UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Martin Z. Ljubenović

MAJORIZACIONE RELACIJE I STOHASTIČKI OPERATORI NA DISKRETNIM LEBEGOVIM PROSTORIMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2016.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Martin Z. Ljubenović

MAJORIZATION RELATIONS AND STOCHASTIC OPERATORS ON DISCRETE LEBESGUE SPACES

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2016.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Драган С. Ђорђевић, редовни професор Природно- математичког факултета, Универзитета у Нишу
Наслов:	Мајоризационе релације и стохастички оператори на дискретним Лебеговим просторима
Резиме:	У овој дисетацији су проширени појмови слабе мајоризације и слабе супермајоризације на дискретним Лебеговим просторима, уз помоћ двоструко субстохастичких и суперстохастичких оператора. Уопштени су веома важни резултати из коначно-димензионалне мајоризационе теорије који дају блиску везу између стандардне и поменутих слабих мајоризација са одговарајућим стохастичким операторима. Доказано је да су све три релације мајоризације пре-уређења, а уколико се поистовете све функције које се разликују до на пермутацију, или до на парцијалу пермутацију за случај слабе мајоризације, ове релације се могу посматрати као парцијална уређења. Извршена је комплетна карактеризација линеарних очувања слабе мајоризације као и слабе супермајоризације. Уочено је да произвољно позитивно очување једне од изучаваних мајоризација, чува и друге две релације. Показано је да постоје два различита облика линеарних очувања слабе мајоризације на дискретним Лебеговим просторима $l^p(I)$, када је p строго веће од 1 и када је p једнако један. Проширен је појам мајоризације на скупу двоструко стохастичких оператора. Преформулисана је Какутанијева хипотеза, и дати су довољни услови под којима је ова претпоставка тачна.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Функционална анализа
Кључне речи:	стохастички оператори, мајоризационе релације, пермутација, дискретни Лебегови простори
УДК:	517.983.23 (043.3) 517.521 (043.3) 512.64/.643 (043.3)
CERIF класификација:	P140: Класе, Фуријеова анализа, функционална анализа
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dragan S. Đorđević, Ph.D., full professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Majorization relations and stochastic operators on discrete Lebesgue spaces

Abstract:

In this dissertation, notions of weak majorization and weak supermajorization on descrete Lebesgue spaces are introduced, using doubly substochastic and superstochastic operators. We generalize very important results from finite dimenstional majorization theory, which give close relationships between standard and mentioned weak majorizations and corresponding stochastic operators. It is proved that all three majorization relations are pre-orders, and if we identify all functions which are different up to the permutation, or up to the partial permutation for weak majorization case, these relations may be considered as parial orders.

The complete characterisation of linear preservers of weak majorization and weak supermajorization, has been carried out. It was observed that an arbitrary positive preserver one of investigated majorization, preserves the remaining two relations. It was provided that there are two different forms of linear preservers of weak majorization on discrete Lebesgue spaces $l^p(I)$, when p is greater than 1 and when p is equal 1.

The notion of majorization on the set of all doubly stochastic operators is extended. Kakutani's conjecture is restated and sufficient conditions that this conjecture is true are given.

Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Functional analysis
Key Words:	stochastic operators, majorization relations, permutation, discrete Lebesgue spaces
UDC:	517.983.23 (043.3) 517.521 (043.3) 512.64/.643 (043.3)
CERIF Classification:	P140: Series, Fourier analysis, functional analysis
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Komisija za odbranu doktorske disertacije

Mentor:

dr Dragan Đorđević
Redovni profesor
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Nišu

Članovi komisije:

dr Ljiljana Petković
Redovni profesor
Mašinski fakultet
Univerzitet u Nišu

dr Snežana Živković Zlatanović
Redovni profesor
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Nišu

dr Ljiljana Radović
Vanredni profesor
Mašinski fakultet
Univerzitet u Nišu

dr Dijana Mosić
Vanredni profesor
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Nišu

Datum odbrane:

Mojim roditeljima,
Zlatomiru i Dušanki Ljubenović

ZAHVALNICA

Na početku moram da izrazim posebnu i veliku zahvalnost prof. dr Draganu Đorđeviću, svom mentoru, na poverenju koje mi je ukazao prihvativši me za svog doktoranda i saradnika u naučnom radu, na odličnom izboru aktuelne i primenljive oblasti mog istraživanja, na znanju i iskusktvu koje mi je preneo, na strpljenju koje je imao u radu sa mnom i na izuzetno prijateljskom odnosu svih ovih godina.

Zahvaljujem se i profesorima Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu sa departmana za matematiku i informatiku koji su mi još od srednjoškolskih dana preneli veliku ljubav ka matematici.

Svojoj porodici, majci i ocu, sestri Emi i devojci Dragani, želim da se zahvalim na beskrajnom vremenu i razumevanju koje su mi posvetili, pažljivo slušajući sve moje nedoumice i dileme tokom izrade disertacije i koji su sve ovo izdržali ravnopravno sa mnom. Uz njihovu pomoć, razumevanje i toleranciju, rad je bio mnogo lakši i efikasniji.

Hvala prijateljima što su me bodrili i bili uz mene u teškim trenucima.

Zahvalnost dugujem i članovima komisije koji su svojim sugestijama poboljšali kvalitet ove disertacije.

Zahvaljujem se Mašinskom fakultetu u Nišu na finansijskoj pomoći pri izradi disertacije.

Svima Vama, što ste me podržavali, nesebično pomagali i verovali u mene i moj rad, još jednom veliko hvala!

Sadržaj

Predgovor

Nejednakosti igraju veoma važnu ulogu u skoro svim oblastima matematike, ali sve do početka dvadesetog veka nije postojala zasebna matematička disciplina koja bi se ovom tematikom bavila. Sada se zna da postoji veoma moćan i koristan matematički aparat nazvan teorija majorizacije, koji omogućava generisanje novih nejednakosti i njihovu primenu u oblastima linearne algebre i matematičke analize, kao i u različitim granama nauke koje su blisko povezane sa matematikom. Formalna definicija majorizacije prikazana u uvodnom delu (Definicija 1.1.1) mogla bi se intuitivno interpretirati na sledeći način: realni vektor x je majorizovan vektorom y ako se koordinate vektora x "manje međusobno razlikuju“ ili su "bliže jedna drugoj“ nego koordinate vektora y.

Majorizaciona teorija se razvijala potpuno nezavisno u različitim oblastima matematike: linearnoj algebri, verovatnoći, statistici, kombinatorici i numeričkoj analizi, ali i u drugim granama nauke kao što su fizika, kvantna mehanika i ekonomija, pa otuda postoje velike razlike u terminologiji. Hardi, Litlvud i Polja su izvršili sistematizaciju do tada poznatih rezultata u oblasti majorizacije i objavili monografiju [41]. Početkom prethodnog stoleća u ekonomiji su vršena poređenja raspodele verovatnoća prihoda nekog preduzeća (ili raspodela verovatnoća bogatstva nekog regiona) sa ciljem da se odredi koja je raspodela u nekom trenutku "ujednačenija“ od raspodele u drugom. S tim u vezi, razmatrana je Loranova kriva koja je uvedena u radu Lorana [67]. Kasnije je Dalton [33] gledajući drugačije na problem, uveo pojam princip transfera uz pomoć majorizacije. Najveća i najbolja kolekcija rezultata u oblasti konačno-dimenzionalne majorizacije sa primenama u navedenim granama matematike, je monografija Maršala, Olkina i Arnolda [77]. Posebno se mora istaći velika primena teorije majorizacije i u kvantnoj mehanici, gde je relacija majorizacije prirodno uvedena na matricama gustine [84] po analogiji sa majorizacijom među ermitskim matricama, upoređujući vektore sopstvenih vrednosti dve matrice [110].

Matematičke osnove majorizacije su postavljene u radovima Mjurheda [80], Šura [105] i Hardi, Litlvuda i Polje [42]. Šur je pokazao da je vektor dijagonalnih elemenata ermitske matrice majorizovan vektorom sopstvenih vrednosti te matrice. Štaviše, Horn [47] je dokazao i suprotno, da za svaki par majorizovanih vektora $d \prec \lambda$, postoji neka ermitska matrica tako da je d vektor dijagonalnih elemenata, a λ vektor sopstvenih vrednosti te matrice. Prva proširenja pojma majorizacije su nastala upravo sa ciljem da bi se uopštio pomenut Šur-Hornov rezultat. Najpre je Markus [37, 76] proširio pojmove majorizacionih relacija na prostore nizova, da bi se kasnije istraživanje nastavilo u radovima Nojmana [82], Arvesona i Kadisona [10], Antesane, Maseja, Ruiza i Stojanova [3], i Kaftala i Vajsa [51] kako na prostore nizova, tako i na fon Nojmanove algebre.

U konačno-dimenzionalnoj teoriji majorizacije postoji nekoliko ekvivalenata standardne kao i slabih majorizacionih relacija. Naime, Hardi, Litlvud i Polja [41] su dokazali da su dva vektora x i y *majorizovana* $x \prec y$ ako i samo ako važi

$$x = Dy$$

za neku dvostruko stohastičku matricu D. Uz pomoć ove ekvivalentne definicije majorizacije, u radu [13] koji je publikovan pre nekoliko godina, Behrami, Bajati i Manjegani su izvršili proširenje pojma standardne majorizacije na beskonačno-dimenzionalnim diskretnim Lebegovim prostorima $\ell^p(I)$, kada je $p \in [1, \infty)$. Ovo je prvo proširenje pojma majorizacije putem nekog ekvivalenta osnovne definicije ove relacije. Za tu svrhu, uveden je pojam dvostruko stohastičkih operatora na prostoru $\ell^p(I)$ i date su neke osnovne osobine majorizacije i ovih operatora. U Glavi 2 ove disertacije, nastavljeno je istraživanje majorizacione relacije uopštene na ovakav način, pokazano je da se ova relacija u nekom smislu može posmatrati kao parcijalno uređenje, prikazane su bitne osobine majorizacije i stohastičkih operatora, i ostvarena je njihova bliska veza po analogiji sa poznatim rezultatima iz konačno-dimenzionalnog slučaja. Proširen je pojam majorizacije na skupu dvostruko stohastičkih operatora, preformulisana je Kakutanijeva hipoteza za operatore i predstavljeni su uslovi pod kojima je ova hipoteza tačna. Nedavno je Bajati u radu [17] nastavio ispitivanje preciznosti ove hipoteze prikazane u Sekciji 2.2.1.

Slabe majorizacione relacije imaju ravnopravnu ulogu u nejednakostima i majorizacionoj teoriji kao i standardna majorizacija, i podjednako su primenljive u nauci. One takođe imaju svoje ekvivalente, među kojima je najvažniji onaj koji povezuje slabe majorizacione relacije i stohastičke matrice. Naime, za dva pozitivna vektora x i y, vektor x je *slabo majorizovan* vektorom y ako i samo ako važi

$$x = Dy,$$

za neku dvostruko substohastičku matricu D, i slično, x je *slabo supermajorizovan* vektorom y ako i samo ako važi

$$x = By,$$

za neku dvostruko superstohastičku matricu B. Uopštenje slabih majorizacionih relacija uzimajući za definicije prethodne ekvivalente, je iz puno razloga bolje, korisnije i operativnije nego pomenuta uopštenja koja su vršena preko Definicije 1.1.1 koja koristi parcijalne sume elemenata vektora x i y.

U Glavi 3, prošireni su pojmovi substohastičkih operatora iz $\ell^p(J)$ u $\ell^p(I)$ i prikazane su neke bitne osobine ovih operatora. Naime, skup dvostruko substohastičkih operatora je konveksan, zatvoren za kompoziciju, i norma ovih operatora je najviše 1. Dokazano je da proizvoljna familija pozitivnih realnih brojeva $\{a_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ koja zadovoljava sledeće uslove za njene "vrste" i "kolone"

$$(\forall j \in J)\ \sum_{i \in I} a_{ij} \leqslant 1 \quad i \quad (\forall i \in I)\ \sum_{j \in J} a_{ij} \leqslant 1,$$

predstavlja dvostruko substohastički operator iz $\ell^p(J)$ u $\ell^p(I)$, definisan kao matrični operator (tj. preko matričnog množenja). Grubo govoreći, poslednji rezultat daje vezu između "neprebrojivih matrica" i dvostruko substohastičkih operatora. Dalje, proširen je pojam slabe majorizacije na $\ell^p(I)^+$ uz pomoć dvostruko substohastičkih operatora, i dati su potrebni i dovoljni uslovi da operator bude dvostruko substohastički. Kao uopštenje rezultata Vajla [109] i Tomića [107], pokazano je da majorizacija $f \prec_w g$ povlači

$$\sum_{i\in I} \varphi(f(i)) \leqslant \sum_{i\in I} \varphi(g(i)),$$

za svaku neprekidnu rastuću konveksnu funkciju, za koju je $\varphi(0) = 0$. Na osnovu ovog rezultata je dokazano da važi osobina antisimetričnosti, ukoliko poistovetimo sve funkcije koje se razlikuju do na parcijalnu permutaciju svojih pozitivnih elemenata, to jest, $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$ ako i samo ako postoji parcijalna permutacija P za pozitivne vrednosti funkcija f i g, tako da važi

$$g = Pf.$$

Dakle, pokazano je da se u nekom smislu slaba majorizacija može posmatrati kao parcijalno uređenje.

Linearna očuvanja predstavljaju ograničena linearna preslikavanja koja obezbeđuju da za dva elementa koja su u nekoj relaciji, elementi u slici tog operatora budu takođe u nekoj relaciji. U zavisnosti od konkretnog slučaja, relacije u domenu i slici mogu ali i ne moraju biti iste. Iako se problemi linearnih očuvanja javljaju u različitim oblastima istraživanja, čini se da jedino u oblasti linearne algebre i teorije operatora se linearnim očuvanjima pristupa sa puno pažnje. U teoriji majorizacije, pojam očuvanja uveo je Šur [105], pa se u njegovu čast realne funkcije koje čuvaju majorizaciju nazivaju *Šur konveksne funkcije*. Oblik matrica, kao ograničenih linearnih operatora na prostoru $\mathbb{R}^n$ koje čuvaju majorizacione relacije je dat u preglednom radu Anda [1].

Jedan od ciljeva ove disertacije je pronaći konkretnu formu linearnih očuvanja slabe majorizacije i slabe supermajorizacije na diskretnim Lebegovim prostorima kao i ispitati topološku strukturu skupa svih linearnih očuvanja. Takođe, biće pokazano da pozitivno linearno očuvanje jedne od tri majorizacije, standardne, slabe i slabe supermajorizacije, čuva i druge dve majorizacione relacije na skupu pozitivnih sumabilnih funkcija $\ell^1(I)^+$.

U nastavku Glave 3 dati su potrebni i dovoljni uslovi da proizvoljan ograničen linearan operator na $\ell^p(I)$ predstavlja linearno očuvanje slabe majorizacije kada je I beskonačan skup, pri čemu se razlikuju dva slučaja. Preciznije, za $p \in (1, \infty)$, operator je linearno očuvanje slabe majorizacije ako i samo ako se "kolone" tog operatora razlikuju do na parcijalnu permutaciju, i svaka "vrsta" sadrži najviše jedan strogo pozitivan element, dok su ostali elementi u toj "vrsti" nule (Teorema 3.3.11). Kada je $p = 1$, linearno očuvanje ima malo drugačiju formu. "Kolone" očuvanja se razlikuju do na parcijalnu permutaciju, i svaka "vrsta" ili sadrži tačno jedan strogo pozitivan element dok su ostali nule, ili su svi elementi u toj "vrsti" međusobno jednaki (Teorema 3.4.11). Sa druge strane, pokazano je da se očuvanja mogu opisati i preko operatora. Naime, kada je $p \in (1, \infty)$, operator T je linearno očuvanje slabe majorizacije ako i samo T ima oblik

$$T = \sum_{k\in I_0} \lambda_k P_{\theta_k},$$

gde je I_0 najviše prebrojiv podskup od I, $(\lambda_k)_{i\in I_0} \in \ell^p(I_0)^+$, svako θ_k pripada prebrojivoj familiji Θ koju čine jedan-jedan funkcije sa međusobno disjunktnim slikama, i $P_{\theta_k(f)} :=$

$\sum_{i \in I} f(i) e_{\theta_k(i)}$. Kada je $p = 1$, očuvanje T ima malo složeniji oblik

$$T = \sum_{k \in I_0} \lambda_k P_{\theta_k} + T_h, \tag{1}$$

pri čemu je operator $T_h(f) := h \sum_{k \in I_0} f(k)$ definisan za neku funkciju $h \in \ell^1(I)^+$ za koju važi da je $\langle h, e_j \rangle = 0$, za svako $j \in \theta_i(I)$, za svako $i \in I_0$. Zaključeno je da pozitivna linearna očuvanja standardne i slabe majorizacije imaju isti oblik (videti Posledice 3.3.12 i 3.4.12).

U poslednjoj Sekciji 3.5 je pokazano da je skup svih linearnih očuvanja slabe majorizacije zatvoren za operatorsku normu, kada je I konačan, kao i kada je I beskonačan skup. Kada je I konačan, zatvorenost skupa svih očuvanja se pokazuje preko kompaktnosti skupa svih dvostruko substohastičkih matrica. Kada je I beskonačan, ovakav pristup nije moguć, međutim, zatvorenost je ipak potvrđena ali drugačijim pristupom. Posebno su razmatrani slučajevi $p \in (1, \infty)$ i $p = 1$, s obzirom na razliku u formi samih linearnih očuvanja slabe majorizacije za ova dva slučaja.

Primarni cilj Glave 4 je proširenje pojmova slabe supermajorizacije i dvostruko superstohastičkih operatora na diskretnim Lebegovim prostorima funkcija, i ispitivanje linearnih očuvanja ove relacije. U prvoj sekciji ove glave su pre svega dati potrebni i dovoljni uslovi da se proizvoljna familija $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ može posmatrati kao ograničen linearan operator na Banahovim prostorima $\ell^1(I)$ i $\ell^\infty(I)$.

Preciznije, pokazano je da važi

$$\sup_{j \in I} \sum_{i \in I} |a_{ij}| < \infty \tag{2}$$

ako i samo ako familija $\mathbb{A}$ generiše ograničen linearan operator A na $\ell^1(I)$. Slično,

$$\sup_{i \in I} \sum_{j \in I} |a_{ij}| < \infty \tag{3}$$

ako i samo ako $\mathbb{A}$ generiše ograničen linearan operator A na $\ell^\infty(I)$. Ovi operatori su definisani kao standardni matrični operatori. Dalje, pokazano je da su uslovi (2) i (3) dovoljni da bi se familija $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ mogla posmatrati kao ograničen linearan operator na Banahovim prostorima $\ell^p(I)$, za svako $p \in [1, \infty]$. U skupu svih familija koje zadovoljavaju ova dva uslova, uvodi se pojam dvostruko superstohastičke familije, kao uopštenje pojma dvostruko superstohastičke matrice. Prikazuju se neke osobine ove familije koje su dalje iskorišćene za karakterizaciju slabe supermajorizacije koja je uopštena u Sekciji 4.2 preko dvostruko superstohastičkih operatora. Uopštene su neke teoreme iz konačno-dimenzionalnog slučaja koje daju blisku vezu slabe supermajorizacije i superstohastičkih operatora. Dalje, u Teoremi 4.2.9, prikazano je uopštenje Vajlove [109] i Tomićeve [107] nejednakosti:

$$\sum_{i \in I} \varphi(f(i)) \leqslant \sum_{i \in I} \varphi(g(i)),$$

koja važi za proizvoljno izabranu neprekidnu opadajuću konveksnu funkciju $\varphi : [0, b) \to \mathbb{R}$, kadgod je $f \prec^{ws} g$. Dokazan je važan rezultat, da za funkcije f i g iz $\ell^1(I)^+$ važi $f \prec^{ws} g$

i $g \prec^{ws} f$ ako i samo ako postoji permutacija P tako da je $g = Pf$. Zaključeno je da je uopštena slaba supermajorizacija pre-uređenje, ali specijalno za $p = 1$, ova relacija se može posmatrati kao parcijalno uređenje ukoliko se poistovete sve funkcije koje su jednake do na permutaciju.

U Sekciji 4.3 razmatrana su očuvanja slabe supermajorizacije na diskretnom Lebegovom prostoru $\ell^1(I)$, i pokazano je kroz niz tvrđenja da se "kolone“ ovih očuvanja razlikuju do na permutaciju, i da svaka "vrsta“ ili sadrži tačno jedan strogo pozitivan element dok su ostali nule, ili su svi elementi u toj vrsti međusobno jednaki. Sa druge strane, pokazano je da se ova očuvanja mogu opisati i preko sume dva operatora i da imaju istu formu kao i očuvanja slabe majorizacije (1) (Teorema 4.3.15). Dakle, kada je $p = 1$, očuvanja sve tri majorizacije koje se razmatraju u ovoj disertaciji imaju istu formu, ako se ograničimo samo na pozitivne operatore. U poslednjoj Sekciji 4.4, pokazano je da je skup svih očuvanja slabe supermajorizacije zatvoren za operatorsku normu, kada je I konačan ili beskonačan skup. Međutim, kako skup svih dvostruko superstohastičkih operatora nije kompaktan, pomenuta zatvorenost kada je I konačan skup je dokazana drugačijom metodom nego u slučaju slabe majorizacije u Glavi 3.

Doktorska disertacija je sačinjena od originalnih rezultata autora. Glave 2, 3 i 4 sastoje se od rezultata iz naučnih radova [68–71] publikovanih u vodećim naučnim časopsima sa SCI liste, od kojih su radovi [68] i [69] samostalni, dok su radovi [70] i [71] nastali u koautorstvu sa mentorom, prof. dr Draganom Đorđevićem. Radovi [72–74] koji čine poslednju Glavu 4 su na recenziji, dakle predstavljaju još uvek neobjavljene rukopise.

Glava 1

Uvod

1.1 Majorizacione relacije i stohastičke matrice

Majorizacione relacije

Posmatraćemo realan vektorski prostor $\mathbb{R}^n$. Skup svih pozitivnih i strogo pozitivnih vektora označićemo sa $(\mathbb{R}^n)^+$ i $(\mathbb{R}^n)^{++}$, respektivno. Ove skupove možemo opisati na sledeći način:

$$(\mathbb{R}^n)^+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

i

$$(\mathbb{R}^n)^{++} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Slično ćemo realan broj $x \geqslant 0$ nazivati *pozitivnim* brojem, a ukoliko je nejednakost stroga $x > 0$, nazivaćemo *strogo pozitivnim* brojem. Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan vektor. Sa $x^\downarrow = (x_1^\downarrow, x_2^\downarrow, \ldots, x_n^\downarrow)$ označavaćemo vektor koji predstavlja preraspodelu elemenata vektora x u *opadajući poredak*, $x_1^\downarrow \geqslant x_2^\downarrow \geqslant \ldots \geqslant x_n^\downarrow$. Drugim rečima, može se pronaći permutaciona matrica P tako da je $x^\downarrow = Px$. *Permutaciona matrica* se sastoji od elemenata skupa $\{0, 1\}$, pri čemu u svakoj vrsti i u svakoj koloni permutacione matrice postoji tačno jedan element jednak 1, dok su ostali elementi jednaki 0. Slično, $x^\uparrow = (x_1^\uparrow, x_2^\uparrow, \ldots, x_n^\uparrow)$ će predstavljati *rastuću preraspodelu* elemenata vektora x, $x_1^\uparrow \leqslant x_2^\uparrow \leqslant \ldots \leqslant x_n^\uparrow$, za koju postoji neka permutaciona matrica Q tako da je $x^\uparrow = Qx$.

Definicija 1.1.1. Za date vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$, vektor x je *slabo majorizovan* vektorom y, i to označavamo sa $x \prec_w y$, ako važe sledeće nejednakosti:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^\downarrow \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i^\downarrow, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dodatno, ako je zadovoljena jednakost:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^\downarrow = \sum_{i=1}^{n} y_i^\downarrow,$$

tada je vektor x *majorizovan* vektorom y (ili vektor y *majorizira* vektor x), i to označavamo sa $x \prec y$.

Na primer, ako za vektor sa pozitivnim elementima $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ važi $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ tada je

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \prec (a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (1, 0, \ldots, 0)$$

Takođe,

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \prec (\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, 0) \prec (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, 0) \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

Na osnovu prethodnog primera, može se opravdati intuitivna definicija majorizacije data u predgovoru.

Definicija 1.1.2. Za date vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$, vektor x je *slabo supermajorizovan* vektorom y, i to označavamo sa $x \prec^{ws} y$, ako važe sledeće nejednakosti:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\uparrow} \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_i^{\uparrow} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nije teško uočiti da važi

$$x_i^{\uparrow} = x_{n-i+1}^{\downarrow}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

što dalje povlači

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\uparrow} = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n-k} x_i^{\downarrow}$$

Na osnovu ove činjenice zaključujemo da važi standardna majorizacija $x \prec y$ ako i samo ako važi slaba supermajorizacija $x \prec^{ws} y$ i dodatni uslov

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}.$$

Dakle standardna majorizacija povlači slabu majorizaciju na osnovu definicije i slabu supermajorizaciju na osnovu prethodnog razmatranja.

Majorizacione relacije, stohastičke matrice i konveksne funkcije

U konačno-dimenzionalnoj majorizacionoj teoriji je pokazano da postoji nekoliko međusobno ekvivalentnih definicija majorizacionih relacija koje su uvedene u prethodnom delu. U nastavku ćemo predstaviti neke od ovih ekvivalenata. Ali pre toga, razmotrićemo različite tipove stohastičkih matrica.

Definicija 1.1.3. Neka je data $m \times n$ matrica $A = (a_{ij})$ sa pozitivnim vrednostima.

1) Matrica A je *stohastička po vrstama*, ako je suma elemenata u svakoj vrsti jednaka 1;

2) Matrica A je *stohastička po kolonama*, ako je suma elemenata u svakoj koloni jednaka 1;

3) Matrica A je *dvostruko stohastička*, ako je stohastička po vrstama i stohastička po kolonama;

4) Matrica A je *substohastička po vrstama*, ako je suma elemenata u svakoj vrsti manja ili jednaka od 1;

5) Matrica A je *substohastička po kolonama*, ako je suma elemenata u svakoj koloni manja ili jednaka od 1;

6) Matrica A je *dvostruko substohastička*, ako je substohastička po vrstama i substohastička po kolonama;

7) Matrica A je *superstohastička po vrstama*, ako je suma elemenata u svakoj vrsti veća ili jednaka od 1;

8) Matrica A je *superstohastička po kolonama*, ako je suma elemenata u svakoj koloni veća ili jednaka od 1;

9) Matrica A je *dvostruko superstohastička*, ako postoji dvostruko stohastička matrica $D = (d_{ij})$ tako da za svako $1 \leqslant i \leqslant m$ i za svako $1 \leqslant j \leqslant n$ važi $d_{ij} \leqslant a_{ij}$.

Očigledno, dvostruko stohastička matrica A mora biti kvadratna. Tačnije, ukoliko pretpostavimo da za dvostruko stohastičku matricu A važi $m \neq n$, sledi da je

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} 1 = m \neq n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

što je nemoguće. Takođe, na osnovu definicije sledi da dvostruko superstohastička matrica mora takođe biti kvadratna. Skup svih matrica koje imaju svojstvo (i), $(i = 1, \ldots, 9)$ je konveksan. Specijalno, skup svih dvostruko stohastičkih matrica je konveksan, i ekstremne tačke ovog skupa su permutacione matrice. Ovaj skup se može posmatrati i kao konveksna ljuska permutacionih matrica. Drugim rečima, svaka dvostruko stohastička matrica se može zapisati kao konveksna kombinacija permutacionih matrica. Ove rezultate dokazao je Birkof [24]. Slični rezultati postoje i za dvostruko substohastičke matrice (videti [77]).

Takođe, od dvostruko stohastičkih matrica mogu se generisati kvadratne dvostruko substohastičke matrice, "smanjivanjem" nekih vrednosti, vodeći računa da svi elementi matrice ostanu pozitivni. Fon Nojman [83] je dokazao i obrnuto tvrđenje.

Teorema 1.1.4. *[77, Teorema I.1.C.1] Za svaku kvadratnu dvostruko substohastičku matricu $A = (a_{ij})$, postoji dvostruko stohastička matrica $D = (d_{ij})$ za koju važi $a_{ij} \leqslant d_{ij}$, za sve $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Dakle, za kvadratnu matricu se može reći da je ona dvostruko substohastička ako i samo ako se ona može "dopuniti" do dvostruko stohastičke, tj. ako i samo ako postoji dvostruko stohastička matrica $D = (d_{ij})$ za koju važi $a_{ij} \leqslant d_{ij}$, za sve i, j. Može se pojam kvadratne dvostruko substohastičke matrice uvesti i preko pomenute ekvivalentne definicije, što bi predstavljalo definiciju koja bi bila analogna sa definicijom kvadratne dvostruko superstohastičke matrice. U ovoj disertaciji biće pokazano da u beskonačno-dimenzionalnom slučaju, prethodna teorema Fon Nojmana ne važi.

S druge strane, zanimljivo je da se definicija dvostruko superstohastičke matrice ne može uvesti kao matrica koja je superstohastička po vrstama i kolonama kao u prethodnom slučaju. Preciznije, ne može se svaka ovakva matrica "umanjiti" do dvostruko stohastičke matrice po analogiji sa prethodnim slučajem. Na primer, matrica A definisana na sledeći način:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

je superstohastička po vrstama i superstohastička po kolonama. Lako se može uočiti da nije moguće naći dvostruko stohastičku matricu $D = (d_{ij})$ tako da važi $d_{ij} \leqslant a_{ij}$, za sve i, j. Dakle, matrica A nije dvostruko superstohastička.

Neprekidna funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konveksna na segmentu $[A, B]$ ako za svaki realan broj $t \in [0, 1]$ važi

$$\varphi(tA + (1-t)B) \leqslant t\varphi(A) + (1-t)\varphi(B).$$

Funkcija φ je konkavna na segmentu $[A, B]$ ako je funkcija $-\varphi$ konveksna na tom segmentu. Drugim rečima, funkcija φ je konkavna na segmentu $[A, B]$ ako važi nejednakost

$$\varphi(tA + (1-t)B) \geqslant t\varphi(A) + (1-t)\varphi(B).$$

Funkcija je konveksna(konkavna) na skupu $\mathbb{R}$ ako je konveksna(konkavna) na svakom segmentu $[A, B]$. Naredna teorema, daje dva ekvivalenta standardne majorizacione relacije, pri čemu je prvi dat preko dvostruko stohastičkih matrica, a drugi korišćenjem konveksnih funkcija.

Teorema 1.1.5. *[77, Teorema I.1.A.3] Za proizvoljna dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $x \prec y$;

2) $x = Ay$ *za neku dvostruko stohastičku matricu* A;

3) $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)$ *za svaku neprekidnu konveksnu funkciju* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Naredni ekvivalenti slabih majorizacionih relacija preko stohastičkih matrica važe samo u slučaju kada se posmatraju pozitivni vektori x i y.

Teorema 1.1.6. *[77, Teorema I.1.A.4] Za proizvoljna dva pozitivna vektora $x, y \in (\mathbb{R}^n)^+$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $x \prec_w y$;

2) $x = Ay$ za neku dvostruko substohastičku matricu A.

Teorema 1.1.7. *[77, Teorema I.1.A.5] Za proizvoljna dva pozitivna vektora $x, y \in (\mathbb{R}^n)^+$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $x \prec^{ws} y$;

2) $x = Ay$ za neku dvostruko superstohastičku matricu A.

U ovoj disertaciji će biti iskorišćeni prethodni ekvivalenti za generalizaciju slabih majorizacionih relacija na diskretnim Lebegovim prostorima funkcija, samo za pozitivne funkcije, što će biti u skladu sa predstavljenim konačno-dimenzionalnim slučajem.

Naredni ekvivalenti, koji su dokazani u [107], povezuju slabe majorizacione relacije sa neprekidnim monotonim konveksnim funkcijama.

Teorema 1.1.8. *[77, Teorema I.1.A.4] Za proizvoljna dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $x \prec_w y$;

3) $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)$ za svaku neprekidnu rastuću konveksnu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.1.9. *[77, Teorema I.1.A.5] Za proizvoljna dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $x \prec^{ws} y$;

3) $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)$ za svaku neprekidnu opadajuću konveksnu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Naredni rezultati daju blisku vezu između majorizacionih relacija i stohastičkih operatora. Uopštenja ovih rezultata su predstavljena u ovoj disertaciji.

Teorema 1.1.10. *[77, Teorema I.2.A.4] Kvardratna $n \times n$ matrica $A = (a_{ij})$ je dvostruko stohastička ako i samo ako je $Ax \prec x$, za svako $x \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.1.11. *[77, Teorema I.2.C.3] Kvardratna $n \times n$ matrica $A = (a_{ij})$ je dvostruko substohastička ako i samo ako $x \in (\mathbb{R}^n)^+$ povlači $Ax \in (\mathbb{R}^n)^+$ i $Ax \prec_w x$.*

Teorema 1.1.12. *[77, Teorema I.2.D.4] Kvardratna $n \times n$ matrica $A = (a_{ij})$ je dvostruko superstohastička ako i samo ako $x \in (\mathbb{R}^n)^+$ povlači $Ax \in (\mathbb{R}^n)^+$ i $Ax \prec^{ws} x$.*

Sledeći rezultat je dokazan nezavisno od strane Snajdersa [102], Berga [20] i Farahata [35] na osnovu potpuno drugačijih pristupa. Beskonačno-dimenzionalna verzija ovog rezultata biće dokazana u narednoj glavi.

Teorema 1.1.13. *[77, Teorema I.2.I.1] Neka je P invertibilna matrica. Ako su matrice P i P^{-1} dvostruko stohastičke, tada je P permutaciona matrica.*

Majorizacija kao parcijalno uređenje

Definicija 1.1.14. *Binarna relacija* ρ na skupu A predstavlja podskup Dekartovog proizvoda $A \times A$. Ako je $(x, y) \in \rho$, tada je x u relaciji ρ sa y, i to označavamo sa $x\rho y$.

Definicija 1.1.15. Binarna relacija ρ na skupu A je

1) *refleksivna* ako je $x\rho x$, za svako $x \in A$;

2) *simetrična* ako za sve $x, y \in A$, iz $x\rho y$ sledi $y\rho x$;

3) *antisimetrčna* ako za sve $x, y \in A$, iz $x\rho y$ i $y\rho x$ sledi $x = y$;

4) *tranzitivna* ako za sve $x, y, z \in A$, iz $x\rho y$ i $y\rho z$ sledi $x\rho z$.

Definicija 1.1.16. Refleksivnu i tranzitivnu relaciju ρ na skupu A nazivamo *pre-uređenje.* Dodatno, ako je pre-uređenje ρ još i

1) antisimetrično, tada se ono naziva *parcijalno uređenje* (odnosno *relacija poretka*);

2) simetrično, tada se ono naziva *relacija ekvivalencije.*

S obzirom da se u samim definicijama majorizacionih relacija pre svega vrši preraspodela elemenata posmatranih vektora x i y u rastući ili opadajući poredak, sledi da originalni poredak elemenata ovih vektora nije od prevelike važnosti. Iz tog razloga za proizvoljne vektore x, y koji imaju istu rastuću (ili opadajuću) preraspodelu elemenata $x^{\downarrow} = y^{\downarrow}$ (ili $x^{\uparrow} = y^{\uparrow}$) uvek važi $x = Py$, za neku permutacionu matricu P, što povlači da važe majorizacione relacije $x \prec y$, $x \prec_w y$ i $x \prec^{ws} y$. Specijalno, sledi da su posmatrane majorizacione relacije refleksivne. Nije teško zaključiti da su ove relacije takođe i tranzitivne, dakle $\prec$, $\prec_w$ i $\prec^{ws}$ su pre-uređenja.

Neka su dva izabrana vektora x i y međusobno majorizovana nekom od posmatrane tri majorizacione relacije, tj. važi $x \prec y$ i $y \prec x$ ili $x \prec_w y$ i $y \prec_w x$ ili $x \prec^{ws} y$ i $y \prec^{ws} x$. U tom slučaju se zna da su preraspodele $x^{\downarrow}$ i $y^{\downarrow}$, (kao i preraspodele $x^{\uparrow}$ i $y^{\uparrow}$) međusobno jednake, drugim rečima vektori x i y se razlikuju do na permutaciju svojih elemenata, tj. postoji permutaciona matrica P tako da je

$$x = Py. \tag{1.1}$$

Dakle, striktno govoreći, posmatrane majorizacije nisu parcijalna uređenja, jer nije ostvarena jednakost $x = y$ kao u definiciji antisimetričnosti, već samo oslabljena jednakost (1.1). Ukoliko izvršimo restrikciju vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ samo na pozitivan konus $\mathcal{D} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n\}$ tada su relacije $\prec$ i $\prec_w$ parcijalna uređenja na $\mathcal{D}$. Slično, na skupu $\mathcal{G} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}$ relacija $\prec^{ws}$ je parcijano uređenje. Ukoliko uvedemo relaciju ekvivalencije $\sim$ na sledeći način: $x \sim y$ ako je $x = Py$ za neku permutacionu matricu P, i uočimo faktor skup $\mathbb{R}^n_{/\sim}$, tada su majorizacione relacije antisimetrične na posmatranom faktor skupu $\mathbb{R}^n_{/\sim}$, tj. u tom slučaju se one mogu posmatrati kao parcijalna uređenja na $\mathbb{R}^n_{/\sim}$.

U ovoj disertaciji će biti pokazano da se na sličan način uopštene majorizacione relacije na diskretnim Lebegovim prostorima mogu posmatrati kao parcijalna uređenja, ukoliko se poistovete sve funkcije koje su jednake do na permutaciju kada je u pitanju standardna majorizacija i slaba supermajorizacija ili do na parcijalnu permutaciju kada je u pitanju slaba majorizacija.

Linearna očuvanja majorizacionih relacija

Sada ćemo uvesti pojam linearnog očuvanja proizvoljne relacije ρ.

Definicija 1.1.17. Neka je data relacija ρ definisana na linearnom vektorskom prostoru $\mathcal{V}$. Linearan ograničen operator $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ je *linearno očuvanje* relacije ρ ako važi da

$$x \rho y \text{ povlači } (Ax)\,\rho\,(Ay).$$

U nastavku biće okarakterisani linearni ograničeni operatori na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ koji čuvaju neku od majorizacionih relacija. Na primer, linearno očuvanje standardne majorizacije se može definisati kao ograničen linearan operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ za koji važi da relacija

$$x \prec y \text{ povlači } (Ax) \prec (Ay).$$

Na sličan način se uvode i linearna očuvanja slabih majorizacija. Naredni rezultat je prikazan u radu [1], a može se naći i u monografijama [22, 77].

Teorema 1.1.18. *[1, Propozicija 2.7] Ograničen linearan operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je linearno očuvanje majorizacione relacije ($\prec$) ako i samo ako je jedan od narednih uslova ispunjen, za svako $x \in \mathbb{R}^n$:*

1) $T(x) = tr(x)a$, za neki vektor $a \in \mathbb{R}^n$;

2) $T(x) = \beta P(x) + \gamma\, tr(x)e$, za neke $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ i za neku permutaciju $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Ograničen linearan operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je *pozitivan* ako matrica ovog operatora sadrži sve pozitivne elemente, u odnosu na standardnu bazu u $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.19. *[30, Propozicija 2.1] Ako pozitivan ograničen linearan operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ čuva majorizacionu relaciju ($\prec$) na prostoru $\mathbb{R}^n$, tada T čuva slabu majorizacionu relaciju ($\prec_w$).*

Teorema 1.1.20. *[30, Teorema 2.2] Neka je $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ograničen linearan operator. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) operator T čuva majorizacionu relaciju ($\prec$);

2) Ako je $x \prec y$ i $y \prec x$, za neke $x, y \in \mathbb{R}^n$, tada je $Tx \prec Ty$ i $Ty \prec Tx$.

Teorema 1.1.21. *[74] Neka je $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ poztitivan ograničen linearan operator. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) operator T čuva majorizacionu relaciju ($\prec$);

2) operator T čuva slabu majorizacionu relaciju ($\prec_w$);

3) Ako je $x \prec y$ i $y \prec x$, za neke vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$, tada je $Tx \prec Ty$ i $Ty \prec Tx$.

Dokaz. Stavke 1) i 3) su ekvivalentne na osnovu Teoreme 1.1.20. Stavka 1) povlači 2) na osnovu Teoreme 1.1.19. Da bismo pokazali da 2) povlači 3), neka važi $x \prec y$ i $y \prec x$. Sledi, $Tx \prec_w Ty$ i $Ty \prec_w Tx$, pa važi $Tx = PTy$, za neku permutaciju P, na osnovu (1.1). Jasno, $Tx \prec Ty$ i $Ty \prec Tx$. □

Teorema 1.1.22. *[74] Neka je $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pozitivan ograničen linearan operator. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) operator T čuva majorizacionu relaciju ($\prec$);

2) operator T čuva slabu supermajorizacionu relaciju ($\prec^{ws}$);

3) Ako je $x \prec y$ i $y \prec x$, za neke vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$, tada je $Tx \prec Ty$ i $Ty \prec Tx$.

Dokaz. Pretpostavimo da važi 1) i neka je $x \prec^{ws} y$. Na osnovu Teoreme [77, Proposition I.5.A.9.a.], postoji pozitivan vektor $u \in \mathbb{R}^n$ za koji je zadovoljeno $u \leqslant x$ i $u \prec y$. Sledi $Tu \prec Ty$, i s obzirom da je $x-u \geqslant 0$ osobina pozitivnosti operatora T povlači $T(x-u) \geqslant 0$, to jest $Tu \leqslant Tx$. Dakle, $Tx \prec^{ws} Ty$ na osnovu iste teoreme, pa je operator T očuvanje slabe supermajorizacije na $\mathbb{R}^n$.

Pretpostavimo sada da važi 2). Pokazaćemo da operator T zadovoljava uslov 3). Neka važi $x \prec y$ i $y \prec x$, to jest neka se vektori x i y razlikuju do na permutaciju. Jasno, sledi $x \prec^{ws} y$ i $y \prec^{ws} x$. Po definiciji operatora T je $Tx \prec^{ws} Ty$ i $Ty \prec^{ws} Tx$. Sada, vektori Tx i Ty se razlikuju do na permutaciju, na osnovu (1.1), što povlači da je $Tx \prec Ty$ i $Ty \prec Tx$.

Stavka 3) povlači 1) na osnovu Teoreme 1.1.20. □

Na osnovu prethodnih teorema, može se izvesti zaključak da pozitivni ograničeni linearni operatori koji čuvaju neku od tri majorizacije, moraju čuvati i ostale dve. Ovaj rezultat je dokazan i u radu [43] korišćenjem drugačijih metoda.

Posledica 1.1.23. *[43] Neka je dat pozitivan linearan operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) operator T čuva majorizacionu relaciju ($\prec$);

2) operator T čuva slabu majorizacionu relaciju ($\prec_w$);

3) operator T čuva slabu supermajorizacionu relaciju ($\prec^{ws}$).

Jedan od ciljeva ove disertacije je i uopštenje prethodne posledice za majorizacione relacije na diskretnim Lebegovim prostorima.

Sada se može prikazati i oblik pozitivnog operatora koji čuva slabu majorizaciju i slabu supermajorizaciju.

Teorema 1.1.24. *[74] Pozitivan ograničen linearan operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je linearno očuvanje slabe majorizacione relacije ($\prec_w$) ako i samo ako je jedan od narednih uslova ispunjen za svako $x \in \mathbb{R}^n$:*

1) $T(x) = tr(x)a$, za neki vektor $a \in \mathbb{R}^n$;

2) $T(x) = \beta P(x) + \gamma\, tr(x)e$, za neke $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ i za neku permutaciju $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.25. *[74] Pozitivan ograničen linearan operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je linearno očuvanje slabe supermajorizacione relacije ($\prec^{ws}$) ako i samo ako je jedan od narednih uslova ispunjen za svako $x \in \mathbb{R}^n$:*

1) $T(x) = tr(x)a$, za neki vektor $a \in \mathbb{R}^n$;

2) $T(x) = \beta P(x) + \gamma\, tr(x)e$, za neke $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ i za neku permutaciju $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

U narednim poglavljima biće predstavljen oblik linearnih očuvanja slabih majorizacija ($\prec_w$) i ($\prec^{ws}$) na beskonačno-dimenzionalnim diskretnim Lebegovim prostorima. U nekom smislu ti rezultati se mogu posmatrati kao generalizacija prethodnih Posledica 1.1.24 i 1.1.25.

Matrična majorizacija

Šerman [99] je uveo prvu majorizacionu relaciju na skupu dvostruko stohastičkih matrica, koja predstavlja pre-uređenje. Naime, matrica D_1 je majorizovana matricom D_2, i to označavamo sa

$$D_1 \lhd D_2 \tag{1.2}$$

ako postoji dvostruko stohastička matrica D_3 tako da je

$$D_1 = D_3 D_2.$$

Lako se može videti da $D_1 \lhd D_2$ povlači standardnu majorizaciju $D_1 x \prec D_2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Kakutani je postavio hipotezu da je suprotan smer prethodne činjenice takođe tačan (videti [77], strana 70).

Kakutanijeva hipoteza

Ako za svako $x \in \mathbb{R}^n$ važi standardna majorizacija $D_1 x \prec D_2 x$, tada važi matrična majorizacija $D_1 \lhd D_2$.

U radu Šermana [99], pokazano je da ako je dvostruko stohastička matrica D_2 invertibilna, tada je Kakutanijeva hipoteza tačna. Horn je pronašao kontra primer Kakutanijeve pretpostavke u radu [100] i pokazao da se invertibilnost operatora D_2 ne može izostaviti. Koristeći sasvim drugačiju tehniku dokaza, Šraiber [98] je potvrdio ovaj rezultat.

U Glavi 2 biće proširen pojam matrične majorizacije (1.2) na skup dvostruko stohastičkih operatora na $\ell^p(I)$ i biće pokazano da je Kakutanijeva hipoteza tačna ukoliko je D_2^{-1} stohastički operator po vrstama.

1.2 Diskretni Lebegovi prostori, stohastički operatori i majorizacija

U ovoj disertaciji posmatraćemo realne funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ definisane na nekom prizvoljno izabranom nepraznom skupu I. Kada je skup I konačan, tada se pomenute funkcije mogu poistovetiti sa realnim vektorima iz konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Konačno-dimenzionalna teorija majorizacije je detaljno izučavana u prošlosti, a neki rezultati su prikazani u prethodnom delu. U slučaju kada je I skup prirodnih brojeva $I = \mathbb{N}$, (ili opštije kada je I proizvoljan prebrojivo beskonačan skup) tada realne funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ predstavljaju realne nizove. Takođe, biće razmatran i slučaj kada je skup I neprebrojivo beskonačan. Rezultati u ovoj disertaciji će se u mnogome odnositi na poslednja dva slučaja, kada je skup I beskonačan.

Definicija 1.2.1. Neka je I proizvoljan neprazan skup. Realna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je *sumabilna* ako postoji realan broj σ tako da za svako $\epsilon > 0$ postoji konačan skup $J_0 \subseteq I$ tako da važi

$$\left|\sigma - \sum_{j \in J} f(j)\right| \leqslant \epsilon$$

za svaki konačan skup J koji zadovoljava uslov $J_0 \subseteq J$. U tom slučaju broj σ nazivamo *suma* funkcije f i označavamo sa $\sigma = \sum\limits_{i \in I} f(i)$.

Za fiksirano $p \in [1, \infty)$, posmatraćemo normiran vektorski prostor svih realnih funkcija $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju uslov

$$\sum_{i \in I} |f(i)|^p < \infty,$$

i označavaćemo ovaj prostor sa $\ell^p(I)$. Ovaj vektorski prostor je opremljen standardnom *p-normom*

$$\|f\|_p := \left(\sum_{i \in I} |f(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

i predstavlja Banahov prostor za svako $p \in [1, \infty)$. Sa jedne strane ovi Banahovi prostori predstavljaju prirodno uopštenje Lebegovih prostora nizova (ℓ^p nizova), dok sa druge strane se mogu posmatrati kao specijalan slučaj Lebegovih prostora $\mathcal{L}^p(I, \mu)$ koji sadrže merljive funkcije koje zadovoljavaju uslov

$$\int_I |f|^p d\mu < \infty$$

kada se posmatra konkretna mera prebrojavanja μ. Iz tog razloga, prostori $\ell^p(I)$ se nazivaju *diskretni Lebegovi prostori.*

U nekoliko navrata biće pomenut Banahov prostor svih ograničenih funkcija oblika $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, to jest svih funkcija koje zadovoljavaju $\sup_{i \in I} |f(i)| < \infty$. Ovaj prostor je opremljen *supremum normom*

$$\|f\|_\infty := \sup_{i \in I} |f(i)|,$$

i označavaćemo ga $\ell^\infty(I)$. Ovaj prostor može biti posmatran kao dualni prostor prostora $\ell^1(I)$, i uvedeni pojmovi stohastičkih operatora i majorizacionih relacija na ovom prostoru biće ispitivani isključivo u korist istraživanja pomenutih pojmova na prostorima $\ell^p(I)$.

Na osnovu sumabilnosti funkcija iz diskretnih Lebegovih prostora $\ell^p(I)$, kada je $p \in [1,\infty)$, nije teško zaključiti da svaka funkcija mora imati najviše prebrojiv nosač, to jest, skup $\{i \in I \mid f(i) \neq 0\}$ mora biti najviše prebrojivo beskonačan. Iako Banahovi prostori $\ell^p(I)$ nemaju Šauderovu bazu i nisu separabilni, zbog kardinalnosti nosača se za svaku funkciju $f \in \ell^p(I)$ može pronaći prebrojiv podskup $Q \subset I$ da važi

$$f = \sum_{i \in Q} f(i) e_i,$$

pri čemu su funkcije $e_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane uz pomoć Kronekerove delta funkcije $e_i(j) := \delta_{ij}$, $i, j \in I$. Dakle, može se razumeti da proizvoljna funkcija f ima reprezentaciju

$$f = \sum_{i \in I} f(i) e_i.$$

Neka je $p \in (1,\infty)$. Realan broj q se naziva *konjugovani (dualni) eksponent* broja p ako važi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Očigledno mora biti $q \in (1,\infty)$. Uzima se da su 1 i ∞ dualni eksponenti jedan drugome.

Neka je proizvoljno izabran realan broj $p \in [1,\infty)$, i neka je q dualni eksponent od p. Posmatraćemo bilinearno preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^p(I) \times \ell^q(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, definisano na sledeći način

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i \in I} f(i) g(i)$$

za proizvoljne dve funkcije $f \in \ell^p(I)$ i $g \in \ell^q(I)$. Ovo preslikavanje ćemo nazivati *dualno uparivanje*. Tada za fiksiranu funkciju $g \in \ell^q(I)$ preslikavanje

$$f \mapsto \sum_{i \in I} f(i) g(i)$$

definiše ograničen linearan funkcional q^* na prostoru diskretnih Lebegovih funkcija $\ell^p(I)$, čija je norma u Banahovom prostoru svih funkcionala na $\ell^p(I)$ (označavaćemo ovaj prostor sa $\ell^p(I)^*$) jednaka normi funkcije $g \in \ell^q(I)$. Štaviše, može se definisati izometrički izomorfizam $q \mapsto q^*$ između prostora $\ell^q(I)$ i $\ell^p(I)^*$ pa se dualni Banahov prostor $\ell^p(I)^*$ može poistovetiti sa prostorom $\ell^q(I)$. Ovaj rezultat je opšte poznat u literaturi. Kada je $p = 2$ tada je i dualni eksponent $q = 2$, pa dualno uparivanje za dva prostora $\ell^2(I)$ ima osobine skalarnog proizvoda. U odnosu na ovaj skalarni proizvod, Banahov prostor $\ell^2(I)$ je Hilbertov prostor. Ovaj specijalan slučaj, kada je $p = 2$, neće posebno biti ispitivan u ovoj disertaciji. Prirodno je očekivati da će osobine uopštenih majorizacionih relacija na Hilbertovom prostoru $\ell^2(I)$ biti još "bliže" odgovarajućim osobinama konačno-dimenzionalne majorizacije, i ova tematika će biti predmet istraživanja autora u budućnosti.

Za proizvoljno izabrano $i \in I$, funkcija e_i očigledno pripada prostoru $\ell^p(I)$, za svako $p \in [1,\infty]$. Zato se za svaku funkciju $\ell^p(I)$, $p \in [1,\infty)$ mogu dualno upariti funkcije f i e_i (pri čemu funkciju e_i posmatramo kao element dualnog prostora $\ell^p(I)^*$) i dobija se

$\langle f, e_i\rangle = \sum\limits_{j\in I} f(j)e_i(j) = f(i)e_i(i) = f(i)$, pa zamenom u reprezentaciju funkcije f dobija se

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, e_i\rangle e_i.$$

Skup svih pozitivnih funkcija (sa pozitivnim vrednostima u slici) je

$$\ell^p(I)^+ := \{f \in \ell^p(I) \mid f(i) \geqslant 0, \forall i \in I\}.$$

Prostor $\ell^p(I)$ je *uređen Banahov prostor (Banahova rešetka)* sa prirodnim parcijalnim uređenjem definisanim na realnim funkcijama iz I u $\mathbb{R}$ na sledeći način:

$$f \leqslant g \text{ ako važi } f(j) \leqslant g(j), \forall j \in I \ \ (\text{ tj. } (g - f) \in \ell^p(I)^+).$$

Operator $A : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$, $p \in [1, \infty)$ je *pozitivan (čuva pozitivnost)*, ako važi $Ag \in \ell^p(I)^+$ za svaku pozitivnu funkciju $g \in \ell^p(J)^+$. Neka je na dalje q dualni eksponent od $p \in [1, \infty)$. Operator $A^* : \ell^q(I) \longrightarrow \ell^q(J)$ je *adjungovani operator* operatora $A : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$, $p \in [1, \infty)$, ako važi $\langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle$, $\forall f \in \ell^p(J)$, $\forall g \in \ell^q(I)$.

Niz funkcija $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k \in \ell^p(I)$ konvergira ka funkciji $f \in \ell^p(I)$ u *slaboj topologiji* Banahovog prostora $\ell^p(I)$, ako važi

$$\lim_{k\to\infty}\langle f_k, g\rangle = \langle f, g\rangle, \ \ \forall g \in \ell^q(I).$$

Naredne definicije stohastičkih operatora, majorizacije i linearnih očuvanja majorizacije su uveli u radovima [13, 14] Behrami, Bajati i Manjegani, na prostorima $\ell^p(I)$, kada je $p \in [1, \infty)$ ali i na prostoru ograničenih nizova ℓ^∞.

Definicija 1.2.2. [13, Definicija 2.1.] Neka je $p \in [1, \infty)$, i pretpostavimo da je $A : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator, pri čemu su I i J dva neprazna skupa. Operator A se naziva:

1) *stohastički po vrstama*, ako je operator A pozitivan, i važi $\forall i \in I$, $\sum\limits_{j\in J}\langle Ae_j, e_i\rangle = 1$;

2) *stohastički po kolonama*, ako je operator A pozitivan, i važi $\forall j \in J$, $\sum\limits_{i\in I}\langle Ae_j, e_i\rangle = 1$;

3) *dvostruko stohastički*, ako je operator A stohastički po vrstama i stohastički po kolonama;

4) *permutacija*, ako postoji bijekcija $\theta : J \longrightarrow I$ za koju važi $Ae_j = e_{\theta(j)}$, za svako $j \in J$.

U narednom tvđenju je pokazano da je operator dvostruko stohastički ako i samo ako su skupovi I i J iz prethodne definicije iste kardinalnosti, tj. ako postoji bijekcija između skupova I i J. Iz tog razloga je dovoljno posmatrati samo dvostruko stohastičke operatore definisane na $\ell^p(I)$.

Teorema 1.2.3. *[13, Teorema 2.2] Neka su I i J dva proizvoljno izabrana neprazna skupa i $p \in [1, \infty)$. Tada postoji dvostruko stohastički operator $D : \ell^p(J) \to \ell^p(I)$ ako i samo ako je $card(I) = card(J)$.*

Skup svih stohastičkih operatora po vrstama, stohastičkih po kolonama, dvostruko stohastičkih operatora i permutacija na prostoru $\ell^p(I)$, označavaćemo respektivno sa $RS(\ell^p(I))$, $CS(\ell^p(I))$, $DS(\ell^p(I))$ i $P(\ell^p(I))$.

Definicija 1.2.4. [13, Definicija 3.1.] Neka je $p \in [1, \infty)$. Za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)$, funkcija f je *majorizovana* funkcijom g, i to označavamo sa $f \prec g$, ako postoji dvostruko stohastički operator $D \in DS(\ell^p(I))$ tako da je $f = Dg$.

U narednim definicijama biće $I = \mathbb{N}$, pa ćemo kraće umesto $\ell^p(\mathbb{N})$ pisati ℓ^p.

Definicija 1.2.5. [14, Definicija 2.1.] Neka je $A : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ ograničen linearan operator. Operator A se naziva *dvostruko stohastički* ako postoji dvostruko stohastički operator $A_0 \in DS(\ell^1)$ tako da je $A = A_0^*$.

Definicija 1.2.6. [14, Definicija 2.4.] Za dve funkcije $f, g \in \ell^\infty$, funkcija f je *majorizovana* funkcijom g, i to označavamo sa $f \prec g$, ako postoji dvostruko stohastički operator $D \in DS(\ell^\infty)$ tako da je $f = Dg$.

U prethodnom delu smo definisali pojam linearnog očuvanja neke relacije. Sada ćemo tu definiciju prilagoditi konkretnoj relaciji majorizacije.

Definicija 1.2.7. Ograničen linearan operator $T : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ se naziva *linearno očuvanje* majorizacione relacije na prostoru $\ell^p(I)$, ako za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)$, majorizacija $f \prec g$ povlači majorizaciju $Tf \prec Tg$.

Skup svih linearnih očuvanja majorizacije označavaćemo sa $\mathcal{M}_{pr}(\ell^p(I))$.

Sada, predstavljamo neke rezultate prikazane u radovima [13,14] na koje ćemo se često pozivati u ovoj disertaciji, bilo zbog povezanosti sa konkretnim rezultatima ove disertacije, bilo zbog direktne primene u dokazima tvrđenja koja slede.

Lema 1.2.8. [13, Lema 2.3.] *Neka je $p \in [1, \infty)$. Pretpostavimo da je $A : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ pozitivan ograničen linearan operator. Tada je*

1) Operator A stohastički po vrstama ako i samo ako važi

$$\forall f \in \ell^1(I), \quad \sum_{j \in I} \langle Ae_j, f \rangle = \sum_{i \in I} f(i);$$

2) Operator A stohastički po kolonama ako i samo ako važi

$$\forall f \in \ell^1(I), \quad \sum_{i \in I} \langle Af, e_i \rangle = \sum_{i \in I} f(i).$$

Lema 1.2.9. [13, Lema 2.5] *Norma dvostruko stohastičkog operatora je manja ili jednaka od* 1.

Na osnovu definicije dvostruko stohastičkog operatora, vidi se da je kod ovih operatora suma svih elemenata u proizvoljnoj "vrsti" ili u proizvoljnoj "koloni" uvek jednaka jedan. Postavlja se pitanje da li se proizvoljna familija $\{a_{ij} \mid i,j \in I\}$ pozitivnih brojeva, ukoliko zadovoljava uslov da je suma svih elemenata u proizvoljnoj "vrsti" ili u proizvoljnoj "koloni" jednaka jedan, može posmatrati kao dvostruko stohastički (matrični) operator? Potvrdan odgovor na ovo pitanje daje naredna teorema.

Teorema 1.2.10. *[13, Propozicija 2.6] Neka je $p \in [1,\infty)$, i neka je $\{a_{ij} \mid i,j \in I\}$ familija pozitivnih realnih brojeva za koju važi*

$$(\forall j \in I) \ \sum_{i\in I} a_{ij} = 1, \quad i \quad (\forall i \in I) \ \sum_{j\in J} a_{ij} = 1,$$

pri čemu je I proizvoljno izabran neprazan skup. Tada postoji jedinstveno određen dvostruko stohastički operator $A \in DS(\ell^p(I))$ takav da je

$$(\forall i \in I) \ (\forall j \in I) \ \langle Ae_j, e_i\rangle = a_{ij}.$$

Kao uopštenje prethodnog rezultata, dovoljni uslovi da se proizvoljna familija može posmatrati kao ograničen linearan operator, definisan kao matrični operator, biće prikazani u poslednjoj glavi ove disertacije.

Teorema 1.2.11. [13, Teorema 2.4.] *Neka je $p \in [1,\infty)$. Ako operatori A i B pripadaju skupu $RS(\ell^p(I))$, tada operator $AB \in RS(\ell^p(I))$, to jest, skup $RS(\ell^p(I))$ je zatvoren za kompoziciju. Isti zaključak se može izvesti i za skupove $CS(\ell^p(I))$ i $DS(\ell^p(I))$.*

Teorema 1.2.12. [13, Teorema 3.5.] *Za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)$, $p \in [1,\infty)$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $f \prec g$ i $g \prec f$;

2) Postoji permutacija $P \in P(\ell^p(I))$ tako da je $f = Pg$.

Teorema 1.2.13. [13, Teorema 4.9.] Neka je I beskonačan skup i $p \in (1,\infty)$. Za ograničen linearan operator T na prostoru $\ell^p(I)$, sledeći uslovi su ekvivalentini:

1) $T \in \mathcal{M}_{pr}(\ell^p(I))$;

2) Za sve $j_1, j_2 \in I$ sledi da je $Te_{j_1} \prec Te_{j_2}$ i $Te_{j_2} \prec Te_{j_1}$, i za svako $i \in I$ postoji najviše jedno $j \in I$ tako da je $\langle Te_j, e_i\rangle \neq 0$;

3) $T = \sum_{i\in I_0} \alpha_i P_{\sigma_i}$, gde je I_0 prebrojiv podskup skupa I, $(\alpha_i)_{i\in I_0}$ je funkcija iz $\ell^p(I_0)$ i $\{\sigma_i : I \to I \mid i \in I_0\}$ je familija koju čine jedan-jedan funkcije tako da za sve $i_1, i_2 \in I_0$, $i_1 \neq i_2$ važi $\sigma_{i_1}(I) \cap \sigma_{i_2}(I) = \varnothing$.

Teorema 1.2.14. [13, Propozicija 5.9] *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ ograničen linearan operator, gde je I beskonačan skup. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $T \in \mathcal{M}_{pr}(\ell^1(I))$;

2) Postoje operatori $T_1 \in \mathcal{M}^1_{pr}(\ell^1(I))$ i $T_2 \in \mathcal{M}^2_{pr}(\ell^1(I))$ i disjunktni skupovi $I_1, I_2 \subset I$, $I_1 \cup I_2 = I$ tako da je $T = T_1 + T_2$ pri čemu su operatori T_1, T_2 određeni na sledeći način:

$$\langle T_1 f, e_{i_2}\rangle = \langle T_2 f, e_{i_1}\rangle = 0, \quad \forall f \in \ell^1(I), \quad \forall i_1 \in I_1, \quad \forall i_2 \in I_2;$$

3) Postoji najviše prebrojiv skup $I_0 \subset I$ i postoji familija

$$\Theta := \{\theta_i : I \xrightarrow{1-1} I \mid i \in I_0, \;\; \theta_i(I) \cap \theta_j(I) = \varnothing, \;\; i \neq j\}$$

koja sadrži jedan-jedan funkcije sa međusobno disjunktnim slikama $\theta_k \in \Theta$, $\forall k \in I_0$, i postoji funkcija $(\lambda_i)_{i \in I_0} \in \ell^1(I_0)$ tako da je

$$T = \sum_{k \in I_0} \lambda_k P_{\theta_k} + T_h,$$

gde je $T_h(f) := h \sum\limits_{k \in I_0} f(k)$, za funkciju $h \in \ell^1(I)$ za koju je $\langle h, e_j\rangle = 0$, za svako $j \in \theta_i(I)$ i za svako $i \in I_0$;

4) $Te_j \prec Te_k$ i $Te_k \prec Te_j$, $\forall k, j \in I$, i za svako $i \in I$, ili postoji tačno jedno $j \in I$ za koje je $\langle Te_j, e_i\rangle \neq 0$ ili je skup $\{\langle Te_j, e_i\rangle \mid j \in I\}$ jednoelementni.

Glava 2

Standardna majorizacija i stohastički operatori na diskretnim Lebegovim prostorima

U prvom delu Glave 2, biće uspostavljena bliska veza između standardne majorizacije i dvostruko stohastičkih operatora, kao nastavak istraživanja započetog u radu [13]. Naime, na osnovu rezultata iz uvodnog dela, lako se može zaključiti da je uopštena relacija standardne majorizacije na Banahovom prostoru $\ell^p(I)$ pre-uređenje, a ukoliko se poistovete sve funkcije koje se razlikuju do na permutaciju, tada se majorizaciona relacija može posmatrati kao parcijalno uređenje.

Lema 2.0.15. *Majorizacijona relacija "$\prec$" iz Definicije* 1.2.4*, kada je $p \in [1, \infty)$, je refleksivna i tranzitivna relacija tj. "$\prec$" je pre-uređenje. Specijalno, ako poistovetimo sve funkcije iz prostora $\ell^p(I)$ koje se razlikuju do na permutaciju tada možemo posmatrati majorizacionu relaciju kao parcijalno uređenje.*

Dokaz. Za proizvoljno $f \in \ell^p(I)$, $f = \mathcal{I}f$ povlači $f \prec f$, jer je jedinični operator $\mathcal{I}$ dvostruko stohastički, pa sledi da je "$\prec$" refleksivna relacija.

Tranzitivnost sledi na osnovu Teoreme 1.2.11. Preciznije, ako je $f \prec g$ i $g \prec h$ tada postoje $A, B \in DS(\ell^p(I))$ tako da je $f = Ag$, $g = Bh$ pa je $f = ABh$. Pošto znamo da je skup $DS(\ell^p(I))$ zatvoren za kompoziciju, stoga važi $f \prec h$.

Ukoliko poistovetimo sve funkcije koje se razlikuju do na permutaciju, tada sledi po Teoremi 1.2.12 da je "$\prec$" antisimetrična relacija. □

2.1 Osobine stohastičkih operatora i majorizacije

U narednim definicijama biće uvedeni pojmovi stohastičkih operatora po vrstama i po kolonama kao i pojam dvostruko stohastičkog operatora na prostoru $\ell^\infty(I)$, i biće proširen pojam relacije majorizacije na funkcijama iz posmatranog prostora.

Definicija 2.1.1. Neka je $A : \ell^\infty(I) \longrightarrow \ell^\infty(I)$ ograničen linearan operator. Operator A je

1) *stohastički po vrstama*, ako postoji stohastički operator po kolonama $A_0 \in CS(\ell^1(I))$ takav da je $A = A_0^*$.

2) *stohastički po kolonama*, ako postoji stohastički operator po vrstama $A_0 \in RS(\ell^1(I))$ takav da je $A = A_0^*$.

3) *dvostruko stohastički*, ako postoji dvostruko stohastički operator $A_0 \in DS(\ell^1(I))$ takav da je $A = A_0^*$.

Kao što znamo, $A = A_0^*$ ako za svake dve funkcije $f \in \ell^\infty(I)$ i $g \in \ell^1(I)$ je

$$\langle g, Af \rangle = \langle A_0 g, f \rangle,$$

pri čemu sa

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^1(I) \times \ell^\infty(I) \longrightarrow \mathbb{R}$$

označavamo dualno uparivanje prostora $\ell^1(I)$ sa svojim dualnim prostorom $\ell^\infty(I)$.

Na dalje ćemo stohastičke operatore po vrstama, po kolonama, kao i dvostruko stohastičke operatore na $\ell^\infty(I)$ označavati respektivno, sa $RS(\ell^\infty(I))$, $CS(\ell^\infty(I))$ i $DS(\ell^\infty(I))$. U sledećoj teoremi pokazaćemo se da su svi gore uvedeni skupovi stohastičkih operatora konveksni.

Teorema 2.1.2. *Neka je $p \in [1, \infty]$. Tada su $RS(\ell^p(I))$, $CS(\ell^p(I))$ i $DS(\ell^p(I))$ konveksni skupovi.*

Dokaz. Pokazaćemo da je $RS(\ell^p(I))$ konveksan skup, to jest da je proizvoljna konveksna kombinacija dva operatora $A, C \in RS(\ell^p(I))$ takođe dvostruko stohastički operator po vrstama. Dakle treba pokazati da je $B := tA + (1-t)C \in RS(\ell^p(I))$ za svako $t \in [0, 1]$. Za $t = 0$ ili $t = 1$, $B \in RS(\ell^p(I))$ očigledno. Nek je sada $t \in (0, 1)$. Lako zaključujemo da je B ograničen linearan operator na $\ell^p(I)$.

Prvo, neka je $p \in [1, \infty)$. Kako su A i C pozitivni operatori, to jest, $f \geqslant 0$ povlači $Af \geqslant 0$ i $Cf \geqslant 0$, za svako $f \in \ell^p(I)$, može se zaključiti da je B takođe pozitivan operator na osnovu njegove definicije. Sada se za proizvoljno $i \in I$ dobija

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I} \langle Be_j, e_i \rangle &= \sum_{j\in I} \langle (tA + (1-t)C)e_j, e_i \rangle \\ &= t\sum_{j\in I} \langle Ae_j, e_i \rangle + (1-t)\sum_{j\in I} \langle Ce_j, e_i \rangle = 1\end{aligned} \tag{2.1}$$

jer su A i C stohastički po vrstama, stoga je i operator B stohastički po vrstama, dakle $RS(\ell^p(I))$ je konveksan skup.

Okrećemo se slučaju $p = \infty$. Postoje operatori $A_0, C_0 \in CS(\ell^1(I))$ takvi da je $A = A_0^*$ i $C = C_0^*$, po Definiciji 2.1.1. Na osnovu ovih činjenica, na sličan način kao u (2.1) dobija se

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I} \langle Be_j, e_i \rangle &= t\sum_{j\in I} \langle A_0^* e_j, e_i \rangle + (1-t)\sum_{j\in I} \langle C_0^* e_j, e_i \rangle \\ &= t\sum_{j\in I} \langle e_j, A_0 e_i \rangle + (1-t)\sum_{j\in I} \langle e_j, C_0 e_i \rangle = 1,\end{aligned}$$

pa je $RS(\ell^\infty(I))$ konveksan skup.

N sličan način možemo zaključiti da ako $A, C \in CS(\ell^p(I))$, $p \in [1, \infty]$, tada je $B \in CS(\ell^p(I))$ pa je i $CS(\ell^p(I))$ konveksan skup. Slično, sledi da je skup $DS(\ell^p(I))$ takođe konveksan. $\square$

Teorema 2.1.3. *Skup $RS(\ell^\infty(I))$ je zatvoren za kompoziciju, tj. ako je $A, B \in RS(\ell^\infty(I))$, tada je $AB \in RS(\ell^\infty(I))$. Isti zaključak važi i za skupove $CS(\ell^\infty(I))$ i $DS(\ell^\infty(I))$.*

Dokaz. Neka je $A, B \in RS(\ell^\infty(I))$. Postoje operatori $A_0, B_0 \in CS(\ell^1(I))$ takvi da je $A = A_0^*$ i $B = B_0^*$ na osnovu Definicije 2.1.1. Sledi da je

$$\sum_{j\in I}\langle ABe_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I}\langle A_0^* B_0^* e_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I}\langle B_0^* e_j, A_0 e_i\rangle = \sum_{j\in I}\langle e_j, B_0 A_0 e_i\rangle = 1$$

jer je operator $B_0 A_0 \in CS(\ell^1(I))$ po Teoremi 1.2.11. Ostatak teoreme se dokazuje na sličan način. $\square$

Definicija 2.1.4. Neka su date funkcije $f, g \in \ell^\infty(I)$. Funkcija f je *majorizovana* funkcijom g, ako postoji dvostruko stohastički operator $D \in DS(\ell^\infty(I))$ takav da je $f = Dg$, i to označavamo sa $f \prec g$.

Lema 2.1.5. *Majorizaciona relacija "$\prec$" uvedena u Definiciji 2.1.4, je refleksivna i tranzitivna relacija tj. "$\prec$" je pre-uređenje.*

Dokaz. Refleksivnost je očigledna. Tranzitivnost sledi iz Teoreme 2.1.3. $\square$

Ne možemo posmatrati majorizacionu relaciju "$\prec$" na prostoru $\ell^\infty(I)$ kao parcijalno uređenje, jer na osnovu [14, Primer 2.6.] postoje dve funkcije za koje važi $f \prec g$ i $g \prec h$ ali se ne razlikuju do na permutaciju.

Lema 2.1.6. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka je $A : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator. Ako je $A \in DS(\ell^p(I))$ tada je $Af \prec f$, $\forall f \in \ell^p(I)$. Obrnuto, ako je $Af \prec f$, $\forall f \in \ell^p(I)$, tada je $A \in CS(\ell^p(I))$.*

Dokaz. Neka je $A \in DS(\ell^p(I))$. Ako definišemo $D := A$, jasno sledi da je $Af = Df$ i $D \in DS(\ell^p(I))$, stoga $Af \prec f$, $\forall f \in \ell^p(I)$.

S druge strane, neka je $Af \prec f$, $\forall f \in \ell^p(I)$. Prvo dokazujemo da je operator A pozitivan. Pretpostavimo da postoji $0 \leqslant f \in \ell^p(I)$ tako da $Af \geqslant 0$ ne važi. Ako f ima reprezentaciju

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, e_i\rangle e_i,$$

tada je

$$Af = \sum_{i\in I}\langle f, e_i\rangle Ae_i$$

na osnovu neprekidnosti operatora A. Kako je $\langle f, e_i\rangle \geqslant 0$, $\forall i \in I$, to mora da postoji bar jedno $m \in I$, tako da $Ae_m \geqslant 0$ nije zadovoljeno. Međutim, za e_m postoji $D_m \in DS(\ell^p(I))$ tako da je $Ae_m = De_m \geqslant 0$ jer je $e_m \geqslant 0$ i D je pozitivan. Dobili smo kontradikciju, dakle operator A mora biti pozitivan.

Ponovo, neka je $Af \prec f$, $\forall f \in \ell^p(I)$. Sada je $Ae_j \prec e_j$, $\forall j \in I$, i postoje operatori $D_j \in DS(\ell^p(I))$ za koje važi $D_j e_j = Ae_j$, $\forall j \in I$. Neka je $j \in I$ proizvoljno izabran. Tada je

$$\sum_{i\in I}\langle Ae_j, e_i\rangle = \sum_{i\in I}\langle D_j e_j, e_i\rangle = 1,$$

jer je $D_j \in DS(\ell^p(I)) \subset CS(\ell^p(I))$, pa je $A \in CS(\ell^p(I))$. $\square$

U konačno-dimenzionalnom slučaju relacija $Ax \prec x$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$ povlači da matrica A mora biti dvostruko stohastička (Teorema 1.1.10). Međutim, ukoliko pretpostavimo da je I beskonačan skup, tada operator T ne mora biti dvostruko stohastički i ako je zadovoljena relacija $Af \prec f$ za svako $f \in \ell^p(I)$. Na primer, neka je I neprebrojiv skup, i neka je za dato $k \in I$ definisana bijekcija $\omega : I\backslash\{k\} \to I$. Ako je definisan ograničen linearan operator $T : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ na sledeći način:

$$Tf(i) := \begin{cases} f(\omega(i)), & i \neq k \\ 0, & i = k, \end{cases}$$

za svako $f \in \ell^p(I)$, zaključujemo da za svako $f \in \ell^p(I)$ postoji permutacija $P \in P(\ell^p(I))$ tako da je $Tf = Pf$, tj. važi $Tf \prec f$. Međutim, T nije dvostruko stohastički operator jer na osnovu same definicije operatora T je $Te_j(i) = 0$, za svako $j \in I$, to jest

$$\sum_{j\in I}\langle Te_j, e_i\rangle = 0.$$

Sledeća teorema obezbeđuje potrebne i dovoljne uslove da proizvoljan ograničen linearan operator bude dvostruko stohastički.

Teorema 2.1.7. *Neka je $p \in [1,\infty)$ i neka je $A : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator. Važi $A \in DS(\ell^p(I))$ ako i samo ako je $Af \prec f$, $\forall f \in \ell^p(I)$ i $A^*g \prec g$, $\forall g \in \ell^q(I)$, gde je q konjugovani eksponent od p.*

Dokaz. Neka je $A \in DS(\ell^p(I))$, pri čemu je $p \in [1,\infty)$ proizvoljno izabran. Očigledno je $Af \prec f$, $\forall f \in \ell^p(I)$, po Lemi 2.1.6.

Ukoliko je $p \in (1,\infty)$ tada je $\langle A^*e_i, e_j\rangle = \langle Ae_j, e_i\rangle \geqslant 0$, $\forall i,j \in I$, i

$$A^*g = \sum_{i\in I}\langle g, e_i\rangle A^*e_i \geqslant 0,$$

gde je $0 \leqslant g \in \ell^q(I)$. Dakle, operator A^* je pozitivan. Na osnovu definicija adjungovanog i dvostruko stohatičkog operatora lako se vidi da je $A^* \in DS(\ell^q(I))$. Sada je $A^*g \prec g$, $\forall g \in \ell^q(I)$ na osnovu Leme 2.1.6.

Ako je $p = 1$ i $q = \infty$, tada je $A^* \in DS(\ell^\infty(I))$ po Definiciji 2.1.1 dvostruko stohastičkog operatora na prostoru $\ell^\infty(I)$ i činjenice da važi $A \in DS(\ell^1(I))$ po pretpostavci teoreme. Ukoliko stavimo da je $D := A^*$ to je $A^*g = Dg$, $\forall g \in \ell^\infty(I)$, pa je $A^*g \prec g$, $\forall g \in \ell^\infty(I)$, na osnovu Definicije 2.1.4.

Obrnuto, neka je $Af \prec f$, $\forall f \in \ell^p(I)$, $p \in [1,\infty)$, i $A^*g \prec g$, $\forall g \in \ell^q(I)$. Ponovo, na osnovu Leme 2.1.6 je $A \in CS(\ell^p(I))$. Ostaje da se pokaže da je $A \in RS(\ell^p(I))$.

Ako je $p \neq 1$ tada je $q \neq \infty$, stoga je $A^* \in CS(\ell^q(I))$, po Lemi 2.1.6. Štaviše, $\sum\limits_{j\in I}\langle Ae_j, e_i\rangle = \sum\limits_{j\in I}\langle e_j, A^*e_i\rangle = 1$, $\forall i \in I$ pa je $A \in RS(\ell^p(I))$.

Ako je $p = 1$ i $q = \infty$, tada postoje operatori $D_i \in DS(\ell^\infty(I))$ i $B_i \in DS(\ell^1(I))$, $\forall i \in I$, tako da je $D_i e_i = A^* e_i$ i $D_i = B_i^*$, $\forall i \in I$. Stoga je

$$\sum_{j\in I}\langle Ae_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I}\langle e_j, A^*e_i\rangle = \sum_{j\in I}\langle e_j, D_ie_i\rangle = \sum_{j\in I}\langle B_ie_j, e_i\rangle = 1$$

$\forall i \in I$, pa važi $A \in RS(\ell^1(I))$. Dakle, $A \in DS(\ell^p(I))$. □

Posledica 2.1.8. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka je $A : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator. Ako je $A \in DS(\ell^p(I))$ tada je $A^* \in DS(\ell^q(I))$, gde je q konjugovani eksponent od p.*

Dokaz. Sledi direktno iz dokaza Teoreme 2.1.7. □

Posledica 2.1.9. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka je $A : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator. Ako je $Af \prec f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$, tada je $A \in CS(\ell^p(I))$. Ako je dodatno, $A^*f \prec f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$, tada je $A \in DS(\ell^p(I))$.*

Dokaz. Ako analiziramo dokaze Lemme 2.1.6 i Teoreme 2.1.7, lako se proverava da su $Af \prec f$ i $A^*f \prec f$, kada je $f \in \{e_i \mid i \in I\}$, dovoljni uslovi da operator A bude dvostruko stohastički. □

U konačno-dimenzionalnom slučaju kada je $card(I) = n \in \mathbb{N}$ i kada je $p = 2$, dvostruko stohastički operator A postaje dvostruko stohastička matrica $A = [a_{ij}] \in M_n$ i važi $A^* = A^T$. Ako je $Ax \prec x$, za svako $x \in \mathbb{R}^n$, primenom majorizacione relacije na vektor $e = (1, 1, \ldots, 1)$, znamo da je $Ae \prec e$, pa je $Ae = e$ i $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Zbog ove činjenice i Leme 2.1.6, operator A je dvostruko stohastička matrica, pa je i A^* dvostruko stohastička matrica takođe, na osnovu Posledice 2.1.8. Sada, na osnovu Leme 2.1.6 je $A^*x \prec x$, za svako $x \in \mathbb{R}^n$. Dakle, sledeći rezultat sledi kao posledica Teoreme 2.1.7. Naglašavamo da je Teorema 1.1.10 analogna sa narednom Posledicom 2.1.10.

Posledica 2.1.10. *Proizvoljna $n \times n$ matrica A je dvostruko stohastička ako i samo ako je $Ax \prec x$ za sve vektore $x \in \mathbb{R}^n$.*

Sledeći rezultat daje dovoljne uslove da invertibilan dvostruko stohastički operator bude permutacija i predstavlja uopštenje Teoreme 1.1.13.

Teorema 2.1.11. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka je dat operator $P : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ koji je dvostruko stohastički. Ako je P invertibilan i ako je $P^{-1} \in DS(\ell^p(I))$ tada je operator P permutacija.*

Dokaz. Kako je $P \in DS(\ell^p(I))$ stoga je $Pf \prec f$ na osnovu Leme 2.1.6, za svako $f \in \ell^p(I)$. Slično, $P^{-1} \in DS(\ell^p(I))$ i $f = P^{-1}Pf$ povlači da je $f \prec Pf$, za svako $f \in \ell^p(I)$. Sledi na osnovu Teoreme 1.2.12 da postoje permutacije $Q_f \in DS(\ell^p(I))$ takve da je $Q_f f = Pf$, $\forall f \in \ell^p(I)$.

Dokazaćemo da je P permutacija. Pretpostavimo suprotno, neka postoje elementi $r, s \in I$ za koje je $\langle Pe_s, e_r\rangle \in (0,1)$. Za funkciju $f := e_s$, postoji permutacija $Q_{e_s} \in P(\ell^p(I))$ za koju je $Pe_s = Q_{e_s}e_s = e_k$, za svako $k \in I$.

Sada sledi da je

$$e_k(r) = (Pe_s)(r) = \sum_{j\in I} e_s(j)\langle Pe_j, e_r\rangle = \langle Pe_s, e_r\rangle \in (0,1),$$

što je nemoguće na osnovu definicije funkcije e_k. Dakle, $\langle Pe_j, e_i\rangle \in \{0,1\}$, $\forall i, j \in I$. Kako je $P \in DS(\ell^p(I))$ dobijamo da za svako $i \in I$ postoji samo jedno $j \in I$ za koje je $\langle Pe_j, e_i\rangle = 1$, i slično, za svako $j \in I$ postoji samo jedno $i \in I$ za koje je $\langle Pe_j, e_i\rangle = 1$. Definisaćemo funkciju $\theta : I \longrightarrow I$ da važi $\theta(j) = i$, kada je $\langle Pe_j, e_i\rangle = 1$. Lako se proverava da je θ bijekcija i da je $Pe_j = e_{\theta(j)}$, dakle P je permutacija. $\square$

2.2 Operatorska majorizacija

Uvešćemo pojam majorizacione relacije među dvostruko stohastičkim operatorima na $\ell^p(I)$, $p \in [1,\infty)$ kao uopštenje majorizacije na dvostruko stohastičkim matricama. Na osnovu ovog uopštenja biće preformulisana Kakutanijeva hipoteza, i biće prezentovani uslovi pod kojima je ova hipoteza tačna, za posmatrani beskonačno-dimenzionalni slučaj.

Definicija 2.2.1. Neka je $p \in [1,\infty)$. Za dva operatora $D_1, D_2 \in DS(\ell^p(I))$, operator D_1 je *majorizovan operatorom* D_2, i to označavamo sa $D_1 \lhd D_2$, ako postoji dvostruko stohastički operator $D_3 \in DS(\ell^p(I))$ takav da je $D_1 = D_3D_2$.

Lema 2.2.2. *Majorizaciona relacija "$\lhd$" uvedena u* Definiciji 2.2.1 *je refleksivna i tranzitivna relacija, tj. "$\lhd$" je pre-uređenje. Specijalno, ukoliko se posmatraju samo surjektivni operatori i poistovete se svi oni operatori koji se razlikuju do na permutaciju tada je "$\lhd$" antisimetrična relacija na posmatranom podskupu skupa $DS(\ell^p(I))$, pa možemo posmatrati "$\lhd$" kao parcijalno uređenje.*

Dokaz. Na osnovu $D = \mathcal{I}D$, $\forall D \in DS(\ell^p(I))$, gde smo sa $\mathcal{I}$ označili jedinični operator, koji je očigledno dvostruko stohastički, sledi da je "$\lhd$" refleksivna relacija. Neka je $D_1, D_2, D_3 \in DS(\ell^p(I))$. Ako je $D_1 \lhd D_2$ i $D_2 \lhd D_3$ tada postoje operatori $D_4, D_5 \in DS(\ell^p(I))$ tako da je $D_1 = D_4D_2$ i $D_2 = D_5D_3$. Sada je $D_1 = D_4D_5D_3$ pa je $D_1 \lhd D_3$ na osnovu Teoreme 1.2.11, koja nam govori da je skup dvostruko stohastičkih operatora zatvoren za kompoziciju. Na sličan način, ako je $D_1 \lhd D_2$ i $D_2 \lhd D_1$ tada je $D_1 = ABD_1$ i $D_2 = BAD_2$, gde je $D_1 = AD_2$, $D_2 = BD_1$ i $A, B \in DS(\ell^p(I))$. Ako je $R(D_1) = R(D_2) = \ell^p(I)$ tada je $A = B^{-1}$, pa je $A, B \in P(\ell^p(I))$ po Teoremi 2.1.11. $\square$

Ako je $D_1 \lhd D_2$, tada po definiciji postoji $D_3 \in DS(\ell^p(I))$ tako da je $D_1 = D_3D_2$ tj. $D_1f = D_3D_2f$, $\forall f \in \ell^p(I)$, pa je $D_1f \prec D_2f$, $\forall f \in \ell^p(I)$. Dakle majorizacija između dva stohastička operatora povlači majorizaciju između svake dve funkcije koje se dobijaju kao slike jedne proizvoljne funkcije za ta dva operatora. Suprotan smer ovog tvrđenja za matrice je formulisao Kakutani (videti [77], strana 70).

2.2.1 Uopštena Kakutanijeva hipoteza

Pretpostavka 2.2.3. Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka su $D_1, D_2 \in DS(\ell^p(I))$. Ako za svaku funkciju $f \in \ell^p(I)$ važi da je $D_1 f \prec D_2 f$, tada je $D_1 \lhd D_2$.

Ova hipoteza u opštem slučaju nije tačna u ovom izvornom obliku, jer je invertibilnost operatora D_2 esencijalna, i neophodnost ovog uslova u konačno-dimenzionalnom slučaju je prikazana u kontra primeru koji se može naći u radu [100]. U skladu sa tim, operator D_2 takođe mora biti invertibilan i u našem proširenju Kakutanijeve hipoteze (videti [17, Primer 9]). Ukoliko pokažemo da egzistencija dvostruko stohastičkog operatora $D_f^3 \in DS(\ell^p(I))$, $\forall f \in \ell^p(I)$ za koji je $D_1 f = D_f^3 D_2 f$ povlači i egzistenciju operatora $D_3 \in DS(\ell^p(I))$ tako da važi $D_1 = D_3 D_2$, tada je posao završen. U sledećoj teoremi ćemo dokazati ovu hipotezu, pod dodatnom pretpostavkom da je operator D_2^{-1} stohastički po vrstama.

Teorema 2.2.4. *Neka je $p \in [1, \infty)$, $D_1, D_2 \in DS(\ell^p(I))$ i neka je D_2 invertibilan operator za koji je $D_2^{-1} \in RS(\ell^p(I))$. Ako za svako $f \in \ell^p(I)$ važi $D_1 f \prec D_2 f$, tada je $D_1 \lhd D_2$.*

Dokaz. Neka je $D_1 f \prec D_2 f$ za svako $f \in \ell^p(I)$. Znamo da za proizvoljno $g \in R(D_2)$ postoji $f \in \ell^p(I)$ tako da je $g = D_2 f$.

Neka je preslikavanje $\Psi : R(D_2) \longrightarrow \ell^p(I)$ definisano sa

$$\Psi g = D_1 f, \ \ \forall f \in \ell^p(I),$$

gde je $g = D_2 f$. Domen preslikavanja Ψ je ceo Banahov prostor $\ell^p(I)$ jer je operator D_2 invertibilan. Dakle, $R(D_2) = \ell^p(I)$ i sledi $\Psi : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$. Izaberimo proizvoljne funkcije $f, f_1, f_2 \in \ell^p(I)$ i fiksirajmo $g = D_2 f$, $g_1 = D_2 f_1$ i $g_2 = D_2 f_2$.

Prvo ćemo proveriti da je preslikavanje Ψ dobro definisano. Neka je $g_1 = g_2$. Treba pokazati da je $\Psi g_1 = D_1 f_1 = D_1 f_2 = \Psi g_2$. Iz $D_2 f_1 = D_2 f_2$, to sledi da je $D_2(f_1 - f_2) = 0$ na osnovu linearnosti operatora D_2. Takođe je $D_1(f_1 - f_2) \prec D_2(f_1 - f_2)$ na osnovu pretpostavke. Sada $D_1(f_1 - f_2) = 0$ pa je $\Psi g_1 = \Psi g_2$.

Na osnovu linearnosti operatora D_1 i D_2 dobijamo

$$\Psi(\alpha g) = \Psi(D_2(\alpha f)) = D_1(\alpha f) = \alpha \Psi g$$

kada je $\alpha \in \mathbb{R}$. Dalje,

$$\Psi(g_1 + g_2) = \Psi(D_2(f_1 + f_2)) = D_1(f_1 + f_2) = D_1 f_1 + D_1 f_2 = \Psi g_1 + \Psi g_2$$

pa možemo zaključiti da je operator Ψ linearan. Takođe,

$$\begin{aligned} \|\Psi(g)\| &= \|\Psi(D_2 f)\| = \|D_1 f\| \leqslant \|D_1\| \|f\| = \|D_1\| \|D_2^{-1} g\| \\ &\leqslant \|D_1\| \|D_2^{-1}\| \|g\|. \end{aligned}$$

Sledi da je $\frac{\|\Psi(g)\|}{\|g\|} \leqslant \|D_1\| \|D_2^{-1}\|$ i $\|\Psi\| \leqslant \|D_1\| \|D_2^{-1}\|$, pa zaključujemo da je preslikavanje Ψ ograničeno. Štaviše, $\|\Psi\| \leqslant \|D_2^{-1}\|$ jer je norma dvostruko stohastičkog operatora najviše jedan, po Lemi 1.2.9.

Ako je dodatno $g = D_2 f \geqslant 0$, sledi da postoji $D_f^3 \in DS(\ell^p(I))$ tako da je $\Psi(g) = D_1 f = D_f^3 D_2 f = D_f^3 g \geqslant 0$, jer je operator D_f^3 pozitivan, pa je Ψ pozitivno preslikavanje.

Neka je $j \in I$ proizvoljno izabrano, i neka je $a_j = D_2^{-1} e_j \in \ell^p(I)$. Tada za ovu funkciju a_j, postoji $D_{a_j}^3 \in DS(\ell^p(I))$ tako da je $D_1 a_j = D_{a_j}^3 D_2 a_j$, tj. $D_1 D_2^{-1} e_j = D_{a_j}^3 e_j$. Sada je

$$\sum_{i \in I} \langle \Psi e_j, e_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle D_1 D_2^{-1} e_j, e_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle D_{a_j}^3 e_j, e_i \rangle = 1$$

jer je $D_{a_j}^3 \in DS(\ell^p(I))$, pa sledi $\Psi \in CS(\ell^p(I))$. Operator D_1^* je dvostruko stohastički, po Posledici 2.1.8, i važi da je

$$\sum_{k \in I} D_1^* e_i(k) = \sum_{k \in I} \langle D_1^* e_i, e_k \rangle = \sum_{k \in I} \langle e_i, D_1 e_k \rangle = 1,$$

pa je $D_1^* e_i \in \ell^1(I)$, $\forall i \in I$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in I} \langle \Psi e_j, e_i \rangle &= \sum_{j \in I} \langle D_1 D_2^{-1} e_j, e_i \rangle = \sum_{j \in I} \langle D_2^{-1} e_j, D_1^* e_i \rangle \\
&= \sum_{k \in I} D_1^* e_i(k) = \sum_{k \in I} \langle D_1^* e_i, e_k \rangle \\
&= \sum_{k \in I} \langle e_i, D_1 e_k \rangle = 1, \ \ \forall i \in I,
\end{aligned}$$

gde je

$$\sum_{j \in I} \langle D_2^{-1} e_j, D_1^* e_i \rangle = \sum_{k \in I} D_1^* e_i(k)$$

po Lemi 1.2.8, jer je $D_1^* e_i \in \ell^1(I)$ i D_2^{-1} je stohastički po vrstama. Konačno, $\Psi \in DS(\ell^p(I))$, dakle $D_3 := \Psi$ je željeni operator za koji je $D_1 = D_3 D_2$. Sledi da je $D_1 \lhd D_2$. $\square$

Pitanje: Da li za dva proizvoljno izabrana operatora $D_1, D_2 \in DS(\ell^p(I))$ gde je D_2 invertibilan operator, majorizacija $D_1 f \prec D_2 f$ za svaku funkciju $f \in \ell^p(I)$, povlači majorizaciju $D_1 \lhd D_2$ i kada uslov $D_2^{-1} \in RS(\ell^p(I))$ nije ispunjen?

Potvrdan odgovor na postavljeno pitanje je dao Bajati u radu [17].

Glava 3

Slaba majorizacija i substohastički operatori na diskretnim Lebegovim prostorima

3.1 Substohastički operatori

U prvom Glave 3 biće proširen pojam dvostruko substohastičkog operatora sa ciljem da se uopšti slaba majorizaciona relacija na skupu pozitivnih funkcija koje pripadaju diskretnom Lebegovom prostoru $\ell^p(I)$. U drugom delu ove glave, biće prikazana forma linearnog očuvanja slabe majorizacije, kada je I beskonačan skup.

Na samom početku, dajemo definicije substohastičkih operatora definisanih na prostoru $\ell^p(J)$ sa slikom u $\ell^p(I)$, pri čemu su I i J unapred zadati proizvoljni neprazni skupovi.

Definicija 3.1.1. Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka je $A : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator, pri čemu su I i J dva prizvoljna neprazna skupa. Operator A je

1) *substohastički po vrstama*, ako je A pozitivan i $\forall i \in I$, $\sum\limits_{j \in J} \langle Ae_j, e_i \rangle \leqslant 1$;

2) *substohastički po kolonama*, ako je A pozitivan i $\forall j \in J$, $\sum\limits_{i \in I} \langle Ae_j, e_i \rangle \leqslant 1$;

3) *dvostruko substohastički*, ako je A substohastički operator po vrstama i po kolonama;

4) *parcijalna permutacija* za skupove $I_1 \subset I$ i $J_1 \subset J$, ako postoji bijekcija $\theta : J_1 \longrightarrow I_1$ za koju važi
$$Ae_j = \begin{cases} e_{\theta(j)}, & j \in J_1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Skup svih substohastičkih operatora po vrstama, po kolonama, skup svih dvostruko substohastičkih operatora, kao i skup svih parcijalnih permutacija iz $\ell^p(J)$ u $\ell^p(I)$ za fiksirano $p \in [1, \infty)$ označavaćemo sa $RsS(\ell^p(J, I))$, $CsS(\ell^p(J, I))$, $DsS(\ell^p(J, I))$ i $pP(\ell^p(J, I))$, respektivno. Ako je $J = I$, tada ćemo koristiti uprošćeno označavanje, na primer, skup svih substohastičkih operatora po vrstama iz $\ell^p(I)$ u $\ell^p(I)$, ćemo označavati sa $RsS(\ell^p(I))$. Isto važi i za skup svih substohastičkih operatora po kolonama, dvostruko substohastičkih operatora i parcijalnih permutacija. Lako je zaključiti da važi $RS(\ell^p(I)) \subset RsS(\ell^p(I))$, $CS(\ell^p(I)) \subset CsS(\ell^p(I))$, $DS(\ell^p(I)) \subset DsS(\ell^p(I))$ i $P(\ell^p(I)) \subset pP(\ell^p(I))$. Takođe, $DsS(\ell^p(I)) \subset RsS(\ell^p(I))$, $DsS(\ell^p(I)) \subset CsS(\ell^p(I))$ i $pP(\ell^p(I)) \subset DsS(\ell^p(I))$.

Napomena 3.1.2. Ako je data $n \times n$ dvostruko substohastička matrica $A = (a_{ij})$, tada postoji dvostruko stohastička matrica $D = (d_{ij})$ tako da je $a_{ij} \leqslant d_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Ovu teoremu je dokazao poznati matematičar fon Nojman i prikazana je u uvodnom delu. Međutim, za dvostruko substohastički operator $A : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ definisan sa

$$\langle Ae_j, e_i \rangle = \begin{cases} 1, & i - j = 1 \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

ne postoji operator $D \in DS(\ell^p(I))$ za koji važi $\langle Ae_j, e_i \rangle \leqslant \langle De_j, e_i \rangle$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Dakle, analogno tvrđenje za diskretne Lebegove funkcije ne važi.

Naredna lema je pomoćnog karaktera na osnovu koje će biti pokazana Lema 3.1.4.

Lema 3.1.3. *Neka je $p \in [1, \infty]$. Tada za svako $g \in \ell^1(I)$ je*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i \in I} g(i) \langle f, e_i \rangle, \quad \forall f \in l^p(I).$$

Dokaz. Neka je $q \in (1, \infty]$ konjugovani eksponent od $p \in [1, \infty)$. Neka je $g \in \ell^1(I) \subset \ell^q(I)$ proizvoljno izabrana funkcija koja ima reprezentaciju $g = \sum_{i \in I} g(i) e_i$. Kao što znamo, preslikavanje $f \longrightarrow \langle f, g \rangle := \sum_{i \in I} f(i) g(i)$ predstavlja jedan ograničen linearan funkcional na $\ell^p(I)$. Stoga,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} |g(i) f(j) e_i(j)| &= \sum_{i \in I} |g(i)| \sum_{j \in I} |f(j) e_i(j)| = \sum_{i \in I} |g(i)| |f(i)| \\ &\leqslant M_f \sum_{i \in I} |g(i)| < \infty, \end{aligned}$$

gde je $M_f = \sup_{i \in I} |f(i)|$. Sada možemo izvršiti promenu redosleda sumiranja po Fubinijevoj teoremi, pa dobijamo

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \sum_{j \in I} f(j) g(j) = \sum_{j \in I} f(j) \sum_{i \in I} g(i) e_i(j) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} g(i) f(j) e_i(j) = \sum_{i \in I} g(i) \sum_{j \in I} f(j) e_i(j) \\ &= \sum_{i \in I} g(i) \langle f, e_i \rangle, \quad \forall f \in l^p(I). \end{aligned}$$

□

Sledeća lema koja se odnosi za stohastičke operatore po vrstama i po kolonama iz $\ell^p(J)$ u $\ell^p(I)$ je dobijena po analogiji sa Lemom 1.2.8.

Lema 3.1.4. *Neka je $p \in [1, \infty)$, i neka je $A : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$ pozitivan ograničen linearan operator. Tada*

1) $A \in RsS(l^p(J, I))$ ako i samo ako je

$$\forall f \in \ell^1(I), \qquad \left| \sum_{j \in J} \langle Ae_j, f \rangle \right| \leqslant \sum_{i \in I} |f(i)| \,.$$

2) $A \in CsS(l^p(J, I))$ ako i samo ako je

$$\forall f \in \ell^1(J), \qquad \left| \sum_{i \in I} \langle Af, e_i \rangle \right| \leqslant \sum_{j \in J} |f(j)| \,.$$

Dokaz. Neka je $p \in [1, \infty)$.

1) Pretpostavimo da $A \in RsS(l^p(J, I))$. Dalje, neka je $f \in \ell^1(I)$ proizvoljna funkcija. Sledi

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |f(i)| \langle Ae_j, e_i \rangle = \sum_{i \in I} |f(i)| \sum_{j \in J} \langle Ae_j, e_i \rangle \leqslant \sum_{i \in I} |f(i)| < \infty.$$

Sada, možemo izvrsiti promenu redosleda sumiranja što je omogućeno Fubinijevom teoremom, stoga korišćenjem prethodne Leme 3.1.3 za funkciju $Ae_j \in \ell^p(I)$ zaključujemo da je

$$\left| \sum_{j \in J} \langle Ae_j, f \rangle \right| = \left| \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} f(i) \langle Ae_j, e_i \rangle \right| = \left| \sum_{i \in I} f(i) \sum_{j \in J} \langle Ae_j, e_i \rangle \right| \leqslant \sum_{i \in I} |f(i)|.$$

Suprotan smer sledi direktno po definiciji substohastičkog operatora po vrstama ukoliko postavimo vrednost funkcije $f := e_i$, pri čemu je $i \in I$ proizvoljno izabrano.

2) Neka je sada $A \in CsS(l^p(J, I))$ i $f \in \ell^1(J)$. Sada je

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} |f(j)| \langle A^* e_i, e_j \rangle &= \sum_{j \in J} |f(j)| \sum_{i \in I} \langle A^* e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{j \in J} |f(j)| \sum_{i \in I} \langle Ae_j, e_i \rangle \leqslant \sum_{j \in J} |f(j)| < \infty. \end{aligned}$$

Kako je $A^* e_i \in \ell^q(J)$, stoga uz pomoć Leme 3.1.3, promenom redosleda sumiranja imamo da je

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in I} \langle Af, e_i \rangle \right| &= \left| \sum_{i \in I} \langle A^* e_i, f \rangle \right| = \left| \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f(j) \langle A^* e_i, e_j \rangle \right| \\ &\leqslant \sum_{j \in J} |f(j)| \sum_{i \in I} \langle A^* e_i, e_j \rangle = \sum_{j \in J} |f(j)| \sum_{i \in I} \langle Ae_j, e_i \rangle \\ &\leqslant \sum_{j \in J} |f(j)|. \end{aligned}$$

Suprotan smer sledi direktno po definiciji substohastičkog operatora po kolonama ukoliko je $f := e_j$, pri čemu je $j \in I$.

$\square$

Posledica 3.1.5. *Neka je $p \in [1, \infty)$, i pretpostavimo da je $A : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$ pozitivan ograničen linearan operator. Tada:*

1) $A \in RsS(l^p(J, I))$ ako i samo ako je

$$\forall f \in \ell^1(I)^+, \quad \sum_{j \in J} \langle Ae_j, f \rangle \leqslant \sum_{i \in I} f(i).$$

2) $A \in CsS(l^p(J, I))$ ako i samo ako je

$$\forall f \in \ell^1(J)^+, \quad \sum_{i \in I} \langle Af, e_i \rangle \leqslant \sum_{j \in J} f(j).$$

Dokaz. Dokaz je očigledan. $\square$

Posledica 3.1.5 pretstavlja uopštenje Leme 1.2.8 za pozitivne funkcije $f \in \ell^1(I)^+$ i za dvostruko substohastičke operatore iz $\ell^p(J)$ u $\ell^p(I)$.

Teorema 3.1.6. *Neka je $p \in [1, \infty)$. Skup $RsS(\ell^p(I))$ je zatvoren za kompoziciju, tj., ako A i B pripadaju skupu $RsS(\ell^p(I))$, tada i operator AB pripada skupu $RsS(\ell^p(I))$. Isti zaključak važi i za skupove $CsS(\ell^p(I))$ i $DsS(\ell^p(I))$.*

Dokaz. Neka su data dva operatora $A, B \in RsS(\ell^p(I))$. Kako je

$$\sum_{j \in I} A^* e_i(j) = \sum_{j \in I} \langle A^* e_i, e_j \rangle = \sum_{j \in I} \langle Ae_j, e_i \rangle \leqslant 1,$$

stoga je $A^* e_i \in \ell^1(I)^+$. Sada sledi po Posledici 3.1.5 pod 1) da važi

$$\sum_{j \in I} \langle ABe_j, e_i \rangle = \sum_{j \in I} \langle Be_j, A^* e_i \rangle \leqslant \sum_{k \in I} \langle A^* e_i, e_k \rangle = \sum_{k \in I} \langle Ae_k, e_i \rangle \leqslant 1.$$

Očigledno je operator AB pozitivan, pa sledi $AB \in RsS(\ell^p(I))$.

Neka su $A, B \in CsS(\ell^p(I))$. S obzirom da je $Be_j \in \ell^1(I)^+$, po Posledici 3.1.5. pod 2) dobijamo da je

$$\sum_{i \in I} \langle ABe_j, e_i \rangle \leqslant \sum_{k \in I} Be_j(k) = \sum_{k \in I} \langle Be_j, e_k \rangle \leqslant 1,$$

stoga je $AB \in CsS(\ell^p(I))$.

$\square$

Lema 3.1.7. *Norma dvostruko substohastičkog operatora $A \in DsS(\ell^p(J, I))$ je manja ili jednaka od 1.*

Dokaz. Neka $A \in DsS(\ell^p(J,I))$, i pretpostavimo da je $f \in \ell^p(J)$ proizvoljno izabrana funkcija.

Definišemo familiju $\{r_i(A) \mid i \in I\}$ pozitivnih realnih brojeva manjih ili jednakih od 1, na sledeći način:

$$r_i(A) := 1 - \sum_{j \in J} \langle Ae_j, e_i \rangle, \quad \forall i \in I. \tag{3.1}$$

S obzirom da funkcija f ima reprezentaciju $f = \sum_{j \in J} f(j) e_j$ sledi

$$Af = \sum_{j \in J} f(j) Ae_j$$

i

$$Af(i) = \langle Af, e_i \rangle = \sum_{j \in J} f(j) \langle Ae_j, e_i \rangle, \quad \forall i \in I,$$

na osnovu neprekidnosti operatora A. Ukoliko iskoristimo Jensenovu nejednakost za konveksnu funkciju $h(x) = |x|^p$ dobijamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in J} f(j) \langle Ae_j, e_i \rangle \right|^p &= \left| \sum_{j \in J} f(j) \langle Ae_j, e_i \rangle + 0 \cdot r_i(A) \right|^p \\ &\leqslant \sum_{j \in J} |f(j)|^p \langle Ae_j, e_i \rangle + |0|^p \cdot r_i(A) \\ &= \sum_{j \in J} |f(j)|^p \langle Ae_j, e_i \rangle \end{aligned} \tag{3.2}$$

za svako $i \in I$, jer je A stohastički operator po vrstama. Takođe je

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} |f(j)|^p \langle Ae_j, e_i \rangle \leqslant \|f\|^p < \infty.$$

Štaviše, uz pomoć nejednakosti (3.2), Fubinijeve teoreme i činjenice da je A stohastički operator po kolonama sledi

$$\begin{aligned} \|Af\|^p &= \sum_{i \in I} |Af(i)|^p = \sum_{i \in I} |\langle Af, e_i \rangle|^p = \sum_{i \in I} \left| \sum_{j \in J} f(j) \langle Ae_j, e_i \rangle \right|^p \\ &\leqslant \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |f(j)|^p \langle Ae_j, e_i \rangle = \sum_{j \in J} |f(j)|^p \sum_{i \in I} \langle Ae_j, e_i \rangle \\ &\leqslant \|f\|^p. \end{aligned}$$

□

Na osnovu prethodnog rezultata dobija se posledica koja je istovetna sa Teoremom 1.2.9 iz uvodnog dela.

Posledica 3.1.8. *Norma dvostruko stohastičkog operatora $A \in DsS(\ell^p(I))$ je manja ili jednaka od 1.*

Sledeći rezultat daje blisku vezu između dvostruko substohastičkog operatora i familije pozitivnih realnih brojeva.

Teorema 3.1.9. *Neka je $p \in [1, \infty)$, i pretpostavimo da je $\{a_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ familija pozitivnih realnih brojeva za koju važi*

$$(\forall j \in I)\ \sum_{i \in I} a_{ij} \leqslant 1, \quad i \quad (\forall i \in I)\ \sum_{j \in J} a_{ij} \leqslant 1,$$

pri čemu su I i J proizvoljno izabrani neprazni skupovi. Tada postoji jedinstveno određen dvostruko substohastički operator $A \in DsS(\ell^p(J, I))$ takav da je

$$(\forall i \in I)\ (\forall j \in I)\ \langle Ae_j, e_i \rangle = a_{ij}. \tag{3.3}$$

Dokaz. Neka je $f \in \ell^p(J)$ proizvoljno izabrana funkcija koja ima reprezentaciju $f = \sum_{j \in J} f(j) e_j$. Definišemo familiju pozitivnih realnih brojeva na sledeći način:

$$a_i := 1 - \sum_{j \in J} a_{ij}, \quad \forall i \in I,$$

sa ciljem da primenimo Jensenovu nejednakost za konveksnu funkciju $h(x) = |x|^p$, $p \in [1, \infty)$, slično kao u (3.2). Dobijamo

$$\left| \sum_{j \in J} f(j) a_{ij} \right|^p = \left| \sum_{j \in J} f(j) a_{ij} + 0 \cdot a_i \right|^p \leqslant \sum_{j \in J} |f(j)|^p a_{ij}, \ \forall i \in I.$$

Sada, promenom redosleda sumiranja sledi

$$\sum_{i \in I} \left| \sum_{j \in J} f(j) a_{ij} \right|^p \leqslant \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |f(j)|^p a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} |f(j)|^p a_{ij} \leqslant \|f\|^p < \infty.$$

Definisaćemo operator $A : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$, po uzoru na matrične operatore, na sledeći način:

$$Af := \sum_{n \in I} \left(\sum_{m \in J} a_{nm} f(m) \right) e_n,$$

koji je očigledno linearan i ograničen. Sada je

$$\langle Ae_j, e_i \rangle = \sum_{n \in I} \left(\sum_{m \in J} a_{nm} e_j(m) \right) \langle e_n, e_i \rangle = \sum_{n \in I} a_{nj} \langle e_n, e_i \rangle = a_{ij}$$

za svako $i \in I$, i za svako $j \in J$. Dakle, $A \in DsS(\ell^p(J, I))$.

Pretpostavimo da operator A nije jedinstven, tj. pretpostavimo da postoji još jedan dvostruko stohastički operator $A_1 : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$ takav da $\langle A_1 e_j, e_i \rangle = a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$, za svako $i \in I$, i za svako $j \in J$. Tada je

$$A_1 f(i) = \langle A_1 f, e_i \rangle = \sum_{j \in J} f(j) \langle A_1 e_j, e_i \rangle = \sum_{j \in J} f(j) \langle A e_j, e_i \rangle = A f(i), \ \ \forall i \in I.$$

Stoga zaključujemo da je A jedinstveni dvostruko stohastički operator koji zadovoljava uslov (3.3). $\square$

Neka su I i J dva neprazna skupa. Podsećamo čitaoca da ovi skupovi imaju istu kardinalnost tj. $card(J) = card(I)$ ako i samo ako postoji dvostruko stohastički operator $A : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$, na osnovu Teoreme 1.2.3. Očigledno je dvostruko stohastički operator i dvostruko substohastički, dakle ako je $card(J) = card(I)$, tada postoji dvostruko substohastički operator $A : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$. Međutim, suprotan smer ovog tvrđenja u opštem slučaju ne važi za dvostruko substohastičke operatore, što nam potvrđuje sledeći primer.

Primer 3.1.10. Neka su definisani skupovi I i J na sledeći način, $I := \{1, 2, \dots, k\}$ i $J := \mathbb{N}$, gde je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljno izabran prirodan broj. Definisaćemo ograničen linearan operator $D : \ell^p(J) \longrightarrow \ell^p(I)$ takav da je

$$\langle D e_j, e_i \rangle = \delta_{ij},$$

pri čemu je δ Kronekerova delta funkcija. Ovaj operator D je dvostruko substohastički, međutim $card(I) \neq card(J)$.

Teorema 3.1.11. *Neka je $p \in [1, \infty)$. Tada su $RsS(\ell^p(J, I))$, $CsS(\ell^p(J, I))$ i $DsS(\ell^p(J, I))$ konveksni skupovi.*

Dokaz. Neka $p \in [1, \infty)$ i pretpostavimo da $A, C \in RsS(\ell^p(J, I))$. Pokazaćemo da $B = tA + (1 - t)C \in RsS(\ell^p(J, I))$, za svako $t \in [0, 1]$. Očigledno, za $t = 0$ ili $t = 1$, $B \in RsS(\ell^p(J, I))$. Neka je $t \in (0, 1)$. Lako se može zaključiti da je B ograničen linearan operator.

Operatori A i C su pozitivni, pa ako je $f \in \ell^p(J)^+$, tada je $Af \in \ell^p(I)^+$ i $Cf \in \ell^p(I)^+$, dakle B je pozitivan. Sada, za prizvoljno izabrano $i \in I$, s obzirom da su A i C substohastički po vrstama, imamo da je

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \langle B e_j, e_i \rangle &= \sum_{j \in J} \langle (tA + (1 - t)C) e_j, e_i \rangle \\ &= t \sum_{j \in J} \langle A e_j, e_i \rangle + (1 - t) \sum_{j \in J} \langle C e_j, e_i \rangle \leqslant 1, \end{aligned}$$

dakle B je substohastički po vrstama, tj. $RsS(\ell^p(J, I))$ je konveksan skup.

Uz blage izmene u prethodnom razmatranju, može se zaključiti da ako su $A, C \in CsS(\ell^p(J, I))$, tada za operator B definisan kao u prethodnom delu važi $B \in CsS(\ell^p(J, I))$ što vodi do željenog zaključka da je skup $CsS(\ell^p(J, I))$ konveksan. Slično je i $DsS(\ell^p(J, I))$ konveksan skup. $\square$

3.2 Slaba majorizacija

Na početku ove sekcije, izvršićemo proširenje pojma slabe majorizacione relacije za dve proizvoljno izabrane pozitivne funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$, gde je $p \in [1, \infty)$, uz pomoć dvostruko substohastičkog operatora na diskretnom Lebegovom prostoru $\ell^p(I)$.

Definicija 3.2.1. Neka je $p \in [1, \infty)$. Za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$, funkcija f je *slabo majorizovana* funkcijom g , i to označavamo sa $f \prec_w g$, ako postoji dvostruko substohastički operator $D \in DsS(\ell^p(I))$, takav da važi $f = Dg$.

Lema 3.2.2. *Neka $p \in [1, \infty)$ i pretpostavimo da je $A : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator. Ako je $A \in DsS(\ell^p(I))$ tada je $Af \prec_w f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$. Obrnuto, ako je $Af \prec_w f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$, tada je $A \in CsS(\ell^p(I))$.*

Dokaz. Neka je $A \in DsS(\ell^p(I))$. Ukoliko definišemo operator D da bude $D := A$ dobijamo da je $Af = Df$ i $D \in DsS(\ell^p(I))$, stoga sledi $Af \prec_w f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$ po definiciji.

S druge strane, neka je $Af \prec_w f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$. U tom slučaju mora biti $Af \in \ell^p(I)^+$, tj. operator A mora biti pozitivan. Dalje, $Ae_j \prec_w e_j$, $\forall j \in I$, pa postoji $D_j \in DsS(\ell^p(I))$ takav da je $D_j e_j = Ae_j$, $\forall j \in I$. Izaberimo proizvoljno $j \in I$. Sledi

$$\sum_{i \in I} \langle Ae_j, e_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle D_j e_j, e_i \rangle \leqslant 1, \tag{3.4}$$

jer je $D_j \in DsS(\ell^p(I)) \subset CsS(\ell^p(I))$, pa zaključujemo da je $A \in CsS(\ell^p(I))$. $\square$

U definicijama koje slede, izvršićemo proširenje pojma dvostruko substohastičkih operatora i slabe majorizacione relacije na $\ell^\infty(I)$ sa ciljem da Teorema 3.2.5 ima željenu formu.

Definicija 3.2.3. Neka je $A : \ell^\infty(I) \longrightarrow \ell^\infty(I)$ ograničen linearan operator. Operator A je *dvostruko substohastički* ako postoji dvostruko substohastički operator $A_0 \in DsS(\ell^1(I))$ takav da je $A = A_0^*$.

Definicija 3.2.4. Za dve funkcije $f, g \in \ell^\infty(I)^+$, funkcija je f *slabo majorizavona* funkcijom g, i to označavamo sa $f \prec_w g$, ako postoji dvostruko substohastički operator $D \in DsS(\ell^\infty(I))$ takav da važi $f = Dg$.

Teorema 3.2.5. *Neka $p \in [1, \infty)$ i pretpostavimo da je $A : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator. $A \in DsS(\ell^p(I))$ ako i samo ako je $Af \prec_w f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$ i $A^* g \prec_w g$, $\forall g \in \ell^q(I)^+$, pri čemu je q konjugovani eksponent od p.*

Dokaz. Neka je $A \in DsS(\ell^p(I))$ proizvoljno izabran operator. Tada je $Af \prec_w f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$, na osnovu Leme 3.2.2.

Ukoliko je $p, q \in (1, \infty)$ tada je $A^* e_i(j) = \langle A^* e_i, e_j \rangle = \langle Ae_j, e_i \rangle \geqslant 0$, $\forall i, j \in I$, stoga je

$$A^* g = \sum_{i \in I} \langle g, e_i \rangle A^* e_i \in \ell^p(I)^+,$$

jer je $g \in \ell^q(I)^+$. Dakle, operator A^* je pozitivan. Lako se može proveriti da $A^* \in DsS(\ell^q(I))$ po Definiciji 3.1.1 dvostruko substohastičkog operatora. Sledi, $A^*g \prec_w g$, $\forall g \in \ell^q(I)^+$ na osnovu Leme 3.2.2.

Ako je $p = 1$ i $q = \infty$ tada je $A^* \in DsS(\ell^\infty(I))$ na osnovu Definicije 3.2.3 dvostruko substohastičkog operatora na $\ell^\infty(I)$ i činjenice da $A \in DsS(\ell^1(I))$ po pretpostavci teoreme. Ukoliko izaberemo D da bude $D := A^*$ tada je $A^*g = Dg$, $\forall g \in \ell^\infty(I)^+$, pa važi $A^*g \prec_w g$, $\forall g \in \ell^\infty(I)^+$, po Definiciji 3.2.4.

Neka je $Af \prec_w f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$, $p \in [1, \infty)$, i $A^*g \prec_w g$, $\forall g \in \ell^q(I)$. Sledi, $A \in CsS(\ell^p(I))$ na osnovu Leme 3.2.2. Ostaje da se pokaže da je $A \in RsS(\ell^p(I))$. Ako je $p, q \in (1, \infty)$, tada je $A^* \in CsS(\ell^q(I))$, na osnovu iste Leme 3.2.2. Štaviše,

$$\sum_{j \in I} \langle Ae_j, e_i \rangle = \sum_{j \in I} \langle e_j, A^*e_i \rangle \leqslant 1,$$

$\forall i \in I$ pa je $A \in RsS(\ell^p(I))$.

Sada se okrećemo slučaju kada je $p = 1$ i $q = \infty$. Sledi da postoje operatori $D_i \in DsS(\ell^\infty(I))$ i $C_i \in DsS(\ell^1(I))$, $\forall i \in I$, takvi da je $D_i e_i = A^*e_i$ i $D_i = C_i^*$, $\forall i \in I$. Sledi

$$\sum_{j \in I} \langle Ae_j, e_i \rangle = \sum_{j \in I} \langle e_j, A^*e_i \rangle = \sum_{j \in I} \langle e_j, D_i e_i \rangle = \sum_{j \in I} \langle C_i e_j, e_i \rangle \leqslant 1$$

$\forall i \in I$, pa je $A \in RsS(\ell^1(I))$. Konačno, dobija se da $A \in DsS(\ell^p(I))$. □

Posledica 3.2.6. *Neka $p \in [1, \infty)$ i pretpostavimo da je $A : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator. Ako je $A \in DsS(\ell^p(I))$, tada je $A^* \in DsS(\ell^q(I))$, pri čemu je q konjugovani eksponent od p.*

Dokaz. Sledi direktno na osnovu dokaza Teoreme 3.2.5 i Definicije 3.2.3. □

Posledica 3.2.7. *Neka $p \in [1, \infty)$ i pretpostavimo da je $A : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ ograničen linearan operator.*

1) *Ako je $Af \prec_w f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$, tada je $A \in CsS(\ell^p(I))$. Ako dodatno važe relacije $A^*f \prec_w f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$, tada je $A \in DsS(\ell^p(I))$.*

2) *$A \in DsS(\ell^p(I))$ ako i samo ako je $Af \prec_w f$ i $A^*f \prec_w f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je operator A pozitivan. Neka je $Af \prec_w f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$. Tada mora biti $Ae_i \in (\ell^p(I))^+$, $\forall i \in I$. Ako je $f \in \ell^p(I)^+$ proizvoljno izabrana funkcija koja ima svoju reprezentaciju $f = \sum\limits_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i$, tada je $Af = \sum\limits_{i \in I} \langle f, e_i \rangle Ae_i$ zbog neprekidnosti operatora A. Kako je $\langle f, e_i \rangle \geqslant 0$, $\forall i \in I$, stoga dobijamo da je $Af \in (\ell^p(I))^+$ što implicira da je operator A pozitivan. Jasno, $A \in CsS(\ell^p(I))$, zbog (3.4).

Ukoliko analiziramo dokaz Teoreme 3.2.5, možemo jasno uočiti da su relacije $Af \prec_w f$ i $A^*f \prec_w f$, kada je $f \in \{e_i \mid i \in I\}$ dovoljni uslovi da operator A bude dvostruko substohastički.

Dokaz drugog dela sledi iz Teoreme 3.2.5. □

Naredni rezultat predstavlja uopštenje nejednakosti dokazane od strane Vajla [109] i Tomića [107].

Lema 3.2.8. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i $b \in (0, \infty]$, i pretpostavimo da je $\varphi : [0, b) \longrightarrow [0, \infty)$ neprekidna rastuća konveksna funkcija za koju važi $\varphi(0) = 0$. Za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$, za koje je $f(i), g(i) < b$, $\forall i \in I$, ako je $f \prec_w g$ tada važi*

$$\sum_{i \in I} \varphi(f(i)) \leqslant \sum_{i \in I} \varphi(g(i)).$$

Dokaz. Neka je $f, g \in \ell^p(I)^+$, $f(i), g(i) < b$, i pretpostavimo da je $f \prec_w g$. Stoga postoji operator $D \in DsS(\ell^p(I))$ takav da važi $f = Dg$. Kako funkcija g ima reprezentaciju $g = \sum_{j \in I} g(j) e_j$, zbog neprekidnosti operatora D sledi da važi $Dg = \sum_{j \in I} g(j) De_j$ što povlači

$$f(i) = \langle Dg, e_i \rangle = \sum_{j \in I} g(j) \langle De_j, e_i \rangle.$$

Kako je φ neprekidna konveksna funkcija, na osnovu izraza (3.1) možemo zaključiti na osnovu Jensenove nejednakosti da važi

$$\begin{aligned} \varphi(f(i)) &= \varphi\left(\sum_{j \in I} g(j) \langle De_j, e_i \rangle + 0 \cdot r_i(D)\right) \\ &\leqslant \sum_{j \in I} \varphi(g(j)) \langle De_j, e_i \rangle + \varphi(0) r_i(D) = \sum_{j \in I} \varphi(g(j)) \langle De_j, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Promenom redosleda sumiranja dobija se

$$\sum_{i \in I} \varphi(f(i)) \leqslant \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \varphi(g(j)) \langle De_j, e_i \rangle = \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \varphi(g(j)) \langle De_j, e_i \rangle \leqslant \sum_{j \in I} \varphi(g(j)).$$

□

Posledica 3.2.9. *Neka je $f, g \in \ell^p(I)^+$, $p \in [1, \infty)$ i pretpostavimo da je $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$. Za svaku neprekidnu rastuću konveksnu funkciju $\varphi : [0, b) \longrightarrow [0, \infty)$ za koju je $\varphi(0) = 0$ važi*

$$\sum_{i \in I} \varphi(f(i)) = \sum_{i \in I} \varphi(g(i)) \tag{3.5}$$

gde je $b \in (0, \infty]$ i $f(i), g(i) < b$, $\forall i \in I$.

U sledećem primeru su predstavljene funkcije $f \in \ell^1(\mathbb{N})^+$ i $g \in \ell^1(\mathbb{N})^+$ za koje izraz (3.5) ne povlači majorizacije $f \prec g$ i $g \prec f$. Zaključujemo da izraz (3.5) nije dovoljan uslov za medjusobnu majorizovanost dve funkcije. Međutim, s druge strane za date funkcije međusobna slaba majorizovanost je ispunjena, tj. važi $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$. Štaviše, Posledica 3.2.17 pokazuje da je (3.5) potreban i dovoljan uslov da važi $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$, za dve prizvoljno izabrane funkcije $f \in \ell^1(\mathbb{N})^+$ i $g \in \ell^1(\mathbb{N})^+$.

Primer 3.2.10. Fiksirajmo $r > 1$. Razmatraćemo dve funkcije $f, g \in \ell^1(\mathbb{N})^+$, date sa

$$f(k) = \frac{1}{k^r}, \quad i \quad g(k+1) = \frac{1}{k^r}, \quad k \in \mathbb{N}, \ \ g(1) = 0.$$

Dakle, funkcije $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)e_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}e_k$ i $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}e_{k+1}$ generišu dva hiperharmonijska reda koja predstavljaju normu ovih funkcija. Neka je $\varphi : [0,b) \longrightarrow [0,\infty)$ neprekidna rastuća konveksna funkcija za koju je $\varphi(0) = 0$, gde je $b \in (0,\infty]$ i $f(i), g(i) < b$, $\forall i \in I$. Sledi,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(f(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\frac{1}{k^r}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(g(k)).$$

Štaviše, ako je $\varphi(0) \neq 0$ tada takođe važi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(f(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\frac{1}{k^r}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(g(k)) = \infty.$$

Pretpostavimo da je $D : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ proizvoljno izabran ograničen linearan operator, takav da je $g = Df$. Sada dobijamo da je

$$g = Df = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)De_k$$

i

$$0 = g(1) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\langle De_k, e_1\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}\langle De_k, e_1\rangle$$

što implicira da je $\langle De_k, e_1\rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, D ne može biti dvostruko stohastički operator, pa mora biti $g \not\prec f$. Međutim, za operator A koji je definisan familijom $\{a_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ na sledeći način

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i-j=1, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

važi da je $g = Af$. Jasno, $A \in DsS(\ell^1(\mathbb{N}))$, pa je $g \prec_w f$. Slično, familija $\{b_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N}\}$,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & j-i=1, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

generiše operator $B \in DsS(\ell^1(\mathbb{N}))$. Dakle, $f = Bg$ tj. $f \prec_w g$.

Neka je funkcija $f \in \ell^p(I)^+$ proizvoljno izabrana. Definisaćemo dva disjunktna skupa I_f^0 i I_f^+ na sledeći način:

$$I_f^0 := \{i \in I \mid f(i) = 0\},$$
$$I_f^+ := \{i \in I \mid f(i) > 0\}.$$

Ovi skupovi će biti korišćeni u rezultatima koji slede.

Teorema 3.2.11. *Neka je $f, g \in \ell^p(I)^+$, $p \in [1,\infty)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$;

2) Postoji operator $P \in pP(\ell^p(I))$ za skupove I_f^+ i I_g^+ takav da je $g = Pf$.

Dokaz. Neka je $f \in \ell^p(I)^+$proizvoljno izabrana funkcija. Očigledno, $I = I_f^0 \cup I_f^+$. Kao što znamo, skup I_f^+ je najviše prebrojiv, jer je $f \in \ell^p(I)^+$, tj.

$$\sum_{i \in I} f(i)^p = \sum_{i \in I_f^+} f(i)^p < \infty.$$

Takođe, skup $\{f(i) \mid i \in I\}$ je ograničen, pa možemo definisati induktivno familiju $\{I_f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ disjunktnih konačnih podskupova skupa I_f^+ na sledeći način:

$$I_f^1 := \left\{i \in I_f^+ \mid f(i) = max\{f(j) \mid j \in I_f^+\}\right\}$$

i

$$I_f^n := \left\{i \in I_f^+ \mid f(i) = max\left\{f(j) \mid j \in I_f^+ \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} I_f^k\right\}\right\}$$

kada je $n \geqslant 2$. Jasno, $I_f^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_f^k$. Ako je $I_f^r \neq \varnothing$, za neko $r \in \mathbb{N}$, tada definišemo $f_r := f(j)$, gde je $j \in I_f^r$. Ako je $I_f^r = \varnothing$, tada je i $I_f^k = \varnothing$, $\forall k \geqslant r$, pa definišemo $f_r := 0$ i $f_k := 0$, $\forall k \geqslant r$. Takođe, ako je $s > r$ tada je $f_s \leqslant f_r$. Poslednja nejednakost je stroga ako je skup I_f^r neprazan.

Pretpostavimo da važi $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$ za neke unapred izabrane funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$. Nadalje, posmatraćemo neprekidne rastuće konveksne funkcije $\varphi_\lambda : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $\lambda \geqslant 0$, definisane u zavisnosti od λ sa

$$\varphi_\lambda(t) := (t - \lambda) \cdot \chi_{[\lambda, \infty)}(t).$$

Lako je videti da je $\varphi_\lambda(t) = 0$, za svako $t \leqslant \lambda$. Specijalno, $\varphi_\lambda(0) = 0$. Sada, Posledica 3.2.9 povlači

$$\sum_{i \in I} \varphi_\lambda(f(i)) = \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(g(i)), \quad \forall \lambda \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Za $\lambda = 0$ je

$$\sum_{i \in I_f^+} f(i) = \sum_{i \in I} f(i) = \sum_{i \in I} g(i) = \sum_{i \in I_g^+} g(i),$$

pa skupovi I_f^+ i I_g^+ su istovremeno prazni ili neprazni. Trivijalno, ako je $I_f^+ = I_g^+ = \varnothing$ dokaz je završen. Pretpostavimo da su skupovi I_f^+, I_g^+ neprazni. Tada i skupovi I_f^1, I_g^1 moraju biti neprazni, takođe. Neka je $f_1 \neq q_1$, i pretpostavimo da je na primer $f_1 > g_1$. Fiksiramo $\lambda := min\{f_1, g_1\} = g_1$. Uz pomoć neprekidne rastuće konveksne funkcije φ_λ dobijamo

$$\sum_{j \in I} \varphi_\lambda(g(j)) = 0 < f_1 - \lambda \leqslant \sum_{j \in I} \varphi_\lambda(f(j))$$

jer postoji najmanje jedno $k \in I$ tako da je $f(k) = f_1 > \lambda$ i $\varphi_\lambda(f(k)) = f_1 - \lambda$. Ovo je kontradikcija sa (3.6), pa je $f_1 = g_1$. Takođe, ako uvedemo realan broj μ na sledeći način :

$$\mu := max\{f_2, g_2\},$$

uz pomoć konveksne funkcije φ_μ i jednakosti (3.6) sledi da je

$$card(I_f^1)(f_1 - \mu) = \sum_{j \in I} \varphi_\mu((f(j)) = \sum_{j \in I} \varphi_\mu((g(j)) = card(I_g^1)(g_1 - \mu).$$

Dakle, na ovaj način smo dokazali da je $f_1 = g_1$ i $card(I_f^1) = card(I_g^1)$. Indukcijom ćemo pokazati da važi

$$f_k = g_k \quad i \quad card(I_f^k) = card(I_g^k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Neka (3.7) važi za svako $k = 1, \dots, n$. Prvo, pretpostavimo da je $I_f^{n+1} = \varnothing$. Ako je $I_g^{n+1} \neq \varnothing$, tada je

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \varphi_0(f(i)) &= \sum_{j=1}^{n} card(I_f^j) f_j = \sum_{j=1}^{n} card(I_g^j) g_j \\ &< \sum_{j=1}^{n+1} card(I_g^j) g_j \leqslant \sum_{i \in I} \varphi_0(g(i)),\end{aligned}$$

jer $I_f^{n+1} = \varnothing$ implicira $I_f^j = \varnothing$, za svako $j \geqslant n+1$. Poslednje tvđenje je u kontradikciji sa jednakošću (3.6), za $\lambda = 0$, pa sledi $I_f^j = I_g^j = \varnothing$ i $f_j = g_j = 0$, za svako $j \geqslant n+1$.

Sada, pretpostavimo da su $I_f^{n+1}, I_g^{n+1} \neq \varnothing$ i pretpostavimo takođe da je $f_{n+1} > g_{n+1}$. Na sličan način kao i u slučaju $n = 1$, ukoliko izaberemo $\lambda := min\{f_{n+1}, g_{n+1}\} = g_{n+1}$ imamo da je

$$\sum_{j \in I} \varphi_\lambda(g(j)) = \sum_{j=1}^{n} card(I_g^j)(g_j - \lambda) < f_{n+1} - \lambda + \sum_{j=1}^{n} card(I_f^j)(f_j - \lambda) \leqslant \sum_{j \in I} \varphi_\lambda(f(j))$$

jer znamo da postoji najmanje jedno $k \in I$ tako da je $f(k) = f_{n+1}$. Ponovo, ovo je u kontradikciji sa (3.6), pa sledi da je $f_{n+1} = g_{n+1}$. Konačno ako izaberemo $\mu = max\{f_{n+2}, g_{n+2}\}$, tada dobijamo

$$\sum_{j=1}^{n+1} card(I_f^j)(f_j - \mu) = \sum_{j \in I} \varphi_\mu((f(j)) = \sum_{j \in I} \varphi_\mu((g(j)) = \sum_{j=1}^{n+1} card(I_g^j)(g_j - \mu)$$

stoga po indukcijskoj hipotezi mora biti $card(I_f^{n+1}) = card(I_g^{n+1})$. Dakle, (3.7) važi za $n \in \mathbb{N}$.

U skladu sa prethodnim činjenicama, definisaćemo bijekcije

$$\omega_k : I_f^k \longrightarrow I_g^k$$

za svako $k \in \mathbb{N}$ za koje je $I_f^k \neq \varnothing$. Takođe, uz pomoć dobro poznatih činjenica $I_f^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_f^k$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_f^k = \varnothing$ i $I_g^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_g^k$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_g^k = \varnothing$ uvodimo bijekciju $\Omega : I_f^+ \longrightarrow I_g^+$ na sledeći način:

$$\Omega(i) := \omega_k(i) \in I_g^k, \tag{3.8}$$

kada je $i \in I_f^k$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Dakle, $f(i) = g(\Omega(i))$, $\forall i \in I_f^+$. Operator $P : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$, definisan na sledeći način:

$$Pe_j = \begin{cases} e_{\Omega(j)}, & j \in I_f^+, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{3.9}$$

je parcijalna permutacija za skupove I_f^+ i I_g^+.

Obrnuto, neka je dat operator $P \in pP(\ell^p(I))$ za skupove I_f^+ i I_g^+ takav da je $g = Pf$, i neka je

$$\Omega : I_f^+ \longrightarrow I_g^+$$

odgovarajuća bijekcija za dati operator P. Očigledno da važi $g \prec_w f$ jer je $P \in pP(\ell^p(I)) \subset DsS(\ell^p(I))$. Definišemo operator $Q : \ell^p(I) \longrightarrow \ell^p(I)$ na sledeći način:

$$Qe_j = \begin{cases} e_{\Omega^{-1}(j)}, & j \in I_g^+, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Sledi da operator $Q \in pP(\ell^p(I))$ i $Qg = f$, pa je $f \prec_w g$. $\square$

Podsećamo da u konačno-dimenzionalnom slučaju, za dva izabrana vektora, $x, y \in \mathbb{R}^n$, relacije $x \prec_w y$ i $y \prec_w x$ povlače $y = Px$, za neku $n \times n$ permutacionu matricu P. U sledećem primeru ćemo izabrati dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)$ za koje ćemo pokazati da međusobna majoriziranost $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$, ne povlači egzistenciju permutacije $P \in P(\ell^p(I))$, za koju je $g = Pf$.

Primer 3.2.12. Neka je $r > 1$. Posmatraćemo dve funkcije $f, g \in \ell^1(\mathbb{N})^+$, $f(k) = \frac{1}{r^k}$ i $g(k+1) = \frac{1}{r^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $g(1) = 0$. Za operator $A \in DsS(\ell^1(\mathbb{N}))$ definisan preko familije $\{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i - j = 1, \\ 0, & i - j \neq 1, \end{cases}$$

važi $g = Af$, tj. $g \prec_w f$. Slično, familija $\{b_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & j - i = 1, \\ 0, & j - i \neq 1, \end{cases}$$

formira operator $B \in DsS(\ell^1(\mathbb{N}))$, za koji je $f = Bg$, pa je $f \prec_w g$. S druge strane, $g(1) = 0 \neq f(i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Ovo povlači da ne postoji permutacija $P \in P(\ell^1(\mathbb{N}))$ takva da je $g = Pf$.

Teorema 3.2.13. *Neka je $f, g \in \ell^p(I)^+$, $p \in [1, \infty)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $f \prec_w g$ i $g \prec f$;

2) Postoji operator $P \in P(\ell^p(I))$ takav da je $g = Pf$.

Dokaz. Pretpostavimo da važi $f \prec_w g$ i $g \prec f$ za proizvoljno odabrane funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$. Dakle, postoji operator $D \in DS(\ell^p(I))$ za koji je $g = Df$. Pod datim pretpostavkama važi i Teorema 3.2.11, pa ćemo koristiti neke delove iz njenog dokaza. Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je $I_f^n \neq \varnothing \neq I_g^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dokazaćemo indukcijom da je

$$(\forall i \in I_g^n) \ \sum_{j \in I_f^n} \langle De_j, e_i \rangle = 1 \quad \text{i} \quad (\forall j \in I_f^n) \ \sum_{i \in I_g^n} \langle De_j, e_i \rangle = 1. \tag{3.11}$$

Prvo, neka je $n = 1$, i $k \in I_g^1$. Sada je

$$\begin{aligned} g_1 &= g(k) = \sum_{j\in I} f(j)\langle De_j, e_k\rangle = \sum_{j\in I_f^1} f_1\langle De_j, e_k\rangle + \sum_{j\in I\setminus I_f^1} f(j)\langle De_j, e_k\rangle \\ &\leqslant \sum_{j\in I_f^1} f_1\langle De_j, e_k\rangle + \sum_{j\in I\setminus I_f^1} f_1\langle De_j, e_k\rangle = f_1. \end{aligned}$$

Kako znamo da je $f_1 = g_1$, stoga je $\sum\limits_{j\in I\setminus I_f^1} \langle De_j, e_k\rangle = 0$. Na osnovu (3.7) dobijamo da je $card(I_f^1) = card(I_g^1)$. S druge strane je

$$card(I_g^1) = \sum_{i\in I_g^1}\sum_{j\in I_f^1}\langle De_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I_f^1}\sum_{i\in I_g^1}\langle De_j, e_i\rangle,$$

pa sledi da je

$$card(I_f^1) = \sum_{j\in I_f^1}\sum_{i\in I_g^1}\langle De_j, e_i\rangle.$$

Sada mora biti $\sum\limits_{i\in I_g^1}\langle De_j, e_i\rangle = 1$, $\forall j \in I_f^1$, dakle (3.11) važi za $n = 1$.

Neka je stavka (3.11) zadovoljena za svako $k = 1, \ldots, n$ i neka je $r \in I_g^{n+1}$. To znači da ako je $j \in I_f^k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, tada je i $\langle De_j, e_r\rangle = 0$ po indukcijskoj hipotezi. Sledi

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= g(r) = \sum_{j\in I} f(j)\langle De_j, e_r\rangle \\ &= \sum_{j\in I_f^{n+1}} f_{n+1}\langle De_j, e_r\rangle + \sum_{j\in I\setminus\bigcup_{m=1}^{n+1} I_f^m} f(j)\langle De_j, e_r\rangle \\ &\leqslant \sum_{j\in I_f^{n+1}} f_{n+1}\langle De_j, e_r\rangle + \sum_{j\in I\setminus\bigcup_{m=1}^{n+1} I_f^m} f_{n+1}\langle De_j, e_r\rangle = f_{n+1}. \end{aligned}$$

Kako je $f_{n+1} = g_{n+1}$ imamo da je $\sum\limits_{j\in I\setminus I_f^{n+1}} \langle De_j, e_r\rangle = 0$. Ponovo, iz (3.7) sledi da je $card(I_f^{n+1}) = card(I_g^{n+1})$. S druge strane je

$$card(I_g^{n+1}) = \sum_{i\in I_g^{n+1}}\sum_{j\in I_f^{n+1}}\langle De_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I_f^{n+1}}\sum_{i\in I_g^{n+1}}\langle De_j, e_i\rangle$$

pa je i $card(I_f^{n+1}) = \sum\limits_{j\in I_f^{n+1}}\sum\limits_{i\in I_g^{n+1}}\langle De_j, e_i\rangle$. Sada mora biti

$$\sum_{i\in I_g^{n+1}}\langle De_j, e_i\rangle = 1, \quad \forall j \in I_f^{n+1},$$

dakle (3.11) je zadovoljeno. Međutim, (3.11) implicira da mora važiti

$$\sum_{j\in I_g^{+}}\langle De_j, e_i\rangle = 1, \ \forall i \in I_f^{+}, \tag{3.12}$$

i

$$\sum_{i\in I_f^+}\langle De_j, e_i\rangle = 1, \ \ \forall j \in I_g^+. \tag{3.13}$$

Dakle, ako je $i_0 \in I_f^0 = I \backslash I_f^+$ imamo da je $\langle De_j, e_{i_0}\rangle = 0$, $\forall j \in I_g^+$ na osnovu (3.13). Slično, ako je $j_0 \in I_g^0 = I \backslash I_g^+$, važi $\langle De_{j_0}, e_i\rangle = 0$, $\forall i \in I_f^+$ na osnovu (3.12). Sada, lako se može zaključiti da novo preslikavanje

$$D_1 : \ell^p(I_f^0) \longrightarrow \ell^p(I_g^0)$$

definisano sa

$$\langle D_1 e_j, e_i\rangle := \langle De_j, e_i\rangle$$

je dvostruko stohastički operator. Stoga, postoji bijekcija $\Omega_0 : I_f^0 \longrightarrow I_g^0$ na osnovu Teoreme 1.2.3. Konačno, definišemo bijekciju $\Psi : I \longrightarrow I$ tako da bude

$$\Psi(k) = \begin{cases} \Omega(k), & k \in I_f^+, \\ \Omega_0(k), & k \in I_f^0. \end{cases}$$

Neka je sada $P \in P(\ell^p(I))$ permutacija koja odgovara bijekciji Ψ. Imamo da je

$$Pf = \sum_{k\in I} f(k) e_{\Psi(k)} = \sum_{j\in I} f(\Psi^{-1}(j)) e_j.$$

Ako je $j \in I_g^0$ tada je $\Psi^{-1}(j) = \Omega_0^{-1}(j) \in I_f^0$ pa je $f(\Psi^{-1}(j)) = 0 = g(j)$. Takođe, ako je $j \in I_g^+$ tada postoji prirodan broj n takav da je $j \in I_g^n$ i

$$\Psi^{-1}(j) = \Omega^{-1}(j) = \omega_n^{-1}(j) \in I_f^n,$$

pa stoga važi

$$f(\Psi^{-1}(j)) = f_n = g_n = g(j).$$

Dakle, $g = Pf$, jer je $g(i) = Pf(i)$, $\forall i \in I$.

Suprotan smer je dokazan u Teoremi 1.2.12 imajući na umu da majorizacija "$\prec$" povlači slabu majorizaciju "$\prec_w$".

$\square$

Posledica 3.2.14. *Majorizaciona relacija "$\prec_w$" uvedena u Definiciji* 3.2.1*, kada je $p \in [1, \infty)$, je refleksivna i tranzitivna relacija tj. "$\prec_w$" je pre-uređenje. Specijalno, ukoliko poistovetimo sve pozitivne funkcije koje se razlikuju do na parcijalnu permutaciju svojih pozitivnih elemenata, tada mozemo posmatrati relaciju "$\prec_w$" kao parcijalno uređenje.*

Dokaz. Za proizvoljnu funkciju $f \in \ell^p(I)^+$, $f = \mathcal{I} f$ povlači $f \prec_w f$, jer je jedinični operator $\mathcal{I}$ dvostruko substohastički, pa je relacija "$\prec_w$" refleksivna.

Tranzitivnost sledi iz Teoreme 3.1.6. Preciznije, ako je $f \prec_w g$ i $g \prec_w h$ tada postoje operatori $A, B \in DsS(\ell^p(I))$ za koje važi $f = Ag$ i $g = Bh$, tj. $f = ABh$. Kako je skup $DsS(\ell^p(I))$ zatvoren za kompoziciju, stoga je $f \prec_w h$.

Ukoliko poistovetimo sve pozitivne funkcije koje se razlikuju do na parcijalnu permutaciju svoji pozitivnih elemenata, tada na osnovu Teoreme 3.2.11 sledi da je relacija slabe majorizacije "$\prec_w$" antisimetrična. $\square$

Sada ćemo dokazati obrnuti smer Posledice 3.2.9.

Teorema 3.2.15. *Neka je $f, g \in \ell^p(I)^+$, $p \in [1, \infty)$. Ako za svaku neprekidnu rastuću konveksnu funkciju $\varphi_\lambda : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $\lambda \geqslant 0$ definisanu sa*

$$\varphi_\lambda(t) := (t - \lambda) \cdot \chi_{[\lambda,\infty)}(t)$$

važi da je

$$\sum_{i \in I} \varphi_\lambda(f(i)) = \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(g(i)), \tag{3.14}$$

onda su funkcije f i g međusobno slabo majorizovane, tj. važi $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$.

Dokaz. Neka je $f, g \in \ell^p(I)^+$, $p \in [1, \infty)$. Na osnovu koraka iz Teoreme 3.2.11, možemo zaključiti da (3.14) povlači (3.7). Dalje, postoji bijekcija $\Omega : I_f^+ \longrightarrow I_g^+$ definisana na osnovu (3.8), koja dalje generiše parcijalne permutacije $P, Q \in pP(\ell^p(I))$ takve da je $g = Pf$ i $f = Qq$, kao u izrazima (3.9) i (3.10). Dakle sledi $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$.

□

Kombinovanjem Posledice 3.2.9 i Teoreme 3.2.15 naredne dve posledice, koje daju potrebne i dovoljne uslove za $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$, se lako dokazuju.

Posledica 3.2.16. *Neka je $f, g \in \ell^p(I)^+$. Tada je $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$ ako i samo ako je*

$$\sum_{i \in I} \varphi_\lambda(f(i)) = \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(g(i))$$

za svaku neprekidnu rastuću konveksnu funkciju $\varphi_\lambda : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $\lambda \geqslant 0$ definisanu sa

$$\varphi_\lambda(t) := (t - \lambda) \cdot \chi_{[\lambda,\infty)}(t).$$

Posledica 3.2.17. *Neka je $f, g \in \ell^p(I)^+$. Tada je $f \prec_w g$ i $g \prec_w f$ ako i samo ako je*

$$\sum_{i \in I} \varphi(f(i)) = \sum_{i \in I} \varphi(g(i))$$

za svaku neprekidnu rastuću konveksnu funkciju $\varphi : [0, b) \longrightarrow [0, \infty)$ za koju važi $\varphi(0) = 0$, gde je $b \in (0, \infty]$ i $f(i), g(i) < b$, $\forall i \in I$.

3.3 Linearna očuvanja slabe majorizacije na $\ell^p(I)^+$, kada je I beskonačan skup

Cilj ove sekcije je pronaći odgovarajuću formu linearnog očuvanja slabe majorizacije na prostoru diskretnih Lebegovih funkcija $\ell^p(I)$, za proizvoljno $p \in [1, \infty)$, kada je I beskonačan skup.

Prvo ćemo preformulisati pojam linearnog očuvanja za relaciju slabe majorizacije "$\prec_w$".

Definicija 3.3.1. Ograničen linearan operator $T : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ je *linearno očuvanje* slabe majorizacije na $\ell^p(I)^+$, ako operator T čuva slabu majorizacionu relaciju, tj. ako važi $Tf \prec_w Tg$ kadgod važi $f \prec_w g$ za neke dve pozitivne funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$.

Skup svih linearnih očuvanja slabe majorizacije na $\ell^p(I)^+$ označavaćemo sa $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$. Naredna lema daje neke osnovne osobine linearnih očuvanja slabe majorizacije.

Lema 3.3.2. *Neka je $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqslant 0$, i neka je $p \in [1, \infty)$. Tada:*

1) $\lambda T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$, za svaki operator $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$;

2) $TK \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$, za svaka dva operatora $T, K \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$.

Dokaz. Neka je dato linearno očuvanje $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant 0$. Tada $f \prec_w g$ povlači $Tf \prec_w Tg$, tj. postoji $D \in DsS(\ell^p(I))$ tako da je $Tf = DTg$. Kako je $\lambda Tf = \lambda DTg = D(\lambda Tg)$, dobijamo da je $(\lambda T)f \prec_w (\lambda T)g$, pa sledi da je $\lambda T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$. Dalje, $f \prec_w g$ implicira $Kf \prec_w Kg$, što dalje implicira da je $TKf \prec_w TKg$. Dakle, $TK \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$. $\square$

Sledeći pomoćni rezultat je prvi korak ka pronalaženju pravog oblika linearnog očuvanja slabe majorizacije na $\ell^p(I)^+$.

Lema 3.3.3. *Neka su $u, v \in \mathbb{R}$, $u > 0, v > 0$, i neka je*

$$\{(u_i, v_i) \mid u_i, v_i \in \mathbb{R}, u_i \geqslant 0, v_i \geqslant 0, i \in I_0\}$$

familija pozitivnih uredjenih parova, pri čemu je I_0 najviše prebrojiv skup. Ako je

$$au + bv \in \{au_i + bv_i \mid i \in I_0\} \tag{3.15}$$

za svaka dva realna broja $a, b > 0$, tada postoji $i \in I_0$ tako da je $u = u_i$ i $v = v_i$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $v \neq v_i$, $\forall i \in I_0$. To sledi da za svaka dva realna broja $a, b > 0$ postoji $k \in I_0$ tako da

$$\frac{b}{a} = \frac{u - u_k}{v_k - v}. \tag{3.16}$$

Kako je

$$card\left(\left\{\frac{b}{a} \mid a, b > 0\right\}\right) = \mathfrak{c} > \aleph_0 \geqslant card\left(\left\{\frac{u - u_k}{v_k - v} \mid k \in I_0\right\}\right)$$

dobijamo da je

$$\left\{\frac{b}{a} \mid a, b > 0\right\} \nsubseteq \left\{\frac{u - u_k}{v_k - v} \mid k \in I_0\right\},$$

što je u kontradikciji sa izrazom (3.16). Zbog toga postoji najmanje jedno $j \in I_0$ takvo da $v = v_j$. Neka je

$$J = \{j \in I_0 \mid v = v_j\}.$$

Dokazaćemo da postoji $j \in J$ tako da je $u = u_j$. Pretpostavimo da poslednji iskaz nije tačan, to jest, $u \neq u_j$, $\forall j \in J$. Sada, sledi da je

$$au + bv \notin \{au_j + bv_j \mid j \in J\}$$

za sve $a, b > 0$. Tada, za skup $I_1 := I_0 \backslash J$, izraz (3.15) takođe važi, i $v \ddagger v_k$, $\forall k \in I_1$. Na osnovu prethodnog razmatranja, ovo vodi u kontradikciju. Dakle, važi $u = u_j$ i $v = v_j$ za neko $j \in J \subset I_0$. $\square$

Na osnovu gornje leme, okarakterisaćemo proizvoljno linearno očuvanje slabe majorizacije.

Teorema 3.3.4. *Neka je I proizvoljan beskonačan skup, i pretpostavimo da je $p \in (1, \infty)$. Ako je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$, tada za svako $i \in I$ postoji najviše jedno $j \in I$ tako da je $\langle Te_j, e_i \rangle > 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $i_0 \in I$ i da postoje dva različita elementa skupa I, $m, n \in I$, $m \neq n$, za koja je $u := \langle Te_m, e_{i_0} \rangle > 0$ i $v := \langle Te_n, e_{i_0} \rangle > 0$. Definišemo skup

$$U := \{k \in I \mid \langle Te_m, e_k \rangle = u\}.$$

Jasno, skup U je neprazan. Kako je, $Te_m \in \ell^p(I)$ i

$$\begin{aligned} \infty > \|Te_m\|^p &= \sum_{k \in I} \langle Te_m, e_k \rangle^p \\ &\geqslant \sum_{k \in U} \langle Te_m, e_k \rangle^p = \sum_{k \in U} u^p, \end{aligned}$$

sledi da je $card(U) < \aleph_0$.

Neka su proizvoljno izabrani $a, b > 0$ i $j \in I \backslash \{n\}$. Ako definišemo funkcije c i d na sledeči način $c := ae_m + be_n$ i $d := ae_m + be_j$, tada je očigledno $c \prec_w d$ i $d \prec_w c$. Sledi da važe relacije

$$Tc \prec_w Td \;\text{ i }\; Td \prec_w Tc$$

jer je T linearno očuvanje slabe majorizacije. Sada, postoji parcijalna permutacija $P \in pP(\ell^p(I))$ za pozitivne elemente I^+_{Tc} i I^+_{Td}, takva da je

$$Tc = PTd,$$

na osnovu Teoreme 3.2.11. Lako zaključujemo da je

$$\langle Tc, e_{i_0} \rangle = \langle aTe_m + bTe_n, e_{i_0} \rangle = au + bv > 0,$$

i

$$Td = aTe_m + bTe_j.$$

Definisaćemo $u_i := \langle Te_m, e_i \rangle$ i $v_i := \langle Te_j, e_i \rangle$, $\forall i \in I_0$, gde je $I_0 := I^+_{Te_m} \bigcup I^+_{Te_j}$. Dobijamo

$$au + bv \in \{au_i + bv_i \mid i \in I_0\},$$

jer je skup I_0 najviše prebrojiv na osnovu činjenice da su $Te_m, Te_j \in \ell^1(I)^+$. Sada, na osnovu Leme 3.3.3 sledi da postoji bar jedno $i \in I_0$ tako da je $u = u_i$ i $v = v_i$. Drugim rečima, za svako $j \in I$, $j \neq n$ postoji $i \in U \subsetneq I$ takvo da je

$$\langle Te_m, e_i \rangle = u_i = u \text{ i } \langle Te_j, e_i \rangle = v_i = v.$$

Na osnovu nejednakosti

$$card(U) < \aleph_0 \leqslant card(I),$$

možemo zaključiti da mora postojati bar jedno $l \in U$, i za tako izabrano l mora postojati niz $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ međusobno različitih elemenata $j_k \in \mathbb{N}$ takvih da važi

$$\langle Te_{j_k}, e_l \rangle = v > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ukoliko iskoristimo činjenicu da niz funkcija $(e_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka nuli u slaboj topologiji od $\ell^p(I)$, $p \in (1, \infty)$, dobijamo kontradikciju sa činjenicom

$$\langle e_{j_k}, T^* e_l \rangle = \langle Te_{j_k}, e_l \rangle = v > 0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

□

Nadalje, posmatraćemo jedan-jedan funkciju $\theta : I \to I$ na osnovu koje ćemo definisati operator $P_\theta : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ na sledeći način:

$$P_\theta(f) := \sum_{k\in I} f(k) e_{\theta(k)}, \tag{3.17}$$

za svaku funkciju $f = \sum_{k\in I} f(k) e_k \in \ell^p(I)$. Očigledno je P_θ oganičen linearan operator na $\ell^p(I)$ sa normom $\|P\| = 1$. Štaviše, ako je θ surjekcija, tada je operator P permutacija.

Ako su $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$ proizvoljna linearna očuvanja slabe majorizacije, kada je $p > 1$, tada ne mora obavezno da sledi da je i operator njihovog zbira linearno očuvanje, tj. ne mora da važi da je $K := K_1 + K_2 \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$. Ova činjenica je potvrđena sledećim primerom.

Primer 3.3.5. Neka je $K(f) := P_{\theta_1}(f) + P_{\theta_n}(f)$, gde su funkcije $\theta_1, \theta_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definisane sa

$$\theta_1(i) = i \text{ i } \theta_n(i) = ni, \ \forall i \in \mathbb{N},$$

za neko fiksirano $n \in \mathbb{N}$. Sada je $P_{\theta_1}(e_1) = e_{\theta_1(1)} = e_1$ i $P_{\theta_n}(e_1) = e_{\theta_n(1)} = e_n$, pa možemo zaključiti

$$\langle K(e_1), e_n \rangle = \langle e_1 + e_n, e_n \rangle = 1.$$

Na sličan način je

$$\langle K(e_n), e_n \rangle = \langle e_n + e_{n^2}, e_n \rangle = 1.$$

Kako je

$$\langle K(e_n), e_n \rangle = \langle K(e_1), e_n \rangle = 1 > 0,$$

to sledi da $K \notin \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$, tj. operator K nije linearno očuvanje slabe majorizacije, na osnovu Teoreme 3.3.4.

Teorema 3.3.6. *Neka je $D \in DsS(\ell^p(I))$, $p \in [1,\infty)$, i pretpostavimo da je*

$$\Theta := \{\theta_k : I \xrightarrow{1-1} I \mid k \in I_0,\ \ \theta_k(I) \cap \theta_j(I) = \varnothing,\ \ k \neq j\}$$

familija koja sadrži jedan-jedan preslikavanja na skupu I koja imaju međusobno disjunktne slike, pri čemu je I_0 najviše prebrojiv skup. Tada postoji najmanje jedan operator $S \in DsS(\ell^p(I))$ takav da važi $P_\theta D = SP_\theta$, $\forall \theta \in \Theta$.

Dokaz. Definisaćemo familiju $\mathcal{S} = \{s_{ij} \mid i,j \in I\}$ na sledeći način:

$$s_{ij} := \begin{cases} \langle De_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)}\rangle, & i,j \in \theta(I),\ \text{za neko } \theta \in \Theta, \\ 0, & i \in \theta(I), j \notin \theta(I),\ \text{za neko } \theta \in \Theta, \\ a, & i \notin \bigcup\limits_{\theta\in\Theta} \theta(I),\ j = i, \\ 0, & i \notin \bigcup\limits_{\theta\in\Theta} \theta(I),\ j \neq i, \end{cases}$$

pri čemu je $0 \leqslant a \leqslant 1$ proizvoljan broj. Lako je zaključiti da je $\sum\limits_{j\in I} s_{ij} \leqslant 1$, $\forall i \in I$. Na osnovu gornje definicije, familija $\mathcal{S}$ može biti predstavljena i na sličan način:

$$s_{ij} := \begin{cases} \langle De_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)}\rangle, & i,j \in \theta(I),\ \text{za neko } \theta \in \Theta, \\ 0, & j \in \theta(I), i \notin \theta(I),\ \text{za neko } \theta \in \Theta, \\ a, & j \notin \bigcup\limits_{\theta\in\Theta} \theta(I),\ j = i, \\ 0, & j \notin \bigcup\limits_{\theta\in\Theta} \theta(I),\ j \neq i. \end{cases}$$

Takođe, jasno se vidi da je $\sum\limits_{i\in I} s_{ij} \leqslant 1$, $\forall j \in I$. Familija $\mathcal{S}$ zadovoljava uslove Teoreme 3.1.9, pa sledi da postoji operator $S \in DsS(\ell^p(I))$ takav da je $\langle Se_j, e_i\rangle = s_{ij}$, $\forall i,j \in I$. Želimo pokazati da $P_\theta D = SP_\theta$, $\forall \theta \in \Theta$. Fiksirajmo, $\theta \in \Theta$. Kako je $D(e_k) = \sum\limits_{i\in I}\langle De_k, e_i\rangle e_i$, dobija se s jedne strane da važi

$$P_\theta D(e_k) = \sum_{i\in I}\langle De_k, e_i\rangle P_\theta(e_i) = \sum_{i\in I}\langle De_k, e_i\rangle e_{\theta(i)}. \tag{3.18}$$

S druge strane je

$$SP_\theta(e_k) = S(e_{\theta(k)}) = \sum_{r\in\theta(I)} s_{r,\theta(k)} e_r + \sum_{r\notin\theta(I)} s_{r,\theta(k)} e_r.$$

Na osnovu definicije skupa S, imamo da je $s_{r,\theta(k)} = 0$, kada je $r \notin \theta(I)$, stoga zaključujemo da je

$$SP_\theta(e_k) = \sum_{r\in\theta(I)} s_{r,\theta(k)} e_r = \sum_{r\in\theta(I)} \langle De_k, e_{\theta^{-1}(r)}\rangle e_r = \sum_{i\in I}\langle De_k, e_i\rangle e_{\theta(i)}. \tag{3.19}$$

Kombinovanjem izraza (3.18) i (3.19), sledi da je

$$SP_\theta(e_k) = P_\theta D(e_k),\ \ \forall k \in I.$$

Ako dalje fiksiramo nasumično jednu funkciju $f = \sum_{k \in I} f(k)e_k \in \ell^p(I)$, tada sledi

$$\begin{aligned} SP_\theta(f) &= SP_\theta\left(\sum_{k\in I} f(k)e_k\right) = \left(\sum_{k\in I} f(k)SP_\theta(e_k)\right) \\ &= \left(\sum_{k\in I} f(k)P_\theta D(e_k)\right) = P_\theta D(f). \end{aligned}$$

□

Primer 3.3.7. Neka familija $\Theta = \{\theta\}$ sadrži samo jednu funkciju. Na osnovu prethodne Teoreme 3.3.6 dobijamo da za svaki operator $D \in DsS(\ell^p(I))$ postoji bar jedan operator $S_D \in DsS(\ell^p(I))$ takav da je

$$P_\theta D = S_D P_\theta.$$

Fiksirajmo $f, g \in \ell^p(I)^+$. Ako važi slaba majorizaciona relacija $f \prec_w g$ tj. $f = Dg$, za neki operator $D \in DsS(\ell^p(I))$, tada važi

$$P_\theta f = P_\theta Dg = S_D P_\theta g,$$

pa je $P_\theta f \prec_w P_\theta g$. Dakle, $P_\theta \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$. Kao specijalan slučaj dobijamo da su permutacije linearna očuvanja slabe majorizacije, $P(\ell^p(I)) \subset \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$.

Teorema 3.3.8. *Neka je I_0 najviše prebrojiv podskup skupa I, i neka je $p \in [1, \infty)$. Pretpostavimo da familija Θ sadrži jedan-jedan preslikavanja na skupu I koja imaju međusobno disjunktne slike, definisana kao u (3.18). Ako je $\lambda \in \ell^p(I_0)^+$, tada je $T := \sum_{k\in I_0} \lambda_k P_{\theta_k} \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$.*

Dokaz. Operator $T = \sum_{k\in I_0} \lambda_k P_{\theta_k}$ je linearan, očigledno. Kako jedan-jedan preslikavanja iz Θ imaju međusobno disjunktne slike, sledi

$$\begin{aligned} \|Tf\|^p &= \sum_{k\in I_0} \sum_{j\in\theta_k(I)} |\lambda_k f(\theta_k^{-1}(j))|^p = \sum_{k\in I_0} \lambda_k^p \sum_{j\in\theta_k(I)} f(\theta_k^{-1}(j))^p \\ &= \|f\|^p \sum_{k\in I_0} \lambda_k^p = \|\lambda\|^p \|f\|^p. \end{aligned}$$

Dakle, T je ograničen linearan operator na $\ell^p(I)$ sa normom $\|T\| = \|\lambda\|$. Neka je $f \prec_w g$, to jest, $f = Dg$ za neki operator $D \in DsS(\ell^p(I))$. Sada, postoji $S \in DsS(\ell^p(I))$ takav da je $P_\theta D = SP_\theta$, $\forall \theta \in \Theta$, na osnovu Teoreme 3.3.6. Sledi

$$\begin{aligned} Tf &= \sum_{k\in I_0} \lambda_k P_{\theta_k}(f) = \sum_{k\in I_0} \lambda_k P_{\theta_k}(Dg) \\ &= \sum_{k\in I_0} \lambda_k SP_{\theta_k}(g) = S\left(\sum_{k\in I_0} \lambda_k P_{\theta_k}(g)\right) = S(Tg). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $Tf \prec_w Tg$. □

Primer 3.3.9. Fiksirajmo prirodan broj n i pretpostavimo da je $\Theta := \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ familija koja sadrži jedan-jedan preslikavanja $\theta_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definisana sa

$$\theta_k(i) = n(i-1) + k, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Neka je $T := \sum\limits_{k=1}^{n} P_{\theta_k}$. Znamo da je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(\mathbb{N})^+)$, po Teoremi 3.3.8. Na osnovu definicije familije Θ, operator T se može predstaviti na sledeći način:

$$Tf = \left[\underbrace{f(1), f(1), \ldots, f(1)}_{\text{n-puta}}, \underbrace{f(2), f(2), \ldots, f(2)}_{\text{n-puta}}, \ldots, \underbrace{f(i), f(i), \ldots, f(i)}_{\text{n-puta}}, \ldots \right]^T$$

to jest $Tf = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f\left[\frac{k}{n}\right] e_k$, gde sa $\left[\frac{k}{n}\right]$ označavamo najmanji prirodan broj ne manji od $\frac{k}{n}$.

Teorema 3.3.10. *Neka je I beskonačan skup, i neka je $p \in (1, \infty)$. Pretpostavimo da je $T : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ ograničen linearan operator. Ako je $Te_j \prec_w Te_k$ i $Te_k \prec_w Te_j$, $\forall k, j \in I$, i ako za svako $i \in I$ postoji najviše jedno $j \in I$ takvo da je $\langle Te_j, e_i \rangle > 0$, tada postoji familija*

$$\Theta := \{\theta_i : I \xrightarrow{1-1} I \mid i \in I_0, \ \ \theta_i(I) \cap \theta_j(I) = \varnothing, \ \ i \neq j\}$$

koja sadrži jedan-jedan preslikavanja sa disjunktnim slikama, gde je $I_0 \subset I$ najviše prebrojiv skup, $\theta_k \in \Theta$, $\forall k \in I_0$, i postoji $(\lambda_k)_{i \in I_0} \in \ell^p(I_0)^+$, tako da se operator T može predstaviti na sledeći način:

$$T = \sum_{k \in I_0} \lambda_k P_{\theta_k}.$$

Dokaz. Jasno se vidi da je

$$I^+_{Te_k} \bigcap I^+_{Te_j} = \varnothing, \tag{3.20}$$

kada je $k, j \in I$, $k \neq j$, po pretpostavci teoreme. Zapravo, ako pretpostavimo da postoji $i \in I^+_{Te_k} \bigcap I^+_{Te_j}$, tada je $\langle Te_k, e_i \rangle > 0$ i $\langle Te_j, e_i \rangle > 0$, što je nemoguće.

Ako je $T = 0$, tada operator T ima željenu formu, ukoliko izaberemo $\lambda = 0$.

Neka je T nenula operator. Sledi da postoji element $l \in I$ takav da je $\langle Te_l, e_i \rangle > 0$, za neko $i \in I^+_{Te_l}$, dakle $I^+_{Te_l} \neq \varnothing$. Na osnovu pretpostavki $Te_j \prec_w Te_k$ i $Te_k \prec_w Te_j$, $\forall k, j \in I$, sledi zaključak da za svako $k \in I$, $\langle Te_k, e_{i_k} \rangle > 0$, za neko $i_k \in I^+_{Te_k}$, po Teoremi 3.2.11. Dakle, $I^+_{Te_k} \neq \varnothing$, $\forall k \in I$. Preciznije, postoje parcijalne permutacije $P_k \in pP(\ell^p(I))$ za koje je

$$P_k Te_l = Te_k, \quad \forall k \in I,$$

gde su permutacije P_k definisane na osnovu bijekcija $\omega_k : I^+_{Te_l} \longrightarrow I^+_{Te_k}$. Naime,

$$P_k e_j = \begin{cases} e_{\omega_k(j)}, & j \in I^+_{Te_l} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Takođe za proizvoljno izabrano $k \in I$ i $i \in I^+_{Te_l}$ imamo da je

$$\langle Te_l, e_i \rangle = \langle Te_k, e_{\omega_k(i)} \rangle. \tag{3.21}$$

Dalje, definišemo familiju

$$\Theta := \{\theta_i : I \to I \mid i \in I_0\},$$

tako da je

$$\theta_i(k) = \omega_k(i), \quad \forall k \in I,$$

gde smo izabrali da je skup $I_0 := I^+_{Te_l}$ najviše prebrojiv. Jasno, ako je $k_1 \neq k_2$ tada je $\theta_i(k_1) = \omega_{k_1}(i) \in I^+_{Te_{k_1}}$ i $\theta_i(k_2) = \omega_{k_2}(i) \in I^+_{Te_{k_2}}$, $\forall i \in I_0$. Sledi da je

$$\theta_i(k_1) \neq \theta_i(k_2), \quad \forall i \in I_0,$$

po (3.20). Dakle, familija Θ sadrži samo jedan-jedan preslikavanja. Na ovaj način smo definisali i operatore P_{θ_i}, $\forall i \in I_0$, kao u (3.17).

Sada želimo da pokažemo da jedan-jedan preslikavanja iz Θ imaju međusobno disjunktne slike. Pretpostavimo suprotno, neka postoje $i, k \in I_0$, $i \neq k$, i neka postoje $j_1, j_2 \in I$ tako da je $\theta_i(j_1) = \theta_k(j_2)$. To dalje sledi da je $i_0 := \omega_{j_1}(i) = \omega_{j_2}(k)$. Kako je $i, k \in I_0$, imamo da je $\langle Te_l, e_i\rangle > 0$ i $\langle Te_l, e_k\rangle > 0$. Na osnovu (3.21), dobijamo

$$\langle Te_{j_1}, e_{i_0}\rangle = \langle Te_{j_1}, e_{\omega_{j_1}(i)}\rangle = \langle Te_l, e_i\rangle > 0$$

i

$$\langle Te_{j_2}, e_{i_0}\rangle = \langle Te_{j_2}, e_{\omega_{j_2}(k)}\rangle = \langle Te_l, e_k\rangle > 0,$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme. Dakle,

$$\Theta = \{\theta_i : I \xrightarrow{1-1} I \mid i \in I_0, \ \theta_i(I) \cap \theta_j(I) = \emptyset, \ i \neq j\}.$$

Definišimo $\lambda_k := \langle Te_l, e_k\rangle$, $\forall k \in I_0$. Bez gubljenja opštosti, neka je I_0 beskonačan skup. Sledi

$$\begin{aligned} Te_k &= P_k Te_l = P_k \left(\sum_{i \in I_0} \langle Te_l, e_i\rangle e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i \in I_0} \langle Te_l, e_i\rangle P_k e_i \right) = \sum_{i \in I_0} \lambda_i e_{\omega_k(i)} = \sum_{i \in I_0} \lambda_i e_{\theta_i(k)}. \end{aligned}$$

Ako fiksiramo jednu funkciju $f = \sum\limits_{k \in I} f(k) e_k \in \ell^p(I)^+$, imamo da je

$$Tf = \sum_{k \in I} f(k) Te_k = \sum_{k \in I} f(k) \sum_{i \in I_0} \lambda_i e_{\theta_i(k)}.$$

S druge strane, $P_{\theta_i}(f) = \sum\limits_{k \in I} f(k) P_{\theta_i} e_k = \sum\limits_{k \in I} f(k) e_{\theta_i(k)}$.

Neka je $\epsilon > 0$. Postoji konačan skup $J_0 \subset I_0$ takav da za svaki konačan skup $\widetilde{I_0} \supset J_0$, važi

$$\left(\sum_{i \in I_0 \setminus \widetilde{I_0}} \lambda_i^p \right) \leqslant \epsilon^p.$$

S druge strane je

$$\begin{aligned}
\left\| Tf - \sum_{i\in\widetilde{I_0}} \lambda_i P_{\theta_i}(f) \right\|^p &= \left\| \sum_{k\in I} f(k) \sum_{i\in I_0} \lambda_i e_{\theta_i(k)} - \sum_{i\in\widetilde{I_0}} \lambda_i \sum_{k\in I} f(k) e_{\theta_i(k)} \right\|^p \\
&= \left\| \sum_{k\in I} f(k) \sum_{i\in I_0\setminus\widetilde{I_0}} \lambda_i e_{\theta_i(k)} \right\|^p \\
&= \sum_{k\in I} \sum_{i\in I_0\setminus\widetilde{I_0}} (f(k)\lambda_i)^p \\
&= \|f\|^p \sum_{i\in I_0\setminus\widetilde{I_0}} \lambda_i^p. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Na osnovu jednakosti (3.22), sledi

$$\left\| T - \sum_{i\in\widetilde{I_0}} \lambda_i P_{\theta_i} \right\| \leqslant \left(\sum_{i\in I_0\setminus\widetilde{I_0}} \lambda_i^p \right)^{1/p} \leqslant \epsilon.$$

Konačno, zaključujemo da operator $\sum_{i\in I_0} \lambda_i P_{\theta_i}$ konvergira po normi ka operatoru T.

□

Sledeća teorema je jedan od najvažnijih rezultata u ovoj disertaciji i ona predstavlja sublimaciju svih rezultata pokazanih u ovoj sekciji.

Teorema 3.3.11. *Neka je $p \in (1,\infty)$, i neka je I beskonačan skup. Pretpostavimo da je $T : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ ograničen linearan operator. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$;

2) $Te_j \prec_w Te_k$ i $Te_k \prec_w Te_j$, $\forall k, j \in I$, i za svako $i \in I$ postoji najviše jedno $j \in I$ takvo da je $\langle Te_j, e_i\rangle > 0$;

3) $T = \sum_{k\in I_0} \lambda_k P_{\theta_k}$, gde je $(\lambda_k)_{i\in I_0} \in \ell^p(I_0)^+$, skup $I_0 \subset I$ je najviše prebrojiv, i

$$\theta_k \in \Theta := \{\theta_i : I \xrightarrow{1-1} I \mid i \in I_0,\ \theta_i(I) \cap \theta_j(I) = \emptyset,\ i \neq j\};$$

Dokaz. Stavka 1) povlači stavku 2) na osnovu Teoreme 3.3.4, stavka 2) povlači 3) po Teoremi 3.3.10, i stavka 3) implicira 1), na osnovu Teoreme 3.3.8. □

Posledica 3.3.12. *Neka je I beskonačan skup, i pretpostavimo da je $p \in (1,\infty)$. Ako je $T \in \mathcal{M}_{pr}(\ell^p(I))$ pozitivan operator, tada je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$. Obrnuto, svako linearno očuvanje slabe majorizacije je i linearno očuvanje standardne majorizacione relacije, tj. $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+) \subsetneq \mathcal{M}_{pr}(\ell^p(I))$.*

Dokaz. Ako je $T \in \mathcal{M}_{pr}(\ell^p(I))$ pozitivan operator, tada je $Te_j \in \ell^p(I)^+$ i $\langle Te_j, e_i \rangle \geqslant 0$, $\forall i, j \in I$. Očigledno, na osnovu Teoreme 1.2.13 imamo da za svako $i \in I$ postoji najviše jedno $j \in I$ tako da je $\langle Te_j, e_i \rangle > 0$. Kako $Te_j \prec Te_k$ i $Te_k \prec Te_j$ povlači relacije $Te_j \prec_w Te_k$ i $Te_k \prec_w Te_j$, stavka 2) Teoreme 3.3.11 je zadovoljena, pa je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$.

Kako svako očuvanje $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$ ima formu $T = \sum\limits_{k \in I_0} \lambda_k P_{\theta_k}$, gde je $(\lambda_k)_{i \in I_0} \in \ell^p(I)^+$, skup $I_0 \subset I$ je najviše prebrojiv i $\theta_k \in \Theta := \{\theta_i : I \xrightarrow{1-1} I \mid i \in I_0,\ \theta_i(I) \cap \theta_j(I) = \varnothing,\ i \neq j\}$, stoga je $T \in \mathcal{M}_{pr}(\ell^p(I))$, po Teoremi 1.2.13, jer znamo da je $(\lambda_k)_{i \in I_0} \in \ell^p(I)^+ \subset \ell^p(I)$. □

Primer 3.3.13. Jasno je da je svaka permutacija $P \in P(\ell^p(I))$ linearno očuvanje standardne i slabe majorizacije. Specijalno, jedinični operator $\mathcal{I}$ je linearno očuvanje standardne i slabe majorizacije. Međutim operatori $-P$ i $-\mathcal{I}$ su očuvanja standardne, ali nisu očuvanja slabe majorizacije, jer nisu pozitivni.

Posledica 3.3.14. *Neka je I beskonačan skup, i pretpostavimo da je $p \in (1, \infty)$. Ako je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$ tada je $Te_j \prec Te_k$ i $Te_k \prec Te_j$, $\forall k, j \in I$, tj., "kolone" linearnog očuvanja slabe majorizacije se razlikuju do na permutaciju.*

Dokaz. Sledi na osnovu Posledice 3.3.12. □

3.4 Linearna očuvanja slabe majorizacije na $\ell^1(I)^+$, kada je I beskonačan skup

U ovoj sekciji biće predstavljena forma linearnog očuvanja slabe majorizacije na $\ell^1(I)^+$, kada je I beskonačan skup. Pokazaće se da ova očuvanja imaju drugačiju formu nego očuvanja slabe majorizacije na $\ell^p(I)^+$ kada je $p \in (1, \infty)$.

Na početku ovog poglavlja, dajemo definiciju linearnog očuvanja slabe majorizacije na $\ell^1(I)^+$.

Definicija 3.4.1. Ograničen linearan operator $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ je linearno *očuvanje slabe majorizacije* na $\ell^1(I)^+$ ako T čuva slabu majorizacionu relaciju, to jest ako je $Tf \prec_w Tg$, kadgod je $f \prec_w g$, za neke dve funkcije $f, g \in \ell^1(I)^+$.

Skup svih linearnih očuvanja slabe majorizacije na $\ell^1(I)^+$ označavaćemo sa $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$. Ovaj skup je zatvoren za kompoziciju na osnovu Leme 3.3.2.

Slično kao u prethodnoj sekciji posmatraćemo preslikavanje $P_\theta : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ definisano sa

$$P_\theta(f) := \sum_{k \in I} f(k) e_{\theta(k)}, \quad f \in \ell^1(I), \tag{3.23}$$

pri čemu je $\theta : I \to I$ jedan-jedan funkcija.

Neka je I_0 najviše prebrojiv podskup skupa I, pri čemu je kao i ranije skup I beskonačan. Biramo proizvoljnu familiju

$$\Theta := \{\theta_i : I \xrightarrow{1-1} I \mid i \in I_0,\ \theta_i(I) \cap \theta_j(I) = \varnothing,\ i \neq j\} \tag{3.24}$$

koju čine jedan-jedan funkcije $\theta_k \in \Theta$, $\forall k \in I_0$, $I_0 \subset I$ i izaberimo nasumično jednu pozitivnu funkciju $(\lambda_i)_{i\in I_0} \in \ell^1(I_0)^+$. Jasno je da je operator definisan na sledeći način:

$$T := \sum_{k\in I_0} \lambda_k P_{\theta_k} \tag{3.25}$$

linearan i ograničen na $\ell^1(I)$. Skup svih takvih operatora označavaćemo sa $\mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$. Podsećamo da linearna očuvanja slabe majorizacije, kada je $p \in (1,\infty)$ imaju gore pomenuti oblik (3.25) (videti Teoremu 3.3.11). Sledeći primer pokazuje da linearna očuvanja slabe majorizacije na prostoru $\ell^1(I)$ mogu imati drugačiji oblik od pomenutog.

Primer 3.4.2. Neka je $h \in \ell^1(I)^+$ proizvoljna funkcija i neka je definisan operator T_h na sledeći način:

$$T_h(f) := h\sum_{i\in I} f(i), \quad \forall f \in \ell^1(I). \tag{3.26}$$

Očigledno je operator T_h linearan i ograničen. Kako važi $T_h(e_j) = h$, $\forall i \in I$, stoga možemo da kažemo da su "kolone" operatora T_h međusobno jednake i poklapaju se sa funkcijom h.

Neka je $f \prec_w g$, za dve funkcije $f, g \in \ell^1(I)^+$. Jasno, $f = Dg$, za neki dvostruko substohastički operator $D \in DsS(\ell^1(I))$. Lako je uočiti da je $\|f\| = \sum_{i\in I} f(i) \leqslant \sum_{i\in I} g(i) = \|g\|$. Zaista, promenom redosleda sumiranja je

$$\|f\| = \sum_{i\in I} f(i) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} g(j)\langle De_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I} g(j)\sum_{i\in I}\langle De_j, e_i\rangle \leqslant \|g\|.$$

Sada je $T_h(f) = h\|f\| \leqslant h\|g\| = T_h(g)$. Neka je $m := \frac{\|f\|}{\|g\|}$. Tada operator $D_1 := m\mathcal{I} \in DsS(\ell^1(I))$, pri čemu $\mathcal{I}$ predstavlja jedinični operator, zadovoljava uslov

$$T_h(f) = D_1 T_h(g),$$

pa sledi zaključak da je T linearno očuvanje slabe majorizacije na $\ell^1(I)^+$.

Ovaj primer pokazuje da je operator T_h definisan sa (3.26) sadržan u skupu svih linearnih očuvanja slabe majorizacije $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, međutim ima drugačiju formu od linearnih očuvanja kada je $p \in (1,\infty)$ čiji je oblik preformulisan za slučaj $p = 1$ u (3.25). Ova konstatacija nas motiviše da pronađemo sve moguće oblike linearnih očuvanja slabe majorizacije na $\ell^1(I)^+$. Označićemo sa $\mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, skup svih ograničenih linearnih operatora koji se mogu predstaviti kao u stavci (3.26). Lako je zaključiti da je skup $\mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ konveksan konus.

Činjenica $\mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+) \subset \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ je pokazana u prethodnom primeru, dok je $\mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+) \subset \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ obezbeđeno Teoremom 3.4.10, koja će biti dokazana u narednom delu, birajući da je $T_2 = 0$, ili na osnovu dokazane Teoreme 3.3.8.

Očigledno je da skup $\mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+) \cap \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ sadrži samo nula operator. Sledeći primer pokazuje da suma dva operatora iz dve različite klase $\mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i $\mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ ne mora uvek biti linearno očuvanje, tj. ne mora pripadati skupu $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$.

Primer 3.4.3. Pretpostavimo da je operator T_{e_r} definisan kao u (3.26), gde je $h = e_r$. Napominjemo da jedinični operator $\mathcal{I}$ pripada skupu $\mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, što se lako može zaključiti. Takođe, $T_{e_r}(e_k) = e_r$, $\forall k \in I$. Sada je

$$(T_{e_r} + \mathcal{I})(e_r) = 2e_r.$$

S druge strane je

$$(T_{e_r} + \mathcal{I})(e_k) = e_r + e_k.$$

Međutim, $2e_r \not\prec_w e_r + e_k$, kada je $k \neq r$. Zaista, moralo bi da važi

$$\langle 2e_r, e_r \rangle = 2 = \langle De_r, e_r \rangle + \langle De_k, e_r \rangle,$$

što povlači da $D \notin DsS(\ell^1(I))$.

U ovom poglavlju će biti dokazana Teorema 3.4.11 koja daje oblik linearnog očuvanja slabe majorizacije na $\ell^1(I)$. Zarad ostvarivanja ovog cilja, biće nam potrebni rezultati koji su prikazani u nastavku.

Lema 3.4.4. *Neka je $u = \{u_j\} \in \mathbb{R}^n$ i neka je $\{u_{ij} \mid i \in I_0,\ j = 1, \ldots, n\}$ familija realnih brojeva, pri čemu je skup I_0 najviše prebrojiv skup. Ako važi*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \in \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_{ij} \mid i \in I_0 \right\}, \tag{3.27}$$

za svako $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ za koje je $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, tada postoji $k \in I_0$ tako da je $u_j = u_{kj}$, za svako $j = 1, \ldots, n$.

Dokaz. Zbog jednostavnosti uvodimo oznake

$$(\mathbb{R}^n)^{++} := \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_j > 0,\ \forall j = 1, \ldots, n\},$$

i

$$u_i := (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}), \ \text{ za svako } \ i \in I_0.$$

Uz pomoć standardnog skalarnog proizvoda $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ možemo preformulisati izraz (3.27) na sledeći način:

$$(\alpha, u) \in \{(\alpha, u_i) \mid i \in I_0\}, \ \ \forall \alpha \in (\mathbb{R}^n)^{++}.$$

Drugim rečima, za svako $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^{++}$, postoji jedno $k \in I_0$ takvo da je $\alpha \in (u - u_k)^\perp$, pri čemu sa $v^\perp$ označavamo skup svih ortogonalnih vektora od v, to jest

$$v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid (v, w) = 0\}.$$

Sada se dobija da je

$$(\mathbb{R}^n)^{++} \subseteq \bigcup_{i \in I_0} (u - u_i)^\perp.$$

Pretpostavimo suprotno da je $u \neq u_i$, za svako $i \in I_0$. Sledi da je $(u - u_i)^{\perp}$ pravi podprostor Banahovog prostora $\mathbb{R}^n$, za svako $i \in I_0$. Podsećamo da su svi ovi pravi potprostori nigde gusti skupovi u $\mathbb{R}^n$.

Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^{++}$. Uvodimo realan broj $r > 0$ na sledeći način:

$$r := min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Dobijamo da je kugla $K := B(x, \frac{r}{2})$ koja je sadržana u prostoru $\mathbb{R}^n$, takođe sadržana i u skupu $(\mathbb{R}^n)^{++} \subseteq \bigcup_{i\in I_0}(u - u_i)^{\perp}$. Ova činjenica je u kontradikciji sa Berovom teoremom o kategorijama, jer najviše prebrojiva unija nigde gustih skupova u Banahovom prostoru $\mathbb{R}^n$ ne može sadržati kuglu. □

Sada možemo Lemu 3.3.3 posmatrati kao specijalan slučaj prethodne leme za $n = 2$.

Sledeća lema nam govori da za svaku "vrstu" linearnog očuvanja slabe majorizacije na $\ell^1(I)$, i za konačan broj nasumično izabranih elemenata te "vrste", pri čemu je najmanje jedan element veći od nule, postoji neka druga "vrsta" u kojoj se isti elementi na istim pozicijama javljaju kao i u pomenutoj vrsti, ali permutovani nekom permutacijom koja je unapred zadata.

Lema 3.4.5. *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ linearno očuvanje slabe majorizacije na $\ell^1(I)^+$ i neka je definisan skup $J := \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, pri čemu su elementi $j_i \in I$, $i = 1, \ldots, n$ proizvoljno izabrani. Neka je $\delta : J \to J$ bijekcija. Za svako $r \in I$ za koje postoji najmanje jedno $j_0 \in J$ takvo da je $\langle Te_{j_0}, e_r\rangle > 0$, postoji $s \in I$ tako da važi*

$$\langle Te_j, e_r\rangle = \langle Te_{\delta(j)}, e_s\rangle, \quad \forall j \in J. \tag{3.28}$$

Dokaz. Fiksirajmo $\alpha = (\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_n}) \in (R^{++})^n$. Kako je,

$$\sum_{j\in J} \alpha_j e_j \prec_w \sum_{j\in J} \alpha_j e_{\delta(j)} \text{ i } \sum_{j\in J} \alpha_j e_{\delta(j)} \prec_w \sum_{j\in J} \alpha_j e_j$$

stoga je,

$$f \prec_w g \text{ i } g \prec_w f,$$

pri čemu smo zbog jednostavnosti uveli oznaku $f := \sum\limits_{j\in J} \alpha_j Te_j$ i $g := \sum\limits_{j\in J} \alpha_j Te_{\delta(j)}$. Jasno, $r \in I_f^+$ i $f(r) = \sum\limits_{j\in J} \alpha_j \langle Te_j, e_r\rangle > 0$, na osnovu pretpostavke u lemi. Sada, postoji parcijalna permutacija $P \in pP(\ell^1(I))$ koja permutuje strogo pozitivne elemente funkcija f i g čiji su indeksi u I_f^+ i I_g^+, respektivno, na osnovu Teoreme 3.2.11. Preciznije,

$$\sum_{j\in J} \alpha_j \langle Te_j, e_r\rangle \in \left\{ \sum_{j\in J} \alpha_j \langle Te_{\delta(j)}, e_i\rangle \mid i \in I_g^+ \right\}.$$

Kako je $card(I_g^+) \leqslant \aleph_0$, tada na osnovu Leme 3.4.4 dobijamo da postoji jedno $s \in I_g^+$ tako da (3.28) je zadovoljeno. □

U sledećoj lemi, pokazaćemo da očuvanja slabe majorizacije ne mogu da sadrže "vrstu" sa dva međusobno različita nenula elementa.

Lema 3.4.6. *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ linearno očuvanje slabe majorizacije na $\ell^1(I)^+$,gde je I beskonačan skup, i neka je $k \in I$ proizvoljno izabrano. Ako postoje dva različita elementa $n, m \in I$ takva da je $\langle Te_n, e_k \rangle > 0$ i $\langle Te_m, e_k \rangle > 0$, tada je $\langle Te_n, e_k \rangle = \langle Te_m, e_k \rangle$.*

Dokaz. Neka su $u := \langle Te_n, e_k \rangle > 0$ i $v := \langle Te_m, e_k \rangle > 0$ i pretpostavimo suprotno, da je $u \neq v$. Definišemo disjunktne skupove $U, V \subset I$ na sledeći način:

$$U := \{i \in I \mid \langle Te_n, e_i \rangle = u\} \ \text{ i } \ V := \{i \in I \mid \langle Te_n, e_i \rangle = v\}. \tag{3.29}$$

Jasno je da je neprazan skup U i konačan, jer je $Te_n \in \ell^1(I)$, to jest

$$\sum_{i \in U} u = \sum_{i \in U} \langle Te_n, e_i \rangle \leqslant \sum_{i \in I} \langle Te_n, e_i \rangle = \|Te_n\| < \infty. \tag{3.30}$$

Slično je i V konačan.

Neka su $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ i neka je $j \in I \backslash \{n, m\}$ proizvoljno izabran. Ako uvedemo oznake

$$c := \alpha_1 e_n + \alpha_2 e_m \ \text{ i } \ d := \alpha_1 e_n + \alpha_2 e_j,$$

tada je

$$c \prec_w d \ \text{ i } \ d \prec_w c.$$

Sledi da je

$$Tc \prec_w Td \ \text{ i } \ Td \prec_w Tc.$$

Sada, postoji parcijalna permutacija $P \in pP(\ell^p(I))$ za pozitivne elemente I^+_{Tc} i I^+_{Td} tako da je

$$Tc = PTd,$$

po Teoremi 3.2.11. Očigledno je

$$\langle Tc, e_k \rangle = \langle \alpha_1 Te_n + \alpha_2 Te_m, e_k \rangle = \alpha_1 u + \alpha_2 v > 0,$$

i

$$\langle Td, e_i \rangle = \langle \alpha_1 Te_n + \alpha_2 Te_j, e_i \rangle = \alpha_1 u_i + \alpha_2 v_i$$

gde su $u_i := \langle Te_n, e_i \rangle$ i $v_i := \langle Te_j, e_i \rangle$, $\forall i \in I^+_{Td} = I^+_{Te_n} \bigcup I^+_{Te_j}$. Dobija se

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v \in \{\alpha_1 u_i + \alpha_2 v_i \mid i \in I^+_{Td}\},$$

pri čemu je I^+_{Td} najviše prebrojiv skup, jer je $Te_n, Te_j \in \ell^1(I)^+$. Po Lemi 3.4.4 postoji $i \in I^+_{Td}$ tako da je $u = u_i$ i $v = v_i$. Drugim rečima, za svako $j \in I \backslash \{n, m\}$, postoji $i \in U \subsetneq I$ tako da je

$$\langle Te_n, e_i \rangle = u_i = u \ \text{ i } \ \langle Te_j, e_i \rangle = v_i = v.$$

Kako je $card(U) < \aleph_0 \leqslant card(I)$, tada postoji bar jedno $r \in U$ za koje postoji niz $(j_i)_{i \in \mathbb{N}}$ različitih elemenata $j_i \in I$ tako da je $\langle Te_{j_i}, e_r \rangle = v > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Definisaćemo familiju $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ gde su $J_i := \{j_1, j_2, \dots j_i\}$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Dalje, za svako $i \in \mathbb{N}$, i za svaku bijekciju $\delta_i : J_i \cup \{n\} \to J_i \cup \{n\}$ definisanu sa

$$\delta_i(n) = j_i, \ \delta_i(j_i) = n \ \text{ i } \ \delta_i(j) = j, \quad \forall j \in J_i \backslash \{j_i\},$$

postoji $r_i \in I$ da važi

$$u = \langle Te_n, e_r \rangle = \langle Te_{\delta_i(n)}, e_{r_i} \rangle = \langle Te_{j_i}, e_{r_i} \rangle, \tag{3.31}$$

$$v = \langle Te_{j_i}, e_r \rangle = \langle Te_{\delta_i(j_i)}, e_{r_i} \rangle = \langle Te_n, e_{r_i} \rangle, \tag{3.32}$$

i

$$v = \langle Te_j, e_r \rangle = \langle Te_{\delta_i(j)}, e_{r_i} \rangle = \langle Te_j, e_{r_i} \rangle, \tag{3.33}$$

$\forall j \in J_i \backslash \{j_i\}$, na osnovu Leme 3.4.5.

Dokazaćemo da $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sadrži samo međusobno različite elemente. Da bi smo to dokazali, pretpostavimo suprotno da postoje $t, s \in \mathbb{N}$ tako da je $t < s$ i $r_t = r_s$. Sada, na osnovu izraza (3.31) za dato t, dobijamo da je $u = \langle Te_{j_t}, e_{r_t} \rangle$. Kako je $s > t$, važi $\delta_s(j_t) = j_t$ i $\delta_t(j_t) = n$, pa na osnovu (3.33) se dobija

$$v = \langle Te_{j_t}, e_{r_s} \rangle = \langle Te_{j_t}, e_{r_t} \rangle = u,$$

što je nemoguće, dakle $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sadrži samo međusobno različite elemente. Sada imamo da je $r_i \in V$, $\forall i \in \mathbb{N}$ na osnovu (3.32), pa je V je beskonačan skup, što je kontradikcija.

□

Sledeća lema je nadogradnja postojećeg rezultata. Naime, ako postoji "vrsta" koja sadrži najmanje dva nenula elementa, tada su svi elementi u toj "vrsti" jednaki.

Lema 3.4.7. *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ linearno očuvanje slabe majorizacije na $\ell^1(I)^+$, gde je I beskonačan skup, i neka je $k \in I$ proizvoljno izabrano. Ako postoje dva različita elementa $n, m \in I$ takva da je $\langle Te_n, e_k \rangle > 0$ i $\langle Te_m, e_k \rangle > 0$, tada je $\langle Te_j, e_k \rangle = \langle Te_n, e_k \rangle = \langle Te_m, e_k \rangle$, za svako $j \in I$.*

Dokaz. Na osnovu prethodne Leme 3.4.6, dobija se

$$u := \langle Te_n, e_k \rangle = \langle Te_m, e_k \rangle.$$

Ponovo na osnovu iste leme može se zaključiti da ako postoji $i \in I$ tako da je $\langle Te_i, e_k \rangle \neq u$, jedino može važiti $\langle Te_i, e_k \rangle = 0$.

Pretpostavimo da postoji $l \in I$ tako da je $\langle Te_l, e_k \rangle = 0$. Definišemo skup

$$D := \{i \in I \mid \langle Te_n, e_i \rangle = \langle Te_m, e_i \rangle = u\}.$$

Skup D je konačan i neprazan. Ako za proizvoljno izabrano $j \in I\backslash\{n,m,l\}$ definišemo permutaciju $\Delta_j : \{n,m,l,j\} \to \{n,m,l,j\}$ za koju je $\Delta_j(n) = n$, $\Delta_j(m) = m$, $\Delta_j(j) = l$ i $\Delta_j(l) = j$, tada postoji $i \in D$ tako da je

$$\begin{aligned} u &= \langle Te_n, e_k\rangle = \langle Te_{\Delta_j(n)}, e_i\rangle = \langle Te_n, e_i\rangle \\ u &= \langle Te_m, e_k\rangle = \langle Te_{\Delta_j(m)}, e_i\rangle = \langle Te_m, e_i\rangle \\ 0 &= \langle Te_l, e_k\rangle = \langle Te_{\Delta_j(l)}, e_i\rangle = \langle Te_j, e_i\rangle \end{aligned}$$

na osnovu Leme 3.4.5. Zato što je D konačan skup, sledi da postoji $r \in D$ i postoji niz $(j_i)_{i\in\mathbb{N}}$ različitih elemenata $j_i \in I\backslash\{n,m,l\}$ takvih da je $\langle Te_{j_i}, e_r\rangle = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Dalje, uvodimo familiju $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ za koju je $J_i := \{j_1, j_2, \dots j_i\}$ za svako $i \in \mathbb{N}$.

Na osnovu Leme 3.4.5, za svako $i \in \mathbb{N}$ i za svaku bijekciju $\delta_i : J_i \cup \{n,m\} \to J_i \cup \{n,m\}$, definisanu sa

$$\delta_i(n) = n,\ \delta_i(j_i) = m,\ \delta_i(m) = j_i \ \text{ i } \ \delta_i(j) = j, \quad \forall j \in J_i\backslash\{j_i\},$$

postoji $r_i \in I$ tako da je

$$\begin{gathered} u = \langle Te_n, e_r\rangle = \langle Te_{\delta_i(n)}, e_{r_i}\rangle = \langle Te_n, e_{r_i}\rangle, \\ u = \langle Te_m, e_r\rangle = \langle Te_{\delta_i(m)}, e_{r_i}\rangle = \langle Te_{j_i}, e_{r_i}\rangle, \\ 0 = \langle Te_{j_i}, e_r\rangle = \langle Te_{\delta_i(j_i)}, e_{r_i}\rangle = \langle Te_m, e_{r_i}\rangle. \end{gathered} \tag{3.34}$$

i

$$0 = \langle Te_j, e_r\rangle = \langle Te_{\delta_i(j)}, e_{r_i}\rangle = \langle Te_j, e_{r_i}\rangle, \quad \forall j \in J_i\backslash\{j_i\}. \tag{3.35}$$

Sada, na osnovu izraza (3.34) za $t \in \mathbb{N}$, zaključuje se da je $u = \langle Te_{j_t}, e_{r_t}\rangle$. Ako je $s > t$, tada je $j_t \in J_s\backslash\{j_s\}$, pa na osnovu (3.35) važi $\langle Te_{j_t}, e_{r_s}\rangle = 0$, što povlači dalje da je $r_s \neq r_t$, $\forall t, s \in \mathbb{N}$, kadgod je $t \neq s$. Kako je $r_i \in U$, $\forall i \in \mathbb{N}$, pri čemu je U definisano sa (3.29), sledi da je U beskonačan skup, što je u kontradikciji sa stavkom (3.30).

□

Potrebni i dovoljni uslovi da operator T pripada skupu $\mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ su prikazani u sledećoj teoremi.

Teorema 3.4.8. *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ ograničen linearan operator, pri čemu je I beskonačan skup. Tada, $Te_j \prec_w Te_k$ i $Te_k \prec_w Te_j$, $\forall k, j \in I$, i za svako $i \in I$ postoji najviše jedno $j \in I$ tako da je $\langle Te_j, e_i\rangle > 0$ ako i samo ako je $T \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$.*

Dokaz. Ako je T nula operator, tada očigledno $T \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$. Neka je sada $T \neq 0$, i pretpostavimo, na primer da je $\langle Te_m, e_n\rangle > 0$. Na osnovu pretpostavke teoreme, za svako $k \in I$, funkcije Te_m i Te_k, se razlikuju do na parcijalnu permutaciju P_k koja odgovara bijekciji $\omega_k : I^+_{Te_m} \longrightarrow I^+_{Te_k}$ i važi

$$P_k Te_m = Te_k \ \text{ i } \ P_k e_j = e_{\omega_k(j)},$$

kadgod je $j \in I^+_{Te_m}$ i $P_k e_j = 0$ inače, po Teoremi 3.2.11. Specijalno, $Te_k \neq 0$, za svako $k \in I$.

Familiju Θ definisaćemo na sledeći način:

$$\Theta := \{\theta_i : I \to I \mid i \in I_0\}$$

gde su $\theta_i(k) = \omega_k(i)$, $\forall k \in I$, i pri čemu je $I_0 := I^+_{Te_m}$ najviše prebrojiv skup. Lako je zaključiti da su preslikavanja θ_i jedan-jedan.

Pretpostavimo da postoje $k_1, k_2 \in I_0$, $k_1 \neq k_2$, i postoje $j_1, j_2 \in I$ tako da je

$$\theta_{k_1}(j_1) = \theta_{k_2}(j_2).$$

Sledi da je $i_0 := \omega_{j_1}(k_1) = \omega_{j_2}(k_2)$. Kako je $k_1, k_2 \in I_0$, imamo da je $\langle Te_m, e_{k_1}\rangle > 0$ i $\langle Te_m, e_{k_2}\rangle > 0$. Na osnovu prethodno navedenih činjenica može se zaključiti

$$\langle Te_{j_1}, e_{i_0}\rangle = \langle Te_{j_1}, e_{\omega_{j_1}(k_1)}\rangle = \langle Te_m, e_{k_1}\rangle > 0$$

i

$$\langle Te_{j_2}, e_{i_0}\rangle = \langle Te_{j_2}, e_{\omega_{j_2}(k_2)}\rangle = \langle Te_m, e_{k_2}\rangle > 0,$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom teoreme, stoga zaključujemo da je pretpostavka netačna, to jest da familija Θ sadrži preslikavanja koja imaju međusobno disjunktne slike. Dalje je

$$\begin{aligned} Te_i &= P_i Te_m = \left(\sum_{k\in I_0} \langle Te_m, e_k\rangle P_i e_k\right) \\ &= \sum_{k\in I_0} \lambda_k e_{\omega_i(k)} = \sum_{k\in I_0} \lambda_k e_{\theta_k(i)}, \end{aligned}$$

pri čemu je $\lambda_k := \langle Te_m, e_k\rangle$, $\forall k \in I_0$. Sledi da je

$$Tf = \sum_{i\in I} f(i) Te_i = \sum_{i\in I} f(i) \sum_{k\in I_0} \lambda_k e_{\theta_k(i)}. \tag{3.36}$$

za proizvoljnu funkciju f sa reprezentacijom $f = \sum\limits_{i\in I} f(i)e_i \in \ell^1(I)^+$, S druge strane je

$$P_{\theta_k}(f) = \sum_{i\in I} f(i) P_{\theta_k} e_i = \sum_{i\in I} f(i) e_{\theta_k(i)}, \tag{3.37}$$

na osnovu (3.23).

Na osnovu definicije niza $\{\lambda_k\}_{k\in I_0}$ sledi da je $\{\lambda_k\}_{k\in I_0} \in \ell^1(I_0)$, pa postoji konačan skup $J_0 \subset I_0$ tako da za svaki konačan skup $\widetilde{I_0} \supset J_0$, imamo da je

$$\sum_{k\in I_0\setminus \widetilde{I_0}} \lambda_k \leqslant \epsilon,$$

gde je $\epsilon > 0$ proizvoljano. Kombinovanjem izraza (3.36) i (3.37) dobija se

$$\begin{aligned}
\Big\| Tf - \sum_{k \in \widetilde{I_0}} \lambda_k P_{\theta_k}(f) \Big\| &= \Big\| \sum_{i \in I} f(i) \sum_{k \in I_0} \lambda_k e_{\theta_k(i)} - \sum_{k \in \widetilde{I_0}} \lambda_k \sum_{i \in I} f(i) e_{\theta_k(i)} \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{i \in I} f(i) \sum_{k \in I_0 \setminus \widetilde{I_0}} \lambda_k e_{\theta_k(i)} \Big\| \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_0 \setminus \widetilde{I_0}} f(i) \lambda_k \\
&= \|f\| \sum_{k \in I_0 \setminus \widetilde{I_0}} \lambda_k \leqslant \epsilon \|f\|,
\end{aligned}$$

Dakle, operator $\sum_{k \in I_0} \lambda_k P_{\theta_k}$ konvergira po normi ka operatoru T.

Obrnuto, pretpostavimo da $T \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, tj. neka je operator T definisan sa (3.25). Kako familija sadrži Θ jedan-jedan funkcije sa međusobno disjunktim slikama, to znači da za svako $r \in \bigcup_{k \in I_0} (\theta_k(I))$ postoji tačno jedno $t \in I$ i jedno $k_0 \in I_0$, tako da je $\theta_{k_0}(t) = r$ i $\theta_i(t) \neq r$, $\forall i \in I_0 \setminus \{k_0\}$. Takođe, za svako $t_1 \neq t$ imamo da je $\theta_{k_0}(t_1) = r_1 \neq r$, stoga je

$$\begin{aligned}
\langle T e_{t_1}, e_r \rangle &= \sum_{k \in I_0} \lambda_k \langle P_{\theta_k} e_{t_1}, e_r \rangle \\
&= \lambda_{k_0} \langle P_{\theta_{k_0}} e_{t_1}, e_r \rangle = \lambda_{k_0} \langle e_{r_1}, e_r \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Ako je $r \notin \bigcup_{k \in I_0} (\theta_k(I))$, tada je $\langle P_{\theta_k} e_j, e_r \rangle = 0$, $\forall k \in I_0$, dakle $\langle T e_j, e_r \rangle = 0$, $\forall j \in I$.

□

Skup $\mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ nije vektorski prostor ni konveksan konus, što se može videti u sledećem primeru. Preciznije, za $F_1, F_2 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ ne mora uvek biti $F = F_1 + F_2 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$.

Primer 3.4.9. Neka su $\varphi_1, \varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definisane sa

$$\varphi_1(j) = j \quad \text{i} \quad \varphi_k(j) = kj, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

za neko $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, i neka je $F(f) := P_{\varphi_1}(f) + P_{\varphi_k}(f)$.

Sada je $P_{\varphi_1}(e_1) = e_{\varphi_1(1)} = e_1$ i $P_{\varphi_k}(e_1) = e_{\varphi_k(1)} = e_k$, pa sledi da je

$$\langle F(e_1), e_k \rangle = \langle e_1 + e_k, e_k \rangle = 1.$$

Takođe,

$$\langle F(e_k), e_k \rangle = \langle e_k + e_{k^2}, e_k \rangle = 1.$$

Međutim, $P_{\varphi_1}(e_2) = e_{\varphi_1(2)} = e_2$ i $P_{\varphi_k}(e_2) = e_{\varphi_k(2)} = e_{2k}$, pa je

$$\langle F(e_2), e_k \rangle = \langle e_2 + e_{2k}, e_k \rangle = 0.$$

Na osnovu činjenica $\langle F(e_k), e_k \rangle = \langle K(e_1), e_k \rangle = 1 > 0$ i $\langle F(e_2), e_k \rangle = 0$, sledi da $F \notin \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, po Teoremi 3.4.8.

Na osnovu prethodnih rezultata, pokazaće se da se može izvršiti dekompozicija svakog linearnog očuvanja slabe majorizacije na dva jedinstvena operatora definisana sa (3.25) i (3.26). Takođe, uspostavićemo dovoljne uslove da suma dva operatora definisana sa (3.25) i (3.26) bude linearno očuvanje slabe majorizacije.

Teorema 3.4.10. *Neka je I beskonačan skup. Ako je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ tada postoje jedinstveni operatori $T_1 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i $T_2 \in \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ takvi da je $T = T_1 + T_2$. Obrnuto, ako su data dva operatora $T_1 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i $T_2 \in \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ na sledeći način:*

$$\langle T_1 f, e_{i_2}\rangle = \langle T_2 f, e_{i_1}\rangle = 0, \;\; \forall i_1 \in I_1, \;\; \forall i_2 \in I_2, \tag{3.38}$$

gde je $I_1, I_2 \subset I$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ i $I_1 \cup I_2 = I$, tada važi $T := T_1 + T_2 \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$.

Dokaz. Neka su data dva operatora $T_1 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i $T_2 \in \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ tako da je zadovoljeno (3.38). Na osnovu definicije skupa $\mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ imamo da je

$$T_1 = \sum_{k\in I_0} \lambda_k P_{\theta_k},$$

pri čemu je Θ definisano sa (3.24). Bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\lambda_k > 0$, $\forall k \in I_0$. Fiksiramo $i_2 \in I_2$. Tada je

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T_1 f, e_{i_2}\rangle = \sum_{k\in I} f(k)\langle T_1 e_k, e_{i_2}\rangle \\ &= \sum_{k\in I} f(k) \sum_{i\in I_0} \lambda_i \langle e_{\theta_i(k)}, e_{i_2}\rangle, \;\; \forall f \in \ell^1(I). \end{aligned}$$

Stoga je $\langle e_{\theta_i(k)}, e_{i_2}\rangle = 0$, $\forall k \in I$, $\forall i \in I_0$. Dakle, $I_2 \bigcap \left(\bigcup_{i\in I_0} \theta_i(I)\right) = \varnothing$. Pretpostavimo da je $f \prec_w g$, za neke funkcije $f, g \in \ell^1(I)$, to jest, neka je $f = Dg$, za neki operator $D \in DsS(\ell^1(I))$. Sledi da postoji operator $\widetilde{D} \in DsS(\ell^1(I))$ takav da je

$$P_{\theta_k} D = \widetilde{D} P_{\theta_k}, \;\; \forall k \in I_0,$$

na osnovu Teoreme 3.3.6. Lako je zaključiti da je $T_1 D = \widetilde{D} T_1$.

Možemo naći u dokazu pomenute Teoreme 3.3.6 definiciju ovog operatora $\widetilde{D}$ koja je data sa

$$\langle \widetilde{D} e_j, e_i\rangle = \begin{cases} \langle D e_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)}\rangle, & i, j \in \theta(I), \text{ za neko } \theta \in \Theta, \\ 0, & i \in \theta(I), j \notin \theta(I), \text{ za neko } \theta \in \Theta, \\ a, & i \notin \bigcup_{\theta\in\Theta} \theta(I), \; j = i, \\ 0, & i \notin \bigcup_{\theta\in\Theta} \theta(I), \; j \neq i, \end{cases}$$

i

$$\langle \widetilde{D} e_j, e_i\rangle = \begin{cases} \langle D e_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)}\rangle, & i, j \in \theta(I), \text{ za neko } \theta \in \Theta, \\ 0, & j \in \theta(I), i \notin \theta(I), \text{ za neko } \theta \in \Theta, \\ a, & j \notin \bigcup_{\theta\in\Theta} \theta(I), \; j = i, \\ 0, & j \notin \bigcup_{\theta\in\Theta} \theta(I), \; j \neq i. \end{cases}$$

Očigledno, operator $\widetilde{D}$ nije jedinstven. Takođe, kao što znamo $f = Dg$ povlači

$$\|f\| = \sum_{i\in I} f(i) \leqslant \sum_{i\in I} g(i) = \|g\|,$$

pa ako stavimo da je $a := \frac{\|f\|}{\|g\|} \leqslant 1$, dobijamo

$$T_2Dg = T_2f = h\sum_{i\in I} f(i) = ah\sum_{i\in I} g(i) = aT_2g,$$

za neku funkciju $h \in \ell^1(I)^+$. Takođe, na osnovu definicije operatora $\widetilde{D}$, dobija se $\widetilde{D}e_j = ae_j$, $\forall j \in I_2$ što povlači $\widetilde{D}T_2l = aT_2l$, za svaku funkciju $l \in \ell^1(I)^+$. Sada je

$$\begin{aligned}\widetilde{D}(T_1+T_2)g &= \widetilde{D}T_1g + \widetilde{D}T_2g = \widetilde{D}T_1g + aT_2g = T_1Dg + T_2Dg\\ &= (T_1+T_2)Dg = (T_1+T_2)f.\end{aligned}$$

Konačno, imamo da je $(T_1+T_2)f \prec_w (T_1+T_2)g$, dakle $T := T_1 + T_2 \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$. Definišemo skup $I_1 \subset I$, tako da za proizvoljno izabrano $k \in I_1$ je $\langle Te_j, e_k\rangle > 0$ za najviše jedno $j \in I$. Takođe, neka je $I_2 := I\backslash I_1$. Drugim rečima, za svako $i \in I_2$, ako je $\langle Te_j, e_i\rangle > 0$ za najmanje jedno $j \in I$, tada je $\langle Te_j, e_i\rangle = \langle Te_k, e_i\rangle$, $\forall j,k \in I$, na osnovu Leme 3.4.7.

Neka je dat operator $T_1 : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ definisan sa

$$T_1f(i) := \begin{cases} Tf(i), & i \in I_1,\\ 0, & i \in I_2.\end{cases}$$

Slično, definišemo operator $T_2 : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ sa

$$T_2f(i) := \begin{cases} Tf(i), & i \in I_2,\\ 0, & i \in I_1.\end{cases}$$

Jasno, važi $T = T_1 + T_2$, i operatori T_1 i T_2 su ograničeni. Tvrdimo da važi $T_1 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i $T_2 \in \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$. U nastavku ćemo to i dokazati.

Prvo, ako je $I_2 = \varnothing$, tada je $T_2 = 0 \in \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i $T_1 = T \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ na osnovu Teoreme 3.4.8, jer $T_1 = T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ implicira

$$T_1e_j \prec_w T_1e_k \;\text{ i }\; T_1e_k \prec_w T_1e_j, \;\; \forall k,j \in I.$$

Sada, neka je $I_1, I_2 \neq \varnothing$. Na osnovu definicije operatora T_2 sledi da je

$$\begin{aligned}T_2e_r &= \sum_{k\in I}\langle T_2e_r, e_k\rangle e_k = \sum_{k\in I_2}\langle T_2e_r, e_k\rangle e_k\\ &= \sum_{k\in I_2}\langle T_2e_s, e_k\rangle e_k = \sum_{k\in I}\langle T_2e_s, e_k\rangle e_k = T_2e_s,\end{aligned} \tag{3.39}$$

za proizvoljno izabrane $r, s \in I$. Neka je $h = T_2e_j$ za bilo koje $j \in I$. Sada je

$$T_2f = T_2\left(\sum_{k\in I} f(k)e_k\right) = h\left(\sum_{k\in I} f(k)\right), \tag{3.40}$$

dakle, $T_2 \in \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$.

Definišemo skup

$$I^1_{Te_j} := \left\{ i \in I^+_{Te_j} \mid Te_j(i) = max\{Te_j(j) \mid j \in I^+_{Te_j}\} \right\}$$

i skupove

$$I^n_{Te_j} := \left\{ i \in I^+_{Te_j} \mid Te_j(i) = max \left\{ Te_j(j) \mid j \in I^+_{Te_j} \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} I^k_{Te_j} \right\} \right\}$$

kada je $n \geqslant 2$. Fiksiramo $r, s \in I$. Kako je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, sledi da je

$$Te_r \prec_w Te_s \ \text{ i } \ Te_s \prec_w Te_r,$$

to jest, postoji parcijalna permutacija $P \in pP(\ell^1(I))$ koja odgovara bijekciji

$$\theta : I^+_{Te_r} \to I^+_{Te_s}$$

za koju je

$$\langle Te_r, e_i \rangle = \langle Te_s, e_{\theta(i)} \rangle, \ \ \forall i \in I^+_{Te_r},$$

na osnovu Teoreme 3.2.11. Preciznije, postoje bijekcije $\omega_k : I^k_{Te_r} \longrightarrow I^k_{Te_s}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ako je $I^k_f \neq \varnothing$, koje određuju bijekciju $\theta : I^+_{Te_r} \to I^+_{Te_s}$ na sledeći način:

$$\theta(i) := \omega_k(i) \in I^k_{Te_s}, \tag{3.41}$$

kada je $i \in I^k_{Te_r}$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Znamo da je $card(I^k_{Te_r}) = card(I^k_{Te_s})$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Kako je $\forall i \in I_2$, $\langle Te_r, e_i \rangle = \langle Te_s, e_i \rangle$, stoga je $card(I^k_{Te_r} \backslash I_2) = card(I^k_{Te_s} \backslash I_2)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, pa možemo definisati bijekcije

$$\widetilde{\omega}_k : I^k_{Te_r} \backslash I_2 \longrightarrow I^k_{Te_s} \backslash I_2, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

kadgod je $I^k_{Te_r} \neq \varnothing$.

Sada, definišemo jednu bijekciju na osnovu prethodnih na sledeći način:

$$\widetilde{\theta} : I^+_{Te_r} \backslash I_2 \to I^+_{Te_s} \backslash I_2$$

takvu da je

$$\widetilde{\theta}(i) := \widetilde{\omega}_k(i),$$

kada je $i \in I^k_{Te_r} \backslash I_2$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Sledi da postoji parcijalna permutacija $\widetilde{P} \in pP(\ell^1(I))$ koja je određena bijekcijom $\widetilde{\theta} : I^+_{Te_r} \backslash I_2 \to I^+_{Te_s} \backslash I_2$ tako da je

$$\langle Te_r, e_i \rangle = \langle Te_s, e_{\widetilde{\theta}(i)} \rangle, \quad \forall i \in I^+_{Te_r} \backslash I_2.$$

Dakle, važi i uslov

$$T_1 e_r \prec_w T_1 e_s \ \text{ i } \ T_1 e_s \prec_w T_1 e_r$$

pa je $T_1 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ na osnovu Teoreme 3.4.8.

Konačno, ako je $I_1 = \varnothing$, tada je na osnovu izraza (3.39) i (3.40) $T_1 = 0 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i $T_2 = T \in \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, jer je u tom slučaju $I_2 = I$.

Pretpostavimo da postoji još jedan par operatora K_1, K_2 takav da je $K_1 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, $K_2 \in \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i $T = K_1 + K_2$. Sada je $T_1 - K_1 = K_2 - T_2$. Za operator T_2 (isto važi i za K_2), na osnovu definicije (3.26) lako se vidi da je

$$T_2 e_r = T_2 e_s, \quad \forall r, s \in I.$$

S druge strane na osnovu Teoreme 3.4.8, (za svako $i \in I$, postoji najviše jedno $j_1 \in I$ za koje je $\langle T_1 e_{j_1}, e_i\rangle > 0$) za svako $i \in I$ postoji bar jedno $t_i \in I$ tako da je

$$\langle T_1 e_{t_i}, e_i\rangle = \langle K_1 e_{t_i}, e_i\rangle = 0.$$

Na osnovu ovih argumenata je

$$0 = \langle (T_1 - K_1) e_{t_i}, e_i\rangle = \langle (K_2 - T_2) e_{t_i}, e_i\rangle = \langle (K_2 - T_2) e_j, e_i\rangle, \quad \forall j \in I,$$

pa važi $T_1 = K_1$ i $T_2 = K_2$, što dokazuje jedinstvenost posmatrane dekompozicije.

□

Sada je lako zaključiti, na osnovu prethodne teoreme, zašto suma dva operatora Te_r i $\mathcal{I}$ u Primeru 3.4.3 nije linearno očuvanje slabe majorizacije.

Sledeća teorema je kolekcija svih rezultata dokazanih u prethodnom delu.

Teorema 3.4.11. *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ ograničen linearan operator, gde je I beskonačan skup. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$;

2) Postoje operatori $T_1 \in \mathcal{M}^1_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i $T_2 \in \mathcal{M}^2_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ i disjunktni skupovi $I_1, I_2 \subset I$, $I_1 \cup I_2 = I$ tako da je $T = T_1 + T_2$ pri čemu su operatori T_1, T_2 određeni na sledeći način:

$$\langle T_1 f, e_{i_2}\rangle = \langle T_2 f, e_{i_1}\rangle = 0, \quad \forall i_1 \in I_1, \quad \forall i_2 \in I_2;$$

3) Postoji najviše prebrojiv skup $I_0 \subset I$ i postoji familija

$$\Theta := \{\theta_i : I \xrightarrow{1-1} I \mid i \in I_0, \ \theta_i(I) \cap \theta_j(I) = \varnothing, \ i \neq j\}$$

koja sadrži jedan-jedan funkcije sa međusobno disjunktnim slikama $\theta_k \in \Theta$, $\forall k \in I_0$, i postoji $(\lambda_i)_{i \in I_0} \in \ell^1(I_0)^+$, tako da je

$$T = \sum_{k \in I_0} \lambda_k P_{\theta_k} + T_h,$$

gde je $T_h(f) := h \sum_{k \in I_0} f(k)$, za funkciju $h \in \ell^1(I)^+$ za koju je $\langle h, e_j\rangle = 0$, za svako $j \in \theta_i(I)$ i za svako $i \in I_0$;

4) $Te_j \prec_w Te_k$ i $Te_k \prec_w Te_j$, $\forall k, j \in I$, i za svako $i \in I$, i važi da ili postoji tačno jedno $j \in I$ za koje je $\langle Te_j, e_i\rangle > 0$ ili je skup $\{\langle Te_j, e_i\rangle \mid j \in I\}$ jednoelementni.

Posledica 3.4.12. *Neka je I beskonačan skup. Ako je $T \in \mathcal{M}_{pr}(\ell^1(I))$ pozitivan operator, tada je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, i obrnuto, svako linearno očuvanje slabe majorizacije je i linearno očuvanje standardne majorizacije, tj. važi $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+) \subsetneq \mathcal{M}_{pr}(\ell^1(I))$.*

Dokaz. Ako je $T \in \mathcal{M}_{pr}(\ell^1(I))$ pozitivan operator, tada je $Te_j \in \ell^p(I)^+$, $\forall j \in I$. Imamo da za svako $i \in I$, ili postoji tačno jedno $j \in I$ za koje je $\langle Te_j, e_i\rangle > 0$ ili je skup $\{\langle Te_j, e_i\rangle \mid j \in I\}$ jednoelementni, na osnovu Teoreme 1.2.14, 1) $\leftrightarrow$ 4). Kako, $Te_j \prec Te_k$ i $Te_k \prec Te_j$ povlači $Te_j \prec_w Te_k$ i $Te_k \prec_w Te_j$, stavka 4) Teoreme 3.4.11 je zadovoljena, stoga je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$.

Kada je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ pozitivan, tada je $T \in \mathcal{M}_{pr}(\ell^1(I)^+)$, na osnovu Teoreme 3.4.11, 1) $\rightarrow$ 3) i Teoreme 1.2.14, 3) $\rightarrow$ 1). Očigledno je jedinični operator $\mathcal{I}$ linearno očuvanje slabe i standardne majorizacije, međutim $-\mathcal{I} \in \mathcal{M}_{pr}(\ell^1(I))$ i $-\mathcal{I} \notin \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, dakle $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ je pravi podskup od $\mathcal{M}_{pr}(\ell^1(I))$. □

3.5 Topološke osobine skupa linearnih očuvanja slabe majorizacije

3.5.1 Zatvorenost skupa linearnih očuvanja $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$

U ovoj sekciji biće pokazano da je skup svih linearnih očuvanja slabe majorizacije ograničen i zatvoren podskup skupa svih ograničenih linearnih operatora na diskretnom Lebegovom prostoru $\ell^p(I)$, u odnosu na operatorsku normu. Kada je I konačan skup, ova činjenica će biti dokazana na osnovu kompaktnosti skupa $DsS(\ell^p(I))$. Kada je I beskonačan skup, Primer 3.5.3 pokazuje da skup $DsS(\ell^p(I))$ nije kompaktan. Iz tog razloga, s obzirom da se kompaktnost u ovom slučaju ne može iskoristiti, zatvorenost skupa svih očuvanja $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$ biće dokazana drugačijim metodama, koje su opisane u nastavku.

Teorema 3.5.1. *Neka je I proizvoljan neprazan skup, i neka je $p \in [1, \infty)$. Skup $DsS(\ell^p(I))$ je ograničen i zatvoren po normi podskup skupa svih ograničenih linearnih operatora na $(\ell^p(I))$.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.1.7, znamo da je norma substohastičkog operatora najviše 1, pa je skup $DsS(\ell^p(I))$ ograničen.

Neka je $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz dvostruko substohastičkih operatora $D_k \in DsS(\ell^p(I))$ koji konvergira po normi ka ograničenom linearnom operatoru $D : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$. Za fiksirane $i_0, j_0 \in I$ imamo da je

$$|\langle D_k e_{j_0} - De_{j_0}, e_{i_0}\rangle|^p \leqslant \sum_{i\in I} |\langle D_k e_{j_0} - De_{j_0}, e_i\rangle|^p \leqslant \|D_k e_{j_0} - De_{j_0}\|^p \to 0,$$

kada je $k \to \infty$. Sledi da je

$$\lim_{k\to\infty} \langle D_k e_j, e_i\rangle = \langle De_j, e_i\rangle, \ \ \forall i, j \in I. \tag{3.42}$$

Na osnovu Fatuove leme i jednakosti (3.42) dobija se

$$\sum_{i\in I}\langle De_j, e_i\rangle = \sum_{i\in I}\lim_{k\to\infty}\langle D_k e_j, e_i\rangle \leqslant \liminf_{k\to\infty}\sum_{i\in I}\langle D_k e_j, e_i\rangle \leqslant 1, \ \ \forall j \in J,$$

jer je $\sum\limits_{i\in I}\langle D_k e_j, e_i\rangle \leqslant 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in J$. Slično je

$$\sum_{j\in I}\langle De_j, e_i\rangle \leqslant 1, \ \ \forall i \in I,$$

pa sledi $D \in DsS(\ell^p(I))$.

□

Posledica 3.5.2. *Neka je I proizvoljno izabran konačan neprazan skup i neka je $p \in [1,\infty)$. Skup $DsS(\ell^p(I))$ je kompaktan skup.*

Dokaz. Sledi direktno na osnovu Teoreme 3.5.1.

□

Prethodnu posledicu smo mogli dokazati i na osnovu jednog sasvim drugačijeg pristupa. Naime, kako je jedinična kugla ograničenih linearnih operatora na $\ell^p(I)$ kompaktan skup, kada je I konačan skup, stoga i zatvoren podskup $DsS(\ell^p(I))$ mora biti kompaktan, takođe. Međutim, kada je I beskonačan skup, Posledica 3.5.2 ne važi, to jest, skup $DsS(\ell^p(I))$ nije kompaktan, što se može zaključiti i na osnovu narednog primera.

Primer 3.5.3. Neka je $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz dvostruko substohastičkih operatora $D_k \in DsS(\ell^p(I))$ definisan sa

$$\langle D_k e_j, e_i\rangle = \begin{cases} 1, & i = j = k, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ova definicija substohastičkih operatora je opravdana na osnovu Teoreme 3.1.9. Očigledno, niz $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergira po normi i ne postoji konvergentan podniz niza $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Drugim rečima skup $DsS(\ell^p(I))$ nije kompaktan.

Teorema 3.5.4. *Neka je $p \in [1,\infty)$, i pretpostavimo da je skup I konačan. Tada je skup $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$ zatvoren po normi podskup skupa svih ograničenih linearnih operatora na $\ell^p(I)$.*

Dokaz. Neka je $p \in [1,\infty)$ i neka je I konačan skup. Neka je dat niz operatora $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $T_k \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$ koji konvergira po normi ka ograničenom linearnom operatoru $T : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$. Fiksirajmo funkcije $f, g \in \ell^p(I)$ takve da je $f \prec_w g$. Tada važi

$$T_k f \prec_w T_k g, \quad \forall k \in I,$$

i postoji niz operatora $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $D_k \in DsS(\ell^p(I))$ za koji je

$$D_k T_k g = T_k f.$$

Na osnovu Posledice 3.5.2, postoji podniz $(D_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ pomenutog niza, i postoji neki operator $D \in DsS(\ell^p(I))$ za koji je $\lim\limits_{j\to\infty} D_{k_j} = D$. Jasno je da važi i $D_{k_j}T_{k_j}g = T_{k_j}f$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Prelaskom na graničnu vrednost, dobija se

$$Tf = \lim_{j\in\mathbb{N}} T_{k_j}f = \lim_{j\in\mathbb{N}} D_{k_j}T_{k_j}g = DTg.$$

Dakle, $Tf \prec_w Tg$. □

Ukoliko pogledamo još jednom prethodni dokaz, uočavamo da je iskorišćena Posledica 3.5.2 na osnovu koje se zaključilo da proizvoljno izabran niz dvostruko substohastičkih operatora sadrži konvergentan podniz, koji konvergira ka nekom dvostrukom substohastičkom operatoru. Ova činjenica je tačna samo kada je skup I konačan. Kada je I beskonačan skup, Primer 3.5.3 pokazuje suprotno. Na osnovu ovih argumenata, ne može se pokazati zatvorenost skupa $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$ ovim pristupom, kada je I beskonačan skup. Da bi se pokazala zatvorenost skupa $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$, kada je $p \in (1,\infty)$, i kada je I beskonačan, potrebno je prethodno dokazati rezultate koji su predstavljeni u nastavku.

Teorema 3.5.5. *Neka je I beskonačan skup, $p \in (1,\infty)$, i neka su data dva konvergentna pozitivna niza $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k, g_k \in \ell^p(I)^+$, koja kovergiraju ka funkcijama*

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \in \ell^p(I)^+ \quad i \quad \lim_{k\to\infty} g_k = g \in \ell^p(I)^+.$$

Ako važe majorizacione relacije $f_k \prec_w g_k$ i $g_k \prec_w f_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, tada postoji parcijalna permutacija $P \in pP(\ell^p(I))$ za skupove I_f^+ i I_g^+, takva da je

$$f = Pg.$$

Štaviše,

$$f \prec_w g \ \ i \ \ g \prec_w f.$$

Dokaz. Sliku proizvoljne funkcije označavamo sa $f(J) = \{f(i) \mid i \in J\}$. Kako su $f(I)$ i $g(I)$ najviše prebrojivi skupovi, tada postoji strogo opadajući niz pozitivnih realnih brojeva $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, tako da je

$$\alpha_k \notin f(I) \cup g(I), \tag{3.43}$$

i $\alpha_0 > f(i), g(i)$, $\forall i \in I$. Ovaj niz konvergira ka nuli, očigledno. Definišemo skupove

$$I_g^k := \{i \in I_g^+ \mid \alpha_k < g(i) < \alpha_{k-1}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

za neku funkciju $g \in \ell^p(I)$. Jasno, $card(I_g^k) < \aleph_0$, $\forall k \in I$, skupovi I_g^k su međusobno disjunktni i važi $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_g^k = I_g^+$.

Fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$. Na osnovu činjenice $card(I_f^m) < \aleph_0$, zaključujemo da postoji realan broj $\epsilon > 0$ za koji je

$$f(j) \in (\alpha_m + \epsilon, \alpha_{m-1} - \epsilon) \subset (\alpha_m, \alpha_{m-1}),$$

za svako $j \in I_f^m$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ i

$$|f(j) - f_n(j)|^p \leqslant \sum_{i\in I} |f(i) - f_n(i)|^p = \|f - f_n\|^p,$$

dobijamo da postoji prirodan broj $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $|f(j) - f_n(j)| \leqslant \|f - f_n\| < \epsilon$, $\forall n > n_1$, $\forall j \in I_f^m$. Fiksirajmo sada $j \in I_f^m$. Dobija se

$$f_n(j) \in (f(j) - \epsilon, f(j) + \epsilon) \subset (\alpha_m, \alpha_{m-1}).$$

Dakle, $j \in I_{f_n}^m$, pa je $I_f^m \subset I_{f_n}^m$, $\forall n > n_1$.

Želimo da pokažemo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $I_f^m = I_{f_n}^m$, za svako $n > n_0$. Slično kao gore, kako je $card(I_f^n) < \aleph_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ukoliko iskoristimo iskaz (3.43), dobićemo da postoji realan broj $r > 0$ takav da je

$$(\alpha_m - r, \alpha_{m-1} + r) \bigcap \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{\infty} f(I_f^k) \right) = \varnothing.$$

Takođe, postoji prirodan broj $n_2 \in \mathbb{N}$ za koji je $f_n(i) \in (f(i) - r, f(i) + r)$, $\forall i \in I_f^+$, $\forall n > n_2$. Kombinovanjem ove dve činjenice, dobija se

$$(\alpha_m, \alpha_{m-1}) \bigcap \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{\infty} f_n(I_f^k) \right) = \varnothing, \tag{3.44}$$

kadgod je $n > n_2$. Stoga, ako je $i \in (I_{f_n}^m)$, $n > n_2$, to jest, $f_n(i) \in (\alpha_m, \alpha_{m-1})$, tada je $i \notin \bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{\infty} I_f^k$ na osnovu (3.44). Sada sledi da je $i \in I_f^+ \setminus \bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{\infty} I_f^k = I_f^m$, pa je $I_{f_n}^m \subset I_f^m$, dakle, $I_{f_n}^m = I_f^m$, $\forall n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Na sličan način, postoji $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $I_{g_n}^m = I_g^m$, $\forall n > \tilde{n}_0$. Konačno,

$$I_{f_n}^m = I_f^m \ \ i \ \ I_{g_n}^m = I_g^m, \ \ \forall n > N_m := \max\{n_0, \tilde{n}_0\}. \tag{3.45}$$

Prvo ćemo pretpostaviti da postoje $k \in I_f^m$ i $j \in I_g^m$ tako da je $f(k) \neq g(j)$. Neka je

$$0 < \eta := \min\{|f(k) - g(j)| : k \in I_f^m, j \in I_g^m, f(k) \neq g(j)\}. \tag{3.46}$$

Sada postoji $n_m > N_m$ tako da je

$$|f_{n_m}(k) - f(k)| < \eta/2 \ \text{ i } \ |g_{n_m}(k) - g(k)| < \eta/2, \ \ \forall k \in I.$$

Kako je $f_{n_m} \prec_w g_{n_m}$ i $g_{n_m} \prec_w f_{n_m}$, na osnovu Teoreme 3.2.11 postoji bijekcija $\omega_m : I_{f_{n_m}}^+ \to I_{g_{n_m}}^+$ tako da je $f_{n_m}(i) = g_{n_m}(\omega_m(i))$, za svako $i \in I_{f_{n_m}}^+$ i važi

$$g_{n_m}(\omega_m(k)) = f_{n_m}(k) \in (\alpha_m, \alpha_{m-1}), \ \ \forall k \in I_{f_{n_m}}^m = I_f^m.$$

Sada je $\omega_m(k) \in I^m_{g_{n_m}} = I^m_g$. Dalje, ako pretpostavimo da je $i = \omega_m^{-1}(j) \in I^+_{f_{n_m}} \backslash I^m_{f_{n_m}}$ za neko $j \in I^m_g = I^m_{g_{n_m}}$, tada $f_{n_m}(i) \notin (\alpha_m, \alpha_{m-1})$, pa je $f_{n_m}(i) \neq g_{n_m}(\omega_m(i))$ što je nemoguće. Dakle, na osnovu (3.45) preslikavanje

$$\widetilde{\omega}_m : I^m_f \to I^m_g \tag{3.47}$$

definisano sa

$$\widetilde{\omega}_m(i) := \omega_m(i), \quad \forall i \in I^m_f$$

je bijekcija. Sada, za svako $k \in I^m_f$,

$$\begin{aligned} |f(k) - g(\omega_m(k))| &\leqslant |f(k) - f_{n_m}(k)| + |f_{n_m}(k) - g(\omega_m(k))| \\ &= |f(k) - f_{n_m}(k)| + |g_{n_m}(\omega_m(k)) - g(\omega_m(k))| < \eta. \end{aligned}$$

Ovo povlači da je $f(k) = g(\omega_m(k)) = g(\widetilde{\omega}_m(k))$, $\forall k \in I^m_f$, na osnovu (3.46).

Pretpostavimo da je $f(k) = g(j)$, $\forall k \in I^m_f$ i $\forall j \in I^m_g$. U tom slučaju za svaku bijekciju $\omega_m : I^m_f \to I^m_g$ je

$$f(i) = g(\omega_m(i)), \quad \forall i \in I^m_f.$$

Slično kao gore, za fiksirano $n > N_m$, stavka (3.45) je ispunjena, i postoji bijekcija $\omega_m : I^+_{f_n} \to I^+_{g_n}$ tako da je $f_n(i) = g_n(\omega_m(i))$, $\forall i \in I^+_{f_n}$, na osnovu Teoreme 3.2.11. Sada definišemo bijekciju $\widetilde{\omega}_m$ kao u (3.47).

Kako je prirodan broj $m \in \mathbb{N}$ proizvoljno izabran, dobijamo da su zaključci dobijeni u prethodnom izlaganju tačni za svako $m \in \mathbb{N}$. Ako definišemo preslikavanje $\Omega : I^+_f \to I^+_g$ na sledeći način:

$$\Omega(k) := \widetilde{\omega}_m(k), \quad \forall k \in I^m_f, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Kako su skupovi I^k_f međusobno disjunktni, i važi $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I^k_f = I^+_f$, zaključujemo da je Ω bijekcija, pa sledi

$$f(k) = g(\Omega(k)), \quad \forall k \in I^+_f.$$

Sada postoji parcijalna permutacija $P \in pP(\ell^p(I))$ za skupove I^+_f i I^+_g, koju određuje bijekcija Ω, tako da je

$$f = Pg.$$

Jasno, na osnovu Teoreme 3.2.11 je

$$f \prec_w g \text{ i } g \prec_w f.$$

$\square$

Teorema 3.5.6. *Neka je I beskonačan skup, i neka je $p \in (1, \infty)$. Skup $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$ je zatvoren po normi podskup skupa svih ograničenih linearnih operatora na $\ell^p(I)$.*

Dokaz. Neka je $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz operatora $T_k \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$, koji konvergira po normi ka ograničenom linearnom operatoru $T : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$. Kako je $e_i \prec_w e_j$ i $e_j \prec_w e_i$, sledi da je $T_k e_i \prec_w T_k e_j$ i $T_k e_j \prec_w T_k e_i$ jer je T linearno očuvanje. Sledi da je $\lim\limits_{k \to \infty} T_k e_i = T e_i$ i $\lim\limits_{k \to \infty} T_k e_j = T e_j$. Sada je

$$T e_i \prec_w T e_j \;\; i \;\; T e_j \prec_w T e_i,$$

na osnovu Teoreme 3.5.5.

Pretpostavimo da postoje $i_0, j_1, j_2 \in I$ tako da je $\langle Te_{j_1}, e_{i_0}\rangle > 0$ i $\langle Te_{j_2}, e_{i_0}\rangle > 0$. Kako važi $T_k \to T$, dobija se

$$\langle T_m e_{j_1}, e_{i_0}\rangle > 0 \;\text{ i }\; \langle T_m e_{j_2}, e_{i_0}\rangle > 0,$$

za neko $m \in \mathbb{N}$, što je u kontradikciji sa činjenicom $T_m \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$, na osnovu Teoreme 3.3.11. Dakle, za svako $i \in I$ postoji najviše jedno $j \in I$ za koje je $\langle Te_j, e_i\rangle > 0$. Konačno, zaključujemo da je $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^p(I)^+)$, po Teoremi 3.3.11. □

3.5.2 Zatvorenost skupa linearnih očuvanja $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$

Cilj ove podsekcije je da se pokaže da je skup svih linearnih očuvanja slabe majorizacije zatvoren za normu u skupu svih ograničenih linearnih operatora na $\ell^1(I)$, kada je I beskonačan skup. Da bismo to pokazali, biće nam potrebna sledeća teorema. Slučaj kada je I konačan skup je dokazan u prethodnoj podsekciji.

Teorema 3.5.7. *Neka je I beskonačan skup, i neka su $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dva konvergentna pozitivna niza funkcija $f_k, g_k \in \ell^1(I)^+$, čije su granične funkcije*

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \in \ell^1(I)^+, \quad i \quad \lim_{k\to\infty} g_k = g \in \ell^1(I)^+.$$

Ako je $f_k \prec_w g_k$ i $g_k \prec_w f_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, tada postoji parcijala permutacija $P \in pP(\ell^1(I))$ za skupove I_f^+ i I_g^+, za koju važi

$$f = Pg.$$

Štaviše,

$$f \prec_w g \;\; i \;\; g \prec_w f.$$

Dokaz. Kako je $card(f(I)) \leqslant \aleph_0$ i $card(g(I)) \leqslant \aleph_0$, postoji strogo opadajući niz pozitivnih realnih brojeva $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, takav da je

$$\alpha_k \notin f(I) \cup g(I) \;\text{ i }\; \alpha_0 > \sup\{f(i), g(i) \mid i \in I\}. \tag{3.48}$$

Neka su

$$S_f^k := \{i \in I_f^+ \mid \alpha_k < f(i) < \alpha_{k-1}\}, \;\; \forall k \in \mathbb{N},$$

međusobno disjunktni konačni podskupovi od I_f^+, za koje važi

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_f^k = I_f^+, \;\text{ i }\; f \in \ell^1(I).$$

Sada, postoji $\epsilon > 0$ tako da je $f(j) \in (\alpha_k + \epsilon, \alpha_{k-1} - \epsilon) \subset (\alpha_k, \alpha_{k-1})$, za svako $j \in S_f^k$. Dalje, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|f(j) - f_n(j)| \leqslant \|f - f_n\| < \epsilon, \;\; \forall n > n_1, \;\; \forall j \in S_f^k.$$

Sledi da je

$$f_n(j) \in (f(j) - \epsilon, f(j) + \epsilon) \subset (\alpha_k, \alpha_{k-1}),$$

pa je $S_f^k \subset S_{f_n}^k$, $\forall n > n_1$.

Na osnovu (3.48) postoji realan broj $r > 0$ takav da je

$$(\alpha_k - r, \alpha_{k-1} + r) \bigcap \left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} f(S_f^i) \right) = \varnothing.$$

Sada postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $f_n(i) \in (f(i) - r, f(i) + r)$, $\forall i \in I_f^+$, $\forall n > n_2$ stoga je,

$$(\alpha_k, \alpha_{k-1}) \bigcap \left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} f_n(S_f^i) \right) = \varnothing. \tag{3.49}$$

kadgod je $n > n_2$. Ako je $f_n(i) \in (\alpha_k, \alpha_{k-1})$, tada je $i \notin \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} S_f^i$ po izrazu (3.49), pa je,

$$i \in I_f^+ \backslash \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} S_f^i = S_f^k,$$

što povlači $S_{f_n}^k \subset S_f^k$, dakle, $S_{f_n}^k = S_f^k$, $\forall n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Slično, postoji $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $S_{g_n}^k = S_g^k$, $\forall n > \tilde{n}_0$. Konačno,

$$S_{f_n}^k = S_f^k \text{ i } S_{g_n}^k = S_g^k, \;\; \forall n > N_k := \max\{n_0, \tilde{n}_0\}.$$

Bez gubljenja opštosti, neka je $f(i) \neq g(j)$, gde je $i \in S_f^k$ i $j \in S_g^k$. Neka je

$$0 < \eta := \min\{|f(i) - g(j)| : i \in S_f^k, j \in S_g^k, f(i) \neq g(j)\}. \tag{3.50}$$

Sada, postoji $n_k > N_k$ tako da je

$$|f_{n_k}(i) - f(i)| < \eta/2 \;\text{ i }\; |g_{n_k}(i) - g(i)| < \eta/2, \;\; \forall i \in I.$$

Dalje, korišćenjem Teoreme 3.2.11, postoji bijekcija $\omega_k : I_{f_{n_k}}^+ \to I_{g_{n_k}}^+$ takva da je

$$f_{n_k}(t) = g_{n_k}(\omega_k(t)),$$

za svako $t \in I_{f_{n_k}}^+$ pri čemu je $g_{n_k}(\omega_k(i)) = f_{n_k}(i) \in (\alpha_k, \alpha_{k-1})$, $\forall i \in S_{f_{n_k}}^k = S_f^k$. Lako se vidi da je preslikavanje

$$\widetilde{\omega}_k : S_f^k \to S_g^k$$

definisano sa $\widetilde{\omega}_k(t) := \omega_k(t)$, $\forall t \in S_f^k$ bijekcija. Štaviše, za svako $t \in S_f^k$ je

$$\begin{aligned} |f(t) - g(\omega_k(t))| &\leqslant |f(t) - f_{n_k}(t)| + |f_{n_k}(t) - g(\omega_k(t))| \\ &= |f(t) - f_{n_k}(t)| + |g_{n_k}(\omega_k(t)) - g(\omega_k(t))| < \eta. \end{aligned}$$

Sledi da je $f(t) = g(\omega_k(t)) = g(\widetilde{\omega}_k(t))$, $\forall t \in S_f^k$, na osnovu (3.50).

Sada ćemo definisati bijekciju $\Omega : I_f^+ \to I_g^+$ na sledeći način:

$$\Omega(i) := \widetilde{\omega}_k(i), \quad \forall i \in S_f^k,$$

za odgovarajuće $k \in \mathbb{N}$. Jasno je da sledi

$$f(i) = g(\Omega(i)), \quad \forall i \in I_f^+,$$

pa postoji parcijalna permutacija $P \in pP(\ell^1(I))$ za skupove I_f^+ i I_g^+, određena bijekcijom Ω, tako da je

$$f = Pg.$$

Dakle,

$$f \prec_w g \text{ i } g \prec_w f$$

na osnovu Teoreme 3.2.11. □

Teorema 3.5.8. *Neka je I beskonačan skup. Skup $\mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ je zatvoren za normu u skupu svih ograničenih linearnih operatora na $\ell^1(I)$.*

Dokaz. Neka je $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz operatora $T_k \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$ koji konvergira po normi ka ograničenom linearnom operatoru $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$. Pokazaćemo da operator T zadovoljava stavku 4) u Teoremi 3.4.11.

Prvo ćemo dokazati da za svako $i \in I$, ili postoji tačno jedno $j \in I$ za koje je $\langle Te_j, e_i\rangle > 0$ ili je skup $\{\langle Te_j, e_i\rangle \mid j \in I\}$ jednoelementni. Pretpostavimo suprotno da postoje $r, s \in I$ za koje je

$$\langle Te_r, e_i\rangle > 0 \text{ i } \langle Te_s, e_i\rangle > 0$$

za neko $i \in I$, i važi $\langle Te_r, e_i\rangle \neq \langle Te_s, e_i\rangle$. Kako je

$$\lim_{k\to\infty} T_k e_j = Te_j, \quad \forall j \in I,$$

stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ za koje važi $\langle T_k e_r, e_i\rangle > 0$, $\langle T_k e_s, e_i\rangle > 0$ i $\langle T_k e_r, e_i\rangle \neq \langle T_k e_s, e_i\rangle$, što je u kontradikciji sa stavkom 4) Teoreme 3.4.11.

Fiksirajmo $r, s \in I$. Kako je, $T_k \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$, stoga sledi da je

$$T_k e_r \prec_w T_k e_s \text{ i } T_k e_s \prec_w T_k e_r, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dalje je

$$\lim_{k\to\infty} T_k e_s \prec_w \lim_{k\to\infty} T_k e_r \text{ i } \lim_{k\to\infty} T_k e_r \prec_w \lim_{k\to\infty} T_k e_s,$$

to jest,

$$Te_s \prec_w Te_r \text{ i } Te_r \prec_w Te_s,$$

na osnovu Teoreme 3.5.7, dakle $T \in \mathcal{M}_{wpr}(\ell^1(I)^+)$.

□

Glava 4

Slaba supermajorizacija i dvostruko superstohastički operatori na $\ell^p(I)$

4.1 Familije kao dvostruko superstohastički operatori

Kao što znamo, u konačno-dimenzionalnom slučaju proizvoljna $n \times n$ matrica (a_{ij}) je dvostruko superstohastička ako postoji bar jedna $n\times n$ dvostruko stohastička matrica $(\widetilde{a}_{ij})$ tako da je $a_{ij} \geqslant \widetilde{a}_{ij}$, za sve $i, j = 1 \dots n$. Stoga sledi za svako $j = 1, \dots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \geqslant 1$, i za svako $i = 1, \dots, n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \geqslant 1$.

S druge strane, za neko $p \in [1, \infty)$ i za proizvoljno izabranu familiju $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ koja zadovoljava uslove

$$(\forall j \in I) \ \sum_{i \in I} a_{ij} = 1, \quad \text{i} \quad (\forall i \in I) \ \sum_{j \in I} a_{ij} = 1,$$

postoji jedinstveni dvostruko stohastički operator $A : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ tako da je

$$\langle Ae_j, e_i \rangle = a_{ij}$$

na osnovu Teoreme 1.2.10. Slično, za svaku familiju $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ koja zadovoljava uslove

$$(\forall j \in I) \ \sum_{i \in I} a_{ij} \leqslant 1, \quad \text{i} \quad (\forall i \in I) \ \sum_{j \in I} a_{ij} \leqslant 1,$$

postoji jedinstveni dvostruko substohastički operator $A : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ tako da je

$$\langle Ae_j, e_i \rangle = a_{ij},$$

na osnovu Teoreme 3.1.9.

Sledeći primer nam pokazuje da u opštem slučaju analogija sa pomenutim slučajevima ne važi kada su gore posmatrane sume veće ili jednake od 1. Preciznije, predstavićemo familiju $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ koja zadovoljava uslove

$$(\forall j \in I) \ \sum_{i \in I} a_{ij} \geqslant 1, \ \text{ i } \ (\forall i \in I) \ \sum_{j \in I} a_{ij} \geqslant 1,$$

i postoji dvostruko stohastički operator $\widetilde{A}$ takav da je $a_{ij} \geqslant \langle \widetilde{A} e_j, e_i \rangle$, međutim, operator $A : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ definisan matrično sa (4.2) nije ograničen.

Primer 4.1.1. Neka je $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ familija definisana sa

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & i = j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Očigledno za jedinični operator važi $\mathcal{I} \in DS(\ell^p(I))$, $\forall p \in [1, \infty)$. Takođe je $a_{ii} \geqslant 1 = \langle \mathcal{I} e_i, e_i \rangle$, $\forall i \in I$ i $a_{ij} = 0 = \langle I e_j, e_i \rangle$ kada je $i \neq j$. Jasno je da važi

$$(\forall j \in I) \ \sum_{i \in I} a_{ij} \geqslant 1, \ \text{ i } \ (\forall i \in I) \ \sum_{j \in I} a_{ij} \geqslant 1. \tag{4.1}$$

Ukoliko iskoristimo standardnu definiciju za matrične operatore

$$Af := \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in I} a_{ij} f(j) \right) e_i, \tag{4.2}$$

možemo definisati operator $A : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ koji nije ograničen. Da bismo to dokazali, pretposatavimo suprotno, da je operator A ograničen. Tada postoji $M > 0$ tako da je $\|Af\|_p \leqslant M$, $\forall f \in \ell^p(I)$, za koje je $\|f\|_p = 1$. Fiksirajmo prirodan broj $m > M$. Sledi da je $Ae_m = m \cdot e_m$ i $\|Ae_m\|_p = m \cdot \|e_m\|_p = m > M$, sledi da je A neograničen operator.

Dakle, poslednji primer nam pokazuje da postoje familije koje zadovoljavaju uslov (4.1), ali određuju neograničen operator definisan sa (4.2), na prostoru $\ell^p(I)$. Iz tog razloga identifikovaćemo sve one familije koje se mogu posmatrati kao ograničeni linearni operatori na prostoru $\ell^p(I)$ za svako $p \in [1, \infty)$ definisani sa (4.2), i posmatraćemo samo one familije ove klase koje zadovoljavaju dodatan uslov (4.1). Takve familije će biti potencijalni kandidati za superstohastičke operatore.

4.1.1 Ograničeni linearni operatori na diskretnim Lebegovim prostorima

Predstavićemo dve važne teoreme koje daju potrebne i dovoljne uslove da proizvoljna familija bude ograničen linearan operator na $\ell^1(I)$, odnosno $\ell^\infty(I)$.

Teorema 4.1.2. *Neka je $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija realnih brojeva, gde je I proizvoljan neprazan skup. Ova familija definiše jedinstven ograničen linearan operator $A : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ koji zadovoljava*

$$\langle Ae_j, e_i \rangle = a_{ij}, \ \ \forall i, j \in I \tag{4.3}$$

ako važi

$$M_2 := \sup_{j\in I}\sum_{i\in I}|a_{ij}| < \infty \tag{4.4}$$

Obrnuto, svaki ograničen linearan operator $A : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ *zadovoljava uslov (4.4), gde je* $a_{ij} := \langle Ae_j, e_i\rangle$. *Štaviše,* $\|A\|_1 = M_2$.

Dokaz. Prvo, neka je $A : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ ograničen linearan operator i neka je $a_{ij} := \langle Ae_j, e_i\rangle$, $\forall i, j \in I$. Na osnovu neprekidnosti operatora A je

$$Af = \sum_{j\in I} f(j)Ae_j \in \ell^1(I),$$

imajući na umu da funkcija f ima reprezentaciju $f = \sum\limits_{j\in I} f(j)e_j$. Definisaćemo linearne funkcionale

$$A_i(f) := Af(i) = \langle Af, e_i\rangle = \sum_{j\in I} f(j)\langle Ae_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I} f(j)a_{ij} < \infty,$$

$\forall f \in \ell^1(I)$, $\forall i \in I$. Kako je

$$|A_i(f)| \leqslant \|Af\|_1 \leqslant \|A\|_1\|f\|_1,$$

dobijamo da je $A_i \in l_1(I)^*$, $\forall i \in I$. Sada je

$$\sum_{i\in I}|A_i(f)| = \|Af\|_1 \leqslant \|A\|_1\|f\|_1, \quad \forall f \in \ell^1(I).$$

Ako fiksiramo $f = e_j$ za proizvoljno $j \in I$ dobićemo

$$\sum_{i\in I}|a_{ij}| = \sum_{i\in I}|\langle Ae_j, e_i\rangle| = \sum_{i\in I}|A_i(e_j)| \leqslant \|A\|_1,$$

što povlači da važi izraz (4.4) i $M_2 \leqslant \|A\|_1$.

Neka je $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ proizvoljno izabrana familija za koju važi izraz (4.4). Sledi

$$\sum_{j\in I}\sum_{i\in I}|a_{ij}f(j)| = \sum_{j\in I}|f(j)|\sum_{i\in I}|a_{ij}| \leqslant M_2\|f\|_1.$$

Sada, promenom redosleda sumiranja na osnovu Fubinijeve teoreme, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}|\sum_{j\in I} a_{ij}f(j)| &\leqslant \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}|a_{ij}f(j)| \\ &= \sum_{j\in I}\sum_{i\in I}|a_{ij}f(j)| \\ &\leqslant M_2\|f\|_1,\end{aligned} \tag{4.5}$$

$\forall f \in \ell^1(I)$. Na osnovu dobijenog zaključka, ako definišemo operator A na $\ell^1(I)$ sa

$$Af := \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in I} a_{ij}f(j)\right)e_i, \tag{4.6}$$

tada je ovaj operator dobro definisan i važi $A(\ell^1(I)) \subseteq \ell^1(I)$, na osnovu (4.5). Linearnost operatora A je očigledna. Takođe, na osnovu (4.5) dobijamo da je

$$\|Af\|_1 = \sum_{i\in I} |\sum_{j\in I} a_{ij} f(j)| \leqslant M_2 \|f\|_1$$

pa je operator A ograničen, i važi suprotna nejednakost $\|A\|_1 \leqslant M_2$, dakle $\|A\|_1 = M_2$. Sada se lako proverava da je

$$\langle Ae_j, e_i\rangle = \sum_{r\in I} \left(\sum_{s\in I} a_{rs} e_j(s) \right) \langle e_r, e_i\rangle = \sum_{r\in I} a_{rj} \langle e_r, e_i\rangle = a_{ij} \tag{4.7}$$

za svako $i \in I$, i za svako $j \in I$.

Ukoliko pretpostavimo da postoji još jedan operator $A_1 : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ tako da (4.3) važi, tada je

$$\langle A_1 f, e_i\rangle = \sum_{j\in I} f(j) \langle A_1 e_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I} f(j) a_{ij} = \sum_{j\in I} f(j) \langle Ae_j, e_i\rangle = \langle Af, e_i\rangle,$$

pa je $A_1 = A$.

□

Teorema 4.1.3. *Neka je $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija realnih brojeva, gde je I proizvoljan neprazan skup. Ova familija definiše ograničen linearan operator $A : \ell^\infty(I) \to \ell^\infty(I)$ koji zadovoljava*

$$\langle Ae_j, e_i\rangle = a_{ij}, \ \ \forall i, j \in I \tag{4.8}$$

ako važi

$$M_1 := \sup_{i\in I} \sum_{j\in I} |a_{ij}| < \infty. \tag{4.9}$$

Obrnuto, ako je ograničen linearan operator $A : \ell^\infty(I) \to \ell^\infty(I)$ definisan sa

$$Af := \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in I} a_{ij} f(j) \right) e_i \tag{4.10}$$

tada familija $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ zadovoljava uslove (4.8) i (4.9). Štaviše, $\|A\|_\infty = M_1$.

Dokaz. Neka je $A : \ell^\infty(I) \to \ell^\infty(I)$ ograničen linearan operator definisan sa (4.10). Tada je $\langle Ae_j, e_i\rangle = a_{ij}, \ \forall i, j \in I$ na osnovu izraza (4.7). Ako je $f \in \ell^\infty(I)$, tada je

$$Af(i) = \sum_{j\in I} f(j) \langle Ae_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I} f(j) a_{ij},$$

$\forall i \in I$, po (4.10). Na osnovu ove činjenice, možemo definisati ograničene linearne funkcionale A_i, $\forall i \in I$, sa

$$A_i(f) := Af(i).$$

Zaista, funkcionali su ograničeni što se može videti iz činjenice da nejednakost $|g(j)| \leqslant \|g\|_\infty$, $\forall g \in \ell^\infty(I)$ povlači

$$|A_i(f)| \leqslant \|A(f)\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Linearnost se lako pokazuje.

Fiksirajmo $f_i \in \ell^\infty(I)$ tako da je $f_i(j) = sign(\langle Ae_j, e_i\rangle)$, $\forall j \in I$. Dobija se

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I} |\langle Ae_j, e_i\rangle| &= \sum_{j\in I} f_i(j)\langle Ae_j, e_i\rangle \\ &= |A_i(f_i)| \leqslant \|A\|_\infty \|f_i\|_\infty = \|A\|_\infty, \quad \forall i \in I\end{aligned}$$

što povlači (4.9) i $M_1 \leqslant \|A\|_\infty$.

Pretpostavimo da (4.9) važi za proizvoljno izabranu familiju $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$. Definišemo operator A na $\ell^\infty(I)$ sa (4.10), koji je očigledno linearan. Dalje,

$$|Af(i)| \leqslant \sum_{j\in I} |f(j)||a_{ij}| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{j\in I} |a_{ij}| \leqslant M_1 \|f\|_\infty,$$

$\forall i \in I$, pa možemo zaključiti da je $Af \in \ell^\infty(I)$. Takođe, $A : \ell^\infty(I) \to \ell^\infty(I)$ je ograničen linearan operator, jer je

$$\|Af\|_\infty = \sup_{i\in I} |Af(i)| \leqslant M_1 \|f\|_\infty.$$

Štaviše, $\|A\|_\infty \leqslant M_1$, pa se može zaključiti da je $\|A\|_\infty = M_1$. Sada, lako se proverava da (4.8) važi za svako $i \in I$, i za svako $j \in I$, na osnovu (4.7).

□

Lema 4.1.4. *Svaka funkcija $f \in \ell^\infty(I)$ može biti predstavljena sa $f = \sum_{j\in I} f(j)e_j$, pri čemu se ovaj red uzima kao konvergentan u slaboj zvezda topologiji. Štaviše, za svaki adjungovani ograničen linearan operator $A : \ell^\infty(I) \to \ell^\infty(I)$ je*

$$Af = \sum_{j\in I} f(j)Ae_j. \tag{4.11}$$

Specijalno je

$$\langle Af, e_k\rangle = \sum_{j\in I} f(j)\langle Ae_j, e_k\rangle, \quad \forall k \in I. \tag{4.12}$$

Dokaz. Neka je $f \in \ell^\infty(I)$. Podsećamo da je $\ell^\infty(I) = (\ell^1(I))^*$ i $e_i \in \ell^\infty(I)$. Stoga, definišemo funkciju $g_J = \sum_{j\in J} f(j)e_j \in (\ell^1(I))^*$, gde je $J \subset I$, $|J| < \aleph_0$. Sada za svaku funkciju $x \in \ell^1(I)$ je

$$\begin{aligned}\langle x, g_J\rangle &= \tilde{g}_J(x) = \sum_{i\in I} x(i)g_J(i) \\ &= \sum_{i\in I} x(i) \sum_{j\in J} f(j)e_j(i) \\ &= \sum_{j\in J} f(j) \sum_{i\in I} x(i)e_j(i) = \sum_{j\in J} f(j)x(j).\end{aligned}$$

Sledi da je

$$\langle x, g_J\rangle \;=\; \sum_{j\in J} f(j)x(j) \to \sum_{j\in I} f(j)x(j) = \langle x, f\rangle$$

što predstavlja slabu zvezda konvergenciju u dualnom prostoru od $\ell^1(I)$. Neka je $h_J = \sum_{j\in J} f(j)Ae_j \in \ell^\infty(I)$. Sada je

$$\begin{aligned}
\langle x, h_J\rangle &= \tilde{h}_J(x) = \sum_{i\in I} x(i)h_J(i)\\
&= \sum_{i\in I} x(i)\sum_{j\in J} f(j)Ae_j(i) = \sum_{j\in J} f(j)\sum_{i\in I} x(i)Ae_j(i)\\
&= \sum_{j\in J} f(j)\langle x, Ae_j\rangle = \sum_{j\in J} f(j)\langle A_0x, e_j\rangle\\
&= \sum_{j\in J} f(j)A_0x(j) \to \sum_{j\in I} f(j)A_0x(j)\\
&= \langle A_0x, f\rangle = \langle x, Af\rangle, \quad \forall x\in \ell^1(I)
\end{aligned}$$

gde je A adjungovani operator od A_0, tj. $A_0^* = A$. Dakle, (4.11) je zadovoljeno. Štaviše, za $x = e_k$, stavka (4.12) je jasna.

□

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove da proizvoljan operator na pristoru $\ell^\infty(I)$ bude adjungovani operator.

Teorema 4.1.5. *Ograničen linearan operator $A : \ell^\infty(I) \to \ell^\infty(I)$ je adjungovani operator ako i samo ako je operator A definisan sa (4.10), gde je $a_{ij} := \langle Ae_j, e_i\rangle$.*

Dokaz. Prvo, pretpostavimo da postoji ograničen linearan operator $A_0 : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ tako da je $A_0^* = A$. Tada je

$$\begin{aligned}
Af(i) &= \langle Af, e_i\rangle = \langle f, A_0e_i\rangle = \sum_{j\in I} f(j)\langle e_j, A_0e_i\rangle\\
&= \sum_{j\in I} f(j)\langle Ae_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I} a_{ij}f(j),\ \forall i\in I,\ \forall f\in \ell^\infty(I).
\end{aligned}$$

Sledi da je operator A definisan sa (4.10).

Obrnuto, ako je operator A definisan sa (4.10), tada važi (4.8) i (4.9), po Teoremi 4.1.3. Sada, familija $\mathbb{A}_0 = \{a_{ij}^0 \mid i,j\in I\}$, gde je $a_{ij}^0 = a_{ji}$, $\forall i\in I$, $\forall j\in I$ zadovoljava (4.4), pa postoji jedinstven ograničen linearan operator $A_0 : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ tako da je

$$\langle A_0e_j, e_i\rangle = a_{ij}^0 = a_{ji} = \langle Ae_i, e_j\rangle. \tag{4.13}$$

Pretpostavimo da operator A nije adjungovan. Sledi da postoje funkcije $f = \sum_{i\in I} f(i)e_i \in \ell^1(I)$ i $g\in \ell^\infty(I)$ tako da je $\langle A_0f, g\rangle \neq \langle f, Ag\rangle$. Štaviše,

$$\sum_{i\in I} f(i)\langle A_0e_i, g\rangle = \langle A_0f, g\rangle \neq \langle f, Ag\rangle = \sum_{i\in I} f(i)\langle Ag, e_i\rangle.$$

Stoga postoji jedno $i \in I$ za koje je $\langle A_0 e_i, g\rangle \neq \langle Ag, e_i\rangle$. Takođe,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I} g(j)\langle A_0 e_i, e_j\rangle &= \sum_{j\in I} g(j) A_0 e_i(j) = \langle A_0 e_i, g\rangle \\ &\neq \langle Ag, e_i\rangle = \sum_{j\in I} g(j)\langle Ae_j, e_i\rangle\end{aligned}$$

Sledi da postoji bar jedno $j \in I$ za koje je $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle \neq \langle A_0 e_i, e_j\rangle = a^0_{ji}$, što je u kontradikciji sa stavkom (4.13). □

Sledeća teorema i njena posledica su glavni rezultati u ovom poglavlju, i oni će biti krucijalni u proučavanju slabe supermajorizacione relacije na $\ell^p(I)$, kada je $p \in [1, \infty)$.

Teorema 4.1.6. *Neka je $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija realnih brojeva. Ako se ova familija može istovremeno posmatrati kao ograničen linearan operator iz $\ell^1(I)$ u $\ell^1(I)$ i iz $\ell^\infty(I)$ u $\ell^\infty(I)$ definisan sa (4.10), tada ova familija $\mathbb{A}$ predstavlja ograničen linearan operator A iz $\ell^p(I)$ u $\ell^p(I)$, za svako $p \in [1, \infty]$. Štaviše, $\|A\|_p \leqslant \max\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\}$.*

Dokaz. Na osnovu Teorema 4.1.2 i 4.1.3 zaključujemo da važi (4.4) i (4.9). Postoji realan broj M definisan sa

$$M := \max\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\} < \infty \tag{4.14}$$

gde je $\|A\|_\infty = \sup_{i\in I} \sum_{j\in I} |a_{ij}| < \infty$ i $\|A\|_1 := \sup_{j\in I} \sum_{i\in I} |a_{ij}| < \infty$. Neka je sada q konjugovani eksponent od $p \in (1, \infty)$. Na osnovu Helderove nejednakosti dobija se

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in I} a_{ij} f(j)\right| &\leqslant \sum_{j\in I} |a_{ij}|^{1/p} |f(j)| |a_{ij}|^{1/q} \\ &\leqslant \left(\sum_{j\in I} |a_{ij}| |f(j)|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j\in I} |a_{ij}|\right)^{1/q}\end{aligned}$$

Sada sledi da je

$$\left|\sum_{j\in I} a_{ij} f(j)\right|^p \leqslant \left(\sum_{j\in I} |a_{ij}| |f(j)|^p\right) \cdot \left(\sum_{j\in I} |a_{ij}|\right)^{p/q}.$$

Dalje je

$$\begin{aligned}\|A(f)\|_p^p &= \sum_{i\in I} \left|\sum_{j\in I} a_{ij} f(j)\right|^p \\ &\leqslant \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in I} |a_{ij}| |f(j)|^p\right) \cdot \left(\sum_{j\in I} |a_{ij}|\right)^{p/q} \qquad (4.15) \\ &\leqslant M_1^{p/q} \|f\|_p^p \sum_{i\in I} |a_{ij}| \\ &\leqslant \|A\|_\infty^{p/q} \|A\|_1 \|f\|_p^p \\ &\leqslant M^{\frac{p+q}{q}} \|f\|_p^p < \infty\end{aligned}$$

U predhodnoj stavci (4.15) je promenjen redosled sumiranja, što je omogućeno Fubinijevom teoremom. Dakle,

$$\|A(f)\|_p \leqslant M^{\frac{p+q}{pq}} \|f\|_p = M\|f\|_p, \quad \forall f \in \ell^p(I),$$

pa je A ograničen linearan operator na $\ell^p(I)$, i važi $\|A\|_p \leqslant M$.

□

Kao što je obećano, u prethodnoj teoremi su predstavljeni dovoljni uslovi da proizvoljna familija generiše ograničen linearan operator na $\ell^p(I)$ sa (4.6), za svako $p \in [1, \infty)$.

Posledica 4.1.7. *Neka je $\mathbb{A} = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija realnih brojeva. Ukoliko ova familija zadovoljava uslove (4.4) i (4.9) tada se ona može posmatrati kao ograničen linearan operator iz $\ell^p(I)$ u $\ell^p(I)$ definisan sa (4.10), za svako $p \in [1, \infty]$.*

Dokaz. Sledi direktno na osnovu Teorema 4.1.2, 4.1.3 i 4.1.6. □

4.1.2 Superstohastički operatori

U nastavku, razmatraćemo samo familije $\{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ koje zadovoljavaju uslove (4.4) i (4.9), i tretiraćemo ih kao linearne ograničene operatore na $\ell^p(I)$ definisane sa (4.6), pri čemu je $p \in [1, \infty)$. Takođe, norma ovih operatora je ograničena pozitivnim realnim brojem M, definisanim sa (4.14).

Radi pojednostavljenja, koristićemo istu oznaku A za familiju $A = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ koja zadovoljava uslove (4.4) i (4.9), kao i za ograničen linearan operator $A : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$, definisan sa (4.6).

Definicija 4.1.8. Neka je $A = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija pozitivnih realnih brojeva, koja zadovoljava (4.4) i (4.9), gde je I proizvoljan neprazan skup. Familija A je

1) *superstohastička po vrstama*, ako je $\sum\limits_{j \in I} a_{ij} \geqslant 1$, $\forall i \in I$.

2) *superstohastička po kolonama*, ako je $\sum\limits_{i \in I} a_{ij} \geqslant 1$, $\forall j \in I$.

3) *dvostruko superstohastička*, ako postoji dvostruko stohastički operator $\widetilde{A} \in DS(\ell^p(I))$ takav da je $a_{ij} \geqslant \langle \widetilde{A} e_j, e_i \rangle$, $\forall i, j \in I$.

U nastavku, u mnogim situacijama stohastičke familije ćemo nazivati stohastičkim operatorima, kada posmatramo ove familije kao operatore definisane sa (4.10), to jest, kada želimo da naglasimo njihove operatorske karakteristike, sto je omogućeno rezultatima iz prethodne podsekcije. Skup svih superstohastičkih po vrstama, superstohastičkih po kolonama kao i dvostruko superstohastičkih familija (operatora) na $\ell^p(I)$, kada je $p \in [1, \infty)$ označavaćemo respektivno, sa $RSPS(\ell^p(I))$, $CSPS(\ell^p(I))$, $DSPS(\ell^p(I))$. Očigledno je $RS(\ell^p(I)) \subset RSPS(\ell^p(I))$, $CS(\ell^p(I)) \subset CSPS(\ell^p(I))$ i $DS(\ell^p(I)) \subset DSPS(\ell^p(I))$. Lako se vidi na osnovu definicije da je $DSPS(\ell^p(I)) \subset RSPS(\ell^p(I))$, $DSPS(\ell^p(I)) \subset CSPS(\ell^p(I))$ i $P(\ell^p(I)) \subset DSPS(\ell^p(I))$.

Napominjemo da nije neophodno posmatrati operatore iz $\ell^p(J)$ u $\ell^p(I)$ kao dvostruko superstohastičke, kada je $card(I) \neq card(J)$, kao kod substohastičkih operatora (videti Definiciju 3.1.1). Naime, $card(I) = card(J)$ ako i samo ako postoji dvostruko stohastički operator $D : \ell^p(J) \to \ell^p(I)$ na osnovu Teoreme 1.2.3. Ukoliko bismo proširili Definiciju 4.1.8 na operatore iz $\ell^p(J)$ u $\ell^p(I)$, dobili bismo da egzistencija dvostruko superstohastičkog operatora $A : \ell^p(J) \to \ell^p(I)$ povlači egzistenciju dvostruko stohastičkog operatora $\widetilde{A} : \ell^p(J) \to \ell^p(I)$ za koji je $\langle Ae_j, e_i\rangle \geqslant \langle \widetilde{A}e_j, e_i\rangle$, $\forall i, j \in I$, dakle važilo bi $card(I) = card(J)$, ponovo na osnovu Teoreme 1.2.3. Dakle, zaključujemo da važi $card(I) = card(J)$ ako i samo ako postoji dvostruko superstohastički operator $D : \ell^p(J) \to \ell^p(I)$, stoga je dovoljno posmatrati samo dvostruko superstohastičke operatore na $\ell^p(I)$ uvedene u Definiciji 4.1.8.

Lema 4.1.9. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i pretpostavimo da je $A = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija pozitivnih realnih brojeva.*

1) Ako je $A \in RSPS(l^p(I))$, tada je

$$\forall f \in \ell^1(I), \qquad \left|\sum_{j\in I}\langle Ae_j, f\rangle\right| \leqslant \|A\|_\infty \|f\|_1. \tag{4.16}$$

2) Ako je $A \in CSPS(l^p(I))$, tada je

$$\forall f \in \ell^1(I), \qquad \left|\sum_{i\in I}\langle Af, e_i\rangle\right| \leqslant \|A\|_1 \|f\|_1. \tag{4.17}$$

Dokaz. Neka je $p \in [1, \infty)$.

1) Pretpostavimo da je $A \in RSPS(l^p(I))$. Neka je $f \in \ell^1(I) \subset \ell^q(I)$. Tada je

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}|f(i)|a_{ij} = \sum_{i\in I}|f(i)|\sum_{j\in I}a_{ij} \leqslant \|A\|_\infty\|f\|_1 < \infty.$$

Možemo izvršiti promenu redosleda sumiranja na osnovu Fubinijeve teoreme, pa za $Ae_j \in \ell^p(I)$ dobijamo

$$\left|\sum_{j\in I}\langle Ae_j, f\rangle\right| = \left|\sum_{j\in I}\sum_{i\in I}f(i)\langle Ae_j, e_i\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I}f(i)\sum_{j\in I}a_{ij}\right| \leqslant \|A\|_\infty\|f\|_1 \tag{4.18}$$

dakle, (4.16) važi.

2) Neka je $A \in CSPS(l^p(I))$. Ako fiksiramo $f \in \ell^1(I) \subset \ell^p(I)$, sledi

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I}\sum_{i\in I}|f(j)|\langle A^*e_i, e_j\rangle &= \sum_{j\in I}|f(j)|\sum_{i\in I}\langle A^*e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{j\in I}|f(j)|\sum_{i\in I}\langle Ae_j, e_i\rangle \leqslant \|A\|_1\|f\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Kako je $A^*e_i \in \ell^q(I)$, sledi promenom redosleda sumiranja da važi

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i\in I}\langle Af, e_i\rangle\right| &= \left|\sum_{i\in I}\langle A^*e_i, f\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} f(j)\langle A^*e_i, e_j\rangle\right| \\ &\leqslant \sum_{j\in I}|f(j)|\sum_{i\in I}\langle e_i, Ae_j\rangle \leqslant ||A\|_1\|f\|_1. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Dakle, (4.17) je zadovoljeno.

□

Sledeća veoma korisna posledica predstavlja uopštenje Leme 1.2.8 za superstohastičke operatore na $\ell^p(I)$ ali za pozitivne funkcije $\ell^1(I)^+$.

Posledica 4.1.10. *Neka je $p \in [1,\infty)$ i neka je $A = \{a_{ij} \mid i,j \in I\}$ familija pozitivnih realnih brojeva za koju važi (4.4) i (4.9).*

1) $A \in RSPS(l^p(I))$ ako i samo ako je

$$\forall f \in \ell^1(I)^+, \quad \|f\|_1 \leqslant \left|\sum_{j\in I}\langle Ae_j, f\rangle\right| \leqslant \|A\|_\infty\|f\|_1. \tag{4.20}$$

2) $A \in CSPS(l^p(I))$ ako i samo ako je

$$\forall f \in \ell^1(I)^+, \quad \|f\|_1 \leqslant \left|\sum_{i\in I}\langle Af, e_i\rangle\right| \leqslant \|A\|_1\|f\|_1. \tag{4.21}$$

Dokaz. Ako je $A \in RSPS(l^p(I))$ tada na osnovu (4.18) dobija se da je

$$\|f\|_1 \leqslant \left|\sum_{j\in I}\sum_{i\in I} f(i)\langle Ae_j, e_i\rangle\right| = \left|\sum_{j\in I}\langle Ae_j, f\rangle\right|,$$

dakle, (4.20) važi po Lemi 4.1.9, stavka 1). S druge strane, ako (4.20) važi, tada je $A \in RSPS(l^p(I))$ ukoliko izaberemo da je $f = e_i$, $\forall i \in I$.

Ako je $A \in CSPS(l^p(I))$, tada slično kao u (4.19), dobija se

$$\|f\|_1 \leqslant \left|\sum_{i\in I}\langle Af, e_i\rangle\right|,$$

pa važi (4.21) po Lemi 4.1.9 2). S druge strane, (4.21) povlači $A \in CSPS(l^p(I))$, ukoliko stavimo da je $f = e_i$. □

Iskoristićemo prethodnu posledicu da bi dokazali sledeći rezultat.

Teorema 4.1.11. *Neka je $p \in [1,\infty)$. Skup $RSPS(\ell^p(I))$ je zatvoren za kompoziciju, to jest, ako A i B pripadaju skupu $RSPS(\ell^p(I))$, tada je $AB \in RSPS(\ell^p(I))$. Isti zaključak važi i za skupove $CSPS(\ell^p(I))$ i $DSPS(\ell^p(I))$.*

Dokaz. Neka je $A, B \in RSPS(\ell^p(I))$. Ovi operatori zadovoljavaju uslove (4.4) i (4.9). Na osnovu Teorema 4.1.2 i 4.1.3, ovi operatori su ograničeni linearni operatori na $\ell^1(I)$ i na $\ell^\infty(I)$, pa je i operator AB ograničen i linearan na ovim prostorima kao kompozicija dva operatora. Dakle, operator AB zadovoljava uslove (4.4) i (4.9) na osnovu gore pomenutih teorema.

Kako je

$$\sum_{j\in I} A^*e_i(j) = \sum_{j\in I}\langle A^*e_i, e_j\rangle = \sum_{j\in I}\langle Ae_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I} a_{ij} \leqslant \|A\|_\infty,$$

to je $A^*e_i \in \ell^1(I)^+$. Sledi da važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I}\langle ABe_j, e_i\rangle &= \sum_{j\in I}\langle Be_j, A^*e_i\rangle \leqslant \|B\|_\infty \sum_{k\in I}\langle A^*e_i, e_k\rangle \\ &= \|B\|_\infty \sum_{k\in I}\langle Ae_k, e_i\rangle \leqslant \|B\|_\infty \|A\|_\infty,\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I}\langle ABe_j, e_i\rangle &= \sum_{j\in I}\langle Be_j, A^*e_i\rangle \geqslant \|A^*e_i\|_1 = \sum_{k\in I}\langle Ae_k, e_i\rangle \\ &\geqslant \|e_i\|_1 = 1,\end{aligned}$$

po Posledici 4.1.10 pod 1). Lako se vidi da je $\langle ABe_j, e_i\rangle \geqslant 0$, pa zaključujemo da je $AB \in RSPS(\ell^p(I))$.

Neka je $A, B \in CSPS(\ell^p(I))$. Na isti način se zaključuje da kompozicija AB zadovoljava uslove (4.4) i (4.9). Kako je $Be_j \in \ell^1(I)^+$, stoga je

$$\sum_{i\in I}\langle ABe_j, e_i\rangle \leqslant \|A\|_1\|Be_j\|_1 = \|A\|_1 \sum_{k\in I}\langle Be_j, e_k\rangle \leqslant \|A\|_1\|B\|_1,$$

i

$$\sum_{i\in I}\langle ABe_j, e_i\rangle \geqslant \|Be_j\|_1 \geqslant \|e_j\|_1 = 1$$

po Posledici 4.1.10 stavka 2), pa je $AB \in CSPS(\ell^p(I))$.

Neka je sada $A, B \in DSPS(\ell^p(I))$. Sledi da postoje odgovarajući operatori $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in DS(\ell^p(I))$, po Definiciji 4.1.8, pa imamo da je

$$\langle ABe_k, e_i\rangle = \sum_{j\in I} Be_k(j)\langle Ae_j, e_i\rangle \geqslant \sum_{j\in I} \widetilde{B}e_k(j)\langle \widetilde{A}e_j, e_i\rangle = \langle \widetilde{A}\widetilde{B}e_k, e_i\rangle,$$

dakle $AB \in DSPS(\ell^p(I))$, jer je $\widetilde{A}\widetilde{B} \in DS(\ell^p(I))$ po [13, Theorem 2.4.].

□

Sada ćemo prikazati neke osnovne osobine dvostruko superstohastičkih operatora.

Teorema 4.1.12. *Neka je data familija $A = \{a_{ij} : i, j \in I\} \in DSPS(\ell^p(I))$.*

1) Ako je $p = 1$, Tada je $\|A\|_1 \geqslant 1$. Dodatno, ako je $A = \{a_{ij} : i, j \in I\} \in DS(\ell^1(I))$ tada je $\|A\|_1 = 1$.

2) Ako postoje $i, j \in I$ takvi da važi $a_{ij} \geqslant 1$, tada je $\|A\|_p \geqslant 1$, $\forall p \in [1, \infty)$.

3) Ako je $A \in DSPS(\ell^p(I))$ i $p \in (1, \infty)$, i ako postoje konačni podskupovi $I_1, I_2 \subset I$ takvi da je familija $\{a_{ij} : i \in I_1, j \in I_2\}$ dvostruko stohastička, tada je $\|A\|_p \geqslant 1$. Dodatno, ako je $A \in DS(\ell^p(I))$ tada je $\|A\|_p = 1$.

Dokaz. Neka je $p = 1$. Fiksirajmo $f \in \ell^p(I)^+$. Sada, promenom redosleda sumiranja dobija se

$$\|Af\|_1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} a_{ij} f(j) = \sum_{j \in I} f(j) \sum_{i \in I} a_{ij} \geqslant \|f\|_1$$

dakle 1) je zadovoljeno kada je $A \in DSPS(\ell^1(I))$. Ostatak sledi na osnovu Leme 3.1.8.

Kako je

$$\|Ae_j\|_p^p = \sum_{k \in I} a_{kj}^p \geqslant a_{ij}^p \geqslant 1,$$

stoga je $\|A\|_p \geqslant 1$, pa 2) važi.

Okrećemo se dokazu stavke 3). Skupovi I_1, I_2 imaju istu kardinalnost, po Teoremi 1.2.3. Neka je $g = \sum_{j \in I_2} e_j$. Tada je $Ag = h + h_1$, gde je $h = \sum_{i \in I_1} e_i$ i $h_1(i) \geqslant 0$, $\forall i \in I$, pa možemo zaključiti $\|Ag\|_p = \|h + h_1\|_p \geqslant \|h\|_p = \|g\|_p$, to jest $\|A\|_p \geqslant 1$.

Kako je $\|A\|_p \leqslant 1$, kada je $A \in DS(\ell^p(I))$ po Lemi 3.1.8, stoga je $\|A\|_p = 1$. $\square$

Primer 4.1.13. Neka je $A = \{a_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}} \in DS(\ell^p(\mathbb{N}))$ beskonačna matrica koja definiše ograničen linearan operator $A : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ određen sa 2×2 matricama na sledeći način:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \cdots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 \cdots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \cdots \end{bmatrix}$$

Tada je $\|A(e_1 + e_2)\|_p^p = 1^p + 1^p = 2 = \|(e_1 + e_2)\|_p^p$, dakle sledi $\|A\|_p \geqslant 1$, pa je $\|A\|_p = 1$, po Teoremi 4.1.12, stavka 3).

Primer 4.1.14. Neka je $A = \{a_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}} \in DS(\ell^1(\mathbb{N}))$ beskonačna matrica definisana sa

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 & 1/128 & \dots \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 & 1/128 & \dots \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Tada je $\|A\|_1 = 1$, po Teoremi 4.1.12, stavka 1).

Sa ciljem da Teorema 4.2.4 dobije odgovarajuću formu, proširićemo pojam dvostruko superstohastičkog operatora i slabe supermajorizacije na $\ell^{\infty}(I)$ u Definicijama 4.1.15 i 4.2.3, respektivno.

Definicija 4.1.15. Neka je $A = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija realnih brojeva koja zadovoljava stavke (4.4) i (4.9). Familija A, posmatrana kao ograničen linearan operator na $\ell^{\infty}(I)$, je

1) *superstohastička po vrstama* ako postoji superstohastička familija po kolonama $A_0 \in CSPS(\ell^1(I))$ tako da je $A = A_0^*$;

2) *superstohastička po kolonama* ako postoji superstohastička familija po vrstama $A_0 \in CSPS(\ell^1(I))$ tako da je $A = A_0^*$;

3) *dvostruko superstohastička* ako postoji dvostruko superstohastička familija $A_0 \in DSPS(\ell^1(I))$ tako da je $A = A_0^*$.

Skup svih superstohastičkih po vrstama, superstohastičkih po kolonama kao i dvostruko superstohastičkih familija (operatora) na $\ell^{\infty}(I)$ označavaćemo respektivno, sa $RSPS(\ell^{\infty}(I))$, $CSPS(\ell^{\infty}(I))$, $DSPS(\ell^{\infty}(I))$.

Teorema 4.1.16. *Neka je $p \in [1, \infty]$. Tada su skupovi $RSPS(\ell^p(I))$, $CSPS(\ell^p(I))$ i $DSPS(\ell^p(I))$ konveksni.*

Dokaz. Neka su $A_1, A_2 \in RSPS(\ell^p(I))$. Definišemo novu familiju $A = tA_1 + (1-t)A_2 \in RSPS(\ell^p(I))$ za neko $t \in (0,1)$. Lako se može zaključiti da familija A zadovoljava uslove (4.4) i (4.9).

Prvo, neka je $p \in [1, \infty)$. Operatori A_1 i A_2 su pozitivni, tj. $\langle A_1 e_j, e_i \rangle \geqslant 0$ i $\langle A_2 e_j, e_i \rangle \geqslant 0$, $\forall i, j \in I$. Ako je $f \in \ell^p(I)^+$, tada je $A_1 f \in \ell^p(I)^+$, $A_2 f \in \ell^p(I)^+$, pa je operator A takođe pozitivan. Sada za proizvoljno $i \in I$, kako je $A_1, A_2 \in RSPS(\ell^p(I))$ i

$$\begin{aligned}\sum_{j \in I} \langle A e_j, e_i \rangle &= \sum_{j \in I} \langle (tA_1 + (1-t)A_2) e_j, e_i \rangle \\ &= t \sum_{j \in I} \langle A_1 e_j, e_i \rangle + (1-t) \sum_{j \in I} \langle A_2 e_j, e_i \rangle \geqslant 1\end{aligned} \tag{4.22}$$

dobija se da važi $A \in RSPS(\ell^p(I))$, pa je $RSPS(\ell^p(I))$ konveksan skup.

Pretpostavimo da je sada $p = \infty$. Postoje operatori $A_1^0, A_2^0 \in CSPS(\ell^1(I))$ tako da je $A_1 = (A_1^0)^*$ i $A_2 = (A_2^0)^*$, na osnovu Definicije 4.1.15. Na sličan način kao u (4.22), dobijamo da je

$$\begin{aligned}\sum_{j \in I} \langle A e_j, e_i \rangle &= t \sum_{j \in I} \langle (A_1^0)^* e_j, e_i \rangle + (1-t) \sum_{j \in I} \langle (A_2^0)^* e_j, e_i \rangle \\ &= t \sum_{j \in I} \langle e_j, A_1^0 e_i \rangle + (1-t) \sum_{j \in I} \langle e_j, A_2^0 e_i \rangle \geqslant 1,\end{aligned}$$

pa je $RSPS(\ell^{\infty}(I))$ konveksan skup.

Na sličan način može se zaključiti da je i $CSPS(\ell^p(I))$ konveksan skup.

Neka su proizvoljno izabrani operatori $A_1, A_2 \in DSPS(\ell^p(I))$ i neka su $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2 \in DS(\ell^p(I))$ takvi da je $\langle \widetilde{A}_1 e_j, e_i \rangle \leqslant \langle A_1 e_j, e_i \rangle$ i $\langle \widetilde{A}_2 e_j, e_i \rangle \leqslant \langle A_2 e_j, e_i \rangle$, $\forall i, j \in I$. Kako je $DS(\ell^p(I))$ konveksan skup na osnovu Teoreme 2.1.2, stoga je $\widetilde{A} = t\widetilde{A}_1 + (1-t)\widetilde{A}_2 \in DS(\ell^p(I))$ za svako $t \in (0,1)$. Ukoliko definišemo $A := tA_1 + (1-t)A_2$, za neko $t \in (0,1)$, tada je

$$\begin{aligned} \langle Ae_j, e_i\rangle &= t\langle A_1e_j, e_i\rangle + (1-t)\langle A_2e_j, e_i\rangle \\ &\geqslant t\langle \widetilde{A_1}e_j, e_i\rangle + (1-t)\langle \widetilde{A_2}e_j, e_i\rangle = \langle \widetilde{A}e_j, e_i\rangle, \ \forall i,j \in I, \end{aligned}$$

dakle, $A \in DSPS(\ell^p(I))$. Dakle, $DSPS(\ell^p(I))$ je konveksan skup.

□

4.2 Slaba supermajorizacija

Uvodimo pojam slabe supermajorizacije za dve proizvoljno izabrane pozitivne funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$, kada je $p \in [1,\infty)$, uz pomoć dvostruko superstohastičkih operatora na prostoru $\ell^p(I)$.

Definicija 4.2.1. Neka je $p \in [1,\infty)$. Za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$, funkcija f je *slabo supermajorizovana* funkcijom g, i to označavamo sa $f \prec^{ws} g$, ako postoji dvostruko superstohastička familija $D \in DSPS(\ell^p(I))$, tako da je $f = Dg$.

Lema 4.2.2. *Neka je $p \in [1,\infty)$, i neka je $A = \{a_{ij} \mid i,j \in I\}$ familija realnih brojeva koja zadovoljava uslove (4.4) i (4.9). Ako je $A \in DSPS(\ell^p(I))$ tada je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$. S druge strane, ako je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$, tada je $A \in CSPS(\ell^p(I))$.*

Dokaz. Neka je $D := A \in DSPS(\ell^p(I))$. Jasno, sledi da je $Af = Df$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$, pa je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$.

Obrnuto, ako je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$ tada familija A sadrži samo pozitivne elemente, jer je $Ae_i \prec^{ws} e_i \in \ell^p(I)^+$, $Ae_i \in \ell^p(I)^+$ i $\langle Ae_i, e_k\rangle = Ae_i(k) \geqslant 0$. Štaviše, postoje operatori $D_i \in DSPS(\ell^p(I))$ takvi da je $D_ie_i = Ae_i$, $\forall i \in I$. Sledi da je

$$\sum_{k\in I}\langle Ae_i, e_k\rangle = \sum_{k\in I}\langle D_ie_i, e_k\rangle \geqslant 1, \quad \forall i \in I.$$

Dakle, $A \in CSPS(\ell^p(I))$. □

Znamo da u konačno-dimenzionalnom slučaju relacija $Ax \prec^{ws} x$ povlači da matrica A mora biti dvostruko superstohastička (videti Teoremu 1.1.12). Međutim u beskonačno-dimenzionalnom slučaju, ukoliko pretpostavimo da je I beskonačan skup, tada operator T ne mora biti dvostruko superstohastički ukoliko važi $Af \prec^{ws} f$. Neka je I neprebrojiv skup, i neka je za dato $i_0 \in I$ definisana bijekcija $\omega : I\backslash\{i_0\} \to I$. Ako je definisan ograničen linearan operator $T : \ell^p(I) \to \ell^p(I)$ na sledeći način:

$$Tf(i) := \begin{cases} f(\omega(i)), & i \neq i_0 \\ 0, & i = i_0, \end{cases} \tag{4.23}$$

za svako $f \in \ell^p(I)$, sledi da za svako $f \in \ell^p(I)$ postoji permutacija $P \in P(\ell^p(I))$ tako da važi $Tf = Pf$. Drugim rečima važi $Tf \prec f$ što implicira $Tf \prec^{ws} f$. Lako se vidi da operator T nije dvostruko superstohastički jer uvek vazi $\sum\limits_{j\in I}\langle Te_j, e_i\rangle = 0$, na osnovu definicije samog operatora T.

Dalje, proširićemo pojam slabe supermajorizacije za slučaj kada je $p = \infty$.

Definicija 4.2.3. Za dve funkcije $f, g \in \ell^\infty(I)^+$, funkcija f je *slabo supermajorizovana* funkcijom g, i to označavamo sa $f \prec^{ws} g$, ako postoji dvostruko superstohastička familija $D \in DSPS(\ell^\infty(I))$, tako da je $f = Dg$.

Teorema 4.2.4. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka je q konjugovani eksponent od p. Pretpostavimo da je $A = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija realnih brojeva koja zadovoljava uslove (4.4) i (4.9). Ako je $A \in DSPS(\ell^p(I))$, tada je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$ i $A^*g \prec^{ws} g$, $\forall g \in \ell^q(I)^+$. Obrnuto, ako je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$ i $A^*g \prec^{ws} g$, $\forall g \in \ell^q(I)^+$ tada je $A \in RSPS(\ell^p(I)) \cap CSPS(\ell^p(I))$.*

Dokaz. Prvo ćemo pretpostaviti da je $A \in DSPS(\ell^p(I))$. Na osnovu Leme 4.2.2, dobijamo da je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$. Ako je $p \in (1, \infty)$, tada je $q \in (1, \infty)$ i važi

$$A^*g(i) = \sum_{k\in I} g(i)\langle A^*e_k, e_i\rangle = \sum_{k\in I} g(i)\langle e_k, Ae_i\rangle \geqslant 0$$

za svako $g \in \ell^q(I)^+$, pa je stoga A^* pozitivna familija. Na osnovu $\langle A^*e_k, e_i\rangle = \langle e_k, Ae_i\rangle$ dobijamo da je $A^* \in DSPS(\ell^q(I))$, i sledi $A^*g \prec^{ws} g$, $\forall g \in \ell^q(I)^+$ na osnovu Leme 4.2.2. Ako je $p = 1$ tada je $A \in DSPS(\ell^1(I))$, dakle $A^* \in DSPS(\ell^\infty(I))$, po Definiciji 4.1.15. Fiksirajmo $D = A^*$. Kako je $A^*g = Dg$, $\forall g \in \ell^\infty(I)$, stoga je $A^*g \prec^{ws} g$, $\forall g \in \ell^\infty(I)$.

Pretpostavimo da je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \ell^p(I)^+$ i $A^*g \prec^{ws} g$, $\forall g \in \ell^q(I)^+$. Sledi da je $A \in CSPS(\ell^p(I))$ uz pomoć Leme 4.2.2. Ako je $p > 1$ tada je $A^* \in CSPS(\ell^q(I))$ po Lemi 4.2.2 iz uslova $A^*g \prec^{ws} g$, $\forall g \in \ell^q(I)^+$. Na osnovu ovoga je

$$1 \leqslant \sum_{k\in I}\langle A^*e_i, e_k\rangle = \sum_{k\in I}\langle e_i, Ae_k\rangle, \quad \forall i \in I,$$

pa je $A \in RSPS(\ell^p(I))$. Konačno, pretpostavimo da je $p = 1$. Kako je $A^*e_k \prec^{ws} e_k$, stoga postoje operatori $D_k \in DSPS(\ell^\infty(I))$ takvi da je $A^*e_k = D_k e_k$, $\forall k \in I$, i postoje operatori $B_k \in DSPS(\ell^1(I))$ za koje je $B_k^* = D_k$. Sada sledi da je

$$1 \leqslant \sum_{j\in I}\langle B_k e_j, e_k\rangle = \sum_{j\in I}\langle e_j, D_k e_k\rangle = \sum_{j\in I}\langle e_j, A^*e_k\rangle = \sum_{j\in I}\langle Ae_j, e_k\rangle, \ \forall k \in I,$$

dakle, $A \in RSPS(\ell^1(I))$.

□

Analizom dokaza prethodne teoreme direktno dobijamo naredne posledice.

Posledica 4.2.5. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka je $A = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija realnih brojeva koja zadovoljava uslove (4.4) i (4.9). Ako je $A \in DSPS(\ell^p(I))$ tada je $A^* \in DSPS(\ell^q(I))$, pri čemu je q konjugovani eksponent od p.*

Posledica 4.2.6. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i $A = \{a_{ij} \mid i, j \in I\}$ familija realnih brojeva koja zadovoljava uslove (4.4) i (4.9).*

1) Ako je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$, tada je $A \in CSPS(\ell^p(I))$. Ako je dodatno $A^*f \prec^{ws} f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$, tada je $A \in RSPS(\ell^p(I)) \cap CSPS(\ell^p(I))$.

2) Ako je $A \in DSPS(\ell^p(I))$ tada je $Af \prec^{ws} f$ i $A^*f \prec^{ws} f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$.

Dokaz. Neka je $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$. Jasno, $Ae_i \in (\ell^p(I))^+$, $\forall i \in I$ tj. $\langle Ae_i, e_k\rangle \geqslant 0$, $\forall k \in I$. Sledi da je A pozitivna familija. Sada, ostatak dokaza je očigledan, i oslanja se na dokaz Leme 4.2.2 i Teoreme 4.2.4.

□

Sledeći primer pokazuje da u opštem slučaju $Af \prec^{ws} f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$ i $A^*f \prec^{ws} f$, $\forall f \in \{e_i \mid i \in I\}$ ne povlači $A \in DSPS(\ell^p(I))$.

Primer 4.2.7. Neka je $A = \{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ beskonačna matrica definisana sa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Očigledno je suma po "vrstama" i "kolonama" familije A veća ili jednaka od 1, dakle važi $A \in RSPS(\ell^p(\mathbb{N})) \cap CSPS(\ell^p(\mathbb{N}))$, međutim ne postoji operator $\tilde{A} \in DS(\ell^p(\mathbb{N}))$, za koji je

$$\langle Ae_j, e_i\rangle \geqslant \langle \tilde{A}e_j, e_i\rangle, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

što se može lako zaključiti. Dakle, $A = \{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}} \notin DSPS(\ell^p(\mathbb{N}))$. S druge strane je $Ae_1 = e_1$, $Ae_{k+1} = e_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Jasno je da se mogu pronaći permutacije $P_k \in P(\ell^p(\mathbb{N}))$, za koje je $Ae_{k+1} = P_k e_{k+1} = e_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Takođe je $Ae_1 = Ie_1 = e_1$, pa imamo da je $Ae_k \prec^{ws} e_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Slično je $A^*e_1 = e_1 + e_2$, $A^*e_{k+1} = e_{k+2}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ i $A^*e_{k+1} = e_{k+2} = P_k^1 e_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, gde je $P_k^1 \in P(\ell^p(\mathbb{N}))$. Sledi da je $A^*e_{k+1} \prec^{ws} e_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo operator $D \in DSPS(\ell^p(\mathbb{N}))$ na sledeći način:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Za ovaj operator je $A^*e_1 = e_1 + e_2 = De_1$, pa važi i $A^*e_1 \prec^{ws} e_1$.

Sledeće nejednakosti sa konveksnim i konkavnim funkcijama predstavljaju uopštenje dobro poznatih rezultata u konačno-dimenzionalnoj majorizacionoj teoriji.

Teorema 4.2.8. *Neka je $p \in [1,\infty)$ i $b \in (0,\infty]$, i pretpostavimo da je $\varphi : [0,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna rastuća konkavna funkcija. Za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$, za koje je $f(i), g(i) < b$, $\forall i \in I$, ako važi supermajorizaciona relacija $f \prec^{ws} g$ tada je*

$$\sum_{i\in I} \varphi(f(i)) \geqslant \sum_{i\in I} \varphi(g(i)).$$

Dokaz. Neka je $f \prec^{ws} g$. Postoji familija $D \in DSPS(\ell^p(I))$ takva da je $f = Dg$. Funkcija $g \in \ell^p(I)^+$ ima reprezentaciju $g = \sum_{j\in I} g(j)e_j$, pa je

$$f(i) = Dg(i) = \sum_{j\in I} g(j)\langle De_j, e_i\rangle, \quad \forall i \in I.$$

Pretpostavimo da je φ pozitivna neprekidna rastuća konkavna funkcija. Na osnovu Jensenove nejednakosti dobija se da je

$$\begin{aligned}\varphi(f(i)) &= \varphi\left(\sum_{j\in I} g(j)\langle De_j, e_i\rangle\right) \geqslant \varphi\left(\sum_{j\in I} g(j)\langle \widetilde{D}e_j, e_i\rangle\right)\\ &\geqslant \sum_{j\in I} \varphi\left(g(j)\right)\langle \widetilde{D}e_j, e_i\rangle,\end{aligned}$$

gde je $\widetilde{D}$ dvostruko stohastički operator koji odgovara operatoru D. Sada, promenom redosleda sumiranja na osnovu Fubinijeve teoreme, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\varphi(f(i)) &\geqslant \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \varphi\left(g(j)\right)\langle \widetilde{D}e_j, e_i\rangle\\ &= \sum_{j\in I} \varphi\left(g(j)\right)\sum_{i\in I}\langle \widetilde{D}e_j, e_i\rangle = \sum_{j\in I}\varphi(g(j))\end{aligned}$$

Napominjemo da ako funkcija φ nije pozitivna, s obzirom da je ona neprekidna i rastuća važi $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = a < 0$, pa je $\sum_{i\in I} \varphi(f(i)) = \sum_{i\in I} \varphi(g(i)) = -\infty$, kada je $card(I) \geqslant \aleph_0$. Slično je $\sum_{j\in I} \varphi(g(j)) = \infty$, kada je $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = a > 0$, ali tada mora važiti $\sum_{j\in I} \varphi(f(j)) = \infty$ na osnovu prethodne diskusije.

$\square$

Teorema 4.2.9. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka je $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna opadajuća konveksna funkcija. Za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$, ako je $f \prec^{ws} g$ tada je*

$$\sum_{i\in I}\varphi(f(i)) \leqslant \sum_{i\in I}\varphi(g(i))$$

Dokaz. Neka je $f \prec^{ws} g$ i φ negativna neprekidna opadajuća konveksna funkcija. Postoji familija $D \in DSPS(\ell^p(I))$ tako da je $f = Dg$. Tada je

$$\begin{aligned}\varphi(f(i)) &= \varphi\left(\sum_{j\in I} g(j)\langle De_j, e_i\rangle\right) \leqslant \varphi\left(\sum_{j\in I} g(j)\langle \widetilde{D}e_j, e_i\rangle\right)\\ &\leqslant \sum_{j\in I} \varphi\left(g(j)\right)\langle \widetilde{D}e_j, e_i\rangle\end{aligned}$$

Sada sledi

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\varphi(f(i)) &\leqslant \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\varphi\left(g(j)\right)\langle\widetilde{D}e_j,e_i\rangle\\ &= \sum_{j\in I}\varphi\left(g(j)\right)\sum_{i\in I}\langle\widetilde{D}e_j,e_i\rangle\\ &= \sum_{j\in I}\varphi(g(j))\end{aligned}$$

□

Ako funkcija φ nije negativna, po uzoru na prethodni dokaz lako se može zaključiti da je $\sum\limits_{i\in I}\varphi(f(i)) = \sum\limits_{i\in I}\varphi(g(i)) = +\infty$, kada je $card(I) \geqslant \aleph_0$.

Posledica 4.2.10. *Neka je $p \in [1,\infty)$ i $b \in (0,\infty]$, i neka su date funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$ takve da je $f(i), g(i) < b$, $\forall i \in I$. Ako je $f \prec^{ws} g$ i $g \prec^{ws} f$ tada je*

1) za svaku neprekidnu rastuću konkavnu funkciju $\varphi : [0,b) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\sum_{i\in I}\varphi(f(i)) = \sum_{i\in I}\varphi(g(i));$$

2) za svaku neprekidnu opadajuću konveksnu funkciju $\varphi : [0,b) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\sum_{i\in I}\varphi(f(i)) = \sum_{i\in I}\varphi(g(i)).$$

Posledica 4.2.11. *Neka su date funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$, $p \in [1,\infty)$. Ako je $f \prec^{ws} g$ i $g \prec^{ws} f$ tada je*

$$\sum_{i\in I}\varphi_\lambda(f(i)) = \sum_{i\in I}\varphi_\lambda(g(i)),$$

za svaku funkciju $\varphi_\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definisanu sa

$$\varphi_\lambda(t) := t\cdot\chi_{[0,\lambda)}(t) + \lambda\cdot\chi_{[\lambda,\infty)}(t), \tag{4.24}$$

gde je $\lambda \in [0,\infty)$.

Sledeći Primer 4.2.12 pokazuje da obrnuti smer u Posledici 4.2.10 ne važi. Takođe, u ovom primeru možemo zaključiti da obrnuti smerovi Teorema 4.2.8 i 4.2.9 takođe ne važe.

Primer 4.2.12. Neka je $r > 1$, $p \in [1,\infty)$ i neka su dve funkcije $f, g \in \ell^1(\mathbb{N})^+ \subset \ell^p(\mathbb{N})^+$ definisane sa $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}e_{k+1}$ i $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}e_k$. Jasno je da je $f(k+1) = g(k)$, $k \in \mathbb{N}$ i $f(1) = 0$. Neka je $\varphi : [0,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ proizvoljno izabrana rastuća konkavna (opadajuća konveksna) funkcija, za koju je $b \in (0,\infty]$ i $f(i), g(i) < b$, $\forall i \in I$. Ako je $\varphi(0) = 0$, tada je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(f(k)) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\frac{1}{k^r}) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi(g(k)).$$

Štaviše, ako je $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) \neq 0$, tada imamo da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(f(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(g(k)) \;\; (= +\infty \vee -\infty).$$

Neka je $D : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ proizvoljno izabran ograničen linearan operator za koji važi $f = Dg$, to jest

$$f = Dg = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) De_k.$$

Kako je

$$0 = f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \langle De_k, e_1 \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \langle De_k, e_1 \rangle,$$

stoga je $\langle De_k, e_1 \rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, $D \notin DSPS(\ell^p(I))$ što povlači $f \nprec^{ws} g$.

Sada ćemo dokazati najbitniju teoremu u ovoj sekciji.

Teorema 4.2.13. *Za dve funkcije $f, g \in \ell^1(I)^+$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $f \prec^{ws} g$ i $g \prec^{ws} f$;

2) Postoji permutacija $P \in P(\ell^1(I))$ tako da je $f = Pg$.

Dokaz. Neka je $f \in \ell^1(I)^+$ proizvoljno izabrana funkcija. Definišemo dva skupa I_f^0 i I_f^+ na sledeći način:

$$I_f^0 := \{i \in I \mid f(i) = 0\},$$
$$I_f^+ := \{i \in I \mid f(i) > 0\}.$$

Očigledno je $I = I_f^0 \cup I_f^+$. Kao što već znamo, skup I_f^+ je najviše prebrojiv, jer je $f \in \ell^1(I)^+$, to jest

$$\sum_{i\in I} f(i) = \sum_{i \in I_f^+} f(i) < \infty.$$

Takođe skup $\{f(i) \mid i \in I\}$ je ograničen, pa možemo induktivno definisati familiju $\{I_f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ koja sadrži disjunktne konačne podskupove skupa I_f^+, na sledeći način:

$$I_f^1 := \;\; i \in I_f^+ \mid f(i) = max\{f(j) \mid j \in I_f^+\}\}$$

i

$$I_f^n := \left\{ i \in I_f^+ \mid f(i) = max \left\{ f(j) \mid j \in I_f^+ \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} I_f^k \right\} \right\}$$

kada je $n \geqslant 2$. Jasno, $I_f^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_f^k$. Ako je $I_f^r \neq \varnothing$, $r \in \mathbb{N}$, tada definišemo član niza $f_r := f(j)$, gde je $j \in I_f^r$. Ako je $I_f^r = \varnothing$, tada je $I_f^k = \varnothing$, $\forall k \geqslant r$, pa stavljamo da je $f_r := 0$ i $f_k := 0$, $\forall k \geqslant r$. Može se zaključiti da je $f_s \leqslant f_r$ kadgod je $s > r$. Nejednakost je stroga ako je I_f^r neprazan skup.

Na dalje ćemo razmatrati neprekidne rastuće konkavne funkcije $\varphi_\lambda : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $\lambda \geqslant 0$ definisane kao u izrazu (4.24). Fiksirajmo $f, g \in \ell^1(I)^+$ tako da važi

$$f \prec^{ws} g \ \text{ i } \ g \prec^{ws} f.$$

Stoga je

$$\sum_{i \in I} \varphi_\lambda(f(i)) = \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(g(i)), \tag{4.25}$$

za svako $\lambda > 0$. po Posledici 4.2.11. Sada, uzimajući za $\lambda = \max\{f_1, g_1\}$ dobija se

$$\sum_{i \in I_f^+} f(i) = \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(f(i)) = \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(g(i)) = \sum_{i \in I_g^+} g(i) < \infty, \tag{4.26}$$

pa su na osnovu izraza (4.26) skupovi I_f^+ i I_g^+ istovremeno prazni ili neprazni. Očigledno, ako je $I_f^+ = \varnothing = I_g^+$ dokaz je trivijalan. Pretpostavimo da su skupovi I_f^+, I_g^+ neprazni. Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je $f_1 \geqslant g_1$. Sada postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $f(k) \geqslant g(1)$, $\forall k = 1, \dots m$ i $f(m+1) < g(1)$. Sledi da je

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I_g^+} g(i) &= \sum_{i \in I} \varphi_{g_1}(g(i)) = \sum_{i \in I} \varphi_{g_1}(f(i)) \\
&= \sum_{i \in I_f^+ \setminus \bigcup_{k=1}^m I_f^k} f(i) + g_1 \sum_{k=1}^m card(I_f^k).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Kombinovanjem (4.26) i (4.27) očigledno je $f_1 = g_1$ i $m = 1$. Neka je sada $\lambda := \max\{f_2, g_2\}$. Sledi da je

$$\sum_{i \in I} \varphi_\lambda(f(i)) = \sum_{i \in I \setminus I_f^1} f(i) + card(I_f^1) \cdot \lambda \tag{4.28}$$

i

$$\sum_{i \in I} \varphi_\lambda(g(i)) = \sum_{i \in I \setminus I_g^1} g(i) + card(I_g^1) \cdot \lambda \tag{4.29}$$

Jednakosti (4.25), (4.28) i (4.29) povlače

$$\sum_{i \in I \setminus I_f^1} f(i) - \sum_{i \in I \setminus I_g^1} g(i) = \lambda(card(I_g^1) - card(I_f^1)) \tag{4.30}$$

S druge strane, na osnovu (4.25) i (4.27) kada je $m = 1$, dobija se

$$\sum_{i \in I \setminus I_f^1} f(i) - \sum_{i \in I \setminus I_g^1} g(i) = g_1(card(I_g^1) - card(I_f^1)) \tag{4.31}$$

Kako je $\lambda < g_1$, zaključujemo da stavke (4.30) i (4.31) povlače $card(I_g^1) = card(I_f^1)$. Dalje, dokazaćemo matematičkom indukcijom da važi

$$f_k = g_k \quad \text{i} \quad card(I_f^k) = card(I_g^k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.32}$$

Pretpostavimo da indukcijska hipoteza (4.32) važi za $k = 1, \ldots, n$. Bez gubljenja opštosti može se pretpostaviti da je $I_f^{n+1}, I_g^{n+1} \neq \emptyset$ i $f_{n+1} \geqslant g_{n+1}$. Sada sledi da je

$$\sum_{i \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_f^k} f(i) = \sum_{i \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_g^k} g(i) \tag{4.33}$$

zbog (4.25) i (4.32), birajući $\lambda = f_{n+1}$. S druge strane ako izaberemo da je $\lambda = g_{n+1}$ tada je

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(g(i)) &= \sum_{i \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_g^k} g(i) + \lambda \sum_{k=1}^{n} card(I_g^k) \\ \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(f(i)) &= \sum_{i \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} I_f^k} f(i) + \lambda \cdot card(I_f^{n+1}) + \lambda \sum_{k=1}^{n} card(I_f^k) \end{aligned} \tag{4.34}$$

Na osnovu izraza (4.25), (4.32), (4.33) i (4.34) zaključujemo da je $f_{n+1} = g_{n+1}$ i

$$\sum_{i \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} I_f^k} f(i) - \sum_{i \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} I_g^k} g(i) = g_{n+1}(card(I_g^{n+1}) - card(I_f^{n+1})). \tag{4.35}$$

Neka je $\lambda = \max\{f_{n+2}, g_{n+2}\}$. Sada je

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(f(i)) - \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(g(i)) \\ &= \sum_{i \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} I_f^k} f(i) - \sum_{i \in I \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} I_g^k} g(i) + \lambda(card(I_f^{n+1}) - card(I_g^{n+1})). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Iz uslova $\lambda < g_{n+1}$ sledi da je $card(I_f^{n+1}) = card(I_g^{n+1})$, na osnovu (4.35) i (4.36). Dakle važi (4.32).

Na osnovu (4.32) može se izvesti zaključak da postoje bijekcije $\omega_k : I_f^k \longrightarrow I_g^k$, za ono k za koje je $I_f^k \neq \emptyset$. Sada definišemo novu bijekciju $\Omega : I_f^+ \longrightarrow I_g^+$ sa

$$\Omega(i) := \omega_k(i) \in I_g^k,$$

kadgod je $i \in I_f^k$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Ovo preslikavanje je dobro definisano jer je $I_f^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_f^k$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_f^k = \emptyset$ i važi

$$I_g^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_g^k \ , \ \bigcap_{k=1}^{\infty} I_g^k = \emptyset.$$

U drugom delu dokaza želimo pokazati da je kardinalnost skupova I_f^0 i I_g^0 jednaka. Ako je I neprebrojiv skup, tada su i I_f^0 i I_g^0 neprebrojivi skupovi takođe. Kao što znamo, ako je I konačan, postoji permutacija P tako da je $f = Pg$, dakle $card(I_f^0) = card(I_f^0) < \aleph_0$. Okrećemo se slučaju kada je I prebrojiv skup. Bez gubljenja opštosti, neka je

$$card(I_f^0) \leqslant card(I_g^0) \leqslant \aleph_0$$

i pretpostavimo da važi

$$card(I_f^0) < \aleph_0.$$

Ako je $k \in I_g^0$ tada je

$$0 = g(k) = \sum_{j \in I} f(j) \langle D_1 e_j, e_k \rangle,$$

pa je $\langle D_1 e_j, e_k \rangle = 0$, $\forall j \in I_f^+$, kadgod je $k \in I_g^0$, gde je $D_1 \in DSPS(\ell^1(I))$ i $g = D_1 f$. Znamo da postoji operator $\widetilde{D_1} \in DS(\ell^1(I))$ takav da je $\langle D_1 e_j, e_i \rangle \geqslant \langle \widetilde{D_1} e_j, e_i \rangle$, $\forall i, j \in I$. Sada sledi da je $\langle \widetilde{D_1} e_j, e_k \rangle = 0$, $\forall j \in I_f^+$, kadgod je $k \in I_g^0$, pa je

$$\sum_{j \in I_f^0} \langle \widetilde{D_1} e_j, e_k \rangle = 1, \ \ \forall k \in I_g^0.$$

Takođe,

$$\sum_{k \in I_g^0} \langle \widetilde{D_1} e_j, e_k \rangle \leqslant \sum_{k \in I} \langle \widetilde{D_1} e_j, e_k \rangle = 1, \ \ \forall j \in I_f^0.$$

Stoga je

$$\sum_{j \in I_f^0} \sum_{k \in I_g^0} \langle \widetilde{D_1} e_j, e_k \rangle \leqslant card(I_f^0) \leqslant card(I_g^0) = \sum_{k \in I_g^0} \sum_{j \in I_f^0} \langle \widetilde{D_1} e_j, e_k \rangle.$$

Kako je $card(I_f^0) < \aleph_0$, promenom redosleda sumiranja u izrazu (4.37) dobija se da moraju biti ispunjene jednakosti u izrazu (4.37), dakle mora biti $card(I_f^0) = card(I_g^0)$ pod predpostavkom da je bar jedan od ova dva skupa konačan. Ukoliko su oba skupa $card(I_f^0)$ i $card(I_g^0)$ prebrojiva tada su jasno iste kardinalnosti. Sada, na osnovu ovih zaključaka, mora postojati bijekcija $\omega_0 : I_f^0 \longrightarrow I_g^0$. Konačno, definišemo bijekciju $\Psi : I_f \longrightarrow I_g$ takvu da je

$$\Psi(i) := \begin{cases} \Omega(i), & i \in I_f^+, \\ \Omega_0(i), & i \in I_f^0. \end{cases}$$

Formiramo sada permutaciju $P \in P(\ell^1(I))$ kojoj odgovara bijekcija Ψ to jest važi $Pe_j = e_{\Psi(j)}$, za svako $j \in I$. Fiksiramo $f = \sum_{j \in I} f(j) e_j \in \ell^1(I)$. Kako je

$$Pf = \sum_{j \in I} f(j) e_{\Psi(j)} = \sum_{k \in I} f(\Psi^{-1}(k)) e_k,$$

stoga je

$$Pf(i) = \sum_{k \in I} f(\Psi^{-1}(k)) \langle e_k, e_i \rangle = f(\Psi^{-1}(i)).$$

Ako je $i \in I_g^+$, tada postoji $m \in I$ za koje je $i \in I_g^m$ i $\Psi^{-1}(i) = \omega_m^{-1}(i) \in I_f^m \subset I_f^+$. Stoga je

$$g(i) = f(\Psi^{-1}(i)) = Pf(i), \quad \forall i \in I_g^+.$$

Slično, ako je $i \in I_g^0$, sledi da je $\Psi^{-1}(i) = \Omega_0^{-1}(i) \in I_f^0$. Dakle, $Pf = g$.

Kako za inverz Q permutacije P važi $Q = P^{-1} \in P(\ell^1(I)) \subset DSPS(\ell^1(I))$, sledi da je $Pf = g$ i $Qg = f$, tj. sledi $g \prec^{ws} f$ i $f \prec^{ws} g$, dakle, suprotan smer je očigledan. □

Posledica 4.2.14. *Slaba supermajorizaciona relacija "$\prec^{ws}$" iz Definicije* 4.1.8, *kada je $p \in [1, \infty)$, je refleksivna i tranzitivna relacija tj. "$\prec^{ws}$" je pre-uređenje. Specijalno, kada je $p = 1$, ukoliko poistovetimo sve funkcije koje se razlikuju do na permutaciju, tada možemo posmatrati relaciju "$\prec^{ws}$" kao parcijalno uređenje na prostoru $\ell^1(I)$.*

Dokaz. Kako je jedinični operator $\mathcal{I}$ dvostruko superstohastički, stoga za svako $f \in \ell^1(I)^+$, izraz $f = \mathcal{I}f$ povlači $f \prec^{ws} f$, pa je "$\prec^{ws}$" refleksivna relacija.

Tranzitivnost sledi na osnovu Teoreme 4.1.11. Ako je $f_1 \prec^{ws} f_2$ i $f_2 \prec^{ws} f_3$ tada postoje operatori $D_1, D_2 \in DSPS(\ell^1(I))$ za koje je $f_1 = D_1 f_2$, $f_2 = D_2 f_3$ pa važi $f_1 = D_1 D_2 f_3$. Kako je skup $DSPS(\ell^1(I))$ zatvoren za kompoziciju, to je $f_1 \prec^{ws} f_3$.

Iz Teoreme 4.2.13 se vidi da ukoliko poistovetimo sve funkcije koje se razlikuju do na permutaciju, relacija slabe supermajorizacije "$\prec^{ws}$" je antisimetrična relacija. □

Sada, na osnovu dokazane Teoreme 4.2.13 lako je dokazati sledeću posledicu koja se pokalapa sa Teoremom 1.2.12, za slučaj $p = 1$.

Posledica 4.2.15. *Za dve funkcije $f, g \in \ell^1(I)$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) $f \prec g$ i $g \prec f$;

2) Postoji permutacija $P \in P(\ell^1(I))$ tako da je $f = Pg$.

Dokaz. Očigledno, relacija $f \prec g$ povlači relaciju $f \prec^{ws} g$, a osnovu Teoreme 4.2.13 dobijamo da $f \prec g$ i $g \prec f$ povlači egzistenciju permutacije $P \in P(\ell^1(I))$ za koju je $f = Pg$, na osnovu prethodne teoreme.

Obrnuti smer je očigledan. □

Ovu sekciju završavamo sa rezultatima koji daju blisku vezu između slabe supermajorizacione relacije i konveksne ili konkavne monotone funkcije. Funkcija $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ je $\mathbb{R}^+$-subhomogena ($\mathbb{R}^+$-superhomogena) ako je

$$\varphi(\lambda x) \leqslant \lambda \varphi(x), \ (\ \varphi(\lambda x) \geqslant \lambda \varphi(x) \ ) \ , \quad \forall x \in \mathcal{D}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Definisaćemo realan broj $M(D) \geqslant 1$ kao u (4.14) na sledeći način:

$$M(D) := \max\{\|D\|_1, \|D\|_\infty\} \tag{4.37}$$

Teorema 4.2.16. *Neka je $p \in [1, \infty)$ i neka je $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ neprekidna konveksna funkcija za koju je $\varphi(0) = 0$. Za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$,*

1) ako je $f \prec^{ws} g$, tada je $\sum\limits_{i \in I} \varphi(f(i)) \leqslant \sum\limits_{i \in I} \varphi(M(D_1) g(i))$, gde je $f = D_1 g$, za neki operator $D_1 \in DSPS(\ell^p(I))$.

2) ako je $f \prec^{ws} g$ i $g \prec^{ws} f$, tada je

$$\sum_{i\in I}\varphi\left(\frac{1}{M(D_2)}g(i)\right) \leqslant \sum_{i\in I}\varphi(f(i)) \leqslant \sum_{j\in I}\varphi(M(D_1)g(j)),$$

gde je $f = D_1 g$, $g = D_2 f$, za neke operatore $D_1, D_2 \in DSPS(\ell^p(I))$.

3) ako je $f \prec^{ws} g$ i $g \prec^{ws} f$ tada ako je φ $\mathbb{R}^+$-superhomogena ili $\mathbb{R}^+$-subhomogena funkcija sledi

$$\frac{1}{M(D_2)}\sum_{i\in I}\varphi\left(g(i)\right) \leqslant \sum_{i\in I}\varphi(f(i)) \leqslant M(D_1)\sum_{i\in I}\varphi(g(i))$$

gde je $f = D_1 g$, $g = D_2 f$, za neke operatore $D_1, D_2 \in DSPS(\ell^p(I))$.

Dokaz. Ako funkcije f i g imaju reprezentacije $f = \sum_{j\in I} f(j)e_j$ i $g = \sum_{j\in I} g(j)e_j$, tada je

$$f(i) = D_1 g(i) = \sum_{j\in I} g(j)\langle D_1 e_j, e_i\rangle, \quad g(i) = D_2 f(i) = \sum_{j\in I} f(j)\langle D_2 e_j, e_i\rangle$$

$\forall i \in I$. Fiksirajmo

$$r_i(D_1) := 1 - \frac{1}{M(D_1)}\sum_{j\in I}\langle D_1 e_j, e_i\rangle,$$

pri čemu mora da važi $0 \leqslant r_i(D_1) \leqslant 1$. Sada, na osnovu konveksnosti funkcije φ i uslova $\varphi(0) = 0$ sledi na osnovu Jensenove nejednakosti

$$\begin{aligned}\varphi(f(i)) &= \varphi\left(\sum_{j\in I} M(D_1)g(j)\frac{\langle D_1 e_j, e_i\rangle}{M(D_1)} + 0\cdot r_i(D_1)\right)\\ &\leqslant \sum_{j\in I}\varphi\left(M(D_1)g(j)\right)\frac{\langle D_1 e_j, e_i\rangle}{M(D_1)}\end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\varphi(f(i)) &\leqslant \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\varphi(M(D_1)g(j))\frac{\langle D_1 e_j, e_i\rangle}{M(D_1)}\\ &= \sum_{j\in I}\varphi(M(D_1)g(j))\sum_{i\in I}\frac{\langle D_1 e_j, e_i\rangle}{M(D_1)}\\ &\leqslant \sum_{j\in I}\varphi(M(D_1)g(j))\end{aligned} \tag{4.38}$$

dakle 1) je pokazano. Štaviše,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{M(D_2)}g(i)\right) &= \varphi\left(\sum_{j\in I} f(j)\frac{\langle D_2 e_j, e_i\rangle}{M(D_2)} + 0\cdot r_i(D_2)\right)\\ &\leqslant \sum_{j\in I}\varphi(f(j))\frac{\langle D_2 e_j, e_i\rangle}{M(D_2)}\end{aligned}$$

Na sličan način kao u (4.38), zaključujemo da je

$$\sum_{i\in I}\varphi\left(\frac{1}{M(D_2)}g(i)\right)\leqslant\sum_{j\in I}\varphi(f(j))$$

Nejednakosti 3) slede iz stavke 2) na osnovu $\mathbb{R}^+$-subhomogenosti ili $\mathbb{R}^+$-superhomogenosti funkcije φ. Naime, ako je funkcija φ $\mathbb{R}^+$-superhomogena(subhomogena) tada leva(desna) nejednakost slede direktno iz definicije ovih pojmova i stavke 2). Ako zamenimo mesta funkcijama f i g tada desna(leva) nejednakost sledi na sličan način.

□

Teorema 4.2.17. *Neka je $p\in[1,\infty)$ i neka je $\varphi:[0,\infty)\longrightarrow(-\infty,0]$ neprekidna konkavna funkcija za koju je $\varphi(0)=0$. Za dve funkcije $f,g\in\ell^p(I)^+$,*

1) *ako je $f\prec^{ws}g$ tada je $\sum\limits_{i\in I}\varphi(f(i))\geqslant\sum\limits_{i\in I}\varphi(M(D_1)g(i))$, gde je $f=D_1g$, za neki operator $D_1\in DSPS(\ell^p(I))$.*

2) *ako je $f\prec^{ws}g$ i $g\prec^{ws}f$ tada je*

$$\sum_{i\in I}\varphi\left(\frac{1}{M(D_2)}g(i)\right)\geqslant\sum_{i\in I}\varphi(f(i))\geqslant\sum_{j\in I}\varphi(M(D_1)g(j)),$$

gde je $f=D_1g$, $g=D_2f$, za neke operatore $D_1,D_2\in DSPS(\ell^p(I))$.

3) *ako je $f\prec^{ws}g$ i $g\prec^{ws}f$ tada, ako je φ još i $\mathbb{R}^+$-superhomogena ili $\mathbb{R}^+$-subhomogena tada je*

$$\frac{1}{M(D_2)}\sum_{i\in I}\varphi\left(g(i)\right)\geqslant\sum_{i\in I}\varphi(f(i))\geqslant M(D_1)\sum_{i\in I}\varphi(g(i))$$

gde je $f=D_1g$, $g=D_2f$, za neke operatore $D_1,D_2\in DSPS(\ell^p(I))$.

Dokaz. Naka važi relacija $f\prec^{ws}g$. Postoji familija $D\in DSPS(\ell^p(I))$ za koju je $f=Dg$. Ako funkcija f ima reprezentaciju $f=\sum\limits_{j\in I}f(j)e_j$, tada je $f(i)=Dg(i)=\sum\limits_{j\in I}g(j)\langle De_j,e_i\rangle$.

Štaviše,

$$\begin{aligned}\varphi(f(i)) &= \varphi\left(\sum_{j\in I}g(j)\langle De_j,e_i\rangle\right)\\ &= \varphi\left(\sum_{j\in I}M(D)g(j)\frac{\langle De_j,e_i\rangle}{M(D)}+0\cdot r_i(D)\right)\\ &\geqslant \sum_{j\in I}\varphi(M(D)g(j))\frac{\langle De_j,e_i\rangle}{M(D)}\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\varphi(f(i)) &\geqslant \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\varphi(M(D)g(j))\frac{\langle De_j, e_i\rangle}{M(D)}\\ &= \sum_{j\in I}\varphi(M(D)g(j))\sum_{i\in I}\frac{\langle De_j, e_i\rangle}{M(D)}\\ &\geqslant \sum_{j\in I}\varphi(M(D)g(j))\end{aligned}$$

Ostatak dokaza je sličan sa dokazom Teoreme 4.2.16.

$\square$

Ukoliko posmatramo klasu svih pozitivnih konveksnih funkcija φ, tada se Lema 1.2.8 i [13, Posledica 3.3.] mogu posmatrati kao posledice Teoreme 4.2.16 za pozitivne funkcije $\ell^p(I)^+$, jer za dvostruko stohastički operator D, imamo da je $M(D) = 1$. Jasno, u tom slučaju je $r_i(D_1) = r_i(D_1) = 0$, i zbog poga, možemo izostaviti uslov $\varphi(0) = 0$. Pomenute činjenice su prikazane u sledećoj posledici.

Posledica 4.2.18. *Neka je $p \in [1,\infty)$ i pretpostavimo da je $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ neprekidna konveksna funkcija i neka je $\psi : [0,\infty) \longrightarrow (-\infty, 0]$ neprekidna konkavna funkcija. Za dve funkcije $f, g \in \ell^p(I)^+$,*

1) Ako je $f \prec g$, tada je $\sum_{i\in I}\varphi(f(i)) \leqslant \sum_{i\in I}\varphi(g(i))$,

2) Ako je $f \prec g$, tada je $\sum_{i\in I}\psi(f(i)) \geqslant \sum_{i\in I}\psi(g(i))$,

3) Ako je $f \prec g$ i $g \prec f$, tada je

$$\sum_{i\in I}\varphi(f(i)) = \sum_{i\in I}\varphi\left(g(i)\right) \quad i \quad \sum_{i\in I}\psi(f(i)) = \sum_{i\in I} \quad (g(i))\,.$$

4.3 Linearna očuvanja slabe supermajorizacije, kada je I beskonačan skup

Cilj ove sekcije je da se pronađe oblik proizvoljnog linearnog očuvanja slabe supermajorizacije na na diskretnom Lebegovom prostoru $\ell^1(I)^+$. Po analogiji sa linearnim očuvanjima standardne i slabe majorizacione relacije koje su uvedene u prethodnim glavama, prikazujemo definiciju pojama linearnog očuvanja slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$.

Definicija 4.3.1. Ograničen linearan operator $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ je *očuvanje slabe supermajorizacije* na $\ell^1(I)^+$, ako operator T čuva slabu majorizacionu relaciju, to jest važi $Tf \prec^{ws} Tg$, kadgod je $f \prec^{ws} g$, za dve funkcije $f, g \in \ell^1(I)^+$. Skup svih linearnih očuvanja slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$ označavaćemo sa $\mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$.

Prvo, daćemo neke osnovne osobine slabe supermajorizacije i njenih očuvanja.

Lema 4.3.2. *Neka je $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqslant 0$. Tada:*

1) majorizacija $f \prec g$ povlači slabu supermajorizaciju $f \prec^{ws} g$;

2) $\lambda K \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$, za svako $K \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$;

3) $K_1K_2 \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$, za svako $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$;

4) Ako je $K \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$, tada je $Ke_j(i) \geqslant 0$, $\forall i, j \in I$.

Dokaz. Stavka 1) je očigledna.

Neka je $K \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant 0$. Tada $f \prec^{ws} g$ povlači $Kf \prec^{ws} Kg$, tj., postoji $D \in DSPS(\ell^1(I))$ tako da je $Kf = DKg$. Kako je $\lambda Kf = \lambda DKg = D(\lambda Kg)$, dobija se $(\lambda K)f \prec^{ws} (\lambda K)g$, pa sledi $\lambda K \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$. Relacija $f \prec^{ws} g$ povlači $K_2 f \prec^{ws} K_2 g$, što dalje povlači $K_1K_2 f \prec^{ws} K_1K_2 g$, dakle sledi $K_1K_2 \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$.

Da bismo dokazali stavku 4), pretpostavićemo suprotno, neka postoji bar jedan par $i_0, j_0 \in I$ tako da za očuvanje K važi $\langle Ke_{j_0}, e_{i_0}\rangle = Ke_{j_0}(i_0) < 0$. Kako $e_{j_0} \prec^{ws} e_k$ ne povlači $Ke_{j_0} \prec^{ws} Ke_k$ jer važi $Ke_{j_0} \notin \ell^1(I)^+$, stoga sledi da operator K nije linearno očuvanje, što nije moguće. Dakle, stavka 4) je dokazana.

□

Nadalje, slično kao i u slučaju slabe majorizacije, posmatraćemo ograničen linearan operator $P_\theta : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ definisan sa

$$P_\theta(f) := \sum_{j \in I} f(j) e_{\theta(j)}, \tag{4.39}$$

za svaku funkciju $f = \sum\limits_{j \in I} f(j)e_j \in \ell^1(I)$, pri čemu je $\theta : I \to I$ neka data jedan-jedan funkcija. Ako je θ surjekcija, znamo da je P permutacija, i važi $\|P\| = 1$.

Prvi rezultat u ovoj sekciji pokazuje da za dvostruko superstohastički operator Q na prostoru $\ell^1(I)$ i za svaku familiju koju čine operatori P_{θ_k} odredjeni jedan-jedan funkcijama θ_k koje imaju međusobno disjunktne slike, postoji najmanje jedan dvostruko superstohastički operator D tako da važi $DP_{\theta_k} = P_{\theta_k}Q$, za svaku funkciju θ. Na osnovu ovog rezultata, naćicemo dovoljne uslove da proizvoljan ograničen linearan operator na $\ell^1(I)$ bude očuvanje slabe supermajorizacije, kada je I beskonačan skup. U drugom delu biće pokazano da su zapravo ovi uslovi, potrebni i dovoljni da operator bude linearno očuvanje.

Teorema 4.3.3. *Neka je dat operator $Q \in DSPS(\ell^1(I))$. Pretpostavimo da je*

$$\Theta := \{\theta_j : I \xrightarrow{1-1} I \mid j \in I_0,\ \ \theta_j(I) \cap \theta_j(I) = \varnothing,\ \ i \neq j\} \tag{4.40}$$

familija sačinjena od jedan-jedan funkcija na skupu I sa međusobno disjunktnim slikama, pri čemu je I_0 najviše prebrojiv skup. Tada postoji najmanje jedan operator $D \in DSPS(\ell^1(I))$ tako da važi $P_\theta Q = DP_\theta$, $\forall \theta \in \Theta$.

Dokaz. Neka je $D = \{d_{ij} \mid i,j \in I\}$ jedna familija definisana sa

$$d_{ij} := \begin{cases} \langle Qe_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)}\rangle, & i,j \in \theta(I), \text{ za neko } \theta \in \Theta, \\ b, & i,j \notin \bigcup\limits_{\theta\in\Theta} \theta(I), \ j = i, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{4.41}$$

pri čemu je broj $b \geqslant 1$ proizvoljno izabran.

Familija D zadovoljava uslove (4.4) i (4.9). Preciznije, ako je $j \in \theta(I)$ proizvoljno izabran, za neku funkciju $\theta \in \Theta$, tada na osnovu definicije (4.41) se dobija

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} |d_{ij}| &= \sum_{i\in\theta(I)} |d_{ij}| + \sum_{i\in I\setminus\theta(I)} |d_{ij}| \\ &= \sum_{i\in\theta(I)} \langle Qe_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)}\rangle \leqslant \sup_{j\in I} \sum_{i\in I} |q_{ij}| < \infty, \end{aligned}$$

jer operator Q zadovoljava uslove (4.4) i (4.9). Ako je $j \in I \setminus \bigcup\limits_{\theta\in\Theta} \theta(I)$ tada je $\sum\limits_{i\in I} |d_{ij}| = b \geqslant 1$, dakle sledi da važi

$$\sup_{j\in I} \sum_{i\in I} |d_{ij}| < \infty$$

Slično se može zaključiti da je

$$\sup_{i\in I} \sum_{j\in I} |d_{ij}| < \infty$$

Dakle, familija D može biti posmatrana kao ograničen linearan operator na prostoru $\ell^p(I)$ za svako $p \in [1,\infty]$, definisan matrično sa (4.10), na osnovu Posledice 4.1.7. Na osnovu stavke (4.41) lako se vidi da važi

$$\sum_{j\in I} d_{ij} \geqslant 1, \quad \forall i \in I$$

i

$$\sum_{i\in I} d_{ij} \geqslant 1, \quad \forall j \in I.$$

dakle, operator D je superstohastički po vrstama i kolonama, po Definiciji 4.1.8.

Dokazaćemo da je operator D dvostruko superstohastički. Drugim rečima treba pokazati da postoji dvostruko stohastički operator $\widetilde{D} \in DS(\ell^1(I))$ takav da je $d_{ij} \geqslant \langle \widetilde{D}e_j, e_i\rangle$, $\forall i,j \in I$. Kako je $Q \in DSPS(\ell^1(I))$, stoga postoji operator $\widetilde{Q} \in DS(\ell^1(I))$ za koji je $\langle Qe_j, e_i\rangle \geqslant \langle \widetilde{Q}e_j, e_i\rangle$, $\forall i,j \in I$.

Slično kao u prethodnom delu, definisaćemo familiju $\widetilde{D} = \{\widetilde{d}_{ij} \mid i,j \in I\}$ na sledeći način:

$$\widetilde{d}_{ij} := \begin{cases} \langle \widetilde{Q}e_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)}\rangle, & i,j \in \theta(I), \text{ za neko } \theta \in \Theta, \\ 1, & i,j \notin \bigcup\limits_{\theta\in\Theta} \theta(I), \ j = i, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases} \tag{4.42}$$

Lako se vidi da familija $\widetilde{D}$ određuje dvostruko stohastički operator na $\ell^1(I)$ definisan sa (4.10), jer očigledno iz (4.42) važi

$$(\forall i \in I) \ \sum_{j \in I} \widetilde{d}_{ij} = 1 \text{ i } (\forall j \in I) \ \sum_{i \in I} \widetilde{d}_{ij} = 1.$$

Dalje, ako je $i, j \in \theta(I)$ za neko $\theta \in \Theta$, tada na osnovu gornjih definicija (4.41) i (4.42) sledi

$$d_{ij} = \langle Qe_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)} \rangle \geqslant \langle \widetilde{Q}e_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)} \rangle = \widetilde{d}_{ij},$$

i važi

$$d_{ii} = b \geqslant 1 = \widetilde{d}_{ii},$$

kada je $i \notin \bigcup\limits_{\theta \in \Theta} \theta(I)$. Dakle, $D \in DSPS(\ell^1(I))$.

Pokazaćemo da je $P_\theta Q = DP_\theta$, $\forall \theta \in \Theta$. Birajući proizvoljnu funkciju $\theta \in \Theta$ zaključujemo da važi

$$DP_\theta(e_j) = D(e_{\theta(j)}) = \sum_{l \in \theta(I)} d_{l,\theta(j)} e_l + \sum_{l \notin \theta(I)} d_{l,\theta(j)} e_l.$$

Na osnovu definicije operatora D, imamo da je $d_{l,\theta(j)} = 0$, kada je $l \notin \theta(I)$, pa zaključujemo

$$DP_\theta(e_j) = \sum_{l \in \theta(I)} d_{l,\theta(j)} e_l = \sum_{l \in \theta(I)} \langle Qe_j, e_{\theta^{-1}(l)} \rangle e_l = \sum_{i \in I} Qe_j(i) e_{\theta(i)}. \tag{4.43}$$

Dalje, uz pomoć činjenice $Q(e_j) = \sum\limits_{i \in I} Qe_j(i) e_i$ sledi

$$P_\theta Q(e_j) = \sum_{i \in I} Qe_j(i) P_\theta(e_i) = \sum_{i \in I} Qe_j(i) e_{\theta(i)}. \tag{4.44}$$

Kombinovanjem (4.43) i (4.44), dobija se $DP_\theta(e_j) = P_\theta Q(e_j)$, $\forall j \in I$. Sada sledi

$$\begin{aligned} DP_\theta(f) &= DP_\theta \left(\sum_{j \in I} f(j) e_j \right) = \left(\sum_{j \in I} f(j) DP_\theta(e_j) \right) \\ &= \left(\sum_{j \in I} f(j) P_\theta Q(e_j) \right) = P_\theta Q(f), \end{aligned}$$

za proizvoljno izabranu funkciju $f = \sum\limits_{j \in I} f(j) e_j \in \ell^1(I)$. □

Ako je $f \prec^{ws} g$, tada je $f = Qg$, za neki operator $Q \in DSPS(\ell^1(I))$ pa sledi $P_\theta f = P_\theta Q g = DP_\theta g$, za neki operator $D \in DSPS(\ell^1(I))$, po Teoremi 4.3.3. Dobija se da važi slaba supermajorizacija $P_\theta f \prec^{ws} P_\theta g$. Dakle, $P_\theta \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$. Specijalno se može zaključiti da važi $P(\ell^1(I)) \subset \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$.

Teorema 4.3.4. *Neka je I_0 najviše prebrojiv podskup skupa I. Pretpostavimo da je Θ familija koju čine jedan-jedan funkcije na skupu I sa međusobno disjunktnim slikama, definisana sa (4.40). Ako je $\lambda \in \ell^1(I_0)^+$, tada je*

$$T := \sum_{j \in I_0} \lambda_j P_{\theta_j} \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+). \tag{4.45}$$

Dokaz. Operator $T = \sum_{j\in I_0} \lambda_j P_{\theta_j}$ je očigledno linearan na prostoru $\ell^1(I)$. Pokazaćemo da je T i ograničen na $\ell^1(I)$. Kako familija Θ sadrži samo funkcije sa disjunktnim slikama, dobijamo

$$\|Tf\| = \sum_{j\in I_0}\sum_{i\in I} \lambda_j f(i) = \|f\| \sum_{j\in I_0} \lambda_j = \|\lambda\|\|f\|.$$

Sledi da je T ograničen operator sa normom $\|T\| = \|\lambda\|$. Neka je $f \prec^{ws} g$. Sledi da je $f = Qg$ za neki operator $Q \in DSPS(\ell^1(I))$. Sada, postoji operator $D \in DSPS(\ell^1(I))$ tako da važi $P_\theta Q = DP_\theta$, za svaku funkciju $\theta \in \Theta$, na osnovu Teoreme 4.3.3. Na osnovu linearnosti i neprekidnosti operatora D, sledi

$$\begin{aligned} Tf &= \sum_{j\in I_0} \lambda_j P_{\theta_j}(f) = \sum_{j\in I_0} \lambda_j P_{\theta_j}(Qg) = \sum_{j\in I_0} \lambda_j DP_{\theta_j}(g) \\ &= D\left(\sum_{j\in I_0} \lambda_j P_{\theta_j}(g)\right) = D(Tg). \end{aligned}$$

što povlači da važi $Tf \prec^{ws} Tg$. □

Primer 4.3.5. Neka je $1 < m \in \mathbb{N}$ i neka je data familija $\Theta := \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}$ koju čine jedan-jedan funkcije $\theta_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definisane sa

$$\theta_n(k) = m^k + n, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad n = 1, 2, \ldots, m.$$

Neka je dat operator $T := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} P_{\theta_n}$. Na osnovu definicije familije Θ, operator T se može predstaviti na sledeći način:

$$Tf = \left[\underbrace{0,\ldots,0}_{m\text{-puta}}, \underbrace{f(1), \frac{f(1)}{2^2} \ldots, \frac{f(1)}{m^2}}_{\text{m-puta}}, \underbrace{0,\ldots,0}_{\substack{m^2-2m \\ \text{puta}}}, \underbrace{f(2), \frac{f(2)}{2^2} \ldots, \frac{f(2)}{m^2}}_{\text{m-puta}}, \underbrace{0,\ldots,0}_{\substack{m^3-m^2-m \\ \text{puta}}}, \underbrace{f(3), \frac{f(3)}{2^2} \ldots, \frac{f(3)}{m^2}}_{\text{m-puta}}, \ldots \right]^T$$

Važi da je $T \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(\mathbb{N})^+)$, na osnovu Teoreme 4.3.4. Štaviše, zaključujemo da je operator T ograničen jer je

$$\|Tf\| = \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{1}{n^2} f(k)| \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}\|f\| \leqslant \|f\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\|f\|$$

za svako $f \in \ell^1(I)$.

Prethodno smo u Teoremi 4.3.4 pokazali da su operatori definisani sa (4.45) linearna očuvanja slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$. Skup svih operatora definisanih na ovaj način označavaćemo sa $\mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$. Međutim, u narenom primeru biće pokazano da postoje očuvanja slabe supermajorizacije koja imaju drugačiji oblik u odnosu na operatore iz $\mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ definisane sa (4.45).

Primer 4.3.6. Neka je definisan operator B_h na sledeći način:

$$B_h(f) := h \sum_{i \in I} f(i), \quad \forall f \in \ell^1(I). \tag{4.46}$$

pri čemu je funkcija $h \in \ell^1(I)^+$ proizvoljno izabrana. Očigledno je operator B_h linearan i ograničen, sa normom $\|B_h\| = \|h\|$.

Neka važi $f \prec^{ws} g$, za dve funkcije $f, g \in \ell^1(I)^+$, to jest neka je $f = Dg$, za neki operator $D \in DSPS(\ell^1(I))$. Na osnovu definicije ovog operatora D, znamo da postoji drugi operator $\widetilde{D} \in DS(\ell^1(I))$ takav da je $De_j(i) \geqslant \widetilde{D}e_j(i)$, pa promenom redosleda sumiranja se dobija

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sum_{i \in I} f(i) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} g(j) De_j(i) \\ &\geqslant \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} g(j) \widetilde{D}e_j(i) = \sum_{j \in I} g(j) \sum_{i \in I} \widetilde{D}e_j(i) = \|g\|. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Sada važi $B_h(f) = h\|f\| \geqslant h\|g\| = B_h(g)$. Neka je $\alpha = \frac{\|f\|}{\|g\|} \geqslant 1$ i neka je dat operator $Q := \alpha \mathcal{I} \in DSPS(\ell^1(I))$, pri čemu sa $\mathcal{I}$ označavamo identični operator. Kako je

$$QB_h(g) = \|g\|Qh = \alpha\|g\|h = \|f\|h = B_h(f),$$

stoga je $B_h(f) \prec^{ws} B_h(g)$, pa sledi $B_h \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$.

Skup svih linearnih očuvanja slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$ definisanih sa (4.46) označavaćemo sa $\mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$. Očigledno je skup $\mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ konveksan konus, i skup $\mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+) \bigcap \mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ sadrži samo nula operator. Takođe, suma dva operatora iz dve različite klase $\mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ i $\mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ nije linearno očuvanje u opštem slučaju, što je pokazano narednim primerom.

Primer 4.3.7. Fiksiramo $j, k \in I$ tako da je $j \neq k$. Neka je operator B_{e_k} definisan sa (4.46). Dakle, "kolone" $B_{e_k}e_j$, $j \in I$ operatora B_{e_k} su međusobno jednake, i zapravo se poklapaju sa funkcijom e_k, pa imamo da je $B_{e_k}(e_j) = e_k$, $\forall j \in I$. Neka je data permutacija $P \in P(\ell^1(I)) \subset \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ koja zadovoljava uslov

$$P(e_j) = e_k.$$

Pokazaćemo da važi $P + B_{e_k} \notin \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$. Jasno, uvek važi $e_j \prec^{ws} e_k$. S druge strane je

$$(P + B_{e_k})(e_k) = e_i + e_k,$$

pri čemu mora da važi $i \neq k$. Takođe je

$$(P + B_{e_k})(e_j) = 2e_k.$$

Pokazaćemo da je

$$(P + B_{e_k})(e_j) = 2e_k \nprec^{ws} e_i + e_k = (P + B_{e_k})(e_k).$$

Pretpostavimo suprotno, neka postoji operator $D \in DSPS(\ell^1(I))$ tako da je $D(e_i + e_k) = 2e_k$. Sledi $De_i(k) + De_k(k) = 2$. Kako je $(2e_k)(t) = 0$, za svako $t \neq k$, stoga se dobija

$$De_i(t) = De_k(t) = 0, \text{ for every } t \in I\backslash\{k\}. \tag{4.48}$$

Kako je operator D superstohastički po kolonama, to mora biti

$$De_i(k) = De_k(k) = 1. \tag{4.49}$$

Međutim, iz (4.48) i (4.49) se može zaključiti da ne postoji operator $\widetilde{D} \in DS(\ell^1(I))$ takav da je $De_j(i) \geqslant \widetilde{D}e_j(i)$, $\forall i, j \in I$, pa dobijamo kontadikciju sa pretpostavkom, dakle $D \notin DSPS(\ell^1(I))$, pa sledi $P + B_k \notin \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$.

Sledeći rezultat daje dovoljne uslove da suma dva proizvoljno izabrana ograničena linearna operatora iz dve disjunktne klase $\mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ i $\mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ bude linearno očuvanje slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$.

Teorema 4.3.8. *Ako su dva operatora $A \in \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ i $B \in \mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ izabrana tako da je*

$$Af(i_2) = Bf(i_1) = 0, \quad \forall i_1 \in I_1, \quad \forall i_2 \in I_2, \quad \forall f \in \ell^1(I)^+, \tag{4.50}$$

pri čemu je $I_1, I_2 \subset I$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ i $I_1 \cup I_2 = I$, tada važi $A + B \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$.

Dokaz. Neka su $A \in \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ i $B \in \mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ operatori koji zadovoljavaju uslov teoreme (4.50). Znamo da operator A ima formu

$$A = \sum_{j \in I_0} \lambda_j P_{\theta_j},$$

pri čemu je familija Θ definisana kao u (4.40). Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da je $\lambda_j > 0$, $\forall j \in I_0$. Sada je

$$\begin{aligned} Af(i_2) &= \sum_{i \in I} f(i) Ae_i(i_2) = \sum_{i \in I} f(i) \sum_{j \in I_0} \lambda_j P_{\theta_j} e_i(i_2) \\ &= \sum_{i \in I} f(i) \sum_{j \in I_0} \lambda_j e_{\theta_j(i)}(i_2), \quad \forall f \in \ell^1(I). \end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke teoreme $Af(i_2) = 0$ sledi da je

$$e_{\theta_j(i)}(i_2) = \langle e_{\theta_j(i)}, e_{i_2} \rangle = 0, \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in I_0, \quad \forall i_2 \in I_2,$$

pa je

$$\left(\bigcup_{j \in I_0} \theta_j(I) \right) \cap I_2 = \varnothing.$$

Neka je $f \prec^{ws} g$, za neke funkcije $f, g \in \ell^1(I)$, tj. neka je $f = Qg$, za neki operator $Q \in DSPS(\ell^1(I))$. Znamo da postoji operator $D \in DSPS(\ell^1(I))$ za koji važi $P_{\theta_j} Q = DP_{\theta_j}$,

$\forall j \in I_0$ i $AQ = DA$, na osnovu Teoreme 4.3.3. Zapravo, operator D nije jedinstveno određen, što je očigledno na osnovu njegove definicije

$$d_{ij} := \begin{cases} \langle Qe_{\theta^{-1}(j)}, e_{\theta^{-1}(i)}\rangle, & i,j \in \theta(I), \text{ za neko } \theta \in \Theta, \\ b, & i,j \notin \bigcup_{\theta\in\Theta} \theta(I), \; j = i, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

(videti dokaz Teoreme 4.3.3). Na osnovu stavke (4.47), birajući broj $b := \frac{\|f\|}{\|g\|} \geqslant 1$, dobija se

$$BQg = Bf = h\sum_{j\in I} f(j) = bh\sum_{j\in I} g(j) = bBg,$$

za neku funkciju $h \in \ell^1(I)^+$. Takođe, $De_j = be_j$, $\forall j \in I_2$, po definiciji operatora D, pa uz pomoć (4.50) dobijamo

$$DB\tilde{f} = \sum_{j\in I_2} B\tilde{f}(j)De_j = bB\tilde{f}$$

for every $\tilde{f} \in \ell^1(I)^+$. Sada imamo

$$\begin{aligned} D(A+B)g &= DAg + DBg = DAg + bBg = AQg + BQg \\ &= (A+B)Qg = (A+B)f. \end{aligned}$$

Zaključujemo da važi slaba supermajorizacija $(A+B)f \prec^{ws} (A+B)g$, dakle $A+B \in \mathcal{M}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$.

□

U nastavku ove sekcije je cilj da se pokaže suprotan smer poslednje teoreme, to jest, da se pokaže da svako linearno očuvanje slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$ može biti predstavljeno kao suma dva operatora pri čemu je jedan iz klase $A \in \mathcal{A}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ a drugi iz $B \in \mathcal{B}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ koja zadovoljavaju uslove (4.50). Za ostvarenje postavljenog cilja, potrebni su rezultati koji slede u nastavku.

Lema 4.3.9. *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ linearno očuvanje slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$. Pretpostavimo da je skup J konačan podskup skupa I i neka je $\delta : J \to J$ data bijekcija. Za svako $u \in I$ postoji $v \in I$ tako da važi*

$$Te_m(u) = Te_{\delta(m)}(v), \quad \forall m \in J. \tag{4.51}$$

Dokaz. Neka je $card(J) = n \in \mathbb{N}$. Kako je $T \in \mathcal{M}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$, stoga relacije

$$\sum_{m\in J} a_m e_m \prec^{ws} \sum_{m\in J} a_m e_{\delta(m)} \;\text{ i }\; \sum_{m\in J} a_m e_{\delta(m)} \prec^{ws} \sum_{m\in J} a_m e_m$$

povlače

$$\sum_{m\in J} a_m Te_m \prec^{ws} \sum_{m\in J} a_m Te_{\delta(m)} \;\text{ i }\; \sum_{m\in J} a_m Te_{\delta(m)} \prec^{ws} \sum_{m\in J} a_m Te_m$$

za svaki vektor $a = (a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_n}) \in (R^{++})^n$. Sada, na osnovu Teoreme 4.2.13, funkcije $h := \sum_{m \in J} a_m Te_m$ i $h_\delta := \sum_{m \in J} a_m Te_{\delta(m)}$ se razlikuju do na permutaciju, to jest važi

$$\sum_{m \in J} a_m Te_m(u) \in \left\{ \sum_{m \in J} a_m Te_{\delta(m)}(k) \mid k \in I_0 \right\},$$

gde je $I_0 := I^+_{h_\delta} \cup \{r\}$ i $r \in I^0_{h_\delta}$ proizvoljno izabrano. Kako je $I^+_{h_\delta}$ prebrojiv skup, stoga na osnovu Leme 3.4.4 se dobija da postoji $v \in I$ tako da je (4.51) zadovoljeno. □

Lema 4.3.10. *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ linearno očuvanje slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$, gde je I beskonačan skup. Ako postoje dva različita elementa skupa $k, l \in I$ za koje važi $Te_k(i) > 0$ i $Te_l(i) > 0$, za neko $i \in I$, tada je $Te_k(i) = Te_l(i)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka je $\tilde{k} := Te_k(i) > 0$ i $\tilde{l} := Te_l(i) > 0$ i važi $\tilde{k} \neq \tilde{l}$. Uvodimo skupove

$$\mathcal{K} := \{j \in I \mid Te_k(j) = \tilde{k}\}, \tag{4.52}$$

$$\mathcal{L} := \{j \in I \mid Te_k(j) = \tilde{l}\}.$$

Jasno, skup $\mathcal{K} \subset I$ je neprazan. Kako je $Te_k \in \ell^1(I)^+$ sledi

$$card(\mathcal{K}) < \aleph_0 \;\; \text{i} \;\; card(\mathcal{L}) < \aleph_0. \tag{4.53}$$

Neka su proizvoljno izabrani $a_1, a_2 > 0$ i $m \in I \backslash \{k, l\}$. Jasno važi

$$a_1 e_k + a_2 e_l \prec^{ws} a_1 e_k + a_2 e_m \;\; \text{i} \;\; a_1 e_k + a_2 e_m \prec^{ws} a_1 e_k + a_2 e_l.$$

Operator T je linearno očuvanje, pa sledi

$$a_1 Te_k + a_2 Te_l \prec^{ws} a_1 Te_k + a_2 Te_m \;\; \text{i} \;\; a_1 Te_k + a_2 Te_m \prec^{ws} a_1 Te_k + a_2 Te_l.$$

Na osnovu Teoreme 4.2.13, dobija se

$$a_1 Te_k(i) + a_2 Te_l(i) \in \{a_1 Te_k(j) + a_2 Te_m(j) \mid j \in I\}.$$

Kako je gornji skup najviše prebrojiv, jer je $Te_k, Te_m \in \ell^1(I)^+$, stoga na osnovu Leme 3.4.4 sledi da postoji $j \in I$ tako da važi $Te_k(i) = Te_k(j) = \tilde{k}$ i $Te_l(i) = Te_m(j) = \tilde{l}$. Zaključujemo da $j \in \mathcal{K}$. Kako je $m \in I$ proizvoljno izabran i važi $card(I) > card(\mathcal{K})$, sledi da postoji neko $s \in \mathcal{K}$ i za to s postoji niz $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ različitih elemenata $m_j \in I$ tako da je $Te_{m_j}(s) = \tilde{l} > 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Sada, definišemo familiju $\{\Phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, tako da je svaki skup Φ_j određen sa

$$\Phi_j := \{m_1, m_2, \dots m_j\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Takođe, formiramo bijekcije $\phi_j : \Phi_j \cup \{k\} \to \Phi_j \cup \{k\}$ na sledeći način:

$$\phi_j(x) := \begin{cases} m_j, & x = k, \\ k, & x = m_j, \\ x, & x \in \Phi_j \backslash \{m_j\}. \end{cases}$$

Sada, uz pomoć Leme 4.3.9 možemo naći $s_j \in I$ tako da važi

$$Te_{m_j}(s_j) = Te_{\phi_j(k)}(s_j) = Te_k(s) = \tilde{k}, \tag{4.54}$$

$$Te_k(s_j) = Te_{\phi_j(m_j)}(s_j) = Te_{m_j}(s) = \tilde{l}, \tag{4.55}$$

i

$$Te_x(s_j) = Te_{\phi_j(x)}(s_j) = Te_x(s) = \tilde{l}, \quad \forall x \in \Phi_j \backslash \{m_j\}. \tag{4.56}$$

Pretpostavimo da postoje su dva člana niza (s_j) koja su jednaka, to jest, neka postoje različiti prirodni brojevi $a, b \in \mathbb{N}$ tako da je $s_a = s_b$. Bez gubitka opštosti, neka je $a \leqslant b$. Kako je $\phi_b(s_a) = s_a$ i $\phi_a(s_a) = k$, stoga na osnovu (4.54) i (4.56), dobijamo da je

$$\tilde{l} = Te_{s_a}(s_b) = Te_{s_a}(s_a) = \tilde{k},$$

što je nemoguće, pa je $s_a \neq s_b$, kadgod je $a \neq b$. Kako je $s_j \in \mathcal{L}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ po stavki (4.55), stoga dobijamo da je $\mathcal{L}$ beskonačan skup, što je u kontradikciji sa stavkom (4.53). □

U sledećoj teoremi, dokazaćemo da ako postoje dva strogo pozitivna elementa u jednoj "vrsti" linearnog očuvanja slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$, kada je I beskonačan skup, tada su svi elementi u toj "vrsti" međusobno jednaki.

Lema 4.3.11. *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ linearno očuvanje slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$, gde je I beskonačan skup. Ako postoje dva međusobno različita elementa $k, l \in I$ tako da je $Te_k(i) > 0$ i $Te_l(i) > 0$, za neko $i \in I$, tada je skup $\{Te_j(i) \mid j \in I\}$ jednoelementni.*

Dokaz. Pre svega lako se može zaključiti da ako je $Te_j(i) > 0$, za neko $j \in I$, tada mora važiti $Te_j(i) = Te_k(i) = Te_l(i)$, na osnovu Leme 4.3.10.

Pretpostavimo suprotno tvrđenju teoreme, neka postoji $m \in I$ tako da je $Te_m(i) = 0$. Neka je

$$M := \{j \in I \mid Te_k(j) = Te_l(j) = \tilde{k}\}$$

gde je $\tilde{k} := Te_k(i) = Te_l(i)$. Očigledno, skup M mora biti konačan. Biramo proizvoljno $n \in I \backslash \{k, l, m\}$ i definišemo bijekciju

$$\delta_n(x) := \begin{cases} k, & x = k, \\ l, & x = l, \\ n, & x = m, \\ m, & x = n. \end{cases}$$

Sada, postoji $i_n \in I$ tako da je

$$Te_n(i_n) = Te_{\delta_n(m)}(i_n) = Te_m(i) = 0,$$

$$Te_k(i_n) = Te_{\delta_n(k)}(i_n) = Te_k(i) = \tilde{k},$$

i

$$Te_l(i_n) = Te_{\delta_n(l)}(i_n) = Te_l(i) = \tilde{k}.$$

Lako se može zaključiti da $i_n \in M \subset I$. Zbog uslova $card(M) < \aleph_0$, sledi da postoji $s \in M$ za koje postoji niz različitih elemenata $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tako da važi $Te_{m_j}(s) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Slično kao u dokazu prethodne teoreme, definisaćemo bijekcije

$$\phi_j : \Phi_j \cup \{k, l\} \to \Phi_j \cup \{k, l\},$$

koje odgovaraju skupovima $\Phi_j := \{m_1, m_2, \dots m_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, na sledeći način:

$$\phi_j(x) := \begin{cases} k, & x = k, \\ l, & x = m_j, \\ m_j & x = l, \\ x, & x \in \Phi_j \backslash \{m_j\}. \end{cases}$$

Sada, uz pomoć Leme 4.3.9, za svako $j \in I$ možemo pronaći $s_j \in I$ tako da važi

$$Te_k(s_j) = Te_{\phi_j(k)}(s_j) = Te_k(s) = \tilde{k},$$

$$Te_{m_j}(s_j) = Te_{\phi_j(l)}(s_j) = Te_l(s) = \tilde{k}, \tag{4.57}$$

$$Te_l(s_j) = Te_{\phi_j(m_j)}(s_j) = Te_{m_j}(s) = 0,$$

i

$$Te_x(s_j) = Te_{\phi_j(x)}(s_j) = Te_x(s) = 0, \;\; \forall x \in \Phi_j \backslash \{m_j\}. \tag{4.58}$$

Ukoliko pretpostavimo da postoje prirodni brojevi $a < b$ za koje je $s_a = s_b$, tada koristeći bijekciju ϕ_a dobijamo

$$Te_{m_a}(s_a) = \tilde{k}, \;\; \text{zbog } (4.57),$$

a na osnovu bijekcije ϕ_b sledi

$$Te_{m_a}(s_a) = Te_{m_a}(s_b) = 0, \;\; \text{na osnovu } (4.58),$$

što je u kontradikciji sa uslovom $\tilde{k} > 0$. Dakle, $s_a \neq s_b$, kadgod je $a \neq b$. Ukoliko definišemo skup $\mathcal{K}$ kao u (4.52), dobijamo da $s_j \in \mathcal{K}$, $\forall j \in I$ što povlači da je skup $\mathcal{K}$ beskonačan, što je nemoguće na osnovu (4.53).

□

Prikazujemo potrebne i dovoljne uslove da važi $T \in \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$, u sledećoj teoremi.

Teorema 4.3.12. *Neka je $A : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ ograničen linearan operator, gde je I beskonačan skup. Tada važi $A \in \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ ako i samo ako je $Ae_j \prec^{ws} Ae_k$ i $Ae_k \prec^{ws} Ae_j$, $\forall k, j \in I$, i za svako $i \in I$ postoji najviše jedan element $j \in I$ za koji je $Ae_j(i) > 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je operator $A \in \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ definisan sa (4.45). Kako familija Θ definisana sa (4.40) sadrži funkcije sa disjunktnim slikama, stoga ako $s \notin \bigcup_{j \in I_0} (\theta_j(I))$ tada sledi $P_{\theta_j} e_l(s) = 0$, $\forall j \in I_0$, dakle $Ae_l(s) = 0$, za svako $l \in I$. Ako je $s \in \bigcup_{j \in I_0} (\theta_j(I))$, tada postoji tačno jedan uređeni par (j_s, r_s), gde je $j_s \in I_0$ i $r_s \in I$, tako da je $\theta_{j_s}(r_s) = s$ i $\theta_{j_s}(r_s) \neq s$ za svaki uređeni par $(j_s, r_s) \neq (j_0, r_0)$. Stoga,

$$\begin{aligned} Ae_r(s) &= \sum_{j \in I_0} \lambda_j P_{\theta_j} e_r(s) \\ &= \lambda_{j_0} P_{\theta_{j_0}} e_r(s) = \lambda_{j_0} e_{\theta_{j_0}(r)}(s) = 0, \end{aligned}$$

kada je $r \neq r_0$. Po Teoremi 4.3.4 sledi da je operator A očuvanje slabe supermajorizacije, pa se lako se može zaključiti da je drugi deo teoreme ispunjen, to jest međusobna slaba supermajorizovanost "kolona" operatora A je očigledna.

Neka je $A : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ ograničen linearan operator. Ako je $A := 0$, tada je $A \in \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$, očigledno. Neka je $A \neq 0$. Sledi da postoje elementi $k, l \in I$ tako da je $Ae_k(l) > 0$, što dalje implicira $Ae_j \neq 0$ za svako $j \in I$, na osnovu pretpostavke teoreme da su "kolone" operatora A međusobno slabo supermajorizovane, pa se razlikuju do na permutaciju, po Teoremi 4.2.13. Preciznije, postoje permutacije $P_j \in P(\ell^1(I))$ i odgovarajuće bijekcije $\omega_j : I \longrightarrow I$ tako da je

$$P_j A e_k = A e_j,$$

za svako $j \in I$.

Definišemo familiju Θ koju čine funkcije θ_j, $j \in I_0$ definisane sa $\theta_j(i) = \omega_i(j)$, $\forall i \in I$, to jest,

$$\Theta := \{\theta_j : I \to I \mid j \in I_0\},$$

gde je $I_0 := I_{Ae_k}^+$, najviše prebrojiv skup. Jasno je da su funkcije θ_i jedan-jedan. Da bi pokazali da funkcije θ_i imaju sa međusobno disjunktne slike $\theta_i(I)$, pretpostavimo suprotno da za neke $a, b \in I_0$, $a \neq b$ postoje $j_a, j_b \in I$ tako da je $i_0 := \theta_a(j_a) = \theta_b(j_b)$, što povlači $\omega_{j_a}(a) = \omega_{j_b}(b)$. Kako je $a, b \in I_{Ae_k}^+$, to je $Ae_k(a) > 0$ i $Ae_k(b) > 0$. Takođe,

$$Ae_{j_a}(i_0) = \langle Ae_{j_a}, e_{\omega_{j_a}(a)} \rangle = \langle Ae_{j_a}, P_{j_a} e_a \rangle = \langle P_{j_a}^{-1} Ae_{j_a}, e_a \rangle = Ae_k(a) > 0$$

Slično,

$$Ae_{j_b}(i_0) = Ae_k(b) > 0,$$

što je u kontradiciji sa pretpostavkom teoreme.

Dokazaćemo da operator A ima formu (4.45). Ukoliko definičemo $\lambda_i := Ae_k(i)$, $\forall i \in I_0$, i fiksiramo $g = \sum_{j \in I} g(j) e_j \in \ell^1(I)^+$, tada dobijamo

$$\begin{aligned} Ag &= \sum_{j \in I} g(j) A e_j = \sum_{i \in I} g(j) P_j A e_k \\ &= \sum_{j \in I} g(j) \left(\sum_{i \in I_0} Ae_k(i) P_j e_i \right) \\ &= \sum_{j \in I} g(j) \sum_{i \in I_0} \lambda_i e_{\omega_j(i)} = \sum_{j \in I} g(j) \sum_{i \in I_0} \lambda_i e_{\theta_i(j)}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Dalje,

$$P_{\theta_i}(g) = \sum_{j\in I} g(j) P_{\theta_i} e_j = \sum_{j\in I} g(j) e_{\theta_i(j)}, \tag{4.60}$$

na osnovu (4.39).

S druge strane, postoji konačan skup $J_0 \subset I_0$ tako da za svaki konačan skup $\widetilde{I}_0 \supset J_0$, važi

$$\sum_{j\in I_0\setminus \widetilde{I}_0} \lambda_j \leqslant \epsilon,$$

gde je $\epsilon > 0$ proizvoljno izabrano, pa kombinacijom stavki (4.59) i (4.60), dobijamo

$$\begin{aligned}
\left\| Ag - \sum_{i\in \widetilde{I}_0} \lambda_i P_{\theta_i}(g) \right\| &= \left\| \sum_{j\in I} g(j) \sum_{i\in I_0\setminus \widetilde{I}_0} \lambda_i e_{\theta_i(j)} \right\| \\
&= \sum_{j\in I} \sum_{i\in I_0\setminus \widetilde{I}_0} g(j)\lambda_i \\
&= \|g\| \sum_{i\in I_0\setminus \widetilde{I}_0} \lambda_i \leqslant \epsilon \|g\|,
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da operator A ima formu $A = \sum\limits_{i\in I_0} \lambda_i P_{\theta_i}$.

□

Primer 4.3.13. Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ i pretpostavimo da su $\theta_1, \theta_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jedan-jedan funkcije definisane sa

$$\theta_1(j) = kj \ \ i \ \ \theta_k(j) = k^j, \ \ \forall j \in \mathbb{N},$$

i neka je data funkcija $F(f) := P_{\theta_1}(f) + P_{\theta_k}(f)$.

Sada je $P_{\theta_1}(e_k) = e_{\theta_1(k)} = e_{k^2}$ i $P_{\theta_k}(e_2) = e_{\theta_k(2)} = e_{k^2}$, pa sledi

$$F(e_2)(k^2) = \langle F(e_2), e_{k^2}\rangle = \langle e_{2k} + e_{k^2}, e_{k^2}\rangle = 1,$$

i

$$F(e_k)(k^2) = \langle F(e_k), e_{k^2}\rangle = \langle e_{k^2} + e_{k^k}, e_{k^2}\rangle = 1.$$

Neka je $i \in \mathbb{N}\setminus\{2,k\}$. Lako se vidi da je $\theta_1(e_i) \neq k^2$ i $\theta_k(e_i) \neq k^2$, pa imamo da je $\langle F(e_i), e_{k^2}\rangle = 0$, što povlači $F \notin \mathcal{A}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$, po Teoremi 4.3.12.

Prethodni primer pokazuje da skup $\mathcal{A}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ nije ni vektorski prostor a ni konveksan konus, pa isto važi i za skup svih očuvanja $\mathcal{M}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$.

Sada možemo preći na dokaz najavljenog rezultata. Naime, proizvoljno izabrano očuvanje slabe supermajorizacije može se predstaviti kao suma dva jedinstveno izabrana operatora definisana sa (4.45) i (4.46).

Teorema 4.3.14. *Neka je I beskonačan skup. Ako je $T \in \mathcal{M}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ tada postoje jedinstveni operatori $A \in \mathcal{A}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ i $B \in \mathcal{B}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ tako da važi dekompozicija $T = A + B$. Štaviše, operatori A i B zadovoljavaju uslov* (4.50).

Dokaz. Neka je $T \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$. Definišemo dva skupa $I_1, I_2 \subset I$ tako da skup I_1 sadrži sve $i \in I$ za koje je $\langle Te_j, e_i \rangle > 0$ za najviše jedno $j \in I$, i $I_2 := I \backslash I_1$. Drugim rečima, na osnovu Leme 4.3.11 dobija se da skup I_2 sadrži sve $k \in I$ za koje su vrednosti $Te_j(k) > 0$ međusobno jednake, za svako $j \in I$.

Sada ćemo definisati operatore $A, B : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ sa

$$Af(i) := \begin{cases} Tf(i) & i \in I_1, \\ 0, & i \in I_2. \end{cases}$$

i

$$Bf(i) := \begin{cases} Tf(i) & i \in I_2, \\ 0, & i \in I_1. \end{cases}$$

Ovako definisani operatori A i B su linearni i ograničeni i očigeldno važi $A + B = T$.

Sada ćemo pokazati da ovi operatori pripadaju različitim klasama, tj. $A \in \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ i $B \in \mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$.

Pretpostavimo da je $I_2 = \varnothing$. Sledi da ne postoji $i \in I$ tako da je

$$Te_{j_1}(i) > 0 \;\text{ i }\; Te_{j_2}(i) > 0,$$

za neke $j_1, j_2 \in I$, a s obzirom da za očuvanje uvek važi

$$Ae_j \prec^{ws} Ae_k \;\text{ i }\; Ae_k \prec^{ws} Ae_j, \quad \forall j, k \in I$$

na osnovu Teoreme 4.3.12 se dobija da $A \in \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$. Jasno je da $B = 0 \in \mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$.

Neka su sada $I_1, I_2 \neq \varnothing$. Definišemo skupove

$$I_{Te_m}^1 := \left\{ j \in I_{Te_m}^+ \mid Te_m(j) = max\{Te_m(r) \mid r \in I_{Te_m}^+\} \right\}$$

i

$$I_{Te_m}^k := \left\{ j \in I_{Te_m}^+ \mid Te_m(j) = max \left\{ Te_m(r) \mid r \in I_{Te_m}^+ \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} I_{Te_m}^i \right\} \right\}$$

kada je $k \geqslant 2$. Fiksirajmo proizvoljna dva elementa $m, n \in I$. Kako je $T \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$, stoga važi $Te_m \prec^{ws} Te_n$ i $Te_n \prec^{ws} Te_m$, pa na osnovu Teoreme 4.2.13 funkcije Te_n i Te_m se razlikiju do na permutaciju, to jest, postoji permutacija $P \in P(\ell^1(I))$ i njoj odgovarajuća bijekcija $\omega : I \to I$ tako da važi

$$\langle Te_m, e_i \rangle = \langle Te_n, e_{\theta(i)} \rangle, \quad \forall i \in I.$$

Kako je

$$card(I_{Te_m}^k) = card(I_{Te_n}^k) \;\text{ i }\; card(I_{Te_m}^0) = card(I_{Te_n}^0), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

stoga se lako može zaključiti da je bijekcija ω određena bijekcijama

$$\begin{array}{rcl} \omega_0 & : & I_{Te_m}^0 \longrightarrow I_{Te_n}^0, \text{ if } I_{Te_m}^0 \neq \varnothing \\ \omega_k & : & I_{Te_m}^k \longrightarrow I_{Te_n}^k, \text{ if } I_{Te_m}^k \neq \varnothing, \quad k \in \mathbb{N}, \end{array}$$

na sledeći način (videti dokaz Teoreme 4.2.13)

$$\omega(i) := \begin{cases} \omega_k(i), & i \in I_{Te_m}^k, \\ \omega_0(i), & i \in I_{Te_m}^0. \end{cases}$$

Kao što znamo, za svako $i \in I_2$ važi $Te_m(i) = Te_n(i)$, pa sledi

$$card(I^k_{Te_m} \backslash I_2) = card(I^k_{Te_n} \backslash I_2), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

pa možemo definisati bijekcije

$$\widetilde{\omega}_k : I^k_{Te_r} \backslash I_2 \longrightarrow I^k_{Te_s} \backslash I_2, \text{ ako je } I^k_{Te_r} \backslash I_2 \neq \varnothing, \quad k \in \mathbb{N},$$

na sledeći način:

$$\widetilde{\omega}_k(i) = \omega_k(i), \quad \forall i \in I^k_{Te_r} \backslash I_2.$$

Formiramo bijekciju

$$\widetilde{\omega} : I \to I$$

definisanu sa

$$\widetilde{\omega}(i) := \begin{cases} \widetilde{\omega}_k(i), & i \in I^k_{Te_m} \backslash I_2, \\ \omega_0(i), & i \in I^0_{Te_m}, \\ i, & i \in I_2. \end{cases}$$

Sada sledi da permutacija $\widetilde{P} \in P(\ell^1(I))$ kojoj odgovara bijekcija $\widetilde{\omega}$, definisana sa $Pe_i = e_{\widetilde{\omega}(i)}$, $\forall i \in I$ zadovoljava uslove $PAe_m = Ae_n$. To povlači $Ae_m \prec^{ws} Ae_n$ i $Ae_n \prec^{ws} Ae_m$, $\forall m, n \in I$, pa sledi $A \in \mathcal{A}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ na osnovu Teoreme 4.3.12.

Da bi pokazali da važi $B \in \mathcal{B}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$, prvo možemo uočiti da je

$$\begin{aligned} Be_m &= \sum_{i \in I} Be_m(i)e_i = \sum_{i \in I_1} Be_m(i)e_i + \sum_{i \in I_2} Be_m(i)e_i \\ &= \sum_{i \in I_2} Be_n(i)e_i = \sum_{i \in I} Be_n(i)e_i = Be_n, \end{aligned} \tag{4.61}$$

za proizvoljne $m, n \in I$. Na osnovu (4.61) možemo definisati funkciju $h := Be_r$, za neko $r \in I$, i zaključiti da važi

$$Bf = B\left(\sum_{j \in I} f(j)e_j\right) = h\left(\sum_{j \in I} f(j)\right), \tag{4.62}$$

na osnovu stavke (4.61), dakle sledi $B \in \mathcal{B}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$.

Ako je $I_1 = \varnothing$, tada na osnovu stavki (4.61) i (4.62) kada je $I_2 = I$, dobiće se $B = T \in \mathcal{B}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ i $A = 0 \in \mathcal{A}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$.

Pretpostavimo da postoji još jedan par operatora A_1, B_1 za koji važi $T = A_1 + B_1$, gde su $A_1 \in \mathcal{A}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ i $B_1 \in \mathcal{B}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$. Sledi

$$A - A_1 = B_1 - B.$$

Za operatore B i B_1 znamo da $Be_m = Be_n$ i $B_1e_m = B_1e_n$, $\forall m, n \in I$. S druge strane, uz pomoć Teoreme 4.3.12, kako za svako $i \in I$ postoji najviše jedno $s \in I$ za koje je $Ae_s(i) > 0$, stoga za svako $i \in I$ postoji najmanje jedan element $j_s \in I$ za koji važi $Ae_{j_s}(i) = A_1e_{j_s}(i) = 0$. Na osnovu ovih argumenata dobija se

$$0 = (A - A_1)e_{j_s}(i) = (B_1 - B)e_{j_s}(i) = (B_1 - B)e_j(i), \quad \forall j \in I,$$

dakle važi $A = A_1$ i $B = B_1$.

□

Sada je jasno zašto suma dva operatora B_{e_k} i P iz Primera 4.3.7, pri čemu P zadovoljava $P(e_j) = e_k$, nije linearno očuvanje slabe supermajorizacije. Preciznije, za dato k sledi $P(e_j)(k) = 1 = B_{e_k} e_j(k)$ što implicira da posmatrana suma ne može biti linearno očuvanje slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)$, po prethodnoj teoremi.

Svi prethodni rezultati iz ove sekcije se mogu prikazati u okviru jedne teoreme, koja je data u nastavku.

Teorema 4.3.15. *Neka je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ ograničen linearan operator, pri čemu je I beskonačan skup. Sledeće stavke su ekvivalentne:*

1) $T \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$;

2) Postoje operatori $A \in \mathcal{A}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ i $B \in \mathcal{B}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ i postoje disjunktni skupovi $I_1, I_2 \subset I$ za koje je $I_1 \cup I_2 = I$, tako da važi dekompozicija $T = A + B$ pri čemu su operatori A, B određeni tako da je

$$Af(i_2) = Bf(i_1) = 0, \quad \forall i_1 \in I_1, \quad \forall i_2 \in I_2, \quad \forall f \in \ell^1(I)^+;$$

3) Postoji najviše prebrojiv skup $I_0 \subset I$ i postoji familija

$$\Theta := \{\theta_j : I \xrightarrow{1-1} I \mid j \in I_0, \ \theta_i(I) \cap \theta_j(I) = \emptyset, \ i \neq j\}$$

koju čine jedan-jedan funkcije sa međusobno disjunktnim slikama $\theta_j \in \Theta$, $\forall j \in I_0$, i postoji funkcija $(\lambda_j)_{j \in I_0} \in \ell^1(I_0)^+$, tako da važi dekompozicija

$$T = \sum_{j \in I_0} \lambda_j P_{\theta_j} + B_h,$$

gde je $B_h(f) := h \sum_{i \in I_0} f(i)$, za neku funkciju $h \in \ell^1(I)^+$ za koju je $h(i) = 0$, za svako $i \in \theta_j(I)$ i za svako $j \in I_0$;

4) $Te_j \prec^{ws} Te_k$ i $Te_k \prec^{ws} Te_j$, $\forall k, j \in I$, i za svako $i \in I$, ili postoji tačno jedno $j \in I$ za koje je $Te_j(i) > 0$, ili je skup $\{Te_j(i) \mid j \in I\}$ jednoelementni.

Dokaz. Implikacije 1) → 4) → 2) važe na osnovu Leme 4.3.11 i Teoreme 4.3.14. Takođe, stavka 2) povlači 1) na osnovu Teoreme 4.3.8. Stavke 3) i 4) su ekvivalentne po Teoremi 4.3.12. □

Linearna očuvanja standardne majorizacije, slabe majorizacije i slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$ imaju istu formu, tj. pokalapaju se, ukoliko posmatramo samo pozitivne operatore.

Posledica 4.3.16. *Neka je I beskonačan skup. Pretpostavimo da je $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$ pozitivan ograničen linearan operator. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1) T je linearno očuvanje majorizacione relacije ($\prec$);

2) T je linearno očuvanje slabe majorizacione relacije ($\prec_w$);

3) T je linearno očuvanje slabe supermajorizacione relacije ($\prec^{ws}$).

Dokaz. Stavka 2) je ekvivalentna sa 3) na osnovu Teoreme 3.4.11 i Teoreme 4.3.15. Stavke 1) i 2) su ekvivalentne na osnovu Posledice 3.4.12.

□

4.4 Zatvorenost skupa linearnih očuvanja slabe supermajorizacije

U uvodnom delu, u Teoremi 1.1.25 je prikazan oblik proizvoljne pozitivne matrice koja čuva slabu supermajorizacionu relaciju na $(\mathbb{R}^n)^+$. U ovoj sekciji biće razmatrana topološka struktura skupa svih linearnih očuvanja slabe supermajorizacije na $\ell^1(I)^+$, pri čemu je I proizvoljno izabran, to jest biće pokazano da je ovaj skup zatvoren za operatorsku normu. Ova osobina će pre svega biti dokazana na prostoru $\mathbb{R}^n$, što će biti iskorišćeno za dokazivanje zatvorenosti skupa svih očuvanja na prostoru $\ell^1(I)^+$ kada je I konačan skup, s obzirom da je u tom slučaju prostor $\ell^1(I)^+$ konačno-dimenzionalan. Kada je I beskonačan skup, zatvorenost ovog skupa biće dokazana drugačijim metodama predstavljenim u Teoremama 4.4.3 i 4.4.4.

U skladu sa Definicijom 4.3.1 slabe supermajorizacione relacije koju posmatramo u ovoj glavi, može se videti da je ova relacija definisana isključivo na pozitivnim funkcijama čiji skup obeležavamo sa $\ell^1(I)^+$. Direktna posledica ove činjenice je da i linearna očuvanja ove relacije moraju biti pozitivna, to jest mora biti $Te_j(i) \geqslant 0$, $\forall i, j \in I$, kada je I konačan ali i kada je I beskonačan skup. Zaista, ukoliko pretpostavimo da važi $Te_j(i) < 0$, za neke $i, j \in I$, dobijamo da je $Te_j \notin \ell^1(I)^+$, tj. $Te_j \nprec^{ws} Te_i$, pa operator T ne može biti linearno očuvanje slabe supermajorizacije.

Teorema 4.4.1. *Skup $\mathcal{M}_{pr}^{ws}((\mathbb{R}^n)^+)$ je zatvoren po normi podskup skupa svih ograničenih linearnih operatora na $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Neka je $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz operatora $T_k \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}((\mathbb{R}^n)^+))$, koji konvergiraja po normi ka ograničenom linearnom operatoru $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Za fiksirane vektore $x, y \in (\mathbb{R}^n)^+$ koji se razlikuju do na permutaciju ($x \prec^{ws} y$ i $y \prec^{ws} x$) sledi

$$T_k x \prec^{ws} T_k y \ \text{ i } \ T_k y \prec^{ws} T_k x,$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Zaključujemo da postoje permutacije $P_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tako da je

$$T_k x = P_k T_k y,$$

na osnovu Teoreme 4.2.13. Skup svih permutacija $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ je zatvoren za normu, ali i ograničen, pa sledi da je kompaktan skup. Zaista, kako je norma permutacije jednaka 1, sledi da je skup $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sadržan u jediničnoj kugli, pa zaključujemo da je ograničen. Kako je skup $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ konačan, on je i zatvoren, što je očigledno. Sada, postoji podniz $(P_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, i postoji neka permutacija $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tako da je $\lim_{j\to\infty} P_{k_j} = P$. Štaviše,

$$T_{k_j} x = P_{k_j} T_{k_j} y, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Prelazeći na graničnu vrednost, sledi

$$Tx = \lim_{j\to\infty} T_{k_j} x = \lim_{j\to\infty} P_{k_j} T_{k_j} y = PTy.$$

Drugim rečima važi $Tx \prec Ty$ i $Ty \prec Tx$. Na osnovu Teoreme 1.1.22, dobijamo da je operator T očuvanje slabe supermajorizacije na $(\mathbb{R}^n)^+$. $\square$

Teorema 4.4.2. *Neka je I konačan skup. Skup $\mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$ je zatvoren po normi podskup skupa svih ograničenih linearnih operatora na $\ell^1(I)$.*

Dokaz. Neka je $card(I) = n \in \mathbb{N}$. Kako je prostor $\ell^1(I)$ konačno-dimenzionalan, to postoji prirodni izomorfizam $\Phi : (\ell^1(I), \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, gde je kako znamo norma $\|\cdot\|_1$ određena sa $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$, za svako $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Jasno, prirodni izomorfizam Φ je linearno (jako) očuvanje slabe majorizacije, tj. važi

$$f \prec^{ws} g \text{ ako i samo ako } \Phi f \prec^{ws} \Phi g \tag{4.63}$$

za sve $f, g \in \ell^1(I)^+$. Isto važi i za Φ^{-1}.

Pretpostavimo da važi $f \prec^{ws} g$, za neke dve funkcije $f, g \in \ell^1(I)^+$. Neka je $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz operatora $T_k \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$, koji konvergira po normi ka ograničenom linearnom operatoru $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$. Jasno, $T_k f \prec^{ws} T_k g$ i $\Phi T_k f \prec^{ws} \Phi T_k g$, $\forall k \in \mathbb{N}$, na osnovu (4.63). Dalje, postoje vektori $x, y \in (\mathbb{R}^n)^+$ tako da $f = \Phi^{-1}x$, $g = \Phi^{-1}y$, pa je

$$\Phi T_k \Phi^{-1} x \prec^{ws} \Phi T_k \Phi^{-1} y, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Kako smo dobili da je $\widetilde{T_k} := \Phi T_k \Phi^{-1} \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}((\mathbb{R}^n)^+)$, sledi da za granični operator važi

$$\widetilde{T} := \lim_{k\to\infty} \Phi T_k \Phi^{-1} = \Phi T \Phi^{-1} \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}((\mathbb{R}^n)^+)$$

po Teoremi 4.4.1. Slično, možemo zaključiti da važi $T = \Phi^{-1}\widetilde{T}\Phi \in \mathcal{M}_{pr}^{ws}(\ell^1(I)^+)$. □

U narednom delu se okrećemo dokazivanju zatvorenosti skupa linearnih očuvanja kada je skup I beskonačan.

Teorema 4.4.3. *Neka je I beskonačan skup, i neka su $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dva pozitivna konvergentna niza funkcija $u_i, v_i \in \ell^1(I)^+$, tako da je*

$$\lim_{i\to\infty} u_i = u \in \ell^1(I)^+ \quad i \quad \lim_{i\to\infty} v_i = v \in \ell^1(I)^+.$$

Ako važi $u_i \prec^{ws} v_i$ i $v_i \prec^{ws} u_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, tada postoji parcijalna permutacija $P \in pP(\ell^1(I))$ za skupove I_u^+ i I_v^+, takva da je

$$v = Pu.$$

Dodatno, ako je

$$u_i(j)v_i(j) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in I,$$

tada postoji permutacija $Q \in P(\ell^1(I))$ takva da je

$$v = Qu.$$

Dokaz. Jasno je da uvek postoji strogo opadajući niz pozitivnih realnih brojeva $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ koji konvergira ka nuli i zadovoljava uslov

$$x_k \notin u(I) \cup v(I).$$

Prvi član x_0 se može izabrati tako da bude veći od članova oba niza. Definisaćemo međusobno disjunktne podskupove skupa I, čija je unija ceo skup I, na sledeći način:

$$I_u^i := \{k \in I_u^+ \mid x_i < u(k) < x_{i-1}\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Na sličan način definišemo i skupove I_v^i, $i \in \mathbb{N}$. Svi gore definisani podskupovi su konačni. Stoga, za fiksirano $i_0 \in I$, imamo da je

$$u(k) \in (x_{i_0} + A, x_{i_0-1} - A) \subset (x_{i_0}, x_{i_0-1}),$$

za svako $k \in I_u^{i_0}$, i neko $A > 0$. S druge strane, koristeći graničnu funkciju u, dobijamo da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|u(j) - u_n(j)| \leqslant \|u - u_n\| < A, \quad \forall n > n_1, \quad \forall j \in I_u^{i_0}.$$

Za svako $k \in I_u^{i_0}$ sledi

$$u_n(k) \in (u(k) - A, u(k) + A) \subset (x_{i_0}, x_{i_0-1}),$$

što povlači da $k \in I_{u_n}^{i_0}$, stoga za svako $n > n_1$ važi $I_u^{i_0} \subset I_{u_n}^{i_0}$. S obzirom da su skupovi I_u^i konačni, na sličan način zaključujemo

$$\left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{\infty} u(I_u^j) \right) \cap (x_{i_0} - s, x_{i_0-1} + s) = \varnothing. \tag{4.64}$$

za neko $s > 0$. Dalje, za tako određeno s, postoji prirodan broj n_2 tako da za graničnu funkciju u važi $u_n(j) \in (u(j) - s, u(j) + s)$, $\forall j \in I_{u_n}^+$, kadgod $n > n_2$. Na osnovu stavke (4.64) važi

$$\left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{\infty} u_n(I_u^j) \right) \cap (x_{i_0}, x_{i_0-1}) = \varnothing.$$

kadgod je $n > n_2$, što nas vodi ka zaključku da ako je $k \in (I_{u_n}^{i_0})$ tada je $k \notin \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{\infty} I_u^j$, to jest $k \in I_u^{i_0}$. Konačno, sledi

$$I_{u_n}^{i_0} = I_u^{i_0}, \tag{4.65}$$

za svako $n > n_3 := \max\{n_1, n_2\}$. Na sličan način može se izvesti zaključak da postoji prirodan broj n_4 tako da

$$I_{v_n}^{i_0} = I_v^{i_0}, \tag{4.66}$$

kadgod $n > n_4$, dakle postoji n_0 tako da za svako $n > n_0$ dobijamo da obe stavke (4.65) i (4.66) su zadovoljene.

Pretpostavimo da postoje $k_1 \in I_u^{i_0}$ i $k_2 \in I_v^{i_0}$ tako da $u(k_1) \neq v(k_2)$. Neka je

$$B := \min\{|u(j_1) - v(j_2)| : j_1 \in I_u^{i_0}, j_2 \in I_v^{i_0}, u(j_1) \neq v(j_2)\}. \tag{4.67}$$

Za posmatrano $B > 0$ postoji prirodan broj $n_5 > n_0$ tako da za svako $m > n_5$ sledi

$$|u_m(j) - u(j)| < B/2 \text{ i } |v_m(j) - v(j)| < B/2, \quad \forall j \in I.$$

Postoji bijekcija $\omega_m : I \to I$ tako da važi

$$u_m(k) = v_m(\omega_m(k)) \in (x_{i_0}, x_{i_0-1}), \quad \forall k \in I^{i_0}_{u_m} = I^{i_0}_u,$$

po Teoremi 4.2.13, jer je $u_m \prec^{ws} v_m$ i $v_m \prec^{ws} u_m$. Takođe, $\omega_m(k) \in I^{i_0}_{v_m} = I^{i_0}_v$. Dalje, slučaj kada je $k = \omega_m^{-1}(j) \notin I^{i_0}_{u_m}$ za neko $j \in I^{i_0}_v = I^{i_0}_{v_m}$ nije moguć, zato što bi sledilo $u_m(k) \notin (x_{i_0}, x_{i_0-1})$, tj. $u_m(k) \neq v_m(\omega_m(k))$, što bi bila kontradikcija. Dakle, na osnovu stavki (4.65) i (4.66) dobijamo da funkija

$$\omega_{i_0} : I^{i_0}_u \to I^{i_0}_u \tag{4.68}$$

definisana sa $\omega_{i_0}(j) := \omega_m(j)$, $\forall j \in I^{i_0}_u$ je bijekcija. Sada za svako $j \in I^{i_0}_u$, kako je $u_m(j) = v_m(\omega_m(j))$, sledi da je

$$|u(j) - v(\omega_m(j))| \leqslant |u(j) - u_m(j)| + |v_m(\omega_m(j)) - v(\omega_m(j))| < B,$$

pa je

$$u(j) = v(\omega_m(j)) = v(\omega_{i_0}(j)), \quad \forall j \in I^{i_0}_u,$$

po definiciji pozitivnog broja B.

Trivijalno je zaključiti da se može definisati bijekcija (4.68), ukoliko pretpostavimo da važi $u(k) = v(j)$ za svako $k \in I^{i_0}_u$ i svako $j \in I^{i_0}_v$.

Prethodno razmatranje je tačno za svako $i_0 \in \mathbb{N}$, jer je ono proizvoljno izabrano. Neka je $\delta : I^+_u \to I^+_v$ funkcija definisana sa

$$\delta(j) := \omega_i(j), \quad \forall j \in I^i_u, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Ističemo da međusobno disjunktni skupovi I^i_u zadovoljavaju $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I^i_u = I^+_u$, pa je funkcija δ bijekcija za koju je $u(j) = v(\delta(j))$, $\forall j \in I^+_f$. Sledi da postoji parcijalna permutacija $P \in pP(\ell^1(I))$ za skupove I^+_u i I^+_v, određena bijekcijom δ za koju važi

$$v = Pu.$$

Da bismo dokazali drugi deo teoreme, pretpostavimo da postoji $j \in I$ tako da $u(j)v(j) > 0$. Sledi da postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je zadovoljeno $u_m(j)v_m(j) > 0$ što nije moguće na osnovu pretpostavke. Dakle, $I^+_u \cap I^+_v = 0$. Neka je

$$I^0_{uv} = \{i \in I \mid u(i) = 0 \ \wedge \ v(i) = 0\}.$$

Kako je $I = I^+_u \cup I^0_u = I^+_u \cup I^0_{uv} \cup I^+_v$ i $I = I^+_v \cup I^0_v = I^+_v \cup I^0_{uv} \cup I^+_u$, definisanjem bijekcije $\Delta : I \to I$ sa

$$\Delta := \begin{cases} \delta(i), & i \in I^+_u \\ i, & i \in I^0_{uv} \\ \delta^{-1}(i), & i \in I^+_v, \end{cases}$$

zaključujemo da je $v = Qu$, pri čemu permutacija $Q \in P(\ell^1(I))$ odgovara bijekciji Δ.

□

Teorema 4.4.4. *Neka je I beskonačan skup. Skup $\mathcal{M}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ je zatvoren po normi podskup skupa svih ograničenih linearnih operatora na $\ell^1(I)$.*

Dokaz. Znamo da relacije $e_k \prec^{ws} e_j$ i $e_j \prec^{ws} e_k$, uvek povlače relacije

$$T_i e_k \prec^{ws} T_i e_j \ \text{ i } \ T_i e_j \prec^{ws} T_i e_k,$$

pri čemu niz $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $T_k \in \mathcal{M}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$ konvergira po normi ka ograničenom linearnom operatoru $T : \ell^1(I) \to \ell^1(I)$. Za svaka dva elementa $i_0, j_0 \in I$ imamo

$$|T_i e_{j_0}(i_0) - Te_{j_0}(i_0)| \leqslant \sum_{k\in I} |T_i e_{j_0}(k) - Te_{j_0}(k)| \leqslant \|T_i e_{j_0} - Te_{j_0}\| \to 0,$$

kada $i \to \infty$. Sledi

$$\lim_{i\to\infty} T_i e_j(k) = Te_j(k), \ \ \forall j, k \in I. \tag{4.69}$$

Lako se vidi da se funkcije Te_k i Te_j razlikuju do na parcijalnu permutaciju $P \in pP(\ell^1(I))$ kojoj odgovara bijekcija $\delta : I^+_{Te_k} \to I^+_{Te_j}$, dakle važi

$$Te_k(i) = Te_j(\delta(i)), \ \ \forall i \in I^+_{Te_k}, \tag{4.70}$$

po Teoremi 4.4.3.

Pokazaćemo da za svako $i \in I$, ili postoji tačno jedno $j \in I$ za koje je $Te_j(i) > 0$ ili je skup $\{Te_j(i) \mid j \in I\}$ jednoelementni. Ako pretpostavimo da su $Te_j(s)$ i $Te_k(s)$ dva različita pozitivna broja, na osnovu (4.69) sledi da postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da su $T_i e_j(s)$ i $T_i e_k(s)$ takođe pozitivni i različiti brojevi što je nemoguće po Teoremi 4.3.15, stavka 4).

Da bismo pokazali da je

$$Te_k \prec^{ws} Te_j \ \text{ i } \ Te_j \prec^{ws} Te_k \ \ \forall k, j \in I, \tag{4.71}$$

prvo zaključujemo da važi jednakost skupova $Te_k(I)\backslash\{0\} = Te_j(I)\backslash\{0\}$ zbog (4.70). Neka je $c \in Te_k(I)\backslash\{0\}$, za koje definišemo skup

$$I^c_{Te_k} := \{i \in I \mid Te_k(i) = c\}.$$

Jasno, $card(I^c_{Te_k}) = card(I^c_{Te_j})$. Neka je

$$I^c := \{i \in I \mid Te_k(i) = Te_j(i) = c\},$$

i $J^c_{Te_k} := I^c_{Te_k}\backslash I^c$. Kako znamo da postoje dve mogućnosti kada $i \in I^c_{Te_k}$, preciznije ili je $i \in I^c_{Te_j}$ ili važi $Te_j(i) = 0$, sledi da je $card(J^c_{Te_k}) = card(J^c_{Te_j})$, pa možemo definisati bijekcije $\delta_c : J^c_{Te_j} \to J^c_{Te_k}$, za svako $c \in Te_j(I)\backslash\{0\}$. Sada, iz činjenice (4.70) sledi da postoji bijekcija $\Delta : I \to I$ tako da je

$$\Delta := \begin{cases} \delta(i), & Te_k(i) > 0 \\ \delta_c(i), & Te_k(i) = 0, Te_j(i) = c \\ i, & Te_k = Te_j = 0. \end{cases}$$

Jasno, funkcije Te_k i Te_j se razlikuju do na permutaciju određenu bijekcijom Δ, pa je stavka (4.71) zadovoljena. Dakle, dobili smo $T \in \mathcal{M}^{ws}_{pr}(\ell^1(I)^+)$, po Teoremi 4.3.15. $\square$

Glava 5

Zaključak

U prethodnih desetak godina istraživanje u oblasti majorizacije usmereno je na uopštenja postojećih majorizacionih relacija i njihovu primenu, pre svega, u teoriji operatora. U skladu sa pomenutim naučnim trendom, ovom disertacijom nastavljeno je istraživanje u tom smeru. Razmatrana su tri tipa majorizacionih relacija na diskretnim Lebegovim prostorima funkcija $\ell^p(I)$, kada je I proizvoljan skup, a to su:
slaba majorizacija, slaba supermajorizacija i standardna majorizacija. Po uzoru na standardnu majorizaciju, koja je uopštena uz pomoć dvostruko stohastičkih operatora u radu [13], prošireni su pojmovi slabe majorizacije i slabe supermajorizacije na pomenutim prostorima funkcija. Pre svega uvedeni su pojmovi dvostruko substohastičkih i superstohastičkih ograničenih linearnih operatora kao uopštenja istoimenih stohastičkih matrica i pokazano je da su ovi operatori zatvoreni za kompoziciju. Dokazana je bliska veza između svake od posmatrane tri majorizacije i odgovarajućeg stohastičkog operatora, tj. predstavljeni su potrebni i dovoljni uslovi da proizvoljan operator bude dvostruko stohastički, substohastički ili superstohastički.

Uopštene su poznate nejednakosti Vajla i Tomića za rastuću ili opadajuću konveksnu funkciju za dve diskretne Lebegove funkcije koje se nalaze u relaciji slabe majorizacije ili supermajorizacije. Na osnovu ovih nejednakosti, dokazane su važne teoreme koje potvrđuju da se slabe majorizacije, po uzoru na standardnu majorizaciju, mogu posmatrati kao parcijalna uređenja ukoliko se poistovete sve funkcije koje se razlikuju do na permutaciju za slučaj slabe supermajorizacije, ili do na parcijalnu permutaciju ako je u pitanju slaba majorizacija.

U prošlosti su izučavani različiti tipovi linearnih očuvanja u konačno-dimenzionalnoj majorizacionoj teoriji, i oni imaju veoma važnu ulogu u ovoj oblasti linearne algebre. U ovoj disertaciji je dat oblik linearnog očuvanja slabe majorizacione relacije na prostoru $\ell^p(I)$ za $p \in [1, \infty)$, kao i slabe supermajorizacione relacije na $\ell^1(I)$. U zavisnosti od toga da li je I konačan ili beskonačan skup, dokazano je da ova očuvanja imaju različite forme, ali se može reći da one imaju dosta sličnosti. Kada je I beskonačan skup, očuvanja slabe majorizacije, po analogiji sa standardnom majorizacijom, se razlikuju za sličajeve $p > 1$ i $p = 1$. Takođe, kada je $p > 1$ pozitivna očuvanja slabe i standardne majorizacije se poklapaju. Štaviše, na prostoru $\ell^1(I)$ je pokazano da ukoliko pozitivan operator čuva jednu od tri posmatrane majorizacije, čuva i druge dve relacije. Potvrđeno je takođe da je skup svih linearnih očuvanja slabe majorizacije ili slabe supermajorizacije zatvoren u odnosu na operatorsku normu.

Pored pomenutih relacija majorizacije koje su uopštene na prostore funkcija, izvršeno je proširenje pojma matrične majorizacije na skup dvostruko stohastičkih operatora koji su definisani na diskretnom Lebegovom prostoru funkcija. Ovakav tip majorizacije definisane na operatorima (a ne na funkcijama ili vektorima) je poznatiji kao multivarijaciona majorizacija, a uopštenje tog tipa majorizacije sa matrica na operatore se po prvi put sreće u ovom radu.

Na osnovu navedenih rezultata, može se zaključiti da sa jedne strane ova disertacija kompletira započeta istraživanja uopštenih majorizacija i stohastičkih operatora na diskretnim Lebegovim prostorima, vrši uporednu analizu dobijenih rezultata za dve slabe i jednu standardnu majorizaciju, karakteriše linearna očuvanja ovih relacija i opisuje njihovu topološku strukturu. Sa druge strane, autor je uveren da disertacija daje kvalitetnu i sveobuhvatnu osnovu za nova istraživanja i uopštenja postojećih rezultata u ovoj oblasti, ali i na generisanje novih korisnih nejednakosti i njihovu dalju primenu u drugim granama nauke.

Indeks simbola i pojmova

Literatura

[1] T.Ando, *Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues*, Linear Algebra Appl. 118 (1989), 163-248.

[2] T.Ando, *Majorization and inequalities in matrix theory*, Linear Algebra Appl. 199 (1994), 17-67.

[3] J. Antezana, P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff, *The Schur-Horn Theorem for operators and frames with prescribed norms and frame operator*, Illinois J. Math. 51 (2) (2007), 537-560.

[4] J. Antezana, P. Massey, D. Stojanoff, *Jensen's inequality for spectral order and submajorization*, J. Math. Anal. Appl. 331 (1) (2007), 297-307.

[5] M. Argerami, P. Massey, *A contractive version of a Schur-Horn theorem in II-1 factors*, J. Math. Anal. Appl. 337 (1) (2008), 231-238.

[6] M. Argerami, *Majorisation and the Carpenter's Theorem*, Integr. Equat. Oper. Th. 82 (1) (2016), 33-49.

[7] M. Argerami, P. Massey, *A Schur-Horn theorem in II-1 factors*, Indiana Univ. Math. J. 56 (5) (2007), 2051-2060.

[8] M. Argerami, P. Massey, *Schur-Horn theorems in II_∞-factors*, Pacific Journal of Mathematics 261 (2) (2013), 283-310.

[9] A. Armandnejad, S. Mohtashami, M. Jamshidi, *On linear preservers of g-tridiagonal majorization on R^n*, Linear Algebra Appl. 459 (2014), 145-153.

[10] W.Arveson, R. V. Kadison, *Diagonals of self-adjoint operators*, Operator theory, operator algebras, and applications, in Contemp. Math. vol. 414, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2006), 247-263.

[11] W. Arveson, *Diagonals of normal operators with finite spectrum*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 104(4) (2007), 1152-1158.

[12] G. Aubrun, I. Nechita, *Catalytic majorization and ℓ^p norms*, Comm. Math. Phys. 278 (1) (2008), 133-144.

[13] F. Bahrami, A. Bayati, S.M. Manjegani, *Linear preservers of majorization on $\ell^p(I)$*, Linear Algebra Appl. 436 (2012), 3177-3195.

[14] F. Bahrami, A. Bayati, S.M. Manjegani, *Majorization on ℓ^∞ and on its closed linear subspace c, and their linear preservers*, Linear Algebra Appl. 437 (2012), 2340-2358.

[15] F. Bahrami, A. Bayati, *Some topological properties of the set of linear preservers of majorization*, Electron. J. Linear Algebra, 23 (2012), 655-663.

[16] A. Bayati, N. Eftekhari, *Convex majorization on discrete ℓ^p spaces*, Linear Algebra Appl. 474 (2015), 124-140.

[17] A. Bayati, *Generalized Kakutani's conjecture for doubly stochastic operators*, Linear Multilinear Algebra, http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2016.1234579

[18] A. Bayati, S.M. Manjegani, *Some properties of operators preserving convex majorization on discrete ℓ^p spaces*, Linear Algebra Appl. 484 (2015), 130-140.

[19] L. B. Beasley, S.G. Lee, *Linear operators preserving multivariate majorization* Linear Algebra Appl. 304 (2000), 141-159.

[20] C. Berge, Topological spaces, including a treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1963.

[21] S.K. Bhandari, S.D. Gupta, *Two Characterizations of Doubly Super-Stochastic Matrices*, Sankhy: The Indian Journal of Statistics, Series A, 47 (3) (1985), 357-365.

[22] R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer, 1997.

[23] B. V. R. Bhat, M. Ravichandran, *The Schur-Horn theorem for operators with finite spectrum*, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (10) (2014).

[24] G. Birkhoff, *Tres observaciones sobre el algebra lineal*, Univ. Nac. Tucumán. Rev. Ser. A, 5 (1946), 147-151.

[25] J. Boos, P. Cass, Classical and modern methods in summability, Oxford University Press, 2000.

[26] M. Bownik, J. Jasper, *The Schur-Horn theorem for operators with finite spectrum*, Trans. Amer. Math. Soc. 367 (7) (2015), 5099-5140.

[27] M Brešar, P. Šemrl, *Linear Maps Preserving the Spectral Radius*, J. Funct. Anal. 142 (1996), 360-368.

[28] R. A. Brualdi, G. Dahl, *Majorization classes of integral matrices*, Linear Algebra Appl. 436 (2012), 802-813.

[29] N. Canosa, R. Rossignoli, M. Portesi, *Majorization relation and disorder in generalized statistics*, Physica A, 371 (2006), 126-129.

[30] K. M. Chong, *Spectral order preserving matrices and Muirhead's theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 200 (1974), 437-444.

[31] G. Dahl, *Matrix majorization*, Linear Algebra Appl. 288 (1999), 53-73.

[32] G. Dahl, *Majorization and distances in trees*, Networks 50 (4) (2007), 251-257.

[33] H. Dalton, *The measurement of the inequality of incomes*, Econ. J. 30 (1920), 348-361.

[34] N. Eftekhari, A. Bayati, *Isotonic linear operators on the space of all convergent real sequences*, Linear Algebra Appl. 506 (2016), 535-550.

[35] H.K. Farahat, *The semigroup of doubly stochastic matrices*, Glasgow Math. Assoc. Proc. 7 (1965/1966), 178-183.

[36] M. Fiedler, *Majorization in Euclidean geometry and beyond*, Linear Algebra Appl. 466 (2015), 233-240.

[37] I. C. Gohberg, A. S. Markus, *Some relations between eigenvalues and matrix elements of linear operators*, Rossiskaya Akademiya Nauk. Matematicheskii Sbornik. 64 (106) (1964), 481-496.

[38] A. Guterman, *Linear preservers for matrix inequalities and partial orderings*, Linear Algebra Appl. 331 (2001), 75-87.

[39] A. Guterman, C.K. Li, P. Šemrl, *Some general techniques on linear preserver problems*, Linear Algebra Appl. 315 (1-3) (2000), 61-81.

[40] P. R. Halmos, A Hilbert space problem book, Springer-Verlag, 2 edition, 1982.

[41] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, Inequalities, 1. and 2. ed., Cambridge University Press, London and New York, 1934, 1952.

[42] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Some simple inequalities satisfied by convex function*, Messenger Math. 58 (1929), 145-152.

[43] A. M. Hasani, M. A. Vali, *Linear maps which preserve or strongly preserve weak majorization.* J. Inequal. Appl. , Article ID 82910, (2007).

[44] F. Hiai, *A generalization of Araki's log-majorization*, Linear Algebra Appl, 501 (2016), 1-16.

[45] F. Hiai, *Majorization and stochastic maps in von Neumann algebras*, J. Math. Anal. Appl. 127 (1) (1987) 18-48.

[46] F. Hiai, *Similarity Preserving Linear Maps on Matrices*, Linear Algebra Appl, 97 (1987), 127-139.

[47] R. A Horn, *Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix*, Amer. J. Math. 76 (1954), 620-630.

[48] R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix analysis, Cambridge University press, 1985.

[49] R. A. Horn and C. R. Johnson, Topic in Matrix analysis, Cambridge University press, 1991.

[50] J. Jasper, *The Schur-Horn theorem for operators with three point spectrum*, J. Funct. Anal. 265 (8) (2013), 1494-1521.

[51] V. Kaftal, G. Weiss, *An infinite dimensional Schur-Horn Theorem and majorization theory*, J. Funct. Anal. 259 (2010), 3115-3162.

[52] V. Kaftal, G. Weiss, *Majorization and arithmetic mean ideals*, Indiana Univ. Math. J. 60(5) (2011), 1393-1424.

[53] M. Kennedy, P. Skoufranis, *The Schur-Horn problem for normal operators*, Proc. London Math. Soc., 111 (2) (2015), 354-380.

[54] M. Kennedy, P. Skoufranis, *Thompsons theorem for II_1 factors*, Trans. Amer. Math. Soc. (2016), DOI: http://dx.doi.org/10.1090/tran/6711

[55] F. Khalooei, M. Radjabalipour, P. Torabian, *Linear preservers of left matrix majorization*, Electron. J. Linear Algebra 17 (2008), 304-315.

[56] F. Khalooei, A. Salemi, *The structure of linear preservers of left matrix majorizations on $\mathbb{R}^p$*, Electron. J. Linear Algebra 18 (2009), 88-97.

[57] Lj. Kočinac, Linearna algebra i analitička geometrija, Prosveta, Niš, 2. izdanje, 1997.

[58] S. Kurepa, Funkcionalna analiza, Školska knjiga-Zagreb, 1981.

[59] Y. Li, P. Busch, *Von Neumann entropy and majorization*, J. Math. Anal. Appl. 408 (1) (2013), 384-393.

[60] C.K. Li, S. Pierce, *Linear Preserver Problems*, The American Mathematical Monthly, 108 (7) (2001), 591-605.

[61] C. K. Li, E. Poon, *Linear operators preserving directional majorization*, Linear Algebra Appl. 325 (2001), 141-146.

[62] C.K. Li, N.K. Tsing, *Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques*, Linear Algebra Appl. 162 (1992), 217-235.

[63] M. Liu, B. Liu, Z. You, *The majorization theorem of connected graphs*, Linear Algebra Appl. 431 (2009), 553-557.

[64] J. Loreaux, *Diagonals of operators: Majorization, Schur-Horn theorem and zero-diagonal idempotents*, Ph.D thesis, University of Cincinnati (2016).

[65] J. Loreaux, G. Weiss, *Majorization and a Schur-Horn theorem for positive compact operators, the nonzero kernel case*, J. Funct. Anal. 268 (3) (2015), 703-731.

[66] J. Loreaux, G. Weiss, *Diagonality and idempotents with applications to problems in operator theory and frame theory*, Journal of Operator Theory 75 (2016), 91-118.

[67] Lorentz, *Methods of measuring concentration of wealth*, J. Amer. Statist. Assoc. 9 (1905), 209-219.

[68] M. Ljubenović, *Majorization and doubly stochastic operators*, Filomat 29 (9) (2015), 2087-2095.

[69] M. Ljubenović, *Weak majorization and doubly substochastic operators on* $\ell^p(I)$, Linear Algebra Appl. 486 (2015), 295-316.

[70] M. Ljubenović, D.S. Djordjević, *Linear preservers of weak majorization on* $\ell^p(I)^+$*, when* $p \in (1, \infty)$, Linear Algebra Appl. 497 (2016), 181-198.

[71] M. Ljubenović, D.S. Djordjević, *Linear preservers of weak majorization on* $\ell^1(I)^+$*, when* I *is an infinite set*, Linear Algebra Appl. prihvaćen za štampu.

[72] M. Ljubenović, D.S. Djordjević, *Weak supermajorization and families as doubly stochastic operators on* $\ell^1(I)^+$, na recenziji.

[73] M. Ljubenović, D.S. Djordjević, *Linear preservers of weak supermajorization on* $\ell^p(I)^+$*, when* I *is an infinite set*, na recenziji.

[74] M. Ljubenović, *Closeness of the set of all linear preservers of the weak supermajorization relation on* $\ell^1(I)^+$, na recenziji.

[75] S.M. Manjegani, *Tracial and majorisation Heinz mean-type inequalities for matrices*, J. Inequal. Appl. (2016), 2016:23.

[76] A. S. Markus, *Eigenvalues and singular values of the sum and product of linear operators*, Rossiskaya Akademiya Nauk. Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskih Nauk 19.4 (118) (1964), 93-123.

[77] A.W. Marshall, I. Olkin, B.C. Arnold, Inequalities: Theory of majorization and its applications, second ed., Springer, 2011.

[78] P. Massey, M. Ravichandran, *Multivariable Schur-Horn theorems*, Proc. London Math. Soc. 112 (1) (2016), 206-234.

[79] L.Mirsky, *On a convex set of matrices*, Arch. Math. 10 (1959), 88-92.

[80] R. F. Muirhead, *Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 21 (1903), 144-157.

[81] M. Nadoshan, A. Armandnejad, *B-majorization and its linear preservers*, Linear Algebra Appl. 478 (2015), 218-227.

[82] A. Neumann, *An infinite-dimensional generalization of the Schur-Horn convexity theorem*, J. Funct. Anal. 161 (2) (1999), 418-451.

[83] J. von Neumann, *A certain zero-sums two-person game equivalent to the optimal assignment problem*, Contributions to the Theory of Games, 2 (1953), 5-12.

[84] M.A. Nielsen, *An introduction to majorization and its application to quantum mecahnics*, Department of Physics, University of Queensland, Australia, 2002, može se naći na adresi http://michaelnielsen.org/blog/talks/2002/maj/book.ps.

[85] M.A. Nielsen, G. Vidal, *Majorization and the interconversion of bipartite states*, Quantum Inform. Comput. 1 (1) (2001), 76-93.

[86] C.P. Niculescu, I. Roventa, *An approach of majorization in spaces with a curved geometry*, J. Math. Anal. Appl. 270 (4) (2014), 1319-1360.

[87] M.H. Partovi, *Majorization formulation of uncertainty in quantum mechanics*, Physical Review A 84 (5) (2011).

[88] R.Pereira, S.Plosker, *Extending a characterisation of majorization to infinite dimensions*, Linear Algebra Appl. 468 (2015), 80-86.

[89] F. Peria, P. Massey, L. Silvestre, *Weak matrix majorization*, Linear Algebra Appl. 403 (2005), 343-368.

[90] D. Petz, *Spectral scale of selfdjoint operators and trace inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 109 (1985) 74-82.

[91] S. Pierce, *A survey of linear preserver problems*, Linear Multilinear Algebra 33 (1-2) (1992).

[92] A.Pietsch, Eigenvalues and s-Numbers, Cambridge University press, 1985.

[93] V. Rakočević, Funkcionalna analiza, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[94] M. Ravichandran, *The Schur-Horn Theorem in von Neumann algebras*, Preprint, arXiv:1209.0909 [math.OA], arXiv: 1209.0909 [math.OA] (2014).

[95] L. Rodman, P. Šemrl, *A localization technique for linear preserver problems*, Linear Algebra Appl. 433 (2010), 2257-2268.

[96] W.J. Rolli, *Constructing frames for finite dimensional Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. 321 (1) (2006), 388-395.

[97] I. Roventa, *Hardy-Littlewood-Polya's Inequality and a new concept of weak majorization*, Mediterr. J. Math. 13 (2016), 573-583.

[98] S. Schreiber, *On a Result of S. Sherman Concerning Doubly Stochastic Matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 350-353.

[99] S. Sherman, *On a conjecture concerning doubly stochastic matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 511-513.

[100] S. Sherman, *A correction to "On a conjecture concerning doubly stochastic matrices"*, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 998-999.

[101] R. Slowik, *Three linear preservers on infinite triangular matrices*, Linear Multilinear Algebra, Vol. 63 (4) (2015) 672-694.

[102] T. Snijders, *An ordering of probability distributions on a partially ordered outcome space*, University of Groningen, 1976.

[103] M. Soleymani, A. Armandnejad, *Linear preservers of even majorization on $M_{n,m}$*, Linear Multilinear Algebra 62 (11) (2014), 1437-1449.

[104] M. Soleymani, A. Armandnejad, *Linear preservers of circulant majorization on R^n*, Linear Algebra Appl. 440 (2014), 286-292.

[105] I. Schur, *Über eine klasse von mittelbildungen mit anwendungen die determinanten*, Theorie Sitzungsber. Berlin. Math. Gesellschaft, 22 (1923), 9-20.

[106] P. Šemrl, *Maps on matrix spaces*, Linear Algebra Appl. 413 (2006), 364-393.

[107] M. Tomić, *Théorème de Gauss relatif au centre de gravité at son application*,(Serbian, Russian and French summaries), Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 1 (1949), 31-40.

[108] J. Tao, L. Kong, Z. Luo, N. Xiu, *Some majorization inequalities in Euclidean Jordan algebras*, Linear Algebra Appl. 461(2014), 92-122.

[109] H. Weyl, *Inequalities between two kinds of eigenvalues of a linear transformation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35 (1949), 408-411.

[110] X. Zhan, Matrix Inequalities, Springer, 2002.

Biografija autora

Martin Ljubenović je rođen 28. marta 1985. godine u Nišu, gde je završio osnovnu školu "Ivo Andrić" kao nosilac diplome "Vuk Karadžić". Pohađao je dve matematičke škole za talentovane matematičare, u organizaciji "Društva matematičara Srbije" u periodu od četvrtog do osmog razreda. Završio je gimnaziju "Svetozar Marković" kao član specijalizovanog odeljenja za talentovane matematičare.

Osnovne studije je upisao skolske 2004/2005 godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, na odseku za matematiku i informatiku. Diplomirao je juna 2010. godine sa prosečnom ocenom 8,54. Iste godine upisao je doktorske studije iz matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, položio sve planom i programom predviđene ispite i pritom postigao prosečnu ocenu 10,00.

Od aprila 2016. godine zaposlen je kao asistent na Mašinskom fakultetu u Nišu, na katedri za prirodno-matematičke nauke. U periodu od oktobra 2014. do aprila 2016. godine bio je angažovan na pomenutom fakultetu u izvođenju nastave kao spoljni saradnik. Od početka 2011. do aprila 2016. bio je zaposlen na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu kao istraživač na projektu koji finansira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije "Funkcionalna analiza, stohastička analiza i primene" (br. 174007), u okviru kog i danas radi kao istraživač.

Martin Ljubenović je bio učesnik i predavač na Međunarodnoj konferenciji: "Analysis, Topology and Applications 2014", (ATA2014), koja je održana u maju 2014. godine, u Vrnjačkoj banji sa temom predavanja: "Some properties of majorization on doubly stochastic operators". Takođe je učestvovao na 11. Međunarodnom simpozijumu "Geometric function theory and applications", koji je održan u Ohridu (Makedonija) u avgustu 2015. sa temom predavanja: "The extension of majorization and doubly stochastic operators".

Martin Ljubenović je autor četiri naučna rada sa SCI liste iz kategorije M21, od kojih su tri publikovana, dok je jedan rad prihvaćen za štampu. Takođe, autor ima i tri neobjavljena rukopisa koji se nalaze na recenziji, a čiji se rezultati nalaze u ovoj disertaciji.

Bibliografija

Publikovani radovi:

1) M. Ljubenović, *Majorization and doubly stochastic operators*, Filomat 29 (9) (2015), 2087-2095.

2) M. Ljubenović, *Weak majorization and doubly substochastic operators on* $\ell^p(I)$, Linear Algebra Appl. 486 (2015), 295-316.

3) M. Ljubenović, D.S. Djordjević, *Linear preservers of weak majorization on* $\ell^p(I)^+$, *when* $p \in (1, \infty)$, Linear Algebra Appl. 497 (2016), 181-198.

Prihvaćen rad za štampu:

4) M. Ljubenović, D.S. Djordjević, *Linear preservers of weak majorization on* $\ell^1(I)^+$, *when* I *is an infinite set*, Linear Algebra Appl., prihvaćen za štampu.

Radovi na recenziji:

5) M. Ljubenović, D.S. Djordjević, *Weak supermajorization and families as doubly stochastic operators on* $\ell^1(I)^+$, na recenziji.

6) M. Ljubenović, D.S. Djordjević, *Linear preservers of weak supermajorization on* $\ell^p(I)^+$, *when* I *is an infinite set*, na recenziji.

7) M. Ljubenović, *Closeness of the set of all linear preservers of the weak supermajorization relation on* $\ell^1(I)^+$, na recenziji.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

МАЈОРИЗАЦИОНЕ РЕЛАЦИЈЕ И СТОХАСТИЧКИ ОПЕРАТОРИ НА ДИСКРЕТНИМ ЛЕБЕГОВИМ ПРОСТОРИМА

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 08.12.2016. године

Потпис аутора дисертације:

Љубеновић Мартин

Мартин З. Љубеновић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

МАЈОРИЗАЦИОНЕ РЕЛАЦИЈЕ И СТОХАСТИЧКИ ОПЕРАТОРИ НА ДИСКРЕТНИМ ЛЕБЕГОВИМ ПРОСТОРИМА

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**

2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде **(CC BY-NC-ND)**

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**

5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**

6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу,

08.12.2016. године

Потпис аутора дисертације:

Љубеновић Мартин

Мартин З. Љубеновић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

МАЈОРИЗАЦИОНЕ РЕЛАЦИЈЕ И СТОХАСТИЧКИ ОПЕРАТОРИ НА ДИСКРЕТНИМ ЛЕБЕГОВИМ ПРОСТОРИМА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 08.12.2016. године

Потпис аутора дисертације:

Љубеновић Мартин

Мартин З. Љубеновић

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Мартин З. Љубеновић
Ментор, **МН**:	Драган С. Ђорђевић
Наслов рада, **НР**:	Мајоризационе релације и стохастички оператори на дискретним Лебеговим просторима
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	српски
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2016.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5 / vii + 127 / 110 / 0 / 0 / 0 / 0
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	функционална анализа / стохастички оператори, мајоризационе релације, пермутација, дискретни Лебегови простори
УДК	517.983.23 (043.3) 517.521 (043.3) 512.64/.643 (043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	У овој дисетацији су проширени појмови слабе мајоризације и слабе супермајоризације на дискретним Лебеговим просторима, уз помоћ двоструко субстохастичких и суперстохастичких оператора. Уопштени су веома важни резултати из коначно-димензионалне мајоризационе теорије који дају блиску везу између стандардне и поменутих слабих мајоризација са одговарајућим стохастичким операторима. Доказано је да су све три релације мајоризације пре-уређења, а уколико се поистовете све функције које се разликују до на пермутацију, или до на парцијалу пермутацију за случај слабе мајоризације, ове релације се могу посматрати као парцијална уређења. Извршена је комплетна карактеризација линеарних очувања слабе мајоризације као и слабе супермајоризације. Уочено је да произвољно позитивно очување једне од изучаваних мајоризација чува и друге две релације. Показано је да постоје два различита облика линеарних очувања слабе мајоризације на дискретним Лебеговим просторима $l^p(I)$, када је p строго веће од 1 и када је p једнако један. Проширен је појам мајоризације на скупу двоструко стохастичких оператора. Преформулисана је Какутанијева хипотеза, и дати су довољни услови под којима је ова претпоставка тачна.
Датум прихватања теме, **ДП**:	04.07.2016
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан:	
Члан:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Martin Z. Ljubenović**
Mentor, **MN**:	**Dragan S. Đorđević**
Title, **TI**:	**Majorization relations and stochastic operators on discrete Lebesgue spaces**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2016**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**5 / vii + 127 / 110 / 0 / 0 / 0 / 0**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**mathematical analysis**
Subject/Key words, **S/KW**:	**functional analysis/** **stochastic operators, majorization relations, permutation, discrete Lebesgue spaces**
UC	**517.983.23 (043.3)** **517.521 (043.3)** **512.64/.643 (043.3)**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:	In this dissertation, notions of weak majorization and weak supermajorization on descrete Lebesgue spaces are introduced, using doubly substochastic and superstochastic operators. We generalize very important results from finite dimenstional majorization theory, which give close relationships between standard and mentioned weak majorizations and corresponding stochastic operators. It is proved that all three majorization relations are pre-orders, and if we identify all functions which are different up to the permutation, or up to the partial permutation for weak majorization case, these relation may be considered as parial orders. The complete characterisation of linear preservers of weak majorization and weak supermajorization, has been carried out. It was observed that positive preserver of one investigated majorization preserves the remaining two relations. It was provided that there are two different forms of linear preservers of weak majorization on discrete Lebesgue spaces $l^p(I)$, when p is greater than 1 and when p is equal 1. The notion of majorization on the set of all doubly stochastic operators is extended. Kakutani's conjecture is restated and sufficient conditions that this conjecture is true are given.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	04.07.2016.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member:	
Member:	
Member:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1