UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

**mr Miloš Japundžić**

# Uopštena rešenja nekih klasa frakcionih parcijalnih diferencijalnih jednačina

-doktorska disertacija-

Novi Sad, 2016.

# Predgovor

Doktorska disertacija je posvećena rešavanju Košijevog problema odabranih klasa frakcionih diferencijalnih jednačina u okviru Kolomboovih prostora uopštenih funkcija. S obzirom da se frakcione jednačine sa varijabilnim koeficijentima i nelinearnim delom koji zavisi od rešenja u opštem slučaju rešavaju aproksimativno, najčešće primenom raznih numeričkih metoda, jedan od razloga zašto smo frakcione jednačine razmatrali u okviru Kolomboove teorije uopštenih funkcija jeste namera da se ove jednačine tretiraju koristeći operatorski pristup, odnosno, primenom teorije polugrupa operatora ili opštije, primenom operatora rešenja kao generalizacije polugrupa operatora i kosinusnih operatora.

Osnovna ideja u disertaciji, na kojoj je bazirano rešavanje odabranih frakcionih jednačina, jeste da se prostorno diferencijalni operatori (celobrojnog i frakcionog reda) u jednačini zamene sa odgovarajućim linearnim ograničenim operatorima, pod nametnutim uslovima koji impliciraju asociranost rešenja polazne i odgovarajuće aproksimativne jednačine, prethodno pretpostavljajući egzistenciju rešenja polaznog problema. Imajući u vidu karakterizaciju infinitezimalnog generatora uniformno neprekidnih polugrupa operatora, odnosno, operatora rešenja, u proceduri rešavanja jednačina bilo je neophodno da aproksimativni diferencijalni operatori budu ograničeni. Transformaciju neograničenih diferencijalnih operatora u ograničene izvršili smo primenjujući dobro poznat postupak regularizacije dat preko konvolucije frakcionih izvoda sa mrežom molifajera.

Frakcione parcijalne diferencijalne jednačine predstavljaju deo moderne teorije matematičke analize koja modelira razne pojave u akustici, biomedicini, biomehanici, farmakokinetici, geofizici, geologiji, hidrologiji, mehanici, obradi slike i signala, populacionoj biologiji, seizmologiji, teoriji viskoelastičnosti, kao i drugim mnogobrojnim oblastima. Frakcioni račun predstavlja veoma efikasan alat za opis, analizu, modeliranje i donošenje optimalnih odluka koje se tiču složenih dinamičkih procesa i sistema. Za mnoge klase problema ispostavlja se da rešenja frakcionih jednačina više odgovaraju dobijenim eksperimentalnim podacima, nego rešenja klasičnih jednačina sa izvodima celobrojnog reda. Frakcione jednačine uključuju više informacija o razmatranom modelu nego nego što je to slučaj u klasičnom diferencijalnom računu, ali sa druge strane frakcioni modeli adekvatnije opisuju mnoge pojave.

Teorija uopštenih funkcija nastala je iz razloga što u teoriji klasičnih funkcija modeli raznih fizičkih pojava i procesa nisu bili dovoljno jasno formulisani ili njihova formulacija nije imala nikakav prirodan smisao. Ovi problemi su otklonjeni uvođenjem teorije distribucija, međutim ne u potpunosti s obzirom da se u okviru distribucija ne mogu razmatrati mnoge klase diferencijalnih jednačina u kojima se prirodno javlja množenje distribucija, koje kao što je dobro poznato nije uvek definisano. Kolomboova teorija uopštenih funkcija predstavlja jedan od pristupa za prevazilaženje problema množenja distribucija, te predstavlja veoma pogodan alat za rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina.

Tematski, disertacija se može podeliti na dva dela. U prvom delu disertacije razmatrane su nehomogene evolucione jednačine sa prostorno frakcionim diferencijalnim operatorima reda $0 < \alpha < 2$ i koeficijentima koji zavise od $x$ i $t$. Ova klasa jednačina je aproksimativno rešavana, tako što je umesto početne jednačine razmatrana aproksimativna jednačina data preko regularizovanih frakcionih izvoda, odnosno, njihovih regularizovanih množitelja. Za rešavanje smo koristili dobro poznate uopštene uniformno neprekidne polugrupe operatora.

U drugom delu disertacije aproksimativno su rešavane nehomogene frakcione evolucione jednačine sa Kaputovim frakcionim izvodom reda $0 < \alpha < 2$, linearnim, zatvorenim i gusto definisanim operatorom na prostoru Soboljeva celobrojnog reda i koeficijentima koji zavise od $x$. Odgovarajuća aproksimativna jednačina sadrži uopšteni operator asociran sa polaznim operatorom, dok su rešenja dobijena primenom, za tu svrhu u disertaciji konstruisanih, uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja.

Organizaciono, disertacija je podeljena na pet delova. Prva glava *Uvod* predstavlja kolekciju osnovnih rezultata vezanih za frakcione prostore Soboljeva, razne tipove prostorno i vremensko frakcionih izvoda, kao i Mitag-Leflerovu funkciju. Pored toga, navedene su osnovne postavke i osobine poznatih teorija, kao što su teorija uniformno neprekidnih polugrupa operatora, kosinusnih operatora, odnosno, operatora rešenja. U ovoj glavi veći deo tvrđenja predstavlja dobro poznate rezultate, pa je stoga većina tvrđenja navedena bez dokaza. Preostali, originalni rezultati, su navedeni sa kompletnim dokazima.

Druga glava pod naslovom *Uopštene polugrupe i uopšteni operatori rešenja* sadrži pregled dobro poznate teorije uopštenih uniformno neprekidnih polugrupa operatora, kao proširenja klasičnih uniformno neprekidnih polugrupa na prostor uopštenih funkcija. Pored toga, u ovoj glavi je data reprezentacija rešenja

Košijevog problema za frakcione evolucione jednačine reda $0 < \alpha < 1$ u operatorskom obliku, kao i odgovarajuće integralne reprezentacije neophodne za rad u Kolomboovom okruženju. Na kraju, za potrebe rešavanja frakcionih evolucionih jednačina konstruisani su uopšteni uniformno neprekidni operatori rešenja, ispitane njihove osnovne osobine, kao i njihovih infinitezimalnih generatora, odnosno, odgovarajuće relacije među njima. Svi rezultati izloženi u ovoj glavi, izuzev prvog poglavlja, predstavljaju originalne rezultate.

U trećoj glavi pod naslovom *Evolucione jednačine sa prostorno frakcionim diferencijalnim operatorima* je razmatran Košijev problem odabranih evolucionih jednačina sa prostorno frakcionim izvodima reda $0 < \alpha < 2$ i koeficijentima koji zavise od $x$ i $t$. Egzistencija i jedinstvenost rešenja je najpre pokazana na odgovarajućim Kolomboovim prostorima definisanim na prostorima Soboljeva celobrojnog reda, a zatim je prostor rešenja proširen na Kolomboove prostore definisane na prostorima Soboljeva proizvoljnog reda, tj. frakcione Kolomboove algebre. U stvari, na prostorima Soboljeva celobrojnog reda rešavali smo sisteme takvih jednačina. U oba slučaja, pokazana je asociranost neregularizovanog i odgovarajućeg regularizovanog frakcionog operatora, kao i asociranost rešenja polaznog i aproksimativnog Košijevog problema. Rešenja su dobijena primenom teorije uopštenih uniformno neprekidnih polugrupa operatora. Dokazi za pomenuta tvrđenja su dati u slučaju levog Ljuvilovog frakcionog izvoda, pri čemu sva tvrđenja ostaju na snazi ukoliko se umesto levog Ljuvilovog frakcionog izvoda razmatraju jednačine sa desnim Ljuvilovim frakcionim izvodom, odnosno, Risovim frakcionim izvodom. Svi rezultati izloženi u ovoj glavi predstavljaju originalne rezultate.

Četvrta glava pod naslovom *Frakcione evolucione jednačine reda* $0 < \alpha < 1$ je posvećena rešavanju Košijevog problema za frakcione evolucione jednačine reda $0 < \alpha < 1$, sa linearnim, zatvorenim i gusto definisanim operatorom na prostoru Soboljeva celobrojnog reda i koeficijentima koji zavise od $x$. Ove jednačine su rešavane aproksimativno, tako što je umesto polazne jednačine rešavana jednačina data sa uopštenim operatorom asociranim sa polaznim operatorom. Dokazana je egzistencija i jedinstvenost rešenja aproksimativnih jednačina na Kolomboovom prostoru, definisanom tako da uvažava specifičnosti ovih jednačina, pri čemu su rešenja dobijena primenom uvedene teorije uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja. Takođe, prezentovana je analiza asociranosti rešenja polazne i odgovarajuće aproksimativne jednačine. Na kraju, ilustrovana je primena uvedenih uopštenih operatora rešenja na rešavanje Košijevog problema istaknutih predstavnika ove klase jednačina. Svi rezultati izloženi u ovoj glavi predstavljaju originalne rezultate.

U petoj glavi pod naslovom *Frakcione evolucione jednačine reda* $1 < \alpha < 2$, slično prethodnoj glavi, razmatran je Košijev problem za frakcione evolucione jednačine reda $1 < \alpha < 2$. Kao i u slučaju $0 < \alpha < 1$, i u ovoj glavi odabrane jednačine su rešavane aproksimativno. Data je reprezentacija rešenja u slučaju kada je drugi početni uslov homogen, kao i odgovarajuće integralne reprezentacije pogodne za rad u Kolomboovom okruženju. Teorija uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja uvedena u drugoj glavi, dopunjena je neophodnim tvrđenjima za slučaj $1 < \alpha < 2$, koja se odnose na osnovne osobine operatora rešenja, njihovih infinitezimalnih generatora, odnosno, odgovarajuće relacije među njima. Egzistencija i jedinstvenost rešenja aproksimativne jednačine je dokazana primenom teorije uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja. Ispitani su uslovi pod kojima su rešenja polazne i odgovarajuće aproksimativne jednačine asocirana. Takođe, na kraju je ilustrovana primena uvedenih uopštenih operatora rešenja na rešavanje Košijevog problema istaknutih predstavnika ove klase jednačina. Svi rezultati izloženi u ovoj glavi predstavljaju originalne rezultate.

*Dodatak*, koji se nalazi na kraju disertacije, predstavlja pregled oznaka, dobro poznatih osnovnih pojmova, definicija i korisnih nejednakosti koje su korišćene kroz čitavu disertaciju, te služi da čitaocu omogući lakše praćenje izloženih rezultata.

Zahvaljujem se akademiku dr Teodoru Atanackoviću, profesoru emeritusu na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, na korektnom odnosu, savetima i interesovanju za problematiku obrađenu u disertaciji.

Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, svojim neiscrpnim znanjima iz mnogobrojnih matematičkih oblasti predstavlja, kao i mnogim generacijama pre mene, uzor i podstrek za posvećeno bavljenje naučno-istraživačkim radom. Njemu dugujem zahvalnost za pružene savete i sugestije tokom izrade doktorske disertacije.

Naročitu zahvalnost dugujem dr Marku Nedeljkovu, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na veoma pažljivom, detaljnom i studioznom čitanju rukopisa disertacije koje je, zajedno sa savetima i pomoći tokom izrade disertacije, neposredno uticalo kako na završni oblik disertacije tako i na njen kvalitet. Znanja koja mi je preneo na ispitima tokom osnovnih i doktorskih studija, kao ekspert iz oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina, predstavljaju temelj na osnovu kojeg sam započeo istraživanja u okviru disertacije.

Posebnu zahvalnost dugujem mentoru dr Danijeli Rajter-Ćirić, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na prenetom znanju, strpljenju u radu sa mnom, usmeravanju, konstantnoj podršci i pomoći, raznovrsnim idejama, operativnosti, kao i na dostupnosti i otvorenosti u mnogobrojnim diskusijama o problemima na koje smo nailazili tokom izrade disertacije. Zahvalnost se takodje odnosi na ukazano poverenje i vešto ostavljenom prostoru da se dokažem u savladavanju zahtevne problematike obrađene u disertaciji. Kao rezultat zajedničkog rada na disertaciji nastale su mnoge ideje za dalja istraživanja, te se radujem saradnji i u narednom periodu.

Na kraju, neizmernu zahvalnost dugujem roditeljima i sestri za oslonac i svu podršku pruženu u prethodnim godinama, devojci koja je uvek verovala u mene i bila uz mene, rodbini, prijateljima, kao i svima koji su mi na bilo koji način pomogli prilikom izrade disertacije.

Novi Sad, *Miloš Japundžić*
19. septembar 2016.

# Sadržaj

# Glava 1

# Uvod

Iako u ekspanziji i ubrzanom razvoju tek tokom poslednjih nekoliko decenija, počeci frakcionog računa poklapaju se sa pojavom klasičnog diferencijalnog računa. Tačnije, za rođendan frakcionog računa uzima se 1695. godina, godina prepiske između čuvenih matematičara Lopitala i Lajbnica, u kojoj su diskutovali o značenju izvoda reda 1/2. Nakon njih, razvojem frakcionog računa i postavljanjem njegovih temelja tokom XIX veka bavili su se mnogi istaknuti matematičari, među kojima su Ljuvil, Grunvald, Letnjikov i Riman. Štaviše, frakcioni račun predstavlja generalizaciju klasičnog diferencijalnog računa, s obzirom da dopušta diferenciranje proizvoljnog realnog ili kompleksnog reda. Frakcione diferencijalne jednačine nastaju zamenjujući izvode celobrojnog reda u klasičnim diferencijalnim jednačinama frakcionom izvodom odgovajućeg tipa i reda. U literaturi postoje razni tipovi frakcionih izvoda, dok su u disertaciji razmatrane jednačine sa najčešće korišćenim frakcionim izvodima po vremenskoj promenljivoj - Kaputov i Riman-Ljuvilov frakcioni izvod, odnosno, po prostornoj promenljivoj - levi i desni Ljuvilov, kao i Risov frakcioni izvod.

Frakcioni račun je tehnički znatno komplikovaniji nego klasični diferencijalni račun, imajući u vidu činjenicu da osnovne formule kao što su Lajbnicovo pravilo i lančano pravilo, u frakcionom računu ne važe u obliku kao u slučaju klasičnog računa. Takodje, u frakcionom računu je ponekad neophodno znati više informacija o razmatranom modelu, s obzirom da, na primer, frakcioni izvodi po prostornoj promenljivoj ili kraće prostorno frakcioni izvodi, za razliku od izvoda celobrojnog reda poseduju nelokalni karakter. To znači, da bi se dobio prostorno frakcioni izvod funkcije u nekoj tački neophodno je znati njene vrednosti, ne samo u okolini te tačke, već na mnogo širem skupu, ponekad i na čitavom domenu definisanosti funkcije.

Medjutim, sa druge strane, koristi od upotrebe više informacija jesu da se za mnoge klase problema rešenja frakcionih jednačina više slažu sa dobijenim eksperimentalnim podacima, nego rešenja odgovarajućih diferencijalnih jednačina sa izvodima celobrojnog reda. Frakcioni izvodi obezbeđuju odličan alat za opisivanje memorijskih i naslednih osobina raznih materijala i procesa. To je i glavna prednost frakcionih modela u poređenju sa klasičnim modelima, koji uglavnom zanemaruju takve efekte. Takođe, frakcioni izvodi su veoma pogodni za opisivanje svojstava raznih materijala, na primer, polimera, te se u praktičnoj primeni pokazalo da su frakcioni modeli mnogo adekvatniji od klasičnih, celobrojnih. Prednost frakcionih izvoda postaje vidljiva u modeliranju mehaničkih i električnih osobina raznih materijala, u opisivanju arheoloških osobina stena, transportu hemijskih zagađivača kroz podzemne vode, kao i u mnogim drugim oblastima.

Uvodnu glavu započećemo pregledom definicija i osnovnih osobina vezanih za prostore Soboljeva celobrojnog i proizvoljnog reda, koji predstavljaju prirodno okruženje u kojem treba tražiti rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina. Nakon toga, navodimo definicije, osnovna i pomoćna tvrđenja koja se odnose na prostorno i vremensko frakcione izvode, sa odgovarajućim ocenama neophodnim u okruženju Kolomboovih prostora uopštenih funkcija, kao što su aproksimativno lančano pravilo, odnosno, aproksimativno Lajbnicovo pravilo. U nastavku podsećamo čitaoca na teoriju polugrupa ograničenih linearnih operatora, dobro poznatu i veoma značajnu teoriju razvijenu za rešavanje evolucionih jednačina i sistema jednačina prvog reda, kao i kosinusne familije ograničenih linearnih operatora, pogodne za rešavanje evolucionih jednačina drugog reda. Nakon toga, prezentovaćemo pojedine osobine Mitag-Leflerove funkcije, s obzirom na njenu naročito važnu ulogu u rešavanju frakcionih evolucionih jednačina. Uvodnu glavu završavamo sa pregledom teorije uniformno neprekidnih operatora rešenja, baziranih upravo na Mitag-Leflerovoj funkciji, koju ćemo koristiti prilikom rešavanja frakcionih evolucionih jednačina.

Napomenimo da ova glava, između ostalog, predstavlja pregled dobro poznatih tvrđenja koja ćemo koristiti prilikom dokazivanja raznih rezultata. Tvrđenja koja su dobro poznata biće navedena bez dokaza, dok će pomoćna tvrđenja koja su formulisana za potrebe rešavanja izabranih klasa frakcionih jednačina biti data sa kompletnim dokazima.

Radi lakšeg praćenja i boljeg razumevanja mnogobrojnih rezultata prezentovanih u disertaciji, upućujemo čitaoca na Dodatak, gde je dat pregled oznaka, osnovnih pojmova, definicija i nejednakosti koje ćemo koristiti kroz čitavu disertaciju.

## 1.1 Frakcioni prostori Soboljeva

**Definicija 1.1** *([1]) Prostori Soboljeva proizvoljnog reda $\alpha \in \mathbb{R}$, $H^\alpha(\mathbb{R})$, definišu se kao*

$$H^\alpha(\mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \langle\xi\rangle^\alpha \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}, \tag{1.1}$$

*pri čemu je $\widehat{u}$ Furijeova transformacija funkcije $u$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ je prostor temperiranih distribucija i $\langle\xi\rangle \equiv (1+ \mid \xi \mid^2)^{\frac{1}{2}}$. Prostoru $H^\alpha$ se na prirodan način pridružuje norma*

$$\|u\|_{H^\alpha(\mathbb{R})} \equiv \|\langle\xi\rangle^\alpha \widehat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left( \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+ \mid \xi \mid^2)^\alpha |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Specijalno, u slučaju celobrojnog reda prostori Soboljeva se mogu definisati na uobičajeni način, preko odgovarajućih izvoda celobrojnog reda:

**Definicija 1.2** *([1]) Prostori Soboljeva celobrojnog reda $n \geq 1$, definišu se kao prostori*

$$H^n(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \partial^i u \in L^2(\mathbb{R}), \ \ i = 1, ..., n\},$$

*dok je norma data sa*

$$\|u\|_{H^n(\mathbb{R})} = \sum_{i=0}^{n} \|\partial^i u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Prostore Soboljeva celobrojnog reda zvaćemo kraće prostori Soboljeva, dok ćemo prostore Soboljeva proizvoljnog reda zvati frakcioni prostori Soboljeva. U oba slučaja, za prostore Soboljevskog tipa je karakteristično da važi $H^\beta \subset H^\alpha$, za $\alpha < \beta$. Prema tome, $H^\alpha \subset L^2$ za sve $\alpha \geq 0$, pri čemu još važi $\|u\|_{H^\alpha} \leq \|u\|_{H^\beta}$.

Funkcije koje pripadaju frakcionim prostorima Soboljeva mogu se, u zavisnosti od reda prostora, potopiti zajedno sa svojim celobrojnim izvodima u prostor $L^\infty(\mathbb{R})$, kao što se može videti u narednoj teoremi.

**Teorema 1.1** *(Teorema Soboljeva o potapanju, Teorema 7 u [73]) Neka $k \in \mathbb{N}_0$ i neka $u \in H^\alpha(\mathbb{R})$, pri čemu je $\alpha > \frac{1}{2} + k$. Tada, $\partial^i u \in \dot{C}(\mathbb{R})$, za sve $i \in \mathbb{N}_0$, za koje važi $i \leq k$. Takođe, postoji konstanta $c = c(i, \alpha)$ takva da za sve $u \in H^\alpha(\mathbb{R})$ važi*

$$\|\partial^i u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{H^\alpha(\mathbb{R})}.$$

## 1.2 Frakcioni izvodi

### 1.2.1 Levi i desni Ljuvilov frakcioni izvod

**Definicija 1.3** *([4], [5], [47], [70], [75]) Pretpostavimo da $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ i neka je $m-1<\alpha\leq m$, gde $m \in \mathbb{N}$. Tada se levi Ljuvilov frakcioni izvod reda $\alpha$ na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ definiše sa*

$$(D_+^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-m+1}}d\xi.$$

**Propozicija 1.1** *(Propozicija 3.2.6 u [86]) Furijeova transformacija levog Ljuvilovog frakcionog izvoda reda $\alpha>0$, za $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, je*

$$\widehat{D_+^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi). \tag{1.3}$$

Iz relacije (1.3) sledi

$$\begin{aligned} \|\widehat{D_+^\alpha u}\|_{L^2} &= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (|\ \xi\ |^2)^\alpha |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|\ \xi\ |^2)^\alpha |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{H^\alpha}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

te Planšerelov identitet $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ implicira da je $D_+^\alpha$ neprekidno linearno preslikavanje iz $(C_0^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{H^\alpha})$ u $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$. S obzirom da je $C_0^\infty(\mathbb{R})$ gust podskup od $H^\alpha(\mathbb{R})$, ova definicija se može proširiti i na neprekidno linearno preslikavanje iz $H^\alpha(\mathbb{R})$ u $L^2(\mathbb{R})$. To je jednostavna posledica dobro poznate teoreme o ograničenim linearnim transformacijama:

**Propozicija 1.2** *([73], Propozicija 2.3.1) Pretpostavimo da je* X *normiran linearan prostor, $E \subset X$ je gust linearan prostor, i* Y *je Banahov prostor. U slučaju neprekidnog linearnog preslikavanjw $T: E \to Y$ postoji jedinstveno neprekidno linearno preslikavanje $T_{ext}: X \to Y$ za koje važi $T_{ext|E} = T$.*

Prethodno spomenuto proširenje levog Ljuvilovog frakcionog izvoda obeležavaćemo sa $\mathcal{D}_+^\alpha$, i za njega važi:

**Propozicija 1.3** *(Posledica 3.2.9. u [86]) Za* $u \in H^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \geq 0$, *Furijeova transformacija levog Ljuvilovog frakcionog izvoda reda* $\alpha > 0$, $\mathcal{D}_+^\alpha$, *je istog oblika kao i (1.3).*

Iz prethodne propozicije sledi da je, kao u (1.4), zadovoljeno:

$$\|\mathcal{D}_+^\alpha u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^\alpha}. \tag{1.5}$$

Budući da za svako $\alpha \geq 0$, postoje pozitivne konstante $C_1^\alpha$ i $C_2^\alpha$ takve da je

$$C_1^\alpha(1 + |\xi|^{2\alpha}) \leq (1 + |\xi|^2)^\alpha \leq C_2^\alpha(1 + |\xi|^{2\alpha}),$$

frakcioni prostori Soboljeva reda $0 < \alpha < 1$, odnosno, $1 < \alpha < 2$, mogu biti definisani na alternativni način u odnosu na Definiciju 1.1, preko Ljuvilovog frakcionog izvoda:

**Definicija 1.4** *Frakcioni prostori Soboljeva reda* $0 < \alpha < 1$, *se mogu definisati kao prostori*

$$H^\alpha(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{D}_+^\alpha u \in L^2(\mathbb{R})\},$$

*sa normom* $\|\cdot\|'$ *datom sa*

$$\|u\|'_{H^\alpha} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{D}_+^\alpha u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.6}$$

*koja je ekvivalentna standardnoj normi datoj sa (1.2).*

**Definicija 1.5** *Frakcioni prostori Soboljeva reda* $1 < \alpha < 2$, *mogu biti definisani kao prostori*

$$H^\alpha(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \partial_x u \in L^2(\mathbb{R}), \mathcal{D}_+^\alpha u \in L^2(\mathbb{R})\},$$

*ovog puta sa normom* $\|\cdot\|''$, *datom sa*

$$\|u\|''_{H^\alpha} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{D}_+^\alpha u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.7}$$

*koja je takođe ekvivalentna standardnoj normi (1.2).*

Prilikom rešavanja određenih Košijevih problema u nastavku biće nam potrebna ocena u normi $\|D^\alpha f(u)\|_{L^2}$, gde je $D^\alpha$ operator koji zadovoljava $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = |\xi|^\alpha \hat{u}(\xi)$. Navedena ocena se može dobiti koristeći aproksimativno lančano pravilo:

**Propozicija 1.4** *([18], Propozicija 3.1.) Pretpostavimo da* $f \in C^1(\mathbb{C})$, $f(0) = 0$, $\alpha \in (0,1)$, $1 < p, q, r < \infty$ *i* $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$. *Ako* $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, $D^\alpha u \in L^q$ *i* $f'(u) \in L^p$, *tada* $D^\alpha(f(u)) \in L^r$ *i*

$$\|D^\alpha f(u)\|_{L^r} \leq C\|f'(u)\|_{L^p}\|D^\alpha u\|_{L^q},$$

za neku konstantu $C$.

Uz određene dodatne pretpostavke, prethodna ocena ostaje da važi i u slučaju $r = q = 2$, $p = \infty$, za levi Ljuvilov frakcioni izvod:

**Propozicija 1.5** *Neka je* $f \in C^1(\mathbb{C})$ *Lipšicova funkcija na* $\mathbb{R}$ *takva da je* $f(0) = 0$ *i pretpostavimo da* $u \in H^\alpha(\mathbb{R})$, $0 < \alpha < 1$. *Tada* $\mathcal{D}_+^\alpha f(u) \in L^2(\mathbb{R})$ *i*

$$\|\mathcal{D}_+^\alpha f(u)\|_{L^2} \leq C\|f^{'}(u)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u\|_{L^2}. \tag{1.8}$$

**Dokaz:**

Dokaz tvrđenja je baziran na Propoziciji 1.4. Zaista, $u \in H^\alpha$ implicira da $\mathcal{D}_+^\alpha u \in L^2$. Budući da je $f$ diferencijabilna i Lipšicova funkcija, sledi da ima ograničen izvod prvog reda, to jest $f^{'}(u) \in L^\infty$. Dalje, kako je $f$ Lipšicova funkcija i $f(0) = 0$, dobija se $f(u(\cdot, t)) \in H^\alpha$ za $u(\cdot, t) \in H^\alpha$, te proizilazi $\mathcal{D}_+^\alpha f(u) \in L^2$. □

U dokazivanju nekih rezultata od koristi će nam biti aproksimativno Lajbnicovo pravilo u slučaju operatora $D^\alpha$:

**Propozicija 1.6** *([18], Propozicija 3.3.) Neka* $\alpha \in (0,1)$, $1 < r, p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$ *i pretpostavimo* $r^{-1} = p_i^{-1} + q_i^{-1}$, *za i=1,2. Pretpostavimo takođe* $f \in L^{p_1}$, $D^\alpha f \in L^{p_2}$, $g \in L^{q_2}$, $D^\alpha g \in L^{q_1}$. *Tada* $D^\alpha(fg) \in L^r$ *i*

$$\|D^\alpha(fg)\|_{L^r} \leq C\|f\|_{L^{p_1}}\|D^\alpha g\|_{L^{q_1}} + C\|D^\alpha f\|_{L^{p_2}}\|g\|_{L^{q_2}},$$

za neku konstantu $C$.

Iz sličnih razloga kao i u slučaju aproksimativnog lančanog pravila, iz Propozicije 1.6 dobija se aproksimativno Lajbnicovo pravilo za levi Ljuvilov frakcioni izvod u normi $L^2$:

**Propozicija 1.7** *Neka* $\alpha \in (0,1)$ *i pretpostavimo da* $f \in L^\infty$, $\mathcal{D}_+^\alpha f \in L^2$, $g \in L^\infty$, $\mathcal{D}_+^\alpha g \in L^2$. *Tada* $\mathcal{D}_+^\alpha(fg) \in L^2$ *i*

$$\|\mathcal{D}_+^\alpha(fg)\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha g\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}_+^\alpha f\|_{L^2}\|g\|_{L^\infty}.$$

U slučaju $1 < \alpha < 2$, aproksimativno lančano pravilo je dato u narednoj propoziciji:

**Propozicija 1.8** *Pretpostavimo da* $u \in H^\alpha(\mathbb{R})$, $1 < \alpha < 2$ *i neka* $f \in C^1(\mathbb{C})$ *bude Lipšicova funkcija na* $\mathbb{R}$, *sa ograničenim frakcionim izvodom* $D_+^\alpha f$, *takva da je* $f(0) = 0$. *Tada* $\mathcal{D}_+^\alpha f(u) \in L^2$ *i*

$$\|\mathcal{D}_+^\alpha f(u)\|_{L^2} \leq C\|f'(u)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}_+^{\alpha-1}(f'(u))\|_{L^\infty}\|u\|_{H^\alpha}. \tag{1.9}$$

**Dokaz:**

Fiksirajmo $1 < \alpha < 2$. Tada $\alpha = 1 + \beta$, za neko $\beta \in (0, 1)$. Pokažimo prvo da za $u \in H^{1+\beta}(\mathbb{R})$ važi

$$\mathcal{D}_+^{1+\beta} u(x) = \mathcal{D}_+^\beta(\partial_x u(x)).$$

Zaista, koristeći relaciju $\widehat{\partial_x u}(\xi) = (i\xi)\widehat{u}(\xi)$ dobija se

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_+^{1+\beta} u(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (i\xi)^{1+\beta}\widehat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (i\xi)^{\beta}\widehat{\partial_x u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \mathcal{D}_+^\beta(\partial_x u(x)). \end{aligned}$$

Na sličan način može se pokazati

$$\mathcal{D}_+^{1+\beta} u(x) = \partial_x(\mathcal{D}_+^\beta u(x)). \tag{1.10}$$

Budući da je $0 < \beta < 1$, iz Propozicije 1.7 dobija se

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_+^\alpha f(u)\|_{L^2} &= \|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_x f(u))\|_{L^2} = \|\mathcal{D}_+^\beta(f'(u)\partial_x u)\|_{L^2} \\ &\leq C\|f'(u)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_x u)\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}_+^\beta(f'(u))\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2} \\ &\leq C\|f'(u)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}_+^\beta(f'(u))\|_{L^\infty}\|u\|_{H^\alpha}. \qquad \square \end{aligned}$$

U slučaju $1 < \alpha < 2$, aproksimativno Lajbnicovo pravilo za frakcione izvode ima oblik:

**Propozicija 1.9** *Neka* $\alpha \in (1, 2)$ *i pretpostavimo da* $f, g, \partial_x f, \partial_x g \in L^\infty$ *i* $\mathcal{D}_+^{\alpha-1} f, \mathcal{D}_+^{\alpha-1} g, \mathcal{D}_+^\alpha f, \mathcal{D}_+^\alpha g \in L^2$. *Tada* $\mathcal{D}_+^\alpha(fg) \in L^2$ *i*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_+^\alpha(fg)\|_{L^2} \leq\ & C\|\partial_x f\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^{\alpha-1} g\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}_+^\alpha f\|_{L^2}\|g\|_{L^\infty} \\ & + C\|f\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha g\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}_+^{\alpha-1} f\|_{L^2}\|\partial_x g\|_{L^\infty}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

**Dokaz:**

Neka je $\alpha = 1+\beta$, gde je $0<\beta<1$. Tada iz Propozicije 1.7 dobijamo

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_+^\alpha(fg)\|_{L^2} &= \|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_x(fg))\|_{L^2}\\
&\leq \|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_x fg)\|_{L^2} + \|\mathcal{D}_+^\beta(f\partial_x g))\|_{L^2}\\
&\leq C\|\partial_x f\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\beta g\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_x f)\|_{L^2}\|g\|_{L^\infty}\\
&\quad +C\|f\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_x g)\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}_+^\beta f\|_{L^2}\|\partial_x g\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

i tvrđenje odmah sledi. □

Prethodna tvrđenja i zaključci izvedeni za levi Ljuvilov frakcioni izvod takođe važe i u slučaju desnog Ljuvilovog frakcionog izvoda reda $\alpha$ :

**Definicija 1.6** *([4], [5], [47], [70], [75]) Desni Ljuvilov frakcioni izvod reda $\alpha$, ($m-1<\alpha\leq m$, $m\in\mathbb{N}$), na realnoj pravi $\mathbb{R}$, za funkcije $u\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, dat je sa*

$$(D_-^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_x^\infty \frac{u(\xi)}{(\xi-x)^{\alpha-m+1}}d\xi.$$

Na sličan način kao i za levi Ljuvilov frakcioni izvod, moguće je prethodnu definiciju proširiti na neprekidno linearno preslikavanje $\mathcal{D}_-^\alpha : H^\alpha(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, pri čemu je sada Furijeova transformacija desnog Ljuvilovog frakcionog izvoda reda $\alpha \geq 0$ data sa

$$\widehat{\mathcal{D}_-^\alpha u}(\xi) = (-i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi).$$

### 1.2.2 Risov frakcioni izvod

Risov frakcioni izvod uključuje levi i desni Ljuvilov frakcioni izvod, te kao takav ima značaj sa stanovišta primene s obzirom da omogućava modeliranje uticaja protoka sa obe strane domena.

**Definicija 1.7** *([32], [77], [87]) Risov frakcioni izvod reda $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}$, u oznaci ${}^R\mathcal{D}_x^\alpha$, za funkcije $u\in H^\alpha(\mathbb{R})$ definiše se kao*

$${}^R\mathcal{D}_x^\alpha u(x) = -\frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(\mathcal{D}_+^\alpha u(x) + \mathcal{D}_-^\alpha u(x)).$$

Napomenimo da se u literaturi prethodna definicija javlja i bez negativnog predznaka. Razlog za izbor Definicije 1.7, za Risov frakcioni izvod, jeste da u tom slučaju važi ${}^{R}\mathcal{D}_x^{\alpha} = \frac{d^2}{dx^2}$ za $\alpha = 2$. Primetimo da prethodna definicija važi u slučaju kada je red izvoda paran broj, to jest za $\alpha = 2k$, $k = 1, 2, ...,$ dok ${}^{R}\mathcal{D}_x^{\alpha} \neq \frac{d}{dx}$ za $\alpha = 1$.

Za $\alpha = 1$ Risov frakcioni izvod za funkcije $u \in H^1(\mathbb{R})$ se definiše kao

$$ {}^{R}\mathcal{D}_x^{\alpha} u(x) = -\frac{d}{dx} Hu(x), $$

gde je $H$ Hilbertova transformacija ([32]) data sa

$$ Hu(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{x - \xi} d\xi. $$

Specijalno, za slučaj $0 < \alpha < 1$, Risov frakcioni izvod se može prikazati u integralnom obliku kao

$$ {}^{R}\mathcal{D}_x^{\alpha} u(x) = -\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sgn(x-\xi)}{|x-\xi|^{\alpha}} u(\xi) d\xi. $$

Veza između ocena u $L^2$-normi levog i desnog Ljuvilovog frakcionog izvoda sa jedne strane i Risovog frakcionog izvoda sa druge strane, koja će nam biti od koristi prilikom dokazivanja određenih važnih tvrđenja, data je u sledećoj propoziciji:

**Propozicija 1.10** *Pretpostavimo da* $u \in H^{\alpha}(\mathbb{R})$, *gde* $m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$. *Tada*

$$ \| {}^{R}\mathcal{D}_x^{\alpha} u(x) \|_{L^2} = \left\| \mathcal{D}_{+}^{\alpha} u(x) \right\|_{L^2} = \left\| \mathcal{D}_{-}^{\alpha} u(x) \right\|_{L^2}. \tag{1.12} $$

**Dokaz:**

Furijeova transformacija Risovog frakcionog izvoda reda $\alpha$, za funkcije $u \in H^{\alpha}(\mathbb{R})$ je data sa

$$ \widehat{{}^{R}\mathcal{D}_x^{\alpha} u}(\xi) = -\frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \left[ (i\xi)^{\alpha} \hat{u}(\xi) + (-i\xi)^{\alpha} \hat{u}(\xi) \right]. $$

Dalje imamo ([75], str. 137)

$$ \begin{aligned} (i\xi)^{\alpha} \hat{u}(\xi) + (-i\xi)^{\alpha} \hat{u}(\xi) &= \left( e^{\frac{i\alpha\pi}{2} sgn\xi} + e^{\frac{-i\alpha\pi}{2} sgn\xi} \right) |\xi|^{\alpha} \hat{u}(\xi) \\ &= 2\cos\frac{\alpha\pi}{2} |\xi|^{\alpha} \hat{u}(\xi), \end{aligned} $$

što implicira

$$ \widehat{{}^{R}\mathcal{D}_x^{\alpha} u}(\xi) = -|\xi|^{\alpha} \hat{u}(\xi), $$

pa tvrđenje odmah sledi. $\square$

### 1.2.3 Riman-Ljuvilov frakcioni izvod

**Definicija 1.8** *([4], [5], [47], [70], [75]) Riman-Ljuvilov frakcioni izvod reda* $\alpha$, $m-1<\alpha\leq m$, $m\in\mathbb{N}$, *se u operatorskom obliku definiše kao*

$$ {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\alpha}f(t)=\frac{d^m}{dt^m}J_t^{m-\alpha}f(t), \tag{1.13}$$

*gde je* $J_t^{\alpha}$, $\alpha\geq 0$, *frakcioni integral, za funkcije* $f(t)\in L^1[0,T]$ *dat sa*

$$J_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \tag{1.14}$$

*pri čemu je* $J_t^0=I$, $I$ *je identički operator.*

Za egzistenciju Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda reda $\alpha$, $m-1<\alpha\leq m$, $m\in\mathbb{N}$, dovoljno je pretpostaviti da $f\in AC^m[0,T]$ ili $f\in C^m[0,T]$.

U literaturi je uobičajeno da se frakcioni integrali, odnosno, Riman-Ljuvilovi frakcioni izvodi, definišu tako da je donja granica u integralu umesto 0 proizvoljno $a\geq 0$. U tom slučaju odgovarajuće definicije imaju oblik

$${}_aJ_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \tag{1.15}$$

odnosno,

$${}^{RL}{}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}f(t)=\frac{d^m}{dt^m}\,{}_aJ_t^{m-\alpha}f(t). \tag{1.16}$$

S obzirom da ćemo u disertaciji razmatrati slučaj $a=0$, koristićemo frakcione integrale i Riman-Ljuvilove frakcione izvode date sa (1.14), odnosno, (1.13).

Dobro je poznata činjenica da se određeni integral $\int_0^t f(\tau)d\tau$, za sve funkcije iz prostora $L^1[0,T]$ anulira u nuli, to jest važi

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^t f(\tau)d\tau=0.$$

Sa druge strane, frakcioni integral proizvoljnog reda $\alpha>0$, anulira se u nuli samo za neprekidne funkcije $C[0,T]$. Kao ilustraciju, razmotrimo stepenu funkciju $t^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, koja pripada prostoru $L^1[0,T]$, a ne pripada $C[0,T]$. U tom slučaju važi

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^t \tau^{-\alpha}d\tau=0,$$

dok u slučaju frakcionog integrala reda $0 < \alpha < 1$ važi

$$\lim_{t \to 0^+} J_t^\alpha t^{-\alpha} = \Gamma(1-\alpha) \neq 0.$$

Specijalno, za $0 < \alpha < 1$ Riman-Ljuvilov frakcioni izvod ima oblik

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

Neka je funkcija $g_\alpha(t)$, gde je $\alpha > 0$, data sa

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Tada sledi da se frakcioni integral reda $\alpha > 0$ može definisati sa

$$J_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t).$$

S obzirom da je zadovoljeno

$$g_{\alpha+\beta} = g_\alpha * g_\beta,$$

iz osobine asocijativnosti za konvoluciju proizilazi da frakcioni integral poseduje svojstvo polugrupe, to jest za sve $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ važi

$$J_t^{\alpha+\beta} = J_t^\alpha J_t^\beta.$$

Za $f \in L^1[0,T]$, frakcioni integral postoji za skoro svako $t \in [0,T]$, i u tom slučaju takođe važi $J_t^\alpha f(t) \in L^1[0,T]$ (videti [24]).

Riman-Ljuvilov frakcioni izvod stepene funkcije $t^\beta$ dat je sa

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha},$$

pod uslovom da je $t^\beta$ integrabilna funkcija, što se postiže za $\beta > -1$. Za razliku od izvoda celobrojnog reda, Riman-Ljuvilov frakcioni izvod konstante nije 0, već važi

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Kao i u slučaju izvoda celobrojnog reda, Riman-Ljuvilov frakcioni izvod je levi inverz frakcionog integrala $J_t^\alpha$, dok u opštem slučaju ne mora biti desni inverz kao što se može videti u narednom tvrđenju.

**Teorema 1.2** *([24], Teorema 2.23) Neka je $\alpha > 0$ i $m \in \mathbb{N}$ takav da $m-1 < \alpha < m$. Pretpostavimo da je funkcija $f$ takva da $J_t^{m-\alpha} f(t) \in AC^m[0,T]$. Tada*

$$J_t^{\alpha}\, {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{t\to 0+} \frac{d}{dt^{m-k-1}} J_t^{m-\alpha} f(t).$$

*Specijalno, za $0 < \alpha < 1$ imamo*

$$J_t^{\alpha}\, {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = f(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t\to 0+} J_t^{1-\alpha} f(t).$$

U slučaju Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda važi relacija:

**Propozicija 1.11** *([84], Lema 2.1) Za sve $\alpha \in (m-1, m]$ i $\beta \geq 0$ važi:*

$$J_t^{\beta+\alpha} f(t) = J_t^{\beta+m}\, {}^{RL}\mathcal{D}_t^{m-\alpha} f(t). \tag{1.18}$$

Izvod prvog reda integrala po promenljivoj čija gornja granica zavisi od iste promenjive, dobija se preko dobro poznate formule

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t,\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t} d\tau + f(t,t).$$

U slučaju $0 < \alpha < 1$, frakcioni analogon za slučaj Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda integrala po promenljivoj čija gornja granica zavisi od iste promenjive, dat je sa

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^{\alpha} \int_0^t f(t,\tau) d\tau = \int_0^t {}^{RL}{}_{\tau}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t,\tau) d\tau + \lim_{\tau\to t^-} {}_{\tau}J_t^{1-\alpha} f(t,\tau), \tag{1.19}$$

pri čemu su ${}_{\tau}J_t^{\alpha} f(t,\tau)$ i ${}^{RL}{}_{\tau}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t,\tau)$ dati sa (1.15), odnosno, (1.16).

Specijalno, ukoliko za podintegralnu funkciju umesto $f(t,\tau)$ imamo funkciju oblika $K(t-\tau)f(\tau)$, tada relacija data sa (1.19) postaje

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^{\alpha} \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t {}^{RL}\mathcal{D}_{\tau}^{\alpha} K(\tau) f(t-\tau) d\tau + \lim_{\tau\to 0^+} f(t-\tau) J_{\tau}^{1-\alpha} K(\tau). \tag{1.20}$$

### 1.2.4 Kaputov frakcioni izvod

**Definicija 1.9** *([4], [5], [47], [70], [75]) Kaputov frakcioni izvod reda $\alpha$, pri čemu je $m-1<\alpha\leq m$, $m\in\mathbb{N}$, ima oblik*

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = J_t^{m-\alpha} f^{(m)}(t), \tag{1.21}$$

*gde je $J_t^{\alpha}$ frakcioni integral dat sa (1.14).*

Iz uslova za egzistenciju frakcionog integrala proizilazi da je za egzistenciju Kaputovog frakcionog izvoda reda $\alpha$, $m-1<\alpha\leq m$, dovoljno da bude zadovoljeno $f^{(m)}(t)\in L^1[0,T]$.

Specijalno, za $0<\alpha<1$ Kaputov frakcioni izvod ima oblik

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau.$$

Za razliku od Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda, Kaputov izvod konstante je 0. Kao što je poznato, ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}$ je levi inverz frakcionog integrala $J_t^{\alpha}$, odnosno, ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} J_t^{\alpha} f = f$ za neprekidnu funkciju $f$, ali u opštem slučaju nije i desni inverz kao što se može videti u narednom tvrđenju.

**Teorema 1.3** *([24], Teorema 3.8) Pretpostavimo da je $\alpha>0$ i $m\in\mathbb{N}$ takav da $m-1<\alpha<m$, kao i da $f(t)\in AC^m[0,T]$. Tada*

$$ J_t^{\alpha}\, {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0).$$

*Specijalno, za $0<\alpha<1$ imamo*

$$ J_t^{\alpha}\, {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = f(t) - f(0).$$

Naredno tvrđenje predstavlja uopštenje klasične teoreme o srednjoj vrednosti za frakcioni slučaj, te je poznato kao uopštena (frakciona) teorema o srednjoj vrednosti.

**Teorema 1.4** *([68]) Neka je $0<\alpha\leq 1$. Tada za $f(t)\in C[a,b]$ i ${}_{a}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t)\in C(a,b]$, važi*

$$ f(t) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}({}_{a}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f)(\xi)(t-a)^{\alpha}, \quad a\leq\xi\leq t, \quad t\in(a,b],$$

*gde je ${}_{a}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f$ dato sa*

$$ {}_{a}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau.$$

### 1.2.5 Veza između Riman-Ljuvilovog i Kaputovog frakcionog izvoda

Kaputov frakcioni izvod reda $\alpha$, pri čemu je $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}$, može se definisati preko Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda sa

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\alpha}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)\right). \tag{1.22}$$

Prema tome, Kaputov frakcioni izvod je u stvari regularizovani Riman-Ljuvilov frakcioni izvod. Kao posledicu veze (1.22) imamo da se ova dva tipa frakcionih izvoda poklapaju u slučaju $f(0)=f^{'}(0)=\ldots=f^{(m-1)}(0)=0$.

Specijalno, za $0<\alpha<1$ ta veza ima oblik

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t)-\frac{f(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

dok se frakcioni izvodi Riman-Ljuvilovog i Kaputovog tipa poklapaju u slučaju $f(0)=0$.

U slučaju $0<\alpha<1$, Kaputov frakcioni izvod integrala po promenljivoj čija gornja granica takođe zavisi od iste promenjive, dobijamo koristeći prethodnu vezu između Riman-Ljuvilovog i Kaputovog frakcionog kao i relaciju (1.20):

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau &= \int_0^t\left({}^{C}\mathcal{D}_\tau^{\alpha}K(\tau)+\frac{K(0)\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)f(t-\tau)d\tau \\ &\quad+\lim_{\tau\to0^+} f(t-\tau)J_\tau^{1-\alpha}K(\tau) \\ &= \int_0^t {}^{C}\mathcal{D}_\tau^{\alpha}K(\tau)f(t-\tau)d\tau \\ &\quad+K(0)J_t^{1-\alpha}f(t)+\lim_{\tau\to0^+} f(t-\tau)J_\tau^{1-\alpha}K(\tau). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Napomenimo da od tipa frakcionog izvoda koji se pojavljuje u jednačini zavisi priroda početnih uslova u odgovarajućem Košijevom problemu. Naime, u slučaju Riman-Ljuvilovih frakcionih izvoda početni uslovi su prirodno dati preko frakcionih integrala, odnosno, celobrojnih izvoda frakcionih integrala, dok jednačine sa Kaputovim frakcionim izvodima dopuštaju da početni uslovi mogu biti dati preko celobrojnih izvoda, koji kao takvi imaju fizičku interpretaciju (na primer, nulti izvod se odnosi na položaj tela, prvi izvod na brzinu tela, drugi izvod na ubrzanje).

## 1.3 Uniformno neprekidne polugrupe operatora

Klasična teorija polugrupa ograničenih linearnih operatora razvijena je za potrebe rešavanja Košijevog problema evolucionih sistema jednačina prvog reda, odnosno,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= Au(t) + f(\cdot, t, u), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1.24}$$

pri čemu je diferencijalni operator $A$, koji sadrži izvode celobrojnog reda po $x$, infinitezimalni generator polugrupe operatora. Reprezentacija rešenja problema (1.24) data je sa

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(\cdot, s, u)ds,$$

gde je $S$ polugrupa operatora generisana sa $A$.

U ovom poglavlju navešćemo neke osnovne definicije i tvrđenja vezana za uniformno neprekidne polugrupe ograničenih linearnih operatora. Detaljne dokaze navedenih tvrđenja i više informacija o osobinama polugrupa operatora, zainteresovani čitalac može pronaći, na primer, u knjigama [26] i [69].

**Definicija 1.10** *Neka je $E$ Banahov prostor. Jednoparametarska familija $S(t)$, $t \geq 0$, ograničenih linearnih operatora $E \to E$ se zove polugrupa ograničenih linearnih operatora na $E$ ako*

*(i) $S(0) = I$, gde je $I$ identički operator na $E$.*

*(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, za svako $t, s \geq 0$.*

Uslov (ii) je poznat kao svojstvo polugrupe.

**Definicija 1.11** *Infinitezimalni generator $A$ polugrupe ograničenih linearnih operatora na $E$, $S(t)$, $t \geq 0$, je linearan operator definisan sa*

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} S(t)x \mid_{t=0}, \quad x \in D(A),$$

*gde je*

$$D(A) = \{x \in E : \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \ \ postoji\}$$

*domen operatora A.*

**Definicija 1.12** *Polugrupa ograničenih linearnih operatora $S(t)$, $t \geq 0$, je uniformno neprekidna ako*

$$\lim_{t \to 0} \|S(t) - I\| = 0.$$

Iz definicije neposredno sledi da za uniformno neprekidne polugrupe operatora važi

$$\lim_{t \to s} \|S(t) - S(s)\| = 0.$$

Karakterizacija generatora uniformno neprekidnih polugrupa operatora je data u sledećem tvrđenju:

**Teorema 1.5** *([69], Teorema 1.2) Linearan operator $A$ je infinitezimalni generator uniformno neprekidne polugrupe ako i samo ako je $A$ ograničen operator.*

Iz Definicije 1.11 sledi da svaka polugrupa ograničenih linearnih operatora ima jedinstveni infinitezimalni generator, dok iz Teoreme 1.5 sledi da je infinitezimalni generator uniformno neprekidne polugrupe operatora ograničen linearan operator. Sa druge strane, svaki ograničen linearan operator $A$ je infinitezimalni generator uniformno neprekidne polugrupe $S(t)$ date sa

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \ \ t \geq 0.$$

Polugrupa koju generiše ograničen linearan operator je jedinstveno određena, kao što se tvrdi u sledećoj teoremi:

**Teorema 1.6** *([69]) Neka su $S(t)$ i $T(t)$ uniformno neprekidne polugrupe operatora sa infinitezimalnim generatorima $A$ i $B$, redom. Ako je $A = B$, tada važi $S(t) = T(t)$, za svako $t \geq 0$.*

Neke od osobina uniformno neprekidnih polugrupa operatora sadržane su u sledećoj propoziciji:

**Propozicija 1.12** *([69]) Neka je $S(t)$ uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora. Tada* *(i) Postoji konstanta $\omega \geq 0$ takva da $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $t \geq 0$.*

*(ii) Postoji jedinstven ograničen linearan operator $A$ takav da*

$$S(t) = e^{tA}, \ \ t \geq 0.$$

*(iii) Operator $A$ iz (ii) je infinitezimalni generator polugrupe $S(t)$.*

*(iv) Preslikavanje $t \to S(t)$ je diferencijabilno i važi*

$$\frac{d}{dt}S(t) = AS(t) = S(t)A.$$

## 1.4 Kosinusne familije ograničenih linearnih operatora

Jedna od metoda rešavanja evolucionih jednačina drugog reda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^2}u(t) &= Au(t) + f(\cdot, t, u) \\ u(0) &= u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{aligned} \tag{1.25}$$

jeste primenom kosinusne familije ograničenih linearnih operatora. Po ugledu na teoriju polugrupa ograničenih linearnih operatora, izložićemo ukratko definiciju kosinusnih familija operatora, njihovog generatora, kao i neke od njihovih osnovnih osobina. Više informacija o osobinama kosinusnih familija operatora zainteresovani čitalac može pronaći, na primer, u knjigama [2], [29] i [48], odnosno, radovima [49] i [50].

**Definicija 1.13** *Neka je $E$ Banahov prostor. Jednoparametarska familija $C(t)$, $t \geq 0$, ograničenih linearnih operatora $E \to E$ se zove kosinusna familija ograničenih linearnih operatora na $E$ ako*

*(i) $C(0) = I$, gde je $I$ identički operator na $E$.*

*(ii) $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$, za svako $t \geq s \geq 0$.*

Uslov (ii) je poznat kao Dalamberova funkcionalna jednačina, odnosno, kosinusna funkcionalna jednačina.

**Definicija 1.14** *Sinusna familija operatora* $\mathrm{Sin}(t)$, $t \geq 0$, *asocirana sa kosinusnom familijom* $C(t)$, *definiše se kao*

$$\mathrm{Sin}(t) := \int_0^t C(s)ds. \tag{1.26}$$

**Definicija 1.15** *Infinitezimalni generator* $A$ *kosinusne familije ograničenih linearnih operatora na* $E$, $C(t)$, $t \geq 0$, *je linearan operator definisan sa*

$$Ax = 2\lim_{t\downarrow 0}\frac{C(t)x - x}{t^2} = \frac{d^+}{dt^2}C(t)x\,|_{t=0}, \quad x \in D(A),$$

*gde je*

$$D(A) = \{x \in E : \lim_{t\downarrow 0}\frac{C(t)x - x}{t^2} \ \textit{postoji}\}$$

*domen operatora* $A$.

**Definicija 1.16** *Kosinusna familija ograničenih linearnih operatora* $C(t)$, $t \geq 0$, *je uniformno neprekidna ako*

$$\lim_{t\to 0}\|C(t) - I\| = 0.$$

Kao u slučaju uniformno neprekidnih polugrupa operatora, važi karakterizacija generatora uniformno neprekidnih kosinusnih familija operatora navedena u narednoj propoziciji:

**Teorema 1.7** *([2]) Linearan operator* $A$ *je infinitezimalni generator uniformno neprekidnih kosinusnih operatora ako i samo ako je* $A$ *ograničen operator.*

U [83] (Propozicija 2.2) navedene su neke od osobina jako neprekidnih kosinusnih familija ograničenih linearnih operatora. U slučaju uniformno neprekidnih kosinusnih operatora te osobine sadržane su u narednom tvrđenju.

**Propozicija 1.13** *Neka je* $C(t)$, $t \geq 0$, *uniformno neprekidna kosinusna familija ograničenih linearnih operatora na Banahovom prostoru* $E$ *sa infinitezimalnim generatorom* $A$. *Tada važi*

*(i) Ako* $x \in E$ *onda* $\dfrac{d}{dt}C(t)x = A\mathrm{Sin}(t)x.$

*(ii) Ako* $x \in E$ *onda* $\dfrac{d}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax.$

*(iii) Ako* $x \in E$ *tada* $\lim_{t \to 0} A\mathrm{Sin}(t)x = 0$.

*(iv) Ako* $x \in E$ *onda* $\frac{d}{dt^2}\mathrm{Sin}(t)x = A\mathrm{Sin}(t)x$.

*(v) Ako* $x \in E$ *onda* $A\mathrm{Sin}(t)x = \mathrm{Sin}(t)Ax$.

Kao posledicu osobina iz Propozicije 1.13, motivisani reprezentacijom datoj u [83] (Propozicija 2.4), reprezentacija rešenja problema (1.25) izražena preko kosinusne familije operatora data je u narednoj propoziciji.

**Propozicija 1.14** *Rešenje problema (1.25) dato je sa*

$$u(t) = C(t)u_0 + \mathrm{Sin}(t)u_1 + \int_0^t \mathrm{Sin}(t-\tau)f(\cdot, \tau, u)d\tau, \tag{1.27}$$

*gde je* $C(t)$ *kosinusna familija operatora generisana sa* $A$, *dok je* $\mathrm{Sin}(t)$ *sinusna familija operatora definisana sa (1.26).*

**Dokaz:**

Nakon diferenciranja reprezentacije (1.27) dva puta po $t$, uzimajući u obzir osobine kosinusnih i sinusnih operatora date u Propoziciji 1.13, dobija se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt^2}u(t) &= \frac{d}{dt^2}C(t)u_0 + \frac{d}{dt^2}\mathrm{Sin}(t)u_1 \\
&\quad + \frac{d}{dt}\Big(\int_0^t \frac{d}{dt}\mathrm{Sin}(t-\tau)f(\cdot,\tau,u)d\tau + \mathrm{Sin}(0)f(\cdot,t,u)\Big) \\
&= AC(t)u_0 + A\mathrm{Sin}(t)u_1 \\
&\quad + \int_0^t \frac{d}{dt^2}\mathrm{Sin}(t-\tau)f(\cdot,\tau,u)d\tau + \frac{d}{dt}\mathrm{Sin}(t-\tau)|_{\tau=t}f(\cdot,t,u) \\
&= AC(t)u_0 + A\mathrm{Sin}(t)u_1 \\
&\quad + \int_0^t A\mathrm{Sin}(t-\tau)f(\cdot,\tau,u)d\tau + C(0)f(\cdot,t,u) \\
&= A\Big(C(t)u_0 + \mathrm{Sin}(t)u_1 + \int_0^t \mathrm{Sin}(t-\tau)f(\cdot,\tau,u)d\tau\Big) + f(\cdot,t,u) \\
&= Au(t) + f(\cdot,t,u).
\end{aligned}$$

S obzirom da su početni uslovi u Košijevom problemu (1.25) trivijalno zadovoljeni, proizilazi da (1.27) zaista rešava (1.25). □

## 1.5 Mitag-Leflerova funkcija

Dvoparametarska Mitag-Leflerova funkcija $E_{\alpha,\beta}$ je data sa

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\beta + n\alpha)}, \ z \in \mathbb{C}, \ \alpha > 0, \ \beta \in \mathbb{C}.$$

U slučaju $\beta = 1$, kraće zapisujemo $E_{\alpha,1}(z) \equiv E_\alpha(z)$. Specijalno, za celobrojne vrednosti parametara $\alpha$ i $\beta$, Mitag-Leflerova funkcija ima oblik

$$E_1(t) = e^t, \ \ E_2(t^2) = \cosh(t), \ \ E_{2,2}(t^2) = \frac{\sinh(t)}{t}, \tag{1.28}$$

gde je $\cosh(t)$ kosinus hiperbolički dat sa

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

a $\sinh(t)$ sinus hiperbolički dat sa

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Za sve $\alpha > 1$ važi

$$\frac{d}{dt}\Big(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)\Big) = t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha). \tag{1.29}$$

Za $0 < \alpha < 2$ i $\beta > 0$, Mitag-Leflerova funkcija se u slučaju $|z| \to \infty$ asimptotski ponaša kao

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) + \varepsilon_{\alpha,\beta}(z), \ |\arg z| \leq \frac{\alpha\pi}{2}, \tag{1.30}$$

gde je

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)} + \mathcal{O}(|z|^{-N}),$$

za neko $N \in \mathbb{N}$, $N \neq 1$ (za detalje videti [27]).

Koristeći prethodnu asimptotsku ocenu kad $|z| \to \infty$, može se dobiti veoma značajna ocena za dvoparametarsku Mitag-Leflerovu funkciju, koja će kasnije biti često korišćena prilikom rešavanja frakcionih evolucionih jednačina.

**Propozicija 1.15** *Neka je* $0 < \alpha < 2$ *i* $\beta > 0$. *Tada*

$$E_{\alpha,\beta}(\omega t^{\alpha}) \le C_{\alpha,\beta}(1+\omega^{(1-\beta)/\alpha})(1+t^{1-\beta})\exp(\omega^{1/\alpha}t), \;\; \omega \ge 0, \;\; t \ge 0. \qquad (1.31)$$

**Dokaz:**

Za $\omega = 0$ i svako $t \ge 0$, nejednakost je trivijalno zadovoljena. Fiksirajmo $0 < \alpha < 2$, $\beta > 0$ i $\omega > 0$. Izaberimo proizvoljno veliko $T > 0$. Tada iz ocene (1.30), sledi da za sve $t > (\frac{T}{\omega})^{\frac{1}{\alpha}}$ postoji konstanta $C_1 > 0$ takva da

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(\omega t^{\alpha}) &\le C_1(\omega t^{\alpha})^{(1-\beta)/\alpha}\exp((\omega t^{\alpha})^{1/\alpha})) \\ &= C_1\omega^{(1-\beta)/\alpha}t^{1-\beta}\exp(\omega^{1/\alpha}t) \\ &\le C_1(1+\omega^{(1-\beta)/\alpha})(1+t^{1-\beta})\exp(\omega^{1/\alpha}t). \end{aligned}$$

Budući da je $E_{\alpha,\beta}$ neprekidna funkcija za sve $t \in [0,\infty)$, dobijamo da za sve $t \in \left[0, (\frac{T}{\omega})^{\frac{1}{\alpha}}\right]$ postoji konstanta $C_2$ takva da je

$$E_{\alpha,\beta}(\omega t^{\alpha}) \le C_2 \le C_2(1+\omega^{(1-\beta)/\alpha})(1+t^{1-\beta})\exp(\omega^{1/\alpha}t).$$

Uzimajući $C_{\alpha,\beta} = \max\{C_1, C_2\}$, dobija se nejednakost (1.31). □

## 1.6 Uniformno neprekidni operatori rešenja

Kao što je dobro poznato, Košijev problem za evolucione jednačine prvog i drugog reda može se rešavati primenom teorije polugrupa operatora, odnosno, kosinusne familije operatora. Operatori rešenja, kao uopštenja polugrupa i kosinusnih familija operatora, razvijeni su za potrebe rešavanja Košijevog problema frakcionih evolucionih jednačina reda $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}u(t) &= Au(t), \; t > 0, \\ u^{(k)}(0) &= x_k, \; k = 0, 1, ..., m-1, \end{aligned} \qquad (1.32)$$

gde je ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}$ Kaputov frakcioni izvod reda $\alpha$, dok je $A$ linearan, zatvoren i gusto definisan operator na Banahovom prostoru $E$ ([8], [9], [10]).

**Definicija 1.17** *([10]) Funkcija* $u \in C(\mathbb{R}_+; E)$ *je jako rešenje problema (1.32) ako* $u \in C(\mathbb{R}_+; D(A)) \cap C^{m-1}(\mathbb{R}_+; E)$, $g_{m-\alpha} * (u - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) g_{k+1}) \in C^m(\mathbb{R}_+; E)$ *i (1.32) je zadovoljeno na* $\mathbb{R}_+$, *gde je funkcija* $g$ *data sa (1.17).*

**Definicija 1.18** *([10]) Problem (1.32) je dobro definisan ako za svako* $x_k \in D(A)$, $k = 0, 1, ..., m-1$, *postoji jedinstveno jako rešenje* $u(t; x_1, \dots, x_{m-1})$ *za (1.32) i* $x_{k,n} \in D(A)$, $x_{k,n} \to 0$, $n \to \infty$, *implicira* $u(t; x_{1,n}, \dots, x_{m-1,n}) \to 0$ *za* $n \to \infty$, *pri čemu je konvergencija uniformna na kompaktnim intervalima.*

Razmotrimo specijalan slučaj frakcionog Košijevog problema (1.32) dat sa

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) &= Au(t), \ t > 0, \\ u(0) &= x, \ u^{(k)}(0) = 0, \ k = 1, ..., m-1. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Košijev problem (1.33) je dobro definisan ako i samo ako je sledeća Volterova integralna jednačina

$$u(t) = x + \int_0^t g_\alpha(t-\tau) Au(\tau) d\tau \tag{1.34}$$

dobro definisana u smislu Definicije 1.18.

Slično definiciji operatora rešenja za jako neprekidne funkcije i njihovog infinitezimalnog generatora uvedenih u [10], dajemo sledeće definicije:

**Definicija 1.19** *Familija* $S_\alpha(t)$, $t \geq 0$, *linearnih ograničenih operatora na Banahovom prostoru* $E$ *je uniformno neprekidan operator rešenja za (1.33) ako su zadovoljeni uslovi:*

**(i)** $S_\alpha(t)$ *je uniformno neprekidna funkcija za* $t \geq 0$ *i* $S_\alpha(0) = I$, *gde je* $I$ *identički operator na* $E$.

**(ii)** $AS_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax$, *za sve* $x \in E$, $t \geq 0$.

**(iii)** $S_\alpha(t)x$ *je rešenje jednačine (1.34) za sve* $x \in E$, $t \geq 0$.

Primetimo da je u odnosu na polugrupe operatora (Definicija 1.10), u prethodnoj definiciji izostavljen uslov koji se odnosi na svojstvo polugrupe, te je zamenjen uslovima (ii) i (iii). Razlog za to leži u činjenici da frakcioni izvodi imaju nelokalni karakter koji uvek prouzrokuje prisustvo memorije, te odgovarajući operatori rešenja ne mogu zadovoljavati svojstvo polugrupe. Sličan komentar važi i za kosinusne familije operatora, u odnosu na kosinusnu funkcionalnu jednačinu $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$.

U skladu sa [71], problem (1.33) je dobro definisan ako i samo ako postoji operator rešenja koji zadovoljava uslove iz Definicije 1.19. Štaviše, ako (1.33) ima operator rešenja $S_\alpha(t)$ tada problem (1.32) ime jedinstveno rešenje dato sa

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (J_t^k S_\alpha)(t) x_k,$$

pod uslovom da važi $x_k \in D(A)$, $k = 0, 1, ..., m-1$. Zato je i problem (1.32) dobro definisan, te je dovoljno razmatrati problem (1.33).

**Definicija 1.20** *Infinitezimalni generator $A$ uniformno neprekidnog operatora rešenja $S_\alpha(t)$, $\alpha > 0$, $t \geq 0$, za (1.33) dat je sa*

$$Ax = \Gamma(1+\alpha) \lim_{t \downarrow 0} \frac{S_\alpha(t)x - x}{t^\alpha}, \tag{1.35}$$

*za sve $x \in E$.*

Infinitezimalni generator $A$ se takođe može definisati sa

$$Ax = ({}^C\mathcal{D}_t^\alpha S_\alpha)(t)x \mid_{t=0},$$

budući da je $J_t^\alpha {}^C\mathcal{D}_t^\alpha S_\alpha(t)x = S_\alpha(t)x - x$ i za sve funkcije $v(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+; E)$ važi

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{J_t^\alpha v(t)}{g_{\alpha+1}(t)} = v(0)$$

(videti [10]).

**Napomena 1.1** *U slučaju $0 < \alpha \leq 1$, definicija generatora data sa (1.35) takođe proizilazi iz uopštene teoreme o srednjoj vrednosti date u [68], s obzirom da za $f(t) \in C[a, b]$ i ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \in C(a, b]$, važi*

$$f(t) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} ({}^C\mathcal{D}_t^\alpha f)(\xi)(t-a)^\alpha, \quad a \leq \xi \leq t, \quad t \in (a, b].$$

**Definicija 1.21** *([10]) Operator rešenja $S_\alpha(t)$ je eksponencijalno ograničen ako postoje konstante $M \geq 1$ i $\omega \geq 0$ takve da*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ t \geq 0.$$

Kao u slučaju evolucionih jednačina pvog reda, odnosno za $\alpha = 1$, važi sledeće tvrđenje

**Teorema 1.8** *([10], Teorema 2.5) Neka je $\alpha > 0$. Eksponencijalno ograničen uniformno neprekidan operator rešenja $S_\alpha(t)$ generisan sa $A$ je operator rešenja za Košijev problem (1.33) ako i samo ako $A \in \mathcal{L}(E)$.*

Iz Definicije 1.20 proizilazi da svaki operator rešenja ima jedinstven infinitezimalni generator, dok iz Teoreme 1.8 sledi da je generator eksponencijalno ograničenog uniformno neprekidnog operatora rešenja ograničen linearan operator. Sa druge strane, svaki ograničen linearan operator $A$ je infinitezimalni generator uniformno neprekidnog operatora rešenja $S_\alpha(t)$ datog sa

$$S_\alpha(t) = E_\alpha(t^\alpha A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha}A^n}{\Gamma(1+n\alpha)},\ \alpha > 0,\ t \geq 0.$$

Za $0 < \alpha \leq 2$, svaki ograničen linearan operator generiše jedinstven uniformno neprekidan operator rešenja, kao što se može videti u sledećem tvrđenju.

**Teorema 1.9** *Neka je $0 < \alpha \leq 2$ i neka su $S_\alpha(t)$ i $T_\alpha(t)$ eksponencijalno ograničeni uniformno neprekidni operatori rešenja sa infinitezimalnim generatorima $A$ i $B$, redom. Ako $A = B$ onda $S_\alpha(t) = T_\alpha(t)$, za svako $t \geq 0$.*

**Dokaz:**

Budući da je $S_\alpha(t)$ eksponencijalno ograničen operator rešenja, postoje konstante $M \geq 1$ i $\omega_1 \geq 0$ takve da

$$\|S_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega_1 t},\ t \geq 0.$$

Tada za $Re\lambda > \omega_1$ i $x \in E$ imamo

$$\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S_\alpha(t)xdt,$$

gde je $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ rezolventa operatora $A$. Slično, za operator rešenja $T_\alpha(t)$ postoji konstanta $\omega_2 \geq 0$ takva da za $Re\lambda > \omega_2$ i $x \in E$ važi

$$\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)xdt,$$

pa $S_\alpha(t) = T_\alpha(t)$ sledi iz osobine jedinstvenosti Laplasove transformacije. $\square$

Slično kao u slučaju polugrupa operatora, neke od osobina uniformno neprekidnih operatora rešenja date su u sledećoj propoziciji.

**Propozicija 1.16** *Neka je $S_\alpha(t)$, $0 < \alpha \leq 2$, $t \geq 0$, eksponencijalno ograničen uniformno neprekidan operator rešenja za (1.33). Tada*

**(i)** *Postoji jedinstven ograničen linearan operator $A$ takav da*

$$S_\alpha(t) = E_\alpha(t^\alpha A),\ t \geq 0.$$

**(ii)** *Operator $A$ u (i) je infinitezimalni generator operatora rešenja $S_\alpha(t)$.*

**(iii)** *Za svako $t \geq 0$ važi*

$$^{C}\mathcal{D}_t^\alpha S_\alpha(t) = AS_\alpha(t) = S_\alpha(t)A.$$

**Dokaz:**

Fiksirajmo $0 < \alpha \leq 2$. Iz Teoreme 1.8 znamo da je infinitezimalni generator za $S_\alpha(t)$ ograničen linearan operator $A$. Sa druge strane, $A$ je infinitezimalni generator za operator rešenja dat sa $E_\alpha(t^\alpha A)$, pa iz Teoreme 1.9 sledi $S_\alpha(t) = E_\alpha(t^\alpha A)$. Sva ostala tvrđenja slede iz (i). $\square$

# Glava 2

# Uopštene polugrupe i uopšteni operatori rešenja

## 2.1 Uopštene uniformno neprekidne polugrupe operatora

U ovom poglavlju navodimo definiciju i osobine uopštenih (Kolomboovih) uniformno neprekidnih polugrupa operatora, kao proširenja klasičnih uniformno neprekidnih polugrupa na prostor uopštenih funkcija, uvedenih u [60] i uspešno primenjenih na rešavanje sistema semilinearnih hiperboličkih jednačina sa regularizovanim izvodima u [62]. Napomenimo da se takođe može kombinovati teorija $C_0$-polugrupa i Kolomboovih uopštenih funkcija, kao što je, na primer, urađeno u [61].

Neka je $(E, \|\cdot\|)$ Banahov prostor i $\mathcal{L}(E)$ prostor svih linearnih neprekidnih preslikavanja $E \to E$.
$\mathcal{S}E_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ je prostor mreža

$$S_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathcal{L}(E), \ \ \varepsilon \in (0,1),$$

diferencijabilnih u odnosu na $t \in [0,\infty)$, sa osobinom da za svako $T > 0$ postoje $N \in \mathbb{N}$, $M > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takvi da

$$\sup_{t\in[0,T)} \left\| \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} S_\varepsilon(t) \right\|_{\mathcal{L}(E)} \le M\varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \gamma \in \{0,1\}. \tag{2.1}$$

$\mathcal{S}N([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ je prostor mreža

$$N_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathcal{L}(E), \ \ \varepsilon \in (0,1),$$

diferencijabilnih u odnosu na $t \in [0,\infty)$, sa osobinom da za svako $T>0$ i $a \in \mathbb{R}$ postoje $M>0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takvi da

$$\sup_{t\in[0,T)} \left\| \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} N_\varepsilon(t) \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M\varepsilon^a, \quad \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \gamma \in \{0,1\}. \tag{2.2}$$

**Propozicija 2.1** *([65]) Prostor $\mathcal{S}E_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ je algebra u odnosu na kompoziciju operatora. Takođe, prostor $\mathcal{S}N([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ je ideal prostora $\mathcal{S}E_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$.*

**Dokaz:**

Neka su $S_\varepsilon(t)$ i $T_\varepsilon(t)$ operatori iz prostora $\mathcal{S}E_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$, pri čemu je $\varepsilon \in (0,1)$. Izaberimo $x \in E$ i označimo $y = T_\varepsilon(t)x$. Tada za kompoziciju operatora, u oznaci $S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t)$, imamo

$$\begin{aligned}\|(S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t))x\|_E &= \|S_\varepsilon(t)(T_\varepsilon(t)x)\|_E = \|S_\varepsilon(t)y\|_E \leq \|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\|y\|_E \\ &\leq \|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\|T_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\|x\|_E,\end{aligned}$$

odnosno,

$$\|S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\|T_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}. \tag{2.3}$$

Takodje, za izvod kompozicije operatora $S_\varepsilon(t)$ i $T_\varepsilon(t)$ važi

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d}{dt}S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t)\Big)x &= \lim_{h\to 0}\frac{S_\varepsilon(t+h)T_\varepsilon(t+h)x - S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t)x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{S_\varepsilon(t+h)T_\varepsilon(t+h)x - S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t+h)x}{h} \\ &+ \lim_{h\to 0}\frac{S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t+h)x - S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t)x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{S_\varepsilon(t+h) - S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t+h)}{h}T_\varepsilon(t+h)x \\ &+ \lim_{h\to 0}S_\varepsilon(t)\frac{T_\varepsilon(t+h)x - T_\varepsilon(t)x}{h} \\ &= \Big(\frac{d}{dt}S_\varepsilon(t)\Big)T_\varepsilon(t)x + S_\varepsilon(t)\Big(\frac{d}{dt}T_\varepsilon(t)x\Big),\end{aligned}$$

pa se na sličan način kao u (2.3) dobija

$$\left\|\frac{d}{dt}S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t)\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \left\|\frac{d}{dt}S_\varepsilon(t)\right\|_{\mathcal{L}(E)}\|T_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)} + \|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\left\|\frac{d}{dt}T_\varepsilon(t)\right\|_{\mathcal{L}(E)}. \tag{2.4}$$

S obzirom da po pretpostavci $S_\varepsilon(t)$ i $T_\varepsilon(t)$ zadovoljavaju osobinu (2.1), lako se pokazuje, koristeći relacije (2.3), odnosno (2.4), umereno ograničenje za kompoziciju $S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t)$, to jest da $S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t)$ takođe zadovoljava pomenutu osobinu.

Sličnom procedurom može se pokazati umereno ograničenje za kompoziciju $T_\varepsilon(t)S_\varepsilon(t)$, pa sledi da prostor $\mathcal{S}E_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ ima strukturu algebre u odnosu na kompoziciju operatora.

Pokažimo da je $\mathcal{S}N([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ ideal prostora $\mathcal{S}E_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. U tu svrhu izaberimo $S_\varepsilon(t) \in \mathcal{S}E_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$, odnosno, $T_\varepsilon(t) \in \mathcal{S}N([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. Shodno izboru operatora, $S_\varepsilon(t)$ i $T_\varepsilon(t)$ zadovoljavaju osobinu (2.1), odnosno, (2.2), redom. Tada se prethodno opisanom procedurom može pokazati da $S_\varepsilon(t)T_\varepsilon(t)$, kao i $T_\varepsilon(t)S_\varepsilon(t)$, pripadaju prostoru $\mathcal{S}N([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$, to jest da je $\mathcal{S}N([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ ideal prostora $\mathcal{S}E_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. $\square$

S obzirom na tvrđenje sadržano u Propoziciji 2.1, Kolomboovu algebru moguće je definisati kao faktor algebru

$$\mathcal{S}G([0,\infty) : \mathcal{L}(E)) = \frac{\mathcal{S}E_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))}{\mathcal{S}N([0,\infty) : \mathcal{L}(E))}. \tag{2.5}$$

Elemente prostora $\mathcal{S}G([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ ćemo označavati $S = [S_\varepsilon]$, pri čemu je $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnik klase.

Slično možemo definisati prostore uopštenih linearnih neprekidnih operatora: $\mathcal{S}E_M(E)$ je prostor mreža linearnih neprekidnih preslikavanja

$$A_\varepsilon : E \to E, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

takvih da postoje konstante $N \in \mathbb{N}$, $M > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da

$$\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M\varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

$\mathcal{S}N(E)$ je prostor mreža linearnih neprekidnih preslikavanja $A_\varepsilon : E \to E, \quad \varepsilon \in (0,1)$, takvih da za svako $a \in \mathbb{R}$, postoje konstante $M > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da

$$\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M\varepsilon^{a}, \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Odgovarajući Kolomboov prostor uopštenih linearnih neprekidnih operatora na $E$ definišemo sa

$$\mathcal{S}G(E) = \frac{\mathcal{S}E_M(E)}{\mathcal{S}N(E)}.$$

Ponovo, elemente prostora $\mathcal{S}G(E)$ ćemo označavati sa $A = [A_\varepsilon]$, gde je $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnik klase.

Sada prelazimo na definiciju uopštenih uniformno neprekidnih polugrupa operatora, kao i njihovog infinitezimalnog generatora.

**Definicija 2.1** *$S \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ je uniformno neprekidna Kolomboova polugrupa ako ima predstavnika $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ takvog da je $S_\varepsilon$ uniformno neprekidna polugrupa za svako dovoljno malo $\varepsilon$, odnosno,*

*(i)* $S_\varepsilon(0) = I$,

*(ii)* $S_\varepsilon(t_1 + t_2) = S_\varepsilon(t_1)S_\varepsilon(t_2),$ *za svako* $t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0$,

*(iii)* $\lim_{t\to 0} \|S_\varepsilon(t) - I\| = 0$.

**Definicija 2.2** *$A \in \mathcal{S}G(E)$ je infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ ako ima predstavnika $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ takvog da je $A_\varepsilon$ infinitezimalni generator polugrupe $S_\varepsilon$, za svako dovoljno malo $\varepsilon$ .*

Da prethodna definicija generatora ne zavisi od predstavnika klase $A = [A_\varepsilon]$ obezbeđuje nam sledeća propozicija, dokazana u [60].

**Propozicija 2.2** *Neka su $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ i $(\widetilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnici uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S$, sa infinitezimalnim generatorima $A_\varepsilon$ i $\widetilde{A}_\varepsilon$, redom, za dovoljno malo $\varepsilon$. Tada je $A_\varepsilon - \widetilde{A}_\varepsilon \in \mathcal{S}N(E)$.*

Sledeća propozicija, dokazana u [62], obezbeđuje, kao u slučaju klasičnih polugrupa operatora, jedinstvenost odgovarajuće uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe.

**Propozicija 2.3** *Neka je $A$ infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S$, i $B$ infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $T$. Ako je $A = B$, onda $S = T$.*

U nastavku navodimo neka svojstva uopštenih uniformno neprekidnih polugrupa operatora i njihovih infinitezimalnih generatora.

**Definicija 2.3** *Neka je $h_\varepsilon$ pozitivna mreža koja zadovoljava $h_\varepsilon \leq \varepsilon^{-1}$. Kažemo da je operator $A \in \mathcal{S}G(E)$ $h_\varepsilon-$tipa ako ima predstavnika $A_\varepsilon$ takvog da*

$$\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)} = \mathcal{O}(h_\varepsilon),\ \varepsilon \to 0.$$

*Slično, za $G \in \mathcal{G}([0,\infty) : H^\beta(\mathbb{R}))$, $\beta > \frac{1}{2}$, kažemo da je $h_\varepsilon-$tipa ako ima predstavnika $G_\varepsilon$ takvog da*

$$\|G_\varepsilon\|_{H^\beta} = \mathcal{O}(h_\varepsilon),\ \varepsilon \to 0.$$

U klasičnoj teoriji polugrupa, kao što smo već naveli u Teoremi 1.5, dobro je poznato da je linearan operator $A$ infinitezimalni generator uniformno neprekidne polugrupe operatora ako i samo ako je $A$ ograničen linearan operator.

Sa druge strane, u slučaju uniformno neprekidnih Kolomboovih polugrupa operatora, da bi uopšteni operator bio infinitezimalni generator mora dodatno zadovoljavati određene osobine, kao što je navedeno u sledećem tvrđenje dokazanom u [62].

**Propozicija 2.4** *Svaki operator $A \in \mathcal{S}G(E)$ $h_\varepsilon-$tipa, gde je $h_\varepsilon \leq C\log\dfrac{1}{\varepsilon}$, jeste infinitezimalni generator neke uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$.*

Napomenimo još da kao i u klasičnom slučaju, za uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe uvek postoji infinitezimalni generator i da je on jedinstven. To proizilazi iz činjenice da Kolomboove polugrupe za predstavnika imaju klasičnu uniformno neprekidnu polugrupu, za koju postoji jedinstveni infinitezimalni generator ([69], Posledica 1.4).

Kao što možemo videti u Propoziciji 2.4, ako je operator $A$ $\log 1/\varepsilon-$tipa tada generiše neku uniformno neprekidnu Kolomboovu polugrupu $S$. Međutim, kasnije prilikom dokazivanja rezultata o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja, trebaće nam takođe da i polugrupa $S$ bude $\log 1/\varepsilon-$tipa, što znači da ima predstavnika $S_\varepsilon$ takvog da važi $\|S_\varepsilon(t)\| = \mathcal{O}(\log 1/\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. (Razlog leži u činjenici da se u procedurama dokazivanja egzistencije i jedinstvenosti rešenja evolucionih jednačina sa prostorno frakcionim izvodima u Glavi 3 koristi Gronvalova nejednakost). To znači da moramo nametnuti striktnije uslove na $A$ da bi obezbedili da $S$ bude $\log 1/\varepsilon-$tipa:

**Propozicija 2.5** *Svaki operator $A \in \mathcal{S}G(E)$ takav da $\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)} = o(\log\log 1/\varepsilon)$ je infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe operatora $S \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ $\log 1/\varepsilon-$tipa.*

**Dokaz:**

Najpre, primetimo da je operator $A$ $\log 1/\varepsilon-$tipa i da je kao takav infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. Ostaje da se pokaže da je ova polugrupa $\log 1/\varepsilon-$tipa. Za sve $t \geq 0$ važi

$$\|S_\varepsilon(t)\| \leq e^{t\|A_\varepsilon\|} \leq e^{t\cdot o(\log\log 1/\varepsilon)} = o\Big(\log\frac{1}{\varepsilon}\Big),$$

odakle sledi $\|S_\varepsilon(t)\| = \mathcal{O}(\log\frac{1}{\varepsilon})$, i tvrđenje je dokazano. $\square$

## 2.2 Reprezentacija rešenja frakcionog Košijevog problema

Neka je $\Psi_{G,p}(\mathbb{R}^n)$ prostor koji sadrži sve funkcije iz prostora $L^p(\mathbb{R}^n)$ sa osobinom da njihova Furijeova transformacija ima kompaktan nosač na nekom otvorenom domenu $G \subset \mathbb{R}^n$, snabdeven odgovarajućom konvergencijom uvedenoj u Definiciji 2.4.

**Definicija 2.4** *([84]) Niz funkcija $f_m \in \Psi_{G,p}(\mathbb{R}^n)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ konvergira ka $f_0 \in \Psi_{G,p}(\mathbb{R}^n)$ ako je zadovoljeno:*

*(i) Postoji kompaktan skup $K \subset G$ takav da za sve $m \in \mathbb{N}$ važi supp$\widehat{f_m} \subset K$,*

*(ii)* $\|f_m - f_0\|_{L^p} = \Big( \int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) - f_0(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \to 0,\ m \to \infty.$

Na osnovu Pejli-Viner-Švarcove teoreme, elementi prostora $\Psi_{G,p}(\mathbb{R}^n)$ su holomorfne funkcije eksponencijalnog tipa, čija restrikcija na $\mathbb{R}^n$ pripada prostoru $L^p(\mathbb{R}^n)$.

U navedenom radu [84], na prostorima $\Psi_{G,2}(\mathbb{R}^n)$ razmatran je Košijev problem za nehomogene vremensko frakcione pseudo-diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t,x) &= A(D_x)u(t,x) + f(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(0,x) &= \varphi_k(x),\ k = 0, 1, ..., m-1, \end{aligned} \tag{2.6}$$

pri čemu je $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, dok je $A(D_x)$ pseudo-diferencijalni operator, za funkcije $\varphi \in \Psi_{G,2}(\mathbb{R}^n)$, definisan sa

$$A(D_x)\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} A(\xi)\hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_G A(\xi)\hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

gde je $A(\xi)$ simbol operatora $A(D_x)$.

Reprezentacija rešenja problema (2.6), dobijena primenom frakcionog analogona Duhamelovog principa, tj. frakcionim Duhamelovim principom, data je u narednom tvrđenju.

**Teorema 2.1** *([84], Teorema 3.9) Neka $\varphi_k(x) \in \Psi_{G,2}(\mathbb{R}^n)$, $k = 0, ..., m-1$, $m \in \mathbb{N}$, $f(t,x) \in AC[t \geq 0; \Psi_{G,2}(\mathbb{R}^n)]$, ${}^C\mathcal{D}_t^{m-\alpha} f(t,x) \in C[t \geq 0; \Psi_{G,2}(\mathbb{R}^n)]$ i*

$f(0,x)=0$. *Tada Košijev problem (2.6) ima jedinstveno rešenje, dato sa*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{k=1}^{m} J_t^{k-1} E_\alpha(t^\alpha A(D_x))\varphi_{k-1}(x) \\ &+ \int_0^t {}_\tau J_t^{m-1} E_\alpha((t-\tau)^\alpha A(D_x))^C\mathcal{D}_\tau^{m-\alpha} f(\tau,x)d\tau. \end{aligned} \tag{2.7}$$

**Napomena 2.1** *U slučaju da se $f(t,x)$ ne anulira za $t=0$, reprezentacija (2.7) ima oblik*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{k=1}^{m} J_t^{k-1} E_\alpha(t^\alpha A(D_x))\varphi_{k-1}(x) \\ &+ \int_0^t {}_\tau J_t^{m-1} E_\alpha((t-\tau)^\alpha A(D_x))^{RL}\mathcal{D}_\tau^{m-\alpha} f(\tau,x)d\tau. \end{aligned}$$

Motivisani frakcionim Duhamelovim principom (Teorema 2.1), u narednoj propoziciji dajemo reprezentaciju rešenja nehomogenog Košijevog problema za frakcione evolucione jednačine reda $0<\alpha<1$, u operatorskom obliku, odnosno, izraženu preko operatora rešenja, pri čemu nelinearni deo jednačine $f$ zavisi od rešenja $u$, dok operator $A$ dopušta prisustvo koeficijenata koji zavise od $x$.

Primetimo da je u Propoziciji 2.6 jednačina data preko Kaputovog frakcionog izvoda, dok se u reprezentaciji rešenja pojavljuje Riman-Ljuvilov frakcioni izvod. Razlog za to leži u činjenici da je sa takvom reprezentacijom obuhvaćen opštiji slučaj za nehomogeni deo jednačine, to jest slučaj kada se funkcija $f(\cdot,t,u(t))$ ne anulira za $t=0$.

**Propozicija 2.6** *Neka je $A$ linearan, ograničen operator na Banahovom prostoru $E$. Rešenje Košijevog problema za $0<\alpha<1$ :*

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) &= Au(t)+f(\cdot,t,u(t)),\ t>0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

*dato je sa*

$$u(t)=S_\alpha(t)u_0+\int_0^t S_\alpha(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau, \tag{2.9}$$

*gde je $S_\alpha(t)$ operator rešenja generisan sa $A$.*

**Dokaz:**

S obzirom da je za neprekidne funkcije frakcioni integral $J_t^\alpha$ takođe neprekidna funkcija, kao i da je ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$ levi inverz frakcionog integrala $J_t^\alpha$, za svako $\alpha \geq 0$ i sve neprekidne funkcije, uzimajući u obzir relaciju ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha S_\alpha(t) = AS_\alpha(t)$, lako se može pokazati da $u(t)$, dato sa (2.9), rešava Košijev problem (2.8).

Koristeći najpre relaciju (1.18) u Propoziciji 1.11, koja se odnosi na Riman-Ljuvilov frakcioni izvod, integral na desnoj strani izraza (2.9) može se prikazati kao

$$\begin{aligned}
&\int_0^t S_\alpha(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau \\
&\qquad = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+n\alpha)}(t-\tau)^{n\alpha} A^n\, {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\Gamma(1+n\alpha)}(t-\tau)^{n\alpha} A^n\, {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+1} A^n\, {}^{RL}\mathcal{D}_t^{1-\alpha} f(\cdot,t,u(t)) \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha} A^n f(\cdot,t,u(t)). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Dalje, primenjujući frakcioni operator Kaputovog tipa na jednakost (2.9) i koristeći prethodnu relaciju, dobija se

$$\begin{aligned}
{}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) &= {}^C\mathcal{D}_t^\alpha S_\alpha(t)u_0 + {}^C\mathcal{D}_t^\alpha \int_0^t S_\alpha(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau \\
&= AS_\alpha(t)u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha J_t^\alpha J_t^{n\alpha} A^n f(\cdot,t,u(t)) \\
&= AS_\alpha(t)u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha} A^n f(\cdot,t,u(t)) \\
&= AS_\alpha(t)u_0 + f(\cdot,t,u(t)) + J_t^\alpha A \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha} A^n f(\cdot,t,u(t)) \\
&= AS_\alpha(t)u_0 + f(\cdot,t,u(t)) + J_t^\alpha A({}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) - {}^C\mathcal{D}_t^\alpha S_\alpha(t)u_0) \\
&= AS_\alpha(t)u_0 + f(\cdot,t,u(t)) + Au(t) - Au(0) - AS_\alpha(t)u_0 \\
&\quad + AS_\alpha(0)u_0 \\
&= Au(t) + f(\cdot,t,u(t)).
\end{aligned}$$

Kako je početni uslov trivijalno zadovoljen, sledi da reprezentacija (2.9) zaista rešava frakcioni Košijev problem (2.8). □

**Napomena 2.2** *Dokaz prethodnog tvrđenja može se izvesti koristeći Kaputov frakcioni izvod integrala po promenljivoj čija gornja granica takođe zavisi od iste promenjive, tj. primenjujući odgovarajuću formulu (1.23).*

**Napomena 2.3** *Primetimo da u (2.9) za $\alpha = 1$ dobijamo klasični Duhamelov princip, poznati princip koji se koristi prilikom rešavanja evolucionih jednačina prvog reda. Reprezentacija rešenja (2.9) takođe može biti data preko Kaputovog frakcionog izvoda, uz dodatnu pretpostavku $f(\cdot, 0, u_0) = 0$.*

Za egzistenciju rešenja integralne jednačine (2.9), koju ćemo dokazati primenom Banahove teoreme o fiksnoj tački, odnosno, Banahovog principa kontrakcije, biće nam potrebna alternativna integralna reprezentacija dobijena u narednoj propoziciji.

**Propozicija 2.7** *Neka $0 < \alpha < 1$ i neka je $S_\alpha(t)$ operator rešenja generisan sa $A$. Tada*

$$\int_0^t S_\alpha(t-\tau)\, {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau. \tag{2.11}$$

**Dokaz:**

Koristeći relaciju (2.10) dobija se

$$\begin{aligned}
\int_0^t S_\alpha(t-\tau)\, {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau &= \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha} A^n f(\cdot,t,u(t)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n\alpha+\alpha-1} A^n f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau \\
&= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} (t-\tau)^{n\alpha} A^n f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau \\
&= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau,
\end{aligned}$$

pa reprezentacija (2.11) automatski sledi. □

Sada dokazujemo egzistenciju rešenja integralne jednačine (2.9) koristeći Banahov princip kontrakcije:

**Propozicija 2.8** *Neka je $E$ Banahov prostor, $u_0 \in E$ i neka je za $u(t) \in C([0,T):E)$, $T>0$, definisano preslikavanje $F$ dato sa*

$$F(u(t)) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-\tau)\,{}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau, \tag{2.12}$$

*pri čemu je $S_\alpha(t)$, $0<\alpha<1$, operator rešenja generisan linearnim i ograničenim operatorom $A$. Pretpostavimo dodatno da je $f$ Lipšicova funkcija po $u$, kao i $f(\cdot,t,0)=0$. Tada preslikavanje $F$ ima jedinstvenu fiksnu tačku na prostoru $C([0,T):E)$.*

**Dokaz:**

Izaberimo $T>0$. Tada za $u(t) \in C([0,T):E)$, koristeći alternativnu integralnu reprezentaciju (2.11) za integral u (2.12), kao i ocenu (1.31) za Mitag-Leflerovu funkciju $E_{\alpha,\alpha}$, imamo

$$\begin{aligned}
&\|F(u(t))\|_E \\
&\leq \|S_\alpha(t)u_0\|_E + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\|_{\mathcal{L}(E)}\|f(\cdot,\tau,u(\tau))\|_E d\tau \\
&\leq C_\alpha e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T}\|u_0\|_E + \frac{T^\alpha}{\alpha}C_\alpha(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})(1+T^{1-\alpha})e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T}L\sup_{t\in[0,T)}\|u(t)\|_E,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

pri čemu je $L$ Lipšicova konstanta preslikavanja $f$. Uzimajući u obzir pretpostavke za $u_0$ i $u(t)$, iz poslednje nejednakosti sledi da za preslikavanje $F$ dato sa (2.12) važi $F: C([0,T):E) \to C([0,T):E)$.

Pokažimo da je preslikavanje $F$ kontrakcija na prostoru $C([0,T):E)$. Izaberimo $u_1(t), u_2(t) \in C([0,T):E)$. Iz sličnih razloga kao u (2.13) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\|F(u_1(t)) - F(u_2(t))\|_E \\
&\quad\leq \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\|_{\mathcal{L}(E)}\|f(\cdot,\tau,u_1(\tau)) - f(\cdot,\tau,u_2(\tau))\|_E d\tau \\
&\quad\leq \frac{T^\alpha}{\alpha}C_\alpha(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})(1+T^{1-\alpha})e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T}L\sup_{t\in[0,T)}\|u_1(t)-u_2(t)\|_E.
\end{aligned}$$

Da bi preslikavanje $F$ bilo kontrakcija neophodno je da bude zadovoljeno

$$\frac{C_\alpha(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})(T^\alpha+T)e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T}L}{\alpha} < 1, \tag{2.14}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
&\frac{C_\alpha(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})(T^\alpha+T)e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T}L}{\alpha}<1\\
&\Leftrightarrow\ e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T}<\frac{\alpha}{C_\alpha(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})(T^\alpha+T)L}\\
&\Leftrightarrow\ \|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T<\log\frac{\alpha}{C_\alpha(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})(T^\alpha+T)L}.
\end{aligned}$$

Ukoliko važi

$$\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T<1-\frac{C_\alpha(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})(T^\alpha+T)L}{\alpha}, \tag{2.15}$$

koristeći ocenu za logaritamsku funkciju

$$1-\frac{1}{x}\le \log x,\ \ x>0,$$

zaključujemo da će u tom slučaju važiti poslednja nejednakost u prethodnom nizu nejednakosti, pa samim tim i uslov kontrakcije (2.14).

Za svako $0<T<1$ važi $T^\alpha>T$, pa imamo

$$T^\alpha+T>2T,$$

što u kombinaciji sa nejednakošću (2.15) daje

$$\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T<1-\frac{2C_\alpha L(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})T}{\alpha},$$

odnosno,

$$T<\frac{1}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{2C_\alpha L}{\alpha}(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})}. \tag{2.16}$$

Sa druge strane, za svako $T\ge 1$ važi $T\ge T^\alpha$, pa imamo

$$T^\alpha+T\ge 2T^\alpha,$$

što opet u kombinaciji sa nejednakošću (2.15) daje

$$\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T^\alpha\le\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T<1-\frac{2C_\alpha L(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})T^\alpha}{\alpha},$$

odnosno,

$$T < \frac{1}{(\|A\|^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{2C_\alpha L}{\alpha}(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}))^{1/\alpha}}. \tag{2.17}$$

Na osnovu ocene (2.16), odnosno, (2.17), izaberimo $T^* > 0$, takvo da je

$$T^* < \min\left\{\frac{1}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{2C_\alpha L}{\alpha}(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})}, \frac{1}{(\|A\|^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{2C_\alpha L}{\alpha}(1+\|A\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}))^{1/\alpha}}\right\}. \tag{2.18}$$

Na taj način smo u stvari pokazali da je preslikavanje $F$ kontrakcija na prostoru $C([0,T^*) : E)$, pa na osnovu Banahovog principa kontrakcije sledi da preslikavanje $F$ ima jedinstvenu fiksnu tačku na tom prostoru. Kako izbor $T^*$, dat sa (2.18), ne zavisi od početnog uslova, sledi da se dobijeno rešenje može produžiti na proizvoljno $T > 0$, ponavljajući prethodni postupak i pri tome birajući nove početne uslove. □

Izvod prvog reda integralne reprezentacije sadržane u reprezentaciji (2.9), koji će nam kasnije trebati u Kolomboovom okruženju, naveden je u narednoj propoziciji.

**Propozicija 2.9** *Neka $0 < \alpha < 1$ i neka je $S_\alpha(t)$ operator rešenja generisan sa $A$. Pretpostavimo da je funkcija $f(\cdot,t,u)$ neprekidna po $t$. Tada*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^t & S_\alpha(t-\tau)\,{}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u)d\tau \\ &= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\partial_\tau f(\cdot,\tau,u)d\tau \\ &\quad + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)f(\cdot,0,u(0)).\end{aligned} \tag{2.19}$$

**Dokaz:**

Iz relacije (2.10) sledi

$$\frac{d}{dt}\int_0^t S_\alpha(t-\tau)\,{}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u)d\tau = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}J_t^{n\alpha+\alpha}A^n f(\cdot,t,u).$$

S obzirom da je

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_t^\alpha f(\cdot,t,u) &= {}^{RL}\mathcal{D}_t^{1-\alpha} f(\cdot,t,u) = {}^{C}\mathcal{D}_t^{1-\alpha} f(\cdot,t,u) + \frac{f(\cdot,0,u(0))t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &= J_t^\alpha \frac{d}{dt} f(\cdot,t,u) + \frac{f(\cdot,0,u(0))t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\end{aligned} \tag{2.20}$$

uzimajući u obzir da je frakcioni integral proizvoljnog reda neprekidnih funkcija opet neprekidna funkcija, kao i da se frakcioni integral za sve neprekidne funkcije anulira u nuli, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} & \frac{d}{dt} J_t^{n\alpha+\alpha} A^n f(\cdot,t,u) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha} A^n \frac{d}{dt} f(\cdot,t,u) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_t^{n\alpha} t^{\alpha-1} A^n f(\cdot,0,u(0))}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha} A^n \frac{d}{dt} f(\cdot,t,u) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+n\alpha)} A^n f(\cdot,0,u(0)),\end{aligned}$$

i slično dokazu tvrđenja datom u Propoziciji 2.7 dobijamo relaciju (2.19). □

Prethodno tvrđenje važi i u slučaju $\alpha = 1$, s obzirom da za polugrupe operatora važi relacija sadržana u narednoj propoziciji.

**Propozicija 2.10** *Neka je $S(t)$, $t \geq 0$, polugrupa operatora generisana sa $A$. Tada*

$$\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-\tau) f(\cdot,\tau,u) d\tau = \int_0^t S(t-\tau)\partial_\tau f(\cdot,\tau,u) d\tau + S(t) f(\cdot,0,u(0)). \quad (2.21)$$

**Dokaz:**

U teoriji polugrupa operatora, dobro je poznata formula

$$\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-\tau) f(\cdot,\tau,u) d\tau = \int_0^t \frac{d}{dt} S(t-\tau) f(\cdot,\tau,u) d\tau + f(\cdot,t,u). \quad (2.22)$$

Sa druge strane, primenjujući parcijalnu integraciju na integral

$$\int_0^t S(t-\tau)\partial_\tau f(\cdot,\tau,u) d\tau$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^t & S(t-\tau)\partial_\tau f(\cdot,\tau,u) d\tau \\ &= S(t-\tau) f(\cdot,\tau,u)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \frac{d}{dt} S(t-\tau) f(\cdot,\tau,u) d\tau \\ &= f(\cdot,t,u) - S(t) f(\cdot,0,u(0)) + \int_0^t \frac{d}{dt} S(t-\tau) f(\cdot,\tau,u) d\tau.\end{aligned} \quad (2.23)$$

Na kraju, kombinujući formule (2.22) i (2.23), dobija se upravo formula data sa (2.21). □

## 2.3 Uopšteni uniformno neprekidni operatori rešenja

U ovom poglavlju, za potrebe rešavanja frakcionih evolucionih jednačina na odgovarajućim Kolomboovim prostorima konstruisaćemo uopštene uniformno neprekidne operatore rešenja, koje ćemo dobiti od klasičnih operatora rešenja, na sličan način kao što su uopštene polugrupe operatora dobijene od klasičnih polugrupa operatora. Takođe, ispitaćemo neke od osnovnih osobina novouvedenih uopštenih operatora rešenja, njihovih infinitezimalnih generatora, odnosno, odgovarajuće relacije među njima.

Preciznije, osnovni cilj ovog poglavlja jeste konstrukcija familije uopštenih operatora pogodne za rešavanje frakcionog Košijevog problema reda $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}$, oblika kao (1.32), odnosno,

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}u(t) &= \widetilde{A}u(t),\ t>0,\\ u^{(k)}(0) &= x_k,\ k=0,1,...,m-1, \end{aligned} \tag{2.24}$$

pri čemu su uopšteni linearni i ograničeni operatori $\widetilde{A}$ infinitezimalni generatori novouvedenih uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja. Osim toga, uopšteni operatori $\widetilde{A}$ mogu sadržati koeficijente koji zavise od promenljive $x$.

Kao u slučaju klasičnih operatora rešenja, razmatraćemo specijalan slučaj frakcionog Košijevog problema (2.24) dat sa

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}u(t) &= \widetilde{A}u(t),\ t>0,\\ u(0) &= x,\ u^{(k)}(0)=0,\ k=1,...,m-1. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Podsetimo da je svaki ograničen linearan operator na Banahovom prostoru $E$ ujedno i zatvoren, gusto definisan operator na $E$. Prema tome, sva tvrđenja uvodne glave u Poglavlju 1.6 ostaju na snazi i u slučaju ograničenih linearnih operatora.

Neka je $(E,\|\cdot\|)$ Banahov prostor i $\mathcal{L}(E)$ prostor svih linearnih neprekidnih preslikavanja $E\to E$.

Najpre navodimo lemu, koja će kasnije imati veoma važnu ulogu prilikom dokazivanja nekih tvrđenja u Kolomboovom okruženju:

**Lema 2.1** *Neka je $m-1<\alpha<m$, pri čemu $m\in\mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $f(t)\in C^{m-1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))\cap C^m((0,\infty):\mathcal{L}(E))$ takvo da $\lim\limits_{t\to 0^+}\left\|\frac{f^{(m)}(t)}{t^{\alpha-m}}\right\|_{\mathcal{L}(E)}=C<+\infty$. Tada*

$$ {}^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t)=\lim_{\eta\to 0^+} {}_\eta^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \ \text{ u } \ \mathcal{L}(E), \tag{2.26}$$

*pri čemu je*

$$ {}_\eta^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_\eta^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}d\tau. \tag{2.27}$$

**Dokaz:**

Fiksirajmo $m\in\mathbb{N}$ i $\alpha>0$ takvo da $m-1<\alpha<m$. Tada

$$\begin{aligned}
&\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t)-{}_\eta^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\\
&\quad\le\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^\eta\frac{\|f^{(m)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)}}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}d\tau\\
&\quad=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^\eta\frac{\|f^{(m)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)}}{\tau^{\alpha-m}}\frac{\tau^{\alpha-m}}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}d\tau\\
&\quad\le\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\sup_{\tau\in[0,\eta]}\left\|\frac{f^{(m)}(\tau)}{\tau^{\alpha-m}}\right\|_{\mathcal{L}(E)}\int_0^\eta\frac{\tau^{\alpha-m}}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}d\tau\\
&\quad\le\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\sup_{\tau\in[0,\eta]}\left\|\frac{f^{(m)}(\tau)}{\tau^{\alpha-m}}\right\|_{\mathcal{L}(E)}\frac{\eta^{\alpha-m+1}}{(\alpha-m+1)(t-\eta)^{\alpha-m+1}}.
\end{aligned}$$

Puštajući da $\eta\to 0^+$, lako se dobija (2.26). □

U nastavku uvodimo definicije prostora u okviru kojih ćemo kasnije birati uopštene uniformno neprekidne operatore rešenja.

**Definicija 2.5** *Neka je $m-1<\alpha<m$, pri čemu $m\in\mathbb{N}$. $\mathcal{SE}_M^{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je prostor mreža*

$$(S_\alpha)_\varepsilon:[0,\infty)\to\mathcal{L}(E),\ \ \varepsilon\in(0,1),$$

*sa osobinama:*

**(i)** $(S_\alpha)_\varepsilon(t)\in C^{m-1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))\cap C^m((0,\infty):\mathcal{L}(E))$.

**(ii)** $\lim_{t\to 0^+}\left\|\dfrac{\frac{d^m}{dt^m}(S_\alpha)_\varepsilon(t)}{t^{\alpha-m}}\right\|_{\mathcal{L}(E)}=C<+\infty.$

**(iii)** *Za svako $T>0$ postoje $N\in\mathbb{N}$, $M>0$ i $\varepsilon_0\in(0,1)$ takvi da*

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T)}\left\|{}^C\mathcal{D}_t^\gamma(S_\alpha)_\varepsilon(t)\right\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq M\varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon<\varepsilon_0, \quad \gamma\in\{0,\dots,m-1,\alpha\},\\ \sup_{t\in(0,T)}\left\|\frac{d^m}{dt^m}(S_\alpha)_\varepsilon(t)\right\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq M\varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon<\varepsilon_0.\end{aligned}$$

Na sličan način definišemo prostor:

**Definicija 2.6** *$\mathcal{S}N_{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je prostor mreža*

$$(N_\alpha)_\varepsilon:[0,\infty)\to\mathcal{L}(E),\ \ \varepsilon\in(0,1)$$

*sa osobinama:*

**(i)** $(N_\alpha)_\varepsilon(t)\in C^{m-1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))\cap C^m((0,\infty):\mathcal{L}(E))$.

**(ii)** $\lim_{t\to0^+}\left\|\dfrac{\frac{d^m}{dt^m}(N_\alpha)_\varepsilon(t)}{t^{\alpha-m}}\right\|_{\mathcal{L}(E)}=C<+\infty$.

**(iii)** *Za svako $T>0$ i $a\in\mathbb{R}$ postoje $M>0$ i $\varepsilon_0\in(0,1)$ takvi da*

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T)}\left\|{}^C\mathcal{D}_t^\gamma(N_\alpha)_\varepsilon(t)\right\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq M\varepsilon^{a}, \quad \varepsilon<\varepsilon_0, \quad \gamma\in\{0,\dots,m-1,\alpha\},\\ \sup_{t\in(0,T)}\left\|\frac{d^m}{dt^m}(N_\alpha)_\varepsilon(t)\right\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq M\varepsilon^{a}, \quad \varepsilon<\varepsilon_0.\end{aligned}$$

Primetimo da se u slučaju izvoda celobrojnog reda, u osobini (iii) iz prethodnih definicija supremum uzima za $t\in(0,T)$. Razlog za izostavljanje 0 leži u činjenici što izvodi celobrojnog reda Mitag-Leflerove funkcije imaju singularitet u 0, a upravo se Mitag-Leflerovom funkcijom predstavljaju operatori rešenja pomoću kojih ćemo rešavati frakcione evolucione jednačine. Ovo svojstvo, zajedno sa svim ostalim navedenim u prethodnim definicijama obezbediće da prostori $\mathcal{S}E_M^{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ i $\mathcal{S}N_{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ imaju strukturu algebre, odnosno, ideala, redom. Upravo to tvrdimo u narednoj propoziciji čiji dokaz dajemo za slučaj $0<\alpha<1$ (tj. za $m=1$), dok je za $1<\alpha<2$ dokaz prezentovan u Poglavlju 5.2.

**Propozicija 2.11** *$\mathcal{S}E_M^{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je algebra u odnosu na kompoziciju operatora, dok je $\mathcal{S}N_{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ ideal prostora $\mathcal{S}E_M^{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$.*

**Dokaz:**

Fiksirajmo $0<\alpha<1$, a zatim izaberimo uopštene operatore $S_\alpha$ i $T_\alpha$ iz prostora $\mathcal{S}E_M^{\alpha,1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$. Tada se lako dobija da kompozicija $S_\alpha(t)T_\alpha(t)$ zadovoljava osobine (i) i (ii) sadržane u Definciji 2.5. Činjenica da $S_\alpha(t)T_\alpha(t)$ zadovoljava osobinu (iii) za $\gamma\in\{0,1\}$, može se pokazati na uobičajen način, kao u slučaju Kolomboovih prostora sa izvodima celobrojnog reda.

Dokažimo da je osobina (iii) zadovoljena za $\gamma=\alpha$ takođe. Zaista, za $t\in(\eta,T)$, gde je $\eta>0$ proizvoljno malo i $T>0$, koristeći osobinu (2.26) imamo

$$\begin{aligned}
&\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha((S_\alpha)_\varepsilon(t)(T_\alpha)_\varepsilon(t))\|_{\mathcal{L}(E)}\\
&\le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\eta\to0^+}\int_\eta^t\frac{\|((S_\alpha)_\varepsilon(\tau)(T_\alpha)_\varepsilon(\tau))'\|_{\mathcal{L}(E)}}{(t-\tau)^\alpha}d\tau\\
&\le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\eta\to0^+}\int_\eta^t\frac{\|((S_\alpha)_\varepsilon(\tau))'\|_{\mathcal{L}(E)}\|(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)}}{(t-\tau)^\alpha}d\tau\\
&+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{\eta\to0^+}\int_\eta^t\frac{\|(S_\alpha)_\varepsilon(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)}\|((T_\alpha)_\varepsilon(\tau))'\|_{\mathcal{L}(E)}}{(t-\tau)^\alpha}d\tau\\
&\le \lim_{\eta\to0^+}\frac{(t-\eta)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}M_1\varepsilon^{-N}\\
&\le \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}M_1\varepsilon^{-N}.
\end{aligned}$$

Prema tome, dobili smo umereno ograničenje za $t\in(0,T)$, odnosno,

$$\sup_{t\in(0,T)}\left\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha((S_\alpha)_\varepsilon(t)(T_\alpha)_\varepsilon(t))\right\|_{\mathcal{L}(E)}\le M\varepsilon^{-N}.$$

Ostaje da se dobije umereno ograničenje za $t=0$. Najpre, iz uopštene (frakcione) teoreme o srednjoj vrednosti (Teorema 1.4) dobija se

$$\begin{aligned}
&{}^C\mathcal{D}_t^\alpha((S_\alpha)_\varepsilon(t)(T_\alpha)_\varepsilon(t))\mid_{t=0}\\
&=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{t\to0^+}\frac{(S_\alpha)_\varepsilon(t)(T_\alpha)_\varepsilon(t)-(S_\alpha)_\varepsilon(0)(T_\alpha)_\varepsilon(0)}{t^\alpha}\\
&=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{t\to0^+}\frac{((S_\alpha)_\varepsilon(t)-(S_\alpha)_\varepsilon(0))(T_\alpha)_\varepsilon(t)}{t^\alpha}\\
&+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{t\to0^+}\frac{(S_\alpha)_\varepsilon(0))((T_\alpha)_\varepsilon(t)-(T_\alpha)_\varepsilon(0))}{t^\alpha}\\
&= {}^C\mathcal{D}_t^\alpha((S_\alpha)_\varepsilon(t))\mid_{t=0}(T_\alpha)_\varepsilon(0)+(S_\alpha)_\varepsilon(0){}^C\mathcal{D}_t^\alpha((T_\alpha)_\varepsilon(t))\mid_{t=0},
\end{aligned}$$

pa konačno, nakon ocene u normi, proizilazi da je osobina (iii) kompletno zadovoljena.

Slično, može se pokazati da kompozicija $(T_\alpha)_\varepsilon(t)(S_\alpha)_\varepsilon(t)$ takođe zadovoljava sve osobine iz Definicije 2.5. Prema tome, prostor $\mathcal{S}E_M^{\alpha,1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je algebra.

Na osnovu sličnih argumenata lako se pokazuje da je $\mathcal{S}N_{\alpha,1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ ideal prostora $\mathcal{S}E_M^{\alpha,1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$. □

Direktna posledica tvrđenja datog u Propoziciji 2.11 jeste da smo sada u mogućnosti da definišemo prostor Kolomboovog tipa kao faktor algebru:

**Definicija 2.7** *Kolomboov prostor se definiše kao količnički prostor*

$$\mathcal{S}G_{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))=\frac{\mathcal{S}E_M^{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))}{\mathcal{S}N_{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))}. \tag{2.28}$$

Za svako $\alpha>0$ elemente prostora $\mathcal{S}G_{\alpha,m}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ označavaćemo sa $S=[(S_\alpha)_\varepsilon]$, gde je $(S_\alpha)_\varepsilon$ predstavnik klase. U specijalnom slučaju $0<\alpha<1$, koristićemo kraći zapis $\mathcal{S}E_M^{\alpha,1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))=\mathcal{S}E_M^{\alpha}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$, $\mathcal{S}N_{\alpha,1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))=\mathcal{S}N_{\alpha}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$, odnosno, $\mathcal{S}G_{\alpha,1}([0,\infty):\mathcal{L}(E))=\mathcal{S}G_{\alpha}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$

Slično, mogu se definisati sledeći prostori uopštenih (Kolomboovih) operatora:

**Definicija 2.8** $\mathcal{S}E_M(E)$ *je prostor mreža linearnih neprekidnih preslikavanja*

$$A_\varepsilon:E\to E,\quad \varepsilon\in(0,1),$$

*takav da postoje konstante $N\in\mathbb{N}$, $M>0$ i $\varepsilon_0\in(0,1)$ takve da*

$$\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)}\le M\varepsilon^{-N},\quad \varepsilon<\varepsilon_0.$$

**Definicija 2.9** $\mathcal{S}N(E)$ *je prostor mreža linearnih neprekidnih preslikavanja $A_\varepsilon:E\to E,\ \ \varepsilon\in(0,1)$, sa osobinom da za svako $a\in\mathbb{R}$, postoje $M>0$ i $\varepsilon_0\in(0,1)$ takvi da*

$$\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)}\le M\varepsilon^{a},\quad \varepsilon<\varepsilon_0.$$

**Definicija 2.10** *Kolomboov prostor uopštenih linearnih neprekidnih operatora na E je definisan sa*

$$\mathcal{S}G(E)=\frac{\mathcal{S}E_M(E)}{\mathcal{S}N(E)}.$$

Elemente $\mathcal{S}G(E)$ ćemo označavati sa $A = [A_\varepsilon]$, gde je $A_\varepsilon$ predstavnik klase.

**Definicija 2.11** *Neka je* $\alpha > 0$ *i* $m \in \mathbb{N}$, *takav da* $m - 1 < \alpha \leq m$. $S_\alpha \in \mathcal{SG}_{\alpha,m}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ *je uniformno neprekidan Kolomboov operator rešenja za (2.25) ukoliko ima predstavnika* $((S_\alpha)_\varepsilon)_\varepsilon$ *takvog da je* $(S_\alpha)_\varepsilon$ *uniformno neprekidan operator rešenja za (2.25), u slučaju svakog dovoljno malog* $\varepsilon$, *odnosno,*

**(i)** $(S_\alpha)_\varepsilon(t)$ *je uniformno neprekidna funkcija za* $t \geq 0$ *i* $(S_\alpha)_\varepsilon(0) = I$, *gde je* $I$ *identički operator na* $E$.

**(ii)** $\widetilde{A}(S_\alpha)_\varepsilon(t)x = (S_\alpha)_\varepsilon(t)\widetilde{A}x$, *za sve* $x \in E$, $t \geq 0$.

**(iii)** $(S_\alpha)_\varepsilon(t)x$ *je rešenje Volterove integralne jednačine (1.34), za sve* $x \in E$, $t \geq 0$.

**Propozicija 2.12** *Neka je* $\alpha > 0$ *i neka su* $(S_\alpha)_{1\varepsilon}$ *i* $(S_\alpha)_{2\varepsilon}$ *predstavnici uopštenog uniformno neprekidnog operatora rešenja* $S_\alpha$, *sa infinitezimalnim generatorima* $\widetilde{A}_{1\varepsilon}$ *i* $\widetilde{A}_{2\varepsilon}$, *redom, za dovoljno malo* $\varepsilon$. *Tada*

$$\widetilde{A}_{1\varepsilon} - \widetilde{A}_{2\varepsilon} \in \mathcal{SN}(E).$$

**Dokaz:**

Fiksirajmo $\alpha > 0$. Tada važi

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_{1\varepsilon} - \widetilde{A}_{2\varepsilon} &= ({}^C\mathcal{D}_t^\alpha (S_\alpha)_{1\varepsilon})(t)\mid_{t=0} - ({}^C\mathcal{D}_t^\alpha (S_\alpha)_{2\varepsilon})(t)\mid_{t=0} \\ &= {}^C\mathcal{D}_t^\alpha ((S_\alpha)_{1\varepsilon} - (S_\alpha)_{2\varepsilon})(t)\mid_{t=0}.\end{aligned}$$

S obzirom da je

$$(S_\alpha)_{1\varepsilon} - (S_\alpha)_{2\varepsilon} \in \mathcal{SN}_\alpha([0,\infty) : \mathcal{L}(E)),$$

za svako $a \in \mathbb{R}$ postoji $M > 0$ takvo da

$$\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha ((S_\alpha)_{1\varepsilon} - (S_\alpha)_{2\varepsilon})(t)\mid_{t=0}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M\varepsilon^a.$$

Odatle sledi da za svako $a \in \mathbb{R}$ postoji $M > 0$ takvo da $\|\widetilde{A}_{1\varepsilon} - \widetilde{A}_{2\varepsilon}\| \leq M\varepsilon^a$. Prema tome, $\widetilde{A}_{1\varepsilon} - \widetilde{A}_{2\varepsilon} \in \mathcal{SN}(E)$. □

**Definicija 2.12** $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(E)$ *je infinitezimalni generator uniformno neprekidnog Kolomboovog operatora rešenja* $S_\alpha \in \mathcal{SG}_{\alpha,m}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$, $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, *ako je* $\widetilde{A}_\varepsilon$ *infinitezimalni generator predstavnika* $(S_\alpha)_\varepsilon$, *za svako dovoljno malo* $\varepsilon$.

Da prethodna definicija infinitezimalnog generatora uniformno neprekidnog Kolomboovog operatora rešenja ne zavisi od predstavnika klase sledi iz Propozicije 2.12.

Kao u slučaju klasičnih i uopštenih polugrupa operatora, u narednom tvrđenju pokazujemo da svaki ograničen uopšteni operator generiše jedinstveni uniformno neprekidni Kolomboov operator rešenja.

**Propozicija 2.13** *Neka je $0 < \alpha < 1$. Neka je $\widetilde{A}$ infinitezimalni generator uniformno neprekidnog Kolomboovog operatora rešenja $S_\alpha$, i $\widetilde{B}$ infinitezimalni generator uniformno neprekidnog Kolomboovog operatora rešenja $T_\alpha$. Ako je $\widetilde{A} = \widetilde{B}$, tada $S_\alpha = T_\alpha$.*

**Dokaz:**

Fiksirajmo $0 < \alpha < 1$ i označimo $\widetilde{N}_\varepsilon = \widetilde{A}_\varepsilon - \widetilde{B}_\varepsilon \in \mathcal{SN}(E)$. Tada se iz osobine (iii) u Propoziciji 1.16 dobija

$$^{C}\mathcal{D}_t^\alpha((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)x = \widetilde{A}_\varepsilon((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)x + \widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(t)x.$$

Kako je $(S_\alpha)_\varepsilon(0) = (T_\alpha)_\varepsilon(0) = I$, koristeći frakcioni Duhamelov princip (2.9) dalje imamo

$$((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)x = \int_0^t (S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)\, {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha}\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)xd\tau \tag{2.29}$$

Tada iz integralne reprezentacije date u Propoziciji 2.7 imamo

$$\begin{aligned}
((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)x &= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)xd\tau \\
&= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{n\alpha}\widetilde{A}_\varepsilon^n}{\Gamma(\alpha+n\alpha)}\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)xd\tau \\
&= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{(n+1)\alpha-1}\widetilde{A}_\varepsilon^n}{\Gamma((n+1)\alpha)}\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)xd\tau \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n\alpha-1}\widetilde{A}_\varepsilon^{n-1}}{\Gamma(n\alpha)}\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)xd\tau.
\end{aligned}$$

Dalje, za $t \in [0,T)$, $T > 0$, dobijamo ocenu

$$\begin{aligned}
\|((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n\alpha-1} \|\widetilde{A}_\varepsilon^{n-1} \widetilde{N}_\varepsilon (T_\alpha)_\varepsilon(\tau)\| d\tau \\
&\leq \|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{t\in[0,T)} \|(T_\alpha)_\varepsilon(t)\| \sum_{n=1}^{\infty} \|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{n-1} \frac{1}{\Gamma(n\alpha)} \frac{T^{n\alpha}}{n\alpha} \\
&\leq \|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{t\in[0,T)} \|(T_\alpha)_\varepsilon(t)\| \frac{T^\alpha}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n\alpha}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^n}{\Gamma(\alpha+n\alpha)} \\
&= \|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{t\in[0,T)} \|(T_\alpha)_\varepsilon(t)\| \frac{T^\alpha}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|),
\end{aligned}$$

pa koristeći ocenu (1.31) za $E_{\alpha,\alpha}$ imamo

$$\begin{aligned}
&\|((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)\| \leq \\
&\|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{t\in[0,T)} \|(T_\alpha)_\varepsilon(t)\| \frac{T^\alpha}{\alpha} C_\alpha (1 + \|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{(1-\alpha)/\alpha})(1 + T^{1-\alpha}) \cdot \exp(T\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}) \\
&= \frac{C_\alpha}{\alpha} \|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{t\in[0,T)} \|(T_\alpha)_\varepsilon(t)\| (1 + \|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{(1-\alpha)/\alpha})(T + T^\alpha) \cdot \exp(T\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}),
\end{aligned}$$

odakle dobijamo $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)\|$.

Sada razmatramo slučaj $\gamma = \alpha$. Za $t \in [0,T)$, $T > 0$, slično se dobija

$$\begin{aligned}
\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha ((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)\| &\leq \|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{t\in[0,T)} \|(T_\alpha)_\varepsilon(t)\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^n}{\Gamma(n\alpha)} \cdot \frac{T^{n\alpha}}{n\alpha} \\
&= \|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{t\in[0,T)} \|(T_\alpha)_\varepsilon(t)\| \cdot E_\alpha(T^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|),
\end{aligned}$$

te opet imamo $\mathcal{N}$-ograničenje, sada za $\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha ((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)\|$.

Nakon diferenciranja integralne reprezentacije (2.29) po $t$, koristeći integralnu reprezentaciju (2.19) dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)x &= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) \widetilde{N}_\varepsilon \frac{d}{d\tau}(T_\alpha)_\varepsilon(\tau) x d\tau \\
&\quad + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) \widetilde{N}_\varepsilon x.
\end{aligned}$$

Tada se za svako $T_1 > 0$ i $t \in [T_1, T)$, dobija ocena u normi

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{d}{dt}((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)\Big\| \\
&\quad \le \lim_{\eta\to 0^+}\int_\eta^t (t-\tau)^{\alpha-1}\Big\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon \frac{d}{d\tau}(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)\Big\| d\tau \\
&\qquad + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\|\widetilde{N}_\varepsilon\| \\
&\quad \le \lim_{\eta\to 0^+}\sup_{\tau\in[\eta,T)} E_{\alpha,\alpha}((T-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{\tau\in[\eta,T)}\Big\|\frac{d}{d\tau}(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)\Big\|\frac{(T-\eta)^\alpha}{\alpha} \\
&\qquad + T_1^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\|\widetilde{N}_\varepsilon\|.
\end{aligned}$$

Konačno, s obzirom da $\widetilde{N}_\varepsilon \in \mathcal{SN}(E)$ sledi da za svako $a \in \mathbb{R}$ postoji $M > 0$ takvo da

$$\sup_{t\in[0,T)} \|{}^C\mathcal{D}_t^\gamma((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \le M\varepsilon^a,\ \gamma \in \{0,\alpha\},$$

$$\sup_{t\in(0,T)} \Big\|\frac{d}{dt}((S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon)(t)\Big\|_{\mathcal{L}(E)} \le M\varepsilon^a,$$

odnosno, $(S_\alpha)_\varepsilon - (T_\alpha)_\varepsilon \in \mathcal{SN}_\alpha([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. □

**Definicija 2.13** *Neka je $h_\varepsilon$ pozitivna mreža koja zadovoljava $h_\varepsilon \le \varepsilon^{-1}$. Kažemo da je operator $\widetilde{A} \in \mathcal{S}G(E)$ $h_\varepsilon-$tipa ako ima predstavnika $\widetilde{A}_\varepsilon$ takvog da*

$$\|\widetilde{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)} = \mathcal{O}(h_\varepsilon),\ \varepsilon \to 0.$$

Uslovi pod kojima je uopšteni operator generator uniformno neprekidnog Kolomboovog operatora rešenja dati su u narednoj propoziciji.

**Propozicija 2.14** *Neka je $0 < \alpha < 1$. Svaki operator $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(E)$ $h_\varepsilon$-tipa, pri čemu je $h_\varepsilon \le C(\log 1/\varepsilon)^\alpha$, jeste infinitezimalni generator nekog uopštenog uniformno neprekidnog operatora rešenja $S_\alpha \in \mathcal{SG}_\alpha([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$.*

**Dokaz:**

Fiksirajmo $0 < \alpha < 1$. Iz Teoreme 1.8 poznato je da svaki linearan i ograničen operator $\widetilde{A}_\varepsilon$ generiše neki uniformno neprekidni operator rešenja $(S_\alpha)_\varepsilon(t)$ dat sa

$$(S_\alpha)_\varepsilon(t) = E_\alpha(t^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{n\alpha}\widetilde{A}_\varepsilon^n}{\Gamma(1+n\alpha)}. \tag{2.30}$$

Pokažimo da $(S_\alpha)_\varepsilon \in \mathcal{S}E^\alpha_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. Zaista, iz nejednakosti za Mitag-Leflerovu funkciju (1.31) proizilazi da postoji konstanta $M > 0$ takva da

$$\|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\| \leq M\mathrm{exp}(t\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}).$$

S obzirom da je $h_\varepsilon \leq C(\mathrm{log}1/\varepsilon)^\alpha$, dalje imamo

$$\sup_{t\in[0,T)} \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\| \leq M\varepsilon^{-TC^{1/\alpha}},$$

za svako $\varepsilon$ dovoljno malo. Takođe, budući da za svako $t \geq 0$ važi ${}^C\mathcal{D}^\alpha_t(S_\alpha)_\varepsilon(t) = \widetilde{A}_\varepsilon(S_\alpha)_\varepsilon(t)$, dobijamo da za svako $\varepsilon$ dovoljno malo važi

$$\begin{aligned}
\|{}^C\mathcal{D}^\alpha_t(S_\alpha)_\varepsilon(t)\| &\leq \|\widetilde{A}_\varepsilon\|\|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\| \\
&\leq C\Big(\mathrm{log}\frac{1}{\varepsilon}\Big)^\alpha M\varepsilon^{-TC^{1/\alpha}} \\
&\leq CM\varepsilon^{-\alpha-TC^{1/\alpha}}.
\end{aligned}$$

Ostaje još da se pokaže da postoji umereno ograničenje za $\|\frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|$. Najpre, diferencirajući (2.30) po $t$, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{(n+1)\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+n\alpha)}\widetilde{A}^{n+1}_\varepsilon = t^{\alpha-1}\widetilde{A}_\varepsilon\sum_{n=0}^\infty \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha+n\alpha)}\widetilde{A}^n_\varepsilon \\
&= t^{\alpha-1}\widetilde{A}_\varepsilon E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Nakon toga, za svako $T_1 > 0$ i sve $t \in [T_1, T)$, dobija se ocena u normi

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t)\Big\| &\leq T_1^{\alpha-1}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \\
&\leq T_1^{\alpha-1}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|C_\alpha(1+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{(1-\alpha)/\alpha})(1+T^{1-\alpha})\cdot\mathrm{exp}(\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}T) \\
&\leq T_1^{\alpha-1}C_\alpha(\|\widetilde{A}_\varepsilon\|+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha})(1+T^{1-\alpha})\cdot\mathrm{exp}(\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}T) \\
&\leq T_1^{\alpha-1}C_\alpha\Big(\Big(\mathrm{log}\frac{1}{\varepsilon}\Big)^\alpha+\mathrm{log}\frac{1}{\varepsilon}\Big)(1+T^{1-\alpha})\cdot\mathrm{exp}\Big(C^{1/\alpha}T\mathrm{log}\frac{1}{\varepsilon}\Big) \\
&\leq 2T_1^{\alpha-1}C_\alpha(1+T^{1-\alpha})\varepsilon^{-1-C^{1/\alpha}T}. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Prema tome, konačno dobijamo $(S_\alpha)_\varepsilon \in \mathcal{S}E^\alpha_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. □

Ovo poglavlje završavamo zaključcima sličnim onima koji važe u slučaju uopštenih uniformno neprekidnih polugrupa operatora. Naime, za uniformno neprekidne Kolomboove operatore rešenja uvek postoji infinitezimalni generator, pri čemu je taj generator jedinstven. To proizilazi iz činjenice da Kolomboovi operatori rešenja za predstavnika imaju klasičan uniformno neprekidan operator rešenja, za koji postoji jedinstveni infinitezimalni generator.

# Glava 3

# Evolucione jednačine sa prostorno frakcionim diferencijalnim operatorima

Razmotrimo problem transporta hemijskih zagađivača kroz podzemne vode koje se kreću prosečnom brzinom $v(x,t)$. Neka $u(x,t)$ predstavlja koncentraciju razmatranog zagađivača, dok je $k(x,t)$ koeficijent difuzije (disperzije). U tom slučaju, koncentracija zagađivača $u(x,t)$ zadovoljava prostorno frakcionu advektivno-difuzionu jednačinu

$$\partial_t u(x,t) = -v(x,t)\mathcal{D}_x^\alpha u(x,t) + k(x,t)\mathcal{D}_x^\beta u(x,t) + f(x,t), \tag{3.1}$$

pri čemu su $\mathcal{D}_x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, odnosno, $\mathcal{D}_x^\beta$, $1 < \beta \leq 2$, prostorno frakcioni izvodi, dok se nelinearni deo $f$ odnosi na spoljne sile koje utiču na koncentraciju zagađivača, kao što su, na primer, navodnjavanje ili poplave (videti, na primer, [12], [21], [81]). Birajući u prethodnoj jednačini $\alpha = 1$ i $\beta = 2$ dobija se klasična (nefrakciona) advektivno-difuziona jednačina.

Ukoliko model zanemaruje difuziju ($k(x,t) = 0$), kao kao što je to slučaj u nekim problemima teorije filtracije ([52]), ove jednačine se svode na advektivne jednačine. Slično, za $v(x,t) = 0$ dobijaju se frakcione difuzione jednačine koje, između ostalog, modeliraju širenje raznih invazivnih vrsta, gde u tom slučaju $u$ predstavlja gustinu posmatrane populacije, difuzioni deo jednačine modelira migracije, dok se nehomogeni deo odnosi na rast populacije. Frakcione difuzione jednačine su posebno korisne za primenu u onim problemima gde se oblaci čestica šire brže nego što je to predviđeno klasičnim (nefrakcionim) difuzionim jednačinama (videti [6]).

Motivisani primenama jednačine (3.1) na modeliranje raznih pojava, ovaj deo disertacije je posvećen aproksimativnom rešavanju Košijevog problema za nehomogene evolucione jednačine sa varijabilnim koeficijentima oblika

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= Au(t) + f(\cdot, t, u), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

gde je $A$ prostorno frakcioni diferencijalni operator dat preko množitelja frakcionog izvoda. Napomenimo da su u literaturi jednačine (3.1) rešavane na ograničenom domenu $x \in (0, L)$, dok ćemo mi jednačine (3.2) rešavati na neograničenom domenu pri čemu, dodatno, nelinearni deo $f$ zavisi od rešenja $u$.

U zavisnosti od reda frakcionog izvoda sadržanog u operatoru $A$, dobijaju se razni tipovi frakcionih jednačina koji pripadaju klasi evolucionih jednačina sa prostorno frakcionim diferencijalnim operatorima. Naime, birajući $0 < \alpha < 1$ i $A \equiv -\lambda(x,t)\mathcal{D}_x^\alpha$, gde ćemo za $\mathcal{D}_x^\alpha$ uzimati levi ili desni Ljuvilov frakcioni izvod, odnosno, Risov frakcioni izvod, dobijaju se prostorno frakcione advektivne jednačine. Slično, za izbor $1 < \alpha < 2$ i $A \equiv \lambda(x,t)\mathcal{D}_x^\alpha$, dobijaju se prostorno frakcione difuzione jednačine. Prethodni tipovi jednačina predstavljaju specijalan slučaj prostorno frakcionih advektivno-difuzionih jednačina, koje se dobijaju pri izboru $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta < 2$ i $A \equiv -a(x,t)\mathcal{D}_x^\alpha + b(x,t)\mathcal{D}_x^\beta$.

Dostupnost rešenja ovih jednačina, kao i sam način njihovog rešavanja, zavisi od prirode koeficijenata koji se u njima pojavljuju. Naime, ukoliko su koeficijenti konstantni, rešenja se mogu dobiti tako što se primenom Furijeove transformacije po promenljivoj $x$, odnosno, Laplasove transformacije po promenljivoj $t$, polazna frakciona jednačina svede na algebarsku jednačinu, a zatim se nakon rešavanja algebarske jednačine, primenom njihovih inverznih transformacija, dobija rešenje reprezentovano preko Grinove funkcije. U tom slučaju, ove jednačine imaju fizičku interpretaciju i kao takve opisuju razne, veoma interesantne pojave u geologiji, hidrologiji, seizmologiji, građevinarstvu, populacionoj biologiji... (videti [6], [11], [52]).

S obzirom da za varijabilne koeficijente rešenje Košijevog problema (3.2) nije uvek dostupno, ove jednačine se u tom slučaju rešavaju aproksimativno, najčešće primenom raznih numeričkih metoda ( [16], [22], [42], [56], [58], [72], [74], [77], [87]). Iz tog razloga, umesto polaznog Košijevog problema (3.2) posmatraćemo perturbovan problem dat sa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= \widetilde{A}u(t) + f(\cdot, t, u), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

gde je $\widetilde{A}$ uopšteni operator Kolomboovog tipa, reprezentovan preko mreže operatora dobijenih regularizacijom odgovarajućih frakcionih izvoda, odnosno, množitelja frakcionih izvoda.

Prostor Kolomboovog tipa u okviru kojeg ćemo tražiti rešenja prostorno frakcionih advektivnih, difuzionih, kao i advektivno-difuzionih jednačina, uveden je u Poglavlju 3.1. Perturbovani problem (3.3) rešavaćemo najpre u okviru Kolomboovih algebri definisanih na prostorima Soboljeva celobrojnog reda (Poglavlje 3.2), a zatim ćemo prostor rešenja proširiti na Kolomboove algebre definisane na frakcionim prostorima Soboljeva (Poglavlje 3.3). U oba slučaja, nametanjem odgovarajućih uslova rasta na varijabilne koeficijente, pokazaćemo asociranost neregularizovanog i odgovarajućeg regularizovanog frakcionog operatora u $L^2$-normi (Odeljak 3.2.4 i Odeljak 3.3.4), to jest asociranost operatora koji se javljaju u jednačinama (3.2) i (3.3). Pored toga, za sve tipove jednačina pokazaćemo, kao u slučaju frakcionih operatora, asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane jednačine u $L^2$-normi (Odeljak 3.2.5 i Odeljak 3.3.5), uz pretpostavku da rešenje neregularizovane jednačine postoji. U oba slučaja, kako za prostore Soboljeva celobrojnog reda, tako i za frakcione prostore Sobljeva, za rešavanje jednačina koristićemo uopštene uniformno neprekidne polugrupe operatora prezentovane u Poglavlju 2.1.

Dokazi za pomenuta tvrđenja, koja se odnose na egzistenciju i jedinstvenost rešenja, asociranost neregularizovanog i odgovarajućeg regularizovanog frakcionog operatora, kao i asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane jednačine, biće dati u slučaju kada je frakcioni operator $A$ definisan preko levog Ljuvilovog frakcionog izvoda. Sva tvrđenja dokazana u ovoj glavi ostaju na snazi ukoliko se umesto levog Ljuvilovog frakcionog izvoda razmatraju jednačine date preko desnog Ljuvilovog frakcionog izvoda, odnosno, Risovog frakcionog izvoda. Argumenti za prethodni zaključak slede na osnovu relacije (1.12) koja važi za ove frakcione izvode (Propozicija 1.10).

Krajnji ishod proučavanja ove klase jednačina biće nova procedura za aproksimativno rešavanje Košijevog problema nehomogenih evolucionih jednačina sa prostorno frakcionim izvodima i varijabilnim koeficijentima datog sa (3.2).

Svi rezultati sadržani u ovoj glavi predstavljaju originalne rezultate prezentovane u radu [38].

## 3.1 Prostor rešenja

Uopštena rešenja evolucionih jednačina sa prostorno frakcionim izvodima tražićemo u okviru Kolomboovih prostora $\mathcal{G}([0,\infty) : H^{\beta}(\mathbb{R}))$ definisanih na sledeći način:

**Definicija 3.1** *$\mathcal{E}_M([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R}))$, $\beta>\frac{1}{2}$, je prostor mreža*

$$G_\varepsilon:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{C},\;\; G_\varepsilon(t,\cdot)\in H^\beta(\mathbb{R}),\;\; \textit{za svako}\;\; t\in[0,\infty),$$

*sa osobinom da za svako $T>0$ postoje $C>0, N\in\mathbb{N}$ i $\varepsilon_0>0$ takvi da*

$$\sup_{t\in[0,T)}\|\partial_t^\gamma G_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^\beta}\le C\varepsilon^{-N},\;\;\gamma\in\{0,1\},\;\;\varepsilon<\varepsilon_0.$$

Prostor $\mathcal{E}_M([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R}))$, $\beta>\frac{1}{2}$, je algebra u odnosu na operaciju množenja.

**Definicija 3.2** *$\mathcal{N}([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R}))$, $\beta>\frac{1}{2}$, je prostor mreža $G_\varepsilon\in\mathcal{E}_M([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R}))$ sa osobinom da za svako $T>0$ i $a\in\mathbb{R}$ postoje $C>0$ i $\varepsilon_0>0$ takvi da*

$$\sup_{t\in[0,T)}\|\partial_t^\gamma G_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^\beta}\le C\varepsilon^{a},\;\;\gamma\in\{0,1\},\;\;\varepsilon<\varepsilon_0.$$

U prethodnim definicijama uslov $\beta>\frac{1}{2}$ je neophodan da bi prostor $\mathcal{N}([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R}))$ bio ideal prostora $\mathcal{E}_M([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R}))$. To je posledica Teoreme Soboljeva o potapanju (Teorema 1.1), budući da jedino ukoliko je $\beta>\frac{1}{2}$ postoji potapanje $H^\beta(\mathbb{R})$ u $L^\infty(\mathbb{R})$.

**Propozicija 3.1** *Neka je $\beta>\frac{1}{2}$. Prostor $\mathcal{N}([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R}))$ je ideal prostora $\mathcal{E}_M([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R}))$.*

**Dokaz:**

Fiksirajmo $\beta>\frac{1}{2}$. Neka je

$$(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\in\mathcal{E}_M([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R}))\;\;\text{i}\;\;(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\in\mathcal{N}([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R})).$$

Dokazaćemo

$$(G_\varepsilon(t,\cdot)H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\in\mathcal{N}([0,\infty):H^\beta(\mathbb{R})),\tag{3.4}$$

razmatrajući najpre dva slučaja:

(i) $\frac{1}{2}<\beta<1$.
Koristeći ekvivalentnu normu $\|\cdot\|'$ za frakcione prostore Soboljeva datu sa

(1.6) dobija se

$$\begin{aligned}
\|(G_\varepsilon(t,\cdot)H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|'_{H^\beta} &\le \|(G_\varepsilon(t,\cdot)H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2} \\
&\quad +\|\mathcal{D}_+^\beta(G_\varepsilon(t,\cdot)H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2} \\
&\le \|(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^\infty}\|(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2} \\
&\quad +C\|(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\beta(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2} \\
&\quad +C\|\mathcal{D}_+^\beta(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2}\|(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^\infty} \\
&\le C\|(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{H^\beta}\|(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{H^\beta},
\end{aligned}$$

gde smo koristili aproksimativno Lajbnicovo pravilo za Ljuvilov frakcioni izvod dato u Propoziciji 1.7, kao i Teoremu Soboljeva o potapanju (Teorema 1.1).

Na sličan način, koristeći iste argumente, dobija se

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t(G_\varepsilon(t,\cdot)H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|'_{H^\beta} \\
&\quad\le \|\partial_t(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|'_{H^\beta} + \|(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\partial_t(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|'_{H^\beta} \\
&\quad\le \|\partial_t(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2} + \|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_t(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon)\|_{L^2} \\
&\qquad +\|(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\partial_t(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2} + \|\mathcal{D}_+^\beta((G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\partial_t(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon)\|_{L^2} \\
&\quad\le \|\partial_t(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2}\|(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^\infty} \\
&\qquad +\|(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^\infty}\|\partial_t(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2} \\
&\qquad +C\|\partial_t(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\beta(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2} \\
&\qquad +C\|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_t(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon)\|_{L^2}\|(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^\infty} \\
&\qquad +C\|((G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\beta\partial_t(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon)\|_{L^2} \\
&\qquad +C\|\mathcal{D}_+^\beta((G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{L^2}\|\partial_t(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon)\|_{L^\infty} \\
&\quad\le C\|\partial_t(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{H^\beta}\|(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{H^\beta} \\
&\qquad +C\|(G_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{H^\beta}\|\partial_t(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon\|_{H^\beta}.
\end{aligned}$$

S obzirom da je po pretpostavci $(H_\varepsilon(t,\cdot))_\varepsilon \in \mathcal{N}([0,\infty) : H^\beta(\mathbb{R}))$, sledi (3.4).

(ii) $1 < \beta < 2$.
Kao u prethodnom slučaju, sada koristeći ekvivalentnu normu $\|\cdot\|''$ datu sa (1.7), dobija se relacija (3.4).

Sličnom procedurom može se pokazati da relacija (3.4) važi za proizvoljan red prostora $\beta > 2$, razmatrajući pri tome posebno slučajeve $n-1 < \beta < n$, $n = 3, 4, \ldots$ $\square$

Kao direktnu posledicu tvrđenja datog u Propoziciji 3.1, dobijamo da je Kolomboovu algebru, u okviru koje ćemo tražiti rešenja Košijevog problema (3.3), moguće definisati na uobičajeni način, odnosno, kao faktor algebru.

**Definicija 3.3** *Količnički prostor*

$$\mathcal{G}([0,\infty) : H^\beta(\mathbb{R})) = \frac{\mathcal{E}_M([0,\infty) : H^\beta(\mathbb{R}))}{\mathcal{N}([0,\infty) : H^\beta(\mathbb{R}))}$$

*je odgovarajući prostor Kolomboovih uopštenih funkcija definisan na frakcionom prostoru Soboljeva $H^\beta$, pri čemu je $\beta > \frac{1}{2}$.*

**Definicija 3.4** *Neka je $h_\varepsilon$ pozitivna mreža koja zadovoljava $h_\varepsilon \leq \varepsilon^{-1}$. Za funkciju $G \in \mathcal{G}([0,\infty) : H^\beta(\mathbb{R}))$, kažemo da je $h_\varepsilon-$tipa ako ima predstavnika $G_\varepsilon$ takvog da*

$$\|G_\varepsilon\|_{H^\beta} = \mathcal{O}(h_\varepsilon),\ \varepsilon \to 0.$$

Ukoliko $\beta \in \mathbb{N}$ dobijamo standardne Kolomboove prostore (kao, na primer, u [62]), inače se dobijaju prostori koje ćemo zvati frakcioni Kolomboovi prostori.

Izostavljajući promenljivu $t$, na sličan način se mogu definisati Kolomboovi prostori $\mathcal{E}_M(H^\beta(\mathbb{R}))$, $\mathcal{N}(H^\beta(\mathbb{R}))$ i $\mathcal{G}(H^\beta(\mathbb{R}))$.

## 3.2 Rešenja jednačina na Kolomboovim algebrama sa prostorima Soboljeva celobrojnog reda

Cilj ovog poglavlja jeste aproksimativno rešavanje sistema evolucionih jednačina sa prostorno frakcionim diferencijalnim operatorima oblika (3.2), tačnije, rešavanje jednačina datih sa (3.3) u okruženju Kolomboovih algebri definisanih na prostorima Soboljeva celobrojnog reda. Izbor prostora Soboljeva na kojima će se tražiti rešenja zavisiće od reda frakcione jednačine koju razmatramo. Pa tako, ukoliko je red frakcionog izvoda $0 < \alpha < 1$ (kao što je to u slučaju prostorno frakcionih advektivnih jednačina), tada će prostor rešenja biti Kolomboova algebra definisana na prostoru Soboljeva $H^1$. Ukoliko je pak red frakcionog izvoda $1 < \alpha < 2$ ili $0 < \alpha < 2$ (kao što je to u slučaju prostorno frakcionih difuzionih jednačina, odnosno, prostorno frakcionih advektivno-difuzionih jednačina, redom), prostor rešenja biće definisan na prostoru Soboljeva $H^2$.

Odgovarajuća tvrđenja koja se odnose na egzistenciju i jedinstvenost uopštenih rešenja najpre će biti dokazana za prostorno frakcione advektivne jednačine (Teorema 3.1), odnosno, prostorno frakcione difuzione jednačine (Teorema 3.2), a zatim će dobijeni rezultati biti iskorišćeni za prostorno frakcione advektivno-difuzione jednačine (Teorema 3.3).

Sistemi evolucionih jednačina koje ćemo razmatrati u ovom poglavlju su dijagonalizovani sistemi. Da razmatranje ovakvih sistema ne umanjuje opštost sledi iz činjenice da se uz određene pretpostavke opšti sistemi evolucionih jednačina mogu svesti na dijagonalizovane sisteme. Procedura kojom se opšti $n \times n$ sistem jednačina svodi na dijagonalizovani sistem jednačina izložićemo oslanjajući se na knjigu [66].

Razmotrimo semilinearni hiperbolični sistem jednačina oblika

$$(\partial_t + M(x,t)\partial_x)v(x,t) = G(x,t,v(x,t)), \tag{3.5}$$

gde je $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $M$ je matrica formata $n \times n$ čiji su elementi glatke funkcije, $G = (G_1, \ldots, G_n)$ je glatki vektor. Ovaj sistem je hiperbolični u smislu da se matrica $M(x,t)$ može dijagonalizovati nad $\mathbb{R}$, to jest postoji invertibilna matrica $Q(x,t)$ takva da je $\Lambda = Q^{-1}MQ$ realna dijagonalna matrica. To će biti slučaj ukoliko se pretpostavi striktna hiperboličnost, to jest da $M(x,t)$ ima $n$ realnih i različitih karakterističnih vrednosti takvih da

$$\lambda_1(x,t) > \lambda_2(x,t) > \ldots > \lambda_n(x,t).$$

Smena promenljivih $u = Q^{-1}v$ transformiše sistem (3.5) u dijagonalizovani sistem istog oblika

$$(\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)u(x,t) = F(x,t,u(x,t)),$$

gde je $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, odnosno po komponentama

$$(\partial_t + \lambda_j(x,t)\partial_x)u_j = F_j(x,t,u),$$

$j = 1, \ldots, n$.

### 3.2.1 Prostorno frakcione advektivne jednačine

Ovde razmatramo problem sličan onome u radu [62], ali sada sa prostorno frakcionim izvodima umesto izvoda celobrojnog reda. Prostor rešenja za razmatrani sistem od $n$ jednačina takođe će biti Kolomboova algebra data sa $(\mathcal{G}([0,\infty) : H^1(\mathbb{R})))^n$.

**Definicija 3.5** *Funkcija* $f(x,t,u) = (f_1(x,t,u),\dots,f_n(x,t,u))$ *je ograničenog tipa ako važi:*

**(i)** $f(x,t,u)$ *je globalno Lipšicova funkcija po* $x$ *i* $u$,

**(ii)** $f(x,t,u)$ *ima ograničen izvod drugog reda po* $u$ *i* $f(x,t,0)=0$,

**(iii)** $\partial_x f(x,t,u)$ *je globalno Lipšicova funkcija po* $u$.

**Teorema 3.1** *Neka je* $f(x,t,u) = (f_1(x,t,u),\dots,f_n(x,t,u))$ *funkcija ograničenog tipa u smislu Definicije 3.5. Neka* $0<\alpha<1$, $u_0 \in (\mathcal{G}(H^1(\mathbb{R})))^n$ *i neka je* $h_\varepsilon$ *mreža koja zadovoljava* $h_\varepsilon = o((\text{loglog}1/\varepsilon)^{1/3})$, *za* $\varepsilon \to 0$.

*Pretpostavimo da je operator* $\widetilde{A}^\alpha \in \mathcal{S}\text{G}((H^1(\mathbb{R}))^n)$ *reprezentovan preko mreže operatora sa*

$$\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon : (H^1(\mathbb{R}))^n \to (H^1(\mathbb{R}))^n,$$
$$\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}),$$

*gde je* $\lambda_\varepsilon = diag(\lambda^1_\varepsilon,\dots,\lambda^n_\varepsilon) \in (H^1(\mathbb{R}))^{n\times n}$, $\|\lambda^i_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R})} = \mathcal{O}((\text{loglog}1/\varepsilon)^{1/2})$, $i=1,\dots,n$, $\phi_{h_\varepsilon}(x) = h^n_\varepsilon\phi(xh_\varepsilon)$, $\phi(y)=\phi_1(y_1)\cdot\ldots\cdot\phi_1(y_n)$, $\phi_1\in C^\infty_0$, $\phi_1(\xi)\ge 0$, $\phi$ *je simetrična funkcija sa osobinom* $\int\phi_1(\xi)d\xi = 1$.

*Tada, za svako* $0<\alpha<1$, *postoji jedinstveno uopšteno rešenje* $u \in (\mathcal{G}([0,\infty) : H^1(\mathbb{R})))^n$ *Košijevog problema*

$$\frac{d}{dt}u(t) = \widetilde{A}^\alpha u(t) + f(\cdot,t,u), \quad u(0)=u_0, \tag{3.6}$$

*dato reprezentom*

$$u^i_\varepsilon(t) = S^\alpha_\varepsilon(t)u^i_{0\varepsilon} + \int_0^t S^\alpha_\varepsilon(t-s)f^i(\cdot,s,u_\varepsilon)ds,\ \ i=1,\dots,n, \tag{3.7}$$

*gde je* $S^\alpha \in \mathcal{S}\text{G}([0,\infty) : \mathcal{L}((H^1(\mathbb{R}))^n))$ *uniformno neprekidna Kolomboova polugrupa generisana sa* $\widetilde{A}^\alpha$.

**Dokaz:**

Neka $u_\varepsilon \in (H^1(\mathbb{R}))^n$. Znajući da važi $\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon} = u_\varepsilon * \mathcal{D}^\alpha_+\phi_{h_\varepsilon}$ ([45]) i s obzirom da je

$$\begin{aligned}\|\phi_{h_\varepsilon}\|_{H^1} &= \|\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} + \|\partial_x\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} = \sqrt{h_\varepsilon}\|\phi\|_{L^2} + \sqrt{h^3_\varepsilon}\|\partial_x\phi\|_{L^2} \le Ch_\varepsilon^{\frac{3}{2}} \\ &= o\Big((\text{loglog}1/\varepsilon)^{1/2}\Big),\end{aligned} \tag{3.8}$$

dobijamo

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{A}^{\alpha}_{\varepsilon} u_{\varepsilon}\|_{L^2} &\leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda^i_{\varepsilon}(\mathcal{D}^{\alpha}_{+} u^i_{\varepsilon} * \phi_{h_{\varepsilon}})\|_{L^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda^i_{\varepsilon}\|_{L^2} \|u^i_{\varepsilon} * \mathcal{D}^{\alpha}_{+}\phi_{h_{\varepsilon}}\|_{L^{\infty}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda^i_{\varepsilon}\|_{L^2} \|u^i_{\varepsilon}\|_{L^2} \|\phi_{h_{\varepsilon}}\|_{H^1} \\
&\leq o\Big(\mathrm{loglog}\frac{1}{\varepsilon}\Big) \|u_{\varepsilon}\|_{L^2}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Takođe,

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x \widetilde{A}^{\alpha}_{\varepsilon} u_{\varepsilon}\|_{L^2} &\leq \sum_{i=1}^{n} \|\partial_x(\lambda^i_{\varepsilon})(u^i_{\varepsilon} * \mathcal{D}^{\alpha}_{+}\phi_{h_{\varepsilon}})\|_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \|\lambda^i_{\varepsilon}(\mathcal{D}^{\alpha}_{+} u^i_{\varepsilon} * \partial_x \phi_{h_{\varepsilon}})\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|\partial_x \lambda^i_{\varepsilon}\|_{L^2} \|u^i_{\varepsilon}\|_{L^2} \|\mathcal{D}^{\alpha}_{+}\phi_{h_{\varepsilon}}\|_{L^2} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \|\lambda^i_{\varepsilon}\|_{L^2} \|\mathcal{D}^{\alpha}_{+} u^i_{\varepsilon}\|_{L^2} \|\partial_x \phi_{h_{\varepsilon}}\|_{L^2} \\
&\leq o\Big(\mathrm{loglog}\frac{1}{\varepsilon}\Big) \|u_{\varepsilon}\|_{H^1}, \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

koristeći $\|\partial_x \lambda^i_{\varepsilon}\|_{L^2} = \mathcal{O}\left((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right)$, $i = 1, \dots, n$, i $\|\phi_{h_{\varepsilon}}\|_{H^1} = o((\mathrm{loglog}\frac{1}{\varepsilon})^{1/2})$.

Budući da je $\|\widetilde{A}^{\alpha}_{\varepsilon}\|_{H^1} = o(\mathrm{loglog}1/\varepsilon)$, iz Propozicije 2.5 sledi da je $\widetilde{A}^{\alpha}$ infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S^{\alpha} \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}((H^1(\mathbb{R}))^n))$ i da je $S^{\alpha}$ $\log 1/\varepsilon-$tipa. Iz dobro poznatog klasičnog rezultata znamo da je (3.7) reprezent rešenja za (3.6).

Pokažimo da je ovo rešenje, dato sa (3.7), element Kolomboove algebre $(\mathcal{G}([0,\infty) : H^1(\mathbb{R})))^n$. Zaista, iz (3.7) dobija se

$$
\begin{aligned}
\|u_{\varepsilon}(t)\|_{L^2} &\leq \|S^{\alpha}_{\varepsilon}(t) u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int_0^t \|S^{\alpha}_{\varepsilon}(t-s) f(\cdot, s, u_{\varepsilon})\|_{L^2} ds \\
&\leq \|S^{\alpha}_{\varepsilon}(t)\| \|u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + C \int_0^t \|S^{\alpha}_{\varepsilon}(t-s)\| \|u_{\varepsilon}(s)\|_{L^2} ds, \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

gde smo koristili da je $f(x,t,u)$ globalno Lipšicova funkcija po $u$ i $f(x,t,0) = 0$. Nakon primene Gronvalove nejednakosti na (3.11) imamo

$$
\|u_{\varepsilon}(t)\|_{L^2} \leq C \|S^{\alpha}_{\varepsilon}(t)\| \|u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \cdot \exp\left( \int_0^t \|S^{\alpha}_{\varepsilon}(t-s)\| ds \right),
$$

pa koristeći činjenicu da je uopštena polugrupa $S^\alpha$ log$1/\varepsilon$-tipa sledi postojanje umerenog ograničenja za $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Takođe, iz (3.6) dobijamo

$$\Big\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)\Big\|_{L^2} \leq \|\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon u_\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|f(\cdot,t,u_\varepsilon)\|_{L^2},$$

i postojanje umerenog ograničenja za $\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ neposredno sledi.

Nakon diferenciranja (3.7) po $x$ dobija se

$$\begin{aligned}\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|S^\alpha_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int_0^t \|S^\alpha_\varepsilon(t-s)(\nabla_u f(\cdot,s,u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon(s))\|_{L^2}ds \\ &\quad + \int_0^t \|S^\alpha_\varepsilon(t-s)\partial_x f(\cdot,s,u_\varepsilon)u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds \\ &\leq \|S^\alpha_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int_0^t \|S^\alpha_\varepsilon(t-s)\|\cdot\|\nabla_u f\|_{L^\infty}\cdot\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds \\ &\quad + \int_0^t \|S^\alpha_\varepsilon(t-s)\|\cdot\|\partial_x f\|_{L^\infty}\cdot\|u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds. \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Primenjujući Gronvalovu nejednakost na (3.12) dobija se

$$\begin{aligned}\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \Big(\|S^\alpha_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int_0^t \|S^\alpha_\varepsilon(t-s)\|\cdot\|\partial_x f\|_{L^\infty}\cdot\|u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\Big) \\ &\quad \cdot\exp\left(\int_0^t \|S^\alpha_\varepsilon(t-s)\|\cdot\|\nabla_u f\|_{L^\infty}ds\right),\end{aligned}$$

pa kako je $f$ Lipšicova funkcija po $u$ i $x$ sledi postojanje umerenog ograničenja za $\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2}$. Prema tome, rešenje $u$ pripada prostoru $(\mathcal{G}([0,\infty):H^1(\mathbb{R})))^n$.

Na sličan način kao u radu [62], može se pokazati da je dobijeno rešenje sistema (3.6) takođe i jedinstveno rešenje na tom prostoru. $\square$

**Definicija 3.6** *Rešenje $u$ problema (3.6) uvedenog u Teoremi 3.1 zvaćemo uopšteno rešenje jednačine*

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\lambda\mathcal{D}^\alpha_+ u(t) + f(\cdot,t,u)$$

*date sa regularizovanim Ljuvilovim frakcionim izvodom.*

### 3.2.2 Prostorno frakcione difuzione jednačine

Sada razmatramo prostorno frakcione difuzione jednačine, koje takođe sadrže regularizovani frakcioni izvod uveden u Teoremi 3.1. Prostor rešenja za razmatrani sistem od $n$ jednačina u ovom slučaju biće Kolomboova algebra data sa $(\mathcal{G}([0,\infty):H^2(\mathbb{R})))^n$.

**Teorema 3.2** *Neka su* $f(x,t,u)=(f_1(x,t,u),\dots,f_n(x,t,u))$, $\partial_u f(x,t,u)$, *kao i* $\partial_x f(x,t,u)$ *funkcije ograničenog tipa u smislu Definicije 3.5. Neka je* $1<\alpha<2$, $u_0\in(\mathcal{G}(H^2(\mathbb{R})))^n$ *i neka je* $h_\varepsilon$ *mreža za koju važi* $h_\varepsilon=o((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{1/5})$, *za* $\varepsilon\to 0$.

*Pretpostavimo da je operator* $\widetilde{A}^\alpha\in\mathcal{S}\mathrm{G}((H^2(\mathbb{R}))^n)$ *reprezentovan preko mreže operatora sa*

$$\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon:(H^2(\mathbb{R}))^n\to(H^2(\mathbb{R}))^n,$$
$$\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon u_\varepsilon=\lambda_\varepsilon(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon*\phi_{h_\varepsilon}),$$

*gde je* $\lambda_\varepsilon=diag(\lambda^1_\varepsilon,\dots,\lambda^n_\varepsilon)\in(H^2(\mathbb{R}))^{n\times n}$, $\|\lambda^i_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R})}=\mathcal{O}((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{1/2})$, $i=1,\dots,n$, $\phi_{h_\varepsilon}(x)=h^n_\varepsilon\phi(xh_\varepsilon)$, $\phi(y)=\phi_1(y_1)\cdot\dots\cdot\phi_1(y_n)$, $\phi_1\in C_0^\infty$, $\phi_1(\xi)\geq 0$, $\phi$ *je simetrična funkcija sa osobinom* $\int\phi_1(\xi)d\xi=1$.

*Tada, za svako* $1<\alpha<2$, *postoji jedinstveno uopšteno rešenje* $u\in(\mathcal{G}([0,\infty):H^2(\mathbb{R})))^n$ *Košijevog*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t)&=\widetilde{A}^\alpha u(t)+f(\cdot,t,u),\\ u(0)&=u_0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

*dato reprezentom*

$$u^i_\varepsilon(t)=S^\alpha_\varepsilon(t)u^i_{0\varepsilon}+\int_0^t S^\alpha_\varepsilon(t-s)f^i(\cdot,s,u_\varepsilon)ds,\ \ i=1,\dots,n,\tag{3.14}$$

*gde je* $S^\alpha\in\mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty):\mathcal{L}((H^2(\mathbb{R}))^n))$ *uniformno neprekidna Kolomboova polugrupa generisana sa* $\widetilde{A}^\alpha$.

**Dokaz:**

Kako je sistem dijagonalizovan dokaz tvrđenja za proizvoljno $n$ izvodi se kao u slučaju jedne jednačine, to jest za $n=1$ .

Neka $u_\varepsilon\in H^2(\mathbb{R})$. Kao u dokazu Teoreme 3.1 (za $n=1$), imamo $L^2-$ocenu operatora $\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon$ kao i njegovog izvoda prvog reda, tj. $\|\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2}\leq o(\mathrm{loglog}\frac{1}{\varepsilon})\|u_\varepsilon\|_{L^2}$

i $\|\partial_x(\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon u_\varepsilon)\|_{L^2} \le o(\mathrm{loglog}\frac{1}{\varepsilon})\|u_\varepsilon\|_{H^2}$. $L^2-$ocena izvoda drugog reda operatora $\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon$ je data sa

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^2(\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon u_\varepsilon)\|_{L^2} &\le \|\partial_x(\partial_x\lambda_\varepsilon(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}))\|_{L^2} + \|\partial_x(\lambda_\varepsilon(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon * \phi'_{h_\varepsilon}))\|_{L^2}\\
&\le \|\partial_x^2\lambda_\varepsilon(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon})\|_{L^2} + \|\partial_x\lambda_\varepsilon(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon * \phi'_{h_\varepsilon})\|_{L^2}\\
&\quad + \|\partial_x\lambda_\varepsilon(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon * \phi'_{h_\varepsilon})\|_{L^2} + \|\lambda_\varepsilon(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon * \phi''_{h_\varepsilon})\|_{L^2}\\
&\le \|\partial_x^2\lambda_\varepsilon\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{L^2}\|\mathcal{D}^\alpha_+\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} + 2\|\partial_x\lambda_\varepsilon\|_{L^2}\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2}\\
&\quad \times\|\mathcal{D}^\alpha_+\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} + \|\lambda_\varepsilon\|_{L^2}\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2}\|\mathcal{D}^\alpha_+\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2}\\
&\le o\Big(\mathrm{loglog}\frac{1}{\varepsilon}\Big)\|u_\varepsilon\|_{H^2}, \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

gde smo koristili da je $\lambda_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$, $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$, kao i relaciju

$$\|\mathcal{D}^\alpha_+\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \le \|\phi_{h_\varepsilon}\|_{H^2} \le C\ h_\varepsilon^{\frac{5}{2}} = o\Big((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{1/2}\Big),$$

koja se dobija slično kao (3.8).

Prema tome, $\|\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon\|_{H^2} = o(\mathrm{loglog}1/\varepsilon)$, te sledi da je $\widetilde{A}^\alpha$ infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S^\alpha \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}((H^1(\mathbb{R}))^n))$, kao i da je ova polugrupa $\log 1/\varepsilon-$tipa. Pored toga, znamo da je (3.14) reprezent rešenja za (3.13).

Pokažimo da je ovo rešenje element prostora $\mathcal{G}([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$. Zaista, iz dokaza Teoreme 3.1 imamo postojanje umerenog ograničenja za $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$, $\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ i $\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$. Prema tome, ostaje da se dobije umereno ograničenje za $\|\partial_x^2 u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Označimo $g_1(x,t,u) = \partial_u f(x,t,u)$ i $g_2(x,t,u) = \partial_x f(x,t,u)$. Diferencirajući (3.14) dva puta po $x$ dobija se

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^2 u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\le \|\partial_x(S^\alpha_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon})\|_{L^2}\\
&\quad + \|\partial_x\int_0^t S^\alpha_\varepsilon(t-s)g_1(x,s,u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon(s)ds\|_{L^2}\\
&\quad + \|\partial_x\int_0^t S^\alpha_\varepsilon(t-s)g_2(x,s,u_\varepsilon)u_\varepsilon(s)ds)\|_{L^2}\\
&\le \|S^\alpha_\varepsilon(t)\partial_x^2 u_{0\varepsilon}\|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)(\partial_u g_1(x,s,u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon(s))^2)\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)(\partial_x g_1(x,s,u_\varepsilon)u_\varepsilon(s)\partial_x u_\varepsilon(s))\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)(g_1(x,s,u_\varepsilon)\partial_x^2 u_\varepsilon(s))\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)(\partial_u g_2(x,s,u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon(s)u_\varepsilon(s))\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)(\partial_x g_2(x,s,u_\varepsilon)(u_\varepsilon(s))^2)\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)(g_2(x,s,u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon(s))\|_{L^2}ds\\
\leq\ & \|S_\varepsilon^\alpha(t)\partial_x^2 u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\|\cdot\|\partial_u g_1\|_{L^\infty}\cdot\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}\cdot\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\|\cdot\|\partial_x g_1\|_{L^\infty}\cdot\|u_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}\cdot\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\|\cdot\|g_1\|_{L^\infty}\cdot\|\partial_x^2 u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\|\cdot\|\partial_u g_2\|_{L^\infty}\cdot\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}\cdot\|u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\|\cdot\|\partial_x g_2\|_{L^\infty}\cdot\|u_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}\cdot\|u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\|\cdot\|g_2\|_{L^\infty}\cdot\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds.
\end{aligned}
$$

Označimo integrale u prethodnoj nejednakosti sa $I_1 - I_6$. Tada nakon primene Gronvalove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}\|\partial_x^2 u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \ \leq \ & \Big(\|S_\varepsilon^\alpha(t)\partial_x^2 u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + I_1 + I_2 + I_4 + I_5 + I_6\Big) \\ & \cdot \exp\left(\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\| \cdot \|g_1\|_{L^\infty} ds\right).\end{aligned}$$

S obzirom da su po pretpostavci $g_1$ i $g_2$ Lipšicove funkcije po $u$ i $x$, i budući da za svako $\beta > \frac{1}{2}$ postoji potapanje $H^\beta(\mathbb{R})$ u $L^\infty(\mathbb{R})$, sledi postojanje umerenog ograničenja za $\|\partial_x^2 u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$. Prema tome, pokazano je $u \in \mathcal{G}([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$.

Da bismo pokazali da je dobijeno rešenje, dato sa (3.14), jedinstveno na prostoru $\mathcal{G}([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$, pretpostavimo da postoje dva rešenja, $u$ i $v$, problema (3.13) i označimo $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Ova razlika zadovoljava

$$\frac{d}{dt} w_\varepsilon(t) = \widetilde{A}_\varepsilon^\alpha w_\varepsilon(t) + f(\cdot, t, u_\varepsilon) - f(\cdot, t, v_\varepsilon) + N_\varepsilon(t), \quad w_\varepsilon(0) = w_{0\varepsilon}, \tag{3.16}$$

gde $N_\varepsilon(t) \in \mathcal{N}([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$ i $w_{0\varepsilon} \in \mathcal{N}(H^2(\mathbb{R}))$. Tada je rešenje problema (3.16) dato sa

$$w_\varepsilon(t) = S_\varepsilon^\alpha(t) w_{0\varepsilon} + \int_0^t S_\varepsilon^\alpha(t-s)(f(\cdot, s, u_\varepsilon) - f(\cdot, s, v_\varepsilon))ds + \int_0^t S_\varepsilon^\alpha(t-s) N_\varepsilon(s) ds. \tag{3.17}$$

Postojanje $\mathcal{N}$-ograničenja za $\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$, $\|\frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ i $\|\partial_x \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ sledi iz dokaza Teoreme 3.1. Ostaje da se dokaže $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|\partial_x^2 \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Diferencirajući (3.17) dva puta po $x$ i koristeći istu notaciju za $g_1$ i $g_2$ kao u prethodnom slučaju kod egzistencije rešenja, dobijamo

$$\begin{aligned}\|\partial_x^2 \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq & \|\partial_x(S_\varepsilon^\alpha(t)\partial_x \omega_{0\varepsilon})\|_{L^2} + \|\partial_x \int_0^t S_\varepsilon^\alpha(t-s)\partial_x N_\varepsilon(s) ds\|_{L^2} \\ & + \|\partial_x \int_0^t S_\varepsilon^\alpha(t-s)(g_1(x,s,u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon(s) - g_1(x,s,v_\varepsilon)\partial_x v_\varepsilon(s))ds\|_{L^2} \\ & + \|\partial_x \int_0^t S_\varepsilon^\alpha(t-s)(g_2(x,s,u_\varepsilon)u_\varepsilon(s) - g_2(x,s,v_\varepsilon)v_\varepsilon(s))ds\|_{L^2}\end{aligned}$$

$$\leq \|S_\varepsilon^\alpha(t)(\partial_x^2\omega_{0\varepsilon})\|_{L^2} + \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\| \cdot \|\partial_x^2 N_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds$$

$$+ \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\| \cdot \|\partial_u g_1(x,s,u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon(s))^2 - \partial_u g_1(x,s,v_\varepsilon)(\partial_x v_\varepsilon(s))^2\|_{L^2} ds$$

$$+ \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\| \cdot \|\partial_x g_1(x,s,u_\varepsilon)u_\varepsilon(s)\partial_x u_\varepsilon(s) - \partial_x g_1(x,s,v_\varepsilon)v_\varepsilon(s)\partial_x v_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds$$

$$+ \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\| \cdot \|g_1(x,s,u_\varepsilon)\partial_x^2 u_\varepsilon(s) - g_1(x,s,v_\varepsilon)\partial_x^2 v_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds$$

$$+ \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\| \cdot \|\partial_u g_2(x,s,u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon(s)u_\varepsilon(s) - \partial_u g_2(x,s,v_\varepsilon)\partial_x v_\varepsilon(s)v_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds$$

$$+ \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\| \cdot \|\partial_x g_2(x,s,u_\varepsilon)(u_\varepsilon(s))^2 - \partial_x g_2(x,s,v_\varepsilon)(v_\varepsilon(s))^2\|_{L^2} ds$$

$$+ \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\| \cdot \|g_2(x,s,u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon(s) - g_2(x,s,v_\varepsilon)\partial_x v_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds.$$

U cilju dobijanja $\mathcal{N}$-ograničenja za $\|\partial_x^2\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ trebalo bi oceniti svaki sabirak u prethodnoj sumi. Daćemo proceduru ocenjivanja samo za dva sabirka, odnosno, za treći i peti sabirak.

S obzirom da funkcija $g_1$ ima ograničen drugi izvod po $u$, treći sabirak možemo oceniti kao u sledećoj nejednakosti

$$\begin{aligned}
&\|\partial_u g_1(\cdot,s,u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon(s))^2 - \partial_u g_1(\cdot,s,v_\varepsilon)(\partial_x v_\varepsilon(s))^2\|_{L^2} \\
&\quad \leq \|\partial_u g_1(\cdot,s,u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon(s))^2 - \partial_u g_1(\cdot,s,v_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon(s))^2\|_{L^2} \\
&\qquad + \|\partial_u g_1(\cdot,s,v_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon(s))^2 - \partial_u g_1(\cdot,s,v_\varepsilon)(\partial_x v_\varepsilon(s))^2\|_{L^2} \\
&\quad \leq \|\partial_u^2 g_1(\cdot,s,\tilde{y})\|_{L^\infty}\|(\partial_x u_\varepsilon(s))^2\|_{L^2}\|u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} \\
&\qquad + \|\partial_u g_1(\cdot,s,v_\varepsilon)\|_{L^\infty}\|(\partial_x u_\varepsilon(s))^2 - (\partial_x v_\varepsilon(s))^2\|_{L^2} \\
&\quad \leq C_1\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|\omega_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} \\
&\qquad + C_2\|\partial_x\omega_\varepsilon(s)\|_{L^2}(\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} + \|\partial_x v_\varepsilon(s)\|_{L^\infty})
\end{aligned}$$

$$\leq C_1\|u_\varepsilon(s)\|_{H^2}\|\partial_x u_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|\omega_\varepsilon(s)\|_{H^2}$$
$$+C_2\|\partial_x\omega_\varepsilon(s)\|_{L^2}(\|u_\varepsilon(s)\|_{H^2}+\|v_\varepsilon(s)\|_{H^2}),$$

za neku funkciju $\tilde{y} \in H^2(\mathbb{R})$.

Budući da je $g_1$ Lipšicova funkcija u odnosu na $u$, peti sabirak se može oceniti kao

$$\begin{aligned}
&\|g_1(x,s,u_\varepsilon)\partial_x^2 u_\varepsilon - g_1(x,s,v_\varepsilon)\partial_x^2 v_\varepsilon\|_{L^2}\\
&\quad\leq \|g_1(x,s,u_\varepsilon)\partial_x^2 u_\varepsilon - g_1(x,s,v_\varepsilon)\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2}\\
&\qquad+\|g_1(x,s,v_\varepsilon)\partial_x^2 u_\varepsilon - g_1(x,s,v_\varepsilon)\partial_x^2 v_\varepsilon\|_{L^2}\\
&\quad\leq C\|\omega_\varepsilon\|_{L^\infty}\|\partial_x^2 u_\varepsilon\|_{L^2}+\|g_1\|_{L^\infty}\|\partial_x^2\omega_\varepsilon\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Odgovarajuće ocene za ostale integralne sabirke dobijaju se na sličan način.

Pošto je $\omega_0 \in \mathcal{N}(H^2(\mathbb{R}))$ i $N_\varepsilon \in \mathcal{N}([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$, primena Gronvalove nejednakosti implicira postojanje $\mathcal{N}$-ograničenja za $\|\partial_x^2\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$. Prema tome, $\omega_\varepsilon := u_\varepsilon - v_\varepsilon \in \mathcal{N}([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$, odnosno, rešenje je jedinstveno. □

### 3.2.3 Prostorno frakcione advektivno-difuzione jednačine

U ovom poglavlju kombinujući rezultate dobijene u Teoremi 3.1 i Teoremi 3.2, dobijamo odgovarajuće tvrđenje za prostorno frakcione advektivno-difuzione jednačine

$$\frac{d}{dt}u(t) = -a(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u(t) + b(x,t)\mathcal{D}_+^\beta u(t) + f(\cdot,t,u), \tag{3.18}$$

sa varijabilnim koeficijentima $a$ i $b$, $0<\alpha<1$ i $1<\beta<2$. Prostor rešenja za razmatrani sistem od $n$ jednačina biće Kolomboova algebra data sa $(\mathcal{G}([0,\infty) : H^2(\mathbb{R})))^n$.

**Teorema 3.3** *Neka je $0<\alpha<1$ i $1<\beta<2$. Pretpostavimo da su $f(x,t,u) = (f_1(x,t,u),\ldots,f_n(x,t,u))$, $\partial_u f(x,t,u)$ i $\partial_x f(x,t,u)$ funkcije ograničenog tipa u smislu Definicije 3.5. Dalje, pretpostavimo da $u_0 \in (\mathcal{G}(H^2(\mathbb{R})))^n$ i $h_\varepsilon$ je mreža takva da je $h_\varepsilon = o((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{1/5})$, za $\varepsilon \to 0$.*

*Pretpostavimo takođe da je operator $\widetilde{A}^{\alpha,\beta} \in \mathcal{S}\mathrm{G}((H^2(\mathbb{R}))^n)$ reprezentovan preko mreže operatora sa*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{A}_\varepsilon^{\alpha,\beta} : (H^2(\mathbb{R}))^n \to (H^2(\mathbb{R}))^n,\\
&\widetilde{A}_\varepsilon^{\alpha,\beta} u_\varepsilon = -a_\varepsilon(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}) + b_\varepsilon(\mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}),
\end{aligned}$$

*gde $a_\varepsilon$ i $b_\varepsilon$ zadovoljavaju iste uslove kao $\lambda_\varepsilon$ u formulaciji Teoreme 3.2.*

*Tada, za svako $0 < \alpha < 1$ i $1 < \beta < 2$, postoji jedinstveno uopšteno rešenje $u \in (\mathcal{G}([0,\infty) : H^2(\mathbb{R})))^n$ Košijevog problema*

$$\frac{d}{dt}u(t) = \widetilde{A}^{\alpha,\beta}u(t) + f(\cdot,t,u), \quad u(0) = u_0, \tag{3.19}$$

*čiji je reprezent*

$$u^i_\varepsilon(t) = S^{\alpha,\beta}_\varepsilon(t)u^i_{0\varepsilon} + \int_0^t S^{\alpha,\beta}_\varepsilon(t-s)f^i(\cdot,s,u_\varepsilon)ds, \;\; i = 1,\ldots,n,$$

*gde je $S^{\alpha,\beta} \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}((H^2(\mathbb{R}))^n))$ uniformno neprekidna Kolomboova polugrupa generisana sa $\widetilde{A}^{\alpha,\beta}$.*

**Dokaz:**

Da je operator $\widetilde{A}^{\alpha,\beta}$ loglog$1/\varepsilon-$tipa, odnosno, infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S^{\alpha,\beta} \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}((H^2(\mathbb{R}))^n))$, kao i da je $S^{\alpha,\beta}$ log$1/\varepsilon-$tipa, dokazuje se kombinujući (3.9), (3.10), odnosno, (3.15), razmatrajući pri tome $a_\varepsilon$ i $b_\varepsilon$ umesto $\lambda_\varepsilon$. Egzistencija i jedinstvenost rešenja Košijevog problema (3.19) dokazuje se ponavljajući procedure opisane u Teoremi 3.1 i Teoremi 3.2. □

### 3.2.4 Asociranost neregularizovanog i odgovarajućeg regularizovanog frakcionog operatora

U narednoj propoziciji opravdavamo korišćenje regularizovanog frakcionog operatora uvedenog u Teoremi 3.1, odnosno, u slučaju prostorno frakcionih advektivnih jednačina. Tačnije, pokazujemo da se pod određenim uslovima, umesto neregularizovanog frakcionog operatora $A^\alpha u = -\lambda(x,t)\mathcal{D}^\alpha_+ u$, $0 < \alpha < 1$, gde $\lambda \in (L^\infty(\mathbb{R}))^{n\times n}$ i $u \in (H^1(\mathbb{R}))^n$, može razmatrati odgovarajući regularizovani frakcioni operator $\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon u = -\lambda_\varepsilon(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_+ u * \phi_{h_\varepsilon})$, za pogodno odabrane $\lambda_\varepsilon(x,t)$ i $\phi_{h_\varepsilon}$. Podsetimo, regularizacijom se neograničeni frakcioni operator transformisao u ograničeni (integralni) operator.

Slični argumenti važiće i u slučaju prostorno frakcionih difuzionih jednačina, odnosno, prostorno frakcionih advektivno-difuzionih jednačina (Napomena 3.2 i Napomena 3.3). Naime, uz dodatne prepostavke nametnute na rešenje, odnosno, koeficijente, neregularizovani i odgovarajući regularizovani frakcioni operatori biće takođe $L^2-$asocirani.

**Propozicija 3.2** *Neka je $0 < \alpha < 1$ i $u \in (H^1(\mathbb{R}))^n$. Dalje, neka je $A^\alpha$ operator dat sa $A^\alpha u = -\lambda(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u$, gde je $\lambda \in (L^\infty(\mathbb{R}))^{n\times n}$ dijagonalna matrica i neka je $\widetilde{A}_\varepsilon^\alpha$ operator dat sa $\widetilde{A}_\varepsilon^\alpha u = -\lambda_\varepsilon(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha u * \phi_{h_\varepsilon})$, gde je $\lambda_\varepsilon(x,t) = \lambda(x,t) * \phi_{h_\varepsilon}$ takvo da*

$$\|\partial_x \lambda(x,t)\|_{L^\infty} \leq g_\varepsilon^{-M}, \tag{3.20}$$

*za neko $M > 0$ i $g_\varepsilon = \log h_\varepsilon$, $h_\varepsilon < C\log\frac{1}{\varepsilon}$.*

*Tada su frakcioni operatori $A^\alpha$ i $\widetilde{A}_\varepsilon^\alpha$ $L^2-$asocirani kada $\varepsilon \to 0$, to jest za svako $u \in (H^1(\mathbb{R}))^n$, važi*

$$\|(A^\alpha - \widetilde{A}_\varepsilon^\alpha)u\|_{L^2} \to 0, \ \ \varepsilon \to 0.$$

**Dokaz:**

Izaberimo $u \in (H^1(\mathbb{R}))^n$. Tada imamo

$$\begin{aligned}(A^\alpha - \widetilde{A}_\varepsilon^\alpha)u &= -\lambda(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u + \lambda_\varepsilon(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha u * \phi_{h_\varepsilon}) \\ &= -\lambda(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha u - \mathcal{D}_+^\alpha u * \phi_{h_\varepsilon}) \\ &+ (\lambda_\varepsilon(x,t) - \lambda(x,t))(\mathcal{D}_+^\alpha u * \phi_{h_\varepsilon}),\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\|(A^\alpha - \widetilde{A}_\varepsilon^\alpha)u\|_{L^2} &\leq \sum_{i=1}^n \|\lambda^i\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u^i - \mathcal{D}_+^\alpha u^i * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u^i * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|\lambda^i\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u^i - \mathcal{D}_+^\alpha u^i * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \|\lambda_\varepsilon^i - \lambda^i\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u^i\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Fiksirajmo sada $t > 0$. Za svako $i = 1, ..., n$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\|\lambda^i(\cdot,t) - \lambda^i_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty} &= \|\lambda^i(\cdot,t) - \lambda^i(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^\infty} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_{|y|\le h_\varepsilon} \phi_{h_\varepsilon}(y)(\lambda^i(x,t) - \lambda^i(x-y,t))dy \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_{|y|\le h_\varepsilon} \phi_{h_\varepsilon}(y)(\int\limits_0^1 \partial_x \lambda^i(x-\sigma y,t)d\sigma)ydy \right| \\
&\le Cg_\varepsilon^{-M} h_\varepsilon^2 \to 0, \;\; \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Prethodna konvergencija ka 0 sledi iz $g_\varepsilon = \log h_\varepsilon$ i osobine (3.20).

S obzirom da $u \in (H^1(\mathbb{R}))^n$, proizilazi da $\mathcal{D}^\alpha_+ u^i \in L^2(\mathbb{R})$, $i = 1, ..., n$, pa važi

$$\|\mathcal{D}^\alpha_+ u^i - \mathcal{D}^\alpha_+ u^i * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \to 0, \;\; \varepsilon \to 0.$$

Na kraju dobijamo

$$\|(A^\alpha - \widetilde{A}^\alpha_\varepsilon)u\|_{L^2} \to 0, \;\; \varepsilon \to 0. \qquad \square$$

**Napomena 3.1** *Da bi operatori $A^\alpha$ i $\widetilde{A}^\alpha_\varepsilon$ bili $L^2-$asocirani dovoljno je da bude zadovoljeno*

$$\|\lambda(\cdot,t) - \lambda_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.21}$$

*Dodatni uslovi rasta nametnuti na koeficijente, pretpostavljeni su da bi obezbedili egzistenciju i jedinstvenost rešenja regularizovanog problema u okruženju Kolomboovih algebri (pogledati Teoremu 3.1).*

**Napomena 3.2** *Slično tvrđenju datom u Propoziciji 3.2 može se formulisati i dokazati tvrđenje, ali sada sa pretpostavkom da $u$ pripada $(H^2(\mathbb{R}))^n$ umesto $(H^1(\mathbb{R}))^n$, koje obezbeđuje, pod određenim uslovima, $L^2-$asociranost neregularizovanog i odgovarajućeg regularizovanog operatora u slučaju prostorno frakcionih difuzionih jednačina razmatranih u Teoremi 3.2.*

**Napomena 3.3** *$L^2-$asociranost neregularizovanog operatora*

$$A^{\alpha,\beta}u = -a(x,t)\mathcal{D}^\alpha_+ u + b(x,t)\mathcal{D}^\beta_+ u, \;\; 0 < \alpha < 1, \; 1 < \beta < 2,$$

*i odgovarajućeg regularizovanog operatora u slučaju prostorno frakcionih advektivno-difuzionih jednačina razmatranih u Teoremi 3.3, može se takođe pokazati pod određenim dodatnim uslovima rasta nametnutim na koeficijente (videti Propoziciju 3.2 i Napomenu 3.2).*

### 3.2.5 Asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane jednačine

U prethodnoj sekciji pokazali smo da su, pod određenim uslovima rasta nametnutim na koeficijente u jednačini, neregularizovani i odgovarajući regularizovani frakcioni operatori $L^2-$asocirani. Sada pokazujemo dodatno, da su i rešenja neregularizovanog i odgovarajućeg regularizovanog Košijevog problema takođe $L^2-$asocirana, uz pretpostavku da rešenje neregularizovanog problema postoji. Preciznije, pokazujemo $L^2-$asociranost rešenja polaznog Košijevog problema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= Au(t) + f(\cdot, t, u) \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

gde je $A$ prostorno frakcioni diferencijalni operator dat preko množitelja frakcionog izvoda, i odgovarajućeg aproksimativnog problema datog sa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= \widetilde{A}u(t) + f(\cdot, t, u) \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

gde je $\widetilde{A}$ uopšteni operator Kolomboovog tipa, reprezentovan preko mreže operatora dobijenih regularizacijom odgovarajućih frakcionih izvoda.

Kao i u slučaju asociranosti operatora, razmatraćemo opet prostorno frakcione advektivne, difuzione, kao i advektivno-difuzione jednačine. Rezultate započinjemo sa prostorno frakcionim advektivnim jednačinama:

**Teorema 3.4** *Neka je $0 < \alpha < 1$. Pretpostavimo da postoji rešenje $u_\varepsilon$ neregularizovane jednačine:*

$$\partial_t u_\varepsilon(x,t) = -\lambda(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t) + f(x,t,u_\varepsilon), \ \ u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}, \tag{3.22}$$

*gde $\lambda \in H^2(\mathbb{R})$ i $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$, i neka je $v_\varepsilon$ rešenje odgovarajuće regularizovane jednačine sa istim početnim podacima:*

$$\partial_t v_\varepsilon(x,t) = -\lambda(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha v_\varepsilon(x,t) * \phi_{h_\varepsilon}(x)) + f(x,t,v_\varepsilon), \ \ v_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}, \tag{3.23}$$

*gde je $h_\varepsilon = o\Big((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{3}}\Big)$, dok je $f$ funkcija ograničenog tipa u smislu Definicije 3.5.*

*Tada su rešenja $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ $L^2-$asocirana, to jest za svako $T > 0$, važi*

$$\sup_{t\in[0,T)} \|u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0, \ \ za \ \ \varepsilon \to 0.$$

**Dokaz:**

S obzirom da $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ zadovoljavaju jednačine (3.22) i (3.23), redom, imamo

$$\begin{aligned}\partial_t(u_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x,t)) &= -\lambda(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha(u_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x,t))*\phi_{h_\varepsilon}(x))\\ &\quad -\lambda(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t)-\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t)*\phi_{h_\varepsilon}(x))\\ &\quad +f(x,t,u_\varepsilon)-f(x,t,v_\varepsilon).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Označimo $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Tada (3.24) postaje

$$\frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(t) = A_\varepsilon^\alpha\omega_\varepsilon(t) + f(\cdot,t,u_\varepsilon) - f(\cdot,t,v_\varepsilon) + N_\varepsilon(t),\;\; \omega_\varepsilon(0)=0,\tag{3.25}$$

gde je $A_\varepsilon^\alpha\omega_\varepsilon = -\lambda(\mathcal{D}_+^\alpha\omega_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon})$ i $N_\varepsilon(\cdot,t) = -\lambda(\cdot,t)(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon})$. Prema tome, $\omega_\varepsilon$ zadovoljava jednačinu

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon(t) &= \int_0^t S_\varepsilon^\alpha(t-s)(f(\cdot,s,u_\varepsilon)-f(\cdot,s,v_\varepsilon))ds\\ &\quad +\int_0^t S_\varepsilon^\alpha(t-s)N_\varepsilon(\cdot,s)ds,\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)(f(\cdot,s,u_\varepsilon)-f(\cdot,s,v_\varepsilon))\|_{L^2}ds\\ &\quad +\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)N_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^2}ds.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Budući da je $S_\varepsilon^\alpha(t) = e^{tA_\varepsilon^\alpha}$ i $\|A_\varepsilon^\alpha u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|u_\varepsilon\|_{H^1}$, gde konstanta $C$ ne zavisi od $\varepsilon$ ($C = \|\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}$), dobijamo $\|S_\varepsilon^\alpha u_\varepsilon\|_{L^2} \leq e^{tC}\|u_\varepsilon\|_{H^1}$, za $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R})$. Znajući da važi $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$, sledi $\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ i $\partial_x\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon = \mathcal{D}_+^{1+\alpha}u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ (videti 1.10).

Pokažimo

$$\|\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \to 0,\;\; \varepsilon\to 0.\tag{3.27}$$

Najpre imamo

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)-\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon}\right\|_{L^2}^2=\left\|\widehat{\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon}(\xi,t)-\widehat{\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon}(\xi,t)\widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi)\right\|_{L^2}^2\\
&=\left\|\widehat{\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon}(\xi,t)(1-\widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi))\right\|_{L^2}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon}(\xi,t)\right|^2\cdot\left|1-\widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi)\right|^2d\xi.
\end{aligned}\tag{3.28}$$

Furijeova transformacija molifajera $\phi_{h_\varepsilon}$ ima oblik

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}\phi_{h_\varepsilon}(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}h_\varepsilon\phi(xh_\varepsilon)dx\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy\xi/h_\varepsilon}\phi(y)dy=\widehat{\phi}(\xi/h_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Kako $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ sledi $\widehat{\phi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, gde je $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Švarcov prostor, pa je zadovoljeno:

**(i)** $|\widehat{\phi}(\xi/h_\varepsilon)|\le C$,

**(ii)** $\lim_{\varepsilon\to0}\widehat{\phi}(\xi/h_\varepsilon)=\widehat{\phi}(0)=1$.

S obzirom da je podintegralna funkcija u (3.28) ocenjena sa $C|\widehat{\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon}(\xi,t)|^2$, kao i $\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon\in L^2(\mathbb{R})$, na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi $\|\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)-\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2}\to0$, $\varepsilon\to0$. Na isti način se pokazuje $\|\partial_x\left(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)-\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon}\right)\|_{L^2}=\|\mathcal{D}_+^{1+\alpha}u_\varepsilon(\cdot,t)-\mathcal{D}_+^{1+\alpha}u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2}\to 0$, $\varepsilon\to0$.

Međutim

$$\|N_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2}\le\|\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)-\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2},$$

i

$$\begin{aligned}
\|\partial_xN_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2} &\le \|\partial_x\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)-\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2}\\
&\quad+\|\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|\partial_x(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)-\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon})\|_{L^2},
\end{aligned}$$

što daje $\|N_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1}\to0$, za $\varepsilon\to0$. (Primetimo da zbog $\lambda\in H^2(\mathbb{R})$, iz Teoreme Soboljeva o potapanju, sledi $\lambda\in L^\infty(\mathbb{R})$ i $\partial_x\lambda\in L^\infty(\mathbb{R})$). Ovo dalje implicira $\|S_\varepsilon^\alpha(t-s)N_\varepsilon(s)\|_{L^2}\to0$, za $\varepsilon\to0$. Koristeći $\|\partial_uf\|_{L^\infty}\le C_1<\infty$, kao i ocenu

$$\|f(\cdot,s,u_\varepsilon)-f(\cdot,s,v_\varepsilon)\|_{L^2}\le\|\partial_uf\|_{L^\infty}\cdot\|u_\varepsilon(s)-v_\varepsilon(s)\|_{L^2}\le C_1\|\omega_\varepsilon(s)\|_{L^2},$$

primena Gronvalove nejednakosti na (3.26) daje

$$\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C_1 \int\limits_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)N_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^2} ds \cdot \exp\Bigg( \int\limits_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\| ds \Bigg),$$

to jest $\sup_{t\in[0,T)} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$. □

Sličan rezultat važi i za prostorno frakcione difuzione jednačine, sa izuzetkom da je u tom slučaju potrebno nametnuti strožije uslove na rešenje $u$ i koeficijente $\lambda$. Odgovarajuće tvrđenje je navedeno u narednoj teoremi i može se dokazati koristeći slične argumente kao u dokazu Teoreme 3.4.

**Teorema 3.5** *Neka je* $1 < \alpha < 2$. *Pretpostavimo da postoji rešenje* $u_\varepsilon$ *neregularizovane jednačine:*

$$\partial_t u_\varepsilon(x,t) = \lambda(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t) + f(x,t,u_\varepsilon), \quad u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon},$$

*gde* $\lambda \in H^3(\mathbb{R})$ *i* $u_\varepsilon \in H^4(\mathbb{R})$, *i neka je* $v_\varepsilon$ *rešenje odgovarajuće regularizovane jednačine sa istim početnim podacima:*

$$\partial_t v_\varepsilon(x,t) = \lambda(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha v_\varepsilon(x,t) * \phi_{h_\varepsilon}(x)) + f(x,t,v_\varepsilon), \quad v_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon},$$

*pri čemu je* $h_\varepsilon = o\Big((\mathrm{loglog} 1/\varepsilon)^{\frac{1}{5}}\Big)$, *dok su* $f$, $\partial_u f$ *i* $\partial_x f$ *funkcije ograničenog tipa u smislu Definicije 3.5.*

*Tada su rešenja* $u_\varepsilon$ *i* $v_\varepsilon$ $L^2-$*asocirana, to jest za svako* $T > 0$, *važi*

$$\sup_{t\in[0,T)} \|u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0, \ \text{za} \ \varepsilon \to 0.$$

**Dokaz:**

Dokaz tvrđenja se bazira na dokazu Teoreme 3.4. Uvedimo najpre oznaku $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Ponavljajući proceduru korišćenu u dokazu Teoreme 3.4, na osnovu koje su dobijene relacije (3.24), (3.25), odnosno, (3.26), dobija se ocena

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \ &\leq \ \int\limits_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)(f(\cdot,s,u_\varepsilon) - f(\cdot,s,v_\varepsilon))\|_{L^2} ds \\ &\quad + \int\limits_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)N_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^2} ds, \end{aligned} \tag{3.29}$$

pri čemu je sa $A^\alpha_\varepsilon \omega_\varepsilon = \lambda(\mathcal{D}^\alpha_+ \omega_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon})$ dat reprezent uopštenog operatora $A^\alpha$ koji generiše uniformno neprekidnu Kolomboovu polugrupu operatora $S^\alpha$, dok je $N_\varepsilon(\cdot,t) = \lambda(\cdot,t)(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon})$.

Kako je $S^\alpha_\varepsilon(t) = e^{tA^\alpha_\varepsilon}$ i $\|A^\alpha_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|u_\varepsilon\|_{H^2}$, gde konstanta $C$ ne zavisi od $\varepsilon$ ($C = \|\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}$), dobijamo $\|S^\alpha_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} \leq e^{tC}\|u_\varepsilon\|_{H^2}$, za $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$. Štaviše, znajući da važi $u_\varepsilon \in H^4(\mathbb{R})$, sledi $\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$, $\partial_x \mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon = \mathcal{D}^{1+\alpha}_+ u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$, kao i $\partial^2_x \mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon = \mathcal{D}^{2+\alpha}_+ u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ (videti 1.10).

U odnosu na dokaz Teoreme 3.4, osim ocena $\|N_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2}$ i $\|\partial_x N_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2}$, u ovom slučaju imamo dodatnu ocenu

$$\begin{aligned}
\|\partial^2_x N_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2} \leq\ & \|\partial^2_x \lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty} \|\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \\
& + 2\|\partial_x \lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty} \|\mathcal{D}^{1+\alpha}_+ u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}^{1+\alpha}_+ u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \\
& + \|\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty} \|\mathcal{D}^{2+\alpha}_+ u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}^{2+\alpha}_+ u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2},
\end{aligned}$$

pa dokazujući odgovarajuće konvergencije iz prethodnog niza nejednakosti, kao što je urađeno u (3.27), sledi $\|N_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$.

Opet primena Gronvalove nejednakosti, ali sada na (3.29), daje

$$\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C_1 \int_0^t \|S^\alpha_\varepsilon(t-s) N_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^2} ds \cdot \exp\left( \int_0^t \|S^\alpha_\varepsilon(t-s)\| ds \right),$$

to jest $\sup_{t\in[0,T)} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$. □

Kombinujući rezultate dobijene u Teoremi 3.4 i Teoremi 3.5, lako se može pokazati $L^2-$asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane prostorno frakcione advektivno-difuzione jednačine:

**Teorema 3.6** *Neka je $0 < \alpha < 1$ i $1 < \beta < 2$. Pretpostavimo da postoji rešenje $u_\varepsilon$ neregularizovane jednačine:*

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_\varepsilon(x,t) = -a(x,t)\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon(x,t) + b(x,t)\mathcal{D}^\beta_+ u_\varepsilon(x,t) + f(x,t,u_\varepsilon), \\
&u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon},
\end{aligned}$$

*gde $a, b \in H^3(\mathbb{R})$ i $u_\varepsilon \in H^4(\mathbb{R})$, i neka je $v_\varepsilon$ rešenje odgovarajuće regularizovane jednačine sa istim početnim podacima:*

$$\begin{aligned}
\partial_t v_\varepsilon(x,t) = & -a(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_+ v_\varepsilon(x,t) * \phi_{h_\varepsilon}(x)) + b(x,t)(\mathcal{D}^\beta_+ v_\varepsilon(x,t) * \phi_{h_\varepsilon}(x)) \\
& + f(x,t,v_\varepsilon), \\
v_\varepsilon(0) = & \ u_{0\varepsilon},
\end{aligned}$$

*pri čemu je* $h_\varepsilon = o\Big((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{5}}\Big)$*, dok su* $f$*,* $\partial_u f$ *i* $\partial_x f$ *funkcije ograničenog tipa u smislu Definicije 3.5.*

*Tada su rešenja* $u_\varepsilon$ *i* $v_\varepsilon$ $L^2-$*asocirana, to jest za svako* $T > 0$*, važi*

$$\sup_{t\in[0,T)} \|u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0, \ za \ \varepsilon \to 0.$$

**Dokaz:**

Dokaz tvrđenja je baziran na dokazu Teoreme 3.4, odnosno, Teoreme 3.5. Označimo $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Ocena za $\omega_\varepsilon$ data je sa

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \int_0^t \|S_\varepsilon^{\alpha,\beta}(t-s)(f(\cdot,s,u_\varepsilon) - f(\cdot,s,v_\varepsilon))\|_{L^2} ds \\ &+ \int_0^t \|S_\varepsilon^{\alpha,\beta}(t-s)N_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^2} ds, \end{aligned} \tag{3.30}$$

pri čemu je sa $A_\varepsilon^{\alpha,\beta}\omega_\varepsilon = -a(\mathcal{D}_+^\alpha \omega_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}) + b(\mathcal{D}_+^\beta \omega_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon})$ dat reprezent uopštenog operatora $A^{\alpha,\beta}$ koji generiše uniformno neprekidnu Kolomboovu polugrupu operatora $S^{\alpha,\beta}$, dok je

$$N_\varepsilon(\cdot,t) = -a(\cdot,t)(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon}) + b(\cdot,t)(\mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon}).$$

Kako je $S_\varepsilon^{\alpha,\beta}(t) = e^{tA_\varepsilon^{\alpha,\beta}}$ i $\|A_\varepsilon^{\alpha,\beta}u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|u_\varepsilon\|_{H^2}$, gde konstanta $C$ ne zavisi od $\varepsilon$ ($C = \max\{\|a(\cdot,t)\|_{L^\infty}, \|b(\cdot,t)\|_{L^\infty}\}$), dobijamo $\|S_\varepsilon^{\alpha,\beta}u_\varepsilon\|_{L^2} \leq e^{tC}\|u_\varepsilon\|_{H^2}$, za $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$. Da $\|N_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$, dokazuje se koristeći proceduru iz dokaza Teoreme 3.4, odnosno, Teoreme 3.5.

Na kraju, nakon primene Gronvalove nejednakosti na (3.30) dobija se

$$\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C_1 \int_0^t \|S_\varepsilon^{\alpha,\beta}(t-s)N_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^2} ds \cdot \exp\Bigg(\int_0^t \|S_\varepsilon^{\alpha,\beta}(t-s)\| ds\Bigg),$$

to jest $\sup_{t\in[0,T)} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$. $\square$

## 3.3 Proširenje prostora rešenja na frakcione Kolomboove algebre

Prilikom rešavanja frakcionih jednačina oblika (3.3) u Poglavlju 3.2, prostor rešenja bio je Kolomboova algebra definisana na prostoru Soboljeva celobrojnog reda. Cilj ovog poglavlja jeste proširenje prostora rešenja na Kolomboove algebre definisane na prostorima Soboljeva proizvoljnog reda, to jest na takozvane frakcione Kolomboove algebre.

U slučaju prostorno frakcionih advektivnih jednačina, prethodni prostor rešenja $\mathcal{G}([0,\infty) : H^1(\mathbb{R}))$ proširujemo na $\mathcal{G}([0,\infty) : H^\beta(\mathbb{R}))$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$. U slučaju prostorno frakcionih difuzionih jednačina, odnosno, prostorno frakcionih advektivno-difuzionih jednačina, prostor rešenja $\mathcal{G}([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$ proširujemo na $\mathcal{G}([0,\infty) : H^\alpha(\mathbb{R}))$, $1 < \alpha < 2$.

Slično proceduri rešavanja pomenutih jednačina na Kolomboovim algebrama definisanim na prostorima Soboljeva celobrojnog reda, opet egzistenciju i jedinstvenost rešenja najpre dokazujemo za prostorno frakcione advektivne jednačine (Teorema 3.7), odnosno, prostorno frakcione difuzione jednačine (Teorema 3.8), a zatim dobijene rezultate koristimo za prostorno frakcione advektivno-difuzione jednačine (Teorema 3.9). Takođe pokazujemo asociranost neregularizovanih i odgovarajućih regularizovanih frakcionih operatora (Odeljak 3.3.4), odnosno, asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane jednačine (Odeljak 3.3.5).

### 3.3.1 Slučaj prostorno frakcionih advektivnih jednačina

**Teorema 3.7** *Neka je $0 < \alpha < 1$ i $\beta_\alpha = \max\{\frac{1}{2} + \eta, \alpha\}$, za proizvoljno malo $\eta > 0$. Razmotrimo Košijev problem*

$$\frac{d}{dt}u(t) = \widetilde{A}^\alpha_\lambda u(t) + f(u(t)), \quad u(0) = u_0^{\beta_\alpha}, \tag{3.31}$$

*gde:*

1. *Operator $\widetilde{A}^\alpha_\lambda \in \mathcal{S}\mathrm{G}(H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$ je reprezentovan preko mreže operatora*

$$\begin{aligned}&\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}) \to H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}),\\ &\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} u_\varepsilon = \big(-\lambda_\varepsilon(\mathcal{D}^\alpha_+ u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon})\big) * \phi_{h_\varepsilon},\end{aligned}$$

   *pretpostavljajući pri tome da je $\lambda_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ takvo da važi $\widehat{\lambda_\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R})$, $\|\widehat{\lambda_\varepsilon}\|_{L^1} = \mathcal{O}\Big((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\Big)$ i $h_\varepsilon = o\Big((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{6}}\Big)$,*

2. *$u_0^{\beta_\alpha} \in \mathcal{G}(H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$,*

3. *$f \in C^2(\mathbb{C})$ je takvo da su $f$ i $f'$ Lipšicove funkcije na $\mathbb{R}$ sa osobinom $f(0) = f'(0) = 0$.*

*Tada, za svako* $0 < \alpha < 1$, *postoji jedinstveno uopšteno rešenje* $u \in \mathcal{G}([0,\infty) : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$ *problema (3.31) dato reprezentom*

$$u_\varepsilon(t) = S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t)u^{\beta_\alpha}_{0\varepsilon} + \int_0^t S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)f(u_\varepsilon(\cdot,s))ds, \tag{3.32}$$

*pri čemu je* $S^\alpha_\lambda \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R})))$ *uniformno neprekidna Kolomboova polugrupa generisana sa* $\widetilde{A}^\alpha_\lambda$.

Pre dokazivanja tvrđenja datog u Teoremi 3.7 navešćemo nekoliko veoma važnih napomena.

**Napomena 3.4** *S obzirom da je za primenu Teoreme Soboljeva o potapanju (Teorema 1.1) neophodna stroga nejednakost* $\beta_\alpha > \frac{1}{2}$, *uzima se da je red prostora Soboljeva veći od* $\frac{1}{2}$. *Zato uzimamo* $\beta_\alpha = \max\{\frac{1}{2} + \eta, \alpha\}$, *sa proizvoljno malim* $\eta > 0$.

**Napomena 3.5** *Primetimo da regularizacija operatora* $\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon}$ *uvedena u Teoremi 3.7 sadrži dve konvolucije, jednu zbog regularizacije samog frakcionog izvoda i drugu zbog regularizacije operatora datog preko množitelja frakcionog izvoda. Dok je u Teoremi 3.1 prva konvolucija bila dovoljna, dodatna regularizacija množitelja ovde je neophodna da bismo obezbedili ograničenost operatora* $\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon}$ *na prostoru* $H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R})$.

**Napomena 3.6** *Kako je* $\lambda(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{\lambda}(\xi)d\xi$, *primetimo da* $\widehat{\lambda} \in L^1(\mathbb{R})$ *implicira* $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$. *Prema tome, za skup* $\widehat{L^1} = \{\lambda \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{\lambda} \in L^1(\mathbb{R})\}$, *važi inkluzija* $\widehat{L^1} \subset L^\infty$.

**Napomena 3.7** *Neke od* $L^1(\mathbb{R})$ *funkcija čija Furijeova transformacija takođe pripada prostoru* $L^1(\mathbb{R})$ *su:*

$$\frac{\sin x}{x}, e^{-x^2}, \frac{1}{1+x^2}, \dots$$

*U stvari, sve glatke funkcije sa kompaktnim nosačem, kao i funkcije iz Švarcovog prostora, zadovoljavaju pomenuti uslov.*

**Napomena 3.8** *Primetimo da, na primer, funkcije* $\sqrt{1+z^2}-1$, $1-\cos z$, $z-\sin z$ *zadovoljavaju uslov (3) naveden u Teoremi 3.7.*

**Dokaz:**

Izaberimo $u_\varepsilon \in H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R})$. Uvodeći oznaku $G_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(u_\varepsilon * \mathcal{D}_+^\alpha \phi_{h_\varepsilon})$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} u_\varepsilon\|_{H^{\beta_\alpha}} &= \|\langle\xi\rangle^{\beta_\alpha} \widehat{\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} u_\varepsilon}(\xi)\|_{L^2} = \|\langle\xi\rangle^{\beta_\alpha} \widehat{G_\varepsilon}(\xi)\ \widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi)\|_{L^2} \\
&\leq \|\langle\xi\rangle^{\beta_\alpha} \widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi)\|_{L^\infty} \|\widehat{\lambda}_\varepsilon * (\widehat{u_\varepsilon}\ \widehat{\mathcal{D}_+^\alpha \phi_{h_\varepsilon}})\|_{L^2} \\
&\leq \|\langle\xi\rangle^{\beta_\alpha} \widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi)\|_{L^\infty} \|\widehat{\lambda}_\varepsilon\|_{L^1} \|\widehat{u_\varepsilon}\|_{L^2} \|\widehat{\mathcal{D}_+^\alpha \phi_{h_\varepsilon}}\|_{L^\infty}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Budući da je

$$|\langle\xi\rangle^{\beta_\alpha} \widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi)| \leq \big(1+|\xi|^2\big)\, |\widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi)|,$$

imamo

$$\begin{aligned}
\|\langle\xi\rangle^{\beta_\alpha} \widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi)\|_{L^\infty} &\leq \|\widehat{\phi_{h_\varepsilon}}(\xi)\|_{L^\infty} + \|\widehat{\partial_x^2 \phi_{h_\varepsilon}}(\xi)\|_{L^\infty} \\
&\leq \|\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^1} + \|\partial_x^2 \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^1} \leq C h_\varepsilon^2 \\
&= o\Big((\mathrm{loglog} 1/\varepsilon)^{\frac{1}{3}}\Big).
\end{aligned}$$

Slično dobijamo

$$\|\widehat{\mathcal{D}_+^\alpha \phi_{h_\varepsilon}}\|_{L^\infty} \leq C h_\varepsilon = o\Big((\mathrm{loglog} 1/\varepsilon)^{\frac{1}{6}}\Big).$$

Kako je $\alpha \leq \beta_\alpha$, iz (3.33) lako se dobija

$$\|\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} u_\varepsilon\|_{H^{\beta_\alpha}} \leq o\Big(\mathrm{loglog}\frac{1}{\varepsilon}\Big) \|u_\varepsilon\|_{H^{\beta_\alpha}}.$$

Prema tome, sledi da je $\widetilde{A}^\alpha_\lambda$ infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S^\alpha_\lambda \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R})))$, kao i da je ta polugrupa $\log 1/\varepsilon-$tipa. Kao što je dobro poznato, znamo da je (3.32) reprezent rešenja Košijevog problema (3.31).

Pokažimo da je to rešenje element prostora $\mathcal{G}([0,\infty) : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$. Zaista, s obzirom da su norme $\|\cdot\|_{H^{\beta_\alpha}}$ i $\|\cdot\|'_{H^{\beta_\alpha}}$, date sa (1.2) i (1.6), ekvivalentne imamo

$$\|u\|_{H^{\beta_\alpha}} \leq C_{\beta_\alpha} \|u\|'_{H^{\beta_\alpha}} \leq C_{\beta_\alpha} (\|u\|_{L^2} + \|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha} u\|_{L^2}), \qquad (3.34)$$

pa je za postojanje umerenog ograničenja za $\|u\|_{H^{\beta_\alpha}}$ dovoljno dokazati postojanje umerenog ograničenja za $\|u\|_{L^2}$, odnosno, $\|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha} u\|_{L^2}$.

Kako je $f$ Lipšicova funkcija na $\mathbb{R}$ i $f(0) = 0$ iz (3.32) dobija se

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t)u^{\beta_\alpha}_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int\limits_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)f(u_\varepsilon(\cdot,s))\|_{L^2}ds \\ &\leq \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t)\|\|u^{\beta_\alpha}_{0\varepsilon}\|_{L^2} + C\int\limits_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)\|\|u_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^2}ds,\end{aligned} \tag{3.35}$$

pa nakon primene Gronvalove nejednakosti na (3.35) imamo

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C\|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t)\|\|u^{\beta_\alpha}_{0\varepsilon}\|_{L^2}\cdot\exp\Bigg(\int\limits_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)\|ds\Bigg),$$

odakle sledi postojanje umerenog ograničenja za $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Iz (3.31) imamo

$$\left\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)\right\|_{L^2} \leq \|\widetilde{A}^\alpha_\lambda u_\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|f(u_\varepsilon(x,t))\|_{L^2},$$

pa postojanje umerenog ograničenja za $\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ neposredno sledi.

Ostaje da se dokaže postojanje umerenog ograničenja za $\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ u_\varepsilon\|_{L^2}$. Iz (3.32) i aproksimativnog lančanog pravila za Ljuvilov frakcioni izvod (Propozicija 1.5) imamo

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t)\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ u^{\beta_\alpha}_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int\limits_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ f(u_\varepsilon(x,s))\|_{L^2}ds \\ &\leq \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t)\|\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ u^{\beta_\alpha}_{0\varepsilon}\|_{L^2} + C\int\limits_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)\|\|f'(u_\varepsilon)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ u_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Primenjujući Gronvalovu nejednakost na (3.36) dobijamo

$$\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C\|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t)\|\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ u^{\beta_\alpha}_{0\varepsilon}\|_{L^2}\cdot\exp\Bigg(\int\limits_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)\|\|f'(u_\varepsilon)\|_{L^\infty}ds\Bigg),$$

odakle sledi postojanje umerenog ograničenja za $\|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha} u_\varepsilon\|_{L^2}$ . Prema tome, uzimajući u obzir (3.34), imamo $u \in \mathcal{G}([0,\infty) : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$.

Da bismo pokazali jedinstvenost rešenja na prostoru $\mathcal{G}([0,\infty) : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$, pretpostavićemo da postoje dva rešenja, $u$ i $v$, jednačine (3.31) i označićemo $w_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Tada $w_\varepsilon$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{d}{dt} w_\varepsilon(t) = \widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} w_\varepsilon(t) + f(u_\varepsilon(\cdot,t)) - f(v_\varepsilon(\cdot,t)) + N_\varepsilon^{\beta_\alpha}(t), \quad w_\varepsilon(0) = w_{0\varepsilon}^{\beta_\alpha}, \tag{3.37}$$

gde $N_\varepsilon^{\beta_\alpha}(t) \in \mathcal{N}([0,\infty) : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$ i $w_{0\varepsilon}^{\beta_\alpha} \in \mathcal{N}(H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$. U tom slučaju rešenje problema (3.37) je dato sa

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(t) &= S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t) w_{0\varepsilon}^{\beta_\alpha} + \int_0^t S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)(f(u_\varepsilon(\cdot,s) - f(v_\varepsilon(\cdot,s))ds \\ &\quad + \int_0^t S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s) N_\varepsilon^{\beta_\alpha}(s) ds, \end{aligned}$$

i važi

$$\begin{aligned} \|w_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t) w_{0\varepsilon}^{\beta_\alpha}\|_{L^2} + \int_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)(f(u_\varepsilon(\cdot,s) - f(v_\varepsilon(\cdot,s))\|_{L^2} ds \\ &\quad + \int_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s) N_\varepsilon^{\beta_\alpha}(s)\|_{L^2} ds. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Koristeći činjenicu da je $\|f'\|_{L^\infty} \leq C < \infty$ i

$$\|f(u_\varepsilon(x,s)) - f(v_\varepsilon(x,s))\|_{L^2} \leq \|f'\|_{L^\infty} \cdot \|u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s)\|_{L^2},$$

primenom Gronvalove nejednakosti na (3.38) dobija se

$$\begin{aligned} \|w_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \left( \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t) w_{0\varepsilon}^{\beta_\alpha}\|_{L^2} + \int_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s) N_\varepsilon^{\beta_\alpha}(s)\|_{L^2} ds \right) \\ &\quad \cdot \exp\left( \int_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)\| \|f'\|_{L^\infty} ds \right), \end{aligned}$$

to jest $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|w_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Jednačina (3.37) implicira

$$\left\|\frac{d}{dt}w_\varepsilon(t)\right\|_{L^2} \leq \|\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon}w_\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|f(u_\varepsilon(x,t)) - f(v_\varepsilon(x,t))\|_{L^2} + \|N^{\beta_\alpha}_\varepsilon(t)\|_{L^2}.$$

S obzirom da, kao što smo pokazali u prethodnom koraku, $\|w_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ ima $\mathcal{N}$-ograničenje i važi $N^{\beta_\alpha}_\varepsilon(t) \in \mathcal{N}([0,\infty) : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$, dobijamo da $\|\frac{d}{dt}w_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ ima $\mathcal{N}$-ograničenje takođe. Osim toga,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ w_\varepsilon\|_{L^2} &\leq \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t)\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ w^{\beta_\alpha}_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\ &+ \int_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+(f(u_\varepsilon(\cdot,s)) - f(v_\varepsilon(\cdot,s)))\|_{L^2}ds \\ &+ \int_0^t \|S^\alpha_{\lambda,\varepsilon}(t-s)\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ N^{\beta_\alpha}_\varepsilon(s)\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Iz teoreme o srednjoj vrednosti sledi

$$f(u_\varepsilon(\cdot,s)) - f(v_\varepsilon(\cdot,s)) = (u_\varepsilon(\cdot,s) - v_\varepsilon(\cdot,s))f'(\theta u_\varepsilon(\cdot,s) + (1-\theta)v_\varepsilon(\cdot,s)),$$

pri čemu je $0 < \theta < 1$. Uvodeći notaciju

$$F(\cdot,s) = f'(\theta u_\varepsilon(\cdot,s) + (1-\theta)v_\varepsilon(\cdot,s)), \tag{3.40}$$

primenom aproksimativnog Lajbnicovog pravila za Ljuvilov frakcioni izvod (Propozicija 1.7) dobijamo

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+(f(u_\varepsilon(\cdot,s)) - f(v_\varepsilon(\cdot,s)))\|_{L^2} = \|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+[F(\cdot,s)(u_\varepsilon(\cdot,s) - v_\varepsilon(\cdot,s))]\|_{L^2} \\ &\leq C\|F\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+(u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s))\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ F\|_{L^2}\|u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} \\ &\leq C\|F\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ w_\varepsilon(s)\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ F\|_{L^2}\|w_\varepsilon(s)\|_{H^{\beta_\alpha}}.\end{aligned}$$

Konačno, budući da $w^{\beta_\alpha}_{0\varepsilon} \in \mathcal{N}(H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$ i $N^{\beta_\alpha}_\varepsilon \in \mathcal{N}([0,\infty) : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$, nakon primene Gronvalove nejednakosti na (3.39) dobija se $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|\mathcal{D}^{\beta_\alpha}_+ w_\varepsilon(t)\|_{L^2}$. Prema tome, $w_\varepsilon := u_\varepsilon - v_\varepsilon \in \mathcal{N}([0,\infty) : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$, to jest dobijeno rešenje je jedinstveno. □

**Definicija 3.7** *Rešenje u problema (3.31) uvedenog u Teoremi 3.7 zvaćemo uopšteno rešenje jednačine*

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\lambda\mathcal{D}^\alpha_+ u(t) + f(\cdot,t,u)$$

*date sa regularizovanim množiteljom Ljuvilovog frakcionog izvoda.*

### 3.3.2 Slučaj prostorno frakcionih difuzionih jednačina

Sada razmatramo prostorno frakcione difuzione jednačine, koje takođe sadrže regularizovani frakcioni operator dat preko regularizovanog frakcionog izvoda, odnosno, regularizovanog množitelja frakcionog izvoda, uveden u Teoremi 3.7 (pogledati Napomenu 3.5).

**Teorema 3.8** *Neka je $1 < \alpha < 2$ i razmotrimo Košijev problem*

$$\frac{d}{dt}u(t) = \widetilde{A}^{\alpha}_{\lambda}u(t) + f(u(t)), \quad u(0) = u^{\alpha}_{0}, \tag{3.41}$$

*gde:*

1. *Operator $\widetilde{A}^{\alpha}_{\lambda} \in \mathcal{S}\mathrm{G}(H^{\alpha}(\mathbb{R}))$ je reprezentovan preko mreže operatora*

$$\widetilde{A}^{\alpha}_{\lambda,\varepsilon} : H^{\alpha}(\mathbb{R}) \to H^{\alpha}(\mathbb{R}),$$
$$\widetilde{A}^{\alpha}_{\lambda,\varepsilon}u_{\varepsilon} = \big(\lambda_{\varepsilon}(\mathcal{D}^{\alpha}_{+}u_{\varepsilon} * \phi_{h_{\varepsilon}})\big) * \phi_{h_{\varepsilon}},$$

   *pretpostavljajući pri tome da je $\lambda_{\varepsilon} \in L^{1}(\mathbb{R})$ takvo da važi $\widehat{\lambda_{\varepsilon}} \in L^{1}(\mathbb{R})$, $\|\widehat{\lambda_{\varepsilon}}\|_{L^1} = \mathcal{O}\Big((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\Big)$ i $h_{\varepsilon} = o\Big((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{8}}\Big)$,*

2. *$u^{\alpha}_{0} \in \mathcal{G}(H^{\alpha}(\mathbb{R}))$,*

3. *$f \in C^{3}(\mathbb{C})$ je takvo da su $f$, $f'$ i $f''$ Lipšicove funkcije na $\mathbb{R}$ sa osobinom $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ i ograničenim frakcionim izvodom $\mathcal{D}^{\alpha}_{+}f$.*

*Tada, za svako $1 < \alpha < 2$, postoji jedinstveno uopšteno rešenje $u \in \mathcal{G}([0,\infty) : H^{\alpha}(\mathbb{R}))$ problema (3.41) dato reprezentom*

$$u_{\varepsilon}(t) = S^{\alpha}_{\lambda,\varepsilon}(t)u^{\alpha}_{0\varepsilon} + \int_{0}^{t} S^{\alpha}_{\lambda,\varepsilon}(t-s)f(u_{\varepsilon}(\cdot,s))ds, \tag{3.42}$$

*pri čemu je $S^{\alpha}_{\lambda} \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(H^{\alpha}(\mathbb{R})))$ uniformno neprekidna Kolomboova polugrupa generisana sa $\widetilde{A}^{\alpha}_{\lambda}$.*

**Dokaz:**
Dokaz tvrđenja je veoma sličan dokazu tvrđenja datom u Teoremi 3.7. Ideja je da se iskoriste aproksimativno lančano i aproksimativno Lajbnicovo pravilo

za frakcione izvode dato u Propoziciji 1.8, odnosno, Propoziciji 1.9, za slučaj $1 < \alpha < 2$.

Izaberimo $u_\varepsilon \in H^\alpha(\mathbb{R})$. Kako za dato $\alpha$ postoji $\beta \in (0,1)$ takvo da je $\alpha = 1+\beta$, iz Propozicije 1.8 imamo

$$\|\mathcal{D}_+^\alpha f(u_\varepsilon)\|_{L^2} \leq C\|f'(u_\varepsilon)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon\|_{L^2} + C\|\mathcal{D}_+^\beta(f'(u_\varepsilon))\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon\|_{H^\alpha}.$$

Primenjujući aproksimativno Lajbnicovo pravilo sledi

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{D}_+^\alpha[F(u_\varepsilon - v_\varepsilon)]\|_{L^2}\\
&\leq C\|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_x F)\|_{L^2}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^\infty} + C\|\partial_x F\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\beta(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{L^2}\\
&+C\|\mathcal{D}_+^\beta F\|_{L^\infty}\|\partial_x(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{L^2} + C\|F\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\beta(\partial_x(u_\varepsilon - v_\varepsilon))\|_{L^2}\\
&\leq C\|\mathcal{D}_+^\alpha F\|_{L^2}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^\alpha} + C\|\partial_x F\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^\alpha}\\
&+C\|\mathcal{D}_+^\beta F\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^\alpha} + C\|F\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{L^2},
\end{aligned}$$

gde smo za $F$ koristili notaciju uvedenu u (3.40).

Koristeći prethodne ocene može se pokazati egzistencija i jedinstvenost rešenja problema (3.41), na sličan način kao što je to urađeno u dokazu Teoreme 3.7.□

**Napomena 3.9** *Prethodni Košijev problem može se razmotriti i sa slabijim uslovima nametnutim na funkciju $f$ nego onim datim u Teoremi 3.8, s tim da bi to prouzrokovalo restrikciju prostora rešenja. Naime, uklanjanjem uslova ograničenosti za frakcione izvode $\mathcal{D}_+^\alpha f$, za prostor rešenja se može uzeti Kolomboov prostor $\mathcal{G}([0,\infty) : H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R}))$, gde je $\beta_\alpha = \max\left\{\alpha, \frac{3}{2}+\eta\right\}$, sa proizvoljno malim $\eta > 0$. Ova posledica proizilazi iz standardnih argumenata vezanih za Teoremu Soboljeva o potapanju (Teorema 1.1).*

### 3.3.3 Slučaj prostorno frakcionih advektivno-difuzionih jednačina

Posledica rezultata dobijenih u Teoremi 3.7 i Teoremi 3.8, jeste odgovarajuće tvrđenje o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja Košijevog problema za prostorno frakcione advektivno-difuzione jednačine:

**Teorema 3.9** *Neka je $0 < \alpha < 1$ i $1 < \beta < 2$. Razmotrimo Košijev problem*

$$\frac{d}{dt}u(t) = \widetilde{A}_{a,b}^\beta u(t) + f(u(t)), \quad u(0) = u_0^\beta, \tag{3.43}$$

*gde:*

1. *Operator* $\widetilde{A}^{\beta}_{a,b} \in \mathcal{S}\mathrm{G}(H^{\beta}(\mathbb{R}))$ *je reprezentovan preko mreže operatora*

$$\widetilde{A}^{\beta}_{a,b;\varepsilon} : H^{\beta}(\mathbb{R}) \to H^{\beta}(\mathbb{R}),$$
$$\widetilde{A}^{\beta}_{a,b;\varepsilon} u_\varepsilon = \Big( -a_\varepsilon(\mathcal{D}^{\alpha}_{+} u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}) + b_\varepsilon(\mathcal{D}^{\beta}_{+} u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}) \Big) * \phi_{h_\varepsilon},$$

*pretpostavljajući pri tome da* $a_\varepsilon$ *i* $b_\varepsilon$ *zadovoljavaju iste uslove kao* $\lambda_\varepsilon$ *u Teoremi 3.8 i da je* $h_\varepsilon = o\Big( (\log\log 1/\varepsilon)^{\frac{1}{8}} \Big)$ ,

2. $u^{\beta}_{0} \in \mathcal{G}(H^{\beta}(\mathbb{R}))$,

3. $f \in C^3(\mathbb{C})$ *je takvo da su* $f$, $f'$ *and* $f''$ *Lipšicove funkcije na* $\mathbb{R}$ *sa osobinom* $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ *i ograničenim frakcionim izvodom* $\mathcal{D}^{\beta}_{+} f$.

*Tada, za svako* $0 < \alpha < 1$ *i* $1 < \beta < 2$, *postoji jedinstveno uopšteno rešenje* $u \in \mathcal{G}([0,\infty) : H^{\beta}(\mathbb{R}))$ *problema (3.43) dato reprezentom*

$$u_\varepsilon(t) = S^{\beta}_{a,b;\varepsilon}(t) u^{\beta}_{0\varepsilon} + \int_0^t S^{\beta}_{a,b;\varepsilon}(t-s) f(u_\varepsilon(\cdot, s)) ds, \qquad (3.44)$$

*pri čemu je* $S^{\beta}_{a,b} \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(H^{\beta}(\mathbb{R})))$ *uniformno neprekidna Kolomboova polugrupa generisana sa* $\widetilde{A}^{\beta}_{a,b}$.

**Dokaz:**
Da je operator $\widetilde{A}^{\beta}_{a,b}$ $\log\log 1/\varepsilon-$tipa, odnosno, infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S^{\beta}_{a,b} \in \mathcal{S}\mathrm{G}([0,\infty) : \mathcal{L}(H^{\beta}(\mathbb{R})))$, kao i da je ta polugrupa $\log 1/\varepsilon-$tipa, dokazuje se na način kao što je to urađeno u (3.33), razmatrajući pri tome $a_\varepsilon$ i $b_\varepsilon$ umesto $\lambda_\varepsilon$. Egzistencija i jedinstvenost rešenja Košijevog problema (3.43) dokazuje se ponavljajući procedure opisane u Teoremi 3.7 i Teoremi 3.8. □

### 3.3.4 Asociranost neregularizovanog i odgovarajućeg regularizovanog frakcionog operatora

U narednoj propoziciji dokazujemo da se umesto neregularizovanog operatora $A^{\alpha}_{\lambda} u = -\lambda(x,t)\mathcal{D}^{\alpha}_{+} u$, $0 < \alpha < 1$, gde $\lambda$ i $u$ zadovoljavaju određene uslove, može razmatrati odgovarajući regularizovani operator uveden u Teoremi 3.7.

**Propozicija 3.3** *Pretpostavimo da je* $0 < \alpha < 1$ *i neka* $u \in H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R})$, *gde je* $\beta_\alpha = \max\{\frac{1}{2} + \eta, \alpha\}$, *sa proizvoljno malim* $\eta > 0$. *Dalje, neka je* $A^\alpha_\lambda$ *operator dat sa* $A^\alpha_\lambda u = -\lambda(x,t)\mathcal{D}^\alpha_+ u$, *gde je* $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$ *i* $\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon}$ *operator dat sa* $\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon} u = \big(-\lambda_\varepsilon(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_+ u * \phi_{h_\varepsilon})\big) * \phi_{h_\varepsilon}$, *pri čemu* $\lambda_\varepsilon$ *zadovoljava iste uslove kao u Propoziciji 3.2.*

*Tada su operatori* $A^\alpha_\lambda$ *i* $\widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon}$ $L^2-$*asocirani za* $\varepsilon \to 0$, *to jest za svako* $u \in H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R})$ *važi*

$$\|(A^\alpha_\lambda - \widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon})u\|_{L^2} \to 0, \;\; \varepsilon \to 0.$$

**Dokaz:**

Izaberimo $u \in H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R})$. Tada imamo

$$\begin{aligned}(A^\alpha_\lambda - \widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon})u \;\;=\;\; & -\lambda(x,t)\mathcal{D}^\alpha_+ u + (\lambda(x,t)\mathcal{D}^\alpha_+ u) * \phi_{h_\varepsilon} - (\lambda(x,t)\mathcal{D}^\alpha_+ u) * \phi_{h_\varepsilon} \\ & + \big[(\lambda_\varepsilon(x,t) - \lambda(x,t))(\mathcal{D}^\alpha_+ u * \phi_{h_\varepsilon})\big] * \phi_{h_\varepsilon} \\ & + \big[\lambda(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_+ u * \phi_{h_\varepsilon})\big] * \phi_{h_\varepsilon},\end{aligned}$$

što daje ocenu u normi

$$\begin{aligned}\|(A^\alpha_\lambda - \widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon})u\|_{L^2} \;\;\leq\;\; & \|\lambda(x,t)\mathcal{D}^\alpha_+ u - (\lambda(x,t)\mathcal{D}^\alpha_+ u) * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \\ & + \|\lambda_\varepsilon - \lambda\|_{L^\infty} \|\mathcal{D}^\alpha_+ u\|_{L^2} \|\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^1} \|\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^1} \\ & \|\lambda\|_{L^\infty} \|\mathcal{D}^\alpha_+ u * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}^\alpha_+ u\|_{L^2} \|\phi_{h_\varepsilon}\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Slično, kao u dokazu tvrđenja datom u Propoziciji 3.2, dobija se da za svako $u \in H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R})$ važi

$$\|(A^\alpha_\lambda - \widetilde{A}^\alpha_{\lambda,\varepsilon})u\|_{L^2} \to 0, \;\; \varepsilon \to 0. \qquad \Box$$

**Napomena 3.10** $L^2-$*asociranost neregularizovanog i odgovarajućeg regularizovanog operatora koji se pojavljuje u Teoremi 3.8, odnosno, Teoremi 3.9, može se pokazati pod određenim dodatnim uslovima rasta nametnutim na koeficijente na sličan način kao u Propoziciji 3.3.*

### 3.3.5 Asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane jednačine

Kao u slučaju rešavanja problema u okruženju Kolomboovih algebri definisanih na prostorima Soboljeva celobrojnog reda, ovde ćemo takođe dokazati $L^2-$asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane jednačine.

Na početku, dajemo najpre rezultat koji se odnosi na prostorno frakcione advektivne jednačine:

**Teorema 3.10** *Neka je $0<\alpha<1$ i $\beta_\alpha=\max\{\frac{1}{2}+\eta,\alpha\}$, sa proizvoljno malim $\eta>0$. Pretpostavimo da postoji rešenje $u_\varepsilon$ neregularizovane jednačine:*

$$\partial_t u_\varepsilon(x,t)=-\lambda(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t)+f(u_\varepsilon(x,t)),\ \ u_\varepsilon(0)=u_{0\varepsilon}, \tag{3.45}$$

*gde $\lambda\in H^{2\beta_\alpha}(\mathbb{R})$, $\lambda$ i $\widehat{\lambda}$ pripadaju $L^1(\mathbb{R})$ i $u_\varepsilon\in H^{\beta_\alpha+\alpha}(\mathbb{R})$.*

*Neka je $v_\varepsilon$ rešenje odgovarajuće regularizovane jednačine sa istim početnim podacima:*

$$\partial_t v_\varepsilon(x,t)=(-\lambda(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha v_\varepsilon(x,t)*\phi_{h_\varepsilon}(x)))*\phi_{h_\varepsilon}+f(v_\varepsilon(x,t)),\ \ v_\varepsilon(0)=u_{0\varepsilon}, \tag{3.46}$$

*gde je $h_\varepsilon=o\Big((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{6}}\Big)$, dok je $f\in C^2(\mathbb{C})$ takvo da su $f$ i $f'$ Lipšicove funkcije na $\mathbb{R}$ sa osobinom $f(0)=f'(0)=0$.*

*Tada su rešenja $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ $L^2-$asocirana, to jest za svako $T>0$, važi*

$$\sup_{t\in[0,T)}\|u_\varepsilon(t)-v_\varepsilon(t)\|_{L^2}\to 0,\ \ za\ \ \varepsilon\to 0.$$

**Dokaz:**

S obzirom da $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ zadovoljavaju redom jednačine (3.45) i (3.46), dobija se

$$\begin{aligned}\partial_t(u_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x,t)) &= \Big(-\lambda(x,t)\Big(\mathcal{D}_+^\alpha(u_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x,t))*\phi_{h_\varepsilon}(x)\Big)\Big)*\phi_{h_\varepsilon}(x)\\ &\quad+\Big(\lambda(x,t)\Big(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t)*\phi_{h_\varepsilon}(x)\Big)\Big)*\phi_{h_\varepsilon}(x)\\ &\quad-\lambda(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t)+f(u_\varepsilon(x,t))-f(v_\varepsilon(x,t)).\end{aligned}$$

Označimo $\omega_\varepsilon=u_\varepsilon-v_\varepsilon$. Tada $\omega_\varepsilon$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(t)=A_\varepsilon^\alpha\omega_\varepsilon(t)+f(u_\varepsilon(\cdot,t))-f(v_\varepsilon(\cdot,t))+N_\varepsilon(t),\ \ \omega_\varepsilon(0)=0,$$

gde je

$$A_\varepsilon^\alpha\omega_\varepsilon=\Big(-\lambda(\mathcal{D}_+^\alpha\omega_\varepsilon*\phi_{h_\varepsilon})\Big)*\phi_{h_\varepsilon},$$

i

$$\begin{aligned}N_\varepsilon(t) &= \Big(\lambda(\cdot,t)\Big(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon}\Big)\Big)*\phi_{h_\varepsilon}-\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)\\ &= \Big(\lambda(\cdot,t)\Big(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)*\phi_{h_\varepsilon}-\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)\Big)\Big)*\phi_{h_\varepsilon}\\ &\quad+\Big(\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)\Big)*\phi_{h_\varepsilon}-\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t).\end{aligned}$$

Prema tome, za $\omega_\varepsilon$ važi

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon(t) &= \int_0^t S_\varepsilon^\alpha(t-s)(f(u_\varepsilon(\cdot,s)) - f(v_\varepsilon(\cdot,s)))ds \\ &\quad + \int_0^t S_\varepsilon^\alpha(t-s)N_\varepsilon(\cdot,s)ds,\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)(f(u_\varepsilon(\cdot,s)) - f(v_\varepsilon(\cdot,s)))\|_{L^2}ds \\ &\quad + \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)N_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^2}ds. \qquad (3.47)\end{aligned}$$

Budući da je $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$ i $u_\varepsilon \in H^{\beta_\alpha+\alpha}(\mathbb{R}) \subset H^\alpha(\mathbb{R})$, sledi $\|N_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$. Dalje, iz aproksimativnog Lajbnicovog pravila imamo

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha} N_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}((\lambda(\cdot,t)(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)))) * \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\quad + \|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}(\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)) * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}(\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t))\|_{L^2} \\ &\leq C\|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2} \\ &\quad + C\|\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t))\|_{L^2} \\ &\quad + \|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}(\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)) * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}(\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t))\|_{L^2} \\ &\leq C\|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2} \\ &\quad + C\|\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}\|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha+\alpha} u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}_+^{\beta_\alpha+\alpha} u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2} \\ &\quad + \|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}(\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)) * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}_+^{\beta_\alpha}(\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t))\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Kako je $\lambda \in H^{2\beta_\alpha}(\mathbb{R})$ i $u_\varepsilon \in H^{\beta_\alpha+\alpha}(\mathbb{R})$, na osnovu konvergencije (3.27) dokazane u Teoremi 3.4 sledi $\|\mathcal{D}_+^{\beta_\alpha} N_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$, odnosno, $\|N_\varepsilon(t)\|_{H^{\beta_\alpha}} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$.

Budući da je $S_\varepsilon^\alpha(t) = e^{tA_\varepsilon^\alpha}$ i $\|A_\varepsilon^\alpha u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|u_\varepsilon\|_{H^{\beta_\alpha}}$, gde konstanta $C$ ne zavisi od $\varepsilon$ ($C = \|\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty}$), dobijamo $\|S_\varepsilon^\alpha u_\varepsilon\|_{L^2} \leq e^{tC}\|u_\varepsilon\|_{H^{\beta_\alpha}}$, za $u_\varepsilon \in H^{\beta_\alpha}(\mathbb{R})$. Ovo dalje implicira $\|S_\varepsilon^\alpha(t-s)N_\varepsilon(s)\|_{L^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$. Koristeći $\|\partial_u f\|_{L^\infty} \leq C_1 < \infty$, kao i ocenu

$$\|f(u_\varepsilon(\cdot,s)) - f(v_\varepsilon(\cdot,s))\|_{L^2} \leq \|\partial_u f\|_{L^\infty} \cdot \|u_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(s)\|_{L^2} \leq C_1\|\omega_\varepsilon(s)\|_{L^2},$$

primena Gronvalove nejednakosti na (3.47) daje

$$\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C_1 \int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)N_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^2} ds \cdot \exp\left(\int_0^t \|S_\varepsilon^\alpha(t-s)\|ds\right),$$

to jest $\sup_{t\in[0,T)} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$. $\square$

Na sličan način, uz strožije uslove nametnute na rešenje $u$ neregularizovane jednačine i koeficijente $\lambda$, može se pokazati asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane prostorno frakcione difuzione jednačine:

**Teorema 3.11** *Neka je $1 < \alpha < 2$. Pretpostavimo da postoji rešenje $u_\varepsilon$ neregularizovane jednačine:*

$$\partial_t u_\varepsilon(x,t) = \lambda(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t) + f(u_\varepsilon(x,t)), \;\; u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}, \tag{3.48}$$

*gde $\lambda \in H^{1+\alpha}(\mathbb{R})$, $\lambda$ i $\widehat{\lambda}$ pripadaju $L^1(\mathbb{R})$ i $u_\varepsilon \in H^{2\alpha}(\mathbb{R})$.*

*Neka je $v_\varepsilon$ rešenje odgovarajuće regularizovane jednačine sa istim početnim podacima:*

$$\partial_t v_\varepsilon(x,t) = (\lambda(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha v_\varepsilon(x,t) * \phi_{h_\varepsilon}(x))) * \phi_{h_\varepsilon} + f(v_\varepsilon(x,t)), \;\; v_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}, \tag{3.49}$$

*gde je $h_\varepsilon = o\left((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{8}}\right)$, dok je $f \in C^3(\mathbb{C})$ takvo da su $f$, $f'$ i $f''$ Lipšicove funkcije na $\mathbb{R}$ sa osobinom $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ i ograničenim frakcionim izvodom $\mathcal{D}_+^\alpha f$.*

*Tada su rešenja $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ $L^2-$asocirana, to jest za svako $T > 0$, važi*

$$\sup_{t\in[0,T)} \|u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0, \;\; za \;\; \varepsilon \to 0.$$

**Dokaz:**

S obzirom da $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ zadovoljavaju redom jednačine (3.48) i (3.49), dobija se

$$\begin{aligned}
\partial_t(u_\varepsilon(x,t) - v_\varepsilon(x,t)) \;\; = \;\; & \Big(\lambda(x,t)\Big(\mathcal{D}_+^\alpha(u_\varepsilon(x,t) - v_\varepsilon(x,t)) * \phi_{h_\varepsilon}(x)\Big)\Big) * \phi_{h_\varepsilon}(x) \\
& -\Big(\lambda(x,t)\Big(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t) * \phi_{h_\varepsilon}(x)\Big)\Big) * \phi_{h_\varepsilon}(x) \\
& +\lambda(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t) + f(u_\varepsilon(x,t)) - f(v_\varepsilon(x,t)).
\end{aligned}$$

Označimo $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Tada $\omega_\varepsilon$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(t) = A_\varepsilon^\alpha \omega_\varepsilon(t) + f(u_\varepsilon(\cdot,t)) - f(v_\varepsilon(\cdot,t)) + N_\varepsilon(t), \;\; \omega_\varepsilon(0) = 0,$$

gde je

$$A_\varepsilon^\alpha \omega_\varepsilon = \Big(\lambda(\mathcal{D}_+^\alpha \omega_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon})\Big) * \phi_{h_\varepsilon},$$

i

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(t) &= \lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) - \Big(\lambda(\cdot,t)\Big(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon}\Big)\Big) * \phi_{h_\varepsilon} \\ &= \Big(\lambda(\cdot,t)\Big(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon}\Big)\Big) * \phi_{h_\varepsilon} \\ &\quad + \lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) - \Big(\lambda(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)\Big) * \phi_{h_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Da $\|N_\varepsilon(t)\|_{H^\alpha} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$, dokazujemo koristeći slične argumente kao u Teoremi 3.10, tako što prvo pokažemo $\|N_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, odnosno, $\|\mathcal{D}_+^\alpha N_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$, što na kraju daje $L^2-$asociranost rešenja. □

Kombinujući rezultate prezentovane u Teoremi 3.10 i Teoremi 3.11, lako se može pokazati $L^2-$asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane prostorno frakcione advektivno-difuzione jednačine:

**Teorema 3.12** *Neka je $0 < \alpha < 1$ i $1 < \beta < 2$. Pretpostavimo da postoji rešenje $u_\varepsilon$ neregularizovane jednačine:*

$$\begin{aligned} &\partial_t u_\varepsilon(x,t) = -a(x,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(x,t) + b(x,t)\mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon(x,t) + f(u_\varepsilon(x,t)), \\ &u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}, \end{aligned}$$

*gde $a, b \in H^{1+\beta}(\mathbb{R})$, $a, b, \widehat{a}, \widehat{b}$ pripadaju $L^1(\mathbb{R})$ i $u_\varepsilon \in H^{2\beta}(\mathbb{R})$.*

*Neka je $v_\varepsilon$ rešenje odgovarajuće regularizovane jednačine sa istim početnim podacima:*

$$\begin{aligned} \partial_t v_\varepsilon(x,t) &= (-a(x,t)(\mathcal{D}_+^\alpha v_\varepsilon(x,t) * \phi_{h_\varepsilon}(x))) * \phi_{h_\varepsilon} \\ &\quad + (b(x,t)(\mathcal{D}_+^\beta v_\varepsilon(x,t) * \phi_{h_\varepsilon}(x))) * \phi_{h_\varepsilon} + f(v_\varepsilon(x,t)), \\ &\quad v_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}, \end{aligned}$$

*gde je $h_\varepsilon = o\Big((\mathrm{loglog}1/\varepsilon)^{\frac{1}{8}}\Big)$, dok je $f \in C^3(\mathbb{C})$ takvo da su $f$, $f'$ i $f''$ Lipšicove funkcije na $\mathbb{R}$ sa osobinom $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ i ograničenim frakcionim izvodom $\mathcal{D}_+^\alpha f$.*

*Tada su rešenja $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ $L^2-$asocirana, to jest za svako $T > 0$, važi*

$$\sup_{t\in[0,T)} \|u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0, \text{ za } \varepsilon \to 0.$$

**Dokaz:**

Označimo $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Tada $\omega_\varepsilon$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(t) = A_\varepsilon^{\alpha,\beta}\omega_\varepsilon(t) + f(u_\varepsilon(\cdot,t)) - f(v_\varepsilon(\cdot,t)) + N_\varepsilon(t), \quad \omega_\varepsilon(0) = 0,$$

gde je

$$A_\varepsilon^{\alpha,\beta}\omega_\varepsilon = \Big( - a(\mathcal{D}_+^\alpha \omega_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon})\Big) * \phi_{h_\varepsilon} + \Big(b(\mathcal{D}_+^\beta \omega_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon})\Big) * \phi_{h_\varepsilon},$$

i

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(t) \quad = \quad & \Big(a(\cdot,t)\Big(\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon} - \mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)\Big)\Big) * \phi_{h_\varepsilon} \\ & + \Big(a(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t)\Big) * \phi_{h_\varepsilon} - a(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\alpha u_\varepsilon(\cdot,t) \\ & + \Big(b(\cdot,t)\Big(\mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon(\cdot,t) - \mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon(\cdot,t) * \phi_{h_\varepsilon}\Big)\Big) * \phi_{h_\varepsilon} \\ & + b(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon(\cdot,t) - \Big(b(\cdot,t)\mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon(\cdot,t)\Big) * \phi_{h_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Sada se $\|N_\varepsilon(t)\|_{H^\beta} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$, dokazuje koristeći slične argumente kao u Teoremi 3.10, tako što prvo pokažemo $\|N_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, odnosno, $\|\mathcal{D}_+^\beta N_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0$, za $\varepsilon \to 0$, što na kraju daje $L^2-$asociranost rešenja. $\square$

# Glava 4

# Frakcione evolucione jednačine reda $0 < \alpha < 1$

Normalna ili obična difuzija (Gausova difuzija) predstavlja proces spontanog širenja čestica kroz određene sredine, na primer, unutar gasa, tečnosti ili čvrstog tela. Karakteriše se Gausovom gustinom raspodele, dok je asimptotsko srednje-kvadratno premeštanje čestica linearna funkcija vremena, to jest ponaša se kao $Ct$ kada $t \to \infty$. Međutim, u određenim sistemima čestice se kreću haotično, pa sistem izlazi iz stanja ravnoteže, što za posledicu ima usporavanje ili ubrzavanje difuzije. Takvo odstupanje od normalne difuzije naziva se anomalna difuzija i za razliku od normalne difuzije asimptotsko srednje-kvadratno premeštanje čestica je nelinearna funkcija vremena, to jest ponaša se kao $Ct^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, kada $t \to \infty$ (videti, na primer, [25]). Anomalna difuzija se može, na primer, modelirati prostorno-vremensko frakcionim difuzionim jednačinama.

Prostorno frakcione advektivno-difuzione jednačine (3.1), razmatrane u prethodnom delu disertacije, predstavljaju specijalan slučaj prostorno-vremensko frakcionih advektivno-difuzionih jednačina

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t) = -v(x,t)\mathcal{D}_x^{\beta} u(x,t) + k(x,t)\mathcal{D}_x^{\gamma} u(x,t) + f(x,t), \tag{4.1} $$

pri čemu je ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}$ Kaputov frakcioni izvod reda $0 < \alpha \leq 1$, dok su $\mathcal{D}_x^{\beta}$, $0 < \beta \leq 1$, odnosno, $\mathcal{D}_x^{\gamma}$, $1 < \gamma \leq 2$, prostorno frakcioni izvodi. Jednačine (3.1) se dobijaju stavljajući $\alpha = 1$ u jednačini (4.1), koja takođe, pored ostalog, modelira transport hemijskih zagađivača kroz podzemne vode, gde $u(x,t)$ predstavlja koncentraciju razmatranog zagađivača, $v(x,t)$ je prosečna brzina fluida, dok je $k(x,t)$ koeficijent difuzije (disperzije)(videti [6], [25], [43],[51]). Birajući $\alpha = 1$, $\beta = 1$ i $\gamma = 2$ dobijaju se klasične (nefrakcione) advektivno-difuzione jednačine.

Inspirisani mnogobrojnim primenama prethodno razmatranih jednačina na modeliranje raznih pojava, osnovni cilj ovog dela disertacije biće aproksimativno rešavanje jednačine opštije nego (4.1). Preciznije, rešavaćemo Košijev problem nehomogenih frakcionih evolucionih jednačina sa varijabilnim koeficijentima koji zavise od $x$ i nelinearnim delom koji zavisi od rešenja, odnosno,

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t) &= Au(t) + f(\cdot, t, u), \; t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

pri čemu je $0 < \alpha < 1$, $A$ je linearan operator, zatvoren i gusto definisan na prostoru Soboljeva celobrojnog reda $H^1(\mathbb{R})$ ili $H^2(\mathbb{R})$. Napomenimo da su u literaturi jednačine (4.1) rešavane na ograničenom domenu $x \in (0, L)$, dok ćemo mi jednačine (4.2) rešavati na neograničenom domenu pri čemu, dodatno, nelinearni deo $f$ zavisi od rešenja $u$.

Iz sličnih razloga kao prilikom razmatranja evolucionih jednačina sa prostorno frakcionim diferencijalnim operatorima (Glava 3), umesto jednačine u polaznom problemu (4.2) razmatraćemo odgovarajuću aproksimativnu jednačinu

$${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t) = \widetilde{A} u(t) + f(\cdot, t, u), \tag{4.3}$$

gde je $\widetilde{A}$ uopšteni linearan i ograničen operator asociran sa polaznim operatorom $A$. U slučaju diferencijalnog operatora $A$, odgovarajući uopšteni operator $\widetilde{A}$ dobija se regularizacijom frakcionog izvoda ili izvoda celobrojnog reda koji se pojavljuje u operatoru $A$.

Navedeni aproksimativni problem rešavaće se koristeći uopštene uniformno neprekidne operatore rešenja uvedene u Poglavlju 2.3. Rešenja ćemo tražiti u okviru Kolomboovih prostora definisanih u Poglavlju 4.1. Uslove za egzistenciju i jedinstvenost rešenja za aproksimativni problem ispitivaćemo u Poglavlju 4.2. Analiza asociranosti rešenja polazne i odgovarajuće aproksimativne jednačine, uz pretpostavku da rešenje neregularizovane jednačine postoji, prezentovana je u Poglavlju 4.3. Na kraju, u Poglavlju 4.4, ilustrovaćemo kako se uvedeni uopšteni operatori rešenja mogu koristiti za aproksimativno rešavanje određenih tipova frakcionih evolucionih jednačina, kao što su, na primer, vremensko i prostorno-vremensko frakcione difuzione jednačine, odnosno, prostorno-vremensko frakcione advektivno-difuzione jednačine.

Dokazi za pomenuta tvrđenja, koja se odnose na egzistenciju i jedinstvenost rešenja, asociranost neregularizovanog i odgovarajućeg regularizovanog frakcionog operatora, kao i asociranost rešenja neregularizovane i odgovarajuće regularizovane jednačine, pokrivaće slučajeve kada je diferencijalni operator $A$ definisan preko celobrojnog izvoda, levog ili desnog Ljuvilovog frakcionog izvoda, odnosno Risovog frakcionog izvoda.

Krajnji ishod proučavanja ove klase jednačina biće nova procedura za aproksimativno rešavanje Košijevog problema nehomogenih frakcionih evolucionih jednačina sa varijabilnim koeficijentima datog sa (4.2).

Svi rezultati sadržani u ovoj glavi predstavljaju originalne rezultate prezentovane u radu [39].

## 4.1 Prostor rešenja

Uopštena rešenja frakcionih evolucionih jednačina sa varijabilnim koeficijentima oblika (4.3) tražićemo u okviru Kolomboovih prostora definisanih na sledeći način:

**Definicija 4.1** *Neka je $m-1<\alpha<m$, pri čemu $m\in\mathbb{N}$. $\mathcal{E}_M^{\alpha}([0,\infty):H^n(\mathbb{R}))$, $n\in\mathbb{N}$, je prostor mreža*

$$G_\varepsilon:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \ \varepsilon\in(0,1),$$

*sa osobinama:*

**(i)** $G_\varepsilon(\cdot,\cdot)\in C^{m-1}([0,\infty):H^n(\mathbb{R}))\cap C^m((0,\infty):H^n(\mathbb{R}))$.

**(ii)** $\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{\frac{d^m}{dt^m}G_\varepsilon(t,\cdot)}{t^{\alpha-m}}\right\|_{H^n}=C<+\infty$.

**(iii)** *Za svako $T>0$ postoje $M>0, N\in\mathbb{N}$ i $\varepsilon_0>0$ takvi da*

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T)}\left\|{}^C\mathcal{D}_t^{\gamma}G_\varepsilon(t,\cdot)\right\|_{H^n} &\leq M\varepsilon^{-N},\quad \varepsilon<\varepsilon_0,\quad \gamma\in\{0,\dots,m-1,\alpha\},\\ \sup_{t\in(0,T)}\left\|\frac{d^m}{dt^m}G_\varepsilon(t,\cdot)\right\|_{H^n} &\leq M\varepsilon^{-N},\quad \varepsilon<\varepsilon_0.\end{aligned}$$

Na sličan način definiše se prostor:

**Definicija 4.2** *Neka je $m-1<\alpha<m$, pri čemu $m\in\mathbb{N}$. $\mathcal{N}_\alpha([0,\infty):H^n(\mathbb{R}))$, $n\in\mathbb{N}$, je prostor mreža $G_\varepsilon\in\mathcal{E}_M^{\alpha}([0,\infty):H^n(\mathbb{R}))$ sa osobinama:*

**(i)** $G_\varepsilon(\cdot,\cdot)\in C^{m-1}([0,\infty):H^n(\mathbb{R}))\cap C^m((0,\infty):H^n(\mathbb{R}))$.

**(ii)** $\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{\frac{d^m}{dt^m} G_\varepsilon(t,\cdot)}{t^{\alpha-m}} \right\|_{H^n} = C < +\infty.$

**(iii)** *Za svako* $T > 0$ *i* $a \in \mathbb{R}$ *postoje* $M > 0$ *i* $\varepsilon_0 > 0$ *takvi da*

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T)} \left\| {}^C\mathcal{D}_t^\gamma G_\varepsilon(t,\cdot) \right\|_{H^n} &\leq M\varepsilon^a, \quad \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \gamma \in \{0, \ldots, m-1, \alpha\}, \\ \sup_{t\in(0,T)} \left\| \frac{d^m}{dt^m} G_\varepsilon(t,\cdot) \right\|_{H^n} &\leq M\varepsilon^a, \quad \varepsilon < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

**Propozicija 4.1** *Neka je* $m-1 < \alpha < m$, *pri čemu* $m \in \mathbb{N}$. $\mathcal{E}_M^\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R}))$, $n \in \mathbb{N}$, *je algebra u odnosu na množenje, dok je* $\mathcal{N}_\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R}))$ *ideal prostora* $\mathcal{E}_M^\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R}))$.

**Dokaz:**

Ilustrovaćemo dokaz tvrđenja za slučaj $0 < \alpha < 1$, koji se izvodi na sličan način kao za Propoziciju 2.11 u slučaju uopštenih operatora rešenja (Poglavlje 2.3).

Fiksirajmo $0 < \alpha < 1$, a zatim izaberimo $G_\varepsilon$ i $H_\varepsilon$ iz prostora $\mathcal{E}_M^\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R}))$. Tada se lako dobija da $G_\varepsilon H_\varepsilon$ zadovoljava osobine (i) i (ii) sadržane u Definiciji 4.1. Činjenica da $G_\varepsilon H_\varepsilon$ zadovoljava osobinu (iii) za $\gamma \in \{0,1\}$, može se pokazati na uobičajen način, kao u slučaju Kolomboovih prostora sa izvodima celobrojnog reda. Koristeći (2.26) i uopštenu (frakcionu) teoremu o srednjoj vrednosti (Teorema 1.4) može se pokazati da je osobina (iii) takođe zadovoljena za $\gamma = \alpha$.

Slično, može se pokazati da kompozicija $H_\varepsilon G_\varepsilon$ takođe zadovoljava sve osobine iz Definicije 4.1. Prema tome, prostor $\mathcal{E}_M^\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R}))$ je algebra.

Na osnovu sličnih argumenata lako se pokazuje da je $\mathcal{N}_\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R}))$ ideal prostora $\mathcal{E}_M^\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R}))$. $\square$

Kao direktnu posledicu dobijamo da se Kolomboov prostor može definisati kao faktor algebra:

**Definicija 4.3** *Neka je* $m-1 < \alpha < m$, *pri čemu* $m \in \mathbb{N}$. *Količnički prostor*

$$\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R})) = \frac{\mathcal{E}_M^\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R}))}{\mathcal{N}_\alpha([0,\infty) : H^n(\mathbb{R}))}$$

*je odgovarajući Kolomboov prostor uopštenih funkcija.*

Na sličan način, izostavljajući promenljivu $t$, definišu se odgovarajući prostori $\mathcal{E}_M^\alpha(H^n(\mathbb{R}))$, $\mathcal{N}_\alpha(H^n(\mathbb{R}))$ i $\mathcal{G}_\alpha(H^n(\mathbb{R}))$. Iz prostora $\mathcal{G}_\alpha(H^n(\mathbb{R}))$ biraćemo početne uslove Košijevog problema za frakcione evolucione jednačine.

## 4.2 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

Nastavljajući razmatranja o uopštenim operatorima rešenja iz Poglavlja 2.3, u ovom poglavlju za Banahov prostor $E$ uzimaćemo prostor Soboljeva, odnosno, $E = H^1(\mathbb{R})$. Umesto frakcionog Košijevog problema (4.2) sa zatvorenim i gusto definisanim operatorom $A$, definisanim najpre na $H^1(\mathbb{R})$, razmatraćemo frakcioni Košijev problem dat sa

$$^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t) = \widetilde{A}u(t) + f(\cdot, t, u),\ t > 0;\ u(0) = u_0,$$

gde je $\widetilde{A}$ uopšteni linearan i ograničen operator $L^2-$asociran sa operatorom $A$, to jest za sve $u \in H^1(\mathbb{R})$, važi

$$\|(A - \widetilde{A}_\varepsilon)u\|_{L^2} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

**Teorema 4.1** *Neka je $0 < \alpha < 1$. Pretpostavimo da $u_0 \in \mathcal{G}_\alpha(H^1(\mathbb{R}))$ i neka je funkcija $f(x,t,u)$ neprekidno diferencijabilna po $t$, globalno Lipšicova funkcija po $x$ i $u$ sa ograničenim izvodom drugog reda po $u$ takva da $f(x,t,0) = 0$. Takođe, pretpostavimo da su $\partial_x f(x,t,u)$ i $\partial_t f(x,t,u)$ globalno Lipšicove funkcije po $u$. Neka $g_1(x,t,u) := \partial_u f(x,t,u)$ i $g_2(x,t,u) := \partial_t f(x,t,u)$ zadovoljavaju iste osobine kao i funkcija $f(x,t,u)$.*

*Neka je $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(H^1(\mathbb{R}))$ operator $h_\varepsilon$-tipa, $h_\varepsilon = o\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^\alpha)^\alpha\Big)$, takav da $\|\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} \leq h_\varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^2}$, za $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R})$.*

*Tada, za svako $0 < \alpha < 1$ postoji jedinstveno uopšteno rešenje $u \in \mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^1(\mathbb{R}))$ Košijevog problema*

$$^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t) = \widetilde{A}u(t) + f(\cdot, t, u), \qquad u(0) = u_0. \tag{4.4}$$

*Rešenje je dato reprezentom*

$$u_\varepsilon(t) = (S_\alpha)_\varepsilon(t) u_{0\varepsilon} + \int_0^t (S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)\, {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot, \tau, u_\varepsilon) d\tau, \tag{4.5}$$

*gde je $S_\alpha \in \mathcal{SG}_\alpha([0,\infty) : \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R})))$ uniformno neprekidan Kolomboov operator rešenja generisan sa $\widetilde{A}$.*

**Dokaz:**

S obzirom da je operator $\widetilde{A}$ $h_\varepsilon$-tipa, pri čemu sledi da je $h_\varepsilon = o((\log\log 1/\varepsilon)^\alpha)$, očigledno važi da je operator $\widetilde{A}$ infinitezimalni generator Kolomboovog operatora rešenja $S_\alpha \in \mathcal{SG}_\alpha([0,\infty) : \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R})))$ datog sa $S_\alpha(t) = E_\alpha(t^\alpha \widetilde{A})$ (Propozicija 2.14). Pored toga, na osnovu (2.9) znamo da je (4.5) reprezent rešenja problema (4.4).

Pokažimo da je ovo rešenje element prostora $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^1(\mathbb{R}))$. Najpre pokazujemo da rešenje zadovoljava

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{\frac{d}{dt} u_\varepsilon(t,\cdot)}{t^{\alpha-1}} \right\|_{H^1} = C < +\infty. \tag{4.6}$$

Zaista, nakon diferenciranja (4.5) po $t$, koristeći odgovarajuću integralnu reprezentaciju (2.19) dobija se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t,\cdot) &= \frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t) u_{0\varepsilon} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) \partial_\tau f(\cdot,\tau,u_\varepsilon(\tau)) d\tau \\ &\quad + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) f(\cdot, 0, u_{0\varepsilon}), \end{aligned} \tag{4.7}$$

pa u skladu sa notacijom $g_1(x,t,u) = \partial_u f(x,t,u)$ i $g_2(x,t,u) = \partial_t f(x,t,u)$, dalje imamo

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t,\cdot) \right\|_{L^2} \\ &\le \left\| \frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t) u_{0\varepsilon} \right\|_{L^2} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \left\| \partial_\tau f(\cdot,\tau,u_\varepsilon(\tau)) \right\|_{L^2} d\tau \\ &\quad + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \| f(\cdot,0,u_{0\varepsilon}) \|_{L^2} \\ &\le \left\| \frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t) u_{0\varepsilon} \right\|_{L^2} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|g_1\|_{L^\infty} \|\partial_\tau u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|g_2\|_{L^\infty} \|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \\ &\quad + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \| f(\cdot,0,u_{0\varepsilon}) \|_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Nakon primene Gronvalove nejednakosti na (4.8) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t,\cdot) \right\|_{L^2} \\
&\leq \Bigg( \left\| \frac{d}{dt} (S_\alpha)_\varepsilon(t) u_{0\varepsilon} \right\|_{L^2} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|g_2\|_{L^\infty} \|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \\
&\quad + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|f(\cdot,0,u_{0\varepsilon})\|_{L^2} \Bigg) \\
&\quad \cdot \exp\left( \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|g_1\|_{L^\infty} d\tau \right),
\end{aligned}$$

to jest

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{\frac{d}{dt} u_\varepsilon(t,\cdot)}{t^{\alpha-1}} \right\|_{L^2} = C < +\infty.$$

Takođe, nakon diferenciranja (4.7) po $x$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t,\cdot) \right\|_{L^2} &\leq \left\| \frac{d}{dt} (S_\alpha)_\varepsilon(t) \partial_x u_{0\varepsilon} \right\|_{L^2} \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \left\| \partial_x \partial_\tau f(\cdot,\tau,u_\varepsilon(\tau)) \right\|_{L^2} d\tau \\
&\quad + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|\partial_x f(\cdot,0,u_{0\varepsilon})\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \frac{d}{dt} (S_\alpha)_\varepsilon(t) \partial_x u_{0\varepsilon} \right\|_{L^2} \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|\partial_x g_1\|_{L^\infty} \|\partial_\tau u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|g_1\|_{L^\infty} \|\partial_x \partial_\tau u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|\partial_x g_2\|_{L^\infty} \|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|g_2\|_{L^\infty} \|\partial_x u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \\
&\quad + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \Big( \|\partial_u f(\cdot,0,u_{0\varepsilon})\|_{L^\infty} \|\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\
&\quad + \|\partial_x f(\cdot,0,u_{0\varepsilon})\|_{L^\infty} \|u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \Big). \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Opet, primena Gronvalove nejednakosti na (4.9) daje

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{\partial_x \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t,\cdot)}{t^{\alpha-1}} \right\|_{L^2} = C < +\infty,$$

pa sledi da je osobina (4.6) zadovoljena.

Dalje, dokazujemo postojanje umerenog ograničenja za $\|^C\mathcal{D}_t^\gamma u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1}$, $\gamma \in \{0,\alpha\}$ i $\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1}$, razmatrajući slučajeve:

1. *Slučaj* $\gamma = 0$
   Na osnovu reprezentacije (4.5) i Propozicije 2.7 imamo

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\|\|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\|_{L^2}d\tau. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Koristeći ocenu za $E_{\alpha,\alpha}$ datu sa (1.31) dobija se

$$\begin{aligned} \|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| &\leq \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{n\alpha}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^n}{\Gamma(\alpha+n\alpha)} = E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \\ &\leq C_\alpha(1+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{(1-\alpha)/\alpha})(1+t^{1-\alpha})\exp(t\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}). \end{aligned}$$

Uvedimo oznaku

$$\widetilde{M_T} := \sup_{t\in[0,T)} \|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\|. \tag{4.11}$$

Primetimo da za $\alpha = 1$ sledi $\widetilde{M_T} := \sup_{t\in[0,T)} \|S(t)\|$, pri čemu je $S(t)$ uopštena uniformno neprekidna polugrupa operatora generisana sa $\widetilde{A}$, korišćena u Glavi 3 za rešavanje evolucionih jednačina sa prostorno frakcionim izvodima. Dalje, na osnovu dobro poznatih osobina Landauovih simbola

$o$ i $\mathcal{O}$ (videti Dodatak), dobijamo ocenu

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{M}_T \\
&\le C_\alpha\Big(1+o\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^\alpha)^{1-\alpha}\Big)\Big)\Big(1+T^{1-\alpha}\Big)\exp\Big(T\cdot o\Big(\log(\log 1/\varepsilon)^\alpha\Big)\Big) \\
&= C_\alpha\Big(1+o\Big((\log\log 1/\varepsilon)^{1-\alpha}\Big)\Big)\Big(1+T^{1-\alpha}\Big)\exp\Big(o\Big(\log(\log 1/\varepsilon)^\alpha\Big)\Big) \\
&= C_\alpha\Big(1+o\Big((\log 1/\varepsilon)^{1-\alpha}\Big)\Big)\Big(1+T^{1-\alpha}\Big)o\Big((\log 1/\varepsilon)^\alpha\Big) \\
&= C_\alpha\Big(1+T^{1-\alpha}\Big)\Big(o\Big((\log 1/\varepsilon)^\alpha\Big)+o(\log 1/\varepsilon)\Big) \\
&= C_\alpha\Big(1+T^{1-\alpha}\Big)o(\log 1/\varepsilon) \\
&= \mathcal{O}(\log 1/\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Na osnovu (4.10) i (4.11) dobijamo ocenu

$$
\begin{aligned}
\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\le \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}\|_{L^2}+\widetilde{M}_T\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\|_{L^2}d\tau \\
&\le \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}+C\widetilde{M}_T\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau,
\end{aligned}
$$

te primena Gronvalove nejednakosti daje

$$
\begin{aligned}
\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\le \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\cdot\exp\left(C\widetilde{M}_T\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau\right) \\
&= \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\cdot\exp\left(C\widetilde{M}_T\frac{T^\alpha}{\alpha}\right),
\end{aligned}
$$

pa uzimajući u obzir relaciju (4.12) sledi umereno ograničenje za $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Nakon diferenciranja (4.5) po $x$, na osnovu integralne reprezentacije date u Propoziciji 2.7 imamo

$$
\partial_x u_\varepsilon(t)=(S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\partial_x f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)d\tau,
$$

i

$$\begin{aligned}\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\|\|\partial_x(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon))\|_{L^2}d\tau \\ &\leq \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\quad + \widetilde{M}_T\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|\partial_u f\|_{L^\infty}\|\partial_x u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau \\ &\quad + \widetilde{M}_T\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|\partial_x f\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Primena Gronvalove nejednakosti na (4.13) daje

$$\begin{aligned}&\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \\ &\leq \left(\|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|\|\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \widetilde{M}_T\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|\partial_x f\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau\right) \\ &\quad \cdot\exp\left(\widetilde{M}_T\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|\partial_u f\|_{L^\infty}d\tau\right).\end{aligned}$$

S obzirom da je $f$ Lipšicova funkcija po $u$ i $x$, umereno ograničenje za $\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ neposredno sledi.

2. *Slučaj* $\gamma = \alpha$
   Iz (4.4) imamo

$$\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|f(\cdot,t,u_\varepsilon)\|_{L^2},$$

pa se lako dobija umereno ograničenje za $\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$, budući da je $f$ globalno Lipšicova funkcija u odnosu na $u$ i važi $f(x,t,0)=0$.

Diferencirajući (4.4) po $x$ dobijamo

$$\begin{aligned}\|\partial_x^C\mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|\partial_x(\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon(t))\|_{L^2} + \|\partial_x(f(\cdot,t,u_\varepsilon))\|_{L^2} \\ &\leq C(\log 1/\varepsilon)^\alpha\|u_\varepsilon(t)\|_{H^1} + \|\partial_u f\|_{L^\infty}\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \\ &\quad + \|\partial_x f\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2},\end{aligned}$$

pa kako je $f$ Lipšicova funkcija po $u$ i $x$, te za $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ i $\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ postoji umereno ograničenje, sledi postojanje umerenog ograničenja za $\|\partial_x^C \mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Preostalo je još da se dobije umereno ograničenje za $\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1}$. Kao prilikom dokazivanja osobine (4.6), umereno ograničenje za $\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$, odnosno, $\|\partial_x \frac{d}{dt}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$ se dobija nakon primene Gronvalove nejednakosti na (4.8) i (4.9), redom.

Da bismo pokazali da je dobijeno rešenje jedinstveno u okviru Kolomboovog prostora $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^1(\mathbb{R}))$, pretpostavimo da postoje dva rešenja, $u$ i $v$, Košijevog problema (4.4) i označimo $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Tada $\omega_\varepsilon$ zadovoljava

$$ {}^C\mathcal{D}_t^\alpha \omega_\varepsilon(t) = \widetilde{A}_\varepsilon \omega_\varepsilon(t) + f(\cdot,t,u_\varepsilon) - f(\cdot,t,v_\varepsilon) + \widetilde{N}_\varepsilon(t), \quad \omega_\varepsilon(0) = \omega_{0\varepsilon}, \tag{4.14}$$

pri čemu $\widetilde{N}_\varepsilon(t) \in \mathcal{N}_\alpha([0,\infty) : H^1(\mathbb{R}))$ i $\omega_{0\varepsilon} \in \mathcal{N}_\alpha(H^1(\mathbb{R}))$. Rešenje problema (4.14) dato je sa

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon(t) &= (S_\alpha)_\varepsilon(t)\omega_{0\varepsilon} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon) - f(\cdot,\tau,v_\varepsilon))d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{4.15}$$

pa dalje imamo ocenu u normi

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\le \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\omega_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| \cdot \|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon) - f(\cdot,\tau,v_\varepsilon)\|_{L^2} d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| \cdot \|\widetilde{N}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau. \end{aligned} \tag{4.16}$$

S obzirom da je $\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| \le \widetilde{M_T}$, $0 \le t \le T$, $0 \le \tau \le t$, gde je $\widetilde{M_T}$ dato sa (4.11) i ocenjeno sa (4.12), i da je $f$ Lipšicova funkcija po $u$, te kako se nakon primene Gronvalove nejednakosti na (4.16) dobija

$$\begin{aligned}&\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}\\&\leq\left(\|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|\|\omega_{0\varepsilon}\|_{L^2}+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\|\cdot\|\widetilde{N}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau\right)\\&\quad\cdot\exp\left(C\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\|d\tau\right),\end{aligned}$$

sledi postojanje $\mathcal{N}$-ograničenja za $\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Jednačina (4.14) implicira

$$\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}\leq\|\widetilde{A}_\varepsilon\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}+\|f(\cdot,t,u_\varepsilon)-f(\cdot,t,v_\varepsilon)\|_{L^2}+\|\widetilde{N}_\varepsilon(t)\|_{L^2},$$

pa se $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ lako dobija.

Nakon diferenciranja (4.15) po $x$ imamo

$$\begin{aligned}&\|\partial_x\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}\leq\|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x\omega_{0\varepsilon}\|_{L^2}\\&+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\|\partial_uf(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\partial_xu_\varepsilon-\partial_uf(\cdot,\tau,v_\varepsilon)\partial_xv_\varepsilon\|_{L^2}d\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\|\partial_xf(\cdot,\tau,u_\varepsilon)u_\varepsilon-\partial_xf(\cdot,\tau,v_\varepsilon)v_\varepsilon\|_{L^2}d\tau\\&+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\|\partial_x\widetilde{N}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Kako $f$ ima ograničen izvod drugog reda po $u$, dalje imamo

$$\begin{aligned}&\|\partial_uf(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\partial_xu_\varepsilon-\partial_uf(\cdot,\tau,v_\varepsilon)\partial_xv_\varepsilon\|_{L^2}\\&\quad\leq C_1\|\partial_xu_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}\|\omega_\varepsilon(\tau)\|_{H^1}+C_2\|\partial_x\omega_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Takođe, s obzirom da je $\partial_xf$ Lipšicova funkcija po $u$, dobijamo

$$\begin{aligned}&\|\partial_xf(\cdot,\tau,u_\varepsilon)u_\varepsilon-\partial_xf(\cdot,\tau,v_\varepsilon)v_\varepsilon\|_{L^2}\\&\quad\leq\|\partial_xf(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\|_{L^\infty}\|\omega_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}+\|v_\varepsilon(\tau)\|_{H^1}\|\partial_u^2f(\cdot,\tau,\widetilde{y})\|_{L^\infty}\|\omega_\varepsilon(\tau)\|_{L^2},\end{aligned}$$

za neku funkciju $\widetilde{y} \in H^1(\mathbb{R})$, pa postojanje $\mathcal{N}$-ograničenja za $\|\partial_x \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ sledi nakon primene Gronvalove nejednakosti na (4.17).

Diferenciranje (4.14) po $x$ implicira

$$\begin{aligned}\|\partial_x^C \mathcal{D}_t^\alpha \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \quad &\leq \quad \|\partial_x(\widetilde{A}_\varepsilon \omega_\varepsilon(t))\|_{L^2} + \|\partial_x(f(\cdot,t,u_\varepsilon) - f(\cdot,t,v_\varepsilon))\|_{L^2} \\ &\quad + \|\partial_x \widetilde{N}_\varepsilon(t)\|_{L^2},\end{aligned}$$

pa se $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|\partial_x^C \mathcal{D}_t^\alpha \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ lako dobija.

$\mathcal{N}$-ograničenje za $\|\frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ se može pokazati na sličan način, najpre diferencirajući jednačinu (4.15) po $t$, zatim diferencirajući novodobijenu jednačinu po $x$, i na kraju primenjujući Gronvalovu nejednakost.

Sumirajući prethodne zaključke, sledi $\omega_\varepsilon := u_\varepsilon - v_\varepsilon \in \mathcal{N}_\alpha([0,\infty) : H^1(\mathbb{R}))$, odnosno, rešenje frakcionog Košijevog problema (4.4), dato svojim reprezentom (4.5), jeste jedinstveno. □

**Napomena 4.1** *Ukoliko je $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(H^2(\mathbb{R}))$ operator $h_\varepsilon$-tipa, pri čemu je $h_\varepsilon = o\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^\alpha)^\alpha\Big)$, $0 < \alpha < 1$, na sličan način se može pokazati da je rešenje odgovarajućeg frakcionog Košijevog problema (4.4) takođe dato reprezentom (4.5), kao i da je to rešenje jedinstveno na Kolomboovom prostoru $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$.*

**Definicija 4.4** *Rešenje u problema (4.4), uvedeno u Teoremi 4.1, zove se uopšteno rešenje jednačine*

$$^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) = \widetilde{A}u(t) + f(\cdot,t,u).$$

## 4.3 Asociranost rešenja polazne i odgovarajuće aproksimativne jednačine

U ovom poglavlju pokazujemo da su, pod određenim dodatnim uslovima, rešenja polaznog problema (4.2) i odgovarajućeg aproksimativnog problema (4.4) $L^2-$asocirana.

**Teorema 4.2** *Neka je $0 < \alpha < 1$. Pretpostavimo da postoji rešenje $u_\varepsilon$ jednačine:*

$$^C\mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(x,t) = Au_\varepsilon(x,t) + f(x,t,u_\varepsilon(x,t)),\ \ t > 0,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}, \quad (4.18)$$

*gde je $A$ linearan, zatvoren i gusto definisan operator na Banahovom prostoru $H^1(\mathbb{R})$. Neka je $v_\varepsilon$ rešenje odgovarajuće aproksimativne jednačine sa istim početnim podacima:*

$$^C\mathcal{D}_t^\alpha v_\varepsilon(x,t) = \widetilde{A}_\varepsilon v_\varepsilon(x,t) + f(x,t,v_\varepsilon(x,t)),\ \ t > 0,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ v_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}, \quad (4.19)$$

*gde funkcija $f$ i operator $\widetilde{A}\in\mathcal{SG}(H^1(\mathbb{R}))$ zadovoljavaju iste uslove kao u Teoremi 4.1, pri čemu dodatno važi:*

**(i)** $\|\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2}\le C\|u_\varepsilon\|_{H^1}$, *za* $u_\varepsilon\in H^1(\mathbb{R})$, *tako da* $C$ *ne zavisi od* $\varepsilon$.

**(ii)** $\|(A-\widetilde{A}_\varepsilon)u_\varepsilon\|_{H^1}\to 0$, *za* $u_\varepsilon\in H^1(\mathbb{R})$, *kada* $\varepsilon\to 0$.

*Tada su rešenja $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ $L^2-$asocirana, to jest za svako $T>0$ važi*

$$\sup_{t\in[0,T)}\|u_\varepsilon(t)-v_\varepsilon(t)\|_{L^2}\to 0,\ \textit{kada}\ \varepsilon\to 0.$$

**Napomena 4.2** *Uopšteni operator $\widetilde{A}$ koji zadovoljava osobine (i) i (ii) iz prethodne teoreme može se dobiti, na primer, regularizacijom prostornih frakcionih izvoda ili izvoda celobrojnog reda sadržanih u operatoru $A$, kao što je urađeno u narednom poglavlju za razne tipove frakcionih jednačina.*

**Dokaz:**

Kako $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ zadovoljavaju jednačine (4.18) i (4.19), redom, dobija se

$$\begin{aligned}{}^C\mathcal{D}_t^\alpha(u_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x,t)) &= \widetilde{A}_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x,t))+(A-\widetilde{A}_\varepsilon)u_\varepsilon(x,t)\\ &\quad+f(x,t,u_\varepsilon)-f(x,t,v_\varepsilon).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Označimo $\omega_\varepsilon=u_\varepsilon-v_\varepsilon$. Tada jednačina (4.20) postaje

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha\omega_\varepsilon(t)=\widetilde{A}_\varepsilon\omega_\varepsilon(t)+f(\cdot,t,u_\varepsilon)-f(\cdot,t,v_\varepsilon)+N_\varepsilon(t),\quad \omega_\varepsilon(0)=0,$$

gde je $N_\varepsilon(t)=(A-\widetilde{A}_\varepsilon)u_\varepsilon(\cdot,t)$. Takođe, $\omega_\varepsilon$ zadovoljava

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon(t) &= \int_0^t(S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha}(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)-f(\cdot,\tau,v_\varepsilon))d\tau\\ &\quad+\int_0^t(S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha}N_\varepsilon(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

pa na osnovu integralne reprezentacije (2.7) proizilazi

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon(t) &= \int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)-f(\cdot,\tau,v_\varepsilon))d\tau\\ &\quad+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)N_\varepsilon(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Dalje, ocena u normi daje

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon) - f(\cdot,\tau,v_\varepsilon))\|_{L^2} d\tau \\ &+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) N_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau. \end{aligned} \tag{4.21}$$

S obzirom da po pretpostavci (i) važi $\|\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|u_\varepsilon\|_{H^1}$, gde C ne zavisi od $\varepsilon$, imamo

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) u_\varepsilon\|_{L^2} \leq E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha C)\|u_\varepsilon\|_{H^1},$$

za $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R})$. Tada iz pretpostavke (ii) sledi

$$\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) N_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} \to 0,$$

kada $\varepsilon \to 0$.

Koristeći osobinu $\|\partial_u f\|_{L^\infty} \leq C_1 < \infty$ i ocenu

$$\|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon) - f(\cdot,\tau,v_\varepsilon)\|_{L^2} \leq \|\partial_u f\|_{L^\infty} \cdot \|u_\varepsilon(\tau) - v_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} \leq C_1\|\omega_\varepsilon(\tau)\|_{L^2},$$

nakon primene Gronvalove nejednakosti na (4.21) dobija se

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \left( \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) N_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \right) \\ &\cdot \exp\left( C_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| d\tau \right), \end{aligned}$$

to jest

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0,$$

kada $\varepsilon \to 0$. □

## 4.4 Specijalni slučajevi frakcionih evolucionih jednačina

U ovom poglavlju ilustrujemo kako se uvedena teorija uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja može primeniti na aproksimativno rešavanje raznih tipova frakcionih evolucionih jednačina sa varijabilnim koeficijentima. Za dati diferencijalni operator $A$, odgovarajući uopšteni operator $\widetilde{A}$ dobija se regularizacijom frakcionih izvoda, odnosno, izvoda celobrojnog reda koji se pojavljuju u operatoru $A$. Razlog za regularizaciju jeste transformacija neograničenog diferencijalnog operatora u ograničeni (integralni) operator. Kao što je urađeno u Odeljku 3.2.4, može se pokazati da neregularizovani operator $A$ i odgovarajući regularizovani operator $\widetilde{A}$ u narednim primerima, zadovoljavaju osobine (i) i (ii) iz Teoreme 4.2.

### 4.4.1 Vremensko frakcione difuzione jednačine

Neka je $0 < \alpha < 1$ i neka $f(x,t,u(x,t))$ opisuje spoljašnju silu u Košijevom problemu

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t) &= \lambda(x)\partial_x^2 u(x,t) + f(x,t,u(x,t)), \;\; t>0, \;\; x\in\mathbb{R}, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Umesto problema (4.22) razmotrimo odgovarajući aproksimativni problem

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t) &= \widetilde{A}u(x,t) + f(x,t,u(x,t)), \;\; t>0, \;\; x\in\mathbb{R}, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{4.23}$$

gde je operator $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(H^2(\mathbb{R}))$ dat preko mreže operatora

$$\begin{aligned} &\widetilde{A}_\varepsilon : H^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R}), \\ &\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(x)(\partial_x^2 u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}), \end{aligned}$$

takvih da $\lambda_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$, $\|\lambda_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^\alpha)^{\alpha/2}\Big)$, $\phi_{h_\varepsilon}(x) = h_\varepsilon \phi(x h_\varepsilon)$, $h_\varepsilon = o\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^\alpha)^{\alpha/5}\Big)$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(x) \geq 0$ i $\int \phi(x)dx = 1$.

Tada kao posledicu tvrđenja datog u Teoremi 4.1 imamo da je jedinstveno uopšteno rešenje problema (4.23) dato reprezentom (4.5), odnosno,

$$u_\varepsilon(t) = (S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon} + \int_0^t (S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)\, {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{1-\alpha} f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)d\tau,$$

gde je $S_\alpha \in \mathcal{SG}_\alpha([0,\infty) : \mathcal{L}(H^2(\mathbb{R})))$ uopšteni uniformno neprekidan operator rešenja generisan uopštenim operatorom $\widetilde{A}$, kao i da rešenje pripada Kolombo-ovom prostoru $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$.

### 4.4.2 Prostorno-vremensko frakcione difuzione jednačine

Razmotrimo aproksimativni Košijev problem za prostorno-vremensko frakcionu jednačinu

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t) = \widetilde{A}_\beta u(t) + f(\cdot, t, u), \tag{4.24} $$

pri čemu je $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta < 2$, operator $\widetilde{A}_\beta \in \mathcal{SG}(H^2(\mathbb{R}))$ je dat preko mreže operatora

$$ \begin{aligned} &(\widetilde{A}_\beta)_\varepsilon : H^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R}), \\ &(\widetilde{A}_\beta)_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(x)(\mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}), \end{aligned} $$

$\mathcal{D}_+^\beta$ je levi Ljuvilov frakcioni izvod reda $\beta$ na $\mathbb{R}$ dat sa

$$ (\mathcal{D}_+^\beta u)(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{-\infty}^{x} \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^{\beta-1}} d\xi, $$

$\lambda_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$ i $\phi_{h_\varepsilon}(x)$ zadovoljavaju iste uslove kao u slučaju vremensko frakcionih difuzionih jednačina.

Tada je jedinstveno uopšteno rešenje Košijevog problema (4.24) dato reprezentom (4.5) i pripada Kolomboovom prostoru $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$. Isto tvrđenje ostaje da važi ukoliko se u frakcionom operatoru $\widetilde{A}_\beta$, $1 < \beta < 2$, umesto levog Ljuvilovog frakcionog izvoda reda $\beta$ koristi desni Ljuvilov frakcioni izvod reda $\beta$ ili Risov frakcioni izvod reda $\beta$.

### 4.4.3 Prostorno-vremensko frakcione advektivno-difuzione jednačine

Razmotrimo aproksimativni Košijev problem za jednačinu

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t) = \widetilde{A}_{\beta,\gamma} u(t) + f(\cdot, t, u), \tag{4.25} $$

gde je $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leq 1$, $1 < \gamma \leq 2$ i operator $\widetilde{A}_{\beta,\gamma} \in \mathcal{SG}(H^2(\mathbb{R}))$ je dat preko mreže operatora

$$ \begin{aligned} &(\widetilde{A}_{\beta,\gamma})_\varepsilon : H^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R}), \\ &(\widetilde{A}_{\beta,\gamma})_\varepsilon u_\varepsilon = -a_\varepsilon(x)(\mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}) + b_\varepsilon(x)(\mathcal{D}_+^\gamma u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}), \end{aligned} $$

pretpostavljajući pri tome da funkcije $a_\varepsilon$ i $b_\varepsilon$ zadovoljavaju slične uslove kao $\lambda_\varepsilon$ u vremensko frakcionoj difuzionoj jednačini.

Ponovo, jedinstveno uopšteno rešenje problema (4.25) dato je reprezentom (4.5) i pripada Kolomboovom prostoru $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$. Tvrđenje važi ukoliko se umesto levog Ljuvilovog frakcionog izvoda koristi desni Ljuvilov frakcioni izvod, odnosno, Risov frakcioni izvod odgovarajućeg reda.

# Glava 5

# Frakcione evolucione jednačine reda $1 < \alpha < 2$

Klasična (nefrakciona) jednodimenzionalna talasna jednačina u slučaju promenljive brzine prostiranja talasa $c(x)$ ima oblik

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(c^2(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\Big), \tag{5.1}$$

koji nastaje, na primer, prilikom modeliranja površinskih talasa na vodi (videti [23], [33]). Razmotrimo takođe alternativni oblik talasne jednačine dat sa

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) = c^2(x)\frac{\partial}{\partial x^2}v(x,t), \tag{5.2}$$

koja se dobija, na primer, iz jednodimenzionalne elektromagnetne Maksvelove jednačine.

Jednačine (5.1) i (5.2) su povezane u smislu da postoje transformacije koje jednu jednačinu svode na drugu. Na primer, $u = \partial v/\partial x$ je jedna relacija, dok druga sledi iz talasnog sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Zamenjujući u jednačini (5.2) izvod drugog reda po $t$ sa Kaputovim frakcionim izvodom ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$, reda $1 < \alpha < 2$, dobija se vremensko frakciona talasna jednačina sa varijabilnim koeficijentima

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(x,t) = c^2(x)\partial_x^2 u(x,t).$$

Zamenjujući dodatno izvod drugog reda po $x$ sa prostorno frakcionim izvodom reda $1 < \beta < 2$, dobija se prostorno-vremensko frakciona talasna jednačina sa varijabilnim koeficijentima

$$^C\mathcal{D}_t^\alpha u(x,t) = c^2(x)\mathcal{D}_x^\beta u(x,t),$$

gde za $\mathcal{D}_x^\beta$ možemo uzeti, na primer, levi Ljuvilov frakcioni izvod, odnosno, desni Ljuvilov frakcioni izvod ili Risov frakcioni izvod reda $\beta$ (videti [13], [30], [57]).

Nadovezujući se na prethodne tipove jednačina cilj ovog dela disertacije biće rešavanje opštije klase jednačina, to jest frakcionih evolucionih jednačina reda $1 < \alpha < 2$. Ove jednačine nastaju od evolucionih jednačina drugog reda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^2}u(t) &= Au(t) + f(\cdot, t, u) \\ u(0) &= u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{aligned} \tag{5.3}$$

zamenjujući izvod drugog reda frakcionim izvodom reda $1 < \alpha < 2$. Kao što smo već razmatrali u Poglavlju 1.4, jednačine (5.3) se mogu rešavati primenom teorije kosinusnih ograničenih linearnih operatora. Podsetimo se, reprezentacija rešenja problema (5.3) izražena preko kosinusne familije operatora data je sa

$$u(t) = C(t)u_0 + \mathrm{Sin}(t)u_1 + \int_0^t \mathrm{Sin}(t-\tau)f(\cdot, \tau, u)d\tau. \tag{5.4}$$

Ovde navodimo još neke osobine vezane za kosinusne operatore, u svetlu operatora rešenja $S_\alpha(t)$, $t \geq 0$, definisanih kao generalizacija kosinusnih operatora u Poglavlju 1.6.

Infinitezimalni generator kosinusne familije ograničenih linearnih operatora dobija se uzimajući $\alpha = 2$ u Definiciji 1.20 infinitezimalnog generatora operatora rešenja, te kao posledicu imamo

$$C(t) = S_2(t) = E_2(t^2 A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}A^n}{(2n)!} = \cosh(tA), \quad t \geq 0,$$

odnosno,

$$\mathrm{Sin}(t) = \int_0^t S_2(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}A^n}{(2n+1)!} = \sinh(tA), \quad t \geq 0.$$

Kao specijalan slučaj tvrđenja datog u Teoremi 1.9, za $\alpha = 2$ imamo tvrđenje da svaki linearan operator generiše jedinstven uniformno neprekidni kosinusni operator.

**Propozicija 5.1** *Neka su $C_1(t)$ i $C_2(t)$ uniformno neprekidni kosinusni operatori sa infinitezimalnim generatorima $A$ i $B$, redom. Ako $A = B$ onda $C_1(t) = C_2(t)$, za svako $t \geq 0$.*

U nastavku navodimo osnovne postavke primene teorije uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja, razvijene u Poglavlju 2.3, na aproksimativno rešavanje frakcionog Košijevog problema reda $1 < \alpha < 2$ sa varijabilnim koeficijentima koji zavise od $x$, odnosno,

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) &= Au(t) + f(\cdot, t, u), \ t > 0, \\ u(0) &= u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{aligned} \tag{5.5}$$

pri čemu je ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$ Kaputov frakcioni izvod reda $1 < \alpha < 2$, dat sa

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{f''(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau,$$

dok je $A$ linearan operator, zatvoren i gusto definisan na prostoru Soboljeva celobrojnog reda $H^1(\mathbb{R})$ ili $H^2(\mathbb{R})$. Tačnije, rešavaćemo Košijev problem (5.5) u slučaju kada je drugi početni uslov homogen.

Kao i u slučaju $0 < \alpha < 1$, umesto jednačine u polaznom problemu (5.5), razmatraćemo odgovarajuću aproksimativnu jednačinu

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) = \widetilde{A}u(t) + f(\cdot, t, u),$$

gde je $\widetilde{A}$ uopšteni linearan i ograničen operator asociran sa polaznim operatorom $A$. U slučaju diferencijalnog operatora $A$, odgovarajući uopšteni operator $\widetilde{A}$ dobija se regularizacijom frakcionog izvoda ili izvoda celobrojnog reda koji se pojavljuje u operatoru $A$.

Reprezentacija rešenja frakcionog Košijevog problema, u slučaju kada je drugi početni uslov homogen, navedena je u Poglavlju 5.1. Poglavlje 5.2 sadrži odgovarajuća tvrđenja vezana za Kolomboove prostore. Uslovi za egzistenciju i jedinstvenost rešenja aproksimativnog problema ispitivani su u Poglavlju 5.3. Analiza asociranosti rešenja polazne i odgovarajuće aproksimativne jednačine, uz pretpostavku da rešenje neregularizovane jednačine postoji, prezentovana je u Poglavlju 5.4.

Primena uvedene teorije uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja na aproksimativno rešavanje prethodno navedenih predstavnika klase frakcionih evolucionih jednačina, može se ilustrovati na način kao što je to urađeno u Poglavlju 5.5.

Krajnji ishod proučavanja ove klase jednačina biće nova procedura za aproksimativno rešavanje Košijevog problema nehomogenih frakcionih evolucionih jednačina sa varijabilnim koeficijentima datog sa (5.5), u slučaju kada je drugi početni uslov homogen.

Svi rezultati sadržani u ovoj glavi predstavljaju originalne rezultate prezentovane u radu [40].

## 5.1 Reprezentacija rešenja frakcionog Košijevog problema

Reprezentacija rešenja frakcionog Košijevog problema, u slučaju kada je drugi početni uslov homogen, data je u narednoj propoziciji:

**Propozicija 5.2** *Neka je $A$ linearan, ograničen operator na Banahovom prostoru $E$. Rešenje Košijevog problema za $1 < \alpha < 2$ :*

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t) &= Au(t) + f(\cdot, t, u(t)), \\ u(0) = u_0, &\quad u_t(0) = 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

*dato je sa*

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t {}_{\tau}J_t S_\alpha(t-\tau)\, {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot, \tau, u(\tau))d\tau, \tag{5.7}$$

*gde je* ${}_{\tau}J_t f(t) = \int\limits_{\tau}^{t} f(s)ds$, *dok je* $S_\alpha(t)$ *operator rešenja generisan sa* $A$.

**Dokaz:**

Koristeći osobinu Riman-Ljuvilovog frakcionog izvoda (1.18), integral sadržan u reprezentaciji (5.7) može se zapisati kao

$$\begin{aligned} &\int_0^t {}_{\tau}J_t S_\alpha(t-\tau)\, {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot, \tau, u(\tau))d\tau \\ &\quad = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} {}_{\tau}J_t \frac{(t-\tau)^{n\alpha}A^n}{\Gamma(1+n\alpha)}\; {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot, \tau, u(\tau))d\tau \\ &\quad = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{n\alpha+1}A^n}{\Gamma(2+n\alpha)}\; {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot, \tau, u(\tau))d\tau \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+2} A^n \, {}^{RL}\mathcal{D}_t^{2-\alpha} f(\cdot, t, u(t))$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha} A^n f(\cdot, t, u(t)). \tag{5.8}$$

Dalje, primenjujući Kaputov frakcioni operator na reprezentaciju (5.7), koristeći (5.8) dobijamo

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t) &= {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} S_\alpha(t) u_0 + {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha} A^n f(\cdot, t, u(t)) \\
&= A S_\alpha(t) u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} J_t^{\alpha} J_t^{n\alpha} A^n f(\cdot, t, u(t)) \\
&= A S_\alpha(t) u_0 + f(\cdot, t, u(t)) + A \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha} A^n f(\cdot, t, u(t)) \\
&= A S_\alpha(t) u_0 + f(\cdot, t, u(t)) + A(u(t) - S_\alpha(t) u_0) \\
&= A(u(t) + f(\cdot, t, u(t)).
\end{aligned}$$

Kako su početni uslovi trivijalno zadovoljeni, sledi da (5.7) predstavlja reprezentaciju rešenja problema (5.6). □

**Napomena 5.1** *S obzirom da važi ${}_{\tau}J_t C(t-\tau) = \mathrm{Sin}(t-\tau)$, primetimo da stavljajući $\alpha = 2$ u reprezentaciji (5.7), dobijamo reprezentaciju (5.4) koja reprezentuje rešenje evolucione jednačine drugog reda (5.3) i izražena je preko kosinusnih operatora. Reprezentacija rešenja problema (5.6) takođe može biti data preko Kaputovog frakcionog izvoda, uz dodatnu pretpostavku $f(\cdot, 0, u_0) = 0$.*

Egzistencija rešenja integralne jednačine (5.7) može se dokazati primenom Banahove teoreme o fiksnoj tački, odnosno, Banahovog principa kontrakcije. U tu svrhu trebaće nam alternativna integralna reprezentacija data u narednoj propoziciji.

**Propozicija 5.3** *Neka $1 < \alpha < 2$ i neka je $S_\alpha(t)$ operator rešenja generisan sa A. Tada*

$$\int_0^t {}_{\tau}J_t S_\alpha(t-\tau) {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot, \tau, u(\tau)) d\tau$$
$$= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) f(\cdot, \tau, u(\tau)) d\tau. \tag{5.9}$$

**Dokaz:**

Iz (5.8) sledi

$$\begin{aligned}
&\int_0^t {}_\tau J_t S_\alpha(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha} A^n f(\cdot,t,u(t)) \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n\alpha+\alpha-1} A^n f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau \\
&\quad = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

□

**Napomena 5.2** *Ukoliko u (5.9) opet stavimo $\alpha = 2$, iz osobine Mitag-Leflerove funkcije (1.28) proizilazi da integral na desnoj strani jednakosti (5.9) ima oblik kao u slučaju reprezentacije preko kosinusnih operatora (5.4), odnosno,*

$$\int_0^t \mathrm{Sin}(t-\tau) f(\cdot,\tau,u)d\tau.$$

Sada dokazujemo egzistenciju rešenja integralne jednačine (5.7), primenom Banahovog principa kontrakcije:

**Propozicija 5.4** *Neka je $E$ Banahov prostor, $u_0 \in E$ i neka je za $u(t) \in C([0,T) : E)$, $T > 0$, definisano preslikavanje $F$ dato sa*

$$F(u(t)) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t {}_\tau J_t S_\alpha(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau, \qquad (5.11)$$

*pri čemu je $S_\alpha(t)$, $1 < \alpha < 2$, operator rešenja generisan linearnim i ograničenim operatorom $A$. Pretpostavimo dodatno da je $f$ Lipšicova funkcija po $u$, kao i $f(\cdot,t,0) = 0$. Tada preslikavanje $F$ ima jedinstvenu fiksnu tačku na prostoru $C([0,T) : E)$.*

**Dokaz:**

Izaberimo $T > 0$. Tada za $u(t) \in C([0,T) : E)$, koristeći alternativnu integralnu reprezentaciju (5.9), dobijamo

$$\begin{aligned}
&\|F(u(t))\|_E \\
&\quad \le \|S_\alpha(t)u_0\|_E + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\|_{\mathcal{L}(E)} \|f(\cdot,\tau,u(\tau))\|_E d\tau \\
&\quad \le \|S_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\|u_0\|_E + \frac{T^\alpha}{\alpha} L \sup_{t\in[0,T)} \|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)\|_{\mathcal{L}(E)} \sup_{t\in[0,T)} \|u(t)\|_E, \quad (5.12)
\end{aligned}$$

pri čemu je $L$ Lipšicova konstanta preslikavanja $f$.

Kako za $E_{\alpha,\alpha}$ važi ocena

$$
\begin{aligned}
\|E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n\alpha}\|A\|^{n}}{\Gamma(\alpha+n\alpha)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n\alpha}\|A\|^{n}}{(\alpha+n\alpha-1)\Gamma(\alpha+n\alpha-1)} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n\alpha}\|A\|^{n}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1+n\alpha)} \\
&= \frac{1}{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha-1}(t^{\alpha}\|A\|), \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

iz (5.12) dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\|F(u(t))\|_{E} \\
&\quad\leq C_{\alpha}\exp(T\|A\|^{1/\alpha})\|u_0\|_{E}+\frac{T^{\alpha}}{\alpha}L\frac{C_{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}(1+\|A\|^{(2-\alpha)/\alpha})(1+T^{2-\alpha}) \\
&\qquad\cdot\exp(T\|A\|^{1/\alpha})\cdot\|u(t)\|_{C([0,T]:E)} \\
&\quad= C_{\alpha}\exp(T\|A\|^{1/\alpha})\|u_0\|_{E}+L\frac{C_{\alpha}}{\alpha^{2}(\alpha-1)}(1+\|A\|^{(2-\alpha)/\alpha})(T^{\alpha}+T^{2}) \\
&\qquad\cdot\exp(T\|A\|^{1/\alpha})\cdot\|u(t)\|_{C([0,T]:E)}. \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

Uzimajući u obzir pretpostavke za $u_0$ i $u(t)$, iz poslednje nejednakosti sledi da za preslikavanje $F$ dato sa (5.11) važi $F : C([0,T) : E) \to C([0,T) : E)$.

Pokažimo da je preslikavanje $F$ kontrakcija na prostoru $C([0,T) : E)$. Izaberimo $u_1(t), u_2(t) \in C([0,T) : E)$. Slično kao u (5.14) dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\|F(u_1(t))-F(u_2(t))\|_{E} \\
&\quad\leq \frac{T^{\alpha}}{\alpha}L\frac{C_{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}(1+\|A\|^{(2-\alpha)/\alpha})(1+T^{2-\alpha})\cdot\exp(T\|A\|^{1/\alpha}) \\
&\qquad\cdot\|u_1(t)-u_2(t)\|_{C([0,T]:E)} \\
&\quad= L\frac{C_{\alpha}}{\alpha^{2}(\alpha-1)}(1+\|A\|^{(2-\alpha)/\alpha})(T^{\alpha}+T^{2})\cdot\exp(T\|A\|^{1/\alpha}) \\
&\qquad\cdot\|u_1(t)-u_2(t)\|_{C([0,T]:E)}
\end{aligned}
$$

Da bi preslikavanje $F$ bilo kontrakcija neophodno je da bude zadovoljeno

$$
\frac{C_{\alpha}L(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})(T^{\alpha}+T^{2})e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T}}{\alpha^{2}(\alpha-1)} < 1, \qquad (5.15)
$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
&\frac{C_\alpha L(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})(T^\alpha+T^2)e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T}}{\alpha^2(\alpha-1)} < 1 \\
&\Leftrightarrow\ e^{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T} < \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{C_\alpha L(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})(T^\alpha+T^2)} \\
&\Leftrightarrow\ \|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T < \log\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{C_\alpha L(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})(T^\alpha+T^2)}.
\end{aligned}$$

Ukoliko važi

$$\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T < 1 - \frac{C_\alpha L(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})(T^\alpha+T^2)}{\alpha^2(\alpha-1)}, \tag{5.16}$$

koristeći ocenu za logaritamsku funkciju

$$1-\frac{1}{x} \leq \log x, \quad x>0,$$

zaključujemo da će u tom slučaju važiti poslednja nejednakost u prethodnom nizu nejednakosti, pa samim tim i uslov kontrakcije (5.15).

Kako za svako $0 < T < 1$ važi $T^2 < T^\alpha < T$, imamo

$$T^\alpha + T^2 > 2T^2,$$

što u kombinaciji sa nejednakošću (5.16) daje

$$\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T^2 < \|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T < 1 - \frac{2C_\alpha L(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})T^2}{\alpha^2(\alpha-1)},$$

odnosno,

$$T < \frac{1}{\sqrt{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{2C_\alpha L}{\alpha^2(\alpha-1)}(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})}}. \tag{5.17}$$

Sa druge strane, za svako $T \geq 1$ važi $T^\alpha \geq T$ i $T^2 \geq T$, pa imamo

$$T^\alpha + T^2 \geq 2T,$$

što opet u kombinaciji sa nejednakošću (5.16) daje

$$\|A\|^{\frac{1}{\alpha}}T < 1 - \frac{2C_\alpha L(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})T}{\alpha^2(\alpha-1)},$$

odnosno,

$$T < \frac{1}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{2C_\alpha L}{\alpha^2(\alpha-1)}(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})}. \tag{5.18}$$

Na osnovu (5.17) i (5.18), izaberimo $T^* > 0$ takvo da je

$$T^* < \min\left\{\frac{1}{\sqrt{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{2C_\alpha L}{\alpha^2(\alpha-1)}(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})}}, \frac{1}{\|A\|^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{2C_\alpha L}{\alpha^2(\alpha-1)}(1+\|A\|^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})}\right\}. \tag{5.19}$$

Na taj način smo u stvari pokazali da je $F$ kontrakcija na prostoru $C([0,T^*):E)$, pa na osnovu Banahovog principa kontrakcije sledi da $F$ ima jedinstvenu fiksnu tačku na tom prostoru. Kako izbor $T^*$, dat sa (5.19), ne zavisi od početnog uslova, sledi da se dobijeno rešenje može produžiti na proizvoljno $T > 0$, ponavljajući prethodni postupak i pri tome birajući nove početne uslove. $\square$

Kasnije, prilikom dokazivanja određenih tvrđenja u Kolomboovom okruženju, trebaće nam drugi izvod integrala na levoj strani reprezentacije (5.9).

**Propozicija 5.5** *Neka $1 < \alpha < 2$ i neka je $S_\alpha(t)$ operator rešenja generisan sa $A$. Tada*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^2}\int_0^t {}_\tau J_t S_\alpha(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau \\ = J_t^{\alpha-1}\frac{d}{dt}f(\cdot,t,u) + \frac{f(\cdot,0,u(0))t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \\ +A\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-3}E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha A)f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{5.20}$$

**Dokaz:**

Iz relacije (5.8) sledi

$$\frac{d}{dt^2}\int_0^t {}_\tau J_t S_\alpha(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot,\tau,u(\tau))d\tau = \frac{d}{dt^2}\sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha}A^n f(\cdot,t,u(t))$$

$$= \frac{d}{dt^2}J_t^\alpha f(\cdot,t,u(t)) + \frac{d}{dt^2}\sum_{n=1}^{\infty} J_t^{n\alpha+\alpha}A^n f(\cdot,t,u(t))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt^2} J_t^{\alpha} f(\cdot,t,u(t)) + \frac{d}{dt^2} A \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+2\alpha} A^n f(\cdot,t,u(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt} J_t J_t^{\alpha-1} f(\cdot,t,u(t)) + A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt^2} J_t^2 J_t^{n\alpha+2\alpha-2} A^n f(\cdot,t,u(t)) \\
&= \frac{d}{dt} J_t^{\alpha-1} f(\cdot,t,u(t)) + A \sum_{n=0}^{\infty} J_t^{n\alpha+2\alpha-2} A^n f(\cdot,t,u(t)) \\
&= J_t^{\alpha-1} \frac{d}{dt} f(\cdot,t,u(t)) + \frac{f(\cdot,0,u(0))t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \\
&+ A \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-3} E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^{\alpha} A) f(\cdot,\tau,u(\tau)) d\tau,
\end{aligned}
$$

pri čemu je u poslednjoj jednakosti uzeta u obzir relacija (2.20), kao i prethodno korišćene osobine frakcionog integrala i Mitag-Leflerove funkcije. □

**Napomena 5.3** *Primetimo da se stavljajući $\alpha = 2$ u (5.20) dobija drugi izvod integrala koji se javlja kod reprezentacije date preko kosinusnih operatora (5.4), odnosno, kao što smo dobili u Propoziciji 1.14,*

$$
\frac{d}{dt^2} \int_0^t \operatorname{Sin}(t-\tau) f(\cdot,\tau,u(\tau)) d\tau = f(\cdot,t,u(t)) + A \int_0^t \operatorname{Sin}(t-\tau) f(\cdot,\tau,u(\tau)) d\tau.
$$

## 5.2 Kolomboovi prostori

Definicije uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja, odnosno, njihovog infinitezimalnog generatora uvedene su u Poglavlju 2.3 (Definicija 2.11 i Definicija 2.12). U navedenom poglavlju pokazali smo da je u slučaju $0 < \alpha < 1$, (odnosno za $m = 1$), prostor $\mathcal{S}E_M^{\alpha,m}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ algebra u odnosu na kompoziciju operatora, kao i da je $\mathcal{S}N_{\alpha,m}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ ideal prostora $\mathcal{S}E_M^{\alpha,m}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. Pored toga, pokazali smo da za svako $\alpha > 0$ definicija infinitezimalnog generatora uniformno neprekidnog Kolomboovog operatora rešenja ne zavisi od predstavnika klase (Propozicija 2.12).

Sada pokazujemo da isto tvrđenje, vezano za strukturu definisanih prostora, važi i u slučaju $1 < \alpha < 2$, odnosno za $m = 2$.

**Propozicija 5.6** $\mathcal{S}E_M^{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ *je algebra u odnosu na kompoziciju operatora, dok je* $\mathcal{S}N_{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ *ideal prostora* $\mathcal{S}E_M^{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$.

**Dokaz:**

Fiksirajmo $1 < \alpha < 2$ i izaberimo uopštene operatore rešenja $S_\alpha$ i $T_\alpha$ iz prostora $\mathcal{S}E_M^{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. Tada se lako dobija da kompozicija $S_\alpha(t)T_\alpha(t)$ zadovoljava osobine (i) i (ii) sadržane u Definciji 2.5. Činjenica da $S_\alpha(t)T_\alpha(t)$ zadovoljava osobinu (iii) za $\gamma \in \{0,1,2\}$, može se pokazati na uobičajen način, kao u slučaju Kolomboovih prostora sa izvodima celobrojnog reda.

Dokažimo da je osobina (iii) zadovoljena za $\gamma = \alpha$ takođe. Tada za $t \in (\eta, T)$, gde je $\eta > 0$ proizvoljno malo i $T > 0$, koristeći osobinu (2.26) imamo

$$\begin{aligned}
&\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha((S_\alpha)_\varepsilon(t)(T_\alpha)_\varepsilon(t))\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&\quad\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \lim_{\eta\to 0^+} \int_\eta^t \frac{\|((S_\alpha)_\varepsilon(\tau)(T_\alpha)_\varepsilon(\tau))''\|_{\mathcal{L}(E)}}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau \\
&\quad\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \lim_{\eta\to 0^+} \int_\eta^t \frac{\|((S_\alpha)_\varepsilon(\tau))''\|_{\mathcal{L}(E)}\|(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)}}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau \\
&\quad\quad+ \frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} \lim_{\eta\to 0^+} \int_\eta^t \frac{\|((S_\alpha)_\varepsilon(\tau))'\|_{\mathcal{L}(E)}\|((T_\alpha)_\varepsilon(\tau))'\|_{\mathcal{L}(E)}}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau \\
&\quad\quad+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \lim_{\eta\to 0^+} \int_\eta^t \frac{\|(S_\alpha)_\varepsilon(\tau)\|_{\mathcal{L}(E)}\|((T_\alpha)_\varepsilon(\tau))''\|_{\mathcal{L}(E)}}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau \\
&\quad\leq \lim_{\eta\to 0^+} \frac{2(t-\eta)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} M_1\varepsilon^{-N} \\
&\quad\leq \frac{2T^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} M_1\varepsilon^{-N}.
\end{aligned}$$

Prema tome, pokazali smo postojanje umerenog ograničenja za $t \in (0,T)$, odnosno,

$$\sup_{t\in(0,T)} \left\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha((S_\alpha)_\varepsilon(t)(T_\alpha)_\varepsilon(t))\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M\varepsilon^{-N}.$$

Umereno ograničenje za $t = 0$ dobija se na isti način kao za slučaj $0 < \alpha < 1$ u Propoziciji 2.11, pa konačno proizilazi da je osobina (iii) kompletno zadovoljena.

Slično, može se pokazati da kompozicija $(T_\alpha)_\varepsilon(t)(S_\alpha)_\varepsilon(t)$ takođe zadovoljava sve osobine iz Definicije 2.5. Prema tome, prostor $\mathcal{S}E_M^{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ je algebra.

Na osnovu sličnih argumenata lako se pokazuje da je $\mathcal{S}N_{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ ideal prostora $\mathcal{S}E_M^{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. □

Direktna posledica tvrđenja datog u Propoziciji 5.6 jeste da smo i u ovom slučaju u mogućnosti da prostor Kolomboovog tipa, iz kojeg ćemo birati uopštene uniformno neprekidne operatore rešenja za $1<\alpha<2$, definišemo kao faktor algebru:

**Definicija 5.1** *Kolomboov prostor se definiše kao količnički prostor*

$$\mathcal{S}G_{\alpha,2}([0,\infty):\mathcal{L}(E))=\frac{\mathcal{S}E_M^{\alpha,2}([0,\infty):\mathcal{L}(E))}{\mathcal{S}N_{\alpha,2}([0,\infty):\mathcal{L}(E))}. \tag{5.21}$$

Da svaki ograničen uopšteni operator generiše jedinstven uniformno neprekidni Kolomboov operator rešenja proizilazi iz narednog tvrđenja.

**Propozicija 5.7** *Neka je $1<\alpha<2$. Neka je $\widetilde{A}$ infinitezimalni generator uniformno neprekidnog Kolomboovog operatora rešenja $S_\alpha$, i $\widetilde{B}$ infinitezimalni generator uniformno neprekidnog Kolomboovog operatora rešenja $T_\alpha$. Ako je $\widetilde{A}=\widetilde{B}$, tada $S_\alpha=T_\alpha$.*

**Dokaz:**

Fiksirajmo $1<\alpha<2$ i označimo $\widetilde{N}_\varepsilon=\widetilde{A}_\varepsilon-\widetilde{B}_\varepsilon\in\mathcal{SN}(E)$. Tada se iz osobine (iii) u Propoziciji 1.16 dobija

$$^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)x=\widetilde{A}_\varepsilon((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)x+\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(t)x.$$

Kako je $(S_\alpha)_\varepsilon(0)=(T_\alpha)_\varepsilon(0)=I$, kao i $(S_\alpha')_\varepsilon(0)=(T_\alpha')_\varepsilon(0)=0$, koristeći frakcioni Duhamelov princip, tj. reprezentaciju (5.7), dalje imamo

$$((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)x=\int_0^t {}_{\tau}J_t(S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha}\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)x\,d\tau \tag{5.22}$$

Iz integralne reprezentacije (5.9) sledi

$$((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)x=\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)x\,d\tau, \tag{5.23}$$

pa kako iz (5.13) znamo da za $E_{\alpha,\alpha}$ važi ocena

$$\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\|\leq\frac{1}{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha-1}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|),$$

slično kao u dokazu tvrđenja u Propoziciji 2.13, dobija se ocena

$$\begin{aligned}
\|((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)\| &\leq \|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{t\in[0,T)}\|(T_\alpha)_\varepsilon(t)\|\frac{T^\alpha}{\alpha}\frac{C_\alpha}{\alpha-1}(1+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{(1-(\alpha-1))/\alpha}) \\
&\cdot(1+T^{1-(\alpha-1)})\exp(T\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}) \\
&= \frac{C_\alpha}{\alpha(\alpha-1)}\|\widetilde{N}_\varepsilon\| \sup_{t\in[0,T)}\|(T_\alpha)_\varepsilon(t)\|(1+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{(2-\alpha)/\alpha}) \\
&\cdot(T^\alpha+T^2)\exp(T\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}),
\end{aligned}$$

odakle sledi postojanje $\mathcal{N}$-ograničenja za $\|((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)\|$.

Sada pokazujemo postojanje $\mathcal{N}$-ograničenja za $\|\frac{d}{dt}((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)\|$. Nakon diferenciranja (5.23) po $t$, na osnovu relacije (1.29), dobija se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t) &= \int_0^t \frac{d}{dt}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)d\tau \\
&+(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)\Big|_{t=\tau} \\
&= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

pa se na sličan način kao u prethodnom slučaju, koristeći odgovarajuće ocene, dobija $\mathcal{N}-$ograničenje za $\|\frac{d}{dt}((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)\|$.

$\mathcal{N}-$ograničenje za $\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)\|$ dobija se koristeći reprezentaciju (5.8) za integral u (5.22), to jest

$$\begin{aligned}
&{}^C\mathcal{D}_t^\alpha((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t) = {}^C\mathcal{D}_t^\alpha\int_0^t {}_\tau J_t(S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha}\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)xd\tau \\
&= {}^C\mathcal{D}_t^\alpha\sum_{n=0}^\infty J_t^{n\alpha+\alpha}\widetilde{A}_\varepsilon^n\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^\infty J_t^{n\alpha}\widetilde{A}_\varepsilon^n\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(t) \\
&= \widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(t)+\int_0^t\sum_{n=0}^\infty\widetilde{A}_\varepsilon\frac{(t-\tau)^{n\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+n\alpha)}\widetilde{A}_\varepsilon^n\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)d\tau \\
&= \widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(t)+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\widetilde{A}_\varepsilon E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

kao i prethodne ocene.

Ostaje da se pokaže postojanje $\mathcal{N}$-ograničenja za $\left\|\frac{d}{dt^2}((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)\right\|$. Da bismo to pokazali koristićemo relaciju (5.22), odnosno, reprezentaciju (5.20) u kojoj ćemo $f(\cdot,\tau,u(\tau))$ zameniti sa $N_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)$. Na taj način, uzimajući u obzir $(T_\alpha)_\varepsilon(0)=I$, dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^2}((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t) &= J_t^{\alpha-1}\widetilde{N}_\varepsilon\frac{d}{dt}(T_\alpha)_\varepsilon(t)+\frac{\widetilde{N}_\varepsilon t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\\ &+\int_0^t(t-\tau)^{2\alpha-3}\widetilde{A}_\varepsilon E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

odnosno, ocenu

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{d}{dt^2}((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)\Big\| &\le \Big\|J_t^{\alpha-1}\widetilde{N}_\varepsilon\frac{d}{dt}(T_\alpha)_\varepsilon(t)\Big\|+\frac{\|\widetilde{N}_\varepsilon\|t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\\ &+\int_0^t(t-\tau)^{2\alpha-3}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|\ E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\|\widetilde{N}_\varepsilon(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)\|d\tau.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Na osnovu osobina frakcionog integrala imamo

$$\begin{aligned}\Big\|J_t^{\alpha-1}\widetilde{N}_\varepsilon\frac{d}{dt}(T_\alpha)_\varepsilon(t)\Big\| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-2}\|\widetilde{N}_\varepsilon\|\Big\|\frac{d}{d\tau}(T_\alpha)_\varepsilon(\tau)\Big\|d\tau\\ &\le \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|\widetilde{N}_\varepsilon\|\sup_{t\in[0,T)}\Big\|\frac{d}{dt}(T_\alpha)_\varepsilon(t)\Big\|.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Pored toga, koristeći relaciju (1.31) za Mitag-Leflerovu funkciju $E_{\alpha,2\alpha-2}$, dobijamo

$$\begin{aligned}&E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\\ &\quad\le C_\alpha\Big(1+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{(1-(2\alpha-2))/\alpha}\Big)\Big(1+(t-\tau)^{1-(2\alpha-2)}\Big)\exp(\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}(t-\tau))\\ &\quad= C_\alpha\Big(1+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{(3-2\alpha)/\alpha}\Big)\Big(1+(t-\tau)^{3-2\alpha}\Big)\exp(\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}(t-\tau)).\end{aligned} \tag{5.26}$$

Kombinujući ocene (5.24), (5.25) i (5.26), prethodno opisanom procedurom dobijamo $\mathcal{N}-$ograničenje za $\big\|\frac{d}{dt^2}((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)\big\|$. Tačnije, za svako $T>0$ i $a\in\mathbb{R}$, postoji $M>0$ takvo da

$$\sup_{t\in(0,T)}\Big\|\frac{d}{dt^2}((S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon)(t)\Big\|_{\mathcal{L}(E)}\le M\varepsilon^a.$$

Dokazali smo $(S_\alpha)_\varepsilon-(T_\alpha)_\varepsilon\in\mathcal{SN}_{\alpha,2}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$, odnosno, $S_\alpha=T_\alpha$. $\square$

Na sličan način kao što je urađeno u Propoziciji 2.14, može se pokazati da isto tvrđenje vezano za karakterizaciju infinitezimalnog generatora uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja važi i u slučaju $1 < \alpha < 2$.

**Propozicija 5.8** *Neka je* $1 < \alpha < 2$. *Svaki operator* $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(E)$ $h_\varepsilon$*-tipa, pri čemu je* $h_\varepsilon \leq C(\log 1/\varepsilon)^\alpha$, *jeste infinitezimalni generator nekog uopštenog uniformno neprekidnog operatora rešenja* $S_\alpha \in \mathcal{SG}_{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$.

**Dokaz:**

Neka je $(S_\alpha)_\varepsilon(t)$ operator rešenja generisan sa $\widetilde{A}_\varepsilon$. Umereno ograničenje za $\|{}^C\mathcal{D}_t^\gamma(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$, gde $\gamma \in \{0, 1, \alpha\}$, dokazuje se na isti način kao u Propoziciji 2.14. Prema tome, ostaje da se pokaže umereno ograničenje za $\|\frac{d^2}{dt^2}(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Kako je operator rešenja $(S_\alpha)_\varepsilon(t)$ generisan sa $\widetilde{A}_\varepsilon$, dat sa

$$(S_\alpha)_\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha}\widetilde{A}_\varepsilon^n}{\Gamma(1+n\alpha)},$$

nakon diferenciranja dva puta po $t$, dobija se

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}(S_\alpha)_\varepsilon(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\alpha((n+1)\alpha-1)}{\Gamma(1+(n+1)\alpha)} t^{(n+1)\alpha-2}\widetilde{A}_\varepsilon^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\alpha-1}{\Gamma(1+(n+1)\alpha-1)} t^{(n+1)\alpha-2}\widetilde{A}_\varepsilon^{n+1} \\
&= t^{\alpha-2}\widetilde{A}_\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha-1+n\alpha)}\widetilde{A}_\varepsilon^n \\
&= t^{\alpha-2}\widetilde{A}_\varepsilon E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Koristeći ocenu za Mitag Leflerovu funkciju $E_{\alpha,\alpha-1}$, za svako $T_1 > 0$ i sve $t \in [T_1, T)$, sličnom procedurom kao u (2.31), dobija se umereno ograničenje za $\|\frac{d^2}{dt^2}(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Na taj način smo konačno dokazali $(S_\alpha)_\varepsilon \in \mathcal{S}E_M^{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. $\square$

## 5.3 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

Umesto frakcionog Košijevog problema (5.5) sa zatvorenim, gusto definisanim operatorom $A$ definisanim na $H^1(\mathbb{R})$ i homogenim drugim početnim uslovom, razmatraćemo asocirani frakcioni Košijev problem dat sa

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) &= \widetilde{A}u(t) + f(\cdot, t, u), \ t > 0, \\ u(0) &= u_0, \quad u_t(0) = 0, \end{aligned}$$

gde je $\widetilde{A}$ uopšteni linearan i ograničen operator $L^2-$asociran sa operatorom $A$, to jest za sve $u \in H^1(\mathbb{R})$, važi

$$\|(A - \widetilde{A}_\varepsilon)u\|_{L^2} \to 0, \ \ \varepsilon \to 0.$$

**Teorema 5.1** *Neka je* $1 < \alpha < 2$. *Pretpostavimo da* $u_0 \in \mathcal{G}_\alpha(H^1(\mathbb{R}))$ *i neka je funkcija* $f(x,t,u)$ *dva puta neprekidno diferencijabilna po* $t$, *globalno Lipšicova funkcija po* $x$ *i* $u$ *sa ograničenim izvodom drugog reda po* $u$ *takva da* $f(x,t,0) = 0$. *Takođe, pretpostavimo da su* $\partial_x f(x,t,u)$ *i* $\partial_t f(x,t,u)$ *globalno Lipšicove funkcije po* $u$. *Neka* $g_1(x,t,u) := \partial_u f(x,t,u)$ *i* $g_2(x,t,u) := \partial_t f(x,t,u)$ *zadovoljavaju iste osobine kao i funkcija* $f(x,t,u)$.

*Neka je* $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(H^1(\mathbb{R}))$ *operator* $h_\varepsilon$*-tipa,* $h_\varepsilon = o\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1})^\alpha\Big)$, *takav da* $\|\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} \leq h_\varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^2}$, *za* $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R})$.

*Tada, za svako* $1 < \alpha < 2$ *postoji jedinstveno uopšteno rešenje* $u \in \mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^1(\mathbb{R}))$ *Košijevog problema*

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) &= \widetilde{A}u(t) + f(\cdot, t, u), \ t > 0, \\ u(0) &= u_0, \quad u_t(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.27}$$

*Rešenje je dato reprezentom*

$$u_\varepsilon(t) = (S_\alpha)_\varepsilon(t) u_{0\varepsilon} + \int_0^t {}_\tau J_t (S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha} f(\cdot, \tau, u_\varepsilon(\tau)) d\tau, \tag{5.28}$$

*gde je* $S_\alpha \in \mathcal{SG}_{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R})))$ *uniformno neprekidan Kolomboov operator rešenja generisan sa* $\widetilde{A}$.

**Dokaz:**

S obzirom da je operator $\widetilde{A}$ $h_\varepsilon$-tipa, pri čemu je $h_\varepsilon = o((\log\log 1/\varepsilon)^\alpha)$, očigledno važi da je $\widetilde{A}$ infinitezimalni generator Kolomboovog operatora rešenja $S_\alpha \in \mathcal{SG}_{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R})))$ datog sa $S_\alpha(t) = E_\alpha(t^\alpha \widetilde{A})$ (Propozicija 5.8). Pored toga, na osnovu tvrđenja datog u Propoziciji 5.2 znamo da je (5.28) reprezent rešenja problema (5.27).

Pokažimo da je ovo rešenje element prostora $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty):H^1(\mathbb{R}))$, definisanog u Poglavlju 4.1. Najpre pokazujemo da rešenje zadovoljava osobinu

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{\frac{d}{dt^2}u_\varepsilon(t,\cdot)}{t^{\alpha-2}}\right\|_{H^1} = C < +\infty. \tag{5.29}$$

Zaista, nakon diferenciranja (5.28) dva puta po $t$, koristeći integralnu reprezentaciju (5.20) dobija se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^2}u_\varepsilon(t,\cdot) &= \frac{d}{dt^2}(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon} + J_t^{\alpha-1}\frac{d}{dt}f(\cdot,t,u_\varepsilon(t)) + \frac{f(\cdot,0,u_\varepsilon(0))t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-3}\widetilde{A}_\varepsilon E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)f(\cdot,\tau,u_\varepsilon(\tau))d\tau,\end{aligned} \tag{5.30}$$

pa u skladu sa notacijom $g_1(x,t,u)=\partial_u f(x,t,u)$ i $g_2(x,t,u)=\partial_t f(x,t,u)$, dalje imamo

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{d}{dt^2}u_\varepsilon(t,\cdot)\right\|_{L^2}\\ &\le \left\|\frac{d}{dt^2}(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}\right\|_{L^2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\left\|\partial_\tau f(\cdot,\tau,u_\varepsilon(\tau))\right\|_{L^2}d\tau\\ &\quad + \frac{\|f(\cdot,0,u_\varepsilon(0))\|_{L^2}t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-3}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|\,E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\,\|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon(\tau))\|_{L^2}d\tau\\ &\le \left\|\frac{d}{dt^2}(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}\right\|_{L^2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|g_1\|_{L^\infty}\|\partial_\tau u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau\\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|g_2\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau + \frac{C\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\\ &\quad + C\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-3}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|\,E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\,\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Znajući da za funkciju $E_{\alpha,2\alpha-2}$ važi ocena

$$E_{\alpha,2\alpha-2}(t^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \le C_\alpha\Big(1+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{\frac{3-2\alpha}{\alpha}}\Big)\Big(1+t^{3-2\alpha}\Big)\exp\Big(\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{\frac{1}{\alpha}}t\Big), \tag{5.32}$$

postavljajući

$$\widetilde{M}_t = \sup_{\tau\in[0,t)} C_\alpha\Big(1+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{\frac{3-2\alpha}{\alpha}}\Big)\exp\Big(\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{\frac{1}{\alpha}}\tau\Big),$$

poslednji integral u (5.31) može se oceniti kao

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-3}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|\, E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\,\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau \\
&\qquad \leq \widetilde{M_t}(t+\frac{t^{2\alpha-2}}{2\alpha-2})\|\widetilde{A}_\varepsilon\| \sup_{\tau\in[0,t)} \|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2},
\end{aligned}$$

pa za posledicu dobijamo da važi osobina

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{\frac{d}{dt^2}u_\varepsilon(t,\cdot)}{t^{\alpha-2}}\right\|_{L^2} = C<+\infty.$$

Takođe, nakon diferenciranja (5.30) po $x$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_x\frac{d}{dt^2}u_\varepsilon(t,\cdot)\right\|_{L^2} \leq \left\|\frac{d}{dt^2}(S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\right\|_{L^2} \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\left\|\partial_x\partial_\tau f(\cdot,\tau,u_\varepsilon(\tau))\right\|_{L^2}d\tau \\
&\quad +\frac{\|\partial_x f(\cdot,0,u_\varepsilon(0))\|_{L^2}t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \\
&\quad +\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-3}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|\, E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\,\|\partial_x f(\cdot,\tau,u_\varepsilon(\tau))\|_{L^2}d\tau \\
&\leq \left\|\frac{d}{dt^2}(S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\right\|_{L^2} \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|\partial_x g_1\|_{L^\infty}\|\partial_\tau u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|g_1\|_{L^\infty}\|\partial_x\partial_\tau u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|\partial_x g_2\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|g_2\|_{L^\infty}\|\partial_x u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(\|g_1(\cdot,0,u_{0\varepsilon})\|_{L^\infty}\|\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2}+\|g_3(\cdot,0,u_{0\varepsilon})\|_{L^\infty}\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\Big)\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\\
&+\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-3}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|\, E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\,\|g_1\|_{L^\infty}\|\partial_x u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau\\
&+\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-3}\|\widetilde{A}_\varepsilon\|\, E_{\alpha,2\alpha-2}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\,\|g_3\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau,
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

pri čemu je $g_3(x,t,u)=\partial_x f(x,t,u)$. Na sličan način kao što je urađeno u (5.31), na osnovu pretpostavki za funkcije $g_1$, $g_2$ i $g_3$, koristeći pri tome ocenu (5.32), dobija se

$$
\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{\partial_x \frac{d}{dt}u_\varepsilon(t,\cdot)}{t^{\alpha-1}}\right\|_{L^2}=C<+\infty,
$$

pa sledi da je osobina (5.29) zadovoljena.

Dalje, dokazujemo postojanje umerenog ograničenja za $\|{}^C\mathcal{D}_t^\gamma u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1}$, pri čemu je $\gamma\in\{0,1,\alpha\}$, kao i za $\|\frac{d}{dt^2}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1}$. Najpre dokazujemo umereno ograničenje za $\|{}^C\mathcal{D}_t^\gamma u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1}$, razmatrajući slučajeve:

1. *Slučaj* $\gamma=0$

   Na osnovu reprezentacije rešenja (5.28) i alternativne integralne reprezentacije date u Propoziciji 5.3, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\le \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\\
&\quad+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)\|\cdot\|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\|_{L^2}d\tau\\
&\le \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\\
&\quad+\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha-1}((t-\tau)^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\|_{L^2}d\tau,
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

   gde je u poslednjoj nejednakosti korišćena ocena (5.13).

   Koristeći ocenu za $E_{\alpha,\alpha-1}$ datu sa (1.31) dobija se

$$
E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha\|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\;\le\; C_\alpha\Big(1+\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{(2-\alpha)/\alpha}\Big)\Big(1+t^{2-\alpha}\Big)\exp\Big(t\|\widetilde{A}_\varepsilon\|^{1/\alpha}\Big),
$$

pa ukoliko uvedemo oznaku

$$\widetilde{M}_T := \sup_{t\in[0,T)} E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|), \tag{5.35}$$

na osnovu dobro poznatih osobina Landauovih simbola $o$ i $\mathcal{O}$, navedenih u Dodatku, dobijamo ocenu

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_T &\leq C_\alpha\Big(1+o\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1})^{2-\alpha}\Big)\Big)\Big(1+T^{2-\alpha}\Big)\\
&\quad \cdot \exp\Big(T\cdot o\Big(\log(\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1}\Big)\Big)\\
&\leq C_\alpha\Big(1+o\Big((\log\log 1/\varepsilon)^{2-\alpha}\Big)\Big)\Big(1+T^{2-\alpha}\Big)\cdot \exp\Big(o\Big(\log(\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1}\Big)\Big)\\
&\leq C_\alpha\Big(1+o\Big((\log 1/\varepsilon)^{2-\alpha}\Big)\Big)\Big(1+T^{2-\alpha}\Big)\cdot o\Big((\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1}\Big)\\
&= C_\alpha\Big(1+T^{2-\alpha}\Big)\Big(o\Big((\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1}\Big)+o(\log 1/\varepsilon)\Big)\\
&= C_\alpha\Big(1+T^{2-\alpha}\Big)o(\log 1/\varepsilon)\\
&= \mathcal{O}(\log 1/\varepsilon).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Primetimo da za $\alpha = 2$ sledi $\widetilde{M}_T := \sup_{t\in[0,T)} \|C(t)\|$, pri čemu je $C(t)$ uopštena uniformno neprekidna kosinusna familija operatora generisana sa $\widetilde{A}$.

Pored toga, na osnovu (5.35), iz (5.34) dobijamo ocenu

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \frac{\widetilde{M}_T}{\alpha-1}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\|_{L^2}d\tau\\
&\leq \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \frac{C\widetilde{M}_T}{\alpha-1}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

odnosno, nakon primene Gronvalove nejednakosti na (5.37) imamo

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\|\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\exp\left(\frac{C\widetilde{M}_T T^\alpha}{\alpha(\alpha-1)}\right),$$

pa uzimajući u obzir relaciju (5.36) sledi umereno ograničenje za $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Nakon diferenciranja (5.28) po $x$, opet na osnovu integralne reprezentacije date u Propoziciji 5.3, imamo

$$\partial_x u_\varepsilon(t) = (S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\partial_x f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)d\tau,$$

pa slično kao u (5.34), koristeći (5.35) dalje dobijamo

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq\ & \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\
& + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha-1}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|)\|\partial_x(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon))\|_{L^2} d\tau \\
\leq\ & \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\
& + \frac{\widetilde{M}_T}{\alpha-1}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|g_1\|_{L^\infty}\|\partial_x u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \\
& + \frac{\widetilde{M}_T}{\alpha-1}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|g_3\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Primena Gronvalove nejednakosti na (5.38) daje

$$\begin{aligned}
& \|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \\
& \leq \left( \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\| \|\partial_x u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \frac{\widetilde{M}_T}{\alpha-1}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|g_3\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \right) \\
& \quad \cdot \exp\left( \frac{\widetilde{M}_T}{\alpha-1}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|g_1\|_{L^\infty} d\tau \right),
\end{aligned}$$

pa s obzirom na pretpostavke uvedene za funkcije $g_1$ i $g_3$, umereno ograničenje za $\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ neposredno sledi.

2. *Slučaj* $\gamma = 1$
Koristeći alternativnu integralnu reprezentaciju za (5.28), datu sa (5.9), nakon diferenciranja po $t$, na osnovu relacije (1.29) koja važi za izvod

Mitag-Leflerove funkcije, dobijamo

$$\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon) f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)d\tau, \tag{5.39}$$

odnosno, ocenu

$$\left\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)\right\|_{L^2} \leq \left\|\frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}\right\|_{L^2} + C\widetilde{M}_T \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau,$$

odakle sledi postojanje umerenog ograničenja za $\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Slično, nakon diferenciranja (5.39) po $x$, dobijamo ocenu

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)\right\|_{L^2} \leq\; & \left\|\frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t)\partial_x u_{0\varepsilon}\right\|_{L^2} \\ & +\widetilde{M}_T\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|g_1\|_{L^\infty}\|\partial_x u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau \\ & +\widetilde{M}_T\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|g_3\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau, \end{aligned} \tag{5.40}$$

odakle opet sledi da postoji umereno ograničenje za $\|\partial_x\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

3. *Slučaj* $\gamma = \alpha$
   Iz (5.27) imamo

   $$\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|f(\cdot,t,u_\varepsilon)\|_{L^2},$$

   pa se lako dobija umereno ograničenje za $\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$, budući da je $f$ globalno Lipšicova funkcija po $u$ i važi $f(x,t,0)=0$.

   Diferencirajući (5.27) po $x$ dobijamo

   $$\begin{aligned}\|\partial_x^C\mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|\partial_x(\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon(t))\|_{L^2} + \|\partial_x(f(\cdot,t,u_\varepsilon))\|_{L^2} \\ &\leq C(\log 1/\varepsilon)^\alpha\|u_\varepsilon(t)\|_{H^1} + \|\partial_u f\|_{L^\infty}\|\partial_x u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \\ &\quad +\|\partial_x f\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2},\end{aligned}$$

   pa na osnovu sličnih argumenata sledi postojanje umerenog ograničenja za $\|\partial_x^C\mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Preostalo je da se dokaže postojanje umerenog ograničenja za $\|\frac{d}{dt^2}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1}$. Ovaj put se umereno ograničenje dobija koristeći nejednakosti (5.31) i (5.33), odgovarajuće ocene za Mitag-Leflerovu funkciju $E_{\alpha,2\alpha-2}$, kao i prethodno dokazana umerena ograničenja za $\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$, $\|\partial_x u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$, $\|\frac{d}{dt}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$ i $\|\partial_x \frac{d}{dt}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$.

Da bismo pokazali da je dobijeno rešenje jedinstveno u okviru Kolomboovog prostora $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty):H^1(\mathbb{R}))$, pretpostavimo da postoje dva rešenja, $u$ i $v$, Košijevog problema (5.27) i označimo $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Tada $\omega_\varepsilon$ zadovoljava

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha \omega_\varepsilon(t) &= \widetilde{A}_\varepsilon \omega_\varepsilon(t) + f(\cdot,t,u_\varepsilon) - f(\cdot,t,v_\varepsilon) + \widetilde{N}_\varepsilon(t), \\ \omega_\varepsilon(0) &= \omega_{0\varepsilon}, \ \ (\omega_t)_\varepsilon(0) = 0, \end{aligned} \tag{5.41}$$

pri čemu $\widetilde{N}_\varepsilon(t) \in \mathcal{N}_\alpha([0,\infty):H^1(\mathbb{R}))$ i $\omega_{0\varepsilon} \in \mathcal{N}_\alpha(H^1(\mathbb{R}))$. Rešenje problema (5.41) dato je sa

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon(t) &= (S_\alpha)_\varepsilon(t)\omega_{0\varepsilon} + \int_0^t {}_\tau J_t (S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau) {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha}(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon) - f(\cdot,\tau,v_\varepsilon))d\tau \\ &\quad + \int_0^t {}_\tau J_t (S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau) {}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha}\widetilde{N}_\varepsilon(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{5.42}$$

odnosno koristeći alternativnu integralnu reprezentaciju

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon(t) &= (S_\alpha)_\varepsilon(t)\omega_{0\varepsilon} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon) - f(\cdot,\tau,v_\varepsilon))d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\widetilde{N}_\varepsilon(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{5.43}$$

pa dalje imamo ocenu u normi

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\omega_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| \cdot \|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon) - f(\cdot,\tau,v_\varepsilon)\|_{L^2} d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| \cdot \|\widetilde{N}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Kako je $f$ Lipšicova funkcija po $u$, nakon primene Gronvalove nejednakosti na (5.44) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}\\
&\leq \left( \|(S_\alpha)_\varepsilon(t)\| \|\omega_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| \cdot \|\widetilde{N}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau \right)\\
&\quad \cdot \exp\left( C \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon\|) d\tau \right).
\end{aligned}$$

Na sličan način kao što je izvedena ocena za (5.34), koristeći $\widetilde{M_T}$ dato sa (5.35) i ocenjeno sa (5.36), imamo $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Jednačina (5.41) implicira

$$\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|\widetilde{A}_\varepsilon \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|f(\cdot,t,u_\varepsilon) - f(\cdot,t,v_\varepsilon)\|_{L^2} + \|\widetilde{N}_\varepsilon(t)\|_{L^2},$$

pa se $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|{}^C\mathcal{D}_t^\alpha \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ lako dobija.

Nakon diferenciranja (5.43) po $x$, imamo ocenu

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|(S_\alpha)_\varepsilon(t) \partial_x \omega_{0\varepsilon}\|_{L^2}\\
&+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|g_1(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon - g_1(\cdot,\tau,v_\varepsilon)\partial_x v_\varepsilon\|_{L^2} d\tau\\
&+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|g_3(\cdot,\tau,u_\varepsilon) u_\varepsilon - g_3(\cdot,\tau,v_\varepsilon) v_\varepsilon\|_{L^2} d\tau\\
&+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \|\widetilde{A}_\varepsilon\|) \|\partial_x \widetilde{N}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau. \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

Kako $f$ ima ograničen izvod drugog reda po $u$, dalje imamo

$$\begin{aligned}
&\|g_1(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon - g_1(\cdot,\tau,v_\varepsilon)\partial_x v_\varepsilon\|_{L^2}\\
&\quad \leq C_1 \|\partial_x u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} \|\omega_\varepsilon(\tau)\|_{H^1} + C_2 \|\partial_x \omega_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}. \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

Takođe, s obzirom da je $\partial_x f$ Lipšicova funkcija po $u$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\|g_3(\cdot,\tau,u_\varepsilon) u_\varepsilon - g_3(\cdot,\tau,v_\varepsilon) v_\varepsilon\|_{L^2}\\
&\quad \leq \|g_3(\cdot,\tau,u_\varepsilon)\|_{L^\infty} \|\omega_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}\\
&\quad + \|v_\varepsilon(\tau)\|_{H^1} \|\partial_u^2 f(\cdot,\tau,\widetilde{y})\|_{L^\infty} \|\omega_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}, \qquad (5.47)
\end{aligned}$$

za neku funkciju $\widetilde{y} \in H^1(\mathbb{R})$. Uvrštavajući ocene (5.46) i (5.47) u (5.45), nakon primene Gronvalove nejdnakosti na novodobijenu ocenu za (5.45) sledi postojanje $\mathcal{N}$-ograničenja za $\|\partial_x \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

$\mathcal{N}$-ograničenje za $\|\frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ dobija se nakon diferenciranja jednačine (5.43) po $t$. Na taj način dobijamo ocenu

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(t)\Big\|_{L^2} \leq \Big\|\frac{d}{dt}(S_\alpha)_\varepsilon(t)\omega_{0\varepsilon}\Big\|_{L^2} \\ + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|E_{\alpha,\alpha-1}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| \cdot \|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon) - f(\cdot,\tau,v_\varepsilon)\|_{L^2} d\tau \\ + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\|E_{\alpha,\alpha-1}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\| \cdot \|\widetilde{N}_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} d\tau,\end{aligned}$$

odakle slično kao u (5.39) sledi da postoji odgovarajuće $\mathcal{N}$-ograničenje. Nakon diferenciranja jednačine (5.43) najpre po $t$, a zatim po $x$, slično kao u slučaju (5.40), dobija se $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|\partial_x \frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Diferenciranje (5.41) po $x$ implicira

$$\begin{aligned}\|\partial_x^C \mathcal{D}_t^\alpha \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq\ & \|\partial_x(\widetilde{A}_\varepsilon \omega_\varepsilon(t))\|_{L^2} + \|\partial_x(f(\cdot,t,u_\varepsilon) - f(\cdot,t,v_\varepsilon))\|_{L^2} \\ & + \|\partial_x \widetilde{N}_\varepsilon(t)\|_{L^2},\end{aligned}$$

pa se $\mathcal{N}$-ograničenje za $\|\partial_x^C \mathcal{D}_t^\alpha \omega_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ dobija rasuđujući na sličan način kao u prethodnim slučajevima.

Postojanje $\mathcal{N}$-ograničenja za $\|\frac{d}{dt^2}\omega_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ se može pokazati najpre diferencirajući jednačinu (5.42) dva puta po $t$, a zatim diferencirajući novodobijenu jednačinu po $x$. U oba slučaja, odgovarajuće $\mathcal{N}$-ograničenje se dobija koristeći integralnu reprezentaciju (5.20), primenjujući pri tome proceduru sličnu onoj za (5.31), odnosno, (5.33).

Sumirajući prethodne zaključke, sledi $\omega_\varepsilon := u_\varepsilon - v_\varepsilon \in \mathcal{N}_\alpha([0,\infty) : H^1(\mathbb{R}))$, odnosno, rešenje frakcionog Košijevog problema (5.27), dato svojim reprezentom (5.28), jeste jedinstveno. □

**Napomena 5.4** *Ukoliko je $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(H^2(\mathbb{R}))$ operator $h_\varepsilon$-tipa, pri čemu je $h_\varepsilon = o\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1})^\alpha\Big)$, $1 < \alpha < 2$, na sličan način se može pokazati da je rešenje odgovarajućeg frakcionog Košijevog problema (5.27) takođe dato reprezentom (5.28), kao i da je to rešenje jedinstveno na Kolomboovom prostoru $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$.*

**Definicija 5.2** *Rešenje u problema (5.27), uvedeno u Teoremi 5.1, zove se uopšteno rešenje jednačine*

$$^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(t) = \widetilde{A}u(t) + f(\cdot, t, u).$$

## 5.4 Asociranost rešenja polazne i odgovarajuće aproksimativne jednačine

U ovom poglavlju pokazujemo da su, pod određenim dodatnim uslovima, rešenja polaznog problema (5.5) sa homogenim drugim početnim uslovom i odgovarajućeg aproksimativnog problema (5.27) $L^2-$asocirana.

**Teorema 5.2** *Neka je* $1 < \alpha < 2$. *Razmotrimo frakcioni Košijev problem*

$$\begin{aligned} ^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u_{\varepsilon}(x,t) &= Au_{\varepsilon}(x,t) + f(x,t,u_{\varepsilon}(x,t)), \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \\ u_{\varepsilon}(0) &= u_{0\varepsilon}, \;\; (u_t)_{\varepsilon}(0) = 0, \end{aligned} \tag{5.48}$$

*gde je A linearan, zatvoren i gusto definisan operator na Banahovom prostoru* $H^1(\mathbb{R})$. *Takođe, osim polaznog problema (5.48) razmotrimo odgovarajući aproksimativni problem sa istim početnim podacima:*

$$\begin{aligned} ^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} v_{\varepsilon}(x,t) &= \widetilde{A}v_{\varepsilon}(x,t) + f(x,t,v_{\varepsilon}(x,t)), \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \\ v_{\varepsilon}(0) &= u_{0\varepsilon}, \;\; (v_t)_{\varepsilon}(0) = 0, \end{aligned} \tag{5.49}$$

*gde funkcija f i operator* $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(H^1(\mathbb{R}))$ *zadovoljavaju iste uslove kao u Teoremi 5.1, pri čemu dodatno važi:*

**(i)** $\|\widetilde{A}_{\varepsilon} u_{\varepsilon}\|_{L^2} \leq C\|u_{\varepsilon}\|_{H^1}$, *za* $u_{\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R})$, *tako da C ne zavisi od* $\varepsilon$.

**(ii)** $\|(A - \widetilde{A}_{\varepsilon})u_{\varepsilon}\|_{H^1} \to 0$, *za* $u_{\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R})$, *kada* $\varepsilon \to 0$.

*Ukoliko pretpostavimo da postoji rešenje* $u_{\varepsilon}$ *problema (5.48), odnosno, da je* $v_{\varepsilon}$ *rešenje aproksimativnog problema (5.49), tada su* $u_{\varepsilon}$ *i* $v_{\varepsilon}$ $L^2-$*asocirani, to jest za svako* $T > 0$ *važi*

$$\sup_{t \in [0,T)} \|u_{\varepsilon}(t) - v_{\varepsilon}(t)\|_{L^2} \to 0, \;\; kada \; \varepsilon \to 0.$$

**Napomena 5.5** *Uopšteni operator $\widetilde{A}$ koji zadovoljava osobine (i) i (ii) iz prethodne teoreme može se dobiti, na primer, regularizacijom prostornih frakcionih izvoda ili izvoda celobrojnog reda sadržanih u operatoru $A$.*

**Dokaz:**
Kako $u_\varepsilon$ i $v_\varepsilon$ zadovoljavaju jednačine (5.48) i (5.49), redom, dobija se

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha(u_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x,t)) &= \widetilde{A}_\varepsilon(u_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x,t))+(A-\widetilde{A}_\varepsilon)u_\varepsilon(x,t) \\ &\quad +f(x,t,u_\varepsilon)-f(x,t,v_\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.50}$$

Označimo $\omega_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$. Tada je Košijev problem za jednačinu (5.50) dat sa

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha\omega_\varepsilon(t) &= \widetilde{A}_\varepsilon\omega_\varepsilon(t)+f(\cdot,t,u_\varepsilon)-f(\cdot,t,v_\varepsilon)+N_\varepsilon(t), \\ \omega_\varepsilon(0) &= 0,\ \ (\omega_t)_\varepsilon(0)=0, \end{aligned}$$

gde je $N_\varepsilon(t)=(A-\widetilde{A}_\varepsilon)u_\varepsilon(\cdot,t)$, pa s obzirom na početne uslove, $\omega_\varepsilon$ zadovoljava

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon(t) &= \int_0^t {}_\tau J_t(S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)\,{}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha}(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)-f(\cdot,\tau,v_\varepsilon))d\tau \\ &\quad + \int_0^t {}_\tau J_t(S_\alpha)_\varepsilon(t-\tau)\,{}^{RL}\mathcal{D}_\tau^{2-\alpha}N_\varepsilon(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Na osnovu integralne reprezentacije (5.9) dalje imamo

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon(t) &= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)-f(\cdot,\tau,v_\varepsilon))d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)N_\varepsilon(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

što daje ocenu u normi

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\le \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)(f(\cdot,\tau,u_\varepsilon)-f(\cdot,\tau,v_\varepsilon))\|_{L^2}d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha\widetilde{A}_\varepsilon)N_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau. \end{aligned} \tag{5.51}$$

S obzirom da po pretpostavci (i) važi $\|\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\|u_\varepsilon\|_{H^1}$, gde C ne zavisi od $\varepsilon$, imamo

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)u_\varepsilon\|_{L^2} \leq E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha C)\|u_\varepsilon\|_{H^1},$$

za $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R})$. Tada iz pretpostavke (ii) sledi

$$\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)N_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} \to 0,$$

kada $\varepsilon \to 0$.

Koristeći osobinu $\|\partial_u f\|_{L^\infty} \leq C_1 < \infty$ i ocenu

$$\|f(\cdot,\tau,u_\varepsilon) - f(\cdot,\tau,v_\varepsilon)\|_{L^2} \leq \|\partial_u f\|_{L^\infty} \cdot \|u_\varepsilon(\tau) - v_\varepsilon(\tau)\|_{L^2} \leq C_1\|\omega_\varepsilon(\tau)\|_{L^2},$$

nakon primene Gronvalove nejednakosti na (5.51) dobija se

$$\begin{aligned}\|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq & \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)N_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}d\tau\right) \\ & \cdot\exp\left(C_1\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha \widetilde{A}_\varepsilon)\|d\tau\right),\end{aligned}$$

to jest

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\omega_\varepsilon(t)\|_{L^2} \to 0,$$

kada $\varepsilon \to 0$. $\square$

## 5.5 Specijalni slučajevi frakcionih evolucionih jednačina

### 5.5.1 Vremensko frakcione talasne jednačine

Neka je $1 < \alpha < 2$ i umesto frakcionog Košijevog problema sa prostornim izvodima celobrojnog reda

$$\begin{aligned}{}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(x,t) &= \lambda(x)\partial_x^2 u(x,t) + f(x,t,u(x,t)), \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \\ u(0) &= u_0, \;\; u_t(0) = 0,\end{aligned}$$

razmotrimo odgovarajući aproksimativni problem

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_t^\alpha u_\varepsilon(x,t) &= \widetilde{A} u_\varepsilon(x,t) + f(x,t,u_\varepsilon(x,t)), \ \ t>0, \ \ x\in\mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(0) &= u_{0\varepsilon}, \ \ (u_t)_\varepsilon(0) = 0, \end{aligned}$$

gde je operator $\widetilde{A} \in \mathcal{SG}(H^2(\mathbb{R}))$ reprezentovan preko mreže operatora

$$\begin{aligned} &\widetilde{A}_\varepsilon : H^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R}), \\ &\widetilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(x)(\partial_x^2 u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}), \end{aligned}$$

takvih da $\lambda_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$, $\|\lambda_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1})^{\alpha/2}\Big)$, $\phi_{h_\varepsilon}(x) = h_\varepsilon \phi(x h_\varepsilon)$, $h_\varepsilon = o\Big((\log(\log 1/\varepsilon)^{\alpha-1})^{\alpha/5}\Big)$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(x) \geq 0$ i $\int \phi(x)dx = 1$.

Tada, slično rezultatima dobijenim u Teoremi 5.1, može se pokazati da postoji jedinstveno rešenje razmatranog aproksimativnog problema, reprezentovano sa (5.28), pri čemu je sada uniformno neprekidan Kolomboov operator rešenja $S_\alpha$ element prostora $\mathcal{SG}_{\alpha,2}([0,\infty) : \mathcal{L}(H^2(\mathbb{R})))$, kao i da dobijeno rešenje pripada Kolomboovom prostoru $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$.

### 5.5.2 Prostorno-vremensko frakcione talasne jednačine

Razmotrimo sada odgovarajući aproksimativni Košijev problem za prostorno-vremensko frakcionu talasnu jednačinu, to jest

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(t) = \widetilde{A}_\beta u(t) + f(\cdot, t, u),$$

gde je $1<\alpha<2$, $1<\beta<2$, operator $\widetilde{A}_\beta \in \mathcal{SG}(H^2(\mathbb{R}))$ je reprezentovan preko mreže operatora

$$\begin{aligned} &(\widetilde{A}_\beta)_\varepsilon : H^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R}), \\ &(\widetilde{A}_\beta)_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(x)(\mathcal{D}_+^\beta u_\varepsilon * \phi_{h_\varepsilon}), \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_+^\beta$ je levi Ljuvilov frakcioni izvod reda $\beta$ dat sa

$$(\mathcal{D}_+^\beta u)(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^{\beta-1}} d\xi,$$

$\lambda_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$ i $\phi_{h_\varepsilon}(x)$ zadovoljavaju iste uslove kao u slučaju vremensko frakcione talasne jednačine.

Opet se može pokazati da postoji jedinstveno rešenje razmatranog aproksimativnog problema, reprezentovano sa (5.28), kao i da dobijeno rešenje pripada Kolomboovom prostoru $\mathcal{G}_\alpha([0,\infty) : H^2(\mathbb{R}))$. Isti rezultati ostaju na snazi ukoliko se u operatoru $\widetilde{A}_\beta$, $1 < \beta < 2$, umesto levog Ljuvilovog frakcionog izvoda reda $\beta$ koristi desni Ljuvilov frakcioni izvod reda $\beta$, odnosno, Risov frakcioni izvod reda $\beta$.

# Dalji pravci istraživanja

Kako razmatrane klase frakcionih diferencijalnih jednačina sadrže jednačine sa varijabilnim koeficijentima i nelinearnim delom koji zavisi od rešenja, iz razloga da bi pomenute klase tretirali operatorskim pristupom jednačine smo rešavali u okviru Kolomboovih prostora uopštenih funkcija. Evolucione jednačine sa prostorno frakcionim izvodima, razmatrane u trećoj glavi, rešavane su aproksimativno primenom uopštenih uniformno neprekidnih polugrupa operatora. Za potrebe rešavanja frakcionih evolucionih jednačina, koje smo razmatrali u četvrtoj i petoj glavi, razvili smo teoriju uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja i uspešno primenili na odgovarajuću klasu jednačina. S obzirom na karakterizaciju infinitezimalnog generatora uniformno neprekidnih polugrupa, odnosno, uniformno neprekidnih operatora rešenja, za obe klase jednačina bilo je neophodno da aproksimativni frakcioni operatori budu ograničeni. Kao što smo videli, jedan od načina transformisanja neograničenog frakcionog operatora u ograničeni jeste regularizacija.

Da bi se izbegao osnovni nedostatak koji se javlja prilikom primene uniformno neprekidnih operatora - neograničenost frakcionih operatora, razmatrane klase jednačina mogle bi se rešavati direktno, primenom uopštenih jako neprekidnih polugrupa operatora, odnosno, jako neprekidnih operatora rešenja. Taj pristup bi podrazumevao upotrebu rezolventi operatora, kao i odgovarajuću verziju dobro poznate Hile-Jošidine teoreme, koja obezbedjuje potreban i dovoljan uslov da bi linearan operator bio infinitezimalni generator neke $C_0-$polugrupe, odnosno, nekog $C_0-$operatora rešenja.

U kontekstu spomenutog pristupa, napomenimo i veoma interesantnu i korisnu vezu između $C_0-$operatora rešenja i $C_0-$polugrupa operatora sa jedne strane, te vezu $C_0-$operatora rešenja i $C_0-$kosinusnih operatora, sa druge strane. Naime, ako operator $A$ generiše $C_0-$polugrupu operatora, tada $A$ generiše jako neprekidne operatore rešenja $S_\alpha(t)$, za svako $0 < \alpha < 1$. Takodje, ako operator $A$ generiše $C_0-$kosinusne operatore, tada $A$ generiše jako neprekidne operatore rešenja $S_\alpha(t)$, za svako $0 < \alpha < 2$.

Dobro je poznat klasičan rezultat: ako je $A$ generator $C_0-$polugrupe operatora ($C_0-$kosinusnog operatora), onda je i perturbovan operator $A+B$, pri čemu je $B \in \mathcal{L}(X)$, takodje generator $C_0-$polugrupe operatora ($C_0-$kosinusnog operatora). Perturbacije generatora $C_0-$operatora rešenja sa ograničenim linearnim operatorom nisu moguće u slučaju $0 < \alpha < 1$. Međutim, ukoliko se umesto $C_0-$operatora rešenja posmatraju analitički operatori rešenja, uvedeni u [10] kao generalizacija analitičkih polugrupa operatora, proizilazi da bi se pored frakcionih evolucionih jednačina sa varijabilnim koeficijentima razmatranih u disertaciji, mogli razmatrati i odgovarajući perturbovani problemi, takođe primenom operatorskog pristupa.

Frakcione evolucione jednačine razmatrane u disertaciji (Glava 4 i Glava 5), date su sa Kaputovim frakcionim izvodom. Napomenimo da se za rešavanje takvih jednačina datih sa Riman-Ljuvilovim frakcionim izvodom i odgovarajućim početnim uslovima, ne može primeniti uvedena teorija operatora rešenja, s obzirom da u tom slučaju ne bi važilo ${}^{RL}\mathcal{D}_t^{\alpha} S_\alpha(t) = AS_\alpha(t)$. Familija operatora pogodna za rešavanje bila bi još restriktivnija nego što su operatori rešenja u odnosu na polugrupe operatora i kosinusne operatore. Naime, pored svojstva polugrupe i kosinusnog svojstva, izostavio bi se i uslov $S_\alpha(0) = I$. Ta familija operatora za $0 < \alpha < 1$ data je sa $T_\alpha(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)$, pri čemu je $A$ njen generator.

Sve jednačine odabranih klasa frakcionih diferencijalnih jednačina razmatrane u disertaciji su determinističkog karaktera, pa bi sa stanovišta primene dobijenih rezultata bilo korisno razmatrati stohastičke verzije ovih jednačina, tj. stohastičke frakcione parcijalne diferencijalne jednačine. U tom slučaju, početni uslovi Košijevog problema i/ili nelinearni deo jednačine bi sadržali Kolomboove uopštene slučajne procese. Konkretno, bilo bi veoma interesantno razmatrati frakcione jednačine koje sadrže proces belog šuma, za koga je poznato da predstavlja veoma dobar model raznih fluktuirajućih pojava u dinamičkim sistemima, proces pozitivnog šuma, i sl.

# Dodatak: Pregled oznaka i osnovnih pojmova

Uobičajeno, sa $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ obeležavamo skupove prirodnih, realnih, odnosno, kompleksnih brojeva. Takođe, sa $\mathbb{N}_0$ obeležavamo prošireni skup prirodnih brojeva, tj. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, kao i $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Definicije prostora funkcija i operatora sa kojima smo radili, kao i neke od njihovih osobina date su u nastavku.

**Definicija 0.1** *$C_0^\infty(\mathbb{R})$ je prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem.*

**Definicija 0.2** *$\dot{C}(\mathbb{R})$ je prostor neprekidnih funkcija koje se anuliraju u beskonačnosti, odnosno,*

$$\dot{C}(\mathbb{R}) = \{u \in C(\mathbb{R}) : \ u(\pm\infty) = 0\}.$$

**Definicija 0.3** *Švarcov prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je prostor brzo opadajućih funkcija koji se definiše kao*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, \ \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty\}.$$

**Definicija 0.4** *Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je apsolutno neprekidna na intervalu $[a, b]$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i^{'}) - f(x_i)| < \varepsilon,$$

*za svaku konačnu kolekciju $\{(x_i^{'}, x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ nepreklapajućih intervala sa osobinom*

$$|x_i^{'} - x_i| < \delta.$$

*Prostor apsolutno neprekidnih funkcija obeležavaćemo sa $AC[a, b] = AC^1[a, b]$.*

**Definicija 0.5** $AC^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *je prostor svih funkcija* $f$ *takvih da su svi njeni izvodi do reda* $n-1$ *neprekidni na* $[a,b]$, *pri čemu dodatno važi* $f^{n-1} \in AC[a,b]$.

**Definicija 0.6** *Neka su* $(X, \| \, \|_X)$ *i* $(Y, \| \, \|_Y)$ *normirani vektorski prostori nad istim vektorskim poljem* $\mathbb{F}$. *Prostor svih linearnih i neprekidnih preslikavanja iz* $X$ *u* $Y$ *označavaćemo sa* $\mathcal{L}(X,Y)$. *Specijalno:* $\mathcal{L}(X,X) = \mathcal{L}(X)$.

**Definicija 0.7** *Neka su* $(X, \| \, \|_X)$ *i* $(Y, \| \, \|_Y)$ *Banahovi prostori. Linearan operator* $A : D(A) \subset X \to Y$ *je zatvoren ako za svaki niz* $\{x_n\}$ *iz* $D(A)$ *važi: ako* $x_n \to x$ *u* $X$ *i* $Ax_n \to y$ *u* $Y$, *onda je* $y = Ax$.

*Ekvivalentno, operator* $A$ *je zatvoren ako je njegov grafik definisan sa* $G_A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$, *zatvoren podskup od* $X \times Y$.

**Definicija 0.8** *Kažemo da se Banahov prostor* $(X, \| \, \|_X)$ *može neprekidno potopiti u Banahov prostor* $(Y, \| \, \|_Y)$, *i pišemo* $X \hookrightarrow Y$, *ako važi* $X \subset Y$ *i postoji konstanta* $C > 0$ *takva da* $\| \cdot \|_Y \leq C \| \cdot \|_X$.

**Definicija 0.9** *Neka je* $(X,d)$ *metrički prostor. Preslikavanje* $f : X \to X$ *zadovoljava Lipšicov uslov ako postoji* $L \geq 0$ *takvo da za sve* $x, y \in X$ *važi*

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y).$$

*Ukoliko je* $L < 1$ *tada je preslikavanje* $f$ *kontrakcija.*

Naredna teorema je dobro poznata kao Banahova teorema o fiksnoj tački, tj. Banahov princip kontrakcije.

**Teorema 0.1** *Neka je* $(X,d)$ *neprazan kompletan metrički prostor i neka je preslikavanje* $f : X \to X$ *kontrakcija. Tada postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja* $f$.

Furijeova transformacija za funkcije $f \in L^2(\mathbb{R})$, u oznaci $\mathcal{F}f \equiv \widehat{f}$, definiše se kao

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

dok je inverzna Furijeova transformacija data sa

$$f(x) \equiv (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Laplasova transformacija za funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, definiše se kao

$$(\mathcal{L}f)(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt,\ Re\lambda > \omega,$$

pod uslovom da integral apsolutno konvergira za $Re\lambda > \omega$.

Operator konvolucije $*$ je integralna transformacija data sa

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy,$$

pod uslovom da prethodni integrali postoje. To će biti u slučaju kada su, na primer, $f$ i $g$ neprekidne funkcije sa kompaktnim nosačem, odnosno, ukoliko je jedna od njih, recimo $f$, sa kompaktnim nosačem a druga lokalno integrabilna.

Neka je $\phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, funkcija takva da

$$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \ \phi(x) \geq 0,\ \ \phi(x) = 0 \ \text{za}\ \ |x| \geq 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = 1. \tag{0.1}$$

Na primer, za $\phi$ možemo uzeti

$$\phi(x) = \begin{cases} c\exp(-\frac{1}{1-x^2}), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

pri čemu se konstanta $c$ bira tako da je zadovoljen uslov (0.1). U tom slučaju, molifajer, korišćen za regularizaciju frakcionih izvoda i izvoda celobrojnog reda, za $\varepsilon > 0$ definiše se sa

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\phi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Podsetimo se nekoliko važnih nejednakosti, često korišćenih u disertaciji:

**(i)** proširena Helderova nejednakost:

$$\|f \cdot g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$

pri čemu je $1 \leq p, q, r \leq \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

**(ii)** Jangova nejednakost:

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$

pri čemu je $1 \leq p, q, r \leq \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$.

**(iii)** Gronvalova nejednakost:
Neka su $\alpha$, $\beta$ i $u$ funkcije definisane na $\mathbb{R}_+$, pri čemu je $\alpha$ neopadajuća funkcija, dok su $\beta \geq 0$ i $u$ neprekidne funkcije, koje zadovoljavaju

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)u(s)ds.$$

Tada važi

$$u(t) \leq \alpha(t)\exp\Big(\int_0^t \beta(s)ds\Big).$$

Ojlerova gama funkcija, kao uopštenje faktorijela, definisana je sa

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad Rez > 0.$$

Gama funkcija zadovoljava relaciju $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $Rez > 0$, dok za $n \in \mathbb{N}_0$ važi $\Gamma(n+1) = n!$.

Standardno, $o$ i $\mathcal{O}$ su Landauovi simboli, pri čemu $g(x) = o(f(x))$, $x \to a$, podrazumeva $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, dok je $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$, $x \to a$, ukoliko postoje konstante $\delta > 0$ i $M > 0$ takve da $|g(x)| \leq M|f(x)|$, za $|x - a| < \delta$.

**Propozicija 0.1** *Neke od osobina Landauovih simbola:*

**(i)** *Ako* $g(x) = o(f(x))$, $x \to a$, *onda* $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$, $x \to a$.

**(ii)** $T \cdot o(f(x)) = o(f(x))$, $x \to a$.

**(iii)** *Ako* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *i* $h(x) = o(f(x))$, $x \to a$, *onda* $h(x) = o(g(x))$, $x \to a$.

**(iv)** *Ako* $0 < \alpha < 1$ *i* $g(x) = o((f(x))^\alpha)$, $f(x) \to +\infty$, *onda* $g(x) = o(f(x))$, $f(x) \to +\infty$.

**(v)** *Ako* $\alpha, \beta > 0$ *onda* $o((f(x))^\alpha) \cdot o((f(x))^\beta) = o((f(x))^{\alpha+\beta})$, $f(x) \to +\infty$.

**(vi)** $\exp(o(\log f(x))) = o(f(x))$, $f(x) \to +\infty$.

# Literatura


[1] R. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, Volume 96 of Monographs in Mathematics, Second Edition, Birkhauser Verlag, Basel, 2011.

[3] T.M. Atanacković, B. Stanković, *Generalized wave equation in nonlocal elasticity*, Acta Mech. **208** (2009), 1–10.

[4] T.M. Atanacković, S. Pilipović, B. Stanković, D. Zorica, *Fractional Calculus with Applications in Mechanics, Vibrations and Diffusion Processes*, ISTE, London, John Wiley and Sons, New York, 2014.

[5] T.M. Atanacković, S. Pilipović, B. Stanković, D. Zorica, *Fractional calculus with Application in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles*, ISTE, London, John Wiley and Sons, New York, 2014.

[6] B. Baeumer, S. Kurita, M. Meerschaert, *Inhomogeneous fractional diffusion equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **8(4)** (2005), 371–386.

[7] B. Baeumer, M. Kovács, M.M. Meerschaert, *Numerical solutions for fractional reaction-diffusion equations*, Comput. Math. Appl. **55** (2008), 2212–2226.

[8] E. Bazhlekova, *The abstract Cauchy problem for the fractional evolution equation*, Fract. Calc. Appl. Anal. **1(3)** (1998), 255–270.

[9] E. Bazhlekova, *Subordination principle for fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **3(3)** (2000), 213–230.

[10] E. Bazhlekova, *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*, PhD thesis, Eindhoven University of Technology, 2001.

[11] D. Benson, *The Fractional Advection-Dispersion Equation: Development and Application*, PhD thesis, University of Nevada, Reno, 1998.

[12] A.H. Bhrawy, D. Baleanu, *A spectral Legendre-Gauss-Lobatto collocation method for a space-fractional advection diffusion equations with variable coefficients*, Rep. Math. Phys. **72(2)** (2013), 219–233.

[13] A.H. Bhrawy, M.A. Zaky, *A method based on the Jacobi tau approximation for solving multi-term time-space fractional partial differential equations*, J Comput Phys **281** (2015), 876–895.

[14] H.A. Biagioni, *A Nonlinear Theory of Generalized Functions*, Lect. Notes Math. 1421, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[15] C. Chen, M. Li, *On fractional resolvent operator functions*, Semigroup Forum **80** (2010), 121–142.

[16] Y. Chen, Y. Wu, Y. Cui, Z. Wang and D. Jin, *Wavelet method for a class of fractional convection-diffusion equation with variable coefficients*, J. Comput. Sci. **1** (2010), 146–149.

[17] P. Chen, X. Zhang, Y. Li, *A note on the initial value problem of fractional evolution equations*, Adv. Diff. Equ. (2015) 2015:155.

[18] F.M. Christ, M.I. Weinstein, *Dispersion of Small Amplitude Solutions of the Generalized Korteweg-de Vries Equation*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 87–109.

[19] J. F. Colombeau, *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North Holland, Amsterdam, 1985.

[20] J. F. Colombeau, *Multiplications of Distributions: A tool in mathematics, numerical engineering and theoretical psycics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[21] O. Defterli, M. D'Elia, Q. Du, M. Gunzburger, R. Lehoucq, M. Meerschaert, *Fractional diffusion on bounded domains*, Fract. Calc. Appl. Anal. **18(2)** (2015), 342–360.

[22] C. D. Dhaigude, V. R. Nikam, *Solution of Fractional Partial Differential Equations Using Iterative Method*, Fract. Calc. Appl. Anal. **15(4)** (2012), 684-699.

[23] I. Didenkulova, E. Pelinovsky, T. Soomere, *Exact travelling wave solutions in strongly inhomegeneous media*, Estonian Journal of Engineering, **14(3)** (2008), 220–231.

[24] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics 2004, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.

[25] S.D. Eidelman, A.N. Kochubei, *Cauchy problem for fractional diffusion equations*, J. Differential Equations **199** (2004), 211–255.

[26] K-J Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer Science and Business Media, 2000.

[27] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol.3, McGraw-Hill, New-York, 1955.

[28] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, 1997.

[29] H.O. Fattorini, *Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces*, North-Holland Mathematics Studies 108, Elsevier Science Ltd, Amsterdam, 1985.

[30] K. Gepreel, *Adomian decomposition method to find approximate solutions for the fractional PDEs*, WSEAS Transactions on Mathematics **7(11)** (2012), 636–643.

[31] R. Gorenflo, Yu. Luchko, S. Umarov, *On the Cauchy and multi-point problems for partial pseudo-differential equations of fractional order*, Fract. Calc. Appl. Anal. **3(3)** (2000), 249–277.

[32] R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi, S.V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014.

[33] R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, *Homegenization of the variable-speed wave equation*, Wave Motion, **47** (2010), 496–507.

[34] H. J. Haubold, A. M. Mathai, and R. K. Saxena, *Mittag-Leffler Functions and Their Applications*, J. Appl. Math. vol. 2011, Article ID 298628, 51 pages, 2011.

[35] N. Heymans, I. Podlubny, *Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives*, Rheol. Acta **45(5)** (2006), 765–771.

[36] M. Holst, C. Meier, *Generalized Solutions to Semilinear Elliptic PDE with Applications to the Lichnerowicz Equation*, Acta Appl. Math. **130** (2014), 163–203.

[37] N. Jacob, *Pseudo-differential Operators and Markov Processes*, *Volume I: Fourier Analysis and Semigroups*, Imperial College Press, 2001.

[38] M. Japundžić, D. Rajter-Ćirić, *Reaction-advection-diffusion equations with space fractional derivatives and variable coefficients on infinite domain*, Fract. Calc. Appl. Anal. **18(4)** (2015), 911-950, DOI: 10.1515/fca-2015-0055

[39] M. Japundžić, D. Rajter-Ćirić, *Generalized uniformly continuous solution operators and inhomogeneous fractional evolution equations with variable coefficients*, preprint available on request, (2016).

[40] M. Japundžić, D. Rajter-Ćirić, *Approximate solutions of time and time-space fractional wave equations with variable coefficients*, preprint available on request, (2016).

[41] G. I. Jennings, *Efficient Numerical Methods for Water Wave Propagation in Unbounded Domains*, PhD thesis, University of Michigan, (2012).

[42] H. Jiang, F. Liu, I. Turner, K. Burrage, *Analytical solutions for the multi-term time-space Caputo-Riesz fractional advection-diffusion equations on a finite domain*, J. Math. Anal. Appl. **389** (2012), 1117–1127.

[43] W. Jiang, Y. Lin, *Approximate solution of the fractional advection-dispersion equation*, Comput. Phys. Commun. **181** (2010), 557–561.

[44] P. Jigen, K. Li, *A novel characteristic of solution operator for the fractional abstract Cauchy problem*, J. Math. Anal. Appl. **385** (2012), 786–796.

[45] S. Kempfle, I. Schäfer, H. Beyer, *Functional calculus and a link to fractional calculus*, Fract. Calc. Appl. Anal. **5(4)** (2002), 411–426.

[46] S. Kempfle, I. Schäfer, H. Beyer, *Fractional Calculus via Functional Calculus: Theory and Applications*, Nonlinear Dynam. **29** (2002), 99–127.

[47] A. Kilbas, H. Srivastava and J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland, Amsterdam, 2006.

[48] M. Kostić, *Generalized Semigroups and Cosine Functions*, Mathematical Institute, Belgrade, 2011.

[49] M. Kostić, *Hille-Yosida theorems for local convoluted C-semigroups and cosine functions*, Filomat **25(4)** (2011), 177-190.

[50] M. Kostić, *Hypercyclic and chaotic integrated C-cosine functions*, Filomat **26(1)** (2012), 1-44.

[51] F. Liu, P. Zhuang, V. Anh, I. Turner, K. Burrage, *Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation*, Appl. Math. Comput. **191** (2007), 12–20.

[52] J. David Logan, *Transport Moddeling in Hydrogeochemical Systems*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[53] M. Li, C. Chen, Fu-Bo Li, *On fractional powers of generators of fractional resolvent families*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 2702–2726.

[54] J.T. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi, *Recent history of fractional calculus*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **16(3)** (2011), 1140–1153.

[55] F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini, *The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation*, Fract. Calc. Appl. Anal. **4(2)** (2001), 153–192.

[56] M. Meerschaert, C. Tadjeran, *Finite diference approximations for fractional advection-dispersion flow equation*, J. Comput. Appl. Math. **172** (2004), 65–77.

[57] S. Momani, Z. Odibat, *Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics*, Physics Letters A **355** (2006), 271–279.

[58] S. Momani, Z. Odibat, *Numerical solutions of the space-time fractional advection-dispersion equation*, Numer. Methods Partial Differential Equations **24(6)** (2008), 1416–1429.

[59] M. Nedeljkov, S. Pilipović and D. Scarpalézos, *The Linear Theory of Colombeau Generalized Functions*, Pitman Res. Not. Math., Longman, Essex, 1998.

[60] M. Nedeljkov, D. Rajter-Ćirić, *Semigroups and PDEs with perturbations*. In: Delcroix, A., Hasler, M.,Marti, J.-A., Valmorin, V. (eds.) Nonlinear Algebraic Analysis and Applications. Proc. of ICGF 2000, pp. 219-227, 2004.

[61] M. Nedeljkov, S. Pilipović, D. Rajter-Ćirić, *Heat equation with singular potential and singular data*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **135(4)** (2005), 863–886.

[62] M. Nedeljkov, D. Rajter-Ćirić, *Generalized uniformly continuous semigroups and semilinear hyperbolic systems with regularized derivatives*, Monatsh. Math. **160** (2010), 81–93.

[63] E. Di Nezzaa, G, Palatuccia, E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136(5)** (2012), 521–573.

[64] M. Rahman, A. Mahmood, M. Younis, *Improved and more feasible numerical methods for Riesz space fractional partial differential equations*, Appl. Math. Comput. **237** (2014), 264–273.

[65] D. Rajter, *Construction of Colombeau solutions to deterministic and stochastic differential equations*, PhD thesis, University of Novi Sad, 2001.

[66] M. Oberguggenberger, *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations*, Pitman Res. Not. Math. Vol. 259, Longman Sci. Techn., Essex, 1992.

[67] M. Oberguggenberger, *Generalized solutions to nonlinear wave equations*, Ars Math. Contemp. **27** (2004), 169–187.

[68] Z.M. Odibat, N.T. Shawagfeh, *Generalized Taylor's formula*, Appl. Math. Comput. **186** (2007,) 286–293.

[69] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[70] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[71] J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applicatitions*, Springer, Switzerland, 1993.

[72] F. Punzo, G. Terrone, *On the Cauchy problem for a general fractional porous medium equation with variable density*, Nonlinear Anal. **98** (2014), 27–47.

[73] J. Rauch, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[74] A. Saadatmandi, M. Dehghan and M.R. Azizi, *The Sinc-Legendre collocation method for a class of fractional convection-diffusion equations with variable coefficients*, Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul. **17** (2012), 4125–4136.

[75] S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[76] E. Saydamatov, *Well-posedness of the Cauchy problem for the inhomogeneous time-fractional pseudodifferential equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **9(1)** (2006), 1–16.

[77] S. Shen, F. Liu, V. Anh, I. Turner, *The fundamental solution and numerical solution of the Riesz fractional advection-dispersion equation*, IMA J. Appl. Math. **73(6)** (2008), 850–872.

[78] S. Shen, F.Liu and V. Anh, *Fundamental solution and discrete random walk model for a time-space fractional diffusion equation of distributed order*, J. Appl. Math. Comput. **28** (2008), 147–164.

[79] R. Stern, F. Effenberger, H. Fichtner, T. Schäfer, *The space fractional diffusion-advection equation: analytical solutions and critical assessment of numerical solutions*, Fract. Calc. Appl. Anal. **17(1)** (2014), 171–190.

[80] L. Su, W. Wang, Q. Xu, *Finite difference methods for fractional dispersion equations*, Appl. Math. Comput. **216** (2010), 3329–3334.

[81] C. Tadjeran, M. Meerschaert, H. Scheffler, *A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation*, J. Comput. Phys. **213** (2006), 205–213.

[82] V.E. Tarasov, *No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **18(11)** (2013), 2945–2948.

[83] C.C. Travis, G.F. Webb, *Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **32(3–4)** (19789, 75–96.

[84] S. Umarov, E. Saydamatov, *A fractional analog of the Duhamel principle*, Fract. Calc. Appl. Anal. **9(1)** (2006), 57–70.

[85] L. Vázquez, J. Trujillo, M.P. Velasco, *Fractional heat equation and the second law of thermodynamics*, Fract. Calc. Appl. Anal. **14(3)** (2011), 334–342.

[86] M. Webb, *Analysis and Approximation of a Fractional Differential Equation*, Master's Thesis,University of Oxford, Hilary Term, 2012.

[87] Q. Yang, F. Liu, I. Turner, *Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives*, Appl. Math. Model. **34** (2010), 200–218.

[88] Y. Zhang, D. Benson, M. Meerschaert, E. LaBolle, *Space-fractional advection-dispersion equations with variable parameters: Diverse formulas, numerical solutions, and application to the MADE-site data*, Water Resour. Res. **43(5)** (2007), 1–16.

# Biografija

Rođen sam 1. februara 1979. godine u Kuli. Osnovnu školu završio sam u Crvenki, a gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" prirodno-matematičkog smera (ogledno odeljenje) u Novom Sadu. Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu upisujem 1998. godine, na odseku Matematika, smer Profesor matematike-teorijsko usmerenje, a studije završavam maja 2004. godine sa prosečnom ocenom 9.63, u toku kojih sam dobio stipendiju Vlade Kraljevine Norveške (2001. godine) za postignut uspeh. (U toku osnovnih studija, školske 2003/2004. godine, bio sam na odsluženju vojnog roka).

Odmah po završetku osnovnih studija postajem stipendista Ministarstva nauke i zaštite životne sredine, kao student magistarskih studija. Magistrirao sam 1. oktobra 2010. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, sa tezom iz oblasti Numeričke matematike. Doktorske studije upisao sam 2010. godine, takođe na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, i položio sve ispite sa prošečnom ocenom 9.50.

Od 2007. godine zaposlen sam u Visokoj poslovnoj školi strukovnih studija u Novom Sadu, najpre na mestu saradnika u nastavi, zatim na mestu asistenta, na predmetima Matematika i Primena informacionih tehnologija, a trenutno na mestu predavača za predmet Matematika.

Rezultate dobijene tokom izrade doktorske disertacije izlagao sam na više međunarodnih konferencija. Član sam Srpskog naučnog matematičkog društva.

Novi Sad, *Miloš Japundžić*
19. septembar 2016.

**UNIVERZITET U NOVOM SADU**
**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**
**KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

**Redni broj:**
**RBR**
**Identifikacioni broj:**
**IBR**
**Tip dokumentacije:** Monografska dokumentacija
**TD**
**Tip zapisa:** Tekstualni štampani materijal
**TZ**
**Vrsta rada:** Doktorska disertacija
**VR**
**Autor:** mr Miloš Japundžić
**AU**
**Mentor:** dr Danijela Rajter-Ćirić
**MN**
**Naslov rada:** Uopštena rešenja nekih klasa frakcionih parcijalnih diferencijalnih jednačina
**NR**
**Jezik publikacije:** Srpski (latinica)
**JP**
**Jezik izvoda:** Srpski/engleski
**JI**
**Zemlja publikovanja:** Srbija
**ZP**
**Uže geografsko područje:** Vojvodina
**UGP**
**Godina:** 2016.
**GO**

**Izdavač:** Autorski reprint
**IZ**
**Mesto i adresa:** Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
**MA**
**Fizički opis rada:** 5/173/88/0/0/0/1
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
**FO**
**Naučna oblast:** Matematika
**NO**
**Naučna disciplina:** Analiza i verovatnoća
**ND**
**Predmetna odrednica/Ključne reči:** frakcione jednačine, frakcione evolucione jednačine, uopštena rešenja, uopštene polugrupe operatora, uopšteni operatori rešenja, Kolomboovi prostori uopštenih funkcija, frakcioni izvodi, frakcioni Košijev problem, frakcione advektivne jednačine, frakcione difuzione jednačine, frakcione advektivno-difuzione jednačine, frakcione talasne jednačine, Mitag-Leflerova funkcija, asociranost frakcionih operatora, asociranost rešenja.
**PO**
**UDK:**
**Čuva se:** Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
**Važna napomena:**
**VN**
**Izvod:** Doktorska disertacija je posvećena rešavanju Košijevog problema odabranih klasa frakcionih diferencijalnih jednačina u okviru Kolomboovih prostora uopštenih funkcija. U prvom delu disertacije razmatrane su nehomogene evolucione jednačine sa prostorno frakcionim diferencijalnim operatorima reda $0 < \alpha < 2$ i koeficijentima koji zavise od $x$ i $t$. Ova klasa jednačina je aproksimativno rešavana, tako što je umesto početne jednačine razmatrana aproksimativna jednačina data preko regularizovanih frakcionih izvoda, odnosno, njihovih regularizovanih množitelja. Za rešavanje smo koristili dobro poznate uopštene uniformno neprekidne polugrupe operatora. U drugom delu disertacije aproksimativno su rešavane nehomogene frakcione evolucione jednačine sa Kaputovim frakcionim izvodom reda $0 < \alpha < 2$, linearnim, zatvorenim i gusto definisanim operatorom na prostoru Soboljeva celobrojnog reda i koeficijentima koji zavise od $x$. Odgovarajuća aproksimativna jednačina sadrži uopšteni operator asociran sa polaznim operatorom, dok su rešenja dobijena primenom, za tu svrhu

u disertaciji konstruisanih, uopštenih uniformno neprekidnih operatora rešenja. U oba slučaja ispitivani su uslovi koji obezbeđuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja Košijevog problema na odgovarajućem Kolomboovom prostoru.
**IZ**
**Datum prihvatanja teme od strane NN Veća:** 25.06.2015.
**DP**
**Datum odbrane:**
**DO**

**Članovi komisije:**
**KO**

Predsednik: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Akademik dr Teodor Atanacković, profesor emeritus, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

**UNIVERSITY OF NOVI SAD**
**FACULTY OF SCIENCE**
**KEY WORDS DOCUMENTATION**

**Accession number:**
**ANO**
**Identification number:**
**INO**
**Document type:** Monograph type
**DT**
**Type of record:** Printed text
**TR**
**Contents Code:** Doctoral dissertation
**CC**
**Author:** Miloš Japundžić
**AU**
**Mentor:** Danijela Rajter-Ćirić, PhD
**MN**
**Title:** Generalized Solutions for Some Classes of Fractional Partial Differential Equations
**TI**
**Language of text:** Serbian
**LT**
**Language of abstract:** Serbian/English
**LA**
**Country of publication:** Republic of Serbia
**CP**
**Locality of publication:** Vojvodina
**LP**
**Publication year:** 2016.
**PY**

**Publisher:** Author's reprint
**PU**
**Publication place:** Novi Sad, Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 4
**PP**
**Physical description:** 5/173/88/0/0/0/1
(no. of chapters/pages/bib. refs/tables/figures/graphs/appendices)
**PD**
**Scientific field:** Mathematics
**SF**
**Scientific discipline:** Analysis and probability
**SD**
**Subject/Key words:** fractional equations, fractional evolution equations, generalized solutions, generalized semigroups of operators, generalized solution operators, Colombeau spaces of generalized functions, fractional derivatives, fractional Cauchy problem, fractional advection equations, fractional diffusion equations, fractional advection-diffusion equations, fractional wave equations, Mittag-Leffler function, association of fractional operators, association of solutions.
**SKW**
**UC:**
**Holding data:** Library, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
**HD**
**Note:**

**Abstract:** The doctoral dissertation is devoted to solving the Cauchy problem for some classes of fractional differential equations in the framework of Colombeau spaces of generalized functions. In the firs part, we studied inhomogeneous evolution equations with space fractional differential operators of order $0 < \alpha < 2$ and variable coefficients depending on $x$ and $t$. This class of equations is solved approximately, in such a way that instead of the originate equation we considered the corresponding approximate equation given by regularized fractional derivatives, i.e. their regularized multipliers. In the solving procedure we used a well-known generalized uniformly continuous semigroups of operators. In the second part, we solved approximately inhomogeneous fractional evolution equations with Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha < 2$, linear, closed and densely defined operator in Sobolev space of integer order and variable coefficients depending on $x$. The corresponding approximate equation is a given by the generalized operator associated to the originate operator, while

the solutions are obtained by using generalized uniformly continuous solution operators, introduced and developed for that purpose. In both cases, we provided the conditions that ensure the existence and uniqueness solutions of the Cauchy problem in some Colombeau spaces.
**AB**
**Accepted by the Scientific Board on:** June 25, 2015.
**ASB**
**Defended:**
**DE**

**Thesis defend board:**
**DB**

President: Academician Stevan Pilipović, PhD, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Danijela Rajter-Ćirić, PhD, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Marko Nedeljkov, PhD, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Academician Teodor Atanacković, PhD, Professor emeritus, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad