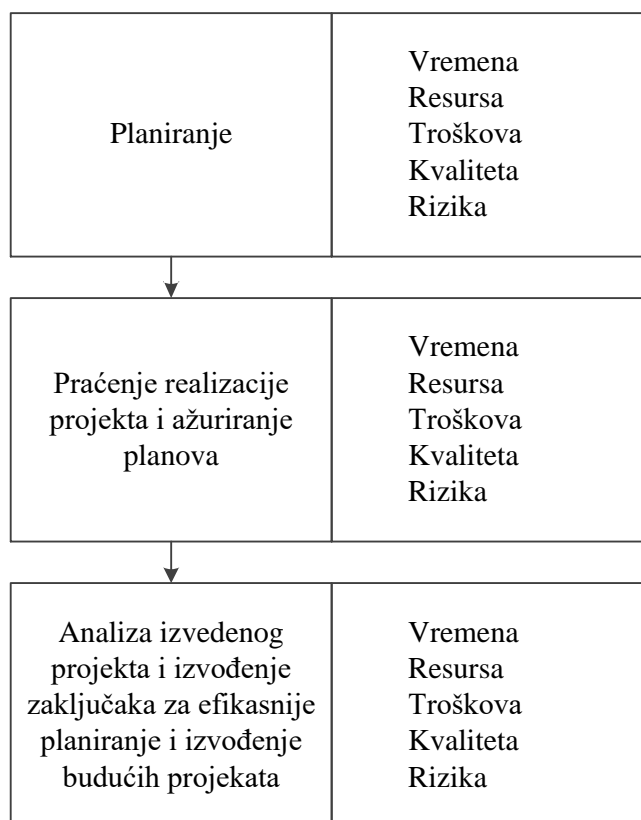
2.2.5. Анализа изведеног пројекта и извођење закључака за будуће пројекте

Савремени приступ управљању пројектом сугерише да се као обавезна завршна фаза пројекта укључи разматрање искуство на пројекту, тзв. *фаза анализе и учења*⁸⁶ (слика 26).

Анализа рада и управљања на завршеном пројекту треба да укључи све учеснике да би се *заједнички уочило (усагласило)*:

- шта је добро, а шта лоше урађено
- када се и зашто радило ефикасно, а када слабо
- шта су били узроци сукоба и незадовољство, а шта подстицаји бољем раду

Искуства са изведеног пројекта треба систематизовати да би се повећала ефикасност и смањила грешке на новим пројектима који предстоје, без обзира да ли ће се и колико они разликовати у односу на онај који је управо завршен.



Слика 26. Планирање пројекта, реализација са евентуалним ажурирањем планова и анализа изведеног пројекта са извођењем закључака за будуће пројекте

⁸⁶ ibid. Крчевинац, С. и др. , 2002., стр. 371.

3.

ЈЕДНОКРИТЕРИЈУМСКА И ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА (ЈКО и ВКО)

Рационално одлучивање подразумева оптимизацију проблема у смислу налажења најбољег решења за дате ограничавајуће услове пословања, разматрајући један критеријум или више критеријума. Сви познати аутори у свету истичу да реални проблеми најчешће имају *више критеријума* који су у већој или мањој мери међусобно *конфликтни* и *различно значајни*. Зато је, након почетних радова у теорији оптимизације са једним критеријумом (ЈКО), започео развој метода оптимизације вишекритеријумских проблема (ВКО) и даље су паралелно изучаване обе врсте проблема.

3.1. ЈЕДНОКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА (ЈКО)

Проблема са једним критеријумом најједноставније је тумачити на примеру познате теорије линеарног програмирања (ЛП).

3.1.1. Поставка проблема једнокритеријумске оптимизације

Разматра се скуп $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ са n променљивих, односно непознатих величина $x_j, j \in J = \{1, \dots, n\}$. Потребно је одредити оптималну вредност функције критеријума $f(x)$ уважавајући t ограничења $g_i(x) \leq 0, i \in I = \{1, \dots, t\}$. Ако су $f(x)$ и $g_i(x)$ линеарне релације настају *проблеми линеарног програмирања (ЛП)* које описују познати општи математички модели из наставка. Са нелинеарном функцијом $f(x)$ или бар једним нелинеарним ограничењем $g_i(x)$, односно комбинацијом нелинеарне функције критеријума и нелинеарних ограничења, дефинисани су *проблеми нелинеарног програмирања (НП)*.⁸⁴

Максимизација критеријума, ограничења истог типа

$$\begin{cases} \max f(x) \\ \text{p.o.} \\ g_i(x) \leq 0, & i \in I \\ x_j \geq 0, x_j \in R, & j \in J \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max f(x) = \sum_j c_j x_j \\ \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I \\ x_j \geq 0, x_j \in R, & j \in J \end{cases} \quad (18)$$

где: c_j – коефицијенти функције критеријума уз непознате $x_j, j \in J$
 a_{ij} – технолошки коефицијенти у ограничењима (коефицијенти технолошке матрице), $i \in I, j \in J$
 b_i – слободни чланови у ограничењима, $b_i \geq 0, i \in I$
 р.о. – исказивање да се минимизација врши "при ограничењима", што се може изоставити

Дефиниција 1. Допустиво решење x је такво да задовољава сва постављена ограничења. На пример, за модела (18) важи (18.1). Скуп допустивих решења X чине све допустиве променљиве $x, x \in X$ (18.2). Променљиве су ненегативне реалне величине $x_j \geq 0, x_j \in R$,

⁸⁴ *ibid.* Крчевинац, С., и др., 2002., стр. 39, 208.

што се подразумева. Скупови x и X припадају n -димензионалном простору променљивих.

$$\{x \mid \sum_i a_{ij} x_j \leq b_i, i \in I\}, x \in R^n \quad (18.1)$$

$$X = \{x \mid \sum_i a_{ij} x_j \leq b_i, i \in I\}, x \in R^n \quad (18.2)$$

Дефиниција 2. Критеријумски скуп F чине вредности критеријума за сва допустива решења и припада једно-димензионалном простору:

$$F = \{f(x) \mid x \in X\}, F \in R^n \quad (18.3)$$

Дефиниција 3. Скуп допустивих решења X (18.2) има бесконачно много тачака x , односно решења $x \in \mathfrak{R}$. Каже се да је \mathfrak{R} скуп континуалних допустивих решења и (18) може се називати проблем континуалне оптимизације. Допустива решења могу бити задата коначним бројем алтернатива x^1, \dots, x^q . При томе је скуп $x^v = \{x_1^v, \dots, x_n^v\}$ $v \in V = \{1, \dots, q\}$. Потребно је одредити оптимално решење x^{v*} које обезбеђује оптималну вредност $f^* = f(x^{v*})$. Сада настаје проблем дискретне оптимизације са коначним бројем решења или алтернатива:

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in A \end{cases} \quad \text{односно} \quad \max_{x \in A} f(x) \quad (18.до)$$

где:

$$A = \{x^1, x^2, \dots, x^q\} - \text{скуп допустивих решења}$$

Напомена 1. У зависности од захтева за променљиве, када су функција критеријума и ограничења линеарног типа, настају одговарајуће варијанте модела ЛП која се сматрају моделима НП.

- чисто целобројно линеарно програмирање (ЦЛП), све променљиве целобројне и ненегативне $x_j \geq 0$ и $x_j \in Z, j \in J$
- мешовито-целобројно линеарно програмирање (МЦЛП), n_1 реалних и n_2 целобројних ненегативних променљивих, $n_1 + n_2 = n$
- 0-1 програмирање, подкласа целобројног линеарног програмирања са бинарним променљивама $x_j = 0$ (НЕ, не доносити одлуку) или $x_j = 1$ (ДА, доносити одлуку), уз даље услове да такве буду све променљиве или само неке променљиве (остале могу бити реални и/или било који цели ненегативни бројеви)

Минимизација критеријума, ограничења истог типа

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_j c_j x_j \\ X = \begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i, & i \in I \\ x_j \geq 0, & j \in J \end{cases} \end{cases} \quad (19)$$

Напомена 2. Ограничења могу бити мешовита, у општем случају облика: $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_j, i \in I_1, \sum_j a_{ij} x_j = b_j, i \in I_2, \sum_j a_{ij} x_j \geq b_j, i \in I_3, b_j^L \leq \sum_j a_{ij} x_j \leq b_j^U, i \in I_4$. Сада је полазни скуп индекса I рашчлањен на међусобно дисјунктне подскупе $i \in I_1$ до $i \in I_4$.

Напомена 3. Одговарајуће границе $e_j > 0$ могу се поставити реалним и/или целобројним променљивама које нису бинарне, чиме настају активна ограничења: $x_j \leq e_j^U, j \in J_1, x_j =$

$e_j^E, j \in J_2, x_j \geq e_j^U, j \in J_3, e_j^L \leq x_j \leq e_j^U, j \in J_4$. Променљиве без граница $x_j \geq 0, j \in J_4$. Подскупови J_1 до J_5 су међусобно дисјунктни и њихова унија је полазни скуп \underline{J} .

Напомена 4. Постоје проблеми чији модели немају услов да све променљиве буду ненегативне. Ако нека x_j није ограничена у знаку, $x_j \in (-\infty, +\infty)$, уводи се смена $x_j = x_j^+ - x_j^-, x_j^+, x_j^- \geq 0$. За непозитивну $x_j \leq 0$ уводи се смена $x_j' = -x_j, x_j' \geq 0$.

3.1.2. Решавање једнокритеријумских модела ЛП и анализа

Дефиниција 4. Разматраном моделу потребно је одредити *оптимално решење* $x^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ које обезбеђује *оптималну или екстремну вредност критеријума* $f^* = f(x^*)$, где је $x^* \in X$.

- Величина f^* је *maksimum kriterijuma* modela (18) sa uslovom $f^* \geq f(x), \forall x \in X$ odnosno *minimum kriterijuma* modela (19) sa uslovom $f^* \leq f(x), \forall x \in X$.
- Model može imati *jednostruko ili jedinstveno* optimalno rešenje x^* ili *višestruko* optimalno rešenje x^{**} kao skup optimalnih rešenja $x^{**} = \{x \mid f(x) = f^*, x \in X\}$ koja daju *jedinstvenu vrednost* f^* . U slučaju više optimalnih rešenja, optimalne su i njihove linearne kombinacije.

Решавање модела ЛП без услова целобројности за променљиве одређује се *варијантима Симплекс алгорита (Simplex Algorithm)* и сложеност решавања зависи од броја променљивих (n) и ограничења (m).

- Ручни поступци са графичком методом могу се лако применити за $n = 2$ (сложеније за $n = 3$) и бројем ограничења m који омогућава прегледност графика, а са Симплекс табелом за веће димензије (на пример, $n, m \leq 10$).
- Софтвер за ЛП решава моделе са већим бројем променљивих и ограничења.⁸⁵
- За модел МЦЛП се уобичајено користи *Metoda Land-a i Doig-a* познатом под називом "*Metoda гранања и оградавања – Branch and bound method*".⁸⁶

Разматраном проблему ЛП пожељно је вршити два облика анализе:⁸⁷

- анализа осетљивости оптималног решења (*SA - Sensitivity Analysis*)
- параметарска анализа модела (*PA - Parametric Analysis*).

⁸⁵ Слободно су доступне демо верзије софтвера за моделе са неколико стотина променљивих и ограничења. На пример, *LP-ILP (Linear and Integer Programming)* из пакета програма *WinQSB (Quantitative Systems for Business)*, аутори Chang Y.L. и Desay K., решава моделе са реалним и целобројним променљивама.

• Комерцијални моделирајући софтвер *GAMS (General Algebraic Modeling System)* користи сопствени програмски језик за формирање и решавање модела ЛП. Верзија из 80-тих година прошлог века подржавала је решавање модела ЛП са највише 30.000 променљивих и ограничења.

⁸⁶ Land, A. H., Doig, A. G., *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*, *Econometrica*, 1960, N°-3, 28.

⁸⁷ *ibid.* WinQSB, modul *LP-ILP* подржава оба облика анализе за коефицијенте c_j уз непознате x_j у $f(x)$ и слободне чланове b_i за ограничења. Теорија и примена ручних поступака обухвата више случајева, од анализе технолошких коефицијената a_{ij} у матрици ограничења и истовремене анализе више врста параметара до увођења/изостављања x_j и b_i .

3.2. ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА (ВКО)

За разлику од проблема ЈКО са једноструким или вишеструким оптималним решењем и јединственим оптимумом, проблем ВКО најчешће има *скуп Парето-оптималних решења* (или *Парето-решења*) са одговарајућим вредностима критеријума и потребно је одредити најприхватљивије решење за примену. Битне су разлике остварених и најбољих вредности критеријума, као и њихов значај.

3.2.1. Поставка проблема вишекритеријумске оптимизације

Рани радови страних аутора у овој области вршили су раздвајање проблема ВКО у две класе проблема (Табела 7) са одговарајућим методама^{88, 89}, што преносе и домаћи аутори⁹⁰. Касније се више истиче разматрање континуалне и дискретне оптимизације.⁹¹ Коришћењем сложеног математичког апарата дате су строге дефиниције, пропозиције, последице и теореме са доказима.⁹² Овде се излажу области ВЦО и ВАО са једноставнијим математичким формулацијама.

Табела 7. Две класе проблема ВКО

| | Карактеристике | ВЦО | ВАО |
|----|--------------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) | Присутност више критеријума дефинисано са | циљевима, критеријумима | атрибутима |
| 2) | Циљ | експлицитан | имплицитан |
| 3) | Атрибут | имплицитан | експлицитан |
| 4) | Ограничења | активна | неактивна |
| 5) | Алтернативе (решења, алтернативе – акције) | бесконачан број, континуалне | коначан број, дискретне |
| 6) | Интеракција са ДО | изразита | није изразита |
| 7) | Примена (решавање модела) | пројектовање (налажење решења и избор) | избор, евалуација (решења су позната) |

3.2.1.1. Вишециљно одлучивање (ВЦО) или Вишекритеријумско програмирање (ВКП)

Поставља се проблем оптимизације $p \geq 2$ критеријума $f_k(x)$, $k \in K = \{1, \dots, p\}$ над истим скупом ограничења. Општи математички модел линеарног програмирања (ВКЛП) са

⁸⁸ HWANG, C. L. and MASUD, A. S., *Multiple Objective Decision Making - Methods and Applications, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, 1979.

⁸⁹ HWANG, C. L. and YOON, K., *Multiple Attribute Decision Making - Methods and Applications, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, 1981.

⁹⁰ *ibid.* Nikolić, I., Borović, S., 1996., Deo 2. str. 2-1.

⁹¹ Оприцовић, С., *Вишекришкритеријумска оптимизација система у грађевинарству*, Грађевински факултет, Београд, 1998., str. 4.П

⁹² Ehrgott, M., *Multicriteria Optimization - Lecture notes in economics and mathematical systems*, 491, Springer-Verlag, 2000.

максимизацијом свих критеријума изведен из (18) има облик (20) у наставку, а минимизације свих критеријума изведен из (19) је облика (21).

Максимизација свих критеријума модела ВКЛП

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \{f_1(x), \dots, f_p(x)\} \\ X = \left\{ \begin{array}{l} \sum_j a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i \in I \\ x_j \geq 0, \quad j \in J \end{array} \right. \end{array} \right. \text{ односно } \left\{ \begin{array}{l} \max f_k(x) = \sum_j c_{kj}x_j, \quad k \in K \\ X = \left\{ \begin{array}{l} \sum_j a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i \in I \\ x_j \geq 0, \quad j \in J \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (20)$$

где: $f_k(x)$ – функције критеријума са променљивама које чине вектор x , $k \in K$
 c_{kj} – коефицијенти функција $f_k(x)$ уз непознате x_j , $k \in K, j \in J$

Минимизација свих критеријума модела ВКЛП

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f_k(x) = \sum_j c_{kj}x_j, \quad k \in K \\ X = \left\{ \begin{array}{l} \sum_j a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i \in I \\ x_j \geq 0, \quad j \in J \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (21)$$

Дефиниција 5. Наведени једнокритеријумски модели ЛП и одговарајући линеарни модели ВКП имају истоветна допустива решења x и простор допустивих решења X , $x \in X$, (18.1) и (18.2), респективно.

Функције критеријума модела ВКЛП, као и ограничења, могу да буду мешовитог типа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_k(x) = \sum_j c_{kj}x_j, \quad k \in K_1 \\ \min f_k(x) = \sum_j c_{kj}x_j, \quad k \in K_2 \\ x \in X \end{array} \right. \text{ односно } \left\{ \begin{array}{l} \max_X f_k(x) = \sum_j c_{kj}x_j, \quad k \in K_1 \\ \min_X f_k(x) = \sum_j c_{kj}x_j, \quad k \in K_2 \end{array} \right. \quad (22)$$

где: $K_1 \cup K_2 = K$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. На пример, p_1 функција максимизације и $p_2 = p - p_1$ функција минимизације, $K_1 = \{1, \dots, p_1\}$, $K_2 = \{p_1+1, \dots, p\}$

Дефиниција 6. Функције критеријума типа минимизације могу да се преведу у тип максимизације (множењем са -1), и обрнуто. Важи:

$$\left. \begin{array}{l} \max_X \varphi_k(x) = \min_X (-f_k(x)) = \sum_j (-c_{jk})x_j, \quad f_k^* = -\varphi_k^*, \quad k \in K_1 \\ \min_X \varphi_k(x) = \max_X (-f_k(x)) = \sum_j (-c_{jk})x_j, \quad f_k^* = -\varphi_k^*, \quad k \in K_2 \end{array} \right\} \quad (23)$$

3.2.1.2. Вишеатрибутивно одлучивање (ВАО) или Вишекритеријумска анализа (ВКА)

Проблем има m алтернативна решења или алтернатива a_i и n критеријума f_j који не морају бити сви истог типа (мин или мах), $i \in I = \{1, \dots, m\}$, $j \in J = \{1, \dots, n\}$. Општи математички модел уобичајено се приказује матрицом одлучивања A . Могу се користити строжији записи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{opt} \{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \\ \text{р.о.} \\ x \in A \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \text{opt } f_j(x), \quad j \in J \\ \text{р.о.} \\ x \in A \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \text{opt}_{x \in A} f_j(x), \quad j \in J \end{array} \right. \quad (24)$$

где: $A = [a_{ij}]$ – матрица одлучивања,
 $a_{ij} = f_j(a_i)$ – познате вредности које остварују a_i за f_j , $i \in I$, $j \in J$

3.2.2. Решавање модела вишекритеријумског програмирања (ВКП) и анализа

Са становишта решавања модела ВКП од значаја су основне дефиниције и методе одређивања одговарајућих решења.

3.2.2.1. Основне дефиниције модела ВКП

Моделе ВКП, за разлику од напред изложених једнокритеријумских модела, карактеришу врсте решења и разматрање остварених вредности постављених критеријума.

а) Савршено решење, Парето-оптимална решења и коначно решење

Постоји више врста решења модела ВКП која су детаљно изложена у литератури, најчешће на примеру минимизације свих критеријума типа (21).⁹³ Овде се тумаче основни појмови првенствено за максимизацију свих критеријума (20) са освртом на меšovите типове (22).

Дефиниција 7. Критеријумски скуп (простор критеријума) F чине вредности критеријума f_k за сва допустива решења x :

$$F = \{f_k(x) \mid x \in X, k \in K\}, F \in R^p \quad (25)$$

Дефиниција 8. Посматрајући сваки критеријум f_k и ограничења, независно од осталих критеријума, одређује се његово *оптимално решење* $x^{(k)*}$ (26) и *оптимална или екстремна (идеална) вредност* f_k^* (27). Решење $x^{(k)*}$ је *екстремно Парето-оптимално решење* (или *маргинално решење*) модела. Исто решење може бити маргинално за више критеријума.

$$\underset{x \in X}{\text{opt}} f_k(x) \Rightarrow x^{(k)*}, f_k^* = f_k(x^{(k)*}), k \in K \quad (26)$$

$$f_k^* \begin{cases} \geq f_k(x), x \in X, & \text{за } \max f_k(x), k \in K \\ \leq f_k(x), x \in X, & \text{за } \min f_k(x), k \in K \end{cases} \quad (27)$$

Дефиниција 9а. Идеалне вредности критеријума f_k^* , $k \in K$, формирају идеалну тачку f^* у p -димензионалном простору:

$$f^* = [f_1^*, \dots, f_p^*], f^* \in R^p. \quad (28)$$

Дефиниција 9б. Допустиво решење $x^* \in X$ је *савршено решење* ако свим критеријумима обезбеђује *оптималне (екстремне) или идеалне вредности* (29). Идеална тачка припада критеријумском скупу, $f^* \in F$. Критеријуми нису у конфликтну (сагласни су) и процес решавања модела се завршава. Избор је савршено решење x^* .

$$x^* \in X \Rightarrow f_k(x^*) = f_k^*, k \in K \quad (29)$$

⁹³ ibid. Ehrgott, M., 2000., str. 1-5, 19-20.

- Најчешће идеална тачка f^* не припада простору критеријума F , $f^* \notin F$, те модел ВКП нема савршено решење x^* , већ је $x^* \notin X$. Може се одабрати неко маргинално решење, али је препоручљиво одредити нова Парето-оптимална решења.⁹⁴

Дефиниција 10. Два допустива решења $x^1 \in X$ и $x^2 \in X$ су Парето-оптимална решења (или недоминантна решења, односно ефиксана решења) ако је једно од њих повољније за бар један критеријум (s) и неповољније за бар један од осталих критеријума (r), независно од вредности других критеријума (k) које могу бити повољније или неповољније (табеле 8.1 и 8.2). И обрнуто.

За моделе истог типа оптимизације свих критеријума (20) и (21) важи:

$$f_s(x^1) > f_s(x^2), f_r(x^1) < f_r(x^2), f_k(x^1) \geq \text{или} \leq f_k(x^2), (s, r, k) \in K, s \neq r \neq k \quad (30)$$

Табела 8.1. Два Парето-оптимална решења модела ВКП истог типа оптимизације свих критеријума

| | |
|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\max_{x \in X} f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, k \in K$ | x^1 повољније за f_s и неповољније за f_r x^2 повољније за f_r и неповољније за f_s |
| $\min_{x \in X} f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, k \in K$ | x^1 повољније за f_r и неповољније за f_s x^2 повољније за f_s и неповољније за f_r |

Model (22) ima oba tipa optimizacije kriterijuma, te важи:

$$f_s(x^1) > f_s(x^2), f_r(x^1) > f_r(x^2), f_k(x^1) < \leq f_k(x^2), (s, r, k) \in K, s \neq r \neq k \quad (31)$$

Табела 8.2. Два Парето-оптимална решења модела ВКП са оба типа оптимизације критеријума

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} \max_X f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, k \in K_1 \\ \min_X f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, k \in K_2 \end{cases}$ | x^1 боље за (f_s, f_r) , лошије за $f_v, (s, r, v) \in K_1$ x^2 боље за f_v , лошије за $(f_s, f_r), (s, r, v) \in K_1$ |
| | x^1 боље за f_v , лошије за лошије за $(f_s, f_r), (s, r, v) \in K_2$ x^2 боље за (f_s, f_r) , лошије за $f_v, (s, r, v) \in K_2$ |

- Другим речима, преласком са x^1 на x^2 неопходно је да се дозволи погоршање бар једном критеријуму са x^1 да би се неком критеријуму побољшала вредност са x^2 . Боље вредности са x^2 могу, евентуално, да остваре више критеријума.

Дефиниција 11. Решење $x^3 \in X$ није Парето-оптимално већ Парето-неоптимално, односно није ефикасно већ неефикасно решење, ако у односу на било које друго решење $x \in X$ не остварује повољнију вредност бар једном критеријуму (Табела 9).

Дефиниција 12. Неко $x^5 \in X$ доминира над $x^4 \in X$ ако остварује повољнију вредност бар једном критеријуму и не погоршава вредности преосталих критеријума (Табела 10). Каже се да је x^5 dominantno rešenje, а x^4 dominanirano rešenje. Potrebno је:

- изоставити x^4 из даље анализе,
- испитати коју природу има x^5 у односу на друга решења $x \in X$ (само на основу поређења са x^4 не произилази да x^5 обавезно јесте Парето-оптимално решење, оно може да буде Парето-неоптимално решење).

⁹⁴ Називају се према чувеном италијанском економисти (Vilfred Pareto). Pareto, V. V. (1896). Cours d'Economie Politique, Rouge, Lausanne, Switzerland.

Табела 9. Парето-неоптимално решење модела ВКП

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\max_{x \in X} f_k(x), k \in K$ | $f_k(x^3) \leq f_k(x), f_r(x^3) < f_r(x), r \neq k, (r, k) \in K$ |
| $\min_{x \in X} f_k(x), k \in K$ | $f_k(x^3) \geq f_k(x), f_r(x^3) > f_r(x), r \neq k, (r, k) \in K$ |
| $\begin{cases} \max_X f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, k \in K_1 \\ \min_X f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, k \in K_2 \end{cases}$ | $\begin{cases} f_k(x^3) \leq f_k(x), f_r(x^3) < f_r(x), r \neq k, (r, k) \in K_1 \\ f_k(x^3) \geq f_k(x), f_r(x^3) > f_r(x), r \neq k, (r, k) \in K_2 \end{cases}$ |
| x^3 не остварује повољнију вредност од x , остварује неповољнију вредност за f_r | |

Табела 10. Доминантно и доминирано решење модела ВКП

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\max_{x \in X} f_k(x), k \in K$ | $f_k(x^5) > f_k(x^4), f_r(x^5) \geq f_r(x^4), r \neq k, (r, k) \in K$ |
| $\min_{x \in X} f_k(x), k \in K$ | $f_k(x^5) < f_k(x^4), f_r(x^5) \leq f_r(x^4), r \neq k, (r, k) \in K$ |
| $\begin{cases} \max_X f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, k \in K_1 \\ \min_X f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, k \in K_2 \end{cases}$ | $\begin{cases} f_k(x^5) > f_k(x^4), f_r(x^5) \geq f_r(x^4), r \neq k, (r, k) \in K_1 \\ f_k(x^5) < f_k(x^4), f_r(x^5) \leq f_r(x^4), r \neq k, (r, k) \in K_2 \end{cases}$ |
| x^5 остварује повољнију вредност за f_r , нема неповољнијих вредности за преостале f_k | |

Дефиниција 13. $x^6 \in X$ и $x^7 \in X$ су еквивалентна решења са становишта критеријума ако остварују једнаке вредности истом критеријуму, посматрајући све појединачне критеријуме.

$$f_k(x^6) = f_k(x^7), \forall k \in K \quad (32)$$

Укључивање ових решења у даљу анализу зависи од њихове природе и вредности променљивих:

- ако решења нису *Парето-оптимална*, изоставити их из даље анализе,
- ако су решења *Парето-оптимална*, разматрати вредности њихових променљивих и даље:
 - у случају идентичних вредности за променљиве, изоставити једно решење из даље анализе,
 - за различите вредности променљивих, укључити оба решења у даљу анализу (она су вишеструка решења са становишта једнаких вредности критеријума).

Дефиниција 14. *Оптимално решење* модела ВКП, у математичком смислу, чини скуп свих *Парето-оптималних решења* означен са $X_{нар}$. У општем случају, модел ВКП може да има коначан или бесконачан скуп $X_{нар}$. У пракси је довољно одредити подскуп $\underline{X}_{нар}$ са *карактеристичним Парето-оптималним решењима* сматрајући да таква решења омогућавају избор најповољнијег коначног решења, $\underline{X}_{нар} \subset X_{нар}$.

Дефиниција 15. *Коначно решење* $x^{ко}$ одређује се анализом *Парето-оптималних решења* из скупа $X_{нар}$ или $\underline{X}_{нар}$, $x^{ко} \in X_{нар}$ или $x^{ко} \in \underline{X}_{нар}$ ако није утврђен $X_{нар}$. Избор врши доносилац одлуке (ДО), усвајајући да је $x^{ко}$ најповољније решење са становишта остварених вредности $f_k(x^{ко})$ свих критеријума $k \in K$ у датим условима пословања и степена значајности критеријума конкретног проблема. При томе могу да се примене подесне методе ВАО.

**б) Почетна анализа модела и налажење нових
Парето-оптималних решења**

Моделу ВКП прво се засебно врши оптимизација сваког критеријума са датим ограничењима, без разматрања целовитог проблема, односно осталих критеријума (26). Затим се одређују последице остварене код осталих критеријума са решењем оптимизованог критеријума (32). Анализом таквих последица може да се одабере *коначно решење* модела или се налазе *нова Парето-оптимална решења* и даљом анализом врши избор коначног решења (слика 27).^{*)}

Став 1.1. Са маргиналним решењем $x^{(k)*}$ сваког критеријума f_k , односно његовом идеалом f_k^* , одређују се *последице (остварене вредности)* f_{ks} за *остале критеријуме* f_s :

$$f_{ks} = f_{ks}(x^{(k)*}), (k,s) \in K \quad (33)$$

Став 1.2. Ако је $x^{(k)*}$ *вишеструко оптимално решење* за критеријума f_k , потребно је одредити *најбоље последице осталим критеријумима* f_s :

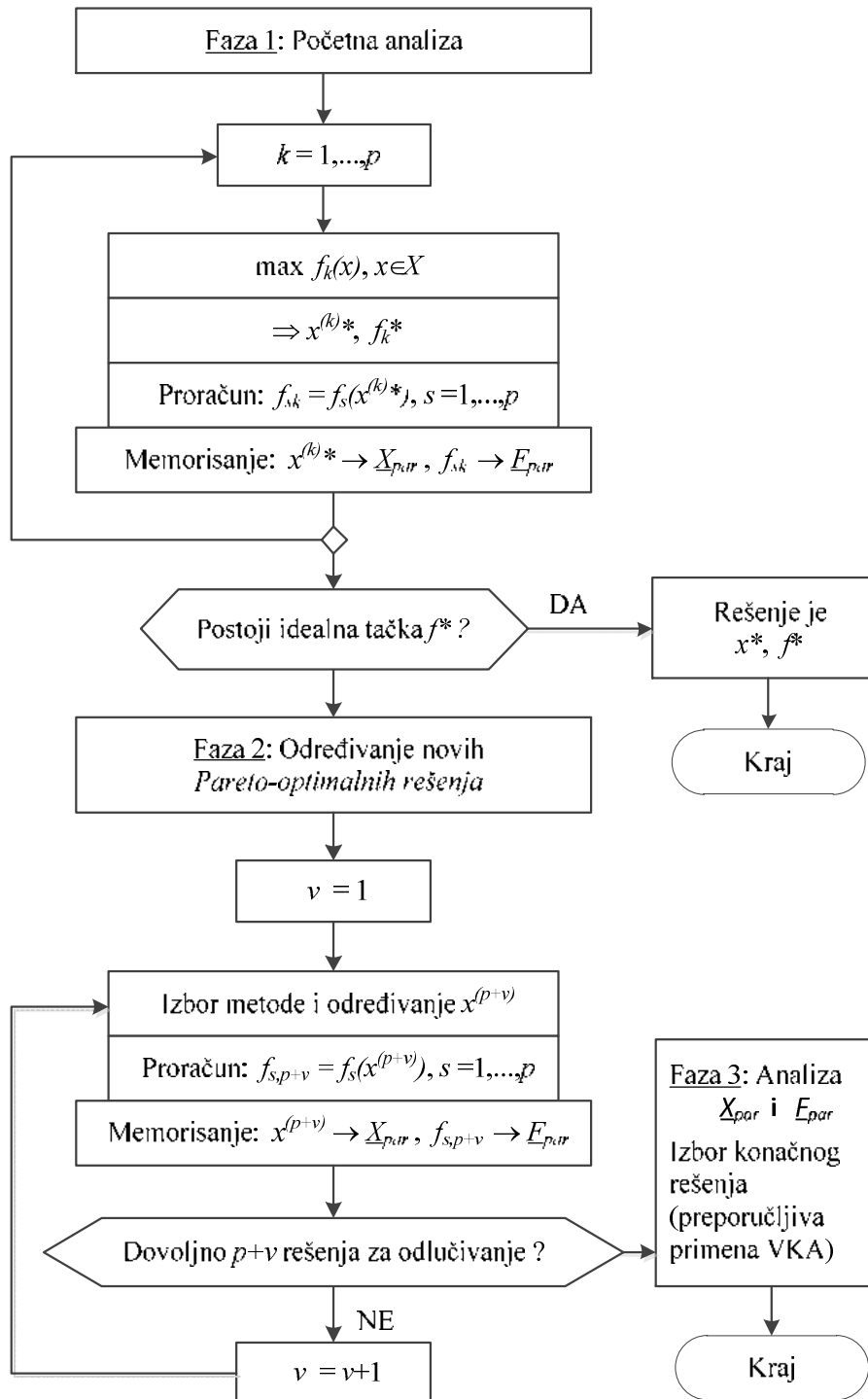
$$f_{ks} = \left. \begin{array}{l} \text{opt}_{x \in X} f_s(x) \\ f_k(x) = f_k^* \end{array} \right\}, (k,s) \in K \quad (34)$$

Добијене резултате подесно је приказати прегледно, у циљу даље анализе и евентуалног избора коначног решења (Табела 11).

Став 1.3. Почетном анализом одређују се *најбоље вредности критеријума* $\max_s f_{ks} = f_k^*$ на дијагонали табеле (подесно је приказати ове вредности и у предпоследњем реду табеле) и прорачунати најлошије вредности критеријума $f_k^{\min} = \min_s f_{ks}$ (приказане у последњем реду табеле), као граничне вредности критеријума, $(k,s) \in K$.

Став 2.1. Посматрањем редова табеле са последицама маргиналног решења $x^{(k)*}$ на критеријуме, може се утврдити број критеријума n_k^{\max} са оствареним идеалним вредностима (35.1) и број критеријума n_k^{\min} са оствареним најлошијим вредностима (35.2).

^{*)} Илуструје се максимизација свих критеријума моделом (20). По аналогији могу се извести правила за случај минимизације свих критеријума (21), одно за општи случај мешовите оптимизације (22).



Слика 27. Процес решавања модела ВКП и избора коначног решења

Став 2.2. Једно маргинално решење $x^{(k)*}$ може да се бира за коначно решење модела, ако су прихватљиве његове последице f_{ks} на остале критеријуме, $(k,s) \in K$.

- Међутим, препоручљиво је одредити нова Парето-оптимална решења у циљу уочавања међузависности критеријума.
- Тиме се формира шири скуп Парето-решења и као коначно може се бирати било које решење сматрајући да је најповољније.

Табела 11. Маргинална решења, идеалне вредности критеријума и последице, модели (20) и (34)

| | Оптимизација | Марг. решења | Најбоље последице | | | | | Анализа | |
|---------|-----------------|--------------|-------------------|-----|------------------|-----|------------------|-------------------------------------------------|--------------|
| | | | f_1 | ... | f_k | ... | f_p | n_k^{\max} | n_k^{\min} |
| 1 | $\max f_1$ | $x^{(1)*}$ | $f_{11} = f_1^*$ | ... | f_{1k} | ... | f_{1p} | n_1^{\max} | n_1^{\min} |
| 2 | $\max f_2$ | $x^{(2)*}$ | f_{21} | ... | f_{2k} | ... | f_{2p} | n_2^{\max} | n_2^{\min} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| k | $\max f_k$ | $x^{(k)*}$ | f_{k1} | ... | $f_{kk} = f_k^*$ | ... | f_{kp} | n_k^{\max} | n_k^{\min} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| p | $\max f_p$ | $x^{(p)*}$ | f_{p1} | ... | f_{pk} | ... | $f_{pp} = f_p^*$ | n_p^{\max} | n_p^{\min} |
| Анализа | $\max_k f_{ks}$ | | f_1^* | ... | f_k^* | ... | f_p^* | Избор коначног решења или налажење нових решења | |
| | $\min_k f_{ks}$ | | f_1^{\min} | ... | f_k^{\min} | ... | f_p^{\min} | | |

$$n_k^{\max} = (\sum \delta(s) \mid \delta(s) = 1 \text{ ако } f_{ks} = f_s^*, \text{ иначе } \delta(s) = 0, s \in K), k \in K \quad (35.1)$$

$$n_k^{\min} = (\sum \lambda(s) \mid \lambda(s) = 1 \text{ ако } f_{ks} = f_s^{\min}, \text{ иначе } \lambda(s) = 0, s \in K), k \in K \quad (35.2)$$

Став 2.3. Најповољније је решење $x^{(k)*}$ са највећим бројем n_k^{\max} и најмањим бројем n_k^{\min} .

Став 3. Свако ново Парето-оптимално решење $x^{(n+p)}$ одређује вредности $f_k(x^{(n+p)})$ критеријума унутар напред наведених граница, укључујући евентуално и неке границе:

$$f_k(x^{(p+r)}) \in [f_k^{\min}, f_k^*], k \in K, r = 1, 2, \dots \quad (36)$$

3.2.2.2. Одабране методе решавања модела ВКП

Развијено је много метода решавања модела ВЦО које су развстане у одговарајуће класе и подкласе. Таксономија метода развијених до 1978. год. из стране литературе⁹⁵ изложена је и код нас.⁹⁶ Врши се основна подела метода према стању за које су потребне информације: 1. Не постоји системска повезаност о информацијама, 2. Априори системска повезаност информација о преференцама, 3. Системска повезаност информација о преференцама – интерактивне методе, 4. Апостериори системска повезаност о преференцама – методе генерисања недоминантних решења). Даље се у 2. до 4. разматрају типови информација и следе основне класе метода (18) за 1. до 4. Касније развијене методе могу да се укључе у наведену таксономију.

Став 4. Нова Парето-оптимална решења одређују се применом одговарајућих метода. Избор коначног решења врши се адекватном анализом свих Парето-оптималних решења, маргиналних и нових решења, са становишта остварених вредности критеријума (табела 12). При томе могу да се примене подесне методе ВАО.⁹⁷

⁹⁵ ibid. HWANG, C. L. and MASUD, A. S., 1979.

⁹⁶ ibid. Nikolić, I., Borović, S., str. 3-12.

⁹⁷ ibid. Nikolić, I., Božilović, S., 2009. str. 248-258.

Табела 12. Маргинална и нова Парето-оптимална решења са последицама, модел (34)

| | Оптимизација | Решења | Најбоље последице | | | | | Анализа | |
|---------|--------------------------------------|--------------|-------------------|--------------|-------------|--------------|-----------------------|------------------|------------------|
| | | | f_1 | ... | f_k | ... | f_p | n_k^{\max} | n_k^{\min} |
| 1 | $\max f_1$ | $x^{(1)*}$ | $f_{11} = f_1^*$ | ... | f_{1k} | ... | f_{1p} | n_1^{\max} | n_1^{\min} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| p | $\max f_p$ | $x^{(p)*}$ | f_{p1} | ... | f_{pk} | ... | $f_{pp} = f_p^*$ | n_p^{\max} | n_p^{\min} |
| $p+1$ | Modeli odabranih metoda za nova reš. | $x^{(p+1)*}$ | $f_{p+1,1}$ | ... | $f_{p+1,k}$ | ... | $f_{p+1,p}$ | n_{p+1}^{\max} | n_{p+1}^{\min} |
| $p+2$ | | $x^{(p+2)*}$ | $f_{p+2,1}$ | ... | $f_{p+2,k}$ | ... | $f_{p+2,p}$ | n_{p+2}^{\max} | n_{p+2}^{\min} |
| ... | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Анализа | $\max_k f_{ks}$ | f_1^* | ... | f_k^* | ... | f_p^* | Избор коначног решења | | |
| | $\min_k f_{ks}$ | f_1^{\min} | ... | f_k^{\min} | ... | f_p^{\min} | | | |

У наставку излажу се три једноставне методе које страни аутори често дефинишу за моделе са минимизацијом свих критеријума и доказују да оне одређују *Парето-оптимална решења*.⁹⁸ Методе могу да се тумаче и за моделе са максимизацијом свих критеријума.^{99, 100} Овде се дају општи приступи разматрајући оба типа критеријума. Коришћење *тежинске суме критеријума* илуструје релативно поједностављено решавање општих модела ВКП. Напредније методе, *Лексикографска метода* и *Метода ϵ -ограничења* подесне су за развој алгоритама решавања модела ЛЦМП са више критеријума за решавање проблема избора извођача пројекта.

а) Лексикографска метода

Критеријуми имају приоритете, које поставља доносилац одлуке, у виду строго дефинисаног редоследа значајности њихових функција (група 2 у таксономији метода, подгрупа 2.2 обична – ординарна информација). Нека су критеријуми поређани тако да f_1 има највиши приоритет, f_2 следећи нижи приоритет, итд. Може да се пише (строги лексикографски поредак): $f_1 \gg f_2 \gg \dots \gg f_p$.

Решење проблема ВКП одређује се узастопним решавањем p проблема једно-критеријумске оптимизације (табела 13). Прво се одреди f_1^* и даље се врши оптимизација наредних критеријума $k = 2, \dots, p$ уз услов да критеријуми виших приоритета $s = 2, \dots, k-1$ задрже раније остварене вредности $f_s(x^{(k-1)})$:

$$\begin{cases} \text{opt } f_k(x) \\ x \in X \\ f_s(x) = f_s(x^{(k-1)}), \quad s = 1, \dots, k-1 \end{cases} \quad (37)$$

⁹⁸ ibid. Ehrgott, M., 2000. str. 135-138, 55-57, 82-84.

⁹⁹ ibid. Nikolić, I., Borović, S., 1996., str. 3-24, 3-21, 3-25.

¹⁰⁰ Vujošević, M. i dr., *Metode optimizacije - mrežni, lokacijski i višekriterijumski problemi*, Dopis, Beograd, 1996., str. 135, 130, 143.

Табела 13. Алгоритам Лексикографске методе

| Корак 1 | Корак 2 | Корак 3 | Корак 4 | ... |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| $\text{opt}_X f_1(x)$ | $\text{opt}_X f_2(x)$ $f_1(x) = f_1(x^{(1,0)*})$ | $\text{opt}_X f_3(x)$ $f_1(x) = f_1(x^{(2,1)*})$ $f_2(x) = f_2(x^{(2,1)*})$ | $\text{opt}_X f_4(x)$ $f_1(x) = f_1(x^{(3,2)*})$ $f_2(x) = f_2(x^{(3,2)*})$ $f_3(x) = f_3(x^{(3,2)*})$ | ... |
| $\Rightarrow x^{(1,0)*} = x^{(1)*},$ $f_k^{(1)*} = f_k(x^{(1,0)*})$ $k = 1, \dots, p$ | $\Rightarrow x^{(2,1)*}$ $f_k^{(1)*} = f_k(x^{(2,1)*}),$ $k = 1, \dots, p$ | $\Rightarrow x^{(3,2)*}$ $f_k^{(2)*} = f_k(x^{(3,2)*}),$ $k = 1, \dots, p$ | $\Rightarrow x^{(4,3)*}$ $f_k^{(3)*} = f_k(x^{(4,3)*}),$ $k = 1, \dots, p$ | ... |

Решење $x^{(2,1)*}$ је оптимално за f_2 , и $f_k^{(1)}$ су одговарајуће вредности критеријума са једним условом (да f_1 задржи раније остварену вредност f_1^*), $x^{(3,2)*}$ оптимално решење за f_3 одређује $f_k^{(2)}$ са два услова (да f_1 и f_2 задрже раније вредности), итд.

Став 5. Оптимална решења критеријума, односно њихове оптималне вредности добијене са $x^{(p,p-1)*}$ у посљедњем кораку p за f_p су лексикографски оптимуми:

$$f_1^*, f_2(x^{(p,p-1)*}), f_2(x^{(p,p-1)*}), \dots, f_p(x^{(p,p-1)*}) \quad (38)$$

Став 6. Ако се у последњем кораку задржава $x^{(p,p-1)*} = x^{(1)*}$, модел има савршено решење $x^* = x^{(1)*}$ које одређује идеалне вредности свих критеријума (22), што је требало утврдити у почетној анализи проблема и завршити процес решавања модела.

$$f_k^* = f_{1k}, \quad \forall k \in K \quad (39)$$

Став 7. Ако f_1 има јединствено маргинално решење $x^{(1)*}$, није потребно спроводити даљу условну оптимизацију. Решење је познато, вредности осталих критеријума су последице f_{1s} (40.1). Ако је $x^{(1)*}$ вишеструко решење и у кораку s са f_s настане јединствено оптимално решење $x^{(s,s-1)*}$, онда оно одређује лексикографске оптимуме за осатле критеријуме $k = s+1, \dots, p$ (40.2) и процес решавања се прекида. Са становишта непознатих, за критеријуме виших приоритета $k = 1, \dots, s-1$ може да се користи било која линеарна комбинација вишеструког решења:

$$x^{(1)*} \Rightarrow f_1^* = f_1(x^{(1)*}), f_{12} = f_2(x^{(1)*}), \dots, f_{1n} = \phi_n(x^{(1)*}) \quad (40.1)$$

$$x^{(1)*}, x^{(c,c-1)*} \Rightarrow f_1^*, f_2(x^{(1)*}), \dots, f_{s-1}(x^{(1)*}), f_k(x^{(s,s-1)*}), k \geq s \quad (40.2)$$

Напомена 5. Лексикографски оптимизациони проблеми максимизације свих критеријума (20) може да се пише са "lex max" оператором (41.1), а минимизација свих критеријума (21) са "lex min" оператором (41.2). По аналогији, (41.3) исказује мешовиту оптимизацију критеријума (23).

$$\text{lex max}_{x \in X} (f_1(x), \dots, f_p(x)) \quad (41.1)$$

$$\text{lex min}_{x \in X} (f_1(x), \dots, f_p(x)) \quad (41.2)$$

$$\text{lex opt}_{x \in X} (f_1(x), \dots, f_p(x)) \quad (41.3)$$

Релаксирана Лексикографска метода

Ова метода ублажава строги захтев да при оптимизацији критеријума f_k (у кораку k) сваки критеријум вишег нивоа f_1, \dots, f_{k-1} мора да задржи ранију условљену оптималну вредност $f_s, s = 1, \dots, k-1$, остварену када је вршена његова оптимизација (у кораку s) и сачувана до корка $k-1$ са решењем $x^{(k-1)}$. Критеријуму f_s дозвољава се максимално одступање од раније вредности $f_s(x^{(k-1)})$ за $\alpha_s^{(k)} > 0$ (умањење или увећање у зависности типа оптимизације).

$$\begin{cases} \text{opt}_{x \in X} f_k(x) \\ f_s(x) \geq f_s(x^{(k-1)}) - \alpha_s^{(k)}, \quad s \in K^1, s < k, \text{ за } \max f_s(x) \\ f_s(x) \leq f_s(x^{(k-1)}) + \alpha_s^{(k)}, \quad s \in K^2, s < k, \text{ за } \min f_s(x) \end{cases} \quad (42)$$

б) Тежинска сума критеријума

Метода врши превођење модела ВКП у једнокритеријумски модел оптимизације функције корисности у облику тежинске суме функција критеријума. Geoffrion [1968]¹⁰¹ је доказао да решење модела (43) јесте *Парето оптимално* решење вишекритеријумског модела максимизације свих критеријума (20). Ова метода је у таксономији метода сврстана у групу 2 (подгрупа 2.1 Најзначајнија – кардинална информација). Све тежине или пондери λ_k су позитивне вредности и изражавају релативну важност која се придаје појединим критеријумима $f_k, k \in K$. Параметри λ_k често су нормализовани (45). За примену методе неопходно је да се модел мешовите оптимизације (22) преведе у модел оптимизације истог типа за све критеријуме (43) или (44).

$$\max_{x \in X} f_k(x), \quad k \in K \quad \rightarrow \quad \max_{x \in X} \sum_k \lambda_k f_k(x) \quad (43)$$

$$\min_{x \in X} f_k(x), \quad k \in K \quad \rightarrow \quad \min_{x \in X} \sum_k \lambda_k f_k(x) \quad (44)$$

$$\sum_k \lambda_k = 1, \quad \lambda_k > 0, \quad k \in K \quad (45)$$

в) Метода ε -ограничења

Ова метода са називом *ε -Constraint Method* је вероватно најпознатија и често коришћена метода решавања модела ВКП (група 4 у таксономији метода, подгрупа 4.1 Имплицитна размена информација) услед једноставности и разумљивости за аналитичара, односно доносиоца одлуке. Њоме се решавају модели независно да ли су сви критеријуми истог типа или постоје критеријуми различитих типова.

¹⁰¹ Geoffrion, A. M., Proper efficiency and the theory of vector maximization, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22: 618-630, 1968.

Бира се критеријум f_s са највећим приоритетом коме се врши оптимизација, а остали критеријуми f_k преносе се у ограничења постављајући доње границе $\varepsilon_k^- \in R$ ако су типа максимизације у (46) и (48), односно горње границе $\varepsilon_k^+ \in R$ ако су типа минимизације у (47) и (48). Методу је увео Haimes¹⁰² разматрајући проблем минимизације свих критеријума (47), што понавља и Ehrgott¹⁰³. Истиче се да потребан и довољан услов за *Парето оптималност* показују да ова метода решава опште проблеме ВКП без претпоставке конвексности.

$$\begin{cases} \max f_k(x), & k \in K \\ x \in X \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max f_s(x) \\ x \in X \\ f_k(x) \geq e_k^-, & k \neq s, k \in K \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} \min f_k(x), & k \in K \\ x \in X \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min f_s(x) \\ x \in X \\ f_k(x) \leq e_k^+, & k \neq s, k \in K \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} \max_X f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, & k \in K_1 \\ \min_X f_k(x) = \sum_j c_{jk} x_j, & k \in K_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{opt } f_s(x) & s \in K_1, \text{ ili } s \in K_2 \\ x \in X \\ f_k(x) \geq e_k^-, & k \neq s, k \in K_1 \\ f_k(x) \leq e_k^+, & k \neq s, k \in K_2 \end{cases} \quad (48)$$

3.2.2.3. Анализа осетљивости решења и параметарска анализа модела

Сви облици анализе код једнокритеријумских модела ЛП могући су и за вишекритеријумске моделе. Неки облици анализе су саставни процес решавања вишекритеријумских модела применом одређених мода.

За разлику од модела ЛП из ЈКО када се врши анализа *оптималног решења* x^* , у линеарном моделу ВКП спроводи се анализа за било које *Парето-оптимално решење* $x^{(r)}$ или *усвојено решење* x^{ko} . Важи $x^{(r)}, x^{ko} \in X_{нар}$ или $x^{(r)}, x^{ko} \in \underline{X}_{нар}$. Имајући на уму више могућих облика анализе решења, најчешће се спроводе два облика које непосредно подржава софтвер за линеарне моделе (други облици анализе могу се вршити посредно, одређивањем решења са коригованим вредностима посматраних елемената).

- *Анализа осетљивости решења, СА – сензитивна анализа (SA – Sensitivity Analysis)* са становишта функције критеријума и слободних чланова ограничења,
- *Параметарска анализа модела (PA – Parametric Analysis)* са становишта функције критеријума и слободних чланова ограничења.

Оба облика анализе врше се сагласно методи која се користи за решавање вишекритеријумског модела. Излажу се два приступа:

- примена методе ε -ограничења
- примена лексикографске методе.

¹⁰² Haimes, Y. Y., Lasdon, L. S., and Wismer, D. A., On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1971, 296-297,

¹⁰³ ibid. Ehrgott, M., 2000., str. 82.

а) Анализа осетљивости решења (SA – Sensitivity Analysis)

Анализа са становишта коефицијената функције критеријума (*Sensitivity Analysis of the OBJ Coefficients*) одређује интервале промена коефицијената функције критеријума уз променљиве x_j , дате доњим и горњим границама [*Allowable Min. C(j), Allowable Max. C(j)*], са циљем да се задржи посматрано решење, односно вредности свих променљивих.

- Промене коефицијената небазних променљивих $x_j=0$ (имају *редуциране цене нула, Reduced Cost = 0*) задржавају достигнућу вредност функције критеријума.
- Ако се мењају коефицијенти базних променљивих $x_j>0$ (имају *Reduced Cost > 0*) потребно је одредити насталу вредност функције критеријума посматрајући редуциране цене тих променљивих.

Анализа са становишта слободних чланова ограничења, односно десних страна ограничења (*Sensitivity Analysis of the Right- Hand-Side*) одређује доње и горње границе интервала промена вредности слободних чланова [*Allowable Min. RHS, Allowable Max. RHS*] са циљем да се задржи структура решења (остају базне променљиве $x_j > 0$ и небазне променљиве $x_j = 0$). Анализа даје податке за вредност функције критеријума и накнадно могу да се одреде настале вредности за променљиве решавањем модела са одговарајућим слободним члановима.

- Ако је посматрано ограничење било остварено на његовој граници (има тип "=", нема подбачај за тип "≤" и нема пребачај за тип "≥") задржава се вредност функције критеријума. То ограничење има цену у сенци нула (*Shadow Price = 0*).
- У осталим случајевима (постоји подбачај за тип "≤" и постоји пребачај за тип "≥", те је *Shadow Price > 0*) мења се вредност функције критеријума и може се прорачунати колико износи посматрајући цене у сенци тих слободних чланова.

а.1) СА решења решења модела методе ε – ограничења

Став 8. Када се неки модел ЛП са више критеријума (20)-(22) преведе у модел ЛП са једним критеријумом применом методе ε -ограничења и одговарајућим моделом (46)-(48) врши оптимизација најзначајнијег критеријума f_s , $s \in K$, посматрају се подаци из примене софтвера (као што је *WinQSB, modul LP-ILP: Linear and Integer Programming, Линеарно и целобројно програмирање*). Анализа може се вршити само за коефицијенте c_{sj} посматраног критеријума f_s , пошто су остали критеријуми f_k пренети у ограничења са одговарајућим границама $f_{k0} = e_k$, $k \neq s$, $k \in K$. Са становишта ограничења, могу се разматрати две групе слободних чланова:

- десне стране b_i структурних ограничења, $i \in I$
- уведене границе f_{k0} за критеријуме f_k који су пренети у ограничења, $k \neq s$, $k \in K$.

Дефиниција 16. Задржава се *Парето-оптимално решење* $x^{(r)}$ одређено са коефицијентима c_{sj} критеријума f_s уз променљиве x_j ако су испуњени услови (49.1) за нове вредности c_{sj}' . Ознаке $C(j)$ у границама интервала односе се на коефицијенте c_{sj} . Полазна оптимална вредност f_s^* мења се у $f_s^{*'}$ према (42.2). Критеријуми f_k пренети у ограничења задржавају вредности $f_k(x^{(r)})$, $k \neq s$, $k \in K$.

$$c_{sj}' \in [\text{Allowable Min. } C(j), \text{ Allowable Max. } C(j)], \quad s \in K, j \in J \quad (49.1)$$

$$f_s^{*' } = \sum_{j \in J} c_{sj}' x_j^{(r)} = f_s^* + \sum_{j \in J} (c_{sj}' - c_{sj}) x_j^{(r)}, \quad s \in K \quad (49.2)$$

Дефиниција 17. Задржава се структура решења $x^{(r)}$ ако слободни чланови ограничења b_i постану b_i' са условима (50.1). Ознаке RHS у границама интервала односе се на вредности b_i . За критеријум f_s важи релација (50.2) са $SP_i = (\text{Shadow Price})$ за b_i . Критеријуми f_k у ограничењима добијају вредности (50.3) са новим решењем $x^{(r)'}$ које настаје заменом b_i са b_i' , $i \in I$.

$$b_i' \in [\text{Allowable Min. RHS}, \text{Allowable Max. RHS}], \quad i \in I \quad (50.1)$$

$$f_s^* = f_s^* + \sum_{i \in I} (b_i' - b_i) \cdot SP_i, \quad s \in K \quad (50.2)$$

$$f_k' = f_k(x^{(r)'}), \quad k \neq s, k \in K. \quad (50.3)$$

По аналогiji се посматрају слободни чланови e_k , постављене границе за критеријуме f_k у ограничењима и њихове нове вредности e_k' . Не мења се структура решења $x^{(r)}$ за услове (51.1), а вредности критеријума одређују се релацијама (51.2) и (51.3). Ознаке RHS и SP_k одговарају критеријумима f_k .

$$e_k' \in [\text{Allowable Min. RHS}, \text{Allowable Max. RHS}], \quad k \neq s, k \in K \quad (51.1)$$

$$f_s^* = f_s^* + \sum_{i \in I} (f_{k0}' - f_{k0}) \cdot SP_k, \quad s \in K \quad (51.2)$$

$$f_k' = f_k(x^{(r)'}), \quad k \neq s, k \in K \quad (51.3)$$

a.2) СА решења модела наизменичне оптимизације сваког критеријумима

Став 9. Ако се истовремено посматрају сви критеријуми f_k (20)-(22) и одређују њихова маргинална решења $x^{(k)*}$ са идеалним вредностима f_k^* које имају последице $f_{ks} = f_s(x^{(k)*})$ за $k, s \in K$, може се применити лексикографска метода понављањем модела (20). Сукцесивно се решава n модела постављањем да сваки критеријум f_k има највиши приоритет. Тиме се омогућава анализа било ког маргиналног решења. Потребне податке приказује софтвер који подржава наведени приступ (као што је WinQSB, модул LP-ILP: Linear and Integer Goal Programming, Линеарно и целобројно циљно програмирање – варијанта са функцијама критеријума као циљевима и без девијационих променљивих). За решење $x^{(k)*}$ може се вршити анализа коефицијената c_{kj} у његовом критеријуму f_k . Као слободни чланови могу се посматрати:

- десне стране b_i структурних ограничења, $i \in I$
- остварене вредности f_{ks} осталих критеријума f_s са нижим приоритетима, $s \neq k$, $s \in K$.

Дефиниција 18. Задржава се маргинално решење $x^{(k)*}$ ако полазни коефицијенти c_{kj} критеријума f_k са највишим приоритетом (комњ се врши оптимизација) имају нове вредности c_{kj}' сагласно релацији (52.1). Ознаке $C(j)$ у границама интервала односе се на коефицијенте c_{kj} . Полазна идеална вредност f_k^* мења се у $f_k^{*'}$ сагласно са (52.2). Осталим критеријумима f_s могу се слободно мењати нове вредности c_{ks}' (52.3) и настале вредности f_{sk}' (52.4) одређују се са $x^{(k)*}$.

$$c_{kj}' \in [\text{Allowable Min. } C(j), \text{Allowable Max. } C(j)], \quad k \in K, j \in J \quad (52.1)$$

$$f_k^{*'} = \sum_{j \in J} c_{kj}' x_j^{(k)*} = f_k^* + \sum_{j \in J} (c_{kj}' - c_{kj}) x_j^{(k)*}, \quad k \in K \quad (52.2)$$

$$c_{sj}' \in [-M, +M] = [-\infty, +\infty], \quad s \neq k, s \in K, j \in J \quad (52.3)$$

$$f_{ks}' = f_{ks} + \sum_{j \in J} (c_{sj}' - c_{sj}) x_j^{(k)*}, \quad s \neq k, s \in K \quad (52.4)$$

Дефиниција 19. Задржава се структура решења $x^{(k)*}$ ако слободни чланови ограничења b_i постану b_i' са условима (53.1). Критеријум f_k има нову идеалну вредност $f_k^{*'}$ из

релације (53.2). Ознаке RHS за границе интервала у (53.1) односе се на f_k . $SP_{ki} = (Shadow Price Goal k)$ за b_i у (53.2). Раније последице f_{ks} осталих критеријума f_s добијају нове вредности f_{ks}' (53.3) са $SP_{si} = (Shadow Price Goal s)$ за b_i .

$$b_i' \in [Allowable Min. RHS, Allowable Max. RHS], \quad i \in I \quad (53.1)$$

$$f_k^{*'} = f_k^* + \sum_{i \in I} (b_i' - b_i) \cdot SP_{ki}, \quad k \in K \quad (53.2)$$

$$f_{ks}' = f_{ks} + \sum_{i \in I} (b_i' - b_i) \cdot SP_{si}, \quad s \neq k, s \in K \quad (53.3)$$

б) Параметарска анализа модела – ПА (PA – Parametric Analysis)

Параметарска анализа модела обухвата све допустиве вредности посматраних елемената. Наведени софтвер за SA подржава и PA коефицијената функција критеријума и слободних чланова ограничења. У теорији је изложена и PA за друге елементе. По аналогiji са SA, PA врши се сагласно примењеном моделу: једнокритеријумском моделу са методом ε -ограничења или вишекритеријумском моделу. Могућа су два облика анализе:

- разматрање само једног елемента – појединачна PA
- разматрање више елемената исте врсте – векторска PA.

Резултат анализе приказује се табеларно и графички. Избором једних елемената прорачунавају се остали елементи.

б.1) ПА модела методе ε -ограничења

Став 10. Векторска PA модела методе ε -ограничења (46) са становишта коефицијената функције критеријума, када највиши приоритет има критеријум f_1 (усвојено је $s = 1$), дефинише модел (54).

$$\begin{cases} \max_{x \geq 0} f_1(c_1 + \mu \cdot c_1') = \sum_{j \in J} (c_{1j} + \mu \cdot c_{1j}') \cdot x_j & (f_1 \text{ највишег приоритета}) \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I \\ \sum_{j \in J} c_{kj} \geq e_k^-, & k \neq 1, k \in K \end{cases} \quad (54)$$

где:

- c_{1j}', c_1' – смерови са интензитетима пертурбација полазних коефицијената c_{1j} критеријума f_1 и њихов вектор пертурбације $c_1' = [c_{11}', \dots, c_{1n}']$
- μ – фактор пертурбације коефицијената за критеријум f_1

- Појединачна анализа коефицијента c_{1r} за одабрану променљиву x_r , $r \in J$, може се описати моделом који се разликује од (54) или коришћењем модела (54) са $c_{1r}' = 1$ и $c_{1j}' = 0$ за остале променљиве x_j , $j > 1$. Софтвер приказује у табели: интервале промене μ за $\mu \in (-\infty, +\infty)$ при чему су то вредности за c_{1r} , одговарајуће вредности функције критеријума f_1 , прираштаје за f_1 , измену решења (променљива која напушта базу и променљива која постаје базна) и случајеве недопустивости решења. Указује се на вредности $\mu = c_{1r}$ када не постоје допустива решења. На графику је f_1 у функцији $\mu = c_{1r}$.
 - За одабрано $\mu = c_{1r}$ одређује се вредност критеријума f_1
 - За одабрано f_1 одређује се вредност $\mu = c_{1r}$.

- Векторска PA коефицијената c_{1j} уз више променљивих x_{1j} врши се постављањем $c_{1j}' = 1$ за $j \in J_1$ и $c_{1v}' = 0$ за остале x_{1v} са $v \in J_2$ (табела 14). Софтвер приказује табеларно интервале промене фактора μ за све вредности $\mu \in (-\infty, +\infty)$ и остале податке наведене за PA појединачних коефицијената применом векторске PA . График за f_1 је у функцији μ .
 - За одабрано μ одређују се коефицијенти c_{1j} и f_1
 - За одабрано f_1 одређује се μ и прорачунаву вредности c_{1j}
 - За одабране вредности c_{1j} (уз једну променљиву) и μ или f_1 , односно вредности c_{1j} за две променљиве (сложеније за више променљивих) и f_1 , одређују се остале величине.

Табела 14. Смерови векторске пертурбације и њихови односи на примеру три коефицијента за f_1

| Смерови пертурбације | Односи смерова | Вектор пертурбације c_1' | Тумачење |
|----------------------|----------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Исти | равномерни | $[1,1,1,0,\dots,0]$ | c_{11}, c_{12}, c_{13} равномерно расту или опадају |
| | неравномерни | $[2,1,1.5,0,\dots,0]$ | <ul style="list-style-type: none"> • c_{11} мења се 2 пута брже од c_{12} и $2/1,5 = 1,333$ пута брже од c_{13} • c_{12} мења се $1/1,5 = 0,667$ пута брже од c_{13}, односно промена c_{13} је $1,5/1 = 1,5$ пута бржа од промене c_{12} |
| Супротни | равномерни | $[1,-1,1,0,\dots,0]$ | <ul style="list-style-type: none"> • c_{11} мења се равномерно и супротно од c_{12} (c_{11} расте и c_{12} опада, или обрнуто), равномерно и у истом смеру са c_{13} (c_{11} и c_{13} расту или опадају) • c_{12} мења се равномерно и супротно од c_{13} |
| | неравномерни | $[2,-1,1.5,0,\dots,0]$ | <ul style="list-style-type: none"> • c_{11} мења се 2 пута брже (супротно) од c_{12} и $2/1,5 = 1,333$ пута брже од c_{13} у истом смеру • c_{12} мења се $-1/1,5 = -0,667$ пута брже од c_{13} ($0,667$ пута брже у супорном смеру), односно промена c_{13} је $1,5/(-1) = -1,5$ пута бржа од промене c_{13} ($1,5$ пута брже у супротном смеру) |

Став 11. Векторска PA модела методе ε -ограничења (46) за $s = 1$ са становишта слободних чланова ограничења дефинише модел (55). Посматрају се m полазних структурних ограничења са b_i и $p-1$ ограничења критеријума у ограничењима са e_k^- . Може се вршити појединачна и векторска анализа. На основу табеларног решења, избором једних елемената одређују се остали. Вредности b_i' и e_k^-' за векторску PA тумаче се по аналогији са особинама за коефицијенте c_{1j}' (табела 14).

$$\begin{cases} \max_{x \geq 0} f_1(b + \mu \cdot b', e^- + \mu \cdot e^-') = \sum_{j \in J} c_{1j} x_j & (f_1 \text{ највишег приоритета}) \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i + \mu \cdot b_i', & i \in I \\ \sum_{j \in J} c_{kj} \geq e_k^- + \mu \cdot e_k^-', & k \neq s, k \in K \end{cases} \quad (55)$$

где:

- b_i', b' – смерови са интензитетима пертурбација полазних слободних чланова b_i и вектор пертурбације $b' = [b_1', \dots, b_m']$
- e_k^-, e^- – смерови са интензитетима промена (пертурбација) полазних граница e_k^- критеријума f_k пренетих у ограничења и вектор пертурбације $e^- = [e_2^-, \dots, e_p^-]$
- μ – заједнички фактор пертурбација за десне стране b_i и e_k^-

6.2) ПА модела наизменичне оптимизације сваког критеријумима

Став 12. Векторска ПА вишекритеријумског модела (20) са становишта коефицијената одабране функције критеријума дефинише модел (56). Бира се једна функција критеријума f_k и врши векторска анализа коефицијената уз више или све променљиве.

$$\begin{cases} \max_{x \geq 0} f_k(c_k + \mu_k \cdot c_k') = \sum_{j \in J} (c_{kj} + \mu \cdot c_{kj}') \cdot x_j, & \text{за одабрано } k \in K \\ \max_{x \geq 0} f_r(x) = \sum_{j \in J} c_{rj} \cdot x_j, & r \notin k, r \in K \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I \end{cases} \quad (56)$$

где:

- c_{kj}', c_k' – смерови са интензитетима пертурбација полазних коефицијената c_{kj} за одабрани критеријум f_k и њихов вектор пертурбације $c_k' = [c_{k1}', \dots, c_{kn}']$
- μ_k – фактор пертурбације коефицијената c_{kj}
- Резултат анализе даје се табелом: интервали вредности c_k , интервали вредности свих критеријума, прираштаји разматраног критеријума f_k , измене базе и указивање на недопустива решења. График приказује вредности f_k у функцији μ_k . Са изабраним вредностима за једне елементе могу се прорачунати вредности осталих елемената.
 - Појединачна анализа одређеног коефицијента c_{kr} у f_k може се дефинисати посебним моделом, али је подесније користити векторску анализу и модел (56) постављањем $c_{kr}' = 1$ и $c_{kj}' = 0$ за остале коефицијенте. Тиме подаци за μ_k постају подаци за c_{kr} .

Став 13. Векторску ПА десне стране ограничења модела (20) дефинише модел (57).

$$\begin{cases} \max_{x \geq 0} f_k(b + \mu \cdot b') = \sum_{j \in J} c_{kj} x_j, & \text{за одабрано } k \in K \\ \max_{x \geq 0} f_r(x) = \sum_{j \in J} c_{rj} \cdot x_j, & r \notin k, r \in K \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i + \mu \cdot b_i', & i \in I \end{cases} \quad (57)$$

где:

- b_i', b' – смерови са интензитетима пертурбација полазних слободних чланова b_i и вектор пертурбације $b' = [b_1', \dots, b_m']$
- μ – фактор пертурбације слободних чланова b_i у ограничењима
- Промене слободних чланова ограничења одражавају се на све критеријуме.
 - Резултат анализе су интервали фактора μ са осталим подацима наведеним за модел (38).

- На основу захтеваних допустивих вредности за одабране елементе прорачунавају се вредности осталих елемената.
- Векторска анализа десне стране једног ограничења моделом (57) своди се на појединачну анализу са $b_v' = 1$ за разматро ограничење b_v и $b_i' = 0$ за остала ограничења. Тиме се код резултата врши замена μ са b_v .

3.2.2.4. Циљно програмирање (ЦП)

Посебна област *циљно програмирање* – ЦП (*GP, Goal Programming*) има другачију врсту модела у односу на *ЈКО* и *ВКО*.^{104, 105} У општем случају, слободни чланови b_i за структурна ограничења су циљеви са два облика одступања или девијација (ненегативних променљивих), $i \in I$.*) Девијацијама се формира q циљних функција G_s , уз евентуално увођење коефицијената значајности β_i^- и β_i^+ за минимизацију неостваривања циљева b_i према лексикографском поретку $G_1 \gg G_2 \gg \dots \gg G_q$. Једна циљна функција може да садржи девијације за више ограничења.

- Превођење *ЛП* модела *ЈКО* у модел циљног *ЛП* (*ЦЛП*) постављањем функције критеријума $f(x)$ у ограничење жељене вредности f_0 као циља са девијацијама d_{m+1} . Ове девијације и евентуалне тежине β_{m+1} чине циљну функцију G_1 са највишим приоритетом. Циљним функцијама за структурна ограничења умањују се приоритети за 1. Модел има укупно $1+q$ циљних функција.¹⁰⁶
- Превођење *ЛП* модела *ВКО* у модел *ЦЛП* постављањем свих критеријума $f_k(x)$ у ограничења жељених вредности d_{k0} као циљева са девијацијама d_{m+k} , $k \in K$. Њима се формирају циљне функције виших приоритета, уводећи евентуалне тежине β_{m+k} за девијације. Једна циљна функција може да садржи девијације за више f_{k0} . Умањују се приоритети циљних функција структурних ограничења за број уведених циљних функција о критеријумима. Циљних функција има највише $q+p$.¹⁰⁷ Илуструје се формирање једноставног модела *ЦЛП* (20.цп) на основу модела *ВКЛП* (20).**)

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_k(x) = \sum_j c_{kj} x_j, k \in K \\ X = \left\{ \begin{array}{l} \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in I \\ x_j \geq 0, \quad j \in J \end{array} \right. \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min G_1 = \sum_k \beta_k^- d_{m+k}^- \\ \min G_2 = \sum_i \beta_i^+ d_i^+ \\ \sum_j a_{ij} x_j + d_i^- = b_i - d_i^+, \quad i \in I \\ \sum_j c_{kj} x_j + d_{m+k}^- = f_{k0} - d_{m+k}^+, \quad k \in K \\ x_j, d_i^-, d_i^+, d_{m+k}^-, d_{m+k}^+ \geq 0 \quad j \in J, i \in I, k \in K \end{array} \right. \quad (20. \text{цп})$$

¹⁰⁴ Lee, S. M., *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach Publishers Inc., Philadelphia, 1972.

¹⁰⁵ Nikolić, I., „Višekriterijumski aspekti procesa odlučivanja“, *Doktorska disertacija*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 1993., str. 4-24 do 4-30 (teorija) i str. D2-6 do D2-10 (strani softver i nova metoda).

*) Негативне и позитивне девијације, d_i^- и d_i^+ , замењују изравнавајуће променљиве. Услови су $d_i^- \cdot d_i^+ = 0$, свако ограничење може да има или подбачај $d_i^- > 0$ или пребачај $d_i^+ > 0$ или је остварена вредност b_i те је $d_i^- = d_i^+ = 0$.

¹⁰⁶ Nikolić I., "Široke mogućnosti primene ciljnog linearnog programiranja u izboru asortimana proizvodnje", *Zbornik radova, Simpozijum ETAI '85*, Ohrid, 1985., str. 576-583.

¹⁰⁷ ibid. Nikolić, I., Vožilović, S., 2009. str. 81-105.

**) G_1 има виши ниво приоритета (мин. укупног неостваривања жељених вредности f_{k0} са тежинама β_k^- уз d_{m+k}^- о приоритетима критеријума f_k). G_2 је нижег приоритета (мин. укупног прекорачења слободних чланова b_i са тежинама β_i^+ које исказују значајност i -тог ограничења и границе b_i).

3.2.3. Решавање модела вишеатрибутивног одлучивања (ВАО) и анализа

Ова врста модела има одређене специфичности у односу на напред разматране моделе ВЦО, услед присуства коначног броја алтернатива и могућности да се критеријуми, поред увођења одговарајућих приоритета, поставе на једном нивоу (табела 15) или више више нивоа. Посебна карактеристика је нумеричко или вербално дефинисање вредности критеријума за алтернативе, односно додељивање оцена поређењем парова алтернатива.

3.2.3.1. Основне дефиниције модела ВАО

Дефиниције модела ВЦО (односно ВКП) важе и за моделе ВАО, разматрајући m задатих алтернатива A_i и њихових познатих вредности a_{ij} за n критеријума f_j у моделу ВАО ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) уместо решења са n променљивих x_j (решења је потребно одредити) и њихових последица на n критеријума f_k у моделу ВЦО ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$). Међутим, неке дефиниције ВЦО нису потребне за ВАО, и обрнуто. Даље се у заградама наводе редни бројеви одговарајућих дефиниција за ВЦО. Редослед дефиниција за ВАО прилагођен је посебностима ове врсте проблема.

Табела 15. Проблем ВАО, максимизација свих критеријума

| Алтернативе | | | Критеријуми и њихове вредности | | | | | |
|--------------------|-----------|-----------------|--------------------------------|--------------|-----|--------------|-----|--------------|
| | | | f_1 | f_2 | ... | f_j | ... | f_n |
| A_1 | | | a_{11} | a_{12} | ... | a_{1j} | ... | a_{1n} |
| A_2 | | | a_{21} | a_{22} | ... | a_{2j} | ... | a_{2n} |
| ... | | | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| A_i | | | a_{i1} | a_{i2} | ... | a_{ij} | ... | a_{in} |
| ... | | | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| A_m | | | a_{m1} | a_{m2} | ... | a_{mj} | ... | a_{mn} |
| Типови критеријума | | | мах | мах | | мах | | мах |
| Тежине критеријума | | | w_1 | w_2 | ... | w_j | ... | w_n |
| Почетна анализа | Најбоље | $\max_i a_{ij}$ | f_1^* | f_2^* | ... | f_j^* | ... | f_n^* |
| | Најлошије | $\min_i a_{ij}$ | f_1^{\min} | f_2^{\min} | ... | f_j^{\min} | ... | f_n^{\min} |

При решавању, односно анализи модела ВАО, могу да се поставе наредна два основна захтева:^{*)}

- (i) одредити најповољнију алтернативу у вишекритеријумском смислу и уважавајући приоритете критеријума,
- (ii) извршити рангирање свих алтернатива, односно одредити њихову вишекритеријумску ранг-листу.

^{*)} У литератури су изложене неке модификације захтева (ii). На пример, одредити: n^* "најбољих" алтернатива, или најприхватљивије алтернативе са условом $\sum c_i \leq c_0$ за њихове параметре $c_i, i \in I$.

Уочава се да захтев (ii) укључује захтев (i), пошто је најповољнија алтернатива са врха ранг-листе (има ранг $r_i = 1$). Међутим, доносилац одлуке у пракси може да одабере неку алтернативу са нижим рангом, разматрајући аспекте проблема који нису могли да буду укључени у модел ВАО.

Дефиниција 20 (5, 7). Матрица A са познатим вредностима a_{ij} за критеријуме f_j које остварују разматране алтернативе A_i , $i \in I, j \in J$, јесте истовремено *простор променљивих* X и *критеријумски скуп* (*простор критеријума*) F у $(m \cdot n)$ -димензионалном простору:

$$X = F = A = [a_{ij}] \quad (58)$$

Дефиниција 21 (9). Идеалне вредности критеријума f_j^* , $j \in J$, формирају идеалну тачку f^* у n -димензионалном простору:

$$\begin{cases} f_j^* = \max_{i \in I} a_{ij}, & j \in J \\ f^* = [f_1^*, \dots, f_n^*], & f^* \in R^n \end{cases} \quad (59)$$

Све вредности f_j^* припадају матрици A , $f_j^* \in A$, $j \in J$. Али је $f^* \in A$ само ако постоји нека алтернатива A_s таква да обезбеђује идеале свим критеријумима, $f_j^* = a_{sj}$, $s \in I, \forall j \in J$.

Дефиниција 22. Две алтернативе (A_i, A_k) су *еквивалентне* ако имају једнаке вредности код свих критеријума $a_{ij} = a_{kj}$, $(i, k) \in I, \forall j \in J$. Изоставити једну алтернативу ако се бира најповољнија алтернатива у проблему (i), и задржати обе алтернативе ако се врши рангирање свих алтернатива у проблему (ii).

Дефиниција 23 (12). Алтернатива A_i *доминира* алтернативу A_k ако остварује повољнију вредност бар једном критеријуму и не погоршава вредности ни једном од преосталих критеријумима. A_i је *доминирајућа* или *доминатна* алтернатива, док је A_k *доминирана* алтернатива. Изоставити A_k у проблему (i), задржати обе алтернативе у проблему (ii).

Дефиниција 24 (10). Две алтернативе (A_i, A_k) међусобно су *недоминантне* (неупоредиве ако су сви критеријуми равноправни) ако је свака повољнија за бар један критеријум и неповољнија за бар један од преосталих критеријума. Анализирати обе алтернативе у проблему (i) и (ii).

Дефиниција 25 (9). Ако A_s *доминира све алтернативе* онда остварује *идеалне вредности* свих критеријумима, $a_{sj} = f_j^*$, $s \in I, \forall j \in J$, односно обезбеђује *идеалну тачку* f^* . Она је *савршено решење* x^* проблема (i) са критријумима исте важности.

- Међутим, у зависности од значајности критеријума f_j , односно њихових тежинских коефицијената w_j , $j \in J$ (Табела 8), A_s не мора обавезно бити прва на вишекритеријумској ранг-листи проблема (i), односно (ii).

Напомена 6. Утврђивање наведених особина алтернатива врши се поређењем свих парова посматране алтернативе A_i са наредним алтернативама, полазећи A_1 :

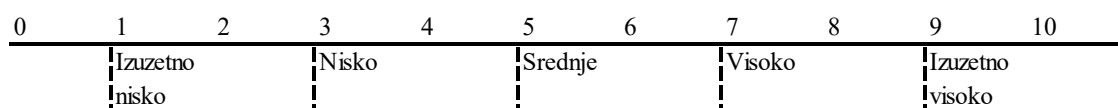
$$(A_i, A_k), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, k = i+1, i+2, \dots, n \quad (60)$$

а) Трансформација атрибута

Подаци за конкретни проблем ВАО могу бити таквог карактера да није могуће непосредно применити неку методу решавања (бројни подаци и описни подаци) или су подаци такве природе да отежавају решавање модела (велики бројеви или мали бројеви у целом моделу или за неке критеријуме). Услед тога, неопходно је (у првом случају) или пожељно је (у другом случају) извршити одговарајуће трансформације атрибута (вредности критеријума са алтернативама, аиј називају се атрибутути). Наредни облици трансформација детаљно су изложени у иностраној и домаћој литератури.¹⁰⁸

а.1) Квантификација квалитативних атрибута

Вредности критеријума за алтернативе уобичајено се задају *квантитативно* (нумерички, бројевима), али могу да се користе и *квалитативни* (описни) подаци за неке или све критеријуме. На пример, исказивање квалитета изведених радова са описним оценама које је потребно превести у бројне податке. Уобичајено се примењује линеарна скала трансформација са задатим бројним вредностима (од 0 до 1 или од 0-10) и описним вредностима (слика 28). Задате оцене се упоређују са описним вредностима на наведеној скали.



Слика 28. Линеарна скала квантификације квалитативних атрибута модела ВАО

а.2) Модификација атрибута истог критеријума

Модификација атрибута истог критеријума може да олакша решавање модела. Најчешће је потребно усагласити висину бројних вредности критеријума и/или превести захтев да се одреди минимална вредности неког критеријума у одређивање максималне вредности модификованог (супротног) критеријума.

Став 14. Остају непромењени односи у моделу ако се у оквиру истог критеријума f_j на одређени начин модификују вредности свих алтернатива. При томе остаје непромењен и тип тог критеријума (максимизација или минимизација).

- Множење или дељење вредности свих алтернатива критеријума f_j са подесно одабраним позитивним бројем k_j :

$$a_{ij}^* = a_{ij} k_j \text{ ili } a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{k_j}, \quad k_j > 0, i \in I, j \in J^1 \subseteq J \quad (61)$$

- умањење или увећање вредности свих алтернатива критеријума f_j са подесно одабраним позитивним бројем зет z_j :

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij} + z_j, & z_j > 0, \quad i \in I, j \in J^{2,1} \subseteq J \\ a_{ij} - z_j, & z_j > 0, \quad i \in I, j \in J^{2,2} \subseteq J, J^{2,1} \cap J^{2,2} = \emptyset \end{cases} \quad (62)$$

¹⁰⁸ ibid. Nikolić, I., Borović, S., 1996., str. 3-59 do 3-62.

Став 15. Остају непромењени односи у моделу и мења се тип критеријума ($\min f_j \Rightarrow \max f_j$, и обрнуто) ако се у оквиру критеријума f_j изврше наредне операције.

- Делјење или множење свих алтернатива са негативним бројем:

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{k_j}, k_j < 0, & i \in I, j \in J^{3,1} \subseteq J \\ a_{ij}^* = a_{ij}k_j, k_j < 0, & i \in I, j \in J^{3,2} \subseteq J, J^{3,1} \cap J^{3,2} = \emptyset \end{cases} \quad (63)$$

- Одузимање вредности свих алтернатива од подесно одабраног броја z_j :

$$a_{ij}^* = z_j - a_{ij}, i \in I, j \in J^4 \subseteq J \quad (64)$$

а.3) Нормализација и линеаризација атрибута

Већина ефикаснијих метода за решавање модела ВАО у неком од корака процеса решавања врше одговарајућу трансформацију атрибута. За упоређивање атрибута различитих вредности, евентуално и различитих јединица мере, користи се један од два основна приступа из наставка.

Векторска нормализација

$$r_{ij} = \begin{cases} a_{ij} / \sqrt{\sum_i a_{ij}^2}, & i \in I, j \in J, \max f_j \\ 1 - (a_{ij} / \sqrt{\sum_i a_{ij}^2}), & i \in I, j \in J, \min f_j \Rightarrow \max f_j \end{cases} \quad (65)$$

Линеарна скала трансформација

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij} / a_j^{\max}, & i \in I, j \in J, \max f_j \\ 1 - (a_{ij} / a_j^{\max}), & i \in I, j \in J, \min f_j \Rightarrow \max f_j \end{cases} \quad (66.1)$$

или

$$l_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij} - a_j^{\min}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}, & i \in I, j \in J, \max f_j \\ \frac{a_j^{\max} - a_{ij}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}, & i \in I, j \in J, \min f_j \Rightarrow \max f_j \end{cases} \quad (66.2)$$

где:

$$a_j^{\max} = \max_i a_{ij}, a_j^{\min} = \min_i a_{ij}, i \in I, \text{ dato } j \in J$$

Напомена 7. Касније се указује да трансформације (66.1) користи *Ideal Mode* методе АХП.

б) Дефинисање значајности или тежина критеријума

Реални проблеми најчешће немају критеријуме који су подједнако битни (равноправни) и потребно је да доносилац одлуке дефинише *факторе значајности појединих критеријума* користећи одговарајуће *позитивне тежинске коефицијенте (тежине)* или тзв. *пондере за критеријуме* (ако њихов збир износи 1, то су *нормализоване тежине*).

- Значајност критеријума је најбитнији и најсложенији аспект решавања модела *ВАО*. Наиме, разне методе су развијене са специфичностима при разматрању значајности критеријума или за решавање одређене врсте проблема.^{*)}

У теорији је развијено више поступака за одређивање тежинских коефицијената критеријума, као што је *Метода ентропије*, где се могу комбиновати тежине одређене методом (на основу ентропије атрибута у оквиру истог критеријума и распона у оквиру свих критеријума модела) са тежинама које додељује доносилац одлуке. Алгоритам ове методе из стране литературе преносе домаћи аутори.¹⁰⁹

Напомена 8. Одређивање тежинских коефицијената критеријума подесно може да се врши применом касније изложене *Методe аналитичких хијерархијских процеса (АХП)*, односно применом софтвера *Expert Choice* за ову методу, пошто омогућава нумеричко или вербално поређење било суседних парова или свих парова критеријума.

- Добијене тежине могу да се користе за примену другх метода *ВАО*.

в) Више нивоа критеријума

Одређеном проблему *ВАО* могу да се дефинишу критеријуми на истом нивоу (Табела 15) или на више нивоа (Табела 16.1). Раније развијене методе *ВАО* нису укључивале нивое критеријума. Хијератхију критеријума уводи метода *АХП* и софтвер *Expert Choice* подржава два основна приступа дефинисању тежина критеријума:

- *Приступ 1.* Непосредно задавање тежина критеријума на свим нивоима, и
- *Приступ 2.* Поређење парова критеријума на истом нивоу (парова суседних критеријума, свих парова критеријума, односно комбиновано - парова суседних критеријума и парова одабраних несуседних критеријума).

Сваки приступ може да се спроведе на три начина и њиховом комбинацијом:

- нумерички,
- графички,
- вербално коришћењем тзв. “Скале 9 тачака”.

^{*)} Дефинисање тежина критеријума није увек једноставно и, у суштини, сваки доносилац одлуке субјективно дефинише тежинске коефицијенте критеријума. Тежине критеријума имају одлучујући утицај на решење. Може се догодити да уведене тежине не обезбеђује "добро решење" и потребно је анализирати како се решење понаша у зависности од могућих реалних варијанти тежине критеријума. Проблем је једноставнији ако постоје апсолутни приоритети међу критеријумима, када се користи лексикографска метода за моделе *ВАО* при избору најпољније алтернативе за проблем (i). Ако је потребно вршити рангирање свих алтернатива проблема (ii), за примену адекватних метода потребно је дефинисати велике распоне између тежина (на пример, 100 за критеријум са највишим приоритетом, 50 за критеријум са наредним итд.) и анализирати како се решење понаша у зависности од дефинисаних тежина.

¹⁰⁹ *ibid.* Nikolić, I., Borović, S., 1996., str. 3-65 i 3-66.

Табела 16.1. Илустрација три нивоа критеријума модела ВАО

| | | К р и т е р и ј у м и | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------------|-------|-----------------------|------------|------------|-----|------------------|-------------|-------------|------------|-----|------------|---------|----------|
| Нивои критеријума | 1 | f_1 | f_2 | | ... | $f_j, r = n_j^2$ | | | | | ... | f_n | |
| | 2 | | f_{21} | f_{22} | | f_{j1} | | | f_{j2} | ... | f_{jr} | | |
| | 3 | | | | | f_{j11} | f_{j12} | f_{j13} | | | | | |
| Алтернативе | A_1 | a_{11} | a_{121} | a_{122} | ... | a_{1j11} | a_{1j12} | a_{1j13} | a_{1j2} | ... | a_{1jr} | ... | a_{1n} |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | A_i | a_{i1} | a_{i21} | a_{i22} | ... | a_{ij11} | a_{ij12} | a_{ij13} | a_{ij2} | ... | a_{ijr} | ... | a_{in} |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | A_m | a_{m1} | a_{m21} | a_{m22} | ... | a_{mj11} | a_{mj12} | a_{mj13} | a_{mj2} | ... | a_{mjr} | ... | a_{mn} |
| Нормализоване локалне тежине критеријума | 1 | w_1^1 | w_2^1 | | ... | w_j^1 | | | | | ... | w_n^1 | |
| | 2 | | w_{21}^2 | w_{22}^2 | | w_{j1}^2 | | | w_{j2}^2 | ... | w_{jr}^2 | | |
| | 3 | | | | | w_{j11}^3 | w_{j12}^3 | w_{j13}^3 | | | | | |

Приступ 1. (Операције софтвера могу да се спроводе ручним поступцима)

♦ *Ниво 1.* Корисник дефинише сваком критеријуму f_j локалне тежине (приоритете) $w_j^{(1),L} > 0, j \in J$. То могу да буду слободно одабрани позитивни бројеви, сагласно значају критеријума (већи бројеви за критеријуме са већим приоритетима). Софтвер одређује нормализоване тежине $w_j^{(1),L} = \underline{w}_j^1$ које су истовремено нормализоване глобалне тежине $w_j^{(1),G}$:

$$\underline{w}_j^{(1),G} = \underline{w}_j^1 = \frac{w_j^1}{\sum_{j=1}^n w_j^1}, j \in J \quad (67.1)$$

♦ *Ниво 2.* Нека критеријум $f_j, j \in J^2$, има n_j^2 подкритеријума f_{jk} којима корисник додељује локалне тежине $w_{jk}^{(2),L} = w_{jk}^2 > 0, k \in K_j^2 = \{1, \dots, n_j^2\}$. Софтвер одређује нормализоване локалне и глобалне тежине:

$$\underline{w}_{jk}^{(2),L} = \underline{w}_{jk}^2 = \frac{w_{jk}^2}{\sum_{k=1}^{n_j^2} w_{jk}^2}, \underline{w}_{jk}^{(2),G} = \underline{w}_{jk}^{(2),L} \underline{w}_j^{(1),G}, j \in J^2, k \in K_j^2 \quad (67.2)$$

♦ *Ниво 3.* Нека подкритеријум $f_{jk}, k \in K_{jk}^3 \subseteq K_j^2$, има n_{jk}^3 под-подкритеријума f_{jks} којима корисник додељује локалне тежине $w_{jks}^{(3),L} = w_{jks}^3 > 0, s \in S_{jk}^3 = \{1, \dots, n_{jk}^3\}$. Софтвер одређује нормализоване локалне и глобалне тежине:

$$\underline{w}_{jks}^{(3),L} = \underline{w}_{jks}^3 = \frac{w_{jks}^3}{\sum_{s=1}^{n_{jk}^3} w_{jks}^3}, \underline{w}_{jks}^{(3),G} = \underline{w}_{jks}^{(3),L} \underline{w}_{jk}^{(2),G}, j \in J^2, k \in K_{jk}^3, s \in S_{jk}^3 \quad (67.3)$$

- Поступак се понавља по аналогiji за наредне критеријуме нижих нивоа, уколико постоје, посматрајући стабло хијрархијско стабло критеријума.

2) *Превођење модела са више нивоа критеријума у "модел са једним нивоом критеријума"*¹¹⁰

Изложени приступ 1 своди модел ВАО са више нивоа критеријума (табела 16.1) на модел који се условно може називати „модел са једним нивоом“ критеријума (табела 16.2).

- Посматрају се само критеријуми било ког нивоа којима се придружују вредности за алтернативе. Њима се додељују глобалне тежине $w^{(G)}$.

Табела 16.2. Свођење три нивоа критеријума модела ВАО на један ниво

| | | | | | | | | | | | | | |
|------------------|---------|------------|------------|-----------|-------------|-------------|-------------|------------|-----------|------------|-----------|---------|----------|
| Ниво, N | 1 | 2 | 2 | ... | 3 | 3 | 3 | 2 | ... | 2 | ... | 1 | |
| Критеријуми | f_1 | f_{21} | f_{22} | ... | f_{j11} | f_{j12} | f_{j13} | f_{j2} | ... | f_{jr} | ... | f_n | |
| Алтернативе | A_1 | a_{11} | a_{121} | a_{122} | ... | a_{1j11} | a_{1j12} | a_{1j13} | a_{1j2} | ... | a_{1jr} | ... | a_{1n} |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | A_i | a_{i1} | a_{i21} | a_{i22} | ... | a_{ij11} | a_{ij12} | a_{ij13} | a_{ij2} | ... | a_{ijr} | ... | a_{in} |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | A_m | a_{m1} | a_{m21} | a_{m22} | ... | a_{mj11} | a_{mj12} | a_{mj13} | a_{mj2} | ... | a_{mjr} | ... | a_{mn} |
| Тежине $w^{(G)}$ | w_1^G | w_{21}^G | w_{22}^G | ... | w_{j11}^G | w_{j12}^G | w_{j13}^G | w_{j2}^G | ... | w_{jr}^G | ... | w_n^G | |

3.2.3.2. Одабране методе решавања модела ВАО

По аналогiji са напред наведеном таксономијом метода ВЦО, у страниј литератури је приказана *таксономија метода ВАО*¹¹¹ која је пренета у домаћу литературу¹¹². Врши се основна подела метода развијених до 1980. год. према типу информација: 1. Без информација о преференцама, 2. Информације о преференцама за атрибуте (критеријуме), 3. Информације о преференцама за акције (алтернативе). Даље се у 2. до 3. разматрају битне карактеристике атрибута модела и следе основне класе метода (16) за 1. до 3.

У наведену таксономију могу да се укључе и касније развијене методе, као што су ефикасне методе: *ELimination and (Et) Choice Translating REality* (ELECTRE) I-IV (Roy В. са сарадницима, аутори Париске школе), *Preference Ranking Organization MEthod for Enrichment Evaluations* (PROMETHEE) I-IV (Brans J. P. са сарадницима, аутори Бриселске школе) и *Итеративно компромисно програмирање* (ИКОР)¹¹³ са каснијом верзијом *Вишекритеријумско компромисно програмирање* (ВИКОР)¹¹⁴ које су развијене код нас (Оприцовић С.).

¹¹⁰ Николић, И., "Пословно одлучивање - Основни појмови и одабрани проблеми - Примена софтвера MS Excel, Вин QСB и Експерт Цхоице", *Писана предавања*, Универзитет "Унион - Никола Тесла", Београд, 2012., стр. 4-8 до 4-11.

¹¹¹ *ibid.* HWANG, C. L. and YOON, K., 1981.

¹¹² *ibid.* Nikolić, I., Borović, S., 1996., str. 3-60.

¹¹³ *ibid.* Opricović, S., 1986., str. 200-132.

¹¹⁴ *ibid.* Оприцовић, С., 1998., str. 142-172.

а) Непосредно одређивање решења – брзо одлучивање

Аналогно напред изложеној почетној анализи модела ВЦО са становишта маргиналних решења $x^{(k)*}$ критеријума f_k којима се врши оптимизација и њихових последица f_{ka} на све критеријуме $f_s, (k,s) \in K$ (табела 11), врши се почетна анализа модела ВАО¹¹⁵ (Табела 17).

Потребно је сваком критеријуму f_j одредити идеалну вредност f_j^* (68.1) и најлошију вредност f_j^{\min} (68.2). Затим, свакој алтернативи A_i уврдити број критеријума n_i^{\max} са оствареним идеалним вредностима (69.1) и број критеријума n_i^{\min} са оствареним најлошијим вредностима (69.2).

$$f_j^* = \max_i a_{ij}, j \in J \quad (68.1)$$

$$f_j^{\min} = \min_i a_{ij}, j \in J \quad (68.2)$$

$$n_i^{\max} = (\sum \delta(s) \mid \delta(s) = 1 \text{ за } a_{ij} = f_j^*, \delta(s) = 0 \text{ за } a_{ij} < f_j^*, j \in J), i \in I \quad (69.1)$$

$$n_i^{\min} = (\sum \lambda(s) \mid \lambda(s) = 1 \text{ за } a_{ij} = f_j^{\min}, \lambda(s) = 0 \text{ за } a_{ij} > f_j^{\min}, j \in J), i \in I \quad (69.2)$$

Дефиниција 26. Најбоља алтернатива за проблем (i) јесте A_i са највећим n_i^{\max} (највише идеала критеријума). Ако више алтернатива остварују тај услов, бира се алтернатива са мањим n_i^{\min} (мање најлошијих вредности критеријума). Ако две алтернативе или више алтернатива остварују исти број идеалних вредности критеријума и исти број најлошијих вредности критеријума, бира се она са мањим разликама остварених вредности осталих критеријума од њихових идеалних вредности.

Табела 17. Проблем ВАО, Почетна анализа и непосредно одлучивање

| | | Критеријуми | | | | | | Анализа и одлучивање | | |
|--------------------|-----------------|--------------|--------------|-----|--------------|-----|--------------|----------------------|--------------|----------|
| | | f_1 | f_2 | ... | f_j | ... | f_n | n_i^{\max} | n_i^{\min} | Rang |
| Алтернативе | A_1 | a_{11} | a_{12} | ... | a_{1j} | ... | a_{1n} | n_1^{\max} | n_1^{\min} | $r(A_1)$ |
| | A_2 | a_{21} | a_{22} | ... | a_{2j} | ... | a_{2n} | n_2^{\max} | n_2^{\min} | $r(A_2)$ |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | A_i | a_{i1} | a_{i2} | ... | a_{ij} | ... | a_{in} | n_i^{\max} | n_i^{\min} | $r(A_i)$ |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | A_m | a_{m1} | a_{m2} | ... | a_{mj} | ... | a_{mn} | n_m^{\max} | n_m^{\min} | $r(A_m)$ |
| Типови критеријума | | max | max | | max | | max | | | |
| Тежине критеријума | | w_1 | w_2 | ... | w_j | ... | w_n | | | |
| Почетна анализа | $\max_i a_{ij}$ | f_1^* | f_2^* | ... | f_j^* | ... | f_n^* | Најбоље вредности | | |
| | $\min_i a_{ij}$ | f_1^{\min} | f_2^{\min} | ... | f_j^{\min} | ... | f_n^{\min} | Најлошије вредности | | |

¹¹⁵ Borović S., Nikolić I., (Pisana predavanja) Seminar "Višekriterijumska optimizacija", GŠŠ VJ, Beograd, april - maj 2001.

Непосредно (вишекритеријумско) рангирање алтернатива A_i за проблем (ii), сматрајући да сви критеријуми имају једнаке тежине $w_j = 1/n, j \in J$, може да се врши додељивањем њихових ранг-места $r(A_i)$ на основу поређења n_i^{\max} и $n_i^{\min}, i \in I$. Формира се вишекритеријумска ранг-листа (ВКРЛ), највиши ранг или ранг-место је 1 и следе нижи рангови 2,3,... (виши ранг означава се мањим, а нижи ранг са већим редним бројем). Број ранг-места једнак је броју алтернатива и износи m , ако нема алтернатива са истим ранг-местима. У супротном, број ранг-места мањи је од m за број једнако ранжираних алтернатива.

Дефиниција 27. Највиши ранг $r(A_k) = 1$ има A_k са највећим $n_k^{\max}, k \in I^1 = I$ (70.1). Изостави се A_k , односно њен индекс k у скупу I^1 и формира скуп $I^2 = I^1 \setminus \{k\}$. Наредни нижи ранг $r(A_s) = 2$ ма A_s са највећим n_s^{\max} посматрајући преостале – неранжираних алтернативе, $s \in I^2$ (70.2). Поступак се наставља без A_s посматрањем $I^3 = I^2 \setminus \{s\}$.

$$n_k^{\max} = \max_{i \in I^1} n_i^{\max}, k \in I^1 \quad \Rightarrow r(A_k) = 1 \quad (70.1)$$

$$n_s^{\max} = \max_{i \in I^2} n_i^{\max}, s \in I^2 \quad \Rightarrow r(A_s) = 2 \quad (70.2)$$

Дефиниција 28. Ако две алтернативе или више алтернатива имају исти број критеријума f_j са f_j^* додељује им се исти ранг уколико истом броју критеријума остварују f_j^{\min} . Каже се да такве алтернативе деле исти ранг и оне могу да буду на почетку процеса рангирања (а) или касније (б).

(а) Нека на почетку процеса (A_k, A_s) имају $n_k^{\max} = n_s^{\max}$. Рангирање се врши у зависности од односа (n_k^{\min}, n_s^{\min}). Ако $n_k^{\min} = n_s^{\min}$ важи (71.1) и даље се разматрају алтернативе $i \in I^2 = I^1 \setminus \{k, s\}$. Наредно ранг-место 3 помера се за два од ранг-места 1, услед тога што се изостављају две ранжираних алтернативе (A_k, A_s). За $n_k^{\min} < n_s^{\min}$ повољнија је A_k са мање најлоших вредности критеријума и важи (71.2). Изостави се A_k и разматрају остале алтернативе (укључујући A_s), $i \in I^2 = I^1 \setminus \{k\}$.

$$n_k^{\max} = n_s^{\max}, n_k^{\min} = n_s^{\min}, (k, s) \in I^1 \quad \Rightarrow r(A_k) = r(A_s) = 1 \quad (71.1)$$

$$n_k^{\max} = n_s^{\max}, n_k^{\min} < n_s^{\min}, (k, s) \in I^1 \quad \Rightarrow r(A_k) = 1 > r(A_s) \quad (71.2)$$

(б) Нека у наставку процеса рангирања, након додељивања $r(A_k) = 1$ (72.1) и $r(A_s) = 2$ (55.2), (A_v, A_w) имају $n_v^{\max} = n_w^{\max}$. Са истим бројем најлошијих вредности критеријума настаје (72.1) и даље се разматрају алтернативе $i \in I^4 = I^3 \setminus \{v, w\}$. Са (72.2) исказује се да је повољнија A_v и процес се наставља са алтернативама $i \in I^4 = I^3 \setminus \{v\}$.

$$n_v^{\max} = n_w^{\max}, n_v^{\min} = n_w^{\min}, (k, s) \in I^3 \quad \Rightarrow r(A_v) = r(A_w) = 3 \quad (72.1)$$

$$n_v^{\max} = n_w^{\max}, n_v^{\min} < n_w^{\min} \quad \Rightarrow r(A_v) = 3 > r(A_w) \quad (72.2)$$

б) Одабране једноставне методе ВАО

Приказују се три класе метода које није сложено применити. Користе се напред дефинисани дисјунктни подскупови индекса за типове критеријума: $j \in J^{\max} \subseteq J$ (за максимизацију f_j), односно $j \in J^{\min} \subseteq J = \emptyset$ (за минимизацију f_j), $J^{\max} \cap J^{\min} = \emptyset$.

6.1) Метода доминације, MAXIMIN и MINIMAX

Ове методе у таксономији метода, са становишта *типа информација*, сврстане су у групу 1 (без информација о преференцама).¹¹⁶

♦ **Метода доминације** не захтева квантификацију квалитативних атрибута нити нормализацију или линеаризацију свих атрибута. Решава проблем (i) када се врши избор најповољније алтернативе A^* . То је A_i која *доминира* над свим осталим алтернативама (56). Метода не може се применити ако не постоји доминантна A_i .

$$A^* = \left\{ A_i \mid \begin{array}{l} a_{ij} \geq a_{sj}, \quad s \neq i, (s,i) \in I, j \in J^{\max} \\ a_{ij} \leq a_{sj}, \quad s \neq i, (s,i) \in I, j \in J^{\min} \end{array} \right. \quad (73)$$

Наредне две методе захтевају квантификацију квалитативних атрибута и даљу нормализацију или линеаризацију свих атрибута са циљем да сви критеријуму имају тип максимизације и омогући њихово поређење. Најподесније је вршити векторску нормализацију (65) која трансформисане атрибуте означава r_{ij} . Методе решавају проблем (i), али се *према опадању вредности* r_i (57) и r_i (56) може одредити одговарајућа ВКРЛ свих алтернатива A_i проблема (ii), $i \in I$.

♦ **MAXIMIN** одређује да је најповољнија она варијанта која има највећу између најмањих трансформисаних вредности. Тиме се исказује захтев да се *максимално "подигну" најлошије* максималне вредности критеријума:

$$A^* = \{A_s \mid r_s = \max_i (r_i = (\min_j r_{ij}))\} \quad (74)$$

♦ **MINIMAX** оцењује као најповољнију варијанту са највећом између највећих трансформисаних вредности. Тежи се да се *максимално "подигну" најбоље* максималне вредности критеријума:

$$A^* = \{A_k \mid r_k = \max_i (\max_j r_{ij})\} \quad (75)$$

6.2) Лексикографска метода

Метода захтева дефинисање строгог редоследа значајности критеријума. Према типу информација припадају групи 2 (*информације за атрибуте – критеријуме*) у таксономији метода, а према битним карактеристикама информација подгрупи 2.2 (*редни – ординарни ниво*).

Нека су критеријуми означени према редоследу значајности: f_1, f_2, \dots, f_n . Метода решава проблем (i) и заснива се на одређивању скупова најбољих алтернатива полазећи од критеријума са највишим приоритетом. Поступак се прекида када се добије једночлани скуп (само једна алтернатива).¹¹⁷

¹¹⁶ ibid. Nikolić, I., Borović, S., 1996., str. 3-60, 3-65.

¹¹⁷ ibid. Nikolić, I., Borović, S., 1996., str. 3-66, 3-67.

$$A^1 = \left\{ A_k \in A \mid a_{k1} = \begin{cases} \max_A a_{i1}, & (j=1) \in J^{\max} \\ \min_A a_{i1}, & (j=1) \in J^{\min} \end{cases} \right. \quad (76.1)$$

$$A^2 = \left\{ A_s \in A^1 \mid a_{s2} = \begin{cases} \max_{A^1} a_{i2}, & (j=2) \in J^{\max} \\ \min_{A^1} a_{i2}, & (j=2) \in J^{\min} \end{cases} \right. \quad (76.2)$$

.....

$$A^r = \left\{ A_v \in A^{r-1} \mid a_{vr} = \begin{cases} \max_{A^{r-1}} a_{ir}, & (j=r) \in J^{\max} \\ \min_{A^{r-1}} a_{ir}, & (j=r) \in J^{\min} \end{cases} \right. \quad (76.r)$$

Ако је A^1 са једним чланом, $A^1 = \{A_k\}$, процес се прекида. Остварено је јединствено оптимално решење $f_1^* = f_1\{A_k\}$. Са $A^2 = \{A_s\}$ процес се прекида. Сада f_2 има једну оптималну алтернативу $f_2^* = f_2\{A_s\}$, а f_1 има двоструко оптимално решење $f_1^* = f_1\{A_k\} = f_1\{A_s\}$, јер је $A^1 = \{A_k, A_s\}$. Када је $A^r = \{A_v\}$, број оптималних решења износи: r за f_1 , $r-1$ за f_2 , $3-2$ за f_3 , ..., два решења за f_{r-1} и једно решење за f_r .

6.3) Методе са адитивним тежинама критеријума

Две методе са информацијама о атрибутима које су главне (кардиналне) информације (група 2 у таксономији метода, подгрупа 2.3) користе адитивне тежине атрибута и захтевају нормализацију или линеаризацију атрибута. Методе одређују ВКРЛ проблема (ii) на основу опадајућих вредности $r_i, i \in I$. Потребне информације о критеријумима f_j односе се на њихове тежине $w_j, j \in J$, које морају бити нормализоване.¹¹⁸

♦ **Метода једноставних адитивних тежина** примењује векторску нормализацију атрибута (65) и одређује најбољу алтернативу према правилу:

$$A^* = \{A_k \mid r_k = \max_i (r_i = \sum_j w_j r_{ij})\} \quad (77)$$

♦ **Метода хијерархијских адитивних тежина (упрошћена варијанта)** разликује се од претходне методе у делу трансформације атрибута. Уместо векторске нормализације (65) врши се трансформација (78). Уочава се сличност (78) са линеарном трансформацијом (66.1). Наиме, (66.1) одређује трансформисане вредности l_{ij} дељењем a_{ij} посматраног f_j са његовим идеалом $f_j^* = a_j^{\max}$, док (78) одређује вредности v_{ij} критеријума f_j дељењем a_{ij} са сумом свих $a_{ij}, i \in I, j \in J$.

$$v_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{\sum_i a_{ij}}, & i \in I, j \in J^{\max} \subseteq J \quad (\text{ako } \max f_j) \\ 1 - \frac{a_{ij}}{\sum_i a_{ij}}, & i \in I, j \in J^{\min} \subseteq J \quad (\text{ako } \min f_j \Rightarrow \max f_j) \end{cases} \quad (78)$$

Напомена 9. Трансформације (78) користи *Distributive Mode* методе АНР.

¹¹⁸ ibid. Nikolić, I., Borović, S., 1996., str. 3-66 do 3-71, 3-72.

в) Метода Аналитичких хијерархијских процеса (АХП)

Методу АХП (*The Analytic Hierarchy Process, AHP*) развио је Сати (Saaty) 1980. године.¹¹⁹ У наредних неколико година реномирани аутори из САД истичу позитивне аспекте и ефикасност ове методе.^{120, 121, 122} Увођењем теорије фази скирова развијена је метода ФАХП (*The Fuzzy Analytic Hierarchy Process, FAHP*), која није предмет истраживања у овој дисертацији.¹

Након појаве лако доступних ПЦ-а и софтвера *Expert Choice* за АХП (на значај методе указује оснивање истоимене компанија *Expert Choice Inc.*), примена методе рапидно расте, посебно у САД и развијеним економијама Далеког Истока (у Европи су већу примену имале методе *ELECTRE* и *PROMETHEE*). Већ до 1995. год. *Expert Choice* се користио у 57 земаља широм света и многи аутори су имали више од 1000 радова о АХП у познатим часописима и на научним скуповима за области менаџмента и одлучивања.¹²³ Постоји међународно удружење за АХП (*International Society of the Analytic Hierarchy Process*), као и научни *on-line* часопис (*International Journal of the Analytic Hierarchy Process*, могу се преузети радови почев од 2009. год.). АХП су излагали домаћи аутори у књигама^{124, 125, 126} и радовима на домаћим и међународним научним конференцијама. За разлику од осталих метода за модел ВАО са n критеријума f_j и m алтернатива $A_i, i \in I, j \in J$, АХП уводи три нова аспекта (критеријуми и алтернативе се називају атрибутима):

- дефинисање више нивоа значајности за критеријуме/атрибуте, односно разматрање њихове хијерархијске структуре (слика 29)
- непосредно дефинисање значајности критеријума истог нивоа са одговарајућим тежинским коефицијентима или поређењем парова критеријума (свих парова, суседних парова или суседних и неких других парова)
- непосредно дефинисање вредности критеријума за алтернативе $a_{ij} = f_j(A_i), i \in I, j \in J$, што се чешће примењује у пракси, или поређење одређених или свих парова.

Дефиниција 30. Модел ВАО са више нивоа критеријума, у општем случају (слика 29) може се дефинисати параметрима из наставка.^{*)}

¹¹⁹ Saaty, T. L., *The Analytic Hierarchy Process*, New York, N.Y., McGraw Hill, 1980, reprinted by RWS Publications, Pittsburgh, 1996.

¹²⁰ Forman, E. H., "The Analytic Hierarchy Process as a Decision Support System," *Proceedings of the IEEE Computer Society* (Fall, 1983).

¹²¹ Forman, E. H., Saaty, T. L., Selly, M. A., Waldron, R., *Expert Choice, Decision Support Software*, McLean, VA, 1983.

¹²² Zahedi, F., "The Analytic Hierarchy Process - A Survey of the Method and its Applications", *Interfaces*, Vol. 16, 1986., pp. 96-108.

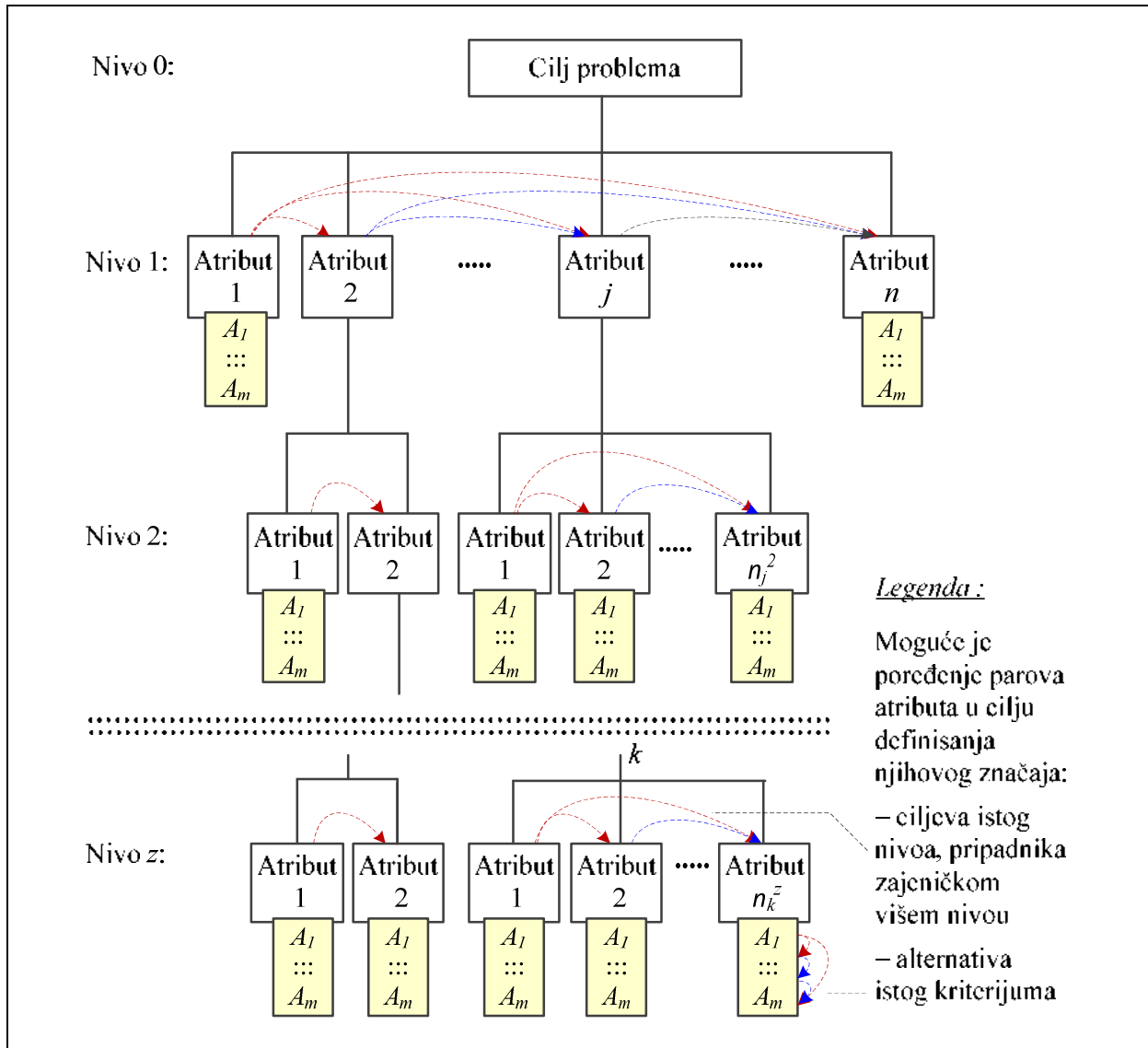
¹²³ Forman, E., Selly, M. A., *Decision By Objectives*, Expert Choice Inc., 1998.1

¹²⁴ Čupić, M. sa koautorima uključio je AHP u više udžbenika, na primer: Čupić i Tumala, 1991, Čupić i dr., 2001, Čupić i dr., 2004.

¹²⁵ ibid. Nikolić, I., Borović, S., 1996., str. 3-99., наводе да уз сагласност аутора преносе у целост опис методе АХП коју излажу М. Čupić и др., *Višekriterijumsko odlučivanje – Metode i primeri*, Univerzitet "Braća Karić", Beograd, 1995.

¹²⁶ ibid. Nikolić I., Božilović S., 2009, str. 239-269. (Примена софтвера *Expert Choice*, без излагања теорије)

^{*)} У литератури се модел ВАО и метода АХП уобичајено излажу са једним нивоом критеријума и тумачи коришћење на примерима (често само са вербалним описом поступка).



Слика 29. Хијерархијска структура проблема ВАО

| | |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| n, J, f_j, Z, K | – број критеријума на првом нивоу $k = 1$, скуп њихових индекса, ознаке критеријума, број нивоа критеријума и скуп индекса нивоа, $j \in J = \{1, \dots, n\}$, $k \in K = \{1, \dots, z\}$ |
| m, I, A_i | – број алтернатива, скуп њихових индекса и ознаке, $i \in I = \{1, \dots, m\}$ |
| q, Q, G_s | – број грана хијерхијског стабла критеријума, скуп индекса грана и њихове ознаке, $s \in Q = \{1, \dots, q\}$ |
| $n_s^{(k)}, k, K_s^{(k)}, f_{n_s^{(k)}}^{(k)}$ | – број чворова, односно број нивоа критеријума на грани G_s , индекс последњег нивоа на G_s , скуп индекса чворова на грани и ознака последњег критеријума, $v \in K_s^{(k)} = \{1, \dots, n_s^{(k)}\}$, $k \in K, s \in Q$ |
| $n_j^{(k)+}, N_j^{(k)}, f_j^{(k)}$ | – број грана G_s за наредни ниво k из чвора $C_j^{(k-1)}$ на нивоу $k > 1$ (број критеријума са подкритеријума, подесније је користити термин критеријуми за ниво k), скуп индекса грана (и критеријума) и ознака критеријума на нивоу $(k, j) \in N_j^{(k)} = \{1, \dots, n_j^{(k)+}\}$, $k \in K$ |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $p_j^{(k)}, w_j^{(k),L}, \underline{w}_j^{(k),L}, \underline{w}_j^{(k),G}$ | <ul style="list-style-type: none"> локални приоритети, нормализовани локални приоритети и нормализовани глобални приоритети или тежине за f_j на нивоу $k, j \in N_j^{(k)+}, k \in K$ |
| $a_{is}^{(k)} = f_{n_s^{(k)}}(A_i), \underline{W}_{is}^{(k)}$ | <ul style="list-style-type: none"> вредности за последњи чвор $n_s^{(k)}$, односно критеријум на грани G_s са алтернативама A_i и нормализовани приоритети за $A_i, i \in I, n_s^{(k)} \in K_s^{(k)}, k \in K, s \in Q$ |
| $P_{is}^{(k)}, \underline{W}_{is}^{(k)}$ | <ul style="list-style-type: none"> приоритети и нормализовани приоритети за A_i при поређењу парова алтернатива критеријуму $n_s^{(k)}$ на грани $G_s, i \in I, s = n_s^{(k)} \in K_s^{(k)}, k \in K$ |
| $P_{ij}^{(k)}, \underline{W}_{ij}^{(k)}$ | <ul style="list-style-type: none"> нормализовани приоритети алтернатива A_i за чвор $C_j^{(k-1)}$ са гранањем и критеријуме $f_j^{(k)}$ на нивоу $k, i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K$ |
| P_i, \underline{W}_i | <ul style="list-style-type: none"> приоритети и нормализовани приоритети алтернатива A_i на нивоу проблема, $i \in I$ |

Излаже се процес оригиналне методе АХП применом софтвера *Expert Choice* (метода има одговарајуће предности, аили и извесна ограничења¹²⁷). Примери решавани овим софтвером, без тумачења теорије, приказани су у литератури.¹²⁸ Такође је детаљно описано коришћене софтвера.¹²⁹

в.1) Решавање проблема ВАО и предности методе АХП

Процес решавања модела ВАО започиње структурирањем проблема, односно дефинисањем модела проблема и завршава са анализом осетљивости решења.

1) Структурирање или моделирање проблема (*Problem modelling*)

- циљ проблема (највиши ниво)
- хијерархиска поставка критеријума у облику тзв. стабла критеријума са чворовима за сваки ниво (критеријум, подкритеријум, под-подкритеријум итд.)
- алтернативе за најниже критеријуме на крају сваке гране стабла.

Напомена 10. Различито структурирање проблема може да има за резултат различита решења, вишекритеријумску ранг листу алтернатива. Зато је структурирање проблема један од најбитнијих аспеката решавања модела.

Напред је приказана матрица A са вредностима m алтернатива A_i за n критеријума f_j модела ВАО са једним нивоом критеријума, $i \in I, j \in J$ (24), која се уобичајено задаје табеларно (табела 15). Такође је илустровано превођење модела са $p = 3$ нивоа критеријума са матрицом њихових вредности за алтернативе (табела 16.1) у модел са једним нивоом критеријума (табела 16.2). Овде дефинисани модел са $z > 1$ нивоа критеријума захтева да се дефинишу потребни параметри и софтвер врши њихову нормализацију:

¹²⁷ Alessio, I., Ashraf, L. [Preprint version] Analytic Hierachy Process and Expert Choice: Benefits and Limitations, *ORInsight*, 22(4), 2009., p. 201-220.

¹²⁸ ibid. Nikolić, I., Božilović S., 2009, str. 239-269. (Primena softvera *Expert Choice*, bez izlaganja teorije)

¹²⁹ ibid. Nikolić, I., 2012, str. 320-404.

- приоритети критеријума на сваком нивоу
- вредности алтернатива за критеријуме у последњем чвору сваке гране стабла.

Наведена два параметра могу се дефинисати комбинаовањем два приступа:

- а) непосредно дефинисање параметара
- б) оцењивање параметара поређењем парова атрибута (критеријума, алтернатива).

2) **Поређење парова** (*Pairwise comaration*), врши се првенствено за критеријуме на истом нивоу. Алтернативама се, као што је у уводном делу дефинисано, уобичајено задају нумеричке вредности за одговарајуће критеријуме или вербалне оцене које треба квантификовати применом линеарне скале (слика 28).

3) **Оцењивање**, односно дефинисање значајности (*Judgement scales*) критеријума на сваком нивоу и алтернатива за одговарајуће критеријуме комбиновањем поступака:

- нумерички
- вербално применом тзв. “скале 9 тачака” (табела 18), своди се на бројне вредности
- графички, своди се на бројне вредности.

Табела 18. *Saaty*-јева скала 9 тачака за методу АХП и софтвер *Expert Choice*

| Скала | Објашњење / Рангирање | Напомене |
|-------|--------------------------------------------------------|----------------------------------|
| 9 | Апсолутно најзначајније / најпожељније | Упутство за <i>Expert Choice</i> |
| 8 | Веома снажно ка апсолутно најзначајније / најпожељније | |
| 7 | Веома снажно значајно / пожељно | |
| 6 | Снажно ка веома снажно значајно / пожељно | |
| 5 | Снажније више значајно / пожељно | |
| 4 | Слабије ка снажније више значајно / пожељно | |
| 3 | Слабије више значајно / пожељно | |
| 2 | Подједнако ка слабије висе значајно / пожељно | |
| 1 | Подједнако значајно / пожељно | |
| 0,50 | Подједнако ка слабије мање значајно / пожељно | Ако се примењују ручни поступци |
| 0,33 | Слабије мање значајно / пожељно | |
| 0,25 | Слабије ка снажно мање значајно / пожељно | |
| 0,20 | Снажно мање значајно / пожељно | |
| 0,17 | Снажно ка веома снажно мање значајно / пожељно | |
| 0,14 | Изузетно снажно мање значајно / пожељно | |
| 0,13 | Веома снажно ка апсолутно мање значајно / пожељно | |
| 0,11 | Апсолутно најмање значајно / пожељно | |

4) **Одређивање/прорачун приоритета (Priorities derivation)** на основу задатих вредности или матрице поређења критеријума, односно алтернатива.

4.1) **Приоритети критеријума $f_j^{(k)}$** одређују се на нивоу проблема са n критеријума и сваком нивоу (k) са $n_j^{(k)+}$ критеријума када настаје гранање стабла (слика 30).

4.1.a) **Непосредно дефинисање приоритета**
за $r = n_j^{(k)+}$ критеријума $f_j^{(k)}$

$$\begin{matrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ \vdots \\ f_r^{(k)} \end{matrix} \begin{bmatrix} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \\ \vdots \\ w_r^{(k)} \end{bmatrix}, \quad j \in N_j^{(k)}, k \in K \quad (79.1)$$

$$Sf^{(k)} = \sum_{j \in N_j^k} w_j^{(k)}, \quad k \in K \quad (79.2)$$

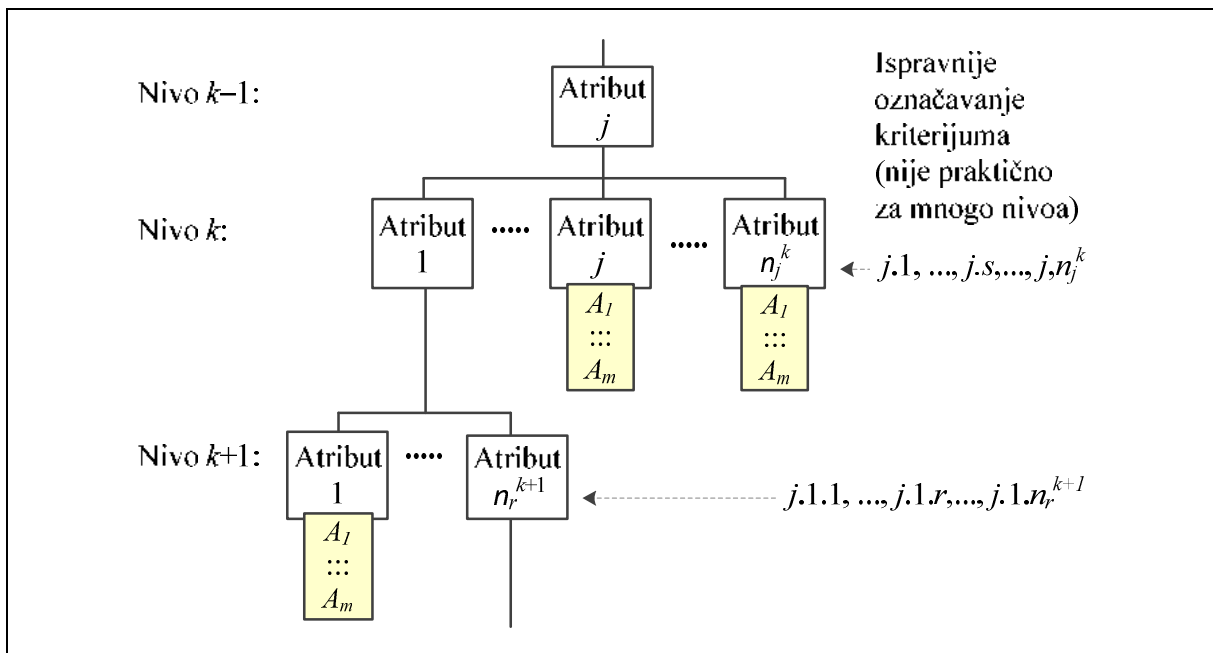
$$\underline{w}_j^{(k),L} = \underline{w}_j^{(k)} = w_j^{(k)} / Sf^{(k)}, \quad j \in N_j^{(k)}, k \in K \quad (79.3)$$

где:

$w_j^{(k)}$ – локални приоритети, тежине критеријума $f_j^{(k)}$, $j \in N_j^{(k)}$, $k \in K$

$Sf^{(k)}$ – сума вредности $w_j^{(k)}$, $j \in N_j^{(k)}$, $k \in K$

$\underline{w}_j^{(k),L}$ – нормализовани локални приоритети за $f_j^{(k)}$, $j \in N_j^{(k)}$, $k \in K$



Слика 30. Део хијерархијског стабла критеријума модела ВАО

4.1.б) Коришћење матрице поређења свих парова
за $r = n_j^{(k)+}$ критеријума $f_j^{(k)}$

$$\begin{matrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ \vdots \\ f_r^{(k)} \end{matrix} \begin{matrix} f_j^{(k-1)} \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ \dots \\ f_r^{(k)} \end{matrix} \begin{bmatrix} p_1^{(k)} / p_1^{(k)} & p_1^{(k)} / p_2^{(k)} & \dots & p_1^{(k)} / p_r^{(k)} \\ p_2^{(k)} / p_1^{(k)} & p_2^{(k)} / p_2^{(k)} & \dots & p_{2k} / p_r^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_r^{(k)} / p_1^{(k)} & p_r^{(k)} / p_2^{(k)} & \dots & p_r^{(k)} / p_r^{(k)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Sf_1^{(k)} \\ Sf_2^{(k)} \\ \dots \\ Sf_r^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in K \quad (80.1)$$

$$Sf_j^{(k)} = \sum_{j \in N_j^{(k)}} p_j^{(k)}, \quad k \in K \quad (80.2)$$

$$\underline{w}_j^{(k),L} = \underline{w}_j^{(k)} = w_j^{(k)} / Sf_j^{(k)}, \quad j \in N_j^{(k)}, \quad k \in K \quad (80.3)$$

где:

$p_j^{(k)} = p_{j_1}^{(k)} / p_{j_2}^{(k)}$ – локални приоритети за $f_j^{(k)}$, $(j, j_1, j_2) \in N_j^{(k)}$, $k \in K$

$Sf_j^{(k)}$ – сума локалних приоритета $p_j^{(k)}$, $j \in N_j^{(k)}$, $k \in K$

$\underline{w}_j^{(k),L}$ – нормализовани локални приоритети за $f_j^{(k)}$, $j \in N_j^{(k)}$, $k \in K$

- Овим поступком се формулишу тзв. *проблем и метод сопствених вредности (Eigenvalue Method)*. Израчунати приоритети су тачни за конзистентну матрицу поређења. Сагласно теореме пертурбације, за мању неконзистентност приоритети би требало да се разликују само незнатно.¹³⁰

Напомена 11. Очигледно је да елементи на главној дијагонали, при поређењу критеријума са самим собом, имају вредност 1 (80.4). Зато је потребно дефинисати само део матрице изнад главне дијагонале (85.5), а њихове реципрочне вредности (80.6) су елементи испод главне дијагонале.

$$\left(f_j^{(k)}, f_j^{(k)} \right) \rightarrow \frac{P_{jk}}{P_{jk}} = 1, \quad j = 1, \dots, n_j^{(k)+}, \quad k \in K \quad (80.4)$$

$$\left(f_{j_1}^{(k)}, f_{j_2}^{(k)} \right) \rightarrow \frac{P_{j_1 k}}{P_{j_2 k}}, \quad j_1 = 1, \dots, n_j^{(k)+}, j_2 = j_1 + 1, \dots, n_j^{(k)+}, \quad k \in K \quad (80.5)$$

$$\left(f_{j_2}^{(k)}, f_{j_1}^{(k)} \right) \rightarrow \frac{P_{j_2 k}}{P_{j_1 k}} = \frac{1}{\frac{P_{j_1 k}}{P_{j_2 k}}}, \quad j_2 = 1, \dots, n_j^{(k)+} - 1, j_1 = j_2 + 1, \dots, n_j^{(k)+}, \quad k \in K \quad (80.6)$$

¹³⁰ Saaty, T., “Decision-making with the AHP: Why is the Principal Eigenvector necessary?”, *European Journal of Operational Research* 145(1): 89-91, 2003.

4.2) **Приоритети алтернатива** A_i за последњи критеријум гране $G_s, i \in I, s \in Q$

4.2.а) **Непосредно дефинисање вредности критеријума за алтернативе**

$$A_i \begin{bmatrix} f_{n_s^{(k)}} \\ a_{1s}^{(k)} \\ a_{2s}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{ms}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q \quad (81.1)$$

$$Sa_s^{(k)} = \sum_{i \in I} a_{is}^{(k)}, \quad s = n_s^{(k)} \quad (81.2)$$

$$\underline{w}_{is}^{(k)} = a_{is}^{(k)} / Sa_s^{(k)}, \quad s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q \quad (81.3)$$

где:

$a_{is}^{(k)} = f_{n_s^{(k)}}(A_i)$ – вредности $f_{n_s^{(k)}}$ са $A_i, i \in I, s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q$

$Sa_s^{(k)}$ – сума $a_{is}^{(k)}, i \in I, s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q$

$\underline{w}_{is}^{(k)}$ – нормализовани приоритети за $A_i, i \in I, s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q$

4.2.б) **Коришћење матрице поређења свих парова алтернатива посматраног критеријума**

$$A_i \begin{bmatrix} f_{n_s^{(k)}} \\ ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix} \rightarrow A_i \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_{1s}^{(k)} / p_{1s}^{(k)} & p_{1s}^{(k)} / p_{2s}^{(k)} & \dots & p_{1s}^{(k)} / p_{ms}^{(k)} \\ p_{2s}^{(k)} / p_{1s}^{(k)} & p_{2s}^{(k)} / p_{2s}^{(k)} & \dots & p_{2s}^{(k)} / p_{ms}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{ms}^{(k)} / p_{1s}^{(k)} & p_{ms}^{(k)} / p_{2s}^{(k)} & \dots & p_{ms}^{(k)} / p_{ms}^{(k)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Sa_{1s}^{(k)} \\ Sa_{2s}^{(k)} \\ \dots \\ Sa_{ms}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q \quad (82.1)$$

$$Sa_{is}^{(k)} = \sum_{i \in I} p_{is}^{(k)}, \quad k \in K \quad (82.2)$$

$$\underline{w}_{is}^{(k)} = p_{is}^{(k)} / Sa_{is}^{(k)}, \quad s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q \quad (82.3)$$

где:

$p_{is}^{(k)} = p_{i_1s}^{(k)} / p_{i_2s}^{(k)}$ – приоритети за $A_i, (i, i_1, i_2) \in I, s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q$

$Sa_{is}^{(k)}$ – сума приоритета за $A_i, i \in I, s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q$

$\underline{w}_{is}^{(k)}$ – нормализовани приоритети за $A_i, i \in I, s = n_s^{(k)} \in N_s^{(k)}, k \in K, s \in Q$

Став 16. У општем случају, проблем може имати наредне три варијанте критеријума:

- критеријуме само са карактеристикама (81.1) или (82.1) за све алтернативе,
- неке критеријуме са карактеристикама (81.1) и преостале са карактеристикама (82.1),

- в) свим или само неким критеријумима познате су вредности (81.1) за њихове подскупове алтернатива и непознате вредности (82.1) за преостале алтернативе.

Напомена 12. Очигледно произилази да је неопходно поређење парова алтернатива (80.1) само када оне немају познате вредности за критеријуме.^{*)}

5) Конзистентност/усаглашеност оцена (Consistency)

Приоритети имају смисла само ако се користе конзистентне матрице поређења (критеријума, алтернатива) или су њихове вредности близу конзистентности. Зато је неопходно вршити проверу конзистентности. Saaty је предложио да се користе два параметра конзистентности атрибута:

- индекс конзистентности CI , и
- однос конзистентности CP ¹³¹

$$\begin{cases} CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} \\ CP = \frac{CI}{RI} \end{cases} \quad (83.1)$$

где:

- λ_{\max} – максимална сопствена вредност
 RI – случајни индекс, просечна вредност CI од 500 насумично попуњених матрица (табела 19)

Ако је испуњено (83.2), сматра се да посматрана матрица поређења има прихватљиву конзистентност:

$$CP < 10\% \quad (83.2)$$

Напомена 13. Уместо наведених случајних индекса RI (табела 19)¹³², други аутори разматрају различите вредности^{133, 134, 135} или неконплетне матрице¹³⁶. Њихови случајни индекси су различити, али близу вредностима које предлаже Saaty.

Tabela 19. Slučani indeksi RI, Saaty (1997)

| n | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| RI | 0,58 | 0,90 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,41 | 1,45 | 1,49 |

*) У домаћој литератури може се наћи *непотребно поређење свих парова алтернатива* (82.1) и за случај (а) са познатим вредностима алтернатива (81.1). Изоставља се *неопходно поређење* (81.1) и (82.1), те се поставља питање *сврхе полазног дефинисања вредности свих алтернатива* ако се даље врши поређење њихових парова.

¹³¹ Saaty, T., "A scaling method for priorities in hierarchical structures", *Journal of mathematical psychology* 15 (3): 234-281, 1997.

¹³² ибид. Saaty, T., 1977.

¹³³ Lane, E. and W. Werdini, "A Consistency Test for AHP Decision Makers". *Decision Sciences* 20 (3): 575-590., 1989.

¹³⁴ Tummala, V. And Y. Wan i Wan „One the Mean Random Inconsistency Indes of the Analitic Hierarchy Process (AHP)“, *Computers & Industrial Engineering* 27(1-4):401-404, 1994.

¹³⁵ Allonso, J. and T. Lamata, "Consistency in the Analitic Hierarchy Process: a New Approach", *International Journal of Uncertainty, Fuyyiness and Kovledge-Based Systems* 14(4): 445-459., 2006.

¹³⁶ Forman, E.. "Random Indices for Incomplete Paiwise Comparison Matrices", *European Journal of Operational Research* 48(1): 153-155., 1990.

б) Агрегација/синтетизација параметара атрибута (*Aggregation*)

Последњи корак методе *АХП* састоји се у прорачуну глобалних приоритета на основу локалних приоритета посматрајући одговарајуће чворове, односно критеријуме на стаблу модела (слика 30).

- У цитираној литератури¹³⁷ се приказује само агрегација приоритета алтернатива, односно прорачун глобалних приоритета алтернатива на основу њихових локалних приоритета и приоритета критеријума коме припадају, пошто се (као и код многих других аутора^{138, 139, 140}) разматра и илуструје модел *ВАО* са једним нивоом критеријума ($z = 1$).
- Када модел има више нивоа критеријума ($z > 1$) потребно је прво прорачунати глобалне приоритете критеријума нижих нивоа и затим такве приоритете критеријума користити за прорачун глобалних приоритета алтернатива.

6.1) Прорачун глобалних приоритета (под)критеријума нижих нивоа

Глобални приоритети $\underline{w}_j^{(k),G}$ критеријума $f_j^{(k)}$ (тзв. *деце - children*) на одговарајућем нивоу ($\kappa > 1$), као (под)критеријуми *заједничког критеријума* (тзв. *родитеља - parents*) $f_j^{(k-1)}$ на вишем нивоу ($\kappa-1$), прорачунавају се множењем њихових нормализованих приоритета $\underline{w}_j^{(k),L}$ који су одређени применом (71.3) или (72.3), са (аналогним поступцима) раније утврђеним глобалним приоритетом $\underline{w}_j^{(k-1),G}$ *заједничког критеријума* $f_j^{(k-1)}$. Полази се од највишег нивоа (проблема) са $\underline{w}_j^{(k),G} = \underline{w}_j^{(k),G}$.

$$\begin{cases} \underline{w}_j^{(1),G} = \underline{w}_j^{(1),L} & k=1, j=1,2,\dots,n \\ \underline{w}_j^{(k),G} = \underline{w}_j^{(k),L} \cdot \underline{w}_j^{(k-1),G}, & k>1, j=1,2,\dots,n_j^{(k)+} \end{cases} \quad (84)$$

6.2) Прорачун глобалних приоритета алтернатива критеријума виших нивоа

Критеријуму $f_j^{(k-1)}$ потребно је одредити глобалне приоритете алтернатива на основу локалних приоритета алтернатива за његове подкритеријуме $f_j^{(k)}$ и локалних приоритета тих подкритеријума $f_j^{(k)}$. Могу да се примене два начина нормализације глобалних приоритет алтернатива:

- 1) дистрибутивни мод или
- 2) идеални мод.

◆ Приступ назван *дистрибутивни мод* или начин (*distributive mode*), усваја адитивну агрегацију, тј. Нормализацију са сумом глобалних приоритета изведених из локалних приоритета. У суштини, врши се вишеструка нормализација.

$$w_{ij}^{(k),G} = \underline{w}_{ij}^{(k),L} \cdot \underline{w}_j^{(k),L}, \quad i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K \quad (85.1)$$

¹³⁷ ibid. Alessio, I., Ashraf, L., 2009., str. 207.

¹³⁸ ibid. Čupić, M., i Rao Tummala, V. M., 1991.

¹³⁹ ibid. Čupić, M. i dr., 2001.

¹⁴⁰ ibid. Čupić, M. i dr., 2004.

$$S_1 a_j^{(k),G} = \sum_{i \in I} w_{ij}^{(k),G}, \quad j \in N_j^{(k)}, k \in K \quad (85.2)$$

$$\underline{w}_{ij}^{(k),G} = w_{ij}^{(k),G} / S_1 a_j^{(k)}, \quad i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K \quad (85.3)$$

$$S_2 a_i^{(k),G} = \sum_{j \in N_j^{(k)}} \underline{w}_{ij}^{(k),G}, \quad i \in I, k \in K \quad (85.4)$$

$$\underline{\underline{w}}_{ij}^{(k-1),G} = \underline{w}_{ij}^{(k),G} / S_2 a_j^{(k),G}, \quad i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K, k > 1 \quad (85.5)$$

$$\begin{cases} \underline{w}_{ij}^{(1),G} = w_{ij}^{(1),G} \underline{w}_j^{(k),L} / \left(\sum_{i \in I} w_{ij}^{(1),G} \underline{w}_j^{(k),L} \right), & i \in I, j \in N_j^{(1)} \\ \underline{\underline{w}}_i^{(0),G} = \sum_{j \in N_j^{(1)}} \underline{w}_{ij}^{(1),G} / \left(\sum_{j \in N_j^{(1)}} \underline{w}_{ij}^{(1),G} \underline{w}_j^{(k),L} \right), & i \in I \end{cases} \quad (85.6)$$

где:

| | |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w_{ij}^{(k),G}, \underline{w}_{ij}^{(k),L}$ | – глобални и нормализовани приоритет код A_i за $f_j, i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K$ |
| $\underline{w}_j^{(k),L}$ | – глобални и нормализовани приоритет за $f_j, j \in N_j^{(k)}, k \in K$ |
| $S_1 a_{is}^{(k),G}$ | – сума глобалних приоритета $w_{ij}^{(k),G}, i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K$ |
| $\underline{w}_{ij}^{(k),G}$ | – нормализовани глобални приоритет A_i за $f_j, i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K$ |
| $S_2 a_{is}^{(k),G}$ | – сума нормализованих приоритета $\underline{w}_{ij}^{(k),G}, i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K$ |
| $\underline{\underline{w}}_{ij}^{(k-1),G}$ | – глобални и нормализовани приоритет A_i за $f_j, i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K, k > 1$ |
| $w_i = \underline{\underline{w}}_i^{(0),G}$ | – глобални и нормализовани приоритет A_i на нивоу проблема, $i \in I$ |

♦ **Идеални мод** (*ideal mode*) користи трансформацију глобалних приоритета дељењем са максимумом (идеална вредност) критеријума. На основу $w_{ij}^{(k),G}$ из (85.1) одређују се елементи (86.1)-(86.3) за нивое критеријума ($k > 0$).

$$f_j^{(k)*} = w_j^{(k),G+} = \max_i w_{ij}^{(k),G}, \quad j \in N_j^{(k)}, k \in K \quad (86.1)$$

$$\underline{w}_{ij}^{(k),G} = w_{ij}^{(k),G} / f_j^{(k)*}, \quad i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K \quad (86.2)$$

$$\underline{f}_j^{(k)*} = \underline{w}_j^{(k),G+} = \max_i \underline{w}_{ij}^{(k),G}, \quad j \in N_j^{(k)}, k \in K \quad (86.3)$$

$$\underline{\underline{w}}_{ij}^{(k-1),G} = \underline{w}_{ij}^{(k),G} / \underline{f}_j^{(k)*}, \quad i \in I, j \in N_j^{(k)}, k \in K \quad (86.4)$$

где:

$f_j^{(k)*}, \underline{f}_j^{(k)*}$ најбоља и нормализована најбоља вредност за $f_j, j \in N_j^{(k)}, k \in K$

Напомена 14. У литератури разматрано је када је потребно користити *дистрибутивни мод* и када *идеални мод*, што се може исказати са наредна три става. Како се у другом користе појмови „познати приоритети“ и „изостављање приоритета“ или „блиских вредности приоритета“, а у четвортном „затворени и отворени систем“, потребно је разумљивије исказати те ставове.

Наиме, уводи се нови аспект модела са становишта редукције матрице одлучивања у зависности од раније дефинисане врсте проблема *BAO*, (i) *избор најбоље алтернативе* и (ii) *рангирање свих алтернатива*:

- разматрају се све алтернативе, проблем (i) и проблем (ii)

- задржава се једна алтернатива и изостави њено понављање или изоставе алтернативе са блиским вредностима за критеријуме у односу на задржану алтернативу, проблем (ii).

Став 17. Није неопходно користити оба приступа за исти проблем ВАО (односно, није неопходно користити оба приступа за исти проблем ВАО ако се разматрају све алтернативе).

Став 18. Ако су приоритети познати, *дистрибутивни режим* је једини приступ који треба користити (односно, користити дистрибутивни мод ако се разматрају све алтернативе). Међутим, ако се изостави понављање приоритета¹⁴¹ или изоставе блиске вредности приоритета¹⁴² (односно изостави понављање алтернатива или алтернатива са блиским вредностима за критеријуме) може да настане замена ранга алтернатива.

- Ова појава је (у изузетно обимној размени аргумената, одговора и честих одговора на одговоре реномираних аутора), са једне стране *критикована*^{143, 144, 145, 146, 147} а са друге стране *оправдавана*.^{148, 149, 150, 151, 152, 153, 154}
- Истовремено је указано да феномен, односно проблем замена приоритета није карактеристичан само за АХП, већ за све адитивне моделе.^{155, 156}

Став 19. Услед изостанка опште сагласности у наведеним ставовима, дате су одређене смернице за нормализацију, односно трансформацију атрибута (које су уграђене у *Expert Choice*).¹⁵⁷

¹⁴¹ Belton, V. and A. Gear (1983). "On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytical Hierarchies", *OMEGA* 11(3): 208-230.

¹⁴² Troutt, M. (1998). „Rank Reversal and the Dependence of Priorities on the Underlying MAV Function“, *OMEGA* 16(4): 365-367.

¹⁴³ Dayer, J. (1990). "Remarks on the Analytic Hierarchy Process", *Management Science* 36(3): 249-258

¹⁴⁴ Dayer, J. (1990). "A clarification of "Remarks on the Analytic Hierarchy Process", *Management Science* 36(3): 274-275.

¹⁴⁵ Holder, R. (1990). "Some Comment on the Analytic Hierarchy Process", *Journal of the Operational Research Society* 41(11): 1073-1076.

¹⁴⁶ Holder, R. (1991). "Response to Holder's Comments on the Analytic Hierarchy Process: Response to the Response", *Journal of the Operational Research Society* 42(10): 914-918.

¹⁴⁷ Stam, A. and P. Duarte Silva (2003). "On Multiplicative Priority Rating Methods for AHP", *European Journal of Operational Research* 145(1): 92-108

¹⁴⁸ Saaty, T. (1986). "Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process", *Management Science* 32(7): 841-855.

¹⁴⁹ Harker, P. and L. Vargas (1987). "The Theory of Ratio Scale Estimation: Saaty's Analytic Hierarchy Process", *Management Science* 33(11): 1383-1403.

¹⁵⁰ Harker, P. and L. Vargas (1990). "Reply to "Remarks on the Analytic Hierarchy Process", *Management Science* 36(3): 269-273.

¹⁵¹ Saaty, T. (1990). "An Exposition of the AHP in Reply to the Paper "Remarks on the Analytic Hierarchy Process".", *Management Science* 36(3): 259-268.

¹⁵² Saaty, T. (1994). "Highlights and critical points in the theory and application of the Analytic Hierarchy Process", *European Journal of Operational Research* 74(3): 426-447.

¹⁵³ Peres, J. (1995). „Some comments on Saaty's AHP“, *Management Science* 41(6): 1091-1095.

¹⁵⁴ Saaty, T. (2006). "Rank from Comparisons and from Ratings in the Analytic Hierarchy/Network Processes", *European Journal of Operational Research* 168(2): 557-570.

¹⁵⁵ Triantaphyllou, E. (2001). "Two new cases of rank reversals when the AHP and some of its additive variants are used that do not occur with the Multiplicative AHP", *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 10(1): 11-25.

¹⁵⁶ Wang, Y. and Y. Luo (2009). "On Rank Reversal in Decision Analysis", *Mathematical and Computer Modelling* 49(5-6): 1221-1229.

¹⁵⁷ Millet, I. and T. Saaty (2000). "On the Reality of Relative Measures-Accommodating both Rank Preservation and Rank Reversals in the AHP", *European Journal of Operational Research* 121(1): 205-212.

- Ако се разматра затворени систем (нема алтернативе које се додају или изостављају), онда треба користити *дистрибутивни мод*.
- У случају отвореног система (има додатих или изостављених алтернатива), постоје две варијанте са аспекта утицаја додатих / изостављених алтернатива:
 - ако се *не жели* да оне утичу на исход, користити *дистрибутивни мод*
 - ако се *дозвољава* да оне утучу на исход, потребан је *идеални мод*.

7) Решење модела ВАО и решења подмодела нижих нивоа критеријума

Решење модела ВАО исказује се приоритетима алтернатива. Уобичајено се формира вишекритеријумска ранг-листа алтернатива уређена опадајућим редоследом њихових приоритета као ранг-местима на тој листи (ранг 1 има алтернатива са највећим приоритетом). При томе се посматра:

- ниво пројекта у датом моделу ВАО, приоритети алтернатива су одређени са (69.6)
- било који ниво критеријума, као подмодел проблема ВАО, приоритети алтернатива су одређени са (69.5) или (70.5) у зависности да ли се користи дистрибутивни или идеални мод.

8) Анализа осетљивости решењаи (Sensitivity analysis)

Последњи корак процеса одлучивања јесте анализа осетљивости решења. Омогућава се промена *полазних података* (приоритета критеријума на разматраном нивоу) у циљу *да се утврде последице по решење*. Уколико не наступи значајнија промена приоритета алтернатива, проблем има стабилно решење.

8.1) Анализа осетљивости перформанси (Performance Sensitivity analysis)

Овај облик анализе одређује релативни однос приоритета алтернатива, узимајући у обзир све критеријуме на разматраном нивоу. Промена приоритета једног критеријума одражава се на приоритете осталих критеријума и ранг-листу (приоритете) алтернатива. Овај облик анализе се најјасније уочава на графику динамичке и градијентне анализе.

- Зато је подесније вршити динамичку или градијентну анализу и пратити настале промене на графику анализе перформанси (приказати график перформанси упоредо са осталим).

8.2) Динамичка анализа осетљивости (Dinamic Sensitivity analysis)

Омогућава се динамичка анализа приоритета одабраног критеријума на одговарајућем нивоу (увећавање или умањење) и прате настале последице:

- промена тежина осталих критеријума
- промена приоритета алтернатива

8.3) Градијентна анализа осетљивости (Gradient Sensitivity analysis)

Врши се избор критеријума за анализу, промени се његов приоритет и прате настале последице за приоритете осталих критеријума и приоритете алтернатива.

8.4) Анализа осетљивости поређењем парова алтернатива (*Head to Head Sensitivity*)

Пореде се (међусобно) две алтернативе у односу на критеријуме проблема или одабране подкритеријуме на нижим нивоима хијерархијског стабла критеријума. Прате се њихови односи и приоритети за полазно решење и извршене промене параметара са неким другим обликом анализе.

8.5) Дво–димензионална анализа осетљивости (*2D – Two Dimensional Sensitivity analysis*)

Дво-димензионални график омогућава међусобно поређење у односу на одабрана (било која) два критеријума истовремено, на нивоу проблема или неком нижем нивоу. График је подељен на четири квадранта са критеримима на хоризонталној и вертикалној оси.

- Најповољније алтернативе приказују се у горњем десном квадранту графика.
- Када алтернативе припадају осталим квадрантима, веће су њихове преференције у односу на посматране критеријуме.

Став 20. Дата је препорука да се користе прва три облика анализе са циљевима:^{158, 159}

- да се одреде интервали промена приоритета критеријума који задржавају одговарајуће приоритете алтернатива
- да се одреде приоритети критеријума на границама појединих интервала који обезбеђују истоветне приоритете за одговарајуће алтернативе.

9) Параметарска анализа модела (*Sensitivity analysis of the model*)

По аналогiji са анализом осетљивости решења проблема *ЛП* и *ВКЛП* и параметарском анализом модела применом посебних поступака, за проблем *ВАО* може се истим облицима анализе 8.1) до 8.5) вршити:

- анализа осетљивости решења 8) за вредности приоритета критеријума које не мењају решење, односно задржавају најповољнију алтернативу
- параметарска анализа моделела 9) за све допустиве вредности приоритета критеријума када се одређују одговарајући редоследи алтернатива (излаже се на примеру избора једног извођача пројекта у делу 4.2).

в.2) Нека ограничења оригиналне методе АХП

Многи аутори су указали на ограничења свих корака оригиналне методе *АХП*, од структуре проблема до анализе осетљивости решења (66 цитата у референци¹⁶⁰, близу 30 година од настанка методе).

- Овде се не разматрају ограничења *АХП*, сматрајући да се истражени проблеми у станоградњи могу успешно решавати оригиналном методом, односно применом софтвера *Expert Choice*.

¹⁵⁸ ibid. Nikolić I., Božilović S., 2009, str. 239-269. (Примена софтвера *Expert Choice*, без излагања теорије)

¹⁵⁹ ibid. Nikolić, I., 2012, str. 4-26 do 4-51. (Приказани су сви облици анализе са софтвером *Expert Choice*)

¹⁶⁰ ibid. Alessio, I., Ashraf, L., 2009., str. 208-213.

4.

**КЛАСИФИКАЦИЈА ПРОБЛЕМА
ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ВИШЕ
ИЗВОЂАЧА ПРОЈЕКТА,
ОПШТИ МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ
ВК–МЦЛП
И АЛГОРИТМИ РЕШАВАЊА**

Проблем оптималног избора извођача пројекта је познат проблем у литератури. Постављају се две врсте проблема разматрајући потенцијалне извођаче пројекта:

- оптимални избор једног извођача за пројекат у целости, и
- оптимални избор више извођача и додела сваком извођачу одговарајућег дела пројекта.

Проблем оптималног избора једног извођача пројекта

Када се пројекат додељује једном извођачу (који може да бира своје подизвођаче независно од власника пројекта, односно инвеститора), избор најповољнијег из скупа потенцијалних извођача може да се врши са становишта постављених циљева на пројекту, као што су: трајање, трошкови, динамика плаћања изведених радова, и др. У ту сврху могу се користити модели вишеатрибутивног одлучивања (ВАО)^{161, 162}, што се детаљно приказује у делу 5.2 на конкретном пројекту станоградње.

Проблем оптималног избора више извођача пројекта

У пракси су чешћи случајеви да се из скупа потенцијалних извођача врши избор више извођача и сваком се додељују одговарајући радови, односно делови пројекта. Истраживања на великом скупу сложених пројеката указују на већу ефикасност ако се ангажује више извођача који су директно одговорни за извођење њихових делова пројекта, него када пројекат додељује једном извођачу који одговара за пројекат (ако ангажује подизвођаче, они су њему одговорни). Закон о јавним набавкама дефинише када инвеститор расписује тендер и које услов еможе да постави за учеснике. Начини спровођења тендера изложени су у литератури без примене математичких модела оптимизације (Суђић, С., 2012, стр. 24-33). У аналитичком приступу, циљеви пројекта наведени за избор једног извођача пројекта у целости могу да се поставе и за избор више извођача. При томе, и извођачи могу да искажу своје циљеве, односно захтеве (са становишта рокова, укупних вредности њихових радова и др.).

У домаћој литератури је изложена оптимизација циљева пројекта и прорачун трошкова извођача (без увођења у критеријуме): Nikolić I. 1994 (Sym-Op-Is 2014), Nikolić I. i Božilović S. 1995, Ilić M. i Nikolić I. 1995, Nikolić I. i Borović S. 1996 (str. 4-181 do 4-200), Nikolić I. i Božilović S. 2009 (str. 195-235).

Разматрање циљева пројекта и извођача код нас иницирали су Nikolić I. и Drobñjaković S. 2013 (фиксни параметри активности, планира се један пројекат и истовремено три пројекта који конкуришу за заједничке ресурсе). У доступним радовима страних аутора није излаган такав вид оптимизације. Затим су спорадично разматрани одређени проблем избора извођача: Николић И., Божиловић З. и др. (ICDQM 2013, Sym-Op-Is 2013 и SPIN 2013), Божиловић З. и др. (YuInfo 2014, Yurpa 2014, Sym-Op-Is 2014).

Овде се даје поставка и општа класификација проблема избора више извођача на пројекту у зависности од карактеристика елемената пројекта (табела 20), као

¹⁶¹ Nikolić I., "Višekriterijumski modeli i algoritmi izbora izvođača projekta", *Zbornik radova I, SymOrg '94, III Međunarodni simpozijum "Menadžment na pragu XXI veka"*, Zlatibor, 19-22 maja 1994., str. 401-407. (Deo 2.1. Izbor jednog izvođača na projektu i Algoritam 1)

¹⁶² ibid. Nikolić, I., Božilović, S., 2009., str. 194.

побољшање ранијих разматрања овог проблема (Božilović, Z.¹⁶³, Božilović Z. i Nikolić, N.¹⁶⁴). Следе опште математичке поставке вишекритеријумских модела мешовитог целобројног линеарног програмирања (ВК-МЦЛП) и алгоритми њиховог решавања.

Поставка и класификација проблема оптималног избора више извођача пројекта

Нека се разматра пројекат са m делова (фаза) означених $A_i, i \in I = \{1, \dots, m\}$ и n потенцијалних извођача са ознакама $B_j, j \in J = \{1, \dots, n\}$.

- Неопходно је разматрати проблеме избора више извођача из скупа потенцијалних извођача пројекта, са условом да се једној фази бира само један извођач. Већина проблема, осим полазних једноставних проблема, могу да имају два нивоа критеријума:
 - (i) минимизација времена и трошкова пројекта на вишем (првом) нивоу, и
 - (ii) максимизација вредности радова, односно трошкова фаза додељених фаворизованим извођачима на нижем (другом) нивоу.

Табела 20. Општа класификација проблема и модела оптималног избора више извођача пројекта

| Параметри фаза A_i (времена и трошкови) | Особине потенцијалних извођача B_j за фазе A_i | Капацитети за B_j | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------|------------|
| | | Довољни | Ограничени |
| 1. Јединствени параметри за A_i (нема алтернатива) | а) свакој A_i познат B_j | П.1.а.1 | П.1.а.2 |
| | б) бар једна A_i са више B_j | П.1.б.1 | П.1.б.2 |
| 2. Идентичне $D_{iv} (= D_{ijv})$ свих B_j за исту фазу A_i | а) свакој A_i познат B_j | П.2.а.1 | П.2.а.2 |
| | б) бар једна A_i са више B_j | П.2.б.1 | П.2.б.2 |
| 3. Различите D_{ijv} бар једном пару B_j за исту A_i | а) свакој A_i познат B_j | П.3.а.1 | П.3.а.2 |
| | б) бар једна A_i са више B_j | П.3.б.1 | П.3.б.2 |
| Изостављени елементарни случајеви: свакој A_i познат B_j и позната алтернатива D_{iv} под 2, односно B_j и D_{ijv} под 3 | | Нумерација проблема и математичких модела | |
| Услови: бар један B_j за A_i са више D_{iv} под 2.а), односно са више D_{ijv} под 3.а) | | | |

Развијени општи математички модели у наставку подразумевају примену Методе предхођења (*Precedence Method*) засноване на мрежном плану са активностима, односно фазама A_i у чворовима и њиховим зависностима на оријентисаним луковима (*Even Oriented Network Diagram*) када A_i имају основни облик зависности типа “Завршетак – Почетак” (*FS, Finish to Start*) и примењује се узастопно растуће нумерисање чворова мреже, односно фаза A_i .

Проблеми су сврстани у три групе са становишта карактеристика параметара за трајање и трошкове фаза. Сваку групу, осим 3, чине по два проблема и сваки проблем има по

¹⁶³ Božilović Z., "Klasifikacija problema izbora izvođača projekta kada neke aktivnosti imaju više potencijalnih izvođača i / ili više varijanti za vreme i troškove", *Zbornik radova, ICDQM 2015, 17th International Conference – Dependability and Quality Management*, Prijedor, 25-26 Jun 2015., str. 491-494.

¹⁶⁴ Božilović Z., Nikolić, N., "Analytical Approach to the Selection of Performers of the Project: Classification of Problems and an Illustration of an Example", *Journal IMK-14 Research and Development in Heavy Machinery* 21(2015), pp.107-117.

две врсте подпроблема са становишта ограничености капацитета или других ограничења за потенцијалне извођаче на пројекту.

■ Карактеристике основних параметара фаза A_i (времена t_i и трошкови c_i), $i \in I$, намећу оправдану потребу да се размотре три групе проблема.

1. Јединствени параметри за све потенцијалне извођаче B_j код било које фазе A_i .
2. Постоје варијанте D_{iv} са параметрима за све или неке фазе A_i , односно бар за једну или најмање једну фазу A_i , које важе за све потенцијалне извођаче B_j посматране фазе A_i . Варијанте D_{iv} дефинише власник пројекта или инвеститор.
3. Бар једна фаза A_i има варијанте параметара D_{ijv} које су различите за најмање један пар потенцијалних извођача B_j . Ако инвеститор задаје варијанте D_{iv} и расписује тендер, са пријавама потенцијалних B_j настају варијанте D_{ijv} . Уколико инвеститор не задаје D_{iv} за одређене фазе A_i , D_{ijv} чине понуде потенцијалних B_j на тендеру.

■ Групе се рашчлањују на две врсте проблема:

- а) за сваку фазу A_i познат је извођач B_j
- б) бар једна фаза A_i има више потенцијалних извођача B_j

□ Показује се да проблем а) у групи 1 има дефинисане све елементе пројекта и није могућа оптимизација, већ је потребна само анализа времена (одређивање временских термина за обављање фаза и трајање пројекта) са даљим прорачуном трошкова пројекта и извођача. Услед тога, у групи 2 и групи 3 не издвајају се проблеми у којима су познати сви елементи пројекта. Изостављено је да се познатим извођачима B_j за сваку фазу A_i на пројекту задаје по једна варијаната параметара D_{iv} у групи 2, односно по једна варијанта параметара D_{ijv} у групи 3. Такви случајеви укључени су у проблеме а) са одговарајућим условима.

■ Ако се не разматрају расположиви капацитети извођача B_j , сматрајући да они имају довољне капацитете, односно не разматрају се други ограничавајући фактори за извођаче (посебно услови за термине почетка или завршетка ангажовања), за избор извођача је довољно посматрати само трошкове пројекта и трошкове извођача без развоја плана пројекта у времену (без формирања мрежног плана и/или гантограма пројекта). Тиме настају проблеми првог типа (типа 1) из колоне “Довољни капацитети”. Осим првог, наредни проблеми и одговарајући математички модели су вишекритеријумског типа и припадају класи мешовито-целобројног линеарног програмирања (МЦЛП) који укључују и одговарајуће бинарне променљиве.

■ Увођењем напред наведених ограничења за неке или све извођаче B_j , односно бар за једног B_j , настају сложенији МЦЛП проблеми другог типа (типа 2) приказани у колони “Ограничени капацитети”. Сада је нужно разматрати временске планове пројекта.

■ У општем случају може се сматрати да су равноправни сви потенцијални извођачи B_j на пројекту, $j \in J$. Међутим, у пракси је оубичајено и оправдано да се међу њима уведе одговарајући приоритети. На пример, виши приоритети се додељују оним извођачима који су успешно учествовали на нашим ранијим пројектима или новим извођачима са високим бонитетима и сл. Нека се усвоји да приоритети за B_j имају строги лексикографски поредак и одговарају редоследу њиховог навођења $B_1 \gg B_2 \gg \dots \gg B_n$ (B_1 има највиши и B_n најнижи приоритет). Касније ће се илустровати случајеви једнаких приоритета за групе извођача.

4.1. ЈЕДИНСТВЕНИ ПАРАМЕТРИ ЗА ФАЗЕ ПРОЈЕКТА И ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ИЗВОЂАЧЕ

■ Задата су јединствена времена t_i и јединствени трошкови c_i за све фазе A_i на пројекту, $i \in I$. Посматрајући извођаче B_j важи $t_{ij} = t_i$ и $c_{ij} = c_i$, $i \in I, j \in J$.

Сагласно напред датој класификацији проблема, у наставку разматрају се две врсте проблема са становишта активности и извођача:

- а) за сваку фазу A_i унапред је познат извођач B_j и истом извођачу може се доделити више A_i , $i \in I, j \in J$
- б) бар за једну фазу A_i може се бирати између више потенцијалних извођача B_j , $i \in I, j \in J$.

4.1.1. Јединствени параметри фаза пројекта, познати извођачи фаза пројекта

Дефинисање јединствених параметара за фазе пројекта са условом да су познати извођачи за све фазе захтева разматрање само расположивих капацитета извођача пројекта.

4.1.1.1. Проблем 1.а.1. Познати извођачи фаза, извођачи довољних капацитета

◆ У случају када је за сваку фазу A_i унапред познат извођач B_j , не поставља се проблем избора извођача. Анализа времена одређује минимално трајање пројекта $T_p = T_p^{\min}$. Одговарајући општи математички модел за овај проблем, чији су елементи потребни за моделе већине наредних проблема, подесно се формулише у наредном линеарном облику.

$$\min T(t) = T_p \quad (87)$$

п.о.

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in I \wedge K_i = \emptyset \quad (88)$$

$$x_i \geq y_k, \quad \forall i \in I \wedge K_i \neq \emptyset \quad (89)$$

$$y_i = x_i + t_i, \quad \forall i \in I \quad (90)$$

$$y_i \leq T_p, \quad \forall i \in I \wedge S_i = \emptyset \quad (91)$$

$$x_i, y_i \geq 0, \quad \forall i \in I, T_p \geq 0 \quad (92)$$

где:

t_i – трајање фазе A_i , $i \in I$

(x_i, y_i) – почетак и завршетак фазе A_i , $i \in I$

K_i – скуп индекса фаза A_k од којих зависи A_i (претходнице, претходне фазе за A_i , енгл. *predecessor*), $k < i$, $k \in K_i \subset I$, $i \in I$

S_i – skup indeksa faza A_s koje zavise od A_i (naredne faze, sledbenice za A_i , енгл. *successor*), $s > i, s \in S_i \subset I, i \in I$

T_p – трајање пројекта,

(t, T) – vremenske jedinice пројекта и njihov skup, $t \in T, T = \{1, \dots, T_p\}$.

Функција критеријума (87) минимизира трајање пројекта, ограничења (88) дефинишу термине почетака полазних фаза A_i без зависности од других фаза, (89) дефинише да фаза A_i може започети након што се заврше све фазе A_k од којих зависи посматрана A_i , (90) прорачунава завршетак фазе A_i , (5) одређује завршетак и трајање пројекта на основу завршетака фаза A_s од којих не зависе друге фазе (једна или више фаза A_s са најкаснијим завршетком дају завршетак пројекта), (92) указује на природна ограничења о ненегативности за непознате величине x_i, y_i и T_n . Уочава се да трајање пројекта T_n као непозната величина истовремено је и функција критеријума (87) која се минимизира. Одређује се минимално трајање пројекта $T_p = T_p^{\min}$.

■ Далје могу да се прорачунају одговарајући трошкови:

$$C_p = C_p(T_p^{\min}) = \sum_{i \in I} c_i \quad \text{за пројекат} \quad (i)$$

$$C_j = C_j(T_p^{\min}) = \sum_{i \in I_j} c_i \quad \text{за извођаче } B_j, j \in J \quad (ii)$$

Јасно, збир трошкова свих извођача B_j једнак је трошковима пројекта C_p :

$$\sum_{j \in J} C_j = C_p \quad (iii)$$

■ Када се користе наведени модели МЦЛП решења не одређују увек најранија и најкаснија времена за почетке, односно завршетке фаза A_i из скупа $(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1), i \in I$. Изналазе се времена (x_u, y_u) у распону између најранијих и најкаснијих термина, при чему могу бити једнака или најранијим или најкаснијим временима: $x_i^0 \leq x_i \leq x_i^1, y_i^0 \leq y_i \leq y_i^1, i \in I$. Одговарајућа најкаснија и најранија времена утврђују се накнадном анализом времена применом стандардног софтвера за управљање пројектима или ручних поступака.

Карактеристике модела МЦЛП у односу на анализу времена пројекта

Сагласно анализи времена за полазне A_u које не зависе од других фаза у релацијама (88) постављају се наранији термини почетака облика:

$$x_i = 0, \quad i \in I, K_i = \emptyset \quad (88.a)$$

Познати нелинеарни услов из анализе времена полазећи од почетка пројекта, да је најранији почетак x_i^0 за A_i која зависи од других фаза једнак најранијем завршетку y_k^0 посматрајући претходну A_k која се последња завршава, облика:

$$x_i^0 = \max_{k \in K_i} y_k^0, \quad i = 1, \dots, n, K_i \neq \emptyset \quad (89.a)$$

овде се замењује линеарним условом (89) облика $x_i \geq y_k, i \in I, K_i \neq \emptyset$. Услед тога термин x_i за почетак A_i има карактеристку да се налази између њеног најранијег почетка x_i^0 и најкаснијег почетка x_i^1 . Дакле, важи $x_i^0 \leq x_i \leq x_i^1$. Најранији завршетак y_i^0 фазе A_i једнак је збиру њеног најранијег почетка и трајања:

$$y_i^0 = x_i^0 + t_i, \quad i \in I \quad (92.a)$$

При томе се одређује T_p^0 као термин најранијег завршетка пројекта и уместо линеарног израза (91) исправно је користи наредни нелинеарни израз (најранији завршетак пројекта одређује најранији завршетак фазе A_i која се последња завршава и припада скупу фаза од којих не зависе друге фазе):

$$T_p^0 = \max_{i \in S_i} y_i^0, \quad i \in I, S_i \neq \emptyset \quad (91.a)$$

Постављањем да је најкаснији завршетак пројекта T_n^1 једнак наранијем завршетку пројекта T_p^0 добијено је трајање пројекта $T_p = T_p^1 = T_p^0$. Даље се анализом времена полазећи од завршетка пројекта одређују термини y_i^1 за најкасније завршетке фаза A_i , $i = n-1, n-2, \dots, 1$. Прво се постави да најкаснији завршетак сваке A_i без следбеница одговара завршетку пројекта: $y_i^1 = T_p$, $i \in I$, $S_i = \emptyset$. За термине y_i^1 као најкасније завршетке сваке од преосталих фаза A_i посматрају се њене непосредно наредне фазе A_s (најкаснији завршетак A_i једнак је најкаснијем почетку x_s^1 за A_s која мора прва да започне):

$$y_i^1 = \min_{s \in S_i} x_s^1, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, S_i \neq \emptyset \quad (90.b)$$

Свакој фази A_i прорачунава се најкаснији почетак x_i^1 на основу најкаснијег завршетка и трајања:

$$x_i^1 = y_i^1 - t_i, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (90.в)$$

4.1.1.2. Проблем 1.а.2. Познати извођачи фаза, n^- извођача ограничених капацитета

◆ Нека n^- потенцијалних извођача B_j пројекта са индексима у скупу \mathcal{J} имају ограничене капацитете, $n^- \leq \bar{n}$, $j \in \mathcal{J} \subseteq J$. Важи $n^- < \bar{n}$ и $j \in \mathcal{J} \subset J$, ако ова ограничења немају сви извођачи B_j , односно $n^- = \bar{n}$ и $\mathcal{J} = J$, ако ограничења имају сви извођачи B_j , $j \in J$.

Проблеми са ограниченим капацитетима извођача захтевају увођење нових параметара (у циљу формирања одговарајућих општих математички модела), исказани бројевима радних сати, [час.]:

w_{i0} – задата количина рада или задати обим посла за фазу A_i , $i \in I$

$w_i(t)$ – потребна количина рада за фазу за фазу A_i у врем. јединици t , $i \in I$, $t \in T$

$w_{j0}(t)$ – расположиви радни капацитет извођача B_j у врем. јединици t , $j \in \mathcal{J}$, $t \in T$.

■ Параметар $w_i(t)$ изражава потребну количину рада за фазу A_i у временској јединци t изведене из дате количине рада w_{i0} на тој фази A_i и њеног времена трајања t_i (91.a). Најједноставније је користити константне вредности $w_i = w_i(t)$, али то није обавезно правило.

$$w_i = w_i(t) = \frac{w_{i0}}{t_i}, \quad i \in I, t \in T \quad (91.a)$$

■ Ограничени расположиви капацитети извођача B_j задати вредностима $w_{j0}(t)$, $j \in \mathcal{J}$, $t \in T$, могу бити присутни: (1) на целом периоду обављања пројекта и важи $t \in T$, (2) на

неком његовом делу са $t \in T_j^{(1)} \subset T$, или (3) на више засебних делова пројекта $r_j > 1$ са $t \in T_j^{(r)} \subset T$, $r \in R_j = \{1, \dots, r_j\}$, који могу да буду повезани или са одговарајућим размацима. T_j су дисјунктни подскупови: $\cap T_j^{(r)} = \emptyset$ (немају заједничке елементе t). Посматрана временска јединица t за $w_{j0}(t)$ може да припада само једном делу пројекта, $t \in T_j^{(r)}$, односно за било које t могу да постоје различите вредности $w_{j0}(t)$, $j \in J$, $t \in T$. При томе, различити извођачи B_j не морају да имају идентичне периоде $T_j^{(r)}$. Ови периоди могу бити различити, односно са мањим или већим преклапањима.

- Ранији модел (87)-(92) потребно је проширити условом да укупно ангажовање извођача B_j на свим додељеним фазама A_u које се обављају у свакој посматраној временској јединици t не прелази његов расположиви капацитет $w_{j0}(t)$:

$$\sum_{i \in I_j} w_i(t) \leq w_{j0}(t), \quad \forall (j \in J^-, t \in T) \quad (93)$$

где:

I_j – скуп индекса фаза A_i које обавља извођач B_j , $i \in I_j \subset I, j \in J^-$.

Потребно је напоменити да се природни услови за непознате, уобичајено постављају на крају модела - после активних ограничења, као у моделу 1.а.1. Зато је неопходно у моделу 1.а.2 означити ограничења капацитета извођача са (92) и природне услове за непознате са (93).

■ Довољни капацитети свих извођача B_j одређују минимално трајање пројекта T_p^{\min} на основу зависности фаза A_i , $i \in I, j \in J$. Ограничени капацитети извођача B_j могу да одреде дуже оптимално трајање пројекта T_p^* , $T_p^* > T_p^{\min}$. Тиме се проширије раније дефинисани скуп временских јединица пројекта $T = \{1, \dots, T_p^{\min}\}$ на $T^* = \{1, \dots, T_p^*\}$.

4.1.2. Јединствени параметри фаза пројекта, неке фазе са више потенцијалних извођача

Могућност да одговарајуће фазе пројекта имају више потенцијалних извођача, када свака фаза јесте са јединственим параметрима за њене потенцијалне извођаче, захтева избор извођача на тим фазама и разматрање расположивих капацитета свих извођача пројекта.

4.1.2.1. Проблем 1.б.1. m^+ фаза са више потенцијалних извођача, потенцијални извођачи пројекта довољних капацитета

◆ За неке или све фазе A_i са индексима $i \in I^+ \subseteq I$ конкурише више потенцијалних извођача B_j са индексима $j \in J_i \subseteq J$. Ако број потенцијалних B_j за A_i означен са n_i износи $n_i < n$ настаје $J_i \subset J$ (не конкуришу сви B_j за A_i), док је $J_i = J$ за $n_i = n$ (сви B_j конкуришу за A_i). Нека број фаза A_i са више потенцијалних извођача износи m^+ , $m^+ \leq m$. Строжије се дефинише да бар једна или најмање једна ($m^+ \geq 1$) фаза A_u има више потенцијалних извођача B_j (њихов број се такође може строжије дефинисати), $i \in I^+$, $j \in J_i$. Сви потенцијални извођачи B_j на пројекту имају *довољне капацитете*, $j \in J$, односно $J = \emptyset$.

Посматрајући потенцијалне извођаче B_j на пројекту, неки или сви могу конкурисати за више фаза A_i и таквим B_j одговарају подскупови фаза A_i са индексима $i \in I_j \subseteq I, j \in J$.

Односно, најмање један B_j конкурише за више $A_i, j \in J, i \in I_j$, где I_j садржи индексе фаза A_i за које конкурише одговарајући B_j . Нека број фаза A_i за које је квалификован и конкурише извођач B_j износи $m_j, m_j \leq m, j \in J$. Тиме се одређује број елемената у подскупу $I_j \subset I$ са $m_j < m$ када B_j не конкурише за све A_i и у подскупу $I_j = I$ са $m_j = m$ ако B_j конкурише за све $A_i, j \in J, i \in I_j$.

■ Наведене карактеристике фаза A_i и потенцијалних извођача B_j омогућавају њихову класификацију и правила избора, наведена након разматрања ограничених капацитета извођача (табела 21.1), имајући на уму разматране критеријуме и два параметра: n_i број потенцијалних B_j за $A_i, 1 \leq n_i \leq n, i \in I, j \in J_i$, и m_j број A_i за које конкурише $B_j, 1 \leq m_j \leq m, j \in J, i \in I_j$.

Пошто су задата времена t_i за фазе A_i , на свакој од њих може да се распореди било који извођач B_j ако је квалификован за потребне радове, $j \in J_i, i \in I$. Произилази да постоји вишеструко оптимално решење са становишта познатих вредности за трајање и трошкове пројекта. Међутим, са становишта фаворизованих извођача B_j може да се примени модел ВКП (94.j)-(96) са ранијим ограничењима (88)-(92) и врши максимизација вредности њихових радова (трошкова) .

$$\max C_j(t) = \sum_{i \in I_j} c_i h_{ij}, \quad \forall j \in J^+ \quad (94.j)$$

$$\sum_{j \in J_i} h_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (95)$$

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ако } A_i \text{ обавља } B_j \\ 0, \text{ у супротном} \end{cases}, \quad \forall (i \in I_j, j \in J_i) \quad (96)$$

Важе ранија ограничења (88)-(92)

■ Нови параметри модела су карактеристичне променљиве h_{ij} које се разликују од осталих променљивих:

h_{ij} – бинарне променљиве прве врсте, променљиве са становишта извођача које имају вредности $h_{ij} = 1$, ако фазу A_i обавља извођач B_j , односно ако се за A_i бира B_j (у супротном су $h_{ij} = 0$, A_i не обавља извођач B_j), $i \in I_j, j \in J_i$.

Функције критеријума (94.j) максимизирају трошкове фаворизованих извођача $B_j, j \in J^+$. Ограничења (95) обезбеђују да се за било коју фазу A_i бира само један извођач $B_j, i \in I, j \in J_i$. Наиме из услова да збир бинарних променљивих h_{ij} за A_i износи 1 произилази само једна $h_{ij} = 1$ и остале морају бити $h_{ij} = 0, i \in I, j \in J_i$. Са (96) се описују природни услови за бинарне променљиве $h_{ij}, i \in I, j \in J_i$.

■ Нека се, са становишта њиховог ућешћа у трошковима пројекта, фаворизује прва n^+ извођача B_j у односу на остале којих има $n - n^+$. Скуп J чине два дисјунктна подскупа:

$$\begin{aligned} \{1, 2, \dots, n^+\} &= J^+ && \text{за фаворизоване } B_j, j \in J_i^+ \\ \{n^++1, n^++2, \dots, n\} &&& \text{за остале извођаче } B_j, j \notin J_i^+ \end{aligned}$$

Фаворизовани извођачи B_j могу бити равноправни, подједнако значајни или са одговарајућим приоритетима. Одређени извођачи могу имати идентичне приоритете:*)

$$B_1 \gg B_2 \gg B_3 \gg \dots \gg B_{n^+}; \quad (B_1, B_2) \gg B_3 \gg B_4 \gg B_5 \gg \dots \gg B_{n^+} \text{ и слично}$$

*) Варијанте приоритета извођача детаљније се разматрају при дефинисању алгоритама решавања модела избора извођача.

■ Приоритетним извођачима B_j додељује се више фаза A_i , односно фазе са већим трошковима, тако да се таквим извођачима B_j остварују што већи трошкови C_j у односу на полазне трошкове $C_j(T_p^{\min})$. За B_j са вишим приоритетима настаће $C_j > C_j(T_p^{\min}), j \in J^+$.

- Тиме ће неки или сви остали B_j са нижим приоритетима имати мање трошкове $C_j < C_j(T_p^{\min})$, било да су то фаворизовани B_j са $j \in J^+$ или нефаворизовани са $j \notin J^+$.
- У општем случају, проблем има више *Парето-оптималних решења*, што зависи од броја нивоа критеријума и бројева извођача који конкуришу за поједине фазе.

4.1.2.2. Проблем 1.б.2. m^+ фаза са више потенцијалних извођача, n^- потенцијалних извођача прој. ограничених капацитета

◆ Разматра се проблем када за одговарајуће фазе A_i конкурише $m^+ > 1$ потенцијалних извођача B_j , $m^+ \leq m$, $i \in I$, $j \in J_i$. При томе, $n^- \geq 1$ извођача B_j који су потенцијални за пројекат имају ограничене капацитете $w_{j0}(t)$, $n^- \leq n$, $j \in J^-$, $t \in T$.

■ Произилази да је неопходно уводити нови тип, односно нову врсту променљивих:

$h_{ij}(t)$ – *бинарне променљиве друге врсте*, променљиве са становишта извођача и времена које имају вредности $h_{ij}(t) = 1$ ако су променљиве прве врсте $h_{ij} = 1$ (за фазу A_i бира се извођач B_j) и A_i се изводи у временској јединици t , док у осталим случајевима важи $h_{ij}(t) = 0$ ($h_{ij} = 0$ јер за A_i не бира се B_j независно да ли се A_i изводи или не изводи у t , или $h_{ij} = 1$ када се за A_i бира B_j али се A_i не изводи у t), $i \in I_j$, $j \in J_i$, $t \in T$.

Вишекритеријумски математички модел МЦЛП минимизације трајања пројекта (97.1) и максимизације трошкова одговарајућих извођача (97.1+j) може имати наредни облик:

$$\min T(t) = T_p \quad (97.1)$$

$$\max C_j(t) = \sum_{i \in I_j} c_i h_{ij}, \quad \forall j \in J^+ \quad (97.1+j)$$

$$\text{p.o.} \quad x_i \geq 0, \quad \forall i \in I \wedge K_i = \emptyset \quad (98)$$

$$x_i \geq y_k, \quad \forall i \in I \wedge K_i \neq \emptyset \quad (99)$$

$$y_i = x_i + t_i, \quad \forall i \in I \quad (100)$$

$$y_i \leq T_p, \quad \forall i \in I \wedge S_i = \emptyset \quad (101)$$

$$\sum_{j \in J_i} h_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (102)$$

$$\sum_{i \in I_j} w_i(t) h_{ij}(t) \leq w_{j0}(t), \quad \forall (j \in J^-, t \in T) \quad (103)$$

$$h_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ ако } A_i \text{ обавља } B_j \\ 0, \text{ у супротном} \end{array} \right\}, \quad \forall (i \in I_j, j \in J_i) \quad (104)$$

$$h_{ij}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ ако } h_{ij} = 1 \text{ и } A_i \text{ се бавља у } t \\ 0, \text{ у супротном} \end{array} \right\}, \quad \forall (i \in I_j, j \in J_i^-, t \in T) \quad (105)$$

$$x_i, y_i \geq 0, \quad \forall i \in I, T_p \geq 0 \quad (106)$$

Ограничења (99)-(102), (104) и (106) тумаче се као напред имајући на уму њихову нумерацију. Са (103) условљава се да укупна количина рада коју обавља B_j у t -тој врем. једин. пројекта (на свим додељеним A_i , $i \in I_j$) не прелази његов расположиви капацитет $w_{j0}(t)$, $j \in J_i^-, t \in T$. (105) су природни услови за бинарне променљиве $h_{ij}(t)$, $i \in I$, $j \in J_i^-, t \in T$.

Табела 21.1. Карактеристике проблема групе 1

| |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(i) $n_i = 1$. Познат је B_j за разматрану A_i, зато J_i има један члан (индекс j познатог B_j) и J_i је једночлани подскуп у скупу J, $i \in I$, $j \in J_i \subset J$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Не поставља се проблем избора за A_i, односно избор је задати B_j. • Унија свих J_i даје J, односно важи $\cup_{i \in I} J_i = J$ за вредности n_i под (i) до (iii). • За $n_i = 1$ важи да било која два подскупа, J_α за A_α са $n_\alpha = 1$ и J_β за A_β са $n_\beta = 1$, јесу дисјунктна (немају заједничке елементе, пресек им је празан скуп), $J_\alpha \cap J_\beta = \emptyset$. При томе $\{J_\alpha, J_\beta\} \subset J$ за $(\alpha, \beta) \in I$. У суштини, за све J_i важи $\cap_{i \in I} J_i = \emptyset$. |
| <p>(ii) $1 \leq n_i < n$. Бар једна A_i има више потенцијалних B_j (не све који су потенцијални за пројекат), $j \in J_i \subset J$ са $i \in I^+ \subset I$. Модел одређује решење сагласно даљим правилима.</p> <ul style="list-style-type: none"> • За A_i бира се B_j највишег приоритета. Ако такав B_j има ограничене капацитете и продужава T_p^{\min}, бира се B_j наредног приорита или нижег приоритета без ограничених капацитета или ограничених капацитета који не мења T_p^{\min}. Ако не постоји B_j који обезбеђује T_p^{\min}, одабрати оног који најмање продужава T_p^{\min}. • Може да постоји најмање један пар недисјунктих подскупова са једним или више заједничких елемената i када један или више B_j конкуришу истовремено за неке (најмање две) A_i. Нпр., више B_j за (A_α, A_β) са $J_\alpha \cap J_\beta \neq \emptyset$, $\{J_\alpha, J_\beta\} \subset J$, $(\alpha, \beta) \in I$. Више B_j за три фазе $(A_\alpha, A_\beta, A_\delta)$ са $J_\alpha \cap J_\beta \cap J_\delta \neq \emptyset$, $\{J_\alpha, J_\beta, J_\delta\} \subset J$, $(\alpha, \beta, \delta) \in I$ итд. |
| <p>(iii) $n_i = n$. Сви B_j су потенцијални за неку A_i, $i \in I^+$, и важи $j \in J_i = J$. J_i и J су идентични.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Избор B_j врши се ако је то повољно као под (ii). • Сви B_j могу конкурисати за више A_i, $j \in J_i = J$, $i \in I^+$. Произилази да било која комбинација подскупова J_i и сви ти подскупови имају пресеке скуп J. Одговарајуће уније су такође скуп J. |
| <p>(iv) $m_j = 1$. Одређени B_j може да обави само једну A_i и подскуп I_j има један члан (индекс i дате A_i), $j \in J$ и $j \in I_j \subset I$, $i \in I$ или $i \in I^+$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Разматрани B_j се бира ако A_i има $n_i = 1$ (само овај B_j конкурише за A_i), $i \notin I^+$. • A_i има $n_i > 1$ и B_j са најмање једним од преосталих потенцијалних извођача пројекта конкуришу за A_i. B_j се бира ако је то повољно, као под (ii) и (iii). • Детаљније тумачење дисјункторности и унија подскупова I_j врши се (посматрајући их међусобно и у односу на скуп I) по аналогiji са изложеним под (ii) и (iii). |
| <p>(v) $1 \leq m_j < m$. Најмање један B_j конкурише за више (не за сваку од m на пројекту) A_i, $j \in J$ и $j \in I_j \subset I$, $i \in I$ или $i \in I^+$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Избор B_j врши се као под (iv), у зависности од n_i и имајући на уму да је $m_j \geq 1$. • Карактеристике за I_j изводе се сагласно напоменама (iv). |
| <p>(vi) $m_j = m$. B_j конкурише за све A_i, $j \in J$ и $j \in I_j = I$, $i \in I$ или $i \in I^+$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се B_j ако само он конкурише за све A_i, има највиши приоритет и не мења T_p^{\min}. У супротном, избор се врши као под (iv), уважавајући $m_j = m$. • Ако више B_j који се фаворизују конкуришу за све A_i, проблем се своди на избор једног извођача пројекта и примену модела ВАО са B_j који дају T_p^{\min} (немају ограничене капацитете или имају довољне капацитете). Уколико сви B_j увећавају T_p^{\min} избор се врши као под (iv), разматрајући n_i и $m_j = m$. |
| <p>(i) до (iii) разматрају бројеве потенцијалних B_j за A_i, а даље број A_i за које конкурише B_j.</p> |

4.2. ИСТОВЕТНЕ ВАРИЈАНТЕ ПАРАМЕТАРА ПОТЕНЦИЈАЛНИХ ИЗВОЂАЧА ИСТЕ ФАЗЕ ПРОЈЕКТА

■ Одређене или све фазе A_i имају више варијанти D_{iv} за времена трајања t_{iv} и трошкове c_{iv} са $v \in V_i = \{1, \dots, d_i\}$, где d_i означава број варијанти D_{iv} за A_i , $i \in I$. На било којој фази A_i дате варијанте D_{iv} су истоветне за све њене потенцијалне извођаче B_j , $i \in I, j \in J_i$.*)

Могућност да постоје варијанте параметара које су истоветне за све потенцијалне извођаче исте фазе, уводи сложеније проблеме избора. Настају Парето-оптимална решења са елементима:

- Трајање и трошкови пројекта сагласно варијантама параметара.
- Варијанте параметара за фазе са познатим извођачима када је усвојено трајање пројекта или су дати трошкови пројекта. Ако су познати извођачи свих фаза поставља се услов да најмање једна фаза има варијанте параметара.
- Варијанте параметара и извођачи за фазе са више потенцијалних извођача када је усвојено трајање пројекта или су дати трошкови пројекта.

Преглед проблема и елемената за избор приказује се након излагања одговарајућих модела 2.а.1, 2.а.2, 2.б.1 и 2.б.2 (табела 21.2).

4.2.1. Познати извођачи фаза пројекта, неке фазе са варијантама параметара

■ Дефинисано је да одређена фаза A_i има коначан скуп са d_i парова параметара (t_{iv}, c_{iv}) познатих вредности, односно да A_i има познати скуп дискретних вредности за наведене параметре, $i \in I, j \in J_i, v \in V_i$. Могу постојати фазе са једном варијантом параметара $d_i = 1$ и (t_{i1}, c_{i1}) .

У општем случају скуп парова са параметрима може бити бесконачан, као код линеарне апроксимације трошкова у методи *PERT/COST* за дате границе са минималним и максималних вредностима. Али се у пракси разматра коначан скуп дискретних вредности за усвојену временску јединицу (дан за грађевинске пројекте) и одговарајући трошкови.

■ Подесно је да се парови параметара (t_{iv}, c_{iv}) за A_i исказују опадајућим низовима са становишта времена t_{iv} од максималних до минималних вредности, $(t_n)_i$ и $(t_u)_i$, где је индекс d_i означен са $d(i)$:

$$(t_{i1}, c_{i1}), (t_{i2}, c_{i2}), \dots, (t_{i,d(i)}, c_{i,d(i)}) \quad i \in I \quad (t, c)$$

$$t_{i1} = (t_n)_i > t_{i2} > \dots > t_{i,d(i)} = (t_u)_i \quad i \in I \quad (t)$$

$$c_{i1} = (c_n)_i < c_{i2} < \dots < c_{i,d(i)} = (c_u)_i \quad i \in I \quad (c)$$

*) Произилази да B_j има варијанте $D_{ijv} = D_{iv}$ за A_i са параметрима $t_{ijv} = t_{iv}$ и $c_{ijv} = c_{iv}$, $i \in I, j \in J_i, v \in V_i$. Усвојено је да се користе ознаке t_{iv} и c_{iv} у циљу истицања разлика модела групе 2 и 3.

**4.2.1.1. Проблем 2.а.1. Познати извођачи фаза,
 m^+ фаза са варијантама параметара,
 извођачи довољних капацитета**

◆ Свакој фази A_i познат је извођач B_j , $i \in I$, $j \in J_i$. Како број потенцијалних B_j сваке A_i износи $n_i = 1$, одговарајући подскупови J_i имају по један члан са индексом познатог B_j за посматрану A_i , $i \in I$, $j \in J_i$. Број фаза A_i са варијантама параметара износи $m^+ > 1$, $i \in I^+ \subseteq I$, док су преосталих $m - m^+$ фаза A_i са јединственим параметрима, односно са једном варијантом параметара, $i \notin I^+$. Сматрајући да сви извођачи B_j имају довољне капацитете, потребно је извршити избор са којом варијантом D_{iv} за (t_{iv}, c_{iv}) фазе A_i са $d_i > 1$ ангажовати познатог извођача B_j , $i \in I^+$, $j \in J_i$, $v \in V_i$. Ако A_i нема варијанте параметара, којој одговара $d_i = 1$ и D_{i1} , не врши се избор (познат је B_j), $i \in I^+$, $i \notin I^+$, $j \in J_i$, $v \in V_i$.

□ Са циљем веће једнообразности математичких модела, подесно је користити одговарајуће подскупове I_j за индексе фаза A_i које се додељују извођачу B_j и заменити услове $i \in I$ са $i \in I_j$. У остатку текста могу да се задрже услови $i \in I$, ако је потребно за јасније излагање одговарајућих области.

Присуство више варијанти за времена и трошкове фаза A_i у овом проблему са општим математичким моделом у наставку, за разлику од ранијих проблема, намеће потребу да се врши минимизација укупних трошкова пројекта C_p са (107.1). Остали критеријуми су из ранијих модела: минимизација трајања пројекта T_p дато са (107.2) и максимизација укупних трошкова C_j за разматране извођаче B_j са (107.2+j). Модел се заснива на бинарним променљивама прве врсте h_{ijv} .

$$\min C_p(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_i} c_{iv} h_{ijv} \quad (107.1)$$

$$\min T_p(t) = T_p \quad (107.2)$$

$$\max C_j(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{v \in V_i} c_{iv} h_{ijv}, \quad \forall j \in J^+ \quad (107.2+j)$$

$$\text{п.о.} \quad y_i = x_i + \sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_i} t_{iv} h_{ijv}, \quad \forall i \in I \quad (108)$$

$$\sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_i} h_{ijv} = 1, \quad \forall i \in I \quad (109)$$

$$h_{ijv} = \begin{cases} 1, \text{ ако се на } A_i \text{ бира } D_{iv} \text{ за познатог } B_j \\ 0, \text{ у супротном} \end{cases}, \quad \forall (i \in I_j, j \in J_i, v \in V_i) \quad (110)$$

Важе ограничења (98), (99) и (101), и природни услови (106)

где:

h_{ijv} – бинарна променљива прве врсте која има вредност $h_{ijv} = 1$ ако се за фазу A_i бира да познати извођач B_j користи варијанту D_{iv} са параметрима (t_{iv}, c_{iv}) , а у супротном је $h_{ijv} = 0$ (B_j користи неку другу варијанту параметара), $i \in I_j$, $j \in J_i$, $v \in V_i$.

- Ограничења (109) обезбеђују да се познатом извођачу B_j на разматраној фази A_i додели само једна варијанта D_{iv} са одговарајућим подацима (t_{iv}, c_{iv}) , што се исказује захтевом да бинарне променљиве могу имати вредности $h_{ijv} = 1$ или $h_{ijv} = 0$ и њихов збир мора да износи 1. Тиме се одређује трајање t_i за A_i као време $t_i = t_{iv}$ са $h_{ijv} = 1$ за одабрану варијанту D_{iv} , $i \in I$, $j \in J_i$, $v \in V_i$.
- Настало време t_i са релацијама (109.а) користи се у условима (109.б) и преноси у (108) да се прорачуна термина y_i за завршетак фазе A_i .

- На исти начин се релацијама (109.в) и (109.г) прво прорачунавају времена t_k и термини y_k за завршетке фаза A_k од којих зависи посматрана A_i . Подаци y_k су потребни за одређивање почетка A_i у релацији (108). Наиме, из (109.а) и (109.б) настају (109.в) и (109.г) разматрањем A_k уместо A_i (врши се замена индекса i са k). У (109.г) је потребан термин x_k за почетак A_k који се одређује у (98), ако не зависи од других фаза или у (99), ако зависи од фаза A_r којима се по аналогiji прорачунавају подаци x_r , t_r и y_r на основу r_{rj} , x_{rjv} и J_r , $(k,r) \in I$. При томе, A_r могу бити зависне од неких фаза којима је потребно поновити поступак.

$$t_i = \sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_i} t_{iv} h_{ijv}, \quad \forall i \in I \quad (109.а)$$

$$y_i = x_i + t_i = x_i + \sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_i} t_{iv} h_{ijv}, \quad \forall i \in I \quad (109.б)$$

$$t_k = \sum_{j \in J_k} \sum_{v \in V_k} t_{kv} h_{kjb}, \quad \forall k \in I \quad (109.в)$$

$$y_k = x_k + t_k = x_k + \sum_{j \in J_k} \sum_{v \in V_k} t_{kv} h_{kjb}, \quad \forall k \in I \quad (109.г)$$

Услови (110) описују наведене карактеристике за бинарне променљиве h_{ijv} . Остала ограничења тумаче се као у ранијим моделима.

4.2.1.2. Проблем 2.а.2. Познати извођачи фаза, t^+ фаза са варијантама параметара, n^- извођача ограничених капацитета

◆ Свакој фази A_i познат је извођач B_j , $i \in I$, $j \in J_i$. Посматрајући све потенцијалне извођаче B_j на пројекту, n^- имају ограничене капацитете $w_{j0}(t)$, $j \in J^-$, $t \in T$, $1 < n^- \leq n$. Општи математички модел овог проблема настаје проширивањем модела проблема 2.а.1 са ограничењима (11) за капацитете извођача и новом бинарном променљивом $h_{ijv}(t)$ карактеристика (112). Користе се критеријумима (107.1)-(107.2+j) и ограничења (98), (99), (101), (108)-(110) и (106).

$$\sum_{i \in I_j} \sum_{v \in V_i} w_{iv}(t) h_{ijv}(t) \leq w_{j0}(t), \quad \forall (j \in J^-, t \in T) \quad (111)$$

$$h_{ijv}(t) = \begin{cases} 1, \text{ ако } h_{ijv} = 1 \text{ за познатог } B_j \text{ и } A_i \text{ се обавља у } t \\ 0, \text{ у супротном} \end{cases}, \quad \forall (i \in I_j, j \in J_i, v \in V_i, t \in T) \quad (112)$$

где:

$h_{ijv}(t)$ – бинарна променљива друге врсте вредности $h_{ijc} = 1$ ако се фаза A_i обавља у временској јединици t и бира да познати извођач B_j користи варијанту D_{iv} са параметрима (t_{iv}, c_{iv}) , што дефинише променљива прве врсте $h_{ijv} = 1$, а у супротном је $h_{ijv}(t) = 0$ (не бира се D_{iv} за A_i услед $h_{ijv} = 0$ и A_i се обавља у t , или бира се D_{iv} са $h_{ijv} = 1$ али се A_i не обавља у t), $i \in I_j$, $j \in J_i$, $v \in V_i$, $t \in T$.

Потребно ангажовање капацитета извођача B_j на свим фазама A_i које се обављају у временској јединици t за ограничења (111) одређује се у зависности од количине рада w_{i0} сваке фазе A_i и њеног времена t_{iv} са варијантом D_{iv} :

$$w_{iv}(t) = \frac{w_{i0}}{t_{iv}}, \quad i \in I, v \in V_i, t \in T \quad (111.а)$$

4.2.2. Јединствене варијанте параметари фаза пројекта, неке фазе са више потенцијалних извођача

Дефинисање и решавање ових проблема врши се у зависности од карактеристика фаза (бројеви за потенцијалне извођаче и варијанте) и капацитета свих потенцијалних извођача на пројекту (довољни или ограничени), сагласно врсти проблема (табела 21.2).

4.2.2.1. Проблем 2.б.1. m^+ фаза са више потенцијалних извођача, потенцијални извођачи пројекта довољних капацитета

◆ Разматра се проблем када m^+ фаза A_i имају више потенцијалних извођача B_j , $i \in I, j \in J_i$, са идентичним варијантама D_{iv} за параметре (t_{iv}, c_{iv}) , $v \in V_i$. Сви извођачи пројекта имају довољне капацитете.

□ Општи математички модел проблема 2.б.1 настаје заменом бинарних променљивих прве врсте (110) у моделу 2.а.1 са (113).

$$h_{ijv} = \begin{cases} 1, \text{ ако се за } A_i \text{ бира } B_j \text{ и } D_{iv} \\ 0, \text{ у супротном} \end{cases}, \quad \forall (i \in I, j \in J_i, v \in V_i) \quad (113)$$

h_{ijv} – бинарна променљива прве врсте која има вредност $h_{ijv} = 1$ ако се фази A_i бира извођач B_j и варијанта D_{iv} са параметрима (t_{iv}, c_{iv}) , а у супротној је $h_{ijv} = 0$ (не бира се B_j , или бира се B_j са неком другом варијантом параметара), $i \in I, j \in J_i, v \in V_i$.

4.2.2.2. Проблем 2.б.2. m^+ фаза са више потенцијалних извођача, n^- потенцијалних извођача пројекта ограничених капацитета

◆ Разматра се проширени проблема 2.б.1 са условом да n^- потенцијалних извођача B_j на пројекту имају ограничене капацитете $w_{j0}(t)$, $j \in J^-, t \in T$.

□ Општи математички модел проблема 2.б.2 настаје проширивањем модела проблема 2.б.1 са бинарним променљивама друге врсте (114).

$$h_{ijv}(t) = \begin{cases} 1, \text{ ако } h_{ijv} = 1 \text{ и } A_i \text{ се обавља у } t \\ 0, \text{ у супротном} \end{cases}, \quad \forall (i \in I, j \in J_i, v \in V_i, t \in T) \quad (114)$$

$h_{ijv}(t)$ – бинарна променљива друге врсте вредности $h_{ijv}(t) = 1$ ако је $h_{ijv} = 1$ (бира се да A_i обавља B_j са варијантом D_{iv} за параметре t_{iv} и c_{iv}) и A_i се обавља у временској јединици t , а у супротном је $h_{ijv}(t) = 0$ (не бира се D_{iv} за A_i услед $h_{ijv} = 0$ и A_i се обавља у t , или бира се D_{iv} са $h_{ijv} = 1$ али се A_i не обавља у t), $i \in I, j \in J_i, v \in V_i, t \in T$.

Табела 21.2. Карактеристике проблема групе 2

| Потенцијални извођачи B_j и варијанте параметара за фазе A_i |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(i) $n_i = 1, d_i = 1$. Познат је B_j са једном варијаном D_{i1} за параметре сваке $A_i, i \in I, j \in J_i \subset J, v \in V_i \setminus \{1\}$. Подскуп J_i има један члан, $J_i = \{\text{индекс } j \text{ извођача } B_j \text{ за } A_i\}$. Скуп V_i има један члан, $V_i = \{\text{индекс } 1 \text{ за једнозначне параметре са варијантом } D_{i1}\}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Познат је избор за A_i са датим B_j и датом $D_{i1}, i \in I, j \in J_i, v \in V_i = \{1\}$. |
| <p>(ii) $n_i = 1, d_i \geq 1$. Свакој A_i је познат B_j и бар једна A_i са више $D_{iv}, i \in I^+ \subseteq I, j \in J_i \subset J, v \in V_i$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се најповољнија D_{iv} датог B_j ако $d_i > 1$, односно D_{i1} ако $d_i = 1$, сагласно критеријумима пројекта и капацитетима свих извођача пројекта. <p><i>Напомена:</i> Избор одговарајућих елемената у наредним проблемима врши се сагласно са критеријумима пројекта, приоритетима потенцијалних B_j и њиховим капацитетима.</p> |
| <p>(iii) $1 \leq n_i < n, d_i = 1$. Бар за једну A_i конкурише више потенцијалних B_j (не сви потенцијални за пројекат), бар један B_j за више A_i, сваки B_j са једном $D_{i1}, i \in I \subseteq I, j \in J_i \subset J, v \in V_i \setminus \{1\}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • За A_i са $n_i > 1$ бира се најповољнији B_j. |
| <p>(iv) $1 \leq n_i < n, d_i \geq 1$. За најмање једну $A_i (i = i_1)$ конкуришу више потенцијалних B_j (не сви) и најмање једна $A_i (i = i_2, i_2 = i_1 \text{ или } i_2 \neq i_1)$ има више $D_{iv}, i \in I^+ \subseteq I, j \in J_i \subset J, v \in V_i$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се најповољнији B_j и најповољнија D_{iv} за $d_i > 1$, односно D_{i1} за $d_i = 1$. |
| <p>(v) $n_i = n, d_i = 1$. Сви потенцијални B_j на пројекту могу обавити A_i са једном $D_{i1}, i \in I \subseteq I, j \in J_i = J, v \in V_i = \{1\}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се најповољнији B_j за дату D_{i1}. |
| <p>(vi) $n_i = n, d_i \geq 1$. Сви потенцијални B_j на пројекту могу обавити A_i, бар један B_j има више $D_{iv}, i \in I^+ \subseteq I, j \in J_i = J, v \in V_i$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Избор се врши као под (iv) имајући на уму $n_i = n$. |
| Фазе A_i за које конкурише потенцијални извођач B_j |
| <p>(vii) $m_j = 1$. B_j може обавити само једну A_i и подскуп J_i има један члан, $J_i = \{\text{индекс } i \text{ дате } A_i\}, j \in I_j \subset I, i \in I$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • $n_i = 1, d_i = 1$. Бира се B_j са D_{i1} ако само он конкурише за A_i, односно $J_i = \{\text{индекс } j \text{ познатог извођача } B_j\}$. • $n_i = 1, d_i \geq 1$. Бира се B_j и најповољнија D_{iv} ако само он конкурише за A_i. • $n_i \geq 1, d_i = 1$. B_j конкурише за A_i са најмање једним од преосталих извођача. Бира се B_j са датом D_{i1} ако је то повољније у односу на остале потенцијалне извођаче. • $n_i \geq 1, d_i \geq 1$. За A_i са варијантама параметара конкуришу B_j и најмање још један извођач. Бира се B_j са D_{iv} ако је то повољније у односу на остале потенцијалне извођаче. |
| <p>(viii) $1 \leq m_j < m$. B_j конкурише за више (не за све) $A_i, j \in I_j \subset I, i \in I$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Избор B_j врши се ако је то повољно са становишта карактеристика за A_i под (vii) разматрајући $m_j \geq 1$. |
| <p>(ix) $m_j = m$. B_j конкурише за све $A_i, j \in I_j = I, i \in I$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Избор B_j врши се ако једини конкурише за све A_i или је повољнији од осталих поренцијалних извођача. • Ако више B_j конкуришу за све A_i може се применити модел ВАО са таквим B_j, укључивањем критеријума пројекта (трајање и трошкове) и приоритета за B_j. |

4.3. РАЗЛИЧИТЕ ВАРИЈАНТЕ ПАРАМЕТАРА ПОТЕНЦИЈАЛНИХ ИЗВОЂАЧА НЕКИХ ФАЗА ПРОЈЕКТА

■ Сматра се да најмање једна фаза A_i има више потенцијалних извођача B_j са варијантама D_{ijv} за времена t_{ijv} и трошкове c_{ijv} , $v \in V_{ij} = \{1, \dots, d_{ij}\}$, где d_{ij} означава број варијанти D_{ijv} за A_i и B_j , $i \in I$, $j \in J_i$. Истовремено, постоји најмање једна фаза A_i са варијантама (најмање једном) D_{ijv} које немају истоветне параметре за све њене потенцијалне извођаче (најмање два) B_j , $i \in I$, $j \in J_i$, $v \in V_{ij}$. Наиме, $m^+ > 1$ фаза A_i су са $d_{ij} > 1$ и најмање једној одговара $n_i > 1$ од којих најмање један пар потенцијалних извођача (B_{j_1}, B_{j_2}) имају различите параметре $t_{i,j_1,v} \neq t_{i,j_2,v}$ и $c_{i,j_1,v} \neq c_{i,j_2,v}$, $i \in I$, $(j_1, j_2) \in J_i \subset J$. Није обавезно да B_{j_1} и B_{j_2} имају $d_{i,j_1} = d_{i,j_2}$. Нека $\underline{m}^+ > 0$ фаза има варијанте параметара.

- Познати извођачи B_j у проблемима 4.3.1 и(или) потенцијални извођачи B_j у проблемима 4.3.2 могу бити са довољним капацитетима или n^- извођача су ограничених капацитета. Решења зависе од особености проблема (табела 21.3).

■ Анализа и избор на пројекту усложњава се растом бројева m и n (фаза A_i и потенцијалних извођача B_j), а додатно растом бројева n_i , d_{ij} , m^+ и n^- . На примеру $n_i = 2$, $J_i = \{1, 2\}$ и $d_{ij} = 1$ одређене A_i , поређењем (B_1, B_2) могу настати следећи случајеви односа параметара и избора најповољнијег извођача, применом општег правила „повољнији извођач са мањим временом, односно мањим трошковима“:

- (i) $(t_{i11} = t_{i21}, c_{i11} = c_{i21})$, подједнако повољна оба B_j услед једнаких параметара.
- (ii) $(t_{i11} = t_{i21}, c_{i11} < c_{i21})$ или $(t_{i11} = t_{i21}, c_{i11} > c_{i21})$, за исто време повољнији је B_j са нижим трошковима (B_1 у првом случају, B_2 у другом случају).
- (iii) $(t_{i11} < t_{i21}, c_{i11} = c_{i21})$ или $(t_{i11} > t_{i21}, c_{i11} = c_{i21})$, за исте трошкове повољнији је B_j са краћим временом (B_1 у првом случају, B_2 у другом случају).
- (iv) $(t_{i11} = t_{i21}, c_{i11} \leq c_{i21})$ или $(t_{i11} = t_{i21}, c_{i11} \geq c_{i21})$, за исто време повољнији је B_j са нижим или једнаким трошковима (B_1 у првом случају, B_2 у другом случају).
- (v) $(t_{i11} \leq t_{i21}, c_{i11} < c_{i21})$ или $(t_{i11} \geq t_{i21}, c_{i11} > c_{i21})$, повољнији је B_j са нижим трошковима и мањим или једнаким временом (B_1 у првом случају, B_2 у другом случају).
- (vi) $(t_{i11} < t_{i21}, c_{i11} < c_{i21})$ или $(t_{i11} > t_{i21}, c_{i11} > c_{i21})$, за различите параметре повољнији је B_j са мањим временом и нижим трошковима (B_1 у првом случају, B_2 у другом случају).
- (vii) $(t_{i11} < t_{i21}, c_{i11} > c_{i21})$ или $(t_{i11} > t_{i21}, c_{i11} < c_{i21})$, извођачи нису упоредиви, избор се врши у зависности од њихових приоритета и усвојених вредности за критеријуме пројекта.

4.3.1. Познати извођачи фаза пројекта са варијантама параметара неких фаза

У зависности од расположивости капацитета познатих извођача за сваку фазу пројекта настају два проблема. Могу постојати извођачи којима је додељено више фаза, односно $m_j > 1$ фаза, $j \in J$. У општем случају, истом извођачу могу се доделити све фазе, $m_j = m$, и потребно је бирати варијанте параметара фаза са варијантама параметара, када је подесно применити модел ВАО.

**4.3.1.1. Проблем 3.а.1. Познати извођачи фаза,
 \underline{m}^+ фаза са варијантама параметара,
 извођачи довољних капацитета**

◆ Свака фаза A_i има познатог извођача B_j , $i \in I, j \in J_i$. Сви извођачи B_j имају довољне капацитете, $j \in J$. Потребно је извршити избор варијанте D_{ijv} са параметрима (t_{ijv}, c_{ijv}) коју ће познати извођач B_j користити за фазу A_i са варијантама параметара на основу нове бинарне променљиве h_{ijv} , $i \in I, j \in J_i, v \in V_{ij}$.

Општи математички модел:

$$\min C_p(t) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_{ij}} c_{ijv} h_{ijv}, \quad (115.1)$$

$$\min T_p(t) = T_p, \quad (115.2)$$

$$\max C_j(t) = \sum_{i \in I} \sum_{v \in V_{ij}} c_{ijv} h_{ijv}, \quad j \in J_i^- \quad (115.2+j)$$

$$\text{п.о.} \quad x_i \geq 0, \quad \forall i \in I \wedge K_i = \emptyset \quad (116)$$

$$x_i \geq y_k, \quad \forall i \in I \wedge K_i \neq \emptyset \quad (117)$$

$$y_i = x_i + \sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_{ij}} t_{ijv} h_{ijv}, \quad \forall i \in I \quad (118)$$

$$y_i \leq T_p, \quad \forall i \in I \wedge S_i = \emptyset \quad (119)$$

$$\sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_{ij}} h_{ijv} = 1, \quad \forall i \in I \quad (120)$$

$$h_{ijv} = \begin{cases} 1, \text{ ако се за } A_i \text{ бира } D_{ijv} \text{ за познатог } B_j \\ 0, \text{ у супротном} \end{cases}, \quad \forall (i \in I, j \in J_i^-, v \in V_{ij}) \quad (121)$$

$$x_i, y_i \geq 0, \quad \forall i \in I, T_p \geq 0 \quad (122)$$

Критеријуми, ограничења (116), (117), (118) и природни услови за непознате (122) се тумаче као у ранијим моделима. Трошкови пројекта (115.1) и извођача (115.2+j) прорачунавају се са новим елементима. Време t_i за A_i одређује се релацијом (118.а), користи за прорачун њеног завршетка y_i у (118.б) и преноси у (118). Услови (120) исказују да бинарне променљиве h_{ijv} (121) обезбеђују коришћење само једне варијанте параметара код било које фазе.

$$t_i = \sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_{ij}} t_{ijv} h_{ijv}, \quad \forall i \in I \quad (118.а)$$

$$y_i = x_i + t_i = x_i + \sum_{j \in J_i} \sum_{v \in V_{ij}} t_{ijv} h_{ijv}, \quad \forall i \in I \quad (118.б)$$

h_{ijv} – бинарна променљива прве врсте која има вредност $h_{ijv} = 1$ ако се за фазу A_i бира да познати извођач B_j користи варијанту D_{ijv} и параметре (t_{ijv}, c_{ijv}) , а у супротном је $h_{ijv} = 0$ (бира се нека друга варијанта), $i \in I, j \in J_i, v \in V_{ij}$.

**4.3.1.2. Проблем 3.а.2. Познати извођачи фаза,
 \underline{m}^+ фаза са варијантама параметара,
 n^- потенцијалних извођача пројекта ограничених
 капацитета**

◆ Овим проблемом врши се проширење проблема 3.а.1 условима (123) да $n^+ \geq 1$ извођача B_j имају ограничене капацитете $w_{j0}(t)$ и новим променљивама (124).

$$\sum_{i \in I} \sum_{v \in V_{ij}} w_{ijv}(t) h_{ijv}(t) \leq w_{j0}(t), \quad \forall (j \in J^-, t \in T) \quad (123)$$

$$h_{ijv}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ako } h_{ijv} = 1 \text{ i } A_i \text{ se obavlja u } t \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases}, \quad \forall (i \in I_j, j \in J_i, v \in V_{ij}, t \in T) \quad (124)$$

где:

$h_{ijv}(t)$ – бинарна променљива друге врсте која има вредност $h_{ijv}(t) = 1$ ако је $h_{ijv} = 1$ и A_i се обавља у временској јединици t , док у супротном је $h_{ijv}(t) = 0$ (не бира се D_{ijv} познатом B_j за A_i услед $h_{ijv} = 0$ и A_i се обавља у t , или се бира D_{ijv} са $h_{ijv} = 1$ али се A_i не обавља у t), $i \in I_j, j \in J_i, v \in V_{ij}, t \in T$.

Прорачун количине рада $w_{ijv}(t)$ извођача B_j за фазу A_i у временској јединици t на основу њеног трајања t_{ijv} са варијантом D_{ijv} :

$$w_{ijv}(t) = \frac{w_{i0}}{t_{ijv}}, \quad i \in I, j \in J_i, v \in V_{ij}, t \in T \quad (123.a)$$

4.3.2. Више потенцијалних извођача неких фаза, одређене фазе са различитим варијантама параметара

Проблеми 3.а са познатим извођачима B_j за све фазе A_i мењају се у проблеме 3.б са $n_i > 1$ потенцијалних извођача B_j за $m^+ > 1$ фаза $A_i, i \in I, j \in I_j$. При томе, бар једна (односно $\underline{m}^+ > 0$) фаза A_i има варијанте параметара (бар две варијанте, $d_{ij} > 1$), $i \in I$. Посматрајући све потенцијалне извођаче на пројекту, сви могу имати довољне капацитете или n^- имају ограничене капацитете, $1 < n^- \leq n$. Потребно је извршити избор B_j за m^+ фаза и варијанте параметара D_{ijv} за \underline{m}^+ фаза, $i \in I, j \in J_i, v \in V_{ij}$. Ако B_j има $d_{ij} = 1$ за A_i (једну варијанту параметара D_{ij1}), избор је неопходан само у првом случају (B_j за $m^+ > 1$ фаза A_i), $i \in I, j \in J_i$.

4.3.2.1. Проблем 3.б.1. m^+ фаза са више потенцијалних извођача, \underline{m}^+ фаза са варијантама параметара, потенцијални извођачи пројекта довољних капацитета

◆ Сви потенцијални извођачи B_j на пројекте имају довољне капацитете, $j \in J$. Модел 3.б.1 настаје из модела 3.а.1 заменом карактеристика бинарних променљивих h_{ijv} познатих извођача (121) са наредним условима за избор извођача:

h_{ijv} – бинарна променљива прве врсте која има вредност $h_{ijv} = 1$ ако се за фазу A_i бира извођач B_j са варијантом D_{ijv} за параметре (t_{ijv}, c_{ijv}) , а у супротном је $h_{ijv} = 0$ (бира се B_j са неком другом варијантом параметара, или не бира се B_j), $i \in I_j, j \in J_i, v \in V_{ij}$.

4.3.2.2. Проблем 3.б.2. m^+ фаза са више потенцијалних извођача, \underline{m}^+ фаза са варијантама параметара, n^- потенцијалних извођача пројекта ограничених капацитета

◆ Овим проблемом врши се проширење проблема 3.б.1 условом да n^- ретенцијалних извођача B_j на пројекту имају ограничене капацитете $w_{j0}(t), j \in J^-, t \in T$. Може се користити модел 3.а.2 са карактеристикама бинарних променљивих h_{ijv} модела 3.б.1 у условима (123) и новим бинарним променљивама $h_{ijv}(t)$ из наставка у условима (124):

$h_{ijv}(t)$ – бинарна променљива друге врсте која има вредност $h_{ijv}(t) = 1$ ако је $h_{ijv} = 1$ и A_i се обавља у временској јединици t , док у супротном је $h_{ijv}(t) = 0$ (не бира извођач B_j и варијанта D_{ijv} услед $h_{ijv} = 0$ и A_i се обавља у t , или се бира B_j и D_{ijv} са $h_{ijv} = 1$ али се A_i не обавља у t), $i \in I_j$, $j \in J_i$, $v \in V_{ij}$, $t \in T$.

Табела 21.3. Карактеристике проблема групе 3

| Потенцијални извођачи B_j и варијанте параметара за фазе A_i |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(i) $n_i = 1$, $d_{ij} = 1$. Познат је B_j за A_i са једном D_{ij1}, $i \in I$, $j \in J_i \subset J$. Следи: скуп $V_{ij} = \{1$, услед $D_{ij1}\}$ и подскуп $J_i = \{\text{индекс } j \text{ познатог } B_j\}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Не врши се избор. Формира се план пројекта са минималним трајањем T_p^{\min}. Прорачунавају се трошкови пројекта $C_p(T_p^{\min})$ и трошкови извођача $C_j(T_p^{\min})$. |
| <p>(ii) $n_i = 1$, $d_{ij} \geq 1$. Познат је B_j за A_i када бар један B_j има више D_{ijv} за одговарајућу A_i, $i \in I$, $j \in J_i \subset J$, $v \in V_{ij}$. $J_i = \{\text{индекс } j \text{ познатог } B_j\}$, $V_{ij} = \{\text{индекси } v \text{ за } D_{ijv}\}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се најповољнија D_{ijv} сагласно усвојеним вредностима за критеријуме пројекта и у зависности од капацитета извођача. <p><i>Напомена:</i> Избор одговарајућих елемената у наредним проблемима врши се сагласно са критеријумима пројекта, приоритетима потенцијалних извођача и њиховим капацитетима.</p> |
| <p>(iii) $1 \leq n_i < n$, $d_{ij} = 1$. За бар једну A_i конкуришу више B_j (не сви потенцијални за пројекат), сваки са једном D_{ij1}, $i \in I$, $j \in J_i \subset J$, $v \in V_{ij}$. $J_i = \{\text{индекси } j \text{ за } B_j \text{ код } A_i\}$, $V_{ij} = \{1$, услед $D_{ij1}\}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се B_j са најповољнијом D_{ij1}. |
| <p>(iv) $1 \leq n_i < n$, $d_{ij} \geq 1$. За бар једну A_i конкуришу више B_j (не сви потенцијални за пројекат) и бар један B_j има више D_{ijv}, $i \in I$, $j \in J_i \subset J$, $v \in V_{ij}$. $J_i = \{\text{индекси } j \text{ за } B_j \text{ код } A_i\}$, $V_{ij} = \{\text{индекси } v \text{ за } D_{ijv}\}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се најповољнији B_j и његова најповољнија D_{ijv}. |
| <p>(v) $n_i = n$, $d_{ij} = 1$. Сви потенцијални B_j за пројекат могу обавити A_i, сваки B_j са одговарајућом D_{ij1}.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се најповољнији B_j и његова D_{ij1}. |
| <p>(vi) $n_i = n$, $d_{ij} \geq 1$. Сви потенцијални B_j пројекта могу обавити A_i, бар један са више D_{ijv}.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се најповољнији B_j са D_{ij1} ако $d_{ij} = 1$, односно најповољнији B_j са најповољнијом D_{ijv} ако $d_{ij} > 1$. |
| Фазе A_i за које конкурише потенцијални извођач B_j |
| <p>(vii) $m_j = 1$. B_j може обавити само једну A_i, $I_j = \{\text{индекс } i \text{ познате } A_i\}$, $i \in I$, $j \in J_i \subset I$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Бира се B_j са познатом D_{ij1} ако само једино он конкурише за A_i и има $n_i = 1$. Ако је $n_i > 1$ и B_j конкурише за посматрану A_i са најмање једним од осталих потенцијалних извођача, избор B_j (са D_{ij1} за $n_i = 1$, D_{ijv} за $n_i > 1$) врши се када је то повољно. |
| <p>(viii) $1 \leq m_j < m$. B_j конкурише за више (не за све) A_i, $i \in I$, $j \in J_i \subset J$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Избор B_j врши се када је то повољно за критеријуме пројекта, као под (vii) имајући више могућности услед $m_j \geq 1$. |
| <p>(ix) $m_j = m$. B_j конкурише за све A_i, $i \in I$, $j \in J_i = J$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Избор B_j врши се ако једини конкурише за све A_i или је повољнији од осталих. • Ако ише извођача конкуришу за све A_i може се применити модел ВАО укључивањем критеријума пројекта (трајање и трошкове) и приоритета извођача. |

4.4. АЛГОРИТМИ РЕШАВАЊА ДЕФИНИСАНИХ ВК МЦЛП МОДЕЛА ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ВИШЕ ИЗВОЂАЧА ПРОЈЕКТА

Решавање напред дефинисаних линеарних вишекритеријумских модела избора извођача пројекта (ВК МЦЛП) врши се сагласно раније изложеној познатој методологији решавања модела ВКП (део 3) и општем процесу одређивања *Парето-оптималних решења*. Даље дефинисани алгоритми, у зависности од модела, укључују комбиновање методе ε -ограничења са методама оптимизацијом времена и трошкова (PERT/COST тумачене у делу 2). За случајеве ограничених капацитета потенцијалних извођача пројекта додатно се користи стандардни софтвер за управљање пројектима.

4.4.1. Алгоритми решавања модела групе 1 са јединственим параметрима фаза пројекта

Решавање модела ове групе, као и осталих група, зависи од врсте проблема (познати извођачи фаза пројекта или фазе имају више потенцијалних извођача) и типа проблема (довољни капацитети извођача или ограничених капацитета).

4.4.1.1. Алгоритми решавања модела 1.а са познатим извођачима фаза пројекта

Модел групе 1 имају јединствене параметре (време и трошкове) за фазе и познате извођаче. Позната је (m,n) матрица h^* са бинарним променљивама прве врсте $h_{ij}^* = 1$ ако је фаза A_i додељена извођачу B_j и $h_{ij}^* = 0$ ако није, $i \in I, j \in J$. Услед тога, у почетној анализи (*етапа 1*) одређује се коначно решење разматраног проблема (довољни или ограничени капацитети извођача). У суштини, потребно је одредити минимално трајање пројекта и прорачунати разматране трошкове (пројекта и извођача). Одлучивање се своди на избор таквог решења (*етапа 3*) или поновно разматрање проблема са могућим изменама извођача, односно параметара за фазе.

а) Алгоритам модела 1.а.1 са довољним капацитетима извођача

Табела 22.1. Алгоритам решавања модела 1.а.1 (87)-(92)

| | | |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Етапа 1 | Минимизација трајања пројекта (познато решење h^* за распоред извођача) | $\min T_p$ |
| | Анализа времена ручним поступцима и прорачун трошкова Или, примена стандардног софтвера за управљање пројектима – УП (<i>Project Management</i>) $\Rightarrow T_p^* = T_p^{\min}, C_p^* = C_p(T_p^*)$ за пројекат, $C_j^* = C_j(T_p^*)$ за извођаче $B_j, j \in J$ Или решавање модела софтвером за ЛП или ЛЦМП и израда плана софтвером за УП | |
| Етапа 3 | Избор познатог решења h^* и прорачунатих вредности $T_p^*, C_p^*, C_j^*, j \in J$ | |

**б) Алгоритам модела 1.а.2
са ограниченим капацитетима неких извођача**

Tabela 22.2. Алгоритам решавања модела 1.а.2 датом релацијама (87)-(93)

| | | |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| <i>Етапа 1</i> | Минимизација трајања пројекта са ограниченим капацитетима извођача (познато решење h^* за распоред извођача) | $\min T_p$ $W_j(t) \leq w_{j0}(t),$ $j \in J, t \in T$ |
| | Интерактивна примена стандардног софвера за <i>Project Management</i> : <u>Аналитичар</u> моделира пројекат са познатим h^* и поставља $w_{j0}(t)$ <u>Софтвер</u> одређује $T_p^*, T_p \geq T_p^*$ (T_p^* из модела 1.а.1) Прорачун трошкова $\underline{C}_p^* = C_p(T_p^*), \underline{C}_j = C_j(T_p^*), j \in J$ | |
| <i>Етапа 3</i> | Избор T_p^* , познатог решења h^* и прорачунатих вредности $\underline{C}_p^*, \underline{C}_j^*, j \in J$ | |

$W_j(t)$ је краћи запис потребних капацитета извођача B_j (125) за ограничења (111) разматраног модела 1.а.2 и 1.б.2, као и ограничења (123) моделе групе 2 и групе 3.

$$W_j(t) = \sum_{i \in I_j} w_i(t), \quad j \in J^-, t \in T \quad (125)$$

**4.4.1.2. Алгоритми решавања модела 1.б
са више потенцијалних извођача неких фаза пројекта**

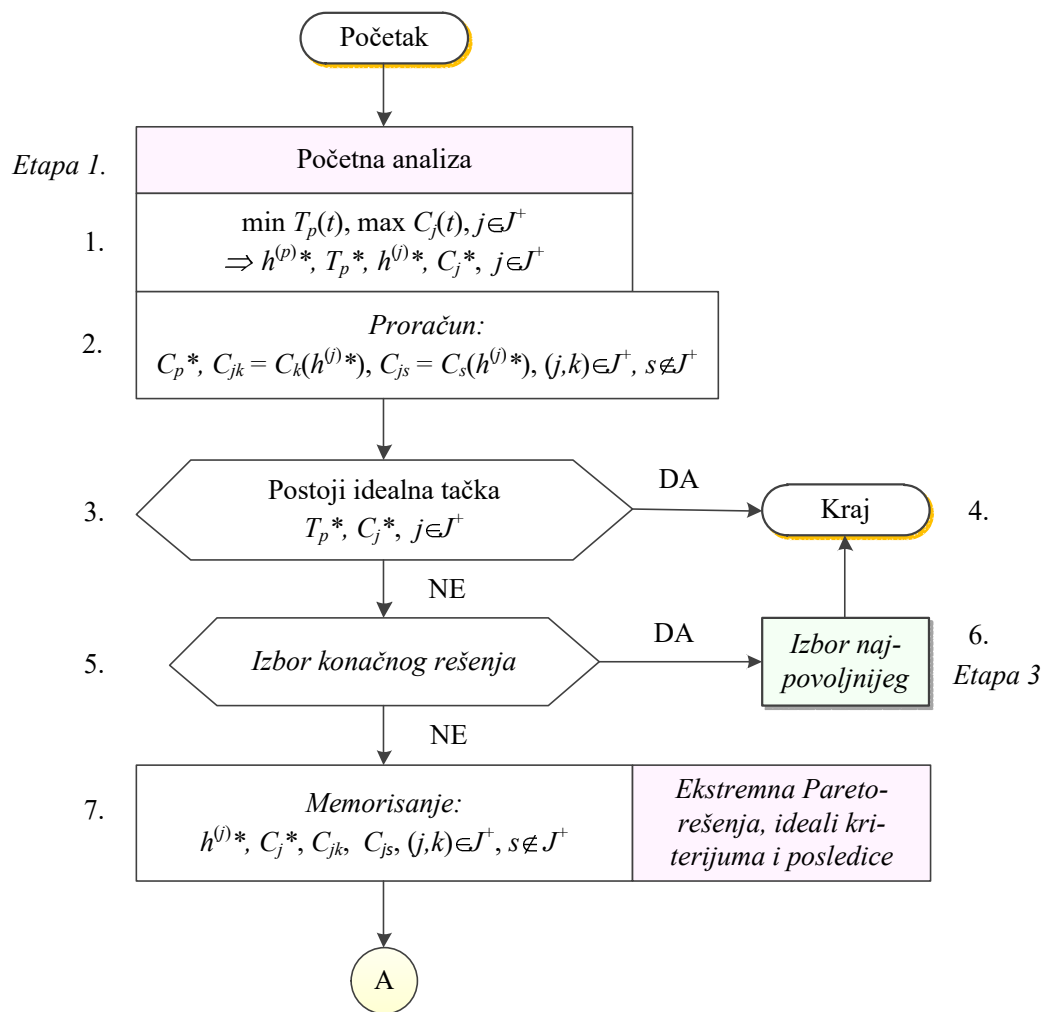
Више потенцијалних извођача исте фазе пројекта омогућавају да се, поред екстремних Парето-оптималних решења из почетне анализе (*етапа 1*), одреде нова Парето-оптимална решења са максимизацијом трошкова потенцијалних извођача (*етапа 2*). Тиме се проширује скуп решења за избор коначног решења (*етапа 3*). У наставку се предлажу алгоритми за нова Парето-решења сматрајући да извођачи имају лексикографски поредак значајности.

**а) Алгоритам модела 1.б.1 са довољним капацитетима
потенцијалних извођача пројекта**

**а.1) Почетна анализа модела 1.б.1
(Етапа 1)**

Корак 1. Оптимизација појединачних критеријума (97.1) и (97.1+j), што је подесно исказати са $\{\min T_p\}$ (126) и $\{\max C_j\}$ (127.j), у циљу да се одреде маргинална решења ($h^{(p)*}, h^{(j)*}$) са оптималним распоредима извођача која дају идеалне вредности критеријума ($T_p^*, C_j^*, j \in J^+$), Алгоритам 1.б.1 (слика 31.1), софтвер за МЦЛП.

Корак 2. Прорачун последица маргиналних решења, односно идеалних вредности критеријума којима је вршена оптимизација (број фаворизованх извођача n^+ означен са n_1 или $n1$) на остале критеријуме (табела 4.1).



Слика 31.1. Алгоритам 1.6.1. Почетна анализа са евентуалним избором коначног решења (Етапа 1, Етапа 3)

Табела 23.1. Последице маргиналних решења и идеала критеријума модела 1.6.1

| | Оптимизација | Маргин. решења | Фаворизовани извођачи $B_j, j \in J^+$ | | | | | $j \notin J^+$ | |
|-----------|---------------|-----------------|----------------------------------------|-----|------------------|-----|------------------------|----------------|--------------|
| | | | C_1 | ... | C_j | ... | C_{n1} | ... | C_n |
| 1 | $\max C_1$ | $h^{(1)*}$ | $C_{11} = C_1^*$ | ... | C_{1j} | ... | $C_{1,n1}$ | ... | $C_{1,n}$ |
| 2 | $\max C_2$ | $h^{(2)*}$ | C_{21} | ... | $C_{2j} \Pi$ | ... | $C_{2,n1} \Pi$ | ... | $C_{2,n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| j | $\max C_j$ | $h^{(j)*}$ | C_{j1} | ... | $C_{jj} = C_j^*$ | ... | $C_{j,n1}$ | ... | $C_{j,n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| n_1 | $\max C_{n1}$ | $h^{(n1)*}$ | $C_{n1,1}$ | ... | $C_{n1,j}$ | ... | $C_{n1,n1} = C_{n1}^*$ | ... | $C_{n1,n}$ |
| Најбоље | | $\max_j C_{jk}$ | C_1^* | ... | C_j^* | ... | C_{n1}^* | ... | C_n^{\max} |
| Најлошије | | $\min_j C_{jk}$ | C_1^{\min} | ... | C_j^{\min} | ... | C_{n1}^{\min} | ... | C_n^{\min} |

Минимално трајање пројекта T_p^{\min} и одговарајуће маргинално решење $h^{(p)*}$ одређује модел 1.а.1 са критеријумом (87) или (126) и ово трајање остаје непромењено у проблему 1.б.1. Услед тога, $h^{(p)*}$ није од значаја за даљу анализу. Очигледно је то вишеструко решење, пошто постоје друге комбинације распореда извођача за накнадно разматрање трошкова фаворизованих извођача. Оптимизација трошкова C_j модела 1.б.1 са критеријумом (94.ј) или (127.ј) у кораку 1 врши се засебно за $n_1 = n^+$ извођача B_j који се фаворизују. Са њиховим маргиналним решењима $h^{(j)*}$, као *екстремним Парето-оптималним решењима* проблема, $j \in J^+$, у кораку 2 потребно је посматрати одговарајуће трошкове (128) и трошкове нефаворизованих $n - n_1$ извођача B_s (129), $s \notin J^+$.

$$\min_{h,x,y} T_p \quad (126)$$

$$\max_{h,x,y} C_j(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{ij} \quad \text{посебно за свако } j \in J^+ \quad (127.j)$$

x, h, y – скуп ограничења (88)-(92), (95)-(96)

$$C_{jk} = C_k(h^{(j)*}), \quad (j,k) \in J^+ \quad (128)$$

$$C_{js} = C_s(h^{(j)*}), \quad j \in J^+, s \notin J^+ \quad (129)$$

Корак 3. Испита се да ли у $(n^+ + 1)$ -димензионалном простору постоји *идеална тачка* $(T_p^*, C_j^*, j \in J^+)$ са минималним трајањем пројекта и идеалним трошковима извођача. Ако постоји таква тачка, онда постоји и *савршено решење* исказано (m,n) -димензионалном матрицом $h^* = [h_{ij}^*]$ са бинарним променљивама за проблем у целости (за све извођаче), $i \in I, j \in J$, имајући на уму да се оптимизација врши само за фаворизоване извођаче са $j \in J^+$. Прелази се на корак 4 или 5.

Корак 4. Ако постоји h^* , оно је коначно решење са идеалима критеријума и процес се прекида.

Корак 5. Ако не постоји h^* , потребно је одлучити да ли неко од маргиналних решења са његовим последицама може бити усвојено као прихватљиво коначно решење. Прелази се на корак 6 или 7.

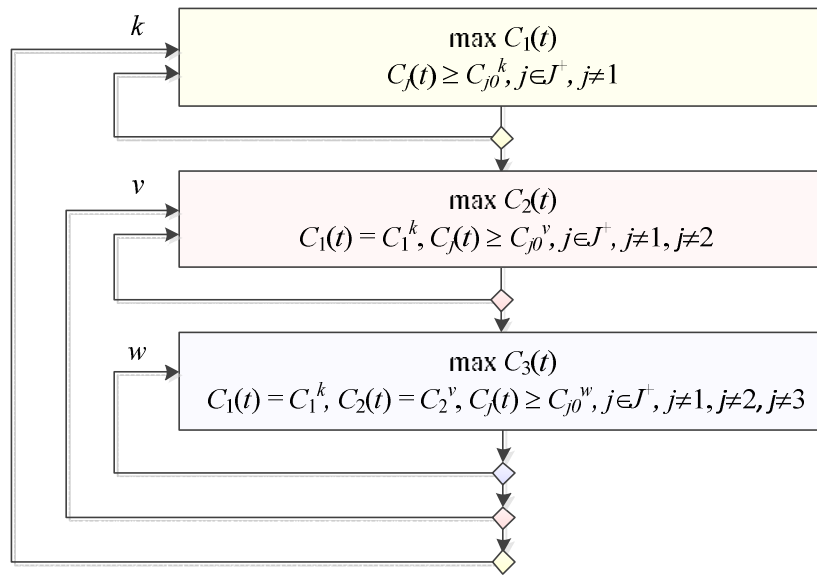
Корак 6. За потврдну одлуку се бира коначно решење (*етапа 3*) и процес се прекида (корак 4).

Корак 7. Ако је одлука негативна, врши се меморисање резултата почетне анализе модела (130) и прелази на наредну етапу.

$$h^{(j)*}, C_{kj}, (j,k) \in J^+, C_{sj}, j \in J^+, s \notin J^+ \quad (130)$$

а.2) *Нова Парето-оптимална решења модела 1.б.1* (*Етапа 2*)

Предлаже се специфичан процес примене *методе ϵ -ограничења* на примеру три извођача (слика 31.2). У основном циклусу за C_1 (слика 31.2.1) са подциклусом за C_2 (слика 31.2.2) и под-подциклусом за C_3 (слика 31.2.3), врши се дефинисање и решавање одговарајућих математичких модела сагласно строгом поретку приоритета извођача $B_1 \gg B_2 \gg B_3$.



Слика 31.2. Предложени процес одређивања нових *Парето-оптималних решења* модела 1.б.1 (*Етапа 2*)

Корак 8. Поставе се индикатори пролаза кроз алгоритам $k = 1, v = 0, w = 0$ за нова *Парето-оптимална решења* настала оптимизацијом C_1, C_2, C_3 , респективно.

Корак 9. Избор допустивих доњих граница $e_j^{k,v,w} = C_{j0}^{k,v,w}$ за трошкове C_j осталих фаворизованих извођача када се првом врши оптимизација, имајући на уму њихове последице C_{1j} остварене са идеалом C_1^* (односно са маргиналним решењем $h^{(1)*}$) првог извођача, њихове идеале C_j^* и њихове најлошије вредности C_j^{\min} из почетне анализе, $j \in J^+, j > 1$ (табела 4.1).

▣ Избор граница за критеријуме у овом циклусу (текући *корак 9*), подциклусу (*корак 15*) и подподциклусу (*корак 22*), јесте најзначајнији део процеса решавања модела. Од добро осмишленог избора граница зависи успешност решавања модела. Следе детаљније препоруке за прво ново *Парето-решење*.

Екстремно *Парето-оптимално решење* $h^{(1)*}$ има последицу C_1^* за сопствени критеријум $j = 1$ и $C_{1j} \leq C_j^*$ за критеријуме $j > 1$. Сходно дефиницији, *ново Парето-оптимално решење* (у овом случају $h^{(n_1+k,(v,w),1)} = h^{(n_1+k,(0,0),1)}$ за први пролаз кроз алгоритам) настаје ако се бар једном критеријуму увећа вредност и бар једном од преосталих критеријума умањи вредност. Индекс $(n_1+k) = (n_1+1)$ указује на решење $k = 1$ после маргиналног $h^{(n_1)*}$, док $(v,w), 1 = (0,0), 1$ означава да нису спроведени подциклус и под-подциклус, односно да се разматра критеријум C_1 .

■ Није обавезно уводити ограничења за све критеријуме или већи број критеријума $j > 1$, независно што ефикаснији софтвер за *МЦЛП у пост-оптималној анализи* (односно *анализи осетљивости*) за слободне чланове додатних ограничења о критеријумима (границе $C_{j0}^{k,v,w}$) приказује интервале њихових промена који задржавају текуће решење.

- Ново решење настаје са слободним члановима ван тих граница.
- Препоручује се да је за детаљнију анализу проблема потребно *поступно уводити границе само за један критеријум* (са наредним приоритетом, у односу на

критеријум коме се врши оптимизација) или границе за још један или два критеријума непосредно нижих приоритета.

Анализа за $k = 1$

- (i) Ако је $C_{12} < C_2^*$ и $h^{(1)*}$ јединствено решење, захтевом да расте вредност за C_2 избором $C_{20}^{1,0,0} > C_{12}$, ново решење $h^{(n+1,(0,0),1)}$ одређује већу вредност $C_{(n+1,(0,0),1),2} \geq C_{20}^{1,0,0} > C_{12}$ за C_2 и мању вредност $C_{(n+1,(0,0),1),1} < C_1^*$ за C_1 . Остали критеријуми ће мењати вредности (увећање или умањење) или ће задржати вредности.
- (ii) Ако је $C_{12} < C_2^*$ и $h^{(1)*}$ вишеструко решење, захтев $C_{20}^{1,0,0} > C_{12}$ може да не мења раније вредности критеријума, $h^{(n+1,(0,0),1)}$ је друго маргинално решење за C_1 тако да задржава $C_{(n+1,(0,0),1),1} = C_1^*$ и $C_{(n+1,(0,0),1),2} = C_{12}$.
- (iii) Ако је $C_{12} = C_2^*$, C_1 и C_2 имају истоветно маргинално решење $h^{(1)*} = h^{(2)*}$. Потребно је по аналогији посматрати да ли $h^{(1)*}$ има за C_3 последицу $C_{13} < C_3^*$ или $C_{13} = C_3^*$. Када је $C_{13} = C_3^*$, наставити са посматрањем C_{14} и C_4^* за C_4 .
- (iv) Ако се поставе границе за C_2 и C_3 , потребно је $C_{20}^{1,0,0}$ ближе вредности C_{12} и $C_{30}^{1,0,0}$ удаљеније од C_{13} (ближе најлошијој вредности C_3^{\min} или једнако тој вредности).

□ У наредним пролазима кроз алгоритам, са корацима $k > 1$, адекватан избор граница критеријумима нижих приоритета утиче да максимизација C_1 омогућава два приступа:

- (1) обезбедити узастопне могуће вредности $C_{(n+1+k,(0,0),1),1}$ ако се жели детаљна анализа модела и одређивање узастопних *Парето-оптималних решења*, или
- (2) издвојити само карактеристичне могуће вредности $C_{(n+1+k,(0,0),1),1}$.

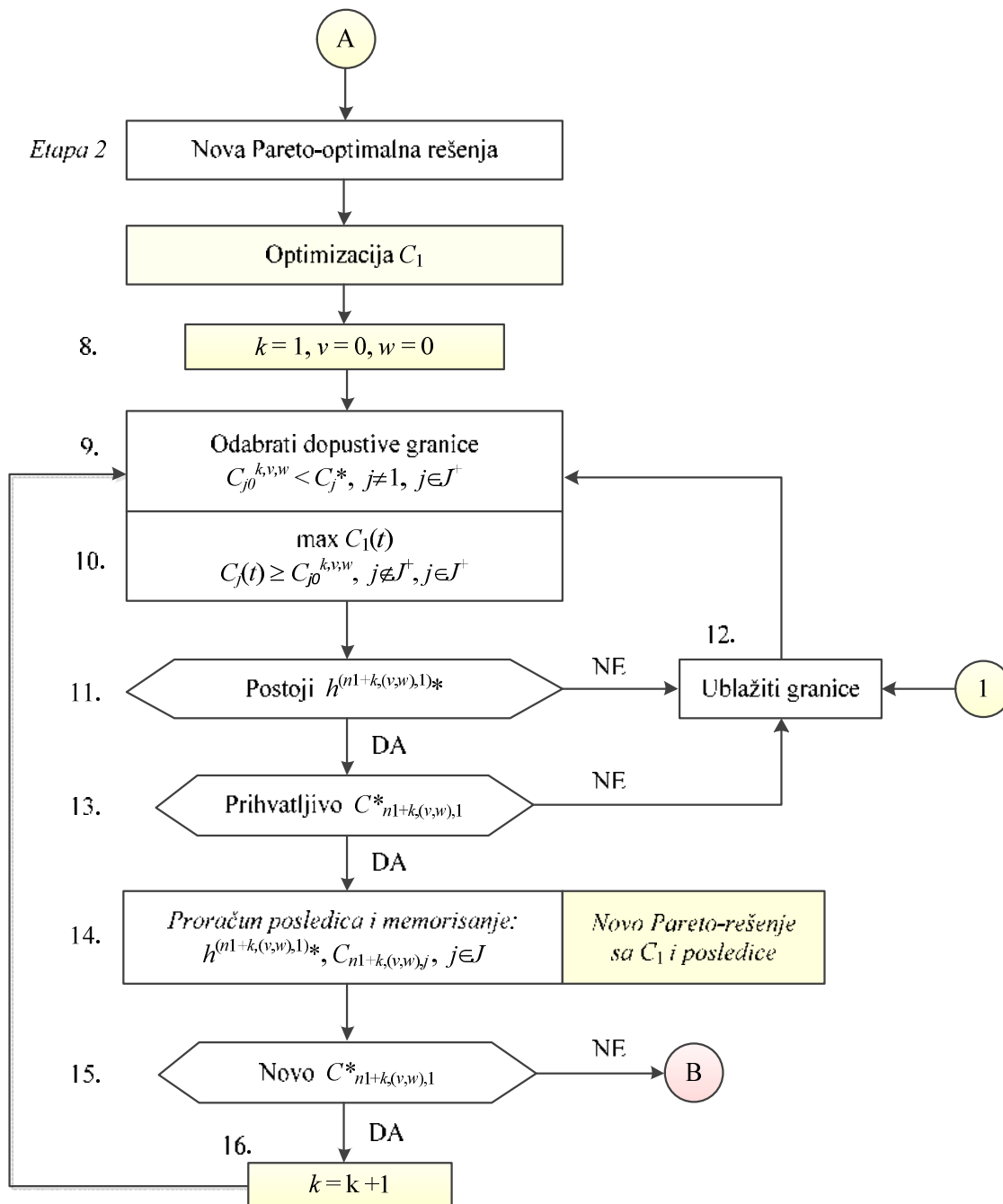
Корак 10. Решавање модела у k -том пролазу:

$$\begin{cases} \max_{h,x,y} C_1(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{i1} \\ C_j(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{ij} \geq C_{j0}^{k,v,w}, \quad j \neq 1, j \in J^+ \end{cases} \quad (131)$$

Корак 11. Испитивање да ли модел има решење, односно да ли постоји допустиво решење $h^{(n+1+k,(v,w),1)}$ са $C_{(n+1+k,(0,0),1),1}^*$. Са потврдним одговором се прелази на *корак 12*, у супротном на спроводи се *корак 13*.

Корак 12. Ублажавање граница, односно умањивање ранијих вредности $C_{j0}^{k,v,w}$ у *кораку 9* и наставак са *кораком 10*.

Корак 13. Испитивање да ли је прихватљива вредност $C_{(n+1+k,(0,0),1),1}^*$ за C_1 и C_2 . Следи наставак са *кораком 14* ако је оцена позитивна, односно разматрањем критеријума C_2 полазећи са *кораком 15* ако је оцена негативна.



Слика 31.2.1. Алгоритам 1.6.1. Нова Парето-оптимална решења (Етапа 2, оптимизација C_1)

Корак 14. Допустиво $h^{(n1+k,(v,w),1)*}$ је *novo Pareto-optimalno rešenje*. Потребно је прорачунати и меморисати последице овог решења, односно остварене трошкове свих извођача (не само фаворизованих):

$$h^{(n1+k,(v,w),1)*}, C_{(n1+k,(v,w),1)j} = C_j(h^{(n1+k,(v,w),1)*}), j \in J \quad (132)$$

Корак 15. Одлука да ли одредити нову вредност за C_1 . Ако је потребно, прелази се на **корак 16**. Са негативном одлуком прелази се на разматрање критеријума C_2 полазећи од **корака 17**.

Корак 16. Постави се $k = k+1$ и понови циклус оптимизације критеријума C_1 променом граница неким или свим осталим критеријумима у кораку 9.

- Раст C_1 се остварује са блажим границама (мањим вредностима), а опадање C_1 са строжијим (већим) границама.
- Потребно је утврдити критеријуме за промену граница и какве промене граница увести са циљем да се оствари захтевана промена C_1 .

■ Решење (132) модела (131) за критеријуме са доњим границама $C_{j_0}^{k,v,w}$ у ограничењима остварује вредности (133), које су једнаке тим границама (за $j \neq 1, j \in J^= \subseteq J^+$) или веће од тих граница (за $j \neq 1, j \in J^> \subseteq J^+$). Важи (134).

$$C_j(t) \geq C_{j_0}^{k,v,w} \Rightarrow C_j(h^{(n_1+k,(v,w),1)}) \begin{cases} = C_{j_0}^{k,v,w}, & j \in J^= \\ > C_{j_0}^{k,v,w}, & j \in J^> \end{cases} \quad (133)$$

$$\begin{cases} a) C_{j_0}^{k+1,v,w} > C_{j_0}^{k,v,w} \Rightarrow C_{n_1+(k+1),(v,w),1} < C_{n_1+k,(v,w),1}, & j \in J^= \\ b) C_{j_0}^{k+1,v,w} < C_{j_0}^{k,v,w} \Rightarrow C_{n_1+(k+1),(v,w),1} > C_{n_1+k,(v,w),1}, & j \in J^= \\ c) C_{j_0}^{k+1,v,w} < C_{j_0}^{k,v,w} \Rightarrow C_{n_1+(k+1),(v,w),1} > C_{n_1+k,(v,w),1}, & j \in J^> \end{cases} \quad (134)$$

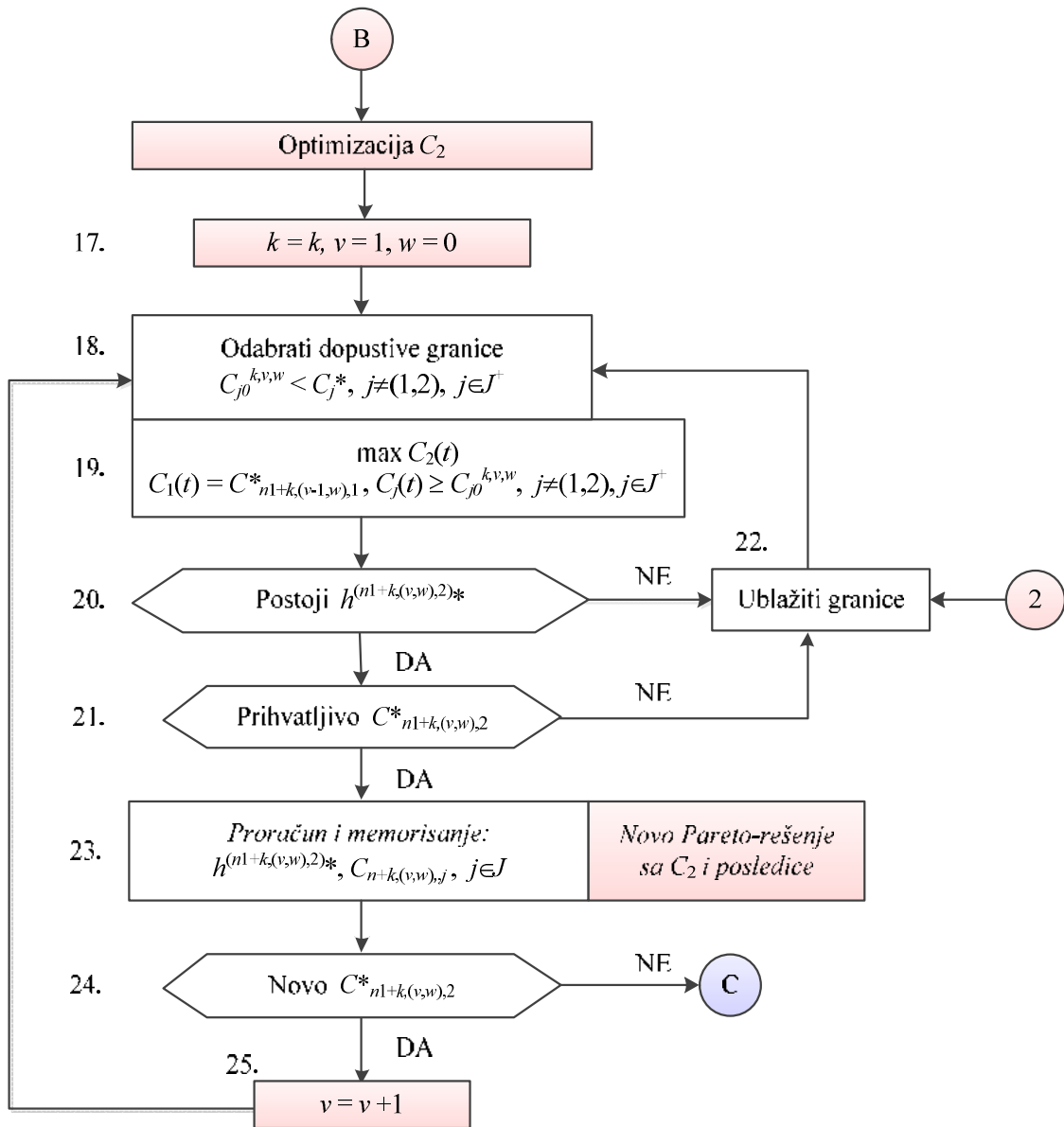
Наредно решење $h^{(n_1+(k+1),(v,w),1)}$ са итерацијом $(k+1)$ у односу на $h^{(n_1+k,(v,w),1)}$ из итерације k , даје промене вредности критеријума C_1 са решењем модела (135):

- а) *строжије границе* критеријума $j \in J^=$ умањују нову вредност C_1
- б) *блаже границе* критеријума $j \in J^=$ увећавају C_1
- в) *довољно блаже границе* критеријума $j \in J^=$ увећавају $j \in J^=$.

Корак 17. (слика 1.2.2) Одређивање *нових Парето-оптималних решења* спроводећи условну оптимизацију C_2 уважавањем остварене вредности $C_{(n_1+k,(v,w),1),2}^*$ у текућем пролазу k основног циклуса процеса решавања модела. Постави се $v = 1$ (број *Парето-оптималних решења* генерисаних са C_2 , односно број пролаза кроз први подциклус процеса решавања модела), задржавајући $k = k$ и $w = 0$.

Наредни *кораки* 18-25 за оптимизацију C_2 су аналогни са изложним *корацима* 9-16 за оптимизацију C_1 . Основна разлика настаје при дефинисању модела (131) у *кораку* 10 за оптимизацију C_1 и модела (135) у *кораку* 19 за оптимизацију C_2 .

Условљена оптимизација критеријума C_2 врши се са границама $C_{j_0}^{k,v,w}$ које се постављају у *кораку* 18 за критеријуме $j \neq 1$ и $j \neq 2$, са захтевом да C_1 задржи достигнуту вредност $C_1(t) = C_{(n_1+k,(v,w),1),1}$ из *корака* 10.

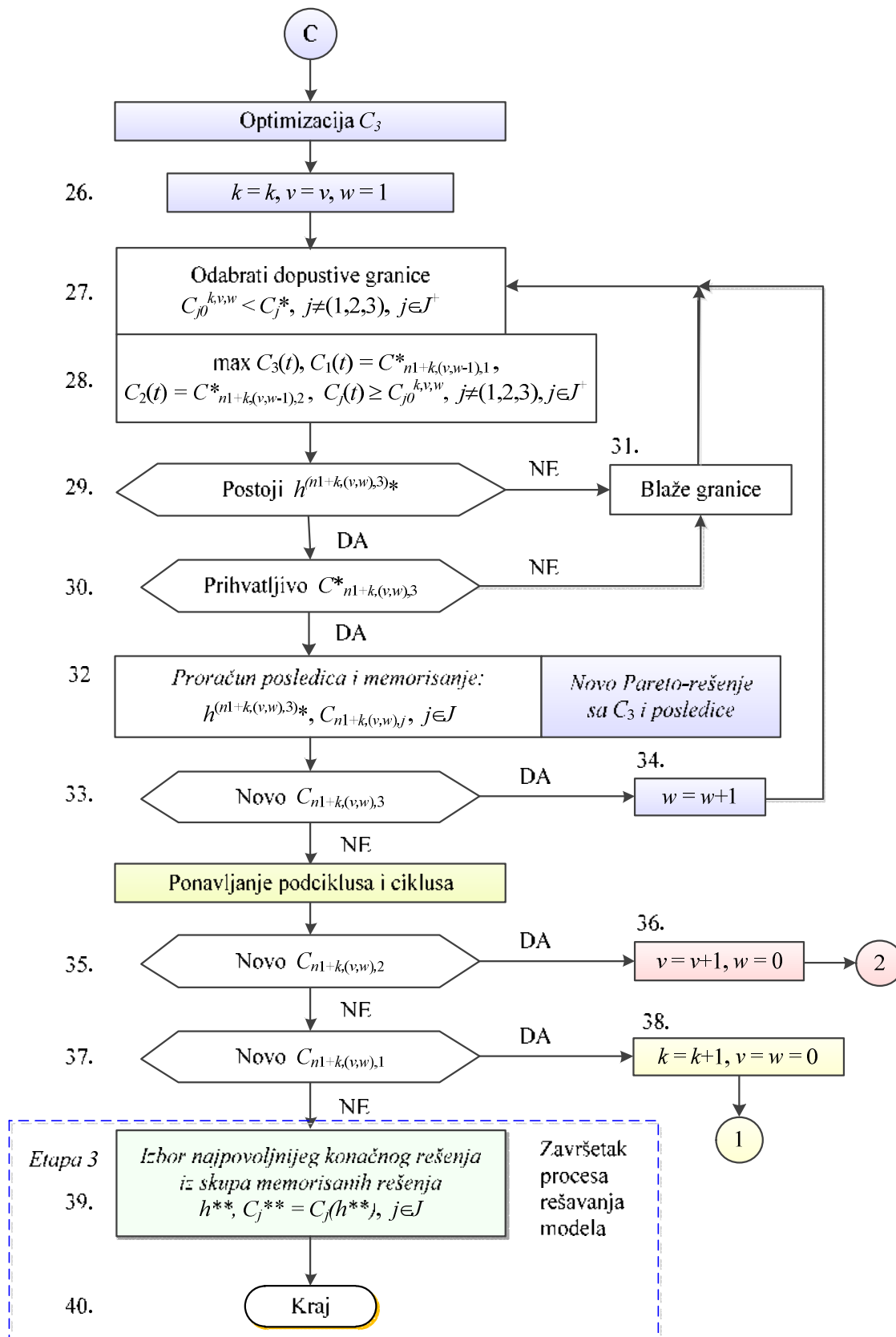


Слика 31.2.2. Алгоритам 1.б.1. Нова Парето-оптимална решења (Етапа 2, једноструко условљена оптимизација C_2)

Корак 19. Решавање модела оптимизације C_2

$$\begin{cases} \max_{h,x,y} C_2(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{i2}, & j = 2 \\ C_1(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{i1} = C_{n_1+k,(v,w),1}, & j = 1 \\ C_j(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{ij} \geq C_{j0}^{k,v,w}, & j \neq 1, j \neq 2, j \in J^+ \end{cases} \quad (135)$$

Корак 24. Ако се не захтева одређивање нове вредности $C_{n_1+k,(v,w),2}$ даљом оптимизацијом C_2 , прелази се на оптимизацију C_3 полазећи са *корак*ом 26 (слика 1.2.3).



Слика 31.2.3. Алгоритам 1.б.1. Нова Парето-оптимална решења (Етапа 2, двоструко условљена оптимизација C_3) и избор коначног решења (Етапа 3)

Корак 26. Преносе се индикатори (k, v) за основни циклус оптимизације C_1 и подциклус оптимизације C_2 дефинисањем $(k = k, v = v)$ и постави $w = 1$ за број нових *Парето-оптималних решења* која се одређују оптимизацијом C_3 у посматраном под-подциклусу.

Сходно напред наведеној аналогiji *седам корака, 9-16* за оптимизацију C_1 и *18-25* за оптимизацију C_2 , следе *кораки 27-35* за оптимизацију C_3 . У *кораку 27* се постављају доње границе $C_{j0}^{k,v,w}$ за критеријуме $j \neq (1, 2, 3), j \in J^+$, са којима се дефинише модел (136) у текућем под-подциклусу:

$$\begin{cases} \max_{h,x,y} C_3(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{i3}, & j = 3 \\ C_1(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{i1} = C_{n_1+k,(v-1,w),1}, & j = 1 \\ C_2(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{i2} = C_{n_1+k,(v-1,w),2}, & j = 2 \\ C_j(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{ij} \geq C_{j0}^{k,v,w}, & j \neq 1, j \neq 2, j \neq 3, j \in J^+ \end{cases} \quad (136)$$

Врши се *двоструко условљена оптимизација* C_3 ($j = 3$) са становишта раније разматраних критеријума (пре постављања $v = v+1$) којима је сада потребно задржати остварене вредности: $C_{n_1+k,(v-1,w),1}$ за C_1 ($j = 1$) из *корака 10* основног циклуса и $C_{n_1+k,(v-1,w),2}$ за C_2 ($j = 2$) из *корака 19* подциклуса коме се разматра текући под-подциклус. Ограничења са одабраним доњим границама постављају се за трошкове преосталих фаворизованих извођача $j > 3, j \in J^+$

1) Кључни кораки процеса решавања модела 1.б.1

Доношење одлука за *наставак оптимизације одговарајућих критеријума*, односно одлука за *налажење њихових нових вредности*, врши се у наредним кључним корацима процеса решавања модела:

- *кораки одлучивања 15, 24 и 33* након меморисања текућег решења за C_1, C_2 и C_3 (респективно), после којих се у наредним *корацима 16, 25 и 34* прво увећају за један бројеви итерација оптимизације посматраних критеријума ($k = k+1$ у *кораку 16*, $v = v+1$ у *кораку 26* и $w = w+1$ у *кораку 36*), а затим настави са избором граница за вредности одговарајућих критеријума (*корак 9* после *корака 15* за C_1 , *корак 18* после *корака 24* за C_2 и *корак 27* после *корака 33* за C_3)
- *кораки одлучивања 35 и 37* после оптимизације C_3 , када се на потврду наставка процеса одређивања решења са новим вредностима критеријума увећају бројеви итерација оптимизације C_2 и C_1 , уз поништавање бројева итерација свих критеријума нижих нивоа (у *кораку 36* за даљу оптимизацију C_2 се постави $v = v+1$ и $w = 0$, а у *кораку 38* за даљу оптимизацију C_1 се постави $k = k+1$ и $v = w = 0$) и даље настави са избором граница за вредности одговарајућих критеријума (*корак 18* после *корака 35* за C_2 и *корак 9* после *корака 37* за C_1).

**2) Модификовани алгоритам модела 1.б.1
(Одређивање свих Парето-оптималних решења
или одабраног подскупа таквих решења)**

Напред предложени алгоритам решавања модела 1.б.1, првенствено одређује мањи или већи број одабраних Парето-оптималних решења која остварују вредности критеријума од значаја за избор коначног решења. Алгоритам одређује и сва решења ове врсте, ако су потребна.

Међутим, за налажење свих Парето-оптималних решења може да се сачини одговарајући модификовани алгоритам (слика 1.2.4), када су неопходне максималне и допустиве узастопне вредности критеријума. Показаће се да овај алгоритам, такође, налази и само одабрана решења.

■ Максималне вредности критеријума $C_j^0 = C_j^*$ (137.1) настају ако се извођачу B_j доделе све фазе A_i за које је квалификован (постави се $h_{ij}^{0,j} = 1$), $p=0, i \in I_j^0 = I_j, j \in J^+$. Подразумева се $h_{ij}^{0,j} = 0, i \notin I_j^0, j \in J^+$. Вредности су потребне за полазну анализу модела.

$$p = 0 \Rightarrow \begin{cases} h_{ij}^{0,j} = 1, \forall i \in I_j^0 = I_j, & j \in J^+ \\ C_j^0 = C_j^* = \sum_i (c_i h_{ij}), i \in I_j^0, & j \in J^+ \end{cases} \quad (137.1)$$

■ Узастопне вредности критеријума C_j^p, C_j^{p+1}, \dots (137.2) одређују се изостављањем фазе A_s са најмањим трошковима c_s посматрајући A_i које су оствариле C_j^{p-1} (постави се $h_{ij}^p = 1, i \neq s$), $p \geq 1, i \in I_j^p$. Подразумева се $h_{ij}^{p,j} = 0$ за остале случајеве $(i, j), i \in I, j \in J^+$. Ако више фаза имају наведене трошкове, изостави се само једна. Постави се $I_j^p = \{I_j^{p-1} - s\}$. Ове вредности се користе за налажење нових Парето-оптималних решења.

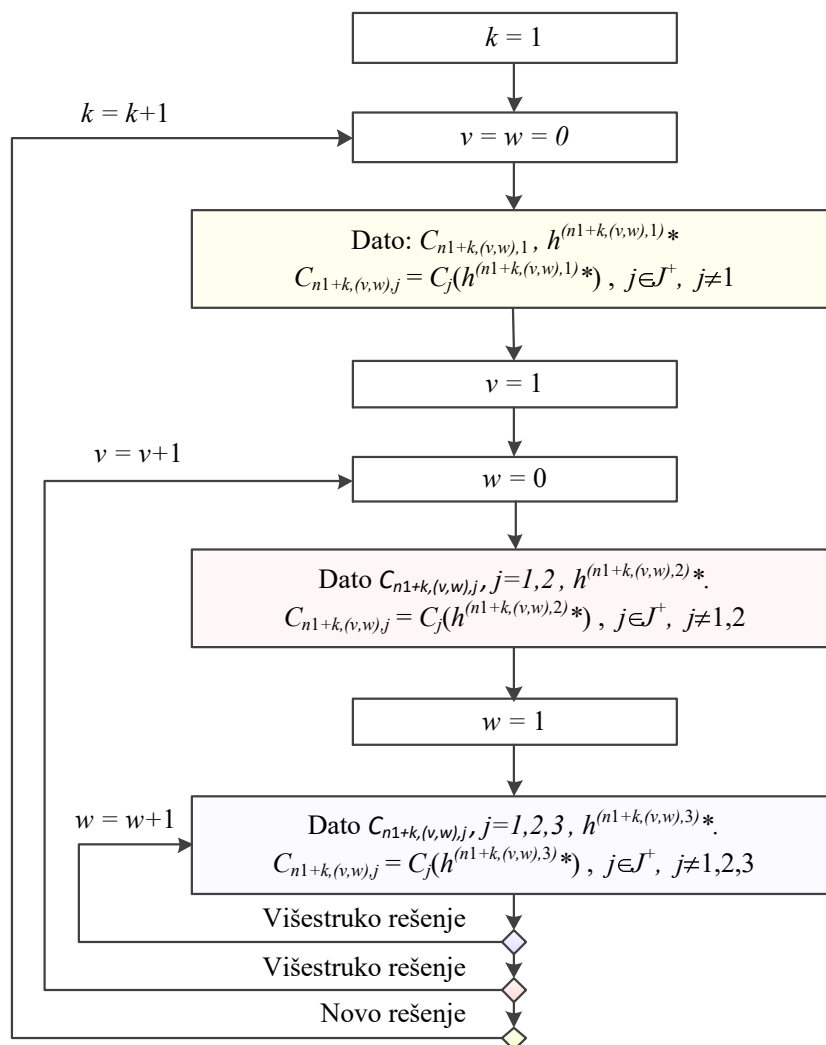
$$p \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} h_{sj}^{p,j} = 0 \mid c_s = \min(c_i, i \in I_j^{p-1}), & j \in J^+ \\ C_j^p = \sum_i (c_i h_{ij}), i \in I_j^p, & I_j^p = \{I_j^{p-1} - s\} \end{cases} \quad (137.2)$$

■ Означи се број узастопних вредности C_j са q_j и скуп редних редних бројева са $Q_j = \{1, \dots, q_j\}$, скуп опадајућих узастопних вредности са C_j^u и одговарајући скуп распореда извођача са $x_j^u = \{x_{ij}\}$:

$$\begin{cases} C_j^u = \{C_j^1, C_j^2, \dots, C_j^{q_j}\}, & j \in J^+, C_j^1 = C_j^* \\ h_j^u = \{h_j^1, h_j^2, \dots, h_j^{q_j}\}, & j \in J^+, h_j^1 = h^{(j)*} \end{cases} \quad (137.3)$$

Модификовани алгоритам се заснива на претраживању допустивих узастопних вредности критеријума, тако да не захтева напред изложено формирање и решавање одговарајућих математичких модела максимизације једног критеријума са преношењем

у ограничења свих осталих критеријума, захтевајући да критеријуми нижих приоритета не остваре ниже вредности од постављених доњих граница и критеријуми виших приоритета задрже раније остварене вредности.



Слика 31.2.4. Модификовани алгоритам одређивања свих или дела нових Парето-оптималних решења модела 1.б.1 (Етапа 2)

Процес испитивања допустивих вредности критеријума се спроводи аналогно претходном алгоритму (услед тога, даље се описује процес решавања модела без детаљног рашчлањавања на појединачне кораке):

- *основни циклус* за C_1 (понавља се за сваку допустиву вредност),
- *подциклус* за C_2 (понавља се за вишеструко решење распореда извођача) и
- *подподциклус* за C_3 (понавља се за вишеструко решење распореда извођача).

Како модел може да има велики број Парето-оптималних решења, процес решавања може да се прекине након разматрања узастопних вредности критеријума C_1 закључно са неком карактеристичном вредношћу. Или се не разматрају све узастопне вредности C_1 , већ само оне за које се сматра да су од значаја за избор коначног решења.

(1) Разматрање критеријума C_1

Основни циклус са итерацијама $(k, v = w = 0)$ разматра дате вредности првог критеријума и одговарајуће распореде извођача из скупова (137.3), C_1^u и h_j^u , респективно: $C_{n1+k,(0,0),1} = C_1^k$ и $h_{ij}^{(n1+k,(0,0),1)} = h_1^k$, $k=1,2,\dots,q_1$. За сваку итерацију се врши прорачун и меморисање последица на остале критеријме:

$$h_{ij}^{(n1+k,(v,w),1)}, C_{n1+k,(v,w),j} = C_j(h_{ij}^{(n1+k,(v,w),1)}), j \in J \quad (138)$$

(2) Разматрање критеријума C_2

Спроводи се подциклус разматрања датих вредности критеријума C_1 и C_2 . У свакој итерацији $(k, v, w = 0)$ се постави $C_{n1+k,(v,0),1} = C_1^k$ за C_1 из текуће итерације основног циклуса (k) и $C_{n1+k,(v,0),2}$ за C_2 у текућој итерацији подциклуса (v) која задржава $C_{n1+k,(v,0),1}$. Потребно је утврдити да ли постоји распоред извођача h_2^v за C_2 из скупа h_2^u (137.3) који даје $C_{n1+k,(v,0),1}$. Ако постоји, h_2^v је друго оптимално решење за C_1^k , или је $h_2^v = h_1^k$. Решење текуће итерације подциклуса (v) је распоред извођача $h_{ij}^{(n1+k,(v,0),2)} = h_2^v \in h_2^u$ са којим се врши прорачун и меморисање последица (139). Ако не постоји наведено h_2^v , процес решавања модела се завршава са претходном итерацијом основног циклуса $(k - 1)$. Ако постоји вишеструко h_2^v , са сваким се понови итерација подциклуса $(v = v + 1)$ и испитају се вредности C_3 .

$$\begin{cases} C_{n1+k,(v,0),1} = C_1(h_{ij}^{(n1+k,(v,0),2)}), & j = 1 \\ C_{n1+k,(v,0),2} = C_2(h_{ij}^{(n1+k,(v,0),2)}), & j = 2 \\ C_{n1+k,(v,0),j} = C_j(h_{ij}^{(n1+k,(v,0),2)}), & j > 2, j \in J \end{cases} \quad (139)$$

(3) Разматрање критеријума C_3

Критеријум C_3 се разматра у подподциклусу чије су итерације (k, v, w) аналогне итерацијама $(k, v, 0)$ подциклуса за C_2 . Испита се да ли постоји распоред $h_3^w \in h_3^u$ који задржава C_1 и C_2 . Ако постоји, $h_{ij}^{(n1+k,(v,w),3)} = h_3^w$ је решење за прорачун и меморисање последица.

$$\begin{cases} C_{n1+k,(v,w),1} = C_1(h_{ij}^{(n1+k,(v,w),3)}), & j = 1 \\ C_{n1+k,(v,w),2} = C_2(h_{ij}^{(n1+k,(v,w),3)}), & j = 2 \\ C_{n1+k,(v,w),3} = C_3(h_{ij}^{(n1+k,(v,w),3)}), & j = 3 \\ C_{n1+k,(v,w),j} = C_j(h_{ij}^{(n1+k,(v,w),3)}), & j > 3, j \in J \end{cases} \quad (140)$$

Ако не постоји наведени распоред h_3^w , процес се завршава са итерацијом подциклуса $(v-1)$. Са сваким евентуалним вишеструким распоредом h_3^w спроводи се итерација $(w = w+1)$.

**а.3) Избор коначног решења модела 1.б.1
(Етапа 3)**

Меморисана маргинална решења са последицама из почетне анализе (корак 7, табела 4.1) и нова Парето-оптимална решења са последицама из првог алгоритма (кораки 14, 23 и 32, респективно при максимизацији C_1 , C_2 и C_3), или из модификованог алгоритма, чине решење разматраног проблема 4.1.б (табела 4.2).

Табела 23.2. Маргинална и нова Парето оптимална решења модела 1.б.1

| | | k | v | w | max | Парето-оптимална решења | $C_j, j \in J^+$ | | $C_j, j \notin J^+$ | | |
|-----------------------------|-------------------|---------|-----|-----|-----------|-------------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|------------|---------------------|
| | | | | | | | C_1 | ... | ... | C_n | |
| Етапа 1. Почетна анализа | 1 | 0 | 0 | 0 | C_1 | $h^{(1)} *$ | $C_{11} = C_1 *$ | ... | ... | C_{1n} | |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | C_2 | $h^{(2)} *$ | C_{21} | ... | ... | C_{2n} | |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | |
| | n_1 | 0 | 0 | 0 | C_{n_1} | $h^{(n_1)} *$ | C_{n_11} | ... | ... | C_{n_1n} | |
| | max | - | - | - | - | - | $C_1 *$ | ... | - | - | |
| | min | - | - | - | - | - | C_1^{\min} | ... | - | - | |
| Етапа 2. Нова решења | Итерација $k = 1$ | n_1+1 | 1 | 0 | 0 | C_1 | $h^{(n_1+1,(0,0),1)}$ | $C_{n_1+1,(0,0),1}$ | ... | ... | $C_{n_1+1,(0,0),n}$ |
| | | | 1 | 1 | 0 | C_2 | $h^{(n_1+1,(1,0),2)}$ | $C_{n_1+1,(1,0),1}$ | ... | ... | $C_{n_1+1,(1,0),n}$ |
| | | | 1 | 1 | 1 | C_3 | $h^{(n_1+1,(1,1),3)}$ | $C_{n_1+1,(1,1),1}$ | ... | ... | $C_{n_1+1,(1,1),n}$ |
| | | | 1 | 1 | 2 | C_3 | $h^{(n_1+1,(1,2),3)}$ | $C_{n_1+1,(1,2),1}$ | ... | ... | $C_{n_1+1,(1,2),n}$ |
| | | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | | 1 | 2 | 0 | C_2 | $h^{(n_1+1,(2,0),2)}$ | $C_{n_1+1,(2,0),2}$ | | | $C_{n_1+1,(2,0),n}$ |
| | | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | | | 1 | 3 | 0 | C_2 | $h^{(n_1+1,(3,0),2)}$ | $C_{n_1+1,(3,0),2}$ | | | $C_{n_1+1,(3,0),n}$ |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | | |
| | Итер. $k = 2$ | n_1+2 | 2 | 0 | 0 | C_1 | $h^{(n_1+2,(0,0),1)}$ | $C_{n_1+2,(0,0),1}$ | ... | ... | $C_{n_1+2,(0,0),n}$ |
| | | | 2 | 1 | 0 | C_2 | $h^{(n_1+2,(1,0),2)}$ | $C_{n_1+2,(1,0),1}$ | ... | ... | $C_{n_1+2,(1,0),n}$ |
| | | | 2 | 1 | 1 | C_3 | $h^{(n_1+2,(1,1),3)}$ | $C_{n_1+2,(1,1),1}$ | ... | ... | $C_{n_1+2,(1,1),n}$ |
| | | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Даљом анализом пронађених и меморисаних Парето-оптималних решења врши се избор коначног решења разматраног модела 1.б.1. Избор је $h^{(1)} *$ са $C_1 *$, ако је то јединствено оптимално решење, односно алтернативно решење које даје $C_1 *$ и што је могуће већу вредност C_2 .

б) Алгоритам модела 1.б.2 са ограниченим капацитетима неких потенцијалних извођача пројекта

Решавање модела 1.б.2 са релацијама (97.1)-(106) врши се применом напред дефинисаних алгоритама за модел 1.б.1, уважавајући ограничења за капацитете извођача који могу да продуже минимално трајање пројекта T_n^{\min} одређено моделом 1.б.1 са довољним капацитетима извођача.

Парето-оптимална решења сваког модела са ограниченим капацитетима извођача су бинарне променљиве друге врсте.

б.1) Почетна анализа модела 1.б.2 (Етапа 1)

Маргинално решење $h^{(p)*}$ за минимално трајање пројекта T_p^* , $T_p^* \geq T_p^{\min}$ одређује се применом модела (141) за критеријум (97.1) и маргинална решења $h^{(j)*}$ за максималне трошкове фаворизованих извођача применом модела (142.j) за критеријум (97.1+j), $j \in J^+$. Последице маргиналних решења су (143.1) и (143.2).

$$\begin{cases} \min_{h,x,y} T_p(t) \\ W_j(t) \leq w_{j0}(t), \quad j \in J^-, t \in T \end{cases} \quad (141)$$

$$\begin{cases} \max_{h,x,y} C_j(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{j \in J_i} c_i h_{ij}, \quad \text{posebno za svako } j \in J^+ \\ W_j(t) \leq w_{j0}(t), \quad j \in J^-, t \in T \end{cases} \quad (142.j)$$

где:

h, x, y – основни скуп ограничења (98)-(102),(104)-(106), подразумева се и даље не истиче

$W_j(t) = \sum_{i \in I_j} w_i(t) h_{ij}(t)$ – потребно ангажовање извођача B_j , леве стране ограничења (103), $j \in J^-, t \in T$

$h_{ij}(t)$ – бинарна променљива друге врсте за одлучивање са условом (105): вредност 1 ако се фаза A_i обавља у временској јединици t и додељена је извођачу B_j (у супротном, вредност 0), $i \in I_j, j \in J_i, t \in T$

$$\begin{cases} T_p^* = T_p(h^{(p)*}) \\ C_j^{(p)} = C_j(h^{(p)*}), \quad j \in J, t \in T \end{cases} \quad (143.1)$$

$$\begin{cases} T_p^{(j)} = T_p(h^{(j)*}) \\ C_j^* = C_{jj}(h^{(j)*}), C_{jk} = C_k(h^{(j)*}), \quad (j,k) \in J^+ \\ C_{js} = C_s(h^{(j)*}), \quad j \in J^+, s \notin J^+ \end{cases} \quad (143.2)$$

■ Трајање пројекта одређује распоред извођача и њихови расположиви капацитети, тако да се модел (142.j) не може решавати независно од модела (141). Како (142.j) налази максималне вредности C_j^* (143.2), добијена времена трајања пројекта $T_p^{(j)}$ могу да буду дужа од минималног трајања T_p^* (143.1). Прозилази да се идеална вредност T_p^* одређује истовремено са максимизацијом трошкова C_1 извођача B_1 највишег приоритет (144.1).

$$\begin{cases} \min T_p(t) \\ \max C_1(t) = \sum_{i \in I_1} c_i h_{i1} \\ W_j(t) \leq w_{j0}(t), \quad j \in J^+ \end{cases} \quad (144.1)$$

■ Модели са ограниченим капацитетима извођача сложено се решавају применом само аналитичких метода. Зато се предлаже рационалнији приступ са *комбиновањем два поступка у интеракцији "аналитичар-софтвер"*:

- (1) *Одређивање распореда извођача без ограничених капацитета* (модел 1.б.1)
- (2) *Примена софтвера за управљање пројектима (УП)* да се нивелисањем ресурса одреди минимално трајање пројекта уважавањем ограничених капацитета извођача.

Бикритеријумски модел (144.1) се једноставно решава применом *методе ε -ограничења* са моделом (144.2). Врши се минимизација T_p са трошковима C_1 пренетим у ограничења. Горње границе C_{10}^k дате су скупом q_1 допустивих вредности C_1^u са одговарајућим распоредима извођача h_1^u (137.3). Постављањем $C_{10}^k = C_1^k \in C_1^u$ и $h_1^k \in h_1^u$ применом софтвера за управљање пројектима одређује се $T_p^k = T_p(h_1^k)$, $k \in Q_1$. Минимално трајање пројекта, односно идеалну вредност T_p^* одређује најмање трајање T_p^k . Нека је то T_p^z , $z \in Q_1$ (137.3). Тиме је утврђено и маргинално решење $h^{(p)*} = h_1^z$ за T_p . Вредности T_p^* и $C_1(T_p^*) = C_1(h^{(p)*})$ су решење модела (144.1).

$$\begin{cases} \min T_p(t) \\ C_1(t) \leq C_{10}^k, \quad C_{10}^{k+1} < C_{10}^k = C_1^*, k \in Q_1 \\ W_j(t) \leq w_{j0}(t), \quad j \in J^+ \end{cases} \quad (144.2)$$

$$\begin{cases} T_p^* = T_p^z = \min_{k \in Q_1} \{T_p^k = T_p(h_1^k)^*\} \\ h^{(p)*} = h_1^z \in h_1^u \\ C_1(T_p^*) = C_1(h^{(p)*}) \end{cases} \quad (144.3)$$

Решења модела (56.j), маргинална решења идеалне вредности трошкова извођача (145), произилазе из (137.3). Последице на трајање пројекта и трошкове осталих извођача (143.2) одређују се минимизацијом трајања пројекта софтвером за УП и резултати су (145).

$$\begin{cases} h^{(j)*} = h_j^1 \in h_j^u, & j \in J^+ \\ C_j^* = C_j^1 \in C_j^u, & j \in J^+ \\ T_p^j = T_p(h^{(j)*}), C_{jk} = C_k(h^{(j)*}), C_{js} = C_s(h^{(j)*}), & (j, k) \in J^+, s \notin J^+ \end{cases} \quad (145)$$

Даљом анализом идеалних вредности критеријума и њихових последица (табела 5) може да се врши избор коначног решења (етапа 3), ако се процени да има довољно елемената за избор, или се процес решавања модела настави одређивањем нових Парето-оптималних решења (етапа 2). Тада је, у циљу избора коначног решења (етапа 3), подесно приказати једним табеларним прегледом последице екстремних Парето-решења из почетне анализе и нових Парето-решења.

Табела 24. Последице маргиналних решења и идеала критеријума модела 1.б.2 (Етапа 1)

| Оптимизација | Марг. решења | Пројекат | Фаворизовани $B_j, j \in J^+$ | | | Остали $B_j, j \notin J^+$ | | |
|---------------------|--------------|-------------------------|-------------------------------|-----|------------------------------|----------------------------|-----|--------------|
| | | T_p | C_1 | ... | C_{n_1} | C_{n_1+1} | ... | C_n |
| $\min T_p$ | $h^{(p)*}$ | $T_p(h^{(p)*}) = T_p^*$ | $C_1^{(p)}$ | ... | $C_{n_1}^{(p)}$ | $C_{n_1+1}^{(p)}$ | ... | $C_n^{(p)}$ |
| $\max C_1$ | $h^{(1)*}$ | $T_p^{(1)}$ | $C_{11} = C_1^*$ | ... | C_{1n_1} | C_{1,n_1+1} | ... | C_{1n} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $\max C_{n_1}$ | $h^{(n_1)*}$ | $T_p^{(n_1)}$ | C_{n_11} | ... | $C_{n_1n_1} = C_{n_1}^*$ | C_{n_1,n_1+1} | ... | C_{n_1n} |
| Најбоље вредности | | $T_p^{\min} = T_p^*$ | $C_1^{\max} = C_1^*$ | ... | $C_{n_1}^{\max} = C_{n_1}^*$ | $C_{n_1+1}^{\max}$ | ... | C_n^{\max} |
| Најлошије вредности | | T_p^{\max} | C_1^{\min} | ... | $C_{n_1}^{\min}$ | $C_{n_1+1}^{\min}$ | ... | C_n^{\min} |

б.2) Нова Парето-оптимална решења модела 1.б.2 (Етапа 2)

■ Одређивање нових Парето-решења модела 1.б.2 врши се проширивањем напред дефинисаних алгоритама за решавање модела 1.б.1 са разматрањем ограничених капацитета извођача. Потребно је да се, са сваким прихатљивим распоредом извођача за *корак 14* (слика 1.2.1), *корак 23* (слика 1.2.2) и *корак 32* (слика 1.2.3), софтвером за УП одреди одговарајуће T_p^* . Ако се користи модификовани алгоритам (слика 1.2.4), такође је потребно одредити T_p^* за свако генерисано решење.

б.3) Избор коначног решења модела 1.б.2 (Етапа 3)

Коначно решење је $h^{(p)*}$ са T_p^* . Ако постоје алтернативна решења са T_p^* бира се оно које има што је могуће веће вредности прво за C_1 и затим за C_2 . Како се избор своди на наведено, приказано решавање модела се оправдава потребом да се уоче зависности T_p и $C_j, j \in J^+$.

4.4.2. Алгоритми решавања модела групе 2 са идентичним варијантама параметара потенцијалних извођача исте фазе пројекта

Одређене или све фазе A_i пројекта мају d_i варијанти D_{iv} , за времена трајања (d_i) и трошкове (c_{iv}), $i \in I, v \in V_i = \{1, \dots, d_i\}$. Усваја се $t_{ij, v+1} < t_{ijv}$ и $c_{ij, v+1} > c_{ijv}$, $v=1, \dots, d_i-1$. Фазе са једнозначним параметрима имају $d_i=1$ (једну варијанту D_{i1}), односно $V_i = \{1\}$, $i \in I$. Када је d_i индекс одговарајућег параметра, у циљу прегледности текста, подесно је користити ознаку $d(i)=d_i$, $i \in I$. Тиме се последњи пар параметара $v=d_i$ за трајање и трошкове фазе A_i пише $(t_{i, d(i)}, t_{i, d(i)})$ уместо (t_{id_i}, c_{id_i}) , $i \in I$.

На било којој фази A_i дате варијанте D_{iv} истоветне су за све њене потенцијалне извођаче B_j , $j \in J_i$, $i \in I$. Зато важи: $t_{ijv} = t_{iv}$, $c_{ijv} = c_{iv}$, $D_{ijv} = D_{iv}$, $i \in I$, $j \in J_i$, $v \in V_i$.

Различите варијанте параметара намећу потребу да се врши оптимизација трајања и трошкова пројекта, T_p и C_p , као критеријума пројекта са вишим нивоом значајности, и оптимизација трошкова C_j извођача B_j са нижим нивоима значајности за које је усвојен опадајући лексикографски поредак сагласно редоследу њихових индекса j , $j \in J^+$.

4.4.2.1. Алгоритми решавања модела 2.a са познатим извођачима фаза пројекта

Познати извођачи B_j за фазе A_i , дефинишу (m, n) -димензионалну $(0,1)$ матрицу $h_{m,n}^* = [h_{ij}^*]$ са бинарним променљивама $h_{ij}^* = 1$ ако је фаза A_i додељена извођачу B_j и $h_{ij} = 0$ ако није, $i \in I$, $j \in J$. Потребно је одредити коју варијанту D_{ijv} да користи B_j при обављању A_i , односно одредити (m, n, d_i) матрицу $h_{m,n,d(i)}^* = [h_{ijv}^*]$ са бинарним променљивама $h_{ijv}^* = 1$ ако је фаза A_i додељена извођачу B_j да користи варијанту D_{ijv} ($h_{ijv} = 0$ ако B_j користи неку другу варијанту), $i \in I$, $j \in J_i$, $v \in V_i$.

а) Алгоритам модела 2.a.1 са довољним капацитетима извођача

Решава се модел са критеријумима (107.1)-(107+2,j) за C_p , T_p и C_j , респективно, $j \in J^+$. Потребно је спроводити три етапе за почетну анализу, налажење нових Парето-оптималних решења и избор коначног решења.

**а.1) Почетна анализа модела 2.а.1
(Етапа 1)**

Маргинална решења $h^{(Cp)*}$, $h^{(Tp)*}$ и $h^{(j)*}$ са идеалима критеријума C_p^* , T_p^* и C_j^* , $j \in J$ (табела 6.1) могу да се одреде сагласно методологији ВКП. Проширивањем напред дефинисаног алгоритма за модел 1.а.1 са оптимизацијом C_p^* , настаје алгоритам модела 2.а.1 (слика 32.1).

■ Уместо примене математичких модела, једноставније је непосредно користити одговарајуће варијанте података (146.1) до (146.3) које имају одређене специфичности.

- (146.1) Користити најмања времена t_{ij1} да се дефинише $h^{(Tp)*}$ и одреди T_p^* анализом времена ручним поступцима или применом софтвера за УП. Користити одговарајуће трошкове c_{ij1} за прорачун последица на C_p и C_j , $j \in J$.
- (146.2) Користити највеће трошкове $c_{ij,d(i)}$ да се дефинише $h^{(Cp)*}$ за C_p^* и последице на C_j , $j \in J$. Користити одговарајућа времена $t_{ij,d(i)}$ да се одреди $T_p^{(Cp)}$ анализом времена ручним поступцима или применом софтвера за УП.
- (146.3) Користити највеће трошкове $c_{ij,d(i)}$ да се дефинише $h^{(j)*}$ за C_j^* и последице C_{jk} , $(j,k) \in J^+$ (видети наредни став за последице C_{js} , $j \in J, s \notin J^+, s \in J$). Користити одговарајућа времена $t_{ij,d(i)}$ да се одреди $T_p^{(j)}$ (видети наредни став).

$$\begin{cases} h^{(Tp)*} = \{h_{ij1}^* = 1, h_{ijv}^* = 0, v > 1\} \\ T_p^* = T_p^{(Tp)} = T_p(h^{(Tp)*}) \\ C_p^{(Tp)} = C_p(h^{(Tp)*}) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} c_{ij1} \\ C_j^{(Tp)} = C_j(h^{(Tp)*}) = \sum_{i \in I} c_{ij1}, \quad j \in J \end{cases} \quad (146.1)$$

$$\begin{cases} h^{(Cp)*} = \{h_{ij,d(i)}^* = 1, h_{ijv}^* = 0, v < d_i\} \\ C_p^* = C_p^{(Cp)} = C_p(h^{(Cp)*}) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} c_{ij,d(i)} \\ T_p^{(Cp)} = T_p(h^{(Cp)*}) \\ C_j^{(Cp)} = C_j(h^{(Cp)*}) = \sum_{i \in I} c_{ij,d(i)}, \quad j \in J \end{cases} \quad (146.2)$$

$$\begin{cases} h^{(j)*} = \{h_{ij,d(i)}^* = 1, h_{ijv}^* = 0, v < d_i, i \in I_j\}, \quad j \in J^+ \\ C_p^{(j)} = C_p(h^{(j)*}, h^{(s)}(h^{(j)*})) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} c_{ij,d(i)} \quad j \in J^+, s \notin J^+, s \in J \\ T_p^{(j)} = T_p(h^{(j)*}, h^{(s)}(h^{(j)*})) \quad j \in J^+, s \notin J^+, s \in J \\ C_j(h^{(j)*}) = C_{jj} = C_j^* = \sum_{i \in I_j} c_{ij,d(i)}, \quad j \in J^+ \\ C_k(h^{(j)*}) = C_{jk} = \sum_{i \in I_k} c_{ik,d(i)}, \quad (j,k) \in J^+ \\ C_s(h_s(h^{(j)*})) = C_{js} = \sum_{i \in I_s} c_{is,d(i)}, \quad j \in J^+, s \notin J^+, s \in J \end{cases} \quad (146.3)$$

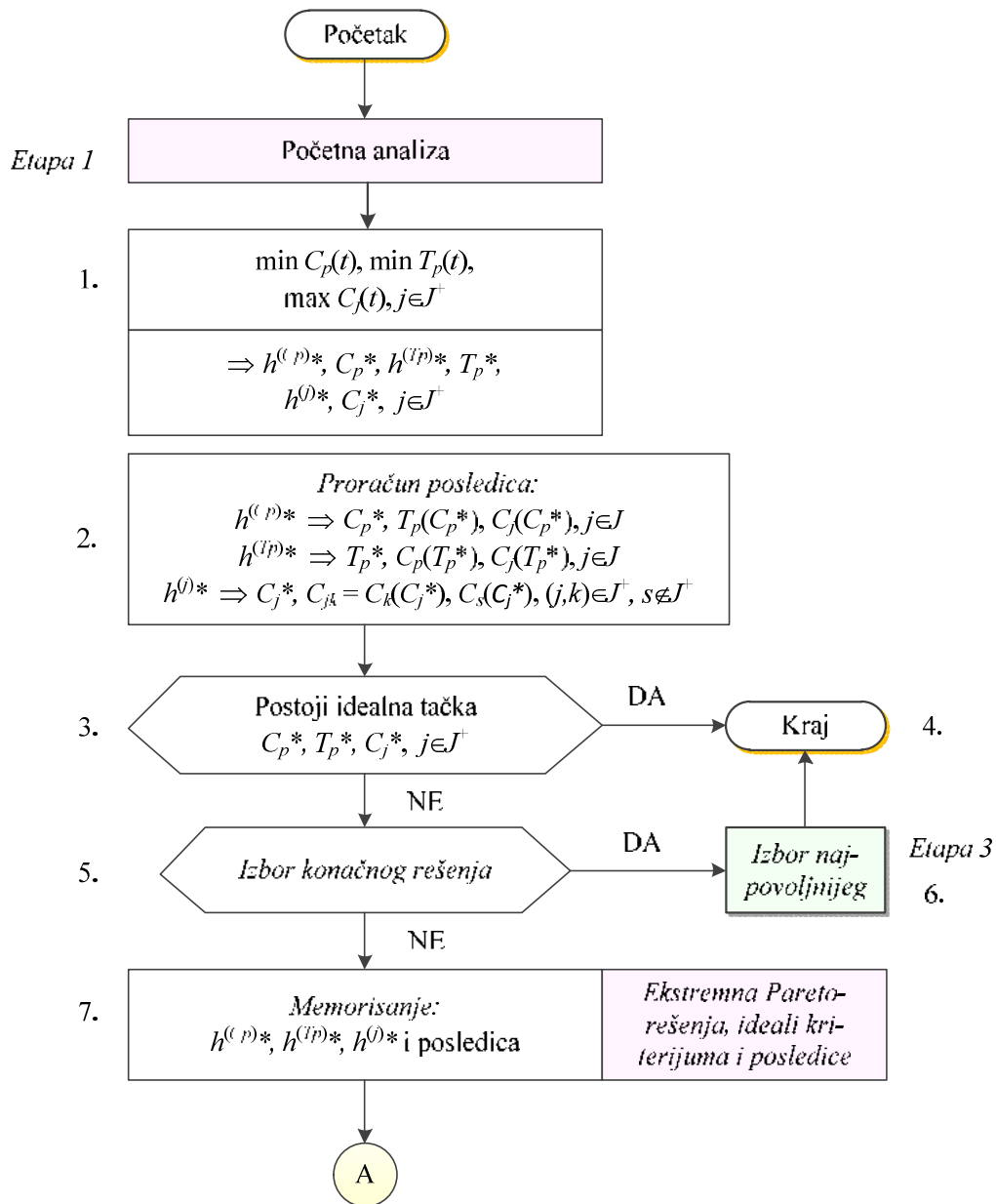
Табела 25.1. Последице маргиналних решења и идеала критеријума модела 2.а.1 (Емана I)

| Оптимизација | Марг. решења | Пројекат | | Фаворизовани $B_j, j \in J^+$ | | | Остали $B_j, j \notin J^+$ | | |
|---------------------|--------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------------|-----|-----------------------------------|----------------------------|-----|--------------|
| | | T_p | C_p | C_1 | ... | C_{n_1} | C_{n_1+1} | ... | C_n |
| $\min T_p$ | $h^{(Tp)*}$ | $T_p^{(Tp)}$ $= T_p^*$ | $C_p^{(Tp)}$ | $C_1^{(Tp)}$ | ... | $C_{n_1}^{(Tp)}$ | $C_{n_1+1}^{(Tp)}$ | ... | $C_n^{(Tp)}$ |
| $\min C_p$ | $h^{(Cp)*}$ | $T_p^{(Cp)}$ | $C_p^{(Cp)}$ $= C_p^*$ | $C_1^{(Cp)}$ | ... | $C_{n_1}^{(Cp)}$ | $C_{n_1+1}^{(Cp)}$ | ... | $C_n^{(Cp)}$ |
| $\max C_1$ | $h^{(1)*}$ | $T_p^{(1)}$ | $C_p^{(1)}$ | C_{11} $= C_1^*$ | ... | C_{1n_1} | C_{1,n_1+1} | ... | C_{1n} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $\max C_{n_1}$ | $h^{(n_1)*}$ | $T_p^{(n_1)}$ | $C_p^{(n_1)}$ | C_{n_11} | ... | $C_{n_1n_1}$ $= C_{n_1}^*$ | C_{n_1,n_1+1} | ... | C_{n_1n} |
| Најбоље вредности | | T_p^{\min} $= T_p^*$ | C_p^{\min} $= C_p^*$ | C_1^{\max} $= C_1^*$ | ... | $C_{n_1}^{\max}$ $= C_{n_1}^*$ | $C_{n_1+1}^{\max}$ | ... | C_n^{\max} |
| Најлошије вредности | | T_p^{\max} | C_p^{\max} | C_1^{\min} | ... | $C_{n_1}^{\min}$ | $C_{n_1+1}^{\min}$ | ... | C_n^{\min} |

■ Маргинално решење $h^{(j)*}$ (146.3) садржи само бинарне променљиве $h_{ij,d(i)}$ за распоред фаворизованих извођача B_j и одређују сопствене идеалне трошкове $C_j(h^{(j)*})=C_j$ са последицама $C_k(h^{(j)*})$ на трошкове осталих фаворизованих $B_k, (j,k) \in J^+$. Остали извођачи $B_s, s \notin J^+, s \in J$, ангажују се на фазе $A_i, i \in I_s$, које не обављају фаворизовани $B_j, j \in J^+$. Истовремено са $h^{(j)*}$ постоје распореди $h^{(s)} = h^{(s)}(h^{(j)*})$ таквих извођача B_s за прорачун $C_p(h^{(j)*}, h^{(s)}(h^{(j)*}))$ и одређивање $T_p(h^{(j)*}, h^{(s)}(h^{(j)*}))$ анализом времена ручним поступцима или применом софтвера за УП. Када се врши оптимизација трошкова C_j извођача B_j са $h^{(j)*}$, трошкови $C_{js} = C_s(h^{(s)}(h^{(j)*}))$ извођача B_s зависе само од сопствених распореда, односно у функцији су само сопствених распореда $h^{(s)}, j \in J^+, s \notin J^+, s \in J$. Користе се ознаке C_{js} да се истакне припадност вектору података за $x^{(j)*}$ (табела 6). Иначе, како се не врши максимизација трошкова C_s за B_s , није неопходно да они користе евентуалне трошкове $c_{is,d(i)}$ варијанте d_i , већ трошкове c_{isv} било које варијанте $v, i \in I_s, s \notin J^+, v \in V_i$.

- Да се одреди $h^{(s)} = h^{(s)}(h^{(j)*})$, решавати засебне моделе (146.4) за $h^{(j)*}, j \in J^+, s \notin J^+, s \in J$, са додатним ограничењима типа “ ≥ 0 ” за прорачун свих категорија трошкова, као прекорачења доњих граница 0.

$$\begin{cases} \max C_j = \sum_{i \in I_j} \sum_{v \in V_i} c_{ijv} h_{ijv}, & \text{zasebno za svako } j \in J^+ \\ C_{jk} = \sum_{i \in I_k} \sum_{v \in V_i} c_{ikv} h_{ikv} \geq 0, & (j, k) \in J^+ \\ C_{js} = \sum_{i \in I_s} \sum_{v \in V_i} c_{isv} h_{isv} \geq 0, & j \in J^+, s \notin J^+, s \in J \end{cases} \quad (146.4)$$



Слика 32.1. Алгоритам 2.а.1. Почетна анализа и евентуални избор коначног решења (Етапа 1, Етапа 3)

Након што се одреде маргинална решења и идеали критеријума (корак 1, 2), поступак се завршава (корак 4) ако се утврди да *постоји идеална тачка* са оптималним вредностима критеријума (корак 3), односно ако се жели *неко маргинално решење за коначно решење* (корак 6 после корака 5). У супротном, врши се меморисање маргиналних решења и њихових последица (корак 7), и прелази на одређивање нових Парето-оптималних решења (етапа 2, корак 8, слика 32.2).

**а.2) Нова Парето-оптимална решења модела 2.а.1
(Етапа 2)**

Нова Парето-оптимална решења, уколико није извршен избор неког маргиналног решења у почетној анализи (табела 25.1), одређују се двостепеним алгоритмом 2.а.1.1 (табела 25.2, слика 32.2) који чине:

- 1) основни процес са циклусима (кораџи, 8-10, 12-13, 25)
- 2) један подпроцес (корак 11).

**1) Оптимизација трошкова и трајања пројекта
методом PERT/COST**

На нивоу пројекта се минимизирају трошкови за одабрано трајање и са добијеним решењем се максимизују трошкови фаворизованих извођача.

**Проблем 1. Минимизација трошкова C_p за дато време T_0
(Основни процес 2.а.1)**

Основни процес примењује методу PERT/COST за двостепену бикритеријумску оптимизацију са методом ε -ограничења, односно за минимизацију два критеријума на нивоу пројекта (првог степена) и максимизацију n_1 подкритеријума за извођаче (другог степена). Сагласно методи PERT/COST, могућа су два приступа, односно решавање два проблема (табела 6.2).

- Проблем 1. Минимизација трошкова пројекта C_p (са Максимизацијом трошкова C_j фаворизованих извођача $B_j, j \in J^+$) за дато време трајања T_0 (слика 32.2)
- Проблем 2. Минимизација времена трајања пројекта C_p (са "Максимизацијом трошкова C_j фаворизованих извођача $B_j, j \in J^+$) за дате трошкове C_0 .

У наставку се дефинише алгоритам 2.а.1.1 за решавање проблема 1. Полазни модел са $2+n_1$ ($n_1 \geq 1$) критеријума (108.1)-(108+2,j) може да се прикаже моделом (147.1). Критеријуми пројекта, C_p и T_p , су вишег нивоа приоритета и међусобно равноправни, док су C_j нижих нивоа приоритета са лексикографским поретком значајности, $j \in J^+$. Врши се минимизација C_p ограничавањем T_p са подпроцесом минимизације C_j , $j \in J^+$. Условна оптимизација C_j започиње моделом (147.2), односно (148.1) са максимизацијом C_1 и ограничавањем $C_s, s \neq 1, s \in J^+$. Касније настају модели (148.2) и (148.3) за C_2 и C_3 , респективно.

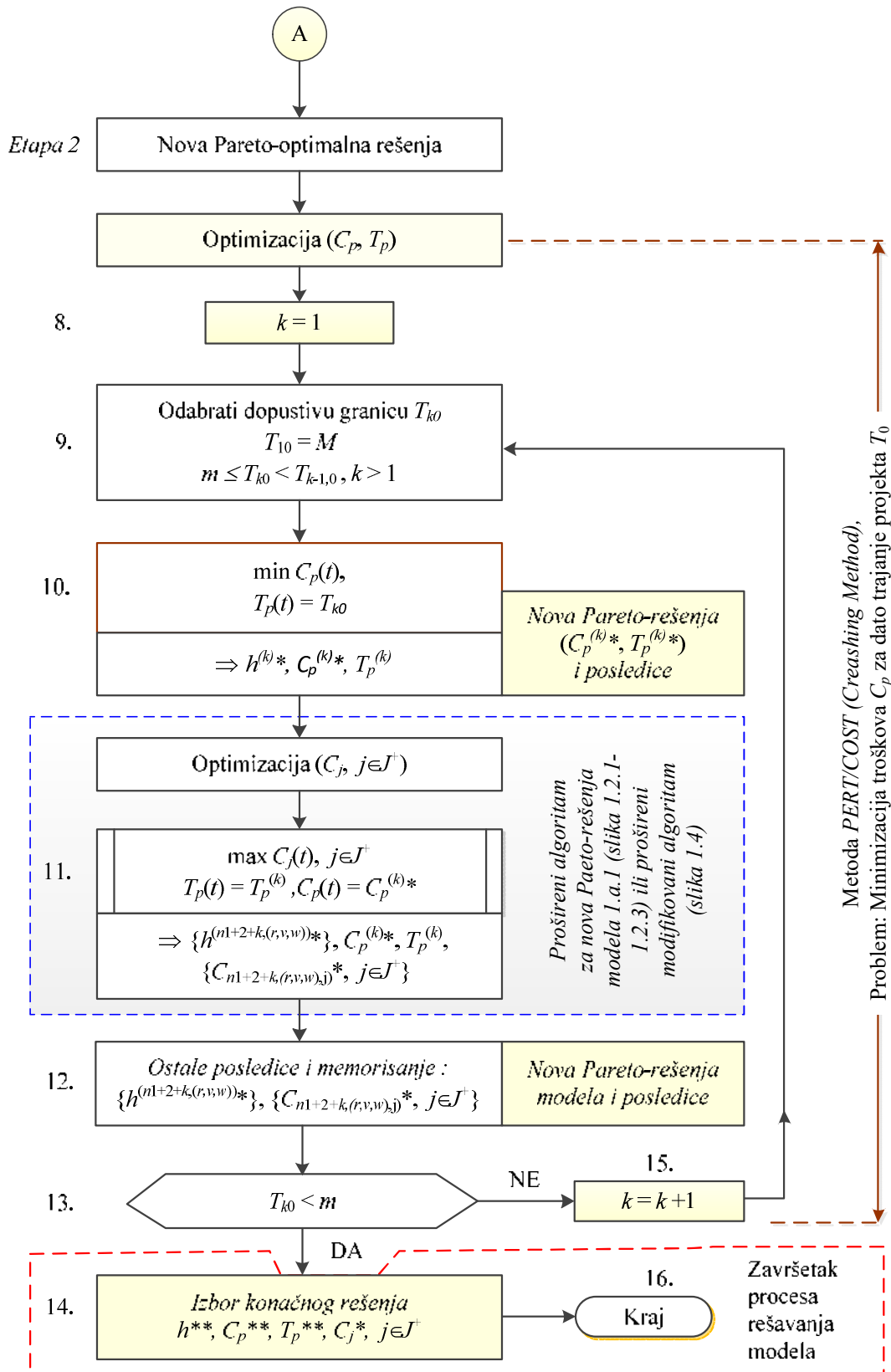
$$\begin{cases} \min \begin{cases} C_p(t) \\ T_p(t) \end{cases} \\ \max C_j(t), j \in J^+ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min C_p(t) \\ T_p(t) = T_{k0}, k = 1, 2, \dots \\ \max C_j(t), j \in J^+ \end{cases} \quad (147.1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \min C_p(t) \\ \max C_1^k(t) \\ C_s^k(t) \geq C_{s0,r}^k, s \neq 1, s \in J^+, r = 1, 2, \dots \\ T_p(t) = T_{k0}, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (147.2)$$

Табела 25.2. Алгоритми модела групе 2 са довољним капацитетима извођача, 2.а.1 (Етапа 2 и 3)

| <i>Етапа 2. Одређивање нових Парето-оптималних решења</i> | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Модел 2.а.1 Алгоритам 2.а.1.1 | (1) { <i>min</i> трошкова пројекта C_p } са подмоделом { <i>max</i> трошкова C_j извођача $j \in J^+$ } за дато трајање пројекта $T_{k,0} \in [M, m], k = 1, 2, \dots$ | $\min C_p$ $\max C_j, j \in J^+$ $T_p = T_{k,0}$ $T_{k+1,0} < T_{k,0}, k = 1, 2, \dots$ |
| Модел 2.а.1 Алгоритам 2.а.1.2 | (2) { <i>min</i> трајања пројекта T_p } са подмоделом { <i>max</i> трошкова C_j извођача $j \in J^+$ } за дате трошкове пројекта $C_{s,0} \in [C_p(m), C_p(M)], s = 1, 2, \dots$ | $\min T_p$ $\max C_j, j \in J^+$ $C_p = C_{s,0}$ $C_{s+1,0} > C_{s,0}, s = 1, 2, \dots$ |
| <i>Напомена (i):</i> Довољно је решавати модел (1) или (2), имају иста решења. Подеснији је (1), $T_{k+1,0} = T_{k+1,0} - 1$ <u>одређују се сва целобројна времена T_p</u> | | |
| <i>Интерактивни процес „аналитичар-рачунар“</i> , комбиновање две методе: Метода <i>PERT/COST</i> и Метода ϵ -ограничења <i>Аналитичар</i> поставља слободне чланове додатних ограничења: (а) дата времена $T_{k,0}$ за T_p за циклусе (k) у моделу (1), и (б) границе за C_j , за сваки циклус (k) у подциклусима (r) подмодела/подпроцеса оптимизације трошкова извођача <i>Софтвер</i> решава глобални модел <i>ЛЦМП</i> (1) и одређује Парето-оптимална решења: $(C_p^{(k)}, T_p^{(k)})$ за (а) и избор извођача $h^{(k,r)*}$ са одговарајућим последицама на вредности критеријума у сваком подциклусу (r) за (б): $h^{(k,r)*}, T_p^{k,r}(h^{(k,r)*}), C_p^{k,r}(h^{(k,r)*}), C_j^{k,r}(h^{(k,r)*}), C_s^{k,r}(h^{(k,r)*}), j \in J^+, s \notin J^+, k = 1, 2, \dots$, где: $h^{(k,r)*} = \{h_{ijv}^{(k,r)*}\}$, κ – варијанта T_p , r – варијанта решења у подмоделу <i>Аналитичар</i> меморише резултате | | |
| <i>Етапа 3. Избор коначног решења</i> $h^* = h^{(k,r)*}, T_p(h^*), C_p(h^*), C_j(h^*), j \in J$ | | |
| <i>Напомена (ii):</i> Увођењем ограничених капацитета w_{j0} у 2.а.1 настаје Алгоритам 2.а.2. <i>Решавање модела 2.а.2 применом софтвера за УП са решењем $h^{(k,r)*}$ модела 2.а.1</i> | | |
| <i>Напомена (iii):</i> Алгоритми 2.а.1 и 2.а.2, <u>адекватним тумачењем елемената користе се за проблеме групе 3.</u> | | |

- Захтевано допустиво трајање пројекта T_{k0} поставља у кораку 9 наредне параметре: нормално трајање пројекта M за прву итерацију $k=1$ из корака 8 и мање трајање пројекта $T_{k0} \in [m, T_{k-1,0}]$ за $k > 1$ (највише до усиљеног трајања m).
- Оптимална решења за распоред извођача $h^{(k)*}$ одређују на нивоу пројекта вредности (T_p^{k*}, T_p^{k*}) у кораку 10 са којима се спроводи подпроцес у кораку 11. За решења из тог подпроцеса се врши прорачун последица у кораку 12.



Слика 32.2. Алгоритам 2.а.1.1. Нова Парето-оптимална решења и избор коначног решења (Етапа 2, Етапа 3)

Ако се у кораку 13 утврди да са T_{k0} није усиљено трајање пројекта (јесте $T_{k0} > t$) и жели се разматрање нових вредности T_p , постави се број наредне итерације $(k+1)$ у кораку 14 и процес се наставља од корака 9. За $T_{k0} = t$ (корак 13) или $T_{k0} > t$ и нису потребна решења са новим вредностима T_p , прелази се на избор коначног решења (етапа 3, корак 14) и процес се завршава (корак 15).

2) Максимизација трошкова фаворизованих извођача за Парето-решења $(C_p^{(k)}, T_p^{(k)})$ основног процеса (Подпроцес 2.а.1)

Подпроцес у кораку 11 основног процеса максимизира трошкове фаворизованих извођача $B_j, j \in J^+$, за сваки пар Парето-оптималних вредности критеријума $(C_p^{(k)}, T_p^{(k)})$ из корака 10 итерације (k) . Решавање одговарајућих модела у циклусима подпроцеса, односно подциклусима основног процеса, заснива се на укључивању вредности $(C_p^{(k)}, T_p^{(k)})$ као ограничења у напред дефинисани алгоритам одређивања нових решења Парето-оптималних решења модела 1.а.1 лексикографском максимизацијом трошкова извођача C_1, C_2 и C_3 (слика 1.2.1-1.2.3). По аналогији може да се прошири модификовани алгоритам 1.а.1 (слика 1.4).

$n_1 + k, (v, w), j$

- Алгоритам 1.а.1 користи индикаторе $[n_1 + k, (v, w), j]$ за указивање на број (n_1) маргиналних решења из почетне анализе модела 1.а.1 за фаворизоване извођаче $B_j, j \in J$, и нова Парето-оптималња решења $[k, (v, w), j]$ у основном циклусу (k) за C_1 , подциклусу (v) за C_2 и пододциклусу (w) за C_3 , када се врши максимизација $C_j, j = 1, 2, 3$.

Подпроцес за основни процес решавања модела 2.а.1 мења наведене индикаторе алгоритма 1.а.1 и користи $[n_1 + 2 + k, (r, v, w), j]$ услед $(n_1 + 2)$ маргиналних решења (n_1) фаворизованих извођача, $C_p^{(k)}$ и $T_p^{(k)}$. Нова Парето-оптимална решења $(n_1 + 2 + k)$ настају са $(C_p^{(k)}, T_p^{(k)})$ из основног процеса и $[(r, v, w), j]$ из подпроцеса, где ранију ознаку (k) за основни циклус замењује (r) .

- Следе допуне одговарајућих основних корака у алгоритму 1.а.1 (приказује се ранији и нови захтеви).

Корак 10. Оптимизација C_1

$$\begin{cases} \max C_1(t) \\ C_j(t) \geq C_{j0}^{k,v,w}, \quad j \neq 1, j \in J^+ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max C_1(t) \\ C_p(t) = C_p^{(k)} \\ T_p(t) = T_p^{(k)} \\ C_j(t) \geq C_{j0}^{r,v,w}, \quad j \neq 1, j \in J^+ \end{cases} \quad (148.1)$$

Корак 19. Оптимизација C_2

$$\left\{ \begin{array}{l} \max C_2(t) \\ C_1(t) = C_{n1+k,(v-1,w),1}^* \\ C_j(t) \geq C_{j0}^{k,v,w}, \quad j \neq (1,2), j \in J^+ \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max C_2(t) \\ C_p(t) = C_p^{(k)} \\ T_p(t) = T_p^{(k)} \\ C_1(t) = C_{n1+2+k,(r,v-1,w),1}^* \\ C_j(t) \geq C_{j0}^{r,v,w}, \quad j \neq (1,2), j \in J^+ \end{array} \right. \quad (148.2)$$

Корак 28. Оптимизација C_3

$$\left\{ \begin{array}{l} \max C_3(t) \\ C_1(t) = C_{n1+k,(v-1,w),1}^* \\ C_2(t) = C_{n1+k,(v,w-1),2}^* \\ C_j(t) \geq C_{j0}^{k,v,w}, \quad j \neq (1,2,3), j \in J^+ \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max C_2(t) \\ C_p(t) = C_p^{(k)} \\ T_p(t) = T_p^{(k)} \\ C_1(t) = C_{n1+2+k,(r-1,v1,w),1}^* \\ C_2(t) = C_{n1+2+k,(r,v-1,w),2}^* \\ C_j(t) \geq C_{j0}^{r,v,w}, \quad j \neq (1,2,3), j \in J^+ \end{array} \right. \quad (148.3)$$

**а.3) Избор коначног решења модела 2.а.1
(Етапа 3)**

Коначно решење модела 2.а.1 бира се из скупа пронађених Парето-оптималних решења, као у свим разматраним моделима избора извођача пројекта.

**б) Алгоритам модела 2.а.2
са ограниченим капацитетима неких извођача**

Решава се модел са критеријумима (115.1)-(115+2j) за C_p , T_p и C_j , респективно, $j \in J^+$.

■ Алгоритми модела 2.а.2 са ограниченим капацитетима за n^- извођача B_j настају из алгоритама модела 2.а.1 са довољним капацитетима извођача увођењем додатних ограничења (150) за расположиве капацитете $w_0 = [w_{j0},], j \in J^-$. Решавање модела 2.а.2 врши се применом софтвера за УП са решењима модела 2.а.1, минимизацијом T_p уважавајући (150).

$$\text{Model 2.a.1} \left\{ \begin{array}{l} \min C_p(t) \\ \min T_p(t) \\ \max C_j(t), \quad j \in J^+ \end{array} \right. \quad \text{Model 2.a.2} \left\{ \begin{array}{l} \min C_p(t) \\ \min T_p(t) \\ \max C_j(t), \quad j \in J^+ \\ W_j(t) \leq w_{j0}(t), \quad \forall (j \in J^-, t \in T) \end{array} \right. \quad (149)$$

$$W_j(t) = \sum_{i \in I_j} \sum_{v \in V_i} w_{iv}(t) h_{ijv}(t) \leq w_{j0}(t), \quad \forall (j \in J^-, t \in T) \quad (150)$$

**б.1) Почетна анализа модела 2.а.2
(Етапа 1)**

Маргинална решења $h^{(C_p)^*}$, $h^{(T_p)^*}$ и $h^{(j)^*}$ са идеалима критеријума C_p^* , T_p^* и C_j^* , $j \in J^+$ одређују се применом алгоритма 2.а.1 за почетну анализу (слика 32.1). Потребно је решавати модел 2.а.2 (149) у кораку 1 (уместо модела 2.а.1).

**б.2) Нова Парето-оптимална решења модела 2.а.2
(Етапа 2)**

Нова Парето-решења модела 2.а.2 одређују се применом алгоритма 2.а.1.1 за модел 2.а.1 (табела 6.2, слика 32.2) са ограничењима (150) за математичке моделе који се користе у кораку 10 основног процеса и одговарајућим корацима подпроцеса: корак 10 (слика 1.2.1), корак 19 (слика 1.2.2) и корак 29 (слика 1.2.3).

**б.3) Избор коначног решења модела 2.а.2
(Етапа 3)**

Коначно решење модела 2.а.2 бира се из скупа пронађених Парето-оптималних решења, као у свим разматраним моделима избора извођача пројекта, односно у сваком моделу ВКО.

Табела 26. Карактеристике модела групе 1 и 2 са становишта решавања

| Број B_j за A_i | Број B_j са w_{j0} | Група 1 | Група 2 |
|------------------------|---------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | | $d_{ij} = d_i = 1, D_{ij} = D_i,$ $h_{ij} = h_i, \forall j \in J$ | $d_{ij} = d_i \geq 1, D_{ijv} = D_{iv},$ $h_{ijv} = h_{iv}, \forall j \in J$ |
| $m_i = 1$ | $n^- = 0$ | дато: $j, T_p^* = T_p^{\min},$ $C_p^* = C_p^{\min} = C_p(T_p^{\min})$ не врши се избор | дато: j избор: v за усвојено $T_p^{(k)}$ и/или $C_p^{(k)}$ |
| | $n^- > 0$ | $W_j(t) \leq w_{j0}(t), \forall (j \in J^-, t \in T)$ дато: j, T_p^*, C_p^* не врши се избор | $W_j(t) \leq w_{j0}(t), \forall (j \in J^-, t \in T)$ дато: j избор: v за усвојено $T_p^{(k)}$ и/или $C_p^{(k)}$ |
| $m_i > 1$ | $n^- = 0$ | дато: T_p^*, C_p^* , избор: j | избор: (j, v) за усвојено $T_p^{(k)}$ и/или $T_p^{(k)}$ |
| | $n^- > 0$ | $W_j(t) \leq w_{j0}(t), \forall (j \in J^-, t \in T)$ дато: T_p^*, C_p^* , избор: j | $W_j(t) \leq w_{j0}(t), \forall (j \in J^-, t \in T)$ избор: (j, v) за усвојено $T_p^{(k)}$ и/или $T_p^{(k)}$ |
| Критеријуми | | $\max C_j, j \in J^+$ | $\min (T_p, C_p), \max C_j, j \in J^+$ |

**4.4.2.2. Алгоритми решавања модела 2.б
са више потенцијалних извођача неких фаза пројекта**

Више потенцијалних извођача исте фазе пројекта у проблемима групе 2, када такве фазе имају варијанте параметара које важе за све потенцијалне извођаче исте фазе,

омогућавају шире разматрање укупних трошкова потенцијалних извођача на нивоу пројекта.

■ У свим проблемима посматрани потенцијални извођач B_j може конкурисати за неке фазе са другим потенцијалним извођачима, док је код одређених фаза такав B_j једини потенцијални извођач. Увођењем одговарајућих приоритета потенцијалним извођачима, као што ће се показати у делу 4.4.4, могу се фаворизованим извођачима доделити већи трошкови C_j у оквиру познатих трошкова пројекта $C_p(T_p^{\min})$ за познато трајање пројекта T_p^{\min} проблема групе 1, односно за разматрано трајање пројекта $T_p^{(k)}$ и припадајуће минималне трошкове пројекта $C_p^{(k)} = C_p(T_p^{(k)})$ проблема група 2 и 3.

а) Алгоритам модела 2.б.1 са довољним капацитетима потенцијалних извођача пројекта

Када фазе A_i мају дате јединствене варијанте D_{iv} са параметрима t_{iv} за времена и c_{iv} за трошкове независно од потенцијалних извођача B_j , односно применљиве за све потенцијалне извођаче B_j , решења са довољним капацитетима свих потенцијалних извођача на пројекту могу се одредити алгоритмима 3.а.1 постављањем $D_{ijv} = D_{iv}$ са $t_{ijv} = t_{iv}$ и $c_{ijv} = c_{iv}$, $i \in I$, $j \in J_i$, $v \in V_i$ (табеле 6.2 и 7).

б) Алгоритам модела 2.б.2 са ограниченим капацитетима неких потенцијалних извођача пројекта

Модел проблема са ограниченим капацитетима потенцијалних извођача решавају се истоветно за сваку групу проблема, полазећи од решења без ограничења за капацитете (табеле 7 и 8).

4.4.3. Алгоритми решавања модела групе 3 са различитим варијантама параметара извођача исте фазе пројекта

Решава се модел са критеријумима (115.1)-(115+2,j) за C_p , T_p и C_j , $j \in J^+$, респективно, са одговарајућим ограничењима.

- Модели групе 3, у односу моделе групе 2, имају различите варијанте параметара фаза за најмање два потенцијална извођача B_j исте фазе A_i са $j = j_1$ и $j = j_2$, $i \in I$, $(j_1, j_2) \in J$.
- Истовремено важи $i \in I_{j_1}$, $i \in I_{j_2}$, $j_1 \in J_i$ и $j_2 \in J_i$.
- Такви извођачи могу да имају различите бројеве $d_{ij_1} \neq d_{ij_2}$ за њихове варијанте D_{ij_1v} исте фазе A_i , $i \in I$, $v \in V_{ij_1}$, D_{ij_2v} , $v \in V_{ij_2}$.

Решења одређују:

- варијанте D_{ijv} са параметрима (t_{ijv}, c_{ijv}) познатих извођача B_j свих фаза A_i у моделима 3.а
- потенцијалне извођаче B_j и њихове варијанте D_{ijv} са одговарајучим параметрима за фазе A_i у моделима 3.б, $i \in I, j \in J_i$
- одлучивање у моделима са довољним капацитетима извођача врши са бинарним променљивама прве врсте $h_{ijv}, i \in I, j \in J_i, v \in V_{ij}$
- када постоје извођачи са ограниченим капацитетима разматрају се обе врсте променљивих, h_{ijv} прве врсте и $h_{ijv}(t)$ друге врсте, а од основног значаја јесте трајање пројекта:
 - остаје T_p^{\min} са периодом T за временске јединице t , односно усвојено $T_p^{(k)}$ са периодом $T^{(k)}$, разматрају се скупови индекса $i \in I, j \in J_i, v \in V_{ij}, t \in T$ односно $t \in T^{(k)}$
 - продужава се трајање пројекта на $T_p^* > T_p^{\min}$ са периодом T_p^* , односно на $T_p^{(k)*} > T_p^{(k)}$ са периодом $T^{(k)*}$, разматрају се скупови индекса $i \in I, i \in I, j \in J_i, v \in V_{ij}, t \in T^*$ односно $t \in T^{(k)*}$

■ Модели групе 3 решавају се применом алгоритама модела групе 2 са наведеним тумачењима елемената модела групе 3.

Табела 27. Карактеристике модела групе 2 и 3 са становишта решавања

| Број B_j за A_i | Број B_j са w_{j0} | Група 2 | Група 3 |
|------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| | | $d_{ij} = d_i \geq 1, D_{ijv} = D_{iv}, \forall j \in J$ $h_{ijv} = h_{iv}, \forall j \in J$ | $d_{ij} \geq 1, D_{ijv}, \exists j \in J$ $h_{ijv}, \forall j \in J$ |
| $m_i = 1$ | $n^- = 0$ | дато: j избор: v за усвојено $T_p^{(k)}$ и/или $C_p^{(k)}$ | |
| | $n^- > 0$ | $W_j(t) \leq w_{j0}(t), \forall (j \in J^-, t \in T)$ избор: v за усвојено $T_p^{(k)}$ и/или $C_p^{(k)}$ | |
| $m_i \geq 1$ | $n^- = 0$ | избор: (j, v) за усвојено $T_p^{(k)}$ и/или $C_p^{(k)}$ | |
| | $n^- > 0$ | $W_j(t) \leq w_{j0}(t), \forall (j \in J^-, t \in T)$ избор: (j, v) за усвојено $T_p^{(k)}$ и/или $C_p^{(k)}$ | |
| Критеријуми | | $\min(T_p, C_p), \max C_j, j \in J^+$ | |

- У свим случајевима врши се условна максимизација трошкова C_j фаворизованих извођача $B_j, j \in J^+$, као критеријума нижих приоритета, уважавајући остварене вредности критеријума пројекта (времена и трошкова) са вишим приоритетима.
- Решења се одређују сагласно усвојеним приоритетима фаворизованих извођача $B_j, j \in J^+$.

■ Напред дефинисане опште алгоритме за проблеме са строгим лексикографским поретком фаворизованих извођача $B_1 \gg B_2 \gg \dots \gg B_{n^+}$, неопходно је модификовати за примену у пракси увођењем група извођача са идентичним приоритетима.

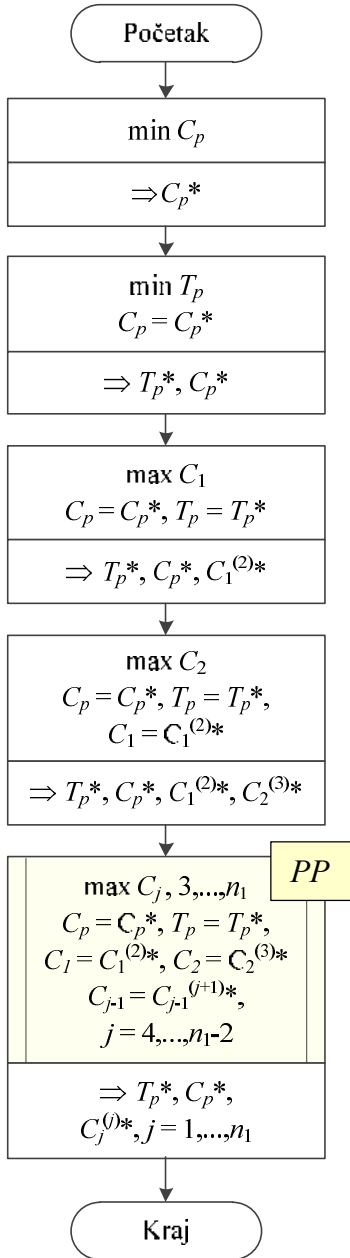
4.4.4. Алгоритми решавања модела са одабраним варијантама приоритета циљева пројекта и циљева фаворизованих потенцијалних извођача

Проблеми са више критеријума у пракси по правилу немају исте степене значајности, односно приоритете за све критеријуме. Истовремено, природа постављених критеријума је таква да се њихови приоритети раздвајају у више нивоа сагласно сваком конкретном проблему. На напред разматраном проблему избора више извођача пројекта, основни циљеви пројекта (трошкови и трајање) су првог нивоа. Циљеви фаворизованих извођача (трошкови) су другог, нижег нивоа, са евентуалним груписањем у одговарајуће поднивое. У наставку дају се одабране примери приоритета (табела 9) и алгоритми карактеристичних случајева (слке 3 до 7.2).

Табела 28. Одабрани примери дефинисања приоритета циљева пројекта и извођача

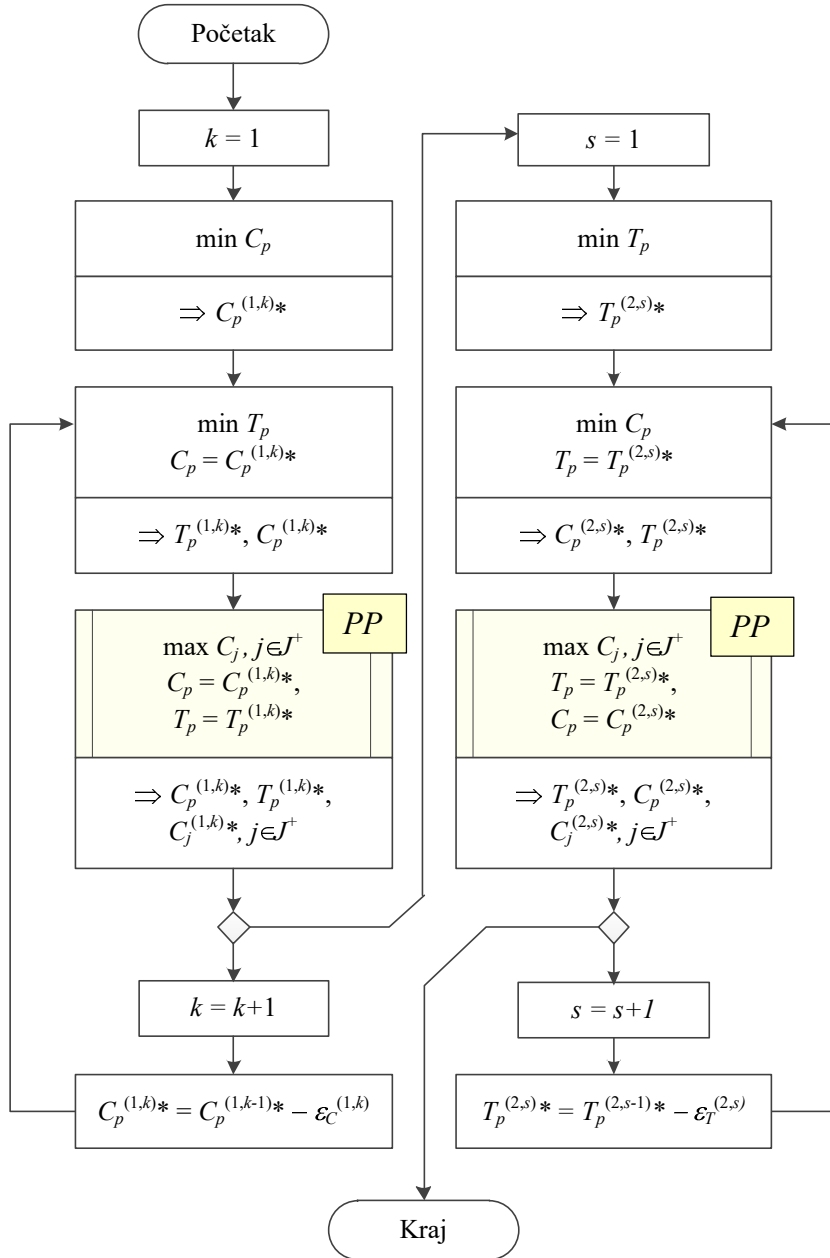
| Број нивоа приоритета | Врсте нивоа приоритета | Лексикографски поредак критеријума C_p, T_p и $C_j, j \in J^+$ | Редни број (P) |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-------------------|
| $2 + n_1$ | Различити нивои | $C_p, T_p, C_1, C_2, \dots, C_{n_1}$ *) | 1 |
| $1 + n_1$ | Исти ниво за пар (двојку) критеријума | $(C_p, T_p), C_1, C_2, \dots, C_{n_1}$ **) | 2.1 |
| | | $C_p, T_p, (C_1, C_2), C_3, \dots, C_{n_1}$ | 2.2 |
| | | $C_p, T_p, C_1, (C_2, C_3), C_4, \dots, C_{n_1}$ | 2.3 |
| | | ... | ... |
| n_1 | Два (двојка) C_j Исти ниво (<2) за један пар и виши/ нижи ниво (<2) за други пар | $C_p, T_p, (C_1, C_2), (C_3, C_4), C_5, \dots, C_{n_1}$ ***) | 3.1 |
| | | $C_p, T_p, C_1, (C_2, C_3), (C_4, C_5), C_6, \dots, C_{n_1}$ | 3.2 |
| | | $C_p, T_p, C_1, C_2, (C_3, C_4), (C_5, C_6), C_7, \dots, C_{n_1}$ | 3.3 |
| | | ... | ... |
| | Три (тројка) C_j Исти ниво (<2) за тројку и виши/ нижи ниво (<2) за суседе | $C_p, T_p, (C_1, C_2, C_3), C_4, \dots, C_{n_1}$ | 4.1 |
| | | $C_p, T_p, C_1, (C_2, C_3, C_4), C_5, \dots, C_{n_1}$ | 4.2 |
| | | $C_p, T_p, C_1, C_2, (C_3, C_4, C_5), C_6, \dots, C_{n_1}$ | 4.3 |
| ... | ... | ... | |
| $n_1 - 1$ | Двојка и тројка C_j Исти ниво (<2) за тројку и виши/ нижи ниво (<2) суседних двојки | $C_p, T_p, (C_1, C_2, C_3), (C_4, C_5), C_6, \dots, C_{n_1}$ | 5.1 |
| | | $C_p, T_p, (C_1, C_2), (C_3, C_4, C_5), C_6, \dots, C_{n_1}$ | 5.2 |
| | | $C_p, T_p, C_1, (C_2, C_3, C_4), (C_5, C_6), C_7, \dots, C_{n_1}$ | 5.3 |
| | | $C_p, T_p, C_1, (C_2, C_3), (C_4, C_5, C_6), C_7, \dots, C_{n_1}$ | 5.4 |
| | | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... |
| 3 | Ниво 3 за све $C_j, j \in J^+$ | $C_p, T_p, (C_1, C_2, \dots, C_{n_1})$ | \underline{n}_i |

*) redosled značajnosti $C_p \gg T_p \gg C_1 \gg \dots \gg C_{n_1}$ **) redosled značajnosti $(C_p, T_p) \gg C_1 \gg C_2 \gg \dots \gg C_{n_1}$ ***) redosled značajnosti $C_p \gg T_p \gg (C_1, C_2) \gg (C_3, C_4) \gg C_5 \gg \dots \gg C_{n_1}$



Слика 33. Алгоритам Р.1

$C_p, T_p, C_1, C_2, \dots, C_{n1}$

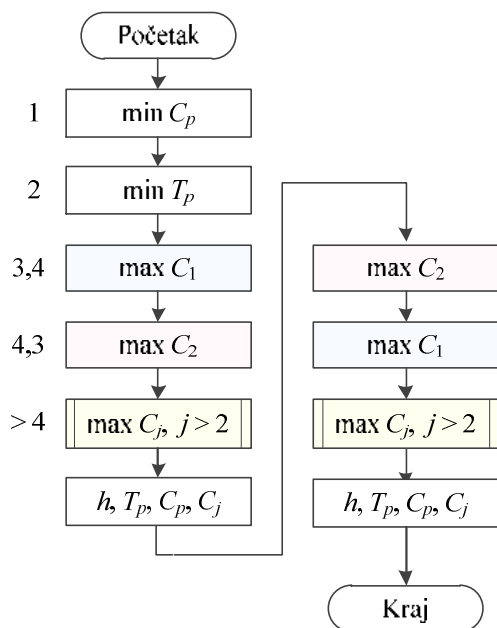


Слика 34.1. Алгоритам Р.2.1

$(C_p, T_p), C_1, C_2, \dots, C_{n1}$

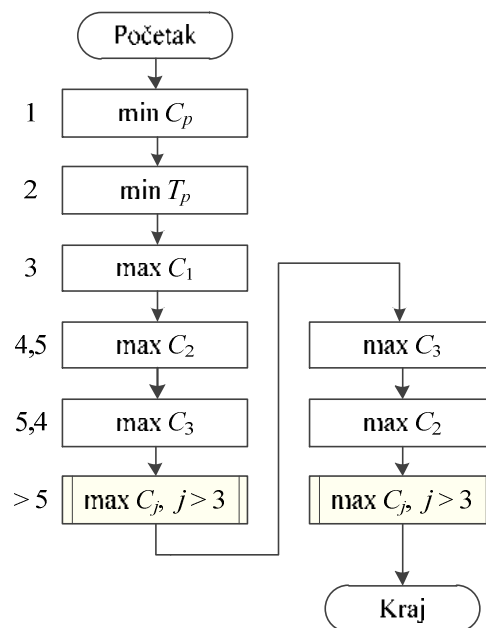
Детаљније тумачење појединих корака алгоритама захтева више текста, што је показано напред за алгоритам решавања модела 1.б.1 са 40 корака. Након почетне анализе (слика 32.2) са 8 корака, за одређивање нових Парето-оптимална решења (разматрајући само прва три фаворизована извођача) потребан је подпроцес (слике 32.1.1-32.1.3) са 32 корака.

- Тумачење овде дефинисаних алгоритама може се пратити са одговарајућих графика, који су детаљније приказани за модел Р.1 (подпроцес/подпрограм – *PP* за $j > 2, j \in J^+$) и модел Р.2.1 (*PP* за све $j \in J^+$).
- Остали алгоритми приказани су кондензовано са одговарајућим *PP*.
- Сложеност структуре алгоритама увећава се у зависности од броја критеријума на истом нивоу.



Слика 34.2. Алгоритам Р.2.2

$C_p, T_p, (C_1, C_2), C_3, \dots, C_{n1}$

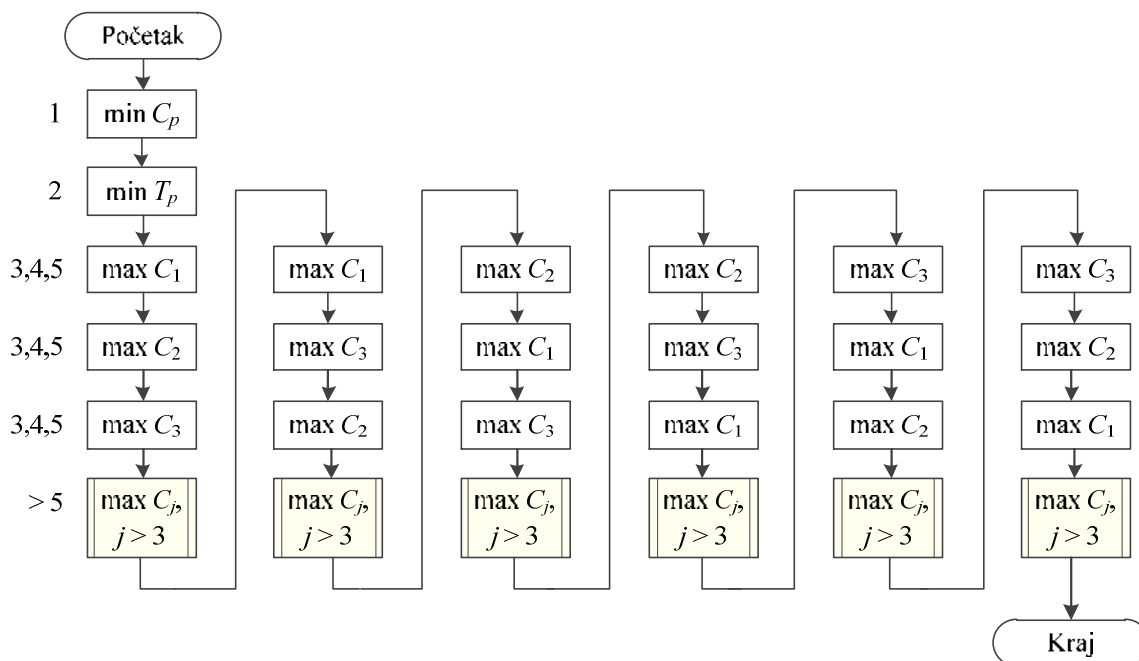


Слика 34.3. Алгоритам Р.2.3

$C_p, T_p, C_1, (C_2, C_3), C_4, \dots, C_{n1}$

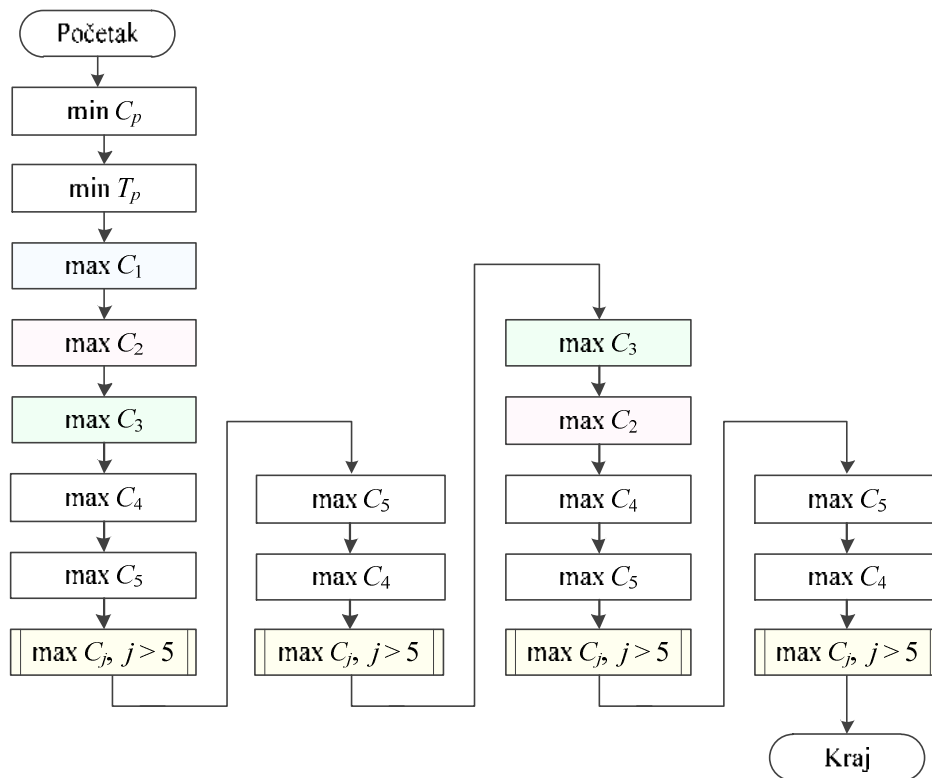
Легенда:

- Испред назива критеријума приказују се њихови приоритети. У алгоритму Р.2.2 два критеријума, C_1 и C_2 , равноправно деле ранг-места 3 и 4 од $2+n_1$ на ранг-листи.
- Парето-оптимална решења се одређују на крају сваке гране алгоритама (после разматрања свих критеријума у одговарајућим подпроцесима), што је приказано напред и на алгоритму Р.2.2 (у наредним алгоритмима се подразумева и не приказује).

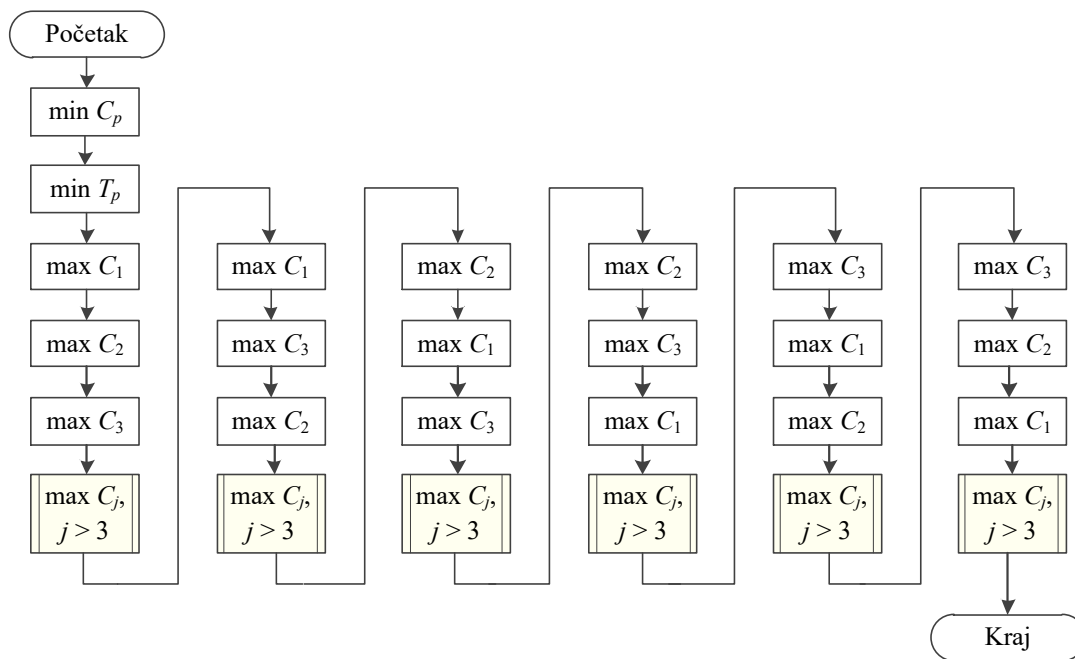


Слика 35.1. Алгоритам Р.3.1

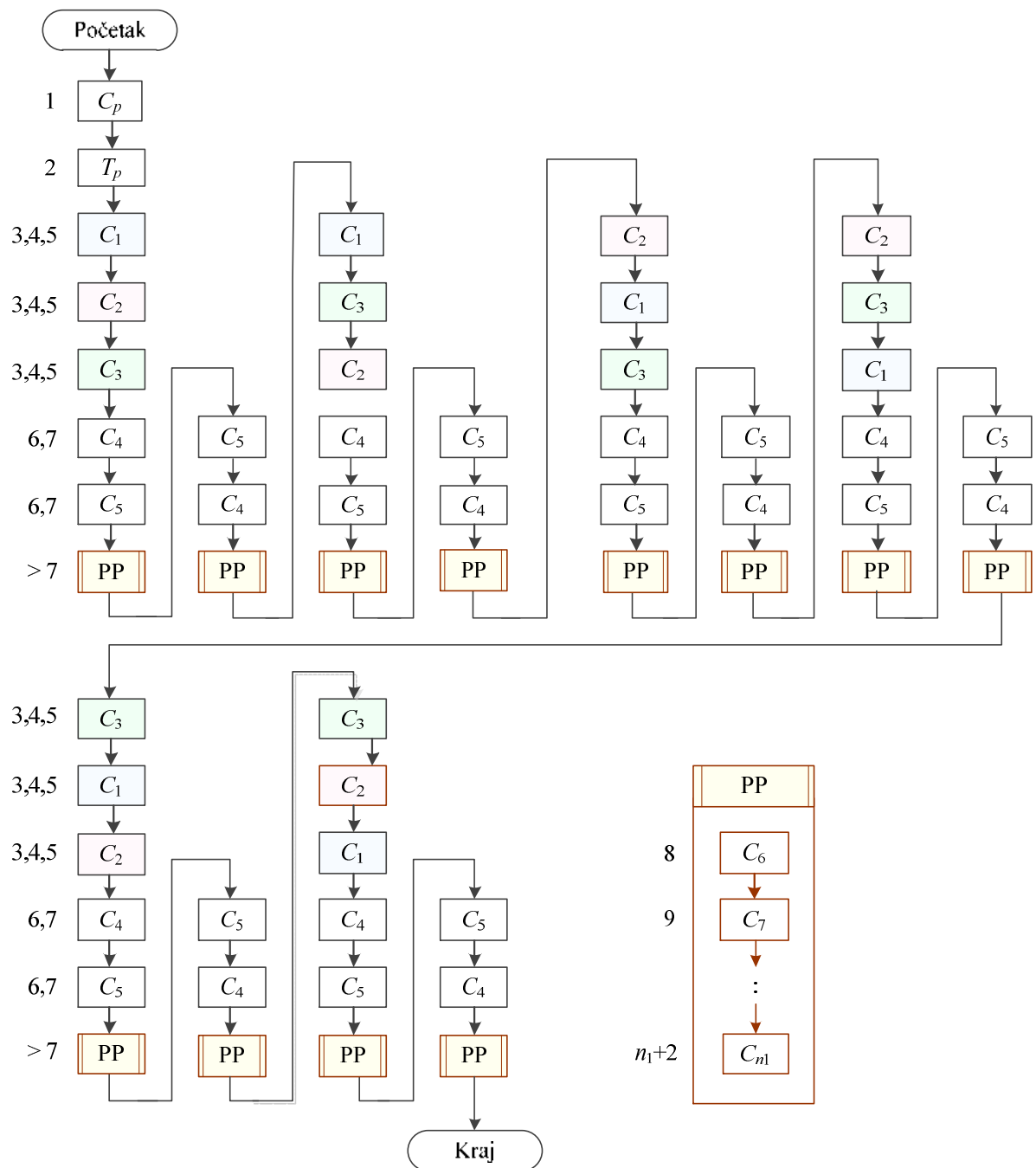
$C_p, T_p, (C_1, C_2), (C_3, C_4), C_5, \dots, C_{n1}$



Слика 35.2. Алгоритам Р.3.2
 $C_p, T_p, C_1, (C_2, C_3), (C_4, C_5), C_5, \dots, C_{n1}$



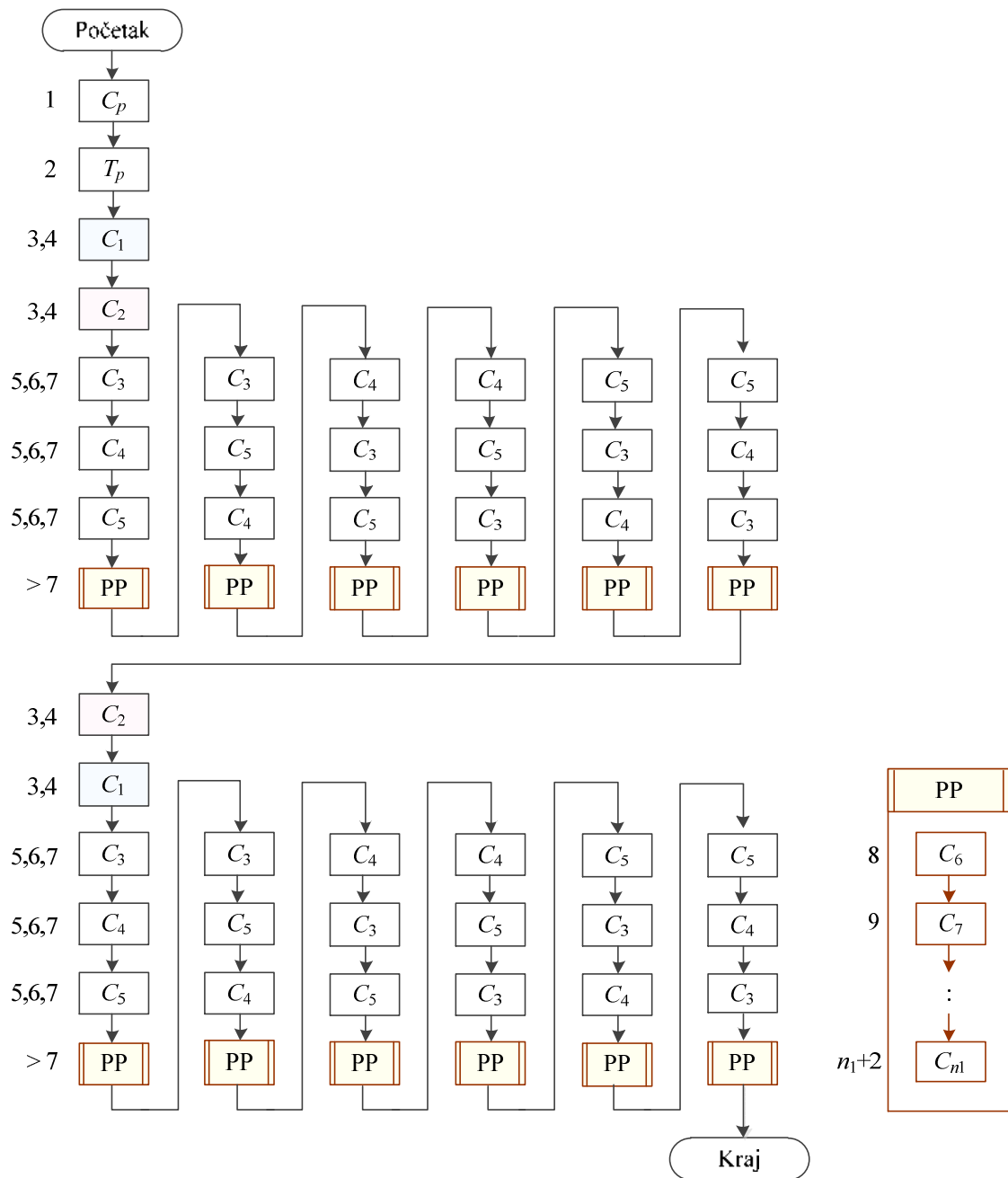
Слика 36. Алгоритам Р.4.1
 $C_p, T_p, (C_1, C_2, C_3), C_4, \dots, C_{n1}$



Слика 37.1. Алгоритам P.5.1 са подпроцесом/подпрограмом (PP) за лексикографску максимизацију $C_j, j > 5, j \in J^+$
 $C_p, T_p, (C_1, C_2, C_3), (C_4, C_5), C_6, \dots, C_{n_1}$

Легенда:

- Типови оптимизације критеријума (*max* или *min*) су познати, те се (у циљу прегледности) изостављају на овом и наредном дијаграму.
- Засебно се приказује и PP за трошкове извођача $j > 5, j \in J^+$.



Слика 37.2 Алгоритам P.5.2 са подпроцесом/подпрограмом (PP) за лексикографску максимизацију $C_j, j > 5, j \in J^+$
 $C_p, T_p, (C_1, C_2), (C_3, C_4, C_5), C_6, \dots, C_{n1}$

Изложена класификација проблема избора више извођача пројекта указује на комплексност праксе у грађевинаству. Дефинисани алгоритми указују на сложеност решавања општих модела ВКО и одговарајућих модела избора више извођача пројекта у зависности од међусобних односа:

- приоритета пројекта
- приоритета пројекта и извођача
- приоритета извођача.

5.

ПРИМЕНА ОДАБРАНИХ ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКИХ МОДЕЛА ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ИЗВОЂАЧА ПРОЈЕКТА СТАНОГРАДЊЕ

У овом делу напред изложена теоријска разматрања примењују се на реалном проблему планирања пројекта изградње једног стамбено-пословног објекта. Резултати истраживања подељени су на три дела:

1. Опис грађевинске компаније и одабраног пројекта
2. Оптимални избор једног извођача за пројекат у целости
3. Оптимални избор више извођача за одговарајуће делове пројекта.

Потврђује се употребљивост модела и алгоритама оптималног избора извођача у делу 4 (Класификација проблема оптималног избора више извођача пројекта, општи математички модели *МЦЛП* и алгоритми решавања) и примена одговарајућих софтверских пакета:

- Моделом *ВАО* (вишеатрибутивног одлучивања) и софтвером *Expert Choice* за методу *АХП* (Аналитичких хијерархијских процеса) решава се проблем оптималног избора једног извођача.
- Вишекритеријумским моделима *МЦЛП* (мешовито целобројнг линеарног програмирања) и софтвером *LP-ILP (Linear and Integer Programming)* из пакета *WinQSB (Quantitative Systems for Business)* одређују се решења са становишта оптималног избора више извођача којима се формирају планови пројекта применом стандардног софтвера за управљање пројектима *MS Project*.

5.1. ОПИС ГРАЂЕВИНСКЕ КОМПАНИЈЕ И ОДАБРАНОГ ПРОЈЕКТА

У примерима примене одабраних вишекритеријумских модела за оптимални избор извођача радова разматра се грађевинска компанија Градитељ-инжењеринг д.о. у Београду и пројекат изградње стамбено-пословног блока у насељу Карабурма.

5.1.1. Грађевинска компанија

Компанија Градитељ-инжењеринг основана је 1968. године, од када је у приватном власништву. Делатност фирме је планирање, пројектовање и надзор у изградњи стамбених и других објеката по систему „кључ у руке“ у земљи и иностранству и послови у области спољне и унутрашње трговине. Реноме изграђен у протеклих четрдесет година се заснива на богатој референц листи изведених радова, квалитету као и поштовању рокова и свих уговорних обавеза, како са пословним партнерима тако и са корисницима њених услуга. Досадашњи резултати су поред професионалног односа према послу, постигнути и политиком фирме да непрекидно ради на унапређењу кадрова, опреме, машинског парка и осталог.

Посебна пажња посвећује се сталном праћењу и примени нових материјала, опреме и технологија, почевши од фазе пројектовања и припреме па до извођења радова. Овакав приступ довео је до великог броја успешно завршених радова на реконструкцији и изградњи нових стамбених и пословних објеката са сопственим стручним кадром и механизацијом, применом савремених метода у управљању пројектима.

5.1.2. Одабрани пројекат изградње стамбено-пословног објекта

Истраживања су ограничена на стандардни тип стамбено–пословног градског објекта, изграђеног од армираног бетона у скелетном систему грађења. Стамбено-пословни блок у насељу Карабурма састоји се од шест ламела, у оквиру кога је предвиђена градња по фазама. У првој фази граде се две ламеле са 95 станова, 22 гаражна и 83 паркинг места. Свака ламела има по два лифта, паркинг намењен станарима објекта и дечије игралиште. Објекат се гради кроз пројектно финансирање у сарадњи са Банца Интеса и Социете Генерал Банка Србија.

5.1.2.1. Опис пројекта

Објекат за изградњу налази се у градском подручју. Идентификација радова и проучавање технологије и редоследа њиховог изводјења одвија се паралелно. Заступљено је понављање примењене технологије грађења са спрата на спрат и са ламеле на ламелу, чиме се технолошки процеси уходавају и добијају у брзини и квалитету.

Планирани почетак радова је предпостављен у динамичком плану извођења радова. Рокови извођења радова по фазама – ламелама проистекли су из усвојене технологије и организације грађења.

Трошкови изградње врсте радова, по правилу, исказују се по јединици мере која је за њих карактеристична. Избор јединице мере за сваку врсту рада се посебно анализира. Свођењем трошкова по врстама радова формира се укупна цена која обавезно на крају треба да буде исказана и преко јединице мере укупне подне површине (m^2).

5.1.2.2. Опис радова на пројекту

Разматрани пројекат подесно је дефинисати са одговарајућим *WBS* нивоима радова. Овде су усвојена три нова (табела 29.1): групе радова, радови и подрадови. У пракси се уобичајено дефинише 15 и више група радова карактеристичних за градњу стамбених објеката.

- Усвојено је да први ниво чине $m = 7$ група радова A_k , $k = 1, \dots, 7$ (ознаке А.01 до А.07). Групама А.05 до А.06 не разматрају се појединачни радови, те се њима дефинишу количине радова (час.) за поједине ресурсе, количине ресурса, трајање и трошкови.
- Други ниво су m_k одговарајућих радова A_{ki} у оквиру групе A_k , $i = 1, \dots, m_k$ са $m_1 = 8$, $m_2 = 2$ и $m_3 = m_4 = 3$ (ознаке А.01 до А.01.08 на примеру групе А.01). Ако се овим радовима не врши даље рашчљавање, одређују им се бројеви часова, ресурси, трајање у данима и трошкови.
- Неки радови A_{ki} се рашчљавају на n_{ki} подгрупа радова A_{kir} трећег нивоа, $r = 1, \dots, n_{ki}$ (ознаке А.01.06.01 и А.01.02 на примеру рада А.01.06). Овим подрадовима се разматрају часови, ресурси, трајање и трошкови.

Табела 29.1. Групе радова и радови – количине и трошкови (јединствени параметри)

| Ред. број | Ознака / шифра | Назив групе / рада | Обим (час.) | Вредност (н.ј.) |
|-----------|----------------|--------------------------------------------------|---------------|-----------------|
| | A.01 | GRUBI GRAĐEVINSKI RADOVI | | |
| 01 | A.01.01 | Pripremni radovi | 1.248 | 1.200 |
| 02 | A.01.02 | Zemljani radovi | 2.016 | 492 |
| 03 | A.01.03 | Hidroizolacija temelja | 160 | 43 |
| 04 | A.01.04 | Tesarski radovi | 11.008 | 3.000 |
| 05 | A.01.05 | Armirački radovi | 9.072 | 4.308 |
| 06 | A.01.06 | Betonski radovi | 5.280 | 3.456 |
| | A.01.06.01 | Nearmirani beton | (96) | (48) |
| | A.01.06.02 | Armirani beton | (5.184) | (3.408) |
| 07 | A.01.07 | Krovna konstrukcija | 1.248 | 540 |
| 08 | A.01.08 | Zidarski radovi | 25.024 | 3.144 |
| | | <i>Suma</i> | <i>55.056</i> | <i>16.182</i> |
| | A.02 | ZAVRŠNI GRAĐEVINSKI RADOVI | | |
| 9 | A.02.01 | Razni zidarski radovi | 6.880 | 2.532 |
| | A.02.01.01 | Cementna košuljica | (1.280) | (852) |
| | A.02.01.02 | Mašinsko malterisanje unutrašnjih zidova | (5.600) | (1.680) |
| 10 | A.02.02 | Limarski radovi | 2.376 | 432 |
| | | <i>Suma</i> | <i>9.616</i> | <i>2.964</i> |
| | A.03 | ZANATSKI RADOVI | | |
| 11 | A.03.01 | Stolarski radovi | 1.998 | 660 |
| 12 | A.03.02 | Bravarski radovi | 3.040 | 581 |
| 12 | A.03.03 | Prozori i vrata | 2.000 | 691 |
| | A.03.03.01 | PVC prozori i vrata | (1.504) | (493) |
| | A.03.03.02 | Ulazna sigurnosna vrata | (432) | (144) |
| | A.03.03.03 | PP vrata | (64) | (54) |
| 14 | A.03.04 | Izolaterski radovi | 2.656 | 1.128 |
| | A.03.04.01 | Unutrašnja termoizolacija | (2.400) | (1.032) |
| | A.03.04.02 | Hidroizolacija | (256) | (96) |
| 15 | A.03.05 | Fasaderski radovi | 9.120 | 2.100 |
| 16 | A.03.06 | Keramičarski radovi | 6.336 | 1.680 |
| 17 | A.03.07 | Molersko-farbarski radovi | 6.000 | 1.140 |
| 18 | A.03.08 | Podopolagački radovi | 2.368 | 1.596 |
| 19 | A.03.09 | Gipsarski radovi | 960 | 264 |
| | | <i>Suma</i> | <i>34.464</i> | <i>9.738</i> |
| | A.04 | INSTALATERSKI RADOVI | | |
| 20 | A.04.01 | Vodovod i kanalizacija | 12.104 | 3.720 |
| | A.04.01.01 | Instalacija vod. i kanalizacije sa hidrantima | (8.400) | (1.920) |
| | A.04.01.01.01 | I faza (vodovod i kanalizacija) | /6.000/ | /520/ |
| | A.04.01.01.02 | II faza (sanitarija i galanterije) | /2.400/ | /1.400/ |
| | A.04.01.02 | Spoljni razvod vod. kišne i fekalne kanalizacije | (3.000) | (1.680) |
| | A.04.01.03 | Instalacija sprinkler sistema | (704) | (120) |

5. Примена одабраних вишекритеријумских модела оптималног избора извођача пројекта станоградње

| Ред. број | Ознака / шифра | Назив групе / рада | Обим (час.) | Вредност (н.ј.) |
|-----------|----------------|------------------------------------------------------------------|-------------|-----------------|
| 21 | A.04.02 | Elektro instalacije | 10.224 | 1.920 |
| | A.04.02.01 | Instalacije jake struje | (5.112) | (1.700) |
| | A.04.02.01.01 | I faza jake struje | /3.120/ | /1.200/ |
| | A.04.02.01.02 | II faza jake struje | /1.992/ | /500/ |
| | A.04.02.02 | Instalacije slabe struje | (5.112) | (220) |
| | A.04.02.02.01 | I faza slabe struje | /3.000/ | /145/ |
| | A.04.02.02.02 | II faza slabe struje | /2.112/ | /75/ |
| 22 | A.04.03 | Termo-tehničke instalacije | 6.904 | 2.040 |
| | A.04.03.01 | Instalacije grejanja | (5.632) | (1.600) |
| | A.04.03.01.01 | I faza (grejanje) | /3.040/ | /520/ |
| | A.04.03.01.02 | II faza (radijatori, sušaći i kalometi) | /2.592/ | /1.080/ |
| | A.04.03.02 | Instalacije ventilacije i klimatizacije | (1.272) | (440) |
| | | <i>Suma</i> | 29.232 | 7.680 |
| 23 | A.05 | LIFTOVI (ugradnja) | 2.336 | 1.080 |
| 24 | A.06 | SPOLJNO UREĐENJE (potporni zidovi, kandelabri, ozelenjavanje) | 2.640 | 2.070 |
| 25 | A.07 | SPOLJNA INFRASTRUKTURA (asfalt, trotoari, parkinzi) | 3.600 | 2.046 |
| | | <i>Suma za projekat</i> | 136.944 | 41.762 |

Легенда:

- Ред. број = Редни бројеви група радова радова са становишта доделе извођачима
- A.01 до A.07: групе радова A_k , $k = 1, \dots, 7$
 - подаци у редовима “Suma” за групе $k = 1, \dots, 4$; и редовима са називима за групе $k = 5, 6, 7$
- A.01.01 итд.: радови A_{ki} , $k = 1, \dots, 7$, A_k , $i = 1, \dots, m_k$ (m_k = број радова групе A_k)
 - подаци у малим заградама, сумирају се за ниво група A_k
- A.04.01.01.01 итд.: подрадови A_{kir} , $k = 1, \dots, 7$, A_k , $i = 1, \dots, m_k$, $r = 1, \dots, m_{ki}$ (m_{ki} = број подрадова за рад A_{ki})
 - подаци у угластим заградама, сумирају се за ниво рада A_{ki}

Табела 29.2. Групе радова и радови – зависности и трајање (јединствени параметри)

| Ред. број | Ознака / шифра | Зависности | Трајање (дана) | | Број радника |
|-----------|----------------|--------------------------|----------------|----------------|--------------|
| | | | Радних дана | Период у плану | |
| | A.01 | | | | |
| 01 | A.01.01 | | 26 | | 6 |
| 02 | A.01.02 | (A.01.01)SS+5 | 21 | | 12 |
| 03 | A.01.03 | (A.01.08)FS | 5 | | 4 |
| 04 | A.01.04 | (A.01.03)FS | 172 | | 8 |
| 05 | A.01.05 | (A.01.04)SS+1 | 162 | | 7 |
| 06 | A.01.06 | | 164 | → 180 | |
| | A.01.06.01 | (A.01.02)FS | (2) | | 6 |
| | A.01.06.02 | (A.01.05)SS+10 | (162) | | 4 |
| 07 | A.01.07 | (A.01.06.02)FS | 28 | | 6 |
| 08 | A.01.08 | (A.01.06.02)SS+15 | 184 | | 17 |
| | <i>Suma</i> | | 762 | → 247 | 70 |
| | A.02 | | | | |
| 9 | A.02.01 | | 180 | → 140 | |
| | A.02.01.01 | (A.02.01.02)FF | (40) | | 4 |
| | A.02.01.02 | (A.01.08)SS+50 | (140) | | 5 |
| 10 | A.02.02 | (A.01.07)FS; (A.03.05)FF | 114 | | 3 |
| | <i>Suma</i> | | 294 | → 247 | 12 |
| | A.03 | | | | |
| 11 | A.03.01 | (A.02.01.02)FF+15 | 62 | | 4 |
| 12 | A.03.02 | (A.01.06.02)SS | 190 | | 3 |
| 13 | A.03.03 | | 67 | → 67 | |
| | A.03.03.01 | (A.02.01.02)FF | (47) | | 4 |
| | A.03.03.02 | (A.02.03.01)FS | (18) | | 3 |
| | A.03.03.03 | (A.03.03.02)FS | (2) | | 4 |
| 14 | A.03.04 | | 116 | → 100 | |
| | A.03.04.01 | (A.02.01.02)FF | (100) | | 3 |
| | A.03.04.02 | (A.03.04.01)FF | (16) | | 2 |
| 15 | A.03.05 | (A.03.03.01)FS+40 | 114 | | 10 |
| 16 | A.03.06 | (A.03.04.01)SS+7 | 198 | | 4 |
| 17 | A.03.07 | (A.03.06)FF+7 | 150 | | 5 |
| 18 | A.03.08 | (A.03.07)FF | 74 | | 4 |
| 19 | A.03.09 | (A.03.08)FF | 60 | | 2 |
| | <i>Suma</i> | | 1.032 | → 317 | 48 |
| | A.04 | | | | |
| 20 | A.04.01 | | 332 | → 255 | |
| | A.04.01.01 | | (225) | → 252 | |
| | A.04.01.01.01 | (A.02.01.02)SS+10 | /150/ | | 5 |
| | A.04.01.01.02 | (A.03.07)FF+10 | /75/ | | 4 |
| | A.04.01.02 | (A.04.01.01.01)FF+5 | (75) | | 5 |
| | A.04.01.03 | (A.04.01.01.02)FF+3 | (22) | | 4 |

| Ред. број | Ознака / шифра | Зависности | Трајање (дана) | | Број радника |
|-------------------------|----------------|----------------------|----------------|----------------|--------------|
| | | | Радних дана | Период у плану | |
| 21 | A.04.02 | | 426 | → 244 | |
| | A.04.02.01 | | (213) | → 243 | |
| | A.04.02.01.01 | (A.02.01.02)FF+4 | /125/ | | 3 |
| | A.04.02.01.02 | (A.03.07)FF+5 | /88/ | | 3 |
| | A.04.02.02 | | (213) | → 238 | |
| | A.04.02.02.01 | (A.02.01.02)FF+5 | /125/ | | 3 |
| | A.04.02.02.02 | (A.03.07)FF+6 | /88/ | | 3 |
| 22 | A.04.03 | | 229 | → 217 | |
| | A.04.03.01 | | (176) | → 214 | |
| | A.04.03.01.01 | (A.02.01.02)FF | /95/ | | 4 |
| | A.04.03.01.02 | (A.03.07)FF+7 | /81/ | | 4 |
| | A.04.03.02 | (A.04.03.01.02)FF+3 | 53 | | 3 |
| | <i>Suma</i> | | 997 | → 255 | 41 |
| 23 | A.05 | (A.04.02)FF+5 | 73 | | 4 |
| 24 | A.06 | (A.04.01.01.01)SS+30 | 55 | | 6 |
| 25 | A.07 | (A.06)SS | 75 | | 6 |
| <i>Suma za projekat</i> | | | 3.288 | → 374 | 224 |

- Број радних дана = Усвојено трајање радова са одговарајућим ресурсима
- Период у плану = период обављања сложених радова (са рашчлањавањем на ниже нивое радова) на основу зависности и временског распореда нижих нивоа радова у основном плану
- Зависности за пар радова (први рад, други рад = посматрани рад)
 - FS (*Finish to Start*, завршити први да се започне други/посматрани рад)
 - SS (*Start to Start*, започети истовремено први и други/посматрани рад)
 - FS ± Lag (*Finish to Start* са померањем посматраног рада за број дана = Lag)
 - SS ± Lag (*Start to Start* са померањем посматраног рада за број дана = Lag)

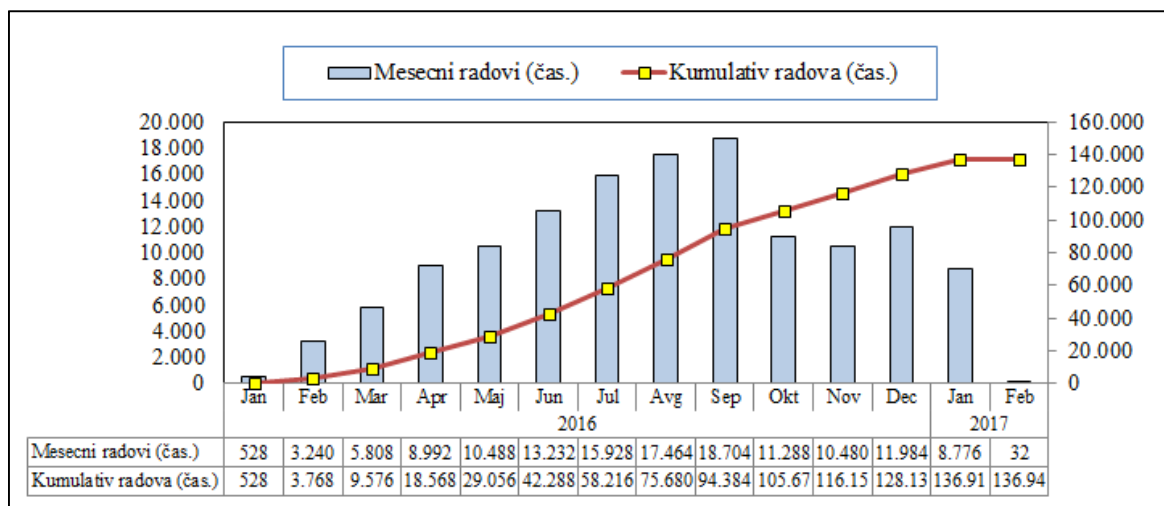
Са дефинисаним елементима за радове, временима трајања и технолошким зависностима радова, применом стандардног софтвера за управљање пројектима одређује се минимално трајање пројекта $T_p^{\min} = 374$ радних дана (слика 38.1).



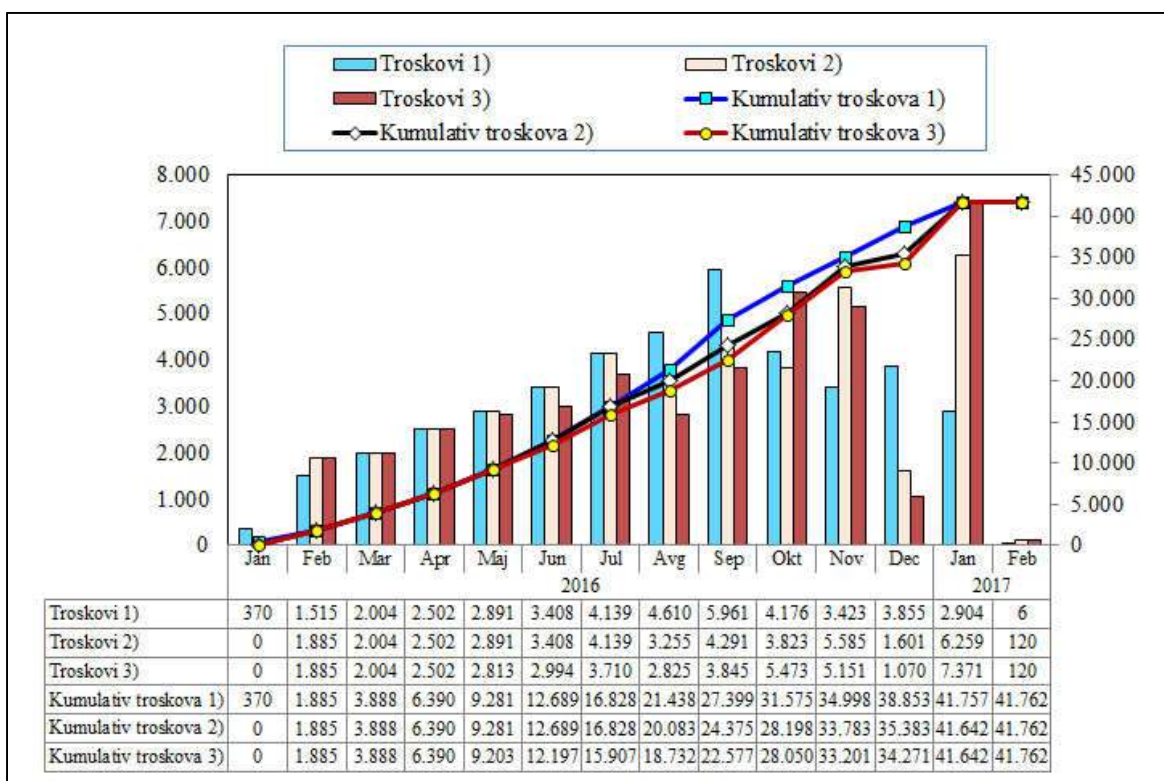
Слика 38.1. Динамички план пројекта на нивоу група радова за минимално трајање пројекта $T_p^{\min} = 374$ дана (софтвер MS Project)

На пројекту уобичајено се посматрају месечне количине радова, као и кумулатив радова (слика 38.2). Од посебног значаја је планирање трошкова. Илустрјују се три приступа подржана софтвером *MS Project* (слика 38.3). Изостављају се авансне исплате укупних трошкова на почетку рада (*Accrual Method Start*).

1. Уобичајене исплате трошкова пропорционално изведеним радовима, односно исплате на крају месеца за изведене радове (*Accrual Method Prorate*).
2. Комбиновање приступа 1) и 3): ако рад траје дуже од 2,5 мес. и приступ 3) ако рад траје мање од 2,5 мес. и извођач прихвата такав начин исплате.
3. Исплате укупних трошкова на крају месеца завршетка радова (*Accrual Method End*).



Слика 38.2. Месечни и кумулативни радови



Слика 38.3. Месечни и кумулативни трошкови (три облика обрачуна)

Пројекат захтева ангажовање 17 квалификационих категорија радника који обављају 38 врста радова (табела 29.3). Укупан број радника свих категорија на пројекту износи 224 (табела 29.2). За планирање битне су три врсте податка о дневним потребама сваке категорије радника.

- Максималне дневне потребе радника (*Max Units*) за минимално трајање пројекта $T_p^{\min} = 374$ дана:
 - Потребни радници када сви радови имају најраније почеткњ (колона 5).
 - Отималне потребе, односно минималне потребе за радницима које се одређују прогресивним постављањем све мањих вредности *Max Units* и нивелисањем ових ресурса док је могуће задржати T_p^{\min} . Показује се да је потребно ангажовати мање изолатера, столара, водоинсталатера и зидара (колона 6).
- Најмање максималне дневне потребе радника (*Max Units*) да се обави пројекат, независно од његовог трајања. Утврђује се да пројекат има трајање $T_p^{\max} = 596$ дана ако се додатно умање бројеви молера, водоинсталатера и зидара (колона 7).

Табела 29.3. Подаци за категорије радника на пројекту

| 1 | Назив | Број радова | Количина (<i>Work</i>) (час.) | Максимални број радника на дан (<i>Max Units</i>) | | |
|-------------------------|----------------|-------------|---------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| | | | | Полазни подаци за $T_p^{\min} = 374$ | Оптимално / минимално за $T_p^{\min} = 374$ | Оптимално / минимално за $T_p^{\max} = 596$ |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 01 | Armirac | 1 | 9.072 | 7 | 7 | 7 |
| 02 | Betonirac | 2 | 5.280 | 6 | 6 | 6 |
| 03 | Bravar | 1 | 3.040 | 2 | 2 | 2 |
| 04 | Elektricar | 4 | 10.224 | 6 | 6 | 6 |
| 05 | Fasader | 1 | 9.120 | 10 | 10 | 10 |
| 06 | Izolater | 3 | 2.816 | 5 | 4 | 4 |
| 07 | Keramicar | 1 | 6.336 | 4 | 4 | 4 |
| 08 | Limar | 1 | 2.736 | 3 | 3 | 3 |
| 09 | Masinac | 1 | 2.336 | 4 | 4 | 4 |
| 10 | Moler | 2 | 6.960 | 7 | 7 | 5 |
| 11 | Parketar | 1 | 2.368 | 4 | 4 | 4 |
| 12 | Parnogrejac | 3 | 6.904 | 7 | 7 | 4 |
| 13 | NK Radnik | 4 | 9.504 | 18 | 18 | 12 |
| 14 | Stolar | 4 | 3.984s | 8 | 4 | 4 |
| 15 | Tesar | 2 | 11.440 | 8 | 8 | 8 |
| 16 | Vodoinstalater | 4 | 12.104 | 10 | 9 | 5 |
| 17 | Zidar | 3 | 31.904 | 26 | 22 | 17 |
| <i>Suma za projekat</i> | | 38 | 136.128 | - | - | - |

Напомене:

- Овде се приказују бројеви радова са становишта одговарајуће квалификационе категорије радника. На пројекту има 38 таквих радова.
- Напред су разматрани радови са становишта избора извођача (табела 29.1 и 1.2). Број радова износи 25, пошто се у одговарајућој групи радова обједињују сви нивои радова које ће обављати изабрани извођач. Таква класификација радова користи се за све моделе у наставку.

5.2. МОДЕЛ ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ЈЕДНОГ ИЗВОЂАЧА ЗА ПРОЈЕКАТ У ЦЕЛОСТИ

Проблем оптималног избора једног извођача за пројекат у целости своди се на примени вишекритеријумске анализе (ВКА), односно вишеатрибутивног одлучивања (ВАО) из поглавља 3.2. Усвојена је метода аналитичких хијерархијских процеса (АХП) са софтвером *Expert Choice* из дела 3.2.3.2.г.

- Прво је потребно дефинисати критеријуме пројекта на основу којих се врши избор и расписати тендер или водити директне разговоре са потенцијалним извођачима о трајању и цени пројекта, условима плаћања и др.
- На основу пријава на тендеру или преговора формира се листа потенцијалних извођача са њиховим карактеристикама (опремљеност, референце и др.). Исти извођач може да има више понуда. Потребно је изоставити извођаче са неповољним понудама у односу на друге извођаче.
- Следи формирање модела методе АХП са усвојеном листом потенцијалних извођача, хијерархијских стаблом са више нивоа критеријумима пројекта, критеријума извођача, вредностима критеријума које остварују извођачи и приоритетима за критеријуме пројекта.
- Избор најповољнијег извођача врши се анализом решења модела, односно даљим разматрањем добијене вишекритеријумске ранг листе модела.

5.2.1. Потенцијални извођачи за пројекат у целости и њихове карактеристике

Потенцијалне извођаче за пројекат станоградње у целости потребно је сагледати са становишта њихових наредних карактеристика (табела 30.1):

- опремљеност (техничка и кадровска), критеријуми 3 и 4 из члана 76. Закона о јавним набавкама којима се могу прикључити и прва два критеријума¹⁶⁵
- референце (изведени пројекти у целости, учешће на деловима пројектата)
 - пројекти компаније са разматраним пројектом станоградње (наши пројекти)
 - учешће на пројектима других компанија (други пројекти)
 - област станоградње
 - друге области
- евентуални додатни захтеви (термини почетка или завршетка ангажовања, дужина периода ангажовања и сл.).

Сагледавањем доступне пројектне документације – предмета посла, извођач формира представу о комплексности и величини пројекта, кроз идентификују количина радова и трошкова. Да би се сагледао предмет посла, неопходно је познавање технологије извођења радова који се процењују. За радове са добро разрађеном и стандардном технологијом извођења, као што су стамбени објекти, много се једноставније уочавају сви извори трошкова и време извођења.

¹⁶⁵ Закон о јавним набавкама (Сл. гласник РС бр. 124/2012, 14/2015 и 68/2015), Члан 76.: Наручилац у конкурсној документацији одређује додатне услове за учешће у поступку јавне набавке у погледу финансијског, пословног, техничког и кадровског капацитета увек када је то потребно имајући у виду предмет јавне набавке.

Један од суштинских послова у току реализације пројекта је израда понуде која се базира на проценама трошкова и времену грађења. Све ово има за циљ да помогне инвеститору у доношењу одлуке да ли да настави активности на започетом пројекту. Извођач, са своје стране, проучава захтеве инвеститора и брзо их упоређује са својим могућностима и предвиђеним трошковима и времену грађења. Уколико процени да располаже могућностима да одговори захтеву, извођач детаљније процењује трошкове и одредјује потребно време грађења, користећи при томе податке из сопствене базе података, како је већ предвиђено процедуром формирања понуде.

Даљи односи између инвеститора и извођача зависе од њихове одлуке да ли им је оправдано да учествују у реализацији пројекта, а ова одлука може да се донесе на основу увида у очекиване трошкове и време извођења радова. Зато је неопходно да, инвеститор и извођач, свако на свој начин и на основу података којим располажу процене трошкове и време потребно за реализацију појединих делова пројекта и пројекта у целини.

5.2.2. Циљеви пројекта и приоритети циљева

Пројекат има наредне циљеве које је потребно остварити избором најповољнијег извођача који ће остварити задовољавајући квалитет радова у прописаним оквирима (табела 30.1):

- минимално трајање (дана)
- цена:
 - минимални износ (н.ј.)
 - максимално повољни услови плаћања.

Значајност циљева, у математичком смислу, исказује се приоритетима. Трајање и цена пројекта могу бити подједнако значајни, или се једном даје приоритет. Ако се могу обезбедити довољна финансијска средства, приоритет има трајање пројекта сматрајући да краће трајање захтева већу цену. И обрнуто, ограничени буџет условљава дуже трајање пројекта. Повољнији услови исплате трошкова, изложени у наставку, доприносе остварењу циљева за трајање и цену пројекта.

5.2.3. Вишекритеријумска анализа и избор најповољнијег извођача за пројекат у целости

Модел *ВАО* са напред дефинисаним елементима формрају 9 потенцијалних извођача и 13 критеријума пројекта које је подесно распоредити на 5 нивоа хијерархијског стабла одлучивања (слика 39.1 и табеле 30.1, 30.2, 30.3). Разматрају се *две подгрупе потенцијалних извођача* са становишта раније сарадње: 5 су учествовали на пројектима компаније (I.1.1 до I.1.5) и 4 нису учествовали (I.2.1 до I.2.4).

Трајање и цена пројекта су критеријуми типа минимизације а остали типа максимизације. Матрица плаћања модела формира се у складу са природом сваког критеријума.

- Већина критеријума (9) имају *нумеричке вредности* које остварују одговарајући потенцијални извођачи.

- Ранија сарадња са потенцијалним извођачима исказана је двојачко:
 - критеријумом K_3 из групе критеријума са вербалним оценама
 - критеријумом K_{221} – Референце на пројектима компаније са нумеричким вредности за два подкритеријума:
 - K_{2211} – Пројекти изведени у целости
 - K_{2212} – Пројекти на којима су изведени одговарајући делови.
- Три критеријума карактеришу вербалне оцене које се преводе у нумеричке оцене на интервалу 1 до 9 применом линеарне скале трансформација атрибута:
 - K_3 – Ранија сарадња (5 до 7 задовољавајућа, 8 добра, 9 изузетно добра)
 - K_{122} – Облик плаћања трошкова (1 авансно у целости, 3 авансно делимично, 5 месечно према изведеним радовима, 6 и 7 померање исплата дела трошкова у наредне месеце, 8 исплате на завршетку радова)
 - K_{13} – Очекивани квалитет радова на разматраном пројекту (7 прихватљив, 8 добар, 9 изузетно добар).

Хијерархијско стабло критеријума (слика 39.1) има на врху проблем, односно циљ (Goal) који се решава, а критеријуми су на нижеим нивоима ($N = 1$ до $N = 5$). Критеријум без подкритеријума су на крајевима одговарајућх грана стабла и њима се додељују алтернативе (извођачи).

Табела 30.1. Модел вишекритеријумске анализе (ВАО) избора једног извођача пројекта

| Потенцијални извођачи за пројекат у целости | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------------------|-----------------------------|----------------|-------|-------|-------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-----|
| Редни број | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Тип |
| Ранија сарадња | | ДА (постојала) | | | | | НЕ (није постојала) | | | | |
| Ознака / Шифра | | I.1.1 | I.1.2 | I.1.3 | I.1.4 | I.1.5 | I.2.1 | I.2.2 | I.2.3 | I.2.4 | |
| 1. Критеријуми пројекта | 1. Трајање, Тр (dana) | 400 | 390 | 380 | 350 | 400 | 340 | 370 | 360 | 385 | min |
| | 2. Cena / Troškovi | | | | | | | | | | |
| | 2.1. Iznos, Ср (n.j.) | 40 | 45 | 44 | 50 | 45 | 55 | 45 | 48 | 45 | min |
| | 2.2. Oblik plaćanja (ocena) | 5 | 5 | 5 | 7 | 5 | 7 | 5 | 6 | 8 | max |
| | 3. Kvalitet (ocena) | 9 | 8 | 8 | 9 | 8 | 7 | 9 | 9 | 9 | max |
| 2. Карактеристике потенцијалних извођача | 1. Opremljenost | | | | | | | | | | |
| | 1.1. Tehnička | 8 | 7 | 8 | 9 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | max |
| | 1.2. Kadrovska | 9 | 9 | 9 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | max |
| | 2. Reference (broj proj.) | | | | | | | | | | |
| | 2.1. Naši projekti | | | | | | | | | | |
| | 2.1.1. U celosti | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | max |
| | 2.1.2. Delovi | 6 | 4 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | max |
| | 2.2. Drugi projekti | | | | | | | | | | |
| | 2.2.1. Stanogradnja | | | | | | | | | | |
| | 2.2.1.1. U celosti | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 | 4 | 2 | 0 | max |
| | 2.2.1.2. Delovi | 8 | 5 | 10 | 15 | 4 | 12 | 15 | 6 | 4 | max |
| | 2.2.2. Druge oblasti | | | | | | | | | | |
| 2.2.2.1. U celosti | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 3 | 0 | max | |
| 2.2.2.2. Delovi | 5 | 6 | 4 | 2 | 8 | 6 | 1 | 7 | 12 | max | |
| 3. Ocena ranije saradnje | 9 | 9 | 9 | 8 | 8 | - | - | - | - | max | |

5.2.3.1. Сужавање листе потенцијалних извођача

Са листе потенцијалних извођача и њихових понуда потребно је изоставити неповољне понуде извођача са више понуда, односно извођача са једном понудом, које имају лошију вредност за најмање један критеријум (или више критеријума) од вредности тог (тих) критеријума код неког (неких) од преосталих извођача. Истовремено, неповољне понуде немају бољих вредности за преостале критеријуме (могу имати једнаке вредности, ако нису све лошије вредности). Лошије или неповољније вредности се утврђују посматрајући типове критеријума:

- лошије су мање вредности (боље су веће вредности) за критеријуме (*max*)
- лошије су веће вредности (боље су мање вредности) за критеријуме (*min*).

5.2.3.2. Непосредно одређивање решења – брзо одлучивање

Решавање модела ВАО може се вршити поједностављено пребројавањем бројева најбољих и најлошијих вредности критеријума (табела 30.2). При томе, не разматрају се:

- значајности критеријума и
- распони вредности критеријума између најбољих и најлошијих вредности.

Табела 30.2. Почетна анализа модела ВАО за избор једног извођача пројекта

| Критеријуми | Потенцијални извођачи за пројекат у целости | | | | | | | | | Тип | Нај-боље | Нај-лошије | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------|--------------|--------------|-----------|----------------|---------------|--------------|-----------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|--------------|----------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | | |
| | I.1.1 | I.1.2 | I.1.3 | I.1.4 | I.1.5 | I.2.1 | I.2.2 | I.2.3 | I.2.4 | | | | |
| K ₁ | K ₁₁ | 400 | 390 | 380 | 350 | 400 | 340 | 370 | 360 | 385 | min | 340 | 400 |
| | K ₁₂₁ | 40 | 45 | 44 | 50 | 45 | 55 | 45 | 48 | 45 | min | 40 | 55 |
| | K ₁₂₂ | 5 | 5 | 5 | 7 | 5 | 7 | 5 | 6 | 8 | max | 8 | 5 |
| | K ₁₃ | 9 | 8 | 8 | 9 | 8 | 7 | 9 | 9 | 9 | max | 9 | 7 |
| K ₂ | K ₂₁₁ | 8 | 7 | 8 | 9 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | max | 9 | 7 |
| | K ₂₁₂ | 9 | 9 | 9 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | max | 9 | 8 |
| | K ₂₂₁₁ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | max | 0 | 0 |
| | K ₂₂₁₂ | 6 | 4 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | max | 6 | 0 |
| | K ₂₂₂₁₁ | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 | 4 | 2 | 0 | max | 5 | 0 |
| | K ₂₂₂₁₂ | 8 | 5 | 10 | 15 | 4 | 12 | 15 | 6 | 4 | max | 15 | 4 |
| | K ₂₂₂₂₁ | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 3 | 0 | max | 5 | 0 |
| K ₂₂₂₂₂ | 5 | 6 | 4 | 2 | 8 | 6 | 4 | 7 | 12 | max | 12 | 4 | |
| K ₃ | 9 | 9 | 9 | 8 | 8 | - | - | - | - | max | 9 | 8 | |
| Број најбољих вредности | 5 | 2 | 2 | 3 | 0 | 4 | 5 | 3 | 5 | Најлошије вредности : најмање за тип <i>max</i> највеће за тип <i>min</i> | | | |
| Број најлошијих вредности | 3 | 2 | 2 | 2 | 7 | 3 | 3 | 1 | 4 | | | | |
| Приоритет | 2 (3) | 7 (8) | 8 (7) | 6 | 9 | 4 | 3 (2) | 5 | 1 | | | | |
| ВК ранг листа: I.2.4 >> (I.1.1, I.2.2) >> I.2.1 >> I.2.3 >> I.1.4 >> (I.1.2, I.1.3) >> I.1.5 | | | | | | | | | | | | | |

Непосредно одређивање решења (тзв. „брзо одлучивање“), односно приоритета или ранг места на вишекритеријумској (ВК) ранг листи спроводи се у три етапе:

- Посматрајући вредности истог критеријума код свих извођача одређују се најбоља или идеална вредност и најлошија вредност (редови табеле).
- Посматрајући сваког извођача одређује се број критеријума којима остварује најбоље вредности и број критеријума са најлошијим вредностима (колоне табеле).
- Приоритети извођача 1 до 9 одређују се редоследом већих бројева најбољих вредности критеријума и мањих бројева најлоших вредности. Најповољнији је извођач И.2.4. Два или више извођача деле исто ранг место када имају исти број најбољих вредности и исти број најлошијих вредности: (I.1.1, I.2.2) деле места (2, 3), (I.1.2, I.1.3) деле места (7, 8).

5.2.3.3. Приоритети критеријума модела избора

Најсложенији део примене било које методе *BAO* јесте дефинисање приоритета или тежина за критеријуме, посебно за *AHP* са више нивоа критеријума (детаљно изложено у делу 3.2.3.2 под г.1.4). Квалитет решења модела, односно употребљивост добијене вишекритеријумске ранг листе потенцијалних извођача зависи од адекватне доделе приоритета у складу са значајностима разматраних критеријума. Са другим приоритетима могу настати разлике у ранг местима извођача. Зато је неопходна анализа осетљивости решења пре усвајања коначног решења. У наставку примењују се два поступка доделе приоритета.

- Критеријумима на првом нивоу ($N = 1$) K_1 до K_3 вршено је поређење свих парова и оцене су додељивање сходно скали 9 тачака (табела 30.4). Разматрају се само парови изнад главне дијагонале матрице поређења и резултат су нумеричке тежине w_1 до w_3 .
- Осталим критеријумима су непосредно дефинисане бројне вредности тежина (табела 30.3).

5.2.3.4. Решавање модела применом софтвера Expert Choice

Решавање модела и анализа може бити двојака, тако што се посматрају:

- сви потенцијални извођачи (слика 39.1, табела 30.5.1)
- одабрани потенцијални извођачи, односно само они са референцама за целе пројекте у станоградњи (слика 39.2, табела 30.5.2): I.1.1, I.1.2, I.2.1, I.2.2 и I.2.3.

За тумачење решења најзначајнији су добијени приоритети алтернатива, али је потребно детаљније образложити приоритете критеријума на основу којих је добијено решење.

Напред дефинисане тежине критеријума (табела 2.3) су локалне тежине или приоритети (L) у заградама после назива критеријума у левом делу екрана *Model View* са решењем (слика 39.1). Софтвер прорачунава глобалне приоритет (G) за одређивање решења. На примеру критеријума 1.2. Трошкови ($N = 2$) са два подкритеријума ($N = 3$) одређени су приоритети из наставка.

Приоритети подкритеријума 1.2.1 и 1.2.2 у оквиру критеријума 1.2

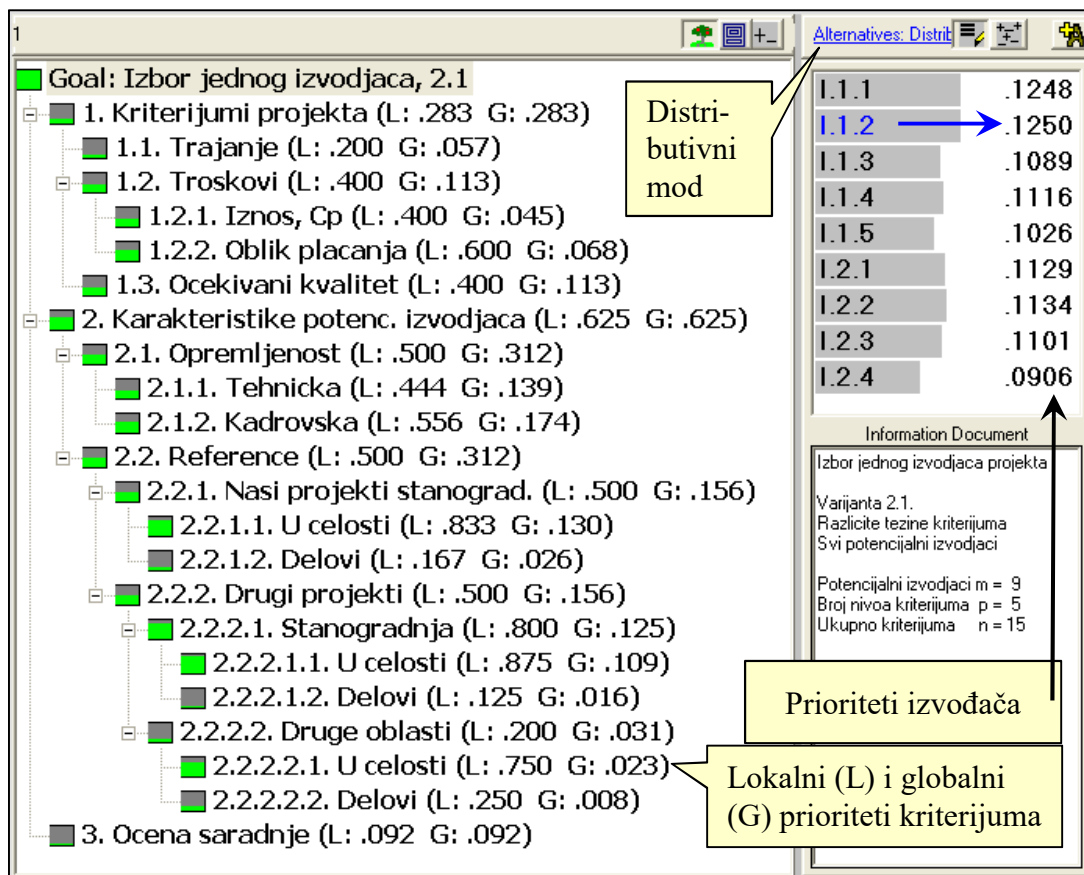
- Локални приоритети (L) подкритеријума имају вредности $w_{121}^L = 0,400$ за (1.2.1. Iznos, Cp) и $w_{122}^L = 0,600$ за {1.2.2. Oblik плаћања}. То су нормализоване вредности за полазне тежине $w_{121} = 4$ и $w_{122} = 6$ (табела 2.3) о значају ових подкритеријума (деце) у оквиру критеријума 1.2 на вишем нивоу (родитеља) коме подкритеријуми припадају.
- Глобални приоритети (G) подкритеријума са вредностима $w_{121}^G = w_{121}^* = 0,045$ и $w_{122}^G = w_{122}^* = 0,068$ исказују њихов значај на нивоу проблема сагласно са значајем, односно приоритетом њиховог критеријума 1.2.

Табела 30.3. Приоритети (тежине) критеријума модела ВАО за избор једног извођача пројекта

| Хијерархијско стабло критеријума | | Нижи нивои | | | | |
|------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|
| Ниво N = 1 | Нижи нивои 2 - 5 | N = 1 | N = 2 | N = 3 | N = 4 | N = 5 |
| К ₁ Крите- ријуми пројекта | K ₁₁ | w ₁ = 0,283 | w ₁₁ = 1 | | | |
| | K ₁₂ | | w ₁₂ = 2 | | | |
| | K ₁₂₁ | | | w ₁₂₁ = 4 | | |
| | K ₁₂₂ | | | w ₁₂₂ = 6 | | |
| | K ₁₃ | | w ₁₃ = 2 | | | |
| К ₂ Карактеристике потенцијалних извођача | K ₂₁ | w ₂ = 0,625 | w ₂₁ = 1 | | | |
| | K ₂₁₁ | | | w ₂₁₁ = 4 | | |
| | K ₂₁₂ | | | w ₂₁₂ = 5 | | |
| | K ₂₂ | | w ₂₂ = 1 | | | |
| | K ₂₂₁ | | | w ₂₂₁ = 1 | | |
| | K ₂₂₁₁ | | | | w ₂₂₁₁ = 5 | |
| | K ₂₂₁₂ | | | | w ₂₂₁₂ = 1 | |
| | K ₂₂₂ | | | w ₂₂₂ = 1 | | |
| | K ₂₂₂₁ | | | | w ₂₂₂₁ = 4 | |
| | K ₂₂₂₁₁ | | | | | w ₂₂₂₁₁ = 7 |
| | K ₂₂₂₁₂ | | | | | w ₂₂₂₁₂ = 1 |
| | K ₂₂₂₂ | | | | w ₂₂₂₂ = 1 | |
| К ₃ Saradnja | K ₂₂₂₂₁ | | | | | w ₂₂₂₂₁ = 3 |
| | K ₂₂₂₂₂ | | | | | w ₂₂₂₂₂ = 1 |
| | | w ₃ = 0,092 | | | | |

Табела 30.4. Поређење свих парова критеријума проблема (ниво 1) применом скале 9 тачака

| | K ₁ | K ₂ | K ₃ |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| K ₁ | Није потребно, подразумева се 1 | <i>Strong</i> – Строго значајнији K ₂ , 5) | <i>Very Strong</i> – Врло строго значајнији K ₁ , 7 |
| K ₂ | Није потребно, важи реципрочна вредност пара (K ₁ ,K ₂) | Није потребно, подразумева се 1 | <i>Moderate</i> – Умерено значајнији K ₂ , 3 |
| K ₃ | Није потребно, важи реципрочна вредност пара (K ₁ ,K ₃) | Није потребно, важи реципрочна вредност пара (K ₂ ,K ₃) | Није потребно, подразумева се 1 |



Слика 39.1. Решење модела избора једног извођача (*Model View*), *Distributive Mode*
Анализа свих извођача

Приоритети критеријума 1.2

- Овај критеријум има локални приоритет $w_{12}^L = 0,400$ изведен као нормализована тежина из сопствене полазне тежине $w_{12} = 2$ и полазних тежина критеријума на истом нивоу ($N = 2$): $w_{12} = 1$ за $\{1.1. \text{Trajanje, Tr}\}$ и $w_{13} = 2$ за $\{1.3. \text{Ocekivani kvalitet}\}$. Локални приоритет w_{12}^L одражава значај критеријума 1.2 у односу на остала два критеријума 1.1 и 1.3 са истим родитељем $\{1. \text{Kriterijumi projekta}\}$ на вишем нивоу ($N = 1$).
- Глобални приоритет $w_{12}^G = w_{12}^* = 0,113$ исказује значај критеријума 1.2 на нивоу проблема у складу са значајем $w_1^* = 0,283$ за $\{1. \text{Kriterijumi projekta}\}$.

Сви критеријуми највишег нивоа ($N = 1$) имају једнаке локалне и глобалне приоритете $w_j^* = w_j^L = w_j^G$ ($j=1,2,3$): $w_1^* = 0,283$ за $\{1. \text{Kriterijumi projekta}\}$; $w_2^* = 0,625$ за $\{2. \text{Karakteristike izvođjača}\}$ и $w_3^* = 0,092$ за $\{3. \text{Ocena saradnje}\}$.

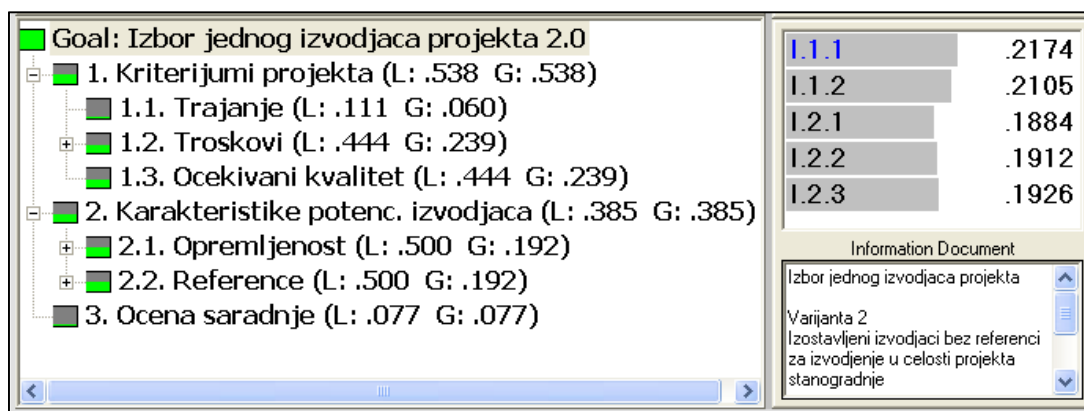
- Ове вредности дефинисане су као полазни подаци (табела 30.3), у овом случају поређењем свих парова применом скале 9 тачака (табела 30.4). Тиме су добијене нормализоване тежине.
- У супротном, ако се тежине за критеријуме највишег нивоа дефинишу на неки други начин (непосредно задавање бројних вредности као што су дефинисане тежине за све критеријуме на нижим нивоима, коришћење графика или линеарне осе), софтвер врши њихову нормализацију.

Наредна битна карактеристика методе АХП односи на трансформације полазних вредности критеријума (табела 30.1) у процесу решавања модела. Многи познати аутори разматрали су који облик користити за исправно решавање конкретних модела, уочивши да два приступа ове методе могу вршити замене приоритета алтернатива у решењу. Наиме, када се бира најповољнија алтернатива (најповољнији извођач у разматраном проблему) са врха ранг листе, евентуално различите алтернативе на првом и другом месту са наведеним приступима онемогућава доносиоцу одлуке да поуздано изврши избор. Различита места за остале алтернативе којима су одређени нижи приоритети не морају бити од значаја, осим ако се не жели детаљно рангирање свих алтернатива (анализа свих потенцијалних извођача у разматраном примеру, односно свих алтернатива у другим проблемима). Аутор методе дао је препоруке о коришћењу једног или другог приступа са становишта карактеристика разматраног модела (детаљно изложено у поглављу 3.2.3.2, део ц.1.7).

- *Ideal Mode* (идеални мод или начин) врши трансформације са идеалним вредностима критеријума и препоручује се за моделе у којима су накнадно врши додавање или изостављање критеријума (отворени модели). Идеалне вредности додатих критеријума оправдано се користе у трансформацијама насталог модела. При изостављању критеријума овај начин се користи ако се дозвољава да њихове идеалне вредности учествују у трансформацијама и утучу на резултат.
- *Distributive Mode* (дистрибутивни мод) користи адитивну агрегацију, тј. двоструку нормализацију са сумом вредности критеријума. Препоручује се за разматрање свих критеријума (затворени модели) или дела критеријума (отворени модели) када се жели да изостављени критеријуми не утичу на резултат.

а) Решења модела са свим потенцијалним извођачима и делом извођача

Поред приказаног разматрања свих потенцијалних извођача, од значаја је разматри подкуп са пет извођача (I-1.1, I.1.2 и I.2.1 до I.2.3) који имају референце за целе пројекте у станоградњи. Решење са свим извођачима (слика 39.1) и решење са делом извођача (слика 39.2) могу се поредити са становишта заједничких елемената (табела 30.5.1).



Слика 39.2. Решење модела са извођачима који имају референце за целе пројекте у станоградњи, *Distributive Mode*

Табела 30.5.1. Решења модела са становишта свих критеријума

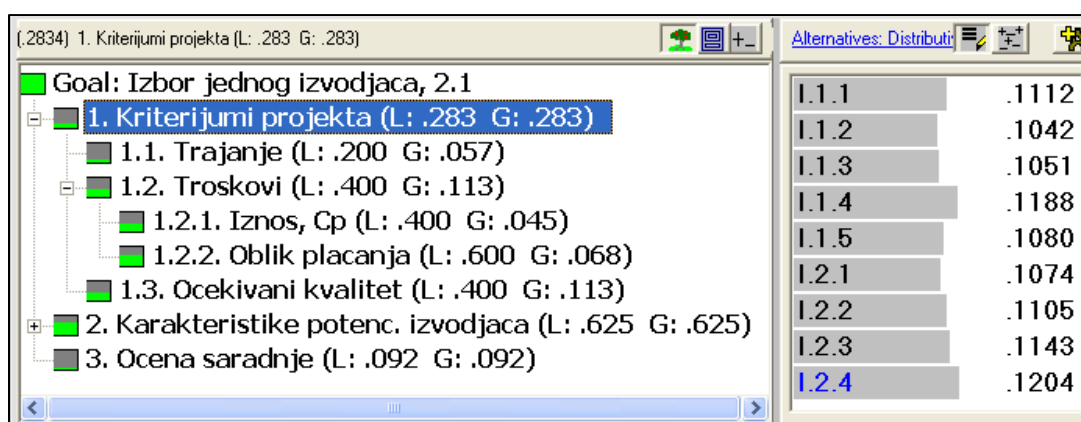
| Извођачи | | Сви потенцијални извођачи | | | | Извођачи са референцама за целе објекте станоградње | | | |
|----------|-------|---------------------------|------|--------------------------|------|-----------------------------------------------------|------|--------------------------|------|
| | | <i>Ideal Mode</i> | | <i>Distributive Mode</i> | | <i>Ideal Mode</i> | | <i>Distributive Mode</i> | |
| | | Приоритет | Ранг | Приоритет | Ранг | Приоритет | Ранг | Приоритет | Ранг |
| 1 | I.1.1 | 0,1199 | 1 | 0,1248 | 2 | 0,2086 | 1 | 0,2129 | 2 |
| 2 | I.1.2 | 0,1183 | 2 | 0,1250 | 1 | 0,2058 | 2 | 0,2133 | 1 |
| 3 | I.1.3 | 0,1095 | 7 | 0,1089 | 7 | - | - | - | - |
| 4 | I.1.4 | 0,1126 | 4 | 0,1116 | 5 | - | - | - | - |
| 5 | I.1.5 | 0,1043 | 8 | 0,1026 | 8 | - | - | - | - |
| 6 | I.2.1 | 0,1117 | 5 | 0,1129 | 4 | 0,1951 | 4 | 0,1926 | 4 |
| 7 | I.2.2 | 0,1130 | 3 | 0,1134 | 3 | 0,1966 | 3 | 0,1934 | 3 |
| 8 | I.2.3 | 0,1112 | 6 | 0,1101 | 6 | 0,1939 | 5 | 0,1879 | 5 |
| 9 | I.2.4 | 0,0994 | 9 | 0,0906 | 9 | | | | |

- Потврђује се замена места извођача I.1.1 и I.1.2 на врху ранг листа (ранг 1 и 2) у моделу са свим извођачима и моделу са делом извођача када се користи идеални и дистрибутивни мод, респективно.
- Дистрибутивни мод, у односу на идеални мод, одређује веће вредности за приоритете извођача у сваком моделу.
- Оба модела имају подударна решења, односно ранг места одговарајућих алтернатива, што није правило у општем случају.

б) Решења глобалног модела и парцијалних модела са свим потенцијалним извођачима

Решења и одговарајуће ранг листе извођача могу се посматрати са становишта нивоа проблема или критеријума нижих нивоа, укључивањем свих извођача или дела извођача.

- Решење глобалног модела, оба мода (слике 39.1 и 39.2, табеле 30.5.1 до 30.5.3)
- Решење било ког парцијалног подмодела за критеријум који има подкритеријуме, приказује се решења за подмодел {1. Критеријуми пројекта} са *Distributive Mode* (слике 39.3.1 до 39.3.3).



Слика 39.3.1. Решење подмодела за {1. Критеријуми пројекта} (N = 1), *Distributive Mode*, Анализа свих извођача

Табела 30.5.2. Решења глобалног и парцијалних модела, сви извођачи, *Distributive Mode*

| Изво- ђачи | | Сви критеријуми | | K_1 {Критеријуми пројекта} | | K_2 {Карактеристике извођача} | |
|---------------|-------|-----------------|------|------------------------------|------|---------------------------------|------|
| | | Приоритет | Ранг | Приоритет | Ранг | Приоритет | Ранг |
| 1 | I.1.1 | 0,1248 | 2 | 0,1248 | 2 | 0,1205 | 5 |
| 2 | I.1.2 | 0,1250 | 1 | 0,1250 | 1 | 0,1241 | 3 |
| 3 | I.1.3 | 0,1089 | 7 | 0,1089 | 7 | 0,0978 | 6 |
| 4 | I.1.4 | 0,1116 | 5 | 0,1116 | 5 | 0,0975 | 7 |
| 5 | I.1.5 | 0,1026 | 8 | 0,1026 | 8 | 0,0880 | 9 |
| 6 | I.2.1 | 0,1129 | 4 | 0,1129 | 4 | 0,1305 | 1 |
| 7 | I.2.2 | 0,1134 | 3 | 0,1134 | 3 | 0,1298 | 2 |
| 8 | I.2.3 | 0,1101 | 6 | 0,1101 | 6 | 0,1229 | 4 |
| 9 | I.2.4 | 0,0906 | 9 | 0,0906 | 9 | 0,0889 | 8 |

Табела 2.5.3. Решења глобалног и парцијалних модела, одабрани извођачи, *Distributive Mode*

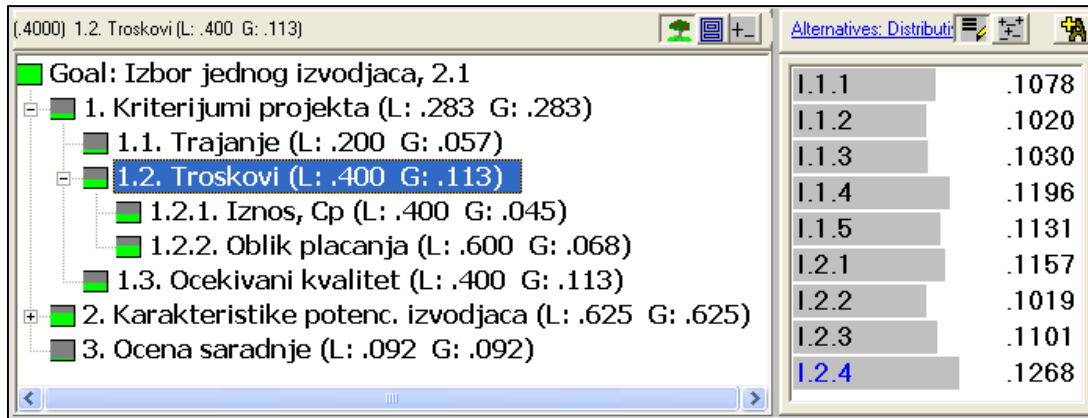
| Изво- ђачи | | Сви критеријуми | | K_1 {Критеријуми пројекта} | | K_2 {Карактеристике извођача} | |
|---------------|-------|-----------------|------|------------------------------|------|---------------------------------|------|
| | | Приоритет | Ранг | Приоритет | Ранг | Приоритет | Ранг |
| 1 | I.1.1 | 0,2129 | 2 | 0,2129 | 2 | 0,1920 | 5 |
| 2 | I.1.2 | 0,2133 | 1 | 0,2133 | 1 | 0,1976 | 3 |
| 6 | I.2.1 | 0,1926 | 4 | 0,1926 | 4 | 0,2078 | 1 |
| 7 | I.2.2 | 0,1934 | 3 | 0,1934 | 3 | 0,2068 | 2 |
| 8 | I.2.3 | 0,1879 | 5 | 0,1879 | 5 | 0,1958 | 4 |

Поређењем решења глобалног модела и парцијалних модела за два критеријума (K_1 , K_2) нивоа $N = 1$, разматрајући све извођаче (табела 30.5.2) и подкупа извођача са референцама за целе пројекте код других компанија (табела 30.5.3), изводе се следећи закључци примене *Distributive Mode*:

- Глобални модел проблем и парцијални модел за K_1 {Критеријуми пројекта} имају идентичне ранг листе са најповољнијим извођачем I.1.2 (на другом месту је I.1.1), разматрајући све извођаче или наведени део извођача.
- Идентичне су ранг листе са најповољнијим извођачем I.2.1 (наредни је I.2.2) у парцијалним моделима за K_2 {Карактеристике извођача}, независно да ли се разматрају сви извођачи или део извођача. То је очекивано, пошто се упоређују особности извођача.
- Решења парцијалних модела за K_2 разликују се од решења глобални модел и подмодела за K_1 , услед чињенице да K_1 чине критеријуми пројекта а глобални модел обједињује критеријуме пројекта и критеријуме за карактеристике извођача.

Решења подмодела критеријума нижих нивоа приоритета приказују се у наставку за све извођаче применом *Distributive Mode* (слике 39.3.2 и 39.3.3).

Идентичне ранг листе су само код критеријума 2.2.2 и његовог првог подкритеријума 2.2.2.1, али 2.2.2.1 има веће вредности за приоритете извођача.



Слика 39.3.2. Решење подмодела за {1.2. Трошкови} (N = 2), *Distributive Mode*, Анализа свих извођача

| 2.1, N = 3 | 2.2, N = 3 | 2.2.1, N = 4 | 2.2.2, N = 4 | 2.2.2.1, N = 5 | 2.2.2.2, N = 5 |
|-------------|-------------|--------------|--------------|----------------|----------------|
| I.1.1 .1101 | I.1.1 .1309 | I.1.1 .1302 | I.1.1 .1316 | I.1.1 .1549 | I.1.1 .0385 |
| I.1.2 .1043 | I.1.2 .1439 | I.1.2 .1255 | I.1.2 .1623 | I.1.2 .1656 | I.1.2 .1490 |
| I.1.3 .1101 | I.1.3 .0854 | I.1.3 .1255 | I.1.3 .0454 | I.1.3 .0277 | I.1.3 .1162 |
| I.1.4 .1089 | I.1.4 .0861 | I.1.4 .1208 | I.1.4 .0514 | I.1.4 .0314 | I.1.4 .1315 |
| I.1.5 .1030 | I.1.5 .0729 | I.1.5 .1184 | I.1.5 .0274 | I.1.5 .0232 | I.1.5 .0442 |
| I.2.1 .1159 | I.2.1 .1451 | I.2.1 .0949 | I.2.1 .1952 | I.2.1 .2093 | I.2.1 .1391 |
| I.2.2 .1159 | I.2.2 .1438 | I.2.2 .0949 | I.2.2 .1927 | I.2.2 .1986 | I.2.2 .1690 |
| I.2.3 .1159 | I.2.3 .1300 | I.2.3 .0949 | I.2.3 .1651 | I.2.3 .1662 | I.2.3 .1607 |
| I.2.4 .1159 | I.2.4 .0619 | I.2.4 .0949 | I.2.4 .0289 | I.2.4 .0232 | I.2.4 .0518 |

Слика 39.3.3. Решења подмодела за остале нивое (N = 3, 4 и 5), *Distributive Mode*, Анализа свих извођача

5.2.3.5. Анализа осетљивости решења и параметарска анализа модела

Након приказаног решавања глобалног модела може се изабрати најповољнији извођач I.1.2 са врха ранг листе применом дистрибутивног мода или наредни на листи I.1.1 (табеле 30.5.2 и 30.6).

- Извођач I.1.2 може обавити пројекат за 390 дана са ценом 45 н.ј., а I.1.1 за 400 дана са ценом 40 н.ј. (табеле 2.1 и 2.6).
- Поређењем I.1.1 и I.1.2 изводе се одговарајући закључци у наставку.

Табела 30.6. Критеријуми (називи, локални приоритети, вредности) и поређење извођача I.1.1, I.1.2

| N=1 | K ₁ | | | K ₂ | | | | | | | | K ₃ | | |
|-------------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|-------------------|----------------------|--------------------|----------------------|--------------------|--------------------|----------|------|
| N=2 | K ₁₁ | K ₁₂ | | K ₁₃ | K ₂₁ | | K ₂₂ | | | | | | | |
| N=3 | | K ₁₂₁ | K ₁₂₂ | | K ₂₁₁ | K ₂₁₂ | K ₂₂₁ | | K ₂₂₂ | | | | | |
| N=4 | | | | | | | K ₂₂₁₁ | K ₂₂₁₂ | K ₂₂₂₁ | | K ₂₂₂₂ | | | |
| N=5 | | | | | | | | | K ₂₂₂₁₁ | K ₂₂₂₁₂ | K ₂₂₂₂₁ | K ₂₂₂₂₂ | | |
| Ред.бр. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | |
| Пр. нивоа | 1 | ,283 | | | ,626 | | | | | | | | ,092 | |
| | 2 | ,200 | ,400 | | ,200 | ,500 | | ,500 | | | | | | |
| | 3 | | ,600 | ,400 | | ,444 | ,556 | ,500 | | ,500 | | | | |
| | 4 | | | | | | | ,833 | ,167 | ,800 | | ,200 | | |
| | 5 | | | | | | | | | ,875 | ,125 | ,750 | | ,250 |
| Тип | min | min | max | max | max | max | max | max | max | max | max | max | max | |
| Идеал | <u>350</u> | <u>40</u> | <u>8</u> | <u>9</u> | <u>9</u> | <u>9</u> | <u>0</u> | <u>6</u> | <u>5</u> | <u>15</u> | <u>5</u> | <u>12</u> | <u>9</u> | |
| Најлош. | 400 | 55 | 5 | 7 | 7 | 8 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 4 | 8 | |
| I.1.1 | 400 | <u>40</u> | 5 | <u>9</u> | 8 | <u>9</u> | 0 | <u>6</u> | 1 | 8 | 0 | 5 | <u>9</u> | |
| I.1.2 | 390 | 45 | 5 | 8 | 7 | <u>9</u> | 0 | 4 | 2 | 5 | 2 | 6 | <u>9</u> | |
| Бољи | I.1.1 | I.1.1 | = | I.1.1 | I.1.1 | I.1.1 | = | I.1.1 | I.1.2 | I.1.1 | I.1.2 | I.1.2 | = | |
| Ранг места извођ. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | <u>6</u> | 7 | 8 | 9 | | | | | |
| | I.1.2 | I.1.1 | I.2.2 | I.2.1 | I.1.4 | I.2.3 | I.1.3 | I.1.5 | I.2.4 | Дати пр. критеријума | | | | |
| | I.2.4 | I.1.1, I.2.2 | I.1.4 | I.2.1 | I.2.3 | I.1.2, I.1.3 | I.1.5 | Исти пр. критеријума | | | | | | |

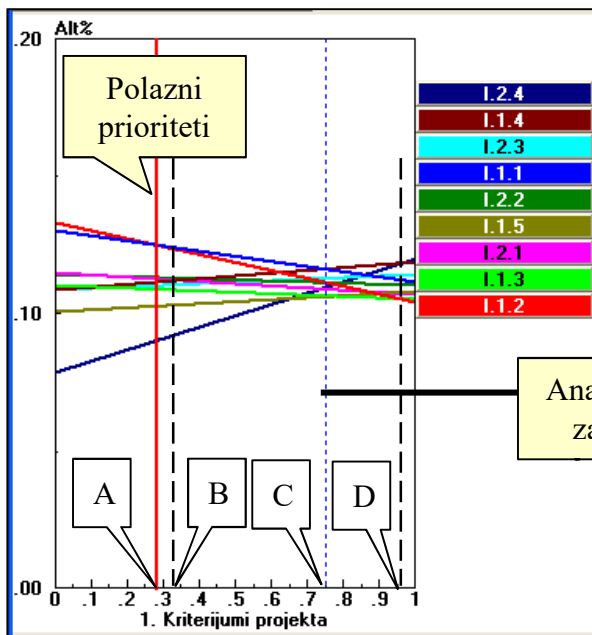
- I.1.1 има најбоље вредности за 7 критеријума, једнаке за 3 и најлошије за 3
- I.1.2 има најбоље вредности за 3 критеријума, једнаке за 3 и најлошије за 7
- I.1.1 има идеалне вредности за 5 критеријума (најлошије за 3)
- I.1.2 има идеалне вредности за 2 критеријума (најлошије за 2)
- ❖ Ако се критеријумима не уведе приоритети (сви подједнако значајни са једнаким тежинама 1)
 - I.1.1 дели места (2, 3) са I.2.2
 - I.1.2 дели места (7, 8) са I.1.3
 - ✓ Повољнији је I.1.1

Пошто решење (вишекритеријумска ранг листа) зависи од приоритета критеријума, потребна је анализа осетљивости решења да би се утврдило како приоритети критеријума утичу на решење. Софтвер *Expert Choice* подржава 5 облика анализе осетљивости решења са интерактивним графицима: анализа перформанси, динамичка анализа, градијентна анализа, поређење парова и дводимензионална анализа.

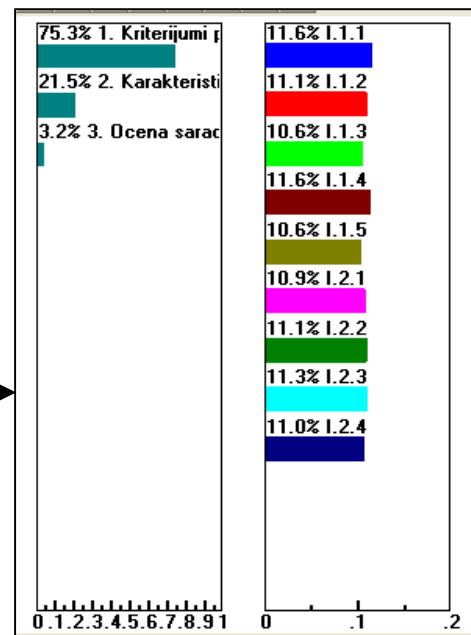
- Најподесније је мењати приоритете критеријума на графику градијантне анализе (слика 39.4.1) и пратити резултате на графику динамичке анализе (слика 39.4.2), или обрнуто.
- На екрану *Model View* бира се анализа глобалног модела (избор *Goal*) или одговарајућег подмодела (избор критеријума).

Приказује се анализа глобалног модела (критеријума нивоа N = 1).

- График градијентне анализе (ГА) има градијентне праве које приказују променене приоритета алтернатива (извођача) на вертикалној оси у зависности од промене приоритета разматраног критеријума на апсциси K_1 {1. Приоритети критеријума}. Праве имају различите боје за поједине алтернативе са називима на тракама одговарајућих боја у десном делу. Вертикална линија црвене боје приказује приоритет за K_1 у решењу (тачка А) и може се померати лево-десно у испрекидану линију плаве боје за захтевану вредност приорита критеријума K_1 . За анализу може се бирати само један, било који критеријум модела
- (K_1, K_2, K_3) . Нова вредност w_1^{**} за приоритет разматраног критеријума K_1 мења приоритете осталих критеријума у вредности w_2^{**} и w_3^{**} задржавајући њихове полазне односе из решења. Следи $w_1^{**} : w_2^{**} : w_3^{**} = w_1^* : w_2^* : w_3^* = 0,283 : 0,625 : 0,092$.



Слика 39.4.1. Градијентна анализа на нивоу проблема, приоритета критеријума нивоа $N = 1$ са становишта {1. Критеријуми пројекта}



Слика 39.5. Динамичка анализа, Приор. критеријума разматраних у градијентној анализи и приор. извођача

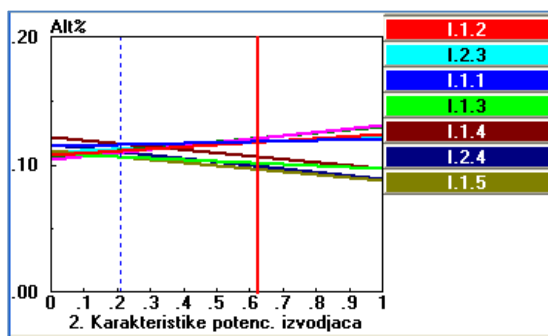
- График динамичке анализе (ДА) приказује у левом делу приоритете критеријума модела (хоризонтални барови и % вредности са апсцисе) сагласно постављеном приоритету критеријуму који се разматра у градијентној анализи (K_1) и десно су добијени приоритети алтернатива (барови одговарајућих боја и % вредности са апсцисе).
- Разматрање нових вредности приоритета одабраном критеријуму може се вршити и на графику динамичке анализе повлачењем лево или десно хоризонталних барова у левом делу. Десно се прате промене приоритета алтернатива. Могуће је разматрање само једног критеријума, као у градијентној анализи уз задржавање односа приоритета критеријума у решењу, или више критеријума истовремено чиме се нарушавају односи њихових полазних приоритета из решења. На графику градијентне анализе прати се промена приоритета критеријуму постављеном на апсциси.

Анализа осетљивости са становишта стабилности полазног решења на нивоу проблема (сви извођачи) показује да I.1.1 има највиши приоритет између тачака В и С (слика 39.4.1, табеле 30.7 и 30.8). Посматрањем свих допустивих вредности критеријума на

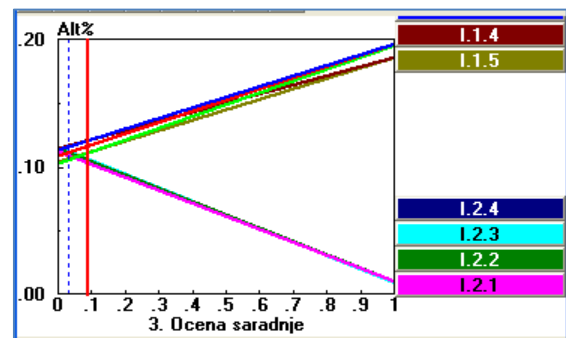
нивоу $N=1$ (параметарска анализа модела) одређују се тачке А и D са променама најповољнијег извођача.

Табела 30.7. Анализа осетљивости решења глобалног модела (приоритети критеријума и ивођача)

| | | | | A | | B | | C | | D | | | |
|---------|--------|------------|-----------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-----------|---|
| | | w_1 | $< 0,283$ | 0,283 | | 0,314 | | 0,751 | | 0,951 | | $> 0,951$ | |
| | | w_2 | $> 0,625$ | 0,625 | | 0,598 | | 0,217 | | 0,030 | | $< 0,030$ | |
| | | w_3 | $< 0,092$ | 0,092 | | 0,088 | | 0,032 | | 0,006 | | $< 0,006$ | |
| Извођач | Приор. | r | Приор. | r | Приор. | r | Приор. | r | Приор. | r | Приор. | r | |
| 1 | I.1.1 | $> 0,1248$ | 2 | 0,1248 | 2 | 0,124 | 2(1) | 0,116 | 1(2) | 0,112 | 4 | $< 0,112$ | |
| 2 | I.1.2 | $> 0,1250$ | 1 | 0,1250 | 1 | 0,124 | 1(2) | 0,111 | 4(5) | 0,106 | 8 | $< 0,106$ | |
| 3 | I.1.3 | $> 0,1089$ | | 0,1089 | 7 | 0,109 | 7 | 0,106 | 7(8) | 0,105 | 9 | $< 0,105$ | |
| 4 | I.1.4 | $< 0,1116$ | | 0,1116 | 5 | 0,112 | 5 | 0,116 | 2(1) | 0,118 | 1(2) | $> 0,118$ | 2 |
| 5 | I.1.5 | $< 0,1026$ | | 0,1026 | 8 | 0,103 | 8 | 0,106 | 8(7) | 0,108 | 6(7) | $> 0,108$ | |
| 6 | I.2.1 | $> 0,1129$ | | 0,1129 | 4 | 0,113 | 3(4) | 0,109 | 6 | 0,108 | 7(6) | $< 0,108$ | |
| 7 | I.2.2 | $> 0,1134$ | | 0,1134 | 3 | 0,113 | 4(3) | 0,111 | 5(4) | 0,111 | 5 | $< 0,111$ | |
| 8 | I.2.3 | $< 0,1101$ | | 0,1101 | 6 | 0,110 | 6 | 0,113 | 3 | 0,114 | 3 | $> 0,114$ | |
| 9 | I.2.4 | $< 0,0906$ | | 0,0906 | 9 | 0,092 | 9 | 0,110 | 9 | 0,118 | 2(1) | $> 0,118$ | 1 |



Слика 39.4.2. Градијентна анализа са K_2



Слика 39.4.3. Градијентна анализа са K_3

5.2.3.6. Избор најповољнијег извођача

Два извођача, I.1.1 и I.1.2, су на врху ранг-листе са великим распонима приоритета (w_1, w_2, w_3) критеријума проблема, односно нивоа $N=1$ (слика 39.4.1, табела 30.7).

- (w_1, w_2, w_3) лево од тачке B \Rightarrow најприхватљивији I.1.2
- (w_1, w_2, w_3) за тачку B подједнако прихватљиви I.1.1, I.1.2
- (w_1, w_2, w_3) између B, C најприхватљивији I.1.1
- (w_1, w_2, w_3) за тачку C подједнако прихватљиви I.1.1, I.1.4

Може се усвојити да је најприхватљивији извођач I.1.1 са најширим интервалима приоритета критеријума модела између тачке B и тачке C (табела 30.8).

Табела 30.8. Приоритети критеријума проблема и извођача I.1.1 између тачака B и C

| | Критеријуми проблема | Приоритети / тежине критеријума | Приоритет / тежина за I.1.1 |
|-------|----------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| K_1 | 1. Критеријуми пројекта | $w_1 \in (0,314; 0,751)$ | $w_{I.1.1} \in (0,124; 0,116)$ |
| K_2 | 2. Карактеристике извођача | $w_2 \in (0,598; 0,217)$ | |
| K_3 | 3. Оцена сарадње | $w_3 \in (0,088; 0,032)$ | |

5.3. МОДЕЛИ ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ВИШЕ ИЗВОЂАЧА ЗА РАДОВЕ НА ПРОЈЕКТУ

Илуструје се примена три групе проблема сагласно моделима изложеним у делу 4 (табела 4) који се решавају коришћењем одговарајућих алгоритама и два софтверска пакета.

- Модел 1.б са варијантама 1.б.1 и 1.б.2
- Модел 2.б са варијантом 2.б.1
- Модел 3.б са варијантом 3.б.1
- Проширење варијанте модела 1.б.1 са условом за ангажовање извођача који је једини квалификован за одређене радове.

5.3.1. Потенцијални извођачи за делове пројекта и проблем избора најповољнијих извођача

Потенцијални извођачи су квалификовани / лиценцирани за одређене врсте радова (табела 31.1), на пример: зидарски радови, бетонски радови, инсталације јаке и слабе струје итд. Разматрајући одабрани скуп потенцијалних извођача утврђују се следеће карактеристике проблема избора:

- Сваки рад има најмање 2 потенцијална извођача.
- На пројекту је потребно ангажовати најмање 13 извођача.
- Извођачи истих квалификација, односно алтернативни извођачи, чине одговарајуће групе извођача (табела 31.1 и 31.2).
- Са становишта извођења, радови пројекта се деле у 13 група сагласно групама извођача (табела 31.2).
- За сваку групу радова може да се изабере један извођач (у општем случају, било који извођач) или више извођача (што се тумачи касније) из одговарајуће групе извођача.

5.3.1.1. Циљеви пројекта и потенцијалних извођача за делове пројекта

Циљеви пројекта су остварит минимално трајање пројекта са датим трошковима 41.762 н.ј. за обављање радова. Сваки извођач очекује да му се доделе радови максималне укупне вредности, да има минимално време ангажовања и користи и што мање радника у току дана.

5.3.1.2. Приоритети циљева проблема избора извођача

Циљеви пројекта имају виши приоритет у односу на циљеве извођача. Приоритети извођача за делове пројекта могу да се дефинисати по аналогiji са карактеристикама за извођаче пројекта у целости, уважавајући цлан 76. Закона о јавним набавкама и увођењем нових показатеља о њиховом учешћу на пројектима (табела 30.1). Нови елементи за приоритете потенцијалних извођача делова пројекта су укупне вредности радова за које су они квалификовани (табела 31.2).

5.3.2. Примена модела 1 са јединственим параметрима за радове

Пројекат има јединствене параметре за радове (трајање и трошкови) и најмање један рад са више потенцијалних извођача (табеле 29.1, 29.2 и 31.1).

Табела 31.1. Потенцијални извођачи група радова и радова (минимално 13 извођача)

| Р.б. рада | Ознака / шифра | Назив групе / рада | min → Алтернативе → | Индекси (j) потенцијалних извођача B_j | | | | | | | | | | | | | Број пот. B_j | |
|------------------------|----------------|----------------------------|------------------------|----------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|---|
| | | | | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 | 11 | 12 | 13 | | |
| | A.01 | GRUBI GRAĐEVINSKI RADOVI | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 01 | A.01.01 | Pripremni radovi | + | | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| 02 | A.01.02 | Zemljani radovi | + | | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| 03 | A.01.03 | Hidroizol. temelja | | + | | | | | | | | | | | | | | 3 |
| 04 | A.01.04 | Tesarski radovi | + | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 05 | A.01.05 | Armirački radovi | + | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 06 | A.01.06 | Betonski radovi | + | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 07 | A.01.07 | Krovna konstr. | + | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 08 | A.01.08 | Zidarski radovi | + | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| | A.02 | ZAVRŠNI GRAĐEVINSKI RADOVI | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | A.02.01 | Razni zidarski radovi | + | | | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 10 | A.02.02 | Limarski radovi | | | + | | | | | | | | | | | | | 2 |
| | A.03 | ZANATSKI RADOVI | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | A.03.01 | Stolarski radovi | | | | + | | | | | | | | | | | | 2 |
| 12 | A.03.02 | Bravarski radovi | | | | | + | | | | | | | | | | | 2 |
| 12 | A.03.03 | Prozori i vrata | | | | | | + | | | | | | | | | | 2 |
| 14 | A.03.04 | Izolaterski radovi | | + | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| 15 | A.03.05 | Fasaderski radovi | | | | | | | + | | | | | | | | | 2 |
| 16 | A.03.06 | Keramičarski radovi | | | | | | | | + | | | | | | | | 2 |
| 17 | A.03.07 | Moler.-farb. radovi | | | | | | | | + | | | | | | | | 2 |
| 18 | A.03.08 | Podopolag. radovi | | | | | | | | | + | | | | | | | 2 |
| 19 | A.03.09 | Gipsarski radovi | | | | | | | | | + | | | | | | | 2 |
| | A.04 | INSTALATERSKI RADOVI | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | A.04.01 | Vodovod i kanal. | | | | | | | | | | + | | | | | | 2 |
| 21 | A.04.02 | Elektro instalacije | | | | | | | | | | | + | | | | | 2 |
| 22 | A.04.03 | Termo-teh. instal. | | | | | | | | | | | | + | | | | 2 |
| 23 | A.05 | LIFTOVI | | | | | | | | | | | | | + | | | 2 |
| 24 | A.06 | SPOLJNO UREĐENJE | + | | | | | | | | | | | | | | | 4 |
| 25 | A.07 | SPOLJNA INFRA-STRUKTURA | | | | | | | | | | | | | | | + | 2 |
| Ukupno radova za B_j | | | | 9 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | - |

Табела 31.2. Групе потенцијалних извођача – радови, трошкови и приоритети

| Групе (G_s) | Ознаке / шифре извођача (B_j) | | | | | Макс. бр. радова | Количине радова (час.) | Вредности C_j^* (н.ј.) | Прио- ритети |
|-------------------------|--------------------------------------|------|-------|-------|-------|---------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------|
| | B.01 | B.14 | B.15 | B.16 | и др. | | | | |
| G.01 | B.01 | B.14 | B.15 | B.16 | и др. | 9 | 64.416 | 20.742 | 1 |
| G.02 | B.02 | B.17 | B.18 | и др. | | 2 | 2.816 | 1.171 | 5 |
| G.03 | B.03 | B.19 | и др. | | | 1 | 2.736 | 432 | 6 |
| G.04 | B.04 | B.20 | и др. | | | 1 | 1.984 | 660 | 6 |
| G.05 | B.05 | B.21 | и др. | | | 1 | 3.040 | 480 | 6 |
| G.06 | B.06 | B.22 | и др. | | | 1 | 2.000 | 691 | 6 |
| G.07 | B.07 | B.23 | и др. | | | 3 | 16.080 | 3.276 | 2 |
| G.08 | B.08 | B.24 | и др. | | | 2 | 8.704 | 3.504 | 2 |
| G.09 | B.09 | B.25 | и др. | | | 1 | 12.104 | 3.720 | 2 |
| G.10 | B.10 | B.26 | и др. | | | 1 | 10.224 | 1.920 | 4 |
| G.11 | B.11 | B.27 | и др. | | | 1 | 6.904 | 2.040 | 3 |
| G.12 | B.12 | B.28 | и др. | | | 1 | 2.336 | 1.080 | 5 |
| G.13 | B.13 | B.29 | и др. | | | 1 | 3.600 | 2.046 | 3 |
| <i>Сума за пројекат</i> | | | | | | 25 | 136.994 | 41.762 | 6 |

Ако се не поставе приоритети за извођаче и сви радови имају јединствене параметре за време и трошкове, за сваку групу радова може се бирати било који извођач из одговарајуће групе извођача који има довољне капацитете да се пројекат обави за најкраће време. Ако се поставе приоритети за извођаче, избор се врши уважавајући њихове приоритете (табела 31.2) и капацитете.

- У општем случају број приоритета извођача једнак је броју извођача (на нашем примеру 29). За групу радова потребно је изабрати извођача са највишим приоритетом у одговарајућој групи извођача.
- Извођачи исте групе могу бити равноправни, односно идентичних приоритета (на пример, у групи 1 са највишим приоритетом 1 и осталим групама са нижим приоритетима). Избор извођача за одговарајућу групу радова врши се сагласно могућности да се дефинишу подесни подскупови технолошки повезаних радова како би се даље за сваки подскуп радова бирао по један извођач (као на наредном примеру).
- Више група извођача могу делити исти приоритет (на пример, приоритет 2 за групе извођача 7 – 9, приоритет 3 за извођаче група 11 и 13 итд.), тако да на разматраном примеру има 6 нивоа приоритета за 13 група извођача са укупно 29 извођача.

5.3.2.1. Карактеристична Парето-оптимална решења модела 1.б.1 и избор најповољнијег решења

Разматра се случај када радови имају јединствене параметре за трајање и трошкове, најмање један рад има више потенцијалних извођача и сви потенцијални извођачи пројекта имају довољне капацитете. Решавање проблема се своди на изналагање одговарајућих Парето-оптималних решења за трошкове извођача *применом алгоритма 1.б.1 из поглавља 4* и одговарајућих бинарних променљивих (табела 31.3). Модел има 70 бинарних променљивих и 25 основних ограничења са условима да се одређени рад додели само једном извођачу.

- *Екстремно Парето-оптимално решење* са максималним трошковима C_j^* било ког разматраног извођача B_j из одређене групе извођача G_s настаје када се њему

додели максимални број радова (табела 31.1 и 31.2). При томе се осталим извођачима исте групе не додељују радови. У осталим групама бирају се први извођачи (са мањим редним бројевима). Приказује се решење 1.1 за извођача В01 (табела 31.4, слике 40.1 и 40.1.1 до 40.1.3).

Табела 31.3. Бинарне променљиве за математичке моделе

| Р.б. рада | Ознака / шифра A_{ki} | Назив групе / рада | Бинарне променљиве h_{kij} $k = \text{група рада}, i = \text{рад}, j = \text{извођач}$ | | | |
|-----------|-------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
| | | GRUBI GRAĐEVINSKI RADOVI | | | | |
| | | Pripremni radovi | $h_{01,01,01}$ | $h_{01,01,14}$ | $h_{01,01,15}$ | $h_{01,01,16}$ |
| 02 | A.01.02 | Zemljani radovi | $h_{01,02,01}$ | $h_{01,02,14}$ | $h_{01,02,15}$ | $h_{01,02,16}$ |
| 03 | A.01.03 | Hidroizol. temelja | $h_{01,03,02}$ | $h_{01,03,17}$ | $h_{01,03,18}$ | |
| 04 | A.01.04 | Tesarski radovi | $h_{01,04,01}$ | $h_{01,04,14}$ | $h_{01,04,15}$ | $h_{01,04,16}$ |
| 05 | A.01.05 | Armirački radovi | $h_{01,05,01}$ | $h_{01,05,14}$ | $h_{01,05,15}$ | $h_{01,05,16}$ |
| 06 | A.01.06 | Betonski radovi | $h_{01,06,01}$ | $h_{01,06,14}$ | $h_{01,06,15}$ | $h_{01,06,16}$ |
| 07 | A.01.07 | Krovna konstr. | $h_{01,07,01}$ | $h_{01,07,14}$ | $h_{01,07,15}$ | $h_{01,07,16}$ |
| 08 | A.01.08 | Zidarski radovi | $h_{01,08,01}$ | $h_{01,08,14}$ | $h_{01,08,15}$ | $h_{01,08,16}$ |
| | A.02 | ZAVRŠNI GRAĐEVINSKI RADOVI | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | A.02.01 | Razni zidarski radovi | $h_{02,01,01}$ | $h_{02,01,14}$ | $h_{02,01,15}$ | $h_{02,01,16}$ |
| 10 | A.02.02 | Limarski radovi | $h_{02,02,03}$ | $h_{02,02,19}$ | | |
| | A.03 | ZANATSKI RADOVI | | | | |
| 11 | A.03.01 | Stolarski radovi | $h_{03,01,04}$ | $h_{03,01,20}$ | | |
| 12 | A.03.02 | Bravarski radovi | $h_{03,02,05}$ | $h_{03,02,21}$ | | |
| 12 | A.03.03 | Prozori i vrata | $h_{03,03,06}$ | $h_{03,03,22}$ | | |
| 14 | A.03.04 | Izolaterski radovi | $h_{03,04,02}$ | $h_{03,04,17}$ | $h_{03,04,18}$ | |
| 15 | A.03.05 | Fasaderski radovi | $h_{03,05,07}$ | $h_{03,05,23}$ | | |
| 16 | A.03.06 | Keramičarski radovi | $h_{03,06,08}$ | $h_{03,06,24}$ | | |
| 17 | A.03.07 | Moler.-farb. radovi | $h_{03,07,07}$ | $h_{03,07,23}$ | | |
| 18 | A.03.08 | Podopolag. radovi | $h_{03,08,08}$ | $h_{03,08,24}$ | | |
| 19 | A.03.09 | Gipsarski radovi | $h_{03,09,07}$ | $h_{03,09,23}$ | | |
| | A.04 | INSTALATERSKI RADOVI | | | | |
| 20 | A.04.01 | Vodovod i kanal. | $h_{04,01,09}$ | $h_{04,01,25}$ | | |
| 21 | A.04.02 | Elektro instalacije | $h_{04,02,10}$ | $h_{04,02,26}$ | | |
| 22 | A.04.03 | Termo-teh. instal. | $h_{04,03,11}$ | $h_{04,03,27}$ | | |
| 23 | A.05 | LIFTOVI | $h_{05,00,12}$ | $h_{05,00,28}$ | | |
| 24 | A.06 | SPOLJNO UREĐENJE | $h_{06,00,01}$ | $h_{06,00,14}$ | $h_{06,00,15}$ | $h_{06,00,16}$ |
| 25 | A.07 | SPOLJNA INFRA-STRUKTURA | $h_{07,00,13}$ | $h_{07,00,29}$ | | |

Друга Pareto-optimalna решења одређују се у зависности од приоритета извођача. Приказују три примера за избор извођача групе радова 1, посматрајући три подскупа радова. За остале групе радова бирају се извођачи као у решењу 1.1 (графичи 40.1.1 до 40.1.3).

- Решење 1.2 има избор В13 за рад А.06 и В01 за остале радове ове групе (табела 31.1). Наиме, В01 има виши приоритет и додељује му се 8 од максимално могућих 9 радова. Не бирају се В14, В15 и В16. Тиме В01 има трошкове 18.672 н.ј. (90,02%

максималних трошкова $C_{01}^* = 20.742$ н.ј., односно 90,02% укупних трошкова за групу радова 1) и В13 трошкове 2.070 н.ј. (9,98% максималних трошкова).

Табела 31.4. Решење 1.1 основног модела – приоритети за прве извођаче сваке групе

| Групе радова и радови | | | Оптимално решење основног модела / проблема | | | | | |
|-------------------------|------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------|---|----------------------------|----------------|-----------|--------------------|
| Р.б. рада | Ознака / шиф. A_{ki} | Назив групе / рада | Изабрани B_j | ← | Бинарне променљ. h_{kij} | | | Трошкови C_{kij} |
| | | | | | Р.б. | Ознака | Вредност | |
| | A.01 | GRUBI GRAĐEVINSKI RADOVI | | | | | | |
| 1 | A.01.01 | Pripremni radovi | B01 | ← | 1 | $h_{01,01,01}$ | 1,00 | 1.200,00 |
| 2 | A.01.02 | Zemljani radovi | B01 | ← | 5 | $h_{01,02,01}$ | 1,00 | 4.920,00 |
| 3 | A.01.03 | Hidroizol. temelja | B02 | ← | 9 | $h_{01,03,02}$ | 1,00 | 430,00 |
| 4 | A.01.04 | Tesarski radovi | B01 | ← | 12 | $h_{01,04,01}$ | 1,00 | 3.000,00 |
| 5 | A.01.05 | Armirački radovi | B01 | ← | 16 | $h_{01,05,01}$ | 1,00 | 4.308,00 |
| 6 | A.01.06 | Betonski radovi | B01 | ← | 20 | $h_{01,06,01}$ | 1,00 | 3.456,00 |
| 7 | A.01.07 | Krovna konstr. | B01 | ← | 24 | $h_{01,07,01}$ | 1,00 | 5.400,00 |
| 8 | A.01.08 | Zidarski radovi | B01 | ← | 28 | $h_{01,08,01}$ | 1,00 | 3.144,00 |
| | A.02 | ZAVRŠNI GRAĐEVIN. RADOVI | | | | | | |
| 9 | A.02.01 | Razni zidar. radovi | B01 | ← | 32 | $h_{02,01,01}$ | 1,00 | 2.532,00 |
| 10 | A.02.02 | Limarski radovi | B03 | ← | 36 | $h_{02,02,03}$ | 1,00 | 4.320,00 |
| | A.03 | ZANATSKI RADOVI | | | | | | |
| 11 | A.03.01 | Stolarski radovi | B04 | ← | 38 | $h_{03,01,04}$ | 1,00 | 6.600,00 |
| 12 | A.03.02 | Bravarski radovi | B05 | ← | 40 | $h_{03,02,05}$ | 1,00 | 4.800,00 |
| 13 | A.03.03 | Prozori i vrata | B06 | ← | 42 | $h_{03,03,06}$ | 1,00 | 6.910,00 |
| 14 | A.03.04 | Izolaterski radovi | B02 | ← | 44 | $h_{03,04,02}$ | 1,00 | 1.128,00 |
| 15 | A.03.05 | Fasaderski radovi | B07 | ← | 47 | $h_{03,05,07}$ | 1,00 | 2.100,00 |
| 16 | A.03.06 | Keramičarski radovi | B08 | ← | 49 | $h_{03,06,08}$ | 1,00 | 1.680,00 |
| 17 | A.03.07 | Moler.-farb. radovi | B07 | ← | 51 | $h_{03,07,07}$ | 1,00 | 1.140,00 |
| 18 | A.03.08 | Podopolag. radovi | B08 | ← | 53 | $h_{03,08,08}$ | 1,00 | 1.596,00 |
| 19 | A.03.09 | Gipsarski radovi | B07 | ← | 55 | $h_{03,09,07}$ | 1,00 | 2.640,00 |
| | A.04 | INSTALATERSKI RADOVI | | | | | | |
| 20 | A.04.01 | Vodovod i kanal. | B09 | ← | 57 | $h_{04,01,09}$ | 1,00 | 3.720,00 |
| 21 | A.04.02 | Elektro instalacije | B10 | ← | 59 | $h_{04,02,10}$ | 1,00 | 1.920,00 |
| 22 | A.04.03 | Termo-teh. instal. | B11 | ← | 61 | $h_{04,03,11}$ | 1,00 | 2.040,00 |
| 23 | A.05 | LIFTOVI | B12 | ← | 63 | $h_{05,00,12}$ | 1,00 | 1.080,00 |
| 24 | A.06 | SPOLJNO UREĐENJE | B01 | ← | 65 | $h_{06,00,01}$ | 1,00 | 2.070,00 |
| 25 | A.07 | SPOLJNA INFRA-STRUKTURA | B13 | ← | 69 | $h_{07,00,13}$ | 1,00 | 2.046,00 |
| <i>Сума за пројекат</i> | | | <i>13</i> | | | <i>25</i> | <i>25</i> | <i>41.762,00</i> |

■ Количине и вредности радова извођача В01 до В13 дате су табелом 32.2, односно графицима 40.2 до 40.5.

| WBS | Aktivnost / Rad | Trajanje | Početak | Završetak | 2016 | | | | | | | | | | | | 2017 | | |
|-----|----------------------------------------------|----------|------------|------------|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|------|---|---|
| | | | | | J | F | M | A | M | J | J | A | S | O | N | D | J | F | M |
| 0 | STPK MIRIJEVO 1.1. Planovi radova i izvođača | 374 d | 25.01.2016 | 01.02.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1) PLAN RADOVA | 374 d | 25.01.2016 | 01.02.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | GRUBI GRADJEVINSKI RADOVI | 247 d | 25.01.2016 | 27.09.2016 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | ZAVRSNI GRADJEVINSKI RADOVI | 252 d | 13.05.2016 | 19.01.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | ZANATSKI RADOVI | 317 d | 09.03.2016 | 19.01.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 33 | INSTALATERSKI RADOVI | 261 d | 17.05.2016 | 01.02.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 52 | LIFTOVI | 73 d | 19.11.2016 | 30.01.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 53 | SPOLJNO UREDJENJE | 55 d | 10.09.2016 | 03.11.2016 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 54 | SPOLJNA INFRASTRUKTURA | 75 d | 10.09.2016 | 23.11.2016 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 55 | 2) PLANOWI IZVODJACA | 374 d | 25.01.2016 | 01.02.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 56 | IZVODJAC B.01 | 284 d | 25.01.2016 | 03.11.2016 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 92 | IZVODJAC B.02 | 221 d | 22.02.2016 | 29.09.2016 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 103 | IZVODJAC B.03 | 114 d | 23.09.2016 | 14.01.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 107 | IZVODJAC B.04 | 62 d | 14.08.2016 | 14.10.2016 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 111 | IZVODJAC B.05 | 190 d | 09.03.2016 | 14.09.2016 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 115 | IZVODJAC B.06 | 67 d | 14.08.2016 | 19.10.2016 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 126 | IZVODJAC B.07 | 150 d | 23.08.2016 | 19.01.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 136 | IZVODJAC B.08 | 205 d | 29.06.2016 | 19.01.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 143 | IZVODJAC B.09 | 255 d | 23.05.2016 | 01.02.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 158 | IZVODJAC B.10 | 254 d | 17.05.2016 | 25.01.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 174 | IZVODJAC B.11 | 217 d | 27.06.2016 | 29.01.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 186 | IZVODJAC B.12 | 73 d | 19.11.2016 | 30.01.2017 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 190 | IZVODJAC B.13 | 55 d | 10.09.2016 | 03.11.2016 | | | | | | | | | | | | | | | |

Слика 40.1. Решење 1.1: План радова (приказују се групе радова, прикривени радови) и планови извођача (прикривени радови)

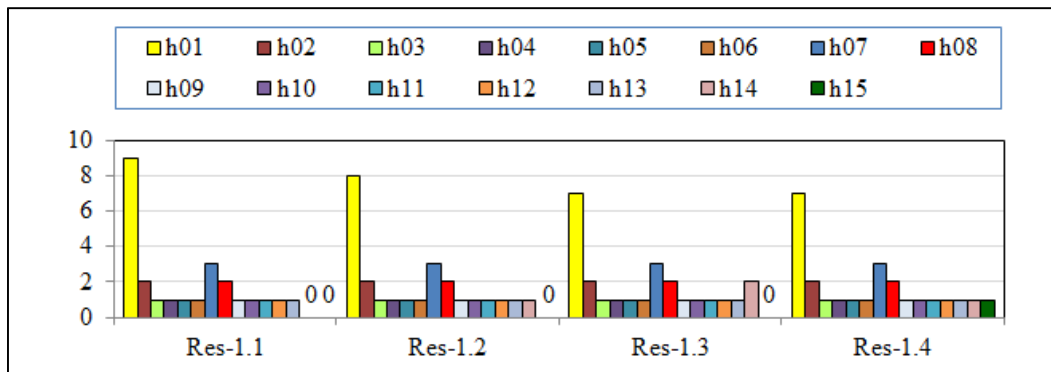
- Решење 1.3 са избором В01 за првих 7 радова из групе 1 (А.01.01 до А.01.08) и В14 за преостала 2 рада (А.02.01 и А.06). Трошкови за В1 опадају на 16.140 н.ј. = 77,81%С01* и трошкови за В14 расту на 22,19%С14*. Сада се не врши избор В15 и В16.
- Решење 1.4 са избором В01 као у решењу 1.3, В14 за 1 рад (А.02.01) и В15 за 1 рад (А.06). В14 има виши приоритет у односу на В15 и додељује му се рад са већим трошковима. В01 задржава трошкове из решења 1.3, трошкови за В14 опадају на 16.140 н.ј. =12,21%С14* и трошкови за В15 износе 2.070 н.ј. = 9,98%С15*. Не бира се В16.

Специфичности избора више извођача за технолошко повезане радове

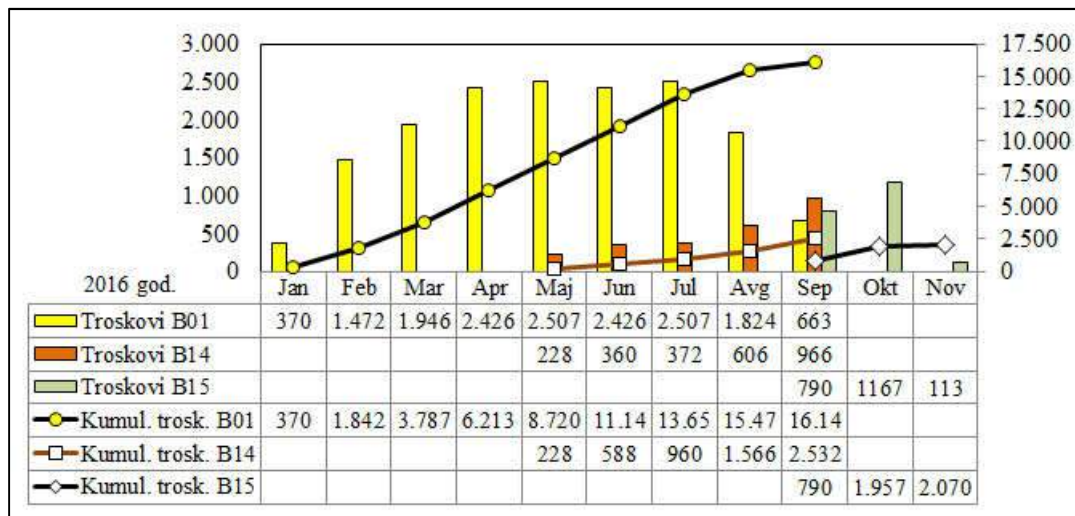
- Радови групе 1 могу се раздвојити само на наведена 3 подгрупа технолошки зависних радова са трошковима $54.080 + 6.880 + 2.640 = 63.600$ н.ј. (као у решењу 1.4):
 $\{A.01.01, A.01.02, A.01.04 \text{ до } A.01.08\}$, $\{A.02.01\}$ и $\{A.06\}$.
- Произилази да се за извођење ових радова могу бирати само 3 од 4 потенцијална извођача (В01, В14, В15, В16).

| WBS | Активност / Rad | Трајање | Почетак | Завршетак | Rad извођача | Трошкови извођача | 2016 | | | | | | | | | | | | 2017 | | | |
|-----|----------------------------------------------------|---------|------------|------------|--------------|-------------------|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|--|--|
| | | | | | | | Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec | Jan | Feb | | |
| 0 | STPK MIRIJEVO 1.1. Plan radova, Planovi izvođača | 374 d | 25.01.2016 | 01.02.2017 | 136.944 hrs | 41.762,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1) PLAN RADOVA | 374 d | 25.01.2016 | 01.02.2017 | 136.944 hrs | 41.762,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 55 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 56 | 2) PLANOWI IZVODJACA | 374 d | 25.01.2016 | 01.02.2017 | 136.994 hrs | 41.762,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 57 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 58 | IZVODJAC B.01 | 284 d | 25.01.2016 | 03.11.2016 | 64.416 hrs | 20.742,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 59 | 01.01 Pripremni radovi | 26 d | 25.01.2016 | 19.02.2016 | 1.248 hrs | 1.200,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 62 | 01.02 Zemljani radovi | 21 d | 30.01.2016 | 19.02.2016 | 2.016 hrs | 492,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 65 | 01.04 Tesarski radovi | 186 d | 27.02.2016 | 30.08.2016 | 10.192 hrs | 3.000,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 68 | 01.05 Armiracki radovi | 162 d | 28.02.2016 | 07.08.2016 | 9.072 hrs | 4.308,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 71 | 01.06 Betonski radovi | 180 d | 20.02.2016 | 17.08.2016 | 5.280 hrs | 3.456,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 72 | 01.06.01 Nearmirani beton | 2 d | 20.02.2016 | 21.02.2016 | 96 hrs | 48,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 75 | 01.06.02 Armirani beton | 162 d | 09.03.2016 | 17.08.2016 | 5.184 hrs | 3.408,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 78 | 01.07 Krovna konstrukcija sa pokrivanjem | 28 d | 18.08.2016 | 14.09.2016 | 1.248 hrs | 540,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 81 | 01.08. Zidarski radovi | 184 d | 24.03.2016 | 23.09.2016 | 25.024 hrs | 3.144,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 84 | 02.01. Razni zidarski radovi | 140 d | 13.05.2016 | 29.09.2016 | 6.880 hrs | 2.532,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 85 | 02.01.01 Cementna kosuljica | 40 d | 21.08.2016 | 29.09.2016 | 1.280 hrs | 852,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 88 | 02.01.02. Masinsko malterisanje unutrasnjih zidova | 140 d | 13.05.2016 | 29.09.2016 | 5.600 hrs | 1.680,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 91 | 06 SPOLJNO UREDJENJE | 55 d | 10.09.2016 | 03.11.2016 | 2.640 hrs | 2.070,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 94 | IZVODJAC B.02 | 221 d | 22.02.2016 | 29.09.2016 | 2.816 hrs | 1.171,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 95 | 01.03 Hidroizolacija temelja | 5 d | 22.02.2016 | 26.02.2016 | 160 hrs | 43,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 98 | 03.04 Izolaterski radovi | 100 d | 22.06.2016 | 29.09.2016 | 2.656 hrs | 1.128,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 99 | 03.04.01 Unutrasnja termoizolacija | 100 d | 22.06.2016 | 29.09.2016 | 2.400 hrs | 1.032,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 102 | 03.04.02 Hidroizolacija | 16 d | 14.09.2016 | 29.09.2016 | 256 hrs | 96,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 105 | IZVODJAC B.03 | 114 d | 23.09.2016 | 14.01.2017 | 2.736 hrs | 432,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 106 | 02.02 Limarski radovi | 114 d | 23.09.2016 | 14.01.2017 | 2.736 hrs | 432,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |
| 109 | IZVODJAC B.04 | 62 d | 14.08.2016 | 14.10.2016 | 1.984 hrs | 660,00 | [Gantt bar for 2016] | | | | | | | | | | | | | | | |

Слика 40.1.1. Решење 1.1: Глобални план радова (прикривени конкретни радови) и планови извођача В01 и В02

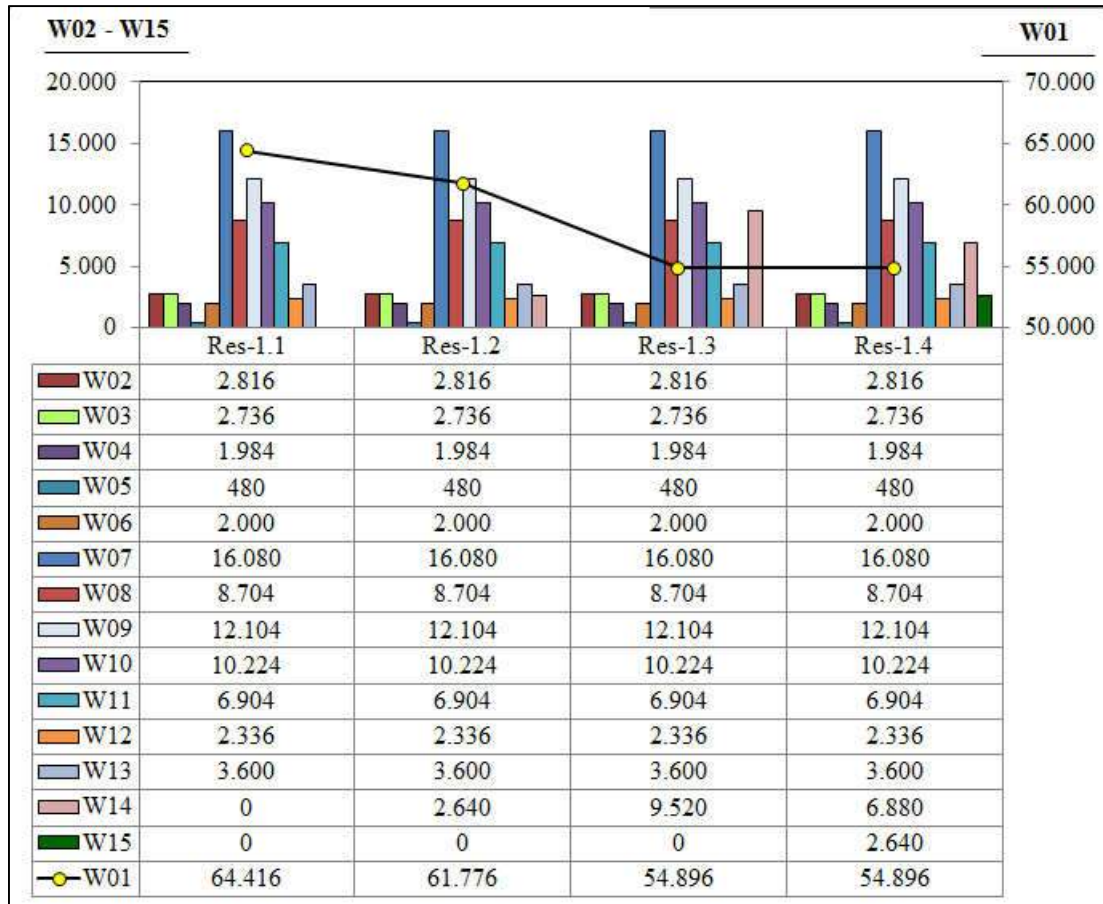


Слика 40.2. Бројеви додељених радова извођачима за решења 1.1 до 1.4



Слика 40.3. Решење 1.4 : Месечни и кумулативни трошкови извођача B01, B14 и B15

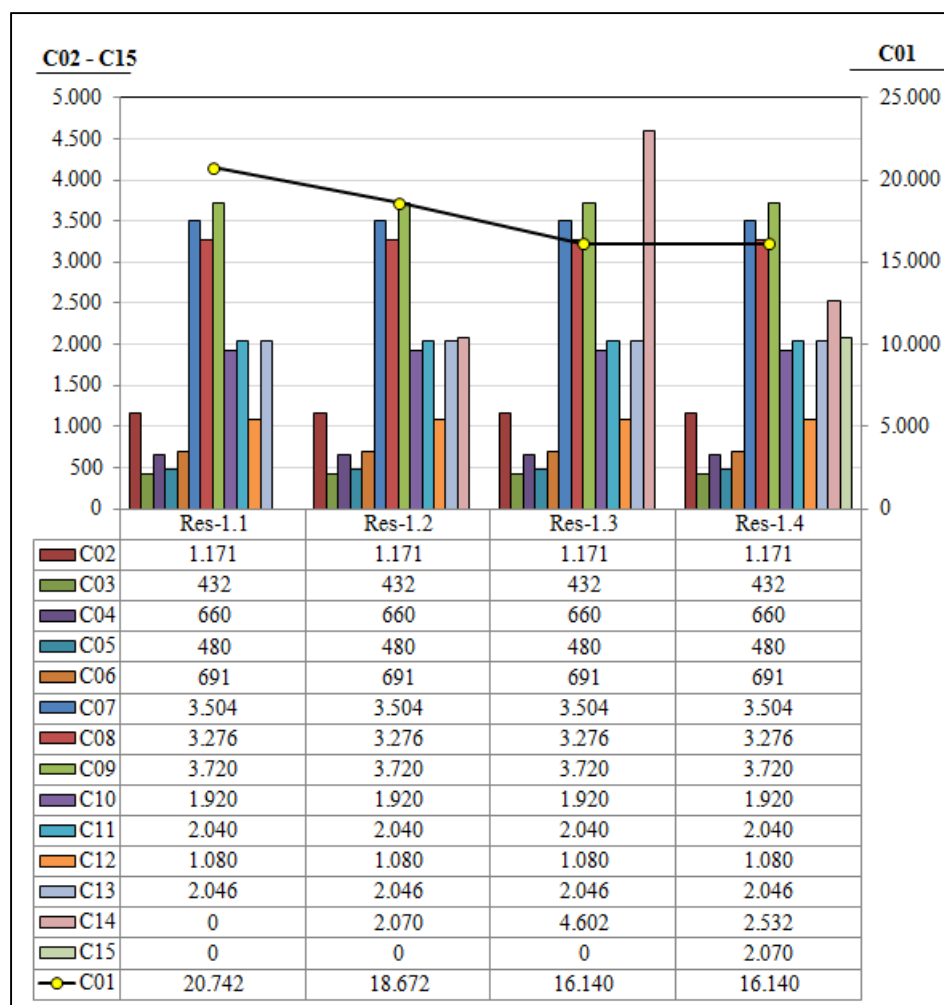
- Када се неки или сви извођачи групе 1 равноправно разматрају, није могуће да им се доделе приближне вредности трошкова. Неопходно је детаљније или јасније, односно прецизније или „финије“ дефинисање њихових приоритета. Такав приступ се може назвати дефинисање интензитета приоритета равноправних извођача. Наводе се неки примери.
- $C01 \approx C14, C15 = 0, C16 = 0$ за више приоритета $C01$ и $C14$ у односу на $C15$ и $C16$, што се може označiti са $(C01, C14) \gg (C15, C16)$. Равноправност извођача B01 и B14 у првом пару омогућава „снажније“ или „слабије“ favorizovanje $C01$ са решењима 1.5.1 и 1.5.2 која су означена R-1.5.1 и R-1.5.2, респективно (табела 31.5.1).
- $C01 \approx C14 \approx C15, C16 = 0$ за приоритете $(C01, C14, C15) \gg C16$. Сада су равноправна три извођача и имају виши приоритет у односу на $C16$. Решења 1.6.1 и 1.6.2 илуструју „снажније“ favorizovanje два од разматрана три извођача.
- $C01 \approx C14 \approx C15 \approx C16$ за једнаке приоритете свих извођача. Овај захтев мора да се сведе на комбиновање предности за два извођача у односу на једног извођача (табела 31.5.2).
- Ако извођачи имају одговарајуће приоритете, избор се врши са припадајућим износима трошкова наведених подскупова радова. Настају напред приказана решења.



Слика 40.4. Количине радова извођача за решења 1.1 до 1.4

Табела 31.5.1. Трошкови C_j за једнаке више приоритете два и три B_j – снажнија / слабија предност једном B_j

| | (C01, C14) >> (C15, C16) | | | | (C01, C14, C15) >> C16 | |
|---------|--------------------------|-------------|--------------|-------------|------------------------|--------------------|
| | C01 >> C14 | | C14 >> C01 | | Res-1.6.1 | Res-1.6.2 |
| | Res-1.5.1 | Res-1.5.2 | Res-1.5.3 | Res-1.5.4 | | |
| C01 | 18.672 | 16.140 | 2.640 | 4.602 | 16.140 | 16.140 |
| C14 | 2.640 | 4.602 | 18.672 | 16.140 | 2.532 | 2.070 |
| C15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2.070 | 2.532 |
| C16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Снажније C01 | Слабије C01 | Снажније C14 | Слабије C14 | Снажније C01 i C14 | Снажније C01 i C15 |
| Radovi | 8+1+0+0 | 7+2+0+0 | 1+8+0+0 | 2+7+0+0 | 7+1+1+0 | 7+1+1+0 |
| A.01.01 | B01 | B01 | B14 | B14 | B01 | B01 |
| A.01.02 | B01 | B01 | B14 | B14 | B01 | B01 |
| A.01.04 | B01 | B01 | B14 | B14 | B01 | B01 |
| A.01.05 | B01 | B01 | B14 | B14 | B01 | B01 |
| A.01.06 | B01 | B01 | B14 | B14 | B01 | B01 |
| A.01.07 | B01 | B01 | B14 | B14 | B01 | B01 |
| A.01.08 | B01 | B01 | B14 | B14 | B01 | B01 |
| A.02.01 | B01 | B14 | B14 | B01 | B14 | B15 |
| A.06 | B14 | B14 | B01 | B01 | B15 | B14 |



Слика 40.5. Трошкови извођача за решења 1.1 до 1.4

Табела 31.5.2. Једнаки приоритети за све извођаче групе 1, комбинације интензитета предности

| | C14 >> (C15, C16) | | (C15, C16) >> C14 | | C14 >> (C15, C16) | | (C15, C16) >> C14 | |
|-----|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | R-1.7.1 | R-1.7.2 | R-1.7.3 | R-1.7.4 | R-1.8.1 | R-1.8.2 | R-1.8.3 | R-1.8.4 |
| C01 | 16.140 | 16.140 | 16.140 | 16.140 | 2.532 | 2.532 | 0 | 0 |
| C14 | 2.532 | 2.532 | 0 | 0 | 16.140 | 16.140 | 16.140 | 16.140 |
| C15 | 2.070 | 0 | 2.532 | 2.070 | 2.070 | 0 | 2.532 | 2.070 |
| C16 | 0 | 2.070 | 2.070 | 2.532 | 0 | 2.070 | 2.070 | 2.532 |
| | Снаж- није C01, C14 | Снаж- није C01, C14 | Снаж- није C01, C15 | Снаж- није C01, C16 | Снаж- није C14, C01 | Снаж- није C14, C01 | Снаж- није C14, C15 | Снаж- није C14, C16 |
| | Слабије C16 od C15 | Слабије C15 od C16 | Слабије C14 od C16 | Слабије C14 od C15 | Слабије C16 od C15 | Слабије C15 od C16 | Слабије C01 od C16 | Слабије C01 od C15 |

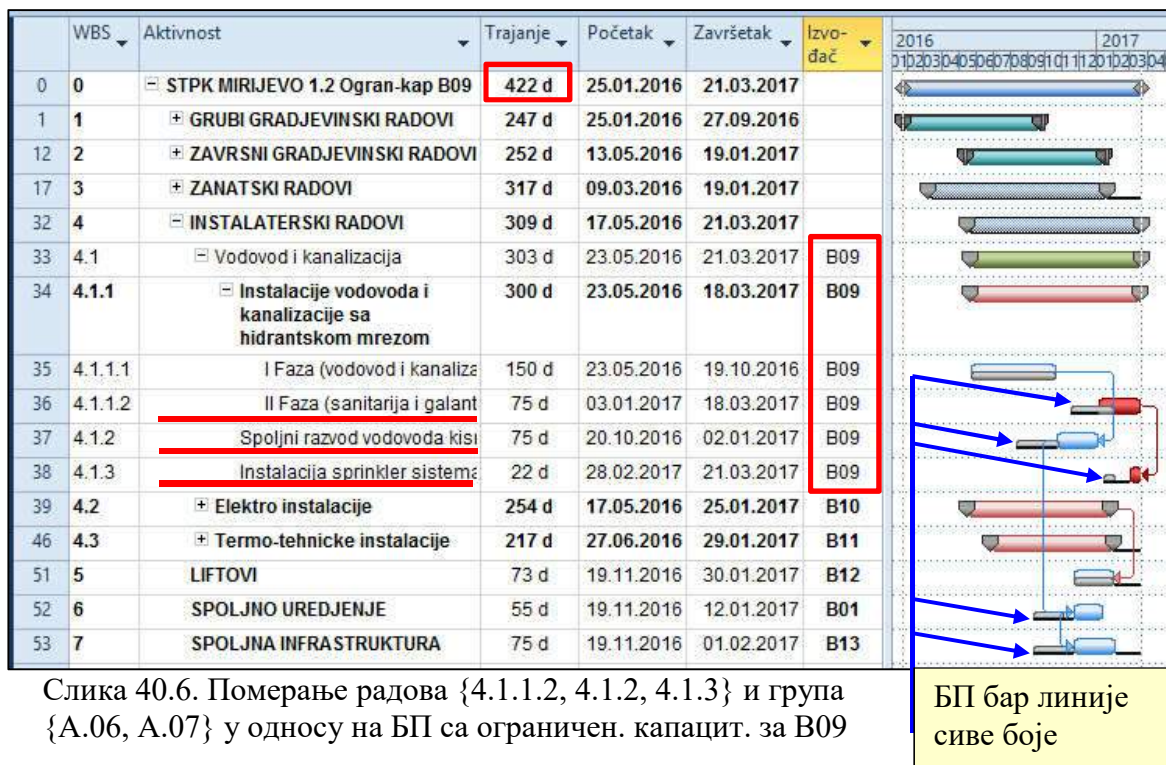
■ Избор најповољнијег решења врши се сагласно дефинисаним приоритетима за разматране потенцијалне извођаче.

5.3.2.2. Карактеристична Парето-оптимална решења модела 1.б.2 и избор најповољнијег решења

Ранији модел 1.б.1 (јединствене варијанте параметара радова, најмање један рад са више потенцијалних извођача и потенцијални извођачи пројекта са довољним капацитетима) проширује се условом да најмање један потенцијални извођач пројекта има ограничене капацитете.

Настали проблем подесно је илустровати на примеру скупа инсталатерских радова за {А.04.01 водовод и канализацију}, односно {А.04.01.01 до А.04.0.03} које могу обављати извођачи из групе 09 (В09 и В25). Нека приорите има В09. Наведени радови ангажују $5+4+4+5 = 18$ водоинсталатера. Минимално трајање пројекта $T_p^{\min} = 374$ дана захтева паралелно извођење завршетака два рада {А.04.01.01, А.04.02} са $5+4 = 9$ водоинсталатера на дан у периоду од 19.11.2016 до 02.01.2017. Такав план одређен је напред решењем 1.1 (базни план, БП). Ако В09 не може да распореди најмање 9 радника на овом пројекту, непходна су 8 или 5 радника.

- Са 8 радника настаје раздвајање I и II фазе (слика 40.6). Померена су сва три рада инсталације водовода и канализације после I фазе и T_p^{\min} расте на $T_p = 422$ дана. Паралелно се завршава II фаза и инсталација спринклер система са $4+4 = 8$ радника. Померене су последње групе {А.06, А.07} које обављају други извођачи.
- Са 5 радника нема преклапања радова А.04.01, {А.06, А.07} задржавају термине почетака из ранијег плана, и пројекат има $T_p = 441$ дан.



Слика 40.6. Померање радова {4.1.1.2, 4.1.2, 4.1.3} и група {А.06, А.07} у односу на БП са ограничен. капацит. за В09

Произилази да је за инсталацију водовода и канализације потребно изабрати извођача В25, ако има 9 радника. У супротном, постоје две могућности:

- Доделити ове радове оном од извођача В09 и В25 који има 8 радника, независно од преферирања В09 и прихватити трајање пројекта 422 дана.
- Тражити другог извођача.

5.3.3. Примена модела 2 са варијантама параметара за радове

Проблем има различите варијанте параметара (времена и трошкови) за најмање један рад, најмање један рад са варијантама за параметре има више потенцијалних извођача и потенцијални извођачи имају идентичне варијанте параметара за одговарајуће радове. Варијанте времена и трошкова радова дефинише инвеститор пројекта и расписује тендер за избор извођача.¹⁶⁶ Није обавезно да сваки потенцијални извођач конкурише за све варијанте одговарајућег рада.

- Илуструје се примена модела и алгоритма 2.6.1 са довољним капацитетима потенцијалних извођача. Варијанте параметара имају два рада која су критична (припадају критичном путу, КП).

(1) {А.02.01.02 Машинско малтерисање унутрашњих зидова}. Напред је остваривање минималног трајања пројекта $T_p^{\min} = 374$ дана са одговарајућим укупним трошковима $C_p^{\min} = 41.762$ н.ј. планирано обављање овог рада са 5.600 час. за 140 дана са 5 зидара, нормалним радним временом 8 час./дан и трошковима 1.680 н.ј.

- Прековремени рад 40 час. скрађује трајање ове активности и пројекта за 1 дан. Трошкови прековременог рада су збир одговарајућих варијабилних и фиксних трошкова. Прековремено може се увести највише 1.040 час. Трајање активности је 114 дана (скраћење 26 дана) даје $T_p^* = 348$ дана (табела 32.1, слика 41.1.1).
- Више прековременог рада умањује трајање А.02.01.02 испод 114 дана, али остаје $T_p^* = 348$ дана (слика 41.1.2). Наиме, настао је нови КП без А.02.01.02.

Табела 32.1. Трајање {А.02.01.02 Машинско малтерисање унутрашњих зидова} и трошкови

| Трајање рада (дана) | Рад (час.) | | Трошкови рада (н.ј.) | | | | Пројекат | |
|---------------------|------------|------------|----------------------|------------|-----------------------|---------------------------------------|------------------------|-----------------------|
| | Нормално | Прековрем. | Нормал. рад. | Прековрем. | Укупно $C_{02,01,02}$ | Раст (н.ј./дан) $\Delta C_{02,01,02}$ | Трошкови, C_p (н.ј.) | Трајање, T_p (дана) |
| 140 | 5.600 | 0 | 1.680 | 0 | 1.680 | 0 | 41.762 | 374 |
| 139 | 5.560 | 40 | 1.668 | 32 | 1.700 | 20 | 41.782 | 373 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 134 | 5.360 | 240 | 1.608 | 227 | 1.835 | 55 | 41.917 | 368 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 124 | 4.960 | 640 | 1.488 | 1.867 | 3.355 | 300 | 43.437 | 358 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 119 | 4.760 | 840 | 1.428 | 3.627 | 5.055 | 500 | 45.137 | 353 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 114 | 4.560 | 1040 | 1.368 | 6.187 | 7.555 | 500 | 47.637 | 348 |

- Ако се ангажује више од 5 радника на А.02.01.02, одређује се краће трајање ове активности и краће трајање пројекта. На пример, за 6 радника потребно је 117,62 дана нормалног радног времена. Произилази да 118 дана ове активности одређује $T_p = 352$ дана, односно 22 дана краће трајање активности и пројекта у односу на 5 радника. Скраћење активности и пројекта за 1 дан у даљој анализи захвева 48 час. прековременог рада 6 радника.

¹⁶⁶ ибид. Закон о јавним набавкама, члан 91.

| WBS | Активност | Трајање | Рад | Регулар. рад | Прековр. рад | Поочетак | Завршетак | Total Slack | 2016 | | 2017 | |
|-----|-----------|---------------------------------------------|-------|--------------|--------------|----------|------------|-------------|------|-----|------|-----|
| | | | | | | | | | Oct | Jan | Apr | Jul |
| 0 | 0 | STPK MIRIJEVO 5.3. Краће трајање А.02.01.02 | 348 d | 136.944 h | 135.904 h | 1.040 h | 25.01.2016 | 06.01.2017 | 0 d | | | |
| 1 | 1 | GRUBI GRADJEVINSKI RADOVI | 243 d | 55.056 h | 55.056 h | 0 h | 25.01.2016 | 23.09.2016 | 0 d | | | |
| 2 | 1.1 | Припремни радови | 26 d | 1.248 h | 1.248 h | 0 h | 25.01.2016 | 19.02.2016 | 0 d | | | |
| 3 | 1.2 | Земљани радови | 21 d | 2.016 h | 2.016 h | 0 h | 30.01.2016 | 19.02.2016 | 0 d | | | |
| 4 | 1.3 | Хидроизолација темеља | 5 d | 160 h | 160 h | 0 h | 22.02.2016 | 26.02.2016 | 0 d | | | |
| 5 | 1.4 | Тесарски радови | 172 d | 11.008 h | 11.008 h | 0 h | 27.02.2016 | 30.08.2016 | 0 d | | | |
| 6 | 1.5 | Армирачки радови | 162 d | 9.072 h | 9.072 h | 0 h | 28.02.2016 | 07.08.2016 | 0 d | | | |
| 7 | 1.6 | Betonski radovi | 180 d | 5.280 h | 5.280 h | 0 h | 20.02.2016 | 17.08.2016 | 0 d | | | |
| 8 | 1.6.1 | Nearmirani beton | 2 d | 96 h | 96 h | 0 h | 20.02.2016 | 21.02.2016 | 0 d | | | |
| 9 | 1.6.2 | Armirani beton | 162 d | 5.184 h | 5.184 h | 0 h | 09.03.2016 | 17.08.2016 | 0 d | | | |
| 10 | 1.7 | Krovna konstrukcija sa pokr | 26 d | 1.248 h | 1.248 h | 0 h | 18.08.2016 | 14.09.2016 | 0 d | | | |
| 11 | 1.8 | Zidarski radovi | 184 d | 25.024 h | 25.024 h | 0 h | 24.03.2016 | 23.09.2016 | 0 d | | | |
| 12 | 2 | ZAVRSNI GRADJEVINSKI RADOVI | 239 d | 9.616 h | 8.576 h | 1.040 h | 13.05.2016 | 06.01.2017 | 0 d | | | |
| 13 | 2.1 | Razni zidarski radovi | 140 d | 6.880 h | 5.840 h | 1.040 h | 13.05.2016 | 29.09.2016 | 0 d | | | |
| 15 | 2.1.2 | Masinsko malterisanje unutrašnjih zidova | 114 d | 5.600 h | 4.560 h | 1.040 h | 13.05.2016 | 03.09.2016 | 0 d | | | |
| 16 | 2.2 | Limarski radovi | 114 d | 2.736 h | 2.736 h | 0 h | 15.09.2016 | 06.01.2017 | 0 d | | | |
| 17 | 3 | ZANATSKI RADOVI | 291 d | 34.464 h | 34.464 h | 0 h | 09.03.2016 | 24.12.2016 | 13 d | | | |
| 24 | 3.4 | Izolaterski radovi | 100 d | 2.656 h | 2.656 h | 0 h | 27.05.2016 | 03.09.2016 | 0 d | | | |
| 25 | 3.4.1 | Unutrašnja termoizolac | 100 d | 2.400 h | 2.400 h | 0 h | 27.05.2016 | 03.09.2016 | 0 d | | | |
| 28 | 3.6 | Keramičarski radovi | 198 d | 6.336 h | 6.336 h | 0 h | 03.06.2016 | 17.12.2016 | 0 d | | | |
| 29 | 3.7 | Molersko-farbarski radovi | 150 d | 6.000 h | 6.000 h | 0 h | 28.07.2016 | 24.12.2016 | 0 d | | | |
| 32 | 4 | INSTALATERSKI RADOVI | 251 d | 29.232 h | 29.232 h | 0 h | 01.05.2016 | 06.01.2017 | 0 d | | | |
| 33 | 4.1 | Vodovod i kanalizacija | 229 d | 12.104 h | 12.104 h | 0 h | 23.05.2016 | 06.01.2017 | 0 d | | | |
| 34 | 4.1.1 | Instalacije vodovoda i k | 226 d | 8.400 h | 8.400 h | 0 h | 23.05.2016 | 03.01.2017 | 0 d | | | |
| 36 | 4.1.1.2 | II Faza (sanitarija i gal | 75 d | 2.400 h | 2.400 h | 0 h | 21.10.2016 | 03.01.2017 | 0 d | | | |
| 38 | 4.1.3 | Instalacija sprinkler siste | 22 d | 704 h | 704 h | 0 h | 16.12.2016 | 06.01.2017 | 0 d | | | |

Слика 41.1.1. Критичне активности ($Total Slack = 0$) након скраћења А.02.01.02 на 114 дана са прековремени радом 1.040 час. одређују трајање пројекта $T_p = 348$ дана (исте активности су критичне у полазном плану са $T_p^{min} = 374$ дана)

(2) {А.03.06 *Керамичарски радови*}. На критичном путу са {А.02.01.02 Машинско малтерисање унутрашњих зидова} су и радови А.03.06 са 6.336 час. које обављају 4 керамичара за 198 дана при нормалном радном времену. За 1 дан скраћења ове активности и пројекта потребно је 32 час. прековременог рада. Дозвољено скраћење износи највише 18 дана и пројекат има $T_p = 356$ дана, што захтева одговарајуће додатне трошкове (табела 32.2). Више прековременог рада даје краће трајање за А.03.06, али настаје нови критични пут на коме дата времена нових критичних активности задржавају $T_p = 356$ дана.

Произилази да је могуће скратити оба рада, али је неопходно остварити најмање додатне трошкове на нивоу пројекта (ΔC_p) посматрајући раст трошкова $\Delta c_{02,01,02}$ за А.02.01.02 и $\Delta c_{03,06}$ за А.03.06 (табела 32.3, слика 41.2).

- Потребно је скратити прво А.02.01.02 (до 135 дана), затим А.03.06 (до 195 дана) и даље наизменично: А.02.01.02 (до 130 дана), А.03.06 (до 188 дана), А.02.01.02 (до 125 дана) и А.03.06 (на 187 дана).
- Одговарајуће трајање пројекта скраћује се до напред утврђеног условљеног минималог трајања $T_p^* = 348$ дана које омогућавају краћа времена обављања ових радова и трошкови пројекта расту до 44.207 (н.ј).

| WBS | Активност | Трајање | Рад | Regular. рад | Прековр. рад | Поочетак | Завршетак | Total Slack | 2016 | | 2017 | |
|-----|-----------|---------------------------------------------|-------|--------------|--------------|----------|------------|-------------|------|----------------|------|-----|
| | | | | | | | | | Oct | Jan | Apr | Jul |
| 0 | 0 | STPK MIRIJEVO 5.3. Краће трајање А.02.01.02 | 348 d | 136.944 h | 135.864 h | 1.080 h | 25.01.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 1 | 1 | GRUBI GRADJEVINSKI RADOVI | 243 d | 55.056 h | 55.056 h | 0 h | 25.01.2016 | 23.09.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 2 | 1.1 | Припремни радови | 26 d | 1.248 h | 1.248 h | 0 h | 25.01.2016 | 19.02.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 3 | 1.2 | Земљани радови | 21 d | 2.016 h | 2.016 h | 0 h | 30.01.2016 | 19.02.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 4 | 1.3 | Хидроизолација темеља | 5 d | 160 h | 160 h | 0 h | 22.02.2016 | 26.02.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 5 | 1.4 | Тесарски радови | 172 d | 11.008 h | 11.008 h | 0 h | 27.02.2016 | 30.08.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 6 | 1.5 | Армирачки радови | 162 d | 9.072 h | 9.072 h | 0 h | 28.02.2016 | 07.08.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 7 | 1.6 | Betonski radovi | 180 d | 5.280 h | 5.280 h | 0 h | 20.02.2016 | 17.08.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 8 | 1.6.1 | Nearmirani beton | 2 d | 96 h | 96 h | 0 h | 20.02.2016 | 21.02.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 9 | 1.6.2 | Armirani beton | 162 d | 5.184 h | 5.184 h | 0 h | 09.03.2016 | 17.08.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 10 | 1.7 | Krovna konstrukcija sa pokr | 26 d | 1.248 h | 1.248 h | 0 h | 18.08.2016 | 14.09.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 11 | 1.8 | Zidarski radovi | 184 d | 25.024 h | 25.024 h | 0 h | 24.03.2016 | 23.09.2016 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 12 | 2 | ZAVRSNI GRADJEVINSKI RADOVI | 239 d | 9.616 h | 8.536 h | 1.080 h | 13.05.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 13 | 2.1 | Razni zidarski radovi | 140 d | 6.880 h | 5.800 h | 1.080 h | 13.05.2016 | 29.09.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 15 | 2.1.2 | Masinsko malterisanje unutrašnjih zidova | 113 d | 5.600 h | 4.520 h | 1.080 h | 13.05.2016 | 02.09.2016 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 16 | 2.2 | Limarski radovi | 114 d | 2.736 h | 2.736 h | 0 h | 15.09.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 17 | 3 | ZANATSKI RADOVI | 290 d | 34.464 h | 34.464 h | 0 h | 09.03.2016 | 23.12.2016 | 14 d | [Timeline bar] | | |
| 24 | 3.4 | Izolaterski radovi | 100 d | 2.656 h | 2.656 h | 0 h | 26.05.2016 | 02.09.2016 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 25 | 3.4.1 | Unutrašnja termoizolac | 100 d | 2.400 h | 2.400 h | 0 h | 26.05.2016 | 02.09.2016 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 28 | 3.6 | Keramičarski radovi | 198 d | 6.336 h | 6.336 h | 0 h | 02.06.2016 | 16.12.2016 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 29 | 3.7 | Molersko-farbarski radovi | 150 d | 6.000 h | 6.000 h | 0 h | 27.07.2016 | 23.12.2016 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 32 | 4 | INSTALATERSKI RADOVI | 251 d | 29.232 h | 29.232 h | 0 h | 30.04.2016 | 05.01.2017 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 33 | 4.1 | Vodovod i kanalizacija | 228 d | 12.104 h | 12.104 h | 0 h | 23.05.2016 | 05.01.2017 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 34 | 4.1.1 | Instalacije vodovoda i k | 225 d | 8.400 h | 8.400 h | 0 h | 23.05.2016 | 02.01.2017 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 36 | 4.1.1.2 | II Faza (sanitarija i gal | 75 d | 2.400 h | 2.400 h | 0 h | 20.10.2016 | 02.01.2017 | 1 d | [Timeline bar] | | |
| 38 | 4.1.3 | Instalacija sprinkler siste | 22 d | 704 h | 704 h | 0 h | 15.12.2016 | 05.01.2017 | 1 d | [Timeline bar] | | |

Слика 41.1.2. Скраћење А.02.01.02 на 113 дана са прековременим радом 1.080 час. не мења трајање пројекта $T_p = 348$ дана (ова активност и други радови нису више критичне активности, имају $Total Slack = 1$ дан)

| WBS | Активност | Трајање | Рад | Regular. рад | Прековр. рад | Поочетак | Завршетак | Total Slack | 2016 | | 2017 | |
|-----|-----------|---------------------------------------------|-------|--------------|--------------|----------|------------|-------------|------|----------------|------|-----|
| | | | | | | | | | Oct | Jan | Apr | Jul |
| 0 | 0 | STPK MIRIJEVO 5.3. Краће трајање А.02.01.02 | 348 d | 136.944 h | 135.864 h | 1.080 h | 25.01.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 1 | 1 | GRUBI GRADJEVINSKI RADOVI | 243 d | 55.056 h | 55.056 h | 0 h | 25.01.2016 | 23.09.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 2 | 1.1 | Припремни радови | 26 d | 1.248 h | 1.248 h | 0 h | 25.01.2016 | 19.02.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 3 | 1.2 | Земљани радови | 21 d | 2.016 h | 2.016 h | 0 h | 30.01.2016 | 19.02.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 4 | 1.3 | Хидроизолација темеља | 5 d | 160 h | 160 h | 0 h | 22.02.2016 | 26.02.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 5 | 1.4 | Тесарски радови | 172 d | 11.008 h | 11.008 h | 0 h | 27.02.2016 | 30.08.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 6 | 1.5 | Армирачки радови | 162 d | 9.072 h | 9.072 h | 0 h | 28.02.2016 | 07.08.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 7 | 1.6 | Betonski radovi | 180 d | 5.280 h | 5.280 h | 0 h | 20.02.2016 | 17.08.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 8 | 1.6.1 | Nearmirani beton | 2 d | 96 h | 96 h | 0 h | 20.02.2016 | 21.02.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 9 | 1.6.2 | Armirani beton | 162 d | 5.184 h | 5.184 h | 0 h | 09.03.2016 | 17.08.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 10 | 1.7 | Krovna konstrukcija sa pokr | 26 d | 1.248 h | 1.248 h | 0 h | 18.08.2016 | 14.09.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 12 | 2 | ZAVRSNI GRADJEVINSKI RADOVI | 239 d | 9.616 h | 8.536 h | 1.080 h | 13.05.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 13 | 2.1 | Razni zidarski radovi | 140 d | 6.880 h | 5.800 h | 1.080 h | 13.05.2016 | 29.09.2016 | 0 d | [Timeline bar] | | |
| 16 | 2.2 | Limarski radovi | 114 d | 2.736 h | 2.736 h | 0 h | 15.09.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Timeline bar] | | |

Слика 41.1.3. Критичне активности након скраћења А.02.01.02 на 113 дана, трајање пројекта $T_p = 348$ дана

Табела 32.2. Трајање {А.03.06 Керамичарски радови} и трошкови

| Трајање рада (дана) | Рад (час.) | | Трошкови рада (н.ј.) | | | | Пројекат | |
|---------------------------|---------------|-----------------|----------------------|-----------------|-----------------------|----------------------------------------|---------------------------|--------------------------|
| | Нор- мално | Преко- врем. | Нормал. рад. | Преко- врем. | Укупно $C_{03,06}$ | Раст (н.ј./ дан) $\Delta C_{03,06}$ | Трошкови, C_p (н.ј.) | Трајање, T_p (дана) |
| 198 | 6.336 | 0 | 1.680 | 0 | 1.680 | 0 | 41.762 | 374 |
| 197 | 6.304 | 32 | 1.672 | 48 | 1.720 | 40 | 41.802 | 373 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 194 | 6.208 | 128 | 1.646 | 254 | 1.900 | 100 | 41.982 | 370 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 187 | 5.984 | 352 | 1.587 | 1.163 | 2.750 | 250 | 42.832 | 363 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 182 | 5.824 | 512 | 1.544 | 2.606 | 4.150 | 400 | 44.232 | 358 |
| 181 | 5.792 | 544 | 1.536 | 3.014 | 4.550 | 400 | 44.632 | 357 |
| 180 | 5.760 | 576 | 1.527 | 3.423 | 4.950 | 400 | 45.032 | 356 |

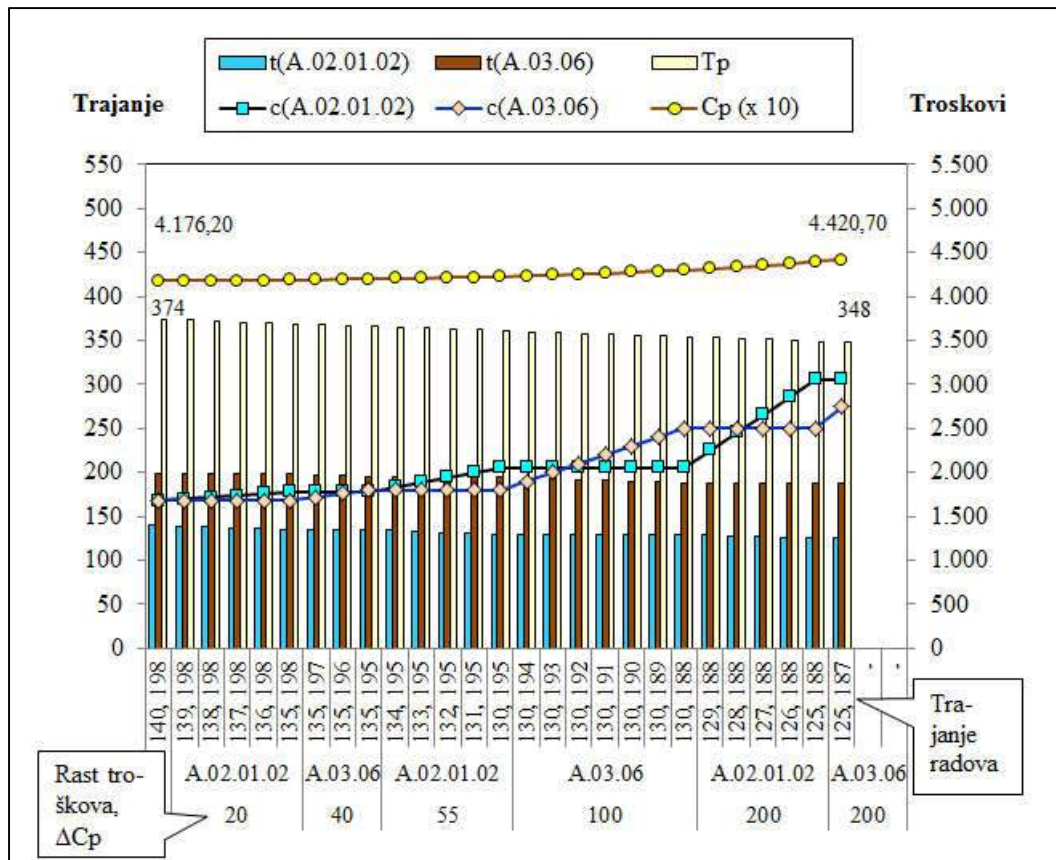
Табела 32.3. Redosled skraćivanja radova {А.02.01.02, А.03.06}, времена i трошкови

| Рад / Активност | | | | Пројекат | |
|-----------------|-------------------|--------------------|-----------------------------------------|---------------------------|--------------------------|
| Ознака | Трајање (дана) | Трошкови (н.ј.) | Раст трошкова, Δc (н.ј./дан) | Трошкови, C_p (н.ј.) | Трајање, T_p (дана) |
| А.02.01.02 | 140 | 1.680 | 0 | 41.762 | 374 |
| А.03.06 | 198 | 1.680 | 0 | | |
| А.02.01.02 | 139 | 1.700 | 20 | 41.782 | 373 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| А.03.06 | 197 | 1.720 | 40 | 41.902 | 368 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| А.02.01.02 | 134 | 1.835 | 55 | 42.037 | 365 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| А.03.06 | 194 | 1.900 | 100 | 42.357 | 360 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| А.02.01.02 | 129 | 2.255 | 200 | 43.157 | 353 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | 125 | | | | |
| А.03.06 | 187 | 2.750 | 250 | 44.207 | 348 |

Избор најповољнијих извођача

У зависности да ли се приоритет даје трајању пројекта или трошковима пројекта, врши се избор извођача за разматране радове у складу са дефинисаним приоритетима појединим потенцијалним извођачима. Има се на уму да метода *PERT/COST* омогућава два приступа оптимизацији времена и трошкова пројекта:

- минимизација трошкова C_p за дато максимално трајање пројекта $T_p = T_0$ дана
- минимизација трајања пројекта T_p за дате максималне трошкове $C_p = C_0$ н.ј.



Слика 41.2. Минимални трошкови пројекта (C_p^*) за допутива времена трајање пројекта (T_p), потребна времена активности А.02.01.02 и А.03.06 на основу прекорвремених радова извшилаца и одговарајући трошкови активности: $t(A.02.01.02)$, $c(A.02.01.02)$, $t(A.03.06)$, $c(A.03.06)$

Поступак избора извођача спроводи се по аналогији са напред приказаним правилима. Одговарајући математички модели захтевају увођење потребних бинарних променљивих. Следе два примера.

5.3.3.1. Минимизација трошкова за дато трајање пројекта

Минимизација трошкова пројекта за трајањање пројекта 360 дана и максимизација трошкова извођача сагласно наредним приоритетима:

- једнаки приоритети прва два извођача В01 и В14 у групи G01 (нижи приоритети за В15 и В16)
- приоритет трећег извођача В18 у групи G02 (нижи приоритети за В02 и В17)
- приоритет другог извођача В24 у групи G08 (нижи приоритет за В08)
- приоритети првих извођача у осталим групама (нижи приоритети других извођача).

| | |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Математички модел | $\begin{aligned} & \min C_p \\ & T_p = T_0 = 360 \\ & \max (C01 \approx C14) \\ & \max (C18, C04, C05, C06, C07, C24, C09, C10, C11, C12, C13) \end{aligned}$ |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$$\left. \begin{aligned} (C15 = C16) = (C02 = C17) = C08 = C18 = C19 = C20 = 0 \\ C21 = C22 = C23 = C25 = C26 = C29 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Сходно напред приказаној анализи (табела 32.3) утврђује се да захтевано трајање пројекта $T_p = T_0 = 360$ дана има минималне трошкове $C_p^*(T_0) = 42.357$ н.ј. уколико се А.02.01.02 изведе за 130 дана са трошковима 2.055 н.ј. и А.03.04 за 194 дана са трошковима 1.900 н.ј.

| WBS | Активност | Трајање | Rad | Regular. rad | Prekovr. rad | Početak | Završetak | Total Slack | 2016 2017 | | | | | | |
|-----|-----------|-------------------------------------------------------|-------|--------------|--------------|---------|------------|-------------|-----------|-------------------|-----|-----|-----|-----|--|
| | | | | | | | | | Oct | Jan | Apr | Jul | Oct | Jan | |
| 0 | 0 | STPK MIRJEVO 5.3. Kraće trajanje A.02.01.02 i A.03.06 | 348 d | 136.944 h | 135.992 h | 952 h | 25.01.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 1 | 1 | GRUBI GRADJEVINSKI RADOVI | 243 d | 55.056 h | 55.056 h | 0 h | 25.01.2016 | 23.09.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 2 | 1.1 | Pripremni radovi | 26 d | 1.248 h | 1.248 h | 0 h | 25.01.2016 | 19.02.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 3 | 1.2 | Zemljani radovi | 21 d | 2.016 h | 2.016 h | 0 h | 30.01.2016 | 19.02.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 4 | 1.3 | Hidroizolacija temelja | 5 d | 160 h | 160 h | 0 h | 22.02.2016 | 26.02.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 5 | 1.4 | Tesarski radovi | 172 d | 11.008 h | 11.008 h | 0 h | 27.02.2016 | 30.08.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 6 | 1.5 | Armirački radovi | 162 d | 9.072 h | 9.072 h | 0 h | 28.02.2016 | 07.08.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 7 | 1.6 | Betonski radovi | 180 d | 5.280 h | 5.280 h | 0 h | 20.02.2016 | 17.08.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 8 | 1.6.1 | Nearmirani beton | 2 d | 96 h | 96 h | 0 h | 20.02.2016 | 21.02.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 9 | 1.6.2 | Armirani beton | 162 d | 5.184 h | 5.184 h | 0 h | 09.03.2016 | 17.08.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 10 | 1.7 | Krovna konstrukcija sa pokr | 26 d | 1.248 h | 1.248 h | 0 h | 18.08.2016 | 14.09.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 11 | 1.8 | Zidarski radovi | 184 d | 25.024 h | 25.024 h | 0 h | 24.03.2016 | 23.09.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 12 | 2 | ZAVRSNI GRADJEVINSKI RADOVI | 239 d | 9.616 h | 9.016 h | 600 h | 13.05.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 13 | 2.1 | Razni zidarski radovi | 140 d | 6.880 h | 6.280 h | 600 h | 13.05.2016 | 29.09.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 15 | 2.1.2 | Masinsko malterisanje unutrašnjih zidova | 125 d | 5.600 h | 5.000 h | 600 h | 13.05.2016 | 14.09.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 16 | 2.2 | Limarski radovi | 114 d | 2.736 h | 2.736 h | 0 h | 15.09.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 17 | 3 | ZANATSKI RADOVI | 297 d | 34.464 h | 34.112 h | 352 h | 09.03.2016 | 30.12.2016 | 7 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 24 | 3.4 | Izolaterski radovi | 100 d | 2.656 h | 2.656 h | 0 h | 07.06.2016 | 14.09.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 25 | 3.4.1 | Unutrašnja termoizolac | 100 d | 2.400 h | 2.400 h | 0 h | 07.06.2016 | 14.09.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 28 | 3.6 | Keramicarski radovi | 187 d | 6.336 h | 5.984 h | 352 h | 14.06.2016 | 17.12.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 29 | 3.7 | Molersko-farbarski radovi | 150 d | 6.000 h | 6.000 h | 0 h | 28.07.2016 | 24.12.2016 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 32 | 4 | INSTALATERSKI RADOVI | 240 d | 29.232 h | 29.232 h | 0 h | 12.05.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 33 | 4.1 | Vodovod i kanalizacija | 229 d | 12.104 h | 12.104 h | 0 h | 23.05.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 34 | 4.1.1 | Instalacije vodovoda i ki | 226 d | 8.400 h | 8.400 h | 0 h | 23.05.2016 | 03.01.2017 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 36 | 4.1.1.2 | II Faza (sanitarija i gal | 75 d | 2.400 h | 2.400 h | 0 h | 21.10.2016 | 03.01.2017 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |
| 38 | 4.1.3 | Instalacija sprinkler siste | 22 d | 704 h | 704 h | 0 h | 16.12.2016 | 06.01.2017 | 0 d | [Gantt chart bar] | | | | | |

Слика 41.3. Критичне активности након скраћења А.02.01.02 на 125 дана и А.03.06 на 187 дана са прекорвременим радовима одређују $T_p = 348$ дана

Математичко моделирање проблема избора извођача усложњава чињеница да рад {А.02.01.02 Машинско малтерисање унутрашњих зидова} и рад {А.02.01.01 Цементна кошуљица припадају подгрупи радова}, односно збирном раду {А.02.01 Разни зидарски радови} у оквиру групе {А.02 Завршни грађевински радови} (табеле 29.1 и 29.2). {А.03.06 Керамичарски радови} разматрају се као раније.

- Како се избор извођача врши за А.02.01 (табела 31.2), даље је потребно посматрати укупне трошкове на основу трошкова 852 н.ј. код А.02.01.01 са трајањем 40 дана и трошкова 2.055 н.ј. код А.02.01.01 са скраћеним трајањем 130 дана. Потребне бинарне променљиве одговарају потенцијалним извођачима В01, В14, В15 и 16.

$$c_{02,01,j} = c_{02,(01,01)} + c_{02,(01,02)} = 852 + 2.055 = 2.907 \text{ н.ј.}, j = 1, 14, 15, 16$$

$$h_{02,01,j} = 0 \text{ или } 1, j = 1, 14, 15, 16.$$

- Издвојено разматрање {А.03.06 Керамичарски радови}, из групе {А.03 Занатски радови}, са потенцијалним извођачима В08 и В24 за А.03.06, укључује трошкове за скраћено трајање ове активности и одговарајуће бинарне променљиве:

$$c_{03,06,j} = 1.900 \text{ н.ј.}, \quad j = 8, 24$$
$$h_{03,06,j} = 0 \text{ или } 1, \quad j = 8, 24.$$

■ Усвајањем да се илустрација увођења прековременог рада врши за само две активности, омогућена су два напред приказана облика анализе и потребни полазни подаци за текући пример (захтевано трајање пројекта, минимални трошкови пројекта, потребна времена за обе активности и одговарајући трошкови):

- (1) Допустиве варијанте времена и трошкова појединачних активности са насталим последицама на пројекат - трајање и трошкови (табеле 32.1 и 32.2).
- (2) Потребно скраћивање једне или обе активности да се остваре минимални трошкови за свако допустиво трајање пројекта (табела 32.3).

■ Сложеност и димензије математички модела избора извођача зависи од наведених облика анализе са две активности.

- (i) Анализа под (1) без анализе под (2) захтева коришћење модела са променљивама о параметрима активности за динамику пројекта (трајање, почетак и завршетак сваке од ових активности), променљивом за завршетак пројекта и бинарним променљивама за избор извођача и разматрање њихових трошкова. Ограничења за динамику пројекта укључују зависности свих активности на пројекту и прорачун трајања пројекта. Број променљивих за трајање активности једнак је броју могућих времена из анализе (1): 26 за А.02.04.02 и 10 за А.03.06. Број ограничења за динамику пројекта једнак је збиру броја зависности посматрајући све парове зависних активности и броја активности које су последње на путевима до завршетка пројекта.
- (ii) Анализа (2) након анализе (1) не захтева променљиве о параметрима активности за динамику пројекта, променљиву за трајање пројекта и ограничења за динамику пројекта. Времена активности утврђена су под (2) са минималним трошковима пројекта за захтевано трајање пројекта. За решавање проблема у наставку довољне су напред наведене бинарне променљиве за две активности. Динамика пројекта утврђује се применом софтвера за управљање пројектима са 130 дана за А.02.04.02, 180 дана за А.03.06 и познатим временима за ове активности.

Постоје два Парето-оптимална решења са становишта трошкова равноправних извођача В01 и В14 у групи G01. Како они не могу имати приближне трошкове, услед разлика (број радова и њихови трошкови) у раније образложеним допустива технолошки повезана два подскупа радова групе G01 (када се уобичајено бира исти извођач и за А.06), решењем 2.1.1 додељују се већи трошкови С01 = 17.960 н.ј. са радовима из прва два подскупа и мањи трошкови С014 = 4.602 н.ј. са радом из трећег подскупа (табела 32.4, слика 4.2). Решење 2.1.2 има обрнуту доделу ових радова. У осталим групама су одабрани извођачи са приоритетима.

◆ *Коначно решење* бира се у зависности да ли се предност даје извођачу В01 или В14.

Табела 32.4. Решења (Res-) 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1 и 2.2.2 са становишта избора извођача

| Рад | | Извођач | | Рад | | Извођач | | Рад | | Извођач | |
|-----|---------|------------------------|------------------------|-----|---------|------------------------|------------------------|-----|---------|------------------------|------------------------|
| | | Res- 2.1.1 2.2.1 | Res- 2.1.2 2.2.2 | | | Res- 2.1.1 2.2.1 | Res- 2.1.2 2.2.2 | | | Res- 2.1.1 2.2.1 | Res- 2.1.2 2.2.2 |
| 1 | A.01.01 | B01 | B14 | 11 | A.03.01 | B04 | B04 | 21 | A.04.02 | B10 | B10 |
| 2 | A.01.02 | B01 | B14 | 12 | A.03.02 | B05 | B05 | 22 | A.04.03 | B11 | B11 |
| 3 | A.01.03 | B02 | B02 | 13 | A.03.03 | B06 | B06 | 23 | A.05 | B12 | B12 |
| 4 | A.01.04 | B01 | B14 | 14 | A.03.04 | B02 | B02 | 24 | A.06 | B14 | B01 |
| 5 | A.01.05 | B01 | B14 | 15 | A.03.05 | B07 | B07 | 25 | A.07 | B13 | B13 |
| 6 | A.01.06 | B01 | B14 | 16 | A.03.06 | B08 | B08 | | | | |
| 7 | A.01.07 | B01 | B14 | 17 | A.03.07 | B07 | B07 | | | | |
| 8 | A.01.08 | B24 | B24 | 18 | A.03.08 | B08 | B08 | | | | |
| 9 | A.02.01 | B14 | B01 | 19 | A.03.09 | B07 | B07 | | | | |
| 10 | A.02.02 | B03 | B03 | 20 | A.04.01 | B09 | B09 | | | | |

5.3.3.2. Минимизација трајања пројекта за дате трошкове

Минимизација трајања пројекта са датим максималним трошковима 43.000 н.ј. и максимизација трошкова извођача са приоритетима из примера 5.3.3.1.

Математички модел:

$$\min T_p$$

$$C_p \leq C_0 = 43.000$$

Критеријуми за трошкове потенцијалних извођача и приоритети из примера 5.3.3.1

Дозвољени укупни трошкови 43.000 н.ј. омогућавају да се пројекат изведе за 354 дана са укупним трошковима 42.957 н.ј. (табела 32.3). Утврђује се да А.02.01.02 задржава трајање 130 дана и трошкове 2.055 н.ј. из ранијег примера и поново се користе трошкови 2.907 н.ј. за збирну активност А.02.01. Краће трајање пројекта за 6 дана у односу на рањи пример (354 уместо 360 дана) остварује А.04.06 са трајањем 188 дана (6 дана мање од 194 дана) и већим трошковима 2.500 н.ј. (600 н.ј. више од 1.900 н.ј., услед раста трошкова 100 н.ј./дан). Користе се бинарне променљиве из ранијег примера.

Истоветни приоритети за трошкове потенцијалних извођача у оба примера поново одређују Парето-оптимална решења 2.2.1 и 2.2.2, идентична напред приказаним решењима 2.1.1 и 2.2.1 са становишта избора извођача (табела 32.4).

Упоређивањем решења за минималне трошкове и решења за два примера изводе се очекивани закључци.

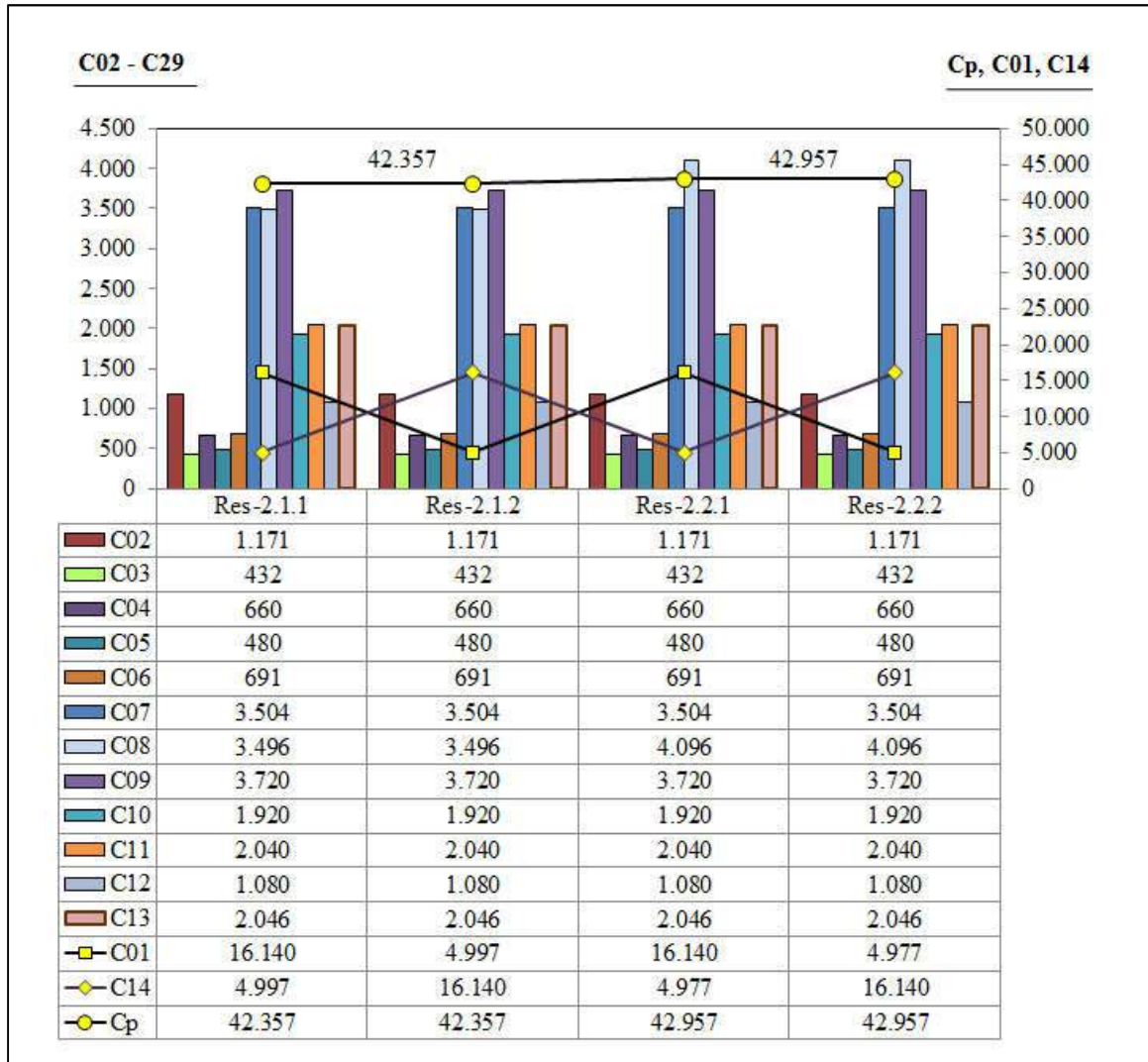
- Краћа времена пројекта у примерима у односу на полазни план одређују веће трошкове пројекта услед додатних трошкова скраћивања одговарајућих активности:

$$T_p^{(2)} = 354 < T_p^{(1)} = 360 < T_p(C_p^{min}) = 374 \text{ дана}$$

$$C_p^{(2)} = 42.957 > C_p^{(1)} = 42.357 > C_p^{min} = 41.762 \text{ н.ј.}$$

- Краће време пројекта у другом примеру у односу на први пример има веће трошкове услед додатног скраћивања А.03.06 за 6 дана са растом трошкова 100 н.ј./дан. Како је изабрано да ову активност обавља извођач В08, у другом примеру су већи трошкови само том извођачу (за износ 6 дана x 100 н.ј./дан = 600 н.ј.):

$$C_{08}^{(2)} = 4.096 > C_{08}^{(1)} = 3.496 \text{ н.ј.}$$



Слика 41.4. Трошкови пројекта и извођача са решењима 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1 и 2.2.2

Избор извођача у решењима 2.2.1 до 2.2.2 извршен је по аналогији са поступком за решења 1.1.1 до 1.2.2 код првог примера. Решења 2.1.2 и 2.2.2 изведена су из решења 2.1.1 и 2.2.1 заменом радова извођачима В01 и В14.

■ **Конечно решење** бира се као у првом примеру, дајући већу предност трошковима С01 или С14 за извођаче В01 и В14, респективно.

5.3.4. Примена модела 3 са варијантама параметара за извођаче

Проблем има различите варијанте параметра (времена и трошкови) за најмање један рад, најмање један рад са варијантама за параметре има више потенцијалних извођача и најмање два потенцијална извођача истог рада имају различите варијанте параметара.

Нека се сматра да је компанија сачинила предплан напред разматраног пројекта са детаљном листом одговарајућих радова, њиховим технолошким зависностима и анализом подесних података о потребним временима обављања радова и трошковима, трајању пројекта за жељени почетак радова и укупним трошковима. На основу наведене анализе расписан је тендер за извођење радова укључују уобичајене битније технолошки условљене подскупове радова. Потенцијални учесници на тендеру позивају се да пријаве варијанте параметара за што више радова. Три групе радова са елементима у тендеру:

- (1) Задата времена, са оријетационим роковима извођења, и задате цене за већину радова (рокови ће се усагласити након прелиминарног избора извођача).
- (2) Неким радовима дефинисана су времена и оријетациони рокови извођења (потенцијални извођачи пријављују цене).
- (3) За одређене радове дефинисане су горње границе за времена и цене са оријетационим роковима извођења (потенцијални извођачи пријављују времена и цене).

Скуп радова са карактеристикама (2) и (3) оправдано је формирати од сложенијих послова са већим количинама радова (напр., више од 10.000 час.), односно дужег трајања (напр., више од 100 дана), као што су обимни грађевински и занатски радови (тесарски, армирачки и бетонски радови, зидарски радови, браварски и др.), инсталациони радови (водовод и канализација, електро инсталације, грејање и др.). Илустрацију разматрања већег броја радова и потенцијалних извођача у овом истраживању ограничава предвиђени обим текста и неопходност коришћења већег броја полазних података и податка за добијена решења (примерени табеларни и графички прикази), анализу решења и извођење закључака. Услед тога, у наставку се посматрају ранија два анализирана рада, {А.02.01.02 Машинско малтерисање унутрашњих зидова} и {А.03.06 Керамичарски радови}, и одабрани радови из подгрупе {А.04.02 Електроинсталације}.

Може се сматрати да се на тендер пријавио велики број извођача са техничким и кадровским ресурсима за већи или мањи број радова. Наиме, очекивано је да више њих буду заинтересовани за одговарајуће занатске радове. За разлику од напред разматраних потенцијалних извођача, најмање 13 и укупно 29 (табела 3.1 и 3.2), даљом анализом обухвата се 45 потенцијалних извођача (табела 33.1) сврстаних у 18 група.

- Присутни су проблеми димензија и решивости модела.

Сада *није могуће једнозначно утврдити минимални број извођача*, као напред. Напр., ако се бира извођач из групе 1 {В01, В19} он ће обавити и радове {А.06 Спољно уређење}, те није потребно бирати извођаче из предпоследњих група {В16, В29} и {В17, В40, В41}. Неки најављују могућност обављања више или мање радова у односу на полазно груписање радова. Карактеристична је ранија групе 1 са највише радова. Напр., извођачи {В01, В19} конкуришу за 9 радова, а В02 за само 5 радова те групе. Извођачи {В03, В20, В21} желе да изведу 8 радова из наведене групе и рад {А.01.03 Хидроизолација темеља} који је напред био издвојен у групу 2, али нису се пријавили

сваки извођач добија све радове из своје групе или допустив подкуп радова са становишта технолошких карактеристика.

- Услов (1) експлицитно је укључен у напред дефинисане математичке моделе за проблеме 3.6 и биће испуњен пошто сваки рад има најмање једног потенцијалног извођача, односно само за {А.05 Уградња лифтова} постоји само један потенцијални извођач, а за остале радове пријављено је 2 и 6 извођача.
- Уколико није испуњен услов (2), неопходна је детаљнија анализа полазних података који су утицали на појаву недопустивог решења и усагласити податке са потенцијалним извођачима у циљу налажења допустивог и решења.

Даље се илуструје разматрање четири најављених радова са одговарајућим потенцијалним извођачима B_j када сваки рад има највише 4 варијанте (v) за времена трајања и трошкове (табеле 33.2.1 и 33.2.2). Остали радови A_{ik} имају напред дефинисане јединствене параметре и бинарне променљиве A_{ikvj} , односно само једну варијанту параметара и променљиве $h_{ikj} = h_{ik1j}$. Подесно изоставити индекс за варијанту $v = 1$, у циљу краћих математичких записа.

Табела 33.2.1. Варијанте параметара радова А.02.01.02 и А.03.06 са потенцијалним B_j

| Радови | Извођачи | Варијанте | | | | | | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-------------------|---------------|-------------------|---------------|-------------------|---------------|-------------------|---------------|
| | | $v = 1$ | | $v = 2$ | | $v = 3$ | | $v = 4$ | |
| | | Време (дана) | Трошк. (н.ј.) | Време (дана) | Трошк. (н.ј.) | Време (дана) | Трошк. (н.ј.) | Време (дана) | Трошк. (н.ј.) |
| А.02.01.01 | сви | 40 | 852 | 40 | 852 | 40 | 852 | 40 | 852 |
| Варијанте за {А.02.01.02 Машиноско malterisanje unutra zidova} Збирни рад {А.02.01 Razni zidar-ski radovi}, бинар. пром. $h_{02,01,v,j}$ | В01 | 140 | 1.800 | 135 | 2.000 | 130 | 2.700 | 125 | 4.000 |
| | | 180 | 2.652 | 175 | 2.852 | 170 | 3.552 | 165 | 4.852 |
| | | $h_{02,01,01,01}$ | | $h_{02,01,02,01}$ | | неповољно | | $h_{02,01,04,01}$ | |
| | В03 | 140 | 1.800 | 135 | 2.100 | 130 | 2.500 | 125 | н.к. |
| | | 180 | 2.652 | 175 | 2.952 | 170 | 3.352 | 165 | н.к. |
| | | $h_{02,01,01,03}$ | | неповољно | | $h_{02,01,03,03}$ | | НЕ | |
| | В19 | 140 | н.к. | 135 | 2.300 | 130 | 2.600 | 125 | н.к. |
| | | 180 | н.к. | 175 | 3.152 | 170 | 3.452 | 165 | н.к. |
| | | НЕ | | неповољно | | неповољно | | НЕ | |
| | В20 | 140 | 2.000 | 135 | 3.000 | 130 | н.к. | 125 | н.к. |
| | | 180 | 2.852 | 175 | 3.852 | 170 | н.к. | 165 | н.к. |
| | | неповољно | | неповољно | | НЕ | | НЕ | |
| | В21 | 140 | н.к. | 135 | н.к. | 130 | 3.000 | 125 | н.к. |
| | | 180 | н.к. | 175 | н.к. | 170 | 3.852 | 165 | н.к. |
| | | НЕ | | НЕ | | неповољно | | НЕ | |
| {А.03.06 Керамичарски radovi}, бинар. пром. $h_{03,06,v,j}$ | В10 | 200 | 2.100 | 195 | 2.300 | 190 | 3.000 | 185 | 3.500 |
| | | неповољно | | $h_{03,06,02,10}$ | | неповољно | | $h_{03,06,04,10}$ | |
| | В35 | 200 | 2.200 | 195 | 2.500 | 190 | 2.800 | 185 | н.к. |
| | | неповољно | | неповољно | | $h_{03,06,03,35}$ | | НЕ | |
| | В36 | 200 | 2.000 | 195 | 2.500 | 190 | 3.100 | 185 | н.к. |
| | | $h_{03,06,01,36}$ | | неповољно | | неповољно | | НЕ | |

Легенда:

- н.к. = извођач није конкурисао, не разматра се одговарајућа бинар. пром. (НЕ)
неповољно = неповољна варијанта, не разматра се одговарајућа бинар. пром. (НЕ)

Инвеститор пројекта дефинише варијанте времена за радове, а потенцијални извођачи пријављују извођење радова за све или неке варијанте и одговарајуће трошкове.

- Збирном раду {A.02.01 Разни зидарски радови} разматрају се варијанте потенцијалних извођача само за други рад {A.02.01.02 Машинско малтерисисање унутрашњих зидова} (табела 33.2.1). Пријављени извођачи (5) за други рад обавезни су да обаве и први рад {A.02.01.01 Цементна кошуљица} са датим параметрима. Бинарне променљиве $h_{02,01,v,j}$ одговарају збирном раду са укупним трошковима сваке варијанте.
- {A.03.06 Керамичарски радови} не рашчлањавају се на подрадове и потенцијалним извођачима (4) одговарају бинарне променљиве $h_{03,06,v,j}$ за одговарајуће варијанте.

Табела 33.2.2. Варијанте параметара радова А.04.02 са потенцијалним извођачима B_j

| Радови | Фаза | Варијанта (v) | B12 | | B13 | | B38 | | B39 | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|---------------|-------------------|---------------|-------------------|---------------|--------------|---------------|-------------------|---------------|
| | | | Време (дана) | Трошк. (н.ј.) | Време (дана) | Трошк. (н.ј.) | Време (дана) | Трошк. (н.ј.) | Време (дана) | Трошк. (н.ј.) |
| {A.04.02.01 Јака струја} | I | 1 | 130 | 1.000 | 130 | 1.100 | 130 | 1.150 | 130 | 1.200 |
| | II | | 95 | 400 | 95 | 600 | 95 | н.к. | 95 | н.к. |
| | I | 2 | 125 | 2.000 | 125 | 1.750 | 125 | 1.700 | 125 | н.к. |
| | II | | 90 | 600 | 90 | 750 | 90 | 850 | 90 | 1.000 |
| | I | 3 | 120 | 3.000 | 120 | 3.500 | 120 | 4.000 | 120 | н.к. |
| | II | | 85 | 900 | 85 | 900 | 85 | 1.000 | 85 | н.к. |
| | I | 4 | 115 | 5.000 | 115 | 4.500 | 115 | н.к. | 115 | н.к. |
| | II | | 80 | 1.500 | 80 | 1.550 | 80 | н.к. | 80 | н.к. |
| {A.04.02.02 Слаба струја} | I | 1-4 | 125 | 145 | 125 | 145 | 125 | 145 | 125 | 145 |
| | II | 1-4 | 88 | 75 | 88 | 75 | 88 | 75 | 88 | 75 |
| {A.04.02 Инсталација струје} (збир трошкова за обе фазе код А.04.02.01 и А.04.02.01), бинар. пром. $h_{04,02,v,j}$ | I | 1 | 438 | 1.620 | 438 | 1.920 | 438 | н.к. | 433 | 2.420 |
| | | | $h_{04,02,01,12}$ | | неповољно | | НЕ | | | |
| | II | 2 | 428 | 2.820 | 428 | 2.720 | 428 | 2.770 | $h_{04,02,01,39}$ | |
| | | | неповољно | | $h_{04,02,02,13}$ | | неповољно | | | |
| | I | 3 | 418 | 4.120 | 418 | 4.620 | 418 | 5.220 | 418 | н.к. |
| | | | $h_{04,02,03,12}$ | | неповољно | | неповољно | | НЕ | |
| | II | 4 | 763 | 7.665 | 763 | 7.465 | 763 | н.к. | 763 | н.к. |
| | | | неповољно | | $h_{04,02,04,13}$ | | НЕ | | НЕ | |

- Збирни рад {A.04.02 Инсталација струје} обухвата радове {A.04.02.01 Инсталација јаке струје} (I фаза, II фаза) и {A.04.02.02 Инсталација слабе струје} (I фаза, II фаза). Извођачи конкуришу само за радове А.04.02.01 са одговарајућим трошковима за дате варијанте времена сваке фазе (табела 33.2.2) и обавезни су да обаве и обе фазе радова А.04.02.02 са датим параметрима. Бинарне променљиве $h_{04,02,v,j}$ одговарају збирном раду са укупним трошковима сваке варијанте.
- План пројекта формира се са временима и трошковима за одговарајуће варијанте појединачних радова на најнижем нивоу WBS рашчлањавања.

Уочава се да за исти рад постоје потенцијални извођачи који нису пријавили трошкове за све могуће варијанте времена, као и да су неке варијанте време-трошкови неповољније у других.

- Пожељно је полазном анализом података изоставити неповољне варијанте са већим трошковима за исто време или дужим временом за исте трошкове, у циљу да се даља анализа, односно решавање модела врши са мањим бројем података (са мањим бројем бинарних променљивих, пошто сваком пару података одговара једна бинарна променљива).
- Дефинисани математички модели одређују одговарајућа решења независно да ли су укључене све варијанте или су изостављене неповољне варијанте.

Наиме, за само 4 рада пријавило се $5+3+(4+4) = 16$ потенцијалних извођача. Произилази да 4 варијанте могу имати укупно $16 \times 4 = 64$ парова података (време, трошкови). У овом случају све варијанте пријавио је само 1 извођач и тиме има само 47 парова података. Након што се изоставе неповољне варијанте преостаје 14 парова података и потребно је 14 бинарних променљивих. Карактеристичан је пример извођача В13 на раду А.04.02.01 за варијанте $v=1$ и $v=2$ (табела 33.2.2). Како је пријавио само I фазу са $v=1$ и II фазу са $v=2$, могу се објединити обе варијанте са одговарајућим подацима (укључујући дате податке за А.04.02.02) који одговарају збирном раду А.04.02 са бинарном променљивом $h_{04,02,01,39}$. Тумачење неповољне варијанте може се илустровати на А.02.01.02 (табела 33.2.1). Напр., извођач В01 за варијанту $v=2$ са трајањем 135 дана пријавио је мање трошкове 2.000 н.ј. у односу на остале потенцијалне извођаче, њихове понуде су неповољније и потребно је да се изоставе.

- Подударне варијанте параметара доприносе процесу избора извођача, посебно ако се разматрају њихови приоритети. За радове А.02.01.02 са варијатном $v=1$ и временом 140 дана, В01 и В03 имају идентичне трошкове (табела 33.2.1). Може се бирати било који од ових извођача уколико се један не фаворизује.

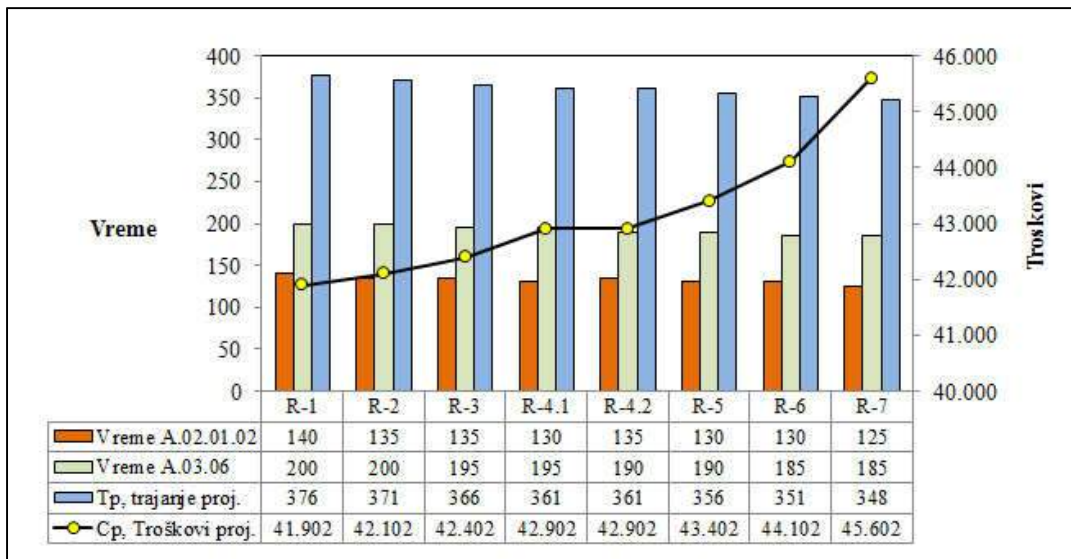
Следи да укупан број бинарних променљивих модела произилази из броја радова 25 и броја потенцијалних извођача 45, разматрајући одговарајуће варијанте параметара. Показано је да 4 рада са варијантама за параметре имају 14 бинарних променљивих. Преостали број радова 21 са једном варијантом параметара имају број бинарних променљивих једнак збиру њихових потенцијалних извођача (табела 33.1).

- Разматране варијанте параметара за радове и 44 потенцијалних извођача V_i одређују да модел има 103 бинарних променљивих. Полазни модел са 29 потенцијалних извођача имао је 70 бинарних променљивих.
- Потребно је имати на уму да укупни број бинарних променљивих није пропорционалан укупном броју потенцијалних извођача. Од значаја је број потенцијалних извођача за појединачне радове. Са истим укупним бројем потенцијалних извођача, више потенцијалних извођача за појединачне радове одређује већи укупни број бинарних променљивих. И обрнуто.

5.3.4.1. Карактеристична Парето-оптимална решења и избор коначног решења

Како постоје различите варијанте параметара за наведене радове, са становишта пројекта разматрају се два екстремна Парето-решења (R-1, R-7) и скуп са 6 осталих Парето-решења R-2 до R-6 где су (R-4.1, R-4.2) алтернативна решења (табела 33.3 и слика 42.1). Свако решење има одговарајуће трошкове за изабране извођаче (слика 42.2).

- **Решење 1. Минимално (усиљено) трајање пројекта** $T_p^{(1)} = T_p^{\min} = 348$ дана са максималним (усиљеним) трошковима $C_p^{(1)} = C_p(T_p^{\min}) = 45.602$ н.ј. одређују: (1) најмања (усиљена) времена радова са варијантама параметара (ако су критичне активности), (2) потребна времена и одговарајуће трошкове осталих радова (са варијантама параметара којима се скраћује трајање да би било постигнуто минимално трајање пројекта), и (3) времена критичних активности осталих радова са једнозначним параметрима. Посматрајући радове са варијантама параметара показује се да су критична само два рада: {A.02.01.02 Машинско малтерисање унутрашњих зидова}, бирати B01 са $v=4$, и {A.03.06.00 Керамичарски радови}, бирати B10 са $v=4$. Међутим, збирни рад {A.04.02 Инсталација струје} није критичан и у свим решењима потребно је користити најдужа времена са најмањим трошковима (B12 са $v=1$).



Слика 42.1. Трајање и трошкови пројекта за решења 1 до 7 у зависности од варијанте параметара радова A.02.01.02 и A.03.06; сва решења имају најдужа времена радова A.04.02.01 (I фаза и II фаза)

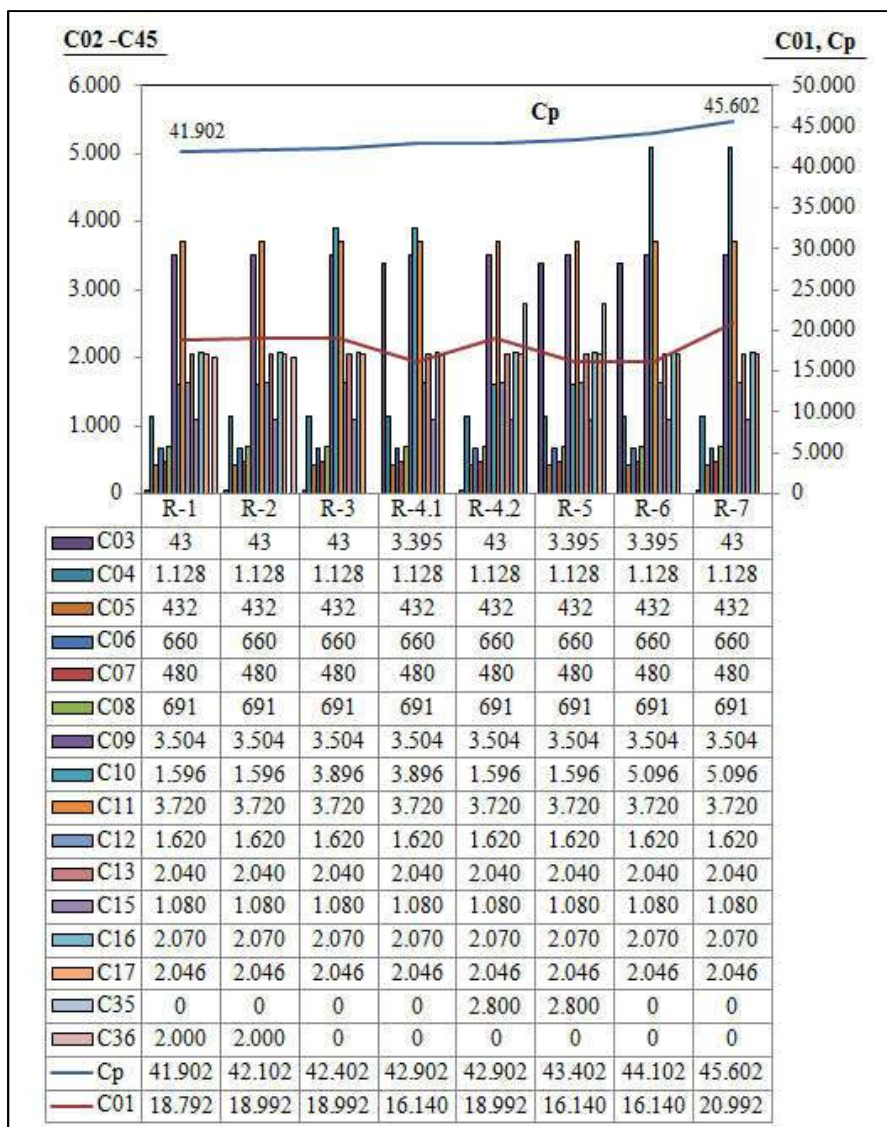
- **Решење 7. Минимални (нормални) трошкови пројекта** $C_p^{(7)} = C_p^{\min} = 41.902$ н.ј. са максималним (нормалним) трајањем $T_p^{(7)} = T_p(C_p^{\min}) = 376$ дана одређују најдужа (нормална) времена и најмањи (нормални) трошкови радова са варијантама параметара ($v=1$ са B01 за A.02.01.02, B36 за A.03.06 и B12 за A.04.02).*)
- **Решења 2 до 6** имају могућа времена трајања пројекта $T_p^{(q)} = 371, 366, 361, 356$ и 351 дана са минималним трошковима $C_p^{(q)} = 42.102, 42.402, 42.902, 43.402$ и 44.102 н.ј., $q = 2, \dots, 6$.

*) Дуже трајање пројекта, 376 дана у односу на 374 дана из полазног плана када радови немају варијанте параметара, добијено је са 200 дана за {A.03.06 Керамичарски радови} (2 дана дуже од времена 198 дана у полазном плану). Ови радови су имали трошкове 1.680 н.ј. у полазном плану са трошковима пројекта 41.762 н.ј. Сада се трошкови пројекта 41.902 н.ј. одређују са трошковима 2.000 н.ј. за наведени рад и одговарајућим трошковима радова {A.02.01.02 Машинско малтерисање унутрашњих зидова} и две фазе радова {A4.02.01 Инсталација јаке струје}.

Табела 33.3. Извођачи за Парето-оптимална решења Р-1 до Р-7

| Р.б. | Ознака / шифра | Назив групе / рада | R-1 | R-2 | R-3 | R-4.1 | R-4.2 | R-5 | R-6 | R-7 | T_p |
|------|----------------|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------------|
| | | | 376 | 371 | 366 | 361 | | 356 | 351 | 348 | |
| | A.01 | GRUBI GR. RADOVI | | | | | | | | | |
| 01 | A.01.01 | Pripremnii | B01 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 02 | A.01.02 | Zemljani | B01 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 03 | A.01.03 | Hidroiz. tem. | B03 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 04 | A.01.04 | Tesarski | B01 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 05 | A.01.05 | Armirački | B01 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 06 | A.01.06 | Betonski | B01 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 07 | A.01.07 | Krovna konst. | B01 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 08 | A.01.08 | Zidarski | B01 | → | → | → | → | → | → | → | |
| | A.02 | ZAVRŠ. GR. RADOVI | | | | | | | | | |
| 9 | A.02.01 | Razni zid. rad. | B01, 1 | B01, 2 | B01, 2 | B03, 3 | B01, 2 | B03, 3 | B03, 3 | B01, 4 | B_j варијанта |
| 10 | A.02.02 | Limarski | B05 | → | → | → | → | → | → | → | |
| | A.03 | ZANATSKI RADOVI | | | | | | | | | |
| 11 | A.03.01 | Stolarski | B06 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 12 | A.03.02 | Bravarski | B07 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 12 | A.03.03 | Proz. i vrata | B08 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 14 | A.03.04 | Izolaterski | B04 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 15 | A.03.05 | Fasaderski | B09 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 16 | A.03.06 | Keramičarski | B36, 1 | B36, 1 | B10, 2 | B10, 2 | B35, 3 | B35, 3 | B10, 4 | B10, 4 | B_j варијанта |
| 17 | A.03.07 | Moler.-farbar. | B09 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 18 | A.03.08 | Podopolag. | B10 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 19 | A.03.09 | Gipsarski | B09 | → | → | → | → | → | → | → | |
| | A.04 | INSTALAT. RADOVI | | | | | | | | | |
| 20 | A.04.01 | Vodov. i kan. | B11 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 21 | A.04.02 | Elektro inst. | B12, 1 | B12, 1 | B12, 1 | B12, 1 | B12, 1 | B12, 1 | B12, 1 | B12, 1 | B_j варијанта |
| 22 | A.04.03 | Term-teh. inst. | B13 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 23 | A.05 | LIFTOVI | B15 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 24 | A.06 | SPOLJNO UREĐENJE | B16 | → | → | → | → | → | → | → | |
| 25 | A.07 | SPOLJNA INFRASTR. | B17 | → | → | → | → | → | → | → | |

- Два алтернативна решења имају исто трајање пројекта 361 дан и исте трошкове 42.902 н.ј. Решење 4.1 настаје са 130 дана за А.02.01.02 и 195 дана за А.03.06. Ови радови у решењу 4.2 имају времена 135 и 190 дана, респективно.



Slika 42.2. Troškovi projekta i izvođača za rešenja 1 do 7 (izostavljeni izvođači sa troškovima nula)

Са становишта пројекта одређена су сва решења. У оквиру њих постоје нова решења за извођаче. У наставку приказују се планови извођача за решење R-1 (слике 42.3.1 до 42.3.3).

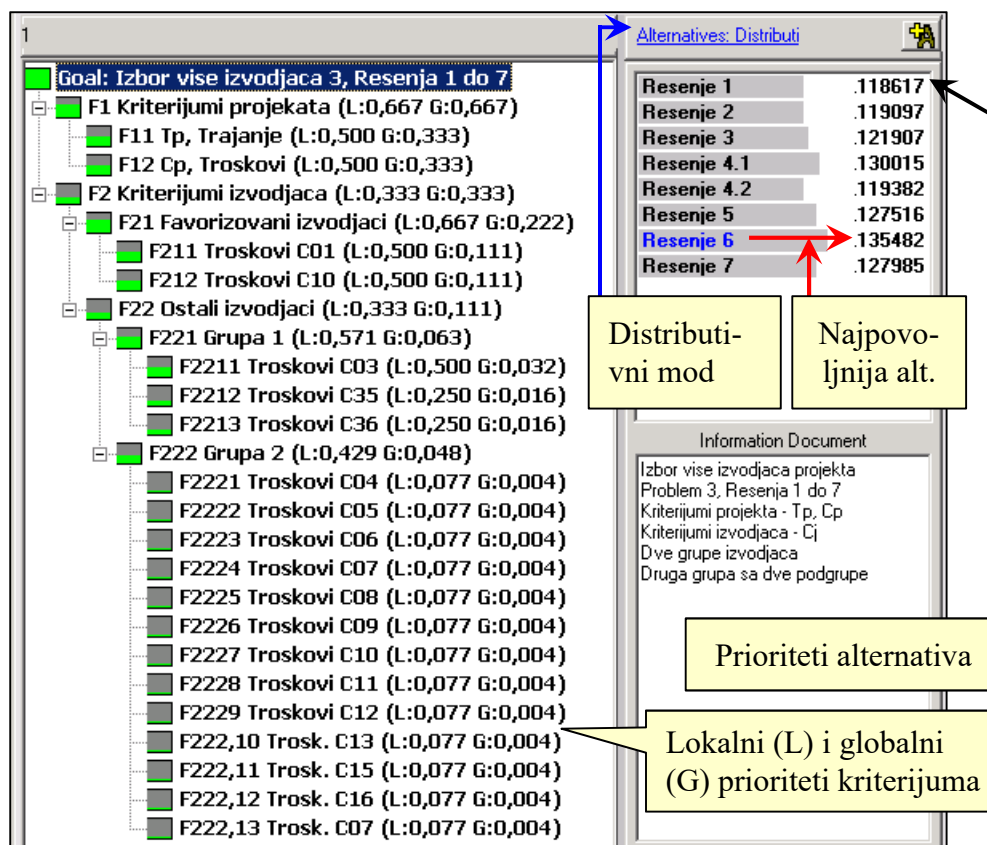
- Избор коначног решења врши се у зависности да ли се већи значај даје трајању пројекта или трошковима пројекта.
- Може се вршити вишекритеријумска анализа решења 1 до 7 применом модела *ВАО*, разматрајући критеријуме пројекта и критеријуме извођача.
- Избор извођача врши се сагласно усвојеном кончаном решењу са становишта критеријума пројекта (трајање, трошкови).

| Aktivnost / Rad | Trajanje | Početak | Završetak | Rad izvođača | Troškovi izvođača | 2016 | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------|----------|------------|------------|--------------|-------------------|--------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | | | | | Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec | Jan | Feb |
| 0 STPK MIRIJEVO 5.4. Varijante ponuda izvođača, Plan radova, Planovi izvođača | 376 d | 25.01.2016 | 03.02.2017 | 136.944 hrs | 42.102,00 | [Timeline bar from Jan to Feb] | | | | | | | | | | | | | |
| 1 1) PLAN RADOVA | 376 d | 25.01.2016 | 03.02.2017 | 136.994 hrs | 42.102,00 | [Timeline bar from Jan to Feb] | | | | | | | | | | | | | |
| 55 2) PLANOWI IZVODJACA | 376 d | 25.01.2016 | 03.02.2017 | 136.944 hrs | 42.102,00 | [Timeline bar from Jan to Feb] | | | | | | | | | | | | | |
| 56 IZVODJAC B.01 | 249 d | 25.01.2016 | 29.09.2016 | 61.776 hrs | 18.792,00 | [Timeline bar from Jan to Sep] | | | | | | | | | | | | | |
| 57 01.01 Pripremni radovi | 26 d | 25.01.2016 | 19.02.2016 | 1.248 hrs | 1.200,00 | [Timeline bar from Jan to Feb] | | | | | | | | | | | | | |
| 60 01.02 Zemljani radovi | 21 d | 30.01.2016 | 19.02.2016 | 2.016 hrs | 492,00 | [Timeline bar from Jan to Feb] | | | | | | | | | | | | | |
| 63 01.04 Tesarski radovi | 186 d | 27.02.2016 | 30.08.2016 | 11.008 hrs | 3.000,00 | [Timeline bar from Feb to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 66 01.05 Armiracki radovi | 162 d | 28.02.2016 | 07.08.2016 | 9.072 hrs | 4.308,00 | [Timeline bar from Feb to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 69 01.06 Betonski radovi | 180 d | 20.02.2016 | 17.08.2016 | 5.280 hrs | 3.456,00 | [Timeline bar from Feb to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 70 01.06.01 Nearmirani beton | 2 d | 20.02.2016 | 21.02.2016 | 96 hrs | 48,00 | [Timeline bar from Feb to Feb] | | | | | | | | | | | | | |
| 73 01.06.02 Armirani beton | 162 d | 09.03.2016 | 17.08.2016 | 5.184 hrs | 3.408,99 | [Timeline bar from Mar to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 76 01.07 Krovna konstrukcija sa pokrivanjem | 28 d | 18.08.2016 | 14.09.2016 | 1.248 hrs | 540,00 | [Timeline bar from Aug to Sep] | | | | | | | | | | | | | |
| 79 01.08. Zidarski radovi | 184 d | 24.03.2016 | 23.09.2016 | 25.024 hrs | 3.144,00 | [Timeline bar from Mar to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 82 02.01. Razni zidarski radovi | 140 d | 13.05.2016 | 29.09.2016 | 6.880 hrs | 2.652,00 | [Timeline bar from May to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 83 02.01.01 Cementna kosuljica | 40 d | 21.08.2016 | 29.09.2016 | 1.280 hrs | 852,00 | [Timeline bar from Aug to Sep] | | | | | | | | | | | | | |
| 86 02.01.02. Masinsko malterisanje unutrašnjih zidova | 140 d | 13.05.2016 | 29.09.2016 | 5.600 hrs | 1.800,00 | [Timeline bar from May to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 89 IZVODJAC B.03 | 221 d | 22.02.2016 | 29.09.2016 | 2.816 hrs | 1.171,00 | [Timeline bar from Feb to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 90 01.03 Hidroizolacija temelja | 5 d | 22.02.2016 | 26.02.2016 | 160 hrs | 43,00 | [Timeline bar from Feb to Feb] | | | | | | | | | | | | | |
| 93 03.04 Izolaterski radovi | 100 d | 22.06.2016 | 29.09.2016 | 2.656 hrs | 1.128,00 | [Timeline bar from Jun to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 94 03.04.01 Unutrasnja termoizolacija | 100 d | 22.06.2016 | 29.09.2016 | 2.400 hrs | 1.032,00 | [Timeline bar from Jun to Oct] | | | | | | | | | | | | | |
| 97 03.04.02 Hidroizolacija | 16 d | 14.09.2016 | 29.09.2016 | 256 hrs | 96,00 | [Timeline bar from Sep to Sep] | | | | | | | | | | | | | |
| 100 IZVODJAC B.05 | 114 d | 23.09.2016 | 14.01.2017 | 2.736 hrs | 432,00 | [Timeline bar from Sep to Feb] | | | | | | | | | | | | | |
| 101 02.02 Limarski radovi | 114 d | 23.09.2016 | 14.01.2017 | 2.736 hrs | 432,00 | [Timeline bar from Sep to Feb] | | | | | | | | | | | | | |

Слика 42.3.1. Глобални план радова и детаљни планови извођача B01, B03 и B05
 Трајање 140 дана са трошковима 1.800,00 н.ј. радова {02.01.02 Машиноко малтерисање унутрашњих зидова}
 из пријаве извођача B01

5.3.4.2. Примена модела ВАО и софтвера Expert Choice за избор коначног решења

Модел има осам алтернатива са решењима 1 до 7 (табела 33.3, слика 43.3.1). Критеријуми су разврстани на три нивоа применом софтвера *Expert Choice* (EC). Два скупа на првом нивоу: F_1 за пројекат (T_p и C_p) и F_2 за трошкове извођача (са подскуповима F_{21} за фаворизоване извођаче и F_{22} за остале извођаче на другом нивоу). Подскуп F_{22} чине на трећем нивоу F_{221} (група 1) са различитим трошковима и F_{222} (група 2) са константним трошковима у решењима. Требало би изоставити групу 2 (тима F_{22} постаје F_{221} пошто константни трошкови извођача не утичу на рангирање решења), али је ова група уведена у циљу илустрације броја критеријума проблема.



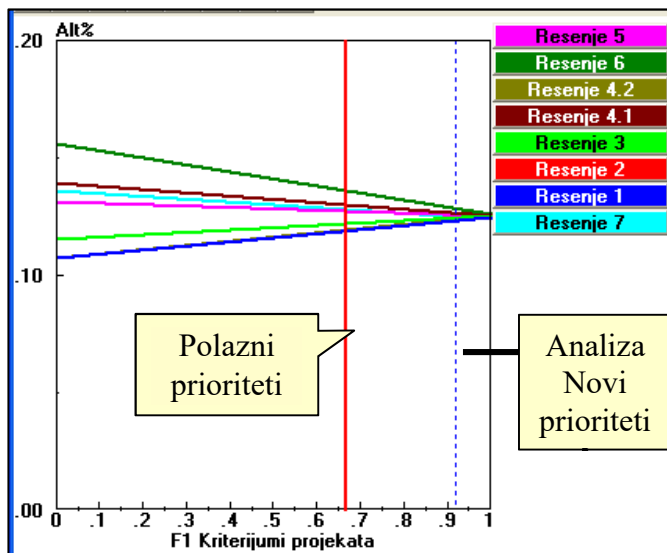
Слика 43.3.1. Модел ВАО са ранжираним алтернативама, Софтвер EC са *Distributive Mode*

- Модел има укупно 26 критеријума и алтернативе се непосредно придружују за 20 критеријума (C_p , T_p и трошкови извођача).^{*)}
- Значајност сваког од 26 критеријума исказана је одговарајућим тежинама (L, локални приоритет) посматрајући критеријуме на истом нивоу. Илуструју се наредни односи критеријума: F_1 два пута значајнији од F_2 , (Φ_{11} , Φ_{12}) истих тежина, F_{21} два пута значајнији од F_{22} , F_{221} са 1,5 пута већим значајем од F_{222} , F_{2211} два пута значајнији од (F_{2212} , F_{2213}), и (F_{2221} до $F_{222,13}$) подједнако значајни.
- Вишекритеријумска ранг-листа алтернатива, редослед решења: R-6, R-41, R-7 ($\min T_p$), R-5, R-3, R-4.2, R-2, R-1 ($\min C_p$).

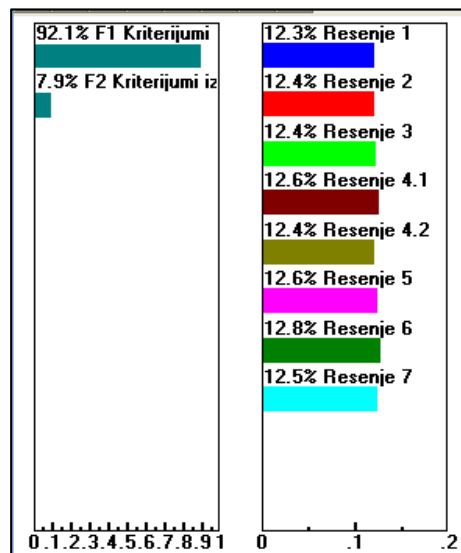
^{*)} На проблему избора једног извођача за пројекат у целости под 5.2 детаљно је тумачно и илустровано: дефинисање модела ВАО применом софтвера EC, решавање, тумачење решења и анализа осетљивости.

- Увођењем других приоритета за критеријуме може наступити промена приоритета алтернатива, што се уврђује анализом осетљивости.

Основна анализа осетљивости врши се применом градијентне анализе (GA) и динамичке анализе (DA). Разматра се први ниво критеријума (F_1, F_2) на графику GA (слика 43.3.2). Корекција приоритета за F_1 на GA мења: приоритет за F_2 , глобалне приоритете осталих критеријума, и приоритете алтернатива. На DA (слика 43.3.3) се прате настали приоритети за (F_1, F_2) са одговарајућим приоритетима за алтернативе.

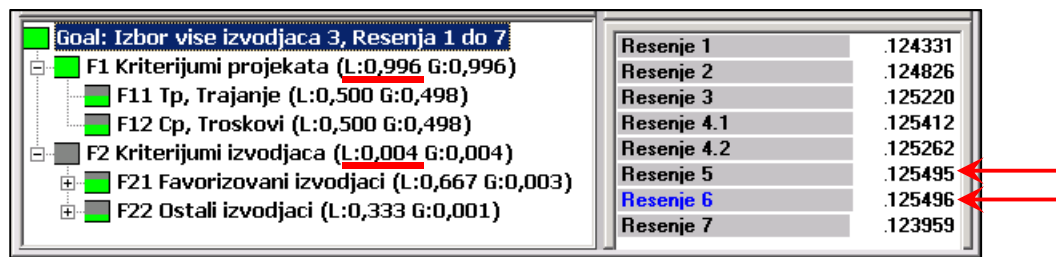


Слика 43.3.2. Градијентна анализа за F_1 и F_2 (полазни и нови приоритети)



Слика 43.3.3. Динамичка анализа (нови приоритети за F_1, F_2 и решења)

- На GA се уочава да полазни приоритети критеријума дају стабилно решење са становишта најповољнијег решења R-6, пошто има градијент изнад градијената осталих алтернатива када приоритет за F_1 опада до $w_1 \approx 0,01$ и расте до $w_1 \approx 0,99$.
- Уочава се да анализу није могуће спроводити довољно тачно, услед приказивања приоритета критеријума одабраног за x-осу на GA и приоритета алтернатива на DA са једном децималом (у општем случају), као и непрегледности градијената на GA када се w_1 приближава вредности 1 (на овом проблему). Модел са $w_1 = 0,921$ и $w_2 = 0,079$ (слика 5.3.3) одређује приоритете 0,123522 за R-2 и 0,12466 за R-3, а на DA ови приоритети износе 0,124.
- R-5 и R-6 имају приближне приоритете 0,125495 и 0,125496 ако F_1 постане 245 пута значајнији од F_2 . Следи $w_1 = 0,99604743$ и $w_2 = 0,003952569$. Софтвер приказује вредности $w_1 = 0,996$ и $w_2 = 0,004$ (слика 43.3.4).
- Увећавањем w_1 на $w_1 > 0,996047431$ умањује се w_2 на $w_2 = 1 - w_1 < 0,003952569$. R-5 постаје најповољнија алтернатива: расте приоритет за R-5 и опада за R-6.



Слика 43.3.4. Приближни приоритети за R-5 и R-6 са $w_1 = 0,996$ и $w_2 = 0,004$

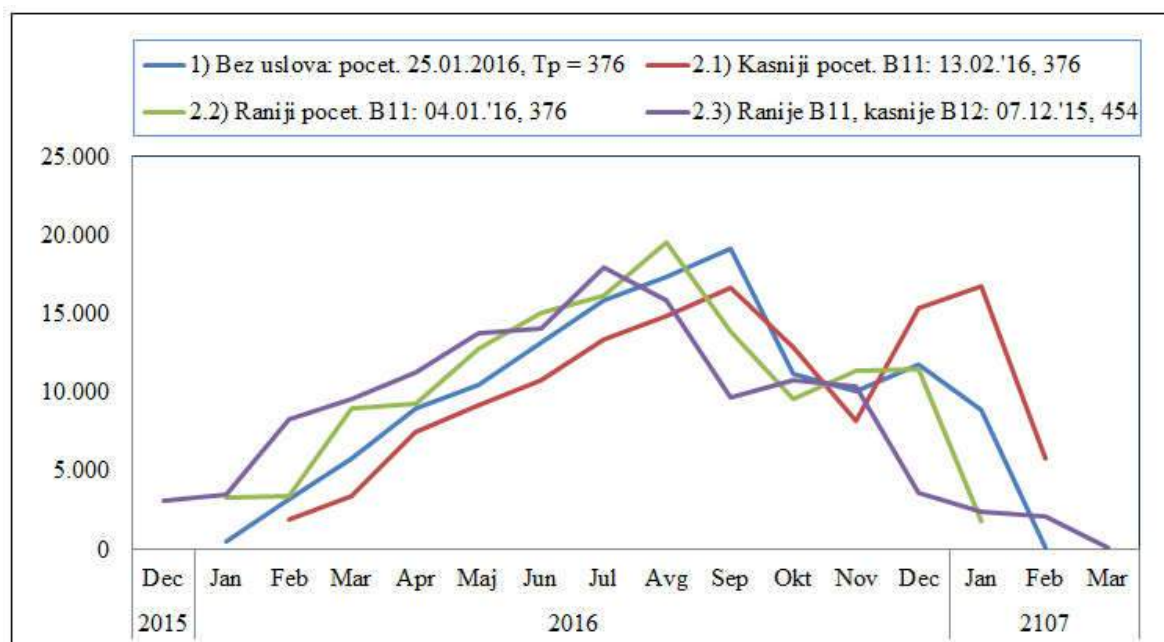
5.3.5. Проблеми избора са условима потенцијалних извођача

Услови потенцијалних извођача могу да се односе на вредности њихових радова (доње границе њихових трошкова), периоде ангажовања, паузе у тим периодима и др.

- Најсложенији су проблеми када извођачи који су једини конкурисали за обављање одговарајућих радова постављају услове за периоде ангажовања. Захтевани почетак или завршетак ангажовања једног извођача може да буде у контрадикторности са планом пројекта. Услови више извођача могу бити међусобно конфликтни и усложњавају одређивање прихватљивог плана пројекта.

Нека се у оптималном плану проблема 5.3.4 разматрају захтеви наредних извођача: В11 за групу радова {А.04.01 Водовод и канализација}, В12 за групу {А.04.02 Елелектро инсталације}, В.01 за {А.01.07 Кровна конструкција са покривањем}, и В.05 за {02.02. Лимарски радови}.

- 1) Оптимални план (Базни план 1) са почетком пројекта 25.01.2016. има минимално трајање пројекта 376 дана (слике 42.3.1 до 42.3.32, 44 и 44.1).

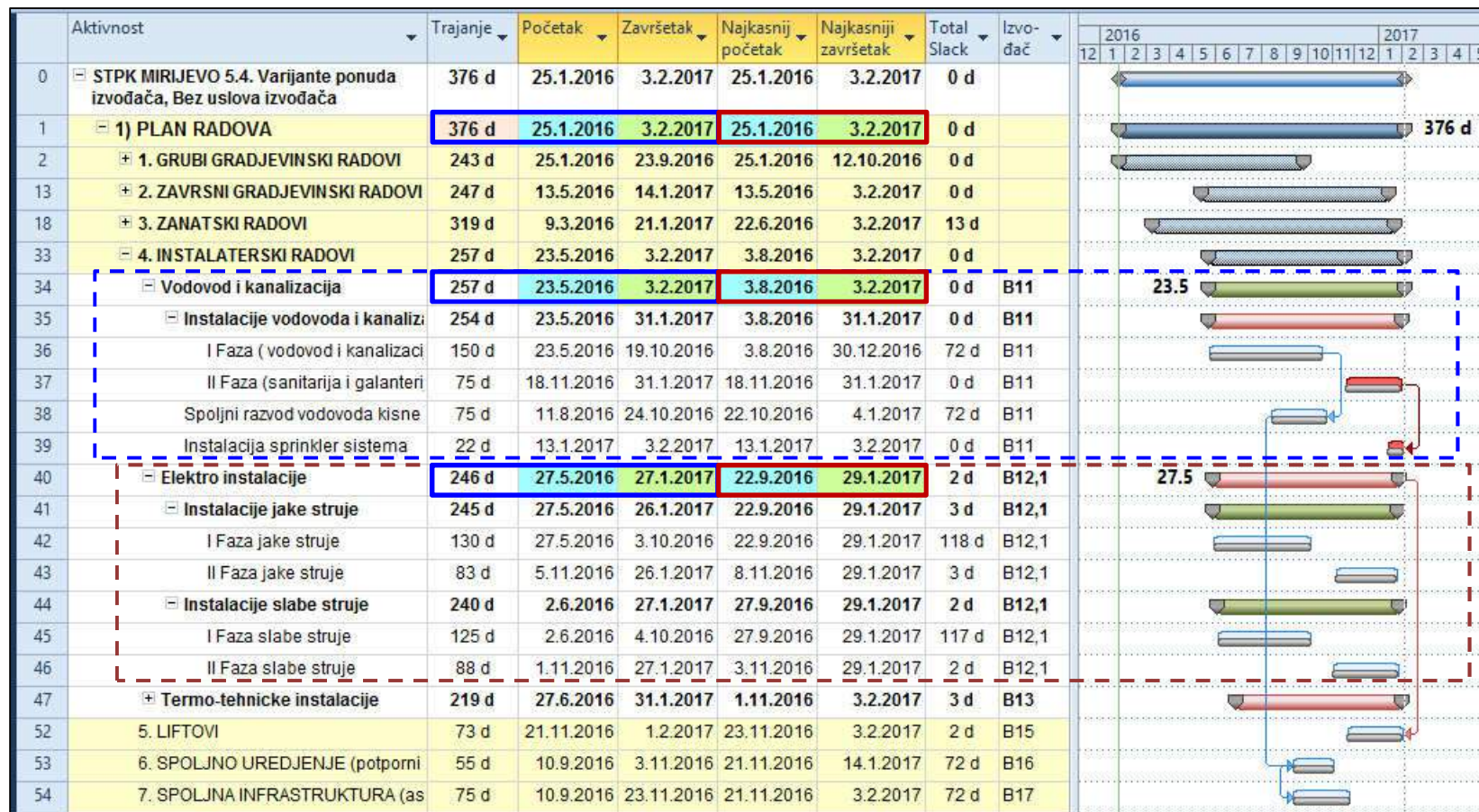


Слика 44. Елементи планова без услова извођача и три услова извођача за почетке или завршетке ангажовања: месечни радови са почетком и трајањем пројекта

- 2.1) Извођач В11 захтева почетак ангажовања не пре (најраније) 22.08.2016, што је 19 дана после најкаснијег термина 03.08.2016. В11 има први рад {А.04.01.01.01 Водовод и канализација, I Фаза, }.

- Захтев да А.04.01.01.01 има почетак после најкаснијег почетка одређује дуже трајање пројекта, пораст на $376+19 = 395$ дана. Померају се и радови које зависе од А.04.01.01.01 када немају довољно велике временске резерве (слика 4.2.1.а).
- Софтвер пријављује најранији почетак пројекта 25.01.2016 из полазног оптималног (базног) плана и најкаснији почетак пројекта 13.02.2016.

- ◆ Постављањем да пројект има почетак 13.02.2016, ако привате остали извођачи, настају наредне последице (слика 44.2.1.б):
 - померање у касније периоде свих радова
 - задржавање оптималног трајања пројекта 376 дана.
- 2.2) Извођач В11 захтева почетак ангажовања не касније (најкасније) дана 02.05.2016, што је 21 дан пре најранијег почетка 23.05.2016.
 - Захтев за А.04.01.01.01 одређује недопустив план за почетак пројекта 25.01.2016. Пројекат, посматрана активност и полазни радови (група 1 и 2) имају негативну укупну временску резерву (*Total Slack*) = -21 дан (слика 44.2.2.а).
 - Софтвер пријављује најкаснији почетак пројекта дана 04.01.2016, 21 дан пре почетка из базног плана.
 - ◆ Усвајањем почетка пројекта 04.01.2016, ако привате остали извођачи, настаје:
 - померање у раније периоде свих радова (слика 44.2.2.б),
 - задржавање полазног трајања пројекта 376 дана.
- 2.3) Комбинација услова 2.1) и 2.2):
 - Почетак В11 са радом А.04.01.01.01 најкасније 04.04.2016, односно 19 дана пре најранијег почетка 23.09.2016 у базном плану.
 - Захтева се ранији почетак пројекта.
 - Почетак В12 са радом А.04.02.01.01 најраније 25.07.2016, што је 59 дана после најранијег почетка 27.05.2016 и 59 дана пре најкаснијег почетка 22.09.2016.
 - Захтева се каснији завршетак пројекта.
 - ◆ Настаје недопустив план (слика 44.2.3): трајање 405 дана, најкаснији почетак пројекта 07.12.2015 и (*Total Slack*) = -49 дана за А.04.01.01.01, радове групе 1 и 2, и пројекат.
 - ◆ Допустив план: почетак пројекта 07.12.2015 са трањем 454 дана, ако се прихвати.
- 2.4) Конфликтни услови зависних активности:
 - Најранији почетак 05.09.2016 за {А.01.07 Кровна конструкција са покривањем}, одређује се најранији завршетак 01.10.2016.
 - Најкаснији завршетак 30.12.2016 за {А.02.02 Лимарски радови која зависи од А.01.07}, потребан најкаснији почетак 08.09.2016 (пре најранијег завршетка А.01.07).
 - Завршетак {А.02.02 Лимарски радови} не касније од (најкасније) 05.09.2016.
 - ◆ Настаје недопустив план (слика 44.2.4): А.02.02, радови пре А.02.02 и пројекат имају (*Total Slack*) < 0, А.01.07 има (*Total Slack*) = 0, софтвер пријављује потребни почетак 10.01.2016.
 - Са почетком пројекта 10.01.2016, ако извођачи привате раније обављање радова, одређује се (*Total Slack*) = 0 за те радове и пројекат
 - Остаје (*Total Slack*) = -24 дана за А.02.02.
- 2.5) Комбинација различитих захтева више извођача за почетке/завршетке радова, било да су радови непосредно зависни или су конфликтни захтеви за најмање један пар радова на истом низу (путу на мрежном дијаграму, односно гантограму), разматра се по аналогији са захтевима 2.1) до 2.4).
 - Захтеви за завршне термине своде се на захтеве почетних термина (као што је показано за 2.4):
 - почетака појединачних радова, услед правила: (завршетак рада) = (почетак рада) + (трајање рада), односно почетак = завршетак – трајање
 - почетака последњих радова извођача када се разматра њихово ангажовање.



Слика 44.1. Најранији и најкаснији термини радова без услова извођача, почетак пројекта 25.01.2016

Резултат: Минимално трајање пројекта 376 дана

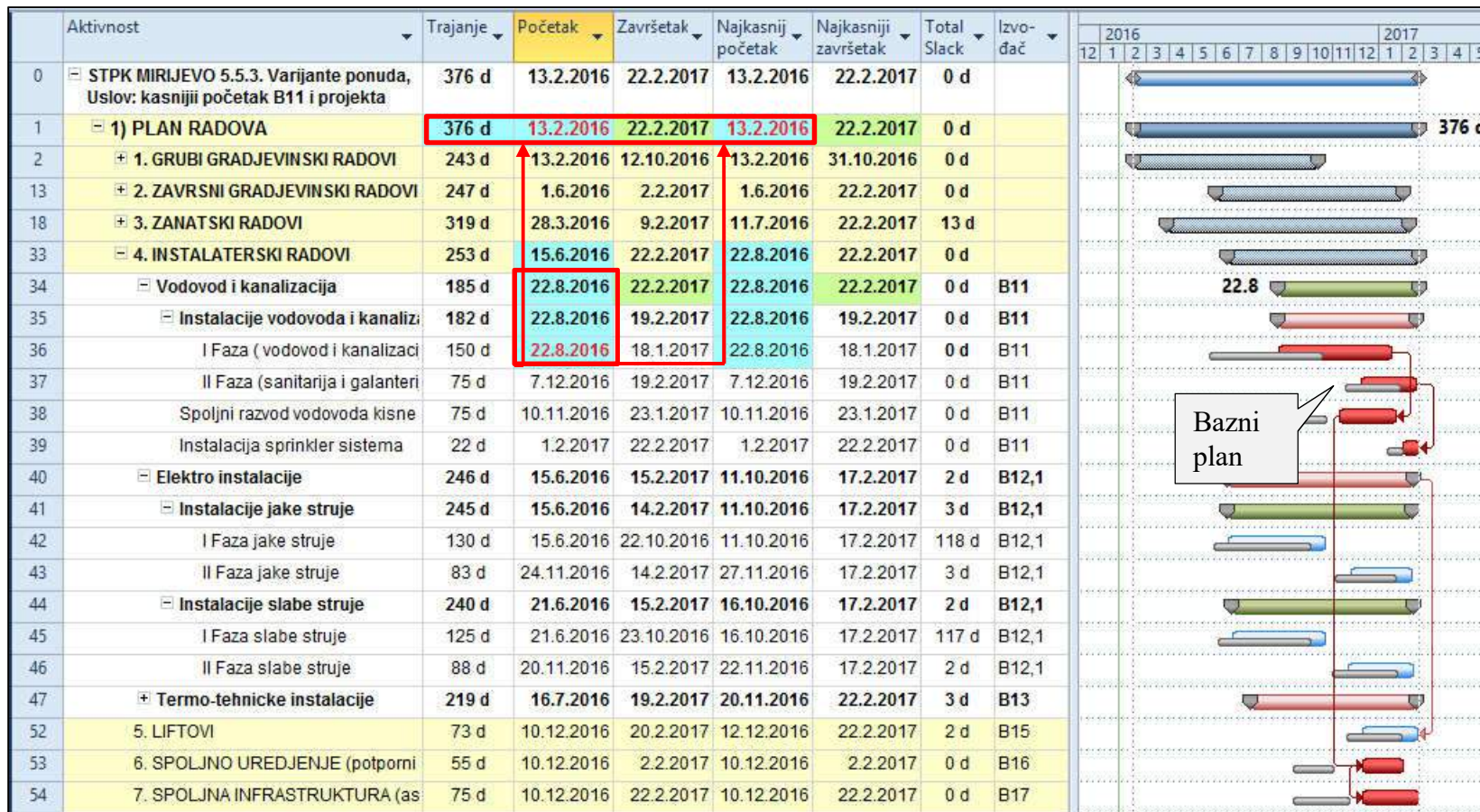
| Aktivnost | Trajanje | Početak Bazni | Početak | Završetak | Najkasnij početak | Najkasniji završetak | Total Slack | Izvođač | 2016 2017 | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------------------------------------------|----------|---------------|------------|-----------|-------------------|----------------------|-------------|---------|--------------------------------------------------------|---|---|---|----|----|----|---|---|---|---|---|
| | | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 STPK MIRIJEVO 5.5.3. Varijante ponuda, Uslov: kasniji početak B11 | 395 d | 25.1.2016 | 25.1.2016 | 22.2.2017 | 13.2.2016 | 22.2.2017 | 0 d | | [Gantt chart bar for total duration] | | | | | | | | | | | |
| 1 1) PLAN RADOVA | 395 d | 25.1.2016 | 25.1.2016 | 22.2.2017 | 13.2.2016 | 22.2.2017 | 0 d | | [Gantt chart bar for plan duration] | | | | | | | | | | | |
| 2 1. GRUBI GRADJEVINSKI RADOVI | 243 d | 25.1.2016 | 25.1.2016 | 23.9.2016 | 13.2.2016 | 31.10.2016 | 19 d | | [Gantt chart bar for rough construction] | | | | | | | | | | | |
| 13 2. ZAVRSNI GRADJEVINSKI RADOVI | 247 d | 13.5.2016 | 13.5.2016 | 14.1.2017 | 1.6.2016 | 22.2.2017 | 19 d | | [Gantt chart bar for finishing construction] | | | | | | | | | | | |
| 18 3. ZANATSKI RADOVI | 319 d | 9.3.2016 | 9.3.2016 | 21.1.2017 | 11.7.2016 | 22.2.2017 | 32 d | | [Gantt chart bar for craft work] | | | | | | | | | | | |
| 33 4. INSTALATERSKI RADOVI | 253 d | 23.5.2016 | 27.5.2016 | 3.2.2017 | 22.8.2016 | 22.2.2017 | 19 d | | [Gantt chart bar for installation work] | | | | | | | | | | | |
| 34 Vodovod i kanalizacija | 166 d | 23.5.2016 | 22.8.2016 | 3.2.2017 | 22.8.2016 | 22.2.2017 | 0 d | B11 | [Gantt chart bar for water and sewerage] | | | | | | | | | | | |
| 35 Instalacije vodovoda i kanalizaci | 163 d | 23.5.2016 | 22.8.2016 | 31.1.2017 | 22.8.2016 | 19.2.2017 | 0 d | B11 | [Gantt chart bar for water and sewerage installations] | | | | | | | | | | | |
| 36 I Faza (vodovod i kanalizaci | 150 d | 23.5.2016 | 22.8.2016 | 18.1.2017 | 22.8.2016 | 18.1.2017 | 0 d | B11 | [Gantt chart bar for Phase I of water and sewerage] | | | | | | | | | | | |
| 37 II Faza (sanitarija i galanteri | 75 d | 16.11.2016 | 18.11.2016 | 31.1.2017 | 7.12.2016 | 19.2.2017 | 19 d | B11 | [Gantt chart bar for Phase II of water and sewerage] | | | | | | | | | | | |
| 38 Spoljni razvod vodovoda kisne | 75 d | 11.8.2016 | 10.11.2016 | 23.1.2017 | 10.11.2016 | 23.1.2017 | 0 d | B11 | [Gantt chart bar for external water distribution] | | | | | | | | | | | |
| 39 Instalacija sprinkler sistema | 22 d | 11.1.2017 | 13.1.2017 | 3.2.2017 | 1.2.2017 | 22.2.2017 | 19 d | B11 | [Gantt chart bar for sprinkler system installation] | | | | | | | | | | | |
| 40 Elektro instalacije | 246 d | 27.5.2016 | 27.5.2016 | 27.1.2017 | 11.10.2016 | 17.2.2017 | 21 d | B12,1 | [Gantt chart bar for electrical installations] | | | | | | | | | | | |
| 41 Instalacije jake struje | 245 d | 27.5.2016 | 27.5.2016 | 26.1.2017 | 11.10.2016 | 17.2.2017 | 22 d | B12,1 | [Gantt chart bar for high voltage installations] | | | | | | | | | | | |
| 42 I Faza jake struje | 130 d | 27.5.2016 | 27.5.2016 | 3.10.2016 | 11.10.2016 | 17.2.2017 | 137 d | B12,1 | [Gantt chart bar for Phase I of high voltage] | | | | | | | | | | | |
| 43 II Faza jake struje | 83 d | 3.11.2016 | 5.11.2016 | 26.1.2017 | 27.11.2016 | 17.2.2017 | 22 d | B12,1 | [Gantt chart bar for Phase II of high voltage] | | | | | | | | | | | |
| 44 Instalacije slabe struje | 240 d | 2.6.2016 | 2.6.2016 | 27.1.2017 | 16.10.2016 | 17.2.2017 | 21 d | B12,1 | [Gantt chart bar for low voltage installations] | | | | | | | | | | | |
| 45 I Faza slabe struje | 125 d | 2.6.2016 | 2.6.2016 | 4.10.2016 | 16.10.2016 | 17.2.2017 | 136 d | B12,1 | [Gantt chart bar for Phase I of low voltage] | | | | | | | | | | | |
| 46 II Faza slabe struje | 88 d | 30.10.2016 | 1.11.2016 | 27.1.2017 | 22.11.2016 | 17.2.2017 | 21 d | B12,1 | [Gantt chart bar for Phase II of low voltage] | | | | | | | | | | | |
| 47 Termo-tehnicke instalacije | 219 d | 27.6.2016 | 27.6.2016 | 31.1.2017 | 20.11.2016 | 22.2.2017 | 22 d | B13 | [Gantt chart bar for thermo-technical installations] | | | | | | | | | | | |
| 52 5. LIFTOVI | 73 d | 19.11.2016 | 21.11.2016 | 1.2.2017 | 12.12.2016 | 22.2.2017 | 21 d | B15 | [Gantt chart bar for lifts] | | | | | | | | | | | |
| 53 6. SPOLJNO UREDJENJE (potporni | 55 d | 10.9.2016 | 10.12.2016 | 2.2.2017 | 10.12.2016 | 2.2.2017 | 0 d | B16 | [Gantt chart bar for external equipment] | | | | | | | | | | | |
| 54 7. SPOLJNA INFRASTRUKTURA (as | 75 d | 10.9.2016 | 10.12.2016 | 22.2.2017 | 10.12.2016 | 22.2.2017 | 0 d | B17 | [Gantt chart bar for external infrastructure] | | | | | | | | | | | |

Слика 44.2.1.а. Термини у оптималном (базном) плану и новом плану са захтевом В11

Најранији почетак В11 дана 22.08.2016, 19 дана после најкаснијег почетака 03.08.2016 из оптималног плана

Резултат: Померен први рад за В11 {I фаза, водовод и канализација} и померени зависни радови

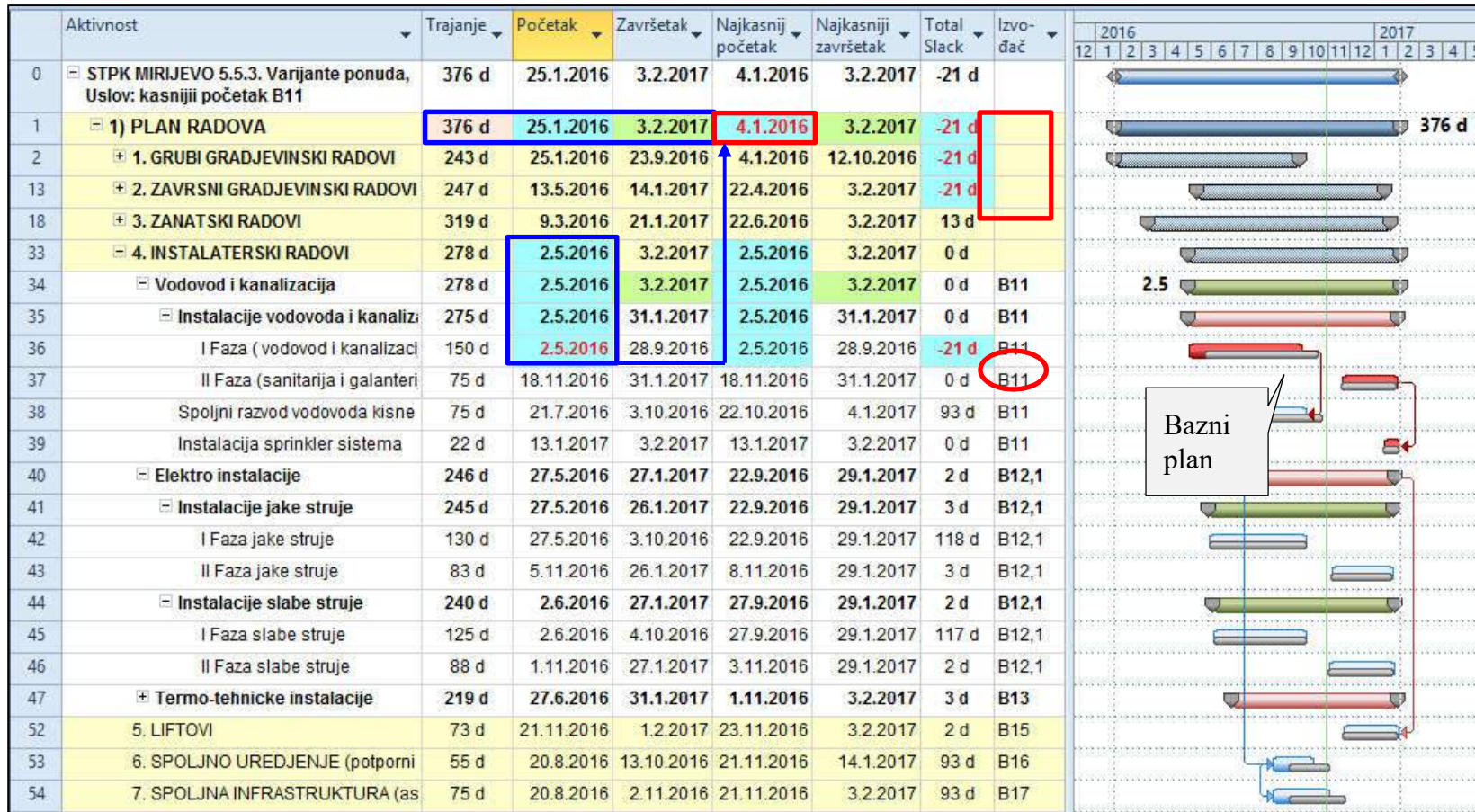
Продужено трајање пројекта на $376+19 = 395$ дана, софтвер пријављује *најкаснији почетак пројекта* 13.02.2016



Слика 44.2.1.б. План са најранијим почетком В11 дана 22.08.2016, 19 дана после најкаснијег почетака 03.08.2016 из оптималног плана

Решење: Померити почетак пројекта са 25.01.2016 на 13.02.2015 ако прихвате остали извођачи

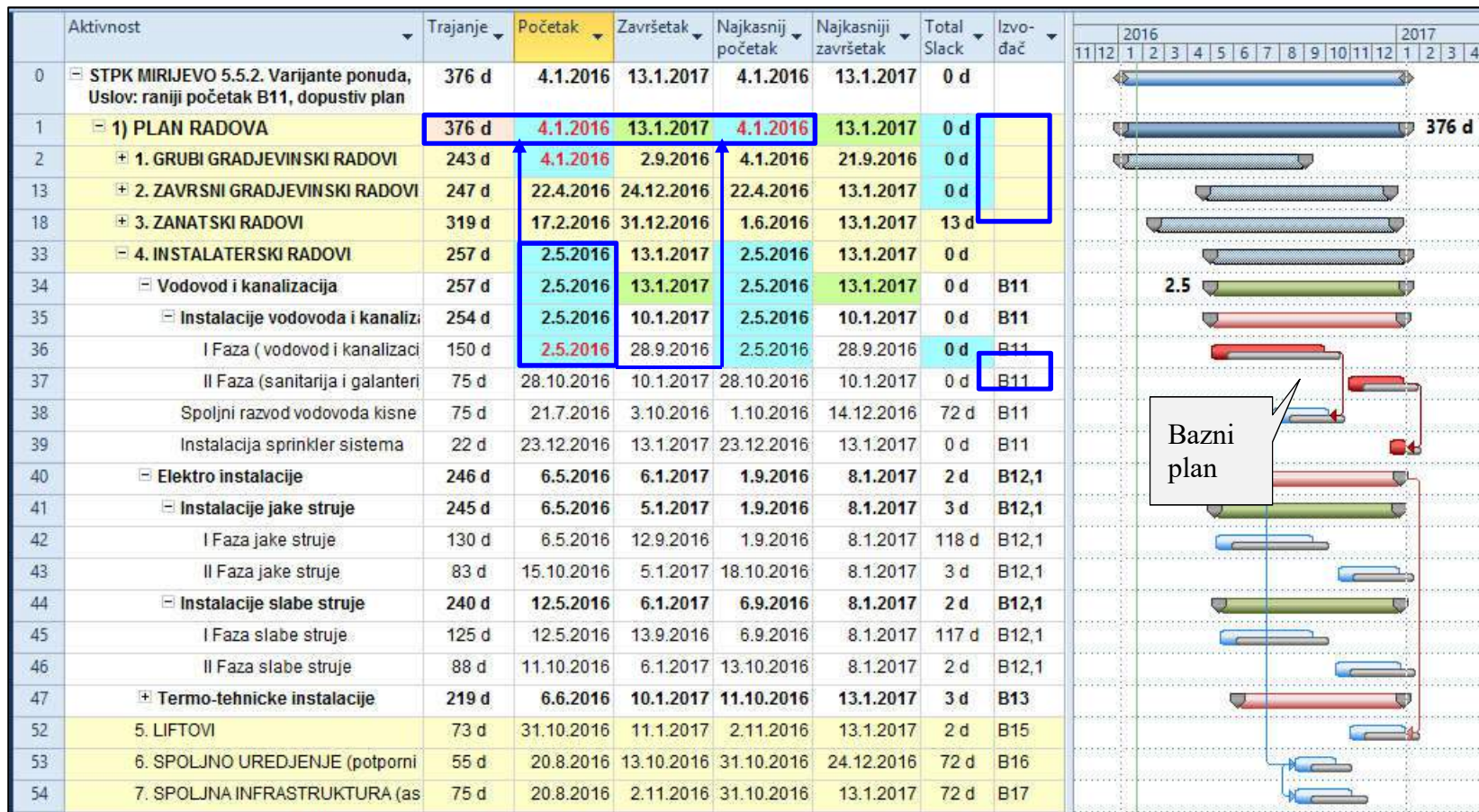
Остаје минимално трајање пројекта 376 дана



Slika 44.2.2.a. Najkasniji početak B11 dana 02.05.2016, 21 dan pre najranijeg početka 23.05.2016

Rezultat: Nedopustiv plan sa početkom projekta 25.01.2016 ima negativne ukupne vremenske rezerva (*Total Slack*) = -21 dan za prvi rad B11 (I faza, vodovod i kanalizacija), radove ranijih grupa radova (1 i 2) i projekat

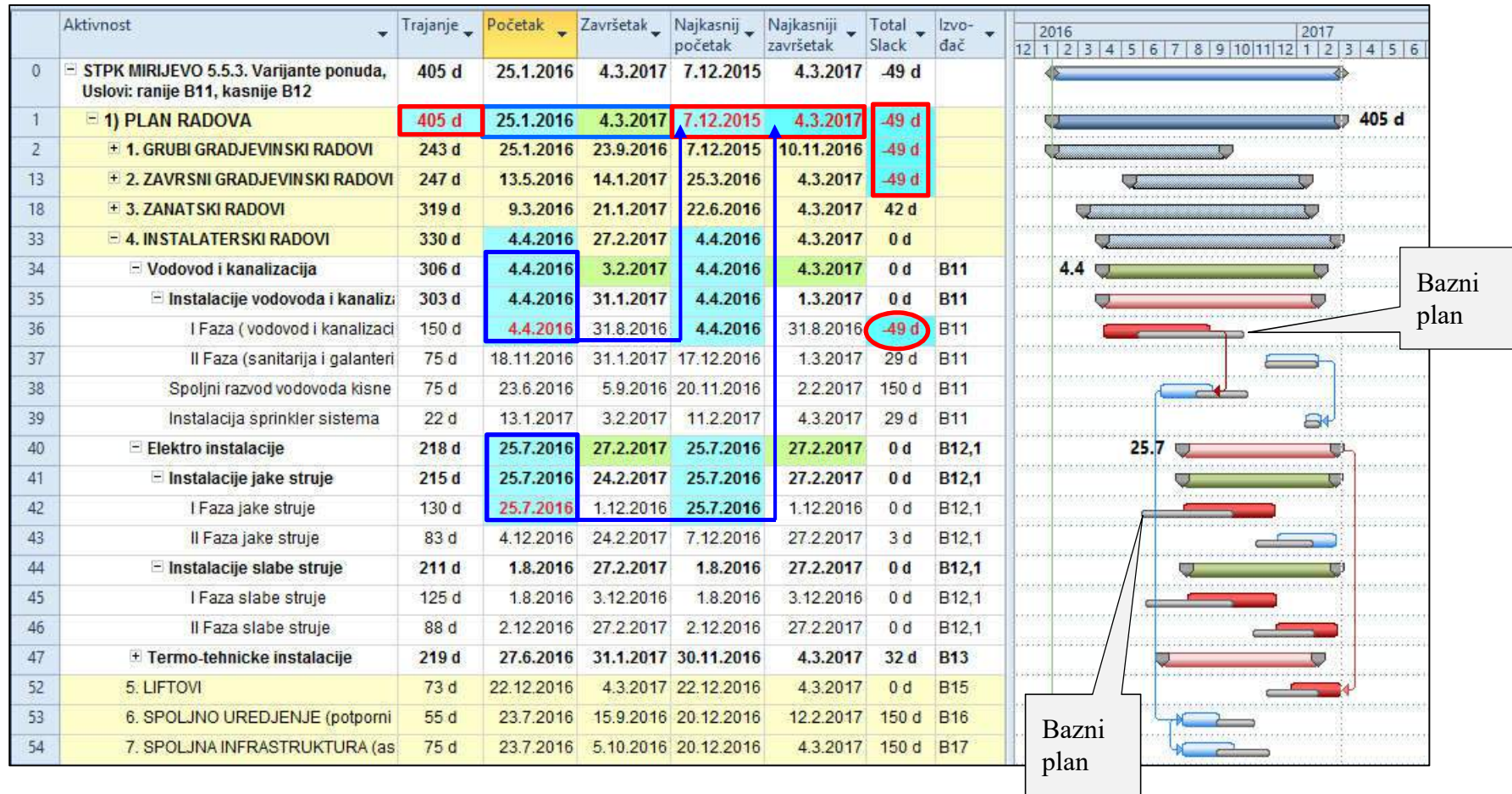
Rešenje: Ostaje $T_p = 376$ dana, softver prijavljuje *najkasni početak* 04.01.2016 i potrebno je *postaviti početak projekta* 04.01.2016



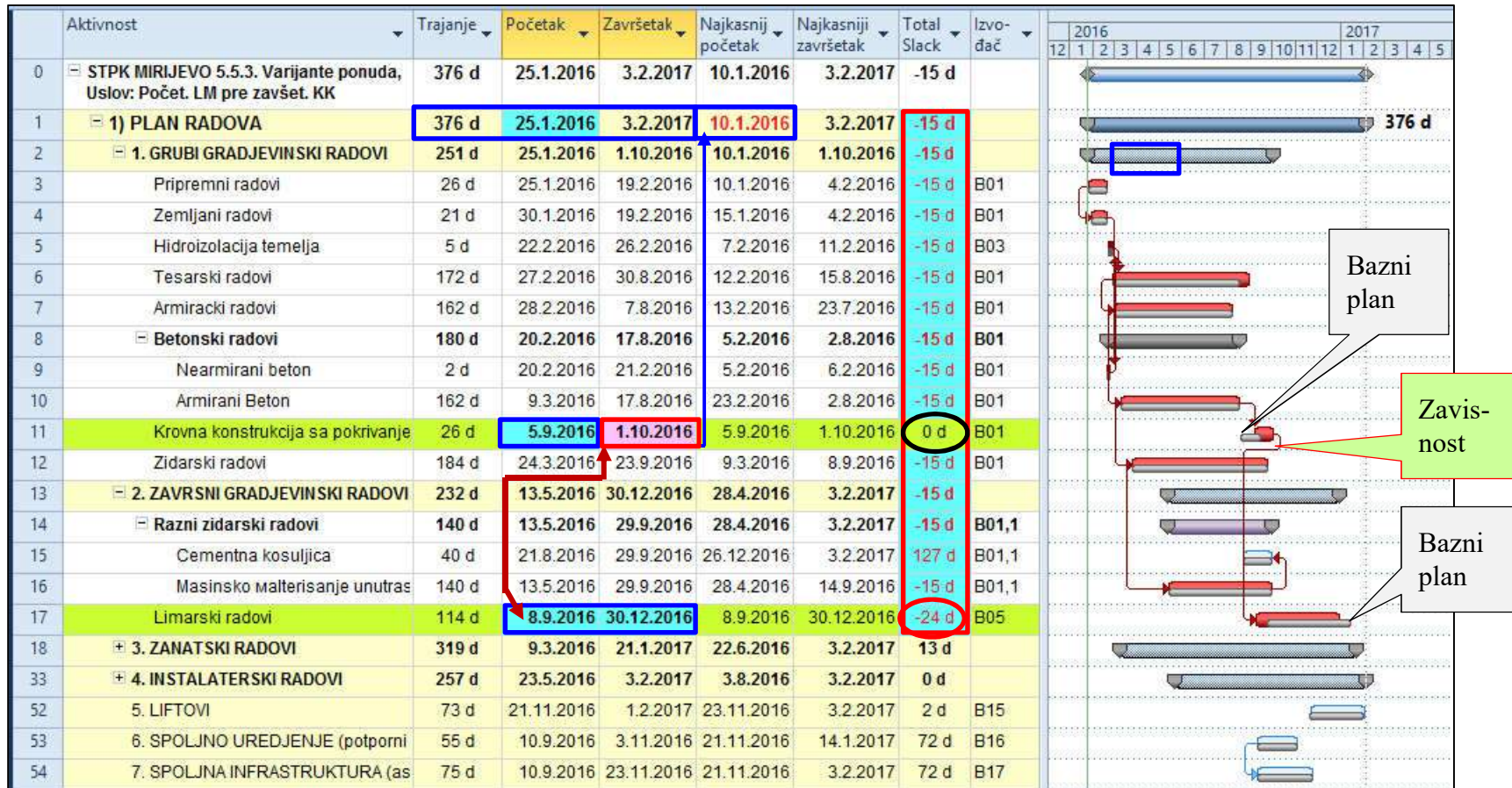
Слика 44.2.2.б. Ранији почетак пројекта 04.01.2016 да се оствари захтевани најкаснији почетак B11 дана 02.05.2016

Резултат: Допустив план ако прихвате остали извођачи, нема ($Total Slack$) < 0

Остаје минимално трајање пројекта $Tr = 376$ дана



Слика 44.2.3. Почетак В11 дана 04.04.2016, 19 дана *пре најранијег почетака* 23.05.2016 из полазног плана
 Почетак В12 дана 25.07.2016, 59 дана *после најранијег почетака* 27.05.2016 и 59 дана и *пре најкаснијег почетка* 22.09.2016
Решење: Поставити *почетак пројекта* 07.12.2016 (нуди софтвер као *најкаснији почетак*) ако прихвате остали извођачи
Продужено трајање пројекта са 405 дана у недопустивом плану на 454 дана у допустивом плану



Слика 44.2.4. Најранији почетак 05.09.22016 за {A.01.07 Krovna konstrukcija sa pokrivanjem} ⇒ најранији завршетак 01.10.2016; и најкаснији завршетак 30.12.2016 за {A.02.02 Limarski radovi} ⇒ најкаснији почетак 08.09.2016, пре завршетка A.01.07 од које зависи
Резултат: Недопустив план са (*Total Slack*) < 0 за радове пре A.02.02 и пројекат, софтвер ⇒ потребни почетак пројекта 10.01.2016

Не постоји решење (недопустив план) ако извођачи прихвате почетак пројекта 10.01.2016 и померање радова

Настаје (*Total Slack*) = 0 за наведене радове, и остаје недопустиво (*Total Slack*) = -24 дана за A.02.02

5.4. АНАЛИЗА ПРИМЕНЕ ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКИХ МОДЕЛА ОПТИМАЛНОГ ИЗБОРА ИЗВОЂАЧА ПРОЈЕКТА СТАНОГРАДЊЕ И ПРЕПОРУКЕ

Избор једног извођача за пројекат у целости и избор више извођача за поједине радове на пројекту изложени су у ранијим поглављима са одговарајућим моделима. У овом делу се изводе одговарајући закључци

5.4.1. Анализа примене модела оптималног избора једног извођача пројекта

Разматрање листе потенцијалних извођача који имају потребне техничке и кадровске капацитете да реализују пројекат у целости илустрован је применом Вишатрибутивног одлучивања (методе АХП и софтвера Експерт Цхоце) у делу 5.2. Може се извести закључак да метода и софтвер омогућавају формирање вишекритеријумске ранг-листе потенцијалних извођача под условом да се моделом обухвате сви релевантни циљеви пројекта, формира примерено хијерархијско уређење критеријума, одреде тачне вредности које остварују потенцијални извођачи за поједине критеријуме и дефинише адекватна структура приоритета циљева, односотежина критеријума на свим нивоима хијерархијског стабла која исправно одражава захтеве инвеститора.

Приказана анализа осетљивости решења пружа увид у интервале промена приоритета критеријума са циљем да извођачи задрже позиције са врха ранг-листе (само извођач на првом месту или извођаче на првом и другом месту, односно извођаче на жељеним местима полазећи од врха ранг-листе). Тиме се ублажава евентуално недовољно правилно дефинисање полазних приоритета критеријума.

5.4.2. Анализа примене модела оптималног избора више извођача радова на пројекту

Избор најприхватљивијег плана пројекта за примену, имајући на уму карактеристике радова и потенцијалних извођача, тумачен је напред при разматрању примене одговарајућих модела. У наставку врши се анализа одабраних случајева са истицањем правила избора елемената пројекта и правила избора извођача са становишта врста модела и услова потенцијалних извођача (табела 7). Подразумевајући да услови потенцијалних извођача могу бити исказани комбинацијом услова (и) до (иии) из наставка, избор се своди на разматрање извођача са карактеристикама (1) и (2) сагласно наведеним правилима..

- (i) Ограничени радни капацитети извођача.
- (ii) Захтеви извођача за периоде ангажовања, када извођач пријављује један термин (најранији, најкаснији или дати почетак, односно завршетак) или временски период са два термина (између најранијег и најксније почетка, односно завршетка).

- (iii) Захтеви за вредности радова са једном границом (најмањи износ) или са две границе (између датог минималног износа и максимално могућег износа).
- (1) Радове могу обавити извођачи без услова и извођачи са условима.
 - (2) Радове могу обавити само извођачи са условима.

Када нису прихватљиви услови свих или неких потенцијалних извођача који су једини конкурисали за одређене радове, преостаје да се понови тендер за радове без изабраних извођача. Али није извесно да ће без услова или са прихватљивијим условима конкурисати други потенцијални извођачи за све те радове (евентуално и неки извођачи који су учествовали на првом тендеру). Може се очекивати сужавање листе радова без изабраних извођача. Истоветан исход може да настане и при наредним понављањима тендера. Зато, инвеститор мора донети једну од одлука (табела 34.1):

- изабрати извођаче без услова, за радове код којих је то могуће
- изабрати извођаче са најприхватљивијим условима, за остале радове.

5.4.2.1. Анализа примене модела групе 1

Илустрована је примена модела 1.6 са једнозначним параметрима за радове и више потенцијалних извођача за неке радове у поглављу 5.3.2. Пројекат има минимално трајање $T_p^{\min} = 374$ дана и трошкове $C_p(T_p^{\min}) = 41.209$ н.ј. Постоји 29 потенцијалних извођача сврстаних у 13 група сагласно технолошко условљеним радовима. Издвојена су карактеристична Парето-оптимална решења 1.1 до 1.4 за модел 1.6.1 без ограничења капацитета извођача и детаљно изложен избор извођача у складу са додељеним приоритетима са напоменом о оналогном уопштавању, што се делимично приказује у наставку. Описана правила могу се применити у било ком моделу.

- Приоритети извођача редоследом њихових редних бројева у свакој групи извођача са одговарајућим радовима. Напр., у првој групи са 4 извођача они имају наредне приоритете за трошкове:

- $C01 \gg C14 \gg C15 \gg C16$, апсолутни поредак важности

- Дефинисање више извођача са идентичним приоритетима у групи 1

| | |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| ▪ $(C01, C14) \gg C15 \gg C16$ | важнији $(C01, C14)$ од $C15$, и важнији $C15$ од $C16$ |
| ▪ $(C01, C14) \gg (C15, C16)$ | важнији $(C01, C14)$ од $(C15, C16)$ $(C15, C16)$ исте важности |
| ▪ $(C01, C14, C15) \gg C16$ | важнији $(C01, C14, C15)$ од $C16$ |

- Једнаки приоритети скупова извођача групе 1 са комбинацијама интензитета предности када није могуће извођачима исте важности доделити једнаке или прихватљиве приближне вредности

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ▪ $(C01 \gg C14) \gg (C15, C16)$ $(C15, C16)$ исте важности или различитих интензитета важности | снажније или слабије важнији $C01$ од $C14$ снажније или слабије важнији $C14$ од $C01$ |
| ▪ $(C01, C14, C15) \gg C16$ | снажније или слабије важнији $(C01, C14)$ од $C16$ снажније или слабије важнији $(C01, C15)$ од $C16$ снажније или слабије важнији $(C01, C15)$ од $C14$ снажније или слабије важнији $(C01, C16)$ од $C14$ снажније или слабије важнији $(C16, C01)$ од $C14$ ИТД. |

- Једнаки приоритети свих извођача групе 1 са комбинацијама интензитета предности када није могуће извођачима исте важности доделити једнаке или прихватљиве приближне вредности

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ (C01, C14) >> (C15, C16) | важнији (C01, C14) од (C15, C16) снажније важнији C01 од C14 или C14 од C01 и слабије важнији C16 од C15 или C15 од C16 |
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ (C01, C15, C16) >> C14 | важнији (C01, C15, C16) од C14 снажније важнији (C01, C15) од C16 или снажније важнији (C01, C16) од C15 или снажније важнији (C15, C16) од C01 ИТД. |
| <ul style="list-style-type: none"> ▪ ИТД. | |

Моделу 1.б.2 са ограниченим капацитетима потенцијалних извођача приказано померање радова и увећање трајања пројекта у односу на решење модела 1.б.2 са довољним капацитетима потенцијалних извођача. Правила избора извођача приказана су у наставку упоредо са правилима за сложеније моделе (табела 34.1).

5.4.2.2. Анализа примене модела групе 2

У поглављу 5.3.3 приказана је примена модела 2.б са варијантама за параметре радова и више потенцијалних извођача за одређене радове када сви потенцијални извођачи имају довољне капацитете. Листа потенцијалних извођача истоветна је са листом за модел 1.б.

На примеру два рада, посматрајући посебно сваки рад, приказано је скраћивање њиховог времена увођењем прековременог рада ресурса и настало умањење времена пројекта уз неопходно увећање трошкова рада и пројекта.

- Наиме, илустровани су случајеви када радови имају варијанте за време и трошкове обавезујуће за све потенцијалне извођаче.
- Идентичан проблем настаје ако се расписе тендер са датим варијантама за времена и трошкове одговарајућих радова, а потенцијални извођачи пријављују извођење радова.

Затим су одређена сва допустива времена пројекта (27) и одговарајући минимални трошкови са потребним временима за оба рада која обезбеђују минимално увећање трошкова пројекта преласком на свако наредно мање време пројекта.

Показало се да минимално трајање пројекта износи $Tn^{\min} = 348$ дана када неопходни трошкови износе $C_p^{\max} = C_p(T_p^{\min}) = 4.420,70$ н.ј. Избор извођача илустрован је на два карактеристична случаја.

- Дато је трајање пројекта, одредити потребна времена радова са минималним укупним трошковима пројекта
- Дати су максимални трошкови пројекта, одредити потребна времена радова са минималним временом пројекта.

Табела 34.1. Избор извођача у зависности од врсте проблема и услова извођача – правила

| Проблем / Модел | | Неке радове могу обавити извођачи са условима и извођачи без услова | Неке радове могу обавити само извођачи са условима |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.б | <p>Јединствене варијанте параметара за радове и потенцијалне извођаче</p> <ul style="list-style-type: none"> • минимално трајање и минимални трошкови пројекта: (T_p^{min}, C_p^{min}) | <ul style="list-style-type: none"> • изабрати извођаче без услова, ако је могуће, • у супротном, тражити друге извођаче: <ul style="list-style-type: none"> • без услова, б) са прихватљивим условима, ако није могуће а), и усвојити настало T_p | <ul style="list-style-type: none"> • усвојити услове, ако се остварује T_p^{min} |
| 2.б | <p>Različite varijante parametara za radove važe za sve potencijalne izvođače.</p> <ul style="list-style-type: none"> • коначан број Pareto-optimalnih вредности за трајање и трошкове пројекта : $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$, $k = 1, \dots, q_1$ | <ul style="list-style-type: none"> • усвојити $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$ • изабрати извођаче (без услова, са условима) који остварују $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$, ако је то могуће, • у супротном: <ul style="list-style-type: none"> а) тражити друге извођаче (без услова, са условима) који остварују $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$, б) ако није могуће а) усвојити друге прихватљиве вредности $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$ и поновити а), односно а) и б) | <ul style="list-style-type: none"> • усвојити $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$ • изабрати извођаче чији услови остварују $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$ • ако нису изабрани извођачи за све радове: <ul style="list-style-type: none"> а) тражити друге извођаче без услова за те радове, б) тражити друге извођаче са прихватљивим условима да се остваре друге вредности $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$ в) ако под а) и б) нису изабрани извођачи за све радове, тим радовима изабрати извођаче који остварују прихватљиве вредности $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$, такве да нису Pareto-optimalne |
| 3.б | <p>Различите варијанте параметара за радове, потенцијални извођачи могу имати различите допустиве варијанте.</p> <ul style="list-style-type: none"> • коначан број Pareto-оптим. вредности за: $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$, $k = 1, \dots, q_2$ | <ul style="list-style-type: none"> • разматрати све варијанте потенцијалних извођача (не изостављати неповољне варијанте) • вршити избор као за модел 2.б | |

5.4.2.3. Анализа примене модела групе 3

Модел 3.б разматран је у поглављу 5.3.4 са варијантама времена радова А02.01.02, А.03.06 и А.04.02.01 за које конкуришу потенцијални извођачи пријављујући одговарајуће трошкове на расписани тендер. Настају разлике у варијантама параметара таквих радова на основу различитих трошкова потенцијалних извођача. Остали радови имају једнозначно задата времена и трошкове, за чије извођење конкуришу потенцијални извођачи.

Решаван је модел без ограничења капацитета потенцијалних извођача са 45 потенцијалних извођача сврстаних у 18 скупова технолошко зависних радова (табела 33.1). На основу квалификација потенцијалних извођача усвојено је детаљније груписање радова у односу на модел 1 и модел 2 са 13 скупова технолошко зависних радова. Затим је сужена листа пријава за радове са варијантама за време изостављањем неповољних понуда са већим трошковима за исто време (табеле 32.2.1 и 32.2.2).

Одређено је 8 Парето-оптималних решења R-1 до R-7 за трајање и трошкове пројекта са варијантама параметара најповољних извођача критичних радова А.02.01.02 и А.03.06 (табеле 32.3 и 34.2, слике 42.1 и 42.2). Радови А.04.02, који обухватају радове А.04.02.01 (фаза I и II) са варијантама за параметре и А.04.02.02 (фаза II и II) са једнозначним параметрима, нису критични. Зато се бира извођач са најмањим трошковима за А.04.02.01 када трајање ових радова износи 200 дана. Настаје дуже трајање пројекта, 376 дана у односу на 374 дана у моделима 1 и 2 са 198 дана за А.04.02.01.

Табела 34.2. Елементи решења R-1 до R.7 за проблем 3.б из поглавља 5.4

| | Решење | R-1 | R-2 | R-3 | R-4.1 | R-4.2 | R-5 | R-6 | R-7 |
|--------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A.02.01.02 | Време | 140 | 135 | 135 | 130 | 135 | 130 | 130 | 125 |
| | Извођач | B01 | B01 | B01 | B03 | B01 | B03 | B03 | B01 |
| A.03.06 | Време | 200 | 200 | 195 | 185 | 190 | 190 | 185 | 185 |
| | Извођач | B36 | B36 | B10 | B10 | B35 | B35 | B10 | B10 |
| T_p (дана) | | 376 | 371 | 366 | 361 | 361 | 356 | 351 | 348 |
| C_p (н.ј.) | | 41.902 | 42.102 | 42.402 | 42.902 | 42.902 | 43.402 | 44.102 | 45.602 |

Дефинисани највиши приоритет извођачу са најмањим редним бројем у сваком од скупа свих извођача који конкуришу за исте радове одређују максималне трошкове у свим решењима за већину тих извођача (слика 42.2): C04 до C09 и C11 до C17.

- Такви трошкови настају зато што су разматрана само два рада са варијантама за времена са најповољнијим извођачима (табела 7.1): А.02.01.02 (B01 у 5 решења и B03 у 3 решења) и А.03.06 (B10 у 4 решења, B35 у 2 решења и B36 у 2 решења). Остали радови додељују се наведеним извођачима са максималним трошковима.

Различити приоритети извођачима могу се доделити не само када они конкуришу за исте радове, већ и када конкуришу за различите радове, односно разматрајући пројекат у целости. Карактеристична су алтернативна решења R-4.1 и R.4.2 са истим трајањем пројекта $T_p^{(4.1)} = T_p^{(4.2)} = 361$ дана и истим трошковима $C_p^{(4.1)} = C_p^{(4.2)} = 42.902$ н.ј. Уколико власник пројекта усваја такве вредности, бира решење сагласно приоритетима извођача B01 и B03.

- Ако В01 има апсолутни приоритет, потребно је бирати решење R-4.2, т.ј. изабрати В01 за радове $A_{02,01,02}$ са трајањем 130 дана и В35 за радове $A_{03,06}$ са трајањем 190 дана. Трошкови В01 износе $C_{01}^{(4.2)} = 18.992$ н.ј., а В03 има $C_{03}^{(4.2)} = 43$ н.ј.
- Са "мање снажним" приоритетом за В01 може се бирати решење R-4.1, односно В03 за $A_{02,01,02}$ са $t_{02,01,02} = 130$ дана и В10 за $A_{03,06}$ са $t_{03,06} = 195$ дана. Сада В01 има мање трошкове и В03 веће трошкове:

$$C_{01}^{(4.1)} = 16.140 < C_{01}^{(4.2)} = 18.992 \text{ н.ј.}, C_{03}^{(4.1)} = 3.395 > C_{03}^{(4.2)} = 43 \text{ н.ј.}$$

5.4.2.4. Анализа примене модела проблема са условима потенцијалних извођача

Проблеми са условима извођача за периоде ангажовања код радова на којима су само они конкурисали изложени су у делу 5.3.5 применом модела 3.б и сматрајући да не постоје ограничења капацитета потенцијалних извођача. Поређење са базним планом без услова извођача (1) вршено је за четири облика услова извођача о терминима.

Уводећи услове извођача у базни план (БП) са минималним трајањем пројекта T_p^{\min} , софтвер одређује неопходно померање радова са наредним последицама:

- а) допустив план са ненегативним укупним времен. резервама, $(Total Slack) \geq 0$,
- б) недопустив план са негативним вредностима ових резерви за радове разматраног извођача, зависне радове других извођача и пројекат, $(Total Slack) < 0$,
- в) трајање пројекта за које се под г) показује да је могуће или немогуће остварити,
- г) најкаснији почетак пројекта који је потребно усвојити (ако инвеститор и остали извођачи прихвате померање радова под а), односно да би се одредио (уколико је то могуће) допустив план под б), чиме се у једноставним случајевима остаје T_p^{\min} .

- 1) Оптимални план пројекта без услова извођача са T_p^{\min} .
- 2.1) Почетак ангажовања извођача захтеваног термина или не раније од датог термина који је после најкаснијег термина у БП. Потребан је каснији почетак пројекта.
- 2.2) Почетак ангажовања извођача захтеваног термина или не касније од датог термина који је пре најранијег термина у БП. Потребан је ранији почетак пројекта.
- 2.3) Комбинација услова 2.1) и 2.2): захтев за почетак после најкаснијег термина (продужава трајање пројекта) и захтев за почетак пре најранијег термина (захтева се ранији почетак пројекта). Потребан је каснији завршетак и ранији почетак пројекта.
- 2.4) Конфликтни услови зависних активности (недопустив план): почетак радова једних извођача пре најранијих завршетка њихових предхоних радова који обављају други извођачи који такође могу постављати услове.

Неприхватљивост померања почетка пројекта у случајевима 2.1) до 2.3) намеће потребу понављања тендера за одговарајуће радове, очекујући пријаве потенцијалних извођача без услова или са блажим условима који ће одредити мања померања пројекта прихватљива за инвеститора и остале извођаче.

- Уколико део извођача прихвата померање радова, тражити друге извођаче за радове којима раније бирани извођачи не прихватају померање.

6.

ЗАВРШНА РАЗМАТРАЊА

Сложени инвестициони пројекти у области грађевинарства, које изводи одређена компанија или установа локалне самоуправе (општина, градова и региона), односно државна установа, изискују утрошак великих материјалних, природних и људских ресурса. Њихова реализација је изузетно комплексан процес у зависности од многих и разноврсних фактора, те се таквим пројектима не може дозволити спонтано одвијање.

У пракси је потврђено да на реализацију пројеката са наведеним карактеристикама утиче низ фактора, првенствено:

1. локални, климатски, тржишни и други и услови окружења,
2. захтевани високи критеријуми квалитета (често задовољавајући квалитет у прописаним границама),
3. задати рокови,
4. високи трошкови,
5. расположиве финансије,
6. велики број учесника различитих струка,
7. супротстављени интереси учесника,
8. заштита животне средине и др.

Произилази да тема докторске дисертације „*Оптимални избор извођача радова на пројекту са становишта трошкова и времена*“ експлицитно обхвата више од половине наведених фактора (3 до 7) и посредно један фактор (2). У суштини, фактори 3 до 7 су најзначајнији и на њих се може утицати ефикасним планирањем, континуалним праћењем реализације, корекцијама планова у случајевима одступања реализације, предвиђање могућих поремећаја у будућности уз осмишљавање и правовремено предузимање неопходних мера са циљем да се неутралишу или ублаже негативне последице, и анализа управљања изведеним пројектом са извођењем закључака за успешније планирање и реализацију наредних пројеката.

Са становишта трошкова разматрани су аспекти буџета и ликвидности на пројекту који нису постављени као предмет дисертације. Указано је на радове других аутора и радове са резултатима истраживања спроведених при изради дисертације који обухватају дефинисање модела за основне могуће ситуације формирања буџета у току реализације пројекта и обезбеђивање ликвидности у терминима исплате трошкова сходно утврђеној месечној реализацији радова:

- Дати термини прилива новца (одређивање потребних износа новца без промене трајања пројекта, односно уз минимално прекорачење рока завршетка пројекта),
- Дати износи прилива новца (одређивање потребних термина прилива без промене трајања пројекта, односно уз минимално прекорачење рока завршетка пројекта),
- Дати термини и износи прилива новца (одређивање плана извођења активности са дозволом евентуалне промене трајања пројекта и минимизација трајања пројекта).

Релативно велики обими појединих поглавља настали су услед неопходности коришћења одговарајућих слика или графикана (114), табела (64), математичких записа (237) и цитата (168). Литература (228) укључује ширу библиографију радова (209),

одабрана законска акта и листу одабраних симпозијума – конференција, часописа и удружења. При цитирању аутора, посебно из области оптимизације, у више случајева је одступљено од позива на (нај)новије радове. Цитирани су домаћи аутори за које је познато да су први разматрали те области код нас и исте увели у високошколско образовање, махом преношењем радова страних аутора, сматрајући да је то примереније од цитирања новијих страних и домаћих радова који понављају познате резултате.

Табела А. Преглед резултата истраживања за поглавља 2 до 5

| Погла- вља | Проблеми / Мет-тех. | | Алгоритми | | Мате- мат. записи | Сли- ке | Табеле | Цитати + понављања | Страна |
|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------|--------|-----------------|----------------|-------------------------|------------|--------|-----------------------|--------|
| | Разма- трани | Решени | Разма- трани | Приме- њени | | | | | |
| 2 | 28 | - | 39 | - | 21 | 49 | 21 | 42+43 | 51 |
| 3 | 49 | - | 31 | - | 115 | 4 | 14 | 47+30 | 46 |
| 4 | 31(31) ↓ | 19 | 32(32) ↓ | 13 | 101 | 17 | 19 | 3+1 | 56 |
| 5 | 20(19) | | 20(13) | | - | 44 | 10 | 1+1 | 73 |
| Укупно | 128(31) | 19 | 112(32) | 13 | 237 | 114 | 64 | 93+75 | 226 |
| Бр. алгор. = бр. пробл.; погл. 5 решава пробл. из погл. 4; у заградама бр. нових | | | | | | | | | |

Управљање пројектима и оптимизација, као комплексне области наметнуле су неопходност да се њиховим истраживањем обухвате:

- велики број познатих проблема у поглављима 2 и 3, и нових проблема у поглављу 4 као резултата истраживања на дисертацији од којих је 20 решено у поглављу 5 (у заградама су издвојени бројеви нових проблема)
- одговарајући алгоритми решавања тих проблема (у заградама су нови алгоритми).

6.1. ЗАКЉУЧЦИ О ИСТРАЖИВАЊИМА И РЕЗУЛТАТИМА ДИСЕРТАЦИЈЕ

Основни научни доприноси докторске дисертације постављени као *циљеви и предмет истраживања у поглављу 1* су остварени у поглављу 4 са становишта теорије и у потпуности потврђени на конкретном пројекту у поглављу 5. Остала поглавља садрже теоријске основе за поглавље 4.

❖ *Поглавље 2. Управљање пројектима у теорији и пракси обухвата познате области са одговарајућим тумачењима.*

- Указано је на 28 познатих проблема, односно метода и техника. Под проблемима се подразумевају: дефинисање WBS, конструкција два облика МД, анализа времена по СРМ и PERT, прорачун вероватноћа одигравања догађаја у планираним роковима за PERT, одређивање времена и трошкова активности, линеарна апроксимација нелинеарних трошкова активности, два проблема методе PERT/COST, нивелисање ресурса типа радне снаге, планирање материјала, формирање буџета у току реализације пројектата, избор једног из скупа потенцијалних пројектата, избор једног извођача из скупа потенцијалних извођача

за цели пројекат, избор више извођача из скупа потенцијалних извођача за одговарајуће делове пројекта итд.

- Алгоритми (39) се односе на појединачне проблеме. При оптимизацији трајања пројекта и коришћења ресурса могу се разматрати 6 подпроблема или захтева и одговарајући алгоритми. За разматрање утицаја динамике и висине прилива новца на трајање пројекта постоје 7 облика полазних података и алгоритам.

❖ *Поглавље 3. Једнокритеријумска и вишекритеријумска оптимизација* садржи поставке, решавање и анализу модела потребних у наредним поглављима:

- проблем линеарног програмирања (*ЛП*) са једном функцијом критеријума
- вишекритеријумски проблеми (*ВКП*) са даљом поделом:
 - вишециљно одлучивање (*ВЦО*) или вишекритеријумска оптимизација (*ВКО*), разматран је модел вишекритеријумског линеарног програмирања (*ВКЛП*)
 - вишеатрибутивно одлучивање (*ВАО*) или вишекритеријумска анализа (*ВКА*), разматране су обе области.

Приказана су 4 проблема *ЛП* са једним критеријумом (минимизација и максимизација критеријума, релане променљиве, целобројне променљиве, бинарне променљиве и комбинације типова променљивих), 18 проблема *ВКЛП*, проблем циљног *ЛП* и 24 проблема *ВАО*. 8 алгоритама су за област *ВКЛП* и 23 за *ВАО*.

Указано је на решавање и анализу модела *ЛП* и изложене су одабране методе решавања модела и анализе модела *ВКО*:

- две варијанте лексикографске методе, тежинска сума критеријума, оптимизацији свих критеријума метода ε -ограничења за одређивање Парето-оптималних решења модела *ВКЛП*,
- непосредно рангирање алтернатива модела *ВАО* без разматрања приоритета критеријума, четири једноставне методе избора најповољније алтернативе без приоритета критеријума (метода доминације, *MAXIMIN*, *MAXIMAX* и лексикографска метода), метода са адитивним тежинама и метода аналитичких хијерархијских процеса – *АХП* са више нивоа критеријума и одговарајућим приоритетима (метода је детаљно изложена услед недовољног тумачења аспеката дефинисања вредности критеријума на више нивоа у доступној литератури, а цитирање великог броја аутора са указивањем на предности или недостатке методе вршено је са циљем указивања на значај методе која има велику примену у свету и усвојена је за решавање конкретних проблема у поглављу 5)
- анализа осетљивости решења и параметарску анализа за *ВКЛП* код два модела: (1) методе ε -ограничења (коэффицијената уз променљиве разматраног критеријума и слободних чланова: десних страна за структурна ограничења, граница критеријума у ограничењима и комбиновано), и (б) наизменичне максимизације сваког критеријума (коэффицијената уз променљиве разматраног критеријума и слободних структурних ограничења).

❖ *Поглавље 4. Класификација проблема оптималног избора више извођача пројекта, општи математички модели ВК-МЦЛП и алгоритми решавања* садржи основне научне доприносе дисертације.

Поглавље обухвата класификацију проблема, дефинисање проблема, избор циљева пројекта, постављање приоритета и циљева фаворизованих извођача, формирање

општих математичких модела типа мешовито-целобројног ЛП (ВК МЦЛП) са два типа бинарних променљивих, алгоритме усаглашавања циљева пројекта (минимизација трошкова и трајања пројекта, вишег нивоа значајности са једнаким или различитим приоритетима) и циљева таквих извођача (максимизација вредности – трошкова додељених радова, нижих нивоа значајности у односу на циљеве пројекта и једнаких или различитих међусобних приоритета), анализу добијених Парето-оптималних решења и избор најприхватљивијег решења.

- Разматра се општи пројекат са m фаза или врста радова $A_i, i \in I = \{1, \dots, m\}$.
- На пројекту је могуће ангажовати укупно n потенцијалних извођача $B_j, j \in J = \{1, \dots, n\}$ сагласно њиховим квалификацијама. Основни услов је да се одређена врста радова додељује само једном од потенцијалних извођача.
- Из наведеног скупа са n потенцијалних извођача издвојено је првих n^+ извођача B_j који се фаворизују у односу на преостале извођаче при разматрању вредности додељених радова, $j \in J^+ = \{1, \dots, n^+\}$.
- Постоје потенцијални извођачи пројекта B_j са ограниченим капацитетима, $j \in J, J \subseteq J$, независно да ли су из групе фаворизованих $j \in J^+$ или нефаворизованих $j \notin J^+$.

Наредна табела, пренета из текста поглавља приказује означавање задатака, односно модела за основне класе проблема 1. до 3. са типовима или варијантама проблема: а) познати су извођачи свих радова, и б) постоје радови са више потенцијалних извођача.

Табела Б. Класификација проблема оптималног избора више извођача на пројекту и елементи избора (поглавље 4)

| Параметри радова A_i (време и трошкови) | Особине за радове A_i и потенцијалне B_j | Капацитети за B_j на пројекту | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| | | 1. Довољни | 2. Ограничени |
| 1. Јединствени параметри (t_i, c_i) за све радове A_i | а) Сваки рад A_i са познатим B_j | Р.1.а.1 | Р.1.а.2 |
| | | Не врши се избор | |
| | б) Бар један рад A_i са бар два B_j | Р.1.б.1 | Р.1.б.2 |
| | | Избор B_j , ако $n_{ij} > 1$ | |
| 2. Јединствене варијанте D_{iv} параметара (t_{iv}, c_{iv}) за све потенцијалне B_j истог рада A_i | а) Сваки рад A_i са познатим B_j и бар један A_i са $v > 1$ | Р.2.а.1 | Р.2.а.2 |
| | | Избор $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)}), D_{iv}$, ако $d_i > 1$ | |
| | б) Бар један рад A_i са бар два B_j | Р.2.б.1 | Р.2.б.2 |
| | | Избор $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)}), B_j, D_{iv}$, ако $n_{ij} > 1$ | |
| 3. Различите варијанте D_{ijv} параметара (t_{ijv}, c_{ijv}) за неке потенцијалне B_j истог рада A_i | а) Сваки рад A_i са познатим B_j и бар један A_i са $v > 1$ | Р.3.а.1 | Р.3.а.2 |
| | | Избор $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)}), D_{iv}$, ако $d_{ij} > 1$ | |
| | б) Бар један A_i са бар два B_j различит. D_{ijv} | Р.3.б.1 | Р.3.б.2 |
| | | Избор $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)}), B_j, D_{ijv}$, ако $n_{ij} > 1$ | |
| <p><u>Напомена:</u> Нису укључени тривијални случајеви: Сваки A_i има познатог B_j и познату D_{iv} под 2), односно познатог B_j и познату D_{ijv} под 3)</p> | | <p>Нумерација проблема и математичких модела са елементима за избор: n_{ij} – број B_j за исти A_i d_i, d_{ij} – бројеви D_{iv}, D_{ijv} $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$ – трајање, трошк. прој.</p> | |

Потенцијални извођачи пројекта у свакој варијанти могу имати: 1. довољне капацитете или 2. ограничене капацитете. Извршена је допуна са елементима избора за моделе 1.б.1 и даље (модели 1.б.1 и 1.б.2 имају познате извођаче сваке фазе):

- (i) потенцијални извођачи за случајеве б)
- (ii) параметри пројекта (трајање и трошкови) и одговарајући параметри радова (времена и трошкови), односно потенцијални извођачи: за класу 2. (варијанте параметара радова за познате извођаче) и за класу 3 (извођачи и варијанте параметара радова).

Полазна 12 проблема настала класификацијом се проширује на 31 проблем и 32 алгоритма, у зависности од циљева пројекта, циљева потенцијалних извођача, приоритета (циљева пројекта и извођача) и процеса решавања.

- Модел 1.б.1 са јединственим параметрима радова и довољним капацитетима извођача има вишеструко решење са минималним вредностима (T_p^{\min}, C_p^{\min}) за трајање и трошкове пројекта, а за рад са више потенцијалних извођача може се бирати било који од извођача. Потребно је вршити максимизацију трошкова фаворизованих извођача $(C_j, j \in J^+)$ сагласно њиховим приоритетима применом лексикографска методе (ако су извођачи различитих приоритета) или методе ε -ограничења (ако има извођача једнаких и различитих приоритета).
- Остали модели са варијантама параметара радова и довољним капацитетима извођача имају Парето-оптимална решења $h^{(k)}$ (бинарне променљиве прве врсте за избор извођача) са вредностима критеријума $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)}, C_j^{(k)}, j \in J^+)$, $k = 1, 2, \dots$
 - Методом *PERT/COST* одређују се решења $h^{(k)}$ разматрајући све вредности или одабрани скуп $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$ са временима и трошковима пројекта.
 - Са усвојеним вредностима $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)})$ врши се максимизација трошкова $C_j^{(k)}$ фаворизованих потенцијалних извођача, $j \in J^+$.
 - Почетна анализа модела (етапа 1) узастопном максимизацијом C_j сваког извођача одређује екстремно Парето-оптимално или маргинално решење $h_j^{(k)*}$ са идеалним (максималним) трошковима $C_j^{(k)*}$, $j \in J^+$, и последицама на трошкове осталих извођача.
 - ✓ Ако постоји савршено решење $h_j^{(k)**}$ са идеалним трошковима свих фаворизованих извођача, не постоји конфликт циљева извођача (такво решење се усваја и процес решавања се завршава).
 - ✓ Ако не постоји савршено решење, може се одабрати најповољније $x_j^{(k)*}$ са прихватљивим трошковима извођача као коначно решење (етапа 3) и процес решавања се завршава. У супротном се наставља процес решавања.
 - Налажење нових Парето-оптималних решења (етапа 2) применом методе ε -ограничења. Настају варијанте модела у зависности од приоритета извођача (алгоритми у делу 4.4).
 - Избор коначног решења (етапа 3) врши се разматрајући вредности $(T_p^{(k)}, C_p^{(k)}, C_j^{(k)}, j \in J^+)$.
- Модели б) са ограниченим капацитетима извођача пројекта дефинишу се бинарним променљивама друге врсте $h(t)$. Решавање модела б) врши се применом софтвера за управљање пројектима са решењем модела а) без ограничења

капацитета извођача. Софтвером се врши нивелисање ресурса, односно свођење потребних капацитета извођача у њихове расположиве границе.

- Ако се задржава разматрано минимално трајање пројекта $T_p^{\text{мин}}$ у моделу 1.б.2, односно трајање $T_n^{(к)}$ у осталим моделима, усваја се повољније решење са становишта трошкова фаворизованих извођача.
- Ако се продужава разматрано време пројекта, усваја се решење са мањим прекорачењем времена пројекта и већим трошковима фаворизованих извођача.

❖ *Поглавље 5. Примена одбабраних вишекритеријумских модела оптималног избора извођача пројекта станоградње* садржи доприносе са становишта имплементације резултата из поглавља 4. Разматрано је 20 од 31 проблема (нових 19 од 31) и решавано је 19 проблема применом 20 од 32 алгорита (нових 13 од 32).

- *Проблем оптималног избора једног извођача пројекта* из поглавља 2 решаван је применом модела *ВАО*, односно софтвером *Expert Choice* за методу *АХП*.
 - Разматране су две групе потенцијалних извођача (са учећем и без учешћа на ранијим пројектима компаније) и три групе циљева проблема избора: циљеви пројекта (трајање, укупни трошкови и услови исплате трошкова), карактеристике потенцијалних извођача (техничка и кадровска оптемљеност, извођење целих пројеката и делова пројеката за разматрану компанију, односно за друге компаније, и извођење целих пројеката за друге компаније у области станоградње и у другим областима) и очекивани квалитет радова.
 - Дефинисано је хијерархијско стабло критеријума са четири нивоа, одређено је решење – вишекритеријумска ранг листа потенцијалних извођача, извршена је анализа осетљивости решења и одређени су интервали приоритета за критеријуме првог нивоа који омогућавају стабилност решења, приказана је параметарска анализа модела са свим допустивим вредностима приоритета критеријума првог нивоа и указано је на најповољнијег извођача.
- *Оптимални избор више извођача на пројекту* илустрован је на свим примерима за карактеристике вредности трајања и трошкова радова из поглавља 4.
 - Указано је да није неопходно тражити сва решења и одређена су карактеристична Парето-оптимална решења применом одговарајућих алгорита из поглавља 4 коришћењем софтвера *Linear and Integer Programming (LP-ILP)* из пакета *WinQSB* и стандардног софтвера *MS Project* за управљасе пројектима.
 - Уважавана су правила да се одређена група технолошки зависних радова доделе истом извођачу.
 - Дата су образложења за избор најповољнијих решења, посматрајући трајање и трошкове пројекта као критеријуме са вишим приоритетима у проблему и трошкове потенцијалних извођача (сагласно њиховим приоритетима) као критеријуме нижих приоритета у проблему.

Засебно су разматрана четири проблема са условима извођача који су једини конкурисали за извођење одговарајућих радова:

- (i) почетак ангажовања после најкаснијег термина из оптималног плана (потребан је каснији почетак пројекта, ако је то прихватљиво, или се продужава трајање пројекта),

- (ii) почетак ангажовања пре најранијег термина из оптималног плана (потребан је ранији почетак пројекта, ако је то прихватљиво, или не постоји решење),
- (iii) почетак ангажовања једног извођача пре најранијег термина и другог извођача после најкаснијег термина из оптималног плана (настаје дуже трајање пројекта и потребан је ранији почетак пројекта, ако је то прихватљиво, или не постоји решење)
- (iv) почетак ангажовања једних извођача пре најранијих завршетка предходних радова других извођача који такође могу постављати услове (не постоји решење).

На крају поглавља извршена је анализа изложених модела избора једног извођача пројекта у целости и више извођача за одговарајуће делове са условима једна врста радова – један извођач.

- Изведени су закључци да се модели могу успешно применити у пракси.
- Дате су одговарајуће препоруке.

6.2. ПРЕДЛОГ БУДУЋИХ ИСТРАЖИВАЊА

Будућа истраживања проблема оптималног избора једног или више извођача пројекта требало би да буду усмерена на следеће аспекте:

- Тачно порачунавање, односно процењивање трошкова сагласно временима одговарајућих радова.
- Адекватна апроксимација трошкова за допустива времена радова када су тачно прорачунати трошкови за нормална и усиљена времена радова.
- Анализа са проценама очекиваних промена трошкова ресурса у периоду обављања пројекта.
- Услови исплате трошкова појединим потенцијалним извођачима (авансно, сагласно вредностима радова у посматраном месецу, одложене исплате и сл.).
- Динамика трошкова по месецима, расположиви буџет и ликвидност на пројекту са решавањем случајева неликвидности (померање радова, прихватање померање исплата од стране извођача, краткорочни банкарски кредити за неутралисање неликвидности и сл.). Ови проблеми могу обухватити разматрање максималних месечних трошкова.
- Примена вишекритеријумске симплекс методе са ограничавањем одговарајућих критеријума за решавање проблема избора више извођача пројекта.
- Примена циљног програмирања за решавање проблема избора више извођача пројекта.

7.

LITERATURA

- [1] Ahuja, H. N., S. P. Dozzi, and S. M. AbouRisk. 1994. *Project Management Techniques in Planning and Controlling Construction Projects*. 2nd Ed., Wiley, New York.
- [2] Abassi, G.Y. and Mukattash, A.M. (2001) 'Crashing PERT networks using mathematical programming', *Int. J. Project Management*, Vol. 19, No. 3, pp.181–188.
- [3] Alessio, I., Ashraf, L. (2009). [Preprint version] Analytic Hierachy Process and Expert Choice: Benefits and Limitations, *ORInsight*, 22(4), p. 201-220.
- [4] Allonso, J. and T. Lamata (2006). "Consistency in the Analitic Hierarchy Process: a New Approach", *International Journal of Uncertainty, Fuyyiness and Kovledge-Based Systems* 14(4): 445-459
- [5] Ameen, D.A., 1987. A computer assisted PERT simulation. *J. Syst. Manage.*, 38: 6-9. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=34619.34620>.
- [6] Azaron, A., C. Perkgoz and M. Sakawa, 2005. A genetic algorithm approach for the time-cost trade-off in PERT networks. *Applied Mathematics and Computation*, 168(2): 1317-1339.
- [7] Barie D. S., Paulson B. C., *Professional Construction Management*, Third ed., McGraw Hill, 1992.
- [8] Belton, V. and A. Gear (1983). "On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytical Hiearachies", *OMEGA* 11(3): 208-230.
- [9] Berman, S. 1964. Resource allocation in a PERT network under continuous time-cost functions, *Management Science*, 10(4) 734-745.
- [10] Božilović, S., *Organizacija građenja u građevinarstvu i protiverozionim radovima*, Nauka, Beograd, 1995.
- [11] Božilović, S. *Savremena organizacija graditeljstva*, Šumarski fakultet, Beograd, 1998.
- [12] **Božilović Z.**, Nikolić N., „Liquidity planning of construction project with given formation dynamics of budget and constraints for labor and mechanization“, *Annals of the Oradea University*, Volume XXIV (XIV), 2015/3, ISSN 1583-0691, pp. 33-38, <http://imtuoradea.ro/auo.fimte/doi.php?doi=10.15660/AUOFMTE.2015-3.3189>
- [13] **Božilović Z.**, Nikolić N., „Analytical Approach to the Selection of Performers of the Project: Classification of Problems and an Illustration of an Example“, *Journal: IMK-14 – Research and Development in Heavy Machinery* 21(2015), pp.107-117, UDC 621 ISSN 0354-6829; <http://www.imk14-rad.com/index.php/en/journal/item/analytical-approach-to-the-selection-of-performer-of-the-project-classification-of-problems-and-an-illustration-of-an-example>
- [14] **Božilović Z.**, Nikolić N., „Planning of materials and liquadity on project with available resources of type work“, *Annals of the University of Oradea, Fascicle of Management and Technological Engineering*, ISSUE #2, AUGUST 2016, pp: 33-38 <http://www.imtuoradea.ro/auo.fimte/article.php?v1=2016-2&v2=0>
- [15] **Božilović Z.**, Nikolić N., "Dva pristupa izboru učesnika na projektu razmatrajući vremena i troškove", *YuInfo 2014, XX konferencija_iz oblasti informacionih i komunikacionih tehnologija*, Kopaonik 2014, 12-13.05.2014., str. 200-205, http://yuinfo.org/zbornik_2014_WEBverzija.pdf, Oblast primenjena informatika.
- [16] **Božilović Z.**, Nikolić N., "Neki kriterijumi i ograničenja izbora izvođača na projektu sa jednoznačnim podacima za aktivnosti", *Zbornik radova, YUPMA 2014, XVIII Internacionalni simpozijum iz projektnog menadžmenta*, Zlatibor, 13.-15. maj 2014., str. 318-323.

- [17] **Božilović Z.**, Nikolić N., "Some criteria and restrictions on the selection of contractors on a project with options of data to the duration and costs of activities", *Proceedings, 5th International Conference - Life Cycle Engineering and Management*, June 27-28, 2014, Belgrade, Serbia, ISBN 978-86-86355-17-1, COBISS.SR-ID 207635212, p. 304-309.
- [18] **Božilović Z.**, Nikolić N., "Optimalni izbor više izvođača građevinskog projekta razmatranjem prioriteta i kapaciteta potencijalnih izvođača", *Zbornik radova, SYM-OP-IS 2014, XLI Simpozijum o operacionim istraživanjima*, Divčibare, 16–10.09.2014. str. 927-932, ISBN 978-86-7680-286-9, COBISS.SR-ID 201617932, http://www.symopis2013.fon.bg.ac.rs/wp-content/uploads/Zbornik_radova_SYMOPIS2013.pdf
- [19] **Božilović Z.**, "Klasifikacija problema izbora izvođača projekta kada neke aktivnosti imaju više potencijalnih izvođača i / ili više varijanti za vreme i troškove", *Zbornik radova, ICDQM 2015, 17th International Conference – Dependability and Quality Management*, Prijedor, 25-26 Jun 2015., str. 491-494.
- [20] **Božilović Z.**, Nikolić N., „Ilustracija planiranja likvidnosti projekta sa datim terminima priliva novca za formiranje budžeta tokom izvođenja projekta“, *YuInfo 2016, XXII konferencija iz oblasti informacionih i komunikacionih tehnologija*, Kopaonik 2016, 28.02.-02.03.2016., str. 248-251.
<http://www.yuinfo.org/zbornici/2016/YUINFO2016.pdf>
- [21] **Božilović Z.**, Nikolić N., „[Planiranje likvidnosti projekta sa datim iznosima priliva novca za formiranje budžeta u toku izvođenja projekta](#)“, *Zbornik radova, YUPMA 2016, XX Internacionalni simpozijum iz projektnog menadžmenta*, Zlatibor, 13.-15. maj 2016., ISBN 978-86-86385-13-0 COBISS.SR-ID 223362060, 81-86.
- [22] **Božilović Z.**, Dutina V., Nikolić N., „The project duration and costs depending on the public tender offers of potential contractors to carrying out certain activities“, *Proceedings, EMoNT 2016, 6th International Conference: "Economics and Management-Based on New Technologies"*, 16-19 June 2016, Vrnjačka Banja, Serbia, pp...
- [23] **Božilović Z.**, Nikolić N., „Selection of the contractors on the project with some possible conditions of potential contractors“, *Proceedings, ICDQM 2016, 7th International Conference – Life Cycle Engineering and Management*, 25-26 June 2016., Prijedor, Serbia, pp. 417-426.
- [24] **Božilović Z.**, Nikolić N., „Analysis of the project duration and costs as functions of the periods to performe some activities“, *Proceedings, RaDMI 2016, 16th International Conference "Research and development in mechanical industry"*, 15-18 September 2016, Belgrade, Serbia, pp. 66-73.
- [25] British Standards Institution, BS 6080, *Guide to Project Management*, BSI, London, 1996.
- [26] Brugha, C. (2004). "Structure of multi-criteria decision-making." *Journal of the Operational Research Society* 55(1): 1156-1168.
- [27] Burke, R., *Project Management – Planning and control*, John Wiley & Sons, Chichester, 1992.
- [28] Cekić, Z., Strategijsko upravljanje građevinskim preduzećima, *Doktorska disertacija*, Građevinski fakultet, Beograd, 2003.
- [29] Clark, E. C. (1962) „Letter to the Editor – The PERT Model for the Distribution of an Activity Time“. *Operations Research* 10(3):405-406.
<http://dx.doi.org/10.1287/opre.10.3.405>
- [30] Chapman, C., Ward, S., *Project Risk Management*, John Wiley & Sons, 1997.

- [31] Charvat, J., *Project Management Methodologies - Selecting, Implementing, and Supporting Methodologies and Processes for Projects*, John Wiley & Soons, INC. 2003.
- [32] Cornuejols G., Trick M., *Quantitative Methods for the Management Sciences*, 45-760 Course Notes, Tepper School of Business, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1998. <http://mat.gsia.cmu.edu/classes/QUANT/notes/notes.html>
- [33] Čolić, P, Božilović, S., *Armiranobetonske konstrukcije*, Fakultet za graditeljski menadžment, Beograd, 2007.
- [34] Čubra, N., *Planiranje i programiranje u građevinarstvu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.
- [35] Čupić, M., i Rao Tummala, V. M., *Savremeno odlučivanje - metode i primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.
- [36] Čupić, M. i dr., *Odlučivanje: Formalni pristup*, Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2001.
- [37] Čupić, M. i dr., *Specijalna poglavlja iz teorije odlučivanja: Kvantitativna analiza*, Univerzitet u Novom Sadu, Tehnički fakultet, Novi Sad, 2004.
- [38] Ćirović, G., *Reinženjering poslovnih procesa u građevinarstvu*, Viša građevinska škola u Beogradu, Beograd, 1999.
- [39] Ćirović, G., Luković, O., „Upravljanje izgradnje stambenim i poslovnim objektima“, Časopis *Izgradnja* 50, 1996.
- [40] Ćirović, G., Praščević, Ž., *Problemi planiranja, organizacije i tehnologije gradjenja*, Viša građevinsko-geodetska škola, Beograd, 2007.
- [41] Dayer, J. (1990). “Remarks on the Analytic Hierachy Proces”, *Management Science* 36(3): 249-258.
- [42] Dayer, J. (1990). “A clarification of “Remarks on the Analytic Hierachy Proces”.”, *Management Science* 36(3): 274-275.
- [43] Demeulemeester, M., 1985. Optimization of time and cost. *International Journal of Project Management*, 3(1): 50-54.
- [44] Drobñjaković, S., *CD: Upravljanje sa više projekata – Multi Project Management*, Vojnoizdavački zavod, Beograd, 2001.
- [45] Дутина, В., *Менаџмент грађевинских предузећа*, Универзитет у приштини, Факултет техничких наука, Косовска Митровица, 2006.
- [46] Дутина, В.: Модели руковођења на градилишту, *Часопис "Техника"* бр. 5 (2006), стр. 1-4.
- [47] Дутина, В.: "Избор оптималног модела организационе структуре грађевинске фирме", *Часопис "Изградња"* бр. 9 – 10 (2006), стр. 231-234.
- [48] Дутина, В.: "Концепт руковођења на градилишту у зависности од модела организационе структуре", *Зборник радова Грађевинског факултета Суботица 15, Међународна конференција 2006., "Савремени проблеми у грађевинарству"*, стр. 527-532, Суботица, 2 – 3. јун 2006.
- [49] Дутина, В.: "Рангирање модела организационе структуре грађевинске фирме хеуристичким критеријумима", *Интернационални научно-стручни скуп "Грађевинарство – наука и пракса"*, Жабљак, стр. 1205 – 1210, 2008.
- [50] Дутина, В.: "Менаџмент и модели организационе структуре грађевинске фирме", *"Грађевински календар" 2009. СГИС*, Вол. 41, Београд, стр. 459 – 515, 2009.

- [51] Дутина, В.: "Грађевинска регулатива и заштита животне средине", *Заштита животне средине у индустријским подручјима, Други међународни симпозијум*, уводно предавање, Косовска Митровица, стр. 6-12, 2009.
- [52] Дутина, В., Марковић, Љ., Ковачевић, М.: "Application of possibilistic procedure when planning the time for completion of construction projects", *Building materials and structures*, No. 4(2011), pp. 25-40.
- [53] Дутина, В., Марковић, Љ., Ковачевић, М.: "Planning the time of investment project realization using the fuzzy number comparison method", *Mining engineering*, iss. 4, pp. 147-168, 2011.
- [54] Дутина, В., Марковић, Љ., Кнежевић, М., Ковачевић, М.: "Selection of the highway route variant by multicriterion optimization", *Mining engineering*, iss. 4, pp. 169-190, 2011.
- [55] Дутина, В., *Мерење и вредновање радова у грађевинарству*, Универзитет у Приштини, Факултет техничких наука, Косовска Митровица, 2012
- [56] Đuranović, P., *Upravljanje građevinskim projektima*, Monografija, Građevinski fakultet, Podgorica, 2004.
- [57] Đuričić, M. i drugi, „Menadžment rizikom projekta“, *Međunarodna naučna konferencija Menadžment 2010*, Kruševac, 17-18. mart 2010, str. 397-405.
- [58] EDDIE W. L. CHENG and HENG LI, Contractor selection using the analytic network process, *Construction Management and Economics* (December 2004) 22, 1021–1032, <http://www.tamu.edu/faculty/choudhury/articles/14.pdf>
- [59] Eisner, H. 2002. *Essentials of Project and Systems Engineering Management*. 2nd Ed., Wiley, New York.
- [60] Elmaghraby, S.E., 1977. *Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models*. John Wiley, New York.
- [61] Feng, C.W., L. Liu and S.A. Burns, 2000. Stochastic construction time-cost tradeoff analysis. *J. Comput. Civil Eng.*, 14: 117126.
- [62] Forman, E. H., "The Analytic Hierarchy Process as a Decision Support System," *Proceedings of the IEEE Computer Society* (Fall, 1983).
- [63] Forman, E. (1990). "Random Indices for Incomplete Pairwise Comparison Matrices", *European Journal of Operational Research* 48(1): 153-155
- [64] Forman, E. H., Saaty, T. L., Selly, M. A., Waldron, R., *Expert Choice, Decision Support Software*, McLean, VA, 1983.
- [65] Forman, E., Selly, M. A., *Decision By Objectives*, Expert Choice Inc., 1998.
- [66] Ghazanfari, M., K. Shahanaghi and A.Yousefli, 2007. An Application of Possibility Goal Programming to the Time-Cost Trade off Problem. *First Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems Ferdowsi University of mashhad*.
- [67] Geoffrion, A. M., Proper efficiency and the theory of vector maximization, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22: 618-630, 1968.
- [68] Geoffrion, A. M., Nauss, R., Parametric and Postoptimality Analysis in Integer Linear Programming, *Management Science*, Vol. 23. No. 5 (Jan., 1977), 453-466.
- [69] Gluškov, V. M., (redaktor), *Osnovne postavke za razradu i primenu sistema mrežnog planiranja i upravljanja* (prevod sa ruskog), INTD i SPK, Beograd, 1966.
- [70] Haga, W. A., and K. A. Marold. 2004. A simulation approach to the PERT CPM time-cost trade-off problem. *Project Management Journal*, 35(2): 31-37.

- [71] Haga, W. A., and K. A. Marold. 2005. Monitoring and control of PERT networks. *The Business Review*, 3(2): 240-245.
- [72] Haimes, Y. Y., Lasdon, L. S., and Wismer, D. A., On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1: 296-297, 1971.
- [73] Harker, P. and L. Vargas (1987). "The Theory of Ratio Scale Estimation: Saat's Analitic Hierarchy Process", *Management Science* 33(11): 1383-1403.
- [74] Harker, P. and L. Vargas (1990). "Reply to "Remarks on the Analitic Hierarchy Process", *Management Science* 36(3): 269-273.
- [75] Helsinki University of Technology System Analysis Laboratory, *Value Tree Analysis* 2002., http://www.mcda.hut.fi/value_tree/theory/
- [76] Herroelen, W. 2005. Project scheduling - Theory and practice. *Production and Operations Management*, 14(4) 413-432.
- [77] Holder, R. (1990). "Some Domment on the Analitic Hierarchy Process", *Journal of the Operational Research Society* 41(11): 1073-1076.
- [78] Holder, R. (1991). "Response to Holder's Comments on the Analitic Hierarchy Process: Response to the Response", *Journal of the Operational Research Society* 42(10): 914-918.
- [79] Hovanov, N., J. Kolari, et al. (2008). "Deriving weights from general pairwise comparisons matrices." *Mathematical Social Sciences* 55(2): 205-220.
- [80] HWANG, C. L. and A. S. MASUD, *Multiple Objective Decision Making - Methods and Applications, Lecture Notes in Economicks and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, 1979.
- [81] HWANG, C. L. and K. YOON, *Multiple Attribute Decision Making - Methods and Applications, Lecture Notes in Economicks and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, 1981.
- [82] Ishizaka, A. (2004). The Advantages of Clusters in AHP. *15th Mini-Euro Conference MUDSM*. Coimbra.
- [83] Ishizaka, A. (2004). *Developpement d'un Systeme Tutorial Intelligent pour Deriver des Priorites dans l'AHP*. Berlin, <http://www.dissertation.de>.
- [84] Ilić M., Nikolić I., "Problemi izbora jednog ili više izvođača projekta sa stanovišta vremena i troškova", *Glasnik rudarstva i metalurgije*, Vol. 31, No 2, Bor, 1995., str. 143-154.
- [85] Ivković, B., Popović, Ž., *Upravljanje projektima u građevinarstvu*, Građevinska knjiga, Beograd, 2005.
- [86] Johnson, G.A. and C.D. Schou, 1990. Expediting projects in PERT with stochastic time estimates. *Project Manage. J.*, 21: 29-32.
- [87] Jovanović, P., *Upravljanje projektom*, Grafoslog, Beograd, 2006.
- [88] Jovanović, P., „Applcation of sensitivity in investment project avaluation under uncetaitly and risk“, *International Journal of Project Management*, Vol. 17, No 4, pp. 217-222.
- [89] Jovanović, P., i dr., *Metode i tehnike Projektnog Menadžmenta*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2007.

- [90] Jovanović, P. i dr., *Projektni menadžer*, Viša škola za projektni menadžment, Beograd, 2007.
- [91] Jovanović, P. i dr., *Kako postati dobar projektni menadžer*, Viša škola za projektni menadžment, Beograd, 2010.
- [92] Kathryn, A.M., 2004. A simulation approach to the PERT/CPM: time-cost trade-off problem. *Project Manage. J.*, 35: 31-38.
- [93] Ke, H., Weimin Ma and Yaodong Ni, 2009. Optimization models and a GA-based algorithm for stochastic time-cost trade-off problem. *Applied Mathematics and Computation*, 215(1): 308-313.
- [94] Kelley, J., Walker, M., 1959. „Critical-Path Planning and Scheduling“, *Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference*.
- [95] Kelley, J., 1961. Critical-path planning and scheduling: Mathematical basis. *Operations Research*, 9(3) 296-320.
- [96] Klerides, E. and E. Hadjiconstantinou, 2010. “A decomposition-based stochastic programming approach for the project scheduling problem under time/cost trade-off settings and uncertain durations. *Computers & Operations Research*, 37(12): 2131-2140.
- [97] Krčevinac, S. i dr., *Algoritmi i programi iz operacionih istraživanja*, Naučna knjiga, Beograd, 1989., Nikolić, I., Poglavlje 6.3. *Analiza troškova projekta – Primena LP*.
- [98] Крчевинац, С., и др., *Операциона истраживања*, Факултет организационих наука, Београд, 2002.
- [99] Kurij, K., Beljaković, D., *Izrada planova u graditeljstvu*, Građevinska knjiga d.o.o., Beograd, 2011.
- [100] Land, A. H., Doig, A. G., *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*, *Econometrica*, 1960, N°-3, 28.
- [101] Lane, E. and W. Werdini, “A Consistency Test for AHP Decision Makers”. *Decision Sciences* 20 (3): 575-590.
- [102] Leu, S.S., A.T. Chen, and C.H. Yang, 2001. A GA-Based fuzzy optimal model for construction time-cost trade-off. *International journal of Project Management*, 19: 47-58.
- [103] Malcolm, D. G., J. H. Roseboom, C. E. Clark, W. Fazar, “Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation”, *OPERATIONS RESEARCH* Vol. 7, No. 5, September–October 1959, pp. 646–669
- [104] Marković, Lj., „Unapređenje procesa realizacije investicionog projekta sa analizom troškova i rizika“, *Doktorska disertacija*, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, 2008.
- [105] Marković, Lj., Dutina, V., Kovačević, M.: ”Application of benchmarking method in the construction companies”, *Facta Universitatis, Series: Architecture and Civil Engineering*, Vol. 9. No 2. 2011., pp 301 – 314.
- [106] Matthias, Ehrgott, *Multicriteria Optimization – Lecture notes in economics and mathematical systems*, 491, Springer-Verlag, 2000.
- [107] Miller, Robert, Director of Management Sciences Raytheon Company, Lexington, Mass.: „*Scedule, Cost, and Profit Control with PERT*“, 1963.
- [108] Millet, I. and T. Saaty (2000). “On the Realitivy of Relative Measures-Accomodating both Rank Preservation and Rank Reversals in the AHP”, *European Journal of Operational Reserch* 121(1): 205-212.

- [109] Meghalkumar I Zala, and all., An Approach of Contractor Selection By Analytical Heirarchy Process, *National Conference on Recent Trends in Engineering & Technology*, 2011, p. 6., <http://www.bvmengineering.ac.in/misc/docs/published-20papers/civilstruct/Civil/101006.pdf>
- [110] Meredith, J. R., et al., *Project Management in Practice / Edition 5*, Wiley, 2013.
- [111] Nikolić, I., "Višekriterijumski modeli i algoritmi izbora izvođača projekta", *Zbornik radova I, SymOrg '94, III Međunarodni simpozijum "Menadžment na pragu XXI veka"*, Zlatibor, 19-22 maja 1994., str. 401-407.
- [112] Nikolić, I., Borović, S., *Višekriterijumska optimizacija – metode, primena u logistici, softver*, Centar vojnih škola, Beograd, 1996.
- [113] Nikolić, I. i dr., *Upravljanje projektima i korišćenje CA-Super Project*, RTB Bor, Institut za bakar, Bor, 1998.
- [114] Nikolić, I., *CD: Pm&mPm - Project Management & Multi Project Manament (upravljanje projektom i projektima) u graditeljstvu sa odabranim prilozima*, Fakultet za graditeljski menadžment, Beograd, 2002-2003.
- [115] Nikolić, I., Božilović, S., *Kvantitativne metode i modeli u menadžmentu - Odabrani problemi u graditeljstvu – Primena softvera WinQSB i Expert Choice*, Univerzitet Union (sada Univerzitet Union – “Nikola Tesla”), Fakultet za graditeljski menadžment, Fakultet za preduzetnički biznis, Beograd, 2009.
- [116] Nikolić, I., „Višekriterijumski aspekti procesa odlučivanja“, *doktorska disertacija, Fakultet organizacionih nauka*, Beograd, 1993.
- [117] Nikolić I., Božilović, S., "Višekriterijumsko modeliranje problema izbora podizvođača građevinskog projekta", *Izgradnja br. 8 (Časopis Saveza građevinskih inženjera i tehničara Srbije)*, Beograd, 1995, str. 364-369.
- [118] Nikolić I., "Modeli nivelisanja resursa i planiranja nabavki sirovina na projektu", *IIPP, Naučno-stručni časopis Istraživanja i projektovanja za privredu*, broj 18., 2007., godina V, Institut za istraživanja i projektovanja u privredi, Beograd, str. 25-28, http://issuu.com/iipp/docs/casopis_iipp_18
- [119] Nikolić I., "Višekriterijumski modeli i algoritmi izbora izvođača projekta", *Zbornik radova I, SymOrg '94, III Međunarodni simpozijum "Menadžment na pragu XXI veka"*, Zlatibor, 19-22 maja 1994., str. 401-407.
- [120] Nikolić, I., "Šest osnovnih problema optimizacije vremena i resursa u procesu upravljanja projektom", *CD Zbornik radova, Simpozijum Istraživanja i projektovanja za privredu 2005*, Redakcija časopisa Istraživanja i projektovanja za privredu, Mašinski faklтет Univerziteta u Beogradu, Akademija inženjerskih nauka Srbije i Crne Gore; Beograd 06. i 07. oktobar 2005.
- [121] Nikolić I., **Božilović Z.** i dr., "Tok novca i likvidnost projekata – Da li postoji efikasna softverska podrška?", *Zbornik radova, YUPMA 2002, VI Internacionalni simpozijum iz Project Managementa*, Zlatibor, 8.-10. Maj 2002., str. 112-116.
- [122] Nikolić I., **Božilović Z.** i dr., "Upravljanje tokom novca i likvidnošću na više projekata primenom MS Project 2000", *Zbornik radova, YUPMA 2002, VI Internacionalni simpozijum iz Project Managementa*, Zlatibor, 8.-10. maj 2002., str. 117-121.
- [123] Nikolić I., **Božilović Z.**, "Four aspects of the program management process with several projects in the residential construction industry", *SymOrg 2012, XIII International Symposium*, June 5-12, 2012, Zlatibor, Serbia <http://symorg.fon.bg.ac.rs/proceedings/html/papers.html> Project Managemet

- [124] Nikolić I., **Božilović Z.**, "Minimization the duration of the program with several projects by using overtime and/or increasing the intensities of resources", *Proceedings, 3th International Conference – Life Cycle Engineering and Managemant*, June 28-29, 2012, Belgrade, Serbia, pp. 215-220.
- [125] Nikolić I., **Božilović Z.**, "Minimization of maximum monthly cost of program with several projects in housing construction industry", *Proceedings, 3th International Conference - Life Cycle Engineering and Managemant*, June 28-29, 2012, Belgrade, Serbia, pp. 221-226.
- [126] Nikolić I., **Božilović Z.**, Nikolić N., (Plenary Lectures) "Minimization of the project duration and cost with maximization of the value of works to favored participants on project", *Proceedings, 4th International Conference - Life Cycle Engineering and Managemant*, June 27-28, 2013, Belgrade, pp. 77-87.
- [127] Nikolić I., **Božilović Z.**, Nikolić N., "Minimizacija trajanja projekta i maksimizacija vrednosti radova favorizovanih izvođača na projektu sa ograničenim troškovima", Zbornik radova, *SYM-OP-IS 2013, XL Simpozijum iz operacionih istraživanja*, Zlatibor, 8-12 September 2013., str. 215-220, http://www.symopis2013.fon.bg.ac.rs/wp-content/uploads/Zbornik_radova_SYMOPIS_2013.pdf
- [128] Nikolić I., **Božilović Z.**, Nikolić N., „Neke specifičnosti planiranja trajanja i troškova projekta sa više izvođača“, *SPIN 2013, IX Skup privrednika i naučnika - Evropske integracije i Operacioni menadžment*, Fakultet organizacionih nauka u Beogradu i Privredna komora Srbije, Beograd, 5-6 novembar 2013., COBISS.SR-ID 202252044, str. 161-168, http://www.spin.fon.bg.ac.rs/doc/Zbornik_radova_SPIN_2013.pdf
- [129] Nikolić I., Drobnjaković S., "Selection of contractors on a single project and number of projects with fixed data on activities", *Serbian Project Management Journal*, Volume 3, Issue 2, December 2013, Belgrade, ISSN 2217-7256 (Online), pp. 26-34, http://www.spmjournal.rs/images/pdf/serbian_project_management_journal_volume3_issue2.pdf,
- [130] Nikolić, I. et al., "Project liquidity planning with the expected and achieved budget dynamics", *Proceedings, 3th International Conference - Life Cycle Engineering and Managemant*, June 28-29, 2012., Belgrade.
- [131] Nikolić, I., et al., "Planning the input and output of money to ensure liquidity on project", *SPIN 2011, VIII Meeting of businessmen and scientists "European Integration and Operations Management"*, Faculty of Organizational Sciences in Belgrade and the Serbian Chamber of Commerce, November 1-2, 2011., Belgrade, p.289-293., <http://www.spin.fon.rs/prezentacije.php>
- [132] Nikolić, I., et al., "Minimization of maximum costs on project time intervals", *Proceedings, 2nd International Conference – Life Cycle Engineering and Managemant*, June 29-30, 2011., Belgrade.
- [133] Nikoomaram, H., F. H. Lotfi, J. Jassbi, and M.R. Shahriari, 2010. A New Mathematical Model for Time Cost Trade-off Problem with Budget Limitation Based on Time Value of Money. *Applied Mathematical Sciences*, 4(63): 3107-3119.
- [134] Opricović, S., *Višekriterijumska optimizacija*, Građevinski fakultet, Naučna Knjiga, Beograd., 1986.
- [135] Оприцовић, С., *Вишекриптеријумска оптимизација система у грађевинарству*, Грађевински факултет, Београд, 1998.
- [136] Pareto, V. V. (1896). *Cours d'Economie Politique*, Rouge, Lausanne, Switzerland.

- [137] Peres, J. (1995). „Some comments on Saaty's AHP“, *Management Science* 41(6): 1091-1095.
- [138] Petrić, J. J., *Matematičke metode planiranja i upravljanja*, Informator, Zagreb, 1968.
- [139] Petrić, J. J., *Mrežno planiranje i upravljanje*, Informator, Zagreb, 1970.
- [140] Petrić, J., *Operaciona istraživanja*, Naučna knjiga, Beograd, 1972.
- [141] Petrović, D., "Sistem pripreme i realizacije složenih investicionih projekata", *Magistarska teza*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 1997.
- [142] Petrović, D., "Koncept multiprojektnog upravljanja u preduzeću", *Doktorska disertacija*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2003.
- [143] Petrovic, R. 1968. Optimization of resource allocation in project planning. *Operations Research*, 16(3) 559-568.
- [144] Pich, M., C. Loch, and A. De Meyer. 2002. On uncertainty, ambiguity, and complexity in project management. *Management Science*, 48, (8) 1008-1023.
- [145] Poyhonen, M., R. Hamalainen, et al. (1997). "An Experiment on the Numerical Modelling of Verbal Ratio Statements." *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 6(1): 1-10.
- [146] Prašćević, N., „Primena višekriterijumske optimizacije prilikom izbora izvođača za gradnju objekata“, *Zbornik radova, SYM-OP-IS '94, XXI Jugoslovenski simpozijum za operaciona istraživanja*, Kotor, 04.-07. oktobar, 1994.
- [147] Prašćević N., "Informacioni sistem za planiranje i praćenje realizacije projekata u građevinarstvu", *Doktorska disertacija*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2004.
- [148] Prašćević, Ž., *Upravljanje projektima*, Građevinski kalendar, SGITJ, Beograd, 1991.
- [149] Prašćević, Ž. i dr., *Nadzor nad građenjem i tehnički pregled objekata*, Građevinski fakultet u Beogradu, 1999.
- [150] Prašćević, Ž. i dr., *Problemi izgradnje i vrednovanje objekata*, Građevinski fakultet u Beogradu, 2000.
- [151] Prašćević, Ž. i dr., *Tenderske procedure u građevinarstvu*, Građevinski fakultet u Beogradu, 2002.
- [152] Prašćević Ž., Prašćević N., *Operaciona istraživanja u građevinarstvu*, Čigura print, Beograd, 2009.
- [153] PMI (Project Management Institute), *A Guide too the Project Managment Body of Knowlege – PMBOK Guide 1st Edition*, PMI Standards Comitee, USA, 1996., Uper Darby, PA 19082, USA.
- [154] *PMBOK Guide 2nd Edition*, 2000.
- [155] *PMBOK Guide 3ht Edition*, 2004.
- [156] *PMBOK Guide 4ht Edition*, 2008.
- [157] *PMBOK Guide 5ht Edition*, 2012.
- [158] *PMBOK Guide 6ht Edition*, 2016.
- [159] Pulat, P.S. and S.J. Horn, 1996. Time-resource tradeoff problem [project scheduling]. *IEEE Trans. Eng. Manage.*, 43: 411-417.
- [160] Radasch, Deborah Koucky and N.K. Kwak, 1998. An integrated mathematical programming model for offset planning. *Computers & Operations Research*, 25(12): 1069-1083.

- [161] Rajkov, M. (urednik) i grupa autora, *Leksikon menadžmenta*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 1993.
- [162] Rajkov, M., Božilović S., Nikolić I., "Menadžment novčanim tokovima u poslovnom poduhvatu", *Zbornik radova, SYM-OP-IS '98 - XXV Jugoslovenski simpozijum za operaciona istraživanja*, Herceg Novi, 21-24. Septembra, 1998.
- [163] Rehab, R. and R.I. Carr, 1989. Time-cost trade-off among related activities. *J. Construct. Eng. Manage.*, 115: 475-486.
- [164] Rosenau, M. D. and G. D. Githens. 2005. *Successful Project Management : a Step-by-step Approach with Practical Examples*. 4th Ed., Wiley, Hoboken, N.J.
- [165] SAS Institute Inc. 2011. *SAS/OR® 9.3 User's Guide: Mathematical Programming*. Cary, NC, USA, 2011.
- [166] Saaty, T. (1986). "Axiomatic Foundaton of the Analitic Hierarchy Process", *Management Science* 32(7): 841-855.
- [167] Saaty, T. (1990). "An Exposition of the AHP in Reply to the Paper "Remarks on the Analytic Hierarchy Process", *Management Science* 36(3): 259-268.
- [168] Saaty, T. (1991). "Response to Holder's Comments on the the Analitic Hierarchy Process", *Journal of the Operational Research Society* 42(10): 909-929.
- [169] Saaty, T. (1994). "Highlights and critical ponts in the theory and application of the Analitic Hierarchy Process", *European Journal of Operational Reserch* 74(3): 426-447.
- [170] Saaty, T. L., *The Analytic Hierarchy Process*, New York, N.Y., McGraw Hill, 1980, reprinted by RWS Publications, Pittsburgh, 1996.
- [171] Saaty, T., "A scaling method for priorities in hierarchical structures", *Journal of mathematical psychology* 15 (3): 234-281, 1997.
- [172] Saaty, T. (2003). "Decision-making with the AHP: Why is the Principal Eigenvector necessary?", *European Journal of Operational Reserch* 145(1): 89-91.
- [173] Saaty, T. (2006). "Rank from Comparisons and from Ratings in the Analitic Hierarchy/Network Processes", *European Journal of Operational Reserch* 168(2): 557-570.
- [174] Saaty, T. and E. Forman (1992). *The Hierarchon: A Dictionary of Hierarchies*. Pittsburgh, RWS Publications.
- [175] Sakellaropoulos, S. and A. P. Chassiakos, 2004. Project time–cost analysis under generalised precedence relations. *Advances in Engineering Software*, 35(10-11): 715-724.
- [176] Sen, S., An-Ting and Chung-Hue, 2001. A GA-based fuzzy optimal model for construction time–cost tradeoff. *International Journal of Project Management*, 19(1): 47-58.
- [177] Siemens, N., 1971. A Simple CPM Time-Cost Tradeoff Algorithm. *Management Science*, 17(6): B-354-B-363.
- [178] Simmons, L. F. 2002. Project management - critical path method (CPM) and PERT simulated with Process Model. *Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference*, Dec 8-11 2002: 1786-1788.
- [179] Stam, A. and P. Duarte Silva (2003). "On Multiplicative Priority Rating Mehtods for AHP", *European Journal of Operational Reserch* 145(1): 92-108.
- [180] Steve, P. Jr. and M.I. Dessouky, 1977. Solving the project time/cost tradeoff problem using the minimal cut concept. *Management Science*, 24: 393-400.

- [181] Stillwell, W., D. von Winterfeldt, et al. (1987). "Comparing hierarchical and non-hierarchical weighting methods for eliciting multiattribute value models." *Management Science* 33(4): 442-450.
- [182] Sudić, S., „Optimalni modeli za planiranje i upravljanje troškovima realizacije građevinskih projekata, *Doktorska disertacija*, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, 2012.
- [183] Suri, PK., B. Bhushan, and A. Jolly, 2009. Time estimation for project management life cycle: a simulation approach. *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, 9(5): 211–215.
- [184] Taha, H. A., *Operation Research - An Introduction*, MacMillan Publishing Co. N.Y., 1971-1976.
- [185] Tavares, L. 2002. A review of the contribution of operational research to project management. *European Journal of Operational Research*, 136, 1-18.
- [186] Tavares, L. Valadares, 1994. A stochastic model to control project duration and expenditure. *European Journal of Operational Research*, 78(2): 262-266.
- [187] Trajković D., Zlatanović M.: Doprinos planiranju realizacije građevinskih projekata, Zbornik radova, I Internacionalni simpozijum iz project managementa “Project management u Jugoslaviji – stanje i perspektive” – YUPMA '97, Zlatibor, 1997. str. 249-254.
- [188] Trajković D., Zlatanović M.: Metode za prognoziranje troškova projekta u građevinarstvu, Izgradanja, Berograd, No 2/1997. str. 81-85.
- [189] Trajković D., Zlatanović M.: Procena troškova realizacije projekta, Zbornik radova, II Internacionalni simpozijum iz project managementa – YUPMA '98, Zlatibor, 1998. str. 119-123.
- [190] Trajković D., Zlatanović M.: Modern Technologies and Innovations in Civil Engineering – Savremenene tehnologije i inovacije u građevinarstvu, VIII Međunaroni simpozijum Menadžment u novom okruženju – SymOrg '02, Zlatibor, 02-05. jun 2002.
- [191] Triantaphyllou, E. (2001). “Two new cases of rank reversals when the AHP and some of its additive variants are used that do not occur with the Multiplicative AHP”, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 10(1): 11-25
- [192] Troutt, M. (1998). „Rank Reversal and the Dependence of Priorities on the Underlying MAV Function“, *OMEGA* 16(4): 365-367.
- [193] Tummala, V. And Y. Wan i Wan „One the Mean Random Inconsistency Index of the Analytic Hierarchy Process (AHP)“, *Computers & Industrial Engineering* 27(1-4):401-404, 1994.
- [194] Van Slyke, R.M., 1963. Monte carlo methods and the PERT problem. *Operat. Res.*, 33: 141-143.
- [195] Vanderbei, R. J., *Linear Programming: Foundations and extensions*, Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, Princeton, 2001.
- [196] Vrat, P. and C. Kriengkairut, 1986. A goal programming model for project crashing with piecewise linear time-cost trade-off. *Engineering Costs and Production Economics*, 10(1): 161-172.
- [197] Vujošević, M. i dr., *Metode optimizacije - mrežni, lokacijski i višekriterijumski problemi*, Dopis, Beograd, 1996.
- [198] Walter, J. G., C. Strauss and M. Toth, 2000. Crashing of stochastic processes by sampling and optimization. *Bus. Process Manage. J.*, 6 : 65-83.

- [199] Wang, Y. and Y. Luo (2009). "On Rank Reversal in Decision Analysis", *Mathematical and Computer Modelling* 49(5-6): 1221-1229.
- [200] Williams, T. 1999. Allocation of contingency in activity duration networks. *Construction Management and Economics*, 17, 441-447.
- [201] Weber, M., F. Eisenfuhr, et al. (1988). "The Effects of Spitting Attributes on Weights in Multiattribute Utility Measurement." *Management Science* 34(4): 431-445.
- [202] Zahedi, F., "The Analytic Hierarchy Process - A Survey of the Method and its Applications", *Interfaces*, (Vol. 16, 1986)
- [203] Zedan All ilatush, Contractor Selection Using Multiattribute Utility Theory, *T.I.M.E. Research Institute, Department of Surveying, University of Salford*, Salford, UK, 1996., <http://usir.salford.ac.uk/14813/1/DX197696.pdf>
- [204] Zeleny, M., *Multiobjective Linear Programming, Lecture notes in economics and mathematical systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
- [205] Zlatanović M.: Management in civil engineering and its developing trends, *Facta universitatis, Series Architecture and Civil Engineering*, Niš, University of Niš, 1998. Vol. 1, No 5 (1998), str. 637-644.
- [206] Zlatanović M., Trajković D.: Specificnost upravljanja u građevinarstvu - Specific management in civil engineering, *Zbornik radova, IV Internacionalni simpozijum iz project managementa – YUPMA 2000*, Zlatibor, 2000. str. 174-178.
- [207] Zlatanović M., Trajković D.: The Choice of the Most Favourable Investment Object Contractor, (Proceedings Vol. 4 Bridges and Construction Management), *Jubilee Scientific Conference devoted to the 60th anniversary of the foundation of the UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY*, Sofia, 2002. str. 101-110.
- [208] Zlatanović M., Trajković D.: Models for the choice of the most favourable contractor for construction of the thermal insulation systems, *Facta universitatis, Series Architecture and Civil Engineering*, Niš, University of Niš, 2005. Vol. 2, No 5 (2003), str. 339-348.
- [209] Златановић М., Стефановић Б.: Модели избора извођача радова инвестиционих објеката шумског инжењеринга, оригинални научни рад, "Шумарство" № 1-2 (2005), Београд, стр. 11-19.
- [210] Xiaohong Huang, An Analysis of the Selection of Project Contractor in the Construction Management Process, *International Journal of Business and Management* Vol. 6, No. 3; March 2011., www.ccsenet.org/ijbm

Одабрана законска акта

- [211] Закон o planiranju i izgradnji, Sl. Glasnik RS br. 72/2009, 81/2009 – ispr., 64/2010 – odluka US, 24/2011, 121/2012, 42/2013 2010 – odluka US, 50/2013 2010 – odluka US, 132/2014 i 145/2014
- [212] Закон o javnim nabavkama, Sl. glasnik RS br. 124/2012, 14/2015 i 68/2015.

Удружења, конференције и часописи (одабрана листа)

- [213] International Journal of Applied Engineering Research (IJAER)
<http://www.ripublication.com/ijaer.htm>
- [214] International Journal of Applied Science and Engineering Research
<http://www.ijaser.com/>

- [215] International Journal of Project Management
- [216] Association for Project Management (APM), <https://www.apm.org.uk/>
- [217] International Project Management Association (IPMA), <http://www.ipma.world/>
- [218] Serbian Project Management Journal, <http://www.spmjournal.rs/>
- [219] Serbian Project Management Association (YUPMA), <http://yupma.org.rs/yupma/>
- [220] *Internacionalni simpozijum iz projektnog menadžmenta* (YUPMA), http://yupma.org.rs/index.php?option=com_content&view=article&id=1
- [221] Симпозијум о операционим истраживањима (Sym-Op-Is) *)
- [222] International Symposium – SymOrg (The theory and practice of management and management-related disciplines), <http://www.symorg.fon.bg.ac.rs/>
- [223] (Nacionalni) Skup privrednika i naučnika, <http://spin.fon.bg.ac.rs/>
- [224] Naučna i biznis konferencija YU INFO, Informaciono društvo Srbije, <http://informacionodrustvo.org/>
- [225] International Conference Dependability and Quality Management (ICDQM) & Life Cycle Engineering and Management, www.dqmcenter.com
- [226] YUJOR - Yugoslav Journal of Operations Research, <http://yujor.fon.bg.ac.rs/index.php/journal>
- [227] Savez inženjera i tehničara Srbije, <http://www.sits.org.rs/>
- [228] International Society of the Analytic Hierarchy Process, http://ahp.net/www/ahp/support/ahp_disc.html
- [229] International Journal of the Analytic Hierarchy Process, <http://www.ijahp.org/index.php/IJAHp/index>

*) Национални симпозијум са међународним учешћем од 1974 до 1914. Год., Међународни симпозијум од 2015. год.

Наизменична измена 13 организатора: факултети Београдског Универзитета (Факултет организационих наука, Саобраћајни факултет, Економски Факултет, Рударско-геолошки факултет, Математички факултет), институти у Београду (Институт „Михаило Пупин“, Математички институт САНУ, Економски институт), Министарство одбране Србије, Војска Србије, Универзитет у Бања Луци, Висока грађевинско-геолошка школа у Београду, Друштво операционих истраживача Србије.

1

1

8.

ПРИЛОЗИ

1

1

ПРИЛОГ 1. ЛИСТА СЛИКА

Поглавље 2.

Страна

| | | |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Слика 1. | Међузависност функција, ресурса и послова грађевинског предузећа | 5 |
| Слика 2. | Класификација ресурса на пројекту – општи случај | 6 |
| Слика 3. | Алгоритам понуда и реализација пројекта | 9 |
| Слика 4. | Основни процеси, помоћни процеси у њихове зависности у току управљања пројектом | 15 |
| Слика 5.1. | Производно-технолошка (компонентна) структура пројекта (PBS) | 16 |
| Слика 5.2. | Организациона структура радова на пројекту (WBS) | 16 |
| Слика 5.3. | Организациона структура управљања пројектом (OBS) | 17 |
| Слика 5.4. | Повезаност елемената PBS и WBS на пројекту | 17 |
| Слика 5.5. | Повезаност елемената OBS и WBS на пројекту | 18 |
| Слика 6. | Мрежа са активностима на луковима и зависностима FS | 19 |
| Слика 7. | Мрежа са активностима у чворовима и зависностима FS | 19 |
| Слика 7.1. | Завршити А да започне В (FS – <i>Finish to Start</i>) | 19 |
| Слика 7.2. | Завршити А да заврши В (FF – <i>Finish to Finish</i>) | 19 |
| Слика 7.3. | Започети А да започне В (SS – <i>Start to Start</i>) | 20 |
| Слика 7.4. | Започети А да заврши В (SF – <i>Start to Finish</i>) | 20 |
| Слика 8. | Гантограм (ГД) или Линијски дијаграм (ЛД) | 20 |
| Слика 9.1. | Подаци за активности на мрежним дијаграмима а) оригинални елементи за СРМ (активности на луковима) и б) новији истоветни елементи за СРМ и PERT (активности у чворовима) | 23 |
| Слика 9.2. | Део мрежног дијаграма са активностима у чворовима | 23 |
| Слика 10.1. | Део мрежног дијаграма и временске резерве за три активности | 25 |
| Слика 10.2. | Почетак S_i и завршетак F_i за A_i у оквиру слободне временске резерве $(S_t)_i$ | 25 |
| Слика 11.1. | $(t_e)_i > m_i$ | 26 |
| Слика 11.2. | $(t_e)_i < m_i$ | 26 |
| Слика 11.3. | $(t_e)_i = m_i$ | 26 |
| Слика 12. | Подаци за активности на мрежним дијаграмима а) оригинални елементи за СРМ (активности на луковима) и б) новији истоветни елементи за СРМ и PERT (активности у чворовима) | 27 |
| Слика 13. | Функција $P(z)$ за $z = ZS_i$ или $z = ZF_i$ или $z = ZP$ | 28 |

| | | |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Слика 14.1. | Једнака времена ангажовања ресурса типа <i>Work</i> (R_1, R_2, R_3) на A_i | 29 |
| Слика 14.2. | Различита времена ангажовања ресурса типа <i>Work</i> (R_1, R_2, R_3) на A_i | 29 |
| Слика 14.3. | Рашчлањавање A_i са неједнаким временима ангажовања ресурса типа <i>Work</i> (R_1, R_2, R_3) | 29 |
| Слика 14.4. | Рашчлањена/подељена A_u на три зависне подактивности A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} | 29 |
| Слика 14.5. | Три подактивности са једнаким временима ангажовања ресурса типа <i>Work</i> | 29 |
| Слика 15.1. | Корак 1: Решити прекорачење R_2 које наступа раније од прекорачења R_1 | 31 |
| Слика 15.2. | Корак 2: Наступило је померање активности са променама потреба за оба ресурса задржавајући трајање пројекта, решити прекорачење R_1 и наставити поступак | 31 |
| Слика 16.1. | Потребе ресурса типа <i>Work</i> , расположиве количине и прекорачења (недостајуће количине) за минимално трајање пројекта $T^{min} = 16$ | 32 |
| Слика 16.2. | Потребе ресурса типа <i>Work</i> сведене у расположиве границе (нивелисањем) продужиле трајање пројекта на $T^* = 17$ | 32 |
| Слика 16.3. | Потребе једног ресурса типа <i>Material</i> у плану са нивелисаним ресурсом типа <i>Work</i> | 32 |
| Слика 16.4. | Почетне залихе, две набавке, позитивне залихе и негативне (недостајуће) залихе ресурса типа <i>Material</i> у плану са нивелисаним ресурсом типа <i>Work</i> | 33 |
| Слика 16.5. | Стање залиха ресурса типа <i>Material</i> након померања прве и друге набавке у плану са нивелисаним ресурсом типа <i>Work</i> | 33 |
| Слика 17. | Прорачун јединичних трошкова за одређену позицију рада | 35 |
| Слика 18. | Стварни трошкови активности земљани радови, линеарна апроксимација трошкова и разлика | 36 |
| Слика 19. | Нелинеарни трошкови $c_i(t)$ и линеарна апроксимација трошкова $c_i^L(t), t \in [(t_u)_i, (t_n)_i]$ са просечним прирастом трошкова $\Delta c_i^L(t) = \Delta c_i^L$ | 37 |
| Слика 20. | Трајање пројекта и минимални трошкови применом методе PERT/COST | 38 |
| Слика 21.1. | Трошкови пројекта, дата 3 једнака износа прилива новца, прорачунати термини, прорачунат 4-ти термин и прилив, и стање новца | 43 |
| Слика 21.2. | Трошкови пројекта, дата 3 термина прилива новца (4-ти на крају пројекта), прорачунати износи прилива и стање новца | 43 |
| Слика 22.1. | Контрола и евидентирање реализације у термину $t = 8$ | 46 |
| Слика 22.2. | Ажурирани план пројекта након прве контроле ($k=1$), (продужено трајање пројекта са $T^{min} = 15$ на $T^{(1)*} = 17$) | 46 |
| Слика 23. | Процеси планирања и контроле реализације пројекта | 47 |
| Слика 24. | Трошкова и временска варијанса (метода остварне или зарађене вредности) | 47 |
| Слика 25. | Алгоритам примене корективних акција | 48 |

| | | |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Слика 26. | Планирање пројекта, реализација са евентуалним ажурирањем планова и анализа изведеног пројекта са извођењем закључака за будуће пројекте | 51 |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

Поглавље 3.

| | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------|----|
| Слика 27. | Процес решавања модела ВКП и избора коначног решења | 67 |
| Слика 28. | Линеарна скала квантификације квалитативних атрибута модела ВАО | 81 |
| Слика 29. | Хијерархијска структура проблема ВАО | 92 |
| Слика 30. | Део хијерархијског стабла критеријума модела ВАО | 95 |

Поглавље 4.

| | | |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Слика 31.1. | Алгоритам 1.б.1. Почетна анализа и евентуални избор коначног решења (<i>Емана 1, Емана 3</i>) | 126 |
| Слика 31.2. | Предложени процес одређивања нових Парето-оптималних решења модела 1.б.1 (<i>Емана 2</i>) | 128 |
| Слика 31.2.1. | Алгоритам 1.б.1. Нова Парето-оптимална решења (<i>Емана 2, оптимизација C_1</i>) | 130 |
| Слика 31.2.2. | Алгоритам 1.б.1. Нова Парето-оптимална решења (<i>Емана 2, условљена оптимизација C_2</i>) | 132 |
| Слика 31.2.3. | Алгоритам 1.б.1. Нова Парето-оптимална решења (<i>Емана 2, двострука условљена оптимизација C_3</i>) и избор коначног решења (<i>Емана 3</i>) | 133 |
| Слика 31.2.4. | Модификовани алгоритам одређивања свих или дела нових Парето-оптималних решења модела 1.б.1 (<i>Емана 2</i>) | 136 |
| Слика 32.1. | Алгоритам 2.а.1. Почетна анализа и евентуални избор коначног решења (<i>Емана 1, Емана 3</i>) | 145 |
| Слика 32.2. | Алгоритам 2.а.1.1. Нова Pareto-optimalna rešenja i izbor konačnog rešenja (<i>Емана 2, Емана 3</i>) | 148 |
| Слика 33. | Алгоритам Р.1. $C_p, T_p, C_1, C_2, \dots, C_{n1}$ | 155 |
| Слика 34.1. | Алгоритам Р.2.1. $(C_p, T_p), C_1, C_2, \dots, C_{n1}$ | 155 |
| Слика 34.2. | Алгоритам Р.2.2. $C_p, T_p, (C_1, C_2), C_3, \dots, C_{n1}$ | 156 |
| Слика 34.3. | Алгоритам Р.2.3. $C_p, T_p, C_1, (C_2, C_3), C_4, \dots, C_{n1}$ | 156 |
| Слика 35.1. | Алгоритам Р.3.1. $C_p, T_p, (C_1, C_2), (C_3, C_4), C_5, \dots, C_{n1}$ | 156 |
| Слика 35.2. | Алгоритам Р.3.2. $C_p, T_p, C_1, (C_2, C_3), (C_4, C_5), C_6, \dots, C_{n1}$ | 157 |
| Слика 36. | Алгоритам Р.4.1. $C_p, T_p, (C_1, C_2, C_3), C_4, \dots, C_{n1}$ | 157 |
| Слика 37.1. | Алгоритам Р.5.1 са подпроцесом / подпрограмом (PP) за лексикографску максимизацију $C_j, j > 5, j \in J^+, C_p, T_p, (C_1, C_2, C_3), (C_4, C_5), C_6, \dots, C_{n1}$ | 158 |
| Слика 37.2. | Алгоритам Р.5.2 са подпроцесом / подпрограмом (PP) за лексикографску максимизацију $C_j, j > 5, j \in J^+, C_p, T_p, (C_1, C_2), (C_3, C_4, C_5), C_6, \dots, C_{n1}$ | 159 |

Поглавље 5.

| | | |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Слика 38.1. | Динамички план пројекта на нивоу група радова за минимално трајање пројекта $T_p^{\min} = 374$ дана (софтвер <i>MS Project</i>) | 166 |
| Слика 38.2. | Месечни и кумулативни радови | 167 |
| Слика 38.3. | Месечни и кумулативни трошкови (три облика обрачуна) | 167 |
| Слика 39.1. | Решење модела избора једног извођача (<i>Model View</i>), <i>Distributive Mode</i> , Анализа свих извођача | 175 |
| Слика 39.2. | Решење модела са извођачима који имају референце за целе пројекте у станоградњи, <i>Distributive Mode</i> | 176 |
| Слика 39.3.1. | Решење подмодела за 1. Критеријуми пројекта (N=1), <i>Distributive Mode</i> , Анализа свих извођача | 177 |
| Слика 39.3.2. | Решење подмодела за 1.2. Трошкови (N=2), <i>Distributive Mode</i> , Анализа свих извођача | 179 |
| Слика 39.3.3. | Решења подмодела за остале нивое (N=3,4,5), <i>Distributive Mode</i> , Анализа свих извођача | 179 |
| Слика 39.4.1. | Градијентна анализа на нивоу проблема (приоритета критеријума нивоа N=1) са становишта 1. Критеријуми пројекта | 181 |
| Слика 39.5. | Динамичка анализа, приоритети критеријума разматраних у градијентној анализи и приоритети извођача | 181 |
| Слика 39.4.2. | Градијентна анализа са K_2 | 182 |
| Слика 39.4.3. | Градијентна анализа са K_3 | 182 |
| Слика 40.1. | Решење 1.1: План радова (приказују се групе радова, прикривени радови) и планови извођача (прикривени радови) | 188 |
| Слика 40.1.1. | Решење 1.1: Глобални план радова (прикривени конкретни радови) и планови извођача B01 и B02 | 189 |
| Слика 40.1.2. | Решење 1. : Планови извођача B03 до B09 | 190 |
| Слика 40.1.3. | Решење 1.1: Планови извођача B10 до B13 | 191 |
| Слика 40.2. | Бројеви додељених радова извођачима за решења 1.1 до 1.4 | 192 |
| Слика 40.3. | Решење 1.4: Месечни и кумулативни трошкови извођача B01, B14 и B15 | 192 |
| Слика 40.4. | Количине радова извођача за решења 1.1 до 1.4 | 193 |
| Слика 40.5. | Трошкови извођача за решења 1.1 до 1.4 | 194 |
| Слика 40.6. | Померање радова 4.1.1.2, 4.1.2 и 4.1.3 у односу на базни план | 195 |
| Слика 41.1.1. | Критичне активности (<i>Total Slack = 0</i>) након скраћења A.02.01.02 на 114 дана са прековремени радом 1.040 час. | 197 |
| Слика 41.1.2. | Скраћење A.02.01.02 на 113 дана са прековременим радом 1.080 час. | 198 |
| Слика 41.1.3. | Критичне активности након скраћења A.02.01.02 на 113 дана | 198 |

| | | |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Слика 41.2. | Минимални трошкови пројекта (C_p^*) за допустива времена трајање пројекта (T_p), потребна времена активности А.02.01.02 и А.03.06 на основу прековремених радова извшилаца и одговарајући трошкови активности: $t(A.02.01.02)$, $c(A.02.01.02)$, $t(A.03.06)$, $c(A.03.06)$ | 200 |
| Слика 41.3. | Критичне активности након скраћења А.02.01.02 на 125 дана и А.03.06 на 187 дана са прековременим радовима одређују $T_p = 148$ дана | 201 |
| Слика 41.4. | Трошкови пројекта и извођача са решењима 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1 и 2.2.2 | 204 |
| Слика 42.1. | Трајање и трошкови пројекта за решења 1 до 7 у зависности од варијанте параметара радова А.02.01.02 и А.03.06; сва решења имају најдужа времена радова А.04.02.01 (I фаза и II фаза) | 210 |
| Слика 42.2. | Трошкови пројекта и извођача за решења 1 до 7 (изостављени извођачи са трошковима нула) | 212 |
| Слика 42.3.1. | Глобални план радова и детаљни планови извођача В01, В03 и В05; Трајање 140 дана са трошковима 1.800,00 н.ј. радова {02.01.02 Машинско малтерисање унутрашњих зидова} из пријаве извођача В01 | 213 |
| Слика 42.3.2. | Планови извођача В06 до В11 | 214 |
| Слика 42.3.3. | Планови извођача В12, В13, В15, В16, В17 и В36 | 215 |
| Слика 43.3.1. | Модел ВАО са ранжираним алтернатива, <i>Distributive Mode</i> | 216 |
| Слика 43.3.2. | Градијентна анализа за F_1 и F_2 (полазни приоритети и нови приоритети) | 217 |
| Слика 43.3.3. | Динамичка анализа (нови приоритети за F_1 и F_2 и алтернатива) | 217 |
| Слика 43.3.4. | Приближни приоритети за R-5 и R-6 са $w_1 = 0,996$ и $w_2 = 0,004$ | 217 |
| Слика 44. | Елементи планова без услова и условима извођача за почетке / завршетке ангажовања: месечни радови са почетком и трајањем пројекта | 218 |
| Слика 44.1. | Најранији и најкаснији термини радова без услова извођача | 220 |
| Слика 44.2.1.а. | Термини у базном плану и плану са захтевом В11 за почетак после најкаснијег почетка из базног плана | 221 |
| Слика 44.2.1.б. | План са захтеваним најранијим почетком за В11 | 222 |
| Слика 44.2.2.а. | Накаснији почетак В11 пре најраниг почетка из базног плана, недопустив план | 223 |
| Слика 44.2.2.б. | Ранији почетак пројекта да се оствари захтевани најкаснији почетак В11, допустив план | 224 |
| Слика 44.2.3. | Почетак В11 пре најранијег почетка из базног плана, почетак В12 после најранијег и пре најкаснијег почетка из базног плана | 225 |
| Слика 44.4.4. | Најранији почетак радова А.01.07 (пре најранијег почетка из базног плана) и најкаснији завршетак радова А.02.02 (после најкаснијег завршетка из базног плана) који зависе од А.01.07, недопустив план | 226 |

ПРИЛОГ 2. ЛИСТА ТАБЕЛА

Поглавље 2.

Страна

| | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| Табела 1. | Области пословања и врсте пројеката | 4 |
| Табела 2. | Модел ВАО за избор локације и типа стамбено-пословног објекта | 7 |
| Табела 3. | Облици уступања радова на грађевинском појекту | 8 |
| Табела 4. | Модел ВАО за избор једног извођача пројекта | 10 |
| Табела 5. | Карактеристика два облика потрошивих ресурса – материјала и новчаних средстава | 42 |
| Табела 6. | Одабрани проблеми планирања динамике прилива новчаних средстава | 44 |

Поглавље 3.

| | | |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Табела 7. | Две класе проблема ВКО | 62 |
| Табела 8.1. | Два Парето-оптимална решења модела ВКП истог типа оптимизације свих критеријума | 65 |
| Табела 8.2. | Два Парето-оптимална решења модела ВКП са оба типа оптимизације критеријума | 66 |
| Табела 9. | Парето-неоптимално решење модела ВКП | 66 |
| Табела 10. | Доминантно и доминирано решење модела ВКП | 66 |
| Табела 11. | Маргинална решења, идеалне вредности критеријума и последице, модел (3) и (7) | 69 |
| Табела 12. | Маргинална и нова Парето-оптимална решења са последицама, модел (17) | 70 |
| Табела 13. | Алгоритам Лексикографске методе | 71 |
| Табела 14. | Смерови векторске пертурбације и њихови односи на примеру три коефицијента за f_1 | 77 |
| Табела 15. | Проблем ВАО, максимизација свих критеријума | 80 |
| Табела 16.1. | Илустрација три нивоа критеријума модела ВАО | 85 |
| Табела 16.2. | Свођење три нивоа критеријума модела ВАО на један ниво | 86 |
| Табела 17. | Проблем ВАО, Почетна анализа и непосредно одлучивање | 87 |
| Табела 18. | Скала 9 тачака софтвера <i>Expert Choice</i> за методу АХП | 94 |
| Табела 19. | Случани индекси RI, Saaty (1997) | 99 |

Поглавље 4.

| | | |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Табела 20. | Општа класификација проблема избора извођача пројекта и математичких модела | 106 |
| Табела 21.1 | Карактеристике проблема групе 1 | 114 |
| Табела 21.2. | Карактеристике проблема групе 2 | 119 |
| Табела 21.3. | Карактеристике проблема групе 3 | 123 |
| Табела 22.1. | Алгоритам решавања модела 1.а.1 | 124 |
| Табела 22.2. | Алгоритам решавања модела 1.а.2 | 125 |
| Табела 23.1. | Последице маргиналних решења и идеала критеријума модела 1.б.1 | 126 |
| Табела 23.2. | Маргинална и нова Парето оптимална решења модела 1.б.1 | 138 |
| Табела 24. | Последице маргиналних решења и идеала критеријума модела 1.б.2 | 141 |
| Табела 25.1. | Последице маргиналних решења и идеала критеријума модела 2.а.1 | 144 |
| Табела 25.2. | Алгоритми модела групе 2 са довољним капацитетима извођача, 2.а.1 (<i>Етапа 2 и 3</i>) | 147 |
| Табела 26. | Карактеристике модела групе 1 и 2 са становишта решавања | 151 |
| Табела 27. | Карактеристике модела групе 2 и 3 са становишта решавања | 153 |
| Табела 28. | Одабрани примери дефинисања приоритета циљева пројекта и извођача | 154 |

Поглавље 5.

| | | |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Табела 29.1. | Подаци за групе радова и радове – количине и трошкови (јединствени параметри) | 163 |
| Табела 29.2. | Подаци за групе радова и радове – зависности и трајање (јединствени параметри) | 165 |
| Табела 29.3. | Подаци за категорије радника на пројекту | 168 |
| Табела 30.1. | Модел вишекритеријумске анализе избора једног извођача пројекта | 171 |
| Табела 30.2. | Почетна анализа модела ВАО за избор једног извођача пројекта | 172 |
| Табела 30.3. | Приоритети критеријума модела ВАО за избор једног извођача | 174 |
| Табела 30.4. | Поређење свих парова критеријума проблема (ниво 1) применом скале 9 тачака | 174 |
| Табела 30.5.1. | Решења модела са становишта свих критеријума | 177 |
| Табела 30.5.2. | Решења глобалног и парцијалних модела, сви извођачи, <i>Distributive Mode</i> | 178 |
| Табела 30.5.3. | Решења глобалног и парцијалних модела, одабрани извођачи, <i>Distributive Mode</i> | 178 |

| | | |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Табела 30.6. | Критеријуми (називи, локални приоритети, вредности) и поређење извођача I.1.1, I.1.2 | 180 |
| Табела 30.7. | Анализа осетљивости решења глобалног модела (приоритети критеријума и ивођача | 182 |
| Табела 30.8. | Приоритети критеријума проблема и приоритети извођача I.1.1 између тачака В и С | 182 |
| Табела 31.1. | Подаци за потенцијалне извођаче група радова и радова (минимално 13 извођача) | 184 |
| Табела 31.2. | Подаци за потенцијалне извођаче – радови, трошкови и приоритети | 185 |
| Табела 31.3. | Бинарне променљиве за математичке моделе | 186 |
| Табела 31.4. | Решење 1.1 за основни модел проблема – приоритети за прве извођаче сваке групе | 187 |
| Табела 31.5.1. | C_j за једнаке више приоритете два и три B_j – снажнија / слабија предност једном B_j | 193 |
| Табела 31.5.2. | Једнаки приоритети за све извођаче групе 1, комбинације интензитета предности | 194 |
| Табела 32.1. | Трајање {А.02.01.02 Машинско малтерисање унутрашњих зидова} и трошкови | 196 |
| Табела 32.2. | Трајање {А.03.06 Керамичарски радови} и трошкови | 199 |
| Табела 32.3. | Редослед скраћивања радова А.02.01.02 и А.03.06, времена и трошкови | 199 |
| Табела 32.4. | Решења 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1 и 2.2.2 са становишта избора извођача | 203 |
| Табела 33.1. | Подаци за потенцијалне извођаче група радова и појединачних радова | 206 |
| Табела 33.2.1. | Варијанте параметара радова А.02.01.02 и А.03.06 са потенцијалним извођачима B_j | 207 |
| Табела 33.2.2. | Варијанте параметара радова А.04.02 са потенцијалним извођачима B_j | 208 |
| Табела 33.3. | Извођачи за Парето-оптимална решења Р-1 до Р-7 | 211 |
| Табела 34.1. | Избор извођача у зависности од врсте проблема и услова извођача - правила | 230 |
| Табела 34.2. | Елементи решења R-1 до R.7 за проблем 3.б из поглавља 5.4 | 241 |

Поглавље 6.

| | | |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Табела А | Преглед резултата истраживања за поглавља 2 до 5 | 235 |
| Табела Б | Класификација проблема избора више извођача на пројекту и елементи избора (поглавље 4) | 237 |

9.

БИОГРАФИЈА АУТОРА И ИЗЈАВЕ О ДИСЕРТАЦИЈИ

БИОГРАФИЈА АУТОРА

Мр. Божиловић (Славко) Звонимир дипл. грађ. инж. је рођен 14.05.1965. год. у Скопљу, Македонија. Завршио је Грађевинску школу у Београду и 01.02.1992. год. засновао радни однос у Компанији “Градитељ-Инжењеринг” у Београду, ул. Висока 29.

Школске 1995/96 год. уписао је Грађевинско-Архитектонски факултет Универзитета у Приштини, одсек Грађевина, смер Конструктивни, и дипломирао је 07.09.1999. год. Магистарске студије је уписао школске 2005/2006 год. на Факултету за градитељски менаџмента Универзитета “Унион” у Београду (сада „Унион – Никола Тесла“) и 10.09.2007. год. одбранио магистарску тезу под називом “*Поступак грађевинске калкулације у информационом саставу пројекта*” и стекао научни степен магистар техничких наука у области грађевинарства. Септембра 2013. год. пријавио је докторску дисертацију под називом “*Оптимални избор извођача радова на пројекту са становишта трошкова и времена*” на Факултету техничких наука у Косовској Митровици, Универзитета у Приштини. Јуна 2016. год. поднео је завршену дисертацију на 285 страна основног текста са литературом и 277 страна прилога, коју је априла 2017. год. сажимањем и изостављањем четири прилога свео на 263 + 9 страна.

Радам у Компанији “Градитељ-Инжењеринг” стицао је практична искуства полазећи од руковођења извођењем грађевинских објеката, сарадника у Пројектном бироу за пројектовање стамбених објеката, руководиоца стручног тима за израду пројеката и извођење стамбено-пословних објеката, те успешног руководиоца Компаније.

Професионални и научни интерес су му у области управљања пројектима применом савремених метода и информационих технологија, што је резултовало са 3 обимна материјала без формалне рецензије за примену софтвера Примавера у пакси управљања једним пројектом и истовремено са више пројеката (први аутор), 18 научних радова на међународним симпозијумима који се одржавају код нас (коаутор на 8 радова, аутор једног рада и први аутор на 9 радова) и 4 рада у научним часописима (први аутор на једним радом у домаћем часопису међународног значаја и 3 рада у страним часописима). У поступку рецензије су 2 рада за стране часописе.

Директор је и сувласник Компаније „Градитељ-Инжењеринг“ д.о.о. у Београду, ул. Висока 29. <http://www.graditelj-inzenjering.co.rs/>. Сувласник је и Председник Управног одбора Универзитета „Унион – Никола Тесла“ у Београду, ул. Цара Душана 62-64. <http://www.fpb.edu.rs/>. Говори енглески језик и служи се руским језиком.

Рад у Компанији “Градитељ-инжењеринг” д.о.о. Београд

1992.–1998. руководилац на градилиштима Компаније за надзиђивање великог броја објеката на територији општине Чукарица (стамбене зграде, Дом здравља и др.).

1999 –2000. сарадник у Пројектном бироу Компаније и учешће у пројектовању стамбених објеката које је изводила Компанија.

2001.–2004. руководилац за израду пројеката и извођење стамбено-пословних објеката (4).

Од краја 2004. год. Директор Компаније која успешно послује (изграђено 11 стамбено-пословних објеката, 1 у изградњи).

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Звонимир С. Божиловић
број индекса _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом
ОПТИМАЛНИ ИЗБОР ИЗВОЂАЧА РАДОВА НА ПРОЈЕКТУ
СА СТАНОВИШТА ТРОШКОВА И ВРЕМЕНА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Косовској Митровици, _____

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Звонимир С. Божиловић

Број индекса _____

Студијски програм ГРАЂЕВИНСКО ИНЖЕЊЕРСТВО

Наслов рада **ОПТИМАЛНИ ИЗБОР ИЗВОЂАЧА РАДОВА НА ПРОЈЕКТУ
СА СТАНОВИШТА ТРОШКОВА И ВРЕМЕНА**

Ментор др Велимир Дутина, ред. Проф.
Факултет техничких наука, Косовска Митровица

Потписани/а _____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици.

Потпис докторанда

У Косовској Митровици, _____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ОПТИМАЛНИ ИЗБОР ИЗВОЂАЧА РАДОВА НА ПРОЈЕКТУ
СА СТАНОВИШТА ТРОШКОВА И ВРЕМЕНА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Косовској Митровици, _____