УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ
И ИНФОРМАТИКУ

мр Еуген Љајко

УТИЦАЈ GEOGEBRA-Е НА ПРЕДАВАЊЕ И УЧЕЊЕ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

– Докторска дисертација –

Нови Сад, 2014. год.

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Аналитичка геометрија је једна од области математике које су довеле до крупних преокрета у начину на који се математика употребљава и проучава. Употреба аналитичке геометрије не само да је довела до убрзаног развоја математичке анализе, већ је променила и начин размишљања предавача и ученика математике. Сама чињеница да се геометрија проучава употребом апарата алгебре и математичке анализе, подразумева да ученик влада знањима и техникама поменутих области. То, уз правилан приступ градиву и ученицима, ствара претпоставке за убрзано стицање и виши квалитет математичких знања. Зато је посебно важно обратити пажњу изучавању аналитичке геометрије у школама.

Значај аналитичке геометрије је видљив и у плановима и програмима наших школа где се, почев од основне школе, преко средњих школа па и до факултета, изучава са великим фондом часова. Наравно, и у земаљама нашег окружења, као и у многим земљама широм света, аналитичка геометрија у равни се у средњим школама изучава са великим фондом часова.

Са друге стране, сведоци смо сталног осавремењивања и усавршавања свих људских делатности као резултат опште компјутеризације света. Било би нелогично да тај процес заобиђе сваремено образовање. Зато се у овом раду бавимо разним аспектима осавремењивања процеса учења аналитичке геометрије у равни у нашим средњим школама. Посматраћемо утицај на побољшање квалитета наставе који се постиже увођењем нових наставних средстава, концепата наставе и ваннаставних видова учења. Конкретно, посматраћемо понашање и промене учинка наставника и ученика у настави аналитичке геометрије у равни организованој уз употребу рачунара и образовног софтвера *GeoGebra*.

Рад се заснива на искуствима и резултатима, како страних тако и домаћих истраживања, у овој области спроведених у последњих десетак година. Огледна настава из које су изведени закључци је, током више година, одржавана са ученицима трећих разреда гимназије при средњој школи „Никола Тесла“ у Лепосавићу. Већина садржаја у настави, као и у раду, обрађивана је уз помоћ математичког образовног софтвера *GeoGebra*, који је бесплатан и лако доступан програм. Уз рад је приложен и одговарајући *CD* који садржи динамичне радне листове – аплете, примере, радове ученика, тестове и писмене задатке, као и инсталациони део програма *GeoGebra*.

Евидентно је да се ученици лако прилагођавају новом виду наставе и радо га прихватају. Иако добар део данашњих наставника, углавном, не припада истој друштвеној групи као њихови ученици, и они се, уз свесрдно залагање, могу успешно укључити у осмишљавање, припрему и извођење овакве наставе. Искуства стечена у страним и нашим истраживањима указују да се, уз мало маште и једноставног програмирања, могу постићи задовољавајући резултати у осавремењивању наставе.

Захваљујем се свима који су на било који начин помогли изради ове дисертације а посебну захвалност дугујем мом ментору, проф. др Драгославу Херцегу за безрезервну подршку и помоћ при одабиру теме и изради дисертације.

Нови Сад, 2014. Аутор

УВОД

Употребити рачунар у било којој делатности најчешће значи да се људска активност смањује уз истовремено повећање ефикасности извршене активности. Не можемо, међутим, рећи да то у потпуности важи и за образовање. Узрок овакве ситуације лежи у томе што се ефикасност образовног процеса углавном мери количином, квалитетом и примењивошћу усвојених знања. Дакле, рачунари уведени у образовни процес не значе нужно и подизање квалитета и ефикасности наставе.

Иако је јасно да математика као наука подупире напредак многих других научних дисциплина и развоја савременог друштва, све је више уочљиво да настава математике све теже може да одговори потребама савремених генерација ученика. Најчешћи проблем са којим се суочава савремена настава математике јесте усклађивање начина на који се математика учи са начином на који математичари откривају и „раде“ математику. Зато је битно установити да ли се овај проблем може барем ублажити увођењем рачунара и одговарајућих софтвера у наставу математике.

Многа истраживања у овој области, рецимо, [25], [27], [68], [70], [71] указују на то да рачунари и одговарајући образовни софтвери, уколико су правилно употребљени, доприносе стварању окружења које подржава ефикасно изграђивање математичких концепата и процедура које се много лакше могу уклопити у когнитивну структуру ученика него исти појмови изграђени у „класичном“ окружењу. Овде се првенствено мисли на олакшану могућност визуелизације и експериментисања са одговарајућим динамичним радним листовима. Осим тога, знамо да су данашње генерације ученика одрасле уз рачунаре и да скоро сваку активност везују за употребу рачунара. Уз то, данас нам је на располагању мноштво математичких програма и програмских пакета које са лакоћом могу користити ученици основних и средњих школа уз минимално улагање труда у њихово изучавање. Коришћење рачунара у настави математике може у многоме допринети популаризацији науке уопште, посебно математике, па самим тим и напретку нашег друштва.

Зато смо, између осталог, сматрали да је корисно употребом рачунара и софтвера *GeoGebra* изградити рачунарско окружење које би употребили за извођење наставе математике.

Јасно је, међутим, да увођење рачунара у учионицу само по себи не може, ни у ком случају, побољшати наставу. Битно је саставити одговарајуће наставне материјале прилагођене настави у рачунарском окружењу, припремити наставнике за нови вид наставе, по могућности, предвидети што више могућих наставних ситуација у новом окружењу и, коначно, проценити ефекте овакве наставе. Притом, не треба губити из вида да фокус наставног процеса мора бити ученик, па све наведене активности треба посматрати у светлу резултата које постижу ученици. На крају, потребно је извршити и процену ефикасности свих чинилаца овако организоване наставе.

Зато је тема ове дисертације уређење, посматрање и вредновање наставе аналитичке геометрије у равни изведене у рачунарском окружењу у нашим средњим школама. Да би постигли све ово, морали смо:

- Оспособити наставнике да изграде поменуто рачунарско окружење и науче како да искористе предности и избегну мане таквог окружења са циљем постизања максималних резултата наставе.
- Пронаћи методе којима ће се ученицима омогућити најефикасније откривање појмова и процедура из поменуте области и олакшати разумевање материје,
- Идентификовати ситуације у којима долазе до изражаја негативне стране овако осмишљене наставе и дефинисати начине за избегавање, односно елиминисање узрока који доводе до тих ситуација.
- Статистички проценити евентуалне промене у успеху ученика изазване применом овакве наставе.

Постизање наведених циљева захтева ангажовање наставника и ученика које се знатно разликује од њихових активности током класичне наставе. Један од нових момената је да процес стицања и примене знања у оваквој настави није строго временски и просторно везан само за учионицу. Зато и процена резултата зависи од употребљене технологије приликом провере знања.

Дисертација је сачињена од пет целина – глава. Прва глава садржи преглед заступљености наставних јединица из аналитичке геометрије у плановима и програмима наших средњих школа. Извршено је и поређење наших планова и програма са програмима земаља окружења и најразвијенијих земаља света.

У другој глави су описани данас актуелни софтвери које је могуће применити у настави математике. Упоређене су њихове карактеристике са карактеристикама *GeoGebra*-е.

У трећој глави је дата техничка и методичка разрада наставе математике у рачунарском окружењу. Приказана су искуства страних истраживача а дати су и конкретни предлози за начине уређења рачунарске учионице и временске организације наставе у таквом окружењу.

У четвртој глави смо детаљније описали формирање рачунарског окружења у коме се изводила настава аналитичке геометрије у равни. Описани су и динамични радни листови које смо користили на часовима као и начини њихове примене приликом обраде градива и решавања задатака. Поред тога, описани су и карактеристични начини решавања задатака које су ученици приказали самостално припремљеним радним листовима.

Последња глава садржи статистичке податке везане за резултате наставе аналитичке геометрије у равни изведене у рачунарском окружењу, као и одговарајуће закључке везане за ефикасност и квалитет такве наставе.

Поред писаног дела, дисертација је пропраћена и одговарајућим *CD*-ом који садржи динамичне радне листове сачињене помоћу *GeoGebra*-е. У садржај *CD*-а су укључени и текстови наставних јединица из уџбеника [63] прилагођени примени динамичних радних листова на часу.

1. ЗАСТУПЉЕНОСТ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ У ПЛАНОВИМА СРЕДЊИХ ШКОЛА

У Србији постоје три основна типа гимназија: општа, друштвено-језичка и природно-математичка. У складу са тим, постоје и три наставна програма математике за гиманзије. То су: М1 (4 + 4 + 4 + 4) – за општи смер, М2 (4 + 3 + 3 + 2) – за друштвено-језички смер и М3 (4 + 5 + 5 + 4) – за природно-математички смер.

За средње стручне школе постоје следећи наставни програми: М4-М7 за III степен стручне спреме (трогодишње, занатске школе) и М8-М14 за IV степен стручне спреме (стручне четворогодишње школе).

На овом месту ћемо размотрити поједине теме из наставног програма М3 које су од значаја за аналитичку геометрију у равни. Садржаји наставних програма М1 и М8-М14 се, што се тиче поменуте теме, мало разликују од садржаја програма М3, док је у трогодишњим школама број часова математике па и аналитичке геометрије знатно мањи, табела 1.

Наравно, при проучавању сваке наставне теме треба имати на уму циљеве и задатке наставе математике у средњим школама и разматрану тему посматрати у светлу тих циљева и задатака. Њихово остваривање треба стално имати на уму приликом реализације одабраних тема. Одвојено приказивање и разматрање појединих тема не треба схватити као вештачко наглашавање њихове важности већ као указивање на теме у којима треба обратити више пажње на елементе који ће бити од користи приликом проучавања (и евентуалне примене) аналитичке геометрије у равни.

Међу основним циљевима наставе математике у гимназији наведени су, [23]:

1. Усвајање елементарних математичких компетенција (знања, вештина и вредносних ставова) потребних за схватање појава и законитости у природи и друштву и које ће да оспособе ученике за примену усвојених математичких знања (у решавању разноврсних задатака из животне праксе) и за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање.
2. Допринос развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика.

Модел	Смер – подручје рада	Недељни фонд часова математике по разредима	Број часова аналитичке геометрије
М1	Гимназија општи тип	4 + 4 + 4 + 4	40
М2	Гимназија – друштвено језички смер	4 + 3 + 2 + 2	22
М3	Гимназија – природно математички смер	4 + 5 + 5 + 4	50
М4	Личне услуге, пољопривреда, производња и прерада хране	3 + 2 + 0	Нема
М5	Шумарство, трговина, угоститељство и туризам	3 + 2 + 2	21
М6	Шумарство и прерада дрвета, производња и прерада хране, машинство и обрада метала	3 + 3 + 2	21
М7	Хемија, графичарство	3 + 3 + 3	30
М8	Култура, уметност, информисање, личне услуге, пољопривреда, производња и прерада хране	3 + 3 + 0 + 0	Нема
М9	Култура, уметност, информисање, здравство и социјална заштита, шумарство и обрада дрвета, трговина, угоститељство, економија, право	3 +3 + 2 + 2	22
М10	Шумарство и обрада дрвета, геологија, рударство и металургија, текстилство и кожарство, хемија, неметали и графичарство, пољопривреда, производња и прерада хране	3 + 3 + 3 + 3	33
М11	Економија, право и администација	3 + 3 + 3 + 3	27
М12	Шумарство и обрада дрвета, геодезија и грађевинарство, саобраћај, машинство и обрада метала	4 + 4 + 3 + 3	32
М13	Електротехника, геодезија и грађевинарство, геологија, рударство и металургија, машинство и обрада метала, хемија, неметали и графичарство	4 + 4 + 4 + 4	40
М14	Хидрометеорологија	4 + 5 + 5 + 4	50

Табела 1. Прегелед заступљености часова математике и аналитичке геометрије у нашим средњим школама

Неки од задатака наставе математике у гимназији су да ученици:

1. Развијају логичко и апстрактно мишљење;
2. Развијају способности јасног и прецизног изражавања и коришћења основног математичко – логичког језика;
3. Развијају способности одређивања и процене квантитативних величина и њиховог односа;
4. Разликују геометријске објекте и њихове узајамне односе и трансформације;
5. Разумеју функционалне зависности, њихово представљање и примену;
6. Развијају систематичност, уредност, прецизност, темељност, истрајност, критичност у раду, креативност; развијају радне

навике и способности за самостални и групни рад; формирају систем вредности;
7. Стичу знања и вештине корисне за трансфер у друге предмете и развијају способности за правилно коришћење стручне литературе;
8. Формирају свест о универзалности и примени математичког начина мишљења;
9. Буду подстакнути за стручни развој и усавршавање у складу са индивидуалним способностима и потребама друштва;
10. Развијају способности потребне за решавање проблема и нових ситуација у процесу рада и свакодневном животу.

Овоме би, у складу са захтевима времена, могли додати:

- Уз 2: даље развијање информатичко – комуникационе писмености са посебним акцентом на правилно исказивање математичких појмова употребом математичких софтвера.
- Уз 5: развијање способности ученика за представљање функционалних зависности помоћу рачунара, као и правилно разумевање и примену приказа функционалних зависности на рачунару.
- Уз 7: стицање и развијање навике за правилно налажење, процену и употребу знања у рачунарском окружењу и на интернету.

Сама чињеница да се у природно-математичком смеру аналитичка геометрија проучава са великим фондом часова (50) говори о значају те теме. Ни у осталим смеровима фонд часова, иако је мањи, није занемарљив.У гимназији општег смера, као и већини стручних четворогодишњих школа, фонд часова предвиђених за изучавање аналитичке геометрије износи од 22 до 40.

Наравно, треба имати на уму да ученицима ово није први сусрет са појмовима из аналитичке геометрије. Већ у седмом разреду основне школе проучава се координатни систем и представљање правих и хипербола као графичких приказа директне, односно обрнуте пропорционалности у њему. У осмом разреду проучава се линеарна функција, као и решавање система две линеарне једначине са две непознате графичком методом.

Зато се у трећем разреду тема не проучава од почетка, већ се полази од појма дужи и растојања две тачке. Затим се знања стечена у овој области примењују за поделу дужи у датој размери, површину троугла и проучавање разних облика једначине праве, као и испитивање узајамног односа две праве. У оквиру ове наставне теме су и наставне јединице Решавање система линераних једначина и Геометријска интерпретација система линеарних неједначина, које се лако могу приказати динамичним радним листовима на рачунару. На крају се проучавају криве другог реда, као и њихови односи са правом.

ПРИЛОГ :

Део Наставног програма математике М3 за природно – математичке гимназије у Републици Србији, [23].

III разред

(5 часова недељно, 185 часова годишње)

Аналитичка геометрија у равни (50)

Растојање две тачке. Подела дужи у датој размери. Површина троугла.

Права, разни облици једначине праве; угао између две праве; растојање тачке од праве.

Системи линеарних једначина. Гаусов поступак. Систем линеарних неједначина са две непознате и његова графичка интерпретација; појам линеарног програмирања.

Криве линије другог реда: кружница, елипса, хипербола, парабола (једначине; међусобни односи праве и кривих другог реда, услов додира, тангента; заједничка својства).

Резултати које су ученици из Србије постигли на релевантним међународним тестирањима као што су *TIMSS*[1], [59] и *PISA*[2], [67] показују да наши ученици углавном заостају за својим вршњацима из развијених земаља по питању математичких компетенција. То заостајање је посебно изражено у старијем узрасту, што показују резултати *PISA* тестирања из 2009. и 2012. године (први разред средње школе) и *TIMSS* 2003. и 2007. године (осми разред). На пример, заостајање на *PISA* 2009. године по питању математичких компетенција износило је 45 поена што одговара просечном ефекту од једне године школовања у земљама *OECD*. Како показују резултати *TIMSS* тестирања из 2011. године, у нижем узрасту (четврти разред основне школе) ученици су постигли резултате који су статистички значајно изнад просека (516 поена, док је просек 500 поена са варијансом од 100 поена).

Јасно је да је ниво ученичких компетенција данас у директној корелацији са свеукупним научним, технолошким и економским напретком друштва у скорој будућности. Самим тим, намеће се питање откривања узрока заостајања у вишем узрасту, као и кориговања њихових ефеката у нашем систему образовања. Потенцијалне узроке можемо тражити у квалитету иницијалног образовања и каснијег усавршавања наставника, карактеристикама постојећих планова и програма, мотивацији ученика и томе слично, [59].

[1] Trends in International Mathematics and Science Study – Међународни трендови у поучавању Математике и природних наука

[2] Programme for International Student Assesment – Међународни програм процене ученичких постигнућа

Због свега наведеног, било би целисходно упоредити планове и програме у Србији са плановима и програмима земаља у окружењу и свету и у њима уочити детаље који имају позитиван утицај на резултате у настави математике. Акценат ће бити на деловима који се односе на Аналитичку геометрију у равни.

Словенија

У словеначким гимназијама аналитичка геометрија у равни се проучава у нешто мањем обиму него у нашим, али су наставне јединице распоређене унутар више сродних тема, [21]. Зато се делови аналитичке геометрије проучавају у различитим разредима – од првог до трећег.

- У оквиру теме *Вектори у равни и простору* проучава се координатни систем у равни и простору.
- Наставна тема *Правоугли координатни систем у равни*, за коју је предвиђено 8 наставних часова, обухвата наставне јединице:
    - Скупови тачака у равни,
    - Растојање између тачака у равни и
    - Површина троугла.
- У оквиру теме *Линеарна функција* предвиђене су и наставне јединице:
    - График и особине линеарне функције,
    - Једначине праве у равни и
    - Угао између правих.
- За тему *Конусни пресеци* предвиђено је 20 часова. Она обухвата наставне јединице:
    - Алгебарски записи кривих другог реда, Кружница, Елипса, Хипербола, Парабола и Тангенте конусних пресека.

Приметно је да се међу очекиваним циљевима и опису реализације програма посебан акценат ставља на употребу информатичко-комуникационих технологија (*Information and Communications Technology – ICT*).

Од земаља региона, ученици из Словеније су показали најбоље резултате на *PISA* тестирањима. Њихов број поена је износио од 501 (2012. године) до 504 (2006. године) и изнад је просека земаља чланица *OECD*-а који је у овом периоду износио 494 поена.

Хрватска

Хрватски план и програм за математику је веома сличан словеначком али је укупан број часова аналитичке геометрије у равни, рецимо у општој гимназији, већи и приближан је броју часова у нашим школама, [20].

- У првом разреду се *Координатни систем у равни* проучава као посебна тема са 11 часова. У оквиру ње се уче наставне јединице:
    - Растојање између тачака,
    - Површина троугла и
    - Средиште дужи.
- У оквиру теме *Линеарна функција* и системи једначина предвиђена су три часа за јединицу График линеарне функције и два часа за Пресек две праве.
- У трећем разреду, садржаји аналитичке геометрије су подељени у три теме:
    - *Права* (11 часова), са наставним јединицама: Експлицитни, општи и сегментни облик једначине праве, Угао између две праве и Удаљеност тачке од праве.
    - *Кружница* (12 часова), са наставним јединицама: Једначина кружнице и Однос праве и кружнице.
    - *Елипса, хипербола и парабола* (19 часова), са наставним јединицама: Конструкција и једначина елипсе, Конструкција и једначина хиперболе, Конструкција и једначина параболе и Права и криве другог реда.

Хрватски планови и програми нису значајно промењени по питању обима и садржаја али су циљеви и задаци конципирани тако да се постигне што веће растерећење ученика, па су у складу са тим дефинисане и одговорности свих учесника у наставном процесу. Осим тога, поједини делови градива су означени као необавезни, односно као градиво које поједини ученици треба да усвоје самостално.

Резултати хрватских ученика на *PISA* тестирањима су се кретали од 460 поена (2006. године) до 471 (2012. године). Иако су испод просека земаља чланица *OECD*-а, ови резултати су бољи од резултата наших ученика на истим тестирањима.

Македонија

Математика се у природно-математичком смеру гимназије у Македонији изучава са по три часа недељно у сва четири разреда, [22]. Осим тога, у трећем и четвртом разреду постоје изборни предмети међу којима су и: Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Алгебра и Математичка анализа. Градиво аналитичке геометрије у равни је распоређено на сличан начин као у хрватском програму, дакле:

- У оквиру теме *Линеарна функција, линеарне једначине и неједначине,* за коју је у првом разреду предвиђено 14 часова, проучавају се наставне јединице:
    - Правоугли координатни систем,
    - Растојање између две тачке,
    - Површина троугла и
    - График и особине линеарне функције.
- У трећем разреду *Аналитичка геометрија у равни* је издвојена као посебна тема са фондом од 40 часова. У склопу ове теме предвиђене су следеће наставне јединице:
    - Координате тачака и вектора у правоуглом координатном систему,
    - Растојање између две тачке,
    - Подела дужи у датом односу,
    - Облици једначине праве,
    - Узајамни положај две праве,
    - Растојање од тачке до праве,
    - Једначине кривих другог реда,
    - Однос праве и криве другог реда

Ученици из Македоније су обухваћени *PISA* тестирањима само 2000. године, када су показали скромне резултате – 381 поен.

Турска

У турским школама се, слично као у нашим, ученици упознају са деловима градива из аналитичке геометрије у равни још у основној школи, [17], [18]. Тако се у седмом разреду уче линеарне једначине док се у осмом проучавају график и особине линеарне функције.

- У дестом разреду (што је еквивалент другом разреду у нашим средњим школама) проучава се тема *Аналитичка геометрија* са 16 часова. У оквиру ње проучавају се наставне јединице:
    - Растојање између две тачке у равни,
    - Подела дужи у датом односу,
    - Облици једначине праве и узајамни односи правих,
    - Растојање тачке од праве.
- У дванаестом разреду се у оквру теме *Аналитичка геометрија*, која је заступљена са 30 часова, изучавају наставне јединице:
    - Једначина кружнице,
    - Однос праве и кружнице,
    - Дефиниције и једначине параболе, елипсе и хиперболе.

Резултати турских ученика на *PISA* тестирањима су слични резултатима наших ученика и крећу се од 445 поена (2009. године) до 449 поена (2012. године).

Немачка

У већини немачких покрајина ученици похађају четворогодишњу основну школу – *Grundschule*. После завршетка основне школе следи средње образовање од 5. до 12. или 13. разреда, у зависности од покрајине или професионалног усмерења ученика.

Програмима математике у немачким школама предвиђен је знатно мањи обим градива аналитичке геометрије у равни.

У осмом разреду проучава се тема *Пресликавања и функције* која обухвата и наставне јединице, [9]:

- Графички приказ директне и обрнуте пропорционалности,
- Испитивање и примена особина линеарне функције – нагиб, пресеци са координатним осама.

Поред тога, у деветом разреду се изучава графичко решавање система линеарних једначина, док се у десетом изучавају наставне јединице Испитивање графика квадратне функције, као и Графичко решавање квадратних једначина.

Међутим, у вишим разредима (од 11. до 13.), [8], поклања се посебна пажња Линеарној алгебри и аналитичкој геометрији у простору. Аналитичка геоматрија у равни се уопште не ради на начин и у обиму који је заступљен у нашим школама.

Немачки ученици на *PISA* тестирањима показују одличне резултате који се крећу од 490 (2000. године) до 514 поена (2012. године) са сталним трендом раста броја поена.

Енглеска

Школовање је у Енглеској подељено у фазе – *key stages* (*KS*), [интернет извор 12]. Прве две фазе (*KS* 1 и 2) обухватају првих шест разреда (у узрасту од 5. до 10. године) и чине основну школу – *primary school*. Средња школа је подељена у фазе *KS* 3, 4 и 5. Прве две чине нижу средњу школу – *senior school,* која је обавезна, и покривају узраст од 11. до 15. године, тј. од 7. до 11. разреда. Фаза *KS*5 (*Post-compulsory secondary*) траје две или три године и она је, у ствари, колеџ – *college/sixth form*. Колеџи се међусобно разликују по смеровима, дакле, и по предметима који се изучавају. После ове фазе следи универзитетско образовање.

Градиво аналитичке геометрије се у енглеским школама изучава на различитим нивоима. На нивоу *KS*3, [15], у осмом разреду се проучавају:

- У оквиру теме *Бројеви и алгебра*, наставне јединице:
    - Линеарне једначине, изрази и идентитети и
    - Графичко решавање једначина.
- У оквиру теме *Геометрија и мерење*, наставна јединица Тачке, праве и фигуре у дводимензионалном координатном систему

У фази *KS*4, [16], у десетом разреду, у оквиру теме *Бројеви и алгебра* изучавају се наставне јединице:

- Линеарна функција и
- Графици једноставнијих локуса.

У зависности од смера, на колеџима се математика изучава у различитом обиму. Међутим, на већини колеџа она је један од обавезних предмета. У колеџима са општим и усмерењем на техничке и природне науке фонд часова математике, па и аналитичке геометрије, је већи. Градиво је подељено у модуле. У 12. разреду, [интернет извор 4], се изучава следеће градиво аналитичке геометрије у равни:

- У модулу *C*1 – тема *Координатна геометрија у равни* са наставним јединицама:
    - Облици једначине праве и

    - Услови паралелности и нормалности правих.
- У модулу *C*2 – тема *Координатна геометрија у равни* са наставним јединицама:
    - Једначина и особине кружнице и
    - Тангента кружнице.
- У модулу *C*4 – наставна јединица Картезијанске и поларне једначине кривих.
- У модулу *FP*1 – тема *Координатни системи* и у оквиру ње наставне јединице:
    - Једначине и особине елипсе, хиперболе и параболе и
    - Односи праве и конусних пресека, тангента конусног пресека.

На *PISA* тестирањима резултати ученика из Енглеске су приказани заједно са резултатима ученика из целог Уједињеног Краљевства. Укупан број њихових поена је у висини просека земаља чланица *OECD*-а – од 492 (2009. године) до 495 поена (2006. године).

Финска

Фински образовни систем предвиђа деветогодишњу основну школу након чега следи трогодишња средња школа која може бити општа или стручна.

У осмом разреду се, у склопу теме *Функције*, изучавају наставне јединице, [6]:

- Приказивање скупова тачака у координатном систему,
- Особине једноставнијих функција и цртање њихових графика у координатном систему,
- Испитивање графика функције, нуле функције, најмања и највећа вредност функције, раст и опадање функције и
- Линеарна функција.

Градиво математике у средњој школи подељено је у модуле – курсеве, од којих је десет обавезних а три су изборна, [5]. Један од обавезних курсева је и Аналитичка геометрија, у оквиру које се изучавају наставне јединице:

- Једначине скупова тачака,
- Једначине праве, кружнице и параболе,
- Решавање једначина и неједначина са апсолутним вредностима,

- Решавање система једначина и
- Растојање тачке од праве.

Финска је једна од ретких европских земаља чији су ученици на свим *PISA* тестирањима од 2000. године постигли резултате значајно изнад просека земаља *OECD*-а, [14]. Иако ти резултати показују тренд опадања, крећу се у распону од 548 (2000. године) до 519 поена (2012. године).

Канада

У Канади постоји више типова образовних система које регулишу министарства провинција. Ипак, образовни систем заступљен у Онтарију примењује се и у већини других провинција и територија, а најзастуљенији је и по броју ученика. Зато ћемо размотрити план и програм за математику у средњим школама у Онтарију.

Математика се овде не изучава као јединствен предмет, већ као неколико модула који се могу бирати алтернативно у зависности од опредељења ученика, [10]. У деветом и десетом разреду (еквиваленти нашем првом, односно другом разреду средње школе) постоје два модула: Математичка начела, намењен ученицима који намеравају да наставе школовање на универзитетском нивоу и Основе математике, што представља математику са њеним применама у различитим стручним школама.

- У деветом разреду, у модулу Математичка начела заступљена је тема *Аналитичка геометрија*, у оквиру које се изучавају наставне јединице:
    - График функције,
    - Нагиб графика линеарне функције и
    - Примена линеарних једначина у решавњу проблема.
- У десетом разреду, у истом модулу се такође јавља тема *Аналитичка геометрија* са наставним јединицама:
    - Примена система линеарних једначина у решавању проблема,
    - Решавање проблема употребом особина правих и
    - Примена аналитичке геометрије у доказивању неких геометријских особина.

У модулу Основе математике садржаји аналитичке геометрије у равни се не изучавају. У једанаестом разреду заступљена су четири а у дванаестом шест модула, али се ни у једном од њих не изучава аналитичка геометрија у равни, [11].

У поређењу са плановима и програмима других земаља, овај програм предвиђа далеко мањи обим градива из аналитичке геометрије у равни. Међутим, уочљиво је да се посебна пажња поклања проблемској настави, примени стечених знања и вештина као и сталној употреби *ICT*, како у самом наставном процесу, тако и приликом примене стечених знања. Ученици из Онтарија постижу високе резултате на *PISA* тестирањима али је видан тренд сталног опадања броја њихових поена. Током последњих девет година (четири циклуса тестирања) тај број је опао са 530 (2003) на 514 (2012), [4].

САД

У Сједињеним Америчким Државама постоји више образовних модела који се разликују по дужини трајања појединих етапа школовања. Сви они, међутим, имају етапу еквивалентну нашим средњим школама – *high school*, [2], [1]. Планови и програми у државним школама се незнатно разликују по савезним државама. Иако постоје различити предмети и модули који обухватају градиво математике, већина програма предвиђа изучавање углавном истог обима градива.

- У осмом разреду се у оквиру предмета Математика (у неким државама Математика1) изучава тема *Изрази и једначине,* која обухвата наставне јединице:
    - Веза између директне пропорционалности, линеарне функције и праве,
    - Нагиб линеарне функције и
    - Графичко решавање система линеарних једначина.
- У оквиру предмета Геометрија (у неким државама Математика 2), који се може изучавати од деветог до дванаестог разреда, уче се наставне јединице:
    - Једначина кружнице,
    - Примена аналитичке геометрије у доказивању једноставнијих геометријских теорема,
    - Паралелне и нормалне праве,
    - Подела дужи у датом односу и
    - Растојање између тачака и површина троугла.
- Предмет Прекалкулус (у неким државама Математика 3) се изучава у каснијим разредима. Он садржи наставне јединице:

- Једначине елипсе, хиперболе и параболе и
- Општа једначина другог степена.

Фонд часова за одређену тему и наставну јединицу није прецизиран али су веома прецизно дефинисани циљеви програма и очекиване компетенције ученика без чијих постигнућа ученик не може наставити са слушањем предмета из наредног разреда. У већини држава је на снази политика „*no students behind – без ученика који заостају*“. То, у пракси, значи да ученици који нису постигли предвиђене компетенције имају могућност надокнаде пропуштених делова у допунској настави, летњим школама и слично. На *PISA* тестирањима амерички ученици су постигли од 474 (2006. године) до 487 поена (2009. године) што је испод просека земаља *OECD*-а.

Сингапур

Сингапур има веома сложен образовни систем који је, међутим, изузетно ефикасан у смислу продуковања квалтетно образованих стручњака оспособљених за рад у својој струци. Школовање је подељено у више етапа, [13]. Основно образовање (*Primary*) обухвата првих 6 разреда. Након тога следи средње образовање (*Secondary*) од седмог до десетог разреда. Затим следе предуниверзитетско и универзитетско образовање. У средњем образовању већина предмета има програме за различите категорије ученика разврстане према брзини напредовања или усмерењу.

У програму *S*2, [12], који је предвиђен за узраст еквивалентан нашем осмом разреду, у оквиру теме *Функције и графици*, уче се наставне јединице:

- Декартове координате у равни,
- Графички прикази скупова уређених парова,
- Линеарна функција,
- Нагиб линеарне функције и
- График линеарне функције.

У истом разреду се, у склопу теме *Решавање једначина*, ради графичко решавање једначина. Програм *S*3-4, предвиђен за девети или десети разред садржи тему *Координатна геометрија* са наставним јединицама:

- Нагиб праве дате координатама двеју тачака,

- Растојање између тачака,
- Експлицитни облик једначине праве и
- Решавање геометријских проблема применом координатне методе

Осим овога, ученици са већим интересовањем за Математику могу похађати додатне курсеве предвиђене програмом *S*3-4 – *Additional Mathematics*. У оквиру овог курса заступљена је и тема *Аналитичка геометрија у равни* са наставним јединицама:

- Услови нормалности и паралелности правих,
- Средиште дужи,
- Израчунавање површина правоуглих фигура чија су темена дата координатама и
- Једначина кружнице.

У Сингапуру посебну пажњу поклањају примени математичких знања и ефикасној реализацији планираних циљева наставе. То је и довело до диференцијације наставних програма по различитим критеријумима.

Један од показатеља успешности овог образовног система јесу и резултати које су њихови ученици постигли на *PISA* тестирањима. Сингапурски ученици су обухваћени тестирањима 2009. и 2012. године и на њима су постигли изузетне резултате – 562, односно 573 поена. Ови резултати су у самом светском врху и значајно су изнад просека земаља чланица *OECD*-а.

Хонг Конг

Први стадијум образовања у Хонг Конгу је четворогодишња основна школа (*Primary* 1-4). После завршетка овог стадијума, ученици похађају нижу средњу школу (*Secondary* 1-3). Следећи ниво је виша средња школа (*Secondary* 4-6), након којег следе стручне школе и универзитети, [7].

Градиво из аналитичке геометрије се у њиховим школама уводи постепено, почев од узраста који одговара нашем шестом разреду.

- У програму *S*2 (*Secondary* 2), [19], изучавају се наставне јединице:
    - Скицирање графика линеарне једначине са две непознате и

    - Алгебарско и графичко решавање система једначина.
- У програму *S*3 (еквивалент нашем седмом разреду), [19], предвиђена је посебна наставна тема *Аналитички приступ учењу геометрије* са наставним јединицама:
    - Правоугли и поларни координатни систем,
    - Координате тачака у правоуглом координатном систему,
    - Симетрија, транслација и ротација тачака у координатној равни,
    - Израчунавање површина правоуглих фигура чија су темена дата координатама,
    - Растојање између тачака и нагиб праве,
    - Подела дужи у датој размери, средиште дужи,
    - Услови паралелности и нормалности правих.
- Програм *S*6 (за узраст нашег другог разреда средње школе), [3], садржи теме:
    - *Локус*, са наставним јединицама: Концепт, опис и скицирање локуса за дате услове и Приказивање локуса алгебарским једначинама,
    - *Једначине правих и кружница*, са наставним јединицама: Једначина праве, Пресек две праве, Једначина кружнице и Однос праве и кружнице.

Као и у већини високо развијених источноазијских земаља, и хонгконшки образовни систем је изразито оријентисан ка стварању квалитетно образованих стручњака у свим областима. Достигнућа њиховог друштва у свим областима говоре и о квалтитету овог образовног система.

Ученици из Хонг Конга на *PISA* тестирањима постижу врхунске резултате. На свим досадашњим тестрањима су били у светском врху. Број освојених поена се креће између 547 (2006. године) и 561 (2012. године).

Из наведених наставних планова и програма земаља нашег региона и света види се да се већина њих веома мало разликује од нашег по заступљености градива аналитичке геометрије.

Међутим, у програмима најнапреднијих школских система (Сингапур, Хонг Конг, Финска, Словенија) може се уочити неколико заједничких тачака:

1. Градиво већине области (па и аналитичке геометрије у равни) је подељено у више целина које се изучавају по принципу концентричних кругова у различитим узрастима.
2. У свакој прилици се инсистира на примењљивости стечених знања па се, у складу са тим, градиво излаже у облику који је најлакше примењљив.
3. Изузетна пажња се поклања примени *ICT*, како у излагању материје и стицању знања, тако и у његовом увежбавању и примени.

Са друге стране, неке земље су прибегле смањењу обима градива са циљем растерећења ученика. Хрватска је 2003. године започела пројекат растерећења ученика тако што су, између осталог, неки делови градива проглашени необавезним, [20]. У Македонији, обим градива није смањен, али је Математика подељена на посебне области – изборне предмете, [22]. Ниједна од ових реформи није дала жељене резултате. Ово значи да евентуалне промене наставног плана и програма са циљем побољшања ефикасности школског система не треба свести на пуко сажимање градива. Пожељно би било да промене програма садрже смернице уочене у програмима напредних школских система.

2. СОФТВЕР У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Појава *PC (personal computers)* рачунара почетком 1980-тих година довела је до радикалних промена у односу људи према рачунарима, као и до њихове масовне употребе. Рачунари су нашли своје место и у образовању, [60], [66], посебно у настави математике. Они нису само олакшали и поједноставили дотадашње облике рада, већ стално доводе до нових идеја и нових начина њихове употребе. Као пример треба навести лакоћу којом се сада преносе и шире нове идеје и сазнања путем интернета. Учење на даљину је постало сасвим уобичајена појава.

Заједно са поменутим променама у друштву треба посматрати и однос савремених ученика према рачунарима. Наиме, огромна већина данашњих ученика је одрасла уз рачунаре тако да они за њих представљају предмет свакодневне употребе. Скоро свака њихова активност је уско везана за употребу рачунара, таблета, мобилних телефона или сличних уређаја, [50], [51]. У складу са тим, требало би организовати и савремену учионицу и наставни процес.

Софтвери о којима ће овде бити речи су, углавном, створени за потребе образовања, па их треба и посматрати у том контексту. Ово значи да их треба сматрати делом савремене учионице на који се може (и треба) утицати и који несумњиво оставља дубок траг у начину и квалитету на који се настава изводи. Сама реч софтвер долази из енглеског језика *(software)*, нема адекватан превод у српском и означава скуп програма уз чију се помоћ управља радом рачунара. Још од раних 80-тих година јављају се софтвери намењени изучавању и примени математике у школама. Још тада долази до развоја у различитим правцима – у погледу техничке изведбе, односа између ученика и софтвера, као и области у којој је софтвер применљив. Како ћемо се касније опширније бавити софтверима намењеним за употребу у процесу наставе математике, у овом делу ћемо укратко навести неке од софтвера који су предвиђени за другачију употребу али се ипак могу сматрати (донекле) математичким.

Међу најпопуларнијим софтверима су они сачињени у облику загонетки и слагалица *(puzzle-style)*. Јако су блиски видео играма и практично их је немогуће јасно раздвојити од њих. Због логичких проблема које нуде, млади их радо прихватају. Иако имају потенцијал да развијају логичко размишљање код ученика, слабо су испитани њихов утицај на процес учења и могућности популарисања математичких садржаја уз њихову помоћ.

У Канади је 90-тих година прошлог века био активан пројекат *EGEMS* (*Electronic Games for Education Math and Science*) Универзитета Британске Колумбије, [38]. Покретачи и учесници пројекта су се бавили креирањем електронских игара оријентисаних на развијање математичког потенцијала деце. Осим тога, проучавали су утицај таквих игара на развој математичког мишљења, као и однос између корисника и рачунара, те однос између самих корисника. Учесници овог пројекта су радили у паровима. Посебно важна чињеница је управо посматрање и испитивање рада у паровима у рачунарском окружењу, као и ефикасности таквог рада.

Са друге стране, дошло је до развоја тзв. ручних програмабилних калкулатора (*programmable palmtop calculators*) и њима одговарајућих програма. Током 1980-тих и 90-тих година дошло је до њихове широке употребе у земљама западне Европе и САД. Најпознатији представници ове групе рачунара су серија *TI – Texas Instruments* (*TI-83, TI-84, TI-92* и др.) као и многи слични ручни програмабилни калкулатори. Увођењем рачунарских учионица у последњих петнаестак година њих су широм света по значају надмашили *PC* рачунари потпомогнути многим савременим софтверима.

Први предлог за категоризацију софтвера је дао Тејлор 1980. године говорећи у [54] о програмима који могу бити тутори, алати или ученици, у зависности од тога у каквом међуодносу стоје ученици и програм. Због брзог развоја технологија, као и због нових тумачења начина на које софтвери утичу на активности ученика (и обрнуто), наведена подела је, иако корисна, добрим делом превазиђена. Наиме, оно што је некад називано туторском улогом више се не може тако прецизно одредити, јер су скоро сви савремени софтвери интерактивни и нуде мноштво алата (средстава на која ученик утиче) који собом носе туторске елементе (тј. утичу на начин размишљања и рада ученика).

Најдужу историју употребе рачунара у настави математике можемо пратити кроз употребу програмских језика за потребе учења математике. Ту се првенствено мисли на програмски језик *Logo*, чије се разне модификације (*StarLogo, WinLogo, JavaLogo, Boxer* и др.) употребљавају у школама већ дуже од 30 година. *Logo* је термин којим се описује низ програма уз чију помоћ корисник контролише кретање „корњаче“ (*turtle*) на екрану. *Logo* нуди рад у радним листовима (*worksheets* – слично као у програму *Excel*) углавном у текстуалном облику. Радни лист је, у основи, мрежа редова (обележених са 1, 2, 3,...) и колона (обележених са *A*, *B*, *C*,...). Свака ћелија ове мреже може садржати бројеве, текст или формуле, које се могу односити и на садржаје других ћелија. Његов творац, Паперт га је у [48] описао речима: „*моћне идеје у залогајима чију величину прихвата мозак*". Користећи *Logo*, програмер контролише улазне податке, као и операције над њима и њихове међусобне односе уз помоћ корњаче.

Осим тога, треба навести и описне алате (*expressive tools*), које према намени грубо можемо поделити у две групе:

1. Педагошки инструменти предвиђени за употребу у математици;
2. Рачунски инструменти који су више прилагођени него конструисани за образовне сврхе.

Пример употребе и истраживања описних алата је пројекат *SimCalc*, (интернет извор 9), који спроводи *The Kaput Center for Research and Innovation* у Масачусецу. У оквиру овог пројекта, Капут, Рошел и др. [52] су истраживали употребу описних алата који не захтевају алгебарски апарат и нуде и бежичну везу са рачунаром, омогућену јефтиним и моћним ручним уређајима.

Данас је употреба *ICT* у настави кључни чинилац учења на даљину. Под учењем на даљину подразумевамо различите видове стицања/преношења знања ван стандардног односа наставник – ученик који се остварује у учионици. Применом *ICT* развијено је неколико типова учења на даљину: Системи за управљање отвореним курсевима – *Open Source Course Management System (CMS)*, Системи за управљање учењем – *Learning Management System (LMS)*, Виртуално наставно окружење – *Virtual Learning Environment (VLE)*. Навешћемо само једну од најпопуларнијих платформи за учење на даљину – *MOODLE* (*Modular Object – Oriented Dynamic Learning Environment*) коју примењују хиљаде образовних институција у свету.

2.1. Динамични геометријски системи – *Dynamic Geometry Systems* (*DGS*)

Током последњих петнаестак година динамични геометријски системи се све више користе за подршку изучавању и предавању геометрије у равни. То су софтвери који омогућавају извођење интерактивне геометрије. Најпростије речено, интерактивна геометрија омогућава кориснику стварање (одређивање) тачака и линија на екрану и манипулисање њима. Изабрани објекат се може померати, ротирати, проширивати, сажимати, рефлектовати, сакривати, може се мењати облик, боја или дебљина линија. Неки елементи могу бити слободни тј. могу се померати по екрану док се други одређују тако да остану у неком геометријском односу са слободним елементима, нпр. средина дужи, права паралелна датој правој или симетрала дужи. Ови геометријски односи се стално одржавају без обзира на померање слободних елемената. Дакле, кључни део сваког *DGS*-а је интерфејс који омогућава директну манипулацију геометријским фигурама, посебно повлачењем појединих њихових делова мишем. Јако су погодни за проучавање геометрије у школама. Иако има разлика што се тиче техничких детаља и могућности, сви доступни *DGS* одражавају еуклидску геометрију. На први поглед, изгледа да конструкција добијена директним манипулацијама личи на конструкције традиционалне геометрије урађене шестаром и лењиром на папиру. У том смислу, *DGS* су тако дизајнирани да корисницима омогућавају стварање утиска да раде са еуклидским елементима. Са друге стране, конструкције добијене *DGS*-ом не представљају само специјални случај извесне геометријске фигуре (као што је случај код класичног цртања на папиру) већ класе конструкција које се могу померати по екрану, или мењати ради провере њихових својстава и налажења специјалних случајева. На овај начин систем даје повратну информацију која није лако уочљива у класичним конструкцијама на папиру. Међутим, треба имати на уму да динамична геометрија није само још један начин представљања еуклидских конструкција. Наиме, дужи које можемо развлачити, или тачке које померамо по природи нису објекти којима се служимо у класичној геометрији. Ради се о суштински различитим објектима (дигитално представљеним подацима) чији је приказ на екрану тако прилагођен да одговара нама познатим објектима и релацијама еуклидске геометрије. Имајући све ово на уму, закључујемо да *DGS* нису само средства за приказивње и појачавање визуелног ефекта или добијање потребних података, већ могу постати и кључни део у схватању значења задатка. Објекти у *DGS*-у се могу посматрати аналитички, преко својих координата и једначина. Међутим, у *DGS*-у није могуће задавати координате и једначине објеката а као резултат добити њихову графичку презентацију.

Многи софтвери произведени до данас се могу сврстати у *DGS*, док други, поред осталог, поседују нека од својстава *DGS*-а. Иако се свакодневно јављају нови и усавршавају стари, навешћемо неке који се у потпуности или делимично могу сврстати у *DGS*: *Cabri Geometry, The Geometer's Sketchpad, Geometrix, Cinderella, GEONExT, GeoGebra* и др. Од техничких захтева, за већину њих је потребно *Java* окружење. Сви су доступни (по различитим ценама или бесплатно) на интернету.

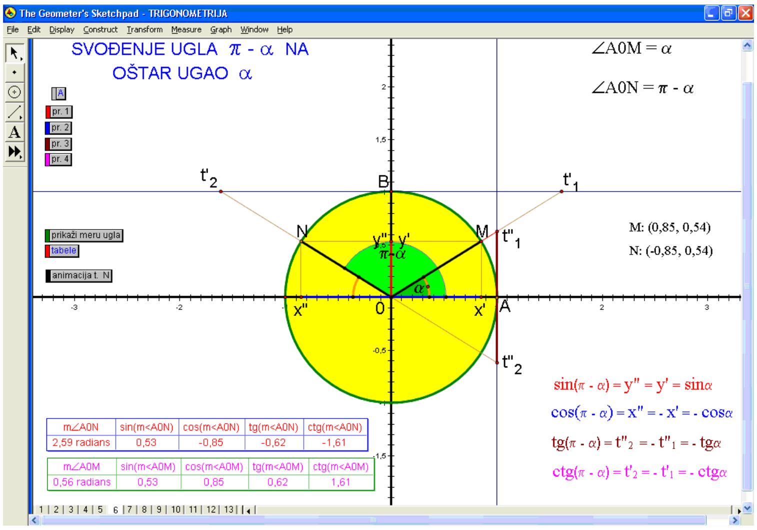
Cabri Geometry је софтвер намењен изучавању геометрије у основној и средњој школи као и на факултетима. Након пионирских подухвата Лабордове и њених сарадника од 1985. до 1988. године, [39],[40], прва верзија овог софтвера се јавила на француском тржишту 1989. године уз подршку француског Министарства образовања. Већ од 1990. године почињу опсежнија истраживања са овим софтвером на Институту за рачунарске науке и примењену математику у Греноблу (*IMAG*) у оквиру пројекта који се остварује у околним школама. После тога долази до брзог усавршавања и развијања нових верзија софтвера. Поменућемо *CabriJunior* и *Cabri II+* који су намењени калкулаторима *TI-83* и *TI-84*, односно *TI-89* и *TI-92*, као и *Cabri3D* за геометрију у простору.

Поред уобичајених геометријских алата, основне карактеристике верзије *Cabri II+* су:

- Праћење трага објекта при његовом померању,
- Могућност очувања и редефинисања задатих односа међу објектима,
- Графичко и алгебарско задавање кривих,
- Могућност креирања нових алата и модификовања траке са алатима

Данас *Cabri* софтвере развија и дистрибуира компанија *Cabrilog*. Програм је доступан на интернет страници www.cabri.com . Цене се крећу од 36 евра за појединце, за верзију *Cabri II+* (102 евра за *Cabri3D*), до 718 евра за школе, са неограниченим бројем лиценци (582 евра за *Cabri3D*). Програм је доступан само на енглеском, француском и шпанском језику.

Основна одлика софтвера *The Geometer's Sketchpad* је могућност динамичне измене објеката. У овом програму се користе два основна облика прозора: скице (*sketches*) и скрипте (*scripts*). Прозори са скицама се користе за стварање геометријских конструкција и манипулисање њима, слика 1. Укључују објекте као: тачке, праве, кружнице и сл. Скрипте су вербални записи геометријских конструкција и манипулација. Сваки корак неке конструкције или трансформације се записује и може се извести поново. Програм је доступан на интернету; у понуди је на страници www.dynamicgeometry.com. Доступне су и верзије овог програма за калкулаторе *TI-89* и *TI-92*. Цене се крећу од 10 долара годишње за појединце до 450 долара годишње за институције са неограниченим бројем лиценци. Трајне лиценце коштају од 70 долара за појединце до 1500 долара за школе са неограниченим бројем лиценци.



Слика 1.

Програм *Cinderella* се састоји од три дела: геометријски део, део за симулацију у физици и програмски део – скрипте. То значи да осим динамичне геометрије нуди и рад са проблемима из физике. Сваки од делова може радити самостално, али пуна снага програма долази до изражаја у њиховом повезивању. Програм је доступан на интернету на страници www.cinderella.de , а цена лиценце за појединце износи 10 долара, односно 7,5 евра.

Остали *DGS* софтвери имају сличне карактеристике. Особине програма *GeoGebra* ћемо посебно описати у одељку 2.3.

2.2. Рачунарски системи алгебре – *Computer Algebra Systems* (*CAS*)

Рачунарски системи алгебре су један од облика електронских рачунских елемената у које спадају још и: радни листови, калкулатори за цртање графика и базе података. Определили смо се да дамо кратак преглед управо *CAS*-а због њихове све веће популарности и растућег интересовања и шире примене међу предавачима и ученицима средњих школа и (посебно) факултета.

CAS омогућавају дефинисање, манипулисање, трансформације, упоређивање и визуелизацију алгебарских израза у свим њиховим традиционалним облицима. Већина њих нуди и могућности графичког представљања функција. Графичка представљања алгебарских објеката у *CAS*-у (*Plots*) не могу се померати помоћу миша, те у области аналитичке геометрије готово да нема никакве динамичке промене. То је условљено релативно сложеном синтаксом ових система, која нема много заједничког са уобичајеном школском нотацијом. Током 1980-тих година *CAS* су се одомаћили у употреби у факултетским круговима, а од наредне декаде се траже начини за њихово увођење у средњој школи. Иако се углавном ради о програмима специјализованим за научна истраживања, могућности њихове примене у средњој школи су велике. То значи да нам предстоје испитивања у вези области у којима је могућа њихова примена, као и прихваћености таквих софтвера од стране предавача и ученика. Типични представници *CAS* су: *Maple, MatLab, Derive, Mathematica* и *Scientific WorkPlace*.

Maple је плод скоро двадесетогодишњих истраживања у компанији *Maplesoft* која су преточена у свеобухватни математички софтвер. Користе га најреномираније компаније светског гласа у свим гранама науке, индустрије и економије. Верзија *Maple17* комбинује симболичке прорачуне, истраживања, математичке записе, дугмад и клизаче са графиком и анимацијама које се могу преносити и користити на другим местима. Програм омогућава корисницима пренос података на њима близак начин: уз употребу свезака (*notebooks*), техничких папира или извршних докумената који дају коначан одговор. Од техничких могућности, које су заиста бројне и моћне, треба навести: решавање једначина уз могућност природног записивања, дефинисање нових функција, стварање палета са новим наредбама, цртање дводимензионалних и тродимензионалних графика, одређивање граничних вредности функција, интеграција, диференцирање, решавање диференцијалних једначина, подршка линеарном програмирању итд. Програм је доступан на интернету, на страници *www.maplesoft.com* а цене су од 124 долара за студентску лиценцу, до 1555 долара за академску лиценцу. Професионалне верзије овог програма су још скупље.

MatLab је интерактивно окружење и технички рачунски језик високог нивоа за развој алгоритама, визуелизацију и анализу података и нумеричка израчунавања. Има широк спектар примена од процесирања сигнала, тестова и мерења, преко финансијског моделирања и анализа до рачунске биологије. Додатне кутије алата (појединачно доступни скупови *MatLab* функција специјалних намена) проширују *MatLab* окружење на решавање посебних класа проблема из наведених области примене. *MatLab* омогућава дистрибуцију и комбиновање апликација са другим језицима и апликацијама. Од техничких могућности треба навести употребу математичких функција и апарата за проблеме линеарне алгебре, статистике, Фуријеове анализе, оптимизације, нумеричке интеграције, дводимензионалне и тродимензионалне графике функција за визуелизацију података. Програм је доступан на интернет страници www.mathworks.com и цене се крећу од 100 долара за студентску лиценцу.

Derive је систем за извођење нумеричке и симболичке математике на рачунару. Намењен је за употребу у школама и на факултетима. Омогућава операсање алгебарским променљивим, једначинама, функцијама, векторима, матрицама, Буловим променљивим, ротацију тродимензионалних графика. Могућа је размена радних листова са ручним калкулаторима *TI-89*, *TI-92* и другим. Derive је тренутно доступан једино као софтвер уграђен у калкулаторе *TI* серије. Рецимо, главни део *CAS* софтвера калкулатора *TI-Nspire* је управо *Derive*. Доступан је на интернет страници www.chartwellyorke.com .

Mathematica је свеобухватни математички софтвер који је првенствено намењен научним и индустријским израчунавањима у свим областима математике и физике као и областима њихове примене. Осим тога, она је нашла своје место и у настави математике и природних наука. Њен творац је Стивен Волфрам, који је издао прву верзију *Mathematica*-е 1988. године. Комуникација између корисника и *Mathematica*-е се одвија преко листова – *notebooks*. Подаци се уносе преко тастатуре или мишем уз употребу палета готових симбола и функција. *Mathematica* омогућава рад у скоро свим областима математике. Нуде се уграђене функције за: нумеричко и симболичко решавање једначина, израчунавање сума, интеграцију, операције са матрицама, манипулације подацима, алгебарски рачун, вероватноћу и статистику, рад са листама, дводимензионалну и тродимензионалну графику, звук и још много тога. Осим тога, могуће је и креирање сопствених палета симбола и функција. *Mathematica* је опремљена стотинама уграђених функција. И поред тога, може се десити недостатак функција из неке специјалне области које можда нису уграђене. Овај проблем се решава и додацима (*add-ons*), које често називамо и додатним пакетима, или само пакетима. То су скупови програма којима су дефинисане нове функције *Mathematica*-е. Постоје стандардни пакети у склопу самог софтвера и они које развијају самостални истраживачи. Програм је доступан на интернет страници [*www.wolfram.com*](http://www.wolfram.com), а цене су, за верзију *Mathematica9*, за студенте са појединачном лиценцом 20 фунти (полугодишња), 30 фунти (годишња) или 80 фунти (стална), односно 860 фунти за школску верзију са неограниченим бројем лиценци. Професионалне верзије су далеко скупље.

Остали *CAS* софтвери имају сличне карактеристике са овде наведеним и углавном се могу наћи на интернету.

2.3. Основне особине програма *GeoGebra*

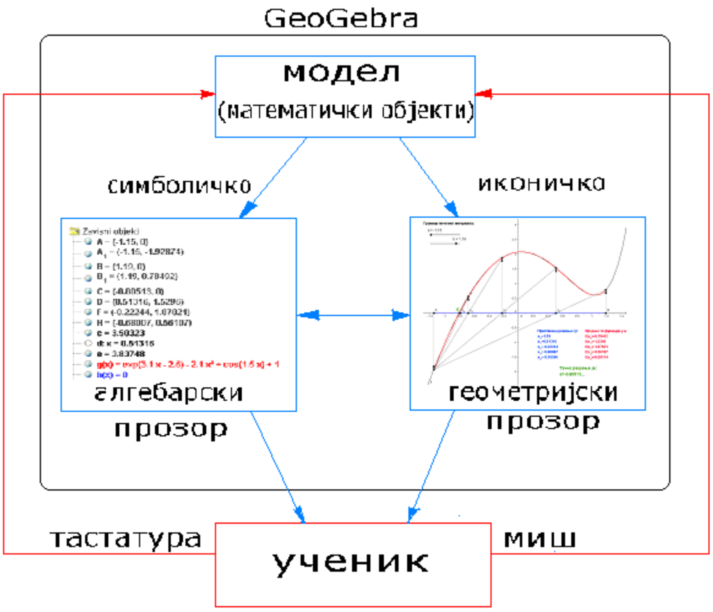
GeoGebra је динамични математички софтвер за употребу у основној и средњим школама који комбинује геометрију, алгебру, анализу, употребу табела и статистику. Име програма је састављено од делова речи **<u>гео</u>**метрија и ал**<u>гебра</u>**. Њен идејни творац је Маркус Хохенвартер, али је даљи развој овог софтвера резултат заједничког рада стотина стручњака из рачунарских наука, математике и образовања укључених у рад Института за *GeoGebra*-у широм света. Са једне стране, *GeoGebra* је *DGS*, што значи да омогућава употребу интерактивне геометрије. Осим класичних елемената добијених комбинацијама и пресецима правих и кружница, могу се цртати и елипсе, хиперболе и параболе. Са друге стране, *GeoGebra* омогућава директно уношење координата и једначина које ће бити геометријски тумачене. Могуће је задавање конусних пресека и правих експлицитним и имплицитним једначинама а праве се могу задавати и параметарски. *GeoGebra* користи Декартове и поларне координате. Обзиром да овај програм користи рад са бројевима, угловима, векторима, тачкама, правим и конусним пресецима *GeoGebra*-у можемо сматрати и једним од *CAS*. Нумеричке могућности овог софтвера омогућавају и разноврсније геометријске наредбе: средиште дужи, жиже, темена, главне осе и пречник конусних пресека, коефицијенте правца, векторе правца и нормалне векторе праве итд. Графички, алгебарски и табеларни делови су узајамно повезани и динамични.

Комуникација између *GeoGebra*-е и корисника се одвија преко интерфејса који, по потреби, може бити приказан у различитим облицима – перспективама. За приказивање и учење аналитичке геометрије у равни најпогоднија је перспектива чија су два главна дела алгебарски и геометријски прозор. У алгебарском прозору су приказане координате тачака, као и једначине кривих којима радимо али и све остале нумеричке вредности (величине углова, дужине, површине итд.). Он може бити видљив или прикривен. Геометријски прозор је сличан као код осталих *DGS*. Фигуре у њему се могу цртати директно, употребом миша или поља за унос. Касније се тим фигурама може манипулисати мишем или тастатуром. Алгебарски изрази који прате све промене на геометријском прозору могу се видети на алгебарском прозору. Сама намена овог софтвера – употреба у образовне сврхе је диктирала начин на који је одређен унос података. Управо је унос података у природној нотацији, скоро истоветан начину записивања у свесци или на табли, оно што привлачи ученике и наставнике и умногоме им олакшава рад са *GeoGebra*–ом.

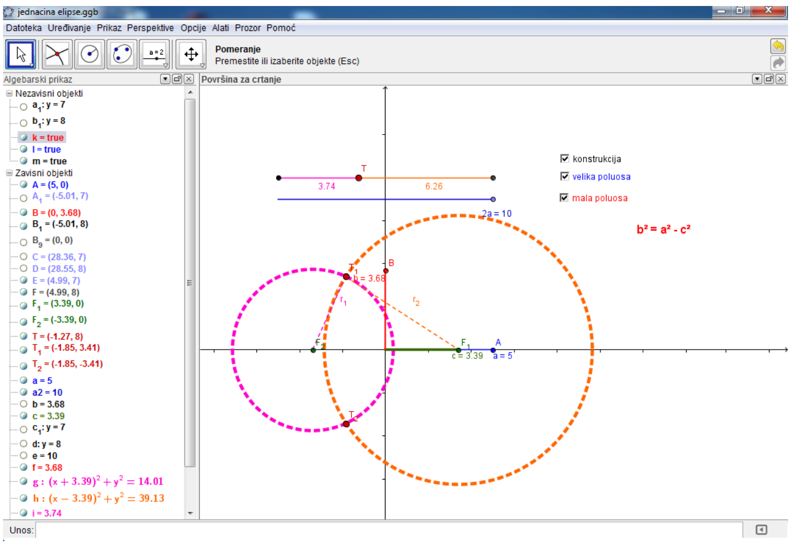
GeoGebra је написана у *Java*-и чиме је омогућено да се она користи независно од тога шта је у употреби: *Windows*, *Linux*, *MacOS* или *Unix*. Поред тога, може се покренути и преко интернет претраживача. Доступне су и верзије за *iPad, Windows* и *Android* таблете. У октобру 2014. године најављена је и верзија *GeoGebra*-е за мобилне телефоне. Уколико је програм инсталиран на рачунару, даље се може користити без обзира да ли је рачунар тренутно прикључен на интернет. *GeoGebra* омогућава директно штампање добијеног цртежа, као и приказивање динамичног цртежа или описа конструкције као *web*-странице или површине за цртање као слике. Верзија *GeoGebra 5* омогућава стварање нових алата и манипулисање палетом алата. Посебну погодност при креирању радних листова за приказ наставних јединица чини условно приказивање текста, чиме је омогућено приказивање делова градива које наставник жели да нагласи у датом тренутку. Иначе, највећи део геометријских приказа у овом раду је урађен управо уз помоћ програма *GeoGebra.*

GeoGebra је бесплатан и лако доступан програм. Може се преузети са интернет странице *www.geogebra.org* . Поред програма, са те странице се могу преузети и бројни примери, текстови и примедбе које шаљу аутори, наставници и ученици, што може бити јако користан извор искустава. Због наглог повећања интересовања покренут је и специјализовани електронски часопис *GeoGebra Newsletter* који је излазио месечно од јула 2010. до октобра 2012. године и пратио збивања везана за техничке и иновације у примени програма и конференције везане за *GeoGebra*-у. Тренутно се најновије информације о самој *GeoGebra*-и, скуповима везаним за њу, као и одговарајућим наставним материјалима објављују на интернет страници http://community.geogebra.org/.

У свету је формирано више од 100 *GeoGebra* института, међу којима су и три у Србији – у Београду, Новом Саду и Сенти. Програм је преведен на десетине језика па, између осталих, и на српски што може бити велика предност за његову употребу у нашим школама. На слици 2. су приказани правци узајамног деловања ученика и софтвера у окружењу створеном употребом програма *GeoGebra* а на слици 3. изглед прозора при раду са *GeoGebra*–ом.



Слика 2.



Слика 3.

Наведени *DGS* софтвери и *GeoGebra* су приказани у табели 2. где је дат и преглед њихових предности и недостатака у погледу њихове могуће употребе у настави аналитичке геометрије у равни.

Софтвер	Верзија	Предности	Недостаци	Референце
Cabri Geometry	*Cabri II+*	- Могућност примене на калкулаторима	- Високе цене лиценци - Мали број језика на којима је програм доступан	www.cabri.com
The Geometer's Sketchpad		- Могућност примене на калкулаторима - Једноставна употреба итерација	- Високе цене лиценци - Мали број језика на којима је програм доступан	www.dynamicgeometry.com
Cinderella	*Cinderella 2*	- Употреба виртуелне лабораторије - Приказ хиперболичке и пројективне геометрије - Интерфејс за програмирање	- Мали број језика на којима је програм доступан	www.cinderella.de
GeoGebra	*GeoGebra 5*	- Једноставан унос података - Трака за приказ корака конструкције - Бесплатан софтвер - Доступан и на српском језику		www.geogebra.org

Табела 2.

3. МЕТОДИЧКА И ТЕХНИЧКА РАЗРАДА УПОТРЕБЕ РАЧУНАРА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Рачунари су данас уобичајено средство у извршавању најразноврснијих људских делатности. Све су прилике да ће у будућности употреба рачунара играти кључну улогу у развоју човечанства. Поставља се питање: *Како ће изгледати та будућност*? Предвиђања се углавном деле у две скупине, [47]. Утописти најављују ново доба, чудесан свет у коме ће рачунари решити све наше проблеме. Са друге стране, критичари рачунара нас упозоравају на дехуманизујуће ефекте претераног излагања рачунарима и на нарушавање равнотеже у запошљавању и економији. Ипак, најинтересантније је становиште Паперта по коме ни једна од ове две стране није у праву из простог разлога што одговарају на погрешно питање. По њему, [46], [48], [49] не треба постављати питање „*Шта могу рачунари?*“ већ „*Шта ми можемо урадити са рачунарима?*“ Није ствар у томе да се предвиди будућност рачунара, већ у томе да се она створи.

Што се тиче присуства рачунара у образовању, учењу и животу деце, јасно је да оно већ сада има дубок утицај не само на природу саме школе већ и на целокупно друштво. Начин на који рачунаре употребљавамо у образовању игра одлучујућу улогу на то како ће се технологија и општа култура развијати у наредној генерацији. Ово, дакле, може бити упозорење да се пажљиво размотре сви аспекти увођења рачунара у наставу, тј. начини на које ћемо рачунаре и њима прилагођену наставу представити ученицима, јер ће то несумњиво имати дубок утицај на будућност нашег друштва. Правилна употреба рачунара у образовању мора бити изузетно избалансирана активност у којој је један од главних задатака избегавати техноцентризам – начин размишљања и деловања по коме кључну улогу има техника и технологија а људи су само споредни чиниоци. Примери питања која одражавају техноцентрично размишљање су, [47]: „*Да ли употреба рачунара у настави математике појачава аритметичке способности ученика или их чини лењим?*“ или „*Да ли рачунари поспешују међуљудске односе или изолацију деце?*“

Наравно да средства (па и рачунари) не могу постићи овај или онај резултат. Постизање резултата највише зависи од начина на који употребљавамо поменута средства. Рачунари су, по свему судећи, само још једно у низу средстава у образовању и, без обзира на то што врше далеко снажнији утицај на облике и квалитет наставе, мало је вероватно да ће њихова употреба у потпуности решити педгошко-дидактичке дилеме по питању природе самог наставог процеса. Штавише, увођењем рачунара у наставу отварају се нова питања у вези уређења наставе и односа у тетраедру *ученик-градиво-медијум-наставник*. На пример, још пре појаве рачунара педагози су били подељени по питању да ли учење треба схватити и третирати као стицање знања и вештина или поспешивање личног развоја ученика. Рачунари ни изблиза не могу решити оваква питања, али њихова правилна употреба може помоћи и у стицању знања и вештина и у личном развоју ученика.

Важно је схватити да се уз помоћ рачунара у образовању могу извести коренитије промене од онога што на први поглед можемо замислити. Поређења ради, нове технологије у медицини, транспорту или телекомуникацијама су из основа промениле начин живота и размишљања људи. Поражавајуће је да промене у (нашем) образовању, које би требало да ствара људе будућности, нису ни близу тих промена, како по обиму, тако ни по квалитету. Једно од оправдања за избегавање увођења рачунара у наставу јесте да упознавање са рачунарима и софтверима за ученике представља додатно градиво. При томе се пренебрегава чињеница да у сваремено доба учење о рачунарима и софтверима постаје интегрални део учења математике и да већина данашњих ученика у ваншколским активностима свакодневно употребљава рачунар. Зато такво оправдање више није одрживо. Често при помену рачунара у настави, наставници и ученици мисле на олакшавање рачунских операција, али је то већ виђено – калкулатори су у употреби скоро 40 година и у највећем броју случајева су се показали као мало савршеније рачунаљке. Можда би питање требало да гласи да ли рачунари у настави могу узроковати промене таквог обима као у другим областима? Одговор на слична питања се не може добити без одговарајућих истраживања.

Један од значајнијих експеримената у вези рачунара у настави јесте онај изведен 1986. године у школи Хениген у Бостону под надзором Паперта који је описан у [48]. Експеримент није био класичног типа са експеримантaлном и контролном групом али је ипак показао интересантне промене у односима између ученика и наставника као и између самих ученика. Прва уочена промена је била у односу ученик – наставник. Показало са да су ученици лакше усвајали знања потребна за рад са рачунарима па су, уз њихову помоћ, лако решавали проблеме које које раније нису могли решити, или су их решавали уз потешкоће. Помоћ наставника се свела само на надгледање рада ученика. Из овога је недвосмислено следио закључак да није довољно само ученике довести пред рачунар, већ и наставнике припремити за одговарајућу наставу. Друга промена је у односима између ученика. Уместо уобичајених такмичарских односа, које често срећемо у школи где имитирање некога значи преписивање, што је само по себи лоше, ови ученици су се природно окупљали у групе, уочавајући да заједно могу постићи боље резултате. Имајући на уму појмове конструктивизам (Пијаже) и конструкционизам (Паперт), јасно је да овако настало окружење пружа природне услове за квалитетно стицање знања и развијање међуљудских односа. Наиме, под *конструктивизмом* се подразумева идеја да се знање не преноси, већ изграђује. То значи да појединац не изграђује знање (у својој глави) сам, већ уз помоћ других људи или материјалног окружења. *Конструкционизам* означава идеју да је најбољи начин изградње знања створити нешто што се дâ вербализовати или на други начин пренети другима. Мада не треба бити искључив, окружење настало на природан начин у овом експерименту даје основне смернице за начине организовања наставе са рачунарима.

Што се тиче утицаја рачунара на децу, треба имати на уму могућност свестране употребе рачунара, што за последицу има да свако, у складу са својим потребама и интересовањима, од њега узима оно што му треба. Зато је логично да рачунар има различите утицаје на свако дете. Те разлике могу бити узроковане различитим факторима, рецимо, материјалним стањем породице из које потиче дете, образовним нивоом родитеља па чак и полом и културним или етничким наслеђем, [26]. Међутим, у погледу утицаја употребе рачунара у образовању, ипак је могуће извршити извесна уопштавања, [53], [32].

Од Папертовог експеримента се, у међувремену, десило много ствари. Рачунари су постали уобичајена појава у свакој делатности и често су скоро неприметни. И у настави математике треба тежити томе да ученици о рачунарима не размишљају као о нечему посебном, већ као о средствима која треба да се уклопе у окружење. Осим тога, треба имати на уму да већ данас већина деце свакодневно користи рачунар, тако да је последњи наведени циљ лако остварив.

Крајем 1990-тих Труше је у Француској извршио низ експеримената са програмабилним калкулаторима *TI-92* у настави математике са циљем прецизирања начина како најбоље уклопити ове калкулаторе у наставу и извући максималну корист од тога. У [55] се наводи да су ученици, током експеримента, радили у паровима а наставник је имао консултативну улогу. На основу упитника на крају експеримената, види се да ученици у великој мери сматрају да им рачунарско окружење помаже у разумевању математике и да им је рад са калкулаторима променио поглед на рачунаре и посебно на математику, али је примећен благи пад интересовања за рад у паровима. Једна од ствари која је уочена током експеримената јесте посебан начин на који ученици кроз рачунаре доживљавају математичке објекте и концепте. На примеру тангенте криве је на интересантан начин описано формирање тог појма. Осим тога, уочени су могући правци размишљања и деловања ученика у рачунарском окружењу. Закључци до којих је дошао се могу свести у неколико тачака:

- Увођење ових калкулатора не поједностављује нити рад наставника, нити рад ученика;
- Оваква настава захтева нову организацију учионице као и другачији временски распоред учења.

Баух је 2001. године у својим експериментима дошао до интересантних техничких решења за наставу математике уз употребу рачунара, како по питању уређења односа међу ученицима и између њих и наставника, тако и у погледу презентације наставних садржаја. Концепт *ја – ти – ми* који је он употребљавао и изложио у [27] показао се јако плодоносним у новом наставном окружењу. Више речи о овоме ће бити у одељку 3.2.

Са друге стране, Артиг, [24], оцењује интеграцију дигиталних технологија у наставу математике маргиналном и за то наводи следеће разлоге:

- Низак образовни ниво рачунарских технологија насупрот њиховог високог научног нивоа;
- Потцењивање проблема трансформације математичких садржаја тј. њиховог прилагођавања новом концепту рачунарске учионице;
- Супротстављеност између техничке и концептуалне димензије математичких активности, тј. олако прихватање веровања да рачунар аутоматски олакшава техничку и, готово неизбежно, отежава концептуалну страну математике;
- Потцењивање сложености процеса инструментације тј. непрепознавање пуног обима математичких и технолошких захтева постављених пред ученике и потребе повезивања стандардног програма математике са (због нових околности) измењеним знањима ученика.

Наше школство је, по квалитету, постигнутим компетенцијама ученика и ефикасности образовања, у заостатку за образовним системима развијених земаља,[59], [67]. Ради смањивања тог заостајања било би пожељно барем делимично прихватити искуства њихових педагога. Наравно, како свака средина има своје специфичности, приликом одређивања техничких и педагошких елемената савремене наставе, треба то имати на уму. Осим уопштеног одређивања методичких и техничких решења за наставу потпомогнуту употребом рачунара, такође је потребно конкретизовати и наставне јединице, видове њихове презентације, активности наставника и ученика у, и ван, учионице.

3.1. Психолошки процеси у настави потпомогнутој употребом рачунара

Са становишта прихваћености рачунара у настави од стране ученика било би добро размотрити последњи од разлога маргинализације дигиталних технологија који је дао Артиг. Поставља се питање: Да ли ученици посматрају дигиталне технологије у учионици као додатно градиво, наставно средство које неће унети битне промене у схватању математичких концепата, или као средство уз помоћ кога ће концепти бити приказани у новом светлу? Одговор на оваква питања је могуће дати ако се размотре резултати наведених експеримената и дâ њихово тумачење у светлу односа између рачунара и ученика, наставника и ученика као и између самих ученика.

Прво од чега треба поћи јесте однос између ученика и рачунара у настави. Потребно је за циљ поставити постизање ефикасног односа ученика са новим технологијама пружањем помоћи да развију и артикулишу разумевање математичких процедура, структура и односа употребом рачунара, односно одговарајућих софтвера. Већина математичких појмова ће на овај начин бити другачије исказана – преобликована присуством рачунара, али се треба трудити да се очува математичка „срж“ посматраног појма. На пример, појам независно промењиве – кључан за схватање многих сложенијих појмова може се увести или преобликовати за употребу на рачунарима, рецимо, употребом програма *GeoGebra*. Довољно је узети клизач за вредности једног параметра и посматрати промене настале мењањем његових вредности. Однос претпоставка – доказ (за геометријске теореме) се може лако приказати у било ком *DGS*-у тако што се претпостављени односи фигура нацртају а затим померањем на екрану проверавају њихови односи. Ово може помоћи за налажење полазних тачака доказа.

Ипак, не би требало претеривати са очекивањима о могућим резултатима до којих би ученик дошао само радом на рачунару. Требало би имати на уму и интеракције између ученика (у паровима, групама), узајамну размену идеја и (мање или више директно) пружање помоћи. Наравно, наставник би требало да буде вођа и координатор овако организоване наставе. Он би припремао терен за преобликовање наставе и каналисао идеје ученика како не би дошло до губљења „сржи“ математичких појмова.

Однос између ученика и артефакта (рачунара, софтвера, радног листа итд.) је процес стварања инструмената – психолошких конструкција насталих током активности ученика са артефактом и он је двосмеран. Процес којим субјект (ученик) по потреби уобличава артефакт називамо *инструментализацијом,* док обрнути процес у коме артефакт својим деловањем мења начин размишљања и рада ученика називамо *инструментацијом*. Они су узајамно повезани, испреплетани и не могу се стриктно раздвојити. Означавамо их једним именом: *инструментална генеза,* [56]. Зато се задатак увођења рачунара у наставу и њиховог уклапања у важеће програме математике своди на разумевање и налажење начина да се правилно спроведе инструментална генеза. Гледано са когнитивне стране, инструментална генеза је процес усавршавања рада ученика на алатима (специјално рачунарима) ради обављања корисног задатка учења математике. Са социо-културне стране, инструментална генеза се може сматрати делом процеса развијања учешћа у раду заједнице.

Иако је кључна тачка инструменталне генезе уобличавање ученика у узајамном дејству са оруђима, важно је обратити пажњу и на путеве изграђивања математичких знања. Ово ће бити посебно важно у рачунарском окружењу јер се у процесу инструменталне генезе у оваквим условима стварају индивидуална схватања и начини рада који се могу разликовати од стандардне математике. Како је сажимање кључна фаза при формирању математичких појмова, то је потребно обратити пажњу на евентуалне разлике између сажимања у рачунарском окружењу и појмова традиционалне математике. Труше даје пример одређивања граничне вредности функције уз помоћ *CAS* калкулатора. На основу тога, Хојлис, Нос и Кент, [36], изводе закључак да ће ученици вероватно развити различита сажимања представе граничне вредности која су везана за њихова појединачна искуства са употребљеним алатима. Дакле, узимајући у обзир различитости ученика као личности, њихових предзнања, искустава и интересовања, јасно је да ће процес инструменталне генезе дати различите резултате код различитих ученика.

Инструменталну генезу коју посматрамо на нивоу појединаца надграђује процес *оркестрације* на нивоу одељења. Оркестрација је процес спољњег управљања инструменталном генезом ученика. Сажимања математичких концепата, настала у интеракцијама са оруђима, се даље уобличавају у интеракцијама са околином. Приликом оркестрације – процеса усаглашавања појединачних идеја ради добијања заједничке представе неког математичког концепта – треба нагласити везе између стандардних („званичних“) математичких знања, знања о употребљеним алатима и математичких знања прилагођених рачунарском окружењу. Чак и код софтвера добро прилагођених излагању математичких идеја долази до нескладa између рачунарских приказа математике и званичне математике. Дефо, [28], је, описујући овај феномен, увео појам „локално званичне технике“ дајући тако легитимитет и овако стеченим знањима.

Битан сегмент проучавања наставе математике је разумевање улоге групног рада и важности формирања заједница у учионици и ван ње које ће, уз узајамну сарадњу, поспешивати размену мишљења, образлагање, одбрану, критику и исправљање идеја. Сарадња заснована на употреби рачунара је, све чешће, ваншколска активност и обогаћује међусобне односе ученика и ученика са наставницима. Први облик такве сарадње је употреба електронске поште, али то је у суштини само употреба савременијег средства за комуникацију. Оно што суштински мења обим и квалитет сарадње по питању усавршавања знања јесте размена идеја и искустава са другим ученицима и наставницима на интернет страницама и форумима софтвера који се употребљавају у настави. Овим се многоструко увећава величина заједнице којој припада ученик током процеса учења, чиме се повећевају квалитет и брзина стицања знања а такође се олакшава и формирање друштвено прилагођене личности ученика. Ово значи да математичке алате, као *CAS* или *DGS*, посматрамо не само као когнитивна оруђа, већ и као посреднике у друштвеним интеракцијама у којима се изграђују заједничка схватања и идеје. Ово је данас технолошки лако изводљиво имајући на уму интернет технологије, али и могућности локалног умрежавања рачунара унутар учионице.

Дакле, значај једног артефакта не треба ценити само на основу идеје његовог творца, већ га треба посматрати и у светлу накупљених искустава ученика у раду са њим. Инсистирањем на томе да рачунари олакшавају и поспешују сарадњу у групама, не намерава се наметнути мишљење да је процес оркестрације заснован само на рачунарским оруђима. Идеја је да посредник – дакле, рачунар или софтвер, помаже у уобличавању заједничких идеја и њиховом исказивању.

Што се тиче односа ученик – наставник, нови моменат у рачунарском окружењу јесте да наставник више није једини извор информација. Међутим, то не значи да је наставник постао непотребан елемент, напротив, он је и те како присутан у настави, али му је улога донекле измењена. Наставник је сада организатор и покретач наставе најчешће усмерене на откривање, постављање и решавање проблема. Његова улога је, дакле, у покретању и каналисању енергије која се лако ослобађа приликом интеракција ученика и рачунара. Наставник им омогућава да своја интересовања и потребе за сазнањима преточе у корисну и смислену активност.

Иако је у сваки од софтвера намењених учењу математике уграђена велика количина математичких идеја, концепата и односа, јасно је да је све то само мртво слово на папиру све док му корисник (ученик) не „удахне живот". Током рада са таквим софтверима, ученици преуређују уграђена знања стварајући окружење за учење у које су укључени разни елементи: доступни извори знања, знање које треба научити и претходно знање и искуство ученика. За окружење у наставном процесу није од значаја само то како је софтвер дизајниран и како се он користи, већ и то како су рачунари распоређени у учионици и какви су односи дозвољени међу ученицима. Примера ради, сасвим другачије ефекте на наставу и њене резултате ће имати учионица у којој су рачунари распоређени у редовима, без међусобне везе и комуникације међу ученицима, насупрот учионици у којој су рачунари умрежени и тако распоређени да ученици могу сарађивати и размењивати идеје, лицем у лице или електронским путем.

И оркестрација и њени резултати као и инструментална генеза умногоме зависе од личних карактеристика ученика. Слично као што сваки ученик уноси у инструменталну генезу своја предзнања и интересовања о стварима које жели да научи, тако ови чиниоци утичу и на процес оркестрације.

Приликом описивања врста и начина изграђивања математичких знања могуће је направити и другачије приступе од оног описаног у процесу инструменталне генезе/оркестрације. Један од њих је разматрање изградње знања кроз стварање *сажетака* (*situated abstractions*) – сажетих представа математичких концепата [35], [45]. Сажеци истог концепта који се користе у различитим групама (рецимо, група ученика и група наставника) могу имати и различите облике. Да би се постигло барем приближно изједначавање сажетака, употребљавају се гранични објекти који имају недвосмислено једнако тумачење у обема групама у наставном процесу. У рачунарском окружењу класа граничних објеката би могла бити сачињена од интерфејса коришћеног софтвера и одговарајућих радњи којима, се управља радом тог софтвера, јер је очевидно да се настава уопште не може организовати уколико има недоумица у вези ових појмова. Даље се, у неком виду преговарања, полазећи од граничних објеката, могу проширивати знања заснована на сажецима са једнаким значењем у обема групама. Посматрано из овог угла, оркестрација није једносмерно спољње управљање процеса инструменталне генезе ученика, већ обострани процес усмеравања рада и стварања сажетака.

Циљ истраживања у настави математике требало би бити одређивање и стварање конкретних ситуација које би, употребљене у разумном периоду, побољшале учење математике. У рачунарском окружењу битно је постићи зближавање математичких концепата прилагођених рачунарском окружењу и концепата „званичне“ математике. Процес тог зближавања може трајати дуго. Зато процес инструменталне генезе/оркестрације треба организовати у више временски раздвојених фаза.

Прва фаза би била развијање сажетака (инструментална генеза на појединачном нивоу) и ту би требало створити основу за другу фазу – зближавање концепата. Другу фазу би требало организовати у дужем временском периоду, комбинујући индивидуални и групни, односно рад у паровима у зависности од услова у одељењу – брзине којом поједини ученици усвајају знања, квалитета и могућности имплементације усвојених знања и др.

Дакле, активности на рачунарима у настави треба схватити као припремну фазу за усвајање (макар и преобликованих) званичних концепата математике. Паперт, [49], сматра да активности на рачунарима у настави математике олакшавају усвајање формалних знања у каснијим стадијумима учења.

3.2. Техничка решења за рачунарски потпомогнуту наставу математике

Промене у техничком домену које настају увођењем рачунара у наставу стварају само потенцијал за промене (не и стварне) у дидактичком пољу. Искористити тај потенцијал значи створити погодно окружење за учење које ће поспешивати правилно прихватање, обликовање и употребу математичких концепата као и изграђивање друштвено корисне и уравнотежене личности ученика. При томе, чекање да се истраживањима дође до одговарајућих техничких решења често може довести само до одлагања коришћења поменутих потенцијала или чак, због брзине промена технологија, до застаревања добијених резултата. Зато многи истраживачи (рецимо, [29], [31], [34]), сматрају да је боље да се рачунари са својим потенцијалима употребе у настави на природан начин, уграђујући у наставу ранија искуства и резултате истраживања, а из добијених искустава извуче оно најбоље за даље обликовање наставе.

За разумевање улоге рачунара у настави и њиховог правилног упошљавања битно је уочити тенденције у њиховој употреби. Прва је да ученици морају да савладају синтаксу и семантику софтвера у употреби. Зато поједини истраживачи ([33], [37]) сматрају да је увођење нових технологија у наставу истовремено и увођење новог градива. Међутим, савремена кретања показују да је та идеја све мање одржива, јер проучавање софтвера све више постаје саставни део учења математике. Осим тога, у претходном одељку је показано да је тешко раздвојити строге математичке концепте од математичких концепата прилагођених приказу на рачунарима. Друга тенденција је склоност ученика да употребљавају софтвер како би избегли когнитивно напрезање и математичко размишљање, отприлике на начин на који нове технологије олакшавају извршавање многих послова у широј култури. У овом смислу, потребно је разликовати потребе ученика математике од потреба корисника математике. За правилно усмеравање процеса учења математике у раду са ученицима треба створити такву атмосферу у учионици и ван ње да се друга тенденција сведе на разумну меру. То значи да ученици не треба да беже од рачунских олакшица које им пружају рачунари али да се настава ипак не сведе само на употребу рачунара као рачунаљки.

Ради формулисања неких облика наставе Математике потпомогнуте употребом рачунара вратићемо се на већ поменути експримент Трушеа, [56], у вези употребе програмабилних калкулатора *TI-92* за обраду неких наставних јединица. Труше је уочио различита понашања ученика при њиховим покушајима да се реши дати проблем или уобличи неки математички појам. Он наводи неколико фаза кроз које пролази ученик:

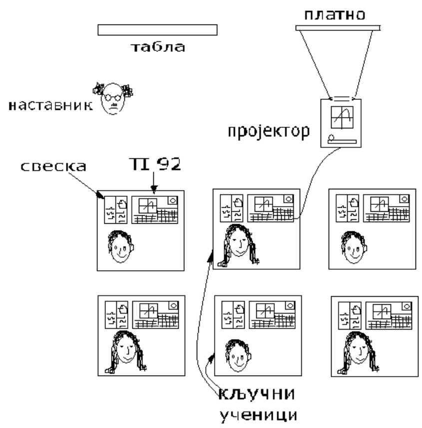
- *Конкретизација радњи на калкулатору*; иако немају јасну представу о проблему, ученици често на почетку пробају да искористе „сирову снагу калкулатора“ и виде шта се дешава.
- *Збуњивање*; после првих покушаја калкулатор даје неке резултате који одвраћају пажњу у разним правцима и најчешће су далеко од стварног проблема.
- *Апстраховање*; уколико се жели искористити помоћ калкулатора потребно је дати математичку формулацију проблема, најчешће задавањем неке формуле.

- *Уношење разноликости*; у случају да почетна формулација (из било ког разлога) није дала резултате прибегава се преформулисању проблема.
- *Устаљивање*; неком од формулација се може доћи до решења проблема. Ту формулацију и апликацију којом је она приказана на калкулатору, треба искористити за извођење закључака и увођење неког математичког концепта.

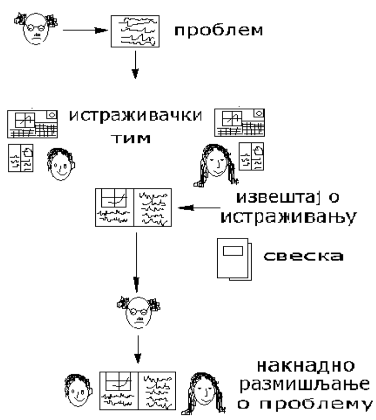
Све ове фазе су испреплетене, ученик не пролази нужно кроз сваку од њих и не морају се дешавати тим редом. Такође, нису све фазе једнако изражене у процесу учења. У рачунарском окружењу су посебно наглашене фазе конкретизације, збуњивања и устаљивања. Улога наставника је да пажљиво прати начин и темпо којим ученик пролази кроз наведене фазе и да у погодном тренутку, након фазе устаљивања, уведе теоретске основе концепта који треба научити, дакле да формализује идеје и знања до којих је ученик (уз евентуалну помоћ наставника) дошао стварајући апликацију за решавање датог проблема. Ово нам даје идеје за контролу процеса прихватања и прилагођавања калкулатора ученицима:

- Наставник треба да буде дизајнер а математика жижа свих активности у учионици. Наставник треба пажљиво да створи наставне ситуације, како би искористио предности и избегао ограничења калкулатора.
- Избор употребљених апликација и њихових презентација треба да побољша истраживање, наглашавајући различита гледишта (уношење разноликости).
- Морају се развијати ситуације које негују експериментални рад и интеракције између графичких опажања и теоретског рачуна како би се изашло на крај са евентуалним разликама у представљању проблема на папиру и у рачунарском окружењу.
- Важно је да уређаји и софтвери у учионици омогућавају наставникову контролу ученичких активности (како би се избегла претерана збуњеност и „истраживање“ на случајан начин и, по потреби, обезбедила одговарајућа помоћ ученицима).
- Треба обезбедити и добру комуникацију међу ученицима који се могу узајамно допуњавати и помагати.

На основу ових смерница, могуће је организовати квалитетну и ефикасну наставу у рачунарском окружењу. Наравно, у конкретним случајевима ће доћи и до извесних разлика узрокованих условима у одељењу (личне карактеристике и предзнања ученика, односи између ученика), техничким ограничењима (број, врста и повезаност рачунара у учионици) или специфичностима наставног градива (претходно градиво, могућности прилагођавања градива рачунарском окружењу, однос прилагођеног градива и званичних математичких концепата). Те разлике свакако треба узимати у обзир, јер неке од њих могу имати чак и пресудан утицај на успех наставе. Осим наведених смерница, Труше је дао и предлог за уређење рачунарске учионице, као и временски распоред процеса учења у учионици и ван ње. На слици 4. приказан је распоред ученика и употребљених оруђа у настави. Наставник комбинује употребу табле и платна како би појачао интеракцију рада оловком на папиру и рада на рачунару и платну. Подаци са рачунара једног од ученика се пројектују на платно, што код њега ствара утисак посредника, али истовремено омогућава да наставник и остали ученици контролишу његов рад.



Слика 4.



Слика 5.

Уз овај предлог Труше даје и идеје како организовати проблемску наставу и како реализовати поједине етапе, слика 5:

- Проблеме бирати тако да се ојача интеракција између рада на рачунару и папиру, а да се притом не изгуби веза са изучаваном материјом;
- Парове састављати тако да ученици који припадају истом пару допуњују један другог у погледу знања и искустава;
- Ученици треба да записују у својим истраживачким свескама резултате и промашаје истраживања;
- Наставник даје ученицима довољно времена да испробају различите методе, након упознавања са проблемом, помаже паровима како би убрзао накнадно размишљање;
- Посебно је важна синтеза како би се размотрила различита решења до којих су дошли парови и из тога извукли најбољи закључци;
- На крају, наставник треба да искористи добијене резултате како би ученицима представио нови математички концепт.

Резултати овог експеримента показују да настава у оваквом окружењу организована уз свесрдно залагање наставника, помаже ученицима да промене однос према математици, тј. да заволе учење, и то конкретно заједничко учење.

Баух је 2001–2002. године дао техничко решење за наставу математике у рачунарском окружењу, које се умногоме ослања на теоретске концепте инструменталне генезе/оркестрације. Ради се о концепту *ја – ти – ми* чије је основе дао Улм, [57], а Баух га је прилагодио рачунарском окружењу уз употребу динамичних радних листова, [27]. Концепт се састоји од три етапе које, кратко описане, изгледају овако:

- *Ја* – индивидуални рад ученика; треба поспешивати активно учење, јер сваки ученик са собом уноси посебне елементе (предзнање, интересовања, способности), тако да се учење разликује код сваког појединца.
- *Ти* – рад у паровима; не треба занемаривати способности комуникације и кооперације, јер су оне битне и за боље разумевање материје и у друштвеном понашању. Разговор са партнером (или у мањој групи) помаже у бољем разумевању

проблематике, попуњавању празнина и продубљивању стечених знања.
- *Ми* – разговор на нивоу разреда; ово је прилика да ученици своје резултате представе другима, упореде их и употпуне. Тек у овој фази, уколико је потребно, наставник преуређује и комплетира резултате до којих су дошли ученици.

Све ове фазе треба посматрати као делове јединственог процеса. Ипак, у рачунарском окружењу посебну пажњу треба посветити другој и трећој фази како би ученици комуникацијом у оквиру парова и група појачали разумевање материје. Истовремено, треба водити рачуна и о томе да у овим фазама не дође до занемаривања слабијих ученика и прикривања њихових резултата иза резултата пара, односно групе. Јасно је да овако организована настава ставља ученика у центар активности, док наставник, иако је дизајнер и организатор, само надгледа наставу и по потреби помаже ученицима све до последње фазе коју користи за формализовање стечених знања.

3.3. Предлози за обраду аналитичке геометрије уз употребу рачунара у средњој школи

У претходном одељку је показано да је улога наставника у новонасталим околностима да најпре пажљиво испланира методичке и техничке аспекте наставе, затим да усмерава и контролише активности ученика и, на крају, увођењем и формализовањем новог градива, крунише резултате до којих су дошли ученици. Имајући у виду да је предмет нашег интересовања аналитичка геометрија у равни, у овом одељку ћемо дати предлоге за обраду тема из те области. Током припреме, организовања и извођења наставе свакако треба имати на уму појмове и поступке које ученици треба да усвоје. Зато је корисно пре почетка припреме наставе саставити списак правила и појмова које треба обрадити, као и њима подређених појмова и способности које би ученици требали поседовати одраније. Конкретно, за аналитичку геометрију то би могло изгледати овако:

1. Увод и једначина праве
    а. Координатни систем
    б. Линеарне једначине и системи линеарних једначина
    в. Детерминанте
    г. Употреба *DGS* софтвера
2. Криве линије другог реда

а. Квадратне једначине и системи квадратних једначина

После овако састављеног списка појмова, прва ствар од које би наставник требао да крене јесте избор софтвера. Избор софтвера ће првенствено зависити од природе изучаване материје, јер треба имати на уму што лакше прилагођавање изучаване материје карактеристикама софтвера. Наравно, то не би смео бити једини критеријум избора. Битне су и цена и (легална) доступност софтвера ученицима, јер настава заснована на неком софтверу не би била ефикасна уколико не би имала природан продужетак у домаћим задацима и слободним истраживањима ученика. Зато би предност требало давати бесплатним софтверима доступним на интернету, до којих сваки ученик може доћи легалним путем. Понекад, наизглед ситни и неважни детаљи у техничким карактеристикама софтвера могу донети значајне предности приликом презентације неке материје на рачунару и извођења наставе. Иако данас то није најважнији детаљ, као пример ћемо навести језик на коме је софтвер доступан. Употреба софтвера на нематерњем језику представља додатно оптерећење, како за ученике, тако и за наставника, а понекад може бити и извор неразумевања (или погрешног разумевања) материје. Обзиром на природу материје о којој је овде реч, логичан избор софтвера јесте *GeoGebra*.

Следећи корак би било уређење учионице и, у складу са тим, избор наставних метода и облика. У рачунарском окружењу наставник тренутно има најмањи утицај по овом питању, јер се ради о могућим ограничењима техничке природе. Наиме, наставник може да бира између рада на табли и пројектовања резултата добијених на рачунару, само ако је учионица опремљена рачунарима и пројектором; о електронским комуникацијама између ученика може бити говора само ако су рачунари умрежени итд. Ипак треба бити оптимиста, јер се на основу досадашњих трендова, оправдано може очекивати да ће у скоријој будућности свака наша школа имати барем по једну учионицу опремљену умреженим рачунарима са одговарајућим софтверима и пројектором. Подаци [62] говоре о убрзаном опремању основних школа у Србији електронским образовним средствима током протекле деценије. Ситуација у средњим школама је приближно иста. Улагање у рачунарске учионице, софтвере и пратећу опрему сада можда изгледа превелико али ако нам је циљ стварање врхунских стручњака у свим областима, онда се морамо и равнати према том циљу.

За потребе овог рада у фебруару 2014. године спровели смо истраживање у школама на Косову и Метохији које раде по програму Републике Србије. Истраживње се односило на опремљеност школа и ученика информатичко-комуникационим технологијама и припремљеност наставника за примену *ICT* у настави математике. Истраживњем је обухваћена 21 основна и средња школа са 5534 ученика и 59 наставника математике.

Из прикупљених података се види да су посматране школе слабије опремљене информатичко-комуникационим технологијама од школа у остатку Србије. Примера ради, три од 21 школе не поседују ни један рачунар, четири школе немају ни један рачунарски кабинет, 7 нема приступ интернету, док девет школа нема пројектор. Углавном су слабије опремљене школе у јужним енклавама (Гора, Штрпце, централно Косово). Све посматране школе имају укупно 303 рачунара, од којих су 242 прикључена на интернет. То би значило да један рачунар опслужује приближно 18 ученика. Уз добру организацију и правилну употребу, и овако мали број рачунара би могао допринети осавремењивању наставе. Међутим, посебно забрињавају подаци да на рачунарима скоро нема инсталираних образовних софтвера и да се рачунари у настави примењују веома ретко, углавном на часовима информатике. *GeoGebra* је инсталирана на рачунарима у само две школе.

Средња школа „Никола Тесла" у Лепосавићу, у којој смо изводили рачунарски потпомогнуту наставу, је боље опремљена и располаже са више рачунарских учионица које су различито опремљене. Два кабинета имају по 11 рачунара, али су без пројектора, један кабинет има 12 рачунара и пројектор. Осим тога, још две учионице су опремљене са по једним рачунаром и пројектором и последње две само са по једним рачунаром, фотографије 1. а) и б) . Сви рачунари су новије генерације, имају приступ интернету а кабинети поседују и локалну мрежу. На рачунарима у једном од кабинета је инсталирана и *GeoGebra*.

Иако не постоји најбољи начин уређења учионице нити најбоља метода (јер оне умногоме зависе од изучаваног градива, услова у одељењу и других чинилаца), искуства показују да се техничка решења која су дали Труше и Баух могу, уз евентуалне измене, ефикасно применити и у нашим школама.

Након разматрања ових чинилаца, наставник приступа разматрању градива у смислу његове интерпретације уз помоћ одабраног софтвера. То је тек почетак наставног процеса и у току наставе може доћи до потребе за благим изменама проузрокованим искуствима стеченим у ходу. Ово је у складу са схватањем да је настава жив и увек јединствен процес који се не може ставити у калуп, али ипак постоје грубе заједничке црте за већину наставних ситуација.

а)

б)

Фотографија 1.

Осим овога, благодат савремених технологија јесте и у томе да учење више није процес просторно и временски строго везан за школу. То значи, да коришћењем интернета, ученици могу брже и чешће (у контакту са наставником) да проверавају исправност својих домаћих задатака и самосталних истраживања. Са друге стране, наставник у сваком моменту има далеко детаљнији увид у рад сваког ученика, јер се сваки урађени задатак (у школи или код куће) може сачувати за даље разматрање или као приказ (доброг или лошег) искуства са неком проблематиком.

Пре почетка обраде аналитичке геометрије, било би добро ученике упознати са софтвером који ће се употребљавати – у нашем случају са *GeoGebra*-ом. У ту сврху је могуће издвојити посебан наставни час, али је боље решење почети са коришћењем тог програма још у првом разреду приликом обраде јединица из основа геометрије и подударности. У том случају, геометријски део програма ће бити представљен у сасвим природном окружењу и велике су шансе да га ученици прихвате као неодвојиви део градива.

3.4. Припреме наставника за наставу у рачунарском окружењу

Искуства стечена током наставе математике подржане употребом рачунара говоре да се ученици и наставници не суочавају са истим проблемима у погледу употребе рачунара у настави и учењу математике. Основни разлог овакве ситуације су неједнаке предиспозиције данашњих наставника и ученика у погледу разумевања и блискости са дигиталним технологијама.

Наиме, већина данашњих ученика припада генерацији која је одрасла уз дигиталне технологије, тако да им је уобичајена њихова свакодневна употреба. У складу са тим, можемо их условно назвати „рођеним дигиталцима“ (*digital natives*), [50].

На основу података прикупљених у поменутом истраживању увиђамо да 4598 (83,09%) испитаних ученика поседује рачунар код куће. Прикључак интернету има 4096 (74,02%) ученика. Међутим, веома мали број ученика познаје образовне софтвере. Конкретно, *GeoGebra*-у користи само 83 (1,5%) ученика.

Основни проблем ове генерације јесте несклад између начина њиховог размишљања и рада, са једне стране, и досадашњег начина функционисања формалног образовања, са друге стране, [51]. Код њих се често јавља и непрепознавање образовних потенцијала рачунара и софтвера, у смислу уклапања наставног градива у дигиталне технологије, због осећаја одбојности према свему што није у складу са њиховим „дигиталним“ начином размишљања. Упркос почетној бојазни, показало се да је код њих далеко најмањи проблем савладавање софтвера, тј. изучавање његових особина.

Са друге стране, већина данашњих наставника припада генерацији која се касније срела са дигиталним технологијама. Аналогно претходном термину, можемо их назвати „дигиталним имигрантима“ (*digital immigrants*). Њихово схватање рада, односно преношења наставног градива је, најчешће, везано за једну технологију – папир/таблу и оловку/креду. Осим тога, познавање дигиталних технологија у већини случајева није на тако високом нивоу као код млађих генерација. И наставници се срећу са проблемом препознавања образовних потенцијала рачунара и софтвера, али за разлику од ученика, њихов проблем је увођење нове технологије, којом би се приказало наставно градиво, јер њихов начин размишљања одражава везаност за старе технологије. Многи од њих не поседују задовољавајуће знање о настави математике у окружењу подржаном употребом *ICT*, [30].

Подаци о наставницима које смо прикупили у поменутом истраживању говоре да велика већина наставника (58 од 59 – 98,31%) поседује рачунар и прикључак на интернет. Овај проценат је, дакле, и већи него код ученика. Међутим, показало се да то ни изблиза није довољно за успешну примену рачунара у настави. Наиме, 55 од 59 (93,22%) наставника користи програме из основног Офисовог пакета (*Word, Excel, Power Point*), али најчешће за писање годишњих и месечних планова, писаних припрема за часове и текстова задатака за тестове и писмене задатке. Мањи број (31 од 59 – 52,54%) користи рачунаре за припрему наставних јединица. Седамнаест (28,81%) наставника користи рачунаре за електронску комуникацију са ученицима. Само 16 (27,12%) наставника користи рачунаре за извођење наставе. Уочљиво је да приближно исти број наставника – 14 (23,73%) користи *GeoGebra*-у.

Јасно је да ни код ученика ни код наставника пуко поседовање рачунара не доприноси њиховој примени у настави. Да би се то постигло, потребно је усклађено деловање свих чинилаца у наставном процесу, почев од националних савета који доносе планове и програме, преко управа школа до наставника, ученика и родитеља.

И поред свега наведеног, наставници који су одлучили да употребе нове технологије у настави математике ослободили су се техноцентризма (везивања излагања материје само за једну технологију), али су се суочили са проблемима техничке природе. То значи да је требало:

- савладати особине употребљеног софтвера,
- евентуално прилагодити наставну материју приказу у рачунарском окружењу,
- саставити одговарајуће динамичне радне листове који на пригодан начин одражавају проблематику изучаване материје и
- детаљно испланирати активности на часу тако да се изучавано градиво и динамични радни листови најефикасније уклопе са циљем покретања истраживачких потенцијала код ученика.

Подаци које смо прикупили од наставника математике у Средњој школи „Никола Тесла“ у Лепосавићу се, ипак, разликују од наведених и показују да су наставници у овој школи боље припремљени за примену *ICT* у настави математике. Наиме, свих седам наставника математике у овој школи поседују рачунаре са прикључком на интернет. Сви активно користе програме из основног Офисовог пакета и *GeoGebra*-у. Свих седам наставника користи рачунаре за припремање и (по потреби) извођење наставе. Сви они, такође, имају редовну електронску комуникацију са ученицима. У разговору са њима преовладава став да је учешће у настави математике у рачунарском окружењу допринело побољшању њихове припремљености за примену *ICT* у настави математике.

У припреми и извођењу наставе математике у рачунарском окружењу коју смо посматрали учествовало је седам наставника математике – четири дипломирана математичара, два дипломирана информатичара и један наставник са вишом стручном спремом. Обзиром да се радило о кадру који у почетку није имао скоро никаквог искуства са оваквим видом наставе (изузев наставника информатике), почели смо од саме основе. Најпре смо организовли неколико радионица на којима смо наставнике упознали са основним карактеристикама *GeoGebra*-е. Затим смо даље упознавање са *GeoGebra*-ом извели по принципу *ја – ти – ми*. У првом кораку (самосталан рад – *ја*) наставници су упућени на самостално истраживање *GeoGebra*-е користећи само њу или интернет странице www.geogebra.org и www.geogebratube.org. У тој фази покушавали су да изводе основне операције помоћу *GeoGebra*-е, тј. цртали су једноставне геометријске облике: праву, дуж, многоугао, кружницу и успостављали односе међу њима (одређивање заједничких тачака, нормалних или паралелних правих, тангенти). Уколико је било нејасноћа у раду, наставници су се обраћали координатору групе или комуницирали у паровима (друга фаза – *ти*). Комуникација је била директна а делом и електронским путем. Једном недељно организовали смо састанке целе групе, где смо размењивали искуства и изучавали сложеније могућности *GeoGebra*-е (трећа фаза – *ми*). У овој фази, наставници су већ почели израду најпре једноставнијих а касније и сложенијих апликација. Њима смо приказивали неке од математичких концепата, процесе којима се побољшава схватање математичких појмова, или решавање неког математичког задатка. Овај процес је почео од школске 2008/09. године и још увек је у току. У међувремену, повремено организујемо и радионице на тему *GeoGebra* у настави математике којима присуствују и наставници других школа.

Искуство током припремања и извођења рачунарске наставе показује да организовање и извођење наставе математике у рачунарском окружењу изискује опсежне и детаљне припреме наставника.

Израда динамичних радних листова је у почетку одузимала доста времена. Међутим, имајући у виду да је то ваннаставно време, закључено је да је то добро улагање времена, ако се има на уму да ће то убрзати наставу и подићи њен квалитет. Након постепеног усавршавања наставника, ни припрема динамичних радних листова не одузима много времена.

Како је настава организована у складу са уџбеником [63], за сваку наставну јединицу наставници су, поред писаних припрема за час, усклађивали градиво изложено у уџбенику и са динамичним радним листовима. Овде ћемо приказати само једну наставну јединицу из тог уџбеника усклађену са употребом динамичних радних листова на одговарајућим местима:

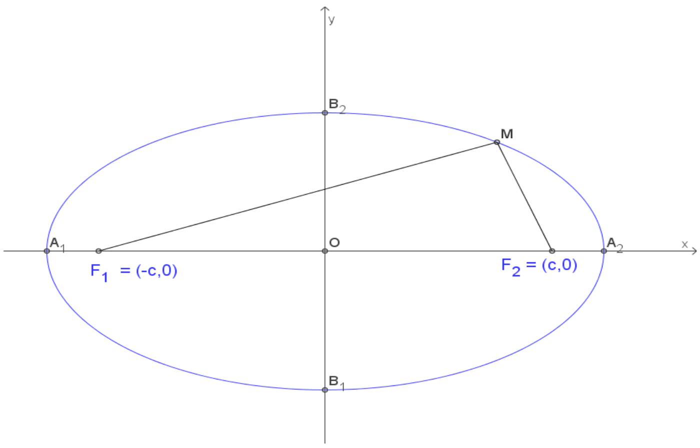
ЈЕДНАЧИНА ЕЛИПСЕ

Елипса је скуп тачака у равни таквих да збир растојања ма које од њих од две утврђене тачке F_1 *и* F_2 *има сталну вредност, тј.* $|MF_1|+|MF_2|=r_1+r_2=2a$. *Тачке* F_1 *и* F_2 *зовемо жиже или фокуси елипсе.*

Да би конструисали елипсу, у апликацији jednacinaelipse.ggb *укључите траг тачке M и померајте је. Променом коефицијената a и b датих клизачима може се утицати на облик и величину добијене елипсе.*

Изведимо једначину елипсе (е):

Нека су жиже F_1 *и* F_2 *такве да је* $|F_1F_2|=2c$ *и број а такав да је* $2a>2c$. *Права* F_1F_2 *се зове велика (главна) оса елипсе (е) а симетрала дужи* F_1F_2 *мала (споредна) оса елипсе (е). Координатни систем ћемо увести тако да се Ох оса поклапа са великом осом, Оу оса са малом осом елипсе а координатни почетак са средиштем дужи* F_1F_2. *Јасно је да жиже имају координате* $F_1=(-c,0)$ *и* $F_2=(c,0)$. *Осим тога, како за тачке елипсе (е) важи* $|MF_1|+|MF_2|=2a$ *то и тачке* $A_1=(-a,0)$ *и* $A_2=(a,0)$ *припадају елипси (е) јер је* $|A_1F_1|+|A_2F_2|=|A_2M_1|+|A_2M_2|=2a$. *Ако уведемо ознаку* $b=\sqrt{a^2-c^2}$ *онда и тачке* $B_1=(0,-b)$ *и* $B_2=(0,b)$ *припадају елипси (е) јер је* $|B_1F_1|+|B_2F_2|=\sqrt{c^2+a^2-c^2}+\sqrt{c^2+a^2-c^2}=2a$, *види слику 6:*



Слика 6.

Теорема. *Тачка* $M=(x,y)$ *припада елипси (е) ако и само ако њене координате задовољавају једначину:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

Доказ. $\Rightarrow$*:Нека тачка* $M=(x,y)$ *припада елипси (е). Тада је* $|MF_1|+|MF_2|=2a$, *односно:* $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. *Ову једнакост можемо записати и као*

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ *, одавде, квадрирањем, добијамо једнакост*

$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$ *чијим се сређивањем добија*

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. *После поновног квадрирања добија се*

$a^2(x-c)^2+a^2y^2=(a^2-cx)^2$ *тј.* $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Последњу једнакост можемо поделити са $a^2(a^2-c^2)$ *јер је* $a^2(a^2-c^2)>0$ *због* $a>c>0$ *чиме се добија:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \text{ , односно}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ знајући да је } b=\sqrt{a^2-c^2} \text{ тј.}$$

$$b^2=a^2-c^2$$

Доказ у обрнутом смеру се изводи слично.

Једначина (1) јесте једначина елипсе ако је $a>b>0$. *Њене жиже тада имају координате* $F_1=(-c,0)=(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ *и* $F_2=(c,0)=(\sqrt{a^2-b^2},0)$. *У случају да је* $b>a>0$ *аналогним расуђивањем долазимо до закључка да је једначина (1) такође једначина елипсе али су њене жиже* $F_1=(0,-\sqrt{b^2-a^2})$ *и* $F_1=(0,\sqrt{b^2-a^2})$. *Њена главна оса се поклапа са Оу осм а споредна са Ох осом.*

Посматрај утицај коефицијената а и b на положај и облик елипсе у апликацији elipsa.ggb *. Посебно размотри ситуације када је* $a=b$, $a=0$ *и* $b=0$.

НАПОМЕНЕ:

1. *Ако тачка* $M_1=(x_1,y_1)$ *припада елипси (е) онда и тачке* $M_2=(-x_1,y_1)$, $M_3=(x_1,-y_1)$ *и* $M_4=(-x_1,-y_1)$ *такође припадају елипси (е). Оне су симетричне тачки* $M_1=(x_1,y_1)$ *у односу на координатне осе односно коотрдинатни почетак. Ова тврдња се лако проверава уврштавањем координата тих тачака у једначину елипсе.*

   Ову особину тачака елипсе можеш уочити у апликацији elipsa.ggb *стављањем вертикалног клизача у положај* ***тачке.***
2. *Елипса (е) се налази унутар правоугаоника чије су странице одређене правим* $x=\pm a$ *и* $y=\pm b$. *Ову особину елипсе можеш уочити у апликацији* elipsa.ggb *стављањем вертикалног клизача у положај* ***праве.***

Пример 1. *Одреди полуосе и координате жижа елипсе:*

а) $16x^2+25y^2=400$; *б)* $16x^2+9y^2=144$.

Задатак а) уради најпре рачунски, у свесци па добијене резултате провери одговарајућом конструкцијом у GeoGebra – и а задатак б) уради само конструкцијом у GeoGebra – и.

Задаци:

1. *Користећи апликацију* [jednacinaelipse.ggb] *конструиши елипсе, тачку по тачку, ако је дато:*

   а) $a = \sqrt{15}, b = 3$ *б)* $a = 5, c = 3$ *в)* $b = 2, c = 2$ *г)* $a = 2, c = 2$

2. *Рачунским путем одреди коефицијенте a, b и c а затим ручно (у свесци) и помоћу GeoGebra – е нацртај елипсе чије су једначине:*

   а) $9x^2 + 25y^2 = 225$ *б)* $x^2 + 36y^2 = 9$ *в)* $18x^2 + 4y^2 = 81$

3. *Нека тачка* $M = (8, q)$, $q > 0$ *припада елипси* $9x^2 + 25y^2 = 900$. *Одреди жиже* F_1 *и* F_2 *те елипсе, једначине правих и дужине одсечака* F_1M *и* F_2M *као и угао између њих.*

   Задатак најпре реши помоћу GeoGebra – е а затим резултате поткрепи одговарајућим рачуном.

   Следеће задатке уради по избору, у свесци или помоћу GeoGebra – е:

4. *Израчунај површину четвороугла чија су два темена жиже елипсе* $x^2 + 5y^2 = 20$ *а друга два се поклапају са крајевима мале осе те елипсе.*
5. *Провери да ли тачка* $M = \left(-4, \frac{12}{5}\right)$ *припада елипси* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ *и нађи једначине правих и дужине одсечака* F_1M *и* F_2M *као и угао између њих.*
6. *Кроз жижу елипсе* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{15} = 1$ *постављена је нормала на велику осу. Одреди растојања од жиже до тачака пресека нормале са елипсом.*

И за остале наставне јединице, наставници су састављали слична, усклађена упутства, којима су олакшавали и убрзавали наставни процес. Та упутства су укључена у пратећи *CD*, заједно са одговарајућим динамичним радним листовима.

Део домаћих задатака је упућиван наставницима путем електронске поште, па су их могли прегледати и ван часа, али и благовремено исправљати евентуалне грешке и упућивати ученике на начин решавања датог проблема.

Током израде тестова наставници су састављали и задатке које су ученици требали решавати на рачунарима, или им је била дозвољена употреба рачунара ради бољег разумевања проблема. Радни листови сачињени помоћу *GeoGebra*-е омогућавају једноставно варирање било ког задатка, чиме се може добити практично неограничен број различитих задатака, који су сличне или једнаке тежине. У почетку смо очекивали да ће употреба рачунара током израде тестова успорити развој математичког мишљења, критичности, креативности и инвентивности ученика. Међутим, резултати тестирања су показали да ученици који су математику изучавали у рачунарском окружењу показују побољшање у успеху и, донекле, квалитету и разумевању изучаване материје. То је нагнало наставнике да се одлуче за организовање заокруженог система рачунарске наставе.

Једном када се нека наставна јединица преуреди за изучавање у рачунарском окружењу, наставнику је далеко лакше њено усавршавање и евентуално исправљање грешака које су се јавиле током извођења наставе.

Осим разматрања проблематике везане за софтвер, наставник би требао пажљиво да одабере примере на којима ће објаснити изучавану материју и њено извођење на рачунару, као и задатке за домаћи и самостални рад и проверу знања ученика. Морају се бирати такви задаци којима ће се јасно приказати ситуације када се материја и софтвер могу уклопити у јединствену смислену целину а када не, као и ситуације у којима је примена софтвера доведена у питање.

Дакле, посебно је важно знати предности и ограничења које собом доноси софтвер у употреби како би се предности максимално искористиле а утицај ограничења свео на најмању меру.

Такође је битно имати на уму и мотивацију ученика. Због тога треба инсистирати на могућностима примене аналитичке геометрије у математици и многим другим областима. Друго оруђе за мотивисање ученика за прихватање овог градива је у предложеним наставним средствима (рачунари) и предложеном облику рада. Наиме, из психологије је познато да се најбољи резултати у процесу усвајања знања стичу ако је у тај процес укључено што више чула. Радом на рачунару ученици упошљавају скоро сва своја чула. Иако се планирана материја најчешће излаже у рецептивном виду, самосталним радом (или радом у пару) на рачунару ученику (ученицима) се пружа могућност експериментисања са понуђеним задацима, што може довести до хеуристички оријентисане наставе. Сву ову разноликост треба искористити за стварање и одржавање позитивног става ученика, како се не би десило да ученици нову материју и начине њеног излагања схвате као додатни терет.

4. ПРИКАЗ НАСТАВЕ АНАЛИТИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ У РАЧУНАРСКОМ ОКРУЖЕЊУ

Поучени искуствима других истраживача и наставника, који су у наставу делимично или у потпуности увели рачунаре, [70], [69], [68], [58], одлучили смо да од школске 2008/9. године почнемо са применом рачунара у настави аналитичке геометрије у одељењима гимназије при средњој школи „Никола Тесла“ у Лепосавићу. Увођење рачунара у наставу захтевало је, најпре, техничку опремљеност школе, што је у задовољавајућој мери испуњено. Следећи корак је био припрема наставника за овакав вид наставе. Обзиром да се већина наставника пре овога није сретала са наставом математике у рачунарском окружењу, овом аспекту смо морали посветити посебну пажњу. Почетне припреме наставника су вршене током првог полугодишта те школске године, али се и током извођења наставе није прекинуло са усавршавањем наставника у тој области. Штавише, информације које смо прикупљали након првих искустава у учионици биле су далеко корисније од свих „сувопарних“ припрема и договора пре наставе.

Увођењем рачунара и *GeoGebra*-е у наставу математике дошло се до неколико нових аспеката. Многе графичке приказе је било тешко састављати на часу, па су током класичне наставе наставници обично прибегавали употреби готових скица и цртежа. Међутим, овакви прикази су статични и ученици одмах виде крајњи облик приказа, чиме се губи из вида генеза изучаваног појма. Динамичним радним листовима које су наставници састављали не само да је избегнута статичност, већ је у сваком тренутку могуће поновити поступак настајања посматраног појма. Даље, састављена апликација се једноставно може варирати, чиме се добија низ нових погледа на посматрану проблематику. Тиме је изучавани појам могуће уклопити у шири контекст, тј. веће су шансе да се тај појам уклопи у когнитивну структуру ученика. Са друге стране, многе рачунске операције, које су од споредног значаја за изучавану материју, могу одузети доста драгоценог времена на часу. Правилна примена рачунара може допринети бржем извођењу тих операција.

Обзиром да је о наведеним стварима речено више детаља у претходним главама, у овој глави ћемо описати саме динамичне радне листове – апликације које смо састављали и користили у настави. Оне представљају кључни део припрема наставе аналитичке геометрије у рачунарском окружењу.

Неке од апликација су састављене тако да представљају само динамичан приказ (динамичну скицу) изучаваног математичког појма. Наставник их је приказивао помоћу рачунара и пројектора на часовима обраде новог градива. Њима смо олкашали схватање појма и убрзали наставни процес.

Друге су састављене тако да кориснику (ученику) омогућавају извесну слободу приликом проучавања особина математичког појма или поступка. Ученици су, праћењем корака конструкције или променама положаја посматраних објеката, могли да откривају и проверавају њихове међусобне односе. Тиме се поспешује креативна и истраживачка активност ученика.

Трећи тип чине апликације намењене за решавање конкретних задатака. Довољно је у већ припремљеној апликацији подесити улазне величине, тако да одговарају подацима датим у конкретном задатку. На тај начин се лако може проверити тачност резултата добијених самосталним радом.

Добар део оваквих апликација су састављали сами ученици, било самостално, било уз помоћ наставника. Неким од тих апликација ученици су приказивали решења задатака које су радили за домаћи задатак. На другој страни, поједини ученици су, охрабрени новим приступом градиву, експериментисали користећи *GeoGebra*-у. Неке од њихових радова ћемо касније приказати.

У овој глави ћемо по темама дати само кратак опис већине коришћених апликација, док ћемо на примеру групе наставних јединица везаних за елипсу детаљније приказати како су одговарајуће апликације коришћене за упознавање нових појмова, проучавање особина елипсе и израду задатака из те области. У току рада су све апликације биле доступне ученицима, како у школи, тако и код куће. Све су биле доступне и на интернет страници http://eugenljajko.info/aplikacije%20analiticka.html.

4.1. Дуж

Растојање између две тачке приказали смо апликацијом *r2t.ggb*. У њој ученици најпре експериметишу пратећи растојања парова тачака које су крајеви било хоризонталних било вертикалних дужи. Иако *GeoGebra* поседује алат за директно одређивање растојања међу тачкама, ученици су га користили тек након успостављања везе између координата тачака и растојања међу њима. После тога се прелази на општи случај, када тачке нису распоређене ни по вертикали ни по хоризонтали, где се примењује Питагорина теорема и знање стечено у претходном експериментисању.

Наставник је посебно морао да обрати пажњу на то да ученици не одређују растојања између тачака користећи готову наредбу, јер би у том случају употреба рачунара само допринела смањењу когнтивних активности ученика. Како је таква употреба рачунара у супротности са основним циљевима наставе математике, важно је код ученика развијати навику да се уочи разлика између ситуација када употреба рачунара доноси техничке олакшице и оних када се употребом рачунара смањује потреба за размишљањем и доношењем закључака и одлука.

Зато је један од задатака наставника, посебно у почетним фазама наставе математике у рачунарском окружењу, да предвиди што је могуће више наставних ситуација које би довеле до ненамерне или чак намерне погрешне употребе рачунара од стране ученика. Након уочавања таквих ситуација, наставник би требао да одреди што ефикаснији начин за елиминисање негативних ефеката погрешном приступу употреби рачунара у настави.

Апликацијом *pddo.ggb* приказана је подела дужи у датом односу *m:n*. Иако је апликација више оријентисана на приказивање и проверу добијених резултата, ученици су, вођени истраживачким духом, дошли до ситуације када тачка *C* која дели дуж у датом односу није дефинисана. То се, рецимо, дешава у случају када је $m = -n$. Природно се намеће и ситуација када је $m = n$ када се добија средиште дужи. Већ приликом употребе ове апликације уочено је да није посебно тешко активности ученика усмерити ка самосталном експериментисању, што веома брзо доводи до вредних резултата. Иако је, у овом случају, експериментисање ученика са апликацијом било више насумично него унапред предвиђено и усмерено, овакав вид активности на часу је подигао квалитет наставе, како по питању односа у тетраедру ученик – медијум – градиво – наставник, тако и по квалитету знања које су ученици усвојили.

Уопштење поделе дужи у односу 1:1 је одређивање тежишта троугла. Ово смо урадили у оквиру посебног задатка за који смо саставили апликацију *teziste.ggb*. У њој смо се више оријентисали на геометријску интерпретацију проблема, па су ученици, у сарадњи са наставником, за решавање овог проблема саставили нове алате – *tezisna duz* и *teziste*. Корист од креирања ових алата је била вишеструка: ученици су утврдили геометријско поимање процеса одређивања тежишта троугла, али су такође и ојачали своје способности у руковању *GeoGebra*-ом.

За наставника је изузетно важно да правилно уочи моменат у наставном процесу када је већина ученика савладала изучавани појам и да то искористи за формализовање или проширивање стеченог знања. То се, између осталог, може постићи и уопштавањем усвојених појмова. Уопштавање појма у рачунарском окружењу је лако изводљиво имајући на уму динамичност коришћених радних листова, што се и показало на примеру изграђивања појма тежиште троугла на основу знања у вези поделе дужи у датом односу.

Како *GeoGebra* нуди готов алат за израчунавање површине многоугла, нисмо израђивали посебну апликацију за израчунавање површине троугла, већ смо у конкретним задацима користили понуђени алат. Ова опција *GeoGebra*-е је често коришћена само за проверу задатака урађених у свесци или на табли.

4.2. Права

Апликацијом *ojp.ggb* приказани су облици једначине праве. Апликација је урађена као динамично визуелно наставно средство, односно као помоћ приликом излагања наставне јединице *Једначина праве*. Могућност брзог преласка са једног на други облик једначине праве омогућила је лакше схватање да се ради о различитим облицима једначине исте праве. Ово је наглашено тиме што се различити облици једначине посматрају за исту праву. Поред овога, поменута могућност показује и сву снагу новог наставног окружења. Сви учесници – како наставник, тако и ученици могу лако и брзо променити тачку гледишта изучаваног појма. Тиме се истовремено лако сагледава више аспеката посматраног проблема. Управо је употреба ове апликације показала један ефикасан начин примене рачунара у изучавању особина неког математичког појма или поступка.

Због посебне важности експлицитног облика једначине праве, израдили смо и посебну апликацију – *eksplicitni oblik.ggb*, која га приказује.

Осим ових апликација, ученици су, уз помоћ наставника, састављали једноставније радне листове за решавање или проверу решења појединих задатака. Апликацијом *primer odsecak.ggb* олакшано је решавање следећег задатка:

Одреди вредност параметра m *тако да одсечак праве* $mx+4y-8=0$ *на Ox оси буде – 2.*

Задатак је рађен на „класичан“ и „рачунарски“ начин. Иако је израда одговарајуће апликације одузела више времена него класично решавање задатка, овом апликацијом је практично решена читава класа сличних задатака, односно, далеко је једноставније извести уопштење ситуације. Поред тога, очевидније је приказан геометријски смисао проблема. Посебно важан детаљ при састављању ове апликације је била употреба клизача. Њихова употреба на начин који нуди *GeoGebra* је изузетно погодна за ојачавање знања везаних за независно променљиве, параметре и аргументе функција. Употребом клизача приказ задатка постаје динамичан, чиме се отвара могућност целовитијег сагледавања и бржег решавања проблема.

Ради приказивања узајамног односа двеју правих саставили смо апликацију *odnos dve prave.ggb*, док је апликацијом *primer presek pravih.ggb* приказано решавање следећег задатка:

Одреди вредност параметра m *тако да се праве* $mx+(2m+1)y+m+6=0$ *и* $(2m+1)x+(m-1)y+m-2=0$ *секу у тачки на Оу оси.*

Параметар m који се помиње у задатку смо, наравно, приказали употребом клизача. То је умногоме олакшало решавање задатка, али је подстакло и даље истраживачке активности ученика. Интересантна ствар коју су ученици самостално „открили“ овом апликацијом је да скуп пресечних тачака овако датих правих чини хиперболу, што се може потврдити у апликацији било праћењем трага пресечне тачке при промени вредности параметра m, било наредбом *Lokus*.

Одређивање угла између две праве приказано је апликацијом *ugao izmedju dveju pravih.ggb*. Ученици су у њој могли експериментисати са различитим односима коефицијената k и n двеју правих и посматрати како тај однос утиче на угао између тих правих. Апликацијом су посебно приказани важнији случајеви као узајамно нормалне и паралелне праве.

За приказивање правих из прамена одређеног датим правим саставили смо две апликације *pramen pravih.ggb* и *primer pramen pravih.ggb*. Првом апликацијом праве прамена су одређиване тако што је најпре одређен центар прамена, док друга омогућава одређивање правих прамена без одређивања његовог центра. Обе апликације су, поред приказивања прамена правих, коришћене и као помоћ при решавању, односно провери решења задатака.

GeoGebra поседује једноставан алат за одређивање растојања међу објектима. Међутим, за одређивање растојања између паралелних правих користили смо апликацију *rastojanje izmedju paralelnih pravih.ggb* у којој смо поменути алат користили само за проверу резултата добијених апликацијом.

Оваква употреба рачунара уноси у наставу опасност од претераног и, понекад, неоправданог ослањања на рачунаре у погледу тачности резултата. Претерано ослањање на рачунаре, са једне стране, може довести до смањења когнитивне активности ученика чија је директна последица слабије разумевање изучаване материје. Са друге стране, тачност резултата добијених помоћу рачунара не сме бити безрезервно узета, јер се на тај начин код ученика омета развој и одржавање критичности у раду. Зато је важно уравнотежити самовредновање и узајамно вредновање рада ученика са провером добијених резултата на рачунару.

За одређивање растојања тачке од праве саставили смо апликацију *rastojanje tacke od prave.ggb*. У њој смо поред стандардног алата *Rastojanje* креирали и сопствени алат *Rastojanje tacke od prave*, којим смо јасније приказали детаље аналитичког одређивања тог растојања. На овај начин, апликација није коришћена само за добијање тражених резултата, већ и за приказивање поступка којим се долази до решења.

Апликацију *simetrale.ggb* саставили смо ради одређивања и проучавања односа симетрала углова које граде две праве. *GeoGebra* поседује посебан алат *Simetrala ugla* помоћу кога се на једноставан начин одређују обе симетрале углова које граде две праве које се секу. Апликација је замишљена тако да споји геометријски и аналитички начин одређивања симетрала, као и да употребом готове наредбе ученици потврде резултате добијене аналитичким путем.

Осим овога, саставили смо и апликацију *upisana kruznica.ggb* у којој су ученици коришћењем симетрала углова одређивали центар уписане кружнице троугла и сами креирали алат за директно одређивање центра уписане кружнице.

4.3. Кружница

За извођење једначине кружнице саставили смо апликацију *jednacina kruznice.ggb*, која одсликава њено основно својство – једнако растојање свих њених тачака од њеног центра. Обзиром да се ради о кривој која описује кретање материјалне тачке по неком закону, нашли смо за згодно да овом апликацијом појаснимо појам локуса, па се поступак извођења једначине кружнице делимично заснива баш на том појму. Апликација је замишљена тако да до једначине кружнице ученици могу доћи било уз помоћ наставника, било самосталним истраживањем односа координата тачке која својим кретањем описује кружницу. Овакво истраживање код ученика поспешује неколико позитивних навика:

- Изграђивање знања кроз самостално истраживање,
- Употребу наставних средстава, посебно рачунара, у истраживачке сврхе,
- Идентификацију математичких концепата са физичким процесима.

Већина апликација које смо користили су изграђене управо са циљем стварања и даљег развијања поменутих навика.

Апликацијом *prava i kruznica.ggb* приказани су могући односи праве и кружнице, као и зависност тог односа од коефицијената *k* и *n* праве, односно *p*, *q* и *r* кружнице. Важно је што је у апликацији указано на везу тих коефицијената и услова додира праве и кружнице. Посебно је интересантно уочити извесне графичке непрецизности рачунара по питању одређивања тангенти и тачака додира праве и кружнице. При промени вредности коефицијената *k* и *n*, односно *p*, *q* и *r* мења се и међусобни однос праве и кружнице. Природно је да се права која нема заједничких тачака са кружницом, након промене вредности коефицијената, доведе у положај у коме ће бити тангента, а након тога сечица посматране кружнице. Због величине корака у промени вредности клизача, овакав редослед положаја праве се најчешће не може постићи у апликацији, што може бити виђено као потешкоћа у рачунарском приказу овог односа. Ово неће бити прихваћено као недостатак овако организоване наставе једино под условом да се материја излаже и проучава у комбинованом облику, а рачунар доживљава као помоћно средство и користан извор информација везаних било за градиво било за могућности рачунара. Битно је, између осталог, ученицима указати и на разлику између рационалних вредности клизача и реалних вредности коефицијената.

Апликацијом *dve kruznice.ggb* приказали смо могуће односе двеју кружница, као и угао међу њима у случају да се секу. Осим ње, апликацију *zajednicke tangente.ggb* смо користили као графичку допуну аналитички решених задатака у вези заједничких тангенти двеју кружница.

4.4. Елипса

Ради извођења једначине елипсе и проучавања њених особина, саставили смо низ апликација. Овде ћемо детаљније приказати те апликације и начине како смо помоћу њих проучавали елипсу.

Обично, елипсу дефинишемо у складу са следећом дефиницијом:

Нека су F_1 *и* F_2 *две сталне тачке у равни и нека је* $a > \frac{1}{2}|F_1F_2|$. *Скуп тачака M исте равни за које је збир растојања од тачака* F_1 *и* F_2 *сталан и једнак 2a зове се елипса.*

На основу дефиниције прави се скица и из ње се изводи једначина елипсе. Ми смо, пак, саставили апликацију *jednacinaelipse.ggb*, којом је описано поменуто својство елипсе па смо из тога и на основу података из апликације, изводили њену једначину.

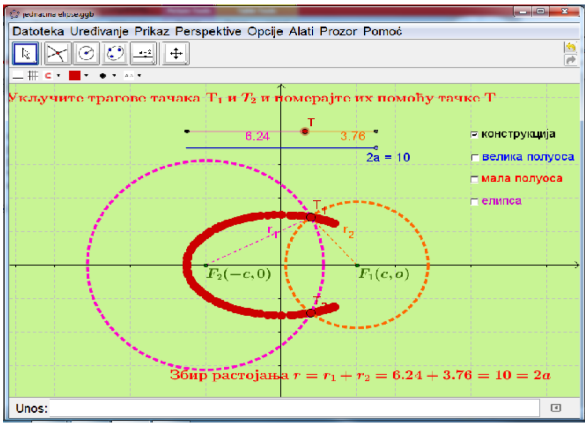
Ученицима је понуђено да у апликацији експериметишу са различитим односима дужи r_1 и r_2, под условом да њихов збир остане константан (и једнак *2a*). То се постиже померањем тачке *T* на клизачу у горњем делу апликације. Притом се посматрају кружнице промењљивих полупречника (који су управо r_1 и r_2) и њихове тачке пресека. Том приликом они могу уочити да тачке пресека посматраних кружница задовољавају својство описано дефиницијом и заузимају положаје који, узети заједно, „личе" на елипсу. Ово наслућивање се може и потврдити. Рецимо, може се подесити да пресечне тачке остављају трагове и затим померати тачка *T*. Трагови пресечних тачака чине елипсу. Уколико желимо трајан траг, то можемо постићи употребом наредбе *Lokus*: *Lokus[T_1,T]* и *Lokus[T_2,T]*. Тако је, барем визуелно, добијена елипса.

У следећем кораку ученицима скрећемо пажњу на тачке у којима добијена елипса сече координатне осе. За почетак треба уочити да је апсциса тачке пресека елипсе са *Ox* осом једнака *a* – велика полуоса. Помоћу ње и величине $c=\frac{1}{2}\left|F_1F_2\right|$ дефинишемо малу полуосу – b.

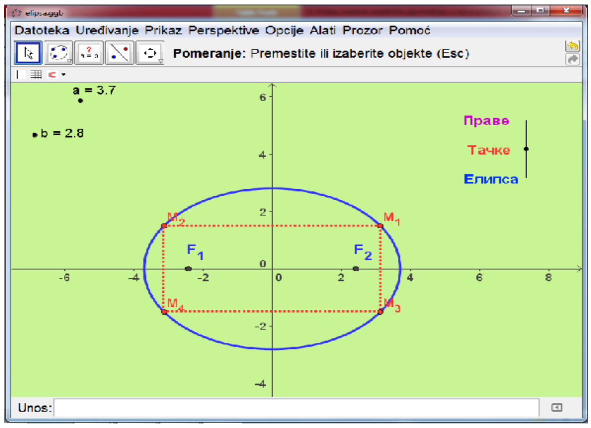
Коначно, употребом алата *Elipsa*, можемо конструисати елипсу са жижама F_1 и F_2 која пролази кроз тачку T_1. Њена једначина се види у алгебарском прозору радног листа. Подешавањем особина добијене елипсе (после десног клика на елипсу бирамо: *osobine – prikaži oznaku – vrednost* и *osobine – algebra – jednačina* $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$) може се доћи до једначине елипсе којом је исказана зависност од мале и велике полуосе.

Осим тога, апликацијом *elipsa.ggb* омогућено је приказивање полуоса и жижа елипсе, као и утицај полуоса на облик и положај елипсе. Апликација садржи три клизача, два одређују величину полуоса – *a* и *b*, док се трећим бира неко од својстава елипсе које посматрамо: утицај полуоса на облик елипсе, централну и осну симетричност тачака елипсе или ограниченост елипсе. Детаљи тих апликација приказани су на сликама 7. и 8.

Апликацијама смо у наставу унели динамику и олакшали разумевање садржаја. Задатке на часовима вежби радили смо двојако: на папиру и рачунару. Показало се да ученици, који су при изради задатака користили рачунар и састављене апликације, лакше раде домаће задатке и задатке на часовима вежби, али и да им је то омогућило олакшано разумевање и изграђивање сложенијих појмова.



Слика 7.



Слика 8.

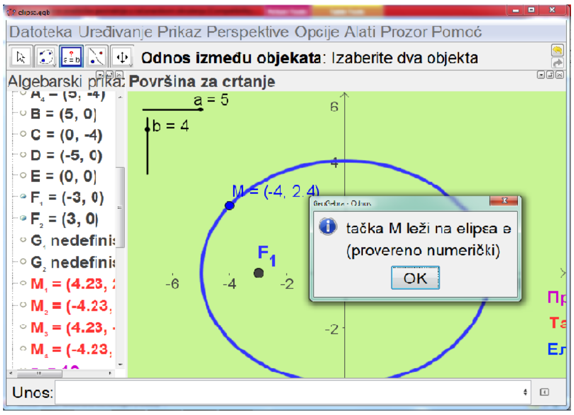
Показаћемо начин на који смо користили апликацију *elipsa.ggb* за решавање следећег задатка:

Провери да ли тачка $M = \left(-4, \frac{12}{5}\right)$ *припада елипси* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ *и одреди једначине правих, дужине одсечака* F_1M *и* F_2M *као и угао између њих.*

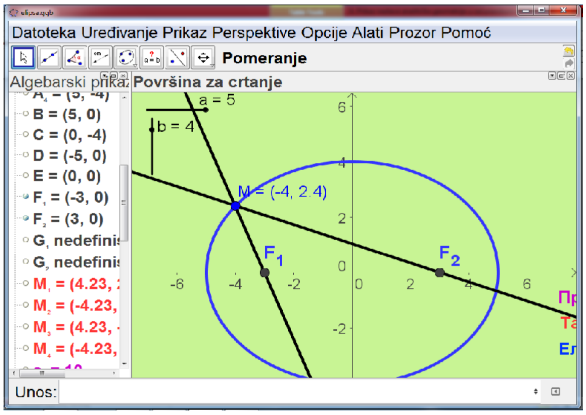
Најпре смо у апликацији подесили клизаче *a* и *b* на вредности $a = 5$ и $b = 4$, чиме је у њој приказана тражена елипса. Затим смо унели координате тачке *M*. Слика изгледа као да тачка *M* припада елипси, али, имајући на уму могућу графичку непрецизност слике, приступамо провери односа тачке *M* и елипсе употребом опције *Odnos između objekata*, слика 9. У следећем кораку постављамо праве кроз тачке *M* и F_1 односно F_2 (то радимо употребом алата *Prava kroz dve tačke*). Њихове једначине су видљиве у алгебарском прозору *GeoGebra*-е, слика 10.

Дужине одсечака F_1M и F_2M одређујемо користећи опцију *Rastojanje*, чиме се у алгебарском прозору очитавају тражене дужине, слика 11. Коначно, опцијом *Ugao* добијамо и вредност угла између тих правих, слика 12.

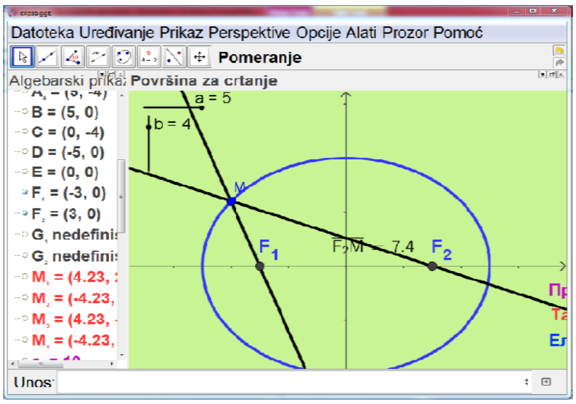
За испитивање ексцентрицитета и одређивање директриса елипсе саставили смо апликацију *ekscentricitet i direktrise.ggb*. Њоме смо веома лако дошли до различитих дефиниција ексцентрицитета елипсе, веза међу њима, као и до веза између ексцентрицитета и директриса елипсе. Употреба ове апликације је олакшала разумевање поменутих појмова, као и изграђивање веза међу њима, слика 13. Апликацију нисмо користили за решавање задатака већ само за визуелизацију. Идеја је била да се ученици подстакну на самосталан рад, инвентивност и креативност а да се притом не везују само за једну технологију, у нашем случају рачунар, јер би таквим везивањем за рачунар дошли у ситуацију да је његова употреба сама себи циљ.



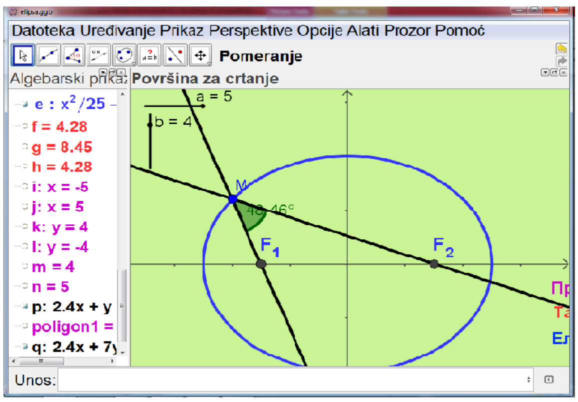
Слика 9.



Слика 10.

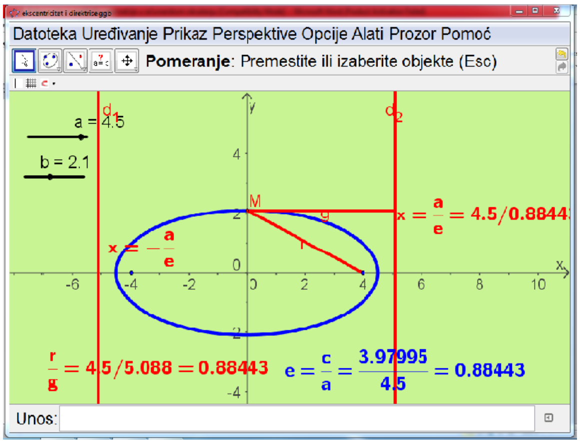


Слика 11.

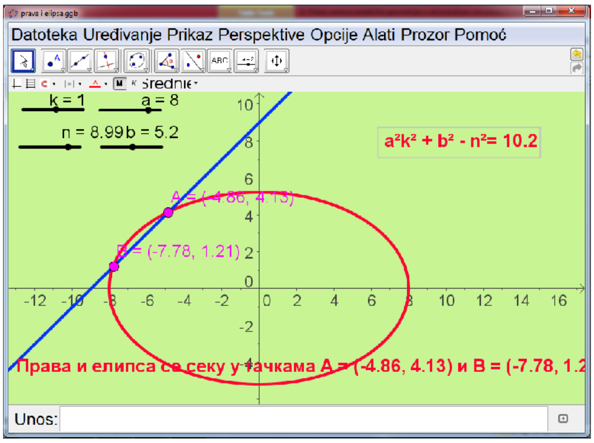


Слика 12.

У томе смо успели приликом обраде следеће наставне јединице – Права и елипса, где смо, ради испитивања њиховог узајамног односа, ученицима дали задатак у коме је требало да израде апликацију у *GeoGebra*-и којом би испитали тај однос. Као резултат тога, добили смо низ занимљивих апликација којима је, мање или више успешно, представљен дати однос. На слици 14. приказан је детаљ једне од тих апликација – *prava i elipsa.ggb*. Већ у овом стадијуму наставе, део ученика је самостално израђивао апликације за конкретне задатке, што говори о брзини којом се *GeoGebra* може успешно уклопити у наставу математике.



Слика 13.



Слика 14.

4.5. Хипербола

Код хиперболе смо, као и код елипсе, најпре саставили апликацију *konstrukcija hiperbole.ggb*, помоћу које смо на једноставан начин приказали извођење једначине хиперболе из њеног основног геометријског својства да је апсолутна вредност разлике растојања њене произвољне тачке од њених жижа сталан број $2a < 2c$. Посебно интересантна ситуација се јавља ако се клизачима (макар и случајно) подеси да је $a > c$. Тада тачка M, чији траг треба да описује хиперболу, у ствари, описује елипсу. Ову чињеницу смо искористили за успостављање везе међу самим конусним пресецима, што смо касније исказали дефиницијом Руђера Бошковића и приказали посебном апликацијом.

Апликацију *hiperbola.ggb* смо саставили ради приказивања значајнијих својстава хиперболе: осне и централне симетричности, области дефинисаности и асимптота као и граничних случајева за $a = 0$, када се хипербола дегенерише у праву – симетралу реалне осе, односно $b = 0$, када се хипербола дегенерише у две полуправе. Испитивање ових, „граничних“, случајева помогло је ученицима да упознају и разумеју везе између конусних пресека у ужем и ширем смислу, чиме се на још један начин врши уопштење стечених појмова.

Осим овога, на часу обраде ученици су, уз помоћ наставника, саставили посебну апликацију *obrnuta hiperbola.ggb,* којом је приказана „обрнута“ хипербола.

Апликацијом *ekscentricitet i direktrise hiperbole.ggb* приказана су та својства као и њихов утицај на облик и положај хиперболе, док су могући односи праве и хиперболе приказани апликацијом *prava i hiperbola.ggb*. Посебну пажњу смо посветили случају када права сече хиперболу само у једној тачки, тј. када је паралелна једној од асимптота хиперболе.

4.6. Парабола

Извођење једначине и проучавање параболе смо урадили на сличан начин као и код осталих конусних пресека. Најпре смо саставили апликацију *konstrukcija parabole.ggb,* којом је приказана геометријска конструкција параболе, па је на основу ње изведена једначина. Истом апликацијом је приказана осна симетричност фигуре. За приказивање парабола облика $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ и $y^2 = ax^2 + bx + c$ саставили смо посебну апликацију *oblici parabola.ggb,* док смо однос праве и параболе приказали и проучавали апликацијом *prava i parabola.ggb*.

Имајући на уму начин конструкције параболе, као и дефиниције ексцентрицитета елипсе и хиперболе, намеће се питање међусобног односа конусних пресека у ужем смислу. Зато смо, након проучавања конусних пресека и трансформација координатног система, сматрали да је делотворно дати и дефиницију конусних пресека по Руђеру Бошковићу. Она је веома лака за разумевање, али је далеко важније то што помоћу ње ученици схватају заједничке особине конусних пресека у ужем смислу, као и то што се на тај начин јачају и обнављају знања везана за ексцентрицитет и директрисе. У складу са тим, саставили смо и одговарајућу апликацију *boskovic.ggb,* којом се приказује генеза конусних пресека помоћу директрисе и жиже. Овом апликацијом је омогућено да ученици на нов начин „открију“ конусне пресеке.

Треба нагласити оно што је искуство показало – да коришћење диманичних радних листова како за приказивање генезе и особина геометријских објеката тако и за решавање проблема не само да нуди олакшање у виду једноставнијег и прегледнијег цртања, већ представља и извор нових идеја везаних за проблематику. Последња чињеница је јаснија ако се узме у обзир могућност динамичне промене положаја уз очување међусобних односа геометријских објеката у коришћеним апликацијама. То, међутим, ни у ком случају, не значи да је по сваку цену загарантован успех у подизању нивоа и квалитета наставе и знања ученика. Потребно је (поготову у почетним фазама овакве наставе) да наставник уложи мого труда и обрати доста пажње на детаље и рад и реакције ученика. Ученике треба посебно подстицати на истраживање и самосталан рад са *GeoGebra*-ом. Ово се најлакше може постићи уколико се ученицима понуди могућност самосталног експериментисања са апликацијама, било на часу, било код куће. Наравно, та могућност је већа, а њено остваривање реалније уколико је апликација сачињена тако да не нуди готове одговоре, већ њена употреба захтева веће ангажовање ученика, како у решавању задатка, тако и у разумевању материје.

4.7. Радови ученика

Ученици су самостално, или уз помоћ наставника, израђивали апликације за решавање конкретних задатака. Неке од апликација су радили на часовима вежби, док су друге састављали за домаћи задатак. По један од тестова за проверу знања радили су на рачунарима, али им притом није било дозвољено коришћење већ израђених апликација. Зато смо у апликације коришћене у настави уврстили и радове ученика. Интересантно је размотрити неке детаље апликација које су притом састављали.

Апликацијом *zadatak7.ggb* приказано је решавање следећег задатка:

Одреди угао под којим се секу елипса $3x^2+4y^2=84$ *и хипербола* $3x^2-4y^2=12$.

Велико олакшање наставнику приликом провере тачности израђених задатка које нуди *GeoGebra* је мноштво начина на које се може посматрати и проверити сваки радни лист. Поменута апликација показује, најпре, да је задатак тачно урађен, што се јасно види било из алгебарског прозора, било провером односа међу тангентама. Осим тога, коришћењем траке за кораке конструкције уочава се и правилан поступак и редослед приликом решавања задатка, односно израде апликације.

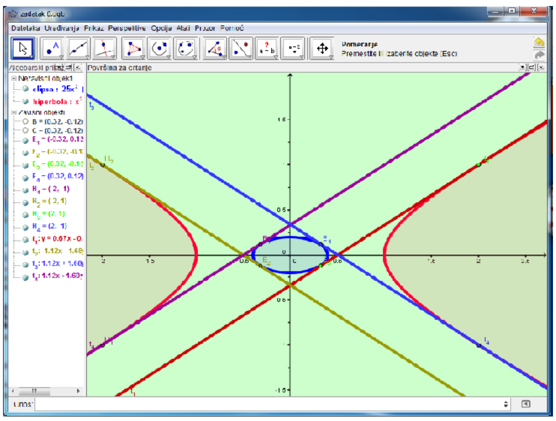
Насупрот томе, посматрајмо апликацију *zadatak6.ggb*. Њоме је приказано решење следећег задатка:

Одреди једначине заједничких тангенти елипсе $25x^2 + 100y^2 = 4$ *и хиперболе* $x^2 - 3y^2 = 1$.

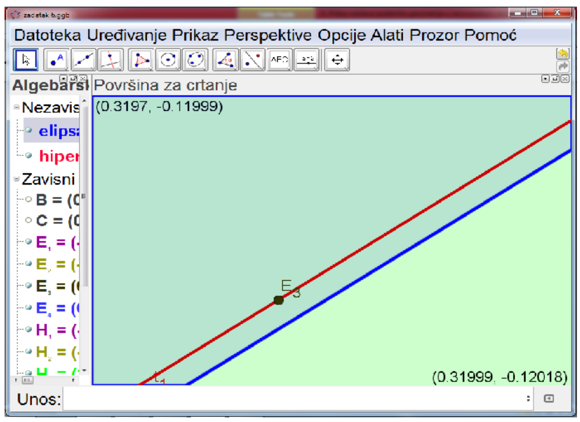
Апликација коју је ученик самостално израдио била је замишљена тако да прикаже решење до кога се дошло рачунским путем. На први поглед, изгледа да је задатак правилно решен. Слика 15. показује заједничке тангенте. У алгебарском прозору су дате праве чије су једначине задате коефицијентима пропорционалним коефицијентима добијеним рачунским путем. Међутим, једноставном провером односа између правих и елипсе, уз употребу алата *Odnos između objekata*, долази се до одговора да права сече елипсу у двема тачкама. То се може додатно проверити и довољним увеличавањем места „додира“, односно пресека праве и елипсе, слика 16. Цела ова ситуација је деловала веома збуњујуће на ученике који нису навикли да рачунар „греши“.

Разлог за овакво понашање апликације је откривен једноставно. Коришћењем траке за приказивање корака конструкције утврђено је да је ученик најпре унео координате додирне тачке тангенте и елипсе које је добио рачунским путем, а онда употребом наредбе *Tangenta* конструисао тангенту из те тачке на хиперболу. Добијена права се, због ограниченог броја децимала које користи рачунар, ипак разликује од тангенте из исте тачке на елипсу, што се такође може проверити провером односа између ње и стварне тангенте.

Посебно је важна чињеница да су овом приликом ученици, суочени са непрецизношћу рачунара, дошли до сазнања да је корисније узимати у обзир све расположиве технологије него везивати се само за једну, у нашем случају рачунар.



Слика 15.



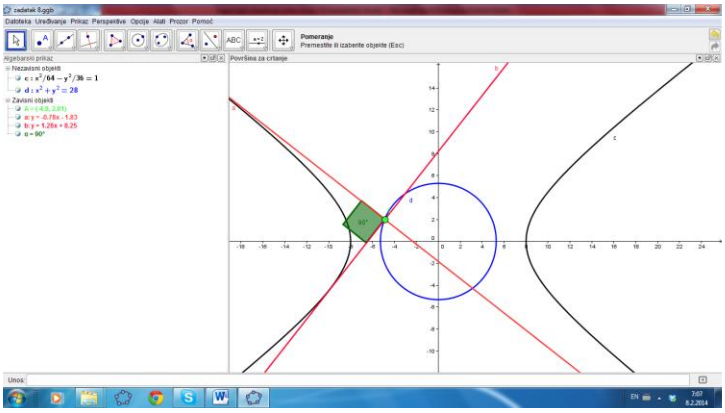
Слика 16.

Апликацијом *zadatak8.ggb* ученик је приказао решење следећег задатка, слика 17:

Одреди скуп тачака у равни из којих се хипербола $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ *види под правим углом.*

И овде се једноставним праћењем корака конструкције јасно уочава да поступак решавања примењен на папиру није испоштован и у апликацији. Рачунар је, у овом случају, употребљен само као пригодан алат за скицирање.

Искуства из последња два задатка наводе нас на закључак да је коришћење траке за приказ корака конструкције посебно делотворно при провери, како тачности задатака, тако и исправности разумевања смисла задатака и употребе рачунара за њихово решавање.



Слика 17.

Посебно треба водити рачуна о томе да се избегне начин рада ученика и наставника уочен управо у овим задацима. При овом начину рада се рачунар третира само као мало савршенија свеска или табла и занемарују се могућности покретања истраживачког рада. Осим тога, овакво понашање ученика се може сматрати и прикривањем неразумевања појмова. На овај начин не само да не могу доћи до пуног изражаја сви потенцијали рачунара као дидактичког средства, већ сâмо његово присуство у настави представља додатно оптерећење и за наставнике и за ученике.

5. ПЕДАГОШКИ ЕКСПЕРИМЕНТ

Под педагошким експериментом се подразумева поступак којим се до резултата у вези деловања неког чиниоца долази у контролисаним условима. Резултати експеримената умањују лутања у погледу оптималних техника и уређења наставе и олакшавају рад. Циљ конкретног експеримента је, обично, проверавање хипотезе о узрочно – последичним везама међу појавама, али експеримент може послужити и само описивању промена насталих дејством уведених фактора. Циљ педагошког експериментисања уопште јесте доћи до што бољих техника, поступака, којима ће се постићи квалитетнија и ефикаснија настава. Иако су многи наши и светски педагози дали разне дефиниције педагошког експеримента, већина њих се своди на следеће:

- Намерно изазивање неке промене,
- Мењање услова (према потребама експериментатора),
- Мерење резултата (евентуално описивање насталих промена).

То значи да се узорак ставља у неку ситуацију (уводи се посматрани чинилац), мењају се услови под којима посматрани чинилац делује и, на крају, мере се или описују резултати деловања чиниоца на узорку. Експеримент се своди на упоређивање стања пре деловања експерименталног чиниоца и стања које настаје после његовог деловања, или на упоређивање ситуација у којима делују један и други чинилац. Значајна карактеристика експеримента јесте контрола услова, како почетних тако и услова током експеримента. Контрола услова се претежно врши тако што се у испитивање укључује више група (експериментална и контролна) које се настоје уједначити у свим факторима, изузев оног који се уводи и чије се дејство проучава. Ово је такозвани експеримент са две групе. Осим овог облика, могућ је и експеримент са једном групом. И овде се утврђује учинак неког чиниоца. Фазе оваквог екперимента су:

- Утврђивање почетног стања,

- Увођење експерименталног чиниоца,
- Утврђивање и описивање завршног стања.

Сличан експерименту, али са обрнутим следом испитивања, је *ex post facto* поступак. При овом поступку се утврђује настала ситуација за коју се претпоставља да је последица једног или више узрока, па се успостављањем накнадне контроле трага за узроком.

Наравно, експеримент није једини начин да се дође до најбољих поступака у настави. Коцић у [64] цитира Шмита:

„Ако је наставник искуством дошао до спознаје да је ова или она одгојна мера боља или слабија него нека друга, да је у овим околностима ефикаснија а у другим мање ефикасна, онда му је дуготрајно искуство показало оно што би му у краћем времену и са већом поузданошћу показао експеримент.“

Дакле, искуства стечена радом у стварној настави су једнако значајна као и резултати експеримента и можда доводе до закључака који могу бити и кориснији од резултата експеримента. Ово је због тога што се током експеримента често не примећују, или се погрешно тумаче, такозвани паразитарни фактори који су у стварној настави сведени на минимум.

Ипак, што се тиче експерименталне провере предности или мана рачунарске наставе у поређењу са традиционалном, на начин који је овде наведен, ствари су знатно сложеније. Требало би класичним педагошким експериментом проверити да ли је боље извесну наставну јединицу обрадити на традиционалан начин или у рачунарски потпомогнутој настави. То значи да треба изједначити све факторе у експерименталној и контролној групи, с тим што ће се са експерименталном групом радити уз употребу рачунара. Проблем се јавља управо овде јер озбиљна употреба рачунара у настави значи да више скоро ништа није исто као пре. Рачунари и одговарајући софтвери су тако дизајнирани да, уколико су правилно употребљени у настави математике, помажу промени начина на који се размишља о математици и учи математика. У трећој глави је показано да се увођењем рачунара у наставу из корена мењају односи међу ученицима, између ученика и наставника као и између ученика и артефаката који више нису само пуки предмети којима се служе ученици већ и они сами врше утицај на ученике. Ово је показано у многим истраживањима, рецимо: Паперт (1986 – 1987), Труше (1996 – 1997), Баух (2001 – 2002) и други. По Паперту, уколико би се у класичном експерименту увели рачунари и покушало да се све остало одржи непромењено, могућа су два сценарија. У првом је могуће да се не искористе стварне могућности рачунара па би њихов учинак остао неприметан. По другом сценарију, увођењем рачунара би се много фактора променило одједном чиме се комплетна ситуација мења из корена. У оба случаја, експеримент би био виђен као неуспех. Из тога јасно произилази да су поређења класичне и рачунарски потпомогнуте наставе непримерена и непродуктивна. Ради се о суштински различитим облицима наставе чији се квалитет може тешко поредити. Зато се у каснијим истраживањима све ређе поставља питање оправданости увођења рачунара у наставу а све чешће се истраживања усмеравају ка конкретизовању ефикаснијих техника и уређења наставе. Мисли се, пре свега, на уређење рачунарске учионице као и временско и просторно дефинисање и уређење односа између ученика, ученика и наставника и ученика и рачунара, односно софтвера.

5.1. Опис рачунарски потпомогнуте наставе аналитичке геометрије у равни

Експериментална настава је изведена на врло природан начин у трећим разредима одељења гимназије средње школе „Никола Тесла“ у Лепосавићу од 2008/09. до 2013/14. школске године. Наставу су изводили редовни наставници у поменутим одељењима, чиме је избегнут јак паразитарни фактор који настаје увођењем новог предавача.

Часови на којима је материја проучавана помоћу рачунара, рађени су у рачунарској учионици са 12 рачунара, која поседује и пројектор али и класичну таблу. Због тога су ученици радили у паровима на истом рачунару. Приликом одабира парова водило се рачуна да се ученици који припадају истом пару барем донекле допуњују у погледу познавања математике и рада на рачунару. Током наставе се тежило томе да математички садржаји буду у центру пажње и да се њихова срж очува приликом прилагођавања материје софтверу. При томе водило се рачуна о уочавању и развијању најпогоднијих наставних техника и односа у настави. Како су ученици најчешће радили у паровима, у изграђивању и усвајању појмова природно се наметала метода *ја – ти – ми*.

Рачунари и динамични радни листови састављени у *GeoGebra*-и коришћени су за приказавиње динамичних генеричких скица изучаваних објеката, за приказивање и проучавање ситуација исказаних задацима, као и за проверу добијених резултата. Табла и свеска су коришћене приликом извођења једначина и доказа теорема, односно у свакој ситуацији где је нагласак био на симболичкој страни математике. Сматрали смо да би избегавање њихове употребе било у супротности са основним циљевима наставе математике. Осим тога, свака настава математике која не негује симболички приступ била би контрапродуктивна и лишена смисла.

Настава се изводила по важећем плану и програму и уџбенику [63]. Наставне материјале је било теже саставити само у првој школској години, док смо у раду са наредним генерацијама користили већ припремљене динамичне радне листове. Њих смо, наравно, усавршавали како је временом наше искуство расло. Већина коришћених динамичних радних листова – апликација је била стално доступна, било наставницима било ученицима и на интернет страници

http://www.eugenljajko.info/aplikacije%20analiticka.html.

Рачунари су били и локално умрежени па је наставник у сваком моменту на свом рачунару имао увид у то шта ученици раде на својим рачунарима. Радна површина са монитора било ког рачунара могла је бити приказана и на пројектору што је јако блиско употреби табле. На тај начин ученици су се брже привикавали на ново окружење.

Школски, писмени и домаћи задаци су рађени комбиновано – на рачунарима, на табли и у свескама. Након обраде наставних јединица везаних за дуж, праву и круг, спроводили смо тест и том приликом ученицима је дозвољена употреба рачунара, било као средства за цртање скица било за стварање динамичних радних листова којима је исказивано решење задатка. Након завршетка наставне теме Аналитичка геометрија у равни, ученици су радили уобичајени писмени задатак у вежбанкама без употребе рачунара. На крају, међу ученицима смо спроводили анкету о изведеној настави. Понашање ученика на тесту и писменом задатку, као и њихови резултати, детаљније су описани у поглављу 5.4.

У прве две школске године већина ученика (37 од 43) је изјавила да поседује рачунар или да има могућност његовог коришћења код куће. У последње четири генерације сви ученици су имали могућност употребе рачунара код куће. Ваннаставна комуникација између наставника и ученика, и између самих ученика, је делом вођена електронским путем. Треба навести још и то да су неки аспекти и резултати овако организоване наставе приказани у радовима [41], [42], [43], [44] и [65].

5.2. Проблем, циљ, задаци и хипотеза истраживања

Сматрајући да, у нашем случају, извођење педагошког експеримента у класичном смислу не би било најцелисходније, прибегли смо организовању, посматрању и унапређењу већ постојеће рачунарске наставе математике у природном окружењу. Због потребе да се на опипљив начин искаже њен учинак, извели смо и поређење са класичном наставом истих наставних јединица у паралелним одељењима.

Идеја овог рада је да се утврде могућности за унапређење наставе применом рачунара и софтвера *GeoGebra* у предавању и учењу аналитичке геометрије у равни у нашим средњим школама, првенствено због њене примене, како у математици тако и у ванматематичким областима. Дакле, било је потребно уочити обим и квалитет утицаја употребе рачунара и *GeoGebra*-е на савладавање садржаја из ове теме. Зато проблем овог истраживања дефинишемо као:

Сагледавање могућег утицаја рачунарски потпомогнуте наставе на процес учења и успех у теми „Аналитичка геометрија у равни“

У складу са наведеним проблемом, мора се конкретизовати циљ овог истраживања. Исказаћемо га на следећи начин:

Утврђивање прихваћености излагања материје уз помоћ рачунара и GeoGebra – е и заинтересованости ученика за аналитичку геометрију у равни.

Повратне информације би могле бити од користи при стварању оптималних услова за примену рачунарске наставе.

На основу наведеног циља, постављају се задаци чијим би се испуњењем истраживање заокружило у једну логичку целину, а заинтересованим наставницима пружила помоћ при организовању и извођењу рачунарске наставе, и то не само у овој области. Задаци овог истраживања су:

1. *Прецизирати методичко-дидактичке услове који ће утицати на повећање ефикасности обраде и примене аналитичке геометрије у равни употребом рачунара.*
2. *Израдити и проверити моделе рачунарске наставе, како на нивоу наставног часа тако и за мање и веће наставне целине.*

Такође, у складу са наведеним проблемом, формулишемо и хипотезу истраживања. Како је потребно статистички проверити и исказати утицај примене рачунарски потпомогнуте наставе на промену успеха ученика, посматраћемо разлику оцена из математике у експерименталној и контролној групи на почетку и крају експеримента. Зато ћемо нулту хипотезу исказати на следећи начин:

H_0: *Аритметичке средине оцена из математике у експерименталној и контролној групи се статистички не разликују.*

Њој одговарајућа алтернативна хипотеза ће бити:

H_1: *Аритметичке средине оцена из математике у експерименталној и контролној групи се статистички разликују.*

5.3. Експериментални узорак

Имајући на уму малу бројност одељења у којима је извођена описана настава, одлучили смо се да узорак за експерименталну групу педагошког експеримента формирамо заједничким посматрањем више узастопних генерација одељења гимназије средње школе „Никола Тесла“ у Лепосавићу. На исти начин, за узорак контролне групе узели смо узастопне генерације одељења електротехничког смера исте школе. У табелама 3 и 4 приказани су подаци о броју ученика и структури оцена из математике на крају првог полугодишта одговарајуће школске године у експерименталној и контролној групи.

Експериментална група						
	1	2	3	4	5	n
2008/9.	2	6	6	5	3	22
2009/10.	2	6	7	3	3	21
2010/11.	0	4	5	5	3	17
2011/12.	0	4	5	3	2	14
2012/13.	1	8	6	5	5	25
2013/14.	3	5	7	6	5	26
Укупно	8	33	36	27	21	125

Табела 3.

Контролна група						
	1	2	3	4	5	n
2008/9.	4	5	6	6	3	24
2009/10.	1	4	5	2	3	15
2010/11.	1	6	5	2	2	16
2011/12.	1	6	7	4	1	19
2012/13.	0	6	1	1	0	8
2013/14.	4	3	2	0	0	9
Укупно	11	30	26	15	9	91

Табела 4.

Закључке о ефектима овако организоване наставе изводили смо на основу резултата које су ученици постигли на тесту, након три обрађене групе наставних јединица – Дуж, Права и Кружница и писменом задатку, на крају теме Аналитичка геометрија у равни.

Међутим, на тестовима и писменим задацима било је одсутних ученика у обе групе. Зато смо, приликом статистичке обраде података, занемаривали њихове оцене са почетка истраживања, односно на крају првог полугодишта. Узимајући ово у обзир, структура оцена из математике, на крају првог полугодишта одговарајуће школске године, у експерименталној и контролној групи приказана је у табелама 5 и 6.

Експериментална група						
	1	2	3	4	5	n
2008/9.	2	5	5	5	3	20
2009/10.	2	6	7	3	3	21
2010/11.	0	4	4	5	3	16
2011/12.	0	4	5	3	2	14
2012/13.	1	8	5	4	5	23
2013/14.	3	5	6	5	4	23
Укупно	8	32	32	25	20	117

Табела 5.

Контролна група						
	1	2	3	4	5	n
2008/9.	4	4	6	6	3	23
2009/10.	1	3	5	2	3	15
2010/11.	0	6	5	2	2	16
2011/12.	1	5	7	3	1	17
2012/13.	0	5	1	1	0	7
2013/14.	3	3	2	0	0	8
Укупно	9	26	26	14	9	84

Табела 6.

На основу података из табела видимо да је за експерименталну групу средња вредност оцена $\overline{x_1} = 3{,}1453$ са стандардном девијацијом $\sigma_1 = 1{,}1930$, док су те вредности за контролну групу $\overline{x_2} = 2{,}8571$ и $\sigma_2 = 1{,}1458$. Како је

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 1{,}7289$$

и притом је

$$|z| = 1{,}7289 < 1{,}96 = z_{0{,}025}$$

те са поузданошћу од 95% можемо прихватити нулту хипотезу, односно можемо рећи да се средње оцене посматраних група статистички не разликују значајно. Ово значи да су експериментална и контролна група уједначене по питању средњих оцена. И остали чиниоци – бројност и структура одељења, средина из које долазе ученици, квалитет наставног особља, успех ученика из других предмета уједначени су на сличан начин.

5.4. Анализа тестова и писмених задатака

Након обрађених наставних јединица везаних за дуж, праву и кружницу, са сваком од генерација смо радили тест-проверу знања. Исти задаци су задавани експерименталној и контролној групи. Контролна група је задатке радила на класичан начин – на папиру, док је експерименталној групи било дозвољено да користи рачунаре и *GeoGebra*-у, али са ограничењем да не користе готове апликације које смо користили на часовима обраде. Ток и решења задатака записивали су на папиру. Ово, у ствари, значи да је експериментална група могла да користи рачунаре за скицирање односа између објеката датих у задатку, или проверу решења. У обе групе сматрало се да је задатак тачно урађен само ако су на папиру приказани исправан ток задатка и тачно решење. Како су све генерације радиле тест са сличним задацима приближно исте тежине, овде ћемо приказати задатке рађене школске 2008/09. године.

1. *На апсцисној оси одреди тачку која је на једнаким растојањима од тачака* $A(-2,1)$ *и* $B(3,4)$.
2. *Одреди параметар m тако да одсечак праве на Oy оси буде два пута дужи од њеног одсечка на Ox оси.*
3. *Из прамена правих одређеног правим* $4x+y-3=0$ *и* $x+y-1=0$ *издвој ону која пролази кроз тачку* $A(4,2)$.
4. *Одреди растојање тежишта T троугла ABC од његове најдуже странице ако је* $A(-6,2)$, $B(1,3)$ *и* $C(-1,-2)$.
5. *Одреди угао под којим права* $y=2x+1$ *сече кружницу* $(x-2)^2+(y-1)^2=16$ *у првом квадранту.*

Због потребе да се утврди у коликој су мери ученици усвојили појмове, у последње две генерације – 2012/13. и 2013/14. тест је измењен тако што су прва два задатка, задавана претходним генерацијама, замењена краћим задацима, односно питањима отвореног типа. Нови захтеви су били следећег облика:

1. *Наведи формулу и скицирај начин за одређивање растојања између две тачке.*
2. *Како би се могла искористити формула за израчунавање површине троугла при испитивању колинеарности тачака?*
3. *Одреди коефицијент правца и одсечке на координатним осама праве* $4x+3y-12=0$.
4. *Шта представљају бројеви p, q и r у једначини* $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$*?*

Сваки задатак је бодован са по 10 поена а цео тест са 50, с тим што смо бодовали и делове задатака као и исправан поступак. У последње две генерације, тачне одговоре на питања, односно решења кратких задатака бодовали смо са по 5 поена, с тим што, због једноставности захтева, нисмо прихватали „делимично тачне“ одговоре. Критеријум за оцењивање је био:

Од 0 до 14 поена	недовољан 1
Од 15 до 23 поена	довољан 2
Од 24 до 32 поена	добар 3
Од 33 до 41 поен	врло добар 4
Од 42 до 50 поена	одличан 5

У табелама 7. и 8. приказане су оцене које су ученици експерименталне и контролне групе постигли на овом тесту. Приказане су оцене само оних ученика који су били присутни и на тесту и на писменом задатку, јер смо у разматрању касније изузели ученике који су били одсутни са било које од ових провера.

Експериментална група						
	1	2	3	4	5	n
2008/9	2	4	6	4	4	20
2009/10	2	6	6	4	3	21
2010/11	0	5	5	4	2	16
2011/12	1	3	5	3	2	14
2012/13	3	4	7	5	4	23
2013/14	3	6	5	5	4	23
Укупно	11	28	34	25	19	117

Табела 7.

Контролна група						
	1	2	3	4	5	n
2008/9	6	6	8	2	1	23
2009/10	0	3	7	2	2	14
2010/11	2	3	6	2	2	15
2011/12	4	2	7	3	1	17
2012/13	0	4	2	0	1	7
2013/14	3	3	1	1	0	8
Укупно	15	21	31	10	7	84

Табела 8.

На основу података из табела видимо да је за експерименталну групу средња вредност оцена $\overline{x_1} = 3,1111$ са стандардном девијацијом $\sigma_1 = 1,2161$, док су те вредности за контролну групу $\overline{x_2} = 2,6786$ и $\sigma_2 = 1,1529$. Како је

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 2,5637$$

и притом је

$$|z| = 2,5637 > 1,96 = z_{0,025}$$

те са поузданошћу од 95% можемо рећи да се средње оцене посматраних група статистички значајно разликују у корист експерименталне групе.

Обзиром да смо задатке на тестовима бодовали са по 10 поена, оцене одсликавају само интервале којима припадају освојени поени појединих ученика. Ово значи да је било случајева да се скорови ученика разликују за један поен, што је за последицу давало разлику у целој оцени. Зато је корисно извршити слично поређење броја освојених поена по групама.

На основу прикупљених података добијамо да је за експерименталну групу средња вредност освојених поена $\overline{x_1} = 28,5043$ поена са стандардном девијацијом $\sigma_1 = 11,8741$, док су те вредности за контролну групу $\overline{x_2} = 24,7857$ и $\sigma_2 = 12,0322$. Како је

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 2,1729$$

и притом је

$$|z| = 2,1729 > 1,96 = z_{0,025}$$

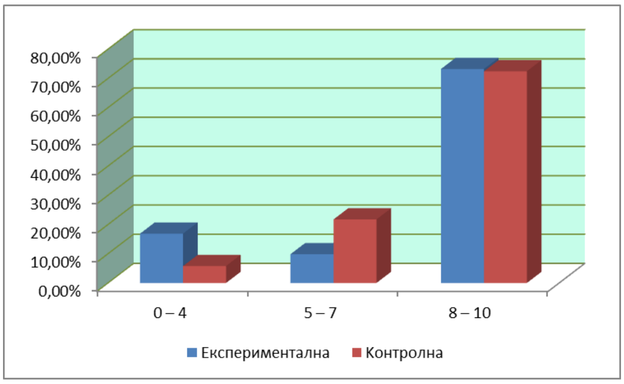
те са поузданошћу од 95% можемо рећи да се и средње вредности освојених поена посматраних група такође статистички значајно разликују у корист експерименталне групе. Приметно је, међутим, да је у овом случају z вредност мања.

Имајући на уму да је приказивање постигнутих резултата ученика прецизније уколико је урађено помоћу освојених поена него ако то урадимо помоћу добијених оцена, резултате које су ученици постигли по појединим задацима приказаћемо управо помоћу освојених поена. Притом се резултати првог и другог задатка односе на прве четири генерације ученика док се резултати преостала четири задатка односе на свих шест генерација. Проценат ученика групе који су урадили конкретан задатак, као и подаци везани за освојене поене за први други, трећи, четврти и пети задатак, дати су редом у табелама 9, 10, 11, 12 и 13. Одлуке о томе да ли је разлика у постигнутом броју поена статистички значајна или не, донели смо након спровођења z – теста за сваки од задатака.

Решавање првог задатка захтевало је од ученика да, на основу положаја тачке (припадност апсцисној оси и симетрали дужи), изведу закључак о њеним координатама. Било је потребно применити формулу за одређивање растојања између тачака. На основу средње вредности освојених поена на овом задатку, закључујемо да је контролна група постигла боље резултате од експерименталне, али добијена разлика није статистички значајна. Чак 50 од 69 ученика контролне групе (72,46%) су тачно решили задатак (притом, сматрамо да је задатак тачно решен ако је ученик освојио од 8 до 10 поена). Иако је у експерименталној групи тај проценат већи (52 од 71 ученика, односно 73,24%), укупне вредности су ниже због већег удела ученика експерименталне групе који су слабије или потпуно нетачно урадили задатак (12 од 71 ученика, односно 16,90%). Разлог зашто експериментална група, и поред употребе рачунара, није постигла боље резултате би могао бити и у једноставности захтева садржаних у овом задатку.

Поени	Е	К
0 – 4	16,90%	5,80%
5 – 7	9,86%	21,74%
8 – 10	73,24%	72,46%
$\overline{x}$	7,9155	8,4928
σ	3,5966	2,6492

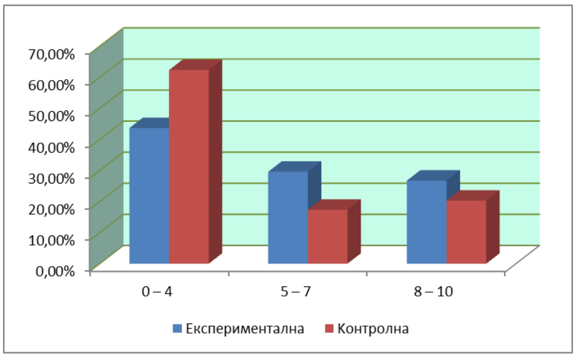
Нема разлике ($z = -1{,}0835$)



Табела 9.

Други задатак је захтевао одређивање вредности параметра *m* која, уврштена у једначину праве, за последицу даје одговарајући однос одсечака праве на координатним осама. Било је потребно познавати прелаз са општег на нормални облик једначине праве. Експериментална група је постигла бољи просек освојених поена. Потпуно и тачно решен задатак је имао 31 од 71 ученика експерименталне групе, док је тај удео код контролне групе био 14 од 69 ученика. Уз то, разлика у средњим вредностима је и статистички значајна, табела 10. Узимајући у обзир могућност бољег разумевања овог проблема уколико се у његовом разматрању користи рачунар и *GeoGebra*, закључујемо да је управо то један од чинилаца који је допринео разлици у средњим вредностима постигнутих поена.

Поени	Е	К
0 – 4	43,66%	62,32%
5 – 7	29,58%	17,39%
8 – 10	26,76%	20,29%
$\overline{x}$	4,5915	3,1014
σ	3,8492	3,9858



Има разлике ($z = 2,2492$)

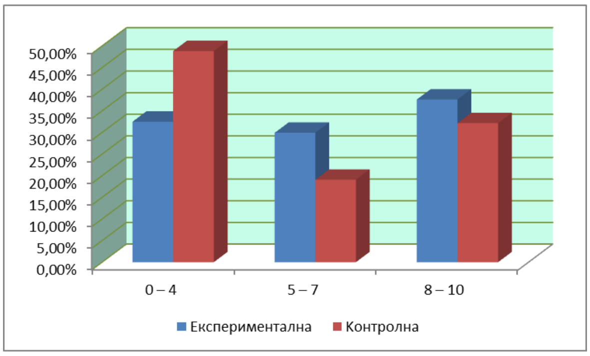
Табела 10.

У трећем задатку, захтев је био да се из прамена правих одређеног двема правим издвоји она која пролази кроз дату тачку. Експериментална група је постигла боље резултате и разлика је, у овом случају, статистички значајна, табела 11. У експерименталној групи, 44 од 117 ученика су тачно урадила овај задатак, док је код контролне групе тај удео 27 од 84 ученика.

Међутим, посебно је корисно упоредити начине решавања овог задатка. Наиме, међу ученицима експерименталне групе значајан део ученика (42 од 117 – 35,90% од којих 24 са тачним решењем, док су остали имали или делимично тачан или нетачан поступак, односно решење) радио је тако што су најпре одређивали пресечну тачку – центар прамена. Код контролне групе, број ученика који су радили на овај начин је био 14 од 84, што је много мањи проценат – 16,67%. Већи део ученика контролне групе са тачним решењем (20 од 27 – 74,07%) је одређивао вредност параметра λ за коју се добија права прамена која пролази кроз дату тачку. Код експерименталне групе, тај проценат је нижи – 20 од 44 ученика, односно 45,45%.

Све ово показује да, иако употреба рачунара олакшава решавање задатка, то не значи нужно и подизање квалитета знања. Ученици експерименталне групе су, често и без размишљања, покушавали да искористе „сирову снагу рачунара“, управо на начин који је описао Труше у [56].

Поени	Е	К
0 – 4	32,48%	48,81%
5 – 7	29,91%	19,05%
8 – 10	37,61%	32,14%
$\bar{x}$	5,5812	4,2738
σ	3,9045	4,4271

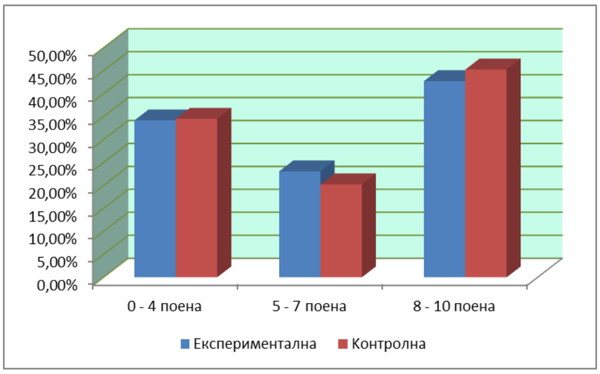


Има разлике ($z = 2{,}1682$)

Табела 11.

Четврти задатак се састојао од три захтева: да се одреди тежиште троугла, израчунају дужине страница тог троугла и растојање те тачке од његове најдуже странице. Сва три захтева су била рачунска и њихово решавање није захтевало посебну креативност. Употреба рачунара у овом задатку није представљала предност. Обе групе су постигле приближно исти просек поена, тако да не постоји статистички значајна разлика тих вредности, табела 12.

Поени	Е	К
0 – 4	34,19%	34,52%
5 – 7	23,08%	20,24%
8 – 10	42,73%	45,24%
$\bar{x}$	5,7179	5,7143
σ	4,0574	4,3619



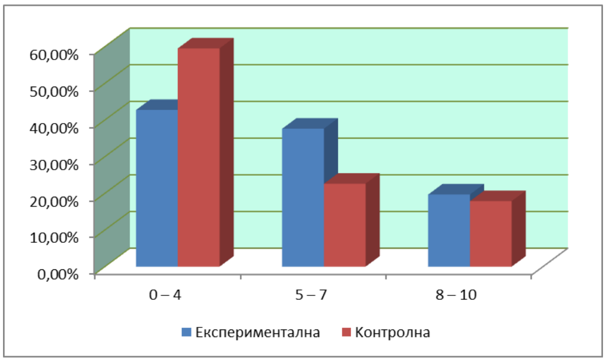
Нема разлике ($z = 0{,}0059$)

Табела 12.

И пети задатак се састојао од неколико рачунских делова – одређивања пресечних тачака праве и кружнице, одабира оне од пресечних тачака која се налази у првом квадранту, одређивања тангенте кружнице у тој тачки и одређивања угла између тако добијене тангенте и дате праве.

Ученици експерименталне групе су постигли боље резултате и разлика у односу на резултате ученика контролне групе је статистички значајна, табела 13. У овом случају, број ученика који су тачно урадили задатак је приближно исти у обе групе (23 од 117 – 19,66% у експерименталној групи, односно 15 од 84 – 17,86% у контролној). Стварању значајне разлике су највише допринели ученици који су „делимично тачно“ решили задатак, дакле они који су тачно урадили само поједине делове задатка. Овако урађени задаци су бодовани од 5 до 7 поена. У експерименталној групи је било 44 од 117 ученика (37,61%), чији је број освојених поена у петом задатку био у овом опсегу. У контролној групи их је било 19 од 82 (22,62%). Иако овим ученицима употреба рачунара и *GeoGebra*-е није помогла да дођу до тачног решења задатка, могуће је да им је то било олакшање у смислу оријентације у редоследу извршавања етапа задатка.

Поени	Е	К
0 – 4	42,74%	59,52%
5 – 7	37,61%	22,62%
8 – 10	19,66%	17,86%
$\bar{x}$	4,1966	3,0952
σ	3,7857	3,8075



Има разлике ($z = 2{,}0275$)

Табела 13.

Чињеница да је највећа разлика у постигнутим поенима остварена у задацима 2, 3 и 5 може бити протумачена и типом задатака. Иако у сваком од задатака коришћење рачунара и *GeoGebra*-е представља значајно олакшање, то је највидљивије баш у наведеним задацима, где је коришћење рачунара и динамичних радних листова од веће помоћи.

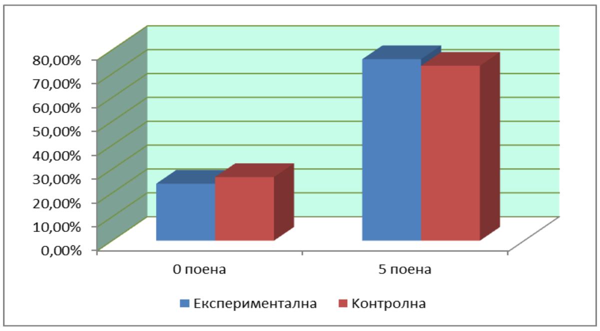
Намеће се и питање зашто коришћење раунара није дало исте резултате и у првом и четвртом задатку. Увидом у тип и резултате задатака, видимо да је код првог задатка, због једноставности захтева, употреба рачунара била отежавајућа околност, јер су ученици експерименталне групе „убеђени у моћ рачунара“ пре прибегавали покушајима да се задатак реши помоћу рачунара него да се изведу једноставне рачунске операције. Са друге стране, ученици контролне групе су задатак решавали на једини њима понуђен начин и постигли боље резултате. Ситуација је била слична и у четвртом задатку. Битно је навести да је, и поред јасно предочених правила, било ученика (5 од 12 са нетачним одговором у првом задатку и 14 од 40 у четвртом задатку) који су наводили готове вредности, било коначних било међурезултата, без наведеног исправног поступка. До њих су вероватно долазили само употребом рачунара, па такве резултате нисмо уважавали као тачне.

Без обзира што су у трећем задатку ученици експерименталне групе показали боље резултате, чињеница да добар део њих рачунаре није користио на начин који би покренуо и исказао њихову креативност, враћа нас на проблем оранизовања наставе у рачунарском окружењу. У оваквим ситуацијама, један од главних задатака наставника је да употребу рачунара у настави дозира и усмери тако да покрене креативну и истраживачку активност ученика и притом сведе на најмању могућу меру смањење когнитивне активности ученика науштрб рада на рачунару.

На тестовима које су радиле последње две генерације ученика, прва два задатка смо заменили са четири краћа захтева. Помоћу њих смо хтели да проверимо у коликој мери су ученици усвојили обрађене појмове и у каквој је вези усвојеност појмова са начином на који је материја представљена ученицима. У табелама 14, 15, 16 и 17 редом приказани су статистички подаци у вези резултата које су постигли ученици обе групе.

У првом од нових задатака, од ученика је захтевано да покажу да ли познају формулу за израчунавање растојања између тачака. Радило се, дакле, о репродукцији – најнижем нивоу знања. Други део овог задатка је био да се графички прикаже начин извођења ове формуле. Познавање графичког приказа извођења ове формуле значи њено разумевање што представља виши ниво знања. Задатак смо бодовали као тачно урађен, само ако је ученик тачно одговорио на оба захтева. Број ученика који су дали исправан одговор је био висок у обе групе – 35 од 43 (76,09%) ученика експерименталне групе, односно 11 од 15 (73,33%) ученика контролне групе. Експериментална група је показала бољи резултат, али разлика средњих вредности постигнутих поена није статистички значајна, табела 14.

Поени	Е	К
0	23,91%	26,67%
5	76,09%	73,33%
$\overline{x}$	3,8043	3,6667
σ	2,1563	2,2887



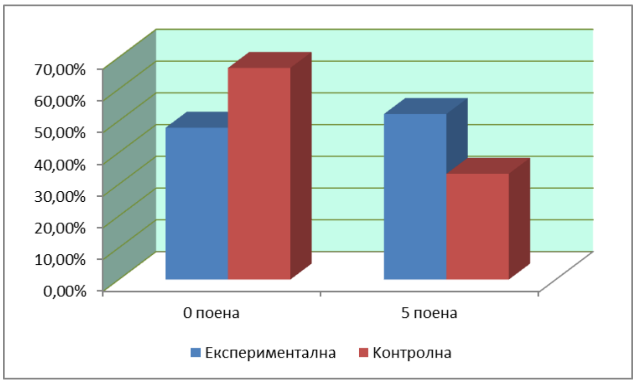
Нема разлике ($z = 0,2051$)

Табела 14.

Другим задатком смо проверавали у коликој су мери ученици спремни да знања из аналитичке геометрије примене у ситуацијама које подразумевају основне геометријске проблеме. Употреба рачунара као визуелног наставног средства је могла бити од помоћи у овом случају. Ученици експерименталне групе су постигли боље резултате, али разлика у освојеним поенима није била статистички значајна. Без обзира на ово, важно је приметити да је разлика у освојеним поенима у корист ученика експерименталне групе највећа управо у овом задатку, табела 15.

Поени	Е	К
0	47,83%	66,67%
5	52,17%	33,33%
$\bar{x}$	2,6087	1,6667
σ	2,5252	2,4398

Нема разлике ($z = 1,2874$)

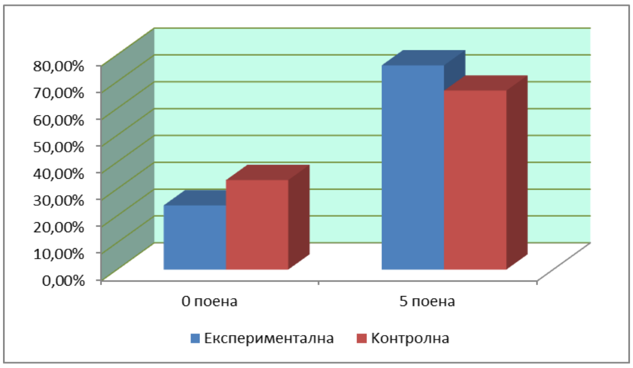


Табела 15.

Решавање трећег задатка подразумевало је да ученик може извести прелаз са општег на експлицитни, односно нормални облик једначине праве. Употреба рачунара је, и при решавању овог задатка, такође била од помоћи. Боље резултате је постигла експериментална група, али разлика ни овде није била статистички значајна, табела 16.

Поени	Е	К
0	23,91%	33,33%
5	76,09%	66,67%
$\bar{x}$	3,8043	3,3333
σ	2,1563	2,4398

Нема разлике ($z = 0,6675$)

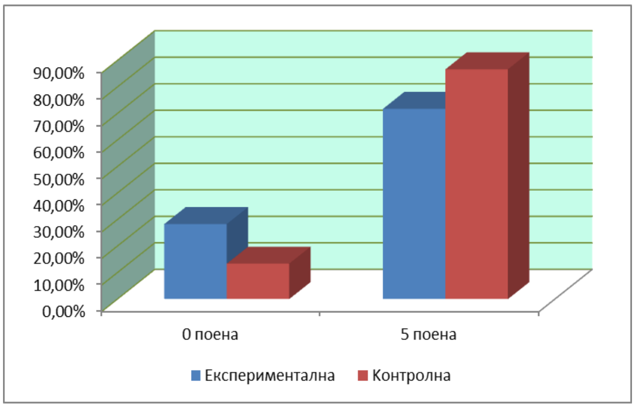


Табела 16.

Четвртим питањем смо проверавали могућност ученика да репродукују једноставне чињенице везане за изучавано градиво. Обе групе су постигле високе резултате (3,59 поена у експерименталној и 4,33 у контролној групи), али је индикативно да чак 13 од 46 (28,26%) ученика експерименталне групе није дало тачан одговор. У контролној групи тај удео је 2 од 15 (13,33%) ученика. Боље је, дакле, урадила контролна група, али са разликом која није статистички значајна, табела 17.

Поени	Е	К
0	28,26%	13,33%
5	71,74%	86,67%
$\overline{x}$	3,5870	4,3333
σ	2,2762	1,7593

Нема разлике ($z = -1,3375$)



Табела 17.

У табелама 18 и 19 приказани су збирни подаци за ова четири задатка у последње две генерације:

Експериментална група						
	0	5	10	15	20	n
2012/13	2	2	2	9	8	23
2013/14	1	2	4	12	4	23
Укупно	3	4	6	21	12	46

Табела 18.

Контролна група						
	0	5	10	15	20	n
2012/13	0	1	1	3	2	7
2013/14	1	2	1	1	3	8
Укупно	1	3	2	4	5	15

Табела 19.

На основу ових података, добијамо да је за експерименталну групу $\overline{x_1} = 13,8043$ поена са стандардном девијацијом $\sigma_1 = 5,6945$, док су те вредности за контролну групу $\overline{x_2} = 13,0000$ и $\sigma_2 = 6,7612$. Како је

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 0,4552$$

и притом је

$$|z| = 0,4552 < 1,96 = z_{0,025}$$

те са поузданошћу од 95% можемо рећи да се бројеви освојених поена које су посматране групе освојиле у ова четири задатка не разликују статистички значајно.

Ово, у ствари, значи да употреба рачунара, на начин како су то радили наставници у нашој експерименталној групи, не побољшава статистички значајно разумевање изучаваних појмова аналитичке геометрије.

Након завршене наставне теме Аналитичка геометрија у равни, ученици су радили редовне писмене задатке. Обе групе су радиле задатке у вежбанкама и без употребе рачунара. У свакој од генерација, експериментална и контролна група су радиле исте задатке. Различите генерације су радиле сличне задатке приближно исте тежине. Зато ћемо овде приказати само задатке које су ученици радили школске 2008/09. године.

1. *Одреди координате најближе и најудаљеније тачке кружнице* $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 12 = 0$ *од праве* $x - y + 5 = 0$.
2. *Израчунај површину четвороугла чија су два темена жиже елипсе* $9x^2 + 25y^2 = 225$ *а преостала два се поклапају са крајевима мале осе те елипсе.*
3. *Одреди једначину хиперболе чије су жиже у главним теменима елипсе* $9x^2 + 25y^2 = 225$ *а директрисе пролазе кроз жиже те елипсе.*
4. *Одреди једначине тангенти из тачке* $A(0,3)$ *на параболу* $y^2 = 4x$. *Одреди, затим, координате додирних тачака B и C тангенти и параболе и површину троугла ABC.*

Задатке смо бодовали на сличан начин као на тесту: потпуно и тачно урађен задатак бодовали смо са 10 поена, максималан број поена је био 40. Вредновали смо и исправан поступак, као и исправно урађене делове задатака. Критеријум за оцењивање је био следећи:

Од 0 до 8 поена	недовољан 1
Од 9 до 16 поена	довољан 2
Од 17 до 24 поена	добар 3
Од 25 до 32 поен а	врло добар 4
Од 33 до 40 поена	одличан 5

У табелама 20 и 21 приказан је успех ученика обе групе на овом писменом задатку:

Експериментална група						
	1	2	3	4	5	n
2008/9	2	4	6	5	3	20
2009/10	1	5	7	4	4	21
2010/11	1	3	6	4	2	16
2011/12	0	6	4	3	1	14
2012/13	3	5	8	4	3	23
2013/14	2	8	6	4	3	23
Укупно	9	31	37	24	16	117

Табела 20.

Конролна група						
	1	2	3	4	5	n
2008/9	5	6	8	3	1	23
2009/10	0	4	4	4	2	14
2010/11	2	3	6	4	0	15
2011/12	2	3	8	2	2	17
2012/13	1	3	1	1	1	7
2013/14	2	3	2	0	1	8
Укупно	12	22	29	14	7	84

Табела 21.

На основу података из табела, видимо да је за експерименталну групу средња вредност оцена $\overline{x_1} = 3,0598$ са стандардном девијацијом $\sigma_1 = 1,1544$, док су те вредности за контролну групу $\overline{x_2} = 2,7857$ и $\sigma_2 = 1,1415$. Како је

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 1,6712$$

и притом је

$$|z| = 1,6712 < 1,96 = z_{0,025}$$

те са поузданошћу 95% можемо рећи да се средње оцене посматраних група не разликују статистички значајно.

Узимајући у обзир бољу прецизност уколико се уместо оцена посматрају освојени поени, и за писмени задатак смо израчунали и упоредили статистичке податке на основу освојених поена по групама. За експерименталну групу смо добили средњу вредност $\overline{x_1} = 20,4782$ са стандардном девијацијом $\sigma_1 = 9,6808$, док су те вредности за контролну групу $\overline{x_2} = 17,9405$ и $\sigma_2 = 9,7478$. Како је

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 1,8321$$

и притом је

$$|z| = 1,8321 < 1,96 = z_{0,025}$$

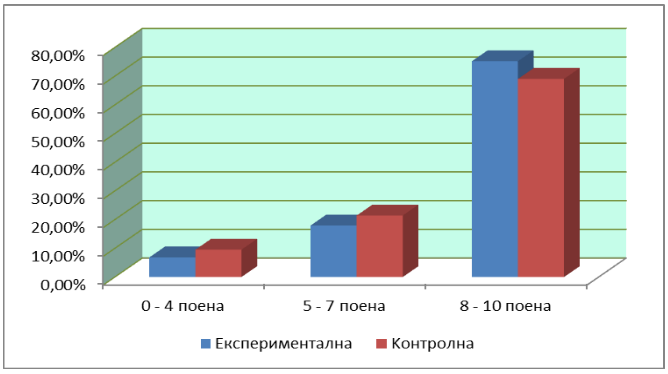
те са поузданошћу 95% можемо рећи да се ни средње вредности постигнутих поена посматраних група статистички значајно не разликују.

Важно је упоредити и бројеве постигнутих поена по задацима. У табелама 22,23, 24 и 25 редом приказани су статистички подаци везани за учинке експерименталне и контролне групе по задацима. Одлуку о постојању статистички значајне разлике доносили смо након одређивања z вредности за сваки од задатака.

Први задатак су одлично урадиле обе групе. Требало је одредити центар кружнице, једначину нормале из центра на дату праву, пресечне тачке нормале и кружнице и њихова растојања од дате праве. Начин рада се највише разликовао у последњој етапи задатка где је већи број ученика експерименталне групе (57 од 117 – 48,72% наспрам 12 од 84 – 14,29% у контролној групи) тражено растојање израчунавао тако што су најпре одређивали пресечну тачку дате праве и нормале а затим израчунавали растојање од ње до пресечних тачака нормале и кружнице. Овакво понашање је, вероватно, последица употребе динамичних радних листова на часовима обраде и вежбања и чешћег ослањања на геометријску интерпретацију проблема. У контролној групи су преовладавали ученици који су директно користили формулу за израчунавање растојања тачке од праве. Резултати се, међутим, нису значајно разликовали што показује и статистичка анализа у табели 22:

Поени	Е	К
0 – 4	6,84%	9,52%
5 – 7	17,95%	21,43%
8 – 10	75,21%	69,05%
$\bar{x}$	8,5299	8,0952
σ	2,8026	3,1109

Нема разлике ($z = 1{,}0181$)

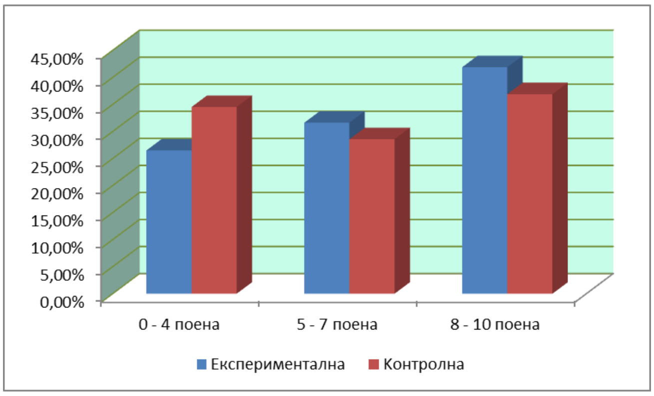


Табела 22.

Иако је други задатак био једноставнији, обе групе су показале слабије резултате него у првом. Требало је одредити жиже и темена елипсе, а онда израчунати површину четвороугла. Експериментална група је постигла боље резултате, али разлика није статистички значајна, табела 23. Осим тога, није било ни велике разлике у начину решавања задатка.

Поени	Е	К
0 – 4	26,50%	34,52%
5 – 7	31,62%	28,57%
8 – 10	41,88%	36,90%
$\overline{x}$	6,0427	5,3333
σ	3,8739	3,9586

Нема разлике ($z = 1,2642$)

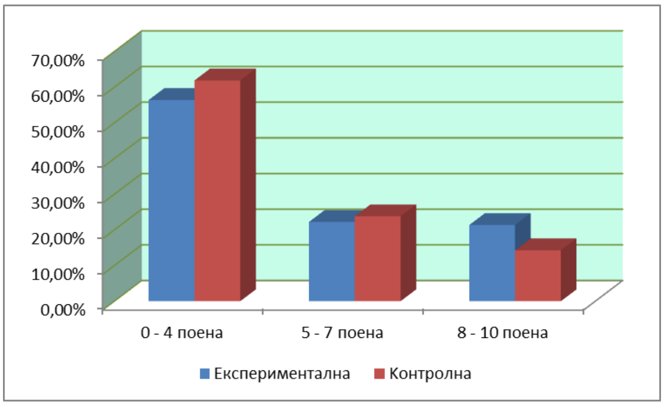


Табела 23.

Без обзира што су захтеви трећег задатка били рачунске природе, раније коришћење рачунара за графичке приказе могло је бити од користи при разумевању и овог задатка. Експериментална група је постигла боље резултате, али разлика у постигнутим поенима није статистички значајна, табела 24.

Поени	Е	К
0 – 4	56,41%	61,90%
5 – 7	22,22%	23,81%
8 – 10	21,37%	14,29%
$\overline{x}$	3,5897	3,0119
σ	3,9483	3,5955

Нема разлике ($z = 1,0784$)

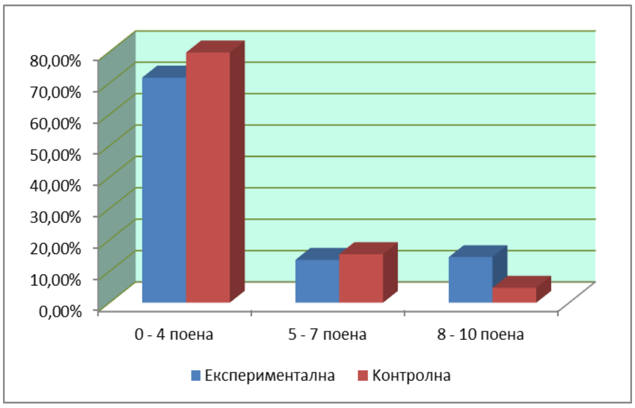


Табела 24.

Четврти задатак је био најсложенији и најзахтевнији, па су и ученици обе групе постигли најслабије резултате управо на овом задатку. Ученици експерименталне групе су постигли боље резултате, али разлика није статистички значајна. Ипак, z вредност је највећа на овом задатку, табела 25.

Поени	Е	К
0 – 4	71,79%	79,76%
5 – 7	13,68%	15,48%
8 – 10	14,53%	4,76%
$\overline{x}$	2,2906	1,5000
σ	3,6224	2,7353

Нема разлике ($z = 1,7621$)



Табела 25.

Закључак да ли је и у коликој мери овоме допринела употреба рачунара у настави можемо извести упоређујући ове резултате са резултатима на тесту. Ученици експерименталне групе су постигли значајно боље резултате у поређењу са ученицима контролне групе у другом, трећем и петом задатку теста а то су управо били сложенији задаци чије је решавање могло бити олакшано употребом динамичних радних листова. Код лакших задатака, употреба рачунара је побољшавала рад у мањој мери.

Након завршене наставне теме Аналитичка геометрија у равни, у експерименталној групи смо спроводили анкету са питањима везаним за искуства стечена током проучавања аналитичке геометрије у рачунарском окружењу. Упитник смо саставили у сарадњи са предметним наставницима. Већину питања смо концепирали тако да се из одговора може проценити расположење ученика и њихово субјективно мишљење о појединим аспектима експерименталне наставе. Садржина упитника је била следећа:

1. *Општи успех у:* *а) првом разреду*______________________________
   *б) другом разреду*______________________________
   *в) првом полугођу трећег разреда*________________

2. *Оцена из математике у:* *а) првом разреду*______________________________
   *б) другом разреду*______________________________
   *в) првом полугођу трећег разреда*_______________

3. *Да ли код куће поседујеш рачунар или имаш могућност свакодневног коришћења рачунара:*
   ДА *НЕ*

Уколико си на питање 3. одговорио/ла са ДА одговори на питања *4. и 5.* ***; уколико је одговор НЕ, одговори на питања*** *6. и 7.*

4. *Да ли неке делове изучаване материје боље разумеш ако их кући учиш уз помоћ рачунара?*

ДА НЕ ЗНАМ НЕ

5. *Да ли сматраш да домаће задатке радиш боље уз помоћ рачунара?*
   ДА НЕ ЗНАМ НЕ

6. *Да ли сматраш да домаће задатке радиш слабије због недостатка рачунара?*
   ДА НЕ ЗНАМ НЕ

7. *Да ли неко од твојих другова – другарица из одељења боље разуме изучавану материју од тебе само зато што има рачунар?*
   ДА НЕ ЗНАМ НЕ

8. *Да ли је GeoGebra први образовни софтвер са којим се срећеш?*
   ДА НЕ

9. *У коликој мери ти учење рада са GeoGebra-ом представља потешкоћу?*
   Веома Много Мало Нимало

10. *Колико су ти часови математике изведени помоћу рачунара и GeoGebra-е занимљиви?*
    Веома Много Мало Нимало

11. *Да ли више појмова из математике научиш на „рачунарском“ или „класичном“ часу?*
    Много више на „рачунарском“ Више на „класичном“
    Више на „рачунарском“ Много више на „класичном“

12. *Колико боље разумеш математичке појмове на „рачунарском“ или „класичном“ часу?*
    Много боље на „рачунарском“ Боље на „класичном“
    Боље на „рачунарском“ Много боље на „класичном“

13. *Да ли задатке на часовима математике лакше радиш уз или без помоћи рачунара?*
    Уз помоћ рачунара Подједнако добро Без помоћи рачунара

14. *Како оцењујеш „рачунарске“ часове математике у поређењу са „класичним“?*
    Много су бољи Бољи су Нема разлике Гори су Много су гори

15. *Да ли би убудуће желео/ла више или мање „рачунарских“ часова математике?*
    Много више Више Не знам Мање Много мање
    Нимало

Прва два захтева су се тицала општег и успеха из математике, тако да их овде нећемо посебно коментарисати.

Треће питање се тицало поседовања рачунара, односно могућности коришћења рачунара код куће. Само шест ученика из прве две генерације није имало рачунар. На основу њихових одговора на шесто и седмо питање закључујемо да већина њих (петоро) то није доживљавало као сметњу у изради домаћих задатака и разумевању материје. Са друге стране, од 117 ученика који су свакодневно имали приступ рачунару ван школе, осам ученика сматра да им употреба рачунара не помаже у разумевању материје док седам ученика сматра да им употреба рачунара не помаже у изради домаћих задатака.

Из одговора на осмо питање се види да је за деветнаесторо ученика *GeoGebra* први образовни софтвер са којим се срећу. Сви ученици сматрају да је савладавање *GeoGebra*-е мало (42 ученика) или нимало (75 ученика) тешко. Већина ученика је часове у рачунарском окружењу доживела као веома занимљиве (81) или занимљиве (36).

Питања 11 и 12 су била у вези квантитета и квалитета стечених појмова. Већина (80 ученика) сматра да више појмова научи у рачунарском окружењу него на „класичном" часу, док још већи број (87 ученика) сматра да је у рачунарском окружењу разумевање појмова боље него на „класичном" часу. Ови одговори ученика се, међутим, разликују од резултата које су последње две генерације показале решавајући прва четири задатка/питања на тесту. То, даље, значи да, колико год било важно, расположење и субјективно мишљење ученика о наставном процесу треба узимати са резервом.

Што се тежине израде задатака тиче (питање 13), 44 ученика сматра да подједнако добро раде задатке уз и без употребе рачунара. Остала 73 ученика сматра да је израда задатака у рачунарском окружењу лакша.

Коначно, сви ученици су часове у рачунарском окружењу оценили као боље и изјавили да би и убудуће желели више часова математике у рачунарском окружењу.

Све ово јасно говори да велика већина ученика радо прихвата часове математике у рачунарском окружењу и да су технички проблеми са којима се ученици срећу у оваквој настави мали и лако решиви.

5.5. Закључци истраживања

Настава у рачунарском окружењу описана у овом поглављу може бити од велике помоћи наставницима који желе примењивати рачунаре у настави само ако се из стечених искустава извуку исправни закључци. Не би требало дозволити да се процес наставе одвија стихијски или да драгоцена искуства до којих се дошло мукотрпним радом једноставно остану неискоришћена у наредним циклусима наставе. Како би се оваква настава стално унапређивала, потребно је обратити пажњу на циљ и задатке постављене у одељку 5.2. Од велике користи би било одредити начине и услове њиховог испуњења. Што се тиче циља, у светлу изведене наставе битно је напоменути:

Прихваћеност излагања материје уз помоћ рачунара и заинтересованост за аналитичку геометрију у равни умногоме зависи од приступа ученицима. Овако изведена настава је показала да заинтересованост ученика за материју и рачунарско окружење расте уколико се ученицима дозволи експериментисање и слободна *употреба рачунара. Наравно, заједно са заинтересованошћу расте и учинак наставе.*

У вези задатака изведеног истраживања стално треба имати на уму користи које би од њега имала свака настава математике у рачунарском окружењу. Зато, на основу овог истраживања изводимо следеће закључке:

1. *Ради повећања ефикасности обраде и примене аналитичке геометрије у равни треба инсистирати на томе да је рачунар не само помоћно рачунско средство, већ и потенцијални извор велике количине информација и идеја везаних за дати проблем. Уколико ученици буду имали овакав став, створиће се атмосфера у којој се од рачунара не очекује да реши цео проблем али помаже у извршавању рачунских делова задатака, цртању графика, проверавању хипотеза (једноставним варирањем почетне ситуације) и, често, стварању нових идеја за решавање проблема. Оваква атмосфера омогућава да се извуче максимум и из ученика и из рачунара.*

Овде, ипак, треба обратити посебну пажњу на то да је у оваквој настави код ученика често присутна тенденција да се до решења задатка стигне и без разумевања појмова о којима се ради. Овоме највише доприноси чињеница да употреба рачунара у настави у многоме олакшава извођење рачунских операција. Због тога се код ученика, макар и несвесно, дешава смањење когнитивне активности. Осим тога, коришћење динамичних приказа проблема на рачунару, иако најчешће појачава разумевање појмова, може довести до развијања навике да се већи део активности „препусти рачунару“. У овом смислу, резултате које су ученици последње две генерације показали на скупу питања/задатака теста намењених процени могућности репродуковања и разумевања појмова треба схватити као упозорење на могуће негативне последице претераног наглашавања важности рачунара у настави.

Задатак наставника је, зато, да наставу организује тако да њен центар буде ученик и да активности ученика у настави више усмерава ка разумевању појмова него ка бржем решавању задатака по сваку цену. Примера ради, уочено је да код једноставнијих захтева/ задатака употреба рачунара, било приликом обраде било приликом решавања задатака, не даје побољшања у толикој мери као код сложенијих задатака. Зато има смисла више пажње посветити почетним стадијумима овакве наставе.

2. *Видови наставе који би били најпогоднији у рачунарском окружењу могу варирати од ситуације до ситуације.*

Међутим, концептом ја – ти – ми који су развили Улм и Баух, обзиром да је лако изводљив у рачунарском окружењу, могу се постићи одлични резултати и из ученика извући оно најбоље. Иако извођење наставе по овом концепту захтева опсежне припреме, он се природно намеће не само на часу већ и у ваншколском изучавању проблема. Фазе ја и ти овог концепта се могу извести на часу док се последња фаза природно и спонтано развија ван школе. Пример за то су многобројни форуми на интернет страницама математичких образовних софтвера где ученици могу размењивати искуства са милионима корисника истих софтвера. Поред тога, фазе овакве наставе су временски испреплетене јер ученици имају могућност природног продужетка наставе ван школе.

Оваквим прецизирањем услова и начина за испуњење циља и задатака спроведеног истраживања будућим наставницима-практичарима се умногоме олакшава планирање и извођење наставе математике у рачунарском окружењу. Првенствено се мисли на избор и обим градива, избор одговарајућег софтвера, уређење учионице, као и избор типова и метода наставе.

Иако по питању хипотезе истраживања, на основу обрађених података после тестова и писмених задатака, резултати делују котрадикторно, лако је уочити контекст добијених резултата.

Наиме, резултати писмених задатака, које су обе групе радиле у вежбанкама без употребе рачунара, указују да можемо задржати нулту хипотезу – да нема статистички значајне разлике у просечним оценама експрименталне и контролне групе. Без обзира на то, видно је да су ученици експерименталне групе показали боље резултате.

Међутим, резултати тестова које је експериментална група радила уз употребу рачунара указују да треба одбацити нулту хипотезу у корист алтернативне, односно да постоји статистички значајна разлика у просечним оценама експерименталне и контролне групе.

Ово, у ствари, значи да је потпуно уједначавање обеју група немогуће уколико са експерименталном желимо да радимо у рачунарском окружењу. Са друге стране, ако посматрамо заокружен систем наставе у рачунарском окружењу (тј. и тестирање се одвија у истом окружењу), добија се значајно побољшање наставе, али је онда непримерено њено поређење са „класичном“ наставом.

Никако не би требало губити из вида негативне аспекте овако организоване наставе. Примери апликација, које су ученици самостално састављали као приказе решења задатака, показују да ученици лако могу користити и нове технологије за прикривање свог незнања или неразумевања појмова, односно проблема. Улога наставника у оваквим ситуацијама није само да их предупреди васпитним мерама, већ и да код ученика негује став да циљ употребе рачунара у настави није искључиво постизање бољег успеха исказаног вишим оценама. Ово посебно долази до изражаја, ако се у обзир узму резултати делова теста којима смо процењивали разумевање изучаваних појмова. Најједноставније речено, опасност лежи управо у тежњи наставника и ученика да се реши задатак без обзира на ниво разумевања појмова и проблема.

Поред тога, треба нагласити да настава математике у рачунарском окружењу ни у ком случају не искључује употребу табле и свеске. Разлог томе је потреба за неговањем симболичког приступа проучавању и употреби математике, без кога свака настава математике обесмишљава вишевековни труд многих генерација математичара и педагога.

Зато већ сада можемо рећи да би будућа истраживања требало усмерити у правцу развијања и прилагођавања образовних софтвера који би подржавали и симболички приступ настави математике. Друга могућност је налажење погодних поступака којима би се већ постојећи софтвери употребили на начин који поспешује симболичку страну математике.

Наравно, искуства и резултате добијене на овај начин не треба узети као калуп, као нешто што је једино исправно. Напротив, ово би био само један од предлога како да се то уради и сматрамо да ће се праксом доћи до погоднијих путева стицања знања и изграђивања савремене друштвено корисне личности ученика.

ЗАКЉУЧАК

Савремено друштво великим делом дугује свој напредак и опстанак у овом облику управо употреби рачунара у многим областима. Питање употребе рачунара у било којој области је већ ствар прошлости. Данас су актуелни проблеми налажења начина за што ефикаснију примену рачунара, као и испитивања односа људи према рачунарима и међуљудских односа у окружењу које подразумева употребу рачунара.

Образовање је осетљива област у којој и најмања грешка касније може проузроковати назадовање друштва. Зато сматрамо да посебну пажњу треба посветити свим аспектима примене рачунара у настави, почев од припреме учионице и наставних јединица, преко обраде градива до евалуације и примене стечених знања.

Огромна већина ученика и наставника данас има рачунар, или им је свакодневно, у школи или ван ње, омогућен рад на њему. Осим тога, предавачима и ученицима је на располагању мноштво математичких образовних софтвера, које је могуће лако и јефтино набавити. Било би нелогично не искористити тај потенцијал у образовне сврхе. Индикативно је, међутим, да највећи део ученика и наставника користи рачунар на начин који нема никакве блискости са образовним процесом. Због тога је, у почетним фазама организовања рачунарске наставе, један од најзначајнијих циљева указивање на образовни потенцијал и могућности примене информатичко-комуникационих технологија у настави.

У овој дисертацији описан је процес изградње и извођења наставе аналитичке геометрије у равни у рачунарском окружењу. Најпре је требало уложити огроман труд у процес идејног стварања и реализације рачунарског окружења погодног за успешно извођење наставе математике. У сарадњи са наставницима, уредили смо рачунарску учионицу и припремили наставне јединице за приказ у рачунарском окружењу. Затим, било је потребно што јасније уочити и протумачити евентуалне обрасце понашања, како ученика тако и наставника у новом окружењу. Наставници су морали да организују своје деловање тако да употреба рачунара у настави не буде отежавајућа околност, већ покретач инвентивности и креативности код ученика. Активности ученика током и ван наставе усмеравали смо тако да се подстиче самосталност у раду.

Осим тога, уочене су и ситуације у којима ученици свесно умањују когнитивну активност или, чак, покушавају да прикрију нетачне резултате. Прецизирани су и начини за откривање и отклањање ефеката таквих ситуација.

Све изнето у претходним поглављима је само један предлог за осавремењивање наставе математике и покушај да се она учини што кориснијом и занимљивијом за ученике, као и да се предавачима дају смернице за изграђивање наставе математике у рачунарском окружењу.

Наставници могу искористити неке од идеја изнетих у овом раду везаних како за техничке тако и за методичке аспекте наставе математике у новом окружењу. Предложено је више концепата наставе, од којих се може одабрати онај који је најпогоднији у датој ситуацији. Такође су приказани и разни начини уређења савремене рачунарске учионице, као и дефинисања и уређења односа између ученика и техничких средстава, између самих ученика и између ученика и предавача. Осим тога, за тему *Аналитичка геометрија у равни* израђен је низ динамичних радних листова који су проверени на часовима. Наравно, сваки од њих може бити прилгођен условима у било ком конкретном одељењу и употребљен на начин који би био најплодоноснији.

Резултати истраживања показују да се овако организованом наставом код ученика поспешује и развија жеља за истраживачким радом, што је један од предуслова за побољшање квалитета и ефикасности наставе. То, међутим, не значи да ће до побољшања доћи само пуким увођењем рачунара у настави. Важно је, поготову у почетним фазама овакве наставе, избећи насумично „истраживање“ ученика. Такође, једна од опасности лежи у стварању убеђења, било код ученика, било код наставника, да употреба рачунара у настави значи само брже извођење рачунских операција и брже и прецизније цртање скица.

Анализе резултата тестова и писмених задатака показују да су ученици експерименталне групе показали боље резултате у односу на ученике контролне групе, али се статистички значајна побољшања успеха постижу ако се и тестирање изводи уз употребу рачунара. Зато је потребно тежити равнотежи између побољшања успеха по сваку цену и правилног разумевања изучаване материје.

На крају, посебну пажњу треба обратити на опасност од занемаривања симболичког приступа математици, која је реална уколико се рачунар користи само као средство за извођење основних рачунских операција и цртање скица. Поред тога, поменута опасност је реалнија уколико се превелика нада уложи у „свемоћ“ рачунара и пропусти прави тренутак за формализовање идеја о изучаваним појмовима до којих се дошло на хеуристички начин у рачунарском окружењу. Управо на ово указују резултати које су ученици последње две генерације показали на питањима из теста везаним за разумевање обрађених појмова.

Сматрамо да се будућим истраживањима и праксом настава математике може даље побољшавати, не само у оквиру теме посматране у овом раду, већ у скоро свим областима предвиђеним планом и програмом. Осим тога, надамо се да ће се развој образовних софтвера одвијати и у правцу укључивања симболичког приступа математици.

SUMMARY

It is clear that the prosperity and endurance of the modern society are mostly due to the usage of computers in many areas of life. For that reason, the question of introduction of computers into an area of human activity is the matter of past. Ongoing problems nowadays are related to finding more efficient ways of computer usage, investigating human – computer and interpersonal relations in a computer – aided environment.

Education is a field where a tiny inaccuracy at present stage can cause significant regression at future stages. That is why we deem that a special attention should be paid to introduction of computers into all stages of the education process, including: preparation of an appropriate classroom, adaptation of the subject material to the new environment, its presentation to students, evaluation and application of the knowledge obtained.

Today, it is quite a commonplace that the vast majorities of students and teachers own a computer or have possibility to use it in the school or at home. Besides, present – day teachers and students have at hand multitude of mathematical/educational software that are very cheap and easy to acquire. Therefore, it is unreasoned not to use such a potential in order to boost the instruction process. A suggestive fact is that most of the students and teachers use computers in a way that has almost nothing in common with the education process. Therefore, one of the most important objectives in the initial stages of the computer – aided instruction should be emphasizing the educational potential and application possibilities of the information – communications technology.

In the study a process of teaching/learning analytic geometry in a computer – aided environment is described. First, one should invest tremendous efforts to design and bring to life a computer environment suitable for a successful mathematics instruction. In cooperation with the teachers working in the experimental school we arranged a computer – classroom, prepared appropriate subject material and adapted it to a computer – aided representation. Later, it was essential to clearly identify and interpret in a right way patterns of students' and teachers' behavior in the new environment. The teachers had to adjust their actions in the classroom in order to avoid possible flaws of the computer usage and initiate students' inventiveness and creativity.

We used to foster the students' activities that supported their individuality in exploration during and after the instruction process. Besides, we identified conditions that encourage students to consciously reduce their cognitive activities or, even, dissimulate incorrect results they achieved. We also specified the ways to expose and eliminate factors that lead to such conditions.

All presented in this work is just a proposal how to update the process of teaching/learning mathematics and an attempt to make the process more useful and more interesting to students as well as to direct teachers how to teach mathematics in a computer – based environment.

Teachers can use some of ideas presented in the work concerning technical as well as methodical aspects of the process of teaching/learning mathematics in a computer – based environment. There are proposed more concepts of the instruction process and one can choose the most suitable one to a certain educational situation. There are also shown different ways to organize a modern computer – based classroom and define and arrange relations between students and teaching aids, among the students themselves as well as between students and teachers. Furthermore, we produced a set of dynamic worksheets applicable to plane analytic geometry. The worksheets were used and tested during the regular lessons. Anyone of them can, of course, be adapted to the conditions that occur in another class or group of students and used in the most fruitful manner.

Results of our research indicate that the instruction organized in such a way helps generating and developing students' exploration in this field. This is one of the conditions needed to increase quality and efficiency of the instruction process. This, however, does not mean the improvements in the instruction process will occur along with a mere introduction of computers in the classroom. It is exceptionally important (especially in the initial stages of the computer – aided instruction) to avoid students' random "exploration". Another risk in this kind of instruction is development of conviction (both by students and teachers) that the computer usage in the teaching/learning process means only faster calculation and faster and more precise sketch drawing.

Test results analyses show that students of the experimental group achieved better performance comparing to the results of the control group students, but statistically significant improvements can be achieved if the testing process is also carried out in a computer – aided environment. For this reason, one should balance the instruction process goals between "improving achievements at any cost" and "understand the subject material correctly".

Finally, special attention should be paid not to disregard symbolic approach to mathematics. The danger of neglecting this approach becomes a real one when teachers and students use computers as simple computing and sketching tools only, consider them to be "omnipotent" machines and miss the right moment to formalize the ideas students built up in the computer – aided environment. Results that students of the last two generations have shown while solving simple problems related to the topic understanding indicate exactly the same danger.

Taking all these into consideration, we are of opinion that using the future researches and practice, the process of mathematics instruction can be further improved not only in the parts of the curriculum dealt with in the work, but almost in all areas of mathematics. We also hope that the development of the future educational software will bring together computer – aided environment and the symbolic approach to mathematics.

ЛИТЕРАТУРА

1. California Department of Education (2013). California Common Core State Standards – Mathematics. [интернет] Доступно на: http://www.cde.ca.gov/re/cc/, [приступљено 9.1.2014.].

2. Center for the Study of Mathematics Curriculum (2007). High school Mathematics: State Level Curriculum Standards and Graduation Requirements. [интернет] Доступно на: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED535222.pdf, [приступљено 9.1.2014.].

3. Curriculum Development Council and Hong Kong Examinations and Assessment Authority (2007). Mathematics Curriculum and Assesment Guide (Seconary 4 - 6). [интернет] Доступно на: http://www.edb.gov.hk/en/curriculumdevelopment/kla/ma/curr/index2.html, [приступљено 12.1.2014.].

4. Education Quality and Accountability Office (2013). PISA 2012 – Highlights of Ontario Student results. [интернет] Доступно на http://www.eqao.com/pdf_e/13/2012_PISA_Highlights_en.pdf, [приступљено 8.1.2014.].

5. Finnish Board of Education (2003). National Core Curriculum for Upper Secondary School for Young People. [интернет] Доступно на: http://www.oph.fi/english/curricula_and_qualifications/general_upper_secondary_education, [приступљено 10.1.2014.].

6. Finnish National Board of Education (2004). National Core Curriculum for Basic Education. [интернет] Доступно на: http://www.oph.fi/english/curricula_and_qualifications/basic_education, [приступљено 10.1.2014.].

7. Information Services Department, Hong Kong (2013). Hong Kong: The Facts – Education. [интернет] Доступно на: http://www.gov.hk/en/about/abouthk/factsheets/docs/education.pdf, [приступљено 12.1.2014.].

8. Ministerium furBildung, Wissenschaft und Weiterbildung, Rheinland – Pfalz (1998). Lehrplan Mathematik, Grund und Leistungfach Jahrgangsstufen 11 bis 13 der gymnasialen Oberstufe. [интернет] Доступно на: www.lehreplaene.bildung-rp.de, [приступљено 21.1.2014.].

9. Ministerium fur Bildinug, Wissenschaft, Jugend und Kultur, Rheinland – Pfalz (2007). Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5 – 9/10). [интернет] Доступно на: http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/mattheis/unterricht/lehrplan-mathematik-5-10-von-2007, [приступљено 21.1.2014.].

10. Ministry of Education (2005). The Ontario Curriculum, grades 9 and 10, Mathematics. [интернет] Доступно на: http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math910curr.pdf, [приступљено 8.1.2014.].

11. Ministry of Education (2007). The Ontario Curriculum, grades 11 and 12, Mathematics. [интернет] Доступно на: http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math1112currb.pdf, [приступљено 8.1.2014.].

12. Ministry of Education – Curriculum Planning and Development Division, Singapore (2006). Secondary Mathematics Syllabuses. [интернет] Доступно на:

http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-secondary.pdf, [приступљено 11.1.2014.].

13. Ministry of Education – Curriculum Planning and Development Division, Singapore (2012). Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus. [интернет] Доступно на: http://www.moe.edu.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-primary-2013.pdf, [приступљено 11.1.2014.].

14. Ministry of Education Publications (2008). PISA06, Analyses, Reflections, Explorations. [интернет] Доступно на: http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2008/liitteet/opm44.pdf?lang=en, [приступљено 10.1.2014.].

15. Qualifications and Curriculum Authority (2007). Mathematics Programme of Study for Key Stage 3and Attainment Targets. [интернет] Доступно на: https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/239058/SECONDARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf, [приступљено 24.1.2014.].

16. Qualifications and Curriculum Authority (2007). Mathematics Programme of Study for Key Stage 4. [интернет] Доступно на: http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20130904084026/https://media.education.gov.uk/assets/files/pdf/m/mathematics%20-%20key%20stage%204%2004-02-13.pdf, [приступљено 24.1.2014.].

17. Talim ve Terbiye kurulu Baskanligi, Ankara (2013). Ortaokul Matematik dersi (5 – 8 siniflar), Ogretim Programi, Milli Egitim Banligi. [интернет] Доступно на: http://ttkb.meb.gov.tr/dosyalar/programlar/ilkogretim/matematikuygulamalari_ortaokul.pdf, [приступљено 13.5.2014.].

18. Talim ve Terbiye kurulu Baskanligi, Ankara (2013). Ortaokul Matematik dersi (9 – 12 siniflar), Ogretim Programi, Milli Egitim Banligi. [интернет] Доступно на: http://ttkb.meb.gov.tr/www/guncellenen-ogretim-programlari/icerik/151, [приступљено 13.5.2014.].

19. The Curriculum Development Council, Hong Kong (1999). Syllabuses for Secondary Schools Mathematics, Secondary 1 – 5. [интернет] Доступно на: http://www.edb.gov.hk/en/curriculum-development/kla/ma/curr/sec-math-1999.html, [приступљено 12.1.2014.].

20. Zavod za unapređenje školstva, Zagreb (2003). Kurikularni pristup promjenama u gimnaziji – Razrada okvirnog plana i programa u funkciji rasterećenja učenika.

21. Zavod za šolstvo, Ljubljana (2008). Učni načrt. Matematika. [интернет] Доступно на: http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2008/programi/gimnazija/ucni_nacrti.htm, [приступљено 4.1.2014.].

22. Биро за развој на образованието, Скопје (2002). Наставна програма по Математика, [интернет] Доступно на: http://bro.gov.mk/docs/gimnazisko/zadolzitelnipredmeti/Matematika3.pdf, [приступљено 1.5.2014.].

23. Национални просветни савет (2011). Правилник о изменама и допунама Правилника о наставном плану и програму за гимназију. [интернет] Доступно на: http://www.mpn.gov.rs/dokumenta-i-propisi/nastavni-planovi-i-programi/srednje-obrazovanje-i-vaspitanje/79-gimnazije/883-pravilnik-o-izmenama-i-dopunama-pravilnika-o-nastavnom-planu-i-programu-za-gimnaziju, [приступљено 13.5.2014.].

24. Artigue, M. (2000). Instrumentation Issues and the Integration of Computer Technologies into Secondary Mathematics Teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of the GDM*, Potsdam, 2000.

25. Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment – The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

26. Attewell, P., Suazo – Garcia, B., Battle, J. (2003). Computers and Young Children: Social Benefit or Social Problem? *Social Forces*, 82(3): 277-296.

27. Bauch, M. J., Pikalova, V. (200?). The Concept I – You We and Dynamic Worksheets. [интернет] Доступно на: http://did.mat.uni-bayreuth.de/~manfred/lv/spain.pdf , [приступљено 5.2.2014].

28. Defouad, B. (2000). Etude de genese instrumentals lices a l'utilisation d'une calculatrice simboliq en classe de premiere. *These de doctorat*, Universite de Paris.

29. Fahlberg – Stojanovska. L., Stojanovski V. (2009). GeoGebra – Freedom to Explore and Learn. *Teching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 28(2), 49-54.

30. Haciomeroglu, E. S., Bu, L., Haciomeroglu, G. (2010): Integrating Technology into Mathematics Education Teacher Courses, *GeoGebra Conference*, 27-28.7.2010. Ithaca, NY: Ithaca College New York.

31. Haciomeroglu, E.S., Bu, L., Schoen, R.C., Hohenwarter, M. (2009). Learning to develop Mathematics Lessons with GeoGebra, *MSOR Connections* 9, no. 2 24-26.

32. Haughland, S. W. (2000): Computers and Young Children, Eric Clearnighouse on Elementary and Early Childhood Education. [интернет] Доступно на: http://ecap.crc.illinois.edu/eecearchive/digests/2000/haugland00.pdf, [приступљено 10.4.2014.].

33. Heid, K. (1997). The Technological Revolution and the Reform of School Mathematics. *American Journal of Education*, 106 (1), 5-61.

34. Hohenwarter, M., Preiner, J., Yi, T. (2007). Incorporating GeoGebra into Teaching Mathematics at the College Level. *Proceedings of ICTCM 2007, GeoGebra at the College Level* , Boston, MA, 1-7.

35. Hoyles, C., Noss, R. (2002). What Can Digital Technologies Take from and Bring to Research in Mathematics Education? *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 323-349.

36. Hoyles, C., Noss, R., Kent, P. (2003).On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 309-326.

37. Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. *Handbook on Research Mathematics Teaching and Learning*. New York: Simon and Schuster Macmillan, 515-556.

38. Klawe, M. M. & Phillips, E. (1995). A classroom study: Electronic games engage children as researchers. *Proceedings of Computer Support for Collaborative Learning '95 (CSCL)*, Bloomington, Indiana.

39. Laborde, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri – geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283-317.

40. Laborde, C., Laborde, J. M. (1995). What about a Learning Environment where Euclidean Concepts are Manipulated with a Mouse? In A. di Sessa, C. Hoyless, R. Noss (Eds.), *Computers and Exploratory Learning (pp 241-262)*. NATO ASI Series, Subseries F (146).

41. Ljajko E., Ibro V.(2013). Development of Ideas in a GeoGebra – aided Mathematics Instruction, *Mevlana International Journal of education (MIJE), Vol. 3(3) Special Issue: Dynamic and Interactive Mathematics Learning Environments*, 1-7,[интернет] Доступно на: http://mije.mevlana.edu.tr/ , [приступљено 10.5.2014.].

42. Ljajko E., Pavličić Z., Radulović I. (2009). Some technical difficulties with GeoGebra in high-school mathematics instruction, *Zbornik radova konferencije MIT 2009*, Kosovska Mitrovica, 27.8. – 5.9.2009. стр. 206-209.

43. Ljajko, E., Mihajlović, M., Pavličić, Z. (2010). The hyperbola and GeoGebra in high – school instruction. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 8(2), 277-285.

44. Ljajko, E., Maksić, J. (2011). Proučavanje elipse pomoću GeoGebre. *Osječki matematički list* 11, 39-44.

45. Mitchelmore, M., White, P. (2007). Abstraction in Mathematics Education, *Mathematics Education Research Journal*, Vol 19, No2, 1- 9.

46. Papert, S. (1990). A Critique of Technocentrism in Thinking about the School of the Future. "*M.I.T. Media Lab Epistemology and Learning Memo No. 2*".

47. Papert, S. (1993) *Mindstorms – Children, Computers and Powerful Ideas, 2nd Edition*, Basic Books Inc. Publishers, New York.

48. Papert, S. (1987). Computer Criticism vs. Technocentric Thinking. *Educational Researcher*. Vol. 16, no. 1, 22-30.

49. Papert, S. (1996). Computers in the Classroom: Agents of Change. *The Washington Post Education Review Sunday*, Washington, DC.

50. Prensky, M.(2001). Digital Natives, Digital Immigrants. *On the Horizon*, MCB University Press, Vol. 9 No. 5, [интернет] Доступно на: http://edorigami.wikispaces.com/file/view/PRENSKY%20-%20DIGITAL%20NATIVES%20AND%20IMMIGRANTS%202.PDF/30785667/PRENSKY%20-%20DIGITAL%20NATIVES%20AND%20IMMIGRANTS%202.PDF, [приступљено 13.5.2014.].

51. Prensky, M.(2001) Do They Really Think Differently? *On the Horizon*, MCB University Press, Vol. 9 No. 6, [интернет] Доступно на: http://edorigami.wikispaces.com/file/view/PRENSKY%20-%20DIGITAL%20NATIVES%20AND%20IMMIGRANTS%202.PDF/30785667/PRENSKY%20-%20DIGITAL%20NATIVES%20AND%20IMMIGRANTS%202.PDF, [приступљено 13.5.2014.].

52. Roschelle, J., Kaput, J., Stroup, W. (2000). SimCalc: Accelerating Students' Engagement with the Mathematics of Change. *Educational Technology and Mathematics and Science for the 21st Century*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 47-75.

53. Subrahmanyam,K., Kraut, R., Greenfield, P. M., Gross, E. F. (2000): The Impact of Home Computer Use on Children's Activities and Development, *The Future of Children and Computer Technology*, Vol 10, No 2, pp 123-144.

54. Taylor, R. (1980). The Computer in School: Tutor, Tool, Tutee. New York: *New York Teachers College Press.*

55. Trouche, L. (1999). New Technological Environments: New Constraints, New Opportunities for the Teacher. *Proceedings of ICTMT4*, Plymouth, UK, 9-13.8.1999.

56. Trouche, L. (2005). An instrumental approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environment. In D. Guin, K. Ruthven, L. Trouche (Eds.), *The didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument(pp 137-162).* New York: Springer.

57. Ulm, V. Ich, Du, Wir – ein Lern – und Arbeits prinzip im Mathematikunterricht. *Praxis Schule*, 5-10, Heft 4 (2002), 30-34.

58. Вученов, С. (2012). Мерење ученичког напретка при коришћењу рачунара у настави математике. *Мастер рад*, Нови Сад: Природно-математички факултет у Новом Саду.

59. Гашић – Павишић, С., Станковић, Д. (2012). Образовна постигнућа ученика из Србије у истраживању TIMSS 2011, *Зборник Института за педагошка истраживања* , 44/2, стр. 243-265.

60. Даниловић, М. (1997). Могућности реализације процеса учења уз примену мултимедијалне технологије, *Зборник Института за педагошка истраживања*, 29 (260–270). Београд: Институт за педагошка истраживања.

61. Дејић, М. (1996). Методичка трансформација и осавремењавање наставе нумеричке математике. *Докторска дисертација*, Нови Сад: Природно-математички факултет у Новом Саду.

62. Ибро, В. Д. (2011). Дидактичко-методичке могућности унапређења наставе математике у основној школи. *Монографија*, Лепосавић: Учитељски факултет у Лепосавићу.

63. Кечкић, Ј.Д. (1990). Математика са збирком задатака за трећи разред средње школе, *Научна књига*, Београд, *Завод за уџбенике и наставна средства*, Нови Сад.

64. Коцић, Љ. (1981). Педагошки експеримент. Београд: Институт за педагошка истраживања, Просвета.

65. Љајко, Е., Павличић, З., Радуловић, И. (2009). GeoGebra у средњошколској настави аналитичке геометрије, *Педагошка стварност*, LV, 9 – 10, 909-920.

66. Мандић,Д,(2001). Информациона технологија у образовању. *Филозофски факултет у Српском Сарајеву/ Виша школа за образовање васпитача*. Сарајево/ Београд.

67. Павловић – Бабић, Д., Бауцал, А. (2013). Подржи ме, инспириши ме, PISA 2012 у Србији, први резултати, Београд: *Институт за психологију Филозофског факулетета у Београду, Центар за примењену психологију.*

68. Стојковић, Р. (2006). Настава тригонометрије у средњој школи. *Докторска дисертација*, Нови Сад: Природно-математички факултет у Новом Саду.

69. Такачи, Ђ., Пешић, Д., Милутиновић, М. (2005). Усвајање појма непрекидности функције. *Педагошка стварност*, 51, 5-6, 387-398.

70. Херцег, Д. (2007). Математика и рачунари у школи. *Технологија, информатика и образовање за друштво учења и знања*, Зборник радова, Нови Сад, 470-475.

71. Херцег, Д., Љајко, Е. (2008). Приближно решавање једначина помоћу рачунара. *Настава математике*, LIII, 1-2, 32-42.

Интернет извори:

1. www.cabri.com, [приступљено 22.12.2013.]
2. www.chartwellyorke.com, [приступљено 17.2.2014.]
3. www.cinderella.de, [приступљено 13.1.2014.]
4. www.clc2.uniservity.com [приступљено 23.1.2014.]
5. www.dynamicgeometry.com, [приступљено 23.1.2014.]
6. http://eugenljajko.info/aplikacije%20analiticka.html
7. www.geogebra.org
8. www.geogebratube.org
9. http://www.kaputcenter.umassd.edu/ , [приступљено 26.1.2014.]
10. www.maplesoft.com, [приступљено 8.11.2013.]
11. www.mathworks.com, [приступљено 3.12.2013.]
12. www.webgate.ec.europa.eu, [приступљено 24.1.2014.]
13. www.wolfram.com, [приступљено 5.5.2014.]

БИОГРАФИЈА

ЕУГЕН ЉАЈКО је рођен 26. јула 1974. године у Драгашу, Република Србија. Похађао је основну школу „5. октобар“ у Крушеву и завршио је 1989. године. Исте године уписује Средњу техничку школу у Призрену, смер Електротехничар рачунских машина, коју је завршио 1993. године са одличним успехом.

Природно-математички факултет у Приштини уписује 1993. а завршава га 1997. године са просечном оценом 8,23 и оценом 10 на дипломском испиту чиме стиче стручни назив Дипломирани математичар. Дипломски испит је полагао код др Јована Мадића. Тема дипломског рада била је Метода Монте-Карло. Магистарске студије је уписао 2005. године на Департману за математику и информатику Природно-математичког факултета у Новом Саду, на смеру Методика наставе математике и завршио их са просечном оценом 9,83. Успешно је одбранио магистарску тезу „Методичка и техничка разрада решавања једначина уз примену рачунара у средњој школи“ 2007. године под менторством проф. др Драгослава Херцега.

По завршетку факултета, 1997. године запослио се у истуреном одељењу призренске гимназије „Јованка Радивојевић-Кица“ у Драгашу и до марта 1999. године предавао математику ученицима природно-математичког смера те гиманзије као и ученицима економског, правног и трговачког смера Економско-трговачке школе у Драгашу. Након ратних збивања на Космету, гимназија је престала са радом па је у просвети почео поново да ради тек од 2005. године запосливши се као наставник математике у О.Ш. „ 22. децембар“ у Рестелици код Драгаша, где је радио до 2008. године. И сте године почиње са радом на Природно-математичком факултету у Косовској Митровици, на којем још увек ради као асистент.

Члан је друштва Математичара Србије од 1997. године и *GeoGebra* Института у Новом Саду од 2011. године. Има низ објављених радова из области методике наставе математике у домаћим и међународним часописима. Са саопштењима је учествовао на више научних скупова а на конференцијама МИТ 2009, МИТ 2011 и МИТ 2013 је и члан Организационог одбора.

Нови Сад,   2014.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР
Идентификациони број:
ИБР
Тип документације: Монографска документација
ТД
Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ
Врста рада: Докторска дисертација
ВР
Аутор: мр Еуген Љајко
АУ
Ментор: Др Драгослав Херцег, редовни професор
МН
Наслов рада: Утицај GeoGebra-е на предавање и учење аналитичке геометрије у средњој школи
МР
Језик публикације: српски (ћирилица)
ЈП
Језик извода: српски и енглески
ЈИ
Земља публиковања: Србија
ЗП
Уже географско подручје: Војводина
УГП
Година: 2014.
ГО
Издавач: Ауторски репринт
ИЗ
Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовича 3
МА
Физички опис рада: (7/ 123/ 25 / 17/ 0/ 0)
ФО
Научна област: Математика
НО
Научна дисциплина: Методика наставе математике
НД
Кључне речи: учење математике, аналитичка геометрија, рачунарско окружење, GeoGebra, динамични радни листови
ПО
УДК:
Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику
ЧУ

Важна напомена: нема
ВН
Извод: У дисертацији се разматра утицај примене рачунара на предавање и учење аналитичке геометрије. Израђени су одговарајући динамични радни листови којима је пропраћено градиво изложено у званичном уџбенику. Приказана је примена рачунара и софтвера GeoGebra у изграђивању рачунарског окружења погодног за изучавање аналитичке геометрије у равни.
ИЗ
Датум прихватања теме од стране НН већа: 15.12.2011.
ДП
Датум одбране:
ДО
Чланови комисије:
КО

Председник:	др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
Члан:	др Ђурђица Такачи, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
Члан:	др Александар Петојевић, ванредни професор Педагошког факултета у Сомбору

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Doctorate Thesis
CC
Author: Eugen Ljajko
AU
Mentor: Ph. D. Dragoslav Herceg, Full Professor
MN
Title: GeoGebra Influence on Teaching and Learning Analytic Geometry in High School
XI
Language of text: Serbian (Cyrillic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: (7/ 123/ 25 / 17/ 0/ 0)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Didactics of Mathematics
SD
Key words: mathematics instruction, analytic geometry, computer – empowered environment, GeoGebra, dynamic worksheets

SKW UC:

Holding data: Institute of Mathematics Library,
Novi Sad, Faculty of Science,
Trg Dositeja Obradovića 4

HD

Note: none

N

Abstract: The thesis considers the impact that computer usage makes on analytic instruction process. Appropriate dynamic worksheets are developed in order to ease students' understanding of the subject material included in the official textbook. Computers and GeoGebra were used to build a computer empowered learning environment suitable for plane analytic geometry instruction.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 15.12.2011.

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President:	Ph. D. Dragoslav Herceg Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Ph. D. Djurdjica Takači Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	Aleksandar Petojević AssociateProfessor, Teachers' Faculty Sombor, University of Novi Sad