UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivana Vojnović

Mikrolokalne distribucije defekta i primene

-doktorska disertacija-

Novi Sad, 2017. godine

Predgovor

H-mere, ili mikrolokalne mere defekta, su početkom devedesetih godina prošlog veka nezavisno uveli Luk Tartar [34] i Patrik Žerar [19]. Pošto su se pojavile u vezi sa problemima iz teorije homogenizacije, Tartar ih je nazvao H-merama. H-mere su vrsta Radonovih mera koje opisuju limes kvadratnih izraza L^2 funkcija i mere odstupanje slabe od jake konvergencije. Mere defekta kao mere koje zavise samo od promenljive x nisu precizno opisivale efekte koji zavise od određenog pravca u prostoru.

Preciznije, neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup i neka je $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ograničen niz u $L^2_{loc}(\Omega)$ tako da $u_k \rightharpoonup u$ slabo u L^2_{loc}. Zanima nas opis gubitka jake kompaktnosti u $L^2_{loc}(\Omega)$ skupa $\{u, u_k : k \in \mathbb{N}\}$. Prvi odgovor na ovo pitanje nam pruža pojam mere defekta. Niz

$$\nu_k = |u_k - u|^2$$

je ograničen u $L^1_{loc}(\Omega)$, pa možemo pretpostaviti da slabo konvergira ka Radonovoj meri ν, koju zovemo merom defekta za (u_k). Nosač od ν je skup tačaka u Ω gde u_k ne konvergira ka u u jakoj topologiji u L^2. Odnosno, ovako imamo način da klasifikujemo defekt kompaktnosti.

Na primer, ako je $u_k(x) = e^{ikx\cdot\xi_0}$, gde je $\xi_0 \in \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, onda je ν Lebegova mera i do defekta dolazi zbog oscilovanja niza (u_k). Kako se oscilacije dešavaju skoro svuda na Ω , onda je defekt prisutan svuda u Ω (nedostatak jake konvergencije). Dalje, ako je $u_k(x) = (2\pi k)^{d/2} e^{-k|x-x_0|^2/2}$, onda je ν Dirakova mera u x_0 i do defekta dolazi zbog efekta koncentracije niza oko tačke x_0. H-mere ili mikrolokalne mere defekta nam daju detaljnije informacije o gubitku kompaktnosti. U slučaju prvog niza pridružena mikrolokalna mera defekta μ je u obliku $\mu = dx \otimes \delta_{\xi_0/|\xi_0|}$, to jest imamo proizvod Lebegove mere na $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ i Dirakove mere na sferi $\mathbb{S}^{d-1}$. Njena projekcija na Ω je mera ν, ali su nizovi koji osciluju sada bolje opisani.

H-mere su neprekidna, linearna preslikavanja na $C_c(\mathbb{R}^d) \otimes C(\mathbb{S}^{d-1})$, gde je $C_c(\mathbb{R}^d)$ prostor neprekidnih funkcija sa kompaktnim nosačem u $\mathbb{R}^d$, a $C(\mathbb{S}^{d-1})$ je prostor neprekidnih funkcija na jediničnoj sferi $\mathbb{S}^{d-1}$ u $\mathbb{R}^d$. Preciznije, za slabo konvergentan niz $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ postoji Radonova mera μ tako da za sve

$\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R}^d)$ i sve $\psi \in C(\mathbb{S}^{d-1})$ postoji podniz (u_n) tako da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}(\varphi_1 u_n)\overline{\mathscr{F}(\varphi_2 u_n)}\psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)d\xi = \langle \mu, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \otimes \psi\rangle, \tag{1}$$

gde $\mathscr{F}$ označava Furijeovu transformaciju.

H-mere se uglavnom primenjuju u problemima koji se odnose na hiperbolične parcijalne diferencijalne jednačine. Na primer, u radu [5] je dobijena L^1_{loc} prekompaktnost za rešenja difuziono-disperzione aproksimacije za skalarni zakon održanja. Takođe se H-mere primenjuju i u paraboličnim (npr. u radu [10]) i ultraparaboličnim (rad [27]) problemima.

H-distribucije koje su uvedene u radovima [11], odnosno, [7] uopštavaju koncept H-mera sa L^2 na L^p, $p \neq 2$ i prostore Soboljeva, redom. U dokazu postojanja H-distribucija koristi se Hermander-Mihlinova teorema i test funkcije po ξ imaju veću regularnost. Naime, $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$ za $\kappa = [d/2]+1$.

Da bismo konstruisali H-distribuciju za par nizova u dualnim prostorima Soboljeva u radu [7] koristimo test funkcije $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (na taj način nosač ne mora da bude kompaktan). U ovom slučaju H-distribucije su funkcionele na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \otimes C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$ i pripadaju prostoru koji označavamo sa $\mathscr{S}\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$ i čija topologija je opisana u radu [7]. Navedimo teoremu o postojanju H-distribucija (kao u radu [7]):

ako $u_n \rightharpoonup 0$ *u* $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ *i* $v_n \rightharpoonup 0$ *u* $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$*, onda postoje podnizovi* $(u_{n'}), (v_{n'})$ *i H-distribucija* $\mu \in \mathscr{S}\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$ *tako da je za sve* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *i za sve* $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$\lim_{n'\to\infty} \langle \mathscr{A}_\psi(\varphi_1 u_{n'}), \varphi_2 v_{n'}\rangle = \lim_{n'\to\infty} \langle \varphi_1 u_{n'}, \mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi_2 v_{n'})\rangle = \langle \mu, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \otimes \psi\rangle, \tag{2}$$

gde je $\mathscr{A}_\psi(u) = \mathscr{F}^{-1}(\psi\mathscr{F}u)$. Štaviše, u [7] mogućnost stroge konvergencije datog slabo konvergentnog niza $u_n \rightharpoonup 0$ u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ se testira preko svih nizova $v_n \rightharpoonup 0$ u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$.

U radu [8] funkcija ψ nije ograničena. Zato koristimo odgovarajuću klasu pseudo-diferencijalnih operatora da bismo imali ograničenost operatora

$$\mathscr{A}_\psi : W^{k+m,q}(\mathbb{R}^d) \to W^{k,q}(\mathbb{R}^d),$$

pri čemu je cilj da pretpostavke za regularnost funkcije ψ budu minimalne. Sada se jaka konvergencija niza $u_n \rightharpoonup 0$ u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ testira za sve nizove $v_n \rightharpoonup 0$ u $W^{k+m,q}(\mathbb{R}^d)$ i za pozitivne m važi da je $W^{k+m,q}(\mathbb{R}^d) \subset W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$.

Disertacija se sastoji iz četiri dela. U prvom delu uvodimo potrebne definicije i tvrđenja. U drugom delu je dokazana teorema o postojanju H-mera i navedene su osnovne osobine H-mera. U ovom delu pokazujemo i zašto nam H-mere daju poboljšanje u teoriji kompenzovane kompaktnosti. Dali smo i kratak opis

Žerarovog pristupa preko klasične teorije pseudo-diferencijalnih operatora. Treći deo predstavlja rezultate dobijene u radu [7]. Uvode se H-distribucije za nizove u dualnim prostorima Soboljeva, pokazuje se lokalizacijski princip i navedena je primena na slabo konvergentna rešenja određene klase parcijalnih diferencijalnih jednačina. Takođe dajemo i opis prostora $\mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$. Na kraju treće glave pokazujemo da je za slabo konvergentne nizove u $\mathscr{D}'_{L^p} - \mathscr{D}_{L^q}$ prostorima pridružena H-distribucija jednaka nuli. Dalje su predstavljene osobine u vezi sa prostorima $\mathscr{D}_{L^q}$, odnosno predstavljeni su rezultati iz rada [6]. U četvrtom delu konstruišemo H-distribucije sa neograničenim simbolom (množiocem) ψ (rezultati iz rada [8]). Klasu pseudo-diferencijalnih operatora posmatramo kao bilinearna preslikavanja i dokazujemo neprekidnost u odnosu na određenu klasu simbola, pri čemu pretpostavljamo da su simboli (množioci) konačne regularnosti. Pomoću Teoreme 10.7 u [40] analiziramo klase ovih simbola. Dajemo dokaz navedene teoreme, sa objašnjenjima detalja, odnosno ocena koje su potrebne za dokaz neprekidnosti u odnosu na simbole konačne regularnosti. Definišemo klase množilaca za koje kasnije dajemo teoreme o postojanju H-distribucija. Takođe dokazujemo i kompaktnost odgovarajućih komutatora, što nam je potrebno u konstrukciji H-distribucija. Rezultati su primenjeni na klasu parcijalnih diferencijalnih jednačina reda $m \in \mathbb{N}$, sa koeficijentima u $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, pri čemu je za jednačinu dat niz slabo konvergetnih rešenja.

Zahvaljujem se svim članovima komisije na detaljnom čitanju rukopisa disertacije i na komentarima i sugestijama koji su doprineli poboljšanju kvaliteta teksta.

Veoma sam zahvalna profesoru Stevanu Pilipoviću na nesebičnoj pomoći u toku doktorskih studija.

Posebno sam zahvalna svom mentoru, dr Jeleni Aleksić, na svim savetima, prenetom znanju. Njene ideje i podrška su mi mnogo pomogli u naučnom radu.

Veliko hvala i mojim roditeljima, Đuri i Radici, koji me u svim prilikama bodre i pomažu mi.

Novi Sad, 10.3.2017. Ivana Vojnović

Sadržaj

Glava 1

Oznake, definicije, tvrđenja

U ovom poglavlju uvodimo oznake koje ćemo koristiti u disertaciji. Takođe navodimo definicije i poznate rezultate u vezi sa prostorima Soboljeva, Furijeovim množiocima i pseudo-diferencijalnim operatorima.

1.1 Oznake i osnovne definicije

Sa $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ i $\mathbb{C}$ označavamo, redom, skupove realnih, prirodnih i kompleksnih brojeva. Sa $\mathbb{N}_0$ označavamo skup $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ako $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, onda je norma vektora x definisana sa $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$. Za $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ i multi-indekse $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ i $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ koristimo standardne oznake:

- $\langle x \rangle^s = (1 + |x|^2)^{s/2}$, $s \in \mathbb{R}$,
- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_d$,
- $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_d + \beta_d)$,
- $\alpha \leq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i$, $1 \leq i \leq d$.

Zatim, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_d}^{\alpha_d}$, gde je $D_{x_i} = -i\partial/\partial_{x_i}$, $1 \leq i \leq d$. Skalarni proizvod vektora x i ξ je dat sa $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \ldots x_d\xi_d$. Koristimo i oznaku $đ\xi = (2\pi)^{-d} d\xi$.

Navodimo još i definicije jake, slabe i slabe zvezda konvergencije u Banahovom prostoru. Neka je $(E, \|\cdot\|_E)$ Banahov prostor i E' njegov dualan prostor.

Definicija 1.1.1 (Jaka konvergencija) *Neka $x \in E$ (respektivno $f \in E'$) i neka je $(x_n) \subset E$ (respektivno$(f_n) \subset E'$). Kažemo da (x_n) (respektivno (f_n)) jako konvergira ka x u E (respektivno f u E') i pišemo $x_n \to x$ (respektivno $f_n \to f$) ako*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_E = 0, \text{ (respektivno } \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{E'} = 0).$$

Definicija 1.1.2 (Slaba konvergencija u E) *Neka $x \in E$ i $(x_n) \subset E$. Kažemo da (x_n) slabo konvergira ka x u E i pišemo $x_n \rightharpoonup x$ ako*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \ n \to \infty,$$

za sve $f \in E'$.

Definicija 1.1.3 (Slaba-$\star$ konvergencija) *Neka $f \in E'$ i $(f_n) \subset E'$. Kažemo da (f_n) slabo-$\star$ konvergira ka f u E' i pišemo $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ ako*

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$$

za sve $x \in E$.

Važe sledeća tvrđenja (za detalje pogledati [17]).

Teorema 1.1.4 *Ako je (x_n) ograničen niz u refleksivnom Banahovom prostoru, onda postoji slabo konvergentan podniz od (x_n).*

Teorema 1.1.5 (Alaoglu) *Ako je $(f_n) \subset E'$ ograničen u E' i ako je E separabilan Banahov prostor, onda postoji slabo - $\star$ konvergentan podniz datog niza.*

Teorema 1.1.6 *Pretpostavimo da $x_n \rightharpoonup x$ (resp. $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$) u E (resp. E'). Tada je (x_n) (resp. (f_n)) ograničen niz u E (resp. E').*

1.2 Prostori funkcija i distribucija

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definišemo nosač na sledeći način

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Navedimo sada prostore funkcija koje ćemo koristiti.

- Sa $C(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih funkcija na Ω.
- Sa $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ označavamo prostor k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na Ω.
- Sa $C^\infty(\Omega)$ označavamo prostor glatkih funkcija na Ω, odnosno
  $$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega).$$
- $C_c(\Omega)$ je prostor neprekidnih funkcija sa kompaktnim nosačem.

- Sa $C_c^\infty(\Omega)$ (ili $\mathscr{D}(\Omega)$) označavamo prostor C^∞-funkcija $f:\Omega\to\mathbb{C}$ sa kompaktnim nosačem.
- Sa $C_0(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih funkcija koje konvergiraju ka nuli u beskonačnosti.

Sa $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ označavamo prostor brzo opadajućih funkcija. Dajemo i preciznu definiciju.

Definicija 1.2.1 *Prostor brzo opadajućih funkcija $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ definišemo na sledeći način:*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha(\partial^\beta\varphi)(x)| < \infty,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d\}.$$

Na prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ uvodimo semi-norme za $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d$

$$|\varphi|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha(\partial^\beta\varphi)(x)|\ . \tag{1.1}$$

Sa ovako uvedenim semi-normama $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ postaje Frešeov prostor, odnosno metrizabilan i kompletan prostor.

Dalje, sa $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ označavamo prostor distribucija, to jest linearnih preslikavanja $u:\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$, odnosno $u:\varphi\mapsto\langle u,\varphi\rangle$ tako da za svaki kompaktan skup $K\subset\mathbb{R}^d$ postoji $m\in\mathbb{N}$ i $C>0$ tako da je

$$|\langle u,\varphi\rangle| \le C \sup_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^\alpha\varphi(x)|,$$

za sve $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ tako da je $\mathrm{supp}\varphi\subset K$.

Sa $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ označavamo prostor temperiranih distribucija, odnosno skup linearnih, neprekidnih funkcionela na prostoru brzo opadajućih funkcija $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Preciznije,

Definicija 1.2.2 *Funkcionela $u:\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$ je temperirana distribucija ako važe uslovi:*

1. *u je linearna;*
2. *u je neprekidna na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, odnosno postoji $k\in\mathbb{N}_0$ i postoji $c>0$ tako da je*

$$|\langle u,\varphi\rangle| \le c \sum_{|\alpha|,|\beta|\le k} |\varphi|_{\alpha,\beta}, \quad \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

1.2.1 Prostori Soboljeva, Beselovi prostori

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup.

Definicija 1.2.3 *Za $1 \leq p < \infty$ definišemo*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\},$$

i uvodimo normu

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Definicija 1.2.4 *Za $p = \infty$ definišemo*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \textit{ je Lebeg merljiva i postoji konstanta } C \\ \textit{tako da je } |f(x)| \leq C \textit{ za skoro sve } x \in \Omega \end{array} \right\},$$

sa normom

$$\|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C \textit{ za skoro sve } x \in \Omega\}.$$

Furijeovu transformaciju funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definišemo sa

$$\hat{f}(\xi) = \mathscr{F}[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx.$$

Inverzna Furijeova transformacija je data sa

$$\mathscr{F}^{-1}(u)(x) = u(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi) d\xi,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Furijeova transformacija je linearni topološki izomorfizam, to jest. linearno, bijektivno, neprekidno preslikavanje sa neprekidnim inverzom iz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (odnosno $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$) u sebe.

Za sve $1 \leq p \leq \infty$ prostori $L^p(\Omega)$ su Banahovi i refleskivni su za $1 < p < \infty$, a za $1 \leq p < \infty$ su i separabilni. Ako je $1 \leq p < \infty$, onda je dual prostora $L^p(\Omega)$ prostor $L^q(\Omega)$, gde je $1/p + 1/q = 1$. Preciznije, važi sledeća teorema (za dokaz pogledati [15]).

Teorema 1.2.5 (Risova teorema o reprezentaciji) *Neka je $1 \leq q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ i neka $f \in (L^q(\Omega))'$. Tada postoji jedinstveno $g \in L^p(\Omega)$ tako da je*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega g\varphi dx \textit{ za sve } \varphi \in L^q(\Omega).$$

Važi da je $\|g\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{(L^q(\Omega))'}$.

Iz Definicije 1.1.2 i Teoreme 1.2.5 sledi da niz (f_n) u $L^p(\Omega)$ slabo konvergira ka $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, u oznaci $f_n \rightharpoonup f$ ako

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx \text{ za sve } \varphi \in L^q(\Omega),\ 1/p + 1/q = 1.$$

Za $p = \infty$ kažemo da niz (f_n) u $L^\infty(\Omega)$ slabo -$\star$ konvergira ka $f \in L^\infty(\Omega)$ ako

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx \text{ za sve } \varphi \in L^1(\Omega).$$

Kako prostor $L^1(\Omega)$ nije refleksivan, ograničeni nizovi ne moraju da imaju slabo konvergentne podnizove (Teorema 1.1.4).

Primer 1.2.6 *Niz $n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$ je ograničen u $L^1(\mathbb{R})$, gde je $\chi_{(0,\frac{1}{n})}$ karakteristična funkcija intervala $(0, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Dati niz nema slabo konverentan podniz. U suprotnom, ako je $n_k\chi_{(0,\frac{1}{n_k})}$, $k \in \mathbb{N}$ konvergentan podniz datog niza, onda važi $n_k\chi_{(0,\frac{1}{n_k})} \rightharpoonup 0$, što je u suprotnosti sa $\int n\chi_{(0,\frac{1}{n})} = 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

Nedostatak slabe kompaktnosti, odnosno nedostatak osobine da ograničeni nizovi imaju slabo konvergentne podnizove, za prostor $L^1(\Omega)$ se prevazilazi ako se $L^1(\Omega)$ posmatra kao podskup prostora konačnih Radonovih mera koje menjaju znak. Podsetimo se prvo pojmova lokalno kompaktnog topološkog prostora, Hauzdorfovog prostora, σ-kompaktnog prostora i Radonove mere. Definicije i tvrđenja dajemo za opšte topološke prostore (X, τ).

Definicija 1.2.7 *Topološki prostor (X, τ) je Hauzdorfov ako za svake dve tačke $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$ postoje otvoreni skupovi U i V tako da $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Definicija 1.2.8 *Topološki prostor (X, τ) je lokalno kompaktan ako svaka tačka u X ima kompaktnu okolinu.*

Definicija 1.2.9 *Topološki prostor (X, τ) je σ-kompaktan ako može da se predstavi kao unija prebrojivo mnogo kompaktnih potprostora.*

Sada definišemo Radonovu meru. Za detalje u vezi sa Radonovim merama i dokaze narednih teorema preporučujemo knjigu [30].

Definicija 1.2.10 *(**Radonova mera**) Neka je X lokalno kompaktan, Hauzdorfov prostor, koji je i σ-kompaktan i neka je $\mathscr{B}$ Borelova σ-algebra na X. Radonova mera je mera $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^+$ sa sledećim osobinama:*

1. *(Lokalna konačnost) Za svaki kompaktan podskup K od X je $\mu(K)$ konačan broj;*

2. *(Spoljašnja regularnost) Za svaki Borelov skup E u X je $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U$ otvoren $\}$;*

3. *(Unutrašnja regularnost) Za svaki Borelov skup E u X je $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K$ kompaktan$\}$.*

Linearna funkcionela L na $C_c(X) \to \mathbb{R}$ je pozitivna ako je $L(f) \geq 0$ za sve $f \geq 0$.

Teorema 1.2.11 *Neka je X lokalno kompaktan Hauzdorfov prostor koji je takođe i σ-kompaktan. Neka je $L : C_c(X) \to \mathbb{R}$ pozitivna linearna funkcionela. Tada postoji jedinstvena Radonova mera μ na X tako da je*

$$L(f) = \int_X f d\mu, \text{ za sve } f \in C_c(X).$$

Radonovu meru koja menja znak na σ-kompaktnom, lokalno kompaktnom Hausdorfovom prostoru X definišemo kao Borelovu meru koja menja znak i čiji pozitivan i negativan deo su takođe Radonove mere (detalji se mogu naći u [30]).

Teorema 1.2.12 (Risova teorema o reprezentaciji za mere koje menjaju znak) *Neka je X lokalno kompaktan Hauzdorfov prostor koji je takođe i σ-kompaktan. Neka je $L : C_c(X) \to \mathbb{R}$ neprekidna linearna funkcionela. Tada postoji jedinstvena konačna Radonova mera μ na X, koja menja znak, tako da je*

$$L(f) = \int_X f d\mu, \text{ za sve } f \in C_c(X).$$

Teorema 1.2.13 (Dual prostora $C_0(X)$) *Neka je X lokalno kompaktan, Hauzdorfov, σ-kompaktan prostor i L neprekidna linearna funkcionela na $C_0(X)$. Tada postoji jedinstvena konačna Radonova mera μ, koja menja znak, tako da je*

$$L(f) = \int_X f d\mu, \text{ za sve } f \in C_0(X).$$

Neka je $\mathscr{M}(X)$ prostor mera iz Teoreme 1.2.13. Neka je $X = \Omega$, gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Prostor $\mathscr{M}(\Omega)$ snabdeven normom totalne varijacije, datom sa $\|\mu\|_{\mathscr{M}(\Omega)} = |\mu|(\Omega)$, postaje Banahov prostor. Kako je $(C_0(\Omega))' = \mathscr{M}(\Omega)$, imamo slabu-$\star$ konvergenciju na $\mathscr{M}(\Omega)$:

$$\mu_k \stackrel{\star}{\rightharpoonup} \mu \iff \int f d\mu_k \to \int f d\mu, \text{ za sve } f \in C_0(\Omega).$$

Kako je $\|f\|_{L^1} = \|f dx\|_{\mathscr{M}(\Omega)}$, gde je dx Lebegova mera na Ω, svaki ograničen $L^1(\Omega)$ niz ima slabo-$\star$ konvergentan podniz u $\mathscr{M}(\Omega)$.

Navodimo dalje Helderovu i Jangovu nejednakost, pošto ćemo ih koristiti u nastavku.

Teorema 1.2.14 (Helderova nejednakost) *Neka je $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$. Tada $fg \in L^1(\Omega)$ i*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \tag{1.2}$$

Teorema 1.2.15 (Jangova nejednakost) *Neka $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ i $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Tada konvolucija $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ i*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.3}$$

Dakle, za $r = p, q = 1$ dobijamo $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$, što ćemo koristiti kasnije u drugom delu dokaza Teoreme 4.3.4.

Uvodimo dalje distribucije koje se lokalno ponašaju kao elementi od $L^p(\Omega)$.

Definicija 1.2.16 *Neka je $1 \leq p \leq \infty$. Sa $L^p_{loc}(\Omega)$ označavamo prostor distribucija $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tako da $\varphi u \in L^p(\Omega)$ za sve $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Prostor $L^p_{loc}(\Omega)$ snabdevamo topologijom definisanom familijom semi-normi $u \mapsto \|\varphi u\|_{L^p}$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Dalje navodimo definiciju i osobine prostora Soboljeva (dokazi se mogu naći u [3]).

Definicija 1.2.17 *Za $1 \leq q \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$, prostor Soboljeva $W^{k,q}(\Omega)$ je definisan sa*

$$W^{k,q}(\Omega) := \left\{ u \in L^q(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\alpha,\ |\alpha| \leq k,\ \exists g_\alpha \in L^q(\Omega) \text{ tako da je} \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}.$$

Za $u \in W^{k,q}(\Omega)$ definišemo $D^\alpha u = g_\alpha$. Na prostoru $W^{k,q}(\Omega)$ definišemo normu

$$\|u\|_{W^{k,q}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left\| D^\alpha u \right\|_{L^q}. \tag{1.4}$$

Važi sledeća teorema.

Teorema 1.2.18 *Prostor $W^{k,p}(\Omega)$ je Banahov za svako $1 \leq p \leq \infty$. $W^{k,p}(\Omega)$ je refleksivan za $1 < p < \infty$ i separabilan je za $1 \leq p < \infty$.*

Na prostoru $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ je moguće definisati i skalarni proizvod

$$(u,v)_{H^k} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u\, \overline{D^\alpha v} dx,$$

odnosno $H^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor.

Ako je $kq > d$, onda je $W^{k,q}(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$. Dual $\big(W^{k,q}(\mathbb{R}^d)\big)' =: W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ je izometrično izomorfan sa Banahovim prostorom koji se sastoji od distribucija $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ koje su u obliku $u = \sum\limits_{|\alpha|\le k} \partial^\alpha u_\alpha$, gde $u_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Normu na $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ definišemo sa

$$\|u\| := \inf\Big\{\Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|u_\alpha\|_p^p\Big)^{1/p}\,\Big|\, u = \sum_{|\alpha|\le k} \partial^\alpha u_\alpha\Big\}.$$

Za više detalja upućujemo na knjigu [3], Teorema 3.10, str. 50.

Definišemo i Beselove prostore $H_s^p(\mathbb{R}^d)$.

Definicija 1.2.19 *Neka je* $1 \le p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$. *Tada je*

$$H_s^p(\mathbb{R}^d) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : \mathscr{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^s \mathscr{F}u) \in L^p(\mathbb{R}^d)\}.$$

Prostor $H_s^p(\mathbb{R}^d)$ je Banahov sa normom $\|u\|_{s,p} = \|\mathscr{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^s\mathscr{F}u)\|_{L^p}$. Važi $(H_s^p(\mathbb{R}^d))' = H_{-s}^q(\mathbb{R}^d)$, za $q = p/(p-1)$, videti [3]. Takođe je i $H_k^p(\mathbb{R}^d) = W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ za $k \in \mathbb{N}_0$ i $1 \le p < \infty$ (pogledati [2]).

Na $H_s(\mathbb{R}^d) = H_s^2(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$, uvodimo unutrašnji proizvod

$$(u,v)_{H^s} = \int \langle\xi\rangle^{2s}\mathscr{F}u(\xi)\overline{\mathscr{F}v(\xi)}d\xi$$

i pridruženu normu

$$\|u\|_s^2 = \int \langle\xi\rangle^{2s}|\mathscr{F}(\xi)|^2 d\xi, \tag{1.5}$$

pri čemu su norme (1.4) i (1.5) ekvivalentne, kad je $s \in \mathbb{N}_0$. Prostor $H_s(\mathbb{R}^d)$ je Hilbertov, za sve $s \in \mathbb{R}$. Prema Planšerelovoj teoremi za $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ važi da $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \mathscr{F}u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, pa sledi da je $H^0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$. Za $t \le s$ iz definicije sledi da je $H^s(\mathbb{R}^d) \subset H^t(\mathbb{R}^d)$ i injekcija iz $H^s(\mathbb{R}^d)$ u $H^t(\mathbb{R}^d)$ je neprekidna.

Definicija 1.2.20 *Neka je F zatvoreni podskup od $\mathbb{R}^d$ i $s \in \mathbb{R}$. Sa $H_F^s(\mathbb{R}^d)$ označavamo potprostor od H^s čiji elementi imaju nosač u F. Prostor $H_F^s(\mathbb{R}^d)$ je zatvoren potprostor u H^s i snabdevamo ga indukovanom strukturom Hilbertovog prostora H^s.*

1.3 Kompaktni operatori

Podsetimo se (detalji se mogu naći u [29]), kompaktan operator je linearan operator L iz Banahovog prostora X u Banahov prostor Y, tako da je slika svakog ograničenog podskupa u X relativno kompaktan podksup u Y (relativno kompaktan podskup je podksup koji ima kompaktno zatvorenje). Ovakav operator je ograničen, pa je i neprekidan. Može se pokazati da je ovakva definicija kompaktnog operatora ekvivalentna sa tvrđenjem da za svaki niz (x_n) u jediničnoj lopti u X niz (Tx_n) ima Košijev podniz u Y. Sa $\mathscr{K}(X,Y)$ označavamo prostor kompaktnih operatora iz X u Y.

Navodimo Relihovu teoremu, koju ćemo često koristiti u nastavku.

Teorema 1.3.1 (Relih) *Neka su $s,t \in \mathbb{R}$ tako da je $s > t$ i neka je K kompaktan podskup u $\mathbb{R}^n$. Tada je injekcija $H^s_K(\mathbb{R}^n) \to H^t_K(\mathbb{R}^n)$ kompaktna.*

Ako su X i Y Banahovi prostori, onda sa $\mathscr{L}(X,Y)$ označavamo prostor linearnih, neprekidnih preslikavanja iz X u Y. Važi sledeća teorema.

Teorema 1.3.2 *Neka su X i Y Banahovi prostori i neka $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Ako su $T_n, n \in \mathbb{N}$ kompaktni operatori i ako $T_n \to T$ u normi, onda je i T kompaktan operator.*

Neka je $\mathscr{H}$ Hilbertov prostor.

Definicija 1.3.3 *Operator $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ je Hilbert-Šmitov ako i samo ako je tr $T^*T < \infty$.*

Sa tr T^*T smo označili trag operatora T^*T (definicija traga je data u [29], strana 206). Svaki Hilbert-Šmitov operator je kompaktan (Teorema VI.22 u [29]). Sledeće tvrđenje (Teorema VI.23 u [29]) ćemo korisiti u dokazu komutacijske leme za H-mere.

Teorema 1.3.4 *Neka je $(M,\mathscr{M})$ merljiv prostor i neka je $\mathscr{H} = L^2(M,d\mu)$. Tada je $A \in \mathscr{L}(H)$ Hilbert-Šmitov operator ako i samo ako postoji funkcija $K \in L^2(M \times M)$ tako da je $(Af)(x) = \int K(x,y)f(y)d\mu$.*

1.4 Furijeovi množioci

Uvodimo definiciju Furijeovog množioca. Neka $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i $\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Sa $\mathscr{A}_\psi(f)$ označavamo konvoluciju $(\mathscr{F}^{-1}\psi) * f$ i ovu oznaku ćemo koristiti u nastavku.

Definicija 1.4.1 *Neka $\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ i $1 \leq p \leq \infty$. Tada je ψ Furijeov množilac na $L^p(\mathbb{R}^d)$ ako $(\mathscr{F}^{-1}\psi) * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ za sve $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i ako je*

$$\sup_{\|f\|_{L^p}=1} \|\mathscr{F}^{-1}\psi * f\|_{L^p} < \infty.$$

Sa $M_p(\mathbb{R}^d)$ označavamo prostor Furijeovih množilaca na $L^p(\mathbb{R}^d)$. Definišemo $\|\psi\|_{M_p} = \sup_{\|f\|_{L^p}=1} \|(\mathscr{F}^{-1}\psi) * f\|_{L^p}$.

Pošto je $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ gust u $L^p(\mathbb{R}^d)$ (za $1 \le p < \infty$) preslikavanje iz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$ dato sa $f \mapsto (\mathscr{F}^{-1}\psi) * f$ može da se proširi do preslikavanja iz $L^p(\mathbb{R}^d)$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$ sa istom normom. Važi sledeće tvrđenje (dokaz se može naći u [33]).

Teorema 1.4.2 *Neka je $1 \le p \le \infty$. Tada važi:*

1. *$M_p(\mathbb{R}^d)$ je Banahova algebra i $\|\cdot\|_{M_p}$ je norma na $M_p(\mathbb{R}^d)$;*
2. *$M_2(\mathbb{R}^d) = L^\infty(\mathbb{R}^d)$;*
3. *$M_p(\mathbb{R}^d) = M_q(\mathbb{R}^d)$ za $1/p + 1/q = 1$;*
4. *$M_1(\mathbb{R}^d) \subset M_p(\mathbb{R}^d) \subset M_2(\mathbb{R}^d)$.*

Primetimo da iz Teoreme 1.4.2 sledi da su Furijeovi množioci ograničene funkcije i da je $\|\psi\|_\infty \le \|\psi\|_{M_p}$.

Dovoljan uslov da funkcija ψ bude u prostoru $M_p(\mathbb{R}^d)$ daje nam Mihlinova teorema (videti [21] i [26]).

Teorema 1.4.3 *Neka je $1 < p < \infty$, $k > d/2$ i $\psi \in C^k(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$. Ako ψ zadovoljava*

$$|\partial^\alpha \psi(\xi)| \le B|\xi|^{-|\alpha|}, \ |\alpha| \le k \ \ i \ |\xi| > \xi_0 > 0,$$

onda $\psi \in M_p(\mathbb{R}^d)$, to jest. postoji konstanta $C = C(d,p)$ tako da je

$$\|\mathscr{A}_\psi(f)\|_{L^p} \le CB\|f\|_{L^p}, \text{ za sve } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Ako je $\psi \in C^\kappa(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$, $\kappa = [\frac{d}{2}] + 1$, homogena funkcija reda nula (to jest, $\psi(\lambda\xi) = \psi(\xi)$, $\lambda > 0$), onda $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ i

$$|\partial^\alpha \psi(\xi)| \le B|\xi|^{-|\alpha|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}, \tag{1.6}$$

za sve $|\alpha| \le \kappa$ (sa $B = \max\limits_{|\alpha|\le\kappa} \sup\limits_{\xi\neq 0} |\xi|^\alpha |\partial^\alpha \psi(\xi)|$, što je detaljno obrazloženo u [2, str. 120]). Dakle, ψ zadovoljava uslove Mihlinove teoreme, odnosno $\|\psi\|_{M_p} \le CB$.

Ako $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$, onda konstanta B u (1.6) može da se zameni sa $\|\psi\|_{C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})}$. Mihlinovu teoremu sa konstantom B u takvom obliku ćemo koristiti u dokazu Teoreme 3.2.2, videti (3.16).

1.5 Pseudo-diferencijalni operatori

Koristeći poznate osobine Furijeove transformacije znamo da za $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\mathscr{F}(D^\alpha \phi)(\xi) = \xi^\alpha \mathscr{F}\phi(\xi).$$

Iz formule za inverznu Furijeovu transformaciju sledi

$$D^\alpha \phi(x) = \int e^{ix\cdot\xi} \xi^\alpha \mathscr{F}\phi(\xi) đ\xi.$$

Za opšti linerani parcijalni diferencijalni operator sa promenljivim koeficijentima, to jest. $a(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ iz prethodne formule dobijamo

$$a(x,D)\phi(x) = \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\mathscr{F}\phi(\xi) đ\xi,$$

pri čemu je simbol ovog operatora polinom po ξ, to jest

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Cilj je proširiti prethodnu formulu na veću klasu simbola, koja sadrži još funkcija pored polinoma. Operatori koji odgovaraju ovim funkcijama ne moraju biti diferencijalni operatori i zovu se pseudo-diferencijalni operatori. Ideja je da se račun operatora zameni računom pripadnih simbola. Prvo uvodimo pojam oscilatornog integrala.

1.5.1 Jednostavan primer oscilatornog integrala

Pojam oscilatornog integrala je suštinski za teoriju pseudo-diferencijalnih operatora. Furijeova transformacija funkcije (distribucije) temperiranog rasta predstavlja jedan od najjednostavnijih primera oscilatornog integrala. Da bismo objasnili ovaj pojam uvešćemo definiciju Furijeove transformacije neprekidnih funkcija $u(x)$ koje zadovoljavaju sledeći uslov: postoje konstante $C, N > 0$ tako da je

$$|u(x)| \le C\langle x\rangle^N. \tag{1.7}$$

Definišemo $\hat{u}(\xi) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, to jest. želimo da damo značenje sledećoj jednakosti

$$\langle \hat{u}, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\psi(\xi)dxd\xi,\ \psi(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{1.8}$$

pri čemu neprekidna funkcija u zadovoljava uslov (1.7). Prikazaćemo način za regularizaciju integrala (1.8), odnosno, pošto u opštem slučaju ovaj integral nije konvergentan, način da od integrala (1.8) dođemo do konvergentnog integrala.

Regularizacija.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ i $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pretpostavimo prvo da je $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Neka je $D = (D_1, \dots, D_n)$ i $\langle D \rangle = (1 + D_1^2 + \dots D_n^2)^{1/2}$. Koristićemo $\langle D \rangle^k$, gde je k paran prirodan broj, pa je $\langle D \rangle^k$ diferencijalni operator. Primetimo da je

$$e^{-ix\cdot\xi} = \langle x \rangle^{-k} \langle D_\xi \rangle^k e^{-ix\cdot\xi} \tag{1.9}$$

i kad ovu jednakost uvrstimo u (1.8) dobijamo

$$\langle \hat{u}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\psi(\xi)\langle x \rangle^{-k} \langle D_\xi \rangle^k e^{-ix\cdot\xi} dx d\xi. \tag{1.10}$$

Primenom parcijalne integracije sledi

$$\langle \hat{u}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \langle x \rangle^{-k} u(x) \langle D_\xi \rangle^k \psi(\xi) dx d\xi. \tag{1.11}$$

Dobijeni integral nije definisan samo za $u(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ili za apsolutno integrabilnu funkciju $u(x)$, već i za funkciju $u(x)$ koja zadovoljava uslov (1.7), kad je $k > N + d$. U tom slučaju integral (1.11) konvergira apsolutno i posmatramo ga kao regularizaciju integrala (1.8).

Navedenu tehniku regularizacije ćemo koristiti u Glavi 4.

1.5.2 Definicija oscilatornog integrala, prostor simbola

Sada se bavimo integralima koji su u opštijem obliku u odnosu na integral dat formulom (1.8). Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup i posmatrajmo izraz

$$I_\Phi(au) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\Phi(x,\xi)} a(x,\xi) u(x) dx d\xi, \tag{1.12}$$

gde je $\xi \in \mathbb{R}^d$, $x \in \Omega$ i $u(x) \in C_c^\infty(\Omega)$. Funkcije Φ i a su, respektivno, fazna funkcija i simbol i definisane su na sledeći način.

Definicija 1.5.1 *Kažemo da je $\Phi(x,\xi)$* **fazna funkcija** *ako su ispunjeni sledeći uslovi*

- $\Phi(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ *je realna funkcija;*
- $\Phi(x,\xi)$ *je pozitivno homogena stepena 1 po ξ, to jest.*

  $$\Phi(x, t\xi) = t\Phi(x,\xi)$$

  za svako $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ i $t > 0$;

- $\Phi(x,\xi)$ *nema karakteristične tačke za* $\xi \neq 0$, *odnosno,* $0 \neq (\Phi_{x_1},\dots,\Phi_{x_d},\Phi_{\xi_1},\dots,\Phi_{\xi_d})(x,\xi)$, *za* $\xi \neq 0$.

Sada definišemo simbole.

Definicija 1.5.2 *Neka su* $m,\rho,\delta \in \mathbb{R}$, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \delta \le 1$. *Elemente prostora* $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *zovemo* **simbolima** *i to su funkcije* $a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *takve da za proizvoljne multiindekse* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ *postoji konstanta* $C_{\alpha,\beta} > 0$ *tako da je*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\ x,\xi \in \mathbb{R}^d. \tag{1.13}$$

Napomena 1.5.3 *Umesto* $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *pisaćemo* S^m. *Ovaj prostor zovemo prostorom standardnih simbola. Preciznije,* $a \in S^m$ *ako za proizvoljne multi-indekse* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ *postoji konstanta* $C_{\alpha,\beta} > 0$ *tako da je*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|},\ x,\xi \in \mathbb{R}^d.$$

Na primer, iz definicije sledi da za sve $m \in \mathbb{R}$, $\langle \xi \rangle^m \in S^m$.

Definicija 1.5.4 *Integral* (1.12), *odnosno integral*

$$I_\Phi(au) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\Phi(x,\xi)} a(x,\xi) u(x) dx d\xi,$$

za koji važi da $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *i* $\Phi(x,\xi)$ *je fazna funkcija zove se* **oscilatorni integral.**

Primer 1.5.5 *Direktno iz definicije sledi da ako* $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$, *onda* $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi) \in S^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}_{\rho,\delta}$. *Ako važi i da* $b(x,\xi) \in S^{m_1}_{\rho,\delta}$, *onda je* $a(x,\xi)\cdot b(x,\xi) \in S^{m+m_1}_{\rho,\delta}$.

Za $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$ definišimo

$$\|a(x,\xi)\|_\eta = \sup_{x,\theta \in \mathbb{R}^d, |\alpha|<\eta, |\beta|<\eta} |\partial_\theta^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \langle \xi \rangle^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|}.$$

Tada je $\|\cdot\|_\eta$, $\eta \in \mathbb{N}$ rastući niz semi-normi i definiše topologiju sa kojom $S^m_{\rho,\delta}$ postaje Frešeov prostor.

Svakom simbolu a odgovara operator T_a na prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dat formulom

$$T_a u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi) \mathscr{F}u(\xi) đ\xi. \tag{1.14}$$

Funkciju a, koja je simbol operatora, označavaćemo i sa $\sigma(T_a)$. Sa Ψ^m označavamo prostor svih pseudo-diferencijalnih operatora reda m, to jest. operatora čiji su simboli iz klase $S^m_{\rho,\delta}$.

Poznato je da je kompozicija pseudo-diferencijalnih operatora ponovo pseudo-diferencijalni operator. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 1.5.6 *Neka $p_1 \in S^{m_1}$, $p_2 \in S^{m_2}$ i neka su T_{p_1} i T_{p_2} pridruženi operatori. Tada postoji $p \in S^{m_1+m_2}$ tako da je $T_{p_1}T_{p_2} = T_p$ i važi*

$$p(x,\xi) = \int\int e^{iy\eta} p_1(x,\xi+\eta) p_2(x+y,\xi)\, dy\, đ\eta,$$

gde p treba posmatrati kao oscilatorni integral.

Pseudo-diferencijalni operatori imaju i osobinu neprekidnosti, odnosno, ako $a \in S^m$, onda $T_a : H^p_s \to H^p_{s-m}$ neprekidno. Preciznije, važi sledeće tvrđenje.

Teorema 1.5.7 *Neka je $T \in \Psi^m$ pseudo-diferencijalni operator reda $m \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ i neka je $a \in S^m$ simbol za T. Tada je $T_a : H^p_s(\mathbb{R}^d) \to H^p_{s-m}(\mathbb{R}^d)$ linearno, neprekidno preslikavanje i važi ocena*

$$\|T_a u\|_{H^p_{s-m}} \leq C\|u\|_{H^p_s}.$$

U nastavku, za $x \in \mathbb{R}^d$ sa $\langle D_x \rangle = \sqrt{1-\Delta}$ označavamo pseudo-diferencijalni operator sa simbolom $\langle \xi \rangle$, odnosno $\langle D_x \rangle f = \int e^{ix\cdot\xi} \langle \xi \rangle \hat{f}(\xi) đ\xi$. Koristićemo i Pitrijevu nejednakost (videti [2]): za sve $s \in \mathbb{R}$ važi

$$\langle \xi \rangle^s \leq 2^{|s|} \langle \xi - \eta \rangle^{|s|} \langle \eta \rangle^s, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^d. \tag{1.15}$$

Za više detalja o pseudo-diferencijalnim operatorima i oscilatnornim integralima upućujemo na knjige [32] i [38].

Glava 2

H-mere, postojanje i osobine

2.1 Motivacija

Prilikom rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina korisno je posmatrati slabu konvergenciju niza. Ilustrovaćemo ovo na primeru Košijevog problema za kvazi-linearni sistem hiperboličnih zakona održanja. Preciznije, posmatramo sistem u obliku

$$u_t + [f(u)]_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

gde je $u = (u_1, u_2, , \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ nepoznata vektorska funkcija i $f(u) = (f_1(u), \dots, f_d(u))$ je data vektorska funkcija. Ove jednačine zovemo zakonima održanja. Pretpostavimo da je u klasično rešenje za (2.1) sa početnim uslovom

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2.2}$$

Sa $C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ označavamo klasu $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ funkcija ϕ koje imaju kompaktan nosač. Ako pomnožimo jednačinu (2.1) sa ϕ nakon parcijalne integracije dobijamo

$$\iint_{t>0} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dxdt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0. \tag{2.3}$$

Definicija 2.1.1 *Ograničena funkcija $u \in L^p$, $1 < p \leq \infty$, gde je $u = u(x,t)$ je slabo rešenje za početni problem* (2.1) *sa L^p ograničenim početnim uslovom u_0, ako* (2.3) *važi za sve $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.*

Da bi se dobilo globalno slabo rešenje za dati zakon održanja uobičajeno je da se doda parabolički perturbacioni izraz na desnu stranu jednakosti (2.1), odnosno posmatramo jednačinu

$$u_t + [f(u)]_x = \varepsilon u_{xx}, \tag{2.4}$$

gde je $\varepsilon > 0$ konstanta. Prvo možemo dobiti niz rešenja (u^ε) Košijevog problema (2.4), (2.2) za svako fiksirano ε, koristeći opštu teoremu za parabolične jednačine (za detalje pogledati [24]). Rešenje koje se tako dobija zove se viskozno rešenje. Dalje pretpostavljamo da je niz viskoznih rešenja (u^ε) uniformno ograničen u $L^p(1 < p \leq \infty)$, što implicira da postoji podniz (u^ε) ovog niza (na isti način označavamo niz i podniz) tako da

$$u^\varepsilon(x,t) \rightharpoonup u(x,t), \quad \text{slabo u } L^p \tag{2.5}$$

i pod odgovarajućim pretpostavkama o f postoji i podniz $(f(u^\varepsilon))$ tako da

$$f(u^\varepsilon(x,t)) \rightharpoonup l(x,t), \quad \text{slabo.} \tag{2.6}$$

Ako je

$$l(x,t) = f(u(x,t)), \tag{2.7}$$

onda je u slabo rešenje sistema (2.1) sa početnim uslovom (2.2) kada pustimo da $\varepsilon \to 0$ u (2.4). Postavlja se pitanje kako može da se dobije slaba neprekidnost (2.7) nelinearne funkcije f u odnosu na niz viskoznih rešenja (u^ε). Teorija kompenzovane kompaktnosti je jedan od načina da se odgovori na ovo pitanje. Motivacija za naziv kompenzovana kompaktnost može da se objasni na sledećem primeru. Naime, ako niz funkcija zadovoljava

$$w^\varepsilon \rightharpoonup w \tag{2.8}$$

pri čemu važi bilo koja od sledećih slabih konvergencija

$$(w^\varepsilon)^2 + (w^\varepsilon)^3 \rightharpoonup w^2 + w^3 \text{ ili } (w^\varepsilon)^2 - (w^\varepsilon)^3 \rightharpoonup w^2 - w^3 \tag{2.9}$$

kada $\varepsilon \to 0$, onda u opštem slučaju $\{w^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ nije kompaktan, to jest. za neprekidnu funkciju f ne mora da postoji podniz ovog niza tako da $f(w^\varepsilon) \rightharpoonup f(w)$. Međutim, ako važe obe konvergencije u (2.9), te ih saberemo, dobijamo da

$$(w^\varepsilon)^2 \rightharpoonup w^2, \tag{2.10}$$

odnosno, ako je f data sa $f(x) = x^2$, onda uslovi (2.9) kompenzuju nedostatak kompaktnosti niza (w^ε). U nastavku ćemo videti na koji način nam H-mere daju opštiju verziju teoreme o kompenzovanoj kompaktnosti.

2.2 Postojanje H-mera

Naziv H-mere je uveo Tartar i nastao je zbog problema iz teorije homogenizacije koji su motivisali njihov nastanak. Žerar ih je nazvao mikrolokalne mere defekta, zato što zavise i od prostorne promenljive x i od promenljive ξ i tako razlikuju oscilacije slabo konvergentnih nizova sa različitim frekvencijama. Prvo izlažemo Tartarov pristup, ([34]), a potom Žerarov.

U nastavku sa $a \otimes b$ označavamo kompleksni tenzorski proizvod dva vektora. Definišemo ga kao linearni operator, to jest preslikavanje $a \otimes b : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$ koje je definisano na sledeći način

$$(a \otimes b)v := (v \cdot b)a,$$

gde je $v \cdot b = \sum_{i=1}^{r} v_i \overline{b_i}$ kompleksni skalarni proizvod, za $a, b, v \in \mathbb{C}^r$. Važi sledeća lema.

Lema 2.2.1 *Ako je $a, b \in \mathbb{C}^r$ onda je $a \otimes b$ linearni operator ranga 1, za $a, b \neq 0$. Za normu ovog operatora važi da je $|a \otimes b| = |a||b|$, matrični zapis ovog operatora je $(a_i \overline{b_j})_{ij}$ i za adjungovani operator imamo formulu $(a \otimes b)^* = b \otimes a$.*

Dokaz: Linearnost lako sledi iz definicije. Za proizvoljan vektor $v \in \mathbb{C}^r$ iz Koši-Švarcove nejednakosti sledi $|(a \otimes b)v| = |(v \cdot b)a| \leq |v||b||a|$. Za jedinični vektor $v = b/|b|$ imamo

$$|(a \otimes b)v| = |b||a|,$$

pa smo dokazali da je $|a \otimes b| = |a||b|$. Jasno, ako je bilo koji od vektora a i b jednak nuli, onda je operator jednak nula operatoru, pa posmatramo slučaj kada je $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Tada jednakost $(a \otimes b)v = (v \cdot b)a = 0$ važi ako i samo ako je $v \cdot b = 0$, to jest ako i samo ako $v \in \{b\}^{\perp}$. Zato je dimenzija jezgra ovog operatora $d - 1$, pa je dimenzija ranga 1. Na mestu (i, j) u matričnom zapisu, na osnovu formule za $a \otimes b$ dobijamo

$$(a \otimes b)e_j \cdot e_i = \overline{b^j} a^i, \quad 1 \leq i, j \leq r.$$

Dalje je $(a \otimes b)v \cdot u = (v \cdot b)a \cdot u = v \cdot \overline{a \cdot u} b = v \cdot (u \cdot a)b = v \cdot (b \otimes a)u$, pa iz definicije adjungovanog operatora sledi tvrđenje. ❑

Operator ovog oblika je seskvilinearan (linearan po prvom, antilinearan po drugom vektoru), odnosno

$$\forall a, b, c \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^r),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (a + \lambda b) \otimes c = a \otimes c + \lambda (b \otimes c),$$

$$a \otimes (b + \lambda c) = a \otimes b + \overline{\lambda}(a \otimes c).$$

Definicija 2.2.2 *Za $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ i $b \in L^\infty(\Omega)$ definišemo operator množenja funkcijom b, u oznaci M_b, na $L^2(\Omega)$ tako da za $v \in L^2(\Omega)$ važi $M_b v = bv$, a za $a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ definišemo Furijeov operator množenja P_a tako da je za $w \in L^2(\mathbb{R}^d)$*

$$\mathscr{F}(P_a w) = M_a \mathscr{F} w,$$

odnosno, $P_a = \mathscr{F}^{-1} M_a \mathscr{F}$.

Primetimo da za $v \in L^2(\Omega)$ važi da $M_b v \in L^2(\Omega)$ i $\|M_b\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega);L^2(\Omega))} = \|b\|_{L^\infty(\Omega)}$. Slično, $\mathscr{F}(P_a w) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $\|P_a\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^d);L^2(\mathbb{R}^d))} = \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.

Operator množenja i Furijeov operator množenja u opštem slučaju ne komutiraju. Za dokazivanje teoreme o postojanju H-mere važan rezultat je tzv. komutacijska lema, koja nam daje uslove pod kojima ova dva operatora komutiraju do na kompaktan operator. Da bismo pokazali komutacijsku lemu treba nam naredna lema (iz [34], [35]).

Lema 2.2.3 *Ako za $b \in C_0(\mathbb{R}^d)$ i $a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ važi*

$$\text{za svako } \rho > 0, \varepsilon > 0, \text{ postoji } \kappa \text{ tako da}$$

$$|\xi^1| \geq \kappa, |\xi^2| \geq \kappa \text{ i } |\xi^1 - \xi^2| \leq \rho \text{ implicira } |a(\xi^1) - a(\xi^2)| \leq \varepsilon, \tag{2.11}$$

onda je komutator $C = [M_b, P_a] = M_b P_a - P_a M_b$ kompaktan operator na $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Dokaz: Na osnovu prethodnih razmatranja sledi da je

$$\|[M_b, P_a]\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^d);L^2(\mathbb{R}^d))} \leq 2\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

odnosno da je komutator neprekidan, linearan operator. Da bismo pokazali da je C kompaktan dovoljno je pokazati da je C uniformna granica niza kompaktnih operatora (odakle sledi da i C mora biti kompaktan, kao granica niza kompaktnih operatora prema Teoremi 1.3.2). Zato ćemo b uniformno aproksimirati nizom funkcija $(b_k) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ sa osobinom da $\mathscr{F} b_k$ ima kompaktan nosač unutar skupa $|\xi| \leq \rho_k$, tako da odgovarajući operatori M_{b_k} konverigraju ka M_b u operatorskoj topologiji. Dalje još ostaje da pokažemo da je $C_k = [M_{b_k}, P_a]$ kompaktan.

Da bismo konstruisali (b_k) posmatrajmo prvo niz (f_k) u prostoru brzo opadajućih funkcija $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ koji uniformno konvergira ka b. Kako je $\mathscr{F} f_k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, postoji niz $g_{k,n} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ koji konvergira ka $\mathscr{F} f_k$ u $L^1(\mathbb{R}^d)$ kad $n \to \infty$. Sledi da $\mathscr{F}^{-1} g_{k,n}$ konvergira uniformno ka f_k. Dijagonalni postupak nam daje niz $b_k = \mathscr{F}^{-1} g_{kk}$ koji konvergira ka b i pri tome svaki $\mathscr{F} b_k$ ima kompaktan nosač.

Neka $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Koristeći

$$\mathscr{F}(b_k v)(\xi) = \mathscr{F}(b_k) * \mathscr{F}(v)(\xi) = \int \mathscr{F}(b_k)(\xi - \eta) \mathscr{F}(v)(\eta) d\eta,$$

dobijamo

$$\mathscr{F}(C_k v)(\xi) = \mathscr{F}([M_{b_k}, P_a]v)(\xi) = \mathscr{F}(M_{b_k} P_a v)(\xi) - \mathscr{F}(P_a M_{b_k} v)(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F} b_k(\xi - \eta) a(\eta) \mathscr{F} v(\eta) d\eta - a(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F} b_k(\xi - \eta) \mathscr{F} v(\eta) d\eta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (a(\eta) - a(\xi)) \mathscr{F} b_k(\xi - \eta) \mathscr{F} v(\eta) d\eta.$$

Dakle,

$$\mathscr{F}(C_k v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} K_k(\xi, \eta) \mathscr{F} v(\eta) d\eta,$$

gde je

$$K_k(\xi, \eta) = (a(\eta) - a(\xi)) \mathscr{F} b_k(\xi - \eta).$$

Zbog kompaktnih nosača za $\mathscr{F} b_k$ posmatramo ξ i η za koje je $|\xi - \eta| \leq \rho_k$. Prema uslovu (2.11) za svako $\varepsilon > 0$, pa i za $\varepsilon = 1/m, m \in \mathbb{N}$ i za ρ_k postoji κ tako da $|\xi| \geq \kappa$ i $|\eta| \geq \kappa$ i $|\xi - \eta| \leq \rho_k$ implicira da je $|a(\eta) - a(\xi)| \leq 1/m$. Uvedimo oznake

$$N_k = \{(\xi, \eta) : |\xi - \eta| \leq \rho_k\} \text{ i } S_k = \{(\xi, \eta) : |\xi| < \kappa \text{ ili } |\eta| < \kappa\}.$$

Tada je

$$\mathscr{F}(C_k v)(\xi) = \int_{S_k \cap N_k} K_k(\xi, \eta) \mathscr{F} v(\eta) d\eta + \int_{\overline{S_k} \cap N_k} K_k(\xi, \eta) \mathscr{F} v(\eta) d\eta,$$

gde je sa $\overline{S_k}$ označen komplement skupa S_k. Neka je dalje

$$X_k^m v(\xi) = \int_{S_k \cap N_k} K_k(\xi) \mathscr{F} v(\eta) d\eta \text{ i } Y_k^m v(\xi) = \int_{\overline{S_k} \cap N_k} K_k(\xi, \eta) \mathscr{F} v(\eta) d\eta.$$

Dakle, $\|\mathscr{F}(C_k v) - X_k^m v\|_{L^2} = \|Y_k^m v\|_{L^2}$. Kako na skupu $\overline{S_k} \cap N_k$ važi $|a(\eta) - a(\xi)| \leq 1/m$, sledi da

$$\|Y_k^m v\|_{L^2} \leq \frac{c}{m} \to 0, \ m \to \infty.$$

Zaključujemo da je, za fiksirano k, operator $\mathscr{F}(C_k)$ granica niza operatora X_k^m, kad $m \to \infty$ u operatorskoj normi.

Jezgro operatora X_k^m, koji je definisan na $S_k \cap N_k$, je ograničeno i ima kompaktan nosač i definiše Hilbert-Šmitov operator, prema Teoremi 1.3.4. Prema tome, operatori X_k^m su kompaktni, za sve $m \in \mathbb{N}$. Dakle, za svako k je operator $\mathscr{F}(C_k)$ granica niza kompaktnih opertora X_k^m, kad $m \to \infty$, pa je i $\mathscr{F}(C_k)$ kompaktan. Sledi i da su operatori C_k kompaktni, što je i trebalo pokazati. ❑

Da bismo prethodnu lemu mogli da primenimo u nastavku potrebno je da dokažemo narednu lemu.

Lema 2.2.4 *Ako $\psi \in C(\mathbb{S}^{d-1})$ i $a(\xi) = \psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)$, onda važi uslov* (2.11) *iz Leme 2.2.3.*

Dokaz: Primetimo da $a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, zato što je ψ neprekidna funkcija na sferi, pa je ograničena. Treba pokazati da za svako $\rho > 0, \varepsilon > 0$, postoji κ tako da $|\xi^1| \geq \kappa, |\xi^2| \geq \kappa$ i $|\xi^1 - \xi^2| \leq \rho$ implicira $|a(\xi^1) - a(\xi^2)| \leq \varepsilon$. Zbog neprekidnosti funkcije ψ sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $|\psi(\eta_1) - \psi(\eta_2)| \leq \varepsilon$ za $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{S}^{d-1}$ za $|\eta_1 - \eta_2| \leq \delta$. Dakle, dovoljno je, za date $\varepsilon, \rho > 0$, naći κ tako da $|\xi^1|, |\xi^2| \geq \kappa$ i $|\xi^1 - \xi^2| \leq \rho$ implicira $\Big|\dfrac{\xi^1}{|\xi^1|} - \dfrac{\xi^2}{|\xi^2|}\Big| \leq \delta$. Važi

$$\Big|\frac{\xi^1}{|\xi^1|} - \frac{\xi^2}{|\xi^2|}\Big| \leq \Big|\frac{\xi^1}{|\xi^1|} - \frac{\xi^2}{|\xi^1|}\Big| + \Big|\frac{\xi^2}{|\xi^1|} - \frac{\xi^2}{|\xi^2|}\Big|.$$

Dalje sledi da je

$$\Big|\frac{\xi^1}{|\xi^1|} - \frac{\xi^2}{|\xi^1|}\Big| \leq \frac{\rho}{|\xi^1|} \leq \frac{\rho}{\kappa} \ \text{ i } \ \Big|\frac{\xi^2}{|\xi^1|} - \frac{\xi^2}{|\xi^2|}\Big| = \Big|1 - \frac{|\xi^2|}{|\xi^1|}\Big|.$$

Znamo da je $|\xi^1| - \rho \leq |\xi^2| \leq |\xi^1| + \rho$, pa je

$$\Big|1 - \frac{|\xi^2|}{|\xi^1|}\Big| \leq \frac{\rho}{|\xi^1|} \leq \frac{\rho}{\kappa}.$$

Dakle,

$$\Big|\frac{\xi^1}{|\xi^1|} - \frac{\xi^2}{|\xi^1|}\Big| \leq \frac{2\rho}{\kappa}$$

Ako izaberemo $\kappa \geq \frac{2\rho}{\delta}$, vidimo da je tvrđenje zadovoljeno. ❑

Tartar je uveo novu klasu simbola i njima pridružene operatore na sledeći način.

Definicija 2.2.5 *Funkcija s na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$ je simbol ako je*

$$s(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big) b_k(x),$$

pri čemu $a_k \in C(\mathbb{S}^{d-1})$, $b_k \in C_0(\mathbb{R}^d)$ i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_{C(\mathbb{S}^{d-1})} \|b_k\|_{C_0(\mathbb{R}^d)} < \infty.$$

Standardan operator sa simbolom s je operator koji se može prikazati u obliku

$$S_s = \sum_k P_{a_k} M_{b_k}.$$

Ako se $T \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^d); L^2(\mathbb{R}^d))$ može zapisati u obliku $T = S_s + C$, gde je C kompaktan operator iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$, onda kažemo da T ima simbol s.

Za $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ imamo da je $(\mathscr{F} S_s v)(\xi) = \sum_k a_k\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)(\mathscr{F} M_{b_k} v)(\xi)$. Pošto je

$$(\mathscr{F} M_{b_k} v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} b_k(x) v(x) e^{-ix\cdot\xi} dx,$$

sledi da je

$$(\mathscr{F} S_s v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} s\Big(x, \frac{\xi}{|\xi|}\Big) v(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$$

u $\mathbb{R}^d$ za sve $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$, tako da S_s zavisi samo od simbola s. Primer operatora sa simbolom s je

$$L_s = \sum_k M_{b_k} P_{a_k}$$

zato što su sume normi komutatora $[M_{b_k}, P_{a_k}]$ konačne i pošto je svaki komutator kompaktan i suma je kompaktan operator. Iz

$$P_{a_k} v(x) = \mathscr{F}^{-1}(a_k \mathscr{F} v) = \int_{\mathbb{R}^d} a_k\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)(\mathscr{F} v)(\xi) e^{ix\cdot\xi} đ\xi$$

dobija se

$$L_s v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} s\Big(x, \frac{\xi}{|\xi|}\Big)(\mathscr{F} v)(\xi) e^{ix\cdot\xi} đ\xi, \tag{2.12}$$

što znači da L_s zavisi samo od simbola s. U klasičnoj teoriji pseudo-diferencijalnih operatora simbol operatora L_s datog sa (2.12) je glatka funkcija. U nastavku radi jednostavnosti koristimo drugačije oznake, to jest posmatramo operatore A i B na $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^r)$ date sa

$$\mathscr{F}(Au)(\xi) := a\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)\mathscr{F} u(\xi), \xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\},$$

$$Bu(x) := b(x) u(x), x \in \mathbb{R}^d.$$

Iz prethodnih razmatranja zaključujemo da važi sledeća lema.

Lema 2.2.6 **(Komutacijska lema)** *Operator $C = AB - BA : L^2(\mathbb{R}^d)) \to L^2(\mathbb{R}^d))$ je kompaktan operator (odnosno $C \in \mathscr{K}(L^2(\mathbb{R}^d)))$.*

Koristićemo i sledeću lemu, čiji dokaz se može naći u [34].

Lema 2.2.7 *Neka su X i Y konačno dimenzionalne, lokalno kompaktne, neprekidne mnogostrukosti i neka je B neprekidna bilinearna forma na $C(X)\times C(Y)$. Ako za $f\in C(X)$ i $g\in C(Y)$ nenegativne važi da je $B(f,g)\geq 0$, onda postoji Radonova mera μ na $X\times Y$ tako da za sve $f\in C(X)$ i $g\in C(Y)$ važi sledeća reprezentacija*

$$B(f,g) = {}_{C'(X\times Y)}\langle \mu, f\otimes g\rangle_{C(X\times Y)}.$$

Dokažimo teoremu o postojanju H-mera.

Teorema 2.2.8 (Postojanje H-mera) *Neka je (u_n) niz u $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)$, to jest za $x\in\mathbb{R}^d$ je $u_n(x)=(u_n^1(x),\dots,u_n^r(x))$ i neka $u_n\rightharpoonup 0$ (slabo) u $(L^2(\mathbb{R}^d))^r$. Tada postoji podniz $(u_{n'})$ i familija kompleksnih Radonovih mera $(\mu_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ na $\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}$ tako da za sve funkcije $\varphi_1,\varphi_2\in C_0(\mathbb{R}^d)$ i $\psi\in C(\mathbb{S}^{d-1})$ važi*

$$\lim_{n'\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{F}(\varphi_1 u^i_{n'})(\xi)\overline{\mathscr{F}(\varphi_2 u^j_{n'})}(\xi)\psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)d\xi$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}}\varphi_1(x)\overline{\varphi_2}(x)\psi(\xi)d\mu_{i,j}(x,\xi)=\langle\mu_{ij},\varphi_1\overline{\varphi}_2\psi\rangle.$$

Matricu $\mu=(\mu_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ zovemo H-merom koja je pridružena podnizu $(u_{n'})$. Mera μ je Hermitska i pozitivno-definitna, to jest $\mu\zeta\cdot\zeta=\sum_{i,j=1}^{r}\mu_{ij}\zeta_i\overline{\zeta_j}\geq 0$ za sve $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_r)\in\mathbb{C}^r$.

Dokaz: Uvedimo oznaku

$$I_n^{i,j}(\varphi_1,\varphi_2,\psi):=\int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{F}(\varphi_1 u_n^i)\overline{\mathscr{F}(\varphi_2 u_n^j)(\xi)}\psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)d\xi.$$

Koristeći Planšerelovu formulu dobijamo

$$|I_n^{i,j}|\leq\|\varphi_1\|_\infty\|\varphi_2\|_\infty\|\psi\|_\infty\|u_n^i\|_{L^2}\|u_n^j\|_{L^2}.$$

Kako su (u_n^i) slabo konvergentni u L^2, oni su i ograničeni u L^2, odnosno postoji konstanta $C>0$ tako da je $\|u_n^i\|^2\leq C$ za sve $n\in\mathbb{N}$ i za sve $i=1,\dots,r$. Stoga je

$$|I_n^{i,j}(\varphi_1,\varphi_2,\psi)|\leq C\|\varphi_1\|_\infty\|\varphi_2\|_\infty\|\psi\|_\infty, \tag{2.13}$$

odnosno nizovi $I_n^{i,j}$ su ograničeni. Neka je D prebrojiv gust skup u $C_0(\mathbb{R}^d)\times C_0(\mathbb{R}^d)\times C(\mathbb{S}^{d-1})$. Pomoću Kantorovog dijagonalnog postupka možemo izdvojiti podniz (u_n) (koristimo istu oznaku za podniz) tako da

$$I_n^{i,j}(\varphi_1,\varphi_2,\psi) \to I^{ij}(\varphi_1,\varphi_2,\psi),\ n\to\infty \tag{2.14}$$

za sve trojke $(\varphi_1,\varphi_2,\psi)\in D$.

Iz uslova (2.13) zaključujemo da su nizovi $I_n^{ij}(\varphi_1,\varphi_2,\psi)$ uniformno neprekidni u odnosu na $(\varphi_1,\varphi_2,\psi)\in C_0(\mathbb{R}^d)\times C_0(\mathbb{R}^d)\times C(\mathbb{S}^{d-1})$, pa pošto je D gust u $C_0(\mathbb{R}^d)\times C_0(\mathbb{R}^d)\times C(\mathbb{S}^{d-1})$ zaključujemo da (2.14) važi za sve $\varphi_1,\varphi_2\in C_0(\mathbb{R}^d)$ i $\psi\in C(\mathbb{S}^{d-1})$. Puštajući da $n\to\infty$ u (2.13) zaključujemo da za sve φ_1,φ_2,ψ važi

$$|I^{ij}(\varphi_1,\varphi_2,\psi)| \le C\|\varphi_1\|_\infty\|\varphi_2\|_\infty\|\psi\|_\infty. \tag{2.15}$$

Dalje primetimo da je

$$I_n^{ij}(\varphi_1,\varphi_2,\psi) = \langle \varphi_1 u_n^i, A(\varphi_2 u_n^j)\rangle_{L^2}, \tag{2.16}$$

gde je A pseudo-diferencijalni operator na $L^2(\mathbb{R}^d)$ koji smo već uveli, sa simbolom $\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$, a $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ je skalarni proizvod na $L^2(\mathbb{R}^d)$. Neka je B operator množenja sa φ_2. Na osnovu Leme 2.2.6 znamo da je operator $[A,B]=AB-BA$ kompaktan, pa iz $u_n^j \rightharpoonup 0$ sledi da $[A,B](u_n^j)\to 0$ jako u $L^2(\mathbb{R}^d)$, kada $n\to\infty$. Dalje primetimo da je

$$A(\varphi_2 u_n^j) = AB(u_n^j) = BA(u_n^j) + [A,B](u_n^j). \tag{2.17}$$

Kako je niz $(\varphi_1 u_n^i)$ ograničen u $L^2(\mathbb{R}^d)$, sledi da $\langle(\varphi_1 u_n^i),[A,B](u_n^j)\rangle \to 0$ kada $n\to\infty$. Sada iz (2.16) i (2.17) sledi

$$\lim_{n\to\infty}\langle \varphi_1 u_n^i, BA(u_n^j)\rangle_2 = \lim_{n\to\infty} I_n^{ij}(\varphi_1,\varphi_2,\psi) = I^{ij}(\varphi_1,\varphi_2,\psi).$$

Pošto je

$$\langle \varphi_1 u_n^i, BA(u_n^j)\rangle_2 = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}u_n^i(x)\overline{A(u_n^j)(x)}dx$$

sledi da je

$$I^{ij}(\varphi_1,\varphi_2,\psi) = \tilde{I}^{ij}(\varphi_1\overline{\varphi_2},\psi),$$

gde je $\tilde{I}^{ij}(\varphi,\psi)$ bilinearna funkcionela na $C_0(\mathbb{R}^d)\times C(\mathbb{S}^{d-1})$, za sve $i,j=1,\dots,r$. Uzimajući da je $\varphi_1(x)=\varphi(x)/\sqrt{|\varphi(x)|}$ (pri čemu je $\varphi_1(x)=0$, ako je $\varphi(x)=0$), $\varphi_2(x)=\sqrt{|\varphi(x)|}$ za $\varphi\in C_0(\mathbb{R}^d)$ i koristeći (2.15) sledi

$$\begin{aligned}|\tilde{I}^{ij}(\varphi,\psi)| &= |I^{ij}(\varphi_1,\varphi_2,\psi)| \le C\|\varphi_1\|_\infty\|\varphi_2\|_\infty\|\psi\|_\infty\\ &= C\|\varphi\|_\infty\|\psi\|_\infty.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Dakle, funkcionele $\tilde{I}^{ij}(\varphi,\psi)$ su neprekidne na $C_0(\mathbb{R}^d)\times C(\mathbb{S}^{d-1})$. Dokažimo da je za nenegativne φ i ψ matrica $\tilde{I} := (\tilde{I}^{ij}(\varphi,\psi))_{1\le i,j\le r}$ Hermitska i pozitivno definitna. Zaista, neka je $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\sqrt{\varphi(x)}$. Tada je

$$\begin{aligned}\tilde{I}^{ij}(\varphi,\psi) &= I^{ij}(\varphi_1,\varphi_1,\psi)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{F}(\varphi_1 u_n^i)\overline{\mathscr{F}(\varphi_1 u_n^j)(\xi)}\psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)d\xi.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Za $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_r)\in\mathbb{C}^r$ imamo

$$\tilde{I}\zeta\cdot\zeta=\sum_{i,j=1}^r\tilde{I}^{ij}(\varphi,\psi)\zeta_i\overline{\zeta_j}=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathscr{F}(\varphi_1 V_n)(\xi)|^2\psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)d\xi\ge 0,$$

gde je $V_n(x)=\sum_{i=1}^r u_n^i\zeta_i$. Dakle, dokazali smo da je matrica $\tilde{I}$ Hermitska i pozitivno definitna.

Vidimo da je za svako $\zeta\in\mathbb{C}^r$ bilinearna funkcionela $\tilde{I}(\varphi,\psi)\zeta\cdot\zeta$ neprekidna na $C_0(\mathbb{R}^d)\times C(\mathbb{S}^{d-1})$ i nenegativna, odnosno, $\tilde{I}(\varphi,\psi)\zeta\cdot\zeta\ge 0$ kad god je $\varphi\ge 0$ i $\psi\ge 0$. Sada možemo da primenimo Lemu 2.2.7 i da zaključimo da postoji Radonova mera μ_ζ na $\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}$ tako da je

$$\tilde{I}(\varphi,\psi)\zeta\cdot\zeta=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(x)\psi(\xi)d\mu_\zeta(x,\xi),$$

gde je $\mu_\zeta=\sum_{i,j=1}^r\mu_{ij}\zeta_i\overline{\zeta_j}$ i μ_{ij} su Radonove mere na $\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}$. Dakle, dobijamo da je

$$\tilde{I}(\varphi,\psi)\zeta\cdot\zeta=\sum_{i,j=1}^r\langle\mu_{ij},\varphi(x)\psi(\xi)\rangle\zeta_i\overline{\zeta_j}.$$

Kako je $\tilde{I}(\varphi,\psi)\zeta\cdot\zeta=\sum_{i,j=1}^r\tilde{I}^{ij}(\varphi,\psi)\zeta_i\overline{\zeta_j}$, sledi da je $\langle\mu^{ij},\varphi\psi\rangle=\tilde{I}^{ij}(\varphi,\psi)$. Dakle,

$$\langle\mu^{ij},\varphi_1\overline{\varphi_2}\psi\rangle=I^{ij}(\varphi_1,\varphi_2,\psi).$$

Primetimo da za proizvoljno $\zeta\in\mathbb{C}^r$ važi da je $\sum_{i,j=1}^r\mu_{ij}\zeta_i\overline{\zeta_j}=\mu_\zeta\ge 0$, odakle sledi da je μ Hermitska i pozitivno definitna.

U slučaju proizvoljnih kompleksnih test funkcija φ_1,φ_2 i ψ tvrđenje sledi iz prethodnog dela dokaza rastavljanjem na realni i imaginarni, odnosno pozitivni i nenegativni deo i korišćenjem bilinearnosti $\tilde{I}$. ❑

Da smo posmatrali test funkcije $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R}^d)$ definicija H-mera bi se proširila na nizove koji slabo konvergiraju u $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$, ali u tom slučaju gubimo konačnost pridružene mere.

Primetimo da za jako konvergentni niz dobijamo trivijalnu meru, to jest $\mu = 0$. Štaviše, može se dokazati da ako je H-mera trivijalna, onda $u_n \to 0$ u $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$, odnosno $\mu = 0$ ako i samo ako $u_n \to 0$ u $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Primetimo da je $\langle \nu, \varphi \rangle := \langle \mu, (\varphi \otimes \varphi)\psi \rangle$ skalarna Radonova mera na $\mathbb{S}^{d-1}$.

Posledica 2.2.9 *Ako niz $(u_n \otimes u_n)$ slabo - $\star$ konvergira ka meri $\nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d; M_r(\mathbb{C}))$, onda za svako $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ važi*

$$\langle \nu, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \cdot 1 \rangle.$$

Dokaz: Ako uzmemo da je $\psi = 1$, uz primenu Planšerelove formule dobijamo

$$\langle \mu, \varphi_1 \varphi_2 \cdot 1 \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1 u_n \otimes \varphi_2 u_n dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} (u_n \otimes u_n)\varphi_1 \overline{\varphi_2} dx = \langle \nu, \varphi_2 \overline{\varphi_2} \rangle,$$

pa za $\varphi_1 = \varphi_2 = \sqrt{\varphi}$ i nenegativno i realno φ tvrđenje sledi. Ako je φ proizvoljna, kompleksna funkcija, tvrđenje sledi rastavljanjem na realni i imaginarni i pozitivni i negativni deo. ❑

Kod slabo konvergetnih nizova u L^p prostorima važno je da se analiziraju pojave oscilacija i koncentracija. Važi Vitalijeva teorema koja tvrdi da ako je (f_n) niz u $L^p(\Omega)$, za $|\Omega| < \infty$ (sa $|\Omega|$ smo označili Lebegovu meru skupa Ω) i $1 \leq p < \infty$ sa sledećim pretpostavkama:

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tako da je $\int_A |f_n|^p < \varepsilon\ \ \forall n$ i $\forall A \subset \Omega$ merljiv i $|A| < \delta$ (niz bez oscilacija)

- $f_n \to f$ skoro svuda (niz bez koncentracija),

onda $f \in L^p(\Omega)$ i $f_n \to f$ u $L^p(\Omega)$. Dakle, ako nemamo jaku konvergenciju ograničenog niza u L^p, onda zaključujemo da se oscilacije i koncentracije uzrok gubitka kompaktnosti.

Navedimo primere iz [34] slabo konvergentnih nizova u L^2 za koje se H-mera može eksplicitno izračunati. U prvom primeru oscilacije narušavaju jaku konvergenciju, a u drugom koncentracije.

Primer 2.2.10 (Oscilacije) *Neka je $v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ periodična funkcija sa periodom 1 po svakoj promenljivoj i neka je (u_n) niz u istom prostoru definisan sa*

$$u_n(x) := v(nx).$$

Pošto je v periodična važi

$$v(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} v_k e^{2\pi i k y}.$$

Da bismo imali da $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ pretpostavljamo da je $v_0 = 0$. Tada je

$$\mathscr{F}[\varphi v(xn)](\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} v_k \mathscr{F}\varphi(\xi - kn).$$

Neka je $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ funkcija za koju je $\mathscr{F}\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Tada su za dovoljno veliko n nosači funkcija $\mathscr{F}\varphi(\xi - kn)$ disjunktni, pa je

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} v_k \mathscr{F}\varphi(\xi - kn)\Big|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |v_k|^2 |\mathscr{F}\varphi(\xi - kn)|^2.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}(\varphi u_n)\mathscr{F}(\varphi u_n)\psi(\xi/|\xi|)d\xi \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |v_k|^2|\mathscr{F}\varphi(\xi - kn)|^2\Big)\psi(\xi/|\xi|) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \psi(\frac{k}{|k|})|v_k|^2\int_{\mathbb{R}^d}|\mathscr{F}\varphi(\xi)|^2 d\xi = \langle \mu, \varphi^2\psi\rangle. \end{aligned}$$

Dakle, H-mera pridružena ovom nizu je kombinacija Dirakovih mera i Lebegove mere λ odnosno

$$\mu(x,\xi) = \lambda(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |v_k|^2 \delta_{k/|k|}(\xi).$$

Dakle, H-mera μ nam daje ne samo informaciju o postojanju oscilacija (Lebegova mera), već imamo i informaciju o pravcima prostiranja oscilacija (Dirakove mere).

Primer 2.2.11 (Koncentracije) *Za datu funkciju $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ definišemo niz*

$$u_n(x) := n^{d/2} f(n(x - z)),$$

gde je $z \in \mathbb{R}^d$ dato. Ovaj niz slabo konvergira ka 0 i definiše skalarnu H-meru μ. Važi da je za $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, niz $\varphi u_n - \varphi(z)u_n \to 0$ (jako) u $L^2(\mathbb{R}^d)$, pa može da se pređe na limes po $\varphi(z)u_n$, odnosno

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(z)|^2|\mathscr{F}u_n(\xi)|^2\psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)d\xi =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\varphi(z)|^2 \int_{\mathbb{R}^d} n^{-d} |\mathscr{F} f(\xi/n)|^2 \psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big) d\xi$$

$$= |\varphi(z)|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{F} f(\xi)|^2 \psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big) d\xi = \langle \mu, |\varphi|^2 \cdot \psi \rangle.$$

2.3 Lokalizacijski princip, kompenzovana kompaktnost

Prvo navodimo klasičnu verziju teoreme o kompenzovanoj kompaktnosti, potom se bavimo vezom sa H-merama.

Neka je

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^r \mid \exists \xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\},\ \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{d} A_{i,j,k} \lambda_j \xi_k = 0,\ \text{za } i = 1, \dots, q\}. \tag{2.20}$$

Teorema 2.3.1 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren i neka je Q realna kvadratna forma na $\mathbb{R}^r$ za koju važi*

$$Q(\lambda) \geq 0,\ \forall\, \lambda \in \Lambda, \tag{2.21}$$

gde je Λ dato sa (2.20).
Dalje, neka je u_n niz za koji važi

$$u_n \rightharpoonup u_0 \ u\ L^2_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^r) \ (slabo) \tag{2.22}$$

i

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{d} A_{i,j,k} \frac{\partial u_j^n}{\partial x_k} \tag{2.23}$$

pripada kompaktnom skupu u jakoj topologiji u $H^{-1}_{loc}(\Omega)$, za $i = 1, \dots, q$
Tada, ako za neki podniz važi da

$$Q(u_m) \rightharpoonup \mu \ u\ \mathscr{M}(\Omega) \ slabo \text{ - } \star \tag{2.24}$$

za Radonovu meru μ, onda je

$$\mu \geq Q(u_0) \ u\ \Omega. \tag{2.25}$$

Primer 2.3.2 *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ ograničen otvoren skup i neka je $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^4$ funkcija za koju važi*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ slabo u } (L^2(\Omega))^4$$

i funkcije

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x},\quad \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial u_4^\varepsilon}{\partial x}\quad \text{pripadaju kompaktnom skupu u } H^{-1}_{loc}(\Omega).$$

Tada postoji podniz (koji označavamo isto kao i početni niz) tako da

$$\begin{vmatrix} u_1^\varepsilon & u_2^\varepsilon \\ u_3^\varepsilon & u_4^\varepsilon \end{vmatrix} \rightharpoonup \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{vmatrix}.$$

Zaista, skup Λ dat sa (2.20) se sastoji od tačaka $\lambda\in\mathbb{R}^4$ za koje važi

$$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=0,\quad \lambda_3\xi_1+\lambda_4\xi_2=0$$

za proizvoljno $\xi\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, odnosno

$$\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{R}^4 : \lambda_1\lambda_4-\lambda_2\lambda_3=0\}.$$

Neka je $Q(\lambda)=\lambda_1\lambda_4-\lambda_2\lambda_3$. Tada je $Q(\lambda)=0$ za sve $\lambda\in\Lambda$, odakle sledi traženi zaključak.

Primer 2.3.3 *Neka je $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$, neka je $u_n=(u_n^1,u_n^2)$ i neka su nizovi $(\partial_1 u_n^1)$ i $(\partial_2 u_n^2)$ ograničeni u $L^2(\mathbb{R}^2)$, što implicira da su sadržani u kompaktnim skupovima u $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ (što je posledica Teoreme 1.3.1). Tada je $\xi_1\lambda^1=\xi_2\lambda^2=0\}$, pa je $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{R}^2 : \lambda^1\lambda^2=0\}$. Posmatramo kvadratnu formu $Q(\lambda)=\lambda^1\lambda^2$, pa su uslovi teoreme ispunjeni.*

Navodimo lokalizacijsku osobinu za H-mere (za detalje preporučujemo [9] i [34]).

Teorema 2.3.4 (Lokalizacijsko svojstvo za H-mere) *Ako niz (u_n) određuje H-meru i važi*

$$\sum_{k=1}^{d}\partial_k(A^k u_n)\to 0 \text{ u } H^{-1}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^r),$$

gde su A^k matrice čiji su elementi neprekidne funkcije na otvorenom skupu $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, za $k=1,\dots,d$, onda za $P(x,\xi):=\sum_{k=1}^d \xi_k A^k(x)$ važi

$$P(x,\xi)\mu=0,\ \ (x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{S}^{d-1}.$$

Dokaz: Za proizvoljno $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ važi

$$\partial_k(\varphi A^k u_n) = (\partial_k \varphi) A^k u_n + \varphi \partial_k (A^k u_n).$$

Kako $A^k u_n \rightharpoonup 0$ u $(L^2(\Omega))^r$, pa zato, prema Teoremi 1.3.1, i jako u $(H_{loc}^{-1}(\Omega))^r$ imamo da $\partial_k(\varphi A^k u_n) \to 0$ jako u $(H^{-1}(\Omega))^r$, odnosno:

$$\left\| \frac{\mathscr{F}(\partial_k(\varphi A^k u_n))}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \right\|_{L^2} = \left\| \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \xi_k \mathscr{F}(\varphi A^k u_n) \right\|_{L^2} \to 0.$$

Odavde sledi da $\frac{\xi_k}{|\xi|} \mathscr{F}(\varphi A^k u_n) \to 0$ jako u $(L^2(\Omega))^r$. Sada možemo da pomnožimo ovaj jako konvergentan niz (formirajući tenzorski proizvod) sa slabo konvergentnim nizom $\mathscr{F}(\varphi u_n)\psi(\frac{\xi}{|\xi|})$ i kad $n \to \infty$ sledi tvrđenje. ❑

Primetimo da su ovde matrice A^k sa promenljivim koeficijentima, to jest koeficijenti su neprekidne funkcije od x, ne konstante. Prethodni rezultat implicira da je nosač mere μ sadržan u skupu $\{(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} : detP(x,\xi) = 0\}$.

Primer 2.3.5 *Ako upravo navedenu teoremu primenimo na prethodni primer dobijamo da je*

$$P\mu = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^{11} & \mu^{12} \\ \mu^{21} & \mu^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \mu^{11} & \xi_1 \mu^{12} \\ \xi_2 \mu^{21} & \xi_2 \mu^{22} \end{bmatrix} = 0.$$

Preciznije, ograničenost niza $(\partial_1 u_n^1)$ *implicira da je* $\xi_1 \mu^{11} = \xi_1 \mu^{12} = 0$, *a ograničenost niza* $(\partial_2 u_n^2)$ *implicira da je* $\xi_2 \mu^{21} = \xi_2 \mu^{22} = 0$. *Pošto je* $\mu^{12} = \overline{\mu^{21}}$, *a* ξ_1 *i* ξ_2 *ne mogu u isto vreme biti* 0 *sledi da je* $\mu^{12} = 0$. *Primenom Posledice 2.2.9 mogli smo da zaključimo da je* $\langle \mu^{12}, \varphi \cdot 1 \rangle = 0$, *a lokalizacijski princip nam daje dodatnu informaciju.*

2.4 Mikrolokalne mere defekta

Uvodimo H-mere preko klasične teorije pseudo-diferencijalnih operatora, što je bio Žerarov pristup. Za detalje preporučujemo radove [18] i [19]. Definišimo klasu simbola koju je Žerar koristio.

Definicija 2.4.1 *Neka* $m \in \mathbb{R}$. *Pseudo-diferencijalni operator* $A \in \Psi^m$ *je esencijalno homogen ako postoje funkcija* $a_m \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \backslash \{0\})$, *homogena reda m po* ξ *i funkcija* $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\chi(\xi) = 1$ *u okolini* $\xi = 0$ *tako da je*

$$\sigma(A)(x,\xi) = a_m(x,\xi)(1-\chi(\xi)) + a_{m-1}(x,\xi),$$

gde je $a_{m-1} \in S^{m-1}$.

Funkciju a_m zovemo glavnim simbolom operatora A i označavamo je sa $\sigma_m(A)$. Prostor esencijalno homogenih pseudo-diferencijalnih operatora reda m označavamo sa Ψ^m_{eh}. Primetimo da za $A \in \Psi^m_{eh}$ važi

$$\sigma_m(A) = 0 \iff A \in \Psi^{m-1}_{eh}. \tag{2.26}$$

Važi i sledeća teorema.

Teorema 2.4.2 *Neka $m, p \in \mathbb{R}$. Ako $A \in \Psi^m_{eh}$, onda adjungovani pseudo-diferencijalni operator $A^* \in \Psi^m_{eh}$ i*

$$\sigma_m(A^*) = \overline{\sigma_m(A)}. \tag{2.27}$$

Ako $A \in \Psi^m_{eh}$ i $B \in \Psi^p_{eh}$, onda kompozicija $AB \in \Psi^{m+p}_{eh}$ i

$$\sigma_{m+p}(AB) = \sigma_m(A)\sigma_p(B). \tag{2.28}$$

Sada navodimo teoremu o postojanju mikrolokalnih mera defekta, odnosno osnovnu teoremu mikrolokalne analize kompaktnosti slabo konvergentnog niza u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Dokaz je naveden u [19] i [20].

Teorema 2.4.3 *Neka je (u_n) ograničen niz u $L^2(\mathbb{R}^d)$ i neka je supp $u_n \subset K$ za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je K fiksiran, kompaktan skup. Pretpostavimo da $u_n \rightharpoonup u$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Tada postoji podniz $(u_{n'})$ i pozitivna Radonova mera μ na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$, čiji nosač je u $K \times \mathbb{S}^{d-1}$, tako da za svaki operator $A \in \Psi^0_{eh}$ važi*

$$\lim_{n'\to\infty} \langle A(u_{n'} - u), u_{n'} - u\rangle = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} \sigma_0(A)(x,\xi)d\mu(x,\xi) = \langle \mu, \sigma_0(A)\rangle. \tag{2.29}$$

Definicija 2.4.4 *Ako važe uslovi Teoreme 2.4.3, onda se Radonova mera μ data sa* (2.29) *zove* **mikrolokalna mera defekta** *za niz (u_n).*

Napomena 2.4.5 *Teoremu 2.4.3 možemo da pokažemo i uz pretpostavku da $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^2_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup, ali tada treba dodatno da se pretpostavi da simbol $\sigma_0(A)$ ima kompaktan nosač u $\Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$.*

Napomena 2.4.6 *Neka je $A \in \Psi^0_{eh}$ operator za koji je $\sigma_0(A) = \sigma(A) = \psi(\xi)\varphi(x)$, gde je ψ homogena funkcija reda 0 i $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Neka je $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Iz $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ sledi da je $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ za $\varphi_i \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d), i = 1,2$. Tada je*

$$\lim_{n'\to\infty} \langle A(u_{n'}), u_{n'}\rangle = \lim_{n'\to\infty} \langle \varphi_1(x)\mathscr{A}_\psi(u_{n'}), \overline{\varphi_2(x)}u_{n'}\rangle.$$

Lema 2.2.6 implicira da je

$$\lim_{n'\to\infty} \langle \varphi_1(x)\mathscr{A}_\psi(u_{n'}), \overline{\varphi_2(x)}u_{n'}\rangle = \lim_{n'\to\infty} \langle \mathscr{A}_\psi(\varphi_1 u_{n'}), \overline{\varphi_2(x)}u_{n'}\rangle,$$

pa dobijamo da je H-mera za niz (u_n) definisana na isti način kao i u Teoremi 2.2.8.

Važi i lokalizacijski princip, dokaz je naveden u [19] i [18].

Teorema 2.4.7 *Neka je P diferencijalni operator reda m sa glatkim koeficijentima i $u_n \in L^2_{loc}$ ograničen niz. Pretpostavimo da Pu_n pripada kompaktnom skupu u H^{-m}_{loc}. Tada je*

$$\sigma_m(P)\mu = 0,$$

za mikrolokalnu meru defekta μ koja odgovara nizu u_n.

U narednom primeru navodimo niz koji ne konvergira jako ka nuli u $L^2(\mathbb{R}^d)$, iako je pridružena H-mera jednaka nuli.

Primer 2.4.8 *(Za više detalja pogledati [4]) Data je funkcija $v(x) = \frac{1}{2\pi x}\sin(2\pi x)$. Jasno je da $v \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ i da v nije integrabilna funkcija. Definišimo niz:*

$$u_n(x) := \frac{1}{n} v\left(\frac{x}{n^2}\right) = \frac{n}{2\pi x}\sin\left(\frac{2\pi x}{n^2}\right). \tag{2.30}$$

Tada je Furijeova transformacija članova ovog niza data sa

$$\hat{u}_n(\xi) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & |\xi| < \frac{1}{n^2}, \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Dati niz ne konvergira jako ka nuli u L^2, zato što su $L^2(\mathbb{R})$ norme ovih funkcija jednake $1/2$, ali konvergira slabo ka nuli, zato što za test funkciju $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ važi:

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\phi(x)dx \Big| &\le \int_{\mathbb{R}} \Big| \frac{n}{2\pi x}\sin\frac{2\pi x}{n^2}\phi(x) \Big| dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \Big| \frac{n}{2\pi x} \Big| \Big| \frac{2\pi x}{n^2} \Big| |\phi(x)| dx \le \frac{1}{n}\|\phi\|_{L^1} \to 0. \end{aligned}$$

Dalje računamo H-meru pridruženu nizu (u_n). Neka $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi_0 \in C(\mathbb{R})$ i neka je $\psi_0(\xi) = \psi(\xi/|\xi|)$ i operator $P \in \Psi^0_{eh}(\mathbb{R})$ sa glavnim simbolom $\sigma_0(P) = \varphi\psi_0$. Sledi da je:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \langle Pu_n\,, u_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle (\psi_0(\widehat{\varphi u_n}))^{\vee}\,, u_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \widehat{\varphi u_n}\,, \psi_0 \hat{u}_n\rangle \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi u_n}(\xi)\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\overline{\hat{u}_n(\xi)}d\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}} \widehat{\varphi u_n}(\xi)\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi \\ &\quad \le \frac{\|\hat{\varphi}\|_\infty \|\psi\|_\infty}{n^2} \to 0, \end{aligned}$$

zato što je

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\varphi u_n}|(\xi) &= \Big| \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}_n(\eta)d\eta \Big| \leq \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|d\eta \\
&\leq \frac{n}{2}\frac{2}{n^2}\|\varphi\|_\infty = \frac{1}{n}\|\varphi\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\langle \mu\,,\,\varphi\psi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Pu_n\,,\,u_n\rangle = 0,
$$

što znači da je H-mera pridružena nizu (u_n) *trivijalna.*

Glava 3

H-distribucije sa ograničenim simbolom

U ovom poglavlju bavimo se H-distribucijama, koje predstavljaju uopštenje H-mera. Za konstrukciju H-mera posmatrali smo slabo konvergentne nizove u $L^2(\Omega)$, a sada posmatramo nizove koji su slabo konvergentni u prostorima $L^p(\mathbb{R}^d)$ i $L^q(\mathbb{R}^d)$, gde je $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$. U poglavlju 3.3 ćemo tu konstrukciju proširiti na nizove koji slabo konvergiraju u dualnom paru prostora Soboljeva, $W^{k,q}(\mathbb{R}^d) - W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$. U radu [11] su uvedene H-distribucije za $L^p - L^q$ nizove. Prvo dajemo teoremu o egzistenciji H-mera u obliku koji je pogodan za uvođenje H-distribucija.

Teorema 3.0.9 *Neka nizovi $(u_n), (v_n) \rightharpoonup 0$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Tada postoje podnizovi $(u_{n'})$ i $(v_{n'})$ i kompleksna Radonova mera μ na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$ tako da za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0(\mathbb{R}^d)$ i $\psi \in C(\mathbb{S}^{d-1})$ važi*

$$\lim_{n' \to \infty} \langle \mathscr{A}_\psi(\varphi_1 u_{n'}), \varphi_2 v_{n'} \rangle = \lim_{n' \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{A}_\psi(\varphi_1 u_{n'})(x) \overline{\varphi_2 v_{n'}}(x) dx = \langle \mu, \varphi_1 \overline{\varphi}_2 \psi \rangle. \tag{3.1}$$

Meru μ zovemo H-merom koja odgovara nizu (u_n, v_n). Ako stavimo $u_n = u_n^1$ i $v_n = u_n^2$, onda mera μ iz Teoreme 3.0.9 je jednaka meri μ_{12} iz Teoreme 2.2.8. Primenom Planšerelove teoreme vidimo da je integral u (3.1) jednak sa

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}(\varphi_1 u_{n'})(\xi) \overline{\mathscr{F}(\varphi_2 v_{n'})}(\xi) \psi(\xi) d\xi. \tag{3.2}$$

Formule u (3.1) su dobro definisane i pod pretpostavkom da $u_n \rightharpoonup 0$ u L^p i $v_n \rightharpoonup 0$ u L^q, što sledi iz Teoreme 1.4.3. U (3.2) to ne važi zato što iz Hauzdorf-Jang nejednakosti znamo da je

$$\|\mathscr{F} u\|_{L^q} \leq c \|u\|_{L^p} \ \text{ samo ako je } 1 < p \leq 2.$$

Sada navodimo Teoremu 2.1 iz [11] o postojanju H-distribucija pridruženih nizovima funkcija u Lebegovim prostorima.

Teorema 3.0.10 *Neka $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$ i $v_n \rightharpoonup 0$ u $L^s(\mathbb{R}^d)$ za neko $s \geq \max\{q,2\}$. Tada postoje podnizovi $(u_{n'})$, $(v_{n'})$ i distribucija $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$ reda ne većeg od $\kappa = \lceil d/2 \rceil + 1$ po ξ, tako da za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$ važi:*

$$\lim_{n'\to\infty} \langle \mathscr{A}_\psi(\varphi_1 u_{n'}), \varphi_2 v_{n'} \rangle \rangle = \lim_{n'\to\infty} \langle \varphi_1 u_{n'}, \overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi_2 v_{n'}))} \rangle = \langle \mu, \varphi_1 \overline{\varphi}_2 \psi \rangle.$$

U nastavku ćemo pokazati Teoremu 3.2.2, koja u odnosu na Teoremu 3.0.10 ima drugačije pretpostavke, odnosno $v_n \rightharpoonup 0$ u L^q i test funkcije $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Zatim ćemo konstrukciju H-distribucija proširiti i na nizove koji su u dualnom paru prostora Soboljeva (Teorema 3.3.1).

3.1 Prostor distribucija $\mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$

Da bismo opisali prostor koji označavamo sa $\mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$ i njegov dual $\mathscr{S}\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$ koristićemo klasične rezultate u vezi sa L^2 i teorijom Soboljeva za jediničnu sferu $\mathbb{S}^{d-1}$, detaljno prezentovane u knjigama [29] i [13]. Takođe koristimo i rezultate o C^k i L^2 funkcijama na $\mathbb{S}^{d-1}$, date u [12]. U vezi sa prostorima Soboljeva i distribucijama na mnogostrukostima preporučujemo knjigu [32], a za tenzorski proizvod prostora funkcija upućujemo na knjigu [36].

U [12, Sekcija 3.8.] su date osnovne osobine prostora Soboljeva na jediničnoj sferi u odnosu na površinsku meru $d\mathbb{S}^{d-1}$. U nastavku podrazumevamo da je $d > 2$. Neka je $\Omega_l = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| \in [1-l, 1+l]\}$, $0 < l < 1$ i $k \in \mathbb{N}_0$. Tada $\phi \in C^k(\mathbb{S}^{d-1})$ ako za neko, a onda i za svako $0 < l < 1$, važi da $\phi^* \in C^k(\Omega_l)$, gde je $\phi^*(x) = \phi(x/|x|)$. Štaviše, [12, strana 9], $C^k(\mathbb{S}^{d-1})$ je prostor koji je snabdeven normom

$$p_{\mathbb{S}^{d-1},k}(\phi) = |\phi|_{C^k(\mathbb{S}^{d-1})} = \sup_{|\alpha|\leq k,\ x\in\Omega_l} |\partial^\alpha \phi^*(x)|, \tag{3.3}$$

i norma ne zavisi od $l \in (0,1)$. Tada je $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(\mathbb{S}^{d-1})$. Kompletiranje prostora $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ u odnosu na normu

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{S}^{d-1})} = \Big\| \Big(-\Delta^\star + \Big(\frac{d-2}{2}\Big)^2 \Big)^{s/2} v \Big\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

gde je

$$\Delta^\star = -\sum_{1\leq i<j\leq d} (x_i \partial_{x_j} - x_j \partial_{x_i})^2$$

Laplas-Beltramijev operator, je prostor Soboljeva $H^s(\mathbb{S}^{d-1})$, $s \in \mathbb{N}_0$. Slučaj $d = 2$, kada je sfera $\mathbb{S}_1$ data sa $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$ je jednostavan i njega nećemo razmatrati. Tada se posmatra operator $-\Delta^\star + 1$ umesto $-\Delta^\star + ((d-2)/2)^2$.

Neka je $Y_{n,j}$ sferni harmonik reda n. Tada je $\{Y_{n,j},\ 1 \leq j \leq N_{n,d}, n \in \mathbb{N}_0\}$ ortonormirana baza prostora $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ (pogledati [12, strana. 121] ili [32, Propozicija 10.2, strana 92]), gde je $N_{n,d} \sim O(n^{d-2})$, [12, strana. 16] dimenzija skupa nezavisnih sfernih harmonika $Y_{n,j}$ reda n. Tada za proizvoljno $v \in H^s(\mathbb{S}^{d-1}), s \in \mathbb{N}_0$ važi

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{S}^{d-1})} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_{n,d}} \left(n + \frac{d-2}{2}\right)^{2s} \|v_{n,j}\|^2}, \tag{3.4}$$

gde je $v_{n,j} = \displaystyle\int_{\mathbb{S}^{d-1}} v\overline{Y}_{n,j}\, d\mathbb{S}^{d-1}$.

Prostor $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ snabdeven nizom normi (3.3), $k \in \mathbb{N}_0$, označavamo sa $\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1})$. Lema Soboljeva za kompaktne mnogostrukosti M implicira da za proizvoljno $p \in \mathbb{N}_0$ važi

$$H^s_{loc}(M) \subset C^p(M) \ \text{ za } s > d/2 + p,$$

gde je d dimenzija mnogostrukosti. Detalji se mogu naći u [13, Teoreme 2.20, 2.21 (videti takođe 2.10)]. Preporučujemo i [32, Teorema 7.6, str. 61]. Stoga imamo

$$\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1}) = \bigcap_{s \in \mathbb{N}_0} H^s(\mathbb{S}^{d-1}). \tag{3.5}$$

Ovako dobijen prostor je Frešeov. Pošto svi elementi prostora $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ imaju kompaktan nosač, sledi da je $\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1}) = \mathscr{D}(\mathbb{S}^{d-1})$.

Prema [29, Teorema II.10, strana 52], ako imamo ortonormirane baze $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(\tilde{\psi}_m)_{m\in\mathbf{N}}$ za $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ sa Lebegovom merom dx i $L^2(\mathbb{S}^{d-1}, d\mathbb{S}^{d-1})$ sa površinskom merom $d\mathbb{S}^{d-1}$, onda je $\psi_n(t_1)\tilde{\psi}_m(t_2)$, $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$ ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$.

Prema [29, Dodatak za V.3, strana 141] (gde se posmatra slučaj $d = 1$) imamo da proizvod jednodimenzionalnih harmonijskih oscilatora

$$N_x = N_1 ... N_d,\ \ N_i = x_i^2 - (d/dx_i)^2, i = 1, ..., d,$$

i Hermitove baze $h_n(x) = h_{n_1}(x_1)...h_{n_d}(x_d), n \in \mathbb{N}_0^d$, za $L^2(\mathbb{R}^d)$ zadovoljava

$$N_x^k h_n = (2n_1 + 1)^k ... (2n_d + 1)^k h_n,\ n \in \mathbb{N}_0^d,\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Štaviše, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ je određen nizom normi

$$|||\phi|||_k = ||N^k\phi||_2 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d} (2n_1 + 1)^{2k} ... (2n_d + 1)^{2k} |a_n|^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

gde je $\phi = \sum_{n\in\mathbb{N}^d} a_n h_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Ovaj niz normi je ekvivalentan sa uobičajenim nizom semi-normi za prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Sada definišemo prostor glatkih funkcija $\mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$ preko niza normi

$$p^{\infty}_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1},k}(\theta) = \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1},|\alpha+\beta|\leq k} \langle x\rangle^k |(\Delta^{\star}_{\xi})^{\alpha}\partial^{\beta}_{x}\,\theta(x,\xi)|,\ k\in\mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Prema Lemi Soboljeva za kompaktne mnogostrukosti (3.5) imamo narednu propoziciju.

Propozicija 3.1.1 *Familija normi (3.7) je ekvivalentna bilo kojoj od sledeće dve familije normi:*

$$p^{2}_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1},k}(\theta) = \left(\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} |N^k_x(\Delta^{\star}_{\xi})^{\alpha}\partial^{\beta}_{x}\,\theta(x,\xi)|^2\,dxd\xi\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

$$p_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1},k}(\theta) = \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\Omega_l,|\alpha+\beta|\leq k} \langle x\rangle^k |\partial^{\alpha}_{\xi}\partial^{\beta}_{x}\theta^*(x,\xi)|, \tag{3.9}$$

gde je $\theta^*(x,\xi)=\theta(x,\xi/|\xi|)$, $\langle x\rangle^k = (1+|x|^2)^{k/2}$ i $\Delta^{\star}_{\xi}$ je Laplas-Beltramijev operator po ξ (sa fiksiranim x). Konkretno, $\mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1})$ je Frešeov prostor.

Primetimo da $\mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1})$ indukuje π-topologiju na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1})$, videti [36, Poglavlje 43]. Pošto je $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nuklearan prostor, kompletiranje za $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1})$ je isto za π i ε topologije i označavamo ga sa $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1})$, videti [36, Deo III, Poglavlje 50, Teorema 50.1, strana 511].

Propozicija 3.1.2 *Važi*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1}) = \mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}). \tag{3.10}$$

Dokaz: Jasno je da je utapanje $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1}) \to \mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1})$ neprekidno. Dakle, za dokaz (3.10) dovoljno je pokazati da je prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1})$ gust u $\mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1})$. Kao u slučaju opštih mnogostrukosti, imamo da je $h_m(x)\times Y_{n,j}(\xi)$, $1\leq j\leq N_{n,d}$, $n,m\in\mathbb{N}$ ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1})$. Prema (3.5) – (3.8) sledi da je

$$\theta(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_{n,d}}\sum_{m\in\mathbb{N}^d_0} a_{n,j,m}h_m(x)Y_{n,j}(\xi) \in \mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}) \tag{3.11}$$

ako i samo ako za svako $r>0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_{n,d}}\sum_{m\in\mathbb{N}^d_0} |a_{n,j,m}|^2(1+n^2+|m|^2)^r < \infty \tag{3.12}$$

(videti [37, Poglavlje 9]). Ako uzmemo konačne sume na desnoj strani jednakosti (3.11) dobijamo da je $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1})$ gust u $\mathscr{S}\mathscr{E}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1})$, pa smo dokazali tvrđenje. ❑

3.2 H-distribucije za nizove u $L^p - L^q$ prostorima

3.2.1 Modifikacija prve komutacijske leme

Furijeov operator množenja $\mathscr{A}_\psi$ sa simbolom $\psi\in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1}),\ \kappa=\lfloor d/2\rfloor+1$ deluje na $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ preko dualnosti

$$_{W^{-k,p}}\langle\mathscr{A}_\psi u,v\rangle_{W^{k,q}}:={}_{W^{-k,p}}\langle u,\mathscr{A}_{\bar\psi}v\rangle_{W^{k,q}},\ \text{za } 1<p<\infty, p^{-1}+q^{-1}=1,\ k\in\mathbb{N}_0,$$

za sve $u\in W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$, $v\in W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$. Pošto je $\partial^\alpha\mathscr{A}_{\bar\psi}v=\mathscr{A}_{\bar\psi}(\partial^\alpha v)$ i $\mathscr{A}_\psi: L^q(\mathbb{R}^d)\to L^q(\mathbb{R}^d)$, onda znamo da $\mathscr{A}_{\bar\psi}v\in W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$. Ako je $u\in W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ oblika $u=\sum\limits_{|\alpha|\le k}\partial^\alpha u_\alpha$, onda za sve $v\in W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\begin{aligned}{}_{W^{-k,p}}\langle\mathscr{A}_\psi u,v\rangle_{W^{k,q}}&=\sum_{|\alpha|\le k}{}_{W^{-k,p}}\langle\partial^\alpha u_\alpha,\mathscr{A}_{\overline{\psi}}v\rangle_{W^{k,q}}=\\ =\sum_{|\alpha|\le k}(-1)^{|\alpha|}{}_{L^p}\langle u_\alpha,\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\partial^\alpha v)\rangle_{L^q}&=\sum_{|\alpha|\le k}(-1)^{|\alpha|}{}_{L^p}\langle\mathscr{A}_\psi(u_\alpha),\partial^\alpha v\rangle_{L^q}.\end{aligned}$$

Vidimo da je svaki L^p operator množenja $\mathscr{A}_\psi$ sa simbolom $\psi\in M_p(\mathbb{R}^d)$ (videti 1.4 za $M_p(\mathbb{R}^d)$) ograničen operator iz $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$.

Da bismo pokazali postojanje H-distribucija u Teoremi 3.3.1 treba nam modifikacija Tartarove prve komutacijske leme date u [34] :

Neka $\psi\in C(\mathbb{S}^{d-1})$ i $b\in C_0(\mathbb{R}^d)$ i definišimo Furijeov operator množenja $\mathscr{A}_\psi$ i operator množenja B, koji deluju na $u\in L^2(\mathbb{R}^d)$ tako da je

$$\mathscr{F}(\mathscr{A}_\psi u)(\xi)=\psi\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)\mathscr{F}(u)(\xi),\ \xi\in\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$$

i $Bu(x)=b(x)u(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$. Tada su operatori $\mathscr{A}_\psi$ i B ograničeni na $L^2(\mathbb{R}^d)$ i komutator $C:=\mathscr{A}_\psi B-B\mathscr{A}_\psi$ je kompaktan operator iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ u sebe.

Navodimo modifikaciju komutacijske leme, koja je dokazana u [11] i koju ćemo koristiti u nastavku.

Lema 3.2.1 *Neka je (v_n) ograničen u $L^2(\mathbb{R}^d)$ i $L^r(\mathbb{R}^d)$, za neko $r\in(2,\infty]$ i neka $v_n\rightharpoonup 0$. Tada niz (Cv_n) jako konvergira ka nuli u $L^q(\mathbb{R}^d)$, za svako $q\in[2,r]\backslash\{\infty\}$.*

Dokaz: Podsetimo se interpolacijske nejednakosti. Ako $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ za $1 \leq p \leq \infty$ i $1 \leq q \leq \infty$, gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup, onda $f \in L^r(\Omega)$ za svako r između p i q. Preciznije,

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha},$$

gde je $1/r = \alpha/p + (1-\alpha)/q, \alpha \in [0,1]$.

Prvo razmatramo slučaj kada je $r < \infty$. Primenom interpolacijske nejednakosti dobijamo

$$\|Cv_n\|_{L^q} \leq \|Cv_n\|_{L^2}^{\alpha} \|Cv_n\|_{L^r}^{1-\alpha}, \tag{3.13}$$

gde je $\alpha \in (0,1)$ i $1/q = \alpha/2 + (1-\alpha)/r$. Iz prve komutacijske leme sledi da je C kompaktan operator na $L^2(\mathbb{R}^d)$. Zbog pretpostavke da $v_n \in L^r(\mathbb{R}^d)$ sledi da je C ograničen na $L^r(\mathbb{R}^d)$. Dakle, iz nejednakosti (3.13) dobijamo tvrđenje.

Pretpostavimo sada da je $r = \infty$. Kako $v_n \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, onda $v_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$ za svako $2 < p < \infty$. Tada za $2 < q < p$ važi da je

$$\|Cv_n\|_{L^q} \leq \|Cv_n\|_{L^2}^{\alpha} \|Cv_n\|_{L^p}^{1-\alpha},$$

pa $Cv_n \to 0$ jako u $L^q(\mathbb{R}^d)$ za svako $2 \leq q < \infty$. ❑

3.2.2 Teorema o postojanju H-distribucija

Teorema 3.2.2 *Ako $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$ i $v_n \rightharpoonup 0$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$, onda postoje podnizovi $(u'_n)_{n'}$ i $(v_{n'})$ i distribucija $\mu(x,\xi) \in \mathcal{S}\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$ reda ne većeg od $\kappa = [d/2] + 1$ po ξ, tako da za svako $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ i $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$ važi*

$$\begin{aligned} &\lim_{n' \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{A}_\psi(\varphi_1 u_{n'})(x) \overline{(\varphi_2 v_{n'})(x)} dx \\ &= \lim_{n' \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi_1 u_{n'})(x) \overline{\mathcal{A}_{\overline{\psi}}(\varphi_2 v_{n'})(x)} dx =: \langle \mu, \varphi_1 \overline{\varphi}_2 \psi \rangle, \end{aligned} \tag{3.14}$$

gde je $\mathcal{A}_\psi : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ Furijeov množilac sa simbolom $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$.

Dokaz: Primetimo da je Furijeov operator množenja $\mathcal{A}_\psi$ sa simbolom $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$ dobro definisan za $\varphi_1 u_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi_2 v_n \in L^q(\mathbb{R}^d)$ i adjungovani operator za $\mathcal{A}_\psi$ je $\mathcal{A}_{\overline{\psi}}$, tako da važi prva jednakost u (3.14).

Neka je $1 < p \leq 2$. Posmatrajmo niz seskvilinearnih (linearnih po $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$ i anti-linearnih po $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$) funkcionela

$$\mu_n(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^d} u_n \overline{\mathcal{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)} dx. \tag{3.15}$$

Zbog neprekidnosti operatora $\mathscr{A}_\psi$ i ograničenosti nizova (u_n) i (v_n) u $L^p(\mathbb{R}^d)$ i $L^q(\mathbb{R}^d)$ sledi da postoji $c > 0$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mu_n(\varphi,\psi)| \leq \|u_n\|_{L^p}\|\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)\|_{L^q} \leq c\,\|\psi\|_{C^\kappa(\mathbf{S}^{d-1})}\|\varphi\|_{L^\infty}. \tag{3.16}$$

Fiksirajmo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i označimo sa $(B_n\varphi)$ niz funkcija definisanih na $C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$ sa

$$\langle B_n\varphi,\cdot\rangle = \mu_n(\varphi,\cdot). \tag{3.17}$$

Za svako $n \in \mathbb{N}$ linearnost za $B_n\varphi$ je jasna, a neprekidnost sledi iz (3.16):

$$|\langle B_n\varphi,\psi\rangle| \leq c_\varphi\,\|\psi\|_{C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})},\ \text{gde je } c_\varphi = c||\varphi||_{L^\infty}. \tag{3.18}$$

Ako fiksiramo $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$, onda (3.15) implicira da je preslikavanje

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \langle B_n\varphi,\psi\rangle$$

anti-linearno i ponovo prema (3.16) neprekidno.

Dalje nastavljamo sa fiksiranom funkcijom φ i primenjujemo Banah-Alaoglu teoremu (Teorema 1.1.5) da bismo dobili slabo-$\star$ konvergentan podniz $(B_k\varphi)$ u $(C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})'$.

Označimo slabu zvezda granicu niza $(B_k\varphi)$ sa $B\varphi$, odnosno za svako $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$ važi

$$\langle B\varphi,\psi\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle B_k\varphi,\psi\rangle.$$

Pokazaćemo da B može da se definiše na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tako da preslikavanje

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto B\varphi \in (C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})'$$

bude linearno i neprekidno.

Primenom dijagonalizacije definišemo B na prebrojivom gustom skupu $M = \{\varphi_m | m \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Prvo izdvajamo podniz $(B_{1,k})_k \subset (B_n)_n$ tako da je $(B_{1,k}\varphi_1)$ slabo zvezda konvergentan u $(C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})'$ i označimo granicu sa $B\varphi_1$. Dalje možemo da izdvojimo podniz $(B_{2,k})_k \subset (B_{1,k})_k$ tako da je $(B_{2,k}\varphi_2)$ slabo zvezda konvergentan u $(C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1}))'$ i označimo granicu sa $B\varphi_2$. Primetimo da $(B_{2,k}\varphi_1)$ takođe slabo zvezda konvergira ka $B\varphi_1$. Ponavljanjem ovog postupka (izdvajamo podniz za svako $\varphi_m \in M$), dobijamo dijagonalni podniz

$$B_{k,k} \in \mathscr{L}\left(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \left(C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})\right)'\right),$$

tako da za sve $\varphi_m \in M$

$$\langle B\varphi_m,\psi\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle B_{k,k}\varphi_m,\psi\rangle, \quad \psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Označimo $B_{k,k} =: b_k$ i fiksirajmo $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$. Iz (3.17), $\varphi \mapsto \langle b_k\varphi, \psi\rangle$, je tačkasto ograničen niz u $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, koji konvergira na gustom podskupu $M \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Prema Banah-Štajnhaus teoremi, pogledati npr. [22, str. 169], $\langle b_k(\cdot), \psi\rangle$ konvergira ka $\langle B(\cdot), \psi\rangle$ na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Na ovaj način smo pokazali da za svako $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i svako $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$

$$\lim_{k\to\infty} \langle b_k\varphi, \psi\rangle = \langle B\varphi, \psi\rangle.$$

Štaviše, prema (3.17) je

$$|\langle B\varphi, \psi\rangle| \leq c||\varphi||_{L^\infty}||\psi||_{C^\kappa(\mathbf{S}^{d-1})}. \tag{3.19}$$

Sada koristimo verziju Švarcove teoreme o jezgru, koja je data u knjizi [36], Propozicija 50.7 na strani 524.

Propozicija 50.7 tvrdi da, ako su E i F Frešeovi prostori i ako je E nuklearan prostor, onda je

$$E'\hat{\otimes}F' \cong B(E,F) \cong (E\hat{\otimes}F)'.$$

Za definiciju i detalje o nuklearnim prostorima preporučujemo takođe knjigu [36]. Kako su $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{E}(\mathbb{S}^{d-1})$ Frešeovi prostori i $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ je nuklearan, možemo da primenimo teoremu.

Dakle, postoji distribucija $\mu \in \mathscr{S}\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$ definisana sa

$$\langle \mu(x,\xi), \varphi(x)\psi(\xi)\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle b_k\varphi, \psi\rangle = \lim_{k\to\infty} \int u_k\overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_k)}dx, \tag{3.20}$$

za sve $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$, gde je (u_k) podniz od (u_n) i (v_k) je podniz od (v_n) koji odgovara nizu (b_k).

Sada koristimo osobinu faktorisanja koju imaju funkcije u $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, a pokazana je u [28] i glasi: svaka funkcija $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ može da se napiše u obliku $\varphi = \overline{\varphi}_1\varphi_2$, za neke $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Tada je

$$\langle \mu, \varphi\psi\rangle = \lim_{k\to\infty} \int u_k\overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\overline{\varphi}_1\varphi_2 v_k)}dx.$$

Pošto je

$$\|\varphi_2 v_k\|_{L^2} \leq \|v_k\|_{L^q}\|\varphi_2\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}}$$

možemo da primenimo komutacijsku lemu na $\varphi_2 v_k \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ i $\overline{\varphi}_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ i dobijamo da za svako $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$ važi

$$\langle \mu, \overline{\varphi}_1\varphi_2\psi\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1 u_k\overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi_2 v_k)}dx. \tag{3.21}$$

Na ovaj način smo pokazali teoremu 3.14 za slučaj $1 < p \leq 2$.

U slučaju $p > 2$ definišemo

$$\mu_n(\varphi, \psi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{A}_\psi(\varphi u_n)\bar{v}_n dx.$$

Tada na prethodno opisan način ali sa zamenjenim ulogama nizova (u_n) i (v_n) koristimo faktorizaciju $\varphi = \varphi_1 \overline{\varphi}_2$ i komutacijsku lemu za $\varphi_1 u_n \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$.
❑

Napomena 3.2.3 *Pretpostavke u prethodnoj teoremi mogu da se neznatno modifikuju u slučaju kada je $p \in (1,2)$.*

Tada umesto $v_n \rightharpoonup 0$ u L^q možemo da pretpostavimo da $v_n \rightharpoonup 0$ u L^r, za neko $r \geq q$. Dobija se isti rezultat kao u Teoremi 3.2.2 zato što tada za svako $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi v_n \in L^q \cap L^2$ i možemo da primenimo isti dokaz. Ova ideja se koristila u [11], ali sa $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

3.3 H-distribucije i prostori Soboljeva

U sledećoj teoremi konstruišemo H-distribucije za nizove koji slabo konvergiraju dualnom paru prostora Soboljeva.

Teorema 3.3.1 *Neka $u_n \rightharpoonup 0$ slabo u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ i $v_n \rightharpoonup 0$ slabo u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$. Tada postoje podnizovi $(u_{n'}), (v_{n'})$ i distribucija $\mu \in \mathscr{S}\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$ tako da za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i za sve $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$,*

$$\lim_{n'\to\infty} \langle \mathscr{A}_\psi(\varphi_1 u_{n'}), \varphi_2 v_{n'} \rangle = \lim_{n'\to\infty} \langle \varphi_1 u_{n'}, \mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi_2 v_{n'}) \rangle = \langle \mu, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \psi \rangle. \qquad (3.22)$$

Dokaz: Pošto $u_n \rightharpoonup 0$ u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$, onda postoji podniz $u_{n'} \rightharpoonup 0$ tako da je $u_{n'} = \sum_{|\alpha|\leq k} \partial^\alpha g_{\alpha,n'}$, gde je za svako $|\alpha| \leq k$, $(g_{\alpha,n'})$ podniz $L^p(\mathbb{R}^d)$-funkcija tako da $g_{\alpha,n'} \rightharpoonup 0$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$. Dokažimo da takav podniz postoji.

Slabo konvergentan niz u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ je i ograničen skup u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$. Primenom analitičke forme Han - Banahove teoreme (Teorema 18.1, strana 184 u [36]) sledi da postoje ograničeni skupovi $\{F_{\alpha,n} : n \in \mathbb{N}\}$, $|\alpha| \leq k$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$, tako da je $u_n = \sum_{|\alpha|\leq k} \partial^\alpha F_{\alpha,n}$. Pošto su skupovi $\{F_{\alpha,n}, n \in \mathbb{N}\}$ ograničeni u $L^p(\mathbb{R}^d)$, sledi i da su slabo prekompaktni, odnosno $\{F_{\alpha,n}, n \in \mathbb{N}\}$ ima slabo konvergentan podniz.

Dijagonalizacijom dolazimo do podniza za koji važi da

$$F_{\alpha,n'} \rightharpoonup f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d), n' \to \infty, |\alpha| \leq k,$$

u $L^p(\mathbb{R}^d)$. Kako $\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \partial^\alpha F_{\alpha,n'} \rightharpoonup 0$, sledi da je $\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \partial^\alpha f_\alpha = 0$. Tako dolazimo do traženog podniza

$$u_{n'} = \sum_{|\alpha|\leq k} \partial^\alpha (F_{\alpha,n'} - f_\alpha), \ \text{odnosno } g_{\alpha,n'} = F_{\alpha,n'} - f_\alpha.$$

U nastavku pišemo u_n umesto $u_{n'}$.

Znamo da je

$$\partial_x^\alpha \Big[\mathscr{A}_\psi(u)\Big] = \mathscr{A}_{\psi_\alpha}(u) = \mathscr{A}_\psi(\partial^\alpha u), \text{ za } \psi_\alpha(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \psi(\xi).$$

Dobijamo da je

$$\mathscr{A}_\psi(\varphi_1 \partial^\alpha g_{\alpha,n}) = (-1)^{|\alpha|} \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} (-1)^{|\beta|} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta \Big[\mathscr{A}_\psi\Big(g_{\alpha,n}\partial^{\alpha-\beta}\varphi_1\Big)\Big],$$

pa sledi

$$\Big\langle \mathscr{A}_\psi(\varphi_1 u_n), \varphi_2 v_n \Big\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Big\langle \mathscr{A}_\psi\Big(g_{\alpha,n}\partial^{\alpha-\beta}\varphi_1\Big), \partial^\beta[\varphi_2 v_n]\Big\rangle$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Big\langle \mathscr{A}_\psi\Big(g_{\alpha,n}\partial^{\alpha-\beta}\varphi_1\Big), \partial^{\beta-\gamma}\varphi_2 \partial^\gamma v_n\Big\rangle.$$

Ako fiksiramo α možemo da primenimo Teoremu 3.2.2 na $g_{\alpha,n} \rightharpoonup 0$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$ i $v_n \rightharpoonup 0$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$ i dobijamo podnizove $(g_{\alpha,n_0})_{n_0}$, $(v_{\alpha,n_0})_{n_0}$ i H-distribuciju $\mu_{\alpha,0} \in \mathscr{S}\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})$, tako da je

$$\big\langle \mu_{\alpha,0}, \varphi_1\overline{\varphi}_2\psi\big\rangle := \lim_{n_0\to\infty} \big\langle \mathscr{A}_\psi(\varphi_1 F_{\alpha,n_0}), \varphi_2 v_{\alpha,n_0}\big\rangle.$$

Dalje primenom Teoreme 3.2.2 na $g_{\alpha,n_0} \rightharpoonup 0$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$, i $\partial^{(1,0,\ldots,0)} v_{\alpha,n_0} \rightharpoonup 0$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$, dobijamo podnizove $(g_{\alpha,n_{(1,0,\ldots,0)}})_{n_{(1,0,\ldots,0)}}$, $(v_{\alpha,n_{(1,0,\ldots,0)}})_{n_{(1,0,\ldots,0)}}$ i H-distribuciju $\mu_{\alpha,(1,0,\ldots,0)} \in \mathscr{S}\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1})$. Na ovaj način dobijamo konačno mnogo H-distribucija $\mu_{\alpha,\gamma}$, $0\leq\gamma\leq\alpha$ tako da je

$$\big\langle \mu_{\alpha,\gamma}, \varphi_1\overline{\varphi}_2\psi\big\rangle := \lim_{n_\gamma\to\infty} \big\langle \mathscr{A}_\psi\big(\varphi_1 g_{\alpha,n_\gamma}\big), \varphi_2 \partial^\gamma v_{\alpha,n_\gamma}\big\rangle.$$

Poslednja distribucija $\mu_{\alpha,\alpha}$ pridružena je podnizovima $(g_{\alpha,n_\alpha})_{n_\alpha}$, $(v_{\alpha,n_\alpha})_{n_\alpha}$. Dalje definišemo distribuciju μ^α na sledeći način: za $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$\langle \mu^\alpha, \varphi_1\overline{\varphi}_2\psi\rangle :=$$

$$(-1)^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \Big\langle \mu_{\alpha,\gamma}, \partial^{\alpha-\beta} \varphi_1 \partial^{\beta-\gamma} \bar{\varphi}_2 \psi \Big\rangle .$$

Suma na desnoj strani je konačna i sve H-distribucije $\mu_{\alpha,\gamma}$ mogu da se dobiju preko $(g_{\alpha,n_\alpha})_{n_\alpha}$, što je podniz od g_{α,n_γ} i $(v_{\alpha,n_\alpha})_{n_\alpha}$, što je podniz od $(v_{\alpha,n_\gamma})_{n_\gamma}$, pa je H-distribucija μ^α dobro definisana.

Primetimo da smo distribuciju μ^α dobili za fiksirano α. Ako stavimo $\alpha = 0$, primenom prethodne procedure dobijamo distribuciju μ^0 definisanu preko $(g_{0,n_0})_{n_0}$ i $(v_{n_0})_{n_0}$. Dalje za $(g_{e_1,n_0})_{n_0}$ i $(v_{e_1,n_0})_{n_0}$ dobijamo H-distribuciju μ^{e_1} definisanu preko $(g_{e_1,n_{e_1}})_{n_{e_1}}$ i $(v_{e_1,n_{e_1}})_{n_{e_1}}$, gde je $e_1 = (1,0,...,0)$.
Nastavljamo sa $e_2 = (0,1,0,...,0)$ da bismo dobili H-distribuciju μ^{e_2} i postupak ponavljamo za sve $|\alpha| \leq k$.

Sledi da postoji H-distribucija μ definisana sa

$$\langle \mu \, , \varphi_1 \overline{\varphi}_2 \psi \rangle :=$$

$$\sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \Big\langle \mu_{\alpha,\gamma}, \partial^{\alpha-\beta} \varphi_1 \partial^{\beta-\gamma} \bar{\varphi}_2 \psi \Big\rangle .$$

i postoje podnizovi

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha g_{\alpha, n_{(0,\dots,0,k)}} \right)_{n_{(0,\dots,0,k)}} \quad \text{i} \quad \left(v_{n'} \equiv v_{(0,\dots,0,k), n_{(0,\dots,0,k)}} \right)_{n_{(0,\dots,0,k)}},$$

što je i trebalo pokazati. ❑

Distribuciju μ koju smo dobili u Teoremi 3.3.1 zovemo *H-distribucija* koja odgovara (pod)nizu $(u_{n'}, v_{n'})$.

Pretpostavimo da su distribucije μ koje smo dobili u Teoremi 3.3.1 jednake nuli. Tada se jednostavno dobija lokalna jaka konvergencija u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$. Naredna teorema nam daje uopštenje.

Teorema 3.3.2 *Neka $u_n \rightharpoonup 0$ u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$. Ako je za svaki niz $v_n \rightharpoonup 0$ u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$ odgovarajuća H-distribucija jednaka nuli, onda za svaku funkciju $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\theta u_n \to 0$ jako u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$, $n \to \infty$.*

Dokaz: Da bismo pokazali jaku konvergenciju treba da pokažemo da za svako $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\sup\{\langle \theta u_n, \phi \rangle \, : \, \phi \in B\} \longrightarrow 0, \; n \to \infty, \text{za svaki ograničen skup } B \subseteq W^{k,q}(\mathbb{R}^d).$$

Ako to nije tačno, onda postoje $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, ograničen skup B_0 u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon_0 > 0$ i podniz $(\theta u_k) \subset (\theta u_n)$, tako da

$$\sup\{|\langle \theta u_k, \phi\rangle| : \phi \in B_0\} \geq \varepsilon_0, \text{ za svako } k \in \mathbb{N}.$$

Izaberimo $\phi_k \in B_0$ tako da $|\langle \theta u_k, \phi_k\rangle| > \varepsilon_0/2$. Pošto $\phi_k \in B_0$ i B_0 je ograničen u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$, (ϕ_k) ima slabo konvergentan podniz u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$, to jest, do na podniz, $\phi_k \rightharpoonup \phi_0$ u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$.

Štaviše, pošto je ϕ_0 fiksirana funkcija imamo da $\langle u_k, \phi_0\rangle \to 0$ i

$$|\langle \theta u_k, \phi_k - \phi_0\rangle| > \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad k > k_0. \tag{3.23}$$

Primenom Teoreme 3.3.1 na niz $u_k \rightharpoonup 0$ i $\phi_k - \phi_0 \rightharpoonup 0$, dobijamo da za svako $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{k\to\infty} {}_{W^{-k,p}}\langle \mathscr{A}_\psi(\varphi_1 u_k), \varphi_2(\phi_k - \phi_0)\rangle_{W^{k,q}} = 0. \tag{3.24}$$

Ako je $\psi \equiv 1$ na $\mathbb{S}^{d-1}$, onda iz (3.24) sledi da je

$$\lim_{k\to\infty} \langle \varphi_1 u_k\,,\, \varphi_2(\phi_k - \phi_0)\rangle = 0.$$

Ponovo koristimo faktorizacijsku osobinu prostora $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Dakle, ako $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, onda je $\theta = \phi_1\bar{\phi}_2$, za neke $\phi_1, \phi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i važi $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \phi_1 u_k\,,\, \phi_2(\phi_k - \phi_0)\rangle = 0$, to jest, $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \theta u_k\,,\, (\phi_k - \phi_0)\rangle = 0$. Dolazimo do kontradikcije sa (3.23), pa je tvrđenje pokazano. ❑

3.3.1 Lokalizacijska osobina

Poznato je da je Risov potencijal I_α, $0 < \alpha < d$ lokalno integrabilne funkcije f definisan sa

$$\mathscr{F}[I_\alpha[f]](\xi) := (2\pi|\xi|)^{-|\alpha|}\mathscr{F}[f](\xi),$$

(videti npr. [21]). Koristićemo potencijal I_1 sa sledećim osobinama:

$$\|I_1(f)\|_{L^{\frac{qd}{d-q}}} \leq C\|f\|_{L^q}, \text{ za } f \in L^q(\mathbb{R}^d), \quad 1 < q < d; \tag{3.25}$$

$$\partial_j I_1(f) = -R_j(f), \quad f \in L^q(\mathbb{R}^d), \text{ gde je } R_j := \mathscr{A}_{\xi_j/\imath|\xi|}. \tag{3.26}$$

Znamo i da je $R_j : L^q(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$ neprekidno preslikavanje i zove se Risova transformacija.

Posmatrajmo niz $u_n \rightharpoonup 0$ u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ koji zadovoljava sledeći niz jednačina:

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_i \left(A_i(x) u_n(x) \right) = f_n(x), \tag{3.27}$$

pri čemu su koeficijenti $A_i \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i (f_n) je niz distribucija tako da

$$\varphi f_n \to 0 \text{ u } W^{-k-1,p}(\mathbb{R}^d), \text{ za svako } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{3.28}$$

Teorema 3.3.3 *Neka je $1 < q < d$. Ako niz $u_n \rightharpoonup 0$ u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$ zadovoljava (3.27) i (3.28), onda za svaki niz $v_n \rightharpoonup 0$ u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$ odgovarajuća H-distribucija μ zadovoljava*

$$\sum_{j=1}^{d} A_j(x) \xi_j \mu(x,\xi) = 0 \quad u \;\; \mathscr{S}\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}). \tag{3.29}$$

Štaviše, ako (3.29) implicira $\mu(x,\xi) = 0$, onda važi jaka konvergencija $\theta u_n \longrightarrow 0$ u $W^{-k,p}(\mathbb{R}^d)$, za svako $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Dokaz: Neka $v_n \rightharpoonup 0$ u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i neka $\psi \in C^\kappa(\mathbb{S}^{d-1})$. Treba da pokažemo (3.29), odnosno da je (množeći (3.29) sa $(i|\xi|)^{-1}$, $|\xi| \neq 0$), do na podniz,

$$0 = \sum_{j=1}^{d} \left\langle \mu, A_j \varphi_1 \varphi_2 \frac{\xi_j}{i|\xi|} \psi \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{d} \left\langle u_n A_j \varphi_1 \, , \, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_j}(\varphi_2 v_n) \right\rangle, \tag{3.30}$$

gde je $\Psi_j = \dfrac{\xi_j}{i|\xi|} \psi\Big(\dfrac{\xi}{|\xi|}\Big)$.

Primetimo da iz (3.26) sledi da je

$$\mathscr{A}_{\bar{\Psi}_j} = -R_j \circ \mathscr{A}_{\bar{\psi}} = \partial_j I_1 \circ \mathscr{A}_{\bar{\psi}}.$$

Dakle, (3.30) je ekvivalentno sa

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{d} \partial_j (u_n A_j) \, , \, \bar{\varphi}_1 I_1 (\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n)) \right\rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} \lim_{n\to\infty} \left\langle u_n A_j \, , \, \partial_j(\bar{\varphi}_1) I_1 (\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n)) \right\rangle = 0. \tag{3.31}$$

Pošto $\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n) \in W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$ iz (3.25) sledi da je

$$\partial^\alpha I_1 (\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n)) = I_1 (\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\partial^\alpha(\varphi_2 v_n))) \in L^{\frac{qd}{d-q}}(\mathbb{R}^d), \text{ za sve } 0 \le |\alpha| \le k. \tag{3.32}$$

Kako je $q < \dfrac{qd}{d-q}$, važi da je za sve $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\varphi I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))\|_{L^q} \le \|I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))\|_{L^{\frac{qd}{d-q}}} \|\varphi\|_{L^d}. \tag{3.33}$$

Iz (3.32) i (3.33) imamo da je

$$\partial^\alpha[\varphi I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))] \in L^q(\mathbb{R}^d), \text{ za sve } 0 \le |\alpha| \le k.$$

Dalje je

$$\partial^{\alpha+e_j}[I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))] = -R_j(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\partial^\alpha(\varphi_2 v_n))) \in L^q(\mathbb{R}^d),$$

što implicira da je za sve $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\varphi I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n)) \in W^{k+1,q}(\mathbb{R}^d),$$

i dodatno imamo da

$$\varphi I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n)) \rightharpoonup 0 \text{ u } W^{k+1,q}(\mathbb{R}^d). \tag{3.34}$$

Neka je $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_{11}\bar{\varphi}_{12}$ za $\varphi_{11}, \varphi_{12} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Iz (3.28) i (3.34) dobijamo da je

$$\left\langle \varphi_{11} f_n, \bar{\varphi}_{12} I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n)) \right\rangle \to 0.$$

Pošto važi (3.27) zaključujemo da prvi izraz u (3.31) konvergira ka nuli.

Sada analiziramo drugi izraz u (3.31). Dokazaćemo da

$$\partial_j(\bar{\varphi}_1) I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n)) \to 0, \; n \to \infty$$

jako u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$. Neka je $\partial_j \bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_{13}\bar{\varphi}_{14}$ u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ i označimo sa L_m otvorenu loptu sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika $m \in \mathbb{N}$. Znamo iz Relihove leme da je $W^{k+1,q}(L_m)$ kompaktno utopljen u $W^{k,q}(L_m)$. Pošto $\bar{\varphi}_{14} I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))$ slabo konvergira ka nuli u $W^{k+1,q}(\mathbb{R}^d)$, dijagonalizacijski postupak nam daje podniz tako da je za sve $m \in \mathbb{N}$

$$\bar{\varphi}_{14} I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n)) \longrightarrow 0 \text{ u } W^{k,q}(L_m). \tag{3.35}$$

Izaberimo glatke funkcije χ_m tako da je $\chi_m(x) = 1$ za $x \in L_m$ i $\chi_m(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}^d \backslash L_{m+1}$ i neka je $\bar{\varphi}_{13} = \chi_m \bar{\varphi}_{13} + (1-\chi_m)\bar{\varphi}_{13}$. Imamo da je

$$\|\bar{\varphi}_{13}\bar{\varphi}_{14} I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))\|_{W^{k,q}} \le \sup_{|\alpha|\le k, |x|>m} |\partial^\alpha \bar{\varphi}_{13}| \, \|\bar{\varphi}_{14} I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))\|_{W^{k,q}} \tag{3.36}$$

$$+\|\chi_m \bar{\varphi}_{13}\bar{\varphi}_{14} I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))\|_{W^{k,q}}. \tag{3.37}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je niz $\bar{\varphi}_{14} I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))$ ograničen u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$, odnosno postoji $M > 0$ tako da je $\|\bar{\varphi}_{14} I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))\|_{W^{k,q}} \leq M$. Pošto $\bar{\varphi}_{13} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za sve $m \geq m_0$

$$\sup_{|\alpha|\leq k, |x|>m} |\partial^\alpha \bar{\varphi}_{13}| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Dalje, iz (4.32) sledi da (3.37) konvergira ka nuli kad $n \to \infty$. Dakle, za dato ε, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je (3.37) manje od $\varepsilon/2$ za sve $n \geq n_0$. Zato je leva strana u (3.36) manja od ε za $n > n_0$, odnosno, $\partial_j(\bar{\varphi}_1) I_1(\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n))$ konvergira jako u $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$ i važi (3.31) , pa je dokaz za (3.29) završen.

Ako su koeficijenti A_j takvi da je $\sum_{j=1}^d A_j(x)\xi_j \neq 0$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, onda Teorema 3.3.2 implicira jaku konvergenciju $\theta u_n \longrightarrow 0$, za svako $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

❏

3.4 L^p-distribucije

Navodimo rezultate iz rada [6]. Uvodimo L^p-distribucije, dokazujemo njihove osobine koje su u vezi sa osobinom slabe prekompaktnosti i pokazaćemo da su H-distribucije za nizove u prostorima L^p- distribucija jednake nuli. Za definiciju i više detalja o osobinama L^p- distribucija preporučujemo [14], [31], [39].

Definicija 3.4.1 *Neka je $1 \leq q < \infty$. Sa $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ označavamo prostor funkcija $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tako da $\partial^\alpha \phi \in L^q(\mathbb{R}^d)$, za sve multi-indekse $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ sa topologijom definisanom prebrojivom familijom normi*

$$\|\phi\|_{m,q} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^q}^q \right)^{1/q}, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{3.38}$$

Prostori $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ su Frešeovi, prostor $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je gust u $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ za $1 \leq q < +\infty$. Za $q = \infty$, umesto $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ posmatraćemo potprostor

$$\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \,|\, \partial^\alpha \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}.$$

Definicija 3.4.2 *Sa $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ označavamo zatvorenje prostora $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ u topologiji definisanoj preko niza normi $\|\cdot\|_{m,\infty}$:*

$$\|\phi\|_{m,\infty} = \sup_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty}, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{3.39}$$

Prostor $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ sadrži funkcije iz $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ čiji svi izvodi kovergiraju ka nuli u beskonačnosti. Jasno je da je $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ zatvoren potprostor Frešeovog prostora $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$, pa je i $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ Frešeov. Detaljnije o navedenim prostorima se može naći u knjigama [14, Sekcija 6.1] i [39, VI.§8]. Dalje uvodimo duale prostora $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$.

Definicija 3.4.3 *Neka je $p = \frac{q}{q-1}$, $q \geq 1$ (za $q = 1$, $p = \infty$). Sa $\mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ označavamo dualan prostor za $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq q < \infty$. Definišemo i*

$$\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d) := \left(\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)\right)'.$$

Za $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{D}'{}_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} W^{k,q}(\mathbb{R}^d) \quad \text{i} \quad \mathscr{D}'{}_{L^p} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} W^{-k,p},$$

gde su $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$ prostori Soboljeva. Za detalje preporučujemo [14].

Važi sledeća teorema (Švarc, [39, Teorema VI.25])

Teorema 3.4.4 *Neka je $p \in [1,\infty]$. Tada:*

a) za svaku distribuciju $T \in \mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ postoji $n \in \mathbb{N}_0$ tako da T može da se predstavi kao konačna suma izvoda funkcija $f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d)$, odnosno

$$T = \sum_{|\alpha|\leq n} \partial^\alpha f_\alpha, \tag{3.40}$$

gde su f_α ograničene, neprekidne funkcije u $L^p(\mathbb{R}^d)$ i za $p \neq \infty$ svaka funkcija f_α teži ka nuli u beskonačnosti.

b) Distribucija $T \in \mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako

$$T * \psi \in L^p(\mathbb{R}^d), \text{ za sve } \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d), \tag{3.41}$$

gde je $*$ oznaka za konvoluciju, odnosno

$$\langle T * \psi, \varphi \rangle = \langle \psi(y), \langle T(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

za $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Napomena 3.4.5 *Primetimo da je* (3.41) *ekvivalentno sa:*

$$\text{postoji } m \in \mathbb{N}, \text{ tako da je za sve } \psi \in C_c^m(\mathbb{R}^d),\ T * \psi \in L^p(\mathbb{R}^d). \tag{3.42}$$

Zaista, (3.42) *implicira* (3.41) *zato što je $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \subset C_c^m(\mathbb{R}^d)$. Obratno, ako važi* (3.41)*, onda znamo da postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je*

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha f_\alpha$$

za $f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d)$. *Dakle, za svako* $\psi \in C_c^m(\mathbb{R}^d)$ *važi* $T * \psi = \sum_{|\alpha| \le m} \partial^\alpha f_\alpha * \psi$ *i*

$$\partial^\alpha f_\alpha * \psi = (-1)^{|\alpha|} f_\alpha * \partial^\alpha \psi \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Zaključujemo da je $T * \psi$ *konačna suma* L^p *funkcija i zato* $T * \psi \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Napomena 3.4.6 *(***H-distribucije sa nizovima u prostorima L^p-distribucija***)*

Znamo da slaba konvergencija niza $(v_n)_n$ *u* $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$ *implicira jaku konvergenciju u* $W^{k-1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, *odnosno za sve* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $(\varphi v_n)_n$ *konvergira jako u* $W^{k-1,q}(\mathbb{R}^d)$. *Zaista,* $v_n \rightharpoonup v$ *u* $W^{k,q}(\mathbb{R}^d)$ *implicira da*

$$\partial^\alpha v_n \rightharpoonup \partial^\alpha v$$

u $L^q(\mathbb{R}^d)$, *za sve* $|\alpha| \le k$. *Tada* $\partial^\alpha v_n \rightharpoonup \partial^\alpha v$ *u* $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ *za sve* $|\alpha| \le k-1$ *i takođe u* $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, *zato što je utapanje prostora* $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ *u* $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *kompaktno prema Relihovoj lemi.*

Dalje za sve $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ *i za sve* $|\alpha| \le k-1$ *važi da*

$$\partial^\alpha(\varphi v_n) \to \partial^\alpha(\varphi v)$$

u $L^q(\mathbb{R}^d)$. *Zato* $(\varphi v_n)_n$ *jako konvergira u* $W^{k-1,q}(\mathbb{R}^d)$. *Sledi da slaba konvergencija u* $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ *implicira jaku u* $\mathscr{D}_{L^q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Dakle, ako pretpostavimo da $u_n \rightharpoonup 0$ *u* $\mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ *i da* $v_n \rightharpoonup 0$ *u* $\mathscr{D}_{L^q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, *onda važi da* $\varphi v_n \to 0$ *jako u* $\mathscr{D}_{L^q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *i za* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *(što sledi iz Teoreme* (4.5.1)*). Zato je*

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi_1 u_n\,, \mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi_2 v_n)\rangle = \langle \mu, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \psi\rangle = 0,$$

odnosno u ovom slučaju je pridružena H-distribucija uvek trivijalna.

3.5 Test prostori i njihovi duali

Za $L^q(\mathbb{R}^d)$ prostore znamo da svaki ograničen niz u $L^q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$ ima slabo konvergentan podniz (Teorema 1.1.4). Ista tvrdnja je tačna za $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ako umesto slabe posmatramo slabu-$\star$ konvergenciju. U Primeru 1.2.6 videli smo da $L^1(\mathbb{R}^d)$ nema ovu osobinu. U nastavku podrazumevamo da je prostor slabo prekompaktan ako i samo ako svaki ograničen niz ima slabo konvergentan podniz (prema [17]). Cilj je da ispitamo da li ograničeni nizovi u $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ prostorima imaju slabo (odnosno slabo - $\star$) konvergentne podnizove.

Lema 3.5.1 *a) $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ je slabo prekompaktan za $1 < q < \infty$.*

b) $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ nije slabo prekompaktan.

c) $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ je slabo - $\star$ prekompaktan.

d) $\mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ nije slabo prekompaktan.

Dokaz: a) Neka je $1 < q < \infty$ i neka je $(u_n)_n$ ograničen niz u $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$. Treba da pokažemo da $(u_n)_n$ ima slabo konvergentan podniz. Ako $(u_n)_n$ ima konstantan podniz dokaz je završen, pa pretpostavljamo da to nije slučaj. Pošto je $(u_n)_n$ ograničen niz u $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$, to jest u odnosu na norme (3.38), onda su za svako $n \in \mathbb{N}$ funkcije u_n i svi njihovi izvodi ograničene u $L^q(\mathbb{R}^d)$.

Kako je $(u_n)_n$ ograničen u $L^q(\mathbb{R}^d)$ i $L^q(\mathbb{R}^d)$ je slabo prekompaktan, onda ovaj niz ima slabo konvergentan podniz u $L^q(\mathbb{R}^d)$ koji označavamo sa

$$\phi_n \rightharpoonup \phi_0 \in L^q(\mathbb{R}^d).$$

Niz $(\partial_{x_1}\phi_n)_n$ je takođe ograničen u $L^q(\mathbb{R}^d)$, pa ima konvergentan podniz $(\partial_{x_1}\phi_{(1,0,\dots,0),n})_n$ i funkcija $\phi_{(1,0,\dots,0)} \in L^q(\mathbb{R}^d)$ sa osobinama

$$\partial_{x_1}\phi_{(1,0,\dots,0),n} \rightharpoonup \phi_{(1,0,\dots,0)}, \text{ i takođe } \phi_{(1,0,\dots,0),n} \rightharpoonup \phi_0.$$

Štaviše, $\partial_{x_1}\phi_0 = \phi_{(1,0,\dots,0)}$.

Na isti način dobijamo nizove ostalih izvoda. Dakle, za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ postoji $(\phi_{\alpha,n})_n$ što je podniz od $(\phi_n)_n$ tako da je

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha,n} &\rightharpoonup \phi_0 \\ \partial_{x_1}\phi_{\alpha,n} &\rightharpoonup \phi_{(1,0,\dots,0)} \\ &\dots \\ \partial^\alpha\phi_{\alpha,n} &\rightharpoonup \phi_\alpha \end{aligned} \tag{3.43}$$

i $\phi_\alpha = \partial^\alpha\phi_0$.

Neka je $A : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^d$ bijekcija $A(k) = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ i izaberimo niz $(\phi_{\alpha_k,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Primetimo da je niz $(\phi_{\alpha_k,k})_k$ podniz od $(\phi_k)_k$ (pa ne sadrži nijedan konstantan podniz), niz $(\partial_{x_1}\phi_{\alpha_k,k})_k$ je podniz od $(\partial_{x_1}\phi_{(1,0,\dots,0),k})_k$ i tako dalje. Pošto je granica slabo konvergentnog niza jedinstvena za $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ važi da

$$\partial^\alpha\phi_{\alpha_k,k} \rightharpoonup \phi_\alpha \text{ u } L^q(\mathbb{R}^d).$$

Zaključujemo da je $(\phi_{\alpha_k,k})_k$ podniz datog niza $(u_n)_n$ koji slabo konvergira u $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$. Da bismo to pokazali neka je $\theta \in \mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$. Pošto $\theta \in \mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$

znamo da θ može da se predstavi kao konačna suma izvoda funkcija $f_\beta \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\theta = \sum_{|\beta| \le p} \partial^\beta f_\beta. \tag{3.44}$$

Važi

$$\langle \phi_{\alpha_k,k}, \theta \rangle = \langle \phi_{\alpha_k,k}, \sum_{|\beta| \le p} \partial^\beta f_\beta \rangle = \sum_{|\beta| \le p} (-1)^{|\beta|} \langle \partial^\beta \phi_{\alpha_k,k}, f_\beta \rangle$$

i kada $k \to \infty$

$$\langle \phi_{\alpha_k,k}, \theta \rangle \to \sum_{|\beta| \le p} (-1)^{|\beta|} \langle \partial^\beta \phi_0, f_\beta \rangle = \langle \phi_0, \theta \rangle.$$

To impicira da je $\phi_{\alpha_k,k} \rightharpoonup \phi_0$ u $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$.

b) Za Frešeove prostore važi sledeća teorema:

Frešeov prostor E je refleksivan ako i samo ako je svaki ograničen skup u E relativno slabo kompaktan (što znači da ima kompaktno zatvorenje u slaboj topologiji, dokaz je naveden u [25, Propozicija 23.24, str. 276]).

Ako bi $\dot{\mathscr{B}}$ bio slabo prekompaktan prostor navedeno tvrđenje bi impliciralo refleksivnost. Pošto $\dot{\mathscr{B}}$ nije refleksivan (videti Napomene o dualima i refleksivnosti), sledi da nije ni slabo prekompaktan.

c) Poznato je da je (za detalje pogledati [16])

$$\Big((\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d))' \Big)' = \mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d).$$

Pošto je $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ dual topološko vektorskog prostora, posmatraćemo slabu-$\star$ topologiju na $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$. Dakle, niz $(u_n)_n$ konvergira slabo - $\star$ ka u u $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ ako za svako $g \in (\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d))' = \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ važi da $\langle u_n, g \rangle \to \langle u, g \rangle$, $n \to \infty$.

Neka je $(u_n)_n$ dati niz u $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$, što znači da su sve funkcije u_n ograničene u odnosu na norme date sa (3.39). Odnosno, funkcije u_n i svi njihovi izvodi su ograničene u $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dalje možemo da primenimo analognu proceduru kao u a) da bismo pokazali da ovaj niz ima slabo - $\star$ konvergentan podniz.

d) Konstruisaćemo ograničen niz u $\mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ koji nema slabo konvergentan podniz.

Neka je $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ tako da je $\operatorname{supp}\psi = \overline{B(0;1)}$ (zatvorena lopta poluprečnika 1 sa centrom u 0) i neka je

$$0 \le \psi \le 1, \psi(x) > 0 \text{ za } |x| < 1 \text{ i } \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx = 1.$$

Definišimo niz funkcija $f_n(x) := n^d \psi(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. Primetimo da je

$$f_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d), n \in \mathbb{N},\ f_n \ge 0, \operatorname{supp} f_n = \overline{B(0;1/n)}$$

i $\|f_n\|_{L^1} = 1$. Niz $(f_n)_n$ je ograničen u $\mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d)$, to jest u odnosu na sve norme koje definišu topologiju prostora $\mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d)$.

Pretpostavimo da $(f_n)_n$ ima slabo konvergentan podniz $(f_k)_k$. Kako je $\operatorname{supp} f_k = \overline{B(0;1/k)}$, onda slaba granica niza $(f_k)_k$ mora biti nula.

Iz Švarcove karakterizacije duala date sa (3.40) sledi da $1 \in (\mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d))'$, pa zato $\int_{\mathbb{R}^d} f_n \cdot 1\, dx \to 0,\ n \to \infty$, što je u kontradikciji sa $\|f_n\|_{L^1} = 1$.

❑

Napomene o dualima i refleksivnosti:

- Prostori $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$ su refleksivni, odnosno,

$$\Big((\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d))'\Big)' = (\mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d))' = \mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d), \quad 1 < q < \infty,\ p = q/q-1.$$

- Prostor $\mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ nije refleksivan. Imamo Frešeov prostor i našli smo ograničen niz u $\mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ koji nema slabo konvergentan podniz.

  Dakle, [25, Propozicija 23.24, str. 276] implicira da $\mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d)$ nije refleksivan.

  Primetimo i da $(\mathscr{D}_{L^1}(\mathbb{R}^d))' = \mathscr{D}'_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ nije refleksivan.

- Kako je $\big((\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d))'\big)' = \mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ sledi da $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ nije refleksivan.

  Zaista, $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ je zatvoren u $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$. Ako bi prostor $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ bio refleksivan, onda bismo dobili da je i $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ refleksivan, što nije tačno (zatvoren potprostor refleksivnog Frešeovog prostora je refleksivan, videti [25]).

  Primetimo da onda i $\mathscr{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^d)$ nije slabo prekompaktan.

3.6 Konvergencija u dualnim prostorima

Karakterizacija ograničenih skupova u $\mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ je data u [1].

Karakterizacija je važna zato što f_n konvergira jako ka nuli u $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako za sve ograničene skupove $B' \subseteq \mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ važi,

$$\sup_{\phi \in B'} \langle f_n, \phi \rangle \to 0, \text{ kad } n \to \infty.$$

Podsetimo se sledeće teoreme.

Teorema 3.6.1 *[1, Teorema 1] Neka je $B' \subseteq \mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(I) *B' je ograničen;*

(II) *Za svaki ograničen skup $B \subseteq \mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ kada je $p \neq 1$ i za svaki ograničen skup $B \subseteq \dot{\mathscr{B}}$ kada je $p = 1$ postoji $M > 0$ tako da je*

$$\sup\{|(T * \phi)(x)| : T \in B',\ \phi \in B,\ x \in \mathbb{R}^d\} < M;$$

(III) *Za svaki ograničen otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ i za svaku funkciju $\phi \in \mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ kada je $p \neq 1$ i za svaku funkciju $\phi \in \dot{\mathscr{B}}$ kada je $p = 1$ postoji $M_\phi > 0$ tako da je*

$$\sup\{|(T * \phi)(x)| : T \in B',\ x \in \Omega\} < M_\phi.$$

Kao posledicu ovih rezultata, dobijamo naredne propozicije.

Propozicija 3.6.2 *Ako $T_n \rightharpoonup T$ u slaboj - $\star$ topologiji na $\mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$, onda:*

(I) *niz $T_n * \theta$ je ograničen u $L^p(\mathbb{R}^d)$ za svako $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$,*

(II) *postoji dovoljno veliko $m \in \mathbb{N}$ tako da je niz $T_n * \phi$ ograničen u $L^p(\mathbb{R}^d)$ za svako $\phi \in C_c^m(\mathbb{R}^d)$.*

Dokaz: (I) Neka je $q \in [1, \infty)$; slučaj $\dot{\mathscr{B}}$ je sličan.

Pošto je $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen u $\mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ prema Teoremi 3.6.1 (II) sledi,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}; \phi \in B} |(T_n * \phi)(x)| \le M,$$

za svaki ograničen skup B u $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$.

Neka je $B_1 = B \cap \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, gde je B jedinična lopta u $L^q(\mathbb{R}^d)$. Označimo $\check{\phi}(x) = \phi(0 - x)$. Za bilo koje $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\sup_{n \in \mathbb{N}; \varphi \in B_1} |\langle T_n \star \theta, \varphi \rangle| = \sup_{n \in \mathbb{N}; \varphi \in B_1} |\langle T_n \star \check{\varphi}, \check{\theta} \rangle| = \sup_{n \in \mathbb{N}; \varphi \in B_1} |(T_n \star (\theta \star \check{\varphi}))(0)| \le M,$$

pošto je $\{\theta * \check{\varphi} : \varphi \in B_1\}$ ograničen skup u $\mathscr{D}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$. Kako je B_1 gust u B, imamo da je

$$\sup_{n\in\mathbb{N};\varphi\in B} |\langle T_n * \theta, \varphi\rangle| \leq M.$$

Dakle, skup $\{T_n * \theta : n \in \mathbb{N}\}$ je ograničen u $L^p(\mathbb{R}^d)$.

(II) Pokažimo da je $\{T_n * \theta : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen skup u $L^p(\mathbb{R}^d)$ za svako $\theta \in C_c^m(\mathbb{R}^d)$, za dovoljno veliko m.

Neka je $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp}\varphi \subset K\}$, za kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^d$. Pošto je $\{T_n * \varphi : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen skup u $L^p(\mathbb{R}^d)$ sledi (gde je B_1 kao u prethodnom delu dokaza) da je

$$\sup_{n\in\mathbb{N};\psi\in B_1} |\langle T_n * \psi, \varphi\rangle| = \sup_{n\in\mathbb{N};\psi\in B_1} |\langle T_n * \check{\varphi}, \check{\psi}\rangle| < \infty.$$

Dakle, $\{T_n * \psi : n \in \mathbb{N},\ \psi \in B_1\}$ je ekvineprekidna familija funkcija u $\mathscr{D}'_K(\mathbb{R}^d)$ i postoji okolina nule u $\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^d)$,

$$V_m(\varepsilon) := \{h \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^d) : \|h\|_{K,m} \leq \varepsilon\},$$

gde je $\|h\|_{K,m} = \sup\limits_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha h\|_{L^\infty(K)}$, tako da je

$$h \in V_m(\varepsilon) \implies \sup_{n\in\mathbb{N};\psi\in B_1} |\langle T_n * \check{\psi}, \check{h}\rangle| = \sup_{n\in\mathbb{N};\psi\in B_1} |\langle T_n * h, \psi\rangle| \leq 1.$$

Ovo implicira da je $\sup\limits_{n\in\mathbb{N};\psi\in B} |\langle T_n * \check{\psi}, \check{h}\rangle| \leq 1$ kada je $h \in V_m(\varepsilon)$, zato što je B_1 gust u B. Isto važi za zatvorenje od $V_m(\varepsilon)$ u

$$\mathscr{D}_{K,m}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in C^m(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp}\varphi \subset K\} \text{ za kompaktan skup K} \subset \mathbb{R}^d.$$

U normi $\|h\|_{K,m}$ imamo da je $\mathscr{D}_{K,m}(\mathbb{R}^d)$ Banahov prostor i za svako $h \in \mathscr{D}_{K,m}(\mathbb{R}^d)$ važi da je

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle T_n * h, \psi\rangle| \leq c\|\psi\|_{L^q},\ \psi \in L^q(\mathbb{R}^d).$$

Dakle, za svako $h \in \mathscr{D}_{K,m}(\mathbb{R}^d)$, skup $\{T_n * h : n \in \mathbb{N}\}$ je ograničen u $L^p(\mathbb{R}^d)$. ❑

Propozicija 3.6.3 *Neka je $1 < p < \infty$. Ako $T_n \rightharpoonup T$ u slaboj-$\star$ topologiji u $\mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$, onda postoji $l \in \mathbb{N}$ i postoje nizovi $(S_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$ koji slabo konvergiraju ka S_α, $|\alpha| \leq l$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$ tako da je*

$$T_n = \sum_{|\alpha|\leq l} \partial^\alpha S_{\alpha,n} \quad i \quad T = \sum_{|\alpha|\leq l} \partial^\alpha S_\alpha.$$

Dokaz: Neka je $m \in \mathbb{N}$ tako da je niz $T_n * \varphi$ ograničen u $L^p(\mathbb{R}^d)$ za svako $\varphi \in C_c^m(\mathbb{R}^d)$ (postojanje takvog m je dokazano u Propoziciji 3.6.2).

Prema (VI 6.22) u [39], postoji $k \in \mathbb{N}$, tako da je parametriks operatora Δ^k u $C_c^m(\mathbb{R}^d)$, odnosno postoji $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ i $\psi \in C_c^m(\mathbb{R}^d) \subseteq W^{m,q}(\mathbb{R}^d)$ tako da je $\delta = \Delta^k \psi + \theta$. Dakle,

$$T_n = T_n * \delta = \Delta^k (T_n * \psi) + T_n * \theta, \quad T_n \in B'.$$

Sa Δ smo označili Laplasov operator, odnosno $\Delta_x = \partial_{x_1 x_1} + \cdots + \partial_{x_d x_d}$.

Prema Lemi 3.6.2 su $\{T_n * \psi : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{T_n * \theta : n \in \mathbb{N}\}$ ograničeni skupovi u $L^p(\mathbb{R}^d)$. Štaviše, oni konvergiraju slabo u $L^p(\mathbb{R}^d)$, zato što za $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\langle T_n * \psi, \varphi \rangle \to \langle T * \psi, \varphi \rangle,$$

pošto je $\langle T_n, \check{\psi} * \varphi \rangle \to \langle T, \check{\psi} * \varphi \rangle$ i $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je gust u $L^q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \neq \infty$. Prema Banah Štajnhaus teoremi $T_n * \psi$ konvergira slabo u $\mathscr{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^d)$. Isto važi za $T_n * \theta$.

Dakle, svaka funkcija T_n može da se zapiše u obliku $T_n = \sum\limits_{|\alpha| \leq 2k} \partial^\alpha S_{\alpha,n}$ i $T = \sum\limits_{|\alpha| \leq 2k} \partial^\alpha S_\alpha$, pri čemu $S_{\alpha,n} \rightharpoonup S_\alpha$ u L^p, pa je tvrđenje pokazano. ❑

Glava 4

H-distribucije sa neograničenim simbolom

Primetimo da smo u teoremama o postojanju H-mera i H-distribucija pretpostavljali da je množilac ψ ograničena funkcija. U oba slučaja ψ je neprekidna funkcija definisana na sferi, koja se preko homogenosti reda nula definiše na $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Cilj je da dokažemo teoremu o egzistenciji H-distribucija kada množilac ψ može da bude i neograničena funkcija. Zato ćemo koristiti teoriju pseudo-diferencijalnih operatora da bismo uveli odgovarajuće klase množilaca. Takođe ćemo dokazati i lokalizacijski princip, kao i odgovarajuće verzije komutacijske leme.

4.1 Prostori simbola

Uvodimo klase simbola koje ćemo koristiti.

Definicija 4.1.1 *Neka su $m \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}_0$ i $\sigma \in C^N(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Tada σ pripada klasi S_N^m ako za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ takve da je $|\alpha| \leq N, |\beta| \leq N$ važi*

$$|\sigma|_N^m := \max_{|\alpha|,|\beta| \leq N} \sup_{x,\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)|}{\langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}} < \infty. \tag{4.1}$$

Primetimo da je sa $|\cdot|_N^m$ definisana norma, pa je S_N^m Banahov prostor. Definišimo $S^m = \operatorname{proj} \lim_{N\to\infty} S_N^m$. Tada je S^m Frešeov prostor. Primetimo da je $S^m = S_{1,0}^m$ standardna klasa simbola pseudodiferencijalnih operatora, videti i Napomenu 1.5.3.

Analogno kao kod standardne klase simbola S^m, ako $\sigma \in S_N^m$, onda je σ simbol pseudo-diferencirjalnog operatora reda m koji deluje na funkcije iz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i definisan je preko formule

$$T_\sigma(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \sigma(x,\xi) \hat{u}(\xi) đ\xi, \; u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Dalje, simbol $\sigma \in S^m$ (resp. S^m_N) je u klasi S^m_0 (resp. $S^m_{N,0}$)) ako za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d_0$ (resp. $|\alpha|, |\beta| \leq N$) postoji ograničena funkcija $c_{\alpha\beta}$ na $\mathbb{R}^d$ tako da je $\lim_{|x|\to\infty} c_{\alpha\beta}(x) = 0$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d_0$ (resp. $|\alpha|, |\beta| \leq N$) i

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)| \leq c_{\alpha\beta}(x)\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|},\ x,\xi \in \mathbb{R}^d. \tag{4.2}$$

Jasno je da je S^m_0 zatvoren potprostor od S^m, a za ostale osobine simbola u ovim klasama upućujemo na [23], [41]

Napomena 4.1.2 *Ako $\sigma \in S^m$ i $\lim_{|x|\to\infty} c_{\alpha\beta}(x) = 0$ za $\alpha = \beta = 0$, onda (4.2) takođe važi za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d_0$ (detalji se mogu naći u [23]). Sledi da je dovoljno proveriti* (4.2) *za $\alpha = \beta = 0$.*

4.2 Teorema o L^p ograničenosti pseudo-diferencijalnog operatora reda nula

Znamo da je operator T_σ, definisan u (1.14), ograničen linearan operator iz $H^q_s(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_{s-m}(\mathbb{R}^d)$ kada $\sigma \in S^m, s \in \mathbb{R}, 1 < q < \infty$, (Teorema 11.9. u [40]). To je uopštenje Teoreme 10.7., takođe iz [40], gde je $m = s = 0$, odnosno, kada je $\sigma \in S^0$, onda je $T_\sigma : L^p \to L^p$ ograničen, linearan operator i važi ocena $\|T_\sigma u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$. Detaljnom analizom dokaza Teoreme 10.7 dobijamo sledeću teoremu koja nam daje neprekidnost u odnosu na simbol $\sigma \in S^0_N$, kada je $N > 2d$ ceo broj.

Teorema 4.2.1 *Neka je N ceo broj, $N > 2d$, $1 < p < \infty$ i neka je $T : S^0_N \times L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ definisan sa*

$$T(\sigma, u) = T_\sigma u.$$

Tada je T neprekidan, bilinearan operator i postoji $c_N > 0$ tako da važi sledeći uslov

$$\|T_\sigma u\|_{L^p} \leq c_N |\sigma|_{S^0_N} \|u\|_{L^p}. \tag{4.3}$$

Dokaz: Pratimo dokaz Teoreme 10.7 u [40]. Fokusiraćemo se na konstante koje se pojavljuju u ocenama u Teoremi 10.7, odakle ćemo dobiti neprekidnost u odnosu na σ. Prostor $\mathbb{R}^d$ možemo da predstavimo kao uniju kocaka, odnosno $\mathbb{R}^d = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^d} Q_l$, gde je Q_l kocka sa centrom u l, sa ivicima paralelnim koordinatnim osama i dužine jedan. Dalje uvodimo funkciju $\eta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, tako da je $\eta(x) = 1$ za $x \in Q_0$ i definišimo

$$\sigma_l(x,\xi) = \eta(x-l)\sigma(x,\xi),\ x,\xi \in \mathbb{R}^d,\ l \in \mathbb{Z}^d.$$

Tada je $T(\sigma_l,\cdot)=T_{\sigma_l}=\eta(x-l)T_\sigma$ i važi

$$\int_{Q_l}|(T_\sigma\varphi)(x)|^p dx \le \int_{\mathbb{R}^d}|(T_{\sigma_l}\varphi)(x)|^p dx,\ \ \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{4.4}$$

Dalje imamo da je

$$(T_{\sigma_l}\varphi)(x)=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\lambda}\Big[(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\xi}\hat{\sigma}_l(\lambda,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi\Big]d\lambda, \tag{4.5}$$

gde je

$$\hat{\sigma}_l(\lambda,\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-i\lambda x}\sigma_l(x,\xi)dx,$$

za $\lambda,\xi\in\mathbb{R}^d$. Iz Leme 10.9 u [40] sledi da za sve $\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}_0^d$ važi

$$|(-i\lambda)^\beta\partial_\xi^\alpha\hat{\sigma}_l(\lambda,\xi)|\le c_\beta\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\sup_{\gamma\le\beta,x,\xi\in\mathbb{R}^d}|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\gamma\sigma(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{|\alpha|}.$$

Sledi da za svaki multi - indeks $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$ i za svaki pozitivan ceo broj n postoji konstanta $c_n>0$ tako da je

$$|\partial_\xi^\alpha\hat{\sigma}_l(\lambda,\xi)|\le c_n\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}(1+|\lambda|)^{-n}\Big(\sup_{|\beta|\le n,x,\xi\in\mathbb{R}^d}|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{|\alpha|}\Big). \tag{4.6}$$

Dakle za svaki ceo broj $N>d/2$ iz (4.6) sledi da je

$$|\partial_\xi^\alpha\hat{\sigma}_l(\lambda,\xi)|\le B|\xi|^{-|\alpha|}\ \text{ za } |\xi|>\xi_0,\ |\alpha|\le N,$$

gde je

$$B=c_N(1+|\lambda|)^{-N}\max_{|\alpha|,|\beta|\le N}\sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^d}|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{|\alpha|}.$$

Iz Teoreme 1.4.3 (Mihlinova teorema) sa

$$\psi(\xi)=\hat{\sigma}_l(\lambda,\xi)\ \text{ i }\ B=c_N(1+|\lambda|)^{-N}|\sigma|_{S_N^0}$$

sledi da operator

$$(\tilde{T}_{l,\lambda}\varphi)(x)=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\xi}\hat{\sigma}_l(\lambda,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi,\ \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$$

može da se proširi do neprekidnog operatora na $L^p(\mathbb{R}^d)$ tako da je

$$\|\tilde{T}_{l,\lambda}\varphi\|_p\le cc_N(1+|\lambda|)^{-N}|\sigma|_{S_N^0}\|\varphi\|_p,\ \varphi\in L^p(\mathbb{R}^d). \tag{4.7}$$

Tada iz (4.5) sledi da postoji (nova) konstanta $c > 0$ tako da je

$$\|T_{\sigma_l}\varphi\|_p \leq cc_N|\sigma|_{S_N^0}\|\varphi\|_p \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\lambda|)^{-N}d\lambda. \tag{4.8}$$

Prema (4.8) i (4.4) za $N > d$ sledi da postoji konstanta $c > 0$ tako da je

$$\int_{Q_l}|(T_\sigma\varphi)(x)|^p dx \leq cc_N^p(|\sigma|_{S_N^0})^p\|\varphi\|_p^p,\ \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{4.9}$$

Lema 10.10 u [40] implicira da za funkciju $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ koja je jednaka nuli u okolini fiksiranog $x \in \mathbb{R}^d$ važi da je

$$(T_\sigma\varphi)(x) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}K(x, x-z)\varphi(z)dz,$$

gde je $K(x,z) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}e^{iz\xi}\sigma(x,\xi)d\xi,\ x,z \in \mathbb{R}^d$, u smislu distribucija. Iz dokaza Leme 10.10 imamo da za svaki ceo broj $k > d$ postoji konstanta $C_k > 0$ tako da je

$$|K(x,z)| \leq C_k|z|^{-k}|\sigma|_{S_k^0},\ z \neq 0. \tag{4.10}$$

Dalje konstruišemo kocke Q_l^* i Q_l^{**} kao u dokazu Teoreme 10.7. Preciznije, kocka Q_l^{**} je dva puta veća od Q_l i Q_l^* ima centar u l kao i Q_l i Q_l^{**} i $Q_l \subset Q_l^* \subset Q_l^{**}$. Neka je $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ funkcija sa nosačem u Q_l^{**}, $0 \leq \psi(x) \leq 1$ i $\psi(x) = 1$ u okolini Q_l^*. Tada je $T_\sigma\varphi = T_\sigma\varphi_1 + T_\sigma\varphi_2$, gde je $\varphi_1 = \psi\varphi$ i $\varphi_2 = (1-\psi)\varphi$. Uvodimo oznake

$$I_l = \int_{Q_l}|(T_\sigma\varphi)(x)|^p dx \quad \text{i} \quad J_l = \int_{Q_l}|(T_\sigma\varphi_2)(x)|^p dx.$$

Koristeći (4.9) dobijamo

$$I_l \leq c2^p c_N^p(|\sigma|_{S_N^0})^p\|\varphi_1\|_p^p + 2^p J_l. \tag{4.11}$$

Tada (4.10) implicira da za svaki ceo broj $k > d$ postoji $C > 0$ tako da je

$$|(T_\sigma\varphi_2)(x)| \leq CC_k|\sigma|_{S_k^0}\int_{\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*}|x-z|^{-k}|\varphi_2(z)|dz,\ \ x \in Q_l,\ z \in \mathbb{R}^d\backslash Q_l^*. \tag{4.12}$$

Neka je $r \geq \sqrt{d}+1$. Tada postoji konstanta $C_{r,k} > 0$ tako da je

$$\frac{|x-z|^{-k}}{r+|x-z|^{-k}} \leq C_{r,k}, \tag{4.13}$$

za sve $x \in Q_l$ i $z \in \mathbb{R}^d\backslash Q_l^*$. Iz (4.12) i (4.13) sledi da je

$$|(T_\sigma\varphi_2)(x)| \leq CC_k|\sigma|_{S^0_k}\int_{\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*}(r+|x-z|)^{-k}|\varphi_2(z)|dz,\ \ x\in Q_l,\ z\in\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*. \tag{4.14}$$

Dalje primetimo da za $x\in Q_l$, $z\in\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*$ važi

$$r+|x-z|\geq r+|l-z|+|x-l|\geq (r-\sqrt{d}/2)+|l-z|\geq \mu+|l-z|, \tag{4.15}$$

gde je $\mu=\sqrt{d}/2+1$. Dakle, prema (4.13), (4.14) i (4.15), koristeći da je $1/p+1/q=1$, dobijamo da postoji konstanta $C>0$ tako da je

$$|(T_\sigma\varphi_2)(x)| \leq CC_k|\sigma|_{S^0_k}\int_{\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*}\frac{(\mu+|x-z|)^{-k/2}|\varphi_2(z)|}{(\mu+|l-z|)^{\frac{k}{2}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}}dz, \tag{4.16}$$

gde je $x\in Q_l,\ z\in\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*$. Iz nejednakosti Minkovskog u integralnoj formi i nejednakosti Heldera (1.2) sledi

$$\Big(\int_{Q_l}|(T_\sigma\varphi_2)(x)|^p dx\Big)^{1/p}\leq CC_k|\sigma|_{S^0_k}$$

$$\times\Big(\int_{\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*}(\mu+|l-z|)^{-k/2}dz\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*}\frac{|\varphi_2(z)|^p dz}{(\mu+|l-z|)^{k/2}}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Zaključujemo da postoji konstanta $C>0$ tako da za $k/2>d$ važi

$$J_l\leq CC_k^p(|\sigma|_{S^0_k})^p\int_{\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*}\frac{|\varphi_2(z)|^p dz}{(\mu+|l-z|)^{k/2}}. \tag{4.17}$$

Prema (4.11) i (4.17) postoji $C_1>0$ tako da je:

$$\int_{Q_l}|(T_\sigma\varphi)(x)|^p dx\leq C_1C_k^p(|\sigma|_{S^0_k})^p\Big(\int_{Q_l^{**}}|\varphi(x)|^p dx+\int_{\mathbb{R}^d\backslash Q_l^*}\frac{|\varphi_2(z)|^p dz}{(\mu+|l-z|)^{k/2}}\Big)$$

Sumiranjem po $l\in\mathbb{Z}^d$ dobijamo ocenu

$$\int_{\mathbb{R}^d}|(T_\sigma(\varphi)(x))|^p dx\leq C_2(|\sigma|_{S^0_k})^p\Big(1+\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{(1+|l|)^{k/2}}\Big)\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^p dx \tag{4.18}$$

Dakle, sa $k=N>2d$ sledi tražena nejednakost, odnosno za sve $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\int_{\mathbb{R}^d}|(T_\sigma(\varphi)(x))|^p dx\leq C_N(|\sigma|_{S^0_N})^p\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^p dx.$$

Kako $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ je gust u $L^p(\mathbb{R}^d)$, dobijamo (4.3). ❑

Posledica 4.2.2 *Neka je* $1 < p < \infty$, $s, m \in \mathbb{R}$, $N > 2d$ *i* $\sigma \in S^m_N$. *Tada postoji* $c_N > 0$ *tako da važi sledeći uslov*

$$\|T(\sigma,u)\|_{H^p_s} = \|T_\sigma u\|_{H^p_s} \leq C_N |\sigma|_{S^m_N} \|u\|_{H^p_{m+s}}, \; u \in H^p_{m+s}(\mathbb{R}^d). \tag{4.19}$$

Dokaz: Iz definicije norme na $H^p_s(\mathbb{R}^d)$ prostorima sledi da je

$$\begin{aligned} \|T_\sigma u\|_{H^p_s} &= \|\mathscr{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^s \mathscr{F}(T_{\langle\xi\rangle^{-s}}(T_{\langle\xi\rangle^{-m}\sigma(x,\xi)}(T_{\langle\xi\rangle^{m+s}}u)))\|_{L^p} \\ &= \|T_{\sigma_1(x,\xi)}(T_{\langle\xi\rangle^{m+s}}u)\|_{L^p}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

gde je $\sigma_1(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{-m}\sigma(x,\xi) \in S^0$. Primenom Teoreme 4.2.1 na (4.20) dobijamo da za svaki ceo broj $N > 2d$ postoji $c_N > 0$ tako da je

$$\|T_\sigma u\|_{H^p_s} \leq c_N |\sigma_1|_{S^0_N} \|T_{\langle\xi\rangle^{m+s}}u\|_{L^p} = c_N |\sigma_1|_{S^0_N} \|u\|_{H^p_{m+s}}.$$

Kako je $|\sigma_1|_{S^0_N} \leq |\langle\xi\rangle|_{S^{-m}_N} |\sigma|_{S^m_N} \leq c|\sigma|_{S^m_N}$, sledi uslov (4.19). ❑

4.3 Množioci

U nastavku uvodimo klasu simbola koji zavise isključivo od ξ i koji imaju konačnu regularnost. Definišemo ih na sledeći način.

Neka $m \in \mathbb{R}$, $q \in [1,\infty]$, $N \in \mathbb{N}_0$. Posmatramo prostor svih $\psi \in C^N(\mathbb{R}^d)$ za koje je norma

$$|\psi|_{s^m_{q,N}} := \max_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha_\xi \psi(\xi)\langle\xi\rangle^{-m+|\alpha|}\|_{L^q} < \infty. \tag{4.21}$$

Kompletiranje ovog prostora u odnosu na normu datu sa (4.21) označavamo sa $(s^m_{q,N}, |\cdot|_{s^m_{q,N}})$. Kada je $q = \infty$ imamo odmah Banahov prostor, odnosno uvedeni prostor je jednak svom kompletiranju.

Definišemo operator T_ψ sa simbolom $\psi \in s^m_{q,N}$, kao u (1.14). Pošto ψ zavisi samo od ξ operator T_ψ zovemo operatorom množenja i u ovom slučaju koristimo oznaku $\mathscr{A}_\psi$. Primetimo da je

$$|\partial^\alpha \psi(\xi)| \leq |\psi|_{s^0_{\infty,N}} |\xi|^{-|\alpha|}, \; |\alpha| \leq N, \; |\xi| > |\xi_0| > 0,$$

ako je $\psi \in s^0_{\infty,N}$ i $N > d/2$. Dakle, prema Teoremi 1.4.3, važi sledeći rezultat.

Posledica 4.3.1 *Neka je* $N > d/2$, $1 < p < \infty$. *Tada je* $\mathscr{A}_\psi$ *neprekidan bilinearan operator na* $s^0_{\infty,N} \times L^p$ *i*

$$\|\mathscr{A}(\psi,u)\|_{L^p} = \|\mathscr{A}_\psi(u)\|_{L^p} \leq C|\psi|_{s^0_{\infty,N}} \|u\|_{L^p}. \tag{4.22}$$

U nastavku sa $(s^m_{\infty,N})_0 \subset s^m_{\infty,N}$ označavamo klasu množilaca za koje važi

$$\sup_{|\xi|\to\infty} \frac{|\partial^\alpha_\xi \psi(\xi)|}{\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}} = 0, \quad \text{za sve } \; |\alpha| \leq N. \tag{4.23}$$

4.3.1 Separabilnost klasa simbola

Da bismo konstruisali H-distribucije koristićemo Teoremu 1.1.5, pa dokazujemo da su klase simbola kojima pripada test funkcija ψ separabilne.

Teorema 4.3.2 *Prostor* $((s^m_{\infty,N+1})_0, |\cdot|_{s^m_{\infty,N}})$ *je separabilan.*

Dokaz: Pokazaćemo da je $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ gust u $((s^m_{\infty,N+1})_0, |\cdot|_{s^m_{\infty,N}})$. Pošto je $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ separabilan, to implicira separabilnost i za $((s^m_{\infty,N+1})_0, |\cdot|_{s^m_{\infty,N}})$.

Neka je $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$ i neka je $\psi_n(\xi) = (\psi * \phi_n)\chi(\xi/n)$, gde je $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\chi(\xi) = 1$ za $|\xi| \leq 1$ i $\chi(\xi) = 0$ za $|\xi| \geq 2$. Uvodimo i niz molifajera $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ na standardan način, odnosno

$$\mathrm{supp}\phi_n \subset \overline{B(0,1/n)}, \int \phi_n = 1 \text{ i } \phi_n(\xi) = n^d \phi(n\xi),$$

gde je supp $\phi \subset \overline{B(0,1)}$.

Tada $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ i

$$\frac{|\partial_\xi^\alpha(\psi_n(\xi) - \psi(\xi))|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} = \frac{|\sum_{\beta\leq\alpha} \partial^\beta \psi(\xi) * \phi_n \partial^{\alpha-\beta}\chi(\xi/n) - \partial_\xi^\alpha \psi(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}$$

$$= \frac{|\sum_{\beta<\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-\beta}} \partial^\beta \psi(\xi) * \phi_n \partial^{\alpha-\beta}\chi + \partial^\alpha \psi(\xi) * \phi_n \chi(\xi/n) - \partial_\xi^\alpha \psi(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}$$

$$\leq \frac{\sum_{\beta<\alpha} \frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}} |\partial^\beta \psi(\xi) * \phi_n||\partial^{\alpha-\beta}\chi|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} + \frac{|(\partial^\alpha \psi(\xi) * \phi_n \chi(\xi/n) - \partial^\alpha \psi(\xi) * \phi_n)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}$$

$$+ \frac{|\partial^\alpha \psi(\xi) * \phi_n - \partial^\alpha \psi(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}.$$

Dalje je

$$\frac{|(\chi(\xi/n) - 1)||\partial_\xi^\alpha \psi(\xi) * \phi_n|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} \leq \sup_{|\xi|\geq n} \frac{|\partial_\xi^\alpha a(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} \to 0, n \to \infty.$$

Za poslednji sabirak važi

$$\frac{|\partial^\alpha \psi(\xi) * \phi_n - \partial^\alpha \psi(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} = \frac{|\int (\partial^\alpha \psi(\xi - y)) - \partial^\alpha \psi(\xi)) n^d \phi(ny) dy|}{\langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}}$$

$$\leq \int \frac{|\nabla \partial^\alpha \psi(\xi - \theta y)||y| n^d \phi(ny)| dy}{\langle \xi \rangle^{m-|\alpha|-1} \langle \xi \rangle} \leq C \int |y| n^d \phi(ny)| dy \to 0, n \to \infty.$$

Za prvu sumu važi

$$\frac{\sum_{\beta<\alpha}\frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}}|\partial^\beta\psi(\xi)*\phi_n||\partial^{\alpha-\beta}\chi|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}=\frac{\sum_{\beta<\alpha}\frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}}|\partial^\beta\psi(\xi)*\phi_n||\partial^{\alpha-\beta}\chi(\xi/n)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}}}$$

$$\leq \sup\frac{|\partial^\beta\psi(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}}\frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}}|\partial^{\alpha-\beta}\chi(\xi/n)|$$

Neka je $z=\xi/n$. Tada je

$$\sup\frac{\frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}}|\partial^\beta\psi(\xi)||\partial^{\alpha-\beta}\chi(\xi/n)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}}}$$

$$=\sup\frac{\frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}n^\beta}|\partial^\beta\psi(zn)||\partial^{\alpha-\beta}\chi(z)|}{n^{|\beta|-|\alpha|}(1+|nz|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}(1/n^2+|z|^2)^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}}}$$

$$\leq C\frac{1}{n^{|\beta|}}\sup_{nz,z\in\mathbb{R}^d}\frac{|\partial^\beta\psi(zn)|}{(1+|nz|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}}\to 0,\ n\to\infty,$$

zato što $\psi\in(s^m_{\infty,N+1})_0$. ❑

Teorema 4.3.3 *Neka je $1\leq q<\infty$. Tada je prostor $(s^m_{q,N+1},|\cdot|_{s^m_{q,N}})$ separabilan.*

Dokaz: Kao i u Teoremi 4.3.2 dokazaćemo da je $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ gust skup u $(s^m_{q,N+1},|\cdot|_{s^m_{q,N}})$. Neka je $\psi\in s^m_{q,N}$ i neka je $\psi_n(\xi)=(\psi(\xi)*\phi_n)\chi(\xi/n)$, gde su χ i ϕ_n uvedene kao u dokazu Teoreme 4.3.2. Tada $\psi_n\in C^\infty_c$ i za sve $|\alpha|\leq N$ važi

$$\Big\|\frac{\partial^\alpha_\xi(\psi_n(\xi)-\psi(\xi))|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big\|_{L^q}=\Big(\int\Big|\frac{\partial^\alpha_\xi\psi_n(\xi)-\partial^\alpha_\xi\psi(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\Big(\int\Big|\frac{\sum_{\beta<\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\partial^\beta\psi(\xi)*\phi_n(\xi)\partial^{\alpha-\beta}\chi+\partial^\alpha\psi(\xi)*\phi_n\chi(\xi/n)-\partial^\alpha_\xi\psi(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\Big(\int\Big|\frac{\sum_{\beta<\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\partial^\beta\psi(\xi)*\phi_n\partial^{\alpha-\beta}\chi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Big(\int\Big|\frac{\partial^\alpha\psi(\xi)*\phi_n\chi(\xi/n)-\partial^\alpha_\xi\psi(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Dalje je

$$\Big(\int\Big|\frac{\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\partial^{\beta}\psi(\xi)*\phi_n\partial^{\alpha-\beta}\chi(\xi/n)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{1/q}$$

$$\leq C\frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}}|\partial^{\alpha-\beta}\chi(\xi/n)|\Big(\int\Big|\frac{\partial^{\beta}\psi(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{1/q}$$

$$\leq C\Big(\int_{n\leq|\xi|\leq 2n}\Big|\frac{\partial^{\beta}\psi(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}\frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}}(1+4n^2)^{\frac{|\alpha|-|\beta|}{2}}\to 0,\ n\to\infty.$$

Važi da je

$$\Big(\int\Big|\frac{\partial^{\alpha}\psi(\xi)*\phi_n\chi(\xi/n)-\partial^{\alpha}_{\xi}\psi(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\Big(\int\Big|\frac{\partial^{\alpha}\psi(\xi)*\phi_n\chi(\xi/n)-\partial^{\alpha}_{\xi}\psi(\xi)*\phi_n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Big(\int\Big|\frac{\partial^{\alpha}\psi(\xi)*\phi_n-\partial^{\alpha}_{\xi}\psi(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Tada je,

$$\Big(\int\Big|\frac{\partial^{\alpha}\psi(\xi)*\phi_n\chi(\frac{\xi}{n})-\partial^{\alpha}_{\xi}\psi(\xi)*\phi_n}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\Big(\int_{|\xi|\geq n}\Big|\frac{\partial^{\alpha}\psi(\xi)}{\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}\to 0,\ n\to\infty.$$

Dakle, važi

$$\Big(\int\Big|\frac{\partial^{\alpha}\psi(\xi)*\phi_n-\partial^{\alpha}_{\xi}\psi(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\Big(\int\Big|\frac{\int(\partial^{\alpha}\psi(\xi-y)-\partial^{\alpha}_{\xi}\psi(\xi))\phi_n(y)dy}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\Big(\int\Big|\frac{\int(\nabla\partial^{\alpha}\psi(\xi-\theta y)||y|n^d\phi(ny)|dy)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|-1}{2}}}\Big|^q d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}\leq C\int|y|n^d\phi(ny)|dy\to 0, n\to\infty,$$

što je i trebalo pokazati. ❑

U skladu sa oznakama operator množenja sa $\varphi=\varphi(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ označavamo sa T_{φ}.

Teorema 4.3.4 *Neka $m \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Tada je $T_\psi T_\varphi$ kompaktan operator iz $H^q_m(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$, za svako $\varepsilon > 0$ ako*

1. $\psi \in s^m_{\infty,N}$, $N \geq 3d+3$;

2. $\psi \in s^m_{q,N}$, $N \geq d+3$, $1 \leq q \leq 2$.

Napomena 4.3.5 *U dokazu Teoreme 4.3.4 u prvom delu ćemo koristiti operator $\langle D_\eta \rangle^{2k} = (1-\Delta)^k$ i parcijalnu integraciju. Zato nam treba pretpostavka $2k = d+1$, kada je d neparan broj i $2k = d+2$, kada je d paran broj. Da bismo iskoristili Teoremu 4.2.1 u prvom slučaju nam treba pretpostavka $N > 3d+1$, a u drugom $N > 3d+2$. Zbog toga pretpostavljamo da je N ceo broj takav da je $N \geq 3d+3$. U drugom delu dokaza primenjujemo operator $(1-\Delta)^k$ pa k mora biti ceo broj veći od d, odnosno $k = (d+1)/2$, ako je d neparan broj i $k = (d+2)/2$, ako je d paran broj. Ovo u oba slučaja implicira da je $N \geq d+3$.*

Dokaz: 1. Pokazaćemo da je simbol kompozicije $T_\psi T_\varphi$, koji označavamo sa σ, u $S^m_{0,N-d-1}$, ako je d neparan ili u $S^m_{0,N-d-2}$, ako je d paran broj. Podsetimo se, ako $\sigma_1 \in S^{m_1}$ i $\sigma_2 \in S^{m_2}$, onda postoji $\sigma \in S^{m_1+m_2}$ tako da je $T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} = T_\sigma$ i

$$\sigma(x,\xi) = \iint e^{-iy\eta} \sigma_1(x, \xi+\eta) \sigma_2(x+y, \xi) dy đ\eta, \; x, \xi \in \mathbb{R}^d$$

postoji kao oscilatorni integral. Dakle, treba da pokažemo da za $\psi \in s^m_{\infty,N}$, $N \geq 3d+3$ i za $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ simbol kompozicije σ, dat sa

$$\sigma(x,\xi) = \iint e^{-iy\eta} \psi(\xi+\eta) \varphi(x+y) dy đ\eta, \; x, \xi \in \mathbb{R}^d$$

pripada klasi $S^m_{0,N-d-1}$, ako je d neparan ili $S^m_{0,N-d-2}$, ako je d paran. Pretpostavimo da je d neparan broj. Dokaz je analogan u slučaju kada je d paran. Iz Pitrijeve nejednakosti (1.15) imamo ocenu

$$\begin{aligned}
|\sigma(x,\xi)| &= \Big| \iint e^{-iy\eta} \frac{1}{\langle y \rangle^{2k}} \langle D_\eta \rangle^{2k} \Big(\langle \eta \rangle^{-2l} \psi(\xi+\eta) \langle D_y \rangle^{2l} \varphi(x+y) \Big) dy đ\eta \Big| \\
&\leq \iint \langle y \rangle^{-2k} \langle \eta \rangle^{-2l} \langle \xi+\eta \rangle^m |\langle D_y \rangle^{2l} \varphi(x+y)| dy đ\eta \\
&\leq c \iint \langle y \rangle^{-2k} \langle \eta \rangle^{-2l} \langle \xi \rangle^m \langle \eta \rangle^{|m|} |\langle D_y \rangle^{2l} \varphi(x+y)| dy đ\eta \leq C \langle \xi \rangle^m,
\end{aligned}$$

za $2k > d$ i $2l - |m| > d$. Pošto je d neparan biramo $2k = d+1$. Dalje, pošto $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ sledi da za svako $M > 0$ postoji $c_M > 0$ tako da je

$$\langle D_y \rangle^{2l} \varphi(x+y) \leq c_M \langle x+y \rangle^{-M} \leq C_M \langle x \rangle^{-M} \langle y \rangle^M.$$

Tada je

$$|\sigma(x,\xi)| \le c\langle\xi\rangle^m\langle x\rangle^{-M} \tag{4.24}$$

ako izaberemo da je $0 < M < 1$, zato što je tada $2k - M > d$. Dalje ocenjujemo izvode funkcije $\sigma(x,\xi)$. Važi

$$\Big|\iint e^{-iy\eta}\partial_\xi^\alpha\psi(\xi+\eta)\partial_x^\beta\varphi(x+y)dyđ\eta\Big|$$

$$= \Big|\iint e^{-iy\eta}\langle y\rangle^{-2k}\langle D_\eta\rangle^{2k}\Big(\langle\eta\rangle^{-2l}\partial_\xi^\alpha\psi(\xi+\eta)\Big)\langle D_y\rangle^{2l}\partial_x^\beta\varphi(x+y)dyđ\eta\Big|$$

$$\le c\iint\frac{1}{\langle y\rangle^{2k}}\frac{1}{\langle\eta\rangle^{2l}}\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}\langle\eta\rangle^{|m-|\alpha||}|\langle D_y\rangle^{2l}\partial_x^\beta\varphi(x+y)|dyđ\eta \le c\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}.$$

Dakle, $|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)| \le c\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}$ kada je $2k = d+1$, $2l > d + |m-|\alpha||$. Kako $\psi \in s^m_{\infty,N}$, sledi da je $|\alpha| + 2k \le N$. Tada nam pretpostavka $N \ge 3d+3$, odnosno, $N-d-1 > 2d$, dozvoljava da koristimo Teoremu 4.2.1 u nastavku.

Dakle, pokazali smo da $\sigma \in S^m_{N-d-1}$ za neparan broj d i (4.24) implicira da $\sigma \in S^m_{0,N-d-1}$.

Nastavak dokaza je sličan dokazu Teoreme 3.2 u [41] koja tvrdi da ako $\sigma \in S^m_0$, onda $T_\sigma : H^q_m(\mathbb{R}^d) \to H^q_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$ je kompaktan operator, za $m \in \mathbb{R}, 1 < q < \infty$. Pratimo standardnu proceduru iz dokaza Teoreme 3.2, odnosno neka je $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tako da je $\phi(x) = 1$ za $|x| \le 1$ i $\phi(x) = 0$ za $|x| \ge 2$. Za $\nu \in \mathbb{N}$ neka je $\sigma_\nu(x,\xi) = \phi\left(\frac{x}{\nu}\right)\sigma(x,\xi)$. Tada je $T_{\sigma_\nu} = \phi_\nu T_\sigma$, gde je $\phi_\nu(x) = \phi\left(\frac{x}{\nu}\right)$. Operator T_{σ_ν} je kompaktan zato što je T_σ ograničen iz $H^q_m(\mathbb{R}^d)$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$ (Teorema 4.2.1) i operator množenja sa ϕ_ν je kompaktan iz $L^q(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$, za svako $\varepsilon > 0$. Ako $v \in H^q_m(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, onda Teorema 4.2.1 implicira da postoji konstanta $c > 0$ tako da je

$$\|(T_{\sigma_\nu} - T_\sigma)v\|_{H^q_{-\varepsilon}} \le \|(T_{\sigma_\nu} - T_\sigma)v\|_{L^q} \le c|\sigma_\nu - \sigma|_{S^m_{N-d-1}}\|v\|_{H^q_m}.$$

Dalje ocenjujemo

$$|\sigma_\nu - \sigma|_{S^m_{N-d-1}} = \max_{|\alpha|,|\beta|\le N-d-1}\ \sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^d}\frac{|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta((\phi(\frac{x}{\nu})-1)\sigma(x,\xi))|}{\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}} \le$$

$$\max_{|\alpha|,|\beta|\le N-d-1}\ \sup_{|x|\ge\nu,\xi\in\mathbb{R}^d}\frac{|\sum_{\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}\partial_x^{\beta-\gamma}(\phi(\frac{x}{\nu})-1)\partial_\xi^\alpha\partial_x^\gamma\sigma(x,\xi)|}{\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}} \le c_{\alpha,\gamma}(\nu).$$

Pošto $\sigma \in S^m_{0,N-d-1}$, sledi da je $c_{\alpha,\gamma}(\nu) = o(1)$ kad $\nu \to \infty$. Zaključujemo da

$$\|T_{\sigma_\nu} - T_\sigma\|_{\mathscr{L}(H^q_m, H^q_{-\varepsilon})} \to 0 \text{ kad } \nu \to \infty,$$

što implicira da je T_σ takođe kompaktan operator.

2. Označimo $\psi_\nu(\xi) = \phi\left(\frac{x}{\nu}\right)\psi(\xi)$, gde $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ uvodimo na isti način kao u delu (1). Pokazaćemo da $T_\psi T_\varphi : H^q_m(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$. Tada je, kao u prethodnom delu dokaza, operator $T_{\psi_\nu} T_\varphi$ kompaktan iz $H^q_m(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$. Dakle, treba da pokažemo da $T_{\psi_\nu} T_\varphi \to T_\psi T_\varphi$ u normi kad $\nu \to \infty$. Imamo da je

$$\begin{aligned}
\|T_{\psi_\nu - \psi}(\varphi v)\|_{L^q} &= \left\|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right) - 1\right) T_\psi(\varphi v)\right\|_{L^q} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right) - 1\right)\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\psi(\xi)\mathscr{F}(\varphi v)(\xi) đ\xi\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right) - 1\right)\int_{\mathbb{R}^d} (L^k_\xi e^{ix\xi})\psi(\xi)\mathscr{F}(\varphi v)(\xi) đ\xi\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

gde je $L_\xi = (1+|x|^2)^{-1}(1-\Delta_\xi)$ i $L_\xi e^{ix\xi} = e^{ix\xi}$. Posle parcijalne integracije za $k = \lfloor d/2 \rfloor + 1$, to jest. $2k = d+1$ za neparan broj d i $2k = d+2$ za paran broj d sledi da je $\|T_{\psi_\nu - \psi}(\varphi v)\|_{L^q}$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|(\phi(\frac{x}{\nu}) - 1)|^q}{(1+|x|^2)^{kq}} \left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \sum_{|r|=0}^{2k} a_r \partial^r(\psi(\xi)\mathscr{F}(\varphi v)(\xi)) d\xi\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|(\phi(\frac{x}{\nu}) - 1)|^q}{\langle x\rangle^{2kq}} \left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \sum_{|r|=0}^{2k} a_r \sum_{\alpha+\beta=r} \binom{r}{\alpha} \frac{\partial^\alpha \psi(\xi)\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}}{\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \times \partial^\beta \mathscr{F}(\varphi v)(\xi) d\xi\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Pošto je $2k > d$, onda je $2k = d + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_i > 0, i = 1,2$. Dalje važi

$$\|T_{\psi_\nu - \psi}(\varphi v)\|_{L^q} \le c \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|\frac{\phi(\frac{x}{\nu}) - 1}{\langle x\rangle^{\varepsilon_1}}\right| |\psi|_{s^m_{q,N}} \left\|\mathscr{F}((-ix)^\beta \varphi v)(\xi)\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}\right\|_{L^p}.$$

Ako stavimo $h_\beta = x^\beta \varphi$ sledi da je $\|T_{\psi_\nu - \psi}(\varphi v)\|_{L^q}$

$$\begin{aligned}
&\le c \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|\frac{\phi(\frac{x}{\nu}) - 1}{\langle x\rangle^{\varepsilon_1}}\right| |\psi|_{s^m_{q,N}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{p(m-|\alpha|)} |\mathscr{F}(h_\beta v)(\xi)|^p d\xi\right)^{1/p} \\
&= c \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|\frac{\phi(\frac{x}{\nu}) - 1}{\langle x\rangle^{\varepsilon_1}}\right| |\psi|_{s^m_{q,N}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{p(m-|\alpha|)} |\hat{h}_\beta * \hat{v}|^p d\xi\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Dalje koristimo Pitrijevu i Jangovu nejednakost, pa je $\|T_{\psi_\nu-\psi}(\varphi v)\|_{L^q}$

$$\leq c\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{\phi(\frac{x}{\nu})-1}{\langle x\rangle^{\varepsilon_1}}\right||\psi|_{s^m_{q,N}}\left\|\mathscr{F}(h^\beta)(\cdot)(1+|\cdot|^2)^{\frac{|m-|\alpha||}{2}}*\mathscr{F}v(\xi)(1+|\cdot|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}\right\|_{L^p}$$

$$\leq c\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{\phi(\frac{x}{\nu})-1}{\langle x\rangle^{\varepsilon_1}}\right||\psi|_{s^m_{q,N}}\left\|\mathscr{F}v(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}\right\|_{L^p}$$

$$\times\left\|\mathscr{F}(h^\beta)(1+|\xi|^2)^{\frac{|m-|\alpha||}{2}}\right\|_{L^1}$$

$$\leq c\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{\phi(\frac{x}{\nu})-1}{\langle x\rangle^{\varepsilon_1}}\right||\psi|_{s^m_{q,N}}\left\|\mathscr{F}(h^\beta)(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{|m-|\alpha||}{2}}\right\|_{L^1}\|v\|_{H^q_m}$$

$$\leq c_1\sup_{|x|\geq\nu}\frac{1}{\langle x\rangle^{\varepsilon_1}}|\psi|_{s^m_{q,N}}\|v\|_{H^q_m}\to 0,\ \nu\to\infty.$$

Dakle, $T_\psi T_\varphi$ je granica niza kompaktnih operatora $T_{\psi_\nu}T_\varphi$ i dokaz takođe implicira da je $T_\psi T_\varphi : H^q_m(\mathbb{R}^d)\to L^q(\mathbb{R}^d)$. Pošto je

$$\|T_{\psi_\nu-\psi}(\varphi v)\|_{H^q_{-\varepsilon}}\leq\|T_{\psi_\nu-\psi}(\varphi v)\|_{L^q},$$

sledi da je $T_\psi T_\varphi$ kompaktan operator iz $H^q_m(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$, što je i trebalo pokazati. ❑

4.4 H-distribucije

U nastavku pretpostavljamo da je N ceo broj takav da je $N\geq 3d+5$, kada $\psi\in s^m_{\infty,N}$. Zapravo, zbog primene Teoreme 4.2.1 videli smo da treba da pretpostavimo da je $N\geq 3d+3$ (videti Napomenu 4.3.5). U narednim tvrđenjima će nam trebati pretpostavka $N-d-3>2d$, za d neparan broj i $N-d-4>2d$, za d paran broj, pa je zato $N\geq 3d+5$. Za $\psi\in s^m_{q,N}$ će biti dovoljno da pretpostavimo da je $N\geq 2d+4$, što će biti jasno iz dokaza Teoreme 4.4.8.

4.4.1 Kompaktnost komutatora $C=[T_\psi,T_\varphi]$ za $\psi\in s^m_{\infty,N}$

Teorema 4.4.1 *Neka je $\psi\in s^m_{\infty,N}$, $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Tada je komutator $C=[T_\psi,T_\varphi]=T_\psi T_\varphi-T_\varphi T_\psi$ kompaktan operator iz $H^q_m(\mathbb{R}^d)$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$. Ako sa p označimo simbol operatora C, onda $p\in S^{m-1}_{0,N-d-3}$, ako je d neparan broj i $p\in S^{m-1}_{0,N-d-4}$, ako je d paran broj.*

Dokaz: Neka je $\psi \in s^m_{\infty,N}$, $N \geq 3d+5$, d neparan i $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Simbol kompozicije $T_\psi T_\varphi$ je dat sa $\sigma(x,\xi) = \iint e^{-iy\eta}\psi(\xi+\eta)\varphi(x+y)dy\bar{d}\eta$, $x,\xi \in \mathbb{R}^d$. Iz Tejlorovog razvoja funkcije ψ u okolini tačke ξ imamo

$$\psi(\xi+\eta) = \sum_{|\alpha|\leq 1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\psi(\xi) + 2\sum_{|\alpha|=2}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\int_0^1(1-\theta)^2\partial_\xi^\alpha\psi(\xi+\theta\eta)d\theta,$$

odnosno $\sigma(x,\xi) = I_1(x,\xi) + I_2(x,\xi)$, gde je

$$I_1(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq 1}\frac{1}{\alpha!}\iint e^{-iy\eta}\eta^\alpha\partial_\xi^\alpha\psi(\xi)\varphi(x+y)dy\bar{d}\eta$$

i

$$I_2(x,\xi) = 2\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\iint e^{-iy\eta}\eta^\alpha\Big(\int_0^1(1-\theta)^2\partial_\xi^\alpha\psi(\xi+\theta\eta)d\theta\Big)\varphi(x+y)dy\bar{d}\eta.$$

Tada je, $I_1(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq 1}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\psi(\xi)D_y^\alpha\varphi(y)|_{y=x}$ i slično,

$$I_2(x,\xi) = 2\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\iint e^{-iy\eta}\Big(\int_0^1(1-\theta)^2\partial_\xi^\alpha\psi(\xi+\theta\eta)d\theta\Big)D_y^\alpha\varphi(x+y)dy\bar{d}\eta.$$

Simbol za $T_\varphi T_\psi$ je $\varphi(x)\psi(\xi)$, pa je simbol komutatora C dat sa

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=1}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\psi(\xi)D_y^\alpha\varphi(y)|_{y=x} + I_2(x,\xi),$$

gde je $\tilde{I}_1(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=1}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\psi(\xi)D_y^\alpha\varphi(y)|_{y=x}$. Jasno je da $\tilde{I}_1(x,\xi) \in S^{m-1}_{0,N-1}$. Dalje treba da ocenimo $I_2(x,\xi)$. Primetimo da je

$$I_2(x,\xi) = 2\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\int_0^1(1-\theta)^2 I_3(x,\xi)d\theta,$$

gde je

$$I_3(x,\xi) = \iint e^{-iy\eta}\partial_\xi^\alpha\psi(\xi+\theta\eta)D_y^\alpha\varphi(x+y)dy\bar{d}\eta.$$

Kao u dokazu Teoreme 4.3.4 imamo da je

$$|I_3(x,\xi)| \leq \iint \langle y\rangle^{-2k}\langle D_\eta\rangle^{2k}\Big(\langle\eta\rangle^{-2l}\partial_\xi^\alpha\psi(\xi+\theta\eta)\Big)\langle D_y\rangle^l\Big[D_y^\alpha\varphi(x+y)\Big]dy\bar{d}\eta$$

$$\leq C\langle\xi\rangle^{m-2}\langle x\rangle^{-M},$$

za $2k = d+1$, $0 < M < 1$, $2l > d + |m-2|$.

Iz dokaza Teoreme 4.3.4 sledi da $I_2 \in S^{m-2}_{0,N-d-3}$. Pošto $\tilde{I}_1(x,\xi) \in S^{m-1}_{0,N-1} \subset S^{m-1}_{0,N-d-3}$ i $I_2 \in S^{m-2}_{0,N-d-3} \subset S^{m-1}_{0,N-d-3}$, sledi da je $p \in S^{m-1}_{0,N-d-3}$. Sada možemo da primenimo dokaz Teoreme 4.3.4, deo 1 i dobijamo da je $C = T_p$ kompaktan operator iz $H^q_m(\mathbb{R}^d)$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$.

Dokaz je analogan u slučaju kada je d paran broj. ❑

Posledica 4.4.2 *Neka $\psi \in s^m_{\infty,N}$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $m,s \in \mathbb{R}$. Tada je komutator $C = [T_\psi, T_\varphi] = T_\psi T_\varphi - T_\varphi T_\psi$ kompaktan operator iz $H^q_{m+s}(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_s(\mathbb{R}^d)$. Ako p označava simbol za C, onda je $p \in S^{m-1}_{0,N-d-3}$, kada je d neparan broj i $p \in S^{m-1}_{0,N-d-4}$, kada je d paran broj.*

Dokaz: Primetimo da je $T_\psi T_\varphi$ kompaktan operator iz $H^q_{m+s}(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$ za svako $\varepsilon > 0$. To jednostavno sledi iz dokaza Teoreme 4.3.4 i iz Posledice 4.2.2. Dokaz Teoreme 4.4.1 implicira tvrđenje. ❑

4.4.2 Postojanje H-distribucija sa simbolom $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$

Primetimo da je kompletiranje tenzorskog proizvoda $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \otimes (s^m_{\infty,N+1})_0$ isto za ε i π topologije, zato što je $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nuklearan prostor([36], Teorema 50.1). Koristićemo oznaku $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}(s^m_{\infty,N+1})_0$ za kompletiranje.

Teorema 4.4.3 *Neka $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$ i $v_n \rightharpoonup 0$ u $H^q_m(\mathbb{R}^d)$. Tada, do na podniz, postoji distribucija $\mu \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}(s^m_{\infty,N+1})_0)'$ tako da je za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i za sve $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi_1 u_n, \overline{\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n)}\rangle = \langle \mu, \varphi_1\bar{\varphi}_2 \otimes \psi\rangle.$$

Dokaz: Pošto $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$, onda je $\mathscr{A}_{\bar{\psi}}(\varphi_2 v_n) \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Simbol ψ zapisujemo u obliku $\psi(\xi) = \psi_1(\xi)\psi_2(\xi)$, $\psi_1(\xi) = \langle\xi\rangle^m \in s^m_{\infty,N}$, $\psi_2(\xi) = \langle\xi\rangle^{-m}\psi(\xi) \in s^0_{\infty,N}$. Tada iz (4.22) sledi

$$\|\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)\|_{L^q} \leq c|\psi_2|_{s^0_{\infty,N}} \|\mathscr{A}_{\overline{\psi_1}}(\varphi v_n)\|_{L^q} \leq c_1|\psi|_{s^m_{\infty,N}}\|\varphi v_n\|_{H^q_m}.$$

U poslednjoj nejednakosti koristili smo uslov

$$|\psi_2|_{s^0_{\infty,N}} = |\langle\xi\rangle^{-m}\psi(\xi)|_{s^0_{\infty,N}} \leq C|\langle\xi\rangle^{-m}|_{s^{-m}_{\infty,N}}|\psi|_{s^m_{\infty,N}} \leq C_1|\psi|_{s^m_{\infty,N}}.$$

Iz Pitrijeve nejednakosti i formule za inverznu Furijeovu transformaciju konvolucije sledi

$$
\begin{aligned}
\|\varphi v_n\|_{H^m_q} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\mathscr{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{\varphi}\star\hat{v}_n)\Big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\mathscr{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{v}_n(\eta)d\eta)\Big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\mathscr{F}^{-1}(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{v}_n(\eta)d\eta)\Big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq c\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\mathscr{F}^{-1}(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\eta|^2)^{\frac{m}{2}}(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|m|}{2}}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{v}_n(\eta)d\eta)\Big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&= c\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\mathscr{F}^{-1}(\hat{v}_n(1+|\cdot|^2)^{\frac{m}{2}}*\hat{\varphi}(1+|\cdot|^2)^{\frac{|m|}{2}})\Big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&= c\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\mathscr{F}^{-1}(\hat{v}_n(1+|\cdot|^2)^{\frac{m}{2}})\Big|^q\Big|(\mathscr{F}^{-1}(\hat{\varphi}(1+|\cdot|^2)^{\frac{|m|}{2}})\Big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq C\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\Big|\mathscr{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{\frac{|m|}{2}}\hat{\varphi})\Big|\|v_n\|_{H^m_q}\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{d+1}{2}}}\|\langle\xi\rangle^{d+1+|m|}\hat{\varphi}\|_\infty d\xi\leq C\|\langle\xi\rangle^{d+1+|m|}\hat{\varphi}\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Na prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ možemo definisati niz semi-normi,

$$
|f|_k=\sup_{|\alpha|\leq k,\xi\in\mathbb{R}^d}\|\langle\xi\rangle^k\hat{f}^{(\alpha)}(\xi)\|_\infty,\ k\in\mathbb{N}_0,
$$

koji je ekvivalentan sa nizom semi-normi definisanim u (1.1). Dakle,

$$
\Big|\int_{\mathbb{R}^d}u_n\overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)}dx\Big|\leq C|\psi|_{s^m_{\infty,N}}|\varphi|_{d+1+\lceil m\rceil}. \tag{4.25}
$$

Za fiksirano $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, preslikavanje $\psi\mapsto\mu_n(\varphi,\psi):=\int_{\mathbb{R}^d}u_n\overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)}dx$ je linearno i neprekidno i za fiksno $\psi\in(s^m_{\infty,N+1})_0$ preslikavanje $\varphi\mapsto\mu_n(\varphi,\psi)$ je antilinearno i neprekidno. Ostatak dokaza je sličan dokazu teoreme o postojanju H-distribucija (Teorema 3.2.2).

Fiksirajmo $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i posmatrajmo niz preslikavanja

$$
\Phi^\varphi_n:\psi\mapsto\mu_n(\varphi,\psi).
$$

Dakle $\Phi^\varphi_n\in((s^m_{\infty,N+1})_0)'$ i možemo da primenimo Teoremu 1.1.5 da bismo dobili slabo - $\star$ konvergentan podniz $\Phi^\varphi_\nu\overset{*}{\rightharpoonup}\Phi^\varphi$, pošto je $((s^m_{\infty,N+1})_0,|\cdot|_{s^m_{\infty,N}})$ separabilan.

Preciznije, za svako fiksno $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ konstruišemo linearno preslikavanje Φ^φ tako da je $\langle \Phi_\nu^\varphi, \psi\rangle \to \langle \Phi^\varphi, \psi\rangle$, $\nu \to \infty$ i $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$. Zapravo, preko dijagonalizacije dolazimo do podniza (Φ_ν^φ) koji konvergira na gustom prebrojivom podskupu od $(s^m_{\infty,N+1})_0$, pa prema Banah-Štajnhaus teoremi možemo da proširimo preslikavanje na $(s^m_{\infty,N+1})_0$. Tada, za fiksno $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$, preslikavanje $\varphi \mapsto \langle \Phi_\nu^\varphi, \psi\rangle$ je tačkasto ograničen niz u $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ koji konvergira na gustom podskupu $M \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$; što se ponovo dobija preko dijagonalizacije. Banah-Štajnahus teorema implicira da $\langle \Phi_\nu^\varphi, \psi\rangle$ konvergira ka $\langle \Phi^\varphi, \psi\rangle$ na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pokazali smo da za svako $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i za svako $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$,

$$\lim_{\nu\to\infty} \langle \Phi_\nu^\varphi, \psi\rangle = \langle \Phi^\varphi, \psi\rangle.$$

Štaviše, prema (4.25),

$$|\langle \Phi^\varphi, \psi\rangle| \leq c|\varphi|_{\lceil m\rceil+d+1}|\psi|_{s^m_{\infty,N}}.$$

Prema [36][Deo III, Poglavlje 50, Propozicija 50.7, str. 524] sledi da postoji $\mu \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}(s^m_{\infty,N+1})_0)'$ definisano sa

$$\langle \mu(x,\xi), \varphi(x)\psi(\xi)\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \langle \Phi_\nu^\varphi, \psi\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \int u_\nu \overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_\nu)}dx,$$

za sve $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$, gde je u_ν podniz od u_n i v_ν podniz od v_n. Pošto svako $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ može da se napiše kao $\varphi = \overline{\varphi}_1\varphi_2$ za neke $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ([28]), imamo da je $\langle \mu, \varphi\psi\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \int u_\nu \overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\overline{\varphi}_1\varphi_2 v_\nu)}dx$. Teorema 4.4.1 implicira da je za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$,

$$\langle \mu, \overline{\varphi}_1\varphi_2\psi\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1 u_\nu \overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi_2 v_\nu)}dx.$$

Time je dokaz završen. ❑

Napomena 4.4.4 *Neka $\psi_0 \in s^m_{\infty,N}$. Dati dokaz implicira da je $\mu_n(\cdot,\psi_0)$ ograničen niz linearnih preslikavanja na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Dakle, ima konvergentan podniz $\mu_{n_k}(\cdot,\psi_0)$ koji konvergira ka $\mu(\cdot,\psi_0)$ u $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Ako izaberemo drugo $\psi_1 \in s^m_{\infty,N}$ možemo naći podniz od $\mu_{n_k}(\cdot,\psi_1)$ koji označavamo sa $\mu_l(\cdot,\psi_1)$ i koji konvergira u $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Na ovaj način nemamo isti niz za sve $\psi \in s^m_{\infty,N}$. Zbog toga uvodimo separabilnu klasu simbola $(s^m_{\infty,N+1})_0$.*

Posledica 4.4.5 *Pretpostavimo da $u_n \rightharpoonup 0$ u $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$ i $v_n \rightharpoonup 0$ u H^q_{s+m} za $s,m \in \mathbb{R}$. Tada, do na podniz, postoji $\mu \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}(s^m_{\infty,N+1})_0)'$ tako da je za sve $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i sve $\psi \in (s^m_{\infty,N+1})_0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi_1 u_n, \overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi_2 v_n)}\rangle = \langle \mu, \varphi_1\overline{\varphi_2}\otimes\psi\rangle.$$

Dokaz: Kao u dokazu prethodne teoreme posmatramo niz funkcionela

$$\mu_n(\varphi,\psi)=\langle \mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^{-s}}(u_n),\overline{\mathscr{A}_{\overline{\langle\xi\rangle^s\psi}}(\varphi v_n)}\rangle.$$

Za $\psi_1(\xi)=\langle\xi\rangle^{-s}$ i $\psi_2(\xi)=\langle\xi\rangle^s\psi(\xi)$ imamo ocenu

$$|\mu_n(\varphi,\psi)|\leq \|\mathscr{A}_{\psi_1}(u_n)\|_{L^p}\|\mathscr{A}_{\bar\psi_2}(\varphi v_n)\|_{L^q}\leq c|\psi|_{s^m_{\infty,N}}|\varphi|_{2d+2+\lceil|m+s|\rceil}.$$

Primetimo da je $\lim_{n\to\infty}\mu_n(\varphi,\psi)=\lim_{n\to\infty}\langle u_n,\overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)}\rangle$. Primenom Teoreme 4.4.3 i Posledice 4.4.2 sledi tvrđenje. ❑

Teorema 4.4.6 *Neka $u_n\rightharpoonup 0$ u $L^p(\mathbb{R}^d), m\in\mathbb{R}$. Ako za svaki niz $v_n\rightharpoonup 0$ u $H^q_m(\mathbb{R}^d)$, važi*

$$\lim_{n\to\infty}\langle u_n,\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^m}(\varphi v_n)\rangle=0, \tag{4.26}$$

onda za svako $\theta\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\theta u_n\to 0$ jako u $L^p(\mathbb{R}^d)$, $n\to\infty$.

Dokaz: Pokazaćemo da je za svako $\theta\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i svaki ograničen skup $B\subseteq L^q(\mathbb{R}^d)$,

$$\sup\{\langle\theta u_n,\phi\rangle\,:\,\phi\in B\}\longrightarrow 0,\ n\to\infty.$$

Pretpostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da postoji $\theta\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, ograničen skup B_0 u $L^q(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon_0>0$ i podniz θu_ν niza θu_n tako da je

$$\sup\{|\langle\theta u_\nu,\phi\rangle|\,:\,\phi\in B_0\}\geq\varepsilon_0,\ \text{za svako}\ \nu\in\mathbb{N}.$$

Izaberimo $\phi_\nu\in B_0$ tako da je $|\langle\theta u_\nu,\phi_\nu\rangle|>\varepsilon_0/2$. Pošto $\phi_\nu\in B_0$ i B_0 je ograničen u $L^q(\mathbb{R}^d)$, onda je (ϕ_ν) slabo prekompaktan u $L^q(\mathbb{R}^d)$,odnosno, do na podniz, $\phi_\nu\rightharpoonup\phi_0$ in $L^q(\mathbb{R}^d)$. Pošto je ϕ_0 fiksirana funkcija imamo da $\langle u_\nu,\phi_0\rangle\to 0$ i

$$|\langle\theta u_\nu,\phi_\nu-\phi_0\rangle|>\frac{\varepsilon_0}{4},\quad \nu>\nu_0. \tag{4.27}$$

Primenom Teoreme 4.4.3 na $u_\nu\rightharpoonup 0$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^{-m}}(\phi_\nu-\phi_0)\rightharpoonup 0$ u $H^q_m(\mathbb{R}^d)$, dobijamo da za svako $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\lim_{\nu\to\infty}\langle u_\nu,\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^m}(\varphi\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^{-m}}((\phi_\nu-\phi_0)))\rangle=0. \tag{4.28}$$

Biramo $\varphi=\theta$. Teorema 4.4.1 implicira $\lim_{\nu\to\infty}\langle\theta u_\nu,\phi_\nu-\phi_0\rangle=0$, što je u kontradikciji sa (4.27). ❑

Iz dokaza Teoreme 4.4.6 i primenom Posledice 4.4.5 lako se dobija naredna posledica.

Posledica 4.4.7 *Neka $u_n\rightharpoonup 0$ u $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$. Ako za svaki niz $v_n\rightharpoonup 0$ u $H^q_{s+m}(\mathbb{R}^d)$ važi da je $\lim_{n\to\infty}\langle u_n,\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^m}(\varphi v_n)\rangle=0$, onda $\theta u_n\to 0$ jako u $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$, $n\to\infty$, za sve $\theta\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

4.4.3 Teorema o postojanju H-distribucija za simbol $\psi \in s^m_{q,N+1}$, $1 < q \leq 2$

Kao i u slučaju simbola u klasi $s^m_{\infty,N}$ treba da pokažemo da $C(\varphi_2 v_n) = T_{\varphi_1}\mathscr{A}_\psi(\varphi_2 v_n) - \mathscr{A}_\psi T_{\varphi_1}(\varphi_2 v_n) \to 0$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$, ako $v_n \rightharpoonup 0$ u $H^q_m(\mathbb{R}^d)$. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 4.4.8 *Neka $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in s^m_{q,N}$, $1 \leq q \leq 2$, $N \geq 2d+4$. Tada je $(T_{\varphi_1}\mathscr{A}_\psi - \mathscr{A}_\psi T_{\varphi_1})T_{\varphi_2}$ kompaktan operator iz $H^q_m(\mathbb{R}^d)$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$.*

Dokaz: Označimo sa $p(x,\xi)$ simbol za $T_{\varphi_1}\mathscr{A}_\psi - \mathscr{A}_\psi T_{\varphi_1}$. Tada je

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi \psi(\xi) D^\alpha_y \varphi_1(y)|_{y=x} + p^2(x,\xi),$$

gde je

$$p^2(x,\xi) = 2\sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!}\int_0^1 (1-\theta)^2 \iint e^{-iy\eta}\partial^\alpha_\xi \psi(\xi+\theta\eta) D^\alpha_y \varphi_1(x+y)\, dy\, đ\eta\, d\theta.$$

Slično kao i u dokazu Teoreme 4.4.1, cilj nam je da aproksimiramo T_p nizom kompaktnih operatora $T_{p_\nu}(x) = \phi(x/\nu)T_p(x)$, gde se ϕ uvodi na isti način kao i u prvom delu dokaza Teoreme 4.3.4. Pokažimo prvo da $T_p T_{\varphi_2} : H^q_m(\mathbb{R}^d) \to H^q_1(\mathbb{R}^d)$. Zatim će množenje sa ϕ implicirati da je $T_{p_\nu}T_{\varphi_2} : H^q_m(\mathbb{R}^d) \to H^q_{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$ kompaktan operator za svako $\varepsilon > 0$, pa je $T_{p_\nu}T_{\varphi_2} : H^q_m(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$ kompaktan operator.

Neka je

$$p^1(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi \psi(\xi) D^\alpha_y \varphi_1(y)|_{y=x}$$

Pošto $\psi \in s^m_{q,N}$, sledi da $\psi_\alpha(\xi) := \partial^\alpha_\xi \psi(\xi) \in s^{m-1}_{q,N-1}$, zato što je $|\alpha| = 1$, odnosno (4.21) važi za $m-1$. Ako $v \in H^q_m(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, sledi da $\mathscr{A}_{\psi_\alpha}(\varphi_2 v) \in H^q_1(\mathbb{R}^d)$. Zaista,

$$\|\mathscr{A}_{\psi_\alpha}(\varphi_2 v)\|_{H^q_1} = \|\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle}(\mathscr{A}_{\psi_\alpha}(\varphi_2 v))\|_{L^q} = \|\mathscr{A}_{\psi_\alpha(\xi)\langle\xi\rangle}(\varphi_2 v)\|_{L^q}.$$

Pošto $\psi_\alpha(\xi) := \partial^\alpha_\xi \psi(\xi) \in s^{m-1}_{q,N-1}$, sledi da $\psi_\alpha(\xi)\langle\xi\rangle \in s^m_{q,N-1}$, što se lako dobija iz definicije (4.21). Kako $\varphi_2 v \in H^q_m(\mathbb{R}^d)$ i $N-1 \geq d+3$, sledi da je $\mathscr{A}_{\psi_\alpha(\xi)\langle\xi\rangle}(\varphi_2 v) \in L^q(\mathbb{R}^d)$ (ova osobina je dokazana u Teoremi 4.3.4). Dakle,

$$\|\mathscr{A}_{\psi_\alpha}(\varphi_2 v)\|_{H^q_1} < \infty \quad \text{i}$$

$$\|T_p(\varphi_2 v)\|_{H_1^q} \leq \|T_{p^1}(\varphi_2 v)\|_{H_1^q} + \|T_{p^2}(\varphi_2 v)\|_{H_1^q}.$$

Zato je,

$$\|T_{p^1}(\varphi_2 v)\|_{H_1^q} \leq \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \|T_{\partial_\xi^\alpha \psi(\xi) D_y^\alpha \varphi_1(y)|_{y=x}}(\varphi_2 v)\|_{H_1^q}$$

$$= \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \|((D_y^\alpha \varphi_1(y)|_{y=x}) T_{\partial_\xi^\alpha \psi(\xi)}(\varphi_2 v))\|_{H_1^q}.$$

Označimo $D_y^\alpha \varphi_1(y)|_{y=x} =: \varphi_1^\alpha(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Tada je

$$\|\varphi_1^\alpha(x) \mathscr{A}_{\partial_\xi^\alpha \psi(\xi)}(\varphi_2 v)\|_{H_1^q} = \|\varphi_1^\alpha(x) v_\alpha(x)\|_{H_1^q},$$

gde je $v_\alpha(x) = \mathscr{A}_{\partial_\xi^\alpha \psi(\xi)}(\varphi_2 v) \in H_1^q(\mathbb{R}^d)$. Dakle,

$$\|\varphi_1^\alpha \mathscr{A}_{\partial_\xi^\alpha \psi(\xi)}(\varphi_2 v)\|_{H_1^q} \leq |\varphi_1^\alpha|_p \|v_\alpha\|_{H_1^q},$$

gde je $|\varphi_1^\alpha|_p$ semi-norma funkcije $\varphi_1^\alpha \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ za neko $p \in \mathbb{N}$. Pokazali smo da je

$$\|T_{p^1}(\varphi_2 v)\|_{H_1^q} \leq \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} |\varphi_1^\alpha|_p \|v_\alpha\|_{H_1^q} < \infty.$$

Dalje želimo da pokažemo da $T_{p^2}(\varphi_2 v) \in H_1^q(\mathbb{R}^d)$.
Prema definiciji je $\|T_{p^2}(\varphi_2 v)\|_{H_1^q} = \|\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle} T_{p^2}(\varphi_2 v)\|_q$. Važi

$$\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle} T_{p^2}(\varphi_2 v)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \Big[\iint e^{-ix'\eta} \langle \xi + \eta\rangle p^2(x+x',\xi) dx' đ\eta\Big] \mathscr{F}(\varphi_2 v)(\xi) đ\xi.$$

Neka je $\sigma(x,\xi) = \iint e^{-ix'\eta} \langle \xi + \eta\rangle p^2(x+x',\xi) dx' đ\eta$. Sledi da je

$$\|\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle} T_{p^2}(\varphi_2 v)\|_q = \Big(\int_{\mathbb{R}_x^d} \Big| \int_{\mathbb{R}_\xi^d} e^{ix\xi} \sigma(x,\xi) \mathscr{F}(\varphi_2 v)(\xi) đ\xi \Big|^q dx\Big)^{1/q}.$$

Dalje imamo

$$\int_{\mathbb{R}_\eta^d} \int_{\mathbb{R}_{x'}^d} e^{-ix'\eta} \Big[\langle \xi + \eta\rangle p^2(x+x',\xi)\Big] dx' đ\eta$$

$$= 2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^2 \int_{\mathbb{R}_\eta^d} \int_{\mathbb{R}_{x'}^d} e^{-ix'\eta} \langle \xi + \eta\rangle I_\theta(x+x',\xi) dx' đ\eta d\theta,$$

gde je

$$I_\theta(x+x',\xi) = \int_{\mathbb{R}_{\tilde\eta}^d} \int_{\mathbb{R}_{\tilde y}^d} e^{-i\tilde y \tilde\eta} \partial_\xi^\alpha \psi(\xi + \theta\tilde\eta) D_{\tilde y}^\alpha \varphi_1(x+x'+\tilde y) d\tilde y đ\tilde\eta.$$

Sledi da je za dovoljno velike $l, l' \in \mathbb{N}_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d_\eta}\int_{\mathbb{R}^d_{x'}} e^{-ix'\eta}\langle\xi+\eta\rangle I_\theta(x+x',\xi)dx'd\eta$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d_\eta}\int_{\mathbb{R}^d_{x'}} e^{-ix'\eta}\langle x'\rangle^{-2l'}\langle D_\eta\rangle^{2l'}\Big[\langle\eta\rangle^{-2l}\langle\xi+\eta\rangle\Big]\langle D_{x'}\rangle^{2l} I_\theta(x+x',\xi)dx'd\eta.$$

Ponavljanjem iste procedure dobijamo

$$\int_{\mathbb{R}^d_{\tilde\eta}}\int_{\mathbb{R}^d_{\tilde y}} e^{-i\tilde y\tilde\eta}\partial^\alpha_\xi\psi(\xi+\theta\tilde\eta)\langle D_{x'}\rangle^{2l}D^\alpha_{\tilde y}\varphi_1(x+x'+\tilde y)d\tilde y d\tilde\eta$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d_{\tilde\eta}}\int_{\mathbb{R}^d_{\tilde y}} \frac{e^{-i\tilde y\tilde\eta}}{\langle\tilde y\rangle^{-2k'}}\langle D_{\tilde\eta}\rangle^{2k'}\Big[\partial^\alpha_\xi\psi(\xi+\theta\tilde\eta)\langle\tilde\eta\rangle^{-2k}\Big]\langle D_{\tilde y}\rangle^{2k}\langle D_{x'}\rangle^{2l}D^\alpha_{\tilde y}\varphi_1(x+x'+\tilde y)d\tilde y d\tilde\eta.$$

Pošto $\varphi_1\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, sledi da za svako $M\in\mathbb{N}_0$ postoji $C>0$ tako da je

$$|\langle D_{\tilde y}\rangle^{2k}\langle D_{x'}\rangle^{2l}D^\alpha_{\tilde y}\varphi_1(x+x'+\tilde y)|\le C\langle x+x'+\tilde y\rangle^{-M}.$$

Zatim primenom Pitrijeve nejednakosti dobijamo

$$C\langle x+x'+\tilde y\rangle^{-M}\le C_1\langle x'\rangle^M\langle x\rangle^{-M}\langle\tilde y\rangle^M.$$

Ako izaberemo da je $M=d+1$ i $k'=d+1$, dobijamo $\|\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle}T_{p^2}(\varphi_2 v_n)\|_{L^q}$

$$\le C_1\Big(\int_{\mathbb{R}^d_x}\frac{1}{\langle x\rangle^{Mq}}\Big|\int_0^1(1-\theta)^2\int_{\mathbb{R}^d_{\xi'}}\int_{\mathbb{R}^d_{x'}}\frac{\langle x'\rangle^M}{\langle x'\rangle^{2l'}}dx'\int_{\mathbb{R}^d_{\tilde y}}\frac{\langle\tilde y\rangle^M}{\langle\tilde y\rangle^{2k'}}d\tilde y$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^d_\eta}\langle D_\eta\rangle^{2l'}\Big[\frac{\langle\xi+\eta\rangle}{\langle\eta\rangle^{2l}}\Big]d\eta\int_{\mathbb{R}^d_{\tilde\eta}}\langle D_{\tilde\eta}\rangle^{2k'}\Big[\frac{\partial^\alpha_\xi\psi(\xi+\theta\tilde\eta)}{\langle\tilde\eta\rangle^{2k}}\Big]d\tilde\eta\mathscr{F}(\varphi_2 v_n)(\xi)d\xi d\theta\Big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c\int_{\mathbb{R}^d_\xi}\Big|\int_{\mathbb{R}^d_\eta}\langle D_\eta\rangle^{2l'}\Big[\langle\xi+\eta\rangle\langle\eta\rangle^{-2l}\Big]d\eta\int_0^1(1-\theta)^2$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^d_{\tilde\eta}}\langle D_{\tilde\eta}\rangle^{2k'}\Big[\frac{\partial^\alpha_\xi\psi(\xi+\theta\tilde\eta)}{\langle\tilde\eta\rangle^{2k}}\Big]d\tilde\eta d\theta\mathscr{F}(\varphi_2 v_n)(\xi)\Big|d\xi$$

Dobijamo da je

$$\Big|\langle D_\eta\rangle^{2l'}\Big[\langle\eta\rangle^{-2l}\langle\xi+\eta\rangle\Big]\Big|\le c_2\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle^{-2l+1}$$

i

$$\left|\langle D_{\tilde\eta}\rangle^{2k'}\left[\langle\tilde\eta\rangle^{-2k}\partial_\xi^\alpha\psi(\xi+\theta\tilde\eta)\right]\right| \le c_3\langle\tilde\eta\rangle^{-2k}\sum_{|r|=0}^{2k'}\frac{\partial_\xi^{\alpha+r}\psi(\xi+\theta\tilde\eta)}{\langle\xi+\theta\tilde\eta\rangle^{m-2-|r|}}\langle\xi+\theta\tilde\eta\rangle^{m-2-|r|}$$

$$\le c_4\langle\tilde\eta\rangle^{-2k}\sum_{|r|=0}^{2k'}\frac{\partial_\xi^{\alpha+r}\psi(\xi+\theta\tilde\eta)}{\langle\xi+\theta\tilde\eta\rangle^{m-2-|r|}}\langle\xi\rangle^{m-2-|r|}\langle\tilde\eta\rangle^{|m-2-|r||}.$$

Dakle,

$$c\int_{\mathbb{R}^d_\xi}\Big|\int_{\mathbb{R}^d_\eta}\langle D_\eta\rangle^{2l'}\left[\langle\xi+\eta\rangle\langle\eta\rangle^{-2l}\right]d\eta\int_0^1(1-\theta)^2$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^d_{\tilde\eta}}\langle D_{\tilde\eta}\rangle^{2k'}\left[\frac{\partial_\xi^\alpha\psi(\xi+\theta\tilde\eta)}{\langle\tilde\eta\rangle^{2k}}\right]d\tilde\eta\, d\theta\,\mathscr{F}(\varphi_2 v)(\xi)\Big|d\!\!\bar{}\,\xi$$

$$\le c_5\int_{\mathbb{R}^d_{\tilde\eta}}\frac{1}{\langle\tilde\eta\rangle^{2k}}\int_{\mathbb{R}^d_\xi}\sum_{|r|=0}^{2k'}\frac{|\partial_\xi^{\alpha+r}\psi(\xi+\theta\tilde\eta)|}{\langle\xi+\theta\tilde\eta\rangle^{m-2-|r|}}\langle\xi\rangle^{m-2-|r|+1}\langle\tilde\eta\rangle^{|m-2-|r||}|\mathscr{F}(\varphi_2 v)(\xi)|d\!\!\bar{}\,\xi\, d\tilde\eta$$

$$\le c_6|\psi|_{s^m_{q,2d+4}}\|\langle\xi\rangle^{m-1}|\mathscr{F}(\varphi_2 v)(\xi)|\|_{L^p}\le c_6|\psi|_{s^m_{q,N}}\|\langle\xi\rangle^{m-1}\mathscr{F}(\varphi_2 v)(\xi)\|_{L^p}<\infty.$$

Pokazali smo da je $T_pT_{\varphi_2}: H^q_m(\mathbb{R}^d)\to H^q_1(\mathbb{R}^d)$. Treba još pokazati da $T_{p_\nu}T_{\varphi_2}\to T_pT_{\varphi_2}$ u normi kad $\nu\to\infty$. Važi da je

$$\|T_{p_\nu-p}(\varphi_2 v)\|_{L^q}=\left\|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right)-1\right)T_p(\varphi_2 v)\right\|_{L^q}$$

$$\le\left\|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right)-1\right)T_{p_1}(\varphi_2 v)\right\|_{L^q}+\left\|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right)-1\right)T_{p_2}(\varphi_2 v)\right\|_{L^q}.$$

Dalje za $\left\|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right)-1\right)T_{p_1}(\varphi_2 v)\right\|_{L^q}$ primenjujemo isti postupak kao u dokazu drugog dela Teoreme 4.3.4 i zaključujemo da

$$\left\|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right)-1\right)T_{p_1}(\varphi_2 v)\right\|_{L^q}\to 0,\nu\to\infty.$$

Za $\left\|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right)-1\right)T_{p_2}(\varphi_2 v)\right\|_{L^q}$ možemo da primenimo prethodni dokaz i dobijamo da $\left\|\left(\phi\left(\frac{x}{\nu}\right)-1\right)T_{p_2}(\varphi_2 v)\right\|_{L^q}\to 0,\nu\to\infty$ takođe, što je i trebalo pokazati. ❑

Posledica 4.4.9 *Neka $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\psi\in s^m_{q,N}$, $1\le q\le 2$, $N\ge 2d+4$, $m,s\in\mathbb{R}$. Tada je $(T_{\varphi_1}\mathscr{A}_\psi-\mathscr{A}_\psi T_{\varphi_1})T_{\varphi_2}$ kompaktan operator iz $H^q_{m+s}(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_s(\mathbb{R}^d)$.*

Dokaz: Drugi deo dokaza Teoreme 4.3.4 implicira da je $T_\psi T_\varphi$ kompaktan operator iz $H^q_{m+s}(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$, za svako $\varepsilon > 0$ i $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Zaista, ako $\psi \in s^m_{q,N}$, onda $\langle\xi\rangle^s\psi \in s^{m+s}_{q,N}$. Dakle, ako $v \in H^q_{m+s}(\mathbb{R}^d)$, onda

$$\|T_\psi(\varphi v)\|_{H^q_s} = \|T_{\psi\langle\xi\rangle^s}(\varphi v)\|_{L^q} < \infty.$$

Zaključujemo da za svaki slabo konvergentan niz $v_n \rightharpoonup 0$ u $H^q_{m+s}(\mathbb{R}^d)$ važi da je

$$\|T_\psi(\varphi v_n)\|_{H^q_{s-\varepsilon}} \le \|T_\psi(\varphi v_n)\|_{H^q_s} = \|T_{\psi\langle\xi\rangle^s}(\varphi v_n)\|_{L^q} \to 0, n \to \infty,$$

što sledi iz drugog dela dokaza Teoreme 4.3.4, odnosno $T_{\psi\langle\xi\rangle^s}T_\varphi$ je kompaktan operator iz $H^q_{m+s}(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_{-\varepsilon}$, za $\langle\xi\rangle^s\psi \in s^{m+s}_{q,N}$.

Primenom Teoreme 4.4.8 dobijamo kompaktnost operatora $(T_{\varphi_1}\mathscr{A}_\psi - \mathscr{A}_\psi T_{\varphi_1})T_{\varphi_2}$ iz $H^q_{m+s}(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_s(\mathbb{R}^d)$. ❏

Teorema 4.4.10 *Neka $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$, $v_n \rightharpoonup 0$ u $H^q_m(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \le 2$. Tada, do na podniz, postoji distribucija $\mu \in (\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}s^m_{q,N+1})'$ tako da je za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i za sve $\psi \in s^m_{q,N+1}$,*

$$\lim_{n\to\infty}\langle\varphi_1 u_n, \mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi_2 v_n)\rangle = \langle\mu, \varphi_1\overline{\varphi_2}\otimes\psi\rangle.$$

Dokaz: Posmatramo niz seskvilinearnih funkcionela (linearnih po ψ i anti-linearnih po φ)

$$\mu_n(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} u_n\overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)}dx, \tag{4.29}$$

koje su dobro definisane. Zaista, kao u dokazu Teoreme 4.3.4, za $\psi \in s^m_{q,N+1}$ i $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\|\mathscr{A}_\psi(\varphi v_n)\|_{L^q} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\psi(\xi)\mathscr{F}(\varphi v_n)(\xi)d\xi\Big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c|\psi|_{s^m_{q,N}}\sum_{|r|=0}^{N}|a_r|\sum_{\alpha+\beta=r}\binom{r}{\alpha}\|(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}\mathscr{F}((-ix)^\beta\varphi v_n)(\xi)\|_{L^p},$$

$$\le c|\psi|_{s^m_{q,N}}\Big\|\mathscr{F}(h^\beta)(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{|m-|\alpha||}{2}}\Big\|_{L^1} < \infty.$$

Dakle,

$$|\mu_n(\varphi,\psi)| := \Big|\int_{\mathbb{R}^d} u_n\overline{\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)}dx\Big| \le \|u_n\|_{L^p}\|\mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)\|_{L^q}$$

$$\leq c|\psi|_{s^m_{q,N}} \left\| \mathscr{F}(h^\beta)(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{|m-|\alpha||}{2}} \right\|_{L^1}$$

$$\leq c|\psi|_{s^m_{q,N}} |\mathscr{F}(h^\beta)(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{|m-|\alpha||}{2}}|_{d+1,\mathscr{S}} \leq c_1|\psi|_{s^m_{q,N}}|\varphi|_{k_0,\mathscr{S}}$$

za neko $k_0 \in \mathbb{N}$. Dalje je dokaz analogan dokazu Teoreme 4.4.3 i koristimo kompaktnost komutatora, to jest Teoremu 4.4.8. ❑

4.5 Primene H-distribucija sa neograničenim simbolom

Pretpostavimo da $u_n \rightharpoonup 0$ u $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ tako da je zadovoljen sledeći niz jednačina

$$\sum_{|\alpha|\leq k} A_\alpha(x)\partial^\alpha u_n(x) = g_n(x), \tag{4.30}$$

gde $A_\alpha \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i$(g_n)_n$ je niz temperiranih distribucija tako da

$$\varphi g_n \to 0 \text{ u } H^p_{-s-k}(\mathbb{R}^d), \text{ za svako } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{4.31}$$

Važi sledeća teorema.

Teorema 4.5.1 *Neka $u_n \rightharpoonup 0$ u $H^p_m(\mathbb{R}^d), m \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Tada $\varphi u_n \to 0$ jako u $H^p_{m-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$ za svako $\varepsilon > 0$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Dokaz: Označimo sa B_l otvorenu loptu sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika $l \in \mathbb{N}$. Relihova lema implicira da je $H^p_m(B_l)$ kompaktno utopljen u $H^p_{m-\varepsilon}(B_l)$, za svako $\varepsilon > 0$. Pošto $u_n \rightharpoonup 0$ u $H^p_m(B_l)$, dijagonalizacijskim postupkom dobijamo podniz (koji označavamo isto kao i početni niz) tako da za sve $l \in \mathbb{N}$

$$\varphi u_n \to 0 \text{ in } H^p_{m-\varepsilon}(B_l), \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{4.32}$$

Biramo glatke funkcije χ_l tako da je $\chi_l(x) = 1$ za $x \in B_l$ i $\chi_l(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}^d \backslash B_{l+1}$. Tada je $\varphi = \chi_l\varphi + (1-\chi_l)\varphi$ i

$$\|\varphi u_n\|_{H^p_{m-\varepsilon}} \leq \|\chi_l\varphi u_n\|_{H^p_{m-\varepsilon}} + \|(1-\chi_l)\varphi u_n\|_{H^p_{m-\varepsilon}}$$

$$\leq |\chi_l\varphi u_n\|_{H^p_{m-\varepsilon}} + \sup_{|x|>l}|\varphi|_{k_0}\|u_n\|_{H^p_m},$$

gde je sa $|\varphi|_{k_0}$ označena semi-norma za funkciju $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Primetimo da (4.32) implicira da $\|\chi_l\varphi u_n\|_{H^p_{m-\varepsilon}} \to 0$, $n \to \infty$.

Pošto $u_n \rightharpoonup 0$ u $H^p_m(\mathbb{R}^d)$, postoji konstanta $M > 0$ tako da je $\|u_n\|_{H^p_m} \leq M$. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Tada, pošto $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, postoji $l_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za sve $l \geq l_0$

$$\sup_{|x|>l} |\varphi|_{k_0} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Dakle, za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\|\varphi u_n\|_{H^p_{m-\varepsilon}} < \varepsilon$ za $n > n_0$, odnosno $\varphi u_n \to 0$ u $H^p_{m-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$, što je i trebalo pokazati. ❑

Lema 4.5.2 *Neka* (4.30) *i* (4.31) *važe. Tada postoji niz* (f_n) *u* $H^p_{-s-k}(\mathbb{R}^d)$ *tako da je*

$$\sum_{|\alpha|=k} \partial^\alpha (A_\alpha(x) u_n(x)) = f_n(x) \tag{4.33}$$

i

$$\varphi f_n \to 0 \text{ u } H^p_{-s-k}(\mathbb{R}^d), \text{ za svako } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{4.34}$$

Dokaz: Jednačinu (4.30) ćemo zapisati u divergentnom obliku, odnosno

$$\sum_{|\alpha|=k} \partial^\alpha (A_\alpha(x) u_n(x))$$

$$= g_n(x) - \sum_{|\alpha|<k} A_\alpha(x) \partial^\alpha u_n(x) + \sum_{|\alpha|=k} \sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} A_\alpha \partial^\beta u_n(x).$$

Stavimo

$$f_n(x) := g_n(x) - \sum_{|\alpha|<k} A_\alpha(x) \partial^\alpha u_n(x) + \sum_{|\alpha|=k} \sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} A_\alpha \partial^\beta u_n(x).$$

Pošto $u_n \rightharpoonup 0$ u $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$, onda $\partial^\alpha u_n \rightharpoonup 0$ u $H^p_{-s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$. Dakle, iz Teoreme 4.5.1 sledi da $\varphi \partial^\alpha u_n \to 0$ u $H^p_{-s-|\alpha|-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$, za svako $\varepsilon > 0$. Ako izaberemo $\varepsilon = k - |\alpha|$, što možemo da uradimo zato što je $|\alpha| < k$, dobijamo da

$$\varphi \partial^\alpha u_n \to 0 \text{ u } H^p_{-s-k}(\mathbb{R}^d).$$

Dakle, $\varphi f_n \to 0$ u $H^p_{-s-k}(\mathbb{R}^d)$. ❑

Sada možemo da pokažemo lokalizacijski princip.

Teorema 4.5.3 *Neka* $u_n \rightharpoonup 0$ *u* $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$, *zadovoljava (4.30) i (4.31) i* $\psi \in s^m_{\infty,N}$. *Tada za sve* $v_n \rightharpoonup 0$ *u* $H^q_{s+m}(\mathbb{R}^d)$ *odgovarajuća distribucija* $\mu_\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ *zadovoljava*

$$\sum_{|\alpha|\leq k} A_\alpha(x) \frac{\xi^\alpha}{\langle \xi \rangle^k} \mu_\psi = 0 \quad u\ \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d). \tag{4.35}$$

Štaviše, ako je $\psi = \langle \xi \rangle^m$ *i (4.35) implicira* $\mu_{\langle \xi \rangle^m} = 0$, *onda* $\theta u_n \longrightarrow 0$, *u* $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$, *za sve* $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Dokaz: Neka $v_n \rightharpoonup 0$ u $H^q_{s+m}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i $\psi \in s^m_{\infty,N}(\mathbb{R}^d)$. Treba da pokažemo da je, do na podniz,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|<k} \left\langle u_n A_\alpha \varphi_1 \,,\, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi_2 v_n) \right\rangle + \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|=k} \left\langle u_n A_\alpha \varphi_1 \,,\, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi_2 v_n) \right\rangle, \tag{4.36}$$

$$= \sum_{|\alpha|<k} \left\langle \mu, A_\alpha(x)\varphi_1\varphi_2 \frac{\xi^\alpha}{\langle\xi\rangle^k}\psi(\xi) \right\rangle + \sum_{|\alpha|=k} \left\langle \mu, A_\alpha\varphi_1\varphi_2 \frac{\xi^\alpha}{\langle\xi\rangle^k}\psi(\xi) \right\rangle = 0,$$

gde je $\Psi_\alpha = \dfrac{\xi^\alpha}{\langle\xi\rangle^k}\psi(\xi)$. Pošto $\Psi_\alpha \in s^{m+|\alpha|-k}_{\infty,N}$ iz Teoreme 4.3.4 sledi da je $\mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}$ kompaktan operator iz $H^q_{s+m}(\mathbb{R}^d)$ u $H^q_{s-|\alpha|+k-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$, za svako $\varepsilon > 0$, odnosno $\mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi_2 v_n) \to 0$ jako u $H^q_{s-|\alpha|+k-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$, za svako $\varepsilon > 0$.

Dakle, kada je $|\alpha| < k$ možemo da izaberemo $\varepsilon = k - |\alpha|$ i dobijamo jaku konvergenciju $\mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi_2 v_n) \to 0$ in $H^q_s(\mathbb{R}^d)$. Pošto $u_n \rightharpoonup 0$ u $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$ zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|<k} \left\langle u_n A_\alpha \varphi_1 \,,\, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi_2 v_n) \right\rangle = 0.$$

Treba još pokazati da

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|=k} \left\langle u_n A_\alpha \varphi_1 \,,\, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi_2 v_n) \right\rangle = 0.$$

Dovoljno je da pokažemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{|\alpha|=k} \left\langle u_n A_\alpha \,,\, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi v_n) \right\rangle = 0$, za svako $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, zato što je $\varphi = \varphi_1\bar{\varphi}_2$ za $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i Teorema 4.4.1 implicira da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|=k} \left\langle u_n A_\alpha \,,\, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi v_n) \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|=k} \left\langle u_n A_\alpha \varphi_1 \,,\, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi_2 v_n) \right\rangle.$$

Pošto je

$$\mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha} = \mathscr{A}_{\frac{\xi^\alpha}{\langle\xi\rangle^k}} \circ \mathscr{A}_\psi \quad \text{i} \quad \mathscr{A}_{\frac{\xi^\alpha}{\langle\xi\rangle^k}} = \partial^\alpha \mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^{-k}},$$

sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|=k} \left\langle u_n A_\alpha \,,\, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi v_n) \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|=k} (-1)^{|\alpha|} \left\langle \partial^\alpha_x(u_n A_\alpha) \,,\, \mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^{-k}\psi}(\varphi v_n) \right\rangle.$$

Tada $\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^{-k}\psi}(\varphi v_n) \in H^q_{s+k}(\mathbb{R}^d)$ i zbog pretpostavke (4.33) sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|=k} \left\langle u_n A_\alpha \varphi_1 \,,\, \mathscr{A}_{\bar{\Psi}_\alpha}(\varphi_2 v_n) \right\rangle = 0.$$

Dakle, pokazali smo (4.35).

Ako je $\mu_{\langle\xi\rangle^m} = 0$, onda Posledica 4.4.7 implicira da $\theta u_n \to 0$ u $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$, za sve $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ ❑

Teorema 4.5.4 *Neka $u_n \rightharpoonup 0$ u $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$, $v_n \rightharpoonup 0$ u $H^q_{s+m}(\mathbb{R}^d)$ i $\sigma \in s^r_{\infty,N}$, $\psi \in s^m_{\infty,N}$, $s,m,r \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da $\mathscr{A}_\sigma u_n = f_n \to 0$ jako u $H^p_{-s-r}(\mathbb{R}^d)$. Tada odgovarajuća distribucija $\mu_{\frac{\sigma(\xi)}{\langle\xi\rangle^r}\psi}$ zadovoljava*

$$\mu_{\frac{\sigma(\xi)}{\langle\xi\rangle^r}\psi} = 0 \quad u \ \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d). \tag{4.37}$$

Dokaz: Pretpostavka implicira da $\mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^{-r}}(\mathscr{A}_\sigma u_n) = \mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^{-r}}(f_n) \to 0$ u $H^p_{-s}(\mathbb{R}^d)$. Sledi da

$$\langle \mathscr{A}_{\langle\xi\rangle^{-r}}(\mathscr{A}_\sigma u_n), \mathscr{A}_{\overline{\psi}}(\varphi v_n)\rangle \to 0, \ n \to \infty, \ \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Iz osobine faktorisanja ($\varphi = \overline{\varphi_1}\varphi_2$) i Posledice 4.4.2 sledi da je za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi_1 u_n, \mathscr{A}_{\overline{\sigma(\xi)\langle\xi\rangle^{-r}\psi}}(\varphi_2 v_n)\rangle = 0,$$

odnosno za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ distribucija $\mu_{\frac{\sigma(\xi)}{\langle\xi\rangle^r}\psi}$ zadovoljava

$$\langle \mu_{\frac{\sigma(\xi)}{\langle\xi\rangle^r}\psi}, \varphi_1\overline{\varphi_2}\rangle = 0.$$

Dakle,važi (4.37), što je i trebalo pokazati . ❑

Zaključak

U trećem poglavlju smo uveli H-distribucije na prostorima Soboljeva, sa ograničenim simbolom ψ, a u četvrtom poglavlju uvodimo H-distribucije kada je simbol ψ neograničena funkcija.

Kada su nizovi u dualnom paru prostora Soboljeva $W^{-k,p} - W^{k,q}$, $k \in \mathbb{N}_0$ konstruišemo H-distribuciju pod pretpostavkom da je $\psi \in C^{\kappa}(\mathbb{S}^{d-1})$ i ψ proširujemo na $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ preko homogenosti reda nula ($\kappa = \lfloor d/2 \rfloor + 1$). Dokaz komutacijske leme se u ovom slučaju jednostavno dobija preko Tartarove komutacijske leme i interpolacijske nejednakosti (Lema 3.2.1). Dokazujemo i Teoremu 3.3.2 koja nam daje (lokalno) jaku konvergenciju, ako je odgovarajuća H-distribucija jednaka nuli. Preciznije, ako $u_n \rightharpoonup 0$ u $W^{-k,p}$ i za svaki niz $v_n \rightharpoonup 0$ u $W^{k,q}$ je H-distribucija jednaka nuli, onda $\theta u_n \to 0$ jako u $W^{-k,p}$.

Prilikom konstrukcije H-distribucija sa neograničenim simbolom pretpostavljamo da su nizovi u_n i v_n slabo konvergentni u dualnom paru Beselovih prostora, $H^p_{-s} - H^q_s$. Simbol $\psi \in C^N(\mathbb{R}^d)$ i pripada nekoj od klasa $s^m_{q,N}$ za $1 \leq q \leq \infty$. Simboli u ovim klasama ne moraju biti ograničeni. U zavisnosti od toga da li je $q = \infty$ ili $1 < q \leq 2$ dokazujemo teoremu o postojanju H-distribucija. Dokazi komutacijske leme su dati u Teoremi 4.4.1 za simbol $\psi \in s^m_{\infty,N}$ i u Teoremi 4.4.8 za simbol $\psi \in s^m_{q,N}$, $1 < q \leq 2$. Dokazujemo i Teoremu 4.4.6 koja nam slično kao u trećem poglavlju daje jaku konvergenciju $\theta u_n \to 0$ za sve $\theta \in \mathscr{S}$, ako $u_n \rightharpoonup 0$ u H^p_{-s} i za sve $v_n \rightharpoonup 0$ u H^q_{s+m} je odgovarajuća distribucija jednaka nuli. Za $m > 0$ je $H^q_{s+m} \subset H^q_s$, što je razlika u odnosu na analognu teoremu u trećem poglavlju. Kada je ψ ograničena funkcija moramo da posmatramo $v_n \rightharpoonup 0$ u H^q_s, a sa neograničenim simbolom možemo da posmatramo nizove u prostoru koji je sadržan u H^q_s.

Za sve klase simbola ψ dokazujemo lokalizacijski princip, odnosno primenjujemo H-distribucije na linearnu jednačinu sa koeficijentima u $\mathscr{S}$. Jednačina je prvog reda kad je simbol ograničen, a kada je simbol neograničen posmatramo jednačinu reda $k \in \mathbb{N}$.

Literatura

[1] Abdullah, S.; Pilipović, S. *Bounded subsets in spaces of distributions of L^p-growth.* Hokkaido Math. J. 23 (1994), no. 1, 51–54.

[2] Abels, H. *Pseudodifferential and singular integral operators. An introduction with applications*. De Gruyter, Berlin, 2012

[3] Adams, R. A. *Sobolev spaces. Pure and Applied Mathematics*, Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975.

[4] Aleksić, J., *Zakoni održanja u heterogenim sredinama*, doktorska disertacija, 2009.

[5] Aleksić, J.; Mitrović, D.; Pilipović, S., *Hyperbolic conservation laws with vanishing nonlinear diffusion and linear dispersion in heterogeneous media.* J. Evol. Equ. 9 (2009), no. 4, 809–828.

[6] Aleksić, J.; Pilipović, S.; Vojnović, I., *A note on convergence in the spaces of Lp-distributions*, Novi Sad Journal of Mathematics, 44(2),173-181, 2014

[7] Aleksić, J.; Pilipović, S.; Vojnović, I., *H-distributions via Sobolev spaces*, Mediterranean Journal of Mathematics, Volume 13, Issue 5, pp 3499-3512, 2016

[8] Aleksić, J.; Pilipović, S.; Vojnović, I., *H-distributions with unbounded multipliers*, Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, DOI: 10.1007/s11868-017-0200-5, 2017.

[9] Antonić N., *H-measures applied to symmetric systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 126 (1996) 1133–1155.

[10] Antonić N., Lazar M., *Parabolic variant of H-measures in homogenisation of a model problem based on Navier-Stokes equation*, Nonlinear Analysis—Real World Appl., 11 (2010), 4500–4512.

[11] Antonić, N.; Mitrović, D. *H-distributions: an extension of H-measures to an $L^p - L^q$ setting.* Abstr. Appl. Anal. 2011, Art. ID 901084, 12 pp.

[12] Atkinson, K.; Han, W. *Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: an introduction.* Lecture Notes in Mathematics, Springer, Heidelberg, 2012.

[13] Aubin, Thierry *Some nonlinear problems in Riemannian geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[14] Barros-Neto, J. *An introduction to the theory of distributions.* Marcel Dekker, 1973.

[15] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[16] Dierolf P., Voigt J. *Calculation of the Bidual for Some Function Spaces. Integrable Distributions.*, Mathematische Annalen, 253, 63-87, Berlin, Gottingen, Heildeberg, 1980

[17] Evans, L.C., Weak convergence methods in nonlinear partial differential equations, AMS, Providence, Rhode Island, No 74, 1990.

[18] Francfort, Gilles A. *An Introduction to H - measures and Their Applications*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications (2006), Vol. 68, 85-110

[19] Gérard, P. *Microlocal defect measures.* Comm. Partial Differential Equations 16 (1991), no. 11, 1761–1794.

[20] Gérard, P. *Microlocal analysis of compactness*, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collége de France Seminar, Volume XII, 1994.

[21] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis.* Springer, 2008.

Math. Nachr. 274/275 (2004), 74–103.

[22] Köthe, G. *Topological vector spaces. I.* Springer-Verlag, 1969.

[23] Kumano-go, H., *Pseudo-Differential Operators*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts,and London, England, 1974.

[24] Lu, Y., *Hyperbolic Conservation Laws and the Compensated Compactness Method*, Chapman and Hall/CRC, 2002

[25] Meise, R., Vogt, D. *Introduction to Functional Analysis*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 1992.

[26] Muscalu, C., Schlag, W., *Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Volume I*, Cambridge studies in advanced mathematics, 2013.

[27] Panov, E. Yu. Ultra-parabolic H-measures and compensated compactness. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 28 (2011), 47–62.

[28] Petzeltová H., Vrbová P., *Factorization in the algebra of rapidly decreasing functions on* $\mathbb{R}^n$. Comment. Math. Univ. Carolin. 19 (1978), 489–499.

[29] Reed, M., Simon, B., *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.* Second edition. Academic Press, New York, 1980.

[30] Royden, H. L., *Real Analysis*, third edition, Macmillan, New York, 1988

[31] Ruzhansky, M. L^p*-distributions on symmetric spaces.* Results Math. 44 (2003), no. 1-2, 159–168.

[32] Shubin Mikhail, Pseudodifferential Operators and Spectral Theory, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001.

[33] Stein, E. M. *Singular Integrals and Differential Properties of Functions.* Princeton, 1970.

[34] Tartar, L. H*-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 115 (1990), no. 3-4, 193–230.

[35] Tartar, L. *The General Theory of Homogenization, A Personalized Introduction*, Springer, 2009.

[36] Tréves, F. *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academic Press, New York-London 1967.

[37] Zemanian, A. H. *Generalized integral transformations.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XVIII. Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York-London-Sydney, 1968.

[38] Saint-Raymond, Xavier *Elementary introduction to the theory of pseudo-differential operators*, CRC Press, 1991.

[39] Schwartz, L. *Théorie des distributions.* Hermann, 1966.

[40] Wong, M. W. *An Introduction to Pseudo - Differential Operators*, 2nd Edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.. 1999

[41] Wong, M. W. *Spectral theory of pseudo-differential operators*, Adv. in Appl. Math. 15 (1994), no. 4, 437–451.

Biografija

Ivana Vojnović je rođena 30.11.1987. u Zagrebu. Osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer profesor matematike, upisala je 2006. godine i završava ih 2010. godine sa prosečnom ocenom 9,94. Potom je upisala master studije na istom fakultetu, koje završava u septembru 2011. godine. Od novembra 2011. godine je student doktorskih studija na Departmanu za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, gde od 2012-2014. radi kao istraživač saradnik, a od 2014. godine do danas je asistent. U toku doktorskih studija je položila sve ispite sa prosečnom ocenom 10,00. Zimski semestar školske 2010/ 2011. godine je provela na Institutu za matematiku, Univerziteta u Beču, zahvaljujući stipendiji fondacije ÖAD. U toku letnjeg semestra (tri meseca) školske 2015/2016. godine je boravila na Departmanu za matematiku „Đuzepe Peano", Univerziteta u Torinu, Italija. Oblasti njenog naučnog interesovanja su funkcionalna analiza i diferencijalne jednačine. Do sada je imala nekoliko izlaganja na naučnim konferencijama. Redovno učestvuje na Seminaru dva projekta iz analize i topologije, na Departmanu za matematiku i informatiku, gde je takođe imala nekoliko izlaganja. Koautor je tri naučna rada.

Novi Sad, 10.3.2017. Ivana Vojnović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR

Autor: Ivana Vojnović
AU

Mentor: dr Jelena Aleksić
MN

Naslov rada: Mikrolokalne distribucije defekta i primene
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2017
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 4/103/41/0/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: H-mere, H-distribucije, slaba konvergencija, Beselovi prostori, komutacijska lema
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ H-mere i H-distribucije su mikrolokalni objekti koji se koriste za ispitivanje jake konvergencije slabo konvergentnog niza u prostorima Lebega i prostorima Soboljeva. H-mere su uveli Tartar i Žerar (koji ih zove mikrolokalne mere defekta), u radovima [34] i [19]. H-mere su Radonove mere koje daju informacije o mogućim oblastima jake konvergencije slabo konvergentnog L^2 niza. Da bismo mogli da posmatramo i slabo konvergentne L^p nizove za $1 < p < \infty$, Antonić i Mitrović u radu [11] uvode H-distribucije.

U disertaciji dajemo konstrukciju H-distribucija za slabo konvergentne nizove u $W^{-k,p}$ prostorima, kad je $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ i pokazujemo da kada je H-distribucija pridružena slabo konvergetnim nizovima jednaka nuli za sve test funkcije, onda imamo lokalno jaku konverenciju datog niza. Takođe je pokazan i lokalizacijski princip, koji nam daje oblast u kojoj imamo lokalno jaku konvergenciju slabo konvergentnog niza.

H-mere i H-distribucije deluju na test funkcije φ i ψ (odgovarajuće regularnosti) koje su definisane na $\mathbb{R}^d$ i $\mathbb{S}^{d-1}$ (jedinična sfera u $\mathbb{R}^d$), pri čemu je funkcija ψ, koju zovemo množilac, ograničena. U disertaciji uvodimo i H-distribucije sa neograničenim simbolom, pri čemu posmatramo slabo konvergentne nizove u Beselovim H^p_{-s} prostorima, gde je $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$. U ovom delu koristimo teoriju pseudo-diferencijalnih operatora i dokazujemo kompaktnost komutatora $[\mathscr{A}_\psi, T_\varphi]$ za razne klase množioca ψ, što je potrebno za dokaz postojanja H-distribucija. Takođe pokazujemo odgovarajuću verziju lokalizacijskog principa.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP 10.12.2015.

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Jelena Aleksić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Nenad Teofanov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Bojan Prangoski, docent, Univerzitet „Sv. Ćirilo i Metodije”, Mašinski fakultet, Skoplje, Republika Makedonija

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Doctoral dissertation
CC

Author: Ivana Vojnović
AU

Mentor: Dr Jelena Aleksić
MN

Title: Microlocal defect distributions and applications
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian (latin)
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2017
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 4/103/41/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional Analysis
SD

Subject/Key words: H-measures, H-distributions, weak convergence, Bessel spaces, commutation lemma
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
H-measures and H-distributions are microlocal tools that can be used to investigate strong convergence of weakly convergent sequences in the Lebesgue and Sobolev spaces.

H-measures are introduced by Tartar and Gérard (as microlocal defect measures) in papers [34] and [19]. H-measures are Radon measures and they provide information about the set of points where given weakly convergent sequence in L^2 converges strongly. In paper [11], Antonić and Mitrović introduced H-distributions in order to work with weakly convergent L^p sequences.

In this thesis we give construction of H-distributions for weakly convergent $W^{-k,p}$ sequences, where $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. We show that if the H-distribution corresponding to given weakly convergent sequence is equal to zero, then we have locally strong convergence of the sequence. We also prove localization principle.

H-measures and H-distributions act on test functions φ and ψ (regular enough) which are defined on $\mathbb{R}^d$ and $\mathbb{S}^{d-1}$ (unit sphere in $\mathbb{R}^d$) and the function ψ, which is called multiplier, is bounded. We also introduce H-distributions with unbounded multipliers and in this case we assume that weakly convergent sequences are in Bessel potential spaces H^p_{-s}, where $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$. Theory of pseudo-differential operators is used in construction of H-distributions with unbounded multipliers. We prove compactness of the commutator $[\mathscr{A}_\psi, T_\varphi]$ for different classes of multipliers ψ and appropriate version of localization principle.

Accepted by the Scientific Board on:
ASB 10.12.2015.

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Jelena Aleksić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,
Member:	Dr. Nenad Teofanov, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,
Member:	Dr. Bojan Prangoski, assistant professor, University "St. Cyril and Methodius", Faculty of Mechanical engineering - Skopje, Republic of Macedonia