UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Katarina I. Petković

KARAKTERIZACIJA OGRANIČENIH LINEARNIH I KOMPAKTNIH OPERATORA IZMEDJU BK PROSTORA

Doktorska disertacija

Niš, 2016.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Katarina I. Petković

CHARACTERIZATION OF BOUNDED LINEAR AND COMPACT OPERATORS BETWEEN BK SPACES

PhD thesis

Niš, 2016.

Komisija za odbranu doktorske disertacije

Mentor: dr Ivana Djolović
vanredni profesor
Tehnički fakultet u Boru
Univerzitet u Beogradu

Član komisije: dr Eberhard Malkowsky
redovni profesor
Department of Mathematics, Faculty of Science
Fatih University, Istanbul, Turkey

Član komisije: dr Vladimir Rakočević
redovni profesor
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Nišu

Član komisije: dr Dragan Djordjević
redovni profesor
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Nišu

Član komisije: dr Slobodan Tričković
redovni profesor
Gradjevinsko-arhitektonski fakultet
Univerzitet u Nišu

Datum odbrane:_______________

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Катарина И. Петковић
Ментор, **МН**:	Ивана Ђоловић, ванредни професор, Технички факултет у Бору, Универзитет у Београду
Наслов рада, **НР**:	Карактеризација ограничених линеарних и компактних оператора између БК простора
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	српски
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2016.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	94 стр.
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	функционална анализа
УДК	517.982.2 + 517.983
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	У оквиру ове тезе уведени су нови простори низова и указано је на сличности и разлике између матричних трансформација и уопштених ограничених линеарних оператора на БК просторима низова. Користећи теорију ФК и БК простора и теорију о матричним доменима троугаоне матрице, дата је карактеризација матричних трансформација између новоуведених простора низова. Такође је, у случајевима где је то могуће, дато представљање уопштених ограничених линеарних оператора помоћу бесконачне матрице. У наставку су одређени услови за компактност појединих класа оператора. Помоћу Хаусдорфове (Hausdorff) мере некомпактности налазе се потребни и довољни услови за компактност одговарајућих оператора . У случајевима где је то немогуће, и где уместо тачних вредности добијамо само оцену мере некомпактности оператора, примењени су резултати Сарџента (Sargent). Применом последњих резултата многи већ познати услови за комапктност су побољшани. У тези су наведени неки такви, побољшани, примери али су такође дати и нови резултати везани за новодефинисане просторе. Посматрани су и случајеви када је немогуће применити било Хаусдорфову меру некомпактности, било резултате Сарџента, па је у њима карактеризација компактних оператора извршена на основу специфичних особина посматраних простора. У појединим ситуацијама резултати о компактности су формулисани и за уопштене ограничене линеарне операторе.
Датум прихватања теме, **ДП**:	08.09.2014.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**:	Председник:
	Члан:
	Члан:
	Члан:
	Члан, ментор:

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Katarina I. Petković
Mentor, **MN**:	Ivana Đolović, associate professor, Technical Faculty in Bor, University of Belgrade
Title, **TI**:	Characterization of bounded linear and compact operators between BK spaces
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2016
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	94 p.
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	mathematical analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	functional analysis
UC	517.982.2 + 517.983
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		Within this thesis , the new sequence spaces are introduced and the similarities and the differences between the matrix transformations and the general linear bounded operators on BK spaces are considered. The characterization of matrix transformations between new-defined sequence spaces is done by applying the theory of FK and BK spaces along with the results related to matrix domains of triangles. In some cases, where it is possible, the representation of general linear bounded operator is given by infinite matrix. Further on, the condition for compactness of certain classes of operators are given. Applying the Hausdorff measure of noncompactness, the necessary and sufficient conditions for compactness are obtained. In the cases where it is not possible, and where instead of the exact value we can only get the estimations for the measure of noncompactness of the operator, the results of Sargent are applied. This thesis contains some of such, improved, examples but also the new results concerning the newly defined spaces. The cases in which one can not apply the Hausdorff measure, nor the results of Sargent, are examined too, and the special properties of considered sequence spaces are used to obtain the characterizations of compact operators. In certain situations the results of compactness are formulated for the general bounded linear operators as well as for the matrix linear operators.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		08.09.2014
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Predgovor

Ova teza ima za cilj da, koristeći postojeće pojmove i rezultate iz teorije sumabilnosti, teorije BK prostora i teorije operatora, prikaže nove rezultate dobijene za odredjene BK prostore ali i da prezentuje neke poboljšane i drugačije rezultate u odnosu na one koji su poznati. Takodje, rezultatima iz pojedinih delova ove teze biće zaokruženi, tj. kompletirani neki postojeći rezultati koji se odnose na klase kompaktnih operatora izmedju izabranih BK prostora. Pored poznatih rezultata izloženi su i neki neobjavljeni rezultati kao i originalni rezultati objavljeni u medjunarodnim matematičkim časopisima:

- Malkowsky E., Djolović I., Petković K., *Two methods for the characterization of compact operators between BK spaces,* Banach J. Math. Anal 8, 2015, 1-13;

- Petković K., *Some new results related to compact matrix operators in the class* $((\ell_p)_T, \ell_\infty)$, Acta Mathematica Sinica 31, 2015, 1339-1347;

- Djolović I., Malkowsky E., Petković K., *New approach to some results related to mixed norm sequence spaces*, Filomat, 30(1), 2016, 83-88;

- Petković K., *Some classes of operators related to the space of convergent series* cs, (prihvaćen za štampu u Filomatu).

Pojedini rezultati iz disertacije prezentovani su na medjunarodnim skupovima: *13th Serbian Mathematical Congress* (22.05.-25.05.2014., Vrnjačka Banja, Serbia) i *Analysis, Topology and Applications 2014* (26.05.-29.05.2014., Vrnjačka Banja, Serbia).

Teza se sastoji iz tri glave podeljene u sekcije.

Prva glava je uvodnog tipa i sadrži tri sekcije. U prvoj sekciji izloženi su najvažniji rezultati i pojmovi iz teorija FK i BK prostora. Kako su ovi rezultati od veoma velike važnosti za izučavanje matričnih transformacija izmedju prostora nizova, a zatim i za izučavanje odgovarajućih operatora, jasno da je ovakav uvod bio neophodan za praćenje daljeg rada. Posebno su interesantne teoreme koje ukazuju na vezu izmedju matričnih transformacija i ograničenih linearnih operatora izmedju odredjenih prostora nizova. Druga sekcija posvećena je klasičnim prostorima nizova ω, c_0, c, ℓ_p, $(1 \leq p \leq \infty)$, cs, bs, bv i bv_0. Navedene su njihove definicije i poznata topološka svojstva, odnosno, sve ono što ćemo koristiti prilikom naše konstrukcije novih prostora nizova. U trećoj sekciji dat je pregled opštih rezultata koji se odnose na karakterizaciju matričnih transformacija izmedju nekih BK prostora, ali su navedeni i rezultati koji se odnose na matrične transformacije izmedju klasičnih prostora nizova opisanih u prethodnoj sekciji ove glave. U okviru ove glave dati su samo suštinski važni rezultati za oblikovanje ove disertacije bazirani na [27, 35, 52, 55].

Druga glava se odnosi na matrične transformacije medju prostorima nizova i ovde je samo prva sekcija uvodnog tipa, dok preostale tri sadrže originalne naučne rezultate iz [33] i sa [13th Serbian Mathematical Congress].

U prvoj sekciji dajemo potrebne pojmove i tvrdjenja koja ćemo dalje koristiti. Kako se izučavani prostori najčešće mogu predstaviti kao matrični domeni ili jaki matrični domeni neke trougaone matrice, to ovde dajemo pregled osnovnih osobina i rezultata vezanih za ovakvo predstavljenje posmatranih prostora nizova.

U drugoj sekciji uvodimo nove prostore nizova $\ell_p(\Delta_u^\lambda)$, $1 \leq p \leq \infty$, izučavanih kasnije i u [46]. Neka je λ je strogo rastući niz pozitivnih realnih brojeva koji teže ka beskonačnosti, u je niz kompleksnih brojeva čiji je svaki član različit od nule a preslikavanje $\hat{\Lambda}(x) = (\hat{\Lambda}_n(x))$ definisano sa

$$\hat{\Lambda}_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_k (x_k - x_{k-1}) \quad , k \in N.$$

Novouvedeni prostor nizova, koji je ujedno i predmet našeg izučavanja je

$$\ell_p(\Delta_u^\lambda) = \{x \in \omega | \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{\Lambda}_n(x)|^p < \infty\}, 1 \leq p < \infty.$$

Medjutim, suština izučavanja ovog prostora leži upravo u pronalaženju - definisanju odgovarajuće trougaone matrice takve da se dalje problem svodi na primenu rezultata iz prve sekcije ove glave. Ovaj zadatak nije uvek očigledan i jednostavan ali je u ovom slučaju uspešno rešen. Dalje, nalazimo bazu, odredjujemo β-duale i dajemo karakterizaciju klasa matričnih preslikavanja u kojima je finalni prostor neki od klasičnih prostora nizova. Ovo je iz rada prezentovanog na konferenciji [13th Serbian Mathematical Congress] i do sada nije nigde publikovano.

Sekcija 2.3 se odnosi na prostore $c_0(\Delta)$, $c(\Delta)$ i $\ell_\infty(\Delta)$ ali su za njih navedene samo odredjene karakterizacije tj. one koje će nam biti od interesa u daljem radu. Naravno, da bi se to postiglo morali smo odrediti i njihove β-duale kao i odgovarajuće norme.

U četvrtoj sekciji polazimo od jako C_1 sumabilnih i ograničenih prostora nizova w, w_0, w_∞. Pored ovih, dobro poznatih prostora, definišemo koristeći opet matrične domene ali i množitelje prostora nove prostore nizova $[c]_\infty$ i v_∞. U Teoremi 2.20 data je karakterizacija matričnog preslikavanja iz prostora ℓ_1 u prostore w_∞,v_∞ i $[c]_\infty$ uz napomenu da se, zbog AK osobine prostora ℓ_1, ova karakterizacija odnosi i na ograničeni linearni operator. Rezultati iz treće i četvrte sekcije su delovi rada [33]. Teorema 2.21 je nova, nije nigde objavljena i predstavlja deo rada u pripremi. Njome je prikazana veza izmedju uopštenog ograničenog linearnog operatora i beskonačne matrice čak i kad početni prostor nije sa AK svojstvom i daje nam predstavljanje za operator $L \in B(c, v_\infty)$ preko odgovarajuće matrice.

Treća glava se sastoji od šest sekcija i odnosi se na kompaktnost kako matričnog tako i uopštenog ograničenog linearnog operatora na prostorima nizova, kao i na neke metode za njihovu karakterizaciju. Kao osnovni "alatiža karakterizaciju kompaktnih operatora izmedju prostora nizova koriste se

Hausdorfova mera nekompaktnosti ali i u skorije vreme sve češća primena rezultata Sardženta. Zato se prva sekcija bavi pojmom i osobinama kompaktnog operatora kao i osnovnim rezultatima vezanim za Hausdorfovu meru nekompaktnosti (uvedena je od strane Goldeinsteina, Goberga i Markusa). Od posebne je važnosti Teorema 3.3, koja daje rezultate kod prostora sa Šauderovom bazom.

Naredne dve sekcije predstavljaju rezultate iz rada [33]. Sekcija 3.2 ilustruje primenu Hausdorfove mere nekompaktnosti kod karakterizacije kompaktnih operatora na nekim konkretnim prostorima nizova već definisanim u prethodnoj glavi. Ona takodje, ukazuje i na potrebu da se neki slučajevi tretiraju na drugačiji način, što je i učinjeno u Sekciji 3.3 primenom rezultata Sardženta [51].

Zbog velikog broja radova u kojima dobijeni rezultati mogu biti poboljšani, u smislu definisanja potrebnih i dovoljnih uslova za kompaktnost operatora, četvrta sekcija daje teoreme u formi uslova vezanih za proizvoljnu trougaonu matricu T. U njenoj podsekciji navodimo nekoliko primera takve primene. Četvrta sekcija je deo rada [46].

Prostor konvergentnih redova cs je uveden u prvoj glavi a peta sekcija nam daje rezultate vezane za kompaktnost operatora upravo vezanih za cs. Ovde za dobijanje potrebnih i dovoljnih uslova kompaktnosti operatora nismo u mogućnosti da primenimo rezultat Sardženta, već koristimo specifične osobine tog prostora tj. činjenicu da se radi o AK prostoru ali i o prostoru dobijenom kao matričnom domenu trougaone matrice. Neke od iskazanih teorema se odnose i na uopšteni ograničeni linearni operator. Ovo su rezultati iz rada [47].

Poslednja sekcija sadrži originalne rezultate objavljene u [10] vezane za prostore mešovite norme $\ell^{p,q}$ koje prvi put uvodi Kellogg. Ove prostore izučavali su autori I.Jovanović i V.Rakočević u [22] i u [23]. Pristup problemu je nešto drugačiji od postojećeg. Naime, u našem radu koristimo teoriju BK prostora i operator T_λ posmatramo kao odgovarajući operator pridružen beskonačnoj trougaonoj matrici specijalnog oblika - dijagonalna. Neki rezultati su isti a u nekim situacijama pored procene o Hausdorfovoj meri posmatranog operatora dobijamo i tačan izraz za ovu meru.

* * *

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru, profesoru dr Ivani Djolović na stručnom vodjstvu i nesebičnoj pomoći koju mi je pružila u toku izrade ove teze. Bila je velika čast imati je za mentora.

Profesoru dr Eberhardu Malkowskom se zahvaljujem na trudu i vremenu koje je uložio od samog početka mog naučnog rada.

Mojim profesorima dr Vladimiru Rakočeviću, dr Draganu Djordjeviću i dr Slobodanu Tričkoviću, zahvaljujem na srdačnoj podršci i korisnim savetima, a dr Predragu Popoviću na tehničkoj pomoći i podršci.

Na kraju, najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici za svu ljubav i strpljenje koje su mi pružili.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Teorija vezana za beskonačne matrice i prostore nizova predstavlja veoma zanimljiv deo funkcionalne analize. U skorije vreme je uradjeno dosta radova na tu temu, dobijeno je mnogo novih prostora nizova, odredjene su klase ograničenih linearnih operatora medju različitim prostorima nizova kao i uslovi njihove kompaktnosti, a sama teorija primenjena je na mnoge matematičke probleme. Umesto početnog niza kompleksnih brojeva posmatra se neka njegova transformacija, ali se postavljaju i odredjeni uslovi: posmatrani skup nizova je najčešće linearni vektorski prostor koji sadrži sve konvergentne nizove, funkcija kojom je predstavljena transformacija mora biti linearna i da konvergentne nizove slika u njihovu granicu itd. Jedan od načina da se ovo uradi bi bilo korišćenje beskonačnih matrica, a istorijskom greškom je i za niz ostao pojam "sumabilan"matricom A. Kako ćemo se u okviru ove disertacije baviti karakterizacijom ograničenih linearnih i kompaktnih operatora izmedju BK prostora, u ovoj glavi dajemo uvodne pojmove vezane za BK teoriju. Pored toga, navešćemo i već poznate rezultate u vezi osobina i matričnih preslikavanja na odredjenim prostorima nizova a koji su baš BK prostori. Za detaljnije izučavanje ovih prostora čitalac se upućuje na [55].

Osnovni pojmovi o FK i BK prostorima

Da bismo stigli do pojma BK prostora, krećemo, najpre, od definicije Frešeovog prostora (Fréchet), preko FK i normiranog prostora, i pri tome ćemo koristiti sledeći podsetnik.

Definicija 1.1. *Neka je X neprazan skup, a funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ takva da za sve x, y i z iz X važi:*

1) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,

2) $d(x, y) = d(y, x)$,

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Tada je d metrika, a par (X, d) metrički prostor.

Svaki neprazan skup može biti pretvoren u metrički, a svaki metrički prostor se dalje na prirodan način može nadograditi u topološki (definicija okoline a samim tim i otvorenog skupa zahteva samo rastojanje).

Ako sa ω označimo skup svih nizova kompleksnih brojeva $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, tada se metrika na ω može zadati na sledeći način:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\mid x_n - y_n \mid}{1 + \mid x_n - y_n \mid} \ .$$

Na metričkom prostoru možemo definisati i konvergenciju, pa za niz (x_n) iz (X, d) kažemo da konvergira ako i samo ako postoji $x \in X$ takvo da $d(x_n, x) \to 0$ kad $n \to \infty$. Prostor u kome je svaki Košijev niz konvergentan naziva se kompletan prostor. Kako matematičari nastoje da nadju što veću analogiju sa realnim i kompleksnim brojevima, za koje je poznato da imaju i algebarsku strukturu, to nas dovodi do pojma vektorski ili linearan prostor. Ako na skupu ω sabiranje elemenata iz ω i množenje skalarom definišemo sa :

$$x + y = (x_k + y_k)_{k=0}^{\infty}$$
$$\lambda x = (\lambda x_k)_{k=0}^{\infty}$$

za svako $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ i $y = (y_k)_{k=0}^{\infty}$ iz ω i za svako $\lambda \in \mathbb{C}$, tada će ω predstavljati vektorski prostor.

Metričke i linearne osobine prostora povezane su zahtevom da sabiranje i množenje skalarom budu neprekidne operacije tj. da iz

$$x_n \to x \ , \ y_n \to y \ \ i \ \lambda_n \to \lambda \Longrightarrow x_n + y_n \to x + y \ i \ \lambda_n x_n \to \lambda x \ .$$

Za kompletan linearni metrički prostor kažemo da je Frešeov (Frechet) prostor.

Prostor (ω, d) je Frešeov prostor u odnosu na gore definisanu metriku . Još možemo videti i da se konvergencija u ω i konvergencija po koordinatama poklapaju odnosno da

$$d(x^{(n)}, x) \to 0 \ (n \to \infty) \ ako \ i \ samo \ ako \ x_k^{(n)} \to x_k \ (n \to \infty) \ za \ svako \ k \ .$$

Ukoliko na posmatranom prostoru $X \subset \omega$, konvergencija po metrici d_X, u smislu gore navedenom, povlači koordinatnu konvergenciju, kažemo da je metrika d_X jača od metrike $d \mid X$ definisane na ω.

Definicija 1.2. *Za Frešeov prostor nizova (X, d_X) kažemo da je FK prostor ukoliko je u X metrika d_X jača od metrike $d\,|_X$ definisane u ω.*

Takodje se za definisanje FK prostora koristi i sledeća definicija.

Definicija 1.3. *FK prostor X je Frešeov prostor kod kog su za svako k neprekidna preslikavanja $P_k : X \to \mathbb{C}$ definisana sa: $P_k(x) = x_k \ (x \in X)$.*

Definicija 1.4. *Normirani FK prostor naziva se BK prostor.*

Pojam uveden 1927. godine od strane J. Šaudera (J.Schauder), pruža u nekim, ali ne svim, slučajevima mogućnost jedinstvenog prikazivanja elementa iz vektorskog prostora pomoću odredjenih baznih elemenata. Sledeća definicija daje jasan prikaz.

Definicija 1.5. *Za niz $b = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ u linearnom metričkom prostoru X kažemo da je Šauderova baza u X ukoliko za svako $x \in X$ postoji jedinstveno odredjen niz skalara $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ tako da je $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b_n$.*

Jedan od najvažnijih primera baze je niz vektora $(e^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ definisanih na sledeći način:

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & (k \neq n) \\ 1 & (k = n). \end{cases}$$

Takodje, ovom skupu često se dodaje i vektor $e = (e_k)_{k=0}^{\infty}$ definisan sa: $e_k = 1$ ($k = 0, 1, 2, ...$). U narednim sekcijama videćemo stvarni značaj ovih nizova.

Označimo sa ϕ skup svih konačnih nizova. Sledeća definicija odnosi se na još jednu klasu prostora veoma važnu za naš dalji rad.

Definicija 1.6. *Za FK prostor $X \supset \phi$, kažemo da ima AK osobinu, ili kraće, AK prostor, ako je ispunjeno sledeće: $\sum_{k=0}^{m} x_k e^{(k)} \to x$ $(m \to \infty)$ za svako $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in X$.*

U realizaciji zadatka ove teze potrebna nam je kako teorija FK prostora, tako i teorija matričnih transformacija. Stoga ćemo uvesti neophodne oznake i pojmove za dalji rad.

Neka je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ beskonačna matrica kompleksnih brojeva i $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ niz kompleksnih brojeva. Pisaćemo sledeće:

$$Ax = (A_n x)_{n=0}^{\infty}$$

pri čemu je:

$$A_n x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

predpostavljajući da poslednji red konvergira.

Ukoliko su dalje X i Y podprostori ω, sa (X, Y) ćemo označavati klasu svih matrica koje slikaju prostor X u Y. Činjenica da je $A \in (X, Y)$ zapravo znači da je $Ax \in Y$ za svako $x \in X$ ali i da je $A_n x$ konvergentan red za svako $x \in X$ i svako n.

Množitelj prostora (engl. multiplier space) X i Y, u oznaci $M(X, Y)$ definisan je na sledeći način:

$$M(X, Y) = \{a \in \omega \mid ax = (a_k x_k)_{k=0}^{\infty} \in Y \text{ za svako } x \in X\}$$

ili

$$M(X,Y) = \bigcap_{x\in X} x^{-1} * Y,$$

gde je

$$x^{-1} * Y = \{z \in \omega \mid xz = (x_k z_k)_{k=0}^{\infty} \in Y\}.$$

Definicija 1.7. *Za proizvoljnu beskonačnu matricu A, metod sumabilnosti matricom A je definisan sa $y = Ax$, a sa*

$$\omega_A = \{\, x \in \omega \mid Ax \ je \ definisano \,\}$$

označavamo domen matrice A . Ako je X podskup skupa ω, za skup

$$X_A = \{\, x \in \omega \ \mid Ax \in X\}$$

kažemo da je matrični domen A u X.

Ako umesto X posmatramo skup svih konvergentnih nizova c za matricu A dobijamo takozvani konvergentni domen matrice A tj.

$$c_A = \{\, x \in \omega \mid Ax \in c \,\}\,.$$

Ukoliko se vratimo na karakterizaciju klase (X,Y), upotrebljavajući pojam matričnih domena, možemo reći da je $A \in (X,Y)$ ako i samo ako je $X \subset Y_A$.

Sada ćemo navesti veoma važne rezultate iz teorije FK prostora, bitne za naše istraživanje. Mnogobrojna literatura postoji na ovu temu, ali se može reći da je osnova svega [55].

Teorema 1.1. *([35, Corollary 1.15], [55, Corollary 4.2.3]) Neka je X Frešeov, Y proizvoljan FK prostor, $f : X \to Y$ linearno preslikavanje i $P_n : X \to \mathbb{C}$, $(n \in \mathbb{N}_0)$, preslikavanje definisano sa $P_n(x) = x_n$. Ako je preslikavanje $P_n \circ f : X \to \mathbb{C}$ neprekidno za svako n, tada je i preslikavanje $f : X \to Y$ neprekidno.*

Teorema 1.2. *([35, Remark 1.16]) Neka je $X \supset \phi$ proizvoljan BK prostor. Ako je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ konvergentan za svako $x \in X$, tada je linearni funkcional $f_a : X \to \mathbb{C}$ definisan sa $f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ za svako $x \in X$, neprekidan.*

Ove dve teoreme imaju kao posledicu teoremu kojom je pokazan sav značaj FK i BK prostora u izučavanju matričnih transformacija.

Teorema 1.3. *([35, Theorem 1.17], [55, Theorem 4.2.8]) Svako matrično preslikavanje izmedju FK prostora je neprekidno.*

Dokaz: *Neka je $A \in (X, Y)$ pri čemu su X i Y proizvoljni FK prostori. Preslikavanje f_A definišemo sa $f_A : X \to Y$ tako da je $f_A(x) = Ax$ za svako $x \in X$. Kako je na osnovu Teoreme 1.2 preslikavanje $P_n \cdot f_A : X \to \mathbb{C}$ neprekidno za svako n, to je i preslikavanje $f_A : X \to Y$ neprekidno na osnovu Teoreme 1.1.*

Kako je predmet našeg rada karakterizacija ograničenih linearnih operatora za X i Y Banahove prostore, koristićemo standardnu oznaku $B(X, Y)$ za skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u Y. Poznato je da je u tom slučaju $B(X, Y)$ takodje Banahov prostor i da je norma na njemu definisana sa

$$\|L\| = \sup\{\|L(x)\| \mid \|x\| = 1\} \ za\ svako\ L \in B(X, Y)\ .$$

Sa X^* označavaćemo prostor svih ograničenih linearnih funkcionala f, takvih da $f : X \to \mathbb{C}$, gde je norma data sa

$$\|f\| = \sup\{\, |f(x)| \mid \|x\| = 1\,\} \ za\ svako\ f \in X^*\ .$$

Ovaj prostor se često zove i neprekidni dual prostora X.

Sledeća teorema ima veoma važnu ulogu u teoriji matričnih transformacija medju prostorima nizova.

Teorema 1.4. *([35, Theorem 1.23], [21, Theorem 1.9.], [55, Theorem 4.2.8])*
(a) Neka su X i Y FK prostori. Tada svaka matrica $A \in (X, Y)$ definiše linearni operator $L_A \in B(X, Y)$ tako da je $L_A(x) = Ax$ za svako $x \in X$.
(b) Neka su X i Y BK prostori i prostor X je sa AK svojstvom. Tada je $B(X, Y) \subset (X, Y)$ tj. za svaki linearni operator $L \in B(X, Y)$ postoji $A \in (X, Y)$ tako da je $L(x) = Ax$ za svako $x \in X$.

Na kraju ove sekcije navedimo još jedan veoma bitan "alat"u karakterizaciji klasa matričnih transformacija - β-dual. Za dati skup $X \subset \omega$, β-dual se definiše na sledeći način:

$$X^{\beta} = \{a \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \text{ konvergira za svako } x \in X\}.$$

Ukoliko sa cs označimo prostor konvergentnih redova, tj.

$$cs = \{\, x \in \omega \,|\, \sum_{k=0}^{\infty} x_k \; konvergira \,\} \;,$$

jasno nam je da je

$$X^{\beta} = M(X, cs).$$

Pomenimo da pored β-duala postoje još i α i γ-duali ali se ovde nećemo zadržavati na njihovim osobinama. Za dalje izučavanje može se koristiti [27, 35, 55].

Primetimo još da se, koristeći pojam β- duala, karakterizacija klase (X, Y) može formulisati na sledeći način:

$$A \in (X, Y) \text{ ako i samo ako je } A_n \in X^{\beta} \text{ za svako } n \text{ i } Ax \in Y \text{ za svako } x \in X.$$

Za dati BK prostor X, prostor X^{β} je takodje BK prostor u odnosu na normu:

$$\|a\|_{\beta} = \sup\{\, \sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k x_k| \mid \|x\|_X = 1 \,\} \;.$$

Ukoliko sa X^* označimo skup neprekidnih duala za prostor X, odnosno $X^* = B(X, \mathbb{C})$, sledećom teoremom dat je odnos izmedju X^* i X^{β}.

Teorema 1.5. *([55, Theorem 7.2.9], [35, Theorem 1.34]) Neka je $X \supset \phi$ BK prostor. Tada postoji linearno "jedan-jedan"preslikavanje $T : X^{\beta} \to X^*$, odnosno, $X^{\beta} \subset X^*$. Ako je X AK prostor, onda je preslikavanje T i "na".*

Poslednja teorema u kombinaciji sa Teoremom 1.4 ima ključnu ulogu u pravljenju razlike izmedju uopštenih linearnih ograničenih operatora izmedju, na primer, FK prostora X i Y, u oznaci $L \in B(X,Y)$ i matričnih operatora L_A pridruženih odgovarajućoj beskonačnoj matrici $A \in (X,Y)$. O tome će više biti reči u narednoj glavi.

Neki važniji prostori nizova

Kako smo ranije napomenuli, različiti prostori nizova bili su predmet izučavanja mnogobrojnih radova. Medjutim, treba još naglasiti i da najveći broj njih potiče iz koncepta teorije sumabilnosti i teorije bazirane na matričnim domenima, što ćemo nešto kasnije i ilustrovati. Ovde ćemo navesti neke "osnovne"prostore nizova, od kojih zapravo sve kreće i čije osobine su važne za dalje konstrukcije "složenijih" prostora nizova. Dajemo samo najvažnije pojmove i osobine neophodne za naše istraživanje, a zainteresovani mogu detaljne dokaze i opširniji prikaz radi daljeg istraživanja naći u [35, 51, 52, 55].

U prethodnoj sekciji uveli smo najpre ω, skup svih kompleksnih nizova $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$. Videli smo da je ω FK prostor sa metrikom definisanom u (1.1). Takodje, ω ima AK osobinu.

Posmatrajmo dalje skupove ograničenih, konvergentnih i konvergentnih ka nuli (tzv. nula nizovi) nizova kompleksnih brojeva, u oznaci redom, ℓ_∞, c, c_0:

$$\ell_\infty = \{\, x \in \omega \mid \sup_k \mid x_k \mid < \infty \,\};$$

$$c = \{\, x \in \omega \mid \lim_{k\to\infty} x_k = \xi \ za\ neko\ \xi \in \mathbb{C} \,\};$$

$$c_0 = \{\, x \in \omega \mid \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \,\}.$$

Prostori ℓ_∞, c i c_0 su BK prostori u odnosu na normu definisanu sa:

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

Važi sledeće:

$$c_0 \subset c \subset \ell_\infty$$

i još je c_0 zatvoreni podskup u c, a c zatvoren u ℓ_∞. Prostor ℓ_∞ nema Šauderovu bazu, c_0 je AK prostor, a c ima Šauderovu bazu $(e, e^{(1)}, e^{(2)}, ...)$ ali nije AK prostor. Svako $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in c$ ima jedinstveno predstavljanje:

$$x = \xi e + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - \xi) e^{(k)}, \text{ pri čemu je } \xi = \lim_{k \to \infty} x_k.$$

Ukoliko posmatramo β-duale za pomenute prostore, važi sledeće:

$$c_0^\beta = c^\beta = \ell_\infty^\beta = \ell_1$$

gde je ℓ_1 definisano sa $\ell_1 = \{x \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty\}$.

Poslednji prostor nizova ℓ_1 je prostor svih apsolutno konvergentnih redova i predstavlja specijalni slučaj prostora ℓ_p definisanih na sledeći način:

$$\ell_p = \{ \, x \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} \mid x_k \mid^p < \infty \, \} \; za \; 1 \leq p < \infty \; ,$$

Za prostore ℓ_p , $1 < p < \infty$, odgovarajuća norma je data sa

$$\|x\| = (\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \; ,$$

odnosno za prostor ℓ_1 odgovarajuća norma je data sa:

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|.$$

Često se norma u ovim prostorima označava i sa $\| \cdot \|_p$.

Prostori ℓ_p , $1 \leq p < \infty$ su AK prostori i važi sledeće:

$$\ell_p^\beta = \ell_q^\beta \;\; (1 < p < \infty \; , \; q = p/(p-1));$$

$$\ell_1^\beta = \ell_\infty.$$

Prilikom definisanja množitelja prostora u prethodnoj sekciji uveli smo prostor konvergentnih redova cs:

$$cs = \{\, x \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} x_k \ konvergira \,\} \ .$$

Zapravo možemo koristiti i ekvivalentan oblik:

$$cs = \{\, x \in \omega \ \mid \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = \xi \ za \ neko \ \xi \in \mathbb{C} \,\} \, .$$

Već ovde možemo uočiti povezanost ovog prostora i prostora c. O ovome će biti reči u narednim sekcijama. Pomenimo da se analogno ovakvoj povezanosti može recimo uvesti i prostor cs_0 ali to neće biti predmet našeg rada. Mi ćemo ovde navesti još jedan prostor, po sličnom principu, samo ovog puta sa ℓ_∞. To je prostor ograničenih redova bs:

$$bs = \{\, x \in \omega \mid \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k \Big)_{n=0}^{\infty} \in \ell_\infty \,\} \ ,$$

odnosno

$$bs = \{\, x \in \omega \ \mid \ \sup_n \mid \sum_{k=0}^{n} x_k \mid < \infty \,\} \, .$$

Ovo su takodje BK prostori, cs je zatvoren podprostor od bs pa su im norme iste i date sa:

$$\|x\|_{cs} = \|x\|_{bs} = \sup_n \Big| \sum_{k=0}^{n} x_k \Big| .$$

Prostor cs je AK prostor, dok prostor bs nema Šauderovu bazu.

Pre nego što navedemo β-duale za prostore cs i bs, navešćemo još dva važna prostora nizova: bv_0 i bv.
Prostor bv predstavlja prostor nizova ograničene varijacije i definisan je sa

$$bv = \{x \in \omega \mid \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| < \infty \,\} \, .$$

Prostor bv_0 definisan je na sledeći način:

$$bv_0 = bv \cap c_0.$$

Oba prostora su BK prostori, pri čemu je bv_0 još i AK prostor. Važi: $bv = bv_0 \oplus e$, odnosno, prostor bv nije AK prostor ali ima Šauderovu bazu $(e, e^{(1)}, e^{(2)}, ...)$. Norma na prostoru bv definisana je sa:

$$\|x\| = |\lim_{k\to\infty} x_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| \ .$$

Lema 1.6. *[55, Lemma 7.3.2] Ukoliko je* $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| < \infty$*, tada je* $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in c$*.*

Jasno da sada možemo odredjene rezultate izvoditi za prostore bv i bv_0 imajući u vidu njihov skupovni odnos sa prostorima c i c_0.

Na kraju navedimo još i izgled β-duala za prostore cs, bs, bv i bv_0.

$$bv^{\beta} = cs \ , \ bv_0^{\beta} = bs \ , \ cs^{\beta} = bv \ , \ bs^{\beta} = bv_0.$$

Kako za skup $X \subset \omega$ kažemo da je β-perfektan ukoliko je $X^{\beta\beta} = X$, jasno da su poslednje uvedeni skupovi β-perfektni. Takodje, kako je $\ell_p^{\beta\beta} = \ell_p$ za $1 \leq p \leq \infty$, to su i ℓ_p prostori β-perfektni. Medjutim, $c^{\beta\beta} \neq c$ i $c_0^{\beta\beta} \neq c_0$ pa ovo nisu β-perfektni skupovi.

Matrične transformacije izmedju klasičnih prostora nizova

Ukoliko imamo zadate prostore nizova, početni $X \subset \omega$ i finalni $Y \subset \omega$, jedan od zadataka nam je da izvršimo karakterizaciju klase matričnih transformacija (X, Y) i to u smislu nalaženja uslova za elemente a_{nk} beskonačne matrice $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ kako bi ova bila iz klase (X, Y), tj. $A \in (X, Y)$. U ovom delu podsetićemo se nekih od karakterizacija matričnih transformacija izmedju prostora nizova koje smo naveli u prethodnoj sekciji, naravno u slučajevima kad je to moguće. One će biti osnova za neke od karakterizacija izmedju prostora nizova složenijeg oblika koje ćemo u narednoj glavi uvesti. Pored gotovih karakterizacija, navešćemo kroz teoreme i neke korisne rezultate koji dovode do konkretnih uslova za odredjene karakterizacije matričnih transformacija. Pomenute teoreme biće date bez dokaza a čitalac se upućuje za detaljnije istraživanje ove problematike na [27, 52, 55].

Teorema 1.7. *[35, Theorem 1.23]*

(a) Neka je X BK prostor. $A \in (X, \ell_\infty)$ ako i samo ako

$$\|A\|^*_{(X,\ell_\infty)} = \sup_n \|A_n\|^*_X = \sup_n (\sup\{|A_n x| \mid \|x\| = 1\}) < \infty \ .$$

Za $A \in (X, \ell_\infty)$ važi i da je $\|L_A\| = \|A\|^*_{(X,\ell_\infty)}$.

(b) Ako je $(b^{(k)})_{k=0}^\infty$ Šauderova baza za X i ako je Y_1 zatvoren FK podprostor u Y, tada je $A \in (X, Y_1)$ ako i samo ako je $A \in (X, Y)$ i ako je $A(b^{(k)}) \in Y_1$ za svako k.

Navedena teorema biće nam od koristi za karakterizaciju klasa oblika (X, ℓ_∞), gde je X jedan od klasičnih prostora nizova: c, c_0, ℓ_p za $1 \leq p \leq \infty$ (naravno od koristi je i za mnogo širi izbor prostora X, ali ćemo se u okviru ove sekcije zadržati samo na klasičnim prostorima nizova). Kako je c_0 zatvoren podskup u c a ovaj dalje zatvoren podskup u ℓ_∞, to će nam nakon karakterizacije klasa oblika (X, ℓ_∞), biti omogućena i karakterizacija klasa oblika (X, c), a zatim i (X, c_0) ali samo za slučajeve kada prostor X ima Šauderovu bazu.

Dakle, imajući sve ovo u vidu, Teorema 1.7(a) bi "pokrila"karakterizacije sledećih klasa: $(\ell_\infty, \ell_\infty)$, (c, ℓ_∞), (c_0, ℓ_∞), (ℓ_1, ℓ_∞), (ℓ_p, ℓ_∞) za $1 < p < \infty$. Primenom iste teoreme, ali dela (b), definisali bismo i sledeće klase matričnih transformacija: (c, c), (c_0, c), (ℓ_1, c), (ℓ_p, c) za $1 < p < \infty$, (c, c_0), (c_0, c_0), (ℓ_1, c_0), (ℓ_p, c_0) za $1 < p < \infty$.

Radi lepšeg i lakšeg pregleda rezultata, najpre ćemo definisati sledeće uslove:

$$\sup_n \sum_{k=0}^\infty |a_{nk}| < \infty \ ; \tag{1.1}$$

$$\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty \ ; \tag{1.2}$$

$$\sup_{n} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|^q < \infty \ \ (1 < p < \infty \ , \ q = p/(p-1)\,) \ ; \tag{1.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 0 \ ; \tag{1.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \ za \ svako \ k \ ; \tag{1.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \alpha \ ; \tag{1.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k \ za \ svako \ k \ . \tag{1.7}$$

Sada možemo definisati teoremu koja jasno sledi na osnovu svega do sada datog.

Teorema 1.8. *(a) [35, Theorem 1.36, Theorem 1.37]*

$$(c_0, \ell_\infty) = (c, \ell_\infty) = (\ell_\infty, \ell_\infty) \ .$$

(b) $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty) = (c_0, \ell_\infty) = (c, \ell_\infty)$ *ako i samo ako je ispunjen uslov (1.1);*
(c) $A \in (\ell_1, \ell_\infty)$ *ako i samo ako važi uslov (1.2);*
(d) $A \in (\ell_p, \ell_\infty)$, $1 < p < \infty$ *, ako i samo ako važi uslov (1.3);*
(e) $A \in (c, c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi (1.1), (1.4) i (1.5);*
(f) $A \in (c, c)$ *ako i samo ako važe uslovi (1.1), (1.6) i (1.7);*
(g) $A \in (c_0, c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi (1.1) i (1.5);*
(h) $A \in (c_0, c)$ *ako i samo ako važe uslovi (1.1) i (1.7);*

(i) $A \in (\ell_r, c_0)$, $1 < r < \infty$, *ako i samo ako važe uslovi (1.3) i (1.5).*
(j) $A \in (\ell_r, c)$, $1 < r < \infty$, *ako i samo ako važe uslovi (1.3) i (1.7);*
(k) $A \in (\ell_1, c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi (1.2) i (1.5);*
(l) $A \in (\ell_1, c)$ *ako i samo ako važe uslovi (1.2) i (1.7).*

Ukoliko je prvi prostor ℓ_∞ a finalni prostor jedan od prostora c ili c_0, stvari stoje drugačije. Naime, ℓ_∞ nema Šauderovu bazu te je nemoguće primeniti Teoremu 1.7 ali ni mnoge druge rezultate koji uspešno rešavaju problem karakterizacije. Situacija je specifična i rešena je Šurovom teoremom (Schur).

Teorema 1.9. *(Schur) [27, Theorem 6., str.169]* $A \in (\ell_\infty, c)$ *ako i samo ako važe uslovi:*

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \quad \textit{konvergira uniformno po} \quad n\,;$$

i

$$\text{(ii) postoji} \quad \lim_{n\to\infty} a_{nk} \quad \textit{za svako} \quad k\ . \tag{1.8}$$

Posledica 1.10. $A \in (\ell_\infty, c_0)$ *ako i samo ako važe uslovi:*

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \quad \textit{konvergira uniformno po} \quad n\,;$$

i

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad \textit{za svako} \quad k\ . \tag{1.9}$$

Napomena 1. *Napomenimo da se poslednja karakterizacija može definisati i na sledeći način [52]:*

$$A \in (\ell_\infty, c_0) \ \textit{ako i samo ako važi} \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = 0. \tag{1.10}$$

Pre nego što navedemo sledeći koristan rezultat, uvešćemo najpre jednu oznaku.
Naime, neka je $\mathcal{F}$ skup svih konačnih podskupova prirodnih brojeva i neka je

$K \in \mathcal{F}$. Ukoliko je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ beskonačna matrica, oznaka $A(K)$ značiće sledeće: $(\sum_{k \in K} a_{nk})_{n=0}^{\infty}$.

Teorema 1.11. *(a) [55, Theorem 8.4.3.] Neka je Y FK prostor. Tada $A \in (c_0, Y)$ ako i samo ako je skup $\{A(K) \mid K \in \mathcal{F}\}$ ograničen u Y.*
(b) [55, Theorem 8.3.7] Ako je X_1 definisan sa $X_1 = X \oplus e$, tada

$$A \in (X_1, Y) \textit{ ako i samo ako je } A \in (X, Y) \ i \ Ae \in Y.$$

Primenom prethodne teoreme mogli bismo da odredimo karakterizacije klasa oblika (c_0, Y) i (c, Y) imajući u vidu da je $c = c_0 \oplus e$.

Teorema 1.12. *[52, (63.)] $A \in (c, \ell_r) = (c_0, \ell_r)$ za $1 \leq r < \infty$ ako i samo ako važi uslov*

$$\sup_K \sum_{n=0}^{\infty} \Big| \sum_{k \in K} a_{nk} \Big|^r < \infty \ , \ K \subset \mathcal{F}. \tag{1.11}$$

Naredna teorema pokazaće još jednom veliki značaj β-duala u teoriji matričnih transformacija. Kao što je i uobičajeno, sa A^t označićemo transponovanu matricu matrice A.

Teorema 1.13. *[55, Theorem 8.3.9] Neka su X i Z BK prostori sa osobinom AK, i neka je $Y = Z^\beta$. Tada je*

$$(X, Y) = (X^{\beta\beta}, Y)$$

i važi

$$A \in (X, Y) \ ako \ i \ samo \ ako \ A^t \in (Z, X^\beta) \ .$$

Imajući u vidu da su c_0 i ℓ_r, $1 \leq r < \infty$, AK prostori, koristeći ovu teoremu mogli bismo da definišemo klase (ℓ_1, ℓ_r) za $1 \leq r < \infty$ i (ℓ_r, ℓ_1) za $1 < r \leq \infty$. Korišćenjem već dobijenih karakterizacija i primenom upravo navedene teoreme, jednostavno se mogu pokazati sledeći rezultati.

Teorema 1.14. *Neka je* $1 < r < \infty$. *Tada imamo sledeće:*
(a) $A \in (\ell_1, \ell_r)$ *ako i samo ako važi*

$$\sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}|^r < \infty \; ; \tag{1.12}$$

(b) $A \in (\ell_1, \ell_1)$ *ako i samo ako važi*

$$\sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \; ; \tag{1.13}$$

(c) $A \in (\ell_r, \ell_1)$ *ako i samo ako važi*

$$\sup_K \sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{n \in K} a_{nk} \Big|^s < \infty \;\; , \; s = r/(r-1) \; , \; K \in \mathcal{F} \; ; \tag{1.14}$$

(d) $A \in (\ell_\infty, \ell_1)$ *ako i samo ako važi*

$$\sup_K \sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{n \in K} a_{nk} \Big| < \infty \; , \;\; K \in \mathcal{F} \; . \tag{1.15}$$

Dokaz: Za $1 < r < \infty$, prostor ℓ_r je AK prostor i važi $\ell_r = \ell_s^\beta$, $1 < s < \infty$. takodje važi i da je c_0 AK prostor i da je $c_0^{\beta\beta} = \ell_\infty$ i $c_0^\beta = \ell_1$. Sada je jasno da imamo sledeće:

$$A \in (\ell_1, \ell_1) \Leftrightarrow A^t \in (c_0, \ell_\infty);$$

$$A \in (\ell_1, \ell_r) \Leftrightarrow A^t \in (\ell_s, \ell_\infty) \, , \, 1 < r < \infty \, , \, s = r/(r-1);$$

$$A \in (\ell_r, \ell_1) \Leftrightarrow A^t \in (c_0, \ell_s) \, , \, 1 < r < \infty \, , \, s = r/(r-1);$$

$$(c_0, \ell_1) = (c_0^{\beta\beta}, \ell_1) = (\ell_\infty, \ell_1).$$

Sada primenom rezultata iz Teorema 1.8 i 1.12 na odgovarajuće matrice, dobijamo uslove za karakterizaciju posmatranih klasa matričnih transformacija.

Do sada smo posmatrali matrične transformacije izmedju klasičnih prostora nizova. Ono što možemo primetiti je da nije data karakterizacija matričnih transformacija za klasu (ℓ_p, ℓ_r) za proizvoljne p i r $(1 < p\,, r < \infty)$. U literaturi se mogu naći rezultati koji se odnose na klasu (ℓ_2, ℓ_2) [27] ili u nekim radovima uslovi za specijalne oblike matrica, takozvane, faktorizacione matrice, ali generalnih rezultata nema.

Ukoliko posmatramo prostore iz prethodne sekcije, cs, bs, bv, bv_0 koji nisu klasični prostori nizova, ali su svakako od interesa za naš rad, moguće je i ovde definisati klase odredjenih matričnih transformacija koje se mogu naći u [52, 55]. Medjutim, ukoliko se ovi prostori posmatraju kao matrični domeni odredjenih matrica u nekim od klasičnih prostora nizova, što ćemo videti u narednoj glavi, moguće je karakterizaciju dati i na drugi, naravno, ekvivalentan način kada su uslovi u pitanju.

Ovu glavu zatvaramo samo nekim od primera, radi ilustracije. Karakterizacije matričnih preslikavanja koje slede mogu se naći u [55, Example 8.4.5B]. Na osnovu prethodno opisanih karakterizacija i činjenice da je cs AK prostor, jasno da $A \in (cs, c)$ ako i samo ako je $A \in (cs, \ell_\infty)$ i postoji $\lim_{n\to\infty} a_{nk}$ za svako k, odnosno, $A \in (cs, c_0)$ ako i samo ako je $A \in (cs, \ell_\infty)$ i $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ za svako k. Ostaje da u narednoj glavi damo pored uslova koji ćemo navesti i način za njihovo izvodjenje ali uz pomoć rezultata o matričnim domenima. Tačnije, dovoljno će biti definisati klasu (cs, ℓ_∞).

Naredni uslovi preuzeti su iz [55, Example 8.4.5B].

- $A \in (cs, \ell_\infty)$ ako i samo ako

$$\sup_n \sum_k |a_{nk} - a_{n,k-1}| < \infty. \tag{1.16}$$

- $A \in (cs, c)$ ako i samo ako (1.16) važi i

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} \text{ postoji za svako } k. \tag{1.17}$$

- $A \in (cs, c_0)$ ako i samo ako (1.16) važi i

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \text{ za svako } k. \tag{1.18}$$

Glava 2

Matrične transformacije kod nekih matričnih domena i jakih matričnih domena

U ovoj glavi posmatraćemo matrične transformacije na nekim novim prostorima nizova, matrične operatore pridružene odgovarajućim beskonačnim matricama preslikavanja, ali ćemo pomenuti i uopštene ograničene operatore na novodefinisanim prostorima nizova. Ovako uvedeni novi prostori nizova uglavnom potiču iz primene teorije sumabilnosti ili predstavljaju neki od specijalnih oblika matričnih domena u klasičnim prostorima nizova koje smo pomenuli u prethodnoj glavi.

Matrični domeni trougaonih matrica - osnovni pojmovi, osobine i rezultati

U prethodnoj glavi uveli smo pojam matričnog domena matrice A u prostoru X, u oznaci X_A. Najveći deo prostora nizova koji će biti obradjeni u ovoj tezi jesu zapravo specijalan oblik matričnih domena u klasičnim prostorima nizova c, c_0, ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$. Zapravo, radi se o specijalnom obliku matrice A koja je trougaona, pa posmatrani prostori nizova u suštini predstavljaju matrične domene trougaonih matrica u klasičnim prostorima nizova. Glavni rezultati u ovoj tezi usko su povezani sa pojmom matričnog domena. Naime, mnogi prostori nizova dobijeni su primenom neke beskonačne matrice na klasične prostore nizova. Nas zanimaju matrice specijalnog oblika tzv. trougaone matrice i u ovoj sekciji dajemo pojmove i poznate rezultate vezane za matrične domene takvih matrica.

Za beskonačnu matricu (engl. triangle) $T = (t_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ kažemo da je trougaona ako $t_{nk} = 0$ za $n < k$ i $t_{nn} \neq 0$, $(n = 0, 1, ...)$, tj. donja trougaona matrica sa nenula elementima na glavnoj dijagonali. Ove matrice su od posebnog interesa za rad zbog njihove osobine o postojanju inverzne matrice. Sledeća teorema govori upravo o tome.

Lema 2.1. *[55, Theorem 1.4.8] Svaka trougaona matrica T ima jedinstveni inverz $S = (S_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ koji je takodje trougaona matrica i važi da je $x = T(S(x)) = S(T(x))$ za svako $x \in \omega$*

Dakle, posebno interesantni za naš rad biće prostori oblika X_T, gde je T trougaona matrica. Posmatrajmo na primer matricu $\Delta = (\delta_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ definisanu na sledeći način:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} -1 & (k = n-1) \\ 1 & (k = n) \\ 0 & (k > n). \end{cases} \tag{2.1}$$

Jasno da je ovo primer jedna trougaone matrice a može se proveriti da je njena inverzna matrica, označimo je sa $\Sigma = (\sigma_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$, takodje trougaona matrica sa elementima definisanim na sledeći način:

$$\sigma_{nk} = \begin{cases} 1 & (1 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n). \end{cases} \tag{2.2}$$

Pored toga, imamo i sledeće: $x = \Delta(\Sigma(x)) = \Sigma(\Delta(x))$. Ovo su jako interesantni, i sa velikom primenom, primeri trougaonih matrica. Tako, ako se vratimo na prethodnu glavu i prostore bv, cs i bs, lako možemo uočiti da važi sledeće:

$$bv = (\ell_1)_\Delta \, , cs = (c)_\Sigma \, , bs = (\ell_\infty)_\Sigma . \tag{2.3}$$

Videćemo kasnije da umesto korišćenja gotovih karakterizacija [52, 55] pojedinih klasa matričnih transformacija na ovim prostorima nizova, možemo, koristeći rezultate o matričnim domenima, samostalno izvesti ove uslove.

Sada ćemo navesti još poznatih rezultata o matričnim domenima trougaonih matrica. Koristićemo oznaku T za trougaonu matricu, S za njen inverz, a sa R ćemo označavati transponovanu matricu matrice S, odnosno $R = S^t$.

Teorema 2.2. *([21, Theorem 2.2], [55, Theorem 4.2.12]) Neka je X BK prostor. Tada je i prostor X_T BK prostor sa normom definisanom sa $\|x\|_T = \|Tx\|$. Dalje, ako je X zatvoren podprostor prostora Y, onda je i X_T zatvoren podprostor prostora Y_T.*

Teorema 2.3. *[21, Theorem 2.3] Ako je $b = (b^{(n)})_{n=0}^\infty$ baza normiranog prostora nizova X, tada je $c^{(n)} = (Sb^{(n)})_{n=0}^\infty$ baza za X_T.*

Teorema 2.4. *[21, Corollary 2.5] Neka je X BK prostor sa osobinom AK i niz $c^{(n)}$ $(n = -1, 0, 1, \dots)$ definisan sa*

$$c_k^{(-1)} = \sum_{j=0}^{k} s_{kj} \quad (k = 0, 1, \dots),$$

i za svako $n = 0, 1, \dots,$

$$c_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & (0 \le k \le n-1) \\ s_{kn} & (k \ge n). \end{cases}$$

Tada:

a) Svaki niz $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in Y = X_T$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} T_n y \cdot c^{(n)}.$$

b) Svaki niz $z = (z_n)_{n=0}^{\infty} \in Z = X_T \oplus e$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$z = \xi \cdot e + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(z - \xi \cdot e) \cdot c^{(n)}$$

gde je ξ jedinstveni kompleksan broj takav da je $z = y + \xi \cdot e$ za $y \in X_T$.

c) Svaki niz $w = (w_n)_{n=0}^{\infty} \in W = (X \oplus e)_T$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$w = \eta \cdot c^{(-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (T_n w - \eta) c^{(n)}$$

gde je η jedinstveni kompleksan broj takav da je $Tw - \eta \cdot e \in X$.

Pored baze, za naš rad, potrebno nam je i poznavanje β-duala prostora X_T, stoga naredna teorema ima važnu ulogu.

Lema 2.5. *[36, Lemma 2.6] Neka je X FK prostor sa AK svojstvom. Tada je $(X_T)^\beta \subset (X^\beta)_R$.*

Teorema 2.6. *[18, Theorem 2.6] Neka X FK prostor sa AK svojstvom, T trougaona matrica, S njen inverz i $R = S^t$. Tada je:*

$$a \in (X_T)^\beta \text{ ako i samo ako je } a \in (X^\beta)_R \text{ i } W^{(a)} \in (X, c_0)$$

gde je matrica $W^{(a)}$ definisana sa

$$w_{mk}^{(a)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk} & (0 \le k \le m) \\ 0 & (k > m) \end{cases} \qquad (m = 0, 1, \dots).$$

Dalje, ako je $a \in (X_T)^\beta$, tada imamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k = \sum_{k=0}^{\infty} (R_k a)(T_k z) \text{ za svako } z \in X_T. \tag{2.4}$$

Napomena 2. *[36, Remark 3.3] a) Prethodna teorema važi i za $X = \ell_\infty$.*
b) U slučaju da je $X = c$, odnosno kod nalaženja $\beta-$duala prostora c_T, imamo da je $a \in (c_T)^\beta$ ako i samo ako je $a \in (\ell_1)_R$ i $W^{(a)} \in (c, c)$; Takodje, ako je $a \in (c_T)^\beta$, tada važi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k = \sum_{k=0}^{\infty} (R_k a)(T_k z) - \eta\alpha \text{ za svako } z \in c_T$$

$$\text{gde je } \eta = \lim_{k\to\infty} T_k z \text{ i } \alpha = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} w_{mk}^{(a)}. \tag{2.5}$$

Sledeća teorema koristi se za karakterizaciju matričnih transformacija na matričnim domenima trougaonih matrica u prostorima nizova sa AK osobinom.

Teorema 2.7. *[18, Theorem 2.13] Neka je X BK prostor sa svojstvom AK, neka je Y proizvoljan podskup od ω, T proizvoljna trougaona matrica, S njen inverz i $R = S^t$ (transponovana matrica matrice S). Tada, $A \in (X_T, Y)$ ako i samo ako $\hat{A} \in (X, Y)$ i $W^{(A_n)} \in (X, c_0)$, $za\ svako$ $n = 0, 1, ...$, gde je $\hat{A}$ matrica sa redovima $\hat{A}_n = RA_n$, $n = 0, 1, ...$ a $W^{(A_n)}$ trougaona matrica data sa*

$$w_{mk}^{(A_n)} = \begin{cases} \sum_{j=m}^{\infty} a_{nj} s_{jk}, & 0 \le k \le m \\ 0, & k > m \end{cases} \tag{2.6}$$

Štaviše, ako je $A \in (X_T, Y)$ imamo da je

$$Az = \hat{A}(Tz) \text{ , za svako } z \in Z = X_T$$

Napomena 3. *[36, Remark 3.5] a) Prethodna teorema važi i u slučaju da je $X = \ell_\infty$.*

b) Neka je Y linearni podprostor prostora ω. Imamo da je $A \in (c_T, Y)$ ako i samo ako važi

$$\hat{A} \in (c_0, Y),\ W^{(A_n)} \in (c, c) \text{ za svako } n \tag{2.7}$$

i

$$\hat{A}e - (\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in Y \text{ pri čemu je } \alpha_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} w_{mk}^{(A_n)} \text{ za } n = 0, 1, \ldots; \tag{2.8}$$

Takodje, ukoliko je $A \in (c_T, Y)$, tada je

$$Az = \hat{A}(Tz) - \eta\,(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \text{ za svako } z \in c_T \text{ gde je } \eta = \lim_{k\to\infty} T_k z. \tag{2.9}$$

Teorema 2.8. *[36, Theorem 3.6] Neka su X i Y BK prostori, i neka je prostor X sa osobinom AK. Ako je $A \in (X_T, Y)$ tada važi*

$$\|L_A\| = \|L_{\hat{A}}\| \tag{2.10}$$

pri čemu je $\hat{A}$ matrica definisana u Teoremi 2.7.

Teorema 2.9. *[35, Theorem 3.8] Neka su X i Y proizvoljni podskupovi ω. Tada, $A \in (X, Y_T)$ ako i samo ako $B = TA \in (X, Y)$. Važi još, ako su X i Y BK prostori i $A \in (X, Y_T)$, tada je $\|L_A\| = \|L_B\|$.*

Sada, kada smo naveli sve poznate rezultate koje ćemo koristiti u našem radu, vratimo se na prostore cs, bs i bv, imajući u vidu njihovo predstavljanje kao matrične domene trougaonih matrica datih u (2.3).

Daćemo, kao što smo pomenuli na kraju prethodne glave, karakterizaciju klase (cs, ℓ_∞) koristeći matrične domene. Primetimo da kako je cs AK prostor i $\ell_\infty = \ell_1^\beta$, možemo primeniti Teoremu 1.13, pa imamo sledeće:

$$A \in (cs, \ell_\infty) \ ako\ i\ samo\ ako\ A^t \in (\ell_1, cs^\beta)$$

odnosno

$$A \in (cs, \ell_\infty) \ ako\ i\ samo\ ako\ A^t \in (\ell_1, bv)\ .$$

Kako je dalje $bv = (\ell_1)_\Delta$, to dobijamo:

$$A^t \in (\ell_1, bv) \textit{ ako i samo ako } B \in (\ell_1, \ell_1) \text{ gde je } B = \Delta A^t.$$

Uzimajući dalje da je $b_{nk} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{nj} a_{jk}^t = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{nj} a_{kj} = a_{kn} - a_{k,n-1}$ i da je $B \in (\ell_1, \ell_1)$ ako i samo ako je $\sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |b_{nk}| < \infty$, jasno dobijamo da je:

$$A \in (cs, \ell_\infty) \text{ ako i samo ako je } \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k-1}| < \infty.$$

Svojstva prostora $\ell_p(\Delta_u^\lambda)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ i matrične transformacije na njemu

U skorije vreme pojedini autori izučavaju neke nove prostore nizova zanemarujući slučajno ili namerno činjenicu da se oni mogu predstaviti kao matrični domeni neke trougaone matrice u klasičnim prostorima nizova.

Inspirisani prostorima nizova $c_0(\Delta_u^\lambda)$ i $c(\Delta_u^\lambda)$ uvedenim u [11], uvodimo nove prostore prostore nizova $\ell_p(\Delta_u^\lambda)$, $1 \leq p \leq \infty$. Na osnovu već poznatih navedenih rezultata odredićemo topološka svojstva, bazu i β-dual ovako definisanog prostora. Rezultati iz ove sekcije prezentovani su na medjunarodnom skupu u Vrnjačkoj Banji [13th Serbian Mathematical Congress, 2014, Vrnjačka Banja, Serbia].

Neka je $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ strogo rastući niz pozitivnih realnih brojeva koji teže beskonačnosti, tj.

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \text{ i } \lambda_k \to \infty \ (k \to \infty) .$$

Neka je $u = (u_k)_{k=0}^{\infty}$ niz kompleksnih brojeva za koji je $u_k \neq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Definišimo sada nove prostore nizova na sledeći način:

$$\ell_p(\Delta_u^\lambda) = \{x \in \omega | \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{\Lambda}_n(x)|^p < \infty\} , 1 \leq p < \infty$$

$$\ell_\infty(\Delta_u^\lambda) = \{x \in \omega | \sup_n |\hat{\Lambda}_n(x)| < \infty\}$$

gde je

$$\hat{\Lambda}_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_k (x_k - x_{k-1}) \quad , k \in N.$$

Ovi prostori, zapravo, jesu matrični domeni trougaone matrice $\hat{\Lambda} = (\hat{\lambda}_{nk})_{n,k=0}^\infty$ date sa

$$\hat{\lambda}_{nk} \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k - (\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}}{\lambda_n}, & k < n \ , \\ \dfrac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot u_n, & k = n \ , \\ 0, & k > n \ , \end{cases} \tag{2.11}$$

gde $n = 0, 1, ...$, odnosno:

$$\ell_p(\Delta_u^\lambda) = (\ell_p)_{\hat{\Lambda}} \ , 1 \le p \le \infty. \tag{2.12}$$

Sa druge strane, označimo sa N_r Risovu (Riesz) matricu $N_r = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$ definisanu sa

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{r_k}{R_n} \ , (0 \le k \le n) \\ 0 \ , k > n \quad n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

gde je $R_n = \sum_{k=0}^n r_k$. Ako uzmemo sledeće:

$$r_0 = \lambda_0,$$

$$r_k = \lambda_k - \lambda_{k-1} \text{ za svako } k > 0,$$

dobićemo

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} r_k = \lambda_n.$$

Ukoliko sa $D(u)$ označimo dijagonalnu matricu sa nizom $u = (u_k)_{k=0}^\infty$ na dijagonali tj. $d_{nn} = u_n$, možemo videti da je

$$\hat{\Lambda} = N_r \cdot D(u) \cdot \Delta.$$

Dakle, matrica $\hat{\Lambda}$, korišćena u [11] i u ovom radu, može biti definisana i kao proizvod tri dobro poznate trougaone matrice zasebno izučavane u mnogim radovima.

Teorema 2.10. *Prostor $\ell_p(\Delta_u^\lambda)$ je BK prostor sa normom*

$$\|x\|_{\ell_p(\Delta_u^\lambda)} = \|\hat{\Lambda}(x)\|_{\ell_p}.$$

Dokaz: Direktna posledica (2.12) i Teoreme 2.2.

Kako svaka trougaona matrica ima jedinstvenu inverznu trougaonu matricu, nadjimo inverz naše matrice $\hat{\Lambda}$, koji ćemo označiti uobičajeno sa $S = (s_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$.

Imamo sledeće:

$$y_n = \hat{\Lambda}_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_k (x_k - x_{k-1}) \text{ , } k \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_n y_n - \lambda_{n-1} y_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_k (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_k (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= (\lambda_n - \lambda_{n-1}) u_n (x_n - x_{n-1})$$

Odavde dobijamo da je:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda_n y_n - \lambda_{n-1} y_{n-1}}{(\lambda_n - \lambda_{n-1}) u_n} \text{ , odnosno } x_k - x_{k-1} = \frac{\lambda_k y_k - \lambda_{k-1} y_{k-1}}{(\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_k}.$$

Imamo, dakle, da je

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k y_k - \lambda_{k-1} y_{k-1}}{(\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k y_k}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1} y_{k-1}}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k y_k}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} + \frac{\lambda_n y_n}{(\lambda_n - \lambda_{n-1})u_n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k y_k}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \left(\frac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}}\right) y_k + \frac{\lambda_n y_n}{(\lambda_n - \lambda_{n-1})u_n} \ .$$

Elementi sa negativnim indeksom biće nule, tj. $\lambda_{-1} = 0$, $x_{-1} = 0$.

Polazeći od $y = \hat{\Lambda} x$, zapravo, dobijamo sledeće:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} s_{nk} y_k$$

pri čemu je:

$$s_{nk} = \begin{cases} \lambda_k \left(\dfrac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \dfrac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}} \right), & 0 \le k \le n-1 \\ \dfrac{\lambda_n}{(\lambda_n - \lambda_{n-1})u_n}, & k = n \\ 0 \,, & k > n \end{cases} \tag{2.13}$$

Kao što nam je poznato, prostori ℓ_p, $1 \le p < \infty$, su AK prostori i svi imaju niz $\left(e^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ kao Šauderovu bazu. Primenjujući Teoremu 2.4, imamo da je niz $\left(c^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty} = \left(Se^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ baza za $\ell_p(\Delta_u^\lambda)$ prostor, odnosno, u razvijenom obliku dobijamo sledeći oblik baze za svako $n \in \mathbb{N}$:

$$c_k^{(n)} = \begin{cases} 0 \,, & 0 \le k \le n-1 \\ \dfrac{\lambda_n}{(\lambda_n - \lambda_{n-1})u_n}, & k = n \\ \lambda_n \left(\dfrac{1}{(\lambda_n - \lambda_{n-1})u_n} - \dfrac{1}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)u_{n+1}} \right), & k > n \end{cases} \tag{2.14}$$

Definišimo sve napred razmatrano kroz narednu teoremu.

Teorema 2.11. *Prostor nizova* $\ell_p(\Delta_u^\lambda)$, $1 \le p < \infty$, *ima Šauderovu bazu*

$(c^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *i svaki niz* $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_p(\Delta_u^\lambda)$ *ima jedinstvenu reprezentaciju*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\hat{\Lambda}_n(x)\Big) c^{(n)}.$$

Predjimo sada na proces nalaženja β-duala našeg prethodno definisanog prostora $\ell_p(\Delta_u^\lambda)$, za $1 \leq p \leq \infty$. Na osnovu predstavljanja prostora $\ell_p(\Delta_u^\lambda) = (\ell_p)_{\hat{\Lambda}}$ i primenom Teoreme 2.6 dobićemo željene β-duale. Napomenimo da ćemo u toku izvodjenja uslova koristiti oznake iz pomenute teoreme. Stoga, za početak imamo sledeće:

$$a \in \ell_p(\Delta_u^\lambda)^\beta \text{ ako i samo ako } a \in \Big((l_p)^\beta\Big)_R \text{ i } W^{(a)} \in (l_p, c_0),\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Zbog oblika β-duala za prostore ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, razlikovaćemo tri slučaja: kada je $1 < p < \infty$, kada je $p = 1$ i $p = \infty$.

Najpre ćemo izračunati $Ra = (R_k a)_{k=0}^{\infty}$.

$$\begin{aligned}
R_k a &= \sum_{j=0}^{\infty} r_{kj} a_j = \sum_{j=k}^{\infty} s_{jk} a_j = \\
&= \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} + \Big(\frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}}\Big) \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j = \\
&= \lambda_k \Big[\frac{a_k}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} + \Big(\frac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}}\Big) \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\Big]
\end{aligned}$$

Za ovako dobijeno Ra uslov $a \in \Big((\ell_p)^\beta\Big)_R$, ekvivalentan sa $Ra \in (\ell_p)^\beta$, postaje:

1) $a \in \Big((\ell_p)^\beta\Big)_R$ za $1 < p < \infty$ ako i samo ako $Ra \in (\ell_p)^\beta = \ell_q$, $q = p/(p-1)$

$$\text{tj. } \sum_{k=0}^{\infty} |R_k a|^q < \infty,\ q = p/(p-1)\ ; \tag{2.15}$$

2) $a \in \Big((\ell_1)^\beta\Big)_R$ ako i samo ako $Ra \in (\ell_1)^\beta = \ell_\infty$

$$\text{tj. } \sup_k |R_k a| < \infty \ ; \tag{2.16}$$

3) $a \in \left((\ell_\infty)^\beta\right)_R$ ako i samo ako $Ra \in (\ell_\infty)^\beta = \ell_1$

$$\text{tj. } \sum_{k=0}^{\infty} |R_k a| < \infty \ . \tag{2.17}$$

Primenjujući rezultate iz prve glave, tj karakterizacije matričnih transformacija (ℓ_p, c_0), za $1 \leq p \leq \infty$, dobićemo sledeće uslove za matricu $W^{(a)}$:

(i) $W^{(a)} \in (\ell_p, c_0),\ 1 < p < \infty,$ ako i samo ako $\sup_m \sum_{k=0}^{\infty} |w_{mk}^{(a)}|^q < \infty$, $q = p/(p-1)$ i $\lim_{m\to\infty} w_{mk}$ za svako k, pri čemu je

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |w_{mk}^{(a)}|^q &= \sum_{k=0}^{\infty}\Big|\sum_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk}\Big|^q = \sum_{k=0}^{m}\Big|\sum_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk}\Big|^q = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\Big|\sum_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk}\Big|^q + \Big|\sum_{j=m}^{\infty} a_j s_{jm}\Big|^q = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \Big| \sum_{j=m}^{\infty} \lambda_k \Big(\frac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}}\Big) a_j \Big|^q + \\ &\Big|\frac{\lambda_m a_m}{(\lambda_m - \lambda_{m-1})u_m} + \Big(\frac{\lambda_m}{(\lambda_m - \lambda_{m-1})u_m} - \frac{\lambda_m}{(\lambda_{m+1} - \lambda_m)u_{m+1}}\Big) \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j\Big|^q\end{aligned}$$

Uslov $\sup_m \sum_{k=0}^{\infty} |w_{mk}^{(a)}|^q < \infty$ postaje:

$$\begin{aligned}&\sup_m \Big[\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\Big|\frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}}\Big|^q \cdot \sum_{j=m}^{\infty} |a_j|^q\Big) + \\ &+\Big|\frac{\lambda_m a_m}{(\lambda_m - \lambda_{m-1})u_m} + \Big(\frac{\lambda_m}{(\lambda_m - \lambda_{m-1})u_m} - \frac{\lambda_m}{(\lambda_{m+1} - \lambda_m)u_{m+1}}\Big) \cdot \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j\Big|^q\Big] < \infty\end{aligned} \tag{2.18}$$

(ii) $W^{(a)} \in (\ell_1, c_0)$ ako i samo ako $\sup_{m,k} |w_{mk}^{(a)}| < \infty$ i $\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(a)} = 0$ za svako k

- za $k < m$ imamo

$$\begin{aligned}\sup_{m,k<m}\left|w_{mk}^{(a)}\right| &= \sup_{m,k<m}\Big|\sum_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk}\Big| \\ &= \Big|\Big(\frac{\lambda_k}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big)\cdot \sum_{j=m}^{\infty} a_j\Big| < \infty\end{aligned}$$

- za $k = m$ imamo

$$\begin{aligned}\sup_m\left|w_{mm}^{(a)}\right| =&\Big|\frac{a_m\lambda_m}{(\lambda_m-\lambda_{m-1})u_m} \\ &+\Big(\frac{\lambda_m}{(\lambda_m-\lambda_{m-1})u_m}-\frac{\lambda_m}{(\lambda_{m+1}-\lambda_m)u_{m+1}}\Big)\sum_{j=m+1}^{\infty} a_j\Big|<\infty\end{aligned} \tag{2.19}$$

(iii) $W^{(a)} \in (\ell_\infty, c_0)$ ako i samo ako $\sum_{k=0}^{\infty}|w_{mk}^{(a)}|$ konvergira uniformno po m i $\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(a)} = 0$ za svako k

Možemo primetiti da, kako red $R_k a = \sum_{j=k}^{\infty} a_j s_{jk}$ konvergira za svako k, dobijamo da je

$$\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(a)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk} = 0 \ ,$$

pa je uslov $\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(a)} = 0$ suvišan u definiciji β-duala za naše prostore.

Najzad imamo rezultate za sve pomenute slučajeve date kroz sledeću teoremu.

Teorema 2.12.

1. *$a \in \ell_p(\Delta_u^\lambda)^\beta$ ako i samo ako važe uslovi (2.15) i (2.18).*

2. *$a \in \ell_1(\Delta_u^\lambda)^\beta$ ako i samo ako važe uslovi(2.16) i (2.19).*

3. *$a \in \ell_\infty(\Delta_u^\lambda)^\beta$ ako i samo ako*

$$\sum_{k=0}^{\infty}|w_{mk}^{(a)}| = \sum_{k=0}^{\infty}\Big|\frac{\lambda_k}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big| \cdot \sum_{j=m}^{\infty}|a_j| +$$

$$+\Big|\frac{\lambda_m a_m}{(\lambda_m-\lambda_{m-1})u_m} + \Big(\frac{\lambda_m}{(\lambda_m-\lambda_{m-1})u_m} - \frac{\lambda_m}{(\lambda_{m+1}-\lambda_m)u_{m+1}}\Big) \cdot \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j\Big|$$

uniformno konvergira po m (2.20)

i ispunjen je uslov (2.17).

Sada ćemo posmatrati klase matričnih transformacija oblika $(\ell_p(\Delta_u^\lambda), Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, gde je Y neki od klasičnih prostora nizova. Sve ovo nam je priprema za narednu glavu gde ćemo dati karakterizaciju odgovarajućih klasa kompaktnih operatora.

Za pomenuti zadatak primenjivaćemo Teoremu 2.7 i Napomenu 3. Pre nego što damo konačne rezultate, prokomentarisaćemo i dokazati sve uslove, što će nam poslužiti ujedno kao i dokaz. Uzimajući za Y odgovarajući finalni prostor, imamo sledeće:

$$A \in (\ell_p(\Delta_u^\lambda), Y) \text{ ako i samo ako } \hat{A} \in (\ell_p, Y) \text{ i } W^{(A_n)} \in (\ell_p, c_0)\ , 1 \leq p \leq \infty.$$

Dakle, biće nam potrebne karakterizacije matričnih transformacija izmedju klasičnih prostora nizova iz prve glave, primenjene na matrice $\hat{A}$ i $W^{(A_n)}$. Pre nego počnemo sa sredjivanjem uslova, primetimo da je $\hat{A} = (\hat{a}_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ pri čemu su članovi matrice dati sa

$$\begin{aligned}\hat{a}_{nk} = R_k A_n =& \lambda_k\Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k} + \\ &\Big(\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\Big)\end{aligned} \tag{2.21}$$

Tako, primenom uslova (1.1) na $\hat{A}$ imamo

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| < \infty$$

odnosno

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \Big| \lambda_k \Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} + \\ + \Big(\frac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}} \Big) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \Big) \Big| < \infty \tag{2.22}$$

Uslov (1.2) postaje u našem slučaju uslov

$$\sup_{n,k} |\hat{a}_{nk}| < \infty$$

odnosno

$$\sup_{n,k} \Big| \lambda_k \Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} + \\ + \Big(\frac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}} \Big) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \Big) \Big| < \infty, \tag{2.23}$$

dok se transformacijom uslova (1.3) dobija novi uslov

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^q < \infty \ , 1 < p < \infty \ , q = \frac{p}{p-1}$$

tj.

$$\sup_n \sum_{n=0}^{\infty} \Big| \lambda_k \Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} + \\ + \Big(\frac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}} \Big) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \Big) \Big|^q < \infty \tag{2.24}$$

Uslovi (1.5) i (1.7) se redom transformišu u našem slučaju u sledeće:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{a}_{nk} = 0$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\lambda_k\Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}+ \\ +\Big(\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}-\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\Big)\Big) = 0 \qquad (2.25)$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \hat{a}_{nk} = \alpha_k \ , \text{ za svako } k$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\lambda_k\Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}+ \\ +\Big(\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}-\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\Big)\Big) = \alpha_k \ , \text{ za svako } k \ . \qquad (2.26)$$

Uslov (i) iz Šurove teoreme primenjen na našu matricu $\hat{A}$ nam daje da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big|\lambda_k\Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}+ \\ +\Big(\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}-\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\Big)\Big| \text{ uniformno konvergira po n .} \qquad (2.27)$$

Za $K \in \mathcal{F}$ uslov (1.11) postaje

$$\sup_{K\in\mathbb{N}_0} \sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{k\in K} \hat{a}_{nk}|^q < \infty \ , 1 < p < \infty \ , q = \frac{p}{p-1}$$

tj.

$$\sup_{K\in\mathbb{N}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \Big|\lambda_k\Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}+ \\ +\Big(\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}-\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\Big)\Big| < \infty\,. \tag{2.28}$$

Transformisani uslov (1.6) je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_{nk} = \alpha_k \ , \text{ za svako } k$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\lambda_k\Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}+ \\ +\Big(\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}-\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\Big)\Big) = \alpha_k \text{ za svako } k\,. \tag{2.29}$$

a uslov (1.12) prelazi u

$$\sup_{k} \sum_{n=0}^{\infty} \Big|\lambda_k\Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}+ \\ +\Big(\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}-\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\Big)\Big|^q < \infty \tag{2.30}$$

Uslov (1.13) primenjen na $\hat{A}$ je

$$\sup_{k} \sum_{n=0}^{\infty} \Big|\lambda_k\Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}+ \\ +\Big(\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}-\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\Big)\Big| < \infty\,. \tag{2.31}$$

Za $K \in \mathcal{F}$ uslovi (1.14) i (1.15) transformišu se redom u:

$$\sup_{K\in\mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{n\in K} \lambda_k \Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} + \\ + \Big(\frac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}} \Big) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \Big) \Big| < \infty \tag{2.32}$$

i

$$\sup_{K\in\mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{n\in K} \lambda_k \Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} + \\ + \Big(\frac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}} \Big) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \Big) \Big| < \infty\ . \tag{2.33}$$

Na ovaj način "popisališmo sve uslove potrebne za karakterizaciju beskonačne matrice $\hat{A}$ iz odredjene klase oblika (ℓ_p, Y), za odgovarajuće $Y \in \{c, c_0, \ell_\infty, \ell_r\}, 1 \leq r \leq \infty$.

Predjimo sada na matricu $W^{(A_n)}$ za koju se zahteva da je iz klase (ℓ_p, c_0) za odgovarajuće p. Imajući u vidu pomenute matrične transformacije izmedju klasičnih prostora nizova i njihove karakterizacije, primenom na matricu $W^{(A_n)}$ bilo da se radi o $p = 1$, $p = \infty$ ili $1 < p < \infty$, uvek je jedan od zahtevanih uslova $\lim_{m\to\infty} w_{mk}^{(A_n)} = 0$ za svako k. Kao i kod β-duala, ovaj uslov se u našim razmatranjima može izostaviti imajući u vidu činjenicu da je red $R_k A_n$ konvergentan. Stoga, naše razmatranje ide u sledećem pravcu:

a) U slučaju kad je $1 < p < \infty$ imaćemo

$$W^{(A_n)} \in (l_p, c_0)\ , (1 < p < \infty\ , q = \frac{p}{p-1})$$

ako i samo ako je ispunjeno:

$$\sup_m \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \Big(\Big| \frac{\lambda_k}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}} \Big|^q \sum_{j=m}^{\infty} |a_{nj}|^q \Big) + \Big| \frac{\lambda_m a_{nm}}{(\lambda_m - \lambda_{m-1})u_m}$$

$$+\Big(\frac{\lambda_m}{(\lambda_m-\lambda_{m-1})u_m}-\frac{\lambda_m}{(\lambda_{m+1}-\lambda_m)u_{m+1}}\Big)\sum_{j=m+1}^{\infty}a_{nj}\Big|^q\Big]<\infty; \tag{2.34}$$

b) Za $p=1$ imamo

$$W^{(A_n)} \in (l_1, c_0)$$

ako i samo ako važi sledeće:

$$\sup_{m,k<m}\lambda_k\Big|\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}-\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big|\cdot\Big|\sum_{j=m}^{\infty}a_{nj}\Big|<\infty$$

i

$$\sup_m \lambda_m\Big|\frac{a_{nm}}{(\lambda_m-\lambda_{m-1})u_m}$$
$$+\Big(\frac{1}{(\lambda_m-\lambda_{m-1})u_m}-\frac{1}{(\lambda_{m+1}-\lambda_m)u_{m+1}}\Big)\sum_{j=m+1}^{\infty}a_{nj}\Big|<\infty\,. \tag{2.35}$$

c) Za $p=\infty$ imamo

$$W^{(A_n)} \in (l_\infty, c_0)$$

ako i samo ako važi:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\Big|\frac{\lambda_k}{(\lambda_k-\lambda_{k-1})u_k}-\frac{\lambda_k}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)u_{k+1}}\Big|\sum_{j=m}^{\infty}|a_{nj}|+$$

$$+\Big|\frac{\lambda_m a_{nm}}{(\lambda_m-\lambda_{m-1})u_m}+\Big(\frac{\lambda_m}{(\lambda_m-\lambda_{m-1})u_m}-\frac{\lambda_m}{(\lambda_{m+1}-\lambda_m)u_{m+1}}\Big)\sum_{j=m+1}^{\infty}a_{nj}\Big|$$

uniformno konvergira po n. (2.36)

Na osnovu svega izloženog dobijamo sledeće rezultate koji se odnose na karakterizaciju klase $(\ell_p(\Delta_u^\lambda), Y)$, $(1 \leq p \leq \infty)$.

Teorema 2.13. *Neka je $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. Tada:*

1) $A \in (\ell_p(\Delta_u^\lambda), \ell_\infty)$ *ako i samo ako važi* $\begin{cases} (2.22), (2.26) \textit{ i } (2.35) & (p=1) \\ (2.22) \textit{ i } (2.36) & (p=\infty) \\ (2.24) \textit{ i } (2.34) & (p \in (1,\infty)) \end{cases}$

2) $A \in (\ell_p(\Delta_u^\lambda), c_0)$ *ako i samo ako važi* $\begin{cases} (2.23), (2.25) \textit{ i } (2.35) & (p=1) \\ (2.25), (2.27) \textit{ i } (2.36) & (p=\infty) \\ (2.24), (2.25) \textit{ i } (2.34) & (p \in (1,\infty)) \end{cases}$

3) $A \in (\ell_p(\Delta_u^\lambda), c)$ *ako i samo ako važi* $\begin{cases} (2.26), (2.29) \textit{ i } (2.35) & (p=1) \\ (2.27), (2.29) \textit{ i } (2.36) & (p=\infty) \\ (2.24), (2.26) \textit{ i } (2.34) & (p \in (1,\infty)) \end{cases}$

4) $A \in (\ell_p(\Delta_u^\lambda), \ell_1)$ *ako i samo ako važi* $\begin{cases} (2.31) \textit{ i } (2.35) & (p=1) \\ (2.33) \textit{ i } (2.36) & (p=\infty) \\ (2.32) \textit{ i } (2.34) & (p \in (1,\infty)) \end{cases}$

5) $A \in (\ell_p(\Delta_u^\lambda), \ell_r)$ $(r \in (1,\infty))$ *ako i samo ako važi* $\begin{cases} (2.30) \textit{ i } (2.35) & (p=1) \\ (2.28) \textit{ i } (2.36) & (p=\infty) \\ \textit{nepoznato} & (p \in (1,\infty)) \end{cases}$

Matrični domeni matrice Δ u klasičnim prostorima nizova c , c_0 i ℓ_∞

U ovoj sekciji definisaćemo nove prostore nizova $c(\Delta)$, $c_0(\Delta)$ i $\ell_\infty(\Delta)$ koji predstavljaju zapravo matrični domen matrice Δ, definisane u (2.1) u klasičnim prostorima nizova c, c_0 i ℓ_∞, redom. Medjutim, umesto oznake X_Δ za $X \in \{c, c_0, \ell_\infty\}$, koristićemo $X(\Delta)$, te ćemo tako imati prostore $c(\Delta)$, $c_0(\Delta)$ i $\ell_\infty(\Delta)$. Rezultati iz ove sekcije su deo rada [33]. Ostatak rezultata biće prezentovan delom u narednoj sekciji a delom u narednoj glavi koja ima ključnu ulogu u našem celokupnom radu.

Pomenimo da matrica Δ definiše operator razlike prvog reda. Kao što smo već ranije videli, ovo je trougaona matrica sa inverznom trougaonom matricom Σ, definisanom u (2.2). Naši prostori definisani su na sledeći način:

$$c_0(\Delta) = \{\, x \in \omega \,|\, \Delta x \in c_0 \,\} = \{x \in \omega \mid \lim_{n\to\infty} \Delta_n x = 0\};$$

$$c(\Delta) = \{\, x \in \omega \,|\, \Delta x \in c \,\} = \{x \in \omega \mid \lim_{n\to\infty} \Delta_n x = \xi \text{ za neko } \xi \in C\};$$

$$\ell_\infty(\Delta) = \{\, x \in \omega \,|\, \Delta x \in \ell_\infty \,\} = \{x \in \omega \mid \sup_n |\Delta_n x| < \infty\}.$$

Teorema 2.14. *Prostori $c(\Delta)$, $c_0(\Delta)$ i $\ell_\infty(\Delta)$ su BK prostori sa normom definisanom na sledeći način:*

$$\|x\|_\Delta = \|\Delta x\|$$

odnosno, za svako $x \in X(\Delta)$, gde je $X \in \{c_0, c, \ell_\infty\}$ važi:

$$\|x\| = \sup_n |\Delta_n x| = \sup_n |x_n - x_{n-1}|.$$

Dokaz: Direktna posledica Teoreme 2.2 i norme definisane na prostorima c_0, c, ℓ_∞.

Napomena 4. *Prostori $c(\Delta)$ i $c_0(\Delta)$ imaju Šauderove baze koje se mogu lako dobiti primenom Teoreme 2.4 i to za $c_0(\Delta)$ deo pod $a)$ a za $c(\Delta)$ deo pod $c)$ uzimajući $T = \Delta$ i $S = \Sigma$. Prostor $\ell_\infty(\Delta)$ nema Šauderovu bazu.*

Dalje ćemo odrediti β-duale za definisane prostore. Kao što smo i napred koristili, i ovde ćemo sa R označiti transponovanu matricu matrice $S = \Sigma$.

Uvedimo još jednu oznaku koju ćemo koristiti tokom dokaza. Za niz $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in X$, m-ta sekcija niza x, u oznaci, $x^{[m]}$, definiše se na sledeći način: $x^{[m]} = \sum_{k=1}^m x_k e^{(k)}$.

Teorema 2.15. *Neka je $\mathbf{n} = (n)_{n=1}^\infty$. Tada imamo sledeće:*

a) $a \in (c_0(\Delta))^\beta$ *ako i samo ako je*

$$Ra \in \ell_1 \text{ } \textit{i} \text{ } Ra \in \mathbf{n}^{-1} * \ell_\infty \ ; \tag{2.37}$$

b) $a \in (\ell_\infty(\Delta))^\beta$ *ako i samo ako je*

$$Ra \in \ell_1 \text{ } \textit{i} \text{ } Ra \in \mathbf{n}^{-1} * c_0 \ ; \tag{2.38}$$

Važi i da je $(c(\Delta))^\beta = (\ell_\infty(\Delta))^\beta$.
c) Ako je $a \in (X(\Delta))^\beta$, *gde je* X *bilo koji od prostora* c_0, c *ili* ℓ_∞, *imamo da je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} (R_k a)(\Delta_k x) \ \ \textit{za svako} \ \ x \in X \ . \tag{2.39}$$

Dokaz: a) i b) Uzimajući da je $T = \Delta$ a odgovarajuća inverzna matrica $S = \Sigma$, primenom [36, Theorem 3.2, Remark 3.3(a)] za $X = c_0$ ili $X = \ell_\infty$ u delovima a) i b) dobijamo $a \in (X(\Delta))^\beta$ ako i samo ako je $Ra \in X^\beta = \ell_1$, što je zapravo prvi uslov iz (2.37) i (2.38), i $W \in (X, c_0)$, pri čemu je W matrica sa redovima $W_m = R_m a \cdot e^{[m]}$ za $m = 1, 2, ...$ Za karakterizaciju klase (X, c_0) koristićemo rezultate iz prve glave (Teorema 1.8 (g) i Napomena 1), pa tako imamo: $W \in (c_0, c_0)$ ako i samo ako

$$\sup_m \sum_{k=1}^{\infty} |w_{mk}| = \sup_m (m|R_m a|) < \infty \ ,$$

što predstavlja drugi uslov u (2.37) , i

$$\lim_{m\to\infty} w_{mk} = \lim_{m\to\infty} R_m a = 0$$

Poslednji uslov je nepotreban imajući u vidu konvergenciju reda $R_m a$.

Dalje imamo da je $W \in (\ell_\infty, c_0)$ ako i samo ako je ispunjen uslov

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|w_{mk}| = \lim_{m\to\infty} m|R_m a| = 0$$

što je zapravo drugi uslov u (2.38).
Ostalo je da pokažemo da važi i $(c(\Delta))^\beta = (\ell_\infty(\Delta))^\beta$.
Znamo da je $c(\Delta) \subset \ell_\infty(\Delta)$ a odatle, na osnovu osobina β-duala sledi da je $(\ell_\infty(\Delta))^\beta \subset (c(\Delta))^\beta$. Ostaje da se pokaže i obrnuta inkluzija. Pretpostavimo da je $a \in (c(\Delta))^\beta$. Kako je $(c(\Delta))^\beta \subset (c_0(\Delta))^\beta$, to imamo ispunjen prvi uslov u (2.38). Pošto $\mathbf{n} \in c(\Delta)$ i $a \in (c(\Delta))^\beta$, to sledi konvergencija reda $\sum_{k=1}^\infty ka_k$. Na osnovu [35, Corollary 3.16] dobijamo da je onda ispunjen drugi uslov u (2.38) čime smo dokazali da je $a \in (\ell(\Delta))^\beta$. Dakle, važi $(c(\Delta))^\beta = (\ell_\infty(\Delta))^\beta$.
c) Na osnovu [36, Theorem 3.2(3.4), Remark 3.3(a)] tvrdjenje važi za $X = c_0$ i za $X = \ell_\infty$, a kako smo pokazali da su β-duali za prostore $c(\Delta)$ i $\ell_\infty(\Delta)$ isti, važi i u slučaju da je $X = c$.

Na kraju ove sekcije daćemo karakterizaciju matričnih preslikavanja gde je početni prostor naš novodefinisani prostor $c(\Delta)$, $c_0(\Delta)$ ili $\ell_\infty(\Delta)$ a finalni prostor je ℓ_∞. Naravno, moguće je dati karakterizacije i za druge slučajeve finalnog prostora. Postupak bi se sveo na primenu karakterizacija matričnih preslikavanja izmedju klasičnih prostora nizova (obradjeno u prvoj glavi) kao i primenu rezultata o matričnim transformacijama na matričnim domenima (obradjeno u prvoj sekciji ove glave). Medjutim, ovde ćemo se zadržati na pomenutim klasama matričnih transformacija koje dalje definišu odgovarajuće pridružene matrične operatore a ovi dalje mogu biti dodatno ispitivani, što će i biti slučaj u narednoj glavi, a sve sa ciljem nalaženja uslova za njihovu kompaktnost. Finalni prostor $Y = \ell_\infty$ je kod ove problematike specijalno interesantan što će biti i pokazano u narednoj glavi.

Teorema 2.16. *a)* $A \in (c_0(\Delta), \ell_\infty)$ *ako i samo ako je*

$$\sup_n \|\hat{A}_n\|_1 < \infty \;\; \textit{gde je} \;\; \hat{A}_n = RA_n = \Big(\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}\Big)_{k=1}^{\infty} \tag{2.40}$$

i

$$\sup_m |mR_mA_n| < \infty \ \textit{ za svako } \ n \ ; \tag{2.41}$$

b) $A \in (\ell_\infty(\Delta), \ell_\infty)$ *ako i samo ako važi (2.40) i ispunjeno je*

$$\lim_{m\to\infty} mR_mA_n = 0 \ \textit{ za svako } \ n \ ; \tag{2.42}$$

Važi još i sledeće: $(c(\Delta), \ell_\infty) = (\ell_\infty(\Delta), \ell_\infty)$.
c) Ako je $A \in (X(\Delta), \ell_\infty)$, *tada imamo da je*

$$Ax = \hat{A}(\Delta x) \ \textit{ za svako } \ x \in X(\Delta) \tag{2.43}$$

i

$$\|L_A\| = \|L_{\hat{A}}\| \tag{2.44}$$

gde je $\hat{A} \in (X, \ell_\infty)$.

Dokaz: Sva tvrdjenja za $X = c_0$ i $X = \ell_\infty$, definisana u $a)$ i $b)$ su direktna posledica [36, Theorem 3.4, Remark 3.5(a), Theorem 3.6] kao i činjenice da je $(\ell_\infty, \ell_\infty) = (c_0, \ell_\infty)$. Ostaje da dokažemo da je $c(\Delta) = \ell_\infty(\Delta)$.
Kako nam za ove prostore važe inkluzije $c_0(\Delta) \subset c(\Delta) \subset \ell_\infty(\Delta)$, to je jasno da važi i $(\ell_\infty(\Delta), \ell_\infty) \subset (c(\Delta), \ell_\infty)$. Potrebno je dokazati i obrnutu inkluziju.
Predpostavimo zato da je da je $A \in (c(\Delta), \ell_\infty)$. Odatle proizilazi da je i $A \in (c_0(\Delta), \ell_\infty)$, pa važi uslov (2.40). Takodje, iz pretpostavke da je $A \in (c(\Delta), \ell_\infty)$, jasno sledi da važi $A_n \in c(\Delta)^\beta$ za svako n. Kako smo u prethodnoj teoremi pokazali, ispunjeno je $(\ell_\infty(\Delta))^\beta = (c(\Delta))^\beta$ pa odatle uslov (2.42) sledi iz drugog uslova u (2.38). Kako imamo da važe uslovi (2.40) i (2.42), to sledi da je $A \in (\ell_\infty(\Delta), \ell_\infty)$, pa smo time pokazali da $(c(\Delta), \ell_\infty) \subset (\ell_\infty(\Delta), \ell_\infty)$ što je i bio naš cilj.
Jednakost u (2.44) je posledica jednakosti u (2.43) i činjenice da su odgovarajuće BK norme na prostorima $c_0(\Delta)$ i $c(\Delta)$ iste. Dalje, (2.44) za $c_0(\Delta)$ sledi iz [36, Theorem 3.6] a za prostor $\ell_\infty(\Delta)$ iz [36, Remark 3.5] (koja takodje

daje i (2.43) za prostor $\ell_\infty(\Delta)$) i iz definicije normi za operatore L_A i $L_{\hat{A}}$. Najzad, iz (2.39) sledi uslov (2.43) za $c(\Delta)$.
Uslov (2.44) je posledica definicije normi operatora L_A i $L_{\hat{A}}$.
Označimo najpre sa B_X jediničnu sferu u X, tj. $B_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$.
Imamo sledeće:

$$\|L_A\| = \sup_{z \in B_{c(\Delta)}} \|L_A z\|_{\ell_\infty} = \sup_{z \in B_{c(\Delta)}} \|L_{\hat{A}}(\Delta z)\|_{\ell_\infty} = $$
$$= \sup_{\Delta z \in B_c} \|L_{\hat{A}}(\Delta z)\|_{\ell_\infty} = \sup_{y \in B_c} \|L_{\hat{A}} y\|_{\ell_\infty} = \|L_{\hat{A}}\|.$$

Ovim je završen dokaz.

Klase matričnih transformacija u kojima je finalni prostor jedan od w_∞, $[c]_\infty$ i v_∞

Kao što smo već i ranije pomenuli, mnogi izučavani prostori nizova dobijeni su kao matrični domeni, odnosno potiču iz teorije sumabilnosti, bilo obične, jake ili apsolutne. Predmet našeg izučavanja jesu metodi sumabilnosti definisani beskonačnim matricama. Tako, zavisno od izgleda matrice, imamo Hausdorfovu (Hausdorff), Norlandovu (Nörlund), Ojlerovu (Euler), Holderovu (Hölder), Cesarovu (Cesaro). Za šire izučavanje teorije sumabilnosti će se dalje koristiti [16, 27, 48] a mi ćemo se u okviru ove sekcije zadržati na Cesarovom metodu reda 1, definisanim beskonačnom Cesarovom matricom C_1 čiji su elementi:

$$(C_1)_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & 0 \le k \le n \\ 0, & \text{k} > n \end{cases} \tag{2.45}$$

za, $n = 0, 1, ...$
Uobičajena oznaka za niz dobijen ovakvom transformacijom je $\sigma(x) = (\sigma_n(x))_{n=0}^\infty$ pri čemu je $\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n x_k$.

Neka je $X \subset \omega$ i B nenegativna matrica $B = (b_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. Tada sa

$$X_{[B]} = \{x \in \omega \mid B|x| = (B_n|x|)_{n=0}^{\infty} \in X\}$$

označavamo jaki matrični domen matrice B u X (engl. strong matrix domain), pri čemu je $|x| = (|x_k|)_{k=0}^{\infty}$.

Neka je dalje $0 < p < \infty$. Za niz $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ kažemo da je jako A-sumabilan sa indeksom p ka kompleksnom broju ℓ, ukoliko red $\sum_{k=0} \infty a_{nk}|x_k - \ell|^p$ konvergira za svako n i važi $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0} \infty a_{nk}|x_k - \ell|^p = 0$, u oznaci $x \to \ell[A]^p$. Broj ℓ nazvaćemo jaka A-granica niza $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$.

U [26] Maddox je definisao i izučavao sledeće prostore nizova:

$$\begin{aligned}
w_0^p &= \left\{x \in \omega \mid \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right) = 0\right\}, \\
w^p &= \left\{x \in \omega \mid x - \xi \cdot e \in w_0^p \text{ za neki kompleksan broj } \xi\right\}, \\
w_\infty^p &= \left\{x \in \omega \mid \sup_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right) < \infty\right\}.
\end{aligned}$$

To su, redom, jako sumabilni ka nuli (engl. strongly summable to zero), jako sumabilni (engl. strongly summable) i jako ograničeni (engl. strongly bounded) prostori Cesarovim metodom sumabilnosti reda 1 i indeksa p, za $0 < p < \infty$.

Ovde ćemo se zadržati na indeksu $p = 1$, pa tako dobijamo sledeće prostore nizova:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \left\{x \in \omega \mid \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right) = 0\right\}, \\
w &= \left\{x \in \omega \mid x - \xi \cdot e \in w_0 \text{ za neki kompleksni broj } \xi\right\}, \\
w_\infty &= \left\{x \in \omega \mid \sup_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right) < \infty\right\},
\end{aligned}$$

odnosno:

$$w_0 = (c_0)_{[C_1]}$$

$$w = \{x \in \omega : x - \xi \cdot e \in w_0 \text{ za neki kompleksni broj } \xi\}$$

i

$$w_\infty = (\ell_\infty)_{[C_1]}.$$

Dobili smo jako C_1 sumabilne i ograničene prostore nizova. Sledeći rezultati su poznati i odnose se upravo na ove prostore nizova [26].

Tvrdjenje 2.17. *(a) Za svako $x \in w$, jaka granica ξ za koju je*

$$x - \xi \cdot e \in w_0 \tag{2.46}$$

je jedinstvena.
(b) Skupovi w_0, w and w_∞ su BK prostori u odnosu na normu $\|\cdot\|$ definisanu sa

$$\|x\| = \|\sigma(|x|)\|_\infty = \sup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right);$$

w_0 je AK prostor; svaki niz $x = (x_k)_{k=0}^\infty \in w$ ima jedinstvenu reprezentaciju

$$x = \xi \cdot e + \sum_{k=0}^{\infty}(x_k - \xi)e^{(k)} \tag{2.47}$$

gde je ξ jaka granica niza x; prostor w_∞ nema Šauderovu bazu.

Tvrdjenje 2.18. *[26] Označimo sa $\max_\nu = \max_{2^\nu \leq k \leq 2^{\nu+1}-1}$ za $\nu = 0, 1, \ldots,$ i neka je*

$$\mathcal{W} = \{a \in \omega : \|a\|_{\mathcal{W}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \max_\nu |a_k| < \infty\}.$$

Imamo sledeće:
(a) $w_0^\beta = w^\beta = w_\infty^\beta = \mathcal{W}$;
(b) $\|a\|^*_{w_\infty} = \|a\|_{\mathcal{W}}$ za svako $a \in w_\infty^\beta$;
(c) $\mathcal{W}$ je BK prostor sa osobinom AK i važi $\mathcal{W}^\beta = w_\infty$ ([19, Theorem 2.1]).

Pre nego izložimo neke od rezultata objavljenih u [33], navedimo neke poznate karakterizacije matričnih transformacija sa finalnim prostorom w, w_0 ili w_∞.

Teorema 2.19. *[31] Neka je $q = \infty$ za $p = 1$, $q = p/(p-1)$ za $1 < p < \infty$ i $q = 1$ za $p = \infty$.*
Označimo sa

$$\|A\|_{(p,w_\infty)} = \sup_m \left(\max_{N_m} \left\| S_m^{N_m}(A) \right\|_q \right)$$

$$= \begin{cases} \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sup_k \left| \frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} a_{nk} \right| \right) \right) & (p = 1) \\ \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} a_{nk} \right|^q \right)^{1/q} \right) & (1 < p \leq \infty) \end{cases}$$

Potrebni i dovoljni uslovi da bi bilo $A \in (X, Y)$ kada je $X \in \{\ell_p, \ell_\infty, c_0, c\}$ i $Y \in \{w_0, w, w_\infty\}$ dati su u narednoj tabeli:

From / *To*	ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$	ℓ_∞	c_0	c
w_∞	**1.** *([34, Remark 1 (a)])*	**2.** *([34, Remark 1 (a)])*	**2.**	**2.**
w_0	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
w	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**

where

1. $(1.1)^*$ $\|A\|_{(p,w_\infty)} < \infty$

2. $(2.1)^*$ $\|A\|_{(\infty,w_\infty)} < \infty$

3. $(1.1)^*$ *i* $(3.1)^*$, *gde je* $(3.1)^*$ $\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} |a_{nk}| \right) = 0$ *za svako* k

4. $(4.1)^*$ $\lim_{m\to\infty} \left(\max_{N_m} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N_m} a_{nk} \right| \right) \right) = 0$

5. $(2.1)^*$ *i* $(3.1)^*$

6. $(2.1)^*,\ (3.1)^*$ *i* $(6.1)^*,$ *gde je* $(6.1)^*$ $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m}\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{nk}\right|\right)=0$

7. $(1.1)^*$ *i* $(7.1)^*$ *gde je*

$$(7.1)^*\quad\begin{cases}\text{za svako } k \text{ pri čemu je } \alpha_k\in C \text{ tako da važi}\\ \lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m}|a_{nk}-\alpha_k|\right)=0\end{cases}$$

8. $(7.1)^*,\ (8.2)^*$ *i* $(8.3)^*,$ *gde je*

$(8.2)^*$ $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\in\ell_1$ *i* $A_n\in\ell_1$ *za svako* n

$(8.3)^*$ $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\max\limits_{N_m}\left(\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\sum\limits_{n\in N_m}(a_{nk}-\alpha_k)\right|\right)\right)=0$

9. $(2.1)^*$ *i* $(7.1)^*$

10. $(2.1)^*,\ (7.1)^*$ *i* $(10.1)^*$ *pri čemu je*

$$(10.1)^*\quad\begin{cases}\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m}\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}-\alpha\right|\right)=0\\ \text{za neko } \alpha\in C\end{cases}$$

Polazeći od gore uvedenih prostora, definisaćemo sada nove prostore nizova:

$$[c]_\infty=\mathbf{n}^{-1}*(w_\infty)_\Delta \tag{2.48}$$

i

$$v_\infty=(w_\infty)_\Delta.$$

Sledeća teorema daje karakterizacije za klase matričnih transformacija iz prostora ℓ_1 u prostore w_∞, v_∞ i $[c]_\infty$ i predstavlja deo rada [33].

Teorema 2.20. *Označimo sa* $\sum_\mu$ *sumu uzetu po svim indeksima* n *takvim da je* $2^\mu\le n\le 2^{\mu+1}-1$ *. Važi sledeće:*
a) $A\in(\ell_1,w_\infty)$ *ako i samo ako je*

$$\sup_{\mu,k}\left(\frac{1}{2^\mu}\sum_\mu|a_{nk}|\right)<\infty\ ; \tag{2.49}$$

b) $A \in (\ell_1, v_\infty)$ *ako i samo ako je*

$$\sup_{\mu,k} \Big(\frac{1}{2^\mu} \sum_{\mu} |a_{nk} - a_{n-1,k}| \Big) < \infty \ ; \tag{2.50}$$

c) $A \in (\ell_1, [c]_\infty)$ *ako i samo ako je*

$$\sup_{\mu,k} \Big(\frac{1}{2^\mu} \sum_{\mu} |n a_{nk} - (n-1) a_{n-1,k}| \Big) < \infty \ . \tag{2.51}$$

Dokaz:

a) Kako su prostori $X = \ell_1$ i $Z = \mathcal{W}$ BK prostori sa AK svojstvom [32, Proposition 2.4(b)], možemo primeniti [55, Theorem 8.3.9] uzimajući pri tom da je $Y = Z^\beta = w_\infty$. Tako dobijamo da je $A \in (\ell_1, w_\infty)$ ako i samo ako je $B = A^t \in (\mathcal{W}, \ell_\infty)$. Kako je prema [32, Proposition 2.4.(c)]

$$\|a\|^*_{\mathcal{W}} = \|a\|_{w_\infty} = \sup_\nu \Big(\frac{1}{2^\nu} \sum_\nu |a_k| \Big) \ \text{ u } \ \mathcal{W}^\beta$$

na osnovu [35, Theorem 1.23(b)] imamo sledeće: $B \in (\mathcal{W}, \ell_\infty)$ ako i samo ako je ispunjeno:

$$\sup_n \|B_n\|^*_{\mathcal{W}} = \sup_{n,\nu} \Big(\frac{1}{2^\nu} \sum_\nu |b_{nk}| \Big) = \sup_{n,\nu} \Big(\frac{1}{2^\nu} \sum_\nu |a_{kn}| \Big) = \sup_{\mu,k} \Big(\frac{1}{2^\mu} \sum_\mu |a_{nk}| \Big) < \infty \ .$$

b) Na osnovu [35, Theorem 3.8(a)] imamo da je $A \in (\ell_1, v_\infty)$ ako i samo ako matrica $C = (c_{nk})_{n,k=1}^\infty = \Delta \cdot A \in (\ell_1, w_\infty)$. Kako je $c_{nk} = a_{nk} - a_{n-1,k}$ za svako n i k, to je (2.50) neposredna posledica (2.49).

c) Označimo najpre sa $D(\mathbf{n})$ dijagonalnu matricu sa nizom $\mathbf{n}$ na glavnoj dijagonali. Prema [35, Theorem 3.8(a)] imamo da je $A \in (\ell_1, [c]_\infty)$ ako i samo ako je matrica $D(\mathbf{n}) \cdot A \in (\ell_1, v_\infty)$. Jasno da uslov (2.51) dobijamo kao direktnu posledicu uslova (2.50).

Na kraju ove glave vratićemo se još jednom na rezultate iz prve glave koji su veoma važni za celo naše istraživanje. Naime, radi se o Teoremi 1.3.

Ukoliko su X i Y FK prostori, tada svaka matrica $A \in (X, Y)$ definiše linearni operator $L_A \in B(X, Y)$ tako da je $L_A(x) = Ax$ za svako $x \in X$. Medjutim, obrat uopšteno ne važi. samo u slučajevima kada je početni prostor sa AK svojstvom, možemo tvrditi da je $B(X, Y) \subset (X, Y)$ tj. za svaki linearni operator $L \in B(X, Y)$ postoji $A \in (X, Y)$ tako da je $L(x) = Ax$ za svako $x \in X$. Ovo upravo i jeste interesantan problem za istraživanje i u dosadašnjoj literaturi se može naći ne baš veliki broj "rešenih situacija", za proizvoljan FK prostor X.

Prevedeno na naše prostore u ovoj sekciji, jasno da svaka matrica, na primer $A \in (\ell_1, v_\infty)$ ili $A \in (c_0, v_\infty)$ definiše ograničeni linearni operator $L_A \in B(\ell_1, v_\infty)$, odnosno $L_A \in B(c_0, v_\infty)$ tako da je $L_A(x) = Ax$ za svako $x \in X \in \{c_0, \ell_1\}$, kao i da važi obrnuto, za svaki linearni operator $L \in B(X, v_\infty)$, $X \in \{\ell_1, c_0\}$ postoji $A \in (X, v_\infty)$, za odgovarajuće X tako da je $L(x) = Ax$ za svako $x \in X$.

Medjutim, postavlja se pitanje šta bi se desilo kada bismo za početni prostor uzeli na primer $X = c$. Potrebno je utvrditi odnos izmedju matričnog operatora L_A pridruženog odgovarajućoj beskonačnoj matrici $A \in (c, v_\infty)$ i uopštenog ograničenog linearnog operatora $L \in B(c, v_\infty)$. Sledeća teorema daće odgovor na ovaj problem.

Teorema 2.21. *Imamo da je $L \in \mathcal{B}(c, v_\infty)$ ako i samo ako postoji matrica $A \in (c_0, v_\infty)$ i niz $b \in v_\infty$ tako da je ispunjeno sledeće:*

$$L(x) = b \cdot \lim_{k\to\infty} x_k + Ax \text{ za svako } x \in c. \tag{2.52}$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $L \in \mathcal{B}(c, v_\infty)$ i neka je $L_n = P_n \circ L$ za $n = 1, 2, \ldots$ pri čemu je P_n n-ta projekcija. Kako je prostor c BK prostor, to je $L_n \in c^*$ za svako $n \in \mathbb{N}$, i na osnovu reprezentacije linearnih funkcionala iz c^* ([55, Example 6.4.5]) imamo sledeće:

$$L_n(x) = b_n \cdot \lim_{k\to\infty} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \text{ za svako } x \in c, \tag{2.53}$$

pri čemu je

$$b_n = L_n(e) - \sum_{k=0}^{\infty} L_n(e^{(k)}) \text{ i } a_{nk} = L_n(e^{(k)}) \text{ za svako } n \text{ i } k, \tag{2.54}$$

što daje (2.53). Takodje, jasno je da važi

$$\|L_n\| = |b_n| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|. \tag{2.55}$$

Ostaje da pokažemo još da je $b \in v_\infty$.

Najpre ćemo poći od definicije prostora v_∞, tj. $v_\infty = w_\infty(\Delta)$ i na sve ovo primeniti rezultate iz [31]. Na osnovu toga može se zaključiti da je

$$(\ell_\infty, v_\infty) = (c_0, v_\infty) = (c, v_\infty)$$

ako i samo ako je ispunjen sledeći uslov

$$\sup_m \left(\max_{N_m} \left\| S_m^{N_m}(\Delta A) \right\|_1 \right) < \infty \tag{2.56}$$

odnosno

$$\sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{m} \sum_{N_m} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right| \right) \right) < \infty. \tag{2.57}$$

Dalje, za $e \in c$ imamo da je $L(e) \in v_\infty$, odnosno $\Delta L(e) \in w_\infty$, pa je odavde

$$\sup_m \sigma_m \left(|\Delta(b + Ae)| \right) < \infty. \tag{2.58}$$

Ukoliko sada stavimo $\widetilde{b} = \Delta b$, imamo sledeće:

$$\sigma_m(|\widetilde{b}|) \le \sigma_m(|\widetilde{b} + \Delta Ae|) + \sigma_m(|\Delta Ae|) \le \sigma_m(|\widetilde{b} + \Delta Ae|) + 4 \cdot \|\Delta A\|_{(\infty, w_\infty)}.$$

Na osnovu Teoreme 2.19, imamo da je $\|\Delta A\|_{(\infty, w_\infty)} < \infty$ a na osnovu (2.58) je $\sigma_m(|\widetilde{b} + \Delta A e|) < \infty$ pa je $\widetilde{b} \in w_\infty$, odnosno $b \in v_\infty$.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji matrica $A \in (c_0, v_\infty)$ i niz $b \in v_\infty$ tako da je ispunjeno (2.58) i dokažimo da je $L \in \mathcal{B}(c, v_\infty)$.

Podsetimo se najpre sledećeg:

$$A \in (c, v_\infty) \Leftrightarrow B = \Delta A \in (c, w_\infty) \text{ i } \|L_A\| = \|L_B\|$$

i takodje [31]:

$$\|B\|_{(\infty, w_\infty)} \leq \|L_B\| \leq 4 \cdot \|B\|_{(\infty, w_\infty)}.$$

Pošto je $\|L\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|L(x)\|_{v_\infty}$, posmatraćemo najpre samo $\|L(x)\|_{v_\infty}$.

$$\begin{aligned}
\|L(x)\|_{v_\infty} &= \sup_m \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} |(b_n - b_{n-1}) \cdot \xi + A_n x - A_{n-1} x| \right) \\
&\leq \sup_m \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} |b_n - b_{n-1}| \right) \cdot \|x\|_\infty + \sup_m \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} |A_n x - A_{n-1} x| \right) \\
&\leq \left(\|b\|_{v_\infty} + 4 \cdot \|B\|_{(\infty, w_\infty)} \right) \cdot \|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Odavde sledi da je $L \in \mathcal{B}(c, v_\infty)$.

Glava 3

Kompaktni operatori na prostorima nizova i metode njihove karakterizacije

Osnovni cilj u trećoj glavi je da odredimo uslove pod kojima bi operatori definisani medju odredjenim prostorima nizova bili kompaktni. Medju teoremama datim u uvodnom delu teze kao jedna od najvažnijih izdvaja se teorema koja povezuje matrične i neprekidne operatore na FK prostorima, pa bi ovo bio prirodni nastavak započete priče.

U našem radu, izdvojićemo dve glavne metode za odredjivanje kompaktnosti operatora. Prva se bazira na fundamentalnom rezultatu Goldenštajna, Goberga i Markusa (Л. С. Гольденштейн, И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус) i odnosi se na primenu Hausdorfove mere nekompaktnosti. Predstavlja jednu od najefikasnijih metoda, pa je u skorije vreme korišćena u mnogim radovima npr. [29, 31, 38, 39, 41, 42]. Jedina "mana"je što u slučaju kada drugi prostor nema Šauderovu bazu možemo dobiti samo dovoljne uslove. Kako bi dali što kompletnije karakterizacije kompaktnih operatora u našem radu primenićemo i drugi metod baziran na Sardžentovom rezultatu. Ta metoda nam može rešiti pomenuti problem ali je do sada primenjivana u malom broju radova. Ova glava sadrži originalne rezultate objavljene u radovima

[10, 33, 46]. Neke novodobijene i iskazane teoreme u ovom delu se odnose samo na matrične operatore, a neke i na uopštene ograničene linearne operatore medju prostorima nizova.

Hausdorfova mera nekompaktnosti

Krenimo prvo sa definicijama osnovnih, potrebnih, pojmova kao i sa tvrdjenjima koja će biti korišćena u daljem radu a odnose se na kompaktnost operatora i Hausdorfovu meru nekompaktnosti.

Ako sa (X, d) označimo metrički prostor tada ćemo za otvorenu kuglu i sferu u X, sa centrom u x_0 i poluprečnikom r, koristiti uobičajene oznake:

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\} \quad \text{- otvorena kugla}$$
$$S(x, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\} \quad \text{- sfera} \quad .$$

Definicija 3.1. *Podskup M metričkog prostora X je kompaktan ako svaki niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ iz M ima konvergentan podniz pri čemu granica tog podniza pripada skupu M.*

Definicija 3.2. *Podskup M metričkog prostora (X, d) je relativno kompaktan ako je zatvorenje skupa M, $\bar{M}$, kompaktan skup.*

Definicija 3.3. *Podskup Q metričkog prostora (X, d) je ograničen ako je njegov dijametar, $diam(Q) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in M\}$, konačan.*

Definicija 3.4. *Neka su M i S podskupovi metričkog prostora (X, d) i neka je $\epsilon > 0$. Tada za skup S kažemo da je ϵ-mreža skupa M ako je $M \subset \cup_{s \in S} B(s, \epsilon)$, a ukoliko je skup S konačan, predstavljaće konačnu ϵ-mrežu skupa M.*

Definicija 3.5. *Skup M je totalno ograničen ako za svako $\epsilon > 0$ ima konačnu ϵ-mrežu.*

Prethodne definicije su se odnosile na kompaktnost skupa, a kako nas zanima kompaktnost operatora, to dajemo i sledeću definiciju.

Definicija 3.6. *Neka su X i Y normirani prostori i L linearan operator iz $L(X,Y)$. Operator L je kompaktan ako je $L(Q)$ relativno kompaktan skup u Y za svaki ograničeni podskup Q iz X. Skup svih kompaktnih operatora sa X u Y označavamo sa $K(X,Y)$.*

Teorema 3.1. *[49, Teorema 2.12.5] Neka su X i Y normirani prostori i $L \in L(X,Y)$. Operator L je kompaktan ako i samo ako niz $(L(x_n))_{n=0}^{\infty}$ ima konvergentan podniz za svaki ograničeni niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ iz X.*

U našem radu koristićemo funkciju mere nekompaktnosti u cilju odredjivanja odgovarajućih klasa kompaktnih operatora. Postoji više vrsta mera nekompaktnosti. Prva je uvedena još $1930.$-te godine, mera nekompaktnosti Kuratowskog-α [25], ali je tek $1955.$ godine Darbo nastavio korišćenje te funkcije [4](Darbuova teorema o fiksnoj tački koja je tek sedamdesetih godina postala primećena i poslužila za razvoj teorije povezane sa merama nekompaktnosti). Godine 1957-e, Goldenstajn, Goberg i Markus uvode Hausdorfovu meru nekompaktnosti [12], potpuno nezavisno od rada Kuratovskog, zatim sledi Istrătesky $1972.$godine sa svojom merom [17] itd. Za detaljnije izučavanje mera nekompaktnosti može se koristiti [1, 2, 14, 15, 49, 53, 54], dok će se naš rad odnositi samo na Hausdorfovu meru nekompaktnosti.

Definicija 3.7. *Neka je (X,d) metrički prostor, Q ograničen podskup od X i $B(x,r)$ otvorena kugla u X. Tada je Hausdorfova mera nekompaktnosti skupa Q, označena sa $\chi(Q)$, definisana kao*

$$\chi(Q) = \inf\{\epsilon > 0 \mid Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X,\ r_i < \epsilon\ (i = 1, \ldots, n),\ n \in N\}.$$

Iz ove definicije jasno se vidi opravdanost i drugog naziva za ovu meru tzv. "loptasta mera", a kako se za centre lopti ne postavlja uslov da pripadaju skupu Q možemo koristiti i ekvivalentnu definiciju

$$\chi(Q) = \inf\{\,\epsilon > 0 \mid Q \text{ ima konačnu } \epsilon \text{ - mrežu u } X\,\}$$

Naredni rezultati i još mnogo osobina mere nekompaktnosti se mogu naći u [49] i [35].

Ako su Q, Q_1 and Q_2 ograničeni podskupovi metričkog prostora (X, d), važiće

$$\chi(Q) = 0 \text{ ako i samo ako } Q \text{ totalno ograničen skup },$$

$$\chi(Q) = \chi(\overline{Q}),$$

$$Q_1 \subset Q_2 \text{ važiće da je } \chi(Q_1) \leq \chi(Q_2),$$

$$\chi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$$

i

$$\chi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}.$$

Ako su Q, Q_1 i Q_2 ograničeni podskupovi normiranog prostora X, tada imamo

$$\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2),$$

$$\chi(Q + x) = \chi(Q) \ (x \in X)$$

i

$$\chi(\lambda Q) = |\lambda|\chi(Q) \text{ za svako } \lambda \in C.$$

Pored razmatranja Hausdorfove mere nekompaktnosti skupova, možemo odredjivati i Hausdorfovu meru nekompaktnosti operatora.

Neka su X i Y Banahovi prostori i k_1 i k_2 Hausdorfove mere nekompaktnosti na X i Y, i neka $\mathcal{M}_X$ i $\mathcal{M}_Y$ predstvljaju klase svih ograničenih podskupova u X i Y. Tada operator $L : X \longrightarrow Y$ zovemo $(k_1, k_2)-$ ograničenim ako je $L(Q) \in \mathcal{M}_Y$ za svako $Q \in \mathcal{M}_X$, i ukoliko postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$k_2(L(Q)) \leq C \cdot k_1(Q) \text{ za svako } Q \in \mathcal{M}_X$$

Ako je operator L $(k_1, k_2)-$ ograničen, tada

$$\|L\|_{(k_1,k_2)} = \inf\{C > 0 : k_2(L(Q)) \leq C \cdot k_1(Q) \text{ za svako } Q \in \mathcal{M}_X\}$$

zovemo $(k_1, k_2)-$ mera nekompaktnosti operatora L. Pisaćemo $\|L\|_\chi$ u slučaju kada je $k_1 = k_2 = \chi$ i taj broj zovemo Hausdorfova mera nekompaktnosti operatora L [35, Definition 2.24].

U narednoj teoremi, neka $\overline{B}_X$ predstavlja zatvorenu jediničnu loptu, a S_X jediničnu sferu u X i $L(X,Y)$ skup linearnih operatora iz X u Y.

Teorema 3.2. *[35, Theorem 2.25] Ako su X i Y Banahovi prostori, a operator $L \in L(X,Y)$. Tada važi sledeće:*

$$\|L\|_\chi = \chi(L(S_X)) = \chi(L(B_X)) \ .$$

Navedimo još neke korisne osobine:

$$||L||_\chi \leq ||L||, \ \text{[35, Theorem 2.25]} \tag{3.1}$$

$$||L||_\chi = \chi(L(S_X)), \ \text{[35, Theorem 2.25]} \tag{3.2}$$

$$L \text{ je kompaktan ako i samo ako je } ||L||_\chi = 0. \ \text{[35, Corollary 2.26]} \tag{3.3}$$

Teorema 3.3. *(Гольденштейн, Гохберг, Маркус) [35, Theorem 2.23] Neka je X Banahov prostor sa Šauderovom bazom $\{e_1, e_2, ...\}$, Q ograničen podskup od X, i $P_n : X \to X$ projektor na lineal skupa $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Tada imamo*

$$\frac{1}{a} \limsup_{n\to\infty} (\sup_{x\in Q} \|(I - P_n)x\|) \leq \chi(Q) \leq \limsup_{n\to\infty} (\sup_{x\in Q} \|(I - P_n)x\|),$$

gde je $a = \limsup_{n\to\infty} \|I - P_n\|$.

Specijalno, ako je $X = c$, tada je $a = 2$ u prethodnoj teoremi.

Teorema 3.4. *[50, Theorem 2.8.] Neka je Q ograničen podskup normiranog prostora X, gde je X prostor ℓ_p za $1 \leq p < \infty$ ili c_0. Ako je $P_n : X \to X$ operator definisan sa $P_n(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, 0 \ldots)$ za $x = (x_k)_{k=0}^\infty \in X$, tada*

$$\chi(Q) = \lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in Q} \|(I - P_n)x\|).$$

Primene Hausdorfove mere nekompaktnosti kod karakterizacije kompaktnih operatora

Predstavićemo na primerima odredjenih prostora nizova način na koji se može iskoristiti Hausdorfova mera nekompaktnosti u odredjivanju odgovarajućih klasa kompaktnih operatora. Rezultati iz ove glave objavlejni su u radovima [33, 46].

Nadalje, kad kažemo da je q konjugovani broj broja p, $1 \leq p \leq \infty$, to u stvari znači da za $1 < p < \infty$ je $q = p/(p-1)$, da za $p = 1$ imamo da je $q = \infty$, a za $p = \infty$ da je $q = 1$. Odgovarajuće norme na BK prostoru nizova X označavaćemo sa $\|\cdot\|_X$.

Takodje ćemo koristiti i oznake $A^{<r>}$ i $A^{>r<}$ za matrice kod kojih je redom prvih r redova, odnosno prvih r kolona zamenjeno nula nizovima.

Tvrdjenje 3.5. *Neka je $1 \leq p < \infty$ i $Y = c$ ili $Y = \ell_\infty$. Ako je $L \in B(\ell_p, Y)$, tada je operator L zadat matricom $A \in (\ell_p, Y)$, takvom da je $L(x) = Ax$ za svako $x \in \ell_p$. Sledeće nejednakosti su ispunjene:*
1) Ukoliko je $Y = c$ za Hausdorfovu meru nekompaktnosti operatora L, u oznaci $\|L\|_\chi$ važi:

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{r\to\infty} (\sup_n \|B_n^{<r>}\|_{\ell_q}) \leq \|L\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty} (\sup_n \|B_n^{<r>}\|_{\ell_q}) \ , \tag{3.4}$$

gde je B matrica sa redovima $B_n = A_n - (\alpha_k)_{k=1}^\infty$ za $n = 1, 2, ...$ i $\alpha_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk}$ za $k = 1, 2, ...$
2) Ukoliko je $Y = \ell_\infty$ za Hausdorfovu meru nekompaktnosti operatora L, u oznaci $\|L\|_\chi$ važi:

$$0 \leq \|L\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty} (\sup_n \|A_n^{<r>}\|_q) \ . \tag{3.5}$$

Dokaz: Kako su za $1 \leq p < \infty$ prostori ℓ_p BK prostori sa AK svojstvom to prvi deo teoreme sledi na osnovu Teoreme 1.4(b).
1) Na osnovu [8, Theorem 3.4] i činjenice da su prostori ℓ_p^* i ℓ_q izomorfni po

normi imamo da je

$$\frac{1}{2}\cdot\limsup_{r\to\infty}(\sup_n\|B_n^{<r>}\|_{\ell_q})\leq\|L\|_\chi\leq\limsup_{r\to\infty}(\sup_n\|B_n^{<r>}\|_{\ell_q})\ .$$

Kako je očigledno $\|B_n^{<r>}\|_{\ell_q}\geq\|B_n^{<r+1>}\|_{\ell_q}\geq 0$, $(r=1,2,...)$, za svako $n\in\mathbb{N}$, znači da obe granice postoje pa smo tako dobili (3.4).

2) Neka je $P_r:\ell_\infty\longrightarrow\ell_\infty$ za $r\in\mathbb{N}$ definisano sa $P_r(x)=x^{[r]}$ za svako $x\in\ell_\infty$ i neka je $R_r=I-P_r$, pri čemu je I identički operator na ℓ_∞. Označićemo sa $\overline{B}=\overline{B_{\ell_p}}$ zatvorenu jediničnu loptu. Sada na osnovu osobina i tvrdjenja datih u uvodnom delu za meru χ, Teoreme 1.7(a) i izomorfnosti po normi prostora ℓ_p^* i ℓ_q dobijamo

$$\begin{aligned}0\leq&\|L\|_\chi=\chi(L(\overline{B}))\leq\chi(P_r(L(\overline{B})))+\chi(R_r(L(\overline{B})))=\chi(R_r(L(\overline{B})))\leq\\&\leq\sup_{x\in\overline{B}}\|R_r(L(x))\|=\|R_r\circ L\|=\|L_{A^{<r+1>}}\|=\sup_n\|A_n^{<r+1>}\|_{\ell_p^*}=\\&=\sup_n\|A_n^{<r+1>}\|_{\ell_q}\ \text{ za svako }\ r\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Ovo nas dovodi do nejednakosti (3.5)

Kao posledicu (3.3) i prethodnog tvrdjenja dobijamo sledeće rezultate. Napomenimo da ćemo koristiti oznake iz prethodnog tvrdjenja.

Posledica 3.6. *Za $1\leq p<\infty$ imamo:*
1) Ako je $L\in B(\ell_p,c)$, tada je L kompaktan ako i samo ako važi

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n\|B_n^{<r>}\|_{\ell_q})=0\ . \tag{3.6}$$

2) Ako je $L\in B(\ell_p,\ell_\infty)$ i

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n\|A_n^{<r>}\|_{\ell_q})=0\ , \tag{3.7}$$

tada je L kompaktan operator.

Napomena 5. *Primetimo da je uslov (3.7) samo dovoljan, ali ne i neophodan za operator $L\in B(\ell_p,\ell_\infty)$ da bude kompaktan $(1\leq p<\infty)$. Ilustrujmo ovo* *i primerom. Neka je operator* $L : \ell_p \longrightarrow \ell_\infty$ *dat sa* $L(x) = x_1 \cdot e$ *za svako* $x \in \ell_p$. *Jasno da je ovako definisan operator kompaktan. Sa druge strane, operator* L *je zapravo zadat matricom* A *sa redovima* $A_n = e^{(1)}$ *za* $n = 1, 2, \ldots$. *Medjutim, granica iz (3.7) je jednaka* 1 *jer je* $\sup_n \|A_n^{<r>}\|_{\ell_q} = 1$ *za svako* $r \in \mathbb{N}$. *"Problem"potrebnih i dovoljnih uslova za kompaktnost operatora u ovoj situaciji biće kasnije prevazidjen, uz pomoć Sardžentovih rezultata.*

Posmatrajmo, sada, matrične transformacije klasa $((\ell_p)_{\hat{\Lambda}}, Y)$, uvedenih u prethodnoj glavi i odovarajuće pridružene matrične operatore L_A, a sve sa ciljem odredjivanja uslova za kompaktnost pomenutih operatora. Matrica $\hat{\Lambda}$ je definisana u sekciji 2.2 sa (2.11) a takodje je dat i oblik elemenata matrice $\hat{A}$ pridruženoj odgovarajućoj matrici A (2.21). Pre nego što predjemo na konkretne slučajeve, daćemo pregled poznatih rezultata koji će nam biti potrebni za dalji rad.

Teorema 3.7. *[7, Teorema 3.25] Neka je* $X = \ell_p$ *gde je* $1 \leq p \leq \infty$, *i neka je* $q = 1/(1-p)$ *za* $1 < p < \infty$. *Ako je* $A \in (X_T, Y)$ *imamo da važi:*
a) Za $Y = c_0\ , c\ , \ell_\infty$ *dobijamo*

$$\|A\|_{(X_T,Y)} = \begin{cases} \sup\limits_n \|\hat{A}_n\|_{\ell_1} = \sup\limits_n \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|\,, & X = \ell_\infty\ ; \\ \sup\limits_n \|\hat{A}_n\|_{\ell_q} = \sup\limits_n (\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^q)^{1/q}\,, & X = \ell_p \text{ za } 1 < p < \infty\ ; \\ \sup\limits_n \|\hat{A}_n\|_{\ell_\infty} = \sup\limits_{n,k} |\hat{a}_{nk}|\,, & X = \ell_1\ ; \end{cases}$$

Važi sledeće:

$$\|A\|_{(X_T,Y)} = \|L_A\|\ .$$

b) Za $Y = \ell_1$ *dobijamo*

$$\|A\|_{(X_T,Y)} = \begin{cases} \sup\limits_{N \subset \mathbb{N}_0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\sum\limits_{n \in N} \hat{a}_{nk}|\,, & X = \ell_\infty\ ; \\ \sup\limits_{N \subset \mathbb{N}_0} (\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\sum\limits_{n \in N} \hat{a}_{nk}|^q)^{1/q}\,, & X = \ell_p \text{ za } 1 < p < \infty\ ; \\ \sup\limits_k \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| & X = \ell_1\ ; \end{cases}$$

pri čemu je N konačan skup. Važi sledeće:

$$\|A\|_{(X_T,Y)} \leq \|L_A\| \leq 4 \cdot \|A\|_{(X_T,Y)} .$$

Teorema 3.8. *[7, Posledica 3.27] Neka je $1 \leq p \leq \infty$ i q konjugovan broj broja p.*
a) Ako je $A \in ((\ell_p)_T, c_0)$, imamo da je

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}\|\hat{A}_n\|_{l_q}) = \begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty}\Big(\sup\limits_{n\geq r}|\hat{a}_{nk}|\Big)) , & p=1 \\ \lim\limits_{r\to\infty}\Big(\sup\limits_{n\geq r}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big) , & 1<p<\infty \\ \lim\limits_{r\to\infty}\Big(\sup\limits_{n\geq r}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|\Big)\Big) , & p=\infty \end{cases} \tag{3.8}$$

b) Ako je $A \in ((\ell_p)_T, c)$, imamo da je

$$\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}\|\hat{A}_n - \hat{\alpha}\|_{l_q}) \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}\|\hat{A}_n - \hat{\alpha}\|_{l_q}) \tag{3.9}$$

gde je

$$\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_k)_{k=0}^{\infty} \text{ sa } \hat{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty}\hat{a}_{nk} \text{ za svako } k.$$

c) Ako je $A \in ((\ell_p)_T, \ell_1)$ $(1 < p \leq \infty)$, $N_r\,(r \in \mathbb{N}_0)$ podskup skupa $\mathbb{N}_0$ sa elementima koji su veći ili jednaki od r , tada imamo

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{\substack{N_r\subset\mathbb{N}_0 \\ N_r \text{ konačan}}}\|\sum_{n\in N_r}\hat{A}_n\|_q) \leq \|L_A\|_\chi \leq 4\lim_{r\to\infty}(\sup_{\substack{N_r\subset\mathbb{N}_0 \\ N_r \text{ konačan}}}\|\sum_{n\in N_r}\hat{A}_n\|_q) ,$$

i

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}(\sup_k(\sum_{n=r}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|))$$

za $p = 1$.

Teorema 3.9. *Ako je* $A \in ((\ell_1)_T, \ell_p)$, $(1 < p < \infty)$ *tada je*

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}(\sup_k(\sum_{n>r}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^p)^{\frac{1}{p}}). \tag{3.10}$$

Dokaz: Označimo sa $S = S_{(\ell_1)_T}$ jediničnu sferu u $(\ell_1)_T$. Tada imamo da je $L_A(S) = AS \subset \ell_p$, pa je

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AS) = \lim_{r\to\infty}(\sup_{x\in S} \|(I - P_r)(Ax)\|_{\ell_p})$$

gde je $P_r : \ell_p \to \ell_p$ $(r \in \mathbb{N})$ operator definisan sa $P_r(x) = (x_0, x_1, ..., x_r, 0, 0...)$ za svako $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in \ell_p$.
Neka je dalje $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in (\ell_1)_T$ i $y = (y_k)_{k=0}^{\infty}$ takvo da je $Tx = y \in \ell_1$. Na osnovu Teoreme 2.7 važi $Ax = \hat{A}y$ pa dalje dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\|(I - P_r)(Ax)\|_{\ell_p} = \|(I - P_r)(\hat{A}y)\|_{\ell_p} = \\
&= (\sum_{n=r+1}^{\infty} |\hat{A}_n(y)|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{n=r+1}^{\infty} |\sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_{nk}y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}y_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} |y_k|(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \\
&\leq \|y\|_{\ell_1} \cdot (\sup_k(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^p)^{\frac{1}{p}}) = \\
&= \|x\|_{(\ell_1)_{\hat{\Lambda}}} \cdot (\sup_k(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^p)^{\frac{1}{p}}).
\end{aligned}$$

Na osnovu svega navedenog zaključujemo da je

$$\sup_{x\in S} \|(I - P_r)(Ax)\|_{\ell_p} \leq \sup_k(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^p)^{\frac{1}{p}} \ , (r \in \mathbb{N})$$

tj.

$$\|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty}(\sup_k(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^p)^{\frac{1}{p}}) \ .$$

Označimo sa $E \subset (\ell_1)_T$ skup $\{ e_T^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\}$ takvih da je

$$T(e_T^{(k)}) = e^{(k)} \ , (k \in \mathbb{N}) \ .$$

Zapravo skup E čine vektori Šauderove baze za $(\ell_1)_T$. Na osnovu toga dobijamo $A(e_T^{(k)}) = \hat{A}(e^{(k)}) = (\hat{a}_{nk})_{n=0}^{\infty}$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Kako is $E \subset S$ sledi $AE \subset AS$, na osnovu osobina Hausdorfove mere χ imamo:

$$\chi(AE) \leq \chi(AS) = \|L_A\|_{\chi}.$$

Dakle,

$$\chi(AE) = \lim_{r\to\infty}\Big(\sup_k \sum_{n=r+1}^{\infty} |A_n(e_T^{(k)})|^p\Big)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\Big(\sup_k \sum_{n=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Dakle, važi:

$$\lim_{r\to\infty}\Big(\sup_k\Big(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) = \|L_A\|_{\chi}.$$

Koristeći upravo navedene rezultate i definiciju matrice $\hat{\Lambda}$ iz prethodne glave, možemo definisati kroz posledicu niz rezultata. Radi podsećanja daćemo još jednom izraze za elemente matrice $\hat{\Lambda}$ definisane u (2.11) kao i odgovarajuće elemente $\hat{a}_{nk}$ definisane u (2.21).

$$\hat{\lambda}_{nk} = \begin{cases} \dfrac{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k - (\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}}{\lambda_n}, & k < n \ , \\ \dfrac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot u_n, & k = n \ , \\ 0, & k > n \ , \end{cases}$$

$$\hat{a}_{nk} = \lambda_k\Big(\frac{a_{nk}}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} + \Big(\frac{1}{(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_k} - \frac{1}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_{k+1}}\Big)\sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj}\Big)$$

Posledica 3.10. *Neka je* $1 \leq p \leq \infty$ *i neka je* q *konjugovani broj broja* p*. Tada:*
a) Ako je $A \in ((\ell_p)_{\hat{\Lambda}}, c_0)$, $1 < p < \infty$ *, važi da je* L_A *kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|^q)^{\frac{1}{q}}) = 0;$$

b) Ako je $A \in ((\ell_1)_{\hat{\Lambda}}, c_0)$ *, važi da je* L_A *kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}|\hat{a}_{nk}|)) = 0;$$

c) Ako je $A \in ((\ell_\infty)_{\hat{\Lambda}}, c_0)$ *, važi da je* L_A *kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|)) = 0;$$

d) Za $A \in ((\ell_p)_{\hat{\Lambda}}, c)$, $1 \leq p \leq \infty$ *, imamo da je* L_A *kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{n\to\infty}\sup(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k|^q)^{\frac{1}{q}} = 0;$$

e) Za $A \in ((\ell_p)_{\hat{\Lambda}}, \ell_1)$, $1 < p \leq \infty$ *imamo da je* L_A *kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{\substack{N_r\subset\mathbb{N}_0\\ N_r\,\text{konačan}}}(\sum_{k=0}^{\infty}(\sup_{n\in N_r}\hat{a}_{nk}|^q)^{\frac{1}{q}}) = 0\ , (r\in\mathbb{N});$$

f) Ukoliko je $A \in ((\ell_1)_{\hat{\Lambda}}, \ell_p)$*, pri čemu je* $1 \leq p < \infty$ *, dobijamo da je* L_A *kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_k(\sum_{n=r}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|^p)^{1/p}) = 0.$$

Posmatrajmo sada situacije kada je finalni prostor $Y = \ell_\infty$.

Posledica 3.11. *Neka je* $1 \leq p \leq \infty$ *i* $q = \frac{p}{(p-1)}$ *za* $1 < p < \infty$. *Tada imamo:*
a) Ako je $A \in ((\ell_p)_{\hat{\Lambda}}, \ell_\infty)$, $1 < p < \infty$ *, tada je* L_A *kompaktan ako važi*

$$\lim_{r \to \infty} (\sup_{n>r} (\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|^q)^{\frac{1}{q}}) = 0$$

b) Ako je $A \in ((\ell_\infty)_{\hat{\Lambda}}, \ell_\infty)$ *, tada je* L_A *kompaktan ako važi*

$$\lim_{r \to \infty} (\sup_{n>r} \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|) = 0$$

c) Ako je $A \in ((\ell_1)_{\hat{\Lambda}}, \ell_\infty)$ *, tada je* L_A *kompaktan ako važi*

$$\lim_{r \to \infty} (\sup_{n>r,k} |\hat{a}_{nk}|) = 0.$$

Dokaz: Podsetimo se najpre da je $(\ell_1)^\beta = \ell_\infty$, $(\ell_\infty)^\beta = \ell_1$ i $(\ell_p)^\beta = \ell_q$ za $1 < p < \infty$ i $q = p/(p-1)$. Dalje, na osnovu rezultata iz Teoreme 3.7 sledi da je

$$\sup_n \|A_n\|^*_{(\ell_p)_{\hat{\Lambda}}} = \sup_n \|\hat{A}_n\|_{(\ell_p)^\beta} < \infty \ . \tag{3.11}$$

Označićemo sa $P_r : \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$, za $r \in \mathbb{N}$, preslikavanje definisano sa $P_r(x) = (x_0, x_1, ..., x_r, 0, 0, ...)$ za svako x iz ℓ_∞ . Ako sa S označimo $S_{(\ell_p)_{\hat{\Lambda}}}$, tada jasno imamo da je

$$AS \subset P_r(AS) + (I - P_r)(AS)$$

i da je

$$0 \leq \|L_A\|_\chi = \chi(AS) \leq \chi(P_r(AS)) + \chi((I - P_r)(AS)) = \chi((I - P_r)(AS)) \leq$$
$$\leq \sup_{x \in S} \|(I - P_r)(Ax)\| = \sup_{n>r} \|A_n\|_{(\ell_p)_{\hat{\Lambda}}} = \sup_{n>r} \|\hat{A}_n\|_{(\ell_p)^\beta} \ , \text{ za svako } r.$$

Sada, ukoliko iskoristimo odgovarajuću normu i činjenicu da ako je $||L_A||_\chi = 0$ važi da je L_A kompaktan, dokazali smo teoremu.

Primena rezultata Sardženta

Kao što smo već napomenuli, u ovoj sekciji ćemo "popraviti"uslove dobijene u Posledici 3.6 pod (2) ali i ostale slučajeve u kojima nismo mogli da definišemo potrebne i dovoljne uslove za kompaktnost odgovarajućeg operatora. Zapravo u situacijama kada je finalni prostor bio ℓ_∞, Hausdorfova mera nekompaktnosti nije nam bila baš od potpune koristi. Za ovakve situacije, nedostatak će u velikom broju slučajeva biti otklonjen primenom rezultata iz [51]. Rezultati Sardženta (Sargent) imaće veliku važnost u našem istraživanju.

U okviru ove sekcije biće prezentovani i neki od rezultata objavljenih u [33, 46].

Lema 3.12. *Neka je* $1 < p < \infty$. *Ako je* $L \in B(\ell_p, \ell_\infty)$, *tada je* L *kompaktan ako i samo ako važi*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n \|A_n^{>r<}\|_{\ell_q}) = 0 \ . \tag{3.12}$$

Dokaz: Kako je prostor ℓ_p, $1 < p < \infty$ sa AK svojstvom, to za $L \in B(\ell_p, \ell_\infty)$ postoji matrica $A \in (\ell_p, \ell_\infty)$ kojom je on predstavljen, odnosno $L(x) = Ax$ za svako $x \in \ell_p$, $1 < p < \infty$. Primenjujući Teoremu 1.13 za $X = \ell_p$ i $Z = \ell_1$, gde su oba prostora sa AK svojstvom, i $Y = Z^\beta = \ell_\infty$ i uz to je $\ell_p^\beta = \ell_q$, $q = p/(p-1)$ dobićemo da je $A \in (\ell_p, \ell_\infty)$ ako i samo ako je matrica $C = A^t \in (\ell_1, \ell_q)$. Takodje, važi i da je $\|L\| = \|L_C\|$ po [51, Lemma 2]. Dalje, $A \in (\ell_p, \ell_\infty)$ implicira $\|L\| = \sup_n \|A_n\|_{\ell_p^*} = \sup_n \|A_n\|_{\ell_q}$, kao što je korišćeno u dokazu Leme 3.5. Ukoliko upotrebimo Teoremu 3.2, [35, Theorem 2.15] i činjenicu da je $C^{<r>} = (A^{>r<})^t$ imamo

$$\begin{aligned}\|L_C\|_\chi = \chi(L_C(\overline{B_{\ell_1}})) &= \lim_{r\to\infty}(\sup_{x\in\overline{B_{\ell_1}}} \|R_r(L_C(x))\|_{\ell_q} = \lim_{r\to\infty}\|R_r \circ L_C\| = \\ &= \lim_{r\to\infty}\|L_{C^{<r>}}\| = \lim_{r\to\infty}\|L_{(C^{<r>})^t}\| = \lim_{r\to\infty}\|L_{A^{>r<}}\| = \\ &= \lim_{r\to\infty}(\sup_n \|A_n^{>r<}\|_q) \ .\end{aligned}$$

Kako je L_A kompaktan ako i samo ako je L_C kompaktan prema [51, Theorem 3.], uslov (3.12) sada sledi iz činjenice da je operator kompaktan ako i samo ako je njegova Hausdorfova mera nula.

Rezultat iz prethodnog tvrdjenja se istina može naći i u [51, (b) p.85] ali je izvedeno bez korišćenja Hausdorfove mere nekompaktnosti. Slučaj kad je $p = 1$ nije obuhvaćen ovom teoremom, zbog činjenice da je $\ell_1^\beta = \ell_\infty$ što nije AK prostor. U tom slučaju, odgovarajuća karakterizacija je data sledećom teoremom.

Teorema 3.13. *[51, Theorem 5.] Ako je $L \in B(\ell_1, \ell_\infty)$, tada je L kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{1\leq n\leq m} |a_{n,k_1} - a_{n,k_2}| = \sup_n |a_{n,k_1} - a_{n,k_2}| \quad \textit{uniformno po } k_1 \textit{ i } k_2 \ (1 \leq k_1, k_2 < \infty)\ . \tag{3.13}$$

U narednim primerima ova teorema će obezbediti nalaženje vrlo interesantnih rezultata.

Prva primena se tiče prostora bv_0 definisanog u sekciji 1.2 i daje nam uslove za kompaktnost uopštenog ograničenog linearnog operatora.

Teorema 3.14. *Ako je operator $L \in B(bv_o, Y)$, gde je Y jedan od prostora c ili ℓ_∞, tada se L može zadati matricom A takvom da je $L(x) = Ax$ i važi i sledeće:*
1) Za $Y = c$ Hausdorfova mera nekompaktnosti operatora L zadovoljava nejednakost

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{r\to\infty} (\sup_n \|C_n^{<r>}\|_{\ell_\infty}) \leq \|L\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty} (\sup_n \|C_n^{<r>}\|_{\ell_\infty})\ , \tag{3.14}$$

gde je $C = (c_{nk})_{n,k=1}^\infty$ matrica sa elementima definisanim kao

$$c_{nk} = \sum_{j=1}^k a_{nj} - \gamma_k \ \textit{ za } \ n,k = 1,2,... \ \textit{ i } \ \gamma_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^k a_{nj} \ \textit{ za } \ k = 1,2,...\ .$$

2) Operator $L \in B(bv_0, c)$ je kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{r\to\infty} (\sup_n \|C_n^{<r>}\|_{\ell_\infty}) = 0. \tag{3.15}$$

3) Operator $L \in B(bv_0, \ell_\infty)$ *je kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{1\le n\le m} |\sum_{j=1}^{k_1} a_{nj} - \sum_{j=1}^{k_2} a_{nj}| = \sup_n |\sum_{j=1}^{k_1} a_{nj} - \sum_{j=1}^{k_2} a_{nj}|$$

uniformno po k_1 *i* k_2 $(1 \le k_1, k_2 < \infty)$. (3.16)

Dokaz: Već smo ranije naveli da je prostor bv_0 sa AK svojstvom, pa postoji matrica A kojom je operator L predstavljen.
1) Za $L \in B(bv_0, c)$ odgovarajuća matrica A je iz (bv_0, c) a primenjujući karakterizaciju matričnih transformacija iz ove klase dobijamo:

$$A \in (bv_0, c) \iff \sup_{n,k} |\sum_{j=1}^{k} a_{nj}| < \infty \text{ i } \alpha_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk} \text{ postoji za svako } k \ .$$

Možemo definisati matricu $\tilde{C} = (\tilde{c}_{nk})_{n,k=1}^\infty$ čiji su elementi $\tilde{c}_{nk} = \sum_{j=1}^k a_{nj}$ za $n, k = 1, 2, ...$ Očigledno granice α_k postoje ako i samo ako postoje granice $\gamma_k = \lim_{n\to\infty} \tilde{c}_{nk}$ za svako k. Prema [55, Example 8.4.1A] $A \in (bv_0, c)$ ako i samo ako $\tilde{C} \in (\ell_1, c)$. Ukoliko iskoristimo Abelovo sumiranje po delovima, za svako $m \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{c}_{nk}(x_k - x_{k+1}) + \tilde{c}_{nm}x_m$$

za svako fiksirano $n \in \mathbb{N}$ i za svako $x \in bv_0$. Kako je $\tilde{C}_n \in \ell_\infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $x \in bv_0 \subset c_0$, dobijamo da je $A_n x = \tilde{C}_n x$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i za svako $x \in bv_0$, imamo

$$L_A(x) = L_{\tilde{C}}(y) \text{ za svako } x \in bv_0 \ , \text{ gde je } y = (x_k - x_{k+1})_{k=1}^\infty \ . \qquad (3.17)$$

Takodje, prema [55, 7.3.4], bv_0 i ℓ_1 su ekvivalentni u odnosu na preslikavanje $x \to y = (x_n - x_{n+1})$, i imamo da važi $x \in S_{bv_0}$ ako i samo ako $y \in S_{\ell_1}$, jer je

$\|x\|_{bv_0} = \|y\|_{\ell_\infty}$. Stoga iz Teoreme 3.2 i (3.17) dobijamo

$$\|L\|_\chi = \|L_A\|_\chi = \chi(L_A(S_{bv_0})) = \chi(L_{\tilde{C}}(S_{\ell_1})) = \|L_{\tilde{C}}\|_\chi \ .$$

Konačno, uslov (3.4) sa matricom $\tilde{C}$ umesto matrice B za $p = 1$, tj. $q = \infty$, nas dovodi do (3.14).

2) Tvrdjenje je direktna posledica (3.14) i osobine Hausdorfove mere nekompaktnosti operatora.

3) Kao i u dokazu dela pod 1) dobijamo da je $A \in (bv_0, \ell_\infty)$ ako i samo ako je $\tilde{C} \in (\ell_1, \ell_\infty)$ i da je $L_{\tilde{C}}$ kompaktan prema Teoremi (3.13) ako i samo ako uslov (3.14) važi sa $\tilde{c}_{n,k_1}$ i $\tilde{c}_{n,k_2}$ umesto a_{n,k_1} i a_{n,k_2}, a to i jeste uslov (3.17).

Drugi primer se odnosi na prostore w_∞, v_∞ i $[c]_\infty$, sve su to prostori koje smo definisali u prethodnoj glavi. Ovde ćemo proširiti istraživanje na kompaktnost odgovarajućih operatora.

Teorema 3.15. *Koristeći oznake $\sum_{\mu_1}$ i $\sum_{\mu_2}$ za sume uzete po svim indeksima n za koje je $2^{\mu_1} \le n \le 2^{\mu_1+1} - 1$ i $2^{mu_2} \le n \le 2^{\mu_2+1} - 1$, imamo:*
1) Ako je $L \in B(\ell_1, w_\infty)$, tada je L kompaktan ako i samo ako važi

$$\lim_{j\to\infty} (\sup_{1\le k\le j} |\frac{1}{2^{\mu_1}} \sum_{\mu_1} a_{nk} - \frac{1}{2^{\mu_2}} \sum_{\mu_2} a_{nk}|) = \sup_k |\frac{1}{2^{\mu_1}} \sum_{\mu_1} a_{nk} - \frac{1}{2^{\mu_2}} \sum_{\mu_2} a_{nk}|$$
$$\textit{uniformno po } \ \mu_1 \ \textit{ i } \ \mu_2 \ (0 \le \mu_1, \mu_2 < \infty) \ . \tag{3.18}$$

2) Ako je $L \in B(\ell_1, v_\infty)$, tada je L kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{j\to\infty} (\sup_{1\le k\le j} |\frac{1}{2^{\mu_1}} (a_{2^{\mu_1+1}-1,k} - a_{2^{\mu_1}-1,k}) - \frac{1}{2^{\mu_2}} (a_{2^{\mu_2+1}-1,k} - a_{2^{\mu_2}-1,k}|) =$$
$$\sup_k |\frac{1}{2^{\mu_1}} (a_{2^{\mu_1+1}-1,k} - a_{2^{\mu_1}-1,k}) - \frac{1}{2^{\mu_2}} (a_{2^{\mu_2+1}-1,k} - a_{2^{\mu_2}-1,k}|$$
$$\textit{uniformno po } \ \mu_1 \ \textit{ i } \ \mu_2 \ (0 \le \mu_1, \mu_2 < \infty) \ . \tag{3.19}$$

3) Ako je $L \in B(\ell_1, [c]_\infty)$, tada je L kompaktan ako i samo ako je

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty}\Big(\sup_{1\le k\le j}\Big|\frac{1}{2^{\mu_1}}((2^{\mu_1+1}-1)a_{2^{\mu_1+1}-1,k}-(2^{\mu_1}-1)a_{2^{\mu_1}-1,k})-\\
&\quad-\frac{1}{2^{\mu_2}}((2^{\mu_2+1}-1)a_{2^{\mu_2+1}-1,k}-(2^{\mu_2}-1)a_{2^{\mu_2}-1,k})\Big|\Big)=\\
&\quad=\sup_k\Big|\frac{1}{2^{\mu_1}}((2^{\mu_1+1}-1)a_{2^{\mu_1+1}-1,k}-(2^{\mu_1}-1)a_{2^{\mu_1}-1,k})-\\
&\quad-\frac{1}{2^{\mu_2}}((2^{\mu_2+1}-1)a_{2^{\mu_2+1}-1,k}-(2^{\mu_2}-1)a_{2^{\mu_2}-1,k})\Big|\\
&\quad\textit{uniformno po}\ \ \mu_1\ \ \textit{i}\ \ \mu_2\ (0\le\mu_1,\mu_2<\infty)\ .
\end{aligned}\tag{3.20}$$

Dokaz: Prvi deo je dat u [31, Corollary 3.14 7.(7.1)+].

Za deo pod 2) koristimo Teoremu 2.20 pod a) i pod b), imamo da je $A \in (\ell_1, v_\infty)$ ako i samo ako je $C = \Delta \cdot A \in (\ell_1, w_\infty)$ pa je uslov (3.19) direktna posledica uslova (3.18).

Po Teoremi 2.20 pod b) i c), znamo da je $A \in (\ell_1, [c]_\infty)$ ako i samo ako je $D(\mathbf{n}) \cdot A \in (\ell_1, v_\infty)$, i zato uslov (3.20) dobijamo iz (3.19).

Napomena 6. *Primetimo da tvrdjenja važe za uopšteni ograničen linearni operator imajući u vidu osobinu ℓ_1 prostora - da je AK prostor.*

Za prostore $X(\Delta)$, X je jedan od prostora c_0, c ili ℓ_∞, čiji su β-duali dati u Posledici 2.15 a odgovarajuće karakterizacije matričnih preslikavanja u Lemi 2.16, takodje primenom rezultata Sargenta dobijamo bolje uslove.

Teorema 3.16. *Neka je X bilo koji od prostora c_0, c i ℓ_∞. Ako je $A \in (X(\Delta), \ell_\infty)$ tada je odgovarajući matrični operator L_A kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n \|\hat{A}_n^{>r<}\|_{\ell_1}) = \lim_{r\to\infty}(\sup_n \sum_{k=r}^{\infty} |\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}|) = 0\ .$$

Dokaz: Neka je $A \in (X(\Delta), \ell_\infty)$. Tada imamo da je $\hat{A} \in (X, \ell_\infty)$ i da je pri tom $Ax = \hat{A}(\Delta x)$ za svako $x \in X(\Delta)$ na osnovu Leme 2.16 (c) i (2.43). Kako je $(X, \ell_\infty) = (c_0, \ell_\infty)$, prema [55, Example 8.4.5A], dobijamo da je $\hat{A} \in (X, \ell_\infty)$

ako i samo ako je $\hat{B} = \hat{A}^t \in (\ell_1, \ell_1)$, po Teoremi 1.13. Ako sada iskoristimo Teoremu [35, Theorem 2.28] dobijamo da je $L_{\hat{B}} \in (\ell_1, \ell_1)$ kompaktan ako i samo ako

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_k \sum_{n=r}^{\infty} |\hat{b}_{nk}| = \lim_{r\to\infty}(\sup_k \sum_{n=r}^{\infty} |\hat{a}_{kn}|) =$$
$$\lim_{r\to\infty}(\sup_k \|\hat{A}_k^{>r<}\|_{\ell_1}) = \lim_{r\to\infty}(\sup_n \|\hat{A}_n^{>r<}\|_{\ell_1}) =$$
$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n \sum_{k=r}^{\infty} |\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}|) = 0.$$

Konačno, kako iz [55, Theorem 3] znamo da je $L_{\hat{A}}$ kompaktan ako i samo ako je $L_{\hat{B}}$ kompaktan i kako je L_A kompaktan ako i samo ako je $L_{\hat{A}}$ kompaktan prema (2.43), pokazali smo naše tvrdjenje.

Kompaktnost matričnih operatora pridruženih klasama $((\ell_p)_T, \ell_\infty)$ i $((c_0)_T, \ell_\infty)$

Većina naših posmatranih prostora nizova je dobijena kao matrični domen neke trougaone matrice. Već smo napomenuli da problem u potpunoj karakterizaciji kompaktnih operatora medju njima nastaje u slučaju da drugi prostor nema Šauderovu bazu i pokazali, na nekim primerima, kako se taj problem može rešiti. Kako se slična situacija javlja u mnogim radovima objavljenim u skorije vreme, na primer u [8] ili u [37], smatrali smo da je važno da naše rezultate formulišemo i predstavimo za proizvoljnu trougaonu matricu T (rezultati iz rada [46]). Koristićemo iste, već ustaljene, oznake: $\hat{A}$ je pridružena matrica sa članovima $\hat{a}_{nk} = R_k A_n$ gde je R transponovana matrica matrice S koja predstavlja inverznu matricu za T, a kako su $((\ell_p)_T, \ell_\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$, sve BK prostori, sa L_A označavamo odgovarajući ograničen linearni operator kao u [35, Theorem 1.23]. Nadalje ćemo sa $(x)_{\mathbf{n}}$, za $x \in \omega$, označavati niz čijih se prvih n-koordinata poklapa sa koordinatama x-a, dok su mu sve ostale koordinate nule. Polazimo od tvrdjenja datog u Posledici 3.17 u formi konkretne matrice $\hat{\Lambda}$, samo što sada posmatramo proizvoljnu trougaonu matricu T. Dobijeni rezultati su bili samo dovoljni za kompaktnost odgovarajućeg operatora a ovde ćemo ih "poboljšati"i dopuniti ono što je nedostajalo.

Teorema 3.17. *Ako je $A \in ((\ell_p)_T, \ell_\infty)$, gde je $1 < p < \infty$ and $q = \frac{p}{p-1}$, tada je L_A kompakt ako i samo ako*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n(\sum_{k=r+1}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|^q)^{\frac{1}{q}}) = 0 \tag{3.21}$$

Dokaz: Neka je $A \in ((\ell_p)_T, \ell_\infty)$. Tada imamo da odgovarajući operator L_A pripada skupu $B((\ell_p)_T, \ell_\infty)$ i imamo matricu $\hat{A}$ takvu da je $\hat{A} \in (\ell_p, \ell_\infty)$ i $Ax = \hat{A}(Tx)$ za svako $x \in (\ell_p)_T$ [36, Theorem 3.4, Remark 3.5] . Kako je ℓ_p BK prostor, imamo da je $L_{\hat{A}} \in B(\ell_p, \ell_\infty)$ i $\hat{A}x = L_{\hat{A}}(x)$ za svako $x \in \ell_p$. Ako primenimo [51, (b), p.85] dobićemo da je $L_{\hat{A}}$ kompakt ako i samo ako važi

$$\sup_n ||\hat{A}_n||_{(\ell_p)^\beta} < \infty \ \text{ i } \ \lim_{r\to\infty}\sup_n ||\hat{A}_n - (\hat{A}_n)_{\mathbf{r}}||_{(\ell_p)^\beta} = 0$$

odnosno ako je

$$\sup_n(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty \ \text{ i } \ \lim_{r\to\infty}\sup_n(\sum_{k=r+1}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|^q)^{\frac{1}{q}} = 0 \ .$$

Na osnovu karakterizacije matričnih transformacija [55, Example 8.4.5D, Example 8.4.6D], prvi uslov je zadovoljen pa imamo da je $L_{\hat{A}}$ kompaktan ako i samo ako je

$$\lim_{r\to\infty}\sup_n(\sum_{k=r+1}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|^q)^{\frac{1}{q}} = 0 \ .$$

Sada, prema [36, Lemma 4.1], L_A je kompaktan ako i samo ako je $L_{\hat{A}}$ kompaktan, pa je teorema dokazana.

Teorema 3.18. *Neka je $A \in ((\ell_\infty)_T, \ell_\infty)$. Tada je L_A kompaktan ako i samo ako*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n \sum_{k=r+1}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|) = 0 \tag{3.22}$$

Dokaz: Kako je ℓ_∞ BK prostor, prema [36, Theorem 3.4 , Remark 3.5]], imamo matricu $\hat{A} \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ i, prema [35, Theorem 1.23], pridružen ograničen linearni operator $L_{\hat{A}}$. Za prostor ℓ_∞ znamo da je njegov β-dual prostor ℓ_1 pa iz uslova (b) u [51] imamo da je $L_{\hat{A}}$ kompaktan ako i samo ako

$$\sup_n ||\hat{A}_n||_{l_1} < \infty \ i \ \lim_{r\to\infty} \sup_n ||\hat{A}_n - (\hat{A}_n)_{\mathbf{r}}||_{l_1} = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| < \infty \ i \ \lim_{r\to\infty} \sup_n \sum_{k=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| = 0 \ .$$

Ponovo je prvi uslov zadovoljen [55, Example 8.4.5A], pa sledi da je $L_{\hat{A}}$ kompaktan ako i samo ako

$$\lim_{r\to\infty} (\sup_n \sum_{k=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|) = 0 \ .$$

Kako je L_A kompaktan ako i samo ako je $L_{\hat{A}}$ kompaktan [36, Lemma 4.1, Remark 3.5]] pokazali smo teoremu.

Napomena 7. *Tvrdjenje u Teoremi 3.18 takodje važi i za $A \in ((c_0)_T, \ell_\infty)$, jer zahvaljujući činjenici da su β-duali prostora c_0 i ℓ_∞ isti, uslovi (b) i (f) iz [55, p. 85] se poklapaju.*

Problem nastaje kada je prvi prostor ℓ_1 jer njegov β-dual ℓ_∞ nije AK prostor. U tom slučaju možemo primeniti rezultat Sargenta i tako dobiti nove karakterizacije kompaktnih operatora:

Teorema 3.19. *Ako je $A \in ((\ell_1)_T, \ell_\infty)$, tada je L_A kompakt ako i samo ako*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{1\le n\le m} |\hat{a}_{n,k_1} - \hat{a}_{n,k_2}| = \sup_n |\hat{a}_{n,k_1} - \hat{a}_{n,k_2}| \tag{3.23}$$

uniformno konvergira po k_1 i k_2, $(1 \le k_1, k_2 < \infty)$.

Dokaz: Za matricu $A \in ((\ell_1)_T, \ell_\infty)$ imamo da je odgovarajuća matrica $\hat{A} \in (\ell_1, \ell_\infty)$ i da je L_A kompaktan ako i samo ako je $L_{\hat{A}}$ kompaktan, prema [36, Lemma 4.1, (ii)]. Primena Teoreme 3.13 na matricu $\hat{A}$ daje traženi rezultat.

Na ovaj način "upotpunili smo"postojeće rezultate, odnosno u situacijama kada su za kompaktnost operatora bili poznati samo dovoljni uslovi uspeli smo to da dopunimo i definišemo i potrebne uslove. Sada sa definisanim teoremama, tj. dobijenim rezultatima možemo pokriti sve slučajeve u kojima je matrica $A \in (X_T, \ell_\infty)$ pri čemu je $X = c_0, \ell_\infty, \ell_p,\ , 1 \leq p \leq \infty$, a T je proizvoljna trougaona matrica. Važno je i spomenuti da za slučaj gde je početni prostor oblika c_T za sada nema sličnih rezultata.

Primena

Primetimo da je sada jednostavno dobiti mnogobrojne rezultate za specijalne oblike prostora nizova primenjujući uopštene rezultate napred izložene. Tako za prostore definisane u drugoj glavi stavljajući $T = \hat{\Lambda}$ možemo dobiti nove rezultate i na taj način poboljšati uslove za kompaknost u Posledici 3.11.

Slično, za prostor definisan u [11], koristeći Napomenu (7), možemo dobiti sledeći rezultat:

Posledica 3.20. *Ako je $A \in ((c_0)_{\hat{\Lambda}}, \ell_\infty)$, tada je L_A kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n \sum_{k=r+1}^{\infty} |\hat{a}_{nk}|) = 0$$

Takodje, i neki od rezultata vezanih za kompaktnost operatora i datih u [8] i u [37], mogu biti poboljšani. Ovde se naravno misli na slučajeve u kojima je finalni prostor ℓ_∞.

U radu [8], autori su posmatrali prostore nizova $a_0^r(\Delta) = (c_0)_T$ i $a_\infty^r(\Delta) = (\ell_\infty)_T$, ovde je $0 < r < 1$, kod kojih je trougaona matrica $T = (t_{nk})_{n,k=0}^\infty$ data sa

$$t_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}(r^k - r^{k+1})\,, & 0 \leq k < n \\ \dfrac{r^n+1}{n+1}\,, & k = n \\ 0\,, & k > n \end{cases}$$

pa za $\hat{a}_{nk}$ dobijamo

$$\hat{a}_{nk}=(k+1)(\frac{a_{nk}}{1+r^k}+(\frac{1}{1+r^k}-\frac{1}{1+r^{k+1}})\sum_{j=k+1}^{\infty}a_{nk}). \tag{3.24}$$

Sada kao poboljšanje za [8, Corollary 4.3 (c)], navodimo:

Posledica 3.21. *Neka je $X=a_0^r(\Delta)$ ili $X=a_\infty^r(\Delta)$. Ako je $A\in(X,\ell_\infty)$ tada je L_A kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n\sum_{k=r+1}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|)=0$$

gde je $\hat{a}_{nk}$ definisan u (3.24)

Možemo dati i bolju verziju rezultata predstavljenih u [37], gde su autori proučavali prostore definisane u radovima [43] i u [44]. Posmatrani prostori su dobijeni kao matrični domeni trougaone matrice $\Lambda=(\lambda_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ čiji su elementi

$$\lambda_{nk}\;=\;\begin{cases}\dfrac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{\lambda_n}\,, & k\le n\\ 0\,, & k>n\end{cases}$$

dok $\lambda=(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ predstavlja strogo rastući niz pozitivnih realnih brojeva koji teže ka beskonačnosti. Ovde možemo primetiti i to da matrica Λ nije ništa drugo do Riesz-ova matrica N_r gde je $r_k=\lambda_k-\lambda_{k-1}$ za svako k i $R_n=\lambda_n$ za svako n. Konačno, [37, Theorem 4.3 (c)] možemo poboljšati sa:

Posledica 3.22. *Neka je $A\in((\ell_p)_\Lambda,\ell_\infty)$, $1<p<\infty$. Tada je $L_A\in B((\ell_p)_\Lambda,\ell_\infty)$ kompaktan ako i samo ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_n(\sum_{k=r+1}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|^q)^{\frac{1}{q}})=0$$

$$\textit{gde je }\ q=\frac{p}{p-1}\ \textit{ i }\ \hat{a}_{nk}=\lambda_k(\frac{a_{nk}}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}-\frac{a_{n,k+1}}{\lambda_{k+1}-\lambda_k})\ .$$

Prostor konvergentnih redova cs

Prostor kovergentnih redova je uveden u prvoj glavi kao jedan od klasičnih prostora nizova. Data je njegova definicija, neke od osobina, njegov β-dual. Medjutim, mi smo napomenuli da se na taj prostor može gledati i drugačije, kao na matrični domen trougaone matrice. Naime, prostor konvergentnih redova može biti definisan i sa $cs = (c)_\Sigma$.

Još jedna bitna prednost prostora cs je ta što je to AK prostor, pa zahvaljujući Teoremi (1.4)(b), za svaki linearni ograničen operator $L \in B(cs, Y)$ gde je Y proizvoljan prostor nizova, postoji odgovarajuća beskonačna matrica $A \in (cs, Y)$ takva da je $L(x) = Ax$ za svako $x \in cs$. Ovo nam dozvoljava da u isto vreme govorimo o uopštenom ograničenom linearnom operatoru kao i o matričnom operatoru L_A pridruženom matrici A.

Primenom Hausdorfove mere nekompaktnosti i teorije matričnih domena, možemo odrediti uslove pod kojima će operatori iz odgovarajućih klasa biti kompaktni, i ovo su rezultati iz rada [47].

Teorema 3.23. *Neka je $L \in B(cs, Y)$ gde je Y jedan od prostora c, c_0 ili ℓ_∞. Tada je L zadata matricom $A = (a_{nk})_{n,k=0}^\infty$ takvom da je $L(x) = Ax$ za svako $x \in cs$, i važi:*
(i) Ako je $Y = c$ tada

$$\frac{1}{2}\cdot \lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^\infty \mid (a_{nk}-a_{n,k+1})-\hat{\alpha}_k \mid + \mid \beta + \lim_{m\to\infty} a_{n,m+1} - \sum_{k=0}^\infty \hat{\alpha}_k \mid)) \leq \| L \|_\chi \leq$$

$$\leq \lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^\infty \mid (a_{nk}-a_{n,k+1})-\hat{\alpha}_k \mid + \mid \beta + \lim_{m\to\infty} a_{n,m+1} - \sum_{k=0}^\infty \hat{\alpha}_k \mid))$$

gde je

$$\hat{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty}(a_{nk}-a_{n,k+1}) \ \textit{ za } \ k = 0, 1, \ldots$$

i

$$\beta = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^\infty (a_{nk}-a_{n,k+1}) + \lim_{m\to\infty} a_{n,m+1}) \ ;$$

(ii) Ako je $Y = c_0$ *tada*

$$\| L \|_\chi = \lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty} \mid (a_{nk} - a_{n,k+1}) \mid + \mid \lim_{m\to\infty} a_{n,m+1} \mid));$$

(iii) Ako je $Y = \ell_\infty$ *tada*

$$0 \leq \| L \|_\chi \leq \lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty} \mid (a_{nk} - a_{n,k+1}) \mid + \mid \lim_{m\to\infty} a_{n,m+1} \mid)) \ .$$

Dokaz: Slučajevi (i) i (ii) su direktne posledice teoreme [8, Theorem 3.7]. Koristimo iste oznake kao što je i uobičajeno pa $\hat{a}_{nk}$ predstavljaju članove matrice $\hat{A} \in (c, Y)$ korišćene kod odredjivanja uslova za $A \in (cs, Y)$. Pošto znamo elemente matrice $T = \Sigma$, lako možemo odrediti i matrice S i R, a onda i izračunati članove

$$\hat{a}_{nk} = a_{nk} - a_{n,k+1} \ \text{ i } \ \gamma_n = -\lim_{m\to\infty} a_{n,m+1} \ .$$

Kod dokazivanja dela (iii) posmatramo projektor $P_r : \ell_\infty \to \ell_\infty$ definisan sa $P_r(x) = (x_0, x_1, ..., x_r, 0, 0, ...)$. Koristeći osobine mere χ, poznajući normu u prostoru ℓ_∞ i primenom [8, Theorem 2.9 a)] dobijamo:

$$0 \leq \chi(L(\overline{B}_{cs})) \leq \chi((I - P_r)(L(\overline{B}_{cs}))) \leq \sup_{x\in\overline{B}_{cs}} \| (I - P_r)(L(x)) \| \quad \text{za svako } r$$

što nas dovodi do

$$0 \leq \| L \|_\chi \leq \lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty} \mid \hat{a}_{nk} \mid + \mid \gamma_n \mid)) \ .$$

Kao posledicu dobićemo sledeće:

Posledica 3.24. *Koristeći oznake iz Teoreme 3.23, imamo:*

1. $L \in B(cs, c)$ *je kompaktan ako i samo ako*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty} \mid (a_{nk} - a_{n,k+1}) - \hat{\alpha}_k \mid + \mid \beta + \lim_{m\to\infty} a_{n,m+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k \mid)) = 0 \ .$$

2. $L \in B(cs, c_0)$ *je kompaktan ako i samo ako*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty} \mid (a_{nk} - a_{n,k+1}) \mid + \mid \lim_{m\to\infty} a_{n,m+1} \mid)) = 0$$

3. $L \in B(cs, \ell_\infty)$ *je kompaktan ako je*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty} \mid (a_{nk} - a_{n,k+1}) \mid + \mid \lim_{m\to\infty} a_{n,m+1} \mid)) = 0 \ .$$

Napomena 8. *Možemo primetiti da u trećem slučaju imamo samo "ako"uslov, ali za razliku od nekih drugih slučajeva gde takva situacija može biti rešena primenom rezultata iz [51], ovde to nije moguće bez obzira što je finalni prostor* $Y = \ell_\infty$.

Naredna teorema nam pruža mogućnost za dobijanje novih korisnih rezultata.

Teorema 3.25. *[36, Corollary 4.3] Ako je $A \in (X, Y_T)$ tada imamo:*
(i) $\|L_A\|_\chi = \|L_T \circ L_A\|_\chi$
(ii) Preslikavanje $A \in (X, Y_T)$ je kompaktno ako i samo ako je reslikavanje $TA \in (X, Y)$ kompaktno.

Pre nego što nastavimo sa ispitivanjem kompaktnosti još nekih klasa operatora na cs, uvedimo neke nove oznake.

Neka je matrica $C = \Sigma A = (c_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$. Računanjem dobijamo da je:

$$c_{nk} = \sum_{j=0}^{n} a_{jk},$$

$$\hat{c}_{nk} = R_k(C_n) = \sum_{j=0}^{n} (a_{jk} - a_{j,k+1}),$$

Dalje, uvedimo i sledeće oznake:

$$\gamma_n^{(C)} = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j,$$

$$\hat{\alpha}_k(C) = \lim_{n\to\infty} \hat{c}_{nk}$$

i

$$\beta(C) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_{nk} - \gamma_n(C)).$$

Sada, možemo definisati naredni rezultat.

Teorema 3.26. *Ograničeni linearni operator $L \in B(cs, cs)$ je kompaktan ako i samo ako važi*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty} \mid \hat{c}_{nk} - \hat{\alpha}_k(C) \mid + \mid \beta(C) - \gamma_n(C) - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\alpha}_k(C) \mid)) = 0 \ .$$

Dokaz: Kompaktnost operatora iz $B(cs, cs)$, imajući u vidu predstavljanje prostora cs kao matričnog domena, odnosno $cs = c_\Sigma$, biće svedena na kompaktnost operatora iz $B(cs, c)$. Sada primenom Teorema 3.23 i 3.25 i uvedenih oznaka, dokaz jasno sledi.

Teorema 3.27. *Ako je $A \in (bs, cs)$, tada je L_A kompaktan ako i samo ako važi*

$$\lim_{r\to\infty}(\sup_{n\geq r}(\sum_{k=0}^{\infty} \mid \hat{c}_{nk} \mid + \mid \gamma_n(C) \mid)) = 0 \ .$$

Dokaz: Kako prostor bs možemo predstaviti kao matrični domen trougaone matrice Σ u prostoru ograničenih nizova ℓ_∞, tj. $bs = (\ell_\infty)_\Sigma$, problem ćemo primenom rezultata iz [7] i Teoreme 3.25 svesti na odredjivanje kompaktnosti opretora iz klase $((\ell_\infty)_T, c)$.

Napomena 9. *U prvoj glavi pažnju smo posvetili klasičnim prostorima nizova, pa i prostoru ograničenih redova bs. Izmedju ostalog, naglasili smo da ovaj prostor nema AK svojstvo pa se zbog toga ova teorema odnosi samo na matrične operatore a ne i na uopštene ograničene linearne operatore.*

Teorema 3.28. *Ograničeni linearni operator $L \in B(cs, bs)$ je kompaktan ako i samo ako za matricu $D = (d_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$, čiji su članovi $d_{nk} = \sum_{j=0}^{k}(a_{jn} - a_{j,n-1})$, važe sledeći uslovi:*

$$\sup_j \| (d_{nj})_{n=0}^{\infty} \|_{\infty} < \infty$$

i

$$\lim_{r \to \infty} \sup_j \| (d_{nj})_{n=r}^{\infty} \|_{\infty} = 0.$$

Dokaz: Kako je prostor cs sa AK svojstvom, operatoru $L \in B(cs, bs)$ se može pridružiti matrica A, tj. može se predstaviti matricom $A \in (cs, bs)$, tako da je $L(x) = Ax$ za svako $x \in cs$. Činjenica da je $A \in (cs, bs)$ je ekvivalentno uslovu da je $\Sigma A \in (cs, \ell_\infty)$. Kako je $cs^\beta = bv$, gde je $bv = (\ell_1)_\Delta$, $\ell_\infty = \ell_1^\beta$ pri čemu je i ℓ_1 prostor sa AK svojstvom, to primenom rezultata iz Teorema 1.13 dobijamo:

$$A \in (cs, bs) \iff \Sigma A \in (cs, \ell_\infty) \iff (\Sigma A)^t \in (\ell_1, bv) \iff \Delta(\Sigma A)^t \in (\ell_1, \ell_1) \ .$$

Jasno da je upravo matrica D iz definicije naše teoreme matrica $\Delta(\Sigma A)^t$. Sada, koristeći rezultat iz [35, Theorem 2.28] o kompaktnosti operatora $L \in B(\ell_1, \ell_1)$ i primenjujući ga na operator pridružen matrici D čije smo elemente d_{nk} definisali iznad, dokazali smo teoremu.

Možemo primetiti da ukoliko upotrebimo isti princip razmisljanja i rezultati dati u Posledici 3.24 pod 3) mogu biti poboljšani.

Teorema 3.29. *Neka je $L \in B(cs, \ell_\infty)$. Tada je L kompaktan ako i samo ako je*

$$\sup_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk} - a_{j,k-1}| < \infty \ \ i \ \ \lim_{n \to \infty} \sup_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |(a_{jk} - a_{j,k-1}) - (a_{jn} - a_{j,n-1})| = 0 \ .$$

Dokaz: Kako je cs AK prostor, za ograničen linearni operator $L \in B(cs, \ell_\infty)$ postoji matrica $A \in (cs, \ell_\infty)$ takva da je $L(x) = Ax$ za svako $x \in cs$. Znamo da je $cs^\beta = bv$, $bv = (\ell_1)_\Delta$ $\ell_\infty = \ell_1^\beta$ i da je ℓ_1 prostor sa AK svojstvom, pa imamo

$$A \in (cs, \ell_\infty) \text{ je kompaktan } \iff A^t \in (\ell_1, bv) \text{ je kompaktan } \iff$$

$$\iff \Delta A^t \in (\ell_1, \ell_1) \text{ je kompaktan .}$$

Za poslednju klasu ako i samo ako uslovi su dati u [5, VI.B], pa primenjujući ih na matricu ΔA^t dolazimo do potrebnog tvrdjenja.

Novi rezultati o kompaktnosti operatora na prostorima sa mešovitom normom

Predmet istraživanja u ovom delu su prostori mešovite norme. Rezultati iz ove sekcije objavljeni su [10]. Prostore mešovite norme uveo je Kellogg [24] a zatim su ih izučavali mnogi autori [3, 13, 20, 21, 22, 23]. Označavamo ih sa $\ell^{p,q}$ i za $1 \leq p, q < \infty$ su definisani na sledeći način:

$$\ell^{p,q} = \{x \in \omega \mid \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{n \in I(m)} |x_n|^p)^{q/p} < \infty\} \ , \tag{3.25}$$

gde je $I(0) = \{0\}$ i $I(m) = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{m-1} \leq n < 2^m\}$ za svako $m > 0$. Oni su Banahovi prostori i norma na njima je data sa

$$\|x\|_{p,q} = (\sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{n \in I(m)} |x_n|^p)^{q/p})^{1/q} \ . \tag{3.26}$$

Poznato je i da je prostor $\ell^{p,q}$ BK prostor sa AK svojstvom za $1 \leq p \leq \infty$ i $1 \leq q < \infty$ prema [21, Example 3.4 (a)], i da je prostor $\ell^{\infty,q}$ BK prostor za $1 \leq q \leq \infty$.

Možemo uopštiti naše istraživanje ukoliko dijadičke blokove zamenimo proizvoljnim blokovima, slično kao što je uradjeno i u [3]. U tom slučaju bi imali $I(m) = \{n \in \mathbb{N} \mid k(m) \leq n \leq k(m+1) - 1\}$ za $m = 0, 1, ...$ pri čemu $(k(m))_{m=0}^{\infty}$ predstavlja strogo rastući niz celih brojeva za koji je $k(0) = 0$. U slučaju da su p ili q beskonačni, odgovarajuće sume moraju biti zamenjene supremumima odnosno dobijamo:

1) za $p = \infty$ i $1 \leq q < \infty$ imamo

$$\ell^{p,q} = \{x \in \omega \mid \sum_{m=0}^{\infty} (\sup_{n \in I(m)} |x_n|)^q < \infty\} \tag{3.27}$$

sa normom

$$\|x\|_{\infty,q} = (\sum_{m=0}^{\infty} (\sup_{n \in I(m)} |x_n|)^q)^{1/q} \; ; \tag{3.28}$$

2) za $1 \leq p < \infty$ i $q = \infty$ imamo

$$\ell^{p,\infty} = \{x \in \omega \mid \sup_m (\sum_{n \in I(m)} |x_n|^p)^{1/p} < \infty\} \; , \tag{3.29}$$

sa normom

$$\|x\|_{p,\infty} = \sup_m (\sum_{n \in I(m)} |x_n|^p)^{1/p} \; ; \tag{3.30}$$

3) za $p = q = \infty$ imamo

$$\ell^{\infty,\infty} = \{x \in \omega \mid \sup_m (\sup_{n \in I(m)} |x_n|) < \infty\} \; , \tag{3.31}$$

sa normom

$$\|x\|_{\infty,\infty} = \sup_m (\sup_{n \in I(m)} |x_n|) \; . \tag{3.32}$$

Možemo videti da je $\ell^{p,p} = \ell^p$ za $1 \leq p \leq \infty$.

Skup množitelja prostora smo već definisali u prvoj glavi i sledeći rezultat olakšava karakterizaciju množitelja $M(\ell^{r,s}, \ell^{u,v})$.

Teorema 3.30. *[24, Theorem 1.] Neka su $1 \leq r, s, u, v \leq \infty$, a p i q definišemo kao*

$$1/p = 1/u - 1/r \;\; \textit{ako je} \;\; r > u, \quad p = \infty \;\; \textit{ako je} \;\; r \leq u \; ,$$
$$1/q = 1/v - 1/s \;\; \textit{ako je} \;\; s > v \; , \quad q = \infty \;\; \textit{ako je} \;\; s \leq v.$$

Tada je $M(\ell^{r,s}, \ell^{u,v}) = \ell^{p,q}$.

U nastavku, za $\lambda \in M(\ell^{r,s}, \ell^{u,v})$, posmatramo operator $T_\lambda : \ell^{r,s} \longrightarrow \ell^{u,v}$

definisan sa

$$T_\lambda(x) = (\lambda_n x_n)_{n=0}^{\infty} \ \ (x \in \ell^{r,s}) \ \ .$$

Kellogg je u svom radu [24] pokazao da T_λ ovako definisan predstavlja ograničen linearni operator sa normom $\|T_\lambda\| = \|\lambda\|_{p,q}$ gde r, s, u, v, p i q zadovoljavaju uslove prethodne teoreme. Preciznije, $T_\lambda : \ell^{r,s} \longrightarrow \ell^{u,v}$ je ograničen linearni operator ako i samo je $\lambda \in \ell^{p,q}$.

U radovima [22] i [23], autori su posmatrali Hausdorfovu meru nekompaktnosti operatora T_λ i zavisno od vrste slučajeva našli tačnu meru ili izvršili njenu procenu. Medjutim, oni nisu iskoristili nijednu relaciju izmedju matričnih transformacija na prostorima nizova i ograničenih linearnih operatora. Mi zato problemu pristupamo na drugačiji način, koristeći teoriju BK prostora i matričnih transformacija pa posmatramo matricu $A = A(\lambda) = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ pridruženu operatoru T_λ tako da je $T_\lambda(x) = Ax$ za svako $x \in \ell^{r,s}$ za $1 \leq r, s \leq \infty$. Očigledno će naša matrica biti dijagonalna sa nizom λ na dijagonali. Takodje je jasno da je $Ax = (\lambda_n x_n)_{n=0}^{\infty}$ za svako $x \in \ell^{r,s}$.

Pored teorema već navedenih u radu, od koristi će biti i sledeća teorema:

Teorema 3.31. *[22, Lemma 2.1] Neka je Q ograničen skup u prostoru $\ell^{p,q}$ gde je $1 \leq p, q \leq \infty$, i neka je $R_n : \ell^{p,q} \longrightarrow \ell^{p,q}$ za $n = 0, 1, ...$ operator definisan sa $R_n(x) = x - x^{[n]}$ za svako $x = (x_m)_{m=0}^{\infty} \in \ell^{p,q}$. Tada imamo da je*

$$\chi(Q) = \lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in Q} \|R_n(x)\|) \ \ .$$

Neka su m i n nenegativni celi brojevi. Koristićemo oznaku $I(m,n) = I(m)\{0, 1, 2, ..., n\}$ i oznaku $\lambda^{(n)} = R_n(\lambda)$ a operator $T_\lambda^{(n)}$ će biti povezan sa dijagonalnom matricom $A^{(n)}(\lambda)$ koja je dobijena iz dijagonalne matrice $A(\lambda)$ kad brojeve $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ zamenimo nulama.

Teorema 3.32. *Neka su r, s, u, v, p i q definisani kao u Teoremi 3.30. Tada imamo za $\lambda \in \ell^{p,q}$*

(i) $\|T_\lambda\|_\chi = \lim_{n\to\infty} (\sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{k\in I(m,n)} |\lambda_k|^p)^{q/p})^{1/q}$ *ako je* $v < \infty$ *i* $v < s$ *i* $r > u$;

(ii) $\|T_\lambda\|_\chi = \lim_{n\to\infty}(\sum_{m=0}^{\infty}(\sup_{k\in I(m,n)}|\lambda_k|)^q)^{1/q}$ ***ako je*** $v<\infty$ ***i*** $v<s$ ***i*** $r\le u$;

(iii) $\|T_\lambda\|_\chi = \lim_{n\to\infty}(\sup_m(\sum_{k\in I(m,n)}|\lambda_k|^p)^{1/p})$ ***ako je*** $v<\infty$ ***i*** $v\ge s$ ***i*** $r>u$;

(iv) $\|T_\lambda\|_\chi = \limsup_{n\to\infty}|\lambda_n|$ ***ako je*** $v<\infty$ $v\ge s$ ***i*** $r\le u$;

(v) $0\le \|T_\lambda\|_\chi \le \lim_{n\to\infty}\|\lambda^{(n)}\|_{p,q}$ ***ako je*** $v=\infty$.

Dokaz: Radi kraćeg zapisa označimo sa $B=\overline{B}_{\ell^{r,s}}$, a sa A dijagonalnu matricu pridruženu operatoru T_λ, tj. matricu kojaa reprezentuje. Posmatrajmo prvo slučaj kad je $v<\infty$, sa podslučajevima $v<s$ i $v\ge s$.

- Pretpostavimo da je $v<s$

  Ako je $r>u$ tada po Teoremi 3.30 imamo

$$\begin{aligned}\|T_\lambda\|_\chi =&\chi(L_A(B)) = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in B}\|R_n(Ax)\| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}\|\lambda\cdot x-(\lambda\cdot x)^{[n]}\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in B}\|T_\lambda^{(n)}(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|\lambda^{(n)}\|_{p,q}\\ &= \lim_{n\to\infty}(\sum_{m=0}^{\infty}(\sum_{k\in I(m,n)}|\lambda_k|^p)^{q/p})^{1/q} .\end{aligned}$$

  Ako je $r\le u$, tada je $p=\infty$ pa jos jednom primenimo Teoremu 3.30 i na isti način kao u prethodnom slučaju možemo dobiti

$$\|T_\lambda\|_\chi = \lim_{n\to\infty}\|\lambda^{(n)}\|_{\infty,q} = \lim_{n\to\infty}(\sum_{m=0}^{\infty}(\sup_{k\in I(m,n)}|\lambda_k|)^q)^{1/q} .$$

- Pretpostavimo sada da je $v\ge s$.

  Iz $v\ge s$ izvlačimo zaključak da je $q=\infty$. Kako je v još uvek manje od beskonačno možemo koristiti Teoremu 3.30 i dobiti kao i u slučaju kad je $v<s$ naredne podslučajeve i odgovarajuće rezultate.

Za $r > u$ imamo

$$\|T_\lambda\|_\chi = \lim_{n\to\infty} \|\lambda^{(n)}\|_{p,\infty} = \lim_{n\to\infty} (\sup_m (\sum_{k\in I(m,n)} |\lambda_k|^p)^{1/p}) \ .$$

Slično, za $r \leq u$, zaista dobijamo $p = q = \infty$, pa imamo

$$\|T_\lambda\|_\chi = \lim_{n\to\infty} \|\lambda^{(n)}\|_{\infty,\infty} = \limsup_{n\to\infty} |\lambda_n| \ .$$

Ovim smo obuhvatili sve slučajeve u kojima je bilo moguće primeniti Teoremu 3.30, i dobili jednakosti za Hausdorfovu meru nekompaktnosti operatora T_λ. U slučaju kada je $v = \infty$ to nije moguće uraditi na ovaj način i tu dobijamo samo procenu za Hausdorfovu meru nekompaktnosti operatora. Naravno, to kasnije povlači nemogućnost davanja potrebnih i dovoljnih uslova za kompaktnost posmatranog operatora.

Pretpostavimo da je $v = \infty$, i da je S jedinična sfera u prostoru $\ell^{r,s}$, $r, s \in [1,\infty]$. Definišimo operatore P_n , R_n : $\ell^{u,\infty} \longrightarrow \ell^{u,\infty}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ sa $P_n(x) = x^{[n]}$ i $R_n(x) = x - x^{[n]}$ za $x = (x_k)_{k=0}^\infty \in \ell^{u,\infty}$. Kako je $L_A(S) \subset P_n(L_A(S)) + R_n(L_A(S))$, na osnovu elementarnih osobina funkcije χ dobijamo da je

$$\begin{aligned}\chi(L_A(S)) \leq \chi(P_n(L_A(S))) + \chi(R_n(L_A(S))) &= \chi(R_n(L_A(S))) \\ &\leq \sup_{k\in S} \|R_n(L_A(x))\| \ .\end{aligned}$$

Ako u obzir uzmemo specijalnu formu beskonačne matrice A pridružene operatoru T_λ, dobićemo

$$\sup_{x\in S} \|R_n(L_A(x))\| = \sup_{x\in S} \|\lambda{\cdot}x - (\lambda{\cdot}x)^{[n]}\| = \sup_{x\in S} \|T_\lambda^{(n)}(x)\| = \|T_\lambda^{(n)}\| = \|\lambda^{(n)}\|_{p,q} \ .$$

Jasno je da u ovom slučaju imamo da je $q = \infty$ (ili $s = v = \infty$ ili $s < v = \infty$). Podslučajevi koje možemo razmatrati su $r > u$ i $r \leq u$, i oni mogu biti tretirani na isti način kao i ranije. Tako da dobijamo $0 \leq \|T_\lambda\|_\chi \leq \lim_{n\to\infty} \|\lambda^{(n)}\|_{p,\infty}$ ako je $v = \infty$ tj.

$$0 \leq \|T_\lambda\|_\chi \leq \lim_{n\to\infty} \sup_m \Big(\sum_{k \in I(m,n)} |\lambda_k|^p \Big)^{1/p} \ , \ \text{ ako je } \ v = \infty \ \text{ i } \ r > u \ ;$$

$$0 \leq \|T_\lambda\|_\chi \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{k \in I(m,n)} |\lambda_k| \ , \ \text{ ako je } \ v = \infty \ \text{ i } \ r \leq u \ .$$

Kao posledicu za sve razmatrane slučajeve, prema [35, Corollary 2.26 (2.58)], dobijamo

Posledica 3.33. *Neka su r, s, u, v, p i q kao u Teoremi 3.30. Tada za $\lambda \in \ell^{p,q}$ imamo*

(i) T_λ *je kompaktan ako i samo ako je* $\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k \in I(m,n)} |\lambda_k|^p \Big)^{q/p} \Big)^{1/q} = 0$

ako je $v < \infty$ *i* $v < s$ *i* $r > u$;

(ii) T_λ *je kompaktan ako i samo ako je* $\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sup_{k \in I(m,n)} |\lambda_k| \Big)^{q} \Big)^{1/q} = 0$

ako je $v < \infty$ *i* $v < s$ *i* $r \leq u$;

(iii) T_λ *je kompaktan ako i samo ako je* $\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_m \Big(\sum_{k \in I(m,n)} |\lambda_k|^p \Big)^{1/p} \Big) = 0$

ako je $v < \infty$ *i* $v \geq s$ *i* $r > u$;

(iv) T_λ *je kompaktan ako i samo ako je* $\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$

ako je $v < \infty$ $v \geq s$ *i* $r \leq u$;

(v) *Ako je* $\lim_{n\to\infty} \|\lambda^{(n)}\|_{p,q} = 0$ *i ako je* $v = \infty$,

tada je T_λ *kompaktan operator* .

U slučaju kad je $v = \infty$, prostor $\ell^{u,\infty}$ nema Šauderovu bazu pa primena teoreme Goldeinstein-Gohberg-Markus daje samo dovoljne uslove za kompaktnost operatora T_λ reprezentovanog matricom A. Mi ćemo dati bolje uslove za neke podslučajeve.

Teorema 3.34. *Neka su brojevi r, s, u, v, p, q definisani kao u Teoremi 3.30, neka je $v = \infty$, $s \neq \infty$ i neka su r', s', u', p', q' njihovi konjugovani brojevi. Tada za* *operator* $T_\lambda : \ell^{r,s} \longrightarrow \ell^{u,\infty}$ *važi*

(i) T_λ *je kompaktan ako i samo ako je* $\lim_{n\to\infty}(\sup_m(\sum_{k\in I(m,n)} |\lambda_k|^{p'})^{1/p'}) = 0$

ako je $1 < s' < \infty$ *i* $r' < u'$;

(ii) T_λ *je kompaktan ako i samo ako je* $\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$

ako je $1 < s' < \infty$ *i* $u' \leq r'$;

(iii) *Ako je* $\lim_{n\to\infty} \|\lambda^{(n)}\|_{p',q'} = 0$ *i ako je* $s = 1$, *tada je* T_λ

kompaktan operator .

Dokaz: Posmatraćemo slučaj kada je $v = \infty$. Tada je $\ell^{u',v'} = \ell^{u',1}$ BK prostor sa AK svojstvom. Zato, za $s < \infty$ možemo primeniti Teoremu 1.13 i dobiti sledeće: $A \in (\ell^{r,s}, \ell^{u,\infty})$ ako i samo ako je $A^t \in (\ell^{u',1}, \ell^{r',s'})$. Kako je $A = A(\lambda)$ dijagonalna matrica sa nizom λ na svojoj dijagonali, to je $(A(\lambda)^t = A(\lambda)$. Dalje, korišćenjem [51, Theorem 3.], dobijamo da je operator T_λ koji odgovara matrici $A \in (\ell^{r,s}, \ell^{u,\infty})$ kompaktan ako i samo ako je kompaktan operator T_λ^t pridružen transponovanoj matrici $A^t \in (\ell^{u',1}, \ell^{r',s'})$. Kako je $s \neq \infty$ imamo da je i $s' \neq 1$, tj. da je $1 < s' \leq \infty$. Sada rezultati slede direktno iz Teoreme 3.32 i Posledice 3.33 imajući na umu definiciju matrice $A = A(\lambda)$ i sledeće tabele:

Ranije	$\mapsto$	Sada
r	$\mapsto$	u'
s	$\mapsto$	1
u	$\mapsto$	r'
$v = \infty$	$\mapsto$	s'

Jedini slučaj koji ne može biti poboljšan je slučaj u kome je $v = s = \infty$ i tu za sada ostaju samo dovoljni uslovi.

Literatura

[1] J. Banás and K. Goebl, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 60, Marcel Dekker, New York and Basel, 1980.

[2] J. Banás, *Applications of measures of noncompactness to various problems*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Nr 34, Matematyka i fizyka z.5, Matematyka, z.5, Rzeszów, 1987.

[3] O. Blasco, C. Zaragoza-Bersoza, *Multipliers on Generalized Mixed-Norm Sequence Spaces*, Abstract and Applied Analysis, 2014, Volume 2014, Article ID 983273, 15 pages.

[4] G. Darbo, *Punti uniti in transformazioni a condominio non compatto*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova 24 (1955), 84-92.

[5] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Part I, New York, (1958).

[6] I. Djolović, *Two ways to compactness*, Filomat (2003) 15-21.

[7] I. Djolović, *Karakterizacija klasa matričnih transformacija i kompaktnih linearnih operatora kod matričnih domena i primene*, Doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2007.

[8] I. Djolović, E. Malkowsky, *A note on compact operators on matrix domains*, Journal of the Mathematical Analysis and Applications, 340 (2008) 291-303.

[9] I. Djolović, E. Malkowsky, *On Matrix Mappings Into Some Strong Cesàro Sequence Spaces*, Applied Mathematics and Computation, 218 (2012), No.10, 6155-6163.

[10] I. Djolović, E. Malkowsky, K. Petković, *New approach to some results related to mixed norm sequence spaces* , Filomat, 30(1) (2016) 83-88.

[11] A. H. Ganie, Neyaz Ahmad Sheikh, *On some new sequence space of non-absolute type and matrix transformations*, Journal of the Egyptian Math.Soc.(2013) 21, 108-114.

[12] Л. С. Гольденштейн, И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус, Исследование некоторых свойств линейных ограниченных операторов в связи с их q-нормой, Уч. зап. Кишиневского гос. ун-та, 29, (1957), 29-36.

[13] K-G. Grosse -Erdmann, *The blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy's Inequality*, Lecture Notes in Mathematics, No.1679, Springer-Verlag, 1998.

[14] O. Hadžić, *Osnovi teorije nepokretne tačke*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1978.

[15] O. Hadžić, *Fixed Point Theory in Topological Vector Spaces*, Institute of Mathematics, University of Novi Sad, Novi Sad, 1984.

[16] Hardy G. H., *Divergent Series*, Oxford University Press, 1973.

[17] V. Istrătesku, *On a measure of noncompactness*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S) 16 (1972) 195-197.

[18] A. M. Jarrah and E. Malkowsky, *BK spaces, bases and linear operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 52 (1998) 177-191.

[19] A. M. Jarrah and E. Malkowsky, *The second duals of the sets of* Λ*-strongly convergent and bounded sequences*, Int.J.Math.Sci.24(2) (2000) 121-128.

[20] A. M. Jarrah, E. Malkowsky, *Mixed norm spaces of difference sequences and matrix transformations*, Matematički vesnik, 54 (2002) 93-110.

[21] A. M. Jarrah and E. Malkowsky, *Ordinary, absolute and strong summability and matrix transformations*, Filomat 17 (2003) 59-78.

[22] I. Jovanović, V. Rakočević, *Multipliers of mixed norm sequence spaces and Measure of Noncompactness*, Publications De L'Institut Mathématique, 56(70) (1994) 61-68.

[23] I. Jovanović, V. Rakočević, *Multipliers of mixed norm sequence spaces and measure of noncompactness II*, Matematički vesnik, 49 (1997) 197-206.

[24] C. N. Kellogg, *An extension of the Hausdorff-Young theorem*, Michigan Math.J., 18 (1971) 121-127.

[25] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund. Math. 15 (1930) 301-309.

[26] Maddox I. J., *On Kuttner's theorem*, J.Lond.Math.Soc. 43 (1968) 285-290.

[27] Maddox I. J., *Elements of Functional Analysis*, Cambridge, University Press, 1970.

[28] B. de Malafosse, E. Malkowsky and V. Rakočević, *Measure of noncompactness of operators and matrices on the spaces c and c_0*, Int. J. Math. Math. Sci. (2006), Issue 1, Article ID 46930, 5 pages.

[29] B. de Malafosse, V. Rakočević, *Application of measure of noncompactness in operators on the spaces $s_\alpha, s_\alpha^0, s_\alpha^{(c)}, \ell_\infty^p$*, J. Math. Anal. Appl. 323(1) (2006) 131-145.

[30] E. Malkowsky, *Klassen von Matrix Abbildungen in paranormierten FK-Räumen* , Analysis 7, (1987) 275-292.

[31] E. Malkowsky, I. Djolović, *Compact operators into the spaces of strongly C1 summable and bounded sequences*, Nonlinear Anal. 74 (2011) 3736-3750.

[32] E. Malkowsky, I. Djolović, *Banach algebras of matrix transformations between some sequence spaces related to Λ-strong convergence and boundedness*, Appl. Math. Comp. 219 (2013) 8779-8789

[33] E. Malkowsky, I. Djolović, K. Petković, *Two methods for the characterization of compact operators between BK spaces*, Banach J.Math.Anal 8 (2015) 1-13.

[34] E. Malkowsky, V. Rakočević, *The measure of noncompactness of linear operators between certain sequence spaces*, Acta Sci. Math. (Szeged) 64 (1998) 151-170.

[35] E. Malkowsky, V. Rakočević, *An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness*, Zbornik radova 9 (17), Mat. institut SANU (Beograd), (2000) 143-234.

[36] E. Malkowsky, V. Rakočević, *On matrix domains of triangles*, Appl. Math. Comput. 189 (2) (2007) 1146-1163.

[37] S. A. Mohiuddine, M. Mursaleen, A. Alotaibi, *The Hausdorff measures of noncompactness for some matrix operators*, Nonlinear Analysis 92 (2013) 119-129.

[38] M. Mursaleen and V. Karakaya, H. Polat and N. Sim›sek, *Measure of noncompactness of matrix operators in some difference sequences of weighted means*, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 814–820.

[39] M. Mursaleen and S. A. Mohiuddine, *Applications of measures of noncompactness to infinite systems of differential equations in ℓ_p spaces*, Nonlinear Anal. 75 (2012) 2111–2115.

[40] M. Mursaleen and A. K. Noman, *On the Spaces of λ-Convergent and Bounded Sequences*, Thai Journal of Mathematics Volume 8 (2010) Number 2 : 311-329.

[41] M. Mursaleen and A. M. Noman, *Compactness by the Hausforff measure of noncompactness*, Nonlinear Anal. 73 (2010) 2541–2557.

[42] M. Mursaleen and A. M. Noman, *Applications of the Hausdorff measure of noncompactness in some sequence spaces of weighted means*, Comput. Math. Appl. 60 (2010) 1245–1258.

[43] M. Mursaleen, A. K. Noman, *On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces ℓ_p and ℓ_∞*, I, Filomat 25 (2) (2011) 33-51.

[44] M. Mursaleen, A. K. Noman, *On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces ℓ_p and ℓ_∞*, II, Math. Commun. 16 (2) (2011) 383-398.

[45] M. Mursaleen, Abdullah K. Noman, *Hausdorff measure of noncompactness of certain matrix operators on the sequence spaces of generalized means* , J. Math.Anal.Appl. 417 (2014) 96-111.

[46] K. Petković, *Some new results related to compact matrix operators in the class $((\ell_p)_T, \ell_\infty)$*, Acta Mathematica Sinica 31 (2015) 1339-1347.

[47] K. Petković, *Some classes of operators related to the space of convergent series cs* , (accepted for publication in Filomat).

[48] Peyerimhoff A., *Lectures on Summability*, Lecture Notes in Mathematics 107, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 1969.

[49] Rakočević V., *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, (1994).

[50] Rakočević V., *Measures of noncompactness and some applications*, Filomat, 12 (1998) 87-120.

[51] W. L. C. Sargent, *On compact matrix transformations between sectionally bounded BK spaces*, J. London Math. Soc. 41 (1966) 79-87.

[52] Stieglitz M., Tietz H., *Matrixtransformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersicht*, Math. Z. 154 (1977) 1–16.

[53] M. R. Tasković, *Osnovi teorija fiksne tačke*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1986.

[54] M. R. Tasković, *Nelinearna funkcionalna analiza*, Prvi deo, Teorijske osnove, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1993.

[55] A. Wilansky, *Summability through functional analysis*, North Holland Math. Stud. (85) (1984).

Propratna dokumentacija

Универзитет у Нишу

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Карактеризација ограничених линеарних и компактних оператора између БК простора

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 15.5.2016.

Аутор дисертације: Катарина Петковић

Потпис аутора дисертације:

Петковић Катарина

Универзитет у Нишу

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора: Катарина Петковић

Наслов дисертације: *Карактеризација ограничених линеарних и компактних оператора између БК простора*

Ментор: др. Ивана Ђоловић

Изјављујем да је штампани облик моје докторске дисертације истоветан електронском облику, који сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.**

У Нишу, 15.5.2016.

Потпис аутора дисертације:

Петковић Катарина

Универзитет у Нишу

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Карактеризација ограничених линеарних и компактних оператора између БК простора.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**

2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде **(CC BY-NC-ND)**

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**

5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**

6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; опис лиценци дат је у Упутству).

У Нишу, 15.5.2016.

Аутор дисертације: Катарина Петковић

Потпис аутора дисертације:

Петковић Катарина

Biografija autora

Katarina I.Petković je rodjena 06.05.1975.god. u Nišu. Osnovnu školu "Ćele kulažavršila je 1990. god, a gimnaziju "Bora Stanković", prirodno matematički smer, 1994.godine sa odličnim uspehom.

Iste godine je upisala osnovne studije na Filozofskom fakultetu u Nišu, sada Prirodno-matematički fakultet, na Grupi za matematiku. Diplomirala je 22.11.2000.godine, sa prosečnom ocenom 9,44 u toku studija i time stekla stručni naziv : diplomirani matematičar za teorijsku matematiku i primene. Kao student učestvovala je 1998.godine na Primatijadi u Gornjem Milanovcu sa radom "Teorema Lomonosova i primene", a bila je i dobitnik stipendije Norveške vlade.

Poslediplomske studije upisuje školske 2000/2001. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, odsek za matematiku i informatiku, smer funkcionalna analiza. Magistarski rad pod nazivom "Razlaganje matrica i iterativne metode "odbranila je 22.06.2010.godine.

Od 2001. godine radi na Gradjevinsko-arhitektonskom fakultetu u Nišu, u početku u zvanju asistenta pripravnika a zatim u zvanju asistenta, na predmetima Matematika I, II i III (SPG) i Matematika I (SPA). Školske 2004/2005. godine u okviru predmeta "Teorija mera i integralaďržala je vežbe na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu.

Radovi:

- Malkowsky E., Djolović I., Petković K., *Two methods for the*

characterization of compact operators between BK spaces, Banach J. Math. Anal 8, 2015, 1-13;

- Petković K., *Some new results related to compact matrix operators in the class* $((\ell_p)_T, \ell_\infty)$, Acta Mathematica Sinica 31, 2015, 1339-1347;

- Djolović I., Malkowsky E., Petković K., *New approach to some results related to mixed norm sequence spaces*, Filomat, 30(1), 2016, 83-88;

- Petković K., *Some classes of operators related to the space of convergent series* cs, (prihvaćen za štampu u Filomatu).

- Miloš Z. Petrović, Katarina Petković, Marina Živulović Petrović, Emina Jovanović , *Analiza uticaja armirano betonskog rama od sopstvenog opterećenja i spoljašnjih sila* , Vojnotehnički glasnik/Military Technical Courier Vol. 62, No. 4 .

Konferencije:

- K. Petković , *Reverzibilne matrice i primeri*, International Workshop on Modern Functional analysis, Operator Theory, Summablity and Applications, September 25-28, 2003., Niška Banja, Serbia.

- K. Petković, *Matrix domain of the triangle in lp* , 13th Serbian Mathematical congress , May 22-25, 2014., Vrnjačka Banja, Serbia

- K. Petković, *Compactness of some matrix operators*, Analysis, Topology and Applications , May 26-29, 2014., Vrnjacka Banja, Serbia.