



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ФАКУЛТЕТ ПЕДАГОШКИХ НАУКА УНИВЕРЗИТЕТА У
КРАГУЈЕВЦУ

Мр Радојко Дамјановић

УПОТРЕБА МАНИПУЛАТИВА У РАЗВОЈУ
МАТЕМАТИЧКОГ МИШЉЕЊА
(докторска дисертација)

Јагодина, 2016.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I. Аутор

Име и презиме: *Радојко Дамјановић*

Датум и место рођења: *01. март 1972. године, Констанц/Немачка*

Садашње запослење: *просветни саветник у Министарству просвете, науке и технолошког развоја, самостални саветник*

II. Докторска дисертација

Наслов: *Употреба манипулатива у развоју математичког мишљења*

Број страница: *250*

Број слика: *79*

Број библиографских података: *155*

Установа и место где је рад израђен: *Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина*

Научна област (УДК): *371.3::51*

Ментор: *проф. др Бранислав Поповић*

III. Оцена и одбрана

Датум пријаве теме: *24. септембар 2015. године*

Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:

Комисија за оцену подобности теме и кандидата:

Проф. др Милана Егерић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

Проф. др Бранислав Поповић, Природно-математички факултет у Крагујевцу

Доцент др Небојша Икодиновић, Математички факултет Универзитета у Београду

Доцент др Ненад Вуловић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

Доцент др Александра Михајловић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

Комисија за оцену докторске дисертације:

Доц. др Ненад Вуловић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, председник

Доц. др Александра Михајловић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, члан

Доц. др Небојша Икодиновић, Математички факултет Универзитета у Београду, члан

Комисија за одбрану докторске дисертације:

*Доц. др Ненад Вуловић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу,
председник*

*Доц. др Александра Михајловић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу,
члан*

Доц. др Небојша Икодиновић, Математички факултет Универзитета у Београду, члан

Датум одбране дисертације:

„Тешкоћа не лежи у новим идејама, већ у напуштању старих, које прожимају сваки делић ума оних који су одгојени као већина нас.“ (Ц. М. Кејнз, економиста)

„Сви људи по природи теже сазнању.“ (Аристотел, филозоф)

„Нема сумње да феномен људског сазнања представља највеће чудо у нашем универзуму.“ (Карл Попер, филозоф)

„У мисаоном човеку увек изнова израња оно што пресеже све оно што он мисли.“ (Карл Јасперс, филозоф)

„Чим пристајемо да учимо, ми смо већ признали да нисмо кадри да мислимо.“ (Мартин Хајдегер, филозоф)

„Понашање човека се открива у свој својој стварној сложености, у свом грандиозном значењу као динамички и дијалектички процес борбе између човека и света и унутар човека.“ (Лав Семјонович Виготски, психолог)

„Творце оруђа преобликовало је управо њихово оруђе.“ (Артур Кларк, SF-аутор)

„Нема сумње да је од свих отпора трења онај који највише успорава људско кретање – незнање.“ (Никола Тесла, проналазач)

Апстракт

Манипулативи у настави математике представљају својеврстан агенс процеса развоја математичког мишљења. О овоме сведоче многобројна теоријска и емпиријска истраживања која су реализована у свету, али о томе се код нас (у Србији) мало зна или мало употребљава. Дисертација користи све најзначајније, релевантне теоријске и емпиријске налазе из области употребе манипулатива у процесу наставе и учења и систематизује их, тако да уз емпиријско истраживање ставова и мишљења наставника о манипулативима, на узорку у Србији даје јединствену целину. Драгоценост ове дисертације јесте у томе што представља оригиналан приказ околности образовања у свету, филозофске и психолошке поставке појма мишљења, као и алтернативних приступа (латерално размишљање). Након широког прегледа и увода о појму мишљења и коначно математичког мишљења, дисертација се бави манипулативима као корисним алатима наставе и учења математике и развоја математичког мишљења. Стварањем дуалних математичких репрезентација, превођењем конкретних околности математичке структуре у визуелне репрезентације, ствара се ментална слика којом се оперише на менталном плану и тако конкретно прелази у формално и апстрактно. Умешност наставника да води ове процесе у којима се употребљавају манипулативи, разлике и сличности између реалних или физичких и виртуелних манипулатива јесте једна од подтема које се излажу у овој дисертацији.

Прилози за тему употребе манипулатива у функцији развоја математичког мишљења имају сврху у приближавању објашњења неког појма или феномена који се користи током излагања у главном делу дисертације и од посебног је значаја. Многи појмови су права реткост/новост у пољу методике наставе математике код нас, тако да је у том смислу ова дисертација од посебне важности.

Обиман списак референци на које се дисертација позива, анализиран је и структурисан и даје се као прилог овог рада.

Кључне речи: манипулативи, мишљење, математичко мишљење, развој мишљења, развој математичког мишљења, физички манипулативи, виртуелни манипулативи.

Abstract

Within the process of teaching mathematics manipulatives represent a kind of an agent in the process of developing mathematical thinking. A lot of theoretical and empirical research conducted around the world testifies to this fact, and yet here (in Serbia) this is little known or employed too little. This dissertation uses all the most significant and relevant theoretical and empirical findings from the area of using manipulatives in the process of teaching and learning and systematizes them, providing a unified whole together with the empirical research of the teachers' attitudes and opinions on manipulatives sampled in Serbia. The value of this dissertation lies in the fact that it gives an original overview of the educational conditions throughout the world, philosophical and psychological bases for the notion of thinking, as well as some alternative approaches (such as lateral thinking). After a broad overview and introduction about the notion of thinking and eventually mathematical thinking, this dissertation deals with manipulatives as useful tools for teaching and learning mathematics and for the development of mathematical thinking. By creating dual mathematical representations, translating concrete conditions of a mathematical structure into visual representation, a mental image is formed which is then used on the mental level and in such way concrete is transformed into formal and abstract. The versatility of the teacher to lead these processes in which manipulatives are used as well as differences and similarities between real or physical and virtual manipulatives belong to one of the subthemes developed in this dissertation.

These contributions to the theme of using manipulatives in the function of developing mathematical thinking have the purpose to facilitate a closer interpretation of notions or phenomena used within the main part of the dissertation and is of special significance. Some of the notions are true rarities/novelties in the field of methods of teaching mathematics in our country and that is why this dissertation holds special importance.

Voluminous list of references cited in this dissertation is analyzed and structured, and given as an addendum to this thesis.

Key words: manipulatives, thinking, mathematical thinking, the development of thinking, the development of mathematical thinking, physical manipulatives, virtual manipulatives.

Садржај

Увод.....	9
Околности образовања (и васпитања).....	14
Учешће ученика у процесу наставе и учења – ученичка партиципација	35
Мишљење – од филозофије до психологије.....	39
Мишљење – психолошки приступи у образовању (психологија у образовању или психолошке основе образовања)	44
Латерално размишљање	60
Математичко мишљење и развој у процесима образовања	64
Когнитивне и метакогнитивне претпоставке учења (математике)	76
Манипулативи у процесима учења математике.....	81
Јукстапонираност физичких и виртуелних манипулатива	104
Наставници и употреба манипулатива током учења математике	114
Неки примери употребе манипулатива у учењу математике	122
Употреба манипулатива у настави математике – истраживање (извештај).....	131
Манипулативи у настави математике – инвентура.....	152
Завршна реч – закључак	157
Литература	162
Прилози.....	172
Прилог 1 – Један пример - Школа са онтолошком грешком.....	173
Прилог 2 – Масловљева хијерархија потреба.....	175
Прилог 3 – Разлагање ситуације базичном јединицом	176
Прилог 4 – Табела и скица теоријског оквира хијерархије категорија и подкатегорија менталних активности (математичког мишљења) – Г. Вилијамс	178
Прилог 5 – Приказ графиком феномена <i>flow</i>	181
Прилог 6 – Илустрације генезе потенцијалне ученичке конфузије у утврђивању кардиналних димензија манипулативних приказа и врста шаблона десетичног оквира.....	182
Прилог 7 – Час са танграмом.....	184
Прилог 8 – Упитник за наставнике	185
Прилог 9 – Конкретно искуство као снажан ослонац у формирању формалног, апстрактног мишљења.....	187

Прилог 10 – Спискови основних школа у Школским управама Крагујевац и Нови Сад	198
Прилог 11 – Извештај истраживања – необрађени материјал.....	204
Прилог 12 – Литература – систематизација коришћених референци	245

УВОД

Поштујући научну методологију и истраживање сасвим извесне/конкретне теме у области методике наставе математике, поступак примењен током израде ове докторске дисертације смешта је у шири контекст „постмодерног стања“ у простору образовања, односно, изражава и упливе постмодерне у стварима образовања. Ово је јако тешко извести, с обзиром на сву лукративност и флуидност токова у којима обитава савремено друштво(а) и онога што бисмо могли назвати „људским стањем (*condition humaine*)“ (Morin, 2002, 17). Зато се и пошло веома широко, разматрајући *околности образовања*, уствари, успостављајући оквир за процесе учења, а онда усмерило ка конкретној теми која се истражује. Иако је наука у непрекидном „сукобу са нарацијама“ (Lyotard, 1979), и поштујући то да је област образовања саздана од различитих колекција знања специфично укомпонованих у низове целина, истовремено имамо стално присуство апологетских нарација, које покушавају да супституишу научне теорије, без одговарајуће плаузибилности и методологије која треба да их поткрепи. Зато се данас инсистира на *образовним политикама заснованим на доказима*, односно на политичким одлукама у вези са образовањем које су утемељене на методолошким истраживањима праксе.

С друге стране, у прологу за дело Едгара Морина (1979), тадашњи генерални директор УНЕСКО-а истиче да је један од највећих изазова „како изменити наш начин мишљења с намером да се суочимо с растућим усложњавањем и брзином промена, те с непредвидивошћу што карактеришу наш свет“ и додаје да „морамо уклонити традиционалне преграде између дисциплина и осмислити како повезати оно што је до сада било одвојено“ (Morin, 1979, 13).

Из управо изнетих разлога излагање теме дисертације започето је веома широко, како би могао бити истакнут значај активности учења у најширем, а то је у оквиру система образовања (с намером се избегава да каже - у оквиру школског система). Преглед различитих истраживања ОЕЦД-а у области образовања треба да укаже да „... поновно потврђујемо наше уверење да смо на почетку нове ере у образовању – ере у којој ће истраживање дати чврста, јасна упутства наставницима“ (Marzano, Pickering & Pollock, 2006, 18).

Истовремено, дисертацијом се приказују ставови, виђења и налази различитих аутора, па чак и оних који се у данашњој научној јавности сматрају у неким областима ако не предначиним, онда бар оспорени, у односу на налазе које даје савремена научна теорија и пракса. Ови аутори су за данашња питања науке која се бави образовањем и свим њеним процесима *архе*, а разлози су у примени методологије која се актуелно сматра плаузибилном.

Иначе, када говоримо о *образовању* и свуда у дисертацији где помињемо овај термин, подразумева се и васпитање, односно, подразумева се јединствен образовно-васпитни процес. Има аутора, који насупротив доминантној педагошкој јавности, сматрају да је *образовање* најшири појам, који обухвата и *васпитање* (Јукић, 2003а), јер сваки *васпитни акт* је *акт учења*, а *свако учење је образовање*. Али, када Виготски каже да „васпитање се не може одредити као вештачки развој детета. Васпитање је вештачко овладавање природним процесима развоја. Васпитање не само да утиче на ове или оне процесе развоја већ суштински престојава све функције понашања“ (Vigotski, 1996а, 85), он тада мисли на васпитање као најшири педагошки појам, који обухвата и образовање, али и приде излаже свој *инструментални метод*, којим истражује процесе психолошког и когнитивног развоја човека.

Истицање посебним поглављем психолошких приступа у проучавању мишљења, готово је неизбежно када имамо овако формулисану тему дисертације. Једнаковремено, циљ је истаћи да „одрећи се психологије у систему педагошког образовања – значи одрећи се сваког могућег научног заснивања и осветљења самог васпитног процеса, саме праксе наставничког рада. То значи, између осталог, изградити целокупну теорију социјалног васпитања и радне школе само на голој идеологији... Једноставније и краће – одрећи се психологије значи одрећи се научне педагогије“ (Vigotski, 1996а, 141). Овде је неопходно исказати да је смишљено посебно осветљавана тема развоја мишљења, математичког мишљења, из ракурса истраживања двојице научника, Пијажеа и Виготског, како би слика била што потпунија/обухватнија, за оног читаоца који жели да задовољи сазнајне потребе у предметној области.

Пре преласка на конкретну разраду теме о *манипулативима*, коректно је кратко расправити или разјаснити, можда и предупредити извесне термилошке недоумице. Наиме, пажљиви читалац ће се упитати каква је разлика између *наставних средстава*, *дидактичких средстава* и *манипулатива* о којима се овде излаже. Испитивањем наше енциклопедијске и лексиколошке грађе, прегледом педагошког тезауруса, може се закључити да до сада у нашој научној теорији и пракси манипулативи нису познати

под овим именом. Можемо под одредницом *дидактички материјали* наћи да су то *наставна средства* или *наставна помагала*. Дидактичка средства се дефинишу у односу на улогу оптимизације наставе, док су наставна помагала углавном оруђа рада у настави, краће алати. Конкретније, наставна средства, учила и помагала су *извори знања* у настави и карактерише их то што њих у свом раду директно могу да користе и ученици и наставници. *Манипулативе* директно користе само ученици, поступајући по инструкцијама наставника или одговарајућег субјекта у процесу учења. Можемо да закључимо да манипулативи представљају ужи појам у односу на дидактичке материјале, да су оперативнији и упућују на активности ученика, које су директне и конкретне. Овде истичемо значај дисертације, из разлога што у нашој научној јавности није познато да се ико бавио темом манипулатива, барем не на овде приказан начин.

У делу који се уже бави темом дисертације, конкретно употребом манипулатива разматрано је више сегмената који су подељени по различитим поглављима. Свакако је значајно истаћи да је тема употребе манипулатива и улоге наставника у процесу учења прегледно разматрана и да је постављена тако да „уколико наставници имају концептуално разумевање математике тада могу да поучавају на начин да фацилирају разумевање код својих ученика“ (Kerekes, 2006, 11). Истовремено, цитирани аутор је истраживао разумевање и понашање наставничких кандидата те закључио да „наставнички кандидати се много удобније осећају поучавајући процедурама радије него заузимајући концептуални приступ“ (Kerekes, 2006, 11), што је један од општих проблема организације наставе. Под концептуалним приступом, подразумева се појмовни приступ, односно изучавање појмова, што је у настави математике, ако је поставимо развојно у односу на мишљење, неупитно неопходно. Употреба манипулатива од стране ученика чини да он упознаје математичке појмове на конкретним објектима, у конкретним ситуацијама, те своја емпиријска сазнања претаче/преводи у апстрактне математичке појмове којима оперише касније у менталним сликама. „Добро искуство с добрим учитељем кључ је доброг учења било чега“ (Glasser, 2004, 222).

Учење на искуству уз вођење наставника упућује да је промишљање о манипулативима у настави математике неопходно и зашто је истраживање у овој дисертацији темељно за нашу образовну праксу. На основу њега могуће је даље развијати истраживања која би дала јасна упутства наставницима, али и доносиоцима одлука када су у питању процеси учења математике у школама. Светска научна јавност даје значајне налазе у овој области, који треба да буду истражени и да заједно са

налазима из наших школа омогуће унапређивања праксе учења математике и адекватне употребе методике наставе математике.

Повезаност дисертације са концептима који су популарни у учењу, учењу математике у свету, јесте евидентна. О томе говори поглавље посвећено *латералном размишљању*, третирање феномена *flow* у вези са мотивацијом за учење, упућивање на *ученичку партиципацију* у процесу организације учења и позиционирање субјеката учења. Упоредна анализа ефектности употребе физичких и виртуелних манипулатива даје одговоре о могућности замене једне врсте другом и разбијања илузије о томе.

Развој математичког мишљења употребом манипулатива приказан је прегледним истраживањем налаза из стране научне теорије и праксе, а онда повезан са емпиријским истраживањем домаће наставничке праксе у учењу математике.

Преображај учioniца у места искуственог доживљаја учења и на основу тога извођења одговарајућих закључака и новог учења јесте у вези са исказом једног од аутора који наводи да „лабораторијски приступ моделу поучавања употребом манипулатива ствара позитивне ефекте на ставове ученика према математици“ (Warkentin, 1975, 93). У исто време, учење на искуствима и стварање менталних слика којима касније оперишемо на апстрактном нивоу чини да целокупну науку, односно, епистемолошки засновану слику света, субјект који учи учини тако флексибилном, да може да је успешно примени на увек нове околности или услове живота. Отуда и имати на уму исказ аутора који каже да „ако би наука успела потпуно да обухвати непрекидну стваралачку активност свести, све би било сведено на ригидну детерминистичку схему узрока и последица, и не би се могло говорити о слободи, уметности и интерпретацији“ (Tasić, 2002, 25).

Емпиријска истраживања наше наставне праксе, првенствено ставова наставника разредне и предметне наставе у прва два циклуса обавезног и општег образовања о употреби манипулатива представља одраз стања, али и основа је за будућа истраживања педагошке праксе. Занимљиво јесте упоредити налазе истраживања и прегледна истраживања стране теорије и праксе са налазима истраживања из дисертације.

Свакако, као што аутори књиге о *наставним стратегијама* на крају свога дела истичу за свој подухват да наставницима може да буде корисно средство у мењању „образовања из уметности у науку“ (Marzano, Pickering & Pollock, 2006, 162), тако и ова дисертација даје допринос прегледу стања у образовању, развоју мишљења и употреби манипулатива у настави математике.

Прилози на крају дисертације имају јединствену сврху да додатно поткрепе налазе истраживања и да евидентно дају на увид поједине чињенице изложене у главном тексту. Уз сирове, необрађене налазе емпиријских истраживања, ту се налази и преглед анализе коришћених референци у смислу њиховог значаја (значај часописа, цитатност, домаћи или страни часописи), објашњења одређених феномена наставе и процеса учења математике.

ОКОЛНОСТИ ОБРАЗОВАЊА (И ВАСПИТАЊА)

Изложити извесни дискурс о образовању није толико тешко, колико је нејасно када кажемо *околности образовања* и тешко разумети на шта желимо да усмеримо нечију пажњу. Свакако, добро је са те стране, што *олуја мозга*¹ изазвана овом синтагмом може бити врло плодотворна, тако да резултује мноштвом праваца, односно простора, за разматрање и вишеструко, фреквентно (можда је боље рећи репетитивно) промишљање о образовању уопште, али и образовању као појму по себи.

Наиме, полемишући са крилатицом да живимо у *друштву знања* (веома популарном у политичара), аутор К.Р. Liessmann (2009) разматра и шта то уствари значи образовање у данашњим светским, или друштвеним околностима. Наведени аутор отвара проблем *полуобразованости* и *необразованости* у самом *Предговору* свог дела и каже „Проблем наше епохе није полуобразованост, него одсутност сваке нормативне идеје образовања из које би се још дало ишчитати нешто попут појма полуобразованости“, те додаје у даљем тексту „Необразованост притом не означаје једноставну одсутност знања, као ни становит облик некултивираности, него каткада посве интензивно поступање са знањем онкрај сваке идеје о образовању“ (Liessmann, 2009, 9). Зашто ово треба истаћи, тј. издвојити, као значајно код овог аутора? Читаво наведено дело представља једну реакцију из научних кругова (хајде рећи и академских), оних појединаца који стављају под упит данашњи однос, заправо намеру, владајућих или доминантних образовних политика да нормирају и стандардизују образовање и да на основу тога доносе одговарајуће одлуке. На тај начин могло би се говорити заједничким језиком о проблемима и упитима који су у вези са образовањем. Са друге стране, отпори су значајни у оном делу интелектуалне јавности, која сматра да се образовање не може обухватити, сагледати, на крају и нормирати, на начин како се то ради у различитим процесима индустријске производње, или економске природе, одакле и потичу описане тенденције и да се о квалитету образовања не може тако

¹ Под *олујом мозга* овде се подразумева техника учења у стручној литератури на енглеском језику позната као *brainstorming*, а код нас превођена и као *мозгалица*, *гомиланје идеја*, и сл. Ова техника је саставни и уобичајени део процеса учења у извесним међународно познатим програмима учења као што су нпр. *Корак по корак (Step by step)* или *Читањем и писањем до критичког мишљења (Reading and Writing for Critical Thinking - RWCT)*. Данас је на ову технику учења могуће наићи у било ком процесу учења. Можемо је сматрати иницијалним делом учења, али могуће је лоцирати и у неком делу који би био подстицајан за његов даљи ток (мисли се на учење, прим. аут).

дискутовати, а да се не добију значајни нежељени ефекти (заступници ових критика превиђају да област *управљања и руковођења* данас има научну заснованост). Такво образовање продукује *пунктуално знање* (Liessmann, 2009, 12), јер „Знање у друштву знања искрцано је знање. Знање се, међутим, не да искрцати из складишта. Знање није ускладиштено ни у традиционалним архивима и књижницама, нити у модерним банкама података... Знање имају само људи, све док на овом свијету не постоје други социјални и интелигибилни актери. У свако је знање на тај начин утиснута мрља субјективности, оно је стално шупљикаво, неконзистентно и у великој мјери обиљежено контингенцијом“ (Liessmann, 2009, 27).

Дубљим промишљањем проблема образовања, приметитиће се ускомешаност много различитих термина и да се дискутује о једној ствари уз помоћ појмова – знање, образовање, учење, научност. На овај начин сагледава се и разматра јаснија слика домена образовања. Аактери су научници, академски субјекти, интелектуалци, стручњаци, лаици, а читава полемика се доводи до основног/суштинског процеса наставе и учења, тј. доводи се до основних актера, а то су наставници и ученици. Дакле, комплексност теме образовања није у комплексности учења, већ је то један опсежнији дискурс, заправо, фамилија дискурса, који међусобно не морају бити комплементарни.

Међу ауторима који упозоравају на негативне последице токова данашњице са утицајем на образовање, јесте D. Thompson (2009) и уводи појам *контразнања* са тврдњом да „Готово свака велика промјена у посљедњих тридесет година повећала је количину контразнања. Дошло је до експлозије разноврсности и досега медија, особито интернета“ (Thompson, 2009, 25). Шта је заправо *контразнање*? „Традиционално контразнање опонаша структуру и стил правог знања а не његов садржај“ (Thompson, 2009, 52), лако се шири због доступности извора размене и велика је опасност, јер заматак му се налази у псеудонаучној подлози и квазинаучним методологијама. Означени аутор упућује на једну од најзначајнијих „засада баштине еуропског просвијетитељства... знанствена методологија која нам омогућује да свијет око себе опажамо све прецизније“ (Thompson, 2009, 12). Контразнање је штетно, јер је у форми знања, али суштинска му је одлика да то није. Тако савремена педагогија улази у ризик препознавања научности дискурса који се користи за сврхе учења и наставе, те могу наступити трајне последице из образовног процеса, али и у даљем његовом току, јер је он доживотни. „Манипулација научним чињеницама – коктел науке, мита, белетристике – мешање жанрова – продуковање сопствених конструкција, доводи до

губитка оријентације у детекцији и утврђивању истинитости о суштини неке предметне ствари...“ (Дамјановић, 2008, 129)².

На основу до сада изложених ставова и увида рано је закључивати о било чему и стварати коначну слику о *околностима образовања*, али од користи је за читаоца, указати на став аутора, а и због плаузибилности текста код публикума, да је од изричите важности у излагању користити судове који су засновани на одређеним доказима. Интелектуална јавност склона је да направи право поприште када се заподене тема образовања, тако да се свако осећа позваним да дискутује, што јесте и добро, у смислу да се из одређене количине исказа може доћи до извесног квалитета у закључцима или смерницама за поступање у јавном простору, али и због бољег осветљавања теме. Тренутак је да се укаже на један моменат који је од изричите важности за расправе у области коју третирамо – образовање. Аутор, кога смо већ цитирали, једно поглавље у својој књизи започиње реченицом „Образовање – тај се дојам не да избјећи – пада скупа са својом реформом“ (Liesmann, 2009, 137). Одстранимо тренутно то да ли образовање и реформа образовања падају и усмеримо се на реч која је употребљена као крунска - то је *дојам* или *утисак*. Управо, аутор на основу *утиска* доноси веома значајан закључак, закључак који може да има несагледиве последице у неким даљим разматрањима. Преко тога олако прелазимо и настављамо са читањем текста – реформа је пала! (Шта сад? Како даље? Откуд знамо? – Па, имамо утисак о томе!). Управо је важно испратити у излагањима било које врсте, да ли су извесни закључци изведени на основу *утисака* или јасних *доказа*. Изведена

² Псеудо-знање, симулација знања; добар пример је квазинаучни текст из Афере Сокал (или: Подвале Сокал) који је 1996. године објавио професор универзитета, математичар и физичар, Алан Сокал (Alan Sokal) "Transgressing the Boundaries: Towards a Transformative Hermeneutics of Quantum Gravity", и који је имао све примесе научног рада и као такав објављен у угледном часопису *Social Text*, да би затим сам аутор открио превару, и указао како је лако направити илузију научности; у постмодерној књижевности се такође јавља феномен конструисања историчности, као Умберто Еко у *Имену руже* или Милорад Павић у *Хазарском речнику*, где разноразни додаци, прецизни датуми, (псеудо-)цитати, стварају илузију историчности, прецизности, аутентичности. Ипак, оно што је у књижевности игра или демонстрација моћи књижевног текста да убеди читаоца и омогући му да се уживи у дело, у образовању може бити фатално, јер образовање не претендује да буде *фикција*, *наратив*, итд. већ објашњење света у складу са тренутним стањем у науци – које може напредовати, али што и даље не значи да је претходно стање било *наратив*, већ да је било несавршено, некомплетно знање. Додуше, то не значи да је у одређеним околностима, претходно стање у образовању заиста било *наратив*, као рецимо у случају када Црква упркос научним доказима одбија да призна да се Земља окреће око Сунца, и упорно остаје на *наративу* по којем се Сунце окреће око Земље. Могуће је да се стање у науци никако не може предочити човеку а да не прође кроз неки *наратив* – на крају крајева, увек је ту питање „а шта се то човека тиче?“, али ипак ценим да постоји разлика између намере да се ствар претвори у *наратив* јер је он привлачан или користан (као у примеру са Сунцем и Земљом), и намере да се наука *приближи*, учини приступачном човеку *кроз* *наратив*, типа: еволуција као прича како смо дошли до човека, космологија, како је све настало. Сви ови имају елементе приче – човек није био присутан при стварању света – али то не оповргава причу: човек се позива да *замисли* како је то било, односно како би било да је био присутан и могао објективно да гледа. Сама ситуација је нереална, али предмет ситуације није, то се догодило.

вежба одлично указује на држање позорности и у моментима када се то не чини тако неопходно, поготово у разматрању дискурса као што је овде истакнуто, а то је простор или простори образовања.

Не бавећи се епистемоничним питањима, већ онима која одређују и усмеравају образовање у данашњим токовима, у извесном разматрању познатог аутора, наведено је за једну околност да „Оквир, значење бића, зависи не само од визије света, већ и од разумевања положаја агенса у свету“ (Tejlor, 2011, 106); и управо се овде образовање сматра важним за јединку или агенса, који треба да у свом оквиру, можемо рећи свом делатном оквиру смести једно сопство које комуницира са собом, али и са другим и другима. Нама од користи требало би да буде Бурдије-ово (1999) увођење *друштвено структурисане интеракције*, која би помогла у разматрању микрооколности образовања у смислу пројектовања, реализације и анализе извесних процеса учења, или у смислу продуковања учења као сасвим конкретних структурираних интеракција, које још имају и друштвени (социјални) карактер. Ово продуковање конкретног учења заправо јесте *продуковање пракси*, бурдијеовски речено, и онда улазимо у то да „практике увек теже да репродукују објективне структуре чији су оне, у крајњој анализи, производ“ (Burdije, 1999, 159). За педагошки рад не можемо да кажемо да „је јасно установљен као посебна и самостална пракса“, имамо да постоје структуре интеракција, које су међусобно прожете, чак и кореспондирају, али „не достижући ниво дискурса. Не опонашају се 'моделу', већ поступци других“ (Burdije, 1999, 172). У разматрању пракси и производњи *хабитуса*, опет бурдијеовски речено, или *система диспозиција*, (да поједноставимо – субјеката или агенаса), долазимо и до потребе *методолошког објективизма* „који представља неопходни елемент сваког истраживања, као средство да се раскине са непосредним искуством и да се успоставе објективни односи“ и он „захтева, дакле, превазилажење самог себе“ (Burdije, 1999, 158). Последња тврдња не односи се примарно на питање епистемоничности у успостављању педагошке праксе, већ на успостављање „модела“, „начина“, „теорије праксе“ или „теорије о начину настанка праксе“. Само образовање можемо да посматрамо и као скуп или простор педагошких пракси, и отуда и нужност да се и педагогија пројектује као теорија о начину настанка праксе или пракси у савременом друштвеном ракурсу.

Ако образовни систем посматрамо, условно, као сасвим извесну конкретизацију унутар наратива о образовању, имамо да чак и када се прокламује његова демократизација рационализацијом педагогије, да се као његов производ добија

репродукција друштвених односа и то као континуиран процес, са свим својим противуречностима (Burdije & Paseron, 2014, 60). Сложеност образовања, као посебног система, са својим хијерархијама, структурама, поретком, саморепродукцијом, у оквиру сложеног друштвеног организма, јесте несумњива, тако да се његова улога читава у производњи пракси и структура и хабитуса као посредника. Иако то можда није бескрајни дискурс, свакако јесте један систем циркуларних релација (Burdije & Paseron, 2014, 218). Altiser (2009) тврди да „имамо добар разлог да мислимо да су иза политичког државног идеолошког апарата, који заузима предњи део сцене, буржуји поставили као број један, то јест, као свој доминантни идеолошки апарат, образовни апарат“ (Altiser, 2009, 41) и ово управо из разлога које је навео Маркс – крајњи услов производње стога је репродукција услова производње. Од овога нису била имуна ни друштва реалног социјализма, која су нестала у недавној прошлости. Отуда та репродукција, која је репродукција читавог друштва, посебно дејство има на индивидуалном плану, производњом хабитуса који то треба да изнесу. Тако имамо да „Друштвене функције су друштвене фикције. Институционални ритуали *праве* особу коју наименују у краља, витеза, свештеника или професора, кујући њену друштвену слику, дотерујући представу коју она може и мора да пружи као морална особа, односно као пуномоћник, мандатар или портпарол групе. Али, они је, такође, стварају и у једном другом смислу. Намећу јој име, титулу која је дефинише, поставља и конституише, они јој налажу да постане оно што јесте, односно оно што треба да буде, што јесте њено биће, они јој прописују да *испуни* своју функцију, да уђе у игру – фикцију, да игра игру - функцију“ (Burdije, 2011, 51). Из изложених виђења можемо да закључимо да само образовање и његова друштвена улога има и транснационални карактер, тј. да поред значаја за поједино друштво, етат-друштво, оно има и значаја за светско друштво. образовање, на известан начин подржава и опстајање „популистичких представа народа“, али и „елитистичких представа елита“. Све ово иде у прилог томе када А. Бадију (2013) каже да смо сведоци „одржавања у животу једног уморног света“ (Badiju, 2013, 11). Али и није све тако, јер се управо кроз образовање и еманципацијом субјект може да уздигне и постане агенсом живота, да даље у освајању будућности, знањем мења свет – не само материјални свет, већ и односе у друштвено-хуманистичком пољу, да управо ствара структуре интеракција, које су по својим обележјима еманципација од насиља друштва данашњице. Нове структуре интеракције, као продукт праксе, и непрекидно изнова, јесу еманциповане у односу на

претходни циклус њиховог стварања као нешто новостворено у односу на претходно. Друштвена репродукција постоји, у оквиру ње и могућност новума.

У разматрању, а пре свега промишљању образовања, односно усвајању (или: представљању) доминантне или некада официјелне педагогије, не можемо се у данашњици запитати која је то јединствена метода учења, она која одговара за све. Да ли је то један теоријски дискурс, или бисмо пре могли рећи да постоји извесно „зујање дискурса“ око нас у простору(има) образовања? Још увек се нећемо бавити ближе питањима методике, али свакако је упитаност на месту – еклектички или синтетички приступ? (Дамјановић, 2008). Посматрајући ствари дискурзивно, кажемо да имамо читаву фамилију дискурса, али и не само дискурса, већ и наратива, који треба да задовоље потребе за учењем о комплексном свету данашњице, који се непрекидно и из часа у час вртоглаво усложњава. И, где год да се окренемо, коме год аутору да се осврнемо добијамо да постоји извесна политичка интенција, која усмерава и образовање, али за потребе идеологије те групације заступника. „Сваки образовни систем је политички начин да се одржава или мења присвајање дискурса, заједно са знањима и моћима које они носе“ (Фуко, 2007, 35), што потврђује налазе из студије (Бурдије & Пасерон, 2014) о друштвеној репродукцији и додаје „Коначно, шта је образовни систем ако не ритуализовање речи, квалификовање и учвршћивање улога за говорне субјекте, конституисање једне, барем дифузне, доктринарне групе, ако не расподела и присвајање дискурса са његовим моћима и знањима?“ (Фуко, 2007, 36). Из овога можемо закључити везу између дискурса и пракси, тако да између образовних дискурса и образовних пракси твори се један скуп структура, које би биле интересантне за проучавање са аспекта теорије о праксама, у овом случају образовним, онако како је то видео сам Бурдије (1999). Ако бисмо успели у томе да до те мере успоставимо аутономију образовног система, а као резултат изађе да је у потпуности разлучен од самог друштва, добили бисмо да у таквим околностима он и најбоље репродукује друштвену праксу, без утицаја споља. У тако створеним (замишљеним) условима врши се двострука репродукција – самог система образовања, али и друштвеног система (Бурдије & Пасерон, 2014, 211-222).

Аутор Фуко (2009) у предговору свога дела, каже да смо историјски посвећени стрпљивој изградњи *дискурса о дискурсима*, што у данашњици добија на значају. Можемо да кажемо да у светском комешању нема више нечега што бисмо могли назвати *mainstream*, неки правац према коме се управљамо или који опонашамо, или „начин“ на који радимо доминантно, онако како смо у претходним пасусима износили.

Постоји мноштво, различитост, плуралитет – истог, различитог, једнакости, другог, и опет мноштво тога. Дакле, слобода посматрања, делања, промишљања, размене. Није могуће издвојити ниједну универзалну педагогију, један дискурс, један наратив, који је доминантан или доминантно прихватљив и под „притиском“ смо, да прихватимо ово комешање и задовољење потреба субјеката, агенаса (агенсности), агената, хабутуса, сопства, структура, структура интеракција, идентитета, објеката, другог (другости), система диспозитива...; у образовању данас (етат-друштво, светско друштво) неопходно је креирати, осмишљавати процесе учења, тако да физиолошки процес јединке не буде ни на који начин угрожен у смислу доживљаја такве пресије, која би изазвала или могла да изазове низ нежељених ефеката у развоју субјекта. Једноставно речено, поштовање индивидуалности, потребе индивидуа, али и развојни приступ ученику јесу предиктори процеса образовања и основа данашње педагогије у њеној конкретној пракси. Потребна су нам таква *праксеолошка* знања, која за предмет имају „не само систем објективних односа којег поставља објективистички модус знања, већ и *дијалектичке* односе између тих објективних структура и структурираних *диспозиција* у којима се оне остварују и које теже да их репродукују, односно двоструки процес интериоризације спољашњости и екстериоризације унутрашњости“ (Burdije, 1999, 148). Субјект који учи, или субјект који пролази кроз образовање, није само особеност (до особењака) како се хоће да представи, већ субјект са осећајем сопства са потребом да се на аутентичан начин укључи у друштвену праксу или праксе и тако са осталим субјектима остварује. Уместо термина субјект можемо да адаптацијом употребимо било који од претходно наведених термина (агенс, хабитус, системи диспозиција...).

За образовни систем се успоставља захтев из друштвеног система, који се нужно пацификује, а то је да елиминише репресију, а да се контролише употреба дискурса, наратива, односно моћи која се тако дистрибуира; „ако је моћ, у ствари, отворен, више или мање координисан (и без сумње прилично рђаво координисан) сноп односа, онда је једини проблем да се усвоји матрица анализа, која омогућује аналитику односа моћи“ (Фуко, 2012, 179). Том „аналитиком односа моћи“ или, успешним управљањем *односима моћи* у оквиру образовања регулисао би се тзв. *сноп односа* или како смо раније назвали *структура интеракција*.

„Читањем ових редова ви истичете своју посвећеност образовању“ (Garner, 2009, 401), изванредан је почетак поглавља књиге о социологији, окренут образовању. С друге стране, има аутора који тврде да стицањем знања, стичемо и моћи, али и

обрнуто, провођење моћи, немогуће је без извесних знања, али тако се и ствара знање. Моћ и знање у тесној су повезаности и неодвојиви једно од другог (Фуко, 2012, 58)³. Отуда и образовање, које представља сву различитост начина стицања знања, има извесну повезаност са моћи. Истовремено, неопходно је сопство изграђивати, или поново изграђивати већ постојеће, тако да као субјект, агент, хабитус, систем диспозиција, задовољи све своје потребе и могућности које носи у себи. Заправо, неопходно је оспособити се да као субјект можемо да деламо и властитим технологијама сопства учествујемо у друштвеном животу. Тај нови облик хуманизма, управљања сопством, који подразумева технологије сопства представља опет један облик образовања, значајан у данашњици. Наведено бисмо уз помоћ аутора који су се бавили непосредно тиме могли да дефинишемо на следећи начин: „технологије сопства, које допуштају појединцима да остварују сопственим средствима или уз помоћ других, изван број операција на сопственим телима и душама, мислима, понашању и начину живљења, с циљем да се преобразе како би стекли извесно стање среће, чистоће, мудрости, савршенства или бесмртности“ (Фуко, 2014, 81). Наведено упућује на то да и сам појединац има веома активну улогу или могућност за веома активну улогу у изградњи сопства и првенствено проналажењу технологија којима могу да задовоље властите потребе и потребе за целовитом изградњом сопства које ће у савременом свету да резултује одговарајућим системом диспозиција или агенсношћу. Дакле, субјект или хабитус у друштвеној структури интеракција има сасвим јединствену позицију, коју му омогућује управо одговарајуће артикулисана технологија сопства. За ову технологију сопства одговорно је образовање, које спроводи друштво (било етат- или светско, микро- или макроокружење, породица, или која год инстанца образовања), али и све свесније сам појединац (субјект или хабитус). За позитивно конституисање сопства или поновно конституисање важно је што непрекидно „Постоје структурална питања која пролазе кроз праксу испитивања сопства сваке ноћи“ (Фуко, 2014, 99). Последње речено припада оним *вековечним*

³ То је уосталом тврдио и Френсис Бекон, изреченим „знање је моћ“, и планом за потчињавање и обуздавање природе како би она служила човеку. У сваком случају, знање *јесте* моћ, иако вероватно није само то. Знање о неком феномену могуће је остварити кроз рецимо поезију, или уметничку слику, али то је у односу на знање = моћ *некорисно* знање, субјективно знање. Међутим, и субјективно знање може бити извор моћи. Упознавање човека субјективно, кроз разговор може нам открити човека као особу у његовим навикама и особеностима. То директно не води овладавању човеком, али посредно може бити корисно ако се покуша манипулација њиме, као на пример ако желимо да му продамо нешто, трудићемо се да своју продају „персонализујемо“, прилагодимо њему као личности, а то онда значи да га морамо познавати као личност – што није могуће ако је упознајемо као „тип“, „класу“, „расу“. Значи, ипак је знање моћ, или макар може служити стицању или примени моћи.

питањима које истиче Достојевски или *weltanschauung*-у Крлеже или *комедијанту случају* Црњанског или *космичкој студени* Бранка Миљковића и заслужно је, свакако, за покретање света и активној улози у њему. Она се стиче образовањем, али свако има сопствени пут кроз њега, са јединственим скупом актера у окружењу и у авантури стицања знања или поседовања моћи.

Политички ставови о образовању веома се разликују у јавном простору. Они идеолошки варирају од тога „да свако дете добије минимум школовања одређене врсте“ (Фридман, 2012, 97), да родитељи ваучерским системом бирају школу за своје дете, што школе на изванредан начин излаже тржишту (нека врста меркантилистичког приступа), све до ставова о значајнијој интервенцији државе у процес школовања, али и образовања. Важно је истаћи да аутори уочавају разлике између школовања и образовања, али на посебан начин ови процеси су везани. Данас и у најлибералнијим државама света, које и јавно исказују идеолошку посвећеност овом друштвеном правцу, постоји сагласност о државној интервенцији у што ранијем стадијуму. „Смањење неједнакости међу децом захтева интегрисане и веома ране интервенције како би се осигурала безбедна средина, когнитиван развој, предшколско учење, правилна исхрана и здравствена заштита мале деце. Те интервенције треба да започну веома рано, стога што су тешке и много мање ефикасне када треба да коригују нешто у вези са дететом старим пет или шест година. Ако је развој детета рано инхибиран, последице могу да трају током целог живота и те особе и будућих генерација; последице по друштво могу да буду апсолутно огромне“ (Saks, 2014, 241). Државе ОЕЦД-а у оквиру ове организације имају веома развијене службе које се баве праћењем образовања, истраживањима у овој области, повезивањима са другим доменима живота и рада и предлозима одлука за политике образовања које би унапредиле квалитетан живот грађана. Ове сталне процедуре праћења и препорука инсистирају на доношењу одлука заснованих на доказима из истраживања, тако да се утисци појединаца или групација из академских кругова не могу узети за озбиљно уколико нису поткрепљени озбиљном научном методологијом у бекграунду дискурса. Свакако, као и у другим друштвеним сферама, поготово у образовању постоји, како је описано, право зујање дискурса, али то не значи да не постоје критеријуми за владе оних држава и друштава које су спремне за непрекидно унапређивање образовања. Грађанин развијених држава света јесте информисан о околностима свога живота и рада и има све могућности доступне за квалитетно и информисано доношење одлука о себи и свом окружењу; одговоран приступ за сопство и другог и предузетност, пре

свега социјална, јесу одлике овог субјекта или агенса данашњице. Државе које гледају у леђа развијенима или зависе од њих (тзв. уцењена друштва), покушавају да досегну стандарде који се непрекидно доносе и успоставља се једна тешка трка за достизање првенствено нивоа развијених, а онда и оног помераја који су они у међувремену остварили.

Разматрајући из аспекта културе, или посматрајући образовање у контексту културе, углавном полазимо од онога, или на начин како је то артикулисао један филозоф данашњице: „дезорганизоване масе глобалног капитализма више нису подељене у класе у класичном марксистичком смислу, тако да, иако је задатак још увек да се масе политички организују, то више не може бити урађено на некадашњи класно-партијски начин“ (Žižek, 2011, 305). Заправо, један од најважнијих појмова културе постаје питање *идентитета* или припадности одређеној, сасвим извесној друштвеној *групи*, која има своја *обележја*. Наравно, појединац, индивидуа, или назовимо је како год – субјект, агенс, систем диспозиција... припада истовремено различитим друштвеним групама, тако да успостављање идентитета јединке није тако једноставно. Препознајући лични, културни, национални, политички, мањински, групни или какав год идентитет у себи, појединац има задатак да успостави равнотежу сопства и да у друштву идентификује околности у којима испољава један од побројаних као доминантни. Свакако, образовање или школа имају задатак у зависности од тога у којој мери је сâмо друштво софистицирано, да афирмишу индивидуалност кроз припадајући му идентитет или фамилију идентитета, тако да се технологијама сопства, које су већ помињане, субјекат осећа афирмисано, хомеостатично, никако да запада у неке ситуације које бисмо могли назвати шизоидним, а то би значило развијати међусобно супротстављене идентитете у оквиру једне биолошке целине. Žižek (2011) тврди да ми јесмо извршили квалитативни пробој и да је историја дошла до свога краја, и да живимо у постисторијском друштву (Žižek, 2011, 304). Наведени аутор овде подвлачи неколико речи, али је од интереса схватити зашто је подвучена реч – *живимо*. Управо овде долази до изражаја то да ли одређено друштво које живи у данашњици то и схвата. А, ако то и схвата, онда пројектује своју динамику и кроз образовање у коме субјекти добијају прилику да несметано развијају сопство или комбинацију идентитета, кроз бурдијеовске друштвене структуре интеракција, а на задовољство свих. Иако данашња школа, или прецизније речено развијена друштва света, теже да успоставе неко неантагонистичко друштво, у коме има места за све идентитете, за све групе, заједнице, тако да постоји суживот, као у скупу субјеката који је подељен неком

релацијом еквиваленције на класе еквиваленције и чине сви једну целину (у крајњем, и ма шта то значило за оне који нису математичари), имамо сасвим примерено тврђење које каже да „Неантагонистичко Друштво овде је глобални 'контејнер' у којем има довољно простора за свеколико мноштво културних заједница, животних стилова, религија и сексуалних оријентација“ (Žižek, 2008, 381). Субјект и Други, сада живе у једном друштву. Субјект који током образовања, треба да прихвати постојање Другог и да уз њега несметано живи, као и овај у својој улози субјекта, свакако представљају културни контекст данашњице у образовању. Образовање заплуснуто таласом различитости, покушава да испоштује успостављање културног оквира или контекста у коме фукоовски исказано дискурси зује тако да се какофонија мноштва преводи у хармонију друштва заједништва и пацификованих друштвених структура интеракција. Отуда за образовање најтежа улога од када је света и века, да у високософистицираном друштву, у коме се човек развојем природних наука отиснуо у пространства Космоса са једне стране, и уронио у наносвет Микрокосмоса са друге стране, а друштвена наука трага за сопственом методологијом (Flivbjerg, 2012), дакле, да у описаним условима обезбеди стабилно друштво, чије праксе резултују неантагонистичким исходима, тако што супротности природно коегзистирају. Овако изложено, заиста је сиже данашњице, али и својеврсни оксиморон у коме свет обитава, као систем интерактивних структура, које се међусобно разграђују и поново стварају у светској стварности (ма колико димензионално је посматрали или успели да обухватимо). У своме есеју о космополитизму и мондијализму француски писац Bruckner (2005), полемише индиректно о идентитетима, односу сопства и другог и у једној конкретизацији каже: „након што смо били слободни захваљујући нацијама, одсада бисмо требали бити слободни унаточ њима“ (Bruckner, 2005, 13), а на другом месту додаје да свако „може постати другачији него што јест, и даље остајући свој, јер најважније је да удаљеност међу културама не спријечи однос, као и да однос не уништи удаљеност. Како би свако удаљено тло једног дана имало за нас топлину роднога тла“ (Bruckner, 2005, 53). Светска стварност тако опстаје упркос захтевима за високом префињеношћу у препознавању и испољавању мноштва идентитета у заједништву различитости, упркос сили процеса глобализације у коме свет изнова постаје Нови Вавилон, тако да учи да живи у сопственим противречностима, онако како је то исказао сам Bruckner (2005). Субјект стварности, живи са својим идентитетима, сâм сложен и рефлексиван, у Новом Вавилону, са другим субјектима у интеракцији, подразумеваних и свих супротности, које кореспондирају. Ствара се култура која је заснована на парадигми плурализма,

затим захтев мултикултурализма треба да успостави извесну интеркултуралност. На крају се то јединство мноштва претвара у мноштво јединстава, мноштво јединствених култура које обитавају у једном друштву.

Када смо у теми образовања, можемо да кажемо да оно треба да ослободи човека и пружи му могућност изградње критичког духа, формирања аутономног мишљења, ослобађа га и претходних социјалних веза, тако што се увезује у нове интеракције са другим појединцима у новом окружењу. Појединац током школовања, шире, образујући се, треба да се формира у појединца слободног и одговорног у друштву, тако да сâм може да формира и развија сопствени идентитет(е), негујући и особене животне стилове, онако како сазрева (Semprini, 2004, 37). Из сфере културе јављају се посебни захтеви за афирмацију различитих друштвених група у оквиру којих се развијају идентитети, тако да настају читави научни правци у оквиру проучавања културе, заправо студија културе. Комуникацијска парадигма, мултикултурна епистемологија, изучавање приватног и јавног простора, настанак социокултурног простора од посебног интереса за читав један корпус теорија и пракси у оквиру изучавања културе (Semprini, 2004). Отуда и реформа образовних програма у школама, као и приступ образовању маргинализованим групама, вулнерабилних категорија становништва, постаје друштвена тема од примарног значаја. Развијена друштва почивају на принципима успостављеним или који су индуковани као последица деловања покрета, чија је иницијатива у научним круговима и широј академској заједници повезаној са студијама културе. Овај активизам се прелио у простор образовања, односно, повезао је образовање и културу у јединствен простор учења, тако да је социјална димензија школе постала израженија. Понекад се поставља питање, да ли образовање треба да почива на академским знањима или на успостављању социјалне интелигенције (данас можемо да кажемо и културне интелигенције) као важном чиниоцу за живот у савременом свету. У разумевању ових културалних питања ствара се велики јаз између развијених и друштава у развоју, који се непрекидно покушава да смањи стварањем престижних заједница друштава (водећих друштава у свету, нпр. САД, ЕУ), за чије чланство је неопходно испунити извесне услове. Ова друштва доносе одлуке на светском нивоу, док остали покушавају да се укључе тако што непрекидно испуњавају нове услове глобализоване економске трке сустижући или губећи корак у усковитланој стварности светских околности, односа моћи. Данашњи човек постаје *јединствени субјекат културе*, који покушава да разуме „свет који се мења више него икада у прошлости“ (Dolo, 2000, 123). „Дуги ход

културе кроз људску мисао“ довео је до тога да она подразумева разноврсност, промоцију личности, многоструку суштину насупрот технократске и једнообразне цивилизације (Dolo, 2000, 58 и 121). „Педагогија никад није безазлена. Она је медиј који носи властиту поруку“ (Bruner, 2000,74), те можемо да просудимо од какве је важности образовање и дискурси који њиме провејавају у име званичне педагогије и у служби струјања мноштва култура, различитости идентитета и припадности групама које се крећу од периферије ка центру друштва и обрнуто. Маргинализовани и вулнерабилни само су једна од категорија или група које се боре за укључивање у друштвене токове, који треба да им омогуће равноправно учествовање у доношењу одлука, све до транснационалних околности разматрања. Управо образовање треба да омогући да ови канали комуникације прораде, тако што ће својим деловањем извршити општу еманципацију друштва. Али, остаје питање свих питања. Да ли је могуће превазићи друштвену репродукцију, онако како је осветљена и описана у студији (Burdije & Paseron, 2014)? Да ли се може успоставити теорија о пракси, тако да се може установити друштво, које није репродуковано из свих неједнакости и супротности претходног? Одговори на ова иницијална питања, уз нову методологију друштвено-хуманистичког поља истраживања, омогућили би предвидљиву будућност друштва, и лакше управљиво друштво.

Образовањем би требало да се развија целина људског бића, не само његове академске способности. Главна улога наставника јесте да свако дете испољи своју индивидуалност и у том смислу процес образовања јесте процес самореализације (Robinson, 2011, 179). Са друге стране, оно што стварамо у заједници јесте наша култура, а стваралаштво и култура јесу основа и потка људског разумевања (Robinson, 2011, 198). Дакле, културом посредујемо као субјекти и превазилазимо своје биолошко биће; у процесу образовања или енкултурације, која је на извешан начин његов део (или би тако требало да буде), постајемо идентитетски агенти који размењују у једном задатом животном и културном контексту на који можемо да утичемо (у извесној мери) и који можемо да мењамо у синергији, као заједница.

М. Nusbaum (2012) у својој књизи излаже о важности образовања за демократско друштво, односно, о важности развоја хуманистике и изражава своју забринутост када у самом уводном делу наводи реченицу да „Будућност демократија је неизвесна“ (Nusbaum, 2012, 12). Она заправо сматра да није добар онај образовни систем од кога корист имају само богате елите и тврди да расподела квалитетног образовања јесте један од круцијалних проблема модерних демократија (Nusbaum, 2012, 21). Избор

педагогије диктира (или: одређује) промене у друштву које имамо интенцију да извршимо посредством образовног система. Свакако, у демократским друштвима постоји једна општа партиципација у доношењу одлука о образовним политикама сходно ви(о)ђењу политичких елита куда друштво треба да се креће и у којој мери сви треба да учествују. У студији (Burdije & Paseron, 2014) јасно је исказано како функционише образовни систем у односу на друштво, како се друштво репродукује посредством образовног система и о њиховом узајамном утицају уопште. Данас постоји читава армија научника-истраживача који се баве образовањем, и који у оквиру међународних пројеката, али и различитих универзитетских пројеката проучавају образовање у контексту демократских друштава и како доносити ваљане одлуке и спроводити делотворне политике. У томе посебно предњаче државе чланице ОЕЦД-а, али и оне које се прикључују њеним међународним пројектима испитивања образовања и образовних система и доношења препорука. Наравно, и ове активности имају својих заговорника и оних у противставу, тако да се о овим питањима води веома оштра академска и јавна полемика. „Образовање интелигентног светског грађанства изгледа тако захтевно да падамо у искушење да одустанемо на самом почетку, с образложењем да је то немогуће постићи и да би требало да се држимо сопствених нација. Наравно, чак и за разумевање сопствених нација неопходно је проучавање група од којих се она састоји...“ (Nusbaum, 2012, 98). Али, ауторка Nusbaum (2012) инсистира на томе да је одабир метода рада један од пресудних – да ли ће се наставни садржаји учити напамет, репродуковати, бити конкретни или апстрактни, развијати критичко мишљење, пунити емоционалне и уметничке капацитете деце, стварати на часу, тако да час буде оптимум учења - наведено директно утиче на развој социјалних компетенција будућих грађана и демократије.

Један од најмоћнијих инструмената за реализацију друштвене репродукције и одржавање моћи појединих друштвених група јесте управо курикулум преко кога се спроводе или боље, имплементирају владајуће идеологије. Наиме, „отворени курикулум, скривени курикулум и њихове историје повезани су са категоријама које олако користимо да бисмо дали значење нашим свакодневним активностима, а које су с друге стране везане за друштвене интересе које оправдавају“ (Apple, 2012, 325). Наведено упућује на то да свакодневно реализујемо и залажемо се несвесни да подржавамо различите друштвене хегемоније, кроз имплицитну или фолк педагогију, својеврсне механизме, који не унапређују друштво и не чине га мање антагонистичким. Стога је активно грађанство од пресудног значаја за демократије које претендујемо као

пожељне, али до њега се долази учењем које је ослобођено идеологизованог курикулума. Пут кроз образовни систем и школовање јесте пун напетости, кроз школу и образовање рефлектују се друштвене интенције; поготово у оквиру елитистичких приступа, хијерархизације, долази се до подела и видљивости раслојавања друштва преласком из нижих у више нивое школовања (Gevirc & Krib, 2012). Неопходно је да школа негује неки основни скуп вредности који је заједнички за све, тако да је сви представници друштва доживљавају као своју, тј. као место где се осећају задовољно. Затим, децентрализација, неговање различитости и индивидуализма, јасно регулисана и стандардизованих процеса, јесте школа о којој се може дискутовати на основу јасних параметара и доказа шта је добро, шта не ваља, зашто је треба мењати, и како јој дати подршку за промену (Gevirc & Krib, 2012, 271).

Помирење захтева у вези са квалитетним, одговарајућим или образовањем које даје опште задовољство, било би исказано на следећи начин: „Грађанско образовање у либералном мултикултурном друштву треба да стабилизује лични, друштвени и политички хабитат који погодује одржању и репродукцији мноштва групних и културних формација и подупире многе различите концепције доброг живота“ (Feinberg, 2012, 254). Исти аутор у даљем тексту каже да „либерализам треба да избегава промовисање једног скупа вредности на рачун других, па децу треба да учи о различитим начинима живота који су им доступни“ (Feinberg, 2012, 254).

Читањем последњег пасуса и прегледом текста који му претходи, можемо да помислимо да многи аутори заступају различите ставове о школи каква нам је неопходна. Дубљом анализом, закључујемо да то није тако, већ различитим погледима и инструментима које су користили дошавши до сопствених закључака, заправо омогућавају да се што боље изоштри слика о образовању у данашњици, исто и о школи као њеном непосредном носиоцу. Видимо да одабир педагогије или препоручена педагогија од стране државе, значајно утиче на друштвене токове, а сама друштвена репродукција, у дијалектичкој је вези са образовним системом.

Развијене државе света одлучиле су да прате улагања својих влада у образовање и мере исходе, тако да одлуке које доносе буду одговорније и могу да се надгледају процеси, односно да се управља процесима на основу неких параметара над којима постоји контрола. Као кључни однос посматра се *људски и друштвени капитал*, односно како политике образовања утичу да се он увећава, а као последицу имамо развој успешнијих демократских заједница и допринос социјалној кохезији. Поред *личног благостања* и одржавања *друштвене кохезије*, учење доприноси уколико

држава рационално прати процес образовања које се не дешава само у школи. Важни елементи *квалитативне димензије искустава у учењу* чије праћење доприноси јесу везани за *контекст образовања, садржај образовања, етос* околине у којој се одвија образовање (OECD, 2010a, 13). Образовање је јавно добро, и отуда посебан интерес државе за њега, али истакнуто место има појединац у контексту. „Индивидуализација и глобализација су два шира тренда која стварају све већу разноликост вредности у многим друштвима“ (OECD, 2010a, 25) па је јавна брига од посебне важности у смислу да се повећа тзв. *грађанска и друштвена ангажованост* која би посебно допринела управо развоју демократије и социјалне кохезије. Онда имамо, с обзиром на основну разлику између људског и друштвеног капитала која је у томе „да се први усредсређује на појединце, а други на односе између њих и на мреже које образују“ (OECD, 2010a, 43), да се посебна пажња у политикама образовања посвећује управо учењу које развија компетенције појединца да делује у оквиру друштвених структура интеракција и да у различитим тим структурама има афирмативан утицај. Школско учење, учење ван школе, у оквиру различитих инстанци образовања (породица, црква, вршњаци, телевизија, школа, хоби-групе...), повезивање искустава са оним што се учи у оквиру било које од инстанци образовања, *материја* која се предаје у школи, *начин* предавања, школско окружење, разредно и одељењско окружење, начин посредовања у групама у којима се појединац креће у оквиру инстанци образовања – дакле, све побројано има утицаја на исходе учења (OECD, 2010a, 67-69). Различите студије ОЕЦД-а, базиране на опсежним истраживањима, препоручују управо да се од најранијег узраста појединци упућују на асоцијативност, култивисано посредовање, грађанску партиципацију, развој сопства, једноставно, на живот у једном сложеном и софистицираном свету, који треба да буде пацификован и функционалан у прожимању различитости и усмереном метежу мноштва. Хабитус, хабитат, системи диспозиција, агенс, агенсност, субјекат, појединац, јединка, биолошки ентитет, како год, потребно је да се образовањем које је праћено варијаблама, индикаторима и испуњеношћу одређених стандарда, води тако да ефикасно управља сопством, истовремено успешно кореспондира са другим и другима, да формира различите мреже и структуре интеракције, да производи праксе које исходе личном благодати и друштвеној добробити; праксе које могу да коригују друштвену репродукцију, коју описују Burdije и Paseron (Burdije & Paseron, 2014).

„Када образовни систем повеже младе људе различитих способности, ученици постижу више, а друштвено порекло иде ка томе да буде фактор од мањег значаја“

(OECD, 2010b, 65) налаз је са интернационалног PISA-тестирања. Ова тестирања, која се реализују у одређеном циклусу дају значајне податке о стању у образовним системима и омогућују државама које су своје системе подвргле овим увидима да доносе одговарајуће одлуке, на основу јасно исказаних података. Можемо без зазора да кажемо да одређене образовне праксе могу да мењају стварност у смислу друштвене репродукције, да се она одвија на пожељнији начин за друштво, тако да постоји излаз из зачараног круга сиромаштва, који поједине друштвене групе вуче ка маргини. То, како ће се и *шта* учити, од пресудног је значаја за наше животе, али и за друштво у коме живимо. Тежимо да будемо богатији, а то значи да имамо боље болнице и школе и да око нас не гледамо како људи не могу да приступе образовању и здравству и да друштво мање издваја за социјалу као палијативне мере, већ да инвестира и предупредује кроз подизање образовног и културног статуса грађана (OECD, 2010b, 38). Школе се мењају и треба да одговоре на потребе и оних ученика који немају академских наклоности, усложњавају се захтеви за наставничким компетенцијама, прелазак из једног у други ниво школовања треба да тече глатко, појачава се интеракција унутар система, поготово између различитих култура и порекла, ученици преузимају контролу и одговорност за учење, читаво друштво непрекидно је упућено на неопходност учења (OECD, 2010b). Учење се представља као вредност по себи и *интринзична мотивација* преузима примат у друштву, које више није компетитивно, већ конкурентно, али сараднички настројено и тимски организовано. Кључни појам више није *настава*, већ њена компонента *учење* и тежи се томе да она буде оптимум учења. *Начини* како се дошло до одређеног знања су примарни, јер они дефинишу педагошке интенције друштва, али и приступ друштва у целини у смислу решавања проблема заједнице на различитим нивоима (група, породице, институција...). Улога наставника од пресудног је значаја, не у оном романтичном и емотивном облику како је то бивало у историји педагогије, већ као професионалац дидактичар, који познаје сегменте струке тако да може да одговори општем изазову процеса глобализације и индивидуалном развоју унутар заједница, кроз различите групе којима припадамо и негујући сложен приступ развоју идентитета субјекта, као и осећаја припадности и сигурности. Путање кроз образовни систем, филтери кроз које ученици пролазе, било селекцијом или избором, јесу такве да ученицима мора да буде обезбеђена једнакоправност и праведност, односно да субјект може да се током образовања актуелизује, изрази себе, управља и коначно самостално креира своје сопство. Дакле, сви треба да можемо да приступимо образовању, да томе нема препрека било које

врсте, али и да се околности учења тако прилагоде да сваки субјект доживи ону метаморфозу која је у складу са развојем особених система диспозиција, али учествујући у друштвеним структурама интеракције. Елитизам је искључен јер директно генерише раслојавање друштва, групе за учење су хетерогене и тако успешније, што су све налази студија насталих након различитих међународних испитивања и тестирања (ОЕСД, 2010с). Држава организује систем тако да свака инстанца исте врсте (нпр. основне школе, обавезно образовање, опште образовање) пружа исти квалитет образовних услуга; пакет образовних услуга треба да буде такав да обезбеди детету где год живело на њеној територији такве услове за учење и развој, који га не би доводили у неповољнију околност у односу на вршњака у неком другом делу државе. У ту сврху осмишљавају се системи стандардизације за образовне процесе, за знања која ученици треба да стекну, школске процесе, процесе учења, начине стицања знања. Управо описани приступи произашли из истраживања процеса и ученичких знања (не само академских знања ученика, већ општи контекст у коме су она стицана) јесу основа образовних политика развијених земаља, које креирају светску економију и оних које иду за њима у намери да их сустигну. Механизми праћења и истраживања су толико развијени, тако да постоје научне школе које могу својим инструментима да детектују појединачни допринос школе, разреда, одељења, окружења, наставника (породице, социо економског стања). Раздвајањем, разлучивањем, разматрањем ових елемената вреднује се систем образовања у целости, тако што се прво прикупе подаци из целог система. На националним нивоима се састављају извештаји о стању образовања и препоруке за образовне политике и приоритети у том оквиру. Јасно је да је неопходна висока професионалност актера који су на различитим инастанцама образовања, тако да државе имају могућност да уозбиље приступе систему одлучивања и спровођења донетих одлука. Очигледно да постоји могућност пројектовања и успостављања таквих образовних пракси, које у микро-нивоу јесу аутентичне, али на макро-нивоу дају резултате у супериорности појединих система, али и друштава у смислу склоности да се хватају у коштац са изазовима времена и унапређивања свакодневног живота ка друштву добробити и благостања инструментима *теорије праксе*.

Коначно, у завршници разматрања и представљања околности образовања, како у националним или транснационалним оквирима, заједно са локалним потребама и аутентичностима, неопходно је истаћи и околности трансформације саме школе, дидактике и посебних дидактика у околностима струјања или како рекосмо раније,

зујања дискурса. Дидактика, никако није изолована, без промена које су се десиле под утицајем друштва, али и изнутра научним развојем. Под патронатом педагогије, захтевима развоја друштва дидактика је мењала технологију процеса учења у школи, индуковано различитим приступима.

Ако поглед прелети преко величина попут Сократа, Коменског, Канта, Хегела, Маркса, Фројда, Хабермаса и усмери се на данашње или скорашње теорије дидактике, неопходно је само поменути неколико праваца у којима се развијала у времену непосредно око нас. *Теорија образовања у оквиру критичко-конструктивне науке о васпитању*, *Теорија поучавања*, *Кибернетичко-информацијска теорија*, *Теорија курикулума*, *Критичка теорија наставне комуникације*, само су неки од понуђених одговора који би требало да друштву олакшају савладавање изазова учења и организованог школског учења. „Уобичајени проблеми наше школске свакодневице имају своју теоријску тежину“, али дидактика нити може да реши велике проблеме човечанства, нити може да да готове рецепте за успешно поучавање, по чијим алгоритмима би било могуће само поступити (Gudjons, Teske i Winkel, 1994, 8). Када ауторка М. Nusbaum (2012) у својој књизи недвосмислено и јасно каже да сваки ученик „мора бити третиран као особа чије су интелектуалне моћи у развоју, и од које се очекује да активно и креативно допринесе разговору на часу“ (Nusbaum, 2012, 70), то она уводи у видокруг један важан задатак за образовање данашњице – *ученичку партиципацију*. Ученичка партиципација уз ученичко учешће у управљању и руковођењу школом, учешћу у раду ученичких представничких тела у школи, учење у оквиру школског курикулума о демократском друштву, подразумева и учешће ученика током процеса учења – планирања, припремања, реализације, јер се све време о њему (или: њима) ради. Дакле, ученик је највише заинтересован за процес учења у школи јер је он предметом образовних интенција, али тако да он буде субјект тог процеса, никако објект који треба, у једном линеарном процесу, да у датом тренутку репродукује одређена знања. У том смислу „глас“ ученика је важан, јер је неопходно да се процес школског учења прилагоди сваком учеснику, тако да он може да добије од њега оптимум. Али, о овоме ћемо касније изложити више.

Овај одељак окончаћемо извесним напоменама, заправо усмерењима која би околности образовања изложила светлостима рефлектора у смислу интенција или токова различитих дискурса у условима њиховог зујања (фукоовски речено). Дакле, образовну праксу запљускују таласи различитих животних стилова, културног мноштва, идентитетски захтеви за успостављањем и развојем унутар инстанци

образовања, афирмација вулнерабилних група и маргинализованих категорија становништва, али и инсистирање на поштовању различитости потреба сваког субјекта који приступа образовању или је у систему посредовања образовних комуникација. На све ове захтеве „покушава се одговорити постмодерним мишљењем у дидактици – широким спектром инвентара дидактичког делања“ (Goјkov, 2002, 143). Отвара се ново питање и проблем за праксу и теорију дидактике, а то је контрола произвољности и који еклектицизам наставних или којих већ приступа учењу јесте филозофски близак истини, а посебно је питање арбитрарности наведеног. Метапозиција у односу на школске процесе у проблему је при евалуацији тих процеса школског учења и процеса школе у целини, јер потребно је да да извесна усмерења за делотворан развој пракси. Сада и поједини делови процеса наставе јесу у проблему, јер се поставља и питање вредновања и оцењивања ученика. Успоставља се једна „дидактичка сцена“, која треба да демонстрира „могућност комбиновања различитих докимастичких поступака и ширих приступа оцењивању“ (Goјkov, 2002, 145), присуство теоријског плурализма у условима анархистичке епистемологије. Ово значи да се губе основне парадигматске оријентације и долази до „приближавања дидактичких теорија“ (Goјkov, 2002, 136). Постмодерни утицај на образовање је све јачи, тако да имамо различите ефекте на различите образовне инстанце. Наставници и ученици сада треба да уче заједно, укида се хијерархизован однос, укидају се ауторитети у смислу хетерономности, и ради се на развоју аутономности ауторитета детета/ученика. Живот у демократском друштву, учешће у њему, стварање социјалне кохезије јесу усмерења за образовање. „Сматра се да треба да се стварају структуре које ће ученицима пружити подршку која им је потребна и која ће им омогућити да направе значајан импут и имају неопходну контролу над учењем“ (Goјkov, 2006, 211). У условима друштвене репродукције образовањем, конструишу се праксе које треба да воде ка што већој еманципацији субјеката, идентитета или група, тако да се у свеукупности друштвеног простора, образовање и култура стапају као јединствен простор делања. Ј. Habermas (2002) у једном тексту објашњава историјски развој филозофије и науке и каже да од једног тренутка „више се није могла одржати *класична надређеност теорије у односу на праксу*, јер је њихова међусобна зависност постајала све јаснија. Смештање теоријских достигнућа у практичне контексте њиховог настанка и примене, доводи до свести значај свакодневних склопова делања и комуникације“ (Habermas, 2002, 44). Обрнуто, сама пракса изискује од теорије да објасни све сложенију стварност и комплексност

проблема друштва, тако да и друштвене науке потребују методологију која може да одговори захтевима објашњавајуће и предвиђајуће теорије (Flivbjerg, 2012, 18).

Изложено, треба да представља слику или мњење (представу) о образовању, онако како се у литератури, у научним супротстављањима, али и стварности праксе дискутује, разуме и промишља. Проблеми наставе, учења, друштва, демократије у сасвим су извесној повезаности; инстанце образовања веома сложено функционишу из разлога што су актери све више свесни својих поступака и значења посредовања, тако да савремени простор образовања постаје све усковитланији. И савремена школа, која је још увек кичма образовних система у етат-друштвима, под сталним је притиском промена. „Неки кажу да је садашњи школски програм бесмислени остатак прошлости“ и зашто се не би укинули данашњи наставни предмети и настава „организовала према одређеним друштвеним проблемима, према појединим периодима људског живота, или према најважнијим технолошким достигнућима прошлости и будућности. А постоје и друге могућности“ (Todorović, 1999, 270). „Непропусне преграде“ које су успостављене унутар саме школе, неопходно је уклонити и успоставити школу као „целину процеса“, тако да функционисање система школе буде подржано учењем свих актера о јединственом свету у коме живимо, о коме промишљамо и који разумемо. Локални ниво, национални ниво, породично окружење или која год инстанца образовања, треба да буде укључена, тако да и она доприноси, али и од тога има ефеката, за комфорније и здравије живљење и одговорно доношење одлука у друштву (појединаца о личним проблемима, али и друштва ин тото).

УЧЕШЋЕ УЧЕНИКА У ПРОЦЕСУ НАСТАВЕ И УЧЕЊА – УЧЕНИЧКА ПАРТИЦИПАЦИЈА

Конвенција о правима детета својим члановима бр. 12 (тачка 1), 13 (тачка 1), 15 (тачка 1), директно признаје право детета на слободу мишљења у стварима које га се тичу, слободу изражавања, али и право на слободу удруживања. Дете има право и на квалитетно образовање и учешће у животу заједнице (чл. 29, 30 и 31), сходно својим интересовањима. Ова права се подразумевају и за децу са сметњама у развоју (чл. 23, тачке 1 и 2).

Ако се дете посматра као субјект сопственог развоја, онда *Конвенција о праву детета*, са аспекта партиципације и еманципације, упућује на то да је неопходно уважавати његов развој и у односу на ниво развоја оспособљавати га да доноси одговарајуће одлуке које су у директној вези са њим самим, те је неопходно да државе обезбеђују поштовање ових права (Vranješević, 2006).

Државе потписнице *Конвенције* треба да унапређују права која су у њој описана. Један од инструмената за унапређивање и остваривање ученичких права јесте садржан у *ученичкој партиципацији* или *учешћу ученика* у школском животу у најширем. То подразумева учешће у доношењу одлука које су важне за самог појединца, али и за заједницу којој појединац припада (Lalović, 2009).

У овако широко постављеном одређењу *ученичке партиципације*, могуће је разврстати у више облика (*ученичке*) *партиципације*, међусобно повезаних, зависних, допуњивих, који утичу један на други. Партиципација омогућава „видљивост деце“, да се чује њихов „глас“, афирмише њихова специфична мишљења и искуства, чини их релевантним, оспособљава их да доносе *информисане одлуке*, тако да се промовише најбољи интерес детета, његов развој, стицање и унапређивање компетенција кроз конкретне активности (Vranješević, 2006). Овако исказан став одлично осликава претходно указану испреплетаност различитих облика партиципације ученика. Од доношења одлука, преко организовања различитих активности, до предлагања решења која се односе директно на сам процес учења. Уколико бисмо хтели и могли да фино одвојимо различите облике ученичке партиципације и побројимо их, то би било:

- (1) Учесће ученика у доношењу одлука у органима школе,

- (2) Учешће у управљању⁴ процесом учења,
- (3) Учешће у управљању школским догађајима,
- (4) Учешће ученика у раду ученичког представничког тела у оквиру школе,
- (5) Учење о учешћу кроз наставни предмет из области образовања и васпитања за живот у грађанском и цивилном друштву.

Даље, директно ћемо се бавити само ученичком партиципацијом која подразумева *учешће у управљању процесом учења*.

Полазећи од става да је настава „најорганизованији и најсистематичнији начин стицања знања па је, у дефиницији, наглашена њена планска организованост ради разлучивања од ненамерног и спорадичног учења тако честог у свакодневној људској активности“ (Вилотијевић, 1999, 84), произлази и функција наставника да одговарајућим наставним садржајима и њиховим аранжирањем прилагоди и олакша процес учења. Истовремено, сматрајући да је настава или било која наставна активност, заснована као заједнички акт учесника процеса (наставника и ученика у најужем) и њиховом међусобном уважавању, многи аутори, смештајући их у шири васпитно-образовни процес, сматрају да су њени основни делови „ДОГОВОР, РЕАЛИЗАЦИЈА и ЕВАЛУАЦИЈА“ (Bognar & Matijević, 2005). Из претходна два става, који упућују на договор актера образовно – васпитног процеса, произлази и учешће ученика у планирању и припремању наставе, односно, учења. Истовремено, широко посматрано „демократско друштво има више разлога да се интересује за планско и систематско васпитање од осталих заједница. Опште је познато да је демократија одана идеји васпитања“ (Djui, 1966, 64).

Brooker и Mcdonald (Brooker & Mcdonald, 1999) усмеравају пажњу на то да наставни планови постоје да би служили интересима оних који уче, али супротно томе улога им је маргинализована и глас им се не чује током процеса израде. Исто важи када се пренесе и на ниво школе – ученици ретко учествују у осмишљавању школских програма. Arnot и Reay (Arnot & Reay, 2007) разматрали су кроз социологију педагогије на који начин различите педагогије су у релацији са „гласом ученика“ и типом комуникације у њој. Зато је важно да се у оквиру саме школе пронађу начини како да „глас ученика“ буде уважен од стране педагогије те исте школе. Школски програм ће имати ноту демократског уколико је настао као резултат много веће сарадње у одређивању извора и прилагођавању знања (Beane, 2002), односно

⁴ Под управљањем се сматра све оно што управљање подразумева – планирање, организовање, реализација, контрола, али и структура и ресурси који се ангажују (Omerbegović-Bijelović, 1998, 7).

наставници и ученици на основу одређене научне дисциплине сачињавају школски програм за одговарајући наставни предмет као заједнички подухват (Bourne, 2004), чиме се стварају почетни услови да и поучавање и учење буде природно и синергијски ефективно. Док разматрамо учешће ученика у управљању процесом учења, школског учења (које је оптимум процеса наставе), у току саме реализације неопходно је обезбедити ученичку пажњу, зеинтересованост и активност. Наставник треба да осмишљава такве активности којима је постигнута равнотежа између њиховог „образовног потенцијала“ и „степенa учешћа ученика“. Једновремено, наставници осмишљавањем процеса учења поред пројектованих образовних циљева учења (везаних за одређене садржаје или предмет учења) треба да подстичу и способност учења, организацијска умећа, али и развој концентрације, мишљење је Kyriacou-a (2001). Rudduck и Flutter (Rudduck & Flutter, 1998) закључују да ученичка партиципација не треба да резултира само академским знањима, већ да активности које ученици спроводе током наставе буду повезане са њиховим свакодневним животом и у оквиру међусобне размене (интерактивност учења).

Једна од ставки из делокруга ученичког учешћа у области управљања учењем јесте израда индивидуалног плана учења од стране сваког ученика. Наиме, сваки ученик прво уз помоћ наставника, а касније самостално израђује сопствени план учења. Ово је пример партиципације у управљању сопственим процесом учења и реализује се постепено од првог организованог учења уз помоћ наставника као партнера (сарадника), до тренутка када овладава сопственим стратегијама делотворног учења и вреднује их тако да доноси одлуке о избору најефектнијег и најефикаснијег метода, садржаја и ресурса.

Rudduck и Flutter (2000) сматрају да је унутар школе као структурисане јединице редослед активности којима се граде прилике за ученичку партиципацију од посебне важности. Пажљиве припреме и пажљиво стварање организационе климе у којој се и наставници осећају пријатно узрокују стваралачки рад у свим областима школских процеса. Довођење ученика у позицију да има партиципативну (активну) улогу у процесу сопственог учења јесте неопходност процеса и претпоставка је за сложеније процесе у вишем нивоу квалитета образовања који се испоручује на нивоу школе.

Активности које се изводе у групној интеракцији у конкретној средини, важне су за ученика, јер „биће које је повезано са другим бићима не може се бавити неком делатношћу не обраћајући пажњу на активности других. Јер оне су неопходни услов остварења његових тежњи“ (Djui, 1966, 13).

Промене које би требало да настану у школи увођењем ученичке партиципације не могу да се догоде као резултат „инцидента“, „добре воље“ или као последица имплементације неког пројекта, већ захтевају промишљен и целисходан рад унутар школе стварањем нових структура, активности и посредовања између актера школског живота (Watson & Fullan, 1992). Свакако да школе као аутономни субјекти би требало да могу да ово саме реализују или уз подршку са стране тако да је подстицај са националног нивоа од стране доносилаца одлука у оквиру образовних политика, али и сагласност доносилаца политичких одлука уопште, више него неопходна. Само формално увођење ученичких парламената неће допринети унапређењу пракси школа, што сугерише и Alderson (2000), већ тај облик партиципације треба да буде повезан и међусобно поспешен са осталим облицима ученичке партиципације које је могуће сврсисходно развијати у школи кроз наставне процесе (као међупредметна повезаност или у оквиру конкретног предмета), али и ваннаставне активности школе и свеукупности школског живота – школе као целине процеса (Прилог 1 – Један пример – Школа са онтолошком грешком).

МИШЉЕЊЕ – ОД ФИЛОЗОФИЈЕ ДО ПСИХОЛОГИЈЕ

Код или у човека, *мишљење* представља једну од функција организма. Људски организам јесте целина и сматрамо да је свестан (у стању свести), уколико су му очуване виталне функције мозга, а једна од њих управо је исказана – функција *мишљења*. Функција мишљења човеку омогућава да се бави собом и космосом као јединственом и недељивом целином, како у смислу природне датости, тако и кроз хуманистику, односно друштво у коме обитава насупрот остатку свемира.

Иако Фројд мишљење третира детерминистички (Frojd, 2006, 96), Дарвин посматра са становишта процеса еволуције, фрактално и појединачно, многи су се бавили на различите начине и различито позиционирали спрам ове категорије која у потпуности означава човека и издваја га од пуке биолошке суштине и даје могућност интервенције у универзуму (Darvin, 2009, 29). Уз ово уопштено одређивање човека мишљењем, и појединачно се од субјекта до субјекта управо мишљењем стварају разлике и диференцирани погледи на сопство и другост.

Разматрајући Хајдегерове ставове и сагледавање мишљења, Ričard Rorti (1992) каже да „мишљење” обично разликујемо од његове наводно 'неодговорне' алтернативе – мистицизма, уметности, прављења митова – и то тако што идентификујемо 'мишљење' с аргументативном ригорозношћу“ (Rorti, 1992, 142). Претходно, у истом поглављу, Rorti (1992) уводи у текст, тако што прави дистинкцију између филозофа и научника и каже да потоњи због прецизности (или: строгости), покушава да мишљење очисти од мистицизма, поезије и разних инспирација. Интересантно, полемише са ставом Хајдегера у коме он сматра да би требало направити отклон од историјски формиране представе која даје „техничку интерпретацију мишљења“ (Rorti, 1992), што потиче од Платона и Аристотела. Али, истина опет измиче негде између, тако да како год се определили, нећемо заузети противстав у односу на друга тумачења, у случају поменутих филозофа.

С друге стране Карл Попер (2002а) истиче нашу склоност ка *догматском мишљењу*, које карактерише стварање регулација, правила, начина обраде перцепције или промишљања о стварности и виђења ствари. Отуда и потреба да се стално дискутује о регуларностима, да се продукују закони који се намећу около – и природи и друштву. Насупрот овом *догматском ставу* или уз њега, *критички став* омогућује

„модификацију својих начела“, „прихвата сумњу“, „захтева провере“ и „индикативан је за слабије уверење“. Конкретно, „примитивне људе и децу карактерише – догматско мишљење, неконтролисана жеља да се наметну регуларности, очигледно задовољство учествовања у обредима и понављањима као таквим; и управо увећано искуство и зрелост понекад обликује став опрезности и критичности, за разлику од догматског става“ (Попер, 2002, 98). Овај аутор, усвајање различитих образаца и шема понашања и мишљења из раног детињства као и формирање догматског става и постојање могућности за критичким ставовима повезује са настајањем различитих неуроза код субјеката. Наиме, свако ново искуство се интерпретира као нерегуларност, и појачава ригидност приступа уколико је догматски став значајно укорењен у мишљењу субјекта и коси се са лично прихваћеним обрасцима и шемама. Још, ако је догматски став био запречаван у развоју или спречавано критичко понашање, то је неуроза или неуротично испољавање извесније (Попер, 2002а, 99). У крајњем, Попер (2002а) изводи да критички став припада науци, док је догматски псеудонаучан. Овакво тврђење произлази из тога да је на основу анализа аргумената могућа модификација мишљења и флексибилност код заузимања критичког става, док код догматског мишљења постоји становита ригидност и непопуштање и у том смислу сталност ставова без могућности промена. Ово су важна сазнања и закључци када промишљамо образовно-васпитне процесе и њихове исходе.

Сâмо мишљење, које је веома сложен феномен, или сложена категорија, свакако се креће у више подручја психичког – *свесно*, *предсвесно* и *несвесно*. Наведено, по Фројду представља *психичке квалитете* (Frojd, 2015). Несвесно је „царство алогичног“. Из несвесног се може прећи у свесно, али тај процес називамо *освешћавање*, тако што се прелази из предсвесног. Дакле, несвесно „лако може да се замени свесним, стога означавамо као стање које је способно за *освешћавање* или *предсвесно*“ (Frojd, 2015, 26). Ово ће нам бити од посебне важности, када будемо стварали слику функционисања мисаоних процеса, мисаоних радњи и онога што називамо правилима, начинима мишљења, али и вештинама размишљања. Сâм процес учења, а тиме ћемо се бавити, јесте својеврстан напор и одвија се уз помоћ мишљења као сложеног процеса или сложених процеса мишљења. Поједини термини се не користе како су наведени овде, али свакако да освешћивање представља значајну радњу у оквиру учења, јер „наш труд који улажемо да би се сломио отпор који се пружа освешћивању, у појединачним случајевима је различит по свом опсегу и свом интензитету“ (Frojd, 2015, 27) – преласци из свесног у несвесно и у обрнутом смеру су могуће радње и ова

могућност представља, између осталог, сложеност процеса мишљења, тако да се одређене радње, психички процеси одвијају у различитим подручјима квалитета. Отуда и знање јесте сложено по свом опсегу, садржају, доступности и могућности стављања у функцију у одређеном временском тренутку или у одређеним околностима/ситуацијама, при решавању различитих проблема теорије и праксе.

Филозофирајући о *постојању, збиљском, о смислу филозофске логике*, Карл Јасперс (2000) долази до појма *свеобухватно* и покушава да га *мисли* и да га смести или дефинише у односу на остале околности филозофије. Бавећи се овим на више различитих начина и дискутујући кроз различите одреднице и појмове, те форме филозофије, каже следеће: „Ако свеобухватно назовемо мишљењем, онда важи: из нечега мишљеног не може да се изведе мишљење“ (Јасперс, 2000, 49), и у наставку додаје „Јер свеобухватно никада не може да се сазна као неко Нешто из кога треба да се изведе нешто друго. Сваки мишљени, ма како објумимајући предмет, свака мишљена целина, а исто тако и свако као предмет мишљено свеобухватно остаје као предмет нешто појединачно, јер наспрам себе оно има друге предмете изван себе и нас“ (Јасперс, 2000, 50). Свакако да нам је од посебне користи сагледавање опсега мишљења, као и могућности мишљења у перцепцији и решавању ситуација стварности; ови искази К. Јасперса од непроцењивог су значаја. Наиме, неопходно је да постоји одређена свест управо о свеобухватности мишљења, али и употреби као инструмента или употреби његових инструмената у смислу начина сагледавања, закључивања, посматрања односа, оперисања са субјектима/објектима. Збиљност мишљења, опет дефинисана или сагледана на више начина јесте неупитна. Стога и ова противречност индукована *свеобухватним* и јесте прихватљива, ако пре тога усвојимо могућност противречности као потврде егзистенције и збиљности. Дакле, ако би мишљење било свеобухватно, његов продукт не би могао да буде мишљење; или, оно би се окончало у себи самом, ако је то могуће. Како се мишљењем субјект покушава да хвата у коштац са светом (а и собом), то исто излази да га је готово немогуће обухватити, или свеобухватити у бесконачности, иако се и њоме бавимо једнако као дискретум или континуум.

Рорер (2002b) објашњавајући околности својих разматрања говори о три „света“, и то: свет физичких објеката или физичких стања; свет стања свести или менталних стања или диспозиција понашања; свет *објективних садржаја мишљења*, посебно научних и песничких замисли и уметничких дела (Рорер, 2002b, 101). Сматра да су прва два света у интеракцији, а „трећи свет“ садржи ентитете од којих издваја: *теоријски*

системи, проблеми и проблемске ситуације, критички аргументи, стања дискусије или стања критичке расправе, и још шта друго (Popper, 2002b, 102). Када говори о епистемологији, говори о *научном сазнању* и одређује да оно припада свету објективних проблема и објективних аргумената – тзв. „трећем свету“. Свет субјеката јесте „други свет“ и њему припада сазнање у смислу „знам“, оном што је његова уобичајена употреба. Овај ауторитет науке и филозофије истиче постојање два смисла сазнања или мишљења: *сазнање или мишљење у субјективном смислу* – стање духа, свести, диспозиција понашања или реаговања; *сазнање или мишљење у објективном смислу* – проблеми, теорије и аргументи. „Сазнање у објективном смислу је *сазнање без оног ко зна*: то је *сазнање без субјекта сазнања*“ (Popper, 2002b, 103). Из наведеног видимо да и само мишљење се категорише у више сегмената, у зависности да ли припада стварима „од овога света“, односно „свакодневном животу“ и размени субјеката, посредовању субјеката у уобичајеној комуникацији, али и мишљење које је „од онога света“, у смислу пребивања у контемплацијама науке и вековечних питања постојања и смисла уопште. Ови „светови“ чине једну целину и један космос, један свет, тако да и посредовање субјеката може да буде уз помоћ ентитета *објективног света* у једној размени у којој се, како изложисмо, посредује и сазнањима „без субјекта сазнања“. Важно је осветлити у овим поставкама аутора Popper-а (2002b) да је мишљење обухватио као научно, али и песничко и уметничко истовремено и то у вишем нивоу људског деловања, као заједничко збиљско. У тој заједничкој збиљи, артефакти који настају у интеракцији „две врсте стања“ – физичко-хемијског и менталног – јесу артефакти организма и духа и делују узајамно, чак и са стањима физичке околине. Ради се о материјалној производњи као последици, али и о стању раста сазнања које може да трансцендира, тако да апстрактне идеје и апстрактни продукти мишљења воде као резултујућа синергија човечанства (Popper, 2002b, 228).

Коначно, Хајдегер (1999) тврди да „чим пристајемо да учимо, ми смо већ признали да нисмо кадри да мислимо“ (Хајдегер, 1999, 101). Даље, он каже да човек можда и хоће да мисли, а то ипак не може. Не упуштајући се даље у интенције овог аутора, вратимо се до Јасперса (2000) и онога што смо истакли код њега – *свеобухватност* мишљења (?) или противуречност наведеног. Ако мишљење не може да буде свеобухватно, оно може томе да тежи и у тој тежњи ка свеобухватности оно проширује простор свога збиљског, али никако да дође до тога да „мислимо суштинско порекло бивствовања бивствујућег. Оно што заправо треба да мислимо остаје нам ускраћено“ (Хајдегер, 1999, 113). И тако, мишљење нам бива ускраћено и стално нам

измиче, али не ишчезава. Ми знамо да треба да мислимо, али уствари ми само промишљамо све време. Од посебног је интереса у овом излагању истаћи да Хајдегер (1999) сматра да „суштина песништва почива у мишљењу“ и упућује да „док год мишљење представљамо сходно *обавештењима* које нам о њему пружа логика, докле год озбиљно не схватимо да се сва логика већ везала за посебну врсту мишљења, ми нећемо бити кадри да узимамо у обзир то да певање почива у помишљању, нити то у којој мери оно у њему почива“ (Хајдегер, 1999, 108). Аутор се овде одређује да у мишљење-које-то-покушава-да-буде укључује и оне елементе који представљају емоционално, митско, ирационално („царство алогичног“) и равноправно са оним „уређеним“ сегментом, којим влада логика или логике као правила мишљења или перципирања стварности, односно збиљског, али и производње стварности, односно збиљског. Можемо да користимо и другу терминологију, нпр. техника, метода, начин мишљења или промишљања, а Хајдегер (1999) истиче да „техника је средство за извесне циљеве“ или „техника је човеково дело“.

МИШЉЕЊЕ – ПСИХОЛОШКИ ПРИСТУПИ У ОБРАЗОВАЊУ (ПСИХОЛОГИЈА У ОБРАЗОВАЊУ ИЛИ ПСИХОЛОШКЕ ОСНОВЕ ОБРАЗОВАЊА)

Појам *мишљења* у тесној је вези са појмом *интелигенције*, који је од њега шири. Око дефинисања интелигенције до данас постоји мноштво различитих приступа и виђења који проистичу из фуриозног и комплексног развоја истраживања овог појма – његовог садржаја и повезаностима са другим појмовима. Свакако, интелигенција обухвата мишљење, односно, немогућа је без функције мишљења; истовремено, интелигенција обухвата и социјално понашање, повезана је са емоцијама и сензомоторним способностима (вештинама). Дакако, све ово утиче на развој мишљења у једној општој међуповезаности. Немогуће је рећи да решавање апстрактних проблема или вештина социјалног понашања јесте интелигенција – она обухвата још много тога, тако да можемо да кажемо да омогућава разумевање туђег мишљења, али и јасније сагледавање сопствених идеја или замисли (Gardner, Kornhaber & Wake, 1999, 18). Антрополози сматрају да је *мишљење* специфично за сваку културу и у том смислу кроз истраживања долазе до тога да у једној култури јесте значајно имати способност логичког закључивања, у другој одговарајуће познавање социјалног понашања, док је на неком трећем месту примарно управљање емоционалним стањима као манифестацијама интелигентних посредовања или код четвртих испољавање вредности рада и труда као највиших друштвених категорија и основа за извесно социјално структурисање или стратификовање и позиционирање у крајњем (Gardner, Kornhaber & Wake, 1999, 19).

Развој истраживања у области психологије и утицај истраживања из других области науке, допринели су да се диверсификацијом дође до категорија *мишљења* и *когниције* као важних фактора за развој детета, прецизније, у његовом менталном развоју. Свакако ова истраживања имала су импликације на теорије учења, тако да се у образовању, посебно школству, промене дешавају у домену организације, односно, осмишљавања процеса наставе. Од Бинеа, који је почео да мери интелигенцију, све до плуралиста, који су на различите начине сагледавали интелигенцију као вишекомпонентну категорију, развијао се приступ и дефинисање мишљења, тако да од посебног интереса за даље излагање представља *развојни приступ* Жана Пијажеа, али и

приступи који се баве *когнитивним процесима* као примарним за развој мишљења и приступи који уводе *контекст* у коме се обавља образовно-васпитни рад, односно *контекст* инстанци образовања и социо-економског окружења – истакнути представник овог приступа јесте Лав Виготски.

Образовање почива на резултатима истраживања и теоријским поставкама Жана Пијажеа и његовом *развојном приступу*, који је настајао годинама стрпљивим и преданим радом, експериментисањем и применом тзв. *клиничког метода* у испитивању процеса формирања мишљења код деце. Организација процеса учења, данас је незамислива без познавања поставки и рада овог аутора и његових сарадника (једна од најзначајнијих јесте Бербел Инхелдер). Свакако, рад овог аутора јесте продуковао и нео-пијажеовце, али и критичаре и оспоравања, и коначно оне који су покушавали да обједињавањем свих ових резултата дођу до нове развојне теорије.

Како год, Пијаже је многим примерима рада са децом дао једну теорију у којој јесте било важно да дете даје тачне одговоре у решавању одговарајућих проблема, али важније од тога јесте било *како* је размишљало дошавши до решења (Gardner, Kornhaber & Wake, 1999, 119). Овај приступ променио је схватања начина на који деца мисле, а имао је последице и на разумевање елемената мишљења, односно разумевања мишљења као менталног и психолошког ентитета.

Основни елементи или јединице Пијажеове теорије јесу *шеме* и *операције*. Шеме су организовани обрасци понашања, док операцијама доносимо судове или водимо ток мишљења (тзв. *структуре знања*). У одређеним ситуацијама реагујемо по одговарајућим шемама, тако да је значајно које су то заједничке *структуре* из основа шема реакције. Касније се дешавају процеси *диференцијације шема* и *интеграције шема*, који омогућавају да дете почиње да разликује када се како треба понашати, али и да одређена понашања синхронизује у јединствен и флексибилан систем понашања за конкретне ситуације. Усвајањем операција и њиховим мисаоним извођењем, дете овладава *интериоризацијом* или *поунутрењем*.

Два су значајна процеса у раном развоју детета – *асимилација* и *акомодација*. Асимилација представља уподобљавање спољашњих околности или понашање према спољашњем свету у складу са сопственим постојећим шемама, док акомодација прилагођава шеме понашања спољашњој средини. Нарушавањем равнотеже између ова два понашања долази до когнитивног напретка (Gardner, Kornhaber & Wake, 1999, 123), тако да се у једном тренутку успоставља нова „психичка равнотежа“, а овај процес уравнотежавања називамо *адаптацијом*. „Ментални развој се, према томе, указује као

све прецизнија адаптација на стварност“ (Piјаже & Inhelder, 1996, 21). Пијаже је својом теоријом успоставио више стадијума развоја детета, са својим поднивоима и објаснио их у (Piјаже & Inhelder, 1990):

- (1) Сензо – моторни стадијум
 - (2) Развој опажаја
 - (3) Семиотичка или симболичка функција
 - (4) Конкретне операције мисли и међуиндивидуални односи
 - (5) Преадолесцентност и пропозиционалне операције⁵
- (Piјаже & Inhelder, 1990).

Ментални развој или развој поступака (или понашања) јесте оно што је предмет излагања код Piјаже и Inhelder (1990), са ставом да „ментални развој се не може одвојити од физичког развоја, а нарочито се не може одвојити од сазревања нервног и ендокриног система, које се наставља до скоро шеснаесте године“ (Piјаже & Inhelder, 1990, 5). Према овим ауторима, након рођења следи период наставка опште ембриогенезе и који траје све до успостављања извесне „релативне равнотеже“ одрасле особе и током кога се одвија својеврсни органски и ментални развој (Piјаже & Inhelder, 1990, 6).

Још од малог детета, одмах након рођења, почиње процес који бисмо могли да једноставно опишемо као „стално напредовање од спонтаних покрета и рефлекса до стечених навика, и од стечених навика до интелигенције“ (Piјаже & Inhelder, 1990, 10). Претходно смо побројали фазе кроз које субјекти пролазе и важно их је схватити тако да у свакој од њих доминира развој једне од шема или операција, и представља основу за развој у следећем нивоу, следећих сложенијих функција. Нпр. развој и активности „сензо-моторне структуре чине извор потоњих мисаоних операција“ (Piјаже & Inhelder, 1990, 34). У једном тренутку, боље рећи периоду, почиње стварање првих логичко-математичких операција, интелигенција боље уочава проблеме и има усмеравајуће дејство, управља опажајним активностима, али структуришући стварност, перцепцију стварности, која је све шира и дубља, неке функције бивају замењене другим, тј. формирају се сложеније структуре мишљења, тако да поједине перцепције стварности бивају доминантније обрађене оним мисаоним операцијама које су ближе апстракцији, него опажајном, тј. конкретном. „Логичко-математички појмови претпостављају скуп операција које се издвајају не из опажајних објеката већ из акција извршених на тим

⁵ Овај стадијум у литератури познат је и под називом *Стадијум формалних операција* (прим. аут).

објектима“ (Pijaže & Inhelder, 1990, 54), тако да ће нам исказани налаз бити од важности за тему коју обрађујемо. Дакле, успостављање и развој логичко-математичке структурације омогућава да се „премаша опажање“. Развој и структурисање мисли, чини да се у општој координацији акција, вербалног понашања, налазе корени и развија логика, која и структурише језик. Језик није извор логике по налазима из (Pijaže & Inhelder, 1990, 98), али говор и могућност дозивања у свест претходних догађаја, кроз њихово описивање и могућност предвиђања будућих акција представљају зачетак мишљења (Pijaže & Inhelder, 1996, 31). Усвајање Пијажеове теорије као инструмента за разматрање стварности у процесу учења и наставе, у процесима образовања, неопходно је разумети и још два важна стадијума у развоју мишљења. Период *конкретног мишљења* упућује на разматрање стварности над конкретним објектима и односима међу њима, тако да чине прелаз између акције и логичких структура које укључују и вербално исказане хипотезе (Pijaže & Inhelder, 1990, 107). Паралелно са развојем мишљења, можемо да кажемо и са напредовањем или успостављањем оптимума интелигенције, код субјекта се процесом социјализације, који је веома сложен, развија афективни део личности, тако да се успостављају и развијају шеме, операције и механизми који омогућавају живот у друштвеној средини. То значи да се код детета насупрот почетне субјективне центрације (усмерења) успоставља способност децентрације, разумевање стајалишта других субјеката, затим симпатије или антипатија наспрам другог, стварање свести и вредновања себе у односу на своје „ја“, али и у односу на друге – успостављање односа наклоности и поштовања, култура социјализованог говора. У једној општој социјализацији имамо мене од односа детета и одраслог, затим односа између саме деце као субјеката, али и односе деце и одраслих као субјеката. Један од значајних процеса јесте процес преласка из *хетерономног* у *аутономни* облик понашања. Наиме, дете друге или другог доживљава као ауторитет, поготово своје родитеље из разлога што су то за њега супериорне особе. Формирајући се као субјект, дете у сложенем процесу социјализације и усмеравањем афективног понашања и стављањем под контролу интелигенције прелази ка аутономном понашању, које карактерише осећај за праведност, узајамно поштовање у односу на друге субјекте, разумевање реципрочности узајамних односа, али и структурисање моралних вредности. У том смислу „социјализација је структурација, којој индивидуа доприноси онолико колико од ње добија“ (Pijaže & Inhelder, 1990, 167). Коначно, када пратимо развој функција мишљења уочавамо стадијум *формалног* или *апстрактног мишљења*. Субјекат

постаје способан да правилно расуђује не само о конкретним објектима, већ и о различитим пропозицијама, за које не зна да ли су истините или нису, у које верује или не верује, дакле способан је да размишља о различитим хипотезама, да спекулише операционо са њима, да изводи нове хипотезе, и долази до закључака и различитих последица и да цени њихову истинитост. Ово је почетак хипотетичко-дедуктивне или формалне мисли (Piјаџе & Inhelder, 1990, 142). Згодно је овде уметнути да и „логичко-математичке структуре произлазе из координације акција субјеката“ (Piјаџе & Inhelder, 1990, 167), тако да можемо да усмеримо на социјализацијску димензију процеса учења и наставе и образовања уопште, али и да се само мишљење у потпуности формира или успоставља у једном дуготрајном и сложеном процесу кроз који пролази субјекат са својим окружењем.

Када користимо резултате Пијажеове развојне теорије (*генетичке епистемологије*), неопходно је да разумемо да она процес развоја детета до одраслог види као процес „уравнотежавања“ субјекта, који на крају поседује способност *ауторегулације* свог понашања. Ово понашање односи се на посредовање са другим субјектима, али и на успостављање сопства, како би то рекао Мишел Фуко. Не постоји интеллигентан план којим бисмо могли да на почетку биолошку јединку, са генетским наслеђем проведемо кроз процес одрастања, а да пројектујемо каквог одраслог хоћемо да добијемо. Нама је од интереса да разумемо да је овај процес формирања субјекта један наставак онтогенезе, али има и друштвену функцију у „преношењу непрекидног рада генерација“. Успостављање психологије детета јесте стваралачки процес структура, који субјект проживљава у једној „живој дијалектици“⁶ (Piјаџе & Inhelder, 1990, 170).

У (Piјаџе & Inhelder, 1990), стоји да „се стварност опире дедукцији, зато што она увек садржи један више или мање већи део неизвесности“ (Piјаџе & Inhelder, 1990, 121), што отвара могућност повезивања изреченог са исказом Карла Јасперса о *свеобухватности мишљења* (Јасперс, 2000, 49), односно, да уколико је мишљење свеобухватно - из нечега мишљеног не може да се изведе мишљење.

Лав Семјонович Виготски бавио се успостављањем психологије као једне целовите теорије, која би требало да буде научно заснована на конкретним резултатима

⁶ Ова „жива дијалектика“ кроз коју пролази субјект познаје и разне друге елементе, шеме, структуре, термине које нисмо могли све да обухватимо, а неки од њих су: асоцијативно мишљење, апстракција, генерализација, реверзибилно мишљење, конзервација материје (дискретних или континуираних квантитета или објеката), комбинаторно мишљење, идентификација... Уколико буду коришћени на другим местима биће ближе или детаљније објашњени.

истраживања, као конкретна наука, никако као нарација. Оно што је у његово време био историјски материјализам, покушао је да успостави у оквиру психологије као конкретне науке. Бавио се понашањем човека, као *психолошког система*, тврдећи да је дотадашњи приступ проучавања *акта мишљења* погрешан, да је „неухватљив за самопосматрање“ и да је „чисти рефлекс“ (Vigotski, 1996a, 41). Исти аутор наводи да „рефлекси не постоје издвојено, не делују раштркано, већ се слажу у комплексе, системе, у сложене групе и формације које одређују понашање човека“ (Vigotski, 1996a, 41). Виготски користи термин *раздражење*, као иницијално покретање рефлекса, или иницијацију рефлекса преко *раздраживача*. Тако он говори и о „психи као инхибираном кретању“ и као о нечему објективном, иако се не може опипати или видети. А када говоримо о рефлексима, било који од њих јесте раздраживач новог рефлекса у систему или неком другом систему - ланчано. Понашање човека није само збир рефлекса јер би онда било да је човек „кожни мех напуњен рефлексима“, а мозак „свратиште где су се случајно зауставили условни рефлекси“ (Vigotski, 1996a, 65). Оно што аутор Vigotski (1996a) истиче јесте да не треба да се бавимо проучавањем рефлекса, већ понашањем човека, а онда на различите стране, те се бавимо механизмима, саставом, структуром. У том смислу потребно је бавити се свешћу као проблемом структуре понашања, али основним питањима из тог домена – очување енергије, самосвест, психолошка природа сазнања туђих свести, мишљењем, осећањима и вољом, несвесним, еволуцијом свести, идентитетом, јединством свести. Питањима психологије корисно је приступити споља (не из психологије) и узети у обзир „широко коришћење искуства ранијих генерација“, тзв. „историјско искуство“, поставити као значајну компоненту „социјално искуство“ у истраживању понашања човека (Vigotski, 1996a, 67). Теорија коју је испоставио Виготски назива се *културно-историјском*; у оквиру ње је разрадио свој *историјско-генетички метод*, а данас кажемо да је увео у психолошку науку дијалектички метод. Иначе, *развојни приступ* Жана Пијажеа није му био стран и уважавао је резултате ове теорије у својим истраживањима у смислу да се и њима бавио критички. Можемо да закључимо, што се човековог понашања тиче, оно има три вида – историјско искуство, социјално искуство и удвојено искуство. Ово удвојено искуство значи да човек има идеализовану слику ствари у глави, с тим да у реалности реализација ове слике ствари трпи извесне искривљености или прилагођавања материјалности. Виготски је склон да каже да је понашање „систем реакција које су победиле“ (Vigotski, 1996a, 69).

Велику важност Vigotski (1996a) придаје свести, која има регулаторну улогу у односу на понашање човека. Раздраживачи, кроз системе рефлекса имају дејство преко свести на понашање. „Ми смо свесни себе зато што смо свесни других и на исти начин на који постајемо свесни других, јер у односу на саме себе постајемо исто што и други у односу на нас. Ја упознајем себе уколико сам сâм за себе други, тј. уколико ја сопствене рефлексе могу поново перципирати као нове раздраживаче“ (Vigotski, 1996a, 76). Наведени одељак упућује на социјализацијску димензију усвајања знања или сазнања, али и сложеног преношења рефлекса кроз испреплетене мреже система који чине извесне структуре интеракције – са собом, али и са другим, у повратним реакцијама.

Слично као код Пијажеа и Виготски даје периодизацију развоја или дијалектичког процеса промена понашања детета: (1) криза периода новорођенчета; (2) период новорођенчета; (3) период одојчета; (4) криза прве године; (5) рано детињство, (6) криза треће године; (7) предшколски узраст; (8) криза седме године; (9) школски узраст; (10) криза тринаесте године; (11) период пубертета; (12) криза седамнаесте године, (Vigotski, 1996d, 202). Оваква периодизација настала је као потреба да се одређене фазе развоја личности посебно означе, јер током ње увек једна нова централна структура доминира и обележава процес развоја и иницира реорганизацију целокупне личности детета – „личност детета се мења као целина у својој унутрашњој структури, а закони мењања те целине одређују развој сваког њеног дела“ (Vigotski, 1996d, 203).

У процесу развоја, ако је тако могуће рећи код Виготског, коректније, у дијалектичком разматрању понашања човека, *инструменталним методом* врши се низ вештачких прилагођавања понашања. Као што у материјалном свету користимо оруђа, тако у психологији имамо *психолошка оруђа* и њихове сложене системе, којима се врше ове интервенције – језик, разне форме нумерације и бројања, мнемотехничка прилагођавања, алгебарска симболика, уметничка дела, писменост, шеме, дијаграми, карте, цртежи итд. (Vigotski, 1996a, 82). Претходно излагани метод функционисања стимулус-реакција (раздраживач-рефлекс) јесте природнонаучни метод, док је инструментални метод вештачка интервенција у прилагођавању понашања човека. Свако ово психолошко оруђе јесте и као стимуланс, у противном не би деловало на понашање.

„Инструментални метод изучава процес природног развоја и васпитања као јединствени спој, постављајући себи циљ да открије како се престојавају све природне

функције датог детета и на датом ступњу развоја васпитања“ (Vigotski, 1996a, 85). Виготски је инсистирао на томе да инструментални метод, како га он схвата „проучава дато дете као ученика“, никако наглашавајући једну од његових улога – било детета, било ученика. У процесу развоја дете се опрема различитим оруђима и тако се деца, у зависности од узраста разликују у мери опремљености овим психолошким инструментима. На овај начин дете напредује у овладавању сопственим понашањем (Vigotski, 1996a, 86).

Разматрајући проблем говора Виготски сматра да је он средство којим дете схвата другог у комуникацијском посредовању, али и разуме себе. Наведено је разлог због чега деца проводе време разговарајући са самим собом и развијајући унутрашњи дијалог као средство самоспознаје, објашњавајући свет и друге себи (Vigotski, 1996a, 91), тако оно учи аргументовање и преношење „колективне форме понашања у праксу личног понашања“.

Када третира мисао, заједно са говором, аутор Vigotski (1996b) наводи да је дијалектички скок, како „прелазак од материје која не мисли ка осету“, тако и „прелазак са осета на мисао“. Али, није ту крај – из изнетог се изводи да „мишљење одражава стварност у свести квалитативно друкчије него непосредни осети“ (Vigotski, 1996b, 16). Посебно се истиче неодвојивост мишљења од афекта, јер „постоји динамички смисаони систем“ који је „јединство афективних и интелектуалних процеса“ – „свака идеја садржи прерађен човеков афективни однос према стварности, представљен у тој идеји“ (Vigotski, 1996b, 19).

Бављење собом, на одређеном степену развоја, прелазак у унутрашњост, како каже Виготски, означава успостављање и учвршћивање једног унутрашњег система и тај динамички систем има „водећу улогу мишљења у апсолутно свим функцијама, у чијем резултату се показује да мишљење није само једна функција међу другима, већ функција која преустројава и мења друге психолошке процесе“ (Vigotski, 1996a, 92). Један веома сложен процес повезивања и јачања различитих система, функција, представа, формирања веза емоционалних и интелектуалних механизма, наследних веза, срединских одређења, али и оних које нас диференцирају на основу или из самосвести. Тако настаје јединствен систем понашања.

У (Vigotski, 1996a), аутор објашњавајући настајање јединственог психолошког система детета, једног система понашања одређеног динамизмом процеса који се одвијају у размени са средином – процесима раздраживања и стимулуса, инструменталним путем, организам иступа према себи као средина, али о организму се

говори и у његовом узајамном дејству са средином (Vigotski, 1996a, 152). Управо до развоја логике код деце долази упоредо или генерисано „растом социјализације дечјег говора и целокупног дечјег искуства“, тако да се више функције мишљења првобитно испољавају код дечјег спора, а онда индукују развој размишљања и понашања (Vigotski, 1996c, 111). Са друге стране Лав Виготски истиче процес културног развоја и тврди да „ми постајемо ми посредством других и ово се правило не односи само на личност у целини већ и на историју сваке посебне функције“ (Vigotski, 1996c, 113). Поред социјализације која је повезана са усвајањем културе, овде Виготски усмерава на то да и развој мишљења има директну повезаност са процесом енкултурације, као и све друге функције које настају и развијају се код детета. Оне се оформљују у колективу током посредовања деце, а онда „постају психичке функције личности“ (Vigotski, 1996c, 115).

На основу претходно изложеног можемо да повежемо настојање Виготског са Пијажеом, када он инсистира на околностима у којима одређује „васпитање као процес акумулације и стварање условних рефлекса, процес прилагођавања наследних форми понашања условима средине, процес спајања нових веза између организма и средине, тј. процес који је условљен у свакој тачки пута“ (Vigotski, 1996a, 153) са експерименталним налазима потоњег у којима се базира на активностима - вежбама и искуству (физичким и менталним) као чиниоцима развоја субјекта (Piјаже & Inhelder, 1990, 165).

Оно по чему је Виготски посебно значајан у педагошкој психологији, дидактици, посебним дидактикама, поготово за практичаре наставе, јесте дефинисање појма *зона наредног развоја* - „Оно што дете данас уме да уради, у сарадњи и под руководством, сутра ће бити способно да уради самостално. А то значи да, утврђујући могућност детета приликом заједничког рада, ми самим тим одређујемо област интелектуалних функција у формирању које ће, у наредној фази развоја, морати да донесу плодове и, према томе, морати да се помере на ниво реалног интелектуалног развоја детета. Истражујући шта је дете способно да уради само, ми истражујемо развој у протеклом дану. Истражујући шта је оно способно да уради кроз сарадњу, ми одређујемо развој у сутрашњем дану. Не област још неформалних процеса, већ оних чије је формирање у току и чини зону наредног развоја детета“ (Vigotski, 1996d, 209). У осмишљавању процеса учења и наставе, неопходно је познавати одређивање зоне наредног развоја, тако да за свако дете можемо да пројектујемо процес оптимума учења. На овај начин, осмишљавањем адекватних активности утичемо на развој мишљења субјекта који су у

процесу развоја. Истраживања показују да зона наредног развоја утиче значајно на динамику интелектуалног развоја и наставу чини успешном (Vigotski, 1996b, 187). Оно што дете зна самостално да уради или да самостално реши одређене задатке или проблеме представља ниво његовог *актуелног* развоја. Зона наредног развоја има снагу да помера ниво актуелног развоја детета, уколико се адекватно примењује у осмишљавању процеса наставе и учења. За наставника је неопходно да зна да дете у сарадњи може да уради много више него када самостално поступа, али не бескрајно више, јер постоје границе могућности за свако дете и његов интелектуални капацитет (Vigotski, 1996b, 187). Такође, немају сва деца истог актуелног развоја једнаку зону наредног развоја и то је оно што децу разликује и упућује на неопходност индивидуализованог приступа настави и учењу.

Виготски је сматрао да се учење и развој не подударују по аутоматизму, јер у зависности од тога како је осмишљено, учење може да буде „систем који се вуче на репу дечјег развоја уместо да га вуче за собом“ (Vigotski, 1996b, 190). Из тог разлога аутор Vigotski (1996b) наводи да учење мора да претходи развоју јер га онда буди и изазива да функције сазревају и налазе се у зони наредног развоја (Vigotski, 1996b, 190).

Коначно, према Виготском, дете у једном унутрашњем процесу промена пролази кроз развој, стварањем једног аутономног психолошког система, који је у односу на себе али и колектив из окружења развио своје природне механизме перцепције средине, али и психолошким оруђима као инструментима освојио више нивое менталних процеса, тако да у тој непрестаној реорганизацији унутрашњости генерише један трајан динамички и дијалектички процес аутентичан за културу припадајуће средине.

За осветљавање или разумевање образовне праксе, посебно школске праксе, коначно процеса учења, неопходно је познавање и научних потавки Абрахама Маслово. Овај аутор припада заступницима тзв. *хуманистичке психологије* која човеку и његовом психичком животу приступа холистички. „Хуманистичка психологија укључује прихватање људи онаких какви они јесу у својој унутрашњој сржи“ (Maslov, 2001, 27), те сам аутор поставља питање „колико људи могу да израсту, шта људско биће може да постане?“ (Maslov, 2001, 17). Одговор на овако постављену запитаност А. Maslov (2001) изложио је уз помоћ теорије *селфа* и *актуализације селфа*. Заправо, када излаже о селфу, он то ради излажући о актуализацији селфа или *критици теорије о актуализацији селфа*. Једна од почетних претпоставки ове теорије јесте да она „снажно захтева плурализам индивидуалних разлика“ (Maslov, 2001, 26), односно прихватамо

људе онаквима какви јесу и уживамо у њиховој актуализацији која може да буде и јесте различита од наше/ваше.

Дакле, А. Maslov (2001) уводи тзв. *Б-вредности*; назив настао од синтагме *вредности бића* (или на енглеском језику *being-values*), и то би биле *истина, лепота, доброта, савршенство, једноставност, јединство/целовитост, превазилажење подела, живост/процес, јединственост, нужност, довршеност/финалитет, правда, поредак, богатство/тоталитет/свеобухватност, лакоћа, игра, самодовољност, смисленост* (Maslov, 2001, 48). Ове Б-вредности, уствари упућују на људске потребе за овим вредностима, те их називамо *метапотребама*, а лишавање ових потреба код човека изазива настајање *метанатологија*, а сам аутор каже „ићи ћу тако далеко да устврдим да су ове Б-потребе смисао живота за већину људи, али да многи људи уопште не схватају да их имају“ (Maslov, 2001, 17). Процес актуализације је истовремено и процес самоактуализације селфа и дуготрајан је. Можемо га замислити као процес доношења одлука, тако што слушамо свој унутрашњи глас и импулсе, али да то не буду интројектовани гласови мајке, оца или неког другог ауторитета субјекта (друштвеног поретка, старијих, традиције...). У том смислу, актуализација селфа је аутентичан процес током кога, коришћењем сопствене интелигенције откривамо „своју биолошку природу, своју конгениталну природу, која је или непроменљива или тешко променљива“, а терапијским поступком који се темељи на учењу о селфу и његовој актуализацији, саветник/терапеут покушава „да се људима помогне да израсту до највеће могуће висине“ (Maslov, 2001, 23).

Абрахам Маслов указује на потребу социјалне психологије уз хуманистичку, јер субјекат или појединац, како он наводи, живи у извесним друштвеним или групним околностима (формалне или уређене групе – породица, тим, организација), те мора да делује *синергијски*, односно да његово деловање буде усклађено тако да своје потребе задовољава заједно са потребама осталих у једном синергијском деловању (Maslov, 2001, 31).

Питање мотивације јесте неопходно у процесу актуализације селфа, из разлога што субјект јесте делатно биће у друштвеним околностима и неопходно је да процес који је у току буде вођен без већих проблема иако је изложен различитим психопатологијама. Наиме, „људи који су актуализовали свој селф задовољили су све своје базичне потребе (потребе за припадањем, везаношћу, поштовањем и самопоштовањем)“ (Maslov, 2001, 32) и сада треба да буду мотивисани другим или вишим начинима, које називамо *метамотивације*. Овде истичемо да појединци који су

се актуализовали, своју професионалну оријентацију одређују као део селфа, и сматрају га нераздвојним делом свога бића – једноставно га поунутрују, инкорпорирају у свој селф, па у том смислу „за ове особе професија *није* функционално аутономна, већ пре преносилац, инструмент или отеловљење коначних вредности“ (Maslov, 2001, 41). Абрахам Маслов износи тврдње да су интринзичне вредности готово истоветне Б-вредностима, тако да је важно да мотивација која се развија код субјекта буде управо интринзична, како би актуализација селфа текла несметано; односно, „људи који су актуализовали селф нису првенствено мотивисани (то јест базичним потребама); они су првенствено метамотивисани (то јест метапотребама = Б-вредностима)“ (Maslov, 2001, 42). Истовремено, аутор тврди да су Б-вредности *инстинктоидне природе*, јер су метамотивације интринзичке вредности бића (Maslov, 2001, 46).

Појединац или субјект превазилази своје биолошко биће актуализацијом селфа, тако да метапотребама, које се показују као инстинктоидне или опет у вези са биолошким бићем долазимо и до духовног као део нашег биолошког бића. Дакле, „духовни живот је део људске суштине. Он је дефинишућа карактеристика људске природе, без које људска природа не би била у потпуности људска“ (Maslov, 2001, 54).

Културни контекст је уважен од стране Маслова, али он сматра да метамотивација превазилази културу и припада свим људима, односно целој врсти. Метапотребе као потенцијали зависе од културе, тако да се метапотребе актуализују у оквиру конкретне културе (Maslov, 2001, 55). Наведено може да осујети развој или актуализацију субјекта, тако да се он осети закинутим, што у коначном и јесте извор за настанак различитих неуроza.

За развој појединца јесте значајно искуствено сазнање и према овоме се аутор одређује тако што тврди да је оно почетак сваког сазнања, али и да није крај сваког сазнања и додаје „неопходно је, али није довољно“ (Maslov, 2001, 59).

Свакако, неопходно је познавати да гратификација одређених потреба или метапотреба отвара пут ка актуализацији селфа, заправо развија сопство у зависности у којим се сферама налазимо. Можемо говорити о базичним потребама, које су највећма, а и јесу материјалне природе и тичу се људског биолошког и предуслов су за више нивое актуализације који су дефинисани метапотребама и читавим механизмом или механизмима гратификације и последица на развој селфа. Маслов и каже да „кожа за селф више нема улогу границе“ (Maslov, 2001, 43), јер је део света инкорпориран у особу, поунутрењем, а Б-вредности су подједнако унутрашње и спољашње и особа

постаје „проширени селф“. (Прилог 2 илуструје пирамидом чувену хијерархију потреба по Абрахаму Маслоу, названу Масловљева хијерархија потреба)

Развој или експанзија науке и технологије, заједно са потребама савременог друштва доводе до тога да се одлуке у области образовања доносе на основу научних истраживања и директне повезаности теорије и праксе. У ту сврху развија се и *образовна психологија* која представља најшире могуће сагледавање тема из области образовања са психологијом као науком која потпомаже сагледавање и унапређивање праксе. Истовремено, *психологија образовања* разликује се од поменуте области у томе што је на неки начин њен део, а можемо да је дефинишемо тако што ћемо рећи да „психологија образовања изучава начине на које теорије и истраживања у психологији пружају информације и подршку у раду професионалцима у образовању, који раде у различитим контекстима везаним за поучавање и учење“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014a, 22). Захтеви у земљама развијеног света су такви да се теорија и пракса разматрају заједно, а „образовне импликације и истраживања у области дечијег развоја, когнитивних наука, учења, наставе и тестирања“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014a, 9) јесу опште познате ставке и приступачне теме свима који имају било какве везе са образовањем из разлога да када дискутују и размењују могу да кажу да говоре истим језиком. Истраживање стратегија предавања, тестирања и оцењивања јесте облик ангажованог учења за све оне који раде у образовном систему, да бисмо разумели „шта се дешава у учионици и другим местима учења“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014a, 12).

Да бисмо знали шта то значи „изузетно поучавање“ неопходно је да то очекивање буде дефинисано на националном нивоу у оквиру очекивања од школа и наставника (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014a, 22). Познавање теорија учења, неопходно је из разлога давања правилних или одговарајућих инструкција, без обзира на врсту поучавања. Утицај наставника појединачно, колективна наставничка ефикасност, социоекономски статус, међусобна интеракција ученика на постигнућа само су неки од параметара за праћење успешности наставе и учења. Када пратимо рад наставника који осмишљава стратегије поучавања и учења, морамо узети у обзир да он истовремено пажњу посвећује и „задавању и провери домаћих задатака, интервенцијама на дисциплину на часовима, очекивањима учинка ученика, интеракцији са целокупним одељењем као и са појединачним ученицима, тачности и стандардима примереног понашања, вештинама и стилевима, организацији и искуству“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014a, 29). Дакле, у добро поучавање могли бисмо да убројимо много тога од прилагођавања инструкција, процењивања потреба ученика, реално и разумљиво представљање

апстрактних концепата, вођење рачуна о емоционалним и социјалним потребама ученика, подизање самопоштовања које варира, подстицање одговорности, праћење израде задатака (школских и домаћих), размештање ученика у групе, расподела материјала, сакупљање новца за ужину и излете, амортизовање свих могућих ометајућих ситуација и брига зашто је изванредан ученик толико уморан (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014a, 31). Све ово спада у опсег деловања успешног наставника, на кога ученици обраћају пажњу и који код њих изазива пожељне промене, односно утиче на њихов развој. Уз све ово пожељно је да буде рефлексиван у односу на целокупну праксу коју смо претходно описали. Мада, уколико испуњава побројане ставке, свакако да их је немогуће успоставити ако ниси уз то и рефлексиван; то је извесна дијалектичка спрега. Да би овако описан *наставник експерт* могао да буде у функцији, неопходно је да постоје и буду доступна и да он учествује у истраживањима која унапређују промишљање наставне праксе или процесе поучавања и учења. Образовне средине треба да буду ослобођене предрасуда и неједнакости, да се разуме компликованост људског бића и његовог развоја, да се разуме и поштује културолошка различитост идентитета који учествују у процесима образовања. И још да наставник познаје свој наставнички селф, да би могао успешно да га актуализује на добробит процеса у коме учествује.

Када се усмеримо ка ученику, што је и природно, с обзиром да су они највећма корисници услуга образовања, неопходно је веома софистицирано и диверсификовано сагледавање процеса сазревања или да кажемо проласка кроз систем образовања. Наиме, потребно је да друштво успостави систем који може да сагледава њихов: *когнитивни развој и језик; развој личности, социјални и емоционални развој; разлике међу ученицима и образовне потребе; културу и различитост* (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014a). Оваква подела подразумева даљу поделу сваког од ових сектора или области по дубини, тако да би се што јасније и обухватније сагледавао и пратио процес образовања, доносиле одлуке у вези са унапређивањем квалитета. Онтолошки посматрано, учење је процес, који је суштински процес наставе, школе и образовања уопште. То упућује на још један простор познавања овог процеса, односно теорија које га имају за предмет проучавања, али и јако важне потпоре овом процесу, а то је мотивација, која омогућава телеолошко испуњење учења. Различита становишта о учењу (бихејвиористичка, когнитивистичка, познавање комплексних когнитивних процеса, социокогнитивистичка, констуктивистичка), као и успостављање и одржавање мотивације у процесу учења и поучавања, ангажовање средине, животног и школског

окружења, живот у друштвеној и локалној заједници, јесу комплекси који одређују образовање (Vulfolk, Нјуз & Volkap, 2014b). Истовремено, психологија образовања обезбеђује повезане начине и приступе у сагледавању тема теорије и праксе образовања и наставе и учења.

Још један приступ или коришћење научних налаза у сврху унапређивања организованог учења јесте из области неуронаука или неуронауке као трансдисциплинарне научне области. Наиме, у извору *OECD* (2010d) наилазимо на излагање резултата нове дисциплине из области образовања, назване *образовна неурологија* или *образовна неуронаука*, која омогућава да се структурише подстицајно окружење за учење, али на основу научних налаза, односно, омогућава да се доносе одлуке из области образовних политика на основу доказа (OECD, 2010d, 27). Налази говоре да у складу са све *рецептивнијим друштвом*, изучавање мозга обезбеђује „увиде у перцепцијске, когнитивне и емотивне функције које су значајне за образовање“ (OECD, 2010d, 27). Раније смо имали и терминолошки прилично затворен дидактички приступ који је афирмисао један административно идеолошки⁷ метод организације наставе, при чему само учење јесте било подређено поучавању и дешавало се одложено, након поучавања које је сервирало готове садржаје за учење. Захтев данашњице јесте да се учење одвија доминантно на часу, да настава буде оптимум учења и да активност ученика буде манифестована не разумевањем излагања наставника, већ сопственим актом учења и обраде садржаја, материјала или радом над извесним средствима очигледности и репрезентацијама објеката учења. Когнитивни развој, јесте у спреси са емоционалним структурама, тако да овладавање саморегулацијом и самоконтролом јесте од посебне важности за субјекта образовања.

Неуронаука нам сугерише да је учење целоживотна активност и да се продужавањем добија на ефикасности (OECD, 2010d, 23), да применом метода *неуроодсликавања* можемо да добијемо „механизам којим се идентификују карактеристике учења појединца“ и на основу кога можемо да персонализујемо приступ учењу (OECD, 2010d, 24). Разумевање мозга доприноси да унапређујемо образовну праксу, тако да знамо када је који период најплодотворнији, и да у сваком периоду

⁷ Употреба термина *идеолошки* овде се односи на било коју интервенцију државе кроз педагогију, као инструмент индоктринације, у било ком времену. Она може бити грађанска, пролетерска, да прокламује и велича надчовека, колектив, новог човека, техничара, или шта већ. Педагогија јесте примењена владајућа или доминирајућа филозофија једног друштва и у том смислу водећа. Дакле, држава уз помоћ официјелне педагогије интервенише и исказује своје образовне интенције, примарно друштвене интенције у смислу друштвене репродукције коју је истраживао и о којој је писао Пјер Бурдије (Pierre Bourdieu).

можемо да адекватно организујемо учење. Истовремено, добијамо и сазнање из неуронаука да нпр. учење математике није само усвајање извесног културног артефакта, већ „захтева пуну функционалност и интегритет специфичних структура мозга“ (OECD, 2010d, 21). Поред адекватног реаговања и примене адекватних метода у конкретним околностима учења, сазнања неуронаука нам омогућавају да организујемо учење током читавог живота и тако смањимо могућност и одложимо појаве различитих врста неуропатологија.

Окружење за рад и учење, васпитање и нега су „круцијални за процес учења“, а „квалитет друштвеног окружења и интеракције, исхрана, физичко искуство, сан“ делују занемарљиво, али веома су релевантни фактори за успешан процес образовања (OECD, 2010d, 18). Способност мозга да се мења у складу са захтевима окружења јесте процес и назива се *пластичност мозга* (OECD, 2010d, 18). Ова одлика мозга јесте пратећа током читавог живота и уствари представља могућност да се у различитим околностима учења врше модификације система синапси, да неке спреге слабе, оне које су интензивирани јачају и да се успостављају нове. Дакле, систем учења јесте један систем промена које настају у неуроструктурама и оне се модификују у различитим сплетовима околности које су заправо околности учења. Зато интелигентно управљање емоцијама, когнитивно арбитража функцијама као последица решавања околности или ситуација, свакодневног живота или организованог учења јесу извесне инстанце образовања.

Дакле разумевање и обликовање стратегија поучавања или наставе и учења у директној је повезаности са модификацијом нервног ткива као датости и резултата изведеног комплексног мултидимензионог процеса учења (околности, окружење, исхрана, менталне способности, управљање емоцијама, климатски услови, сензомоторичка искуства, физичке и менталне баријере, интеракције у окружењу). Последње говори о томе да је стварање подстицајне средине – породична стабилност, школска, одељењска, вршњачка и групна афирмација појединца/субјекта, подстицајна интеракција у окружењу, одговарајући здравствени подстицаји, функционално искуство – стварање успешног субјекта у околностима структурисаног учења.

ЛАТЕРАЛНО РАЗМИШЉАЊЕ

Превазилажење логичког или „вертикалног“ процеса мишљења (конвенционално, официјелно мишљење за науку), аутор De Bono (2001) нуди уз помоћ *латералног размишљања*. Наиме, овај аутор предлаже да се изађе из уобичајених логичких рута и да се до нових идеја може доћи само новим путевима, никако у оквирима старих шема размишљања. Опсервације и извесни концепти функционалне организације мозга јесу основа за приказ латералног размишљања, као природног облика испољавања и решавања ситуација. Латерално и вертикално размишљање нису међусобно супротстављени, чак су и комплементарне форме. „Функционална организација ума као оптимизујућег система чини да он ситуацију тумачи на начин који ће довести до највероватнијег објашњења. Ред вероватноће је одређен искуством и потребама тренутка. Вертикално размишљање јесте размишљање велике вероватноће“ (De Bono, 2001, 16). Дакле, људски мозак има разрађене синаптичке везе, које се активирају и при решавању одређених ситуација успоставља се систем могућности (или: мозак врши претрагу по систему могућности) за решавање одређене ситуације, коју покушава да разуме и да решење. Вертикално размишљање представља кретање путевима који су највероватнији и повећава им вероватноћу за неко активирање у будућности. У том смислу, латерално размишљање јесте размишљање мале вероватноће, јер није ни на који начин успостављено и представља новум за мозак и синаптичке путеве. Оно јесте у логичком смислу тачно, односно, истинитост му се не може оспорити, али је нови канал којим се креће мишљење. De Bono (2001) тврди да је основна разлика у томе што се вертикалним размишљањем ум налази под строгим контролом логике, а латерално размишљање омогућава да се логика налази у служби ума (De Bono, 2001, 18).

Едвард де Боно даје критику образовања и износи да оно снабдева субјекта готовим решењима у облику знања и тако га онемогућава да буде креативан, тј. осујећује га у сагледавању ситуација на начин који је нов, односно да ситуацију сагледава на начин који не би био коришћење већ постојећих образаца опсервирања и доношења готових решења или примене опробаних рецепата. За латерално размишљање јесте обележје то што субјекат успева да ситуацију која је непозната сагледа на потпуно нов начин и понуди решење које није из арсенала припремљених

током година и година школовања. У томе и јесте веза креативности/стваралаштва са латералним размишљањем. Образовање се не бави прогресом, оно даје знање које је корисно и комуникативно, али није креативно (De Bono, 2001, 28). Отуда и не постоје обрасци који би се могли назвати обрасцима латералног размишљања, па га је у суштини тешко и изложити за лако разумевање.

Латерално размишљање почива на *перцептивности ситуације* - ситуацију бисмо могли да дефинишемо као „онај део света који сачињава наше непосредно окружење“, док се перцепција „састоји од неодређеног броја различитих информација добијених чулима, о оном делу окружења на који смо обратили пажњу“ (De Bono, 2001, 37). Што је перцепција ситуације сложенија и обухватнија, то има више података за могућност проналажења решења и одговора на захтеве инструкције или дирекције. Дакле, већа перцепција јесте информативнија, односно лакше се долази до путева мале вероватноће, тј. до решења латералним размишљањем. Одређена ситуација има одређену структуру, која се разлаже на одређене делове, мада не значи да је она од тих делова била састављена. Тако се непозната ситуација као целина разлаже на познате делове, а у сваком довољно великом континуираном узорку има делова за које можемо да кажемо да се могу одвојити од целине (De Bono, 2001, 45-47). Контекст ситуације је важан и он изнедри метод сагледавања и решавања који сам по себи није најбољи, осим за конкретни контекст. Највећи део којим се разлаже ситуација по правилу се проглашава јединицом, што индукује низ других елемената у овом инструменталном методу (како би га назвао Виготски). Назовимо ову основну или базичну јединицу Б-јединицом, онда добијамо следеће елементе: Б-садржина, Б-оквир, Б-облик, Б-узорак, Б-фаза, али и видљивост или делимичну видљивост ситуације. Ови Б-елементи, како су названи, односе се искључиво на конкретну Б-јединицу и немају други смисао у разматрању или анализи извесне ситуације. За јединицу важи да „што је сложенија јединица поделе, то су једноставнији односи међу јединицама, а што је јединица простија, то су односи сложенији“ (De Bono, 2001, 59) и „што је јединица једноставнија, то је њена примена шира“ (De Bono, 2001, 61) и снага Б-јединице изграђена је њеном употребљивошћу (De Bono, 2001, 63). За јединицу важи и тврђење да што је једноставнија, а обухватнија, то је њена примена већа на различитим

ситуацијама.⁸ (У Прилогу 3 пример разлагања ситуације базичом јединицом дат је уз помоћ неколико илустрација)

De Vono (2001) држи да „континуитет света око нас је од стране нашег ума подељен у дискретне јединице (De Vono, 2001, 82), а да је избор јединица за разлагање диктиран односима којима их поново комбинујемо – њиховом блискошћу, погодношћу и расположивошћу (De Vono, 2001, 83). Флексибилним посматрањем и флуидношћу могућности, и софистицираном интеракцијом између информација, можемо да сагледамо одређену ситуацију и да је решимо на потпуно нов и неочекиван начин.

Усмерење на вежбање и проширивање перцепције јесте елементарно код успостављања латералног размишљања. „Перцепција је најважнији део процеса размишљања. Перцепција је начин на који посматрамо свет. Шта све узимамо у обзир. На који начин структурирамо свет“ (De Vono, 2008, 18). Промена и проширивање перцепције на даје само резултат код латералног размишљања, већ и код примене вертикалног размишљања, јер ни добра логика не може да помогне код лоше перцепције (De Vono, 2008, 19). Пошто добра перцепција омогућава да имамо што више информација за обраду, а тиме и да пре дођемо до решења, „изврност у обради не надокнађује мањкавост перцепције“, јер „перцепција представља начин на који посматрамо ствари. Обрада је оно што радимо са том перцепцијом“ (De Vono, 2008, 53). Добити од латералног размишљања имамо у томе што сваку ситуацију коју сагледавамо види као нову, док вертикалним размишљањем имамо да тежимо томе да није потребно размишљати. Наиме, мозак функционише тако да у одређеној ситуацији или за одређену ситуацију има сасвим извешан образац реакције, препозна околност и поступа по шеми од раније познатој или сада спремљеној за све будуће сличне околности. Тиме се укида размишљање (De Vono, 2008, 51). Едвард де Боно истиче важност познавања функционисања мозга, јер то омогућава ефикасније тражење решења за различите ситуације и превазилажење коришћења постојећих образаца размишљања који практично укидају размишљање. Поред овога, увежбавање перцепције и њено непрекидно мењање у различитим околностима омогућава да се превазиђе и погрешан избор образаца који постоје, али и искрсавање скривених образаца за које нисмо свесни да постоје и који се имплиците намећу.

Концептом *паралелног размишљања* отклања се конфузија, као основна потешкоћа у вези са размишљањем. „Покушавамо да обавимо сувише тога одједном.

⁸ Најјасније или конкретно објашњење перцепције и анализе ситуације применом базичне јединице може се наћи у четвртом поглављу књиге аутора De Vono (2001), које је читаво посвећено овој проблематици.

Емоције, информације, логика, нада и креативност“ (De Bono, 2000, 10), тако да нам концепт назван *Шест шешира за размишљање* омогућава да вршимо разврставање, перцепцију ситуације и мапирање решења. Сваки од шешира је одређене боје и према бојама се одређују апспекти сагледавања ситуације и могућности мапирања. Дакле, имамо следеће:

Бели шешир – неутралност и објективност. Заокупљеност објективним чињеницама и бројкама.

Црвени шешир – љутња, бес и емоције. Сагледавање са емотивне стране.

Црни шешир – туробност и негативност. Негативни аспекти, због чега нешто не може да се учини.

Жути шешир – сунчаност и позитивност. Оптимистичност, нада и позитивно мишљење.

Зелени шешир – трава, вегетација, обилан и плодносан раст. Креативност и нове идеје.

Плави шешир – хладноћа, небо (изнад свега другог). Контрола и организација процеса мишљења, коришћење осталих шешира.

(De Bono, 2000, 43)

Овако приказано, разврстано сагледавање, које укључује и емоције, вредности, намеру за суочавањем са ситуацијама, обухватање ситуације као целине, могућност измештања или вишеаспектно сагледавање, стављање у метапозицију, управљање аспектима и размишљањем једнако као и емоцијама, мапирање и приказивање комплексности ситуације јесте основа за успешан процес размишљања. Едвард де Боно на овај начин сугерише извесну *културу размишљања* у оквиру које је могуће уважити све актере извесне групе која интерагује, али и све делове личности која перципира свет који нас или је окружује. Дакле, подела улога пред намеравани процес сагледавања ситуације и намера за размишљање и реактивно размишљање кад смо већ дубоко у разматрању ситуације, јесу одлика успешно планираног процеса са мапом ситуације као исходом. Управо овако изложено виђење могућности целовитости или обухватности размишљања јесте та култура и артифицијелност овог поступка при чему различито мишљење или неслагање није сукоб, већ интенција откривања истине – жеља да се открије истина (De Bono, 2011, 31).

МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ И РАЗВОЈ У ПРОЦЕСИМА ОБРАЗОВАЊА

У уводном тексту зборника *Новија филозофија математике* (1987), приређивач Звонимир Шикић износи да је сигурност математике у њеној апстракцији (Šikić, 1987, 13), док у неколико редака пре тога у извесном разматрању истиче проблематику њене примењивости, што оцртава разлику између старије и новије филозофије математике. Наиме, за математичаре антике подручје апстракције је оно у коме се математика збива, док каснији, арапски математичари, преко којих смо добили списе првих, већ истичу њену примењивост, те значајно развијају аритметику и геометрију као примењене науке (Стројк, 1969, 101). Отуда и упитаност о односу сигурне апстрактне математике и конкретне природе и решењу тог односа – „решење које идентификацијом конкретне природе с апстрактном математиком објашњава примењивост апстрактне математике у разумевању конкретне природе“ (Šikić, 1987, 13) јесте сугестија извесне бијекције између математике као менталног артефакта и стварности, збиље. И, направивши својеврсну инвентуру од Талеса, преко Питагоре, Демокрита, Зенона, Платона и до нововековног Канта, долазимо до тога да математичка спознаја као априорна, јесте конституенс стварности, заправо конкретно и апстрактно су иманентни и међусобно повезани, те тако и математика решава свој проблем примењивости (Šikić, 1987). Али, сада у нововековној математици постаје спорно оно што код Грка не беја – сигурност апстрактне математике. И, три су математичке школе давале одговоре на ову упитаност – заступници логицизма, интуиционизма (конструктивизма) и формализма (Stipanić, 1988, 151). Овде ћемо застати са разматрањем које више није тема, јер „било каква несигурност у основама 'најсигурније од свих знаности' крајње узнемирује“ (Carnap, 1987, 35) и упутити се ка томе шта на основу изнетог представља *математичко мишљење* и како га осветлити за обухватније сагледавање. Ово износимо из разлога што постављамо питање да ли је математичко мишљење изведено из логичког, као општег, да ли га конструишемо или пак постулирамо и изграђујемо као својеврсни културни артефакт и арсенал инструменталног метода о коме излаже Виготски (Vigotski, 1996a, 85). Истовремено, савремени налази сугеришу „да је математика далеко од чистог културног конструкта: она захтева пуну функционалност и интегритет специфичних структура мозга“ и

одговор тражимо у тзв. „пластичности – флексибилности – неуронских кола при математичким операцијама“ (OECD, 2010d, 21).

T. Armstrong (2006) конкретизује концепт *вишеструких интелигенција*, омогућавањем сагледавања индивидуалног развоја „демистификацијом концепта интелигенције“ и постављањем „функционалног концепта“ према коме је могуће сложено осмишљавање процеса учења, тако да се поштује индивидуалност и посебне способности субјекта, који се развија у складу са могућностима које поседује, односно, у складу са диспозицијама. Гарднеров „начин мапирања широког спектра људских способности“, који дели у осам категорија или области „посебних“ интелигенција јесте основа за Армстронгову разраду за рад по разредима. Једна од ових способности јесте *логичко-математичка* и описана је на следећи начин: „Логичко-математичка интелигенција (Logical-Mathematical Intelligence) способност је успешног коришћења бројева (нпр. математичари, рачуновође или статистичари), односно логичког мишљења (нпр. научници, рачунарски програмери или логичари). Ова интелигенција укључује осетљивост на логичке обрасце и односе, премисе и судове (ако-онда, узрок-последница), функције и друга сродна апстрактна питања. Логичко-математичка интелигенција користи се у поступцима попут категоризације, класификације, закључивања, генерализације, рачунања и тестирања хипотеза“ (Armstrong, 2006, 14). Дакако, није само овај облик интелигенције онај који се доминантно користи или је доминантно ангажован или се развија учењем математике. Овде бисмо могли да укључимо и *просторну интелигенцију* (понегде у литератури названу и *спацијалном интелигенцијом*), као и *природњачка интелигенција* (називана је и *натуралистичком*) и обе су у директној повезаности са логичко-математичком интелигенцијом, што говори о томе да ових осам категорија које даје Гарднер нису сепаратне и дисјунктне, већ да се преплићу и узајамно подстичу развој субјекта, као целине. Познавање математике, односно математичког мишљења „као људског средства у откривању тајни и закона природне стварности“ (Stipanić, 1988, 11) јесте потврда изречене повезаности различитих врста способности, тако да посебно математичко мишљење које је овладало веома апстрактним појмовима и објектима, теоријама које репрезентују односе стварности од посебног је значаја за развој човека. „Математика је наука која проучава односе између извесних апстрактних предмета дефинисаних само под условима да њихове дефиниције не повлаче контрадикцију и да се могу користити и у другим наукама“ (Stipanić, 1988, 88).

Ако прихватимо уџбеничку поделу способности на *перцептивне (опажајне), психомоторне и интелектуалне* (Hrnjica, 2005, 223), потребно је указати да су све три неопходне у развоју мишљења, посебно математичког. Субјект у раном узрасту (детињству) развија моторику и стиче искуство конкретним радњама, те врши опажање, успева да држи пажњу, да увиди и анализира односе, као и да мења односе између објеката, да прати интеракцију између објеката или различитих субјеката, да се укуључује и интервенише, мења околности и срединске услове и да све ово анализира и доноси одговарајуће одлуке, које опет мењају околности и праксу, да препозна ситуацију и примени познати образац, да идентификује нову околност и нађе решење ситуације.

Уколико прихватимо да је *мишљење* „облик адаптивног понашања“, тада идентификујемо постојање одређеног мотива који га покреће, те „полазна чињеница у мисаоном процесу је постојање одређеног задатка“ (Hrnjica, 2005, 262). Уствари, перцепцијом прикупљамо информације одређене ситуације, затим вршимо обраду информација и предлажемо решење, тако да оно пролази кроз процес евалуације, рефлексije и повратном везом до корекције обрасца решења. Мисаона активност јесте сврсисходна, усмерена на решења ситуација и зависи од претходног искуства субјекта да препозна околности.

Када дискутујемо о врстама мишљења, неопходно је да дефинишемо *конкретно* и *апстрактно* мишљење, јер је ово од посебног интереса за развој математичког мишљења.

„*Конкретно* мишљење обухвата мисаоне процесе у којима се онај ко решава проблем користи претежно конкретним елементима неке ситуације (опажајима и представама). Понекад се назива и перцептивним или ситуационим мишљењем“ (Hrnjica, 2005, 267).

„Облик мишљења у коме елементи којима се решава проблем нису дати у опажајном пољу, а ни у облику конкретних представа, већ се као основна средства за решавање проблема користе симболи, назива се *апстрактно* мишљење“ (Hrnjica, 2005, 267).

Свакако, можемо још говорити и о *продуктивном, критичком, стваралачком, реалистичком* или *имагинативном* мишљењу, и уколико буде потребе, дефинисаћемо га на одговарајућем месту.

Аутори Пијаже и Inhelder (1996) истичу да „је дете подређено одраслима и да одрасли врше психолошку принуду над дететом“ (Pijaže & Inhelder, 1996, 29).

Изложено важи када говоримо о организацији учења, посебно математике, тако да се трудимо да осмислимо методе учења, које уважавају природни развој детета, онако како су то истицали Пијаже, Виготски, Маслов и остали водећи научници развоја човека, његове актуализације и актуализације његове мисли.

Бавећи се развојем математичког мишљења, иако „постоји стална паралелност између афективног и интелектуалног живота“ (Ријаже & Inhelder, 1996, 26), неопходно је да знамо и трудимо се да у његовом развоју афективне тонове стављамо по страни, а бавимо се појмовима „високог степена апстрактности чија су значења прецизно омеђена, а односи доследно успостављени“ (Марјановић, 1996а, 28). Дете, развијајући се успоставља *представе* о свету који га окружује, тј. прави *менталну слику* (*визуелизацију*), што је начин стварања слике одређених објеката или предмета у њиховом одсуству, али и њихових својстава и односа (Марјановић, 1996а, 29) – прелазак са конкретног у апстрактно или формално. Што је искуство веће, обухватније, то је ментална слика квалитетнија, оштрија (Марјановић, 1996а, 30). Путем чула сазнајемо свет који нас окружује (вид, слух, додир, укус и мирис), перцепцију обрађујемо и податке преводимо у информације. Тако настају одређене сазнајне структуре, а њихове „структуралне одлике представљају првостепене податке при опажању, а можда се могу сматрати непосреднијим и елементарнијим доживљајима него што је апстраховање заједничких својстава у низу појединачних случајева.“ (Марјановић, 1996б, 3). Математичким мишљењем сагледавамо објекте (математичке), уочавамо њихове међусобне односе, оперишемо њима, анализирамо ситуације, околности и решавамо задатке као мотивационе подстицаје за прелазак из једног у други, виши, сложенији стадијум мишљења и овладавања знањима. Постоје мисаоне операције које су различитог нивоа сложености и задавањем инструкција за решавање, успостављамо и вежбамо их, тако што се припремамо за наставак непрекидног конструисања и прекомпоновања знања. Математички објекти са којима радимо могу бити веома различити – геометријски облици (тачке, праве, равни, дужи, фигуре, тела...), искази (дефиниције, аксиоме, теореме, леме, тврђења, ставови, хипотезе...), низови симбола (формуле, релације, једначине, неједначине, једнакости и неједнакости, функције...)... Развојем, постаје нам јасно да одређени објекти не могу да се стављају у однос са неким другим и тако успостављамо сложенији систем функционисања мишљења. Ако кажемо кружница или круг, треба да разумемо основну разлику, између њих, а онда и разлику између њихове материјализоване и идеалне представе у менталној слици света. Кружница је линија без димензија у смислу

идеалног математичког облика без ширине. Материјализована кружница, нацртана шестаром, већ има линију одређене ширине, тако да то није идеални објекат, већ његов репрезент, којим оперишемо у математичком мишљењу, не осврћући се на ова својства материјалности. Решење ситуације транспонујемо и враћамо у свет идеалног, у коме доносимо одређене закључке. „Развој мишљења има веома велики, кључни, пресудни значај за све остале функције и процесе“ (Vigotski, 1996d, 89), а развој математичког мишљења од посебног је значаја за развој интелектуалних способности. „Организам изводи сложену анализаторску делатност, он као да раставља стварност на танане елементе и способан је да утаначи везе својих реакција с овим или оним елементима средине с изузетном прецизношћу“ (Vigotski, 1996a, 151). Управо математичко мишљење омогућава да се прецизно, јасно и једноставно позабавимо математичком стварношћу, затим из менталне слике покушамо да изведемо извесне закључке стварности која нас окружује – „математика као један *аспект поимања стварности* одражава стварност“ (Stipanić, 1988, 163).

Појмовно посматрано, развојем математичког мишљења, нисмо у могућности да успоставимо потпуну математичку структуру одједном, што је разумљиво и природно. Наиме, у зависности од развоја способности уопште, посебно логичко-математичких, учењем математике усвајају се математички појмови, не одмах, моментално у пуном опсегу и садржају. Постепено овладавање математичким појмовима јесте од суштинске важности за осмишљавање и организацију наставе и учења математике. Субјект или ученик, има сопствени ритам у развоју и самим тим сопствену структуру знања коју непрекидно изграђује, прекомпонује и допуњава. У зависности од процеса конзервације, рецимо запремине, одређени појмови се уводе, постављају у везу са другим математичким појмовима, тако да се учењем непрекидно усвајају нова знања, а математичко мишљење унапређује, а опсег и садржај појмова шири и продубљује. Читава структура математичког мишљења кореспондира са структуром математичког знања, али и читавим психолошким системом субјекта о коме је говорио Виготски. Интеракција и узајамна детерминисаност ова три система са другим елементима развоја субјекта, агенсно и арбитарно делује на резултујући хабитус.

Математичко мишљење је нешто што је „апсолутно нужно“ и неминовно са аспекта теорије сазнања. Аутор Бранислав Петронијевић (1991) тврди да „егзистенција мишљења, кад је једном ту, неукидљива је“ (Петронијевић, 1991, 102). Суђењем, разлучивањем повезују се и одвајају појмови, који су елементи мишљења, а његова суштина састоји се у констатовању ситуације (датог, реалног) и њене „унутрашње

структуре“, те „мишљење мора да одвоји једно од другог оно што хоће да констатује, од онога на коме треба ово да констатује, и то раздвојити само зато да би се установила саприпадност онога што је раздвојено, да би се изрекла иманенција одређености, предиката у ономе што ваља одредити у субјекту... разлучивање датог у мишљењу на представу субјекта и предиката чини нужни услов констатовања заједности у датом, и то ово раздвајање и рашчлањавање не догађа се у датом него у мишљењу као сазнавајућој функцији која се односи на бивствујуће“ (Петронијевић, 1991, 41). Дакле, конкретизацијом појмова, операција, субјекта, предиката, добијамо јасно слику функционисања математичког мишљења, његове нужности за сазнање света, и да једном успостављено, практично је неукидљиво. Механизми овог менталног одговора организма на околности сазнавања стварног и представљања стварног у менталној визуелизацији и процеса просуђивања, закључивања ових представа успостављају се уз помоћ инструменталног метода који третира више нивое психичких функција, где спада и математичко мишљење (Vigotski, 1996a, 85).

Конструкцију, структурисање, али и продукцију математичких знања код субјекта омогућава математичко мишљење. Наиме, посматрајући развој детета, у једној својој фази долази до успостављања „инфралогиких“ операција, које нису *прелогичке* у односу на целокупан развој логичности. Прелогичност подразумева да код детета или субјекта постоји систем закључивања који још увек нема атрибуте логичности, тако да два низа жетона различитих боја, уколико је један ређе поређан и нису бијективно кореспондентни, већ им се поклапа први и последњи у низу, одговор који се добије јесте да су истобројни низови – што је неистинито. Инфралогишко подразумева успостављање структура које су основа за доградњу до логичког мишљења и које претходе логичком закључивању, али не на начин који даје неисправне или нетачне одговоре. Уствари, инфралогишко представља само један след у одговарајућем или исправном формирању структуре логичког, тако да се оно темељи на истинитом и ваљаном закључивању подржаном структурама које још увек нису биле у фази логичког, али су задовољавале принципе истинитости или ваљаности (Пијаже, 1994, 190). Ово илуструјемо тиме да се код субјекта представе о геометрији и метрици формирају теоријски (од тополошких до еуклидских поставки), а не историјски (од еуклидских до тополошких поставки)⁹. Приказана сложеност формирања математичког мишљења и улазак у логичко изводи се преко две врсте објеката које су у фокусу

⁹ За јасније разумевање *прелогичког* и *инфралогишког* погледати (Piјаже & Inhelder, 1996, 36) и (Piјаже & Inhelder, 1990, 114).

математике, а то су дискретни и континуирани скупови, односно структуре и користићемо их током објашњавања успостављања математичког мишљења операцијама над стварним/физичким објектима као репрезентацијама математичких објеката, структура и појмова.

Као и код приказаног преласка из прелогичког у логичко у развоју субјекта, сигурно је од значаја осветлити још један важан моменат или дешавање у процесима математичког мишљења и његовог односа са структурисаним знањима математике, али у вишим нивоима развоја. У једном тренутку, знања математике која су стечена уз помоћ математичког мишљења, код субјекта ће бити таква да овладава читавим једним теоријским, аксиоматским концептом. Тај домен знања јесте такав да можемо да кажемо да је уређен. Између појмова тог домена знања владају сасвим одређени унутрашњи логички односи, математичка правила и они су такви да се екстраполацијом и интерполацијом долази до нових структура, домена који испуњавају услове математичке теорије, односно новог уређеног домена знања (Романо, 2008, 9).

Сада можемо да потврдимо да „математичко мишљење јесте ментална активност укључена у апстракције и генерализације математичких идеја“ (Wood, Williams and McNeal, 2006, 226). У конструкцији математичких знања као специфичних домена знања субјекта, математичко мишљење омогућава разумевање концепата, структура, објеката, репрезентација, расуђивања и суђења, оперисање са свим наведеним ентитетима математике као науке, али и у вези са светом у коме постоји као ентитет по себи.

Значајан допринос развоју когнитивног приступа, заправо, уређенијем разматрању тока процеса развоја учењем, потиче од Benjamin-a S. Bloom-a (1981), који је 1956. године јавности дао на увид *TAXONOMY OF EDUCATIONAL OBJECTIVES – The Classification of Educational Goals (HANDBOOK I COGNITIVE DOMAIN)*, којом је описао модел функционисања памћења, мишљења и решавања проблема у подручју когнитивног и на који начин можемо мерити циљеве ових процеса. Овај аутор је са групом сарадника дао класификацију нивоа мишљења који се развијају и представио их у шест категорија, које су кумулативног карактера, што значи да свака следећа садржи претходне нивое мишљења, и није могућа без протеклог развоја. Ова хијерархија није по важности, већ по кумулативности, како смо већ навели, односно, „васпитни циљеви једне категорије надограђују се и укључују облике понашања претходних категорија“ (Bloom, 1981, 20). Ове категорије су следеће:

(1) Знање

- (2) Схваћање
 - (3) Примена
 - (4) Анализа
 - (5) Синтеза
 - (6) Евалуација
- (Bloom, 1981, 20)

Наведена је изворна категоризација и како је преведена на српски језик, с напоменом да су касније рађене различите корекције, допуне и измене, али су основна идеја и категорије задржане као што је то урадио Бенџамин Блум са сарадницима.

Блумова таксономија погодује настави математике и за наставнике јесте прави алат за квалитетно осмишљавање процеса и активности учења, тако да се могу јасно структурирати у планирању, а онда да прати реализација и на основу ње врши вредновање и евентуалне корекције (интервенције и исправке) (Damjanović, 2010)¹⁰. Табела Блумове таксономије може се адаптирати за било који наставни предмет, па и за наставу математике, тако да се кроз њу може учити по нивоима, односно категоријама, тип очекиваног мишљења и типови активности (захтеви за спровођење активности). За наставу математике могуће је конкретизовати табелу тако да имамо категорије математичког мишљења, глаголи који се користе у припреми инструкција које поспешују одговарајући ниво математичког мишљења, а онда и примери задатака за сваки интендирани ниво (Damjanović, 2010, 22).

Претходним примерима приказана је сва сложеност мишљења, на било ком нивоу развоја, условљеност и детреминисаност, тако да сâмо математичко мишљење представља посебан домен опште структуре мишљења субјекта, као део његових посебних способности, математичких, повезаних са осталима у свој својој комплексности психичког система субјекта који се актуализује. „Наставом математике, посредујемо, у коначном, критичко мишљење, а један од неопходних чланова у овом импликацијском ланцу јесте развој мишљења/математичког мишљења“ (Damjanović, 2010, 18), уствари, математичко мишљење је у овако изнетим везама *coditio sine qua non*.

Многи су након Бенџамина Блума радили на разради и већој софистицираности таксономије, да би елементи мисаоних процеса и функције мишљења могле боље да се прате, посебно са развојног аспекта, а тиме и побољшавале инструкције у настави и

¹⁰ Разрађена примена Блумове таксономије на област наставе математике може се видети у (Damjanović, 2010), што је објављена магистарска теза аутора.

учењу. Нарочито се тиме бавила ауторка Г. Вилијамс (Williams, 2000) и у неколико својих радова, самостално и у групи приказала резултате истраживања у вези са развојем мишљења и социјалним окружењем, заправо утицајем културе окружења где се настава и учење одвијају¹¹. Њихов главни налаз јесте да постоји значајан утицај између социјалних интеракција и когниције (Wood, Williams and McNeal, 2006), посебно су пратили наставу математике и долазили до извесних закључака. Развој мишљења (когнитивних активности) пратили су у три развојне фазе у које су сместили и разрадили нивое из Блумове таксономије – *препознавање* (разумевање, примењивање), *изградња-са* (анализирањем, синтетичким-анализирањем, евалуативним-анализирањем) и *конструкција* (конструисањем, синтетизовањем) – Погледати Прилог 4. Све ове фазе или нивои јесу кумулативног карактера, јер је сваки условљен развојем претходног. Наиме, уколико ученик досегне у свом развоју до последњег нивоа, *конструисање – синтетизовањем*, тада улази у област комплексног, аутономног, спонтаног, стваралаштва и то је област апстракција у којој су активности математичара научника/истраживача, а корен се налази још у првим нивоима *препознавања* (разумевање, примењивање). Наравно, ови нивои се развијају образлагањем, генерализацијама и апстракцијама математичких идеја, концепата, структура (Williams, 2002a) и (Williams, 2002b). Разлика између последњег нивоа *конструисања* и нивоа *изградња-са*, јесте у томе што први подразумева стварање нових математичких конструката и структура, док потоњи оперише са постојећим структурама.

Полазећи од „невероватне комплексности у дечијем изражавању математичког мишљења“ (Wood, Williams and McNeal, 2006, 222), наведена група аутора је испитивала обрасце понашања, интеракције ученика, партиципацију и изражавање математичког мишљења у више различитих окружења која су конструисана за потребе испитивања. Два окружења наставе и учења била су *конвенционалног* типа – рад са свеском и бележење онога што наставник даје као инструкције, без значајног дијалога, доминантно на нивоу репродукције и понављања знања која су испоручена (очекивана питања и одговори); други тип конвенционалног окружења јесте био слободнији и

¹¹ Уз Блумову таксономију, основа за рад Г. Вилијамс, били су радови бројних истраживача и научника, који су дали поставке за оно што је Вилијамсова на неки начин „препаковала“ у тзв. *Хијерархију менталних активности*, а касније предложила да се то назове *Угњеждене категорије интелектуално све сложенијих активности*, док је сам процес назвала *угњеждени когнитивни процеси повезани са математичким стваралачким понашањем* (Williams, 2002b, 2-3). Аутори које је Вилијамсова обрађивала су: Krutetskii, V.; Dreyfus, T.; Hershkowitz, R.; Schwarz, B.; Tsamir, P. У Прилогу 4, дате су референце за радове ових истраживача.

доминирало је решавање проблема на који су били ученици фокусирани и објашњења којима су описивали тај поступак, и наставничко вредновање исказаног. Друге две културе учења су се одвијале у тзв. „реформисаним групама“ – једна је била оријанисана на извештавање о стратегијама решавања проблема, а друга на истраживања и аргументацију при решавању проблема, односно бавила се различитим могућим решењима и дискусијама по тим питањима. Сви су обрађивали исте садржаје, области математичког знања и задатке и проблеме, али на различите начине и уз различите приступе. Током активности наставе и учења бележене су фреквенције образаца интеракције и ученичке партиципације, елемената и нивоа математичког мишљења и упоређиван њихов број. Највише активности се одвијало у реформисаним групама и то у групи која се бавила истраживањем и аргументацијама, тако да је био присутан највећи број ученичких интеракција у различитим обрасцима (у паровима, у групама, на нивоу већих група, јавно излагање, образлагање и заступање ставова – личних и групних), повећана ученичка партиципативност, учешће у решавању проблема (лични допринос и допринос групе у процесу учења, дискусије, размена) и разноврсност активности које су промовисала математичко мишљење у високом хијерархијском нивоу (анализа ситуација, синтетисање стратегија, вредновање више различитих стратегија, конструкција математичких структура, разлагање и стварање нових) (Wood, Williams and McNeal, 2006).

Општи је закључак претходног излагања резултата истраживања математичког мишљења у учioniчкој пракси или развоја у учioniчким условима, да је важна улога социјалних интеракција у изградњи мишљења (когнитивни разлози) и разумевању структуре математике, а са друге стране ученичко вербализовање властитог математичког мишљења у оквиру радног окружења развија (али и карактерише) извесне обрасце социјалне интеракције. Ако у радном окружењу имамо само наставника који даје сагласност на стратегију решавања проблема, није исто уколико су укључени и други „слушачи“ тако да заједно решавају, дискутују, вреднују и постоји мноштво приступа који опет интерагују и долази се до коначног решења. Ученик који треба да другом ученику објасни смисао одређеног мишљења (или другим ученицима), јесте у вишем нивоу интеракције и партиципације, али и математичког мишљења. Образлагање, разјашњавање, разумевање се добија у једној веома сложеној комуникацији свих са свима, која је контролисана и осмишљена, не стихијска. Специфични обрасци интеракција доприносе квалитету ученичког изражавања мишљења, али стоји и да испитујући различите наставне праксе (конвенционална,

конвенционална решавања проблема, извештавање о стратегијама, истраживање/аргументација) ученичко математичко мишљење исказано и вербализовано у групи и у јавном говору, јесте опозитно оном које се дешава у унутрашњем говору и приватно (Wood, Williams and McNeal, 2006). Стога потребни су „наставници који могу да рефлектују на своје ученике репрезентације математичких идеја и помогну им да развију невероватно софистициране математичке репрезентације“ (Clements, 1999, 47), у окружењу пуне партиципације ученика и социјално пожељних образаца интеракција.

На крају, посматрајући из области неуронаука, можемо да кажемо да „математичка писменост ствара се у мозгу путем синергије биологије и искуства“ (OECD, 2010d, 126). Неуронаука доприноси развоју дидактике математике из разлога што њени налази представљају значајан напредак у разумевању процеса који се одигравају током учења, као и могућности учења, на крају предикције математичког мишљења. Области у мозгу, које служе за математичку писменост су и код деце и код одраслих исте, иако се софистицираност способности за математичку увећава учењем. Исраживања и закључци који су донети на основу њих омогућавају нам да изведемо неке принципе о којима треба да се води рачуна: (i) „математика се може издвојити из других когнитивних домена“; (ii) „способност унутар домена математике могу се даље разврставати“ (OECD, 2010d, 129). Наведено потврђује ставове о постојању вишеструких интелигенција, а друго је важно за наставнике математике који осмишљавају дидактичке приступе, да ученик који је склон математици, или који год ученик, има различите диспозиције за различите врсте математике или различите математичке дисциплине. Дакле, ученик који је надарен за математику, није надарен за све њене области подједнако. Још, када се ово сазнање удружи са сазнањима из других области учења, рецимо језика, долазимо до тога да ученика са дислексијом је потребно на посебан начин упућивати и водити кроз учење у односу на ученика типичног или уобичајеног развоја. „Наставници математике требало би да обезбеде мноштво различитих начина представљања градива и вредновања“ (OECD, 2010d, 129). Неопходно је имати у виду и то да генетски предодређене структуре у мозгу не могу саме од себе да продукују математичко знање, већ им је потребан додатни стимуланс преко додатних неуронских мрежа које се стварају временом и стимулацијом учењем, тако да „математика обухвата здружено функционисање низа неуронских мрежа које укључују генетски специфичне квантитативне структуре и, од искуства зависне, биолошки-компатибилне структуре“ (OECD, 2010d, 126). Познавање претпоставки за

учење на основу сазнања из неуронаука, доприноси да настава математике постане инклузивнија, а могли бисмо да кажемо да се доследније уважи наставни принцип индивидуализације наставе и учења.

Неуронаука математике омогућава ефективнију, а и ефикаснију, реализацију наставе и учења математике, односно, „једна од улога формалног математичког образовања јесте да унесе кохерентност и флуидност у знање математике“ (OECD, 2010d, 126), што се постиже свеобухватним приступом у разумевању и осмишљавању процеса учења.

КОГНИТИВНЕ И МЕТАКОГНИТИВНЕ ПРЕТПОСТАВКЕ УЧЕЊА (МАТЕМАТИКЕ)

Када анализирамо, а и осмишљавамо наставу математике, првенствено активности учења математике, најпре ћемо посегнути за когнитивистичким теоријама или теоријом, због природне блискости са математиком, која је готово читава у мисаоном делу човека, иако има једно од прибежишта у стварима свакодневног живота. Бихејвиорални или гештALT приступи у учењу математике имају своје место, тако да не можемо да кажемо да су одбачени, што важи и за многе друге приступе изучавања и афирмације човечије психе, нпр. хуманистички, неуронаучни приступи. Можемо слободно да кажемо, да укрштањем налаза различитих теорија добијамо јединствену слику функционисања мишљења, посебно математичког мишљења.

Из перспективе когнитивистичког ученик није објекат који посматрамо и на њега делујемо тако да очекујемо извесно понашање које треба да доведе до пожељних исхода учења, већ је ученик субјект који продукује конструкцију сопственог знања. Ученик није објект окружења, ученик је субјект своје средине на коју делује. У том смислу, када указујемо да наставник није више у центру пажње, мислимо на ученика који својом акцијом доводи до продукта учења и конструкција домена знања. Сваки субјект учења поседује домен општих и специфичних знања, којима оперише и које у процесу учења увећава, конструише или прави потпуно нове структуре. Процес учења се одвија обрадом информација, њиховима памћењем, али пре свега тога пажњом, која нам омогућава да обухватимо што шири опсег информација и извршимо њихову селекцију за запамћивање, у смислу уклапања у постојеће конструкте знања. Да бисмо поједине информације обрадили, неопходно је да постоје развијене шеме, којима оперишемо, тако да се успоставља извесни процес мишљења; током учења математике, од првенственог значаја је успостављање математичког мишљења, које треба да унапређује мишљење субјекта уопште.

Иако је опште прихваћено да знање јесте исход учења, „међутим, знање је више од крајњег производа претходног учења, оно такође води ново учење. Когнитивистички приступ наводи да један од најважнијих елемената у процесу учења представља оно што особа доноси у нове ситуације учења. Оно што већ знамо је основа и оквир за конструисање сваког будућег учења“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 95).

Читав систем учења воде *контролисани процеси* који одређују токове информација кроз систем. То обухвата читав пут од уочавања, обраде и складиштења информације, али и момента када се она поново користи за дате ситуације или околности новог учења.

Перцепцијом (или: *опажањем*) обухватамо дражи или стимулусе, како би то рекао Виготски, додељујемо им значење. Док, *пажњом* се усмеравамо на одабране дражи, тако да поједине игноришемо, јер нису од користи за сагледавање концепата учења или система информација (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 100). Пажња тражи напор и нема неисцрпне изворе.

Проучавање процеса учења управо захтева добро познавање когнитивистичких процеса који се тичу пре свега пажње, запамћивања, односно меморисања знања, а и веома важан елемент који поспешује учење јесте мотивација или мотивисаност. Управо, стратегије и технике (негде се у литератури каже и тактике) учења да би биле ефикасне и ефективне треба да уважавају налазе који су добијени проучавањем наведених елемената когнитивистичког процеса учења. Иако одређена знања конструишемо у систем домена општих и специфичних знања, што временом, што на друге начине, та знања се губе, *интерференцом* (ометањем или мешањем старих и нових информација) или пропадањем.

„*Пропозиција* је најмања јединица знања за коју се може дати суд да је тачна или нетачна“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 117). Оне се умрежавају и нису део свесног код човека, тако да активирање једне пропозиције, може да доведе до аутоматског активирања читаве мреже, односно свих повезаних знања. Претходно смо поменули *шеме* и оне „представљају апстрактне структуре знања које организују огромне количине информација“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 119).

Да бисмо могли да регулишемо или контролишемо, једноставно да управљамо когницијом, неопходне су нам *метакогнитивне вештине*. Метакогниција јесте когниција вишега реда и заправо јесте когниција о когницији – знање о знању и учењу (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 135). Постоје три врсте метакогнитивних знања: *декларативно* – о себи, елементима сопствене когниције, познавање стратегија и техника решавања проблема или ситуација; *процедурално знање* – знање о околностима коришћењу извесних, конкретних стратегија; *кондиционално знање* – знање о тренутку и разлогу примене одређених стратегија (Bruningetal, 2004). Наставници треба да добро познају различите стратегије које су делотворне за осмишљавање и организацију процеса наставе као посебног процеса учења, и да једнаковремено томе поучавају своје

ученике. Дакле, ученици организовано, структурисано стичу извесна намеравана знања, истовремено уче како да уче, тако да у будућим процесима могу да се ослоне на сопствене ресурсе когниције и метакогниције. „Пошто је когнитивистичко становиште филозофска оријентација, а не јединствени теоријски модел, методе поучавања које из њега потичу су разноврсне“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 160).

Најзначајније поставке учења које развијају когницију јесу да ученици треба да уче откривањем, да током процеса учења буду активни, заправо да буду постављени у позицију да активностима и непосредним искуством долазе до знања. Ученици се уводе у околности *когнитивног нерета* (*когнитивна неравнотежа*), а затим осмишљеним активностима, дирекцијама и упутствима воде до закључака, који им омогућавају да сагледају ситуацију и структуришу информације које су учењем стекли. На овај начин ученици пролазе кроз *зону учења* и то на начин који називамо *вођеним открићем*. Након стечених искустава и изведених закључака и проширених домена знања (општих и специфичних), ученици се уводе у ситуације у којима треба да препознају и примене одређена знања, али да то не буде пука репетиција, већ опет проблем са обogaћеним новим знањима. Ученици треба да разумеју да решавање проблема и ситуација са којима се сусрећу у свакодневном животу, било у пољу науке, било у простору праксе, није увек идентично околностима у којима су стицали знања која су конструисали. Активирање шема, структура знања, мрежа пропозиција, јесте у сврху да се начине нове конструкције, структуре, шеме и знања и тако пластичношћу мозга о коме нам сведочи неуронаука одговори на сазнајни стимулус одговарајућим епистемоничним рефлексом. Овим ученици вежбају остваривање *увида*, кога бисмо могли да дефинишемо као „изненадна реорганизација или нова концептуализација проблема која разјашњава проблем и предлаже остварљиво решење“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 199).

Регулација и надгледање сопственог процеса учења јесте приступ који ученицима помаже у развијању ефикасних стратегија и техника учења. „Оно што ученици верују о знању и учењу (њихова епистемолошка уверења) утицаће на врсту старатегија које користе“ током учења (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 232). Овоме је потребно придодати и важност *трансфера знања*, којим се остварује смисао учења и сталног обogaћивања и реорганизовања домена знања.

Из једног широког концепта као што је селф концепт, могуће је извести конструкт *самоефикасности* који се односи на лично суочавање са проблемима на начин да се субјект ослања на сопствене капацитете, без освртања са стране да ли би то

могао и неко други да реши. Даље развијање овог конструкта води ка овладавању способности *саморегулисаног учења* или *саморегулације*, који субјекта уводи у могућност да своје менталне способности претвара у академске вештине и стратегије (Zimmerman, 2002). Коначно, очекује се да ученици постигну високу *агенсност*, односно „капацитет за усклађивање вештина учења, мотивације и емоција како би се постигли циљеви“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 267).

Учење има и своју социјалну димензију, тако да у заједницама праксе или школама/одељењима, ученици, кроз организовану и управљану интеракцију, а и ону која се спонтано одвија остварују свој когнитивни напредак. Енергентски резервоар за ефикасност процеса учења остварује се афирмацијом одговарајуће мотивације за сваког ученика посебно, али и на нивоу заједнице, одељења. Промовисање *интринзичке мотивације* која извире „изнутра“, односно, представља осећај унутрашњег задовољства у решавању проблема и ситуација учења и која учење представља као вредност-по-себи, и у саморегулаторним условима учења води субјекта у сталне успехе савладавања и изграђивања сопства. Интринзичка мотивација уколико не успемо да решимо проблем моментално, не доводи до разочарења и слабљења воље за даљим учењем, већ напротив, усмерава за даље упорно и марљиво проналажење решења. „Када смо интринзички мотивисани, нису нам потребни побуђивачи нити казне зато што је активност сама по себи награђујућа“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 324). Супротно овом концепту мотивације, постоји *екстринзичка мотивација*, која учење води тако да се као успешан исход учења награђује одређеним понашањем наставника, родитеља, оценом, материјалном наградом - „активност нас, сама по себи, не занима заиста, важно нам је само оно што добијамо обављајући је“ (Vulfolk, Hјuz & Volkar, 2014b, 325).

Коначно, културна димензија когнитивног аспекта учења је неизоставна и поједини аутори сматрају да се когниција и култура узајамно изграђују, да су узајамно детерминисане (Cole, 1985). Индивидуализовани приступ је примарни, али тако да се субјекат укључује интеракцијама са осталима у заједници праксе, која је његово окружење, и организованим и структурисаним активностима у којима ученик партиципира у процесу учења остварује се стални когнитивни напредак, јер знање је индивидуално конструисано и социјално посредовано (Windschitl, 2002). То социјално посредовано знање јесте опште добро и као такво увећава се и изграђује, конструише се као знања које носе појединци у својим когнитивним структурама и размењују на добробит заједнице у којој живе и стварају. Дакле, учење јесте један стваралачки чин

из разлога што сваки субјект поседује аутентичан домен општих и специфичних знања са свим пратећим елементима, стратегијама и техникама, структурама, шемама и мрежама информација.

МАНИПУЛАТИВИ У ПРОЦЕСИМА УЧЕЊА МАТЕМАТИКЕ

Наставници математике широм света, али и током историје, покушавају да учење математике учине прихватљивијим, разумљивијим и доступним што већем броју ученика¹². Овоме је прикључена и академска заједница, која налазима/доказима из истраживања наука подупире напоре за унапређивање образовања. Захтеви образовне инклузије усмеравају ка индивидуализацији наставе, тако да се од дидактичара тражи успостављање *дидактичког perpetuum mobile*-а. Из тих разлога, а и много других, афирмативних, дидактика покушава да пронађе или осмисли стратегије и технике најделотворнијег поучавања и учења, тако да сваки субјект у својој аутентичности може да се актуализује или успостави сопство у свој својој пуноћи. Сходно изнетом, дидактика математике прати развој дисциплина које се баве наставом и учењем (нпр. когнитивне науке, неуронауке, психологија у образовању), усвајањем концепата и увећавањем домена знања, свакако и начинима обезбеђивања резервоара енергената за одржавање ових процеса – мотивације. Извесни колега нотирао је нешто што је постало опште место наставе математике, а то је да искуства из учионица „показују да ученици имају доста потешкоћа у преласку на Формалну математику“ (Leron, 2010, 25).

Пролазећи кроз различите развојне фазе, како то описују и Пијаже и Виготски, али и било ко од истраживача из области когнитивног, у једном тренутку постоји прелаз из конкретног у формално или апстрактно мишљење. За математику је ово од посебног значаја, јер се непрекидно обитава у формалном, апстрактном, користећи се елементима из реалног окружења. Опажање, препознавање облика, држање пажње, осмишљавање података добијених од чула, репрезентовање знања и језичка обрада (вербализовање), суђење, закључивање и решавање проблема јесу процеси и функције којима се бави когнитивна психологија (Костић, 2010, 4), а од директног су значаја за формирање математичког мишљења. Управо, највећма ћемо се задржавати у делу који се бави менталним процесима који се одвијају када се добију подаци прикупљени чулима. Структуралне карактеристике менталног домена и математичко мишљење, заправо функције математичког мишљења и успостављање домена специфичних знања

¹² Conando Graeci Troia potiti sunt.

математике, као и реаговање мозга на учење математике, посредовано репрезентима у облику *манипулатива*.

Манипулативи представљају *стварне* (физичке, реалне) или *виртуелне* (рачунарске/софтверске програме, пакете) објекте помоћу којих (или: над којима) ученик ради, користећи своје сензо-моторне способности, при чему емпиријским путем врши проверу и вежба (утврђује) стечена знања, умења и вештине; уочава нове околности и чињенице, повезује и закључује, чиме изграђује нови корпус знања, умења и вештина (Damjanović, 2008, 36).

Иако није тема рада, у претходној дефиницији могуће је термин *ученик* заменити термином *субјект* или којим другим (агент, јединка, индивидуа, појединац...), а *корпус* знања, умења и вештина јесте онај *домен знања* о коме говоримо у оквиру когнитивног приступа учењу. Свакако, има овде још простора за филозофску дискусију око употребе одреднице *стваран* за реалне, физичке манипулативе, али о томе другом приликом.

Дакле, „манипулативима се сензо-моторне активности координирају са менталним активностима; ствара се веза између конкретног и апстрактног“ (Damjanović, 2008, 36).

Свакако, наведена дефиниција манипулатива није једина, тако да имамо ауторку која каже:

„Манипулативни материјали су објекти осмишљени да јасно и конкретно репрезентују апстрактне математичке идеје. Они имају визуелну и тактилну привлачност и ученици манипулишу њима тако да руковањем стичу искуство... активно манипулисање материјалима ученицима омогућава развој репертоара слика које могу користити у менталним манипулацијама апстрактним концептима“ (Moуег, 2001, 176). Иста ауторка тврди да „дефиниција манипулатива је често отворена за интерпретације“ (Moуег, 2001, 181).

Наведимо још неки начин дефинисања манипулатива, да би се створила јаснија слика њиховог сагледавања од стране оних који се баве наставном праксом, праксом учења математике:

„Када се предмети као што су аутомобили играчке, лутке и вагице користе у контексту лекције из математике, они су онда познати као *манипулативи*. Манипулативи су конкретни објекти који се користе да би се ученицима помогло да разумеју апстрактне концепте, попут оних који се често срећу у домену математике. Манипулативи ученицима пружају прилику да истражују концепте и визуелно и

тактилно, често кроз искуства руковања тим објектима. Наставници генерално користе манипулативе да би увели нове концепте или да прошире претходно научене концепте“ (McNeil & Jarvin, 2007, 310).

„Манипулативи су конкретни алати који се користе за стварање спољашње репрезентације математичких идеја и укључују ставке као што су једнообразне коцке и блокови са основом 10 (десет).

Важније, нема директне везе између спољашње репрезентације и унутрашње. Отуда, чак и ако наставник користи прикладне спољашње репрезентације за поучавање извесној математичкој идеји, пожељна унутрашња репрезентација неће се аутоматски обликовати у свести ученика“ (Puchner, Taylor, O'Donnell and Fick, 2008, 314).

„Манипулативни материјали укључују и конкретне и сликовне репрезентације“ (Sowell, 1989, 498). При чему аутор дефинише *конкретне репрезентације* као оне помоћу којих „ученик ради директно са материјалима попут штапића, Квизинерових штапића, геоплоча, слагалица или други манипулативни материјал под надзором поступајуће одговорне особе“, а *сликовне репрезентације* су оне које „ученик гледа попут анимираних аудиовизуелних репрезентација, посматра демонстрације конкретним материјалом од стране поступајуће одговорне особе или употребљава слике из штампаног материјала“ (Sowell, 1989, 499).

„Математички манипулативи нуде ученицима пут (начин) да разумеју апстрактне математичке концепте омогућујући им везу концепата са више неформалних (информалних) конкретних идеја“ (Uribe-Flórez & Wilkins, 2010, 363).

„Модели или манипулативна средства (помагала) помажу деци да схвате и развију менталне слике математичких принципа и процеса“ (Dunlap & Brennan, 1979, 89).

Користећи се представама из реалног света, њиховом *визуелизацијом*, ментално формирамо *аналогну представу* у свести, мишљењу, тако да сву динамику и структуру реалног можемо одговарајуће (бијективно) да пренесемо у свесно и успостављамо менталну слику коју смо добили чулима, тј. обрадом података добијених од чула. „Проблем аналогije између манипулације у физичком свету и манипулације аналогним представама је проблем односа реалног света и његове репрезентације у дуготрајној

меморији¹³ (Костић, 2010, 205). Овај процес називамо *менталном визуелизацијом* (*mental imagery*).

За учење математике и употребу манипулатива као репрезентата математичких објеката и операција са њима, неопходно је да знамо да ментална визуелизација конкретне ситуације у физичком свету јесу аналогони, тако да уколико долази до извесног кривљења менталне визуелизације то припада области патологије (рецимо у неком од чулних опажања, или неуролошке сметње...). За праћење развоја математичког мишљења, принципи које износи аутор Finke (1989) усмеравају на темеље на којима почива употреба манипулатива у настави математике и њихово потенцијално благотворно дејство:

- (i) Менталном визуелизацијом побуђујемо информације о физичким карактеристикама објеката или релацијама између њих, које нису унапред експлиците обрађене
- (ii) Ментална визуелизација је еквивалентна опажању утолико што су активирани слични механизми као и код опажања
- (iii) Просторна организација елемената визуелне представе кореспондира с организацијом објеката и њихових делова у физичком свету
- (iv) Замишљене трансформације и физичке трансформације деле заједничке динамичке карактеристике којима у основи стоје исти закони кретања
- (v) Структура визуелних представа аналогна је структури опаженог објекта. Визуелна представа је кохерентна, добро организована и може да буде реорганизована и реинтерпретирана (Finke, 1989)¹⁴

Основна идеја употребе манипулатива јесте да ученицима помогне да визуелизацијом створи дуалне репрезентације конкретних и апстрактних објеката и да их повеже са математичком симболизацијом. То није лако остварити и често се у пракси дешава да ученици раде са манипулативима, а не повезују те садржаје са математичким објектима, односно не праве везу са математичким објектима у смислу оперисања њима и превођења конкретних ситуација математичких репрезентација у ситуације оперисања математичким симболима. Дешава се, ученицима сами манипулативи нису транспарентни, тако да и не могу да направе везу са математичком

¹³ *Дуготрајна* или *дугорочна меморија* јесте *трајно складиштење знања* (Vulfolk, Hjust & Volkap, 2014b, 155).

¹⁴ Ови принципи аутора Finke-а (1989), налазе се преузети и у монографији (Костић, 2010).

симболизацијом (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997). Наравно, манипулативи помажу ученицима да апстрактне концепте запишу симболички, али уколико им је јасан однос између самих манипулатива у околностима у којима конкретно раде и ако су сами манипулативи структурисани, онда је могуће превести их у језик математике, математичког изражавања. Када су узрасти млађи тешкоћа повезивања манипулатива и математичких концепата и симбола је већа, док код старијег узраста тешкоће повезивања су између геометријских конструкција и њихових доказа (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997).

За ученичко разумевање манипулатива и повезивање са математичким концептима и симболима, неопходно је обавити одговарајуће припреме наставника у исказивању инструкција за рад. Уколико су инструкције одговарајуће и воде ученике у разумевање манипулатива и оперисања са њима, уколико ученик разуме интендирану структуру, тада је могуће прећи на писане симболе и осветлити математичке концепте и апстракције и могуће је да ученик то и схвати – дакле, „манипулативи су репрезентације нечега другог, не самих себе“ (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997, 49). Зато, никако не можемо препустити да се ученици занимају манипулативима без јасних упутстава у раду, јер „без инструкција, ученици могу да третирају манипулативе као интересантне објекте који имају мало или нимало везе са нечим другим“ (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997, 51), а уствари они треба да помоћу њих откривају концепте, идеје и да записују симболичке репрезентације и оперишу њима.

Препорука јесте да ученици, када користе манипулативе то буду неки који су математички структурисани и на које су навикли, да би их третирали као алате, а не као играчке на часу. Неопходно је да се ученици фокусирају на истраживање односа између објеката и да то изражавају писаним путем. Потребно је да постоји јасна веза између дуалних репрезентација са којима раде, веза између манипулатива и математичких израза. Да употреба манипулатива не би била контрапродуктивна, да не даје више штете него користи, ученицима не би требало стално мењати врсту манипулатива и давати им да непрекидно раде на непознатим и новим објектима и играчкама, већ да то буду они на које су навикли и који су управо прављени и структурисани да се над њима учи математика. Тада ученици налазе да је „математика интринзички интересантна“ и могуће је успоставити везе између различитих идеја, писаних симбола и концепата које они представљају (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997, 52).

Пошто деца не долазе на свет са формираним апстрактним мишљењем, оно се развија у процесу одрастања, прво стицањем искуства са стварним, реалним објектима који се налазе у окружењу, а онда на основу тог искуства формирањем визуелних репрезентација полако почиње да се формира и апстрактно мишљење, како су то описивали и Пијаже, Виготски, а и Марија Монтесори (2003). Многи психолози тврде да дете треба да има што више искуства са физичким објектима и да ће то искуство бити добра основа за формирање формалног, апстрактног мишљења, за развој способности оперисања апстрактним концептима, примарно математичким репрезентацијама. То би онда значило да деца која су имала рано и значајно искуство са манипулативима, касније немају проблема са формирањем апстрактног мишљења и развоју мишљења уопште, што у пракси није тако (McNeil & Jarvin, 2007). Теоријска истраживања праксе кажу да подршка учењу физичком акцијом доноси добробит за памћење и разумевање садржаја учења, и наводи се да укрштене активности физичког манипулисања и рада на садржајима текста, повезано са вербализацијом и визуелизацијом одређених апстрактних концепата доноси резултате унапређеног учења (McNeil & Jarvin, 2007). Стога и произлази потреба за употребом манипулатива у настави математике, али и једна задршка која је одлично артикулисана на следећи начин: „ако резултати појединих истраживања сугеришу да манипулатив X помаже детету Y у контексту Z , то не значи да сви манипулативи помажу свој деци у свим контекстима“ (McNeil & Jarvin, 2007, 312). *Манипулативи су заправо алати (помагала) осмишљени да стимулишу и подрже стваралачко математичко мишљење које се изводи из угњеждених когнитивних процеса интелектуално сложених активности.*

Аутор *Douglas H. Clements* (1999) у свом чланку, инсистирајући и елаборирајући кратко о томе шта је то *конкретно*, упућује да наставници и родитељи сматрају да само конкретне активности воде до успешног исхода учења. Разликује две врсте *конкретно* и то *чулно-конкретно* (sensory-concrete) и *интегрисано-конкретно* (integrated-concrete). Чулно-конкретно представља само оно што се може доживети чулима и операције над тим објектима. Дете перцепира и оперише на нивоу чулно-конкретном, када само оно што види од физичких или реалних објеката опажа и доноси закључке. Интегрисано-конкретно јесте када дете уколико нпр. треба да сабере два разломка, то ментално преведе у новчане јединице и добије напамет резултат. Уколико дете има изграђену способност визуелизације и превођења проблема једне врсте у проблем друге врсте, то значи да за његово математичко мишљење можемо да кажемо да је интегрисано-конкретно, односно да његова математичка знања припадају домену интегрисано-

конкретних, и она се изграђују учењем (Clements, 1999). „За ученике са овим типом међуповезаних знања, физички објекти, активности над њима и апстракције, све су у једној јакој менталној међурелацијској структури“ (Clements, 1999, 48). Између ове две врсте знања, заправо, нивоа мишљења, не би требало да постоји одвојеност и управо их развој мишљења повезује, те је чулно-конкретно, на кумулативан начин садржано у интегрисано-конкретном. Из тих разлога, добри манипулативи били би одлична развојна спона, која би омогућила да се направи добар прелаз са конкретних чулних активности на визуелне конкретне активности, заправо да се повежу извесне врсте дуалних репрезентација математичких концепата. „Добар манипулатив јесте онај који ученику омогућава изградњу, јачање и повезивање различитих репрезентација математичких идеја“ (Clements, 1999, 49), и додаје да добар манипулатив јесте конзистентан са когнитивним и математичким структурама, те убрзава развој ка интегрисано-конкретном мишљењу и раст интегрисано-конкретних знања (Clements, 1999, 50). Овако приказана инструментална улога манипулатива има јединствен циљ у настави и учењу математике, а то је да се дође до интегрисано-конкретног нивоа и знања структурисаних у њему.

„Обрасци социјалних интеракција успостављени у једном одељењу специфично делују на то како деца конструишу математичка знања“, а налази из истог истраживања потврђују да обрасци интеракција делују и на партиципацију ученика у процесу наставе и учења, поспешују више нивое изражавања математичког мишљења код ученика (Wood, Williams and McNeal, 2006, 248). У окружењу које негује *културу истраживања и аргументације*, ученици користе различите изворе сазнања – резонују (бирају метод за решавање проблема који је најприхватљивији – евалуативно-анализирање), просуђују (од различитих идеја стварају нове - синтетичко-анализирање), идентификују мањкавости и погрешке (евалуативно-анализирање), јачају аргументацију за одржање става када се осветљава из различитих перспектива (синтетичко-анализирање, евалуативно-анализирање), тако да се успоставља процес током којег се врши размена математичког значења (Wood, Williams and McNeal, 2006), али и успостављају нове математичке структуре, које флексибилно кореспондирају са већ постојећим. Оно што је од значаја, јесте да се на адекватан начин и у оквиру препознате културе наставе и учења, уводе и различите репрезентације математичких објеката, које треба да доведу до успешнијег учења и разумевања математике код ученика.

Околности рада ученика над манипулативима потребно је разматрати из аспекта *откривања сложености* у задатим активностима решавања задатака, проблема или неке врсте истраживања, о чему налазимо у (Williams, 2000). Ради се о „активности која је фундаментално конструктивна и повезује, тако да нужно подстиче ученичку свест о међурелацијама компоненти задатка и максимизује један облик концептуалне повезаности“ (Williams, 2000, 662). Препознавање и истраживање одређене сложености, потребно је да буде директно повезано са концептом који је намеравано да ученици усвоје, тако да структура манипулатива буде у функцији пројектовања интегрисано-конкретних или апстрактних математичких репрезентација и знања. Да је од значаја да рад буде индивидуализован, али у оквиру групе, потврђује и налаз да ученик може да доспе у посебно стање задовољства које се дефинише као *flow*¹⁵, и уствари јесте последица самостално обављеног посла по налогу и повезано је са интринзичком мотивацијом која учење препознаје као вредност-по-себи и стога успех учења изазива посебно пожељно стање. Свакако, субјект је део групе и утолико је задовољство успешно обављених активности веће и значајније. Ово стање *flow*, дефинишемо као последицу оптимума учења и појављује се када субјект уз појачане интелектуалне математичке захтеве подиже ниво својих математичких вештина и концепата, превазилазећи зону наредног развоја Виготског (Williams, 2000, 662) и (Williams, 2002a, 2). Иначе, Вилијамсова цитира једног аутора (Mihaly Csikszentmihalyi-a¹⁶) који *flow* описује као последицу интензивног ангажовања при којем се губи сваки осећај за себе, време и свет око себе. Важно је притом да особа или субјект изводи активности у околностима аутономије (Williams, 2002b, 2) са осталим субјектима у групи, у условима међусобне размене (Погледати о овоме Прилог 5).

Употреба различитих помагала попут манипулатива, треба да буде у правом тренутку, на прави начин. У литератури која се бави теоријом и праксом менаџмента постоји израз *just-in-time*¹⁷ који најбоље осликава захтев о употреби одговарајућег манипулатива у правом тренутку на прави начин (Шинго, 1995). То бисмо рекли, на

¹⁵ *Flow* можемо да преведемо као ток, тећи, течење, протицати, струјање, излив, плима, обилovati, глатко тећи, (про)лити се... (Simić, 2005), надирање (из)... У значењским (семасиолошким) речницима са говорног подручја енглеског језика, *flow* се појашњава као *глатко стабилно кретање нечега попут течности, људи, саобраћаја или информација или када идеје или конверзација могу да се настављају лако без заустављања* (Longman, 2010, 342); или, ако *изненада имате осећај flow-a – ако осећање flow-a протиче кроз Вас, изненада се осећате снажно* (Macmillan Education, 2006, 540).

¹⁶ Погледати (Csikszentmihalyi, 1992).

¹⁷ Приступ у организацији процеса *just-in-time* или *баи-на-време* знатно је унапредио квалитет производње и значајан је у разматрању процеса са аспекта управљања квалитетом. О овоме погледај (Шинго, 1995, 78) и (Имај, 2008, 104).

ефективан начин. Многи су примери неефективне примене манипулатива у наставном процесу. Ефективна употреба манипулатива јесте веома тешка и тежа је него сама реализација употребе. Готово 70% наставника, према извесним истраживањима (Puchner, Taylor, O'Donnell and Fick, 2008), изјашњава се о важности употребе манипулатива у поучавању и да их зато користи у својој пракси. Истовремено, ученици се изјашњавају да употреба манипулатива јесте мотивишућа за ученике уколико их користе као алате за решавање изазова (проблема). Наиме, ако је манипулатив помоћ у назирању идеје, уколико је благотворан у процесу долажења до решења проблема и изазова са којима се суочава, тада је пожељан. Ако манипулатив долази након концепта који је ученик разумео, тада нема сврху и не делује мотивишуће (Puchner, Taylor, O'Donnell and Fick, 2008). Наставник, који осмишљава и води процес учења пажљиво анализира околности и одлучује како да направи везе између педагошких активности и садржаја који је ученицима намењен као предмет учења, тако да оне буду сврсисходно интендиране. „Употреба манипулатива мора увек да буде зависна¹⁸ од математичког разумевања“ (Puchner, Taylor, O'Donnell and Fick, 2008, 323). Увођење манипулатива као стратегије за успешније учење математике не даје моментално ученичко разумевање, јер се саме математичке идеје и концепти усвајају и разумеју постепено, корак по корак, и како већ рекосмо *just-in-time*, тако да и конкретни манипулатив треба да буде исправно коришћен.

Посебно су информишуће студије које истражују учионичко окружење као окружење учења и повезују утицај наставничких инструкција са ефектном употребом манипулатива и слободним приступом ученика алатима (манипулативи, џепни рачунари, прибор за математику), интеракције и обрасце интеракција који се мењају или настају нови у измењеној култури учења (Moyer & Jones, 2004). Улоге свих се мењају, и наставника и ученика, али и сценарији по којима се учило сада другачије изгледају. Можемо да кажемо да су и ученици и наставници јачали своје улоге и компетенције у зависности од тога како је вршена контрола процеса који се одвијао. Наставници су мењали начин контроле употребе манипулатива, а ученици су им слободније приступали и спонтаније их употребљавали. Околности које су настале успоставиле су културу „преговарања“, тако да су дирекције и сценарији за организацију наставе и учења морали да буду измењени. Идентификовано је две

¹⁸ У оригиналном тексту рефериране студије стоји израз *subsidiary* који одлично упућује на блискост структуре манипулатива као спољашње репрезентације са намераваном унутрашњом репрезентацијом, која треба да буде индукована/визуелизована у свести ученика применом манипулатива *just-in-time*.

категорије наставника: оријентисаних на контролу и оријентисаних на аутономију ученика. Према изјавама наставника, њих око 70% и у овом истраживању користи манипулативни материјал, а опсервацијом часова дошло се до бројева који говоре да 80% оријентисаних на контролу и 55% оријентисаних на аутономију ученика, користе у оквиру поучавања ове математичке алате (Moyer & Jones, 2004). Промена начина или интензитета ученичке партиципације јесте један од пожељних промена параметара током учења, ученици доносе одлуке о иницирању и регулисању сопственог понашања. Основна промена која се догодила, јесте да је ученицима одобрено да користе допремљене манипулативе по свом нахођењу, свакако да не ремете остале ученике у раду, али и да то има смисла, јер инструкција на почетку процеса јесте била да ученици и наставници „преговарају“ о току процеса учења. „Ученици којима је дата аутономија да употребљавају манипулативе имају прилику да иницирају и регулишу сопствене математичке одлуке, просуђивање и понашање, чиме врше контролу над искуствима која су одређена тиме шта математику конструише и како“ (Moyer & Jones, 2004, 17). Међутим, током великих делова предавања или наставе, ученици су и даље имали ограничен приступ математичким алатима, иако су под истим условима спонтано користили одговарајуће манипулативе у фазама слободног приступа. Испољавали су селективност и враћали су се самоиспитивањем на претходно учење када су користили и које манипулативе да би доносили одлуку који да употребе у новим околностима учења (Moyer & Jones, 2004).

Промењени сценарио наставних часова сада упућује на нужност нових интеракција и податке да на 50% опсервираних часова, ученици су употребљавали манипулативе према упутствима за учење о одређеним појмовима која су добијали од наставника, а на 10% часова је употребљаван џепни рачунар као алат. Да би у учионици постојао неки уређени однос, поједини ученици су се издвајали као лидери који су били задужени да брину о манипулативима. Негде су то још увек радили наставници. Занимљивост овог истраживања јесте у томе да су сами ученици помагали једни другима и уколико се неко није сналазио у одабиру одговарајућег алата, неко успешнији би му помагао и учио заједно са њим. Овде идентификујемо вршњачко поучавање као вид партиципације у учењу. Једнаковремено, ученици су успели да развију селективност и да тачно знају када који манипулатив треба да употребе и што је још занимљив налаз, јесте да су се ученици понашали у складу са културом свога наставника, када посматрамо употребу манипулатива (Moyer & Jones, 2004). На почетку, када је уведен слободан приступ математичким алатима ученици су и даље тражили

дозволу наставника, затим, користили су велики број манипулатива, да би се све то на крају svelo да постоји селекција при одабиру и тачно су знали када који треба да буде одабран (just-in-time). Специфичне активности траже тачно одређени структурисани манипулатив. На крају, ученици су манипулативе у слободном времену сами користили да увежбају неки од концепата о којима су учили током претходних часова (Moyer & Jones, 2004). Коначно, све је резултирало и тиме што су ученици својом независношћу смислили или увели сопствене игре употребом манипулатива (Moyer & Jones, 2004, 26), али и промењеном интерактивношћу у оквиру које су и стидљива и бојажљива деца/ученици почели да учествују (партиципирају) и слободно излажу пред целим одељењем своје стратегије разумевања и решавања задатака и проблема и суочавања са изазовима.

Посебна добит од овако приказаног приступа јесте у „индивидуалној одговорности сваког за партиципацију у учионици“ и „ученици постају блиски са својим улогама, доследни и уче математичка правила“ (Moyer & Jones, 2004, 28). Препорука за ефектну употребу манипулатива јесте у томе што ученици истражују алате, испитују како који материјал може бити коришћен и манипулисано њиме, проверавају својства материјала, конструишу сопствено разумевање математичких репрезентација и користе прилику избора математичког алата или манипулатива за презентовање сопствене стратегије решења проблема (Moyer & Jones, 2004).

Овако истражена (а и изражена) употреба манипулатива доприноси да „ученици развију дубље разумевање математике“ (Moyer & Jones, 2004, 30).

Ауторка Evelyn Sowell (1989) извршила је у својој студији једну обимну мета-анализу истраживања која су се бавила ефективношћу употребе манипулатива у настави математике. Резултати до којих је дошла показују да тек на периоду од годину дана и више јесте могуће да се утврди предност употребе манипулатива у односу на наставу која је чисто симболичка и одмах са употребом апстрактних идеја и концепата. Истовремено, велики број студија јесте неупоредив јер посматра наставнике који су се посебно припремали за употребу манипулатива у односу на контролне групе које нису користиле манипулативе, а нису пролазили ни кроз какве припреме или обуке. Како год, ова мета-анализа није могла да да одговоре на питања које је поставила на почетку истраживања, односно, није могла да одговори „о природи ситуација у којима би манипулативи могли да буду прикладни. Није било могуће да се дође до тога у којим посебним ситуацијама манипулативи су највише прикладни“ (Sowell, 1989, 504).

За ученичко разумевање и лакше учење математике заинтересовани су били многи истраживачи, тако да је предметом истраживања веома интензивно била употреба манипулатива. Да ли разред, наставничка уверења, однос према професији, знање математике, разумавање математичких концепата, искуство, године старости или пол утичу на употребу манипулатива или ефектну употребу манипулатива у учионици? Резултати студија су веома различити и опречни и коначно не говоре много о повезаности свих набројаних варијабли са успехом ученика и употребом манипулатива (Uribe-Flórez & Wilkins, 2010). Исказано упућује на сложеност ове теме, јер многи су још узрочници успешне или супротно, употребе математичких алата у процесу учења. Истраживања су, као што смо и рекли имала различите контексте, различите групе наставника у различитим околностима и условима испитивања. Дакако, за успешну употребу манипулатива, а то значи да ученици разумеју наставу математике и њене концепте и идеје уз помоћ манипулатива неопходно је да синергијски знатан број варијабли да ефекат или речником математичких алата – да се сложи много коцкица. Очигледно је то да за успешну употребу манипулатива треба да се сложи учioniчки контекст, наставник који увиђа тај контекст и тренутак када треба увести и повезивати дуалне репрезентације математичких израза. И још на све то, сваког ученика препознати у групном раду у смислу његових потреба и могућности за постигнућа у једном афирмативном социјалном окружењу. Учење математике има смисла уколико јесте учење извесних садржаја повезано са разменом унутар одређене групе – комуникацијски посредовано у подстицајном социјалном окружењу. „Као наставницима, наш циљ јесте да помогнемо свим ученицима да постану успешни у учењу и независни у мишљењу и да осигурамо да су способни да раде заједно“ (Kerekes, 2006, 11).

У млађим узрастима почиње подешавање процеса усвајања математичких знања или формирање специфичног домена знања математике. Уместо интуитивног, доминантно искуственог, наивног и спонтаног усвајања математичких појмова, почиње се са сврсисходним активностима у установама предшколског васпитања и образовања. Ученици (или деца) почињу да усвајају математичку терминологију за одређене појмове и односе, тако да се постепено конструише структура знања, која је флексибилна и непрекидно се реконструише усвајањем нових концепата и идеја и разумевањем различитих репрезентација знања. Препоручује се да у тим ранијим узрастима деца кроз игру усвајају нова знања која је неопходно да повезују са осталим математичким знањима, али и знањима из других области и да корак по корак мењају

своју идиосинкретску слику света. „Играњем физичким објектима и њиховим аранжирањем у различите формације онај који учи може да конструише властито разумевање бројева. Ово је део једног дугог процеса учења“ (Kerekes, 2006, 12). Иста ауторка у истом тексту наводи да деца током образовних игара са математичким садржајима и концептима уче да пажљиво посматрају, прецизно објашњавају, употребљавају математичку терминологију, препознају и изражавају бројевне релације, уочавају објекте у групи, расправљају, доказују своје мишљење о чему. „Деца развијају њихов властити математички језик у контексту“ (Kerekes, 2006, 12). Употребом или игром са тачкицама, деца могу да науче своје представе о бројевима и да нпр. број шест представе на различите начине, у различитим бојама (чиме приказују његову адитивну или мултипликативну структуру), а истовремено могу да почну да стварају представу о бројним низовима, тако што ређају по одређеном правилу тачкице у гомиле (формације). Judit Kerekes (2006) истиче да „ученици никада не престају да размишљају и деле своје идеје“ (Kerekes, 2006, 13), стога се указује као неопходност наставнички професионални развој, усавршавање у струци.

Образлажући разлоге за неопходност посебног приступа у развоју математичког мишљења код деце и излажући оквир *Развојног образовања*, насталог на основу програма *Развојно образовање у школском контексту*, аутор Van Oers (2010) указује на његову заснованост на културно-историјском моделу Виготског и приступу *заснованом-на-игри*. Данашње друштво или *друштво знања* и његова економија уз разне претпоставке, једну од изузетног интереса овде разматрамо, а то је да математика и природне науке су од посебне важности због развоја технологија и технолошких иновација на којима оно почива. Из тог разлога образовање има издвојен третман и истиче се да у вези са друштвом знања постоје посебне *образовне облигације* (обавезе) у које се укључује и настава математике, као базични део наставног процеса у целини.

Поставља се питање како да се аутентично приступи процесу образовања, тако да се сваки субјект у тачно одређеним историјским и културним околностима и личним (персоналним) диспозицијама развија на одговарајућ начин и изграђује сопствени идентитет. Конкретан субјект, учествује или партиципира са осталим субјектима у активностима и те активности од спонтаних постају вођене од одраслих субјектата у једној комуникацијској и културалној размени знања. Учење математике се базира на људској или људским активностима у околностима интеракције субјектата, које су у коначном, у амбијенту учења структурисане. „Формирање идентитета се заснива на образовању *аутентичним активностима* у контексту културалних пракси“ (Van Oers,

2010, 26). Заправо, деца се играју улога у реалним околностима (власници продавница, лекари, уметници, столари, обућари, научници...) тако што користе конкретне алате и предмете (артефакте) из људске културалне праксе. У оквиру овога уче се и комуникацији, опет као део из људске културалне праксе. На тај начин се формирају значења, посредовањем предметима, оперисањем са њима и разменом у оквиру одговарајућих понашања, тако да се у структури овог процеса почиње да формира и математичко мишљење које постепено треба водити ка формализацији. Ово конструисање значења засновано-на-игри наставници треба да усмеравају ка физичким објектима којима се може дати смисао математичких репрезентација у одређеном тренутку. „Верујемо да ученичко сагледавање математике и развој математичких ставова може бити уско повезано са квалитетом првих контаката са математиком као културалном дисциплином“ (Van Oers, 2010, 28).

Математика као дисциплина јесте се доминантно развијала кроз своју строгу симболичку праксу решавања проблема, тако да данас има изграђен симболички алат или систем за решавање најсложенијих питања који није урођен субјекту који долази на свет и који треба да га усвоји или формира кроз интензивну комуникацију са другима у активностима које треба да постану једнога дана математичке активности. Та спољашња значења кроз математичке активности се усвајају, тако да у том процесу прво спонтаног, али посредованог учења од присутних других, кроз интеракцију, формирањем математичког мишљења, формира се и идентитет субјекта у активностима које су и културалне. Прво учешће деце у активносима јесте имитативне природе, и други или одрасли, кроз праксу активности помажу у артикулацији аутентичности субјекта и његовој аутентичној обради стварности и окружења. Уочавају се релације, повезаности, условљености и почиње са оперисањем објектима као и другим репрезентацијама математичких структура или културалних пракси. Ван Оерс јесте дефинисао *Развојно образовни приступ* у неколико тачака:

- Постојање, израда *курукулума заснованог-на-игри* као акта који исказује исходе интендиране образовне праксе, артикулише захтеве и конкретне активности са циљевима – артикулише реалност математичке образовне праксе
- Активности играња улога доприносе смештању математике у контекст културалне праксе (супермаркет, фризерски салон, туристичка агенција, ресторан...)

- Учење је блиско повезано са учењем комуницирања – учење се одвија комуницирањем субјеката, интеракцијом и посредовањем са другима
- Улога одраслих који својим учешћем помажу да се развијају способности деце да учествују у специфичном културалном контексту учења и да буду агенси ученичког развоја

(Van Oers, 2010, 30).

Још једна ставка на коју указује Ван Оерс јесте од посебне важности за развој математичког мишљења и потребно га је осветлити; то је учење или вођење до способности изражавања симболичких репрезентација. Наиме, већ први дечји *шкрабови* или цртежи којима тешко назиремо смисао, према казивању Ван Оерса имају одређени симболички смисао и он им придаје значај нечега што бисмо могли да назовемо архе за каснију способност записа симболичких репрезентација. Дечји шкрабови су потенцијално персонализовани симболички записи, односно, дечји шкрабови или цртежи јесу почетни или изворни кодови каснијег симболичког изражавања, али до те мере персонализовани да током развоја прелазе у конвенционалне форме симболизације. Ово важи генерално, али и у зони математичког мишљења, јер деца у оквиру овог изражавања шкрабовима изражавају и неке математичке односе, који могу бити количински, штавише, оперисање количинама, што касније називамо сабирање, множење бројевима. Наставник или одрасла особа која води процес, меша се осмишљеним активностима, тако да усмерава развој овог персонализованог приступа или односа према свету и окружењу у смеру усвајања конвенционалних симбола, договореној симболичкој репрезентацији, пре свега математике и њених концепата, идеја и објеката. Управо је овде потребна помоћ одраслих да дете може да превазиђе јаз између персонализованог изражавања ка симболичким репрезентацијама окружења и математичких структура. Стога процес развоја математичког мишљења поучавањем јесте „процес интерактивног конструисања значења међу децом, вршњацима и одраслима, при чему математичка значења постепено постају функционални алати за комуникацију о специфичним аспектима ситуација или аквностима деце“ (Van Oers, 2010, 32).

Можемо да закључимо да процесом учења и усмеравања развоја инструкцијама (поучавањем) дечји записи којима они реферишу на реалност коју перципирају постају, преласком са персонализованог нивоа на конвенционални, симболизовани кодови опште комуникације. Овај процес је истовремено и културални процес, али и формирања мишљења у различитим доменима, тако да се и математичко мишљење

издваја као посебна компонента општег процеса формирања мишљења. Математички симболизован израз репрезентација или формално математичко симболизовано изражавање настаје као исход дуготрајног процеса који почиње персоналним кодификовањем личног доживљаја идиосинкретичког виђења света. У мноштву свега и кодификовањем тога свега личним записом (рецимо шкрабом) издваја се активностима за развој математичког мишљења канал за посредовање математичком симболизацијом и прометом математичких репрезентација, које на крају постају структурисане; у овом процесу јесу битни објекти који се смишљено користе за вођење аутентичног субјектовог артикулисања стварности, манипулацијом у оквиру заснованом-на-игри.

Прве дечје динамичке репрезентације укључују и трансформације до исхода који смо описали као формализовано математичко мишљење у конвенционалној симболизацији и математичким правилима записани концепти и идеје.

Развој математичког идентитета субјекта јесте процес током којег су „наставници доступни да се ангажују у интеракцијама са децом у контексту игре која артикулише дечје властите графичке записе и побуђује њихову потребу за специјалним алатима који подржавају комуникацију о различитим аспектима реалности“ (Van Oers, 2010, 35).

Претходно изнето оправдава питање о „квалитету искуства са манипулативима“ (Kieren, 1971, 230) које се непрекидно поставља. Иако, док раде са манипулативима, изгледа да се деца стварно играју, активности које су под надзором одраслих воде у конструисано, повезано математичко мишљење и симболичко комуницирање математичким ентитетима под условом да је фундирано или има јасно изражене интенције у низу проширених активности учења планираних на макро и микро нивоу; да концепти садрже широк спектар конкретних референци; да је спремљено добро утемељење за касније идеје (Kieren, 1971).

Ако се усмеримо на планирање на макро и микро нивоу, јасно је да кроз курикулум или наставни план јесте потребно декларативно изразити недвосмислени захтев за ефектну употребу средстава, манипулатива у процесу стицања знања математике и да се то стави у функцију формирања формалног математичког мишљења и развоја оперисања апстрактним објектима. Успостављање интегрисано-конкретног мишљења у математици јесте од значаја и потребно га је промовисати као исход којим се водимо осмишљавањем процеса у целини. На микро нивоу, припремањем самог процеса поучавања, заправо наставе и учења, који треба непосредно да се деси, пројектујемо активности које у свом мноштву дају конкретно

утемељење за формалне и апстрактне концепте и идеје и да за сваки од њих увек можемо да се позовемо примером у конкретним активностима које су изведене. Математичке репрезентације је потребно одмах повезивати са дуалним конкретним репрезентацијама добијеним манипулативима записујући симболички и ослањајући се на папир-оловка приступ. Изнети поглед представља афирмацију рефлексивног мишљења које је подстицајно за развој математичког мишљења и „рефлексивно мишљење јесте мера способности формирања и манипулисања концептима који су у математичким релацијама“ (Kieren, 1971, 232).

Манипулативи могу да буду и помоћ ученицима који имају тешкоћа са овладавањем математичким појмовима. У том маниру манипулативи су посебна средства, помагала, који подржавају развијање разумевања математичких појмова и конструката (Dunlap & Brennan, 1979, 89). У ауторском раду (Dunlap & Brennan, 1979) даје се читав алгоритам за поступање, са конкретним примерима, за децу која имају тешкоће у учењу математике и на који начин се од рада са манипулативима стварају дуалне репрезентације, затим се оне преносе на семи-конкретан ниво, а то је рад са сликама и онда математичком симболизацијом репрезентација доводи до успостављања функције математичког мишљења и апстрактног математичког мишљења. Појављивање овог семи-конкретног нивоа, јесте из разлога успостављања моста између конкретних, физичких и формалних (апстрактних) математичких репрезентација објеката и аутори то објашњавају на следећи начин: „деца се померају на иконички ниво, на који илуструје математичке процесе сликама“ (Dunlap & Brennan, 1979, 90). У овим активностима рада са манипулативима као видом посебне помоћи неопходно је испоштовати да постоји: „(1) активности над манипулативним средствима, (2) редослед корака и (3) бележење процеса који протиче“ (Dunlap & Brennan, 1979, 89).

Међу смерницама које би требало посебно издвојити, а дато их је једанаест, истичу се следеће:

- Манипулативна средства морају тачно да илуструју актуелни математички процес који се учи
- Средства морају да буду употребљена од стране сваког детета посебно
- Мора да постоји директна корелација између процеса са манипулативима и процеса који се описује у запису папир-оловка
- Учење не долази од објеката само по себи, већ од дечјих физичких акција над објектима

(Dunlap & Brennan, 1979, 90).

Активности претходно истакнуте и нивои којима се долази до разумевања математичких појмова и апстракција јесу прилично једноставно изложене. Међутим, права је тешкоћа прећи са једног на други ниво и код ученика је потребно успостављати могућност или способност реверзибилног мишљења, тако да може да се креће у различитим смеровима током процеса који се одвија и да га записује паралелно. „Помоћи деци да враћају процес размишљања у супротни смер, јесте образовна ситуација која мора да буде посебно осмишљена“ (Dunlap & Brennan, 1979, 92).

Ученик оспособљава своју когнитивну структуру да мисли реверзибилно, тако што прво околности које је вежбао на нивоу физичких објеката представља сликама и оперише на нивоу слика што и записује упоредо. Тада је прешао на семи-конкретни ниво, када користи само иконичко представљање објеката и оперише са њима уз помоћ илустрација. Иконичко представљање и оперисање објектима у семи-конкретном нивоу уз стално бележење ситуације доводи до стварања менталних слика и могућности оперисања са њима у нивоу свести. Коначно, можемо да користимо само математичку симболику уз алате стварања менталних слика и реверзибилног мишљења. Симболизацијом којом смо бележили успостављамо математички формални ниво и крећемо се у околностима математичких апстракција, односно решавамо математичке ситуације које можемо да повежемо семи-конкретним иреверзибилним мишљењем као познате, конкретне ситуације. У овом нивоу математичке симболизације можемо да успоставимо математички дрил, тј. увежбавање решавања ситуација (задатака) до аутоматизма, односно, прихватања појединих техника и алгоритама за познате задатке по аутоматизму. Даљим развијањем формалног или апстрактног математичког мишљења можемо да решавамо и сложеније проблеме попут непознатих задатака уз помоћ постојећег домена математичких знања и техника рада.

Да бисмо могли да помогнемо сваком детету да превазиђе тешкоће у учењу математике, потребно је да се направи анализа и акциони план са предлогом стратегија које садрже развојне фазе које воде до пројектованог очекиваног исхода. Потребно је применити правилне инструкције, односно поучавање које је прилагођено детету које има тешкоће у учењу. Инструкције треба да буду конгруентне потребама за развој менталних слика, заправо онога што смо претходно називали визуелизацијом и оперисањем у оквиру сопствене визуелне перцепције. Те визуелне перцепције садрже

структурисане слике манипулативног материјала над којим је дете/ученик радио, тако да у семи-конкретном нивоу и могућношћу реверзибилног мишљења може да се мисаоно креће уз стално бележење стања у ситуацији која је предмет разматрања.

Релевантно запажање наставника из праксе које су прикупили истраживачи у оквиру једне студије јесте да „већину времена, ученици радије цртају него што користе жетоне који су им били једнако доступни“ (Kamii, Lewis and Kirkland, 2001, 25). Група деце о којој се ради јесте предшколски узраст и први разред основне школе у САД и Јапану. Објашњење за ову појаву јесте у томе да су деца/ученици почели да користе речи и да записују, тако да им артикулација уз помоћ папира и оловке отвара нови простор и за развој математичког мишљења, а то је симболички запис који јесте заправо формализација мишљења. „Математика није у манипулативима. Вредност манипулатива зависи од тога како је употребљен од стране детета да реши проблем“ (Kamii, Lewis and Kirkland, 2001, 27). Наведени пример добро говори о нечему што смо раније истакли, а то је код истраживања у коме су деца/ученици слободно по својој вољи користили манипулативе и развили способност селекције и софистицираности за ситуације њихове употребе (Moyer & Jones, 2004). Овај налаз са тим претходним налазом говори да деца/ученици и на врло раном узрасту могу да вреднују шта им је корисније и интуитивно прихватају оно што им даје већи допринос развоју мишљења и математичког мишљења посебно.

На примеру хомогеног груписања фамилијарних манипулатива можемо видети како се они употребљавају с обзиром на узраст ученика. Уколико је инструкција да се класификује и саопшти број колико у једном скупу воћа има наранџи а колико јабука, најмлађем узрасту се могу дати мале сличице на којима се налазе слике плодова овога воћа. Мало старијем узрасту за то могу послужити жетони обојени у две боје (наранџасту и црвену) (Morin & Samelson, 2015). Ови различити манипулативни прикази конгруентних околности говоре да за једну исту математичку репрезентацију можемо имати више дуалних репрезентација. Управо проблем коришћења манипулатива јесте тај што се стално питамо да ли смо их ефективно употребили, а своди се на избор *адекватне појмовне (концептуалне) конгруенције*. Паралелни конкретни прикази могу бити конгруентни, али за одређену ситуацију неки су више адекватни од других.

Адекватна појмовна (концептуална) конгруенција јесте „способност наставника да употреби манипулативни приказ који ће да подупре тачан одговор, на

најекономичнији могући начин, чувајући се двосмислене (нејасне) репрезентације математичког појма (концепта)“ (Morin & Samelson, 2015, 365).

За најмлађе узрасте у основном образовању или у предшколском узрасту, неопходно је користити одговарајуће оквири за рад у десетичном систему. То би били тзв. *десетични оквири*, који би деци/ученицима омогућавали оријентацију за рад са бројевима. Ово илуструје пример са корнетом за јаја у неком маркету или пијаци. Уколико из корнета одвојите извешан број јаја, лако ћемо према положају осталих да одредимо колико недостаје или колико јесте остало. Другачије би то било уколико бисмо јаја имали смештена у некој посуди. Одузимањем или додавањем извесног броја јаја у посуду, тешко бисмо без бројања одређивали тренутно стање (Morin & Samelson, 2015, 367). Стога је оквир за рад неопходан ученицима, да би лакше створили у глави структуру бројева као математичких објеката и оперисали са њима у оквиру десетице као нумеричке основе коју конвенционално користимо. Оквир јесте структурисано окружење за рад, тако да ту физичку структуру визуелизацијом преносимо у когнитивно и стварамо могућност да оперишемо у пољу семи-конкретног, као прелазног облика у формално, апстрактно мишљење.

У процесу стицања самосталности ученика у раду са манипулативима, наставник треба да их усмерава да тај материјал користе исправно и да уочавају квантитативне димензије приказа, него ли њихове физичке карактеристике (Morin & Samelson, 2015). Квантитативне димензије су уствари кардиналности дискретних скупова који могу бити нехомогени или након класификације универзума над којим се ради, можемо да добијемо и хомогене репрезентације и да утврђујемо њихове кардиналности. Посебно се у оперисању са манипулативима упозорава на грешке и на разумевање њихове генезе која не мора увек да буде из непознавања концепата или појмова, односно, из незнања, већ и друге природе, као што су сензо-моторичке околности. Деца/ученици могу да направе грешку уколико нема синхронизације између бројања у приказу манипулативом и изговарања бројева (грешка усменог бројања), онда додиривања (издвајања један-по-један) манипулативног приказа и усменог изговарања, техничке грешке померања манипулатива, случајног преласка из једне у другу групу (подскуп, класу). Тада се добијају квантитативне димензије приказа манипулатива које нису одговарајуће стварности и онда су одговори на питања која се постављају нетачни. Можемо да кажемо да у описаним околностима конгруенције појмова или концепата нису добро квантитативно описане. Грешке могу да настану уколико се користе различити манипулативни прикази као један – рецимо жетони и коцкице – и да то

омета оперисање ученика или закључивање када треба да да одговор о конгруентним математичким појмовима. Нпр. можемо да имамо исти број два манипулативна приказа, тако да један има веће елементе од другог. Иако истобројни, ученик може да одговори да је већа кардиналност скупа чији су елементи већи, што је нетачно. Уколико ученик то превазиђе, кажемо да има *довољно осећаја за бројеве* (Morin & Samelson, 2015).

Вратимо се на десетичну основу и оквир за рад са манипулативним приказима. Оквир о коме говоримо може имати два шаблона (шеме) и то су 1×10 и 2×5 . У оквиру ових шаблона ученик сабира и одузима бројеве и визуелизацијом ствара кохерентну слику бројева којима когнитивно оперише (Morin & Samelson, 2015). Оба ова десетична шаблона имају своје предности, с тим што шаблон 2×5 може бити одличан за представљање парних и непарних бројева. Можемо да кажемо да „конгуруенција (подударање) између нумеричких концепата и манипулативних приказа помаже деци успостављање критичких нумеричких појмова и пружа им визуелно представљање које је више кохерентно и на које се може прикључити концептуални и процедурални језик“ (Morin & Samelson, 2015, 369) - Погледати Прилог 6.

Аутори Muzheve и Capraro (2012) за рани узраст деце уводе појам *идиосинкретске репрезентације* и објашњавају је као оне прве манипулативне материјале који се користе у дечијој игри – жетони, зрневље, затварачи, дугмад, слике, исечци, стикери, цртежи, шкрабови (разне врсте изражавања), воће, разне коштице од воћа, тестенине, шрафови... Називају их идиосинкретским, јер за различите особе имају различито значење и наводе пример гвожђа, које неког упућује на историјско раздобље, за неког додаток исхрани, а за неког служи да се испеглају набори на гардероби (Muzheve & Capraro, 2012). Иако, Muzheve и Capraro (2012) истичу да идиосинкретских репрезентација нема у уџбеницима, наставници их не користе, нема их на часовима. Демантује их наставна реалност која је све више у контексту свакодневног живота, тако да су сви почели да се утркују ко ће математику да приближи деци и да је учини занимљивијом, те посежу и за таквим репрезентацијама које можемо да означимо и идиосинкретским. У тим раним узрастима наставници се труде да деци приближе математику, тако да и не користе језик математичких репрезентација. Језик који је ближи деци јесте природни језик, тако да се они и изражавају користећи га. Наиме, уместо израза за разломке именилац и бројилац, наставници користе изразе дадиља, комшија, пас, горе, доле, а за правила рачуна са разломцима да су "каубојска правила". Ово наставници раде, као што смо рекли, из

разлога да деци/ученицима приближе математику и помогну да боље схвате и запамте њене концепте, правиле и технике рачуна и релација. Muzheve и Capraro (2012) упозоравају на опасност од тога да за децу/ученике од једног тренутка такав приступ неће бити одговарајући и да ученици неће имати одговарајућу или праву слику математичких репрезентација. Наводе и примере за то. Извесни наставник да би деца боље схватила разломке, каже за $6/12$, да је то „6 из 12“ или „6 од 12“, јер им је претходно објашњавао појам разломка уз помоћ слагалица и указивао да је 6 комада слагалица од укупно 12 уствари $6/12$. Наставници математике се упозоравају до које мере је ово ефективно, а када је контрапродуктивно и наводе још пример за старије разреде, када ученици усвајају онако како наставник каже, те онда имамо да 0,6 неки ученици читају као „нула-запета-шест“, а неки од ученика „шест десетих“, што је у складу са значењем записа (Muzheve & Capraro, 2012).

Дакако, наставници у приближавању наставних садржаја за учење, покушавају да ученицима природним језиком омогуће дубље и лакше разумевање математичких репрезентација, али треба да знају да ученици усвајају оно како их они уче. Уколико ученици довољно дуго именилац и бројилац посматрају као одвојене ентитете, онда они ни разломак неће моћи да прихвате као целину, један ентитет, већ као неинтегрисани математички појам. Даље, упустимо ли се у више нивое, да им помогнемо да схвате да су разломци, децимални записи и проценти једно те исто математичко представљање јединствене репрезентације у извесном дискретном скупу или континуалном репрезенту, може да дође до проблема разумевања уколико појмови и концепти нису адекватно уведени и захтевано од ученика да користе прецизан језик математике насупрот слободнијег природног језика.

Програми за образовање наставника треба да се фокусирају и на овај исказани део развоја математичког мишљења код деце/ученика. Онако како се математички појмови уче и знање о њима проширује и продубљује, тако наставници треба да буду упознати, да знају, како се код ученика слика изоштрава употребом све прецизнијег и прецизнијег језика математичке симболичке репрезентације и када природни језик треба да узмиче и нађе се у позицији мета-језика. Овде имамо да математика, као мета-језик науке, мета-језик за оперисање математичком симболиком дође у ситуацију да природни језик буде њој у мета-позицији.

Захваљујући развоју савремених рачунарских технологија, затим, напретком у укључивању мултимедије у процесе наставе и учења, имамо могућност да и манипулативе уведемо у наставу математике уз помоћ рачунара. Различити рачунарски

софтвери, аплети, алати или какви год програми, који могу да симулирају конкретне манипулативе, добро су дошли да се користе и у настави математике у развоју математичког мишљења. У зависности од тога о којој врсти рачунарског софтвера се ради, наставник одлучује у ком тренутку и на који начин ће га сврсисходно укључити у процес стицања или утврђивања постојећих знања и пратити ефекте који се постижу у знању и функционалности знања ученика.

ЈУКСТАПОНИРАНОСТ ФИЗИЧКИХ И ВИРТУЕЛНИХ МАНИПУЛАТИВА

Развојем технологија поставља се питање природе конкретних манипулатива и употребе рачунара и рачунарских програма (софтвера, аплета) у функцији развоја математичког мишљења. Даглас Клементс се и тиме бавио, те је у свом раду (Clements, 1999) истакао проблем да се превазиђе перцепција или представа о „конкретном“, која је увек усмерена ка физичком манипулативу, тако да постоје „тешкоће у прихватању објеката са екрана као валидних манипулатива“ (Clements, 1999, 49). У истом раду тврди да истраживања показују да су „рачунарске репрезентације више изводљивије, јасније, флексибилније и обухватније него физички контра-парњак“ (Clements, 1999, 49). „Ученици који су користили физичке и софтверске манипулативе показују много више софистицираности у класификовању и логичком размишљању него ли контролна група која је користила само физичке манипулативе“ (Clements, 1999, 50) и (Olson, 1988). Свакако, унапређивање учења употребом рачунарских манипулатива није спорно и доприноси расту и развоју знања, али и вештина сензо-моторичке природе.

Иако област која се истраживачки тек осветљава, можемо да кажемо да већ имамо и дефинисано прецизније шта то сматрамо виртуелним манипулативом:

- Виртуелни манипулатив је „интерактивна, заснована на Web-у визуелна репрезентација динамичког објекта који представља могућност конструкције математичког знања... виртуелни манипулатив је моделован у уобичајеној употреби конкретних манипулатива у школама, као што су слагалице, танграми, разломљени штапићи (штапићи за разломке), геоплоче и материјали за геометрију“ (Moyer, Bolyard and Spikell, 2002, 373).
- „Два типа репрезентација на World Wide Web-у називају се виртуелним манипулативима – то су *статичке* и *динамичке* визуелне репрезентације конкретних манипулатива“ (Spicer, 2000, 14).
- „*Виртуелни манипулативи* у суштини су реплике физичких манипулатива постављене на World Wide Web-у у облику рачунарских програма (аплета) са додатним повољним карактеристикама“ (Reimer & Moyer, 2005, 6).

Како су статички виртуелни манипулативи уствари слике, које се могу само да посматрају на рачунару, без икаквих интервенција корисника, сматра се да они и не припадају манипулативима, јер основни услов да би нешто било манипулатив јесте да се њиме „рукује“, како и сам назив каже манипулише. Стога, динамички виртуелни манипулативи јесу истински виртуелни манипулативи јер представљају објекте којима се рукује и који су покретни на екрану и под инструкцијама корисника могуће им је мењати позиције и о томе доносити закључке у вези са учењем. Ово су ставови које су изнели аутори текста о виртуелним манипулативима (Moyer, Bolyard and Spikell, 2002, 372), који је често цитиран у стручној и научној литератури.

Као и код физичких манипулатива, имамо могућност и код рачунарских манипулатива да различите облике померамо, дуплирамо, комбинујемо, стварамо од више основних облика сложенији облик. Затим, код рачунарских манипулатива имамо вишестурке могућности у смислу да неки део радњи поништимо, вратимо корак уназад, пођемо другим путем у решавању извесне ситуације, и да лакше урадимо анализе, синтезе и вредновања мисаоних активности, те тако изграђујемо дуалне структуре у делу интегрисано-конкретног. Различите ситуације на којима се ради могуће је чувати неограничено времена у меморији, те их је онда могуће враћати и опет реконструисати кораке, тако да то омогућава стварање нових структура, на основу већ изграђених. Различити облици основних фигура могу да буду такви, да се једни садрже у другима. Рецимо правилан шестоугао може да се разложи на два трапеза и преспоји у паралелограм, да се од два једнакостранична троугла опет направи паралелограм или од три једнакостранична троугла направи трапез (подразумева се да јединичне фигуре буду подударне). Делови сложенијих фигура могу да се различито обоје, лако да се померају на радној површини екрана, те да радна површина има позадину сачињену од мреже фигура које су на располагању што ученицима олакшава рад. Виртуелни манипулативи „могу да повежу иконички и симболички запис, нагласе важне аспекте и карактеристике појединачних манипулатива, понуде линкове ка другим изворима на World Wide Web-у и снимити и чувати корисничке покрете и друге радне задатке“ (Moyer, Bolyard and Spikell, 2002, 375). Ово све описује рад са различитим врстама слагалица или физичких образаца манипулатива. Једна од највећих добити у овом рачунарском програму као манипулативу јесте да ученик повезује своја сазнања у области геометрије, аритметике, а и алгебре, јер уочава извесне врсте симетрија и запрема их у меморији.

Могуће је радити и са таквим манипулативом у старијим узрастима који симулира бацање новчића. На улазу у програм се задају параметри процеса – број бацања, на ком бацању да се провери дотадашња статистика, а и могућност да својевољно у једном тренутку прекинемо процес и погледамо резултате статистике, да се види у тачно одређеном бацању шта је био резултат догађаја и тако док не исцрпимо могућности из реалности (Дамјановић, 2009).

Коришћењем рачунарских или виртуелних манипулатива, ученици не могу да сагледају све последице својих поступака, као што је то случај код руковања физичким манипулативима, јер нису укључене исте врсте сензо-моторних активности. У једном испитивању (Clements, 1999), покушало се са тим да ученици дају инструкције за поступање рачунара симболичким записима, тако да су се реализовале две врсте активности – симболички записи, који су имали извесне последице, а то су поступци рачунара у вези са извесним објектима које је требало покретати на различите начине. Ове ограничавајуће околности су доносиле више добити, јер су ученици морали пажљиво да артикулишу симболички запис и проследе га рачунару и уоче шта је исход те радње. У овако осмишљеним активностима имамо повезивања дуалних репрезентација – конкретних активности рачунара са симболичким записивањем инструкција.

Закључак претходно изложеног испитивања јесте да „рачунарски манипулативи могу да помогну ученицима развој на својим физичким искуствима, везујући их чврсто симболичким репрезентацијама. У том смислу, рачунари помажу ученицима да остваре везу чулно-конкретног са апстрактним знањем, тако што изграђују интегрисано-конкретна знања“ (Clements, 1999, 55). Дакако, без задршке можемо да кажемо да физички манипулативи се надограђују рачунарским, али захтев симболизације и повезивања ових манипулатива са математичким репрезентацијама на симболичком нивоу остаје исти. Уколико не дође до интендираног повезивања у процесу наставе и учења, остаје све да почива у два неповезана света у две дуалне репрезентације које нису успоставиле функцију пресликавања или математичким речником још речено функцију афиних трансформација.

Укључивање рачунарских манипулатива у процес наставе и учења математике јесте у једном тренутку ефикасно, јер надограђује искуство физичких манипулатива, тако да ученици повезују моделе манипулатива са својим интуитивним, информалним разумевањем концепата и апстрактних симбола, а поентирање се врши коначним превођењем на математичко изражавање концепата и идеја, односно када ученик

успешно и природно оперише у области интегрисано-конкретних знања чиме испољава компактност општег домена знања и посебног домена математичких знања.

Да би учење математике учинили занимљивим, једним истраживањем су испитивали резултате учења у области која није уобичајена у редовном курикулуму. Наиме, ученици завршног разреда основне школе учили су математику изучавајући *полиомино* структуре на различите начине (Yuan, Lee and Wang, 2010). Полиомино је полиформна раванска структура која настаје мултипликацијом квадрата, као базичним обликом. У зависности од колико подударних квадрата је настала једна полиомино фигура имамо: мономино (1), домино (1), тромино (или: триомино) (2), тетромينو (5), пентомино (12), хексомино (35), хептомينو (7), октомينو (8)... (у заградама се налази број могућих неподударних фигура са задатим бројем подударних квадрата). Управо, ово је била основа за рад са ученицима, да им се зада да утврде за одређени број квадрата колико може да се направи неподударних полиомино фигура. Ученици су радили на различите начине, различитим стратегијама решавали проблем, а у зависности од тога којој су групи припадали, користили су физичке, виртуелне манипулативе или уопште нису користили манипулативе. Сви су прошли исту основну обуку о полиомино фигурама и урађен је улазни тест, пре почетка намераваног поучавања (Yuan, Lee and Wang, 2010).

За ученике, ово је био нови когнитивни задатак/проблем који им није од раније познат, односно, „ученици су се сусрели са комплексним задатком учења који им је сада први пут приказан у новој репрезентацији. Мораће да разумеју како да забележе информацију и како се то односи на област коју репрезентује“ (Yuan, Lee and Wang, 2010, 308). Овакав оквир учења упућује на то да ученици треба да повежу концептуална знања са процедуралним решавајући нови задатак, користећи физичке или виртуелне моделе, у зависности како су им организоване математичке активности учења. Препознавањем релација између различитих области математике и сагледавајући је као целовит простор, ученици треба да сместе и повежу свој задатак учења, да га моделују и издвоје конкретне релације и односе и креирају адекватну репрезентацију која је конгруентна математичкој. Истовремено, услови су такви да се креирају три различита окружења за учење и испитује њихов утицај на исходе учења (папир и оловка, употреба физичких манипулатива, употреба виртуелних манипулатива). Током рада ученици који су радили на виртуелним манипулативима имали су више времена да проведу у дискусијама, јер рад је био бржи и имали су прихватљивију радну површину у смислу прегледности. Физички манипулативи захтевали су више физичког

простора кога је недостајало. Ученици који су користили папир и оловку су све ово морали да цртају, што је још мање флексибилно него употреба физичких манипулатива. Интересантно за ово истраживање јесте што су сви ученици користили исте или сличне стратегије, а то је стратегија „додавања“ или стратегија „одузимања“ квадрата на фигуру нижега, односно, вишега ранга, респективно (ако је требало открити број хексомина, ишло се на исцрпљивање додавања још једног квадрата на све познате пентомине, или све то исто само одузимањем од хептомина). У сваком случају, ученици који су радили са виртуелним манипулативима имали су више времена и да проверавају своје стратегије и конгруентност репрезентација са математичким. Резултати говоре да 73% учесника се изјашњава да је лакше радити са виртуелним манипулативима, 70% учесника жели да у свом будућем учењу настави да користи виртуелне манипулативе, „виртуелни манипулативи побуђују мотивацију ученика и самопоуздање у учење математике“ (Yuan, Lee and Wang, 2010, 313).

Закључак и овог истраживања јесте да и физички и виртуелни манипулативи унапређују учење, да виртуелним манипулативима се лакше, јасније и брже ради и омогућавају више времена за интеракцију између самих ученика, анализу и проверу стратегија учења и решавања проблема. Истовремено, замена физичких манипулатива виртуелним јесте неефективна (Yuan, Lee and Wang, 2010) посматрајући целокупни процес учења, учење као целовит животни процес, јер ако ништа друго, неопходно је да се виртуелни користе као надградња физичких манипулатива у једном тренутку процеса развоја субјекта.

Истраживање на једном одељењу током читавог годишњег наставног процеса потврдило је да виртуелни манипулативи јесу софистициранији алат за учење, јер омогућавају ученицима одмах повратну информацију, лакшу и бржу комуникацију него папир-оловка метод и представљају право уживање у раду, јер, како се ученици изјашњавају „ово је као рачунарска игра која ми помаже да учим“ (Reimer & Moyer, 2005, 18). Истовремено, ови аутори упозоравају да „једноставна употреба манипулатива не осигурава учење“ (Reimer & Moyer, 2005, 7) и истичу пожељност виртуелних манипулатива због капацитета да повежу визуелизације са апстрактним симболима, што су ограничења физичких манипулатива. У овој студији резултати су такви да говоре о томе да су ученици употребом виртуелних манипулатива значајно поправили своја концептуална (појмовна) знања, док процедурална знања нису у истој мери напредовала, али ово из разлога што су на улазном тесту она била прилично велика, тако да није било простора да се покаже помак на излазном тесту (велики број ученика

је био на максималном или близу максималног броја поена на улазном тесту, али и на излазном, тако да излази да нису имали промене у знањима, што није поуздан показатељ).

Важно је истаћи да ученици током коришћења виртуелних манипулатива усвајају терминологију и означавање, тј. симболизацију, кроз повратне информације (које су у облику писаних речи и симбола), тако да је и то напредак у односу на употребу физичких материјала. Оваква индивидуализација доприноси и ученицима који имају тешкоће или сметње у учењу, тако да су и они показали напредак диференцираним инструкцијама, које се добијају у комуникацији са рачунарским програмом (рачунарски програм је тако конструисан да сам прилагођава процес учења или интерфејс што подупире и ученике са тешкоћама и сметњама).

Уз све налазе који су под ограничењем истраживања, јер се односи само на праћење једног одељења, може се рећи да није забележено да су виртуелни манипулативи имали негативан ефекат на знања ученика (Reimer & Moyer, 2005, 21).

Мисаони ток ученика изводљивији је из виртуелних манипулатива, ближи им је, него ли конкретним, физичким репрезентацијама (Yuan, Lee and Wang, 2010). Динамички визуелни модели помажу и подстичу развој ученичке флексибилност и знање различитих форми репрезентација (Reimer & Moyer, 2005, 23) и способност да у различитим ситуацијама одлучује која је од конгруентних математичких структура, концепата, идеја (процедура) релевантна или одговарајући агенс решења (математичког проблема).

Тајвански истраживачи Lee и Chen (2010) су у једном обухватном истраживању употребе виртуелних манипулатива истакли њихов значај и потпору за целокупан процес поучавања математиком и да постају интегративни технолошки елемент наставе овог предмета. Испитујући код ученика уживање у математици, мотивацију за математику, важност математике, слободу од страха од математике, дошли су до готово истих резултата које смо већ изложили, али и до још једног закључка, који је вредан помена. Ученици на Тајвану сматрају да „активности наставе математике треба да буду осмишљене не само за уживање и мотивацију, већ и за отклањање страха од математике и доживљавање важности математике“ (Lee & Chen, 2010, 20). Овај налаз јесте сигнал наставницима математике да када осмишљавају учења имају у виду да математика јесте занимљива за учење уколико је се ученици не плаше да буду неуспешни и уколико виде смисао због чега је уче. То обавезује на повезаност садржаја

учења са другим наставним предметима и областима у математици, али и са контекстом свакодневнице у којој субјект обитава.

Анализа најефектнијих начина решавања проблема из геометрије било је предмет испитивања још једног истраживачког пара коаутора са Тајвана (Hwang & Hu, 2013). Посматрали су и елементе социјалног окружења, вршњачко учење, али и неколике елементе који би по њиховом мишљењу требало да имају повезаност са успешним учењем и виртуелним манипулативима. Решавање проблема видели су кроз рад и разматрање/употребу:

- *Вишеструке репрезентације* – „спољашње репрезентације у реалном свету и унутрашње репрезентације у свести/мисли“ – симболичке репрезентације у математици (слова, бројеви, симболи); лингвистичке репрезентације из свакодневне праксе; илустративне репрезентације (фигуре, графови, дијаграми, прикази функција); манипулативне репрезентације (помоћни алати за учење); реалистичне репрезентације (засноване на наводима/ставовима и објектима)
- *Виртуелни манипулативи и 3D геометријски програми за учење* – Sketchpad, GeoGebra...
- *Бела табла*
- *Сарадничка виртуелна реалност окружења учења* – посебно окружење за учење развијано уз помоћ много различитих рачунарских програма, али и литературе која поспешује ученичко решавање проблема геометрије, уважавајући и социјалне елементе вршњачког окружења и учења.

(Hwang & Hu, 2013, 309).

У дискусији и закључку овог истраживачког подухвата истиче се да су ученици решавајући геометријске задатке отвореног типа уз способност размене математичког мишљења, посредовањем различитим видовима репрезентација дошли до резултата који се могу прихватити као афирмативни за употребу виртуелних манипулатива у учењу геометрије. Наиме, вршњачким учењем као моделом управљаних социјалних интеракција реализовали су активности решавања геометријских проблема. Уз високу мотивисаност и дељењем искуства учења, ученици са различитим приступима, способностима, били су инспирисани да се укључе у активности. Ово је дало за сваког од њих дубље разумевање геометријских проблема које су решавали и задовољство за реализовање сопствене потребе у оквиру организованог учења употребом ове методе

вишеструкости. Уважавање постојања различитих тачака гледишта на решавање геометријских проблема, поспешивало је учење, а употреба виртуелних манипулатива, средстава и рачунарских програма било је кључно да се проблеми сагледају на најбољи могући начин и свима учине доступни различити прикази ситуација и стратегија за решавање (Hwang & Hu, 2013).

На Масачусетском институту за технологију (*Massachusetts Institute of Technology*, популарном МИТ-у) у САД-у, одлучили су да почетком новог миленијума направе обнову образовне понуде, онако како и приличи институцији њиховог угледа. Наиме, у оквиру извесних курсева математике, конкретно из области диференцијалних једначина, који похађа велики број студената као изборни предмет (око 80%), направили су рачунарске програме, попут аплета и назвали их *матлетима* (mathlet). Матлети су рачунарски манипулативи, „мала, самостална, динамичка окружења за учење, јединствене намене, за употребу специјално у главном додипломском курсу из диференцијалних једначина“ (Miller & Upton, 2008, 124). Аутори у свом чланку детаљно образлажу основне принципе и смернице које су коришћене током израде овог програма за учење, који су стручног карактера, а намера им је да унапреде трансфере знања и помогну студентима да повећаном партиципацијом у процесу учења током студија боље се припреме за будуће „ангажоване и технолошки информисане грађане“, а и да истовремено „побољшају своје вештине и знања за позиве које ће обављати касније у оквиру свог дисциплинарног рада“ (Miller & Upton, 2008, 125). Веома комплексно и свеобухватно педагошки и социолошки заснован систем описан је до у детаљ, а оно што посебно завређује пажњу, јесте да се водило посебно рачуна о повратним информацијама које субјект/корисник матлета добија током учења уз помоћ овог програма. Матлет разликује два типа повратних информација (feedback-a): интринзични и екстринзични. „Интринзична (унутрашња) повратна информација јесте одговор на акцију која је својствена (инхерентна) систему у којем се акција и одиграла... Интринзична повратна информација обавештава оног који учи о својствима система у разматрању и представља најдиректнији начин како та информација може бити пренета“ (Miller & Upton, 2008, 126). Ова интринзична (унутрашња) повратна информација индивидуализује и обликује повратну информацију, тако да помаже да коришћење матлета буде персонализовано и уподобљено према потребама сваког корисника и да сваки корисник изграђује сопствено разумевање и уочава повезаности између теорије и праксе. „Екстринзична (спољашња) повратна информација јесте одговор на акцију, који је ван система. Цена, охрабрење, упозорење су употребљиви

облици повратне информације у контексту образовања... али могу да одврате пажњу оном који учи или кориснику са његовог примарног задатка“ (Miller & Upton, 2008, 126). Познавање ових особености јесте ситница која довољно говори до које мере је систем матлета размотрен и разрађен да сервисира корисника и на који начин се размишљало када је осмишљаван.

Закључујући чланак и разматрајући налазе истраживања употребе матлета у пракси, аутори потврђују све до сада изнете налазе у вези са виртуелним или рачунарским манипулативима, али и истичу употребљивост матлета за студенте који су слабијих перформанси (постигу слабији успех). Као мотивациони алат за потпору студентима матлет се показао сврсисходним. Важна забелешка јесте да „матлет не може да замени уџбеник или наставника“ (Miller & Upton, 2008, 136). На самом крају аутори у седам тачака истичу најважнија запажања у вези са пројектом који је продуковао матлет и један, али не и најзначајнији, јесте да употреба технологије од стране студента захтева да ова буде високо структурисана, што смо могли да закључимо из описа како се свеобухватно приступило изради овог малог рачунарског програма намењеног учењу и како су се поједине ставке дефинисале, свака као од изузетне важности.

Развој спацијалних способности од изузетног је значаја за развој математичког мишљења и са њим је у нераскидивој повезаности. Свакако да је простор геометрије тај који понајбоље показује субјектов развој спацијалних способности у које убрајамо спацијалне вештине, спацијалну перцепцију, спацијално резоновање, спацијални осећај, спацијалну визуелизацију. Основни елемент спацијалних способности јесте спацијална визуелизација, јер њоме омогућавамо да се конфигурација простора преслика у свест или мисао субјекта и тако оперише у семи-конкретном или интегрисано-конкретном, на исти начин као и у реалном физичком свету. Истакли смо раније, да све што важи у реалном свету, важи и у визуелном, тако да манипулације физичке природе постојеће су и у менталној визуелизацији субјекта (Костић, 2010) и (Finke, 1989). „Спацијална визуелизација игра важну улогу у бројним пољима, као што су рачунарска графика, инжињерство и архитектура. Појмови/теме инжињерства и дизајна део су кор-курукулума за индустријску технологију и инжињерско програмирање“ (Baki, Kosa and Guven, 2011, 292). Играјући се различитих игара, деца спонтано унапређују своје спацијалне способности – фудбал, слагалице, цртање, рачунарске игрице, итд. У школи, „неки од часова, као што су наука, математика и

уметност, играју важну улогу у развоју способности спацијалне визуелизације током формалног образовања“ (Baki, Kosa and Guven, 2011, 293).

Истраживањем спацијалних способности и вештина, посебно спацијалне визуелизације, уз помоћ физичких манипулатива и посебног *динамичког софтвера за геометрију* (DGS – Dynamic geometry software) и праћење напретка у учењу и унапређивања знања, добијени су налази који су представљени у студији (Baki, Kosa and Guven, 2011). *DGS – Dynamic geometry software* је унапређени софтвер за рад у пољу геометрије, како у две, тако и у три димензије. Објекте, односно, геометријске структуре је могуће конструисати, превлачити и издвајати на различите начине и истраживати карактеристике, релације у којима се налазе са самим собом, али и другим објектима, мерити структуре по различитим основама (запремину, површине, поједине елементе). Наведена студија детаљно представља могућности *DGS*-а и како је спроведено истраживање учења геометрије, посебно обраћајући пажњу на спацијалне способности и способности визуелизације у смислу могућности унапређивања и код старијих ученика, студената почетних година студија за наставнике математике.

Пратећи три групе – традиционалну групу, рачунарску групу (употребљавали *DGS*) и групу са манипулативима (употребљавали физичке манипулативе), дошло се до резултата да у првој групи, након одговарајућег програма учења, није дошло до сигнификантне промене у спацијалним вештинама, док је код преостале две групе до тога дошло. Показало се и то да је група која је употребљавала конкретан рачунарски софтвер имала бољу разлику у унапређењу спацијалних вештина, него група која је радила са физичким манипулативима, што није било очекивано од стране истраживача. Сугерише се да се овај налаз додатно истражи квалитативним анализама, које би биле спроведене (Baki, Kosa and Guven, 2011).

Опет се изводи закључак да се „вештине спацијалне визуелизације могу унапредити употребом физичких или виртуелних манипулатива“ (Baki, Kosa and Guven, 2011, 305), с тим да су виртуелни манипулативи дали боље резултате у истраживању. Наведено може да иде у корист тврђењу да су виртуелни манипулативи одлична надградња или допуна за првобитну употребу физичких манипулатива у процесу учења математике. Свакако, аутори сугеришу важне импликације за образовање: „(1) спацијална визуелизација се може унапредити кроз тренинг и увођење релевантног садржаја; и (2) да програм увођења различитих врста манипулатива и разних контекста може побољшати вештине спацијалне визуелизације“ (Baki, Kosa and Guven, 2011, 306).

НАСТАВНИЦИ И УПОТРЕБА МАНИПУЛАТИВА ТОКОМ УЧЕЊА МАТЕМАТИКЕ

Ауторка Р. Моуер (2001) истиче да наставници коментаришу да је употреба манипулатива у поучавању математике „забавна“. Мада истраживања показују да је употреба манипулатива „мало више од диверзије у учионицама“ (Моуер, 2001, 175). Једноставно, „манипулативи су тако израђене репрезентације математичких концепата да могу да имају различиту сврху у различитим контекстима са различитим степеном транспарентности“ (Моуер, 2001, 177). Стога наставници треба добро да разумеју структуру и могућности репрезентације сваке врсте манипулатива и да их веома смишљено користе у наставном процесу, јер „ученици рефлексijом својих активности са манипулативима изграђују мишљење“ (Моуер, 2001, 177).

Налази истраживања упућују да су манипулативи најефектнији када се конзистентно користе дуже времена (Sowell, 1989), а да је најбоље када се за математичке инструкције дуже времена користе исти (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997).

Наставна пракса показује да је ученицима ближи „улични куповно-продајни концепт рачунања“, а да када се исти концепт трансформише у математички језик симбола и учионичко окружење настају проблеми (McNeil & Jarvin, 2007, 311).

Изложене информације, заједно са податком да манипулативи не гарантују успех указују на то да је улога наставника пресудна, јер треба на основу добре информисаности, знања о предметној науци, наука о образовању, психологије, педагогије, првенствено когнитивних наука, а и неуронаука, да осмисли подстицајну околину за учење у којој ће манипулативи наћи своје место и употребу. „У нехату и без намере наставник може бити извор проблема“ одговарајуће примене манипулатива и то што „сматрају да су одлична забава и корист, а не размотре њихову вредност као алата за учење математике“ (McNeil & Jarvin, 2007, 312).

Наставник треба да има у виду да постоје извесне препреке у употреби манипулатива, али и у учењу математике, које не морају то да буду уколико се има у виду њихово постојање као таквих и као нормалних појава у развоју. Наиме, „(а) нетранспарентност веза између манипулатива и концепта или процедура њихове симболизације, (б) дечији ограничени когнитивни ресурси, и (в) тенденција деце да

пружају отпор променама“ (McNeil & Jarvin, 2007, 313). Деца, заправо ученици, не могу одмах да увиде структуру манипулатива и то треба одговарајућим инструкцијама и дирекцијама да остваре, затим да током процеса учења повежу репрезентацију коју су физички савладали и онда то са визуелизацијом преведу у симболику математичких репрезентација. Тако се дуалност репрезентација утапа у јединственост апстрактних форми знања које могу да се користе у новим ситуацијама и новим конструкцијама учења. Овај процес је и по ширини и по дубини појмова који се обрађују постепено, тако да се математички концепти, идеје, мисаони обрасци и изрази постепено изграђују и развијају.

Стога наставници осмишљавају процесе учења који би омогућили ученицима да превазиђу интуитивно, свакодневно разумевање математике и да могу постепено да их премосте уводећи симболику и прелазећи на математичке репрезентације у вишим нивоима апстракције. Управо јаз између интуитивних знања и формалних знања, назовимо их и уређеним структурама знања (домени знања – општи и специфични у терминима когнитивних наука) јесте премостив и наставник води ученике кроз тај процес превазилажења, прављења веза или мапирања као јединствених структура знања интуитивног и формалног (McNeil & Jarvin, 2007, 315).

Према чланку Р. Моуер (2001), у коме приказује мноштво истраживања северноамеричке образовне праксе (наставна пракса у САД), знатан број наставника математике има проблема са употребом манипулатива, јер их користе на начин који није адекватан. Наиме, обично их препусте деци као „награду за одговарајуће понашање“, као „додатно време за рад“, „обогаћивање“ манипулативима онога што су учили активностима на часу математике („*fun math*“ *versus* „*real math*“), затим, да се ученици играју у међувремену наставе (нпр. на почетку и након активности „папир и оловка“, да би се заинтересовали или релаксирани од „озбиљних“ активности учења и математичких садржаја), али и као осмишљене активности, како наводе петком (крај радне недеље), када је атмосфера за учење опуштенија. То се рефлектује на наставну праксу, јер ученици не могу да разумеју и направе конјунктуру између активности са манипулативима и онога што раде током часова у атмосфери „папир и оловка“. Манипулативи треба да промовишу учење и поучавање и да у тим околностима имају смисла ако изазову „интринзичко уживање“ (intrinsic enjoyment for students). Дешава се да поједини наставници воде процес тако да излази да је употреба манипулатива корисна за прикладно понашање ученика, али са друге стране ствара се задршка код

деце уколико се рад са манипулативима повезује са одговарајућим понашањем (Moyer, 2001).

Спровођење одговарајућег ефективног коришћења манипулатива у наставној пракси задатак је наставника. Неопходно је да наставник успешно изврши конјунктуру дуалних репрезентација – онога што је било предмет руковања и стицања искуства са математичким записом и изражавањем идеја и оперисања са њима. Ово наставник реализује вођењем процеса на начин како смо описали *just-in-time* и сврсисходним инструкцијама током активности. Математички концепти морају бити повезани са искуством које су деца или ученици стицали у активностима са различитим физичким материјалима. Та материјализација математике, заправо искуство физичких објеката мора да буде у тесној вези (бијекцији) са оним што се учи током наставе у маниру „папир и оловка“. Иначе, ученици сами без инструкција формирају мишљење и доносе закључке у зависности од способности за то. Али то је онда стихијски и ублажено речено спонтано и не као предвиђени циљ или исход наставе која је планирани и контролисани процес. Да би се избегле импровизације, конструкција математичког мишљења код деце, односно ученика, треба да буде под контролом или праћењем наставника, тако да се интендирано води процес учења и поучавања и да постоје инсталирани индикатори за праћење процеса са могућношћу интервенције и исправљања грешке. Свакако, тешкоћа наставника да повежу манипулативе са математиком је разумљива, јер се ради о врло сложеном процесу формирања и унапређивања мишљења и знања ученика. С друге стране то је и обавеза наставника да процес који води буде што ефектнији и да се у службу овог захтева ставе сви ресурси, а манипулативи су један од најзначајнијих.

Дакако, „наставници математике¹⁹ имају као изазов да:

- (1) Тумаче ученичке представе математичког мишљења
 - (2) Откривају и представљају везе између математичких појмова
 - (3) Развијају одговарајуће конкретне контексте за учење математике“
- (Moyer, 2001, 194).

Препорука за употребу манипулатива јесте неупитна од стране оних који се баве развојем професије, обукама наставника, истраживача у образовању, али постоје проблеми када наставници треба да направе педагошки напредак у учионицама, тако

¹⁹ У изворном тексту (на енглеском језику) стоји само *наставници*, а односи се првенствено на *наставнике математике*, јер је читав чланак посвећен проблемима учења математике. Иначе, без тешкоћа би се могла извршити екстраполација на популацију свих наставника (најпре наставника разредне наставе).

да захтеве према ученицима задрже одговарајуће високим. Наиме, од наставника се тражи да реформишу своје педагогије, при том се нико не обазире да ли треба да се изврши и реконструкција разумевања самог математичког знања (концепата и идеја). Дакле, „разумевање математичких концепата јесте есенцијално за развој математичких компетенција“ (Puchner, Taylor, O'Donnell and Fick, 2008, 313). Реформске стратегије и циљеви су изведени из научних истраживања наставне праксе, и од наставника се тражи примена, а да се претходно не изврши обука у реконцептуализацији њихове базичне науке, али и наука које су дошле до налаза према којима јесте предложена измена педагогије у школама. Учење математике јесте један конструктиван процес.

Наставници су пред захтевом да непрестано врше промишљање свога математичког знања, не да га утврђују понављањем, већ да концепте које имају конструисане и склопљене у свести реконцептуализују и врше нове и нове реконструкције знања. Тако он може квалитетно да одлучи коју наставну стратегију да употреби да би изазвао, употребом извесног манипулатива, сасвим одређену врсту математичког мишљења и усмерио својим педагошким поступком на ефектно постизање циљева садржаја учења.

Значајан податак јесте да су се наставници, и то који су били заинтересовани за професионални развој, изјашњавали да су учили да поучавају математику манипулативима на обукама (курсевима) и професионалним искуством, а неки од њих нису уопште имали искуства у свом досадашњем раду са њима (Moyer & Jones, 2004).

Студије показују да позитивна контрола наставника подстицајно утиче на ученике и на њихову пажњу током поучавања. Обично „наставници приказују концепте, затим ученицима уступе манипулативе са наведеним задатком и сврхом решавања“ (Moyer & Jones, 2004, 28). За наставнике је важно да добију подршку у промени окружења, у којем ученици добијају активнију улогу, а они (наставници) да „провode вишеструке визије поучавања и учења математике који укључују и елементе избора“ (Moyer & Jones, 2004, 30).

Шта све утиче на ефектну употребу математичких манипулатива даје за налазе веома различите резултате у различитим околностима истраживања. Ево неких налаза који су излистани мета-анализом различитих других истраживања:

- Мање искусни наставници користе манипулативе чешће
- Искуснији наставници употребљавају манипулативе чешће него мање искусни наставници

- Нема повезаности између употребе манипулатива и ускуства наставника у основном образовању

(Uribe-Flórez & Wilkins, 2010, 365).

Након прочитаног, свако би се збунио и запитао о исправности методологије научног истраживања и поузданости, до мере да упути на својеврсну епистемолошку кризу, барем када је употреба манипулатива на дневном реду. Међутим, разлози су управо они које смо изнели. Различити услови испитивања, различита одељења, контекст испитивања, групе и основни разлози и хипотезе неког испитивања и веза са налазом, која је условна. Дакако, није потребно журити и доносити преране закључке и повезивати оно што и нема никакву међуузрочност.

Наставнички позив јесте веома сложен и ова сложеност се посебно показује у процесу доношења одлука у вези са учењем и организацијом и реализацијом наставне праксе. Наставник, поред вештина управљања одељењем, задовољством послом, треба да развија добре односе са својим ученицима и посебно да им даје подршку за савладавање изазова учења математике. Његова наставничка уверења треба да су у складу са праксом коју реализује у својим одељењима.

Поставља се питање како су повезани (уколико су уопште повезани) разред, уверења и професионалне карактеристике наставника као предиктори за употребу манипулатива у настави математике? (Uribe-Flórez & Wilkins, 2010) Које су наставничке варијабле повезане и утичу на то да наставник успешно употребљава манипулативе у наставном процесу?

Резултати који могу да дају неке одговоре на претходна питања садржани су у налазима студије (Uribe-Flórez & Wilkins, 2010) у делу емпиријског истраживања на једном свеобухватном узорку (наставници свих нивоа образовања). Они су следећи:

- Наставничка уверења и разред у коме поучавају важни су предиктори колико често у основној школи наставници употребљавају манипулативе током предавања
- Карактеристике наставничког бекграунда (вештине управљања одељењем, задовољство послом, однос према ученицима, наставничко искуство, пол, позиција у установи/школи, образовни и школски систем, припремање за наставу и активности) нису релевантни као предиктори употребе манипулатива
- Наставници у предшколским установама чешће од осталих употребљавају манипулативе

- Наставници од 3. до 5. разреда ређе употребљавају манипулативе од осталих
- Године наставничког искуства у учионици и године старости нису релевантни да буду предиктори употребе манипулатива у настави математике
- Наставници који верују да употреба манипулатива у старијим разредима (код старијих ученика) није неопходна, ређе користе манипулативе (веза уверења наставника и његове праксе)

(Uribe-Flórez & Wilkins, 2010).

Ово је само оно од налаза, што је могло да буде издвојено као сигурно, мада у свој сложености околности поучавања и специфичности и аутентичности било ког тренутка процеса поучавања у мноштву процеса, тешко је екстраховати опште налазе и прогласити их за општу законитост процеса учења. Свакако, постоје сазнања која можемо да издвојимо и поделимо у академској заједници и пракси поучавања, тако да напори нису узалудни. Општи циљ наставника математике у образовању и установама образовања јесте да укаже и реализује „важност математике и математичког образовања у стварању креативног и добро уравнотеженог ученика, који ће једнога дана постати креативна и добро уравнотежена индивидуа и грађанин“ (Kerekes, 2006, 11).

Очигледно је да наставнички професионални развој или стручно усавршавање треба да буде такво да оспособи да може да учини рефлексивним и флексибилним сопствене структуре знања, да их временом реконцептуализује у складу са променама у свету који га окружује и да то приказује кроз властиту праксу и рад са ученицима и децом. Блискост различитим стратегијама решавања проблема, разумевање дечијег начина размишљања, схватање и праћење процеса развоја на персоналном нивоу, заправо индивидуализованим приступом у групном раду или прилагођавањем процеса сваком детету захтеви су за данашње наставнике и тога треба да буду свесни и припремљени и пре него уђу у систем, као наставнички кандидати. „Професионални развој јесте потенцијал за промену наставничких знања, вештина, уверења и пракси“ (Kerekes, 2006, 14). Јасно је да постоји утицај наставника, те он са становишта друштва не може да буде афективан (уколико је под дејством имплицитне и фолк педагогије), већ рефлексиван и динамичан ресурс, који поспешује и управља интеракцијама, које посредују знањима у једној флексибилној мрежи резултујућих међуутицаја и међурелација.

За наставнике, како време одмиче, прави изазов јесте и употреба информационих технологија у процесу учења. Када се ово овако искаже, то не значи учење руковања опремом и различитим уређајима и рачунарским програмима, већ на њихово одговарајуће коришћење у наставном процесу, како би се рекло, по *баш-на-време* методу. „За коришћење виртуелних манипулатива, наставници морају да имају разумевање како да употребљавају математичке репрезентације у поучавању, исто тако добро као и разумевање како да структуришу лекције у којима ученици користе технологије“ (Reimer & Moyer, 2005, 7). Сада, дакако, проблем није само да је један сегмент наставничког рада у настави покривен употребом технологије, већ и та технологија мора бити јасно структурирана и праћена и да то буде јасно и сврсисходно обухваћено припремом наставника за активности учења – и за све то наставник да буде стручан/оспособљен (познавање технологија, употреба технологија, технологије у процесу учења, управљање процесом учења обogaћено технологијом).

Предагошка разматрања око употребе манипулатива указују на значај наставника и њихове спремности да се ухвате у коштац одговарајуће употребе средстава и алата за учење математике. Увођење симболичког математичког концепта јесте веома осетљиво, тако да рад са манипулативним материјалом и праћење резултата и анализа рада јесте веома сложена са аспекта праксе поучавања. Бавећи се наставницима приправницима, али и наставничким кандидатима који тек треба да уђу у систем, налази говоре да њихови ставови, способности и понашање током поучавања/наставе јесу повезани са искуством које стичу радећи у учионици и да се значајно мењају током времена утичући на то искуство. Друго, наставници уче математику на тренинзима за стручна усавршавања уколико то сматрају релевантним и веома употребљивим у поучавању деце математици (Fuson, 1975, 61). Још једна потврда емпиријског истраживања аутора Warkentin-a (1975) из времена када су манипулативи истакнути као неопходни и незаобилазни у настави математике и за ефектан утицај на развој математичког мишљења говори у прилог да наставници треба да буду адекватно припремљени за увођење нових приступа у поучавању математиком. Потребно је учинити напоре да би се унапредила иницијална знања математике код наставника и њихова припрема за извођење наставе, јер ставови се често преносе до ученика на начин и повезаношћу коју смо претходно изнели (Warkentin, 1975). Када наставник прихвати нови концепт, приступ, то значи да његова суперструктура знања математике добија нови смисао, нова значења и он то мора да превазиђе на флексибилан начин. Исто је тако и са употребом манипулатива. Уколико наставник није користио

манипулативни материјал и на обуци за професионални развој увиди да они остварују добит током процеса учења, он сада читаву своју суперструктуру знања математике види на нови начин и поставља је на једну емпиријску основу са новим значењима и повезаностима (Fuson, 1975).

Да ли је разлог неуспеха ученика у учењу математике неуспех наставника да повезују стечена знања на сопственим студијским програмима са сликом математике којом желе да поучавају, маниром којим представљају садржаје, јесте питање које се поставља истраживањем реалности наставне праксе (Warkentin, 1975). Ученици често на различитим активностима учења математике добијају неповезане, нефункционалне информације и овај модел неинтегрисаног учења прати их тако да усвојивши различите концепте математике развијају своје мисаоне процесе до нивоа формалног и апстрактног мишљења. Овај конфузан и неадекватан пут развоја математичког мишљења и усвајања математичких знања захтева да се унапреде компетенције наставника за припремање поучавања, које треба да буде релевантније, а настава интегрисана и веома интерактивна.

„Природа математике као исхода социјалног процеса“ јесте таква да је „вечно отворена за ревизију“ структуре знања, концепата, идеја, учења (Hwang & Hu, 2013, 308).

Проучавајући могућности унапређивања употребе манипулатива у настави математике кроз програме професионалног развоја, спроведено је истраживање на две групе субјеката, наставничких кандидата – експериментална и контролна група. Експериментална група је радила са манипулативима решавајући математичке задатке три недеље. Резултат је био да експериментална група није показала предност над контролном групом. Штавише, контролна група је поједине вежбе решавала брже за читавих 25% времена. Објашњење за овај резултат је у томе што су субјекти поучавани математици манипулативним материјалом, а не како да поучавају математику употребом манипулатива. Аутори затим закључују да „ми можда проводимо више времена употребљавајући манипулативе поучавајући их математичким садржајима које очекујемо да предају у будућности“, него што их припремамо умећу наставничког позива (Barnett & Eastman, 1978, 101).

НЕКИ ПРИМЕРИ УПОТРЕБЕ МАНИПУЛАТИВА У УЧЕЊУ МАТЕМАТИКЕ

Иако смо већ уочили да истраживања дају понекад опречне налазе по питању праксе употребе манипулатива, истовремено смо добили и одговор који дубљом анализом и укрштањем података и резултата говори у прилог томе да су услови испитивања били различити или да су подаци појединих истраживања били такве природе да налази нису могли да се пореде, односно, били су неупоредиви (Uribe-Flórez & Wilkins, 2010).

Било који практичар, са добром теоријском припремом и сталним праћењем научних налаза из истраживања увек ће бити запитан када је манипулатив најупотребљивији. „Још увек нисмо чули много о томе *како* деца уче од или са манипулативима и наставници имају једноставну претпоставку да деца уче апстрактне појмове додирујући и померајући објекте“ (Kamii, Lewis and Kirkland, 2001, 21). Развој математичког мишљења код деце заснива се на стицању две врсте знања – *физичког знања* и *логичко-математичког знања*. Неведене две врсте знања имају различите изворе и ова друга врста јесте природна доградња на прву, тако што је преко визуелизације апсорбује и у менталној слици врши манипулације, попут оних у реалности. Можемо да кажемо да „физичко знање има извор у објектима, а такав извор за логичко-математичко знање јесте у свести/мислима сваког детета посебно“ (Kamii, Lewis and Kirkland, 2001, 22). Овако подељени извори објашњавају и постојање „спољашње реалности“ и њеног аналога „унутрашње реалности“ која настаје визуелизацијом и омогућава да настанком интегрисано-конкретних знања или семи-конкретног водимо когнитивни процес развоја математичког мишљења до формалних или апстрактних структура и појмова. Ови когнитивни путеви и пластичност мозга омогућава настајање флексибилних конструкција знања, у непрекидном процесу реконструкције, након сваког циклуса учења, који садржи елементе когнитивне неравнотеже и нових сазнања реалног света. Знање физичке реалности и логичко-математичких конструката јесу нераздвојиве врсте знања и коегзистенцијом уводе субјекта у могућност виших нивоа математичког мишљења.

Пре него што пређемо на кратке приказе и анализу појединих манипулатива приметимо да је важно за децу/ученике „да имају разнолике материјале за манипулацију и прилику да их ређају, класификују, вагају, гомилају (слажу) и

експлоатишу уколико конструишу математичко мишљење“ (Boggan, Harper and Whitmire, 2010, 2). Манипулатива и манипулативног материјала има многоструког – играчке (луткице, аутомобили...), алати, купљени у продавницама (Квизинерови штапићи, жетони, штапићи, рачунаљке, танграм, коцкице, домине...), израђени од стране наставника или ученика код куће, са специјалном наменом (вагице, клацкалице...), различити предмети (дугмад, зрневље житарица, затварачи, новчићи...).

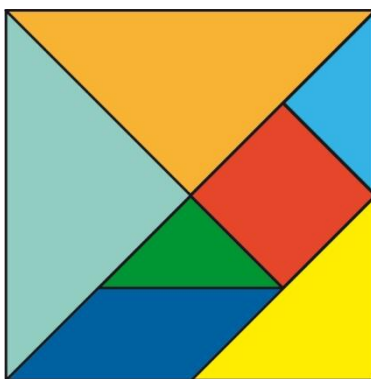
Сврха манипулатива јесте да уводи у активности учења, да омогућава вежбање закључивања око неког концепта о коме се учило, да помаже вежбању у вези са неким знањем, али и као помоћ у проблемима са учењем и отклањању неких недостатака у знању. Истовремено, манипулативи су први корак ка увођењу у концепте који су формалне природе и потпора за формирање апстрактних појмова и оперисање њима уз помоћ математичке симболизације. Свакако у контексту када се учење одвија у оквирима заснованим-на-игри, можемо да кажемо да поред процеса развоја математичког мишљења манипулативи доприносе и смањењу анксиозности према математици (Boggan, Harper and Whitmire, 2010, 4).

„Манипулативи су више или мање употребљиви у зависности од квалитета мишљења које стимулишу“ (Kamii, Lewis and Kirkland, 2001, 31). Истовремено, манипулативе можемо да поделимо у две групе – „манипулативи са којима деца могу да уче математику“ и „манипулативи од којих деца очекују да уче“ (Kamii, Lewis and Kirkland, 2001, 23).

Пример 1 – Танграм.

Коришћење танграма у настави математике спада у једну од употреба манипулатива и може се уводити у различитим областима учења математике – разломци, површине, комбинаторика, геометријске трансформације.

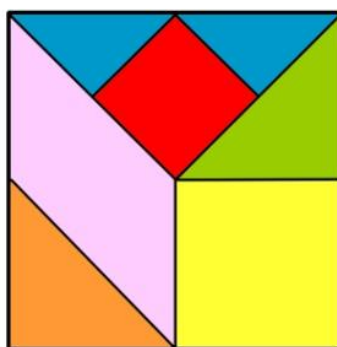
Танграм јесте заправо један квадрат састављен из седам мањих фигура које су све „настале“ од основног или базичног једнакокрако-правоуглог троугла, који чини шеснаести део предметног квадрата (универзум квадрат) – слика 1.



Слика 1. Универзум квадрат

Дакле, код танграма, квадрат са којим радимо, рукујемо, састављен је од два основна једнакокрако-правоугла троугла (по једна шеснаестина), затим, од једног квадрата који је састављен од два основна једнакокрако-правоугла троугла (две шеснаестине, односно, једне осмине универзум квадрата), једног паралелограма – ромбоида састављеног од два основна једнакокрако-правоугла троугла (две шеснаестине, односно, једне осмине универзум квадрата), једног једнакокрако-правоуглог троугла састављеног од два основна једнакокрако-правоугла троугла (по две шеснаестине, односно, једна осмина универзум квадрата) и од још два једнакокрако-правоугла троугла састављена од по четири основна једнакокрако-правоугла троугла (по четири шеснаестине, односно, по једна четвртина универзум квадрата).

Постоје и други начини поделе универзум квадрата на мање фигуре (слика 2), али претходно описани начин јесте „стандардни“ и највећма се користи.



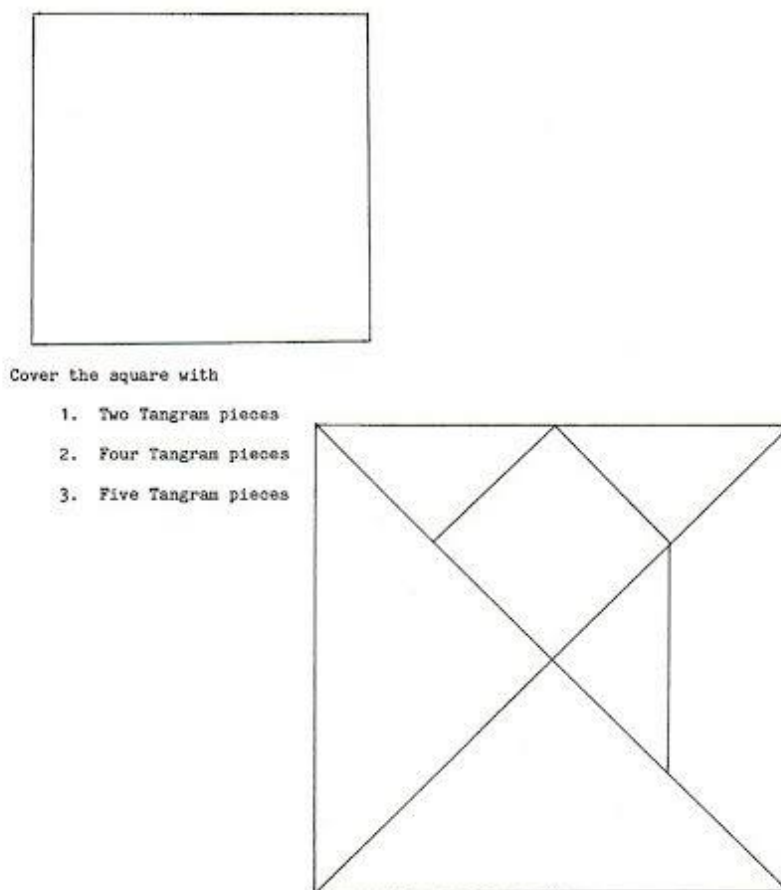
Слика 2. Универзум квадрат – друга структура

Основна употреба танграма је у слагању различитих фигура, које могу бити задате на два начина: (1) да се фигура сложи у оквиру задатих граница или (2) да се фигура сложи на основу задате слике која се посматра са стране. Први начин је

једноставнији јер задате границе омогућавају оријентацију за дужинске елементе и површину фигуре коју треба сложити.

Иначе, танграм је могуће употребљавати у задацима који обрађују или утврђују појам површине и уз његову помоћ увиђати смисао претварања различитих мерних јединица једних у друге, а за основу се узима то да је основни једнакокрако-правоугли троугао садржан у свим другим фигурама које чине танграм – погледати Прилог 7 - Час са танграмом.

Задаци комбинаторне природе ученицима омогућавају да геометријска знања обогате разумевањем различитих врста изометријских трансформација – *слика 3*. Ученике различитим инструкцијама водимо у састављање фигура које су изометријске по облику, али не и по садржају којим су састављене.

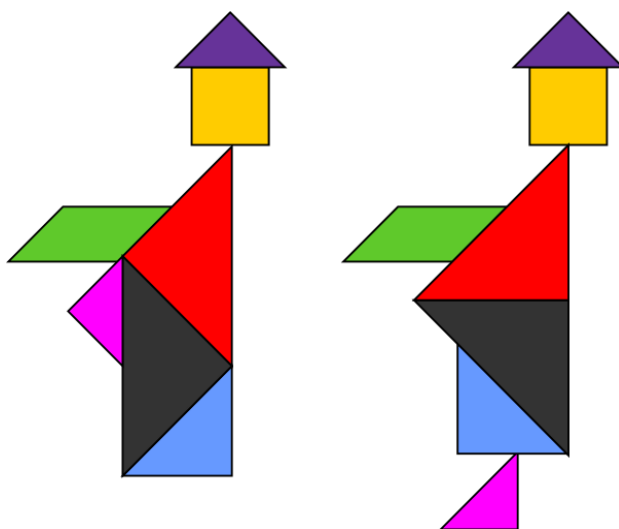


Слика 3. Танграм - комбинаторни задаци

Задатак који је преузет из ауторског чланка (Kamii, Lewis and Kirkland, 2001, 24) упућује ученика да мањи квадрат прекрије фигурама из универзум квадрата танграма, тако да користи (а) две танграм фигуре, (б) четири танграм фигуре и (в) пет танграм фигура. Да бисмо одговорили на ове инструкције, неопходно је да се изврше

трансформације дела универзум квадрата танграма и тако добијамо изометричне квадрате, али различито структурисане деловима/елементима танграма.

Ученицима је могуће приказати својеврсни „парадокс монаха“, чија суштина је у томе што истим бројем фигура/делова састављамо комбинаторно различиту фигуру једнаких површина и наизглед једнаких облика (контура) – *слика 4*. Наведена слика збуњује ученике и ситуација приказана на њој уводи ученике у стање когнитивне неравнотеже, али прецизним сагледавањем увиђа се да „мантија“ првог монаха из парадокса јесте дужа, али му недостаје „стопало“, које другом монаху допуњује површину.



Слика 4. Танграм – „Парадокс монаха“

Објашњењем (разјашњењем) ситуације ученик стиче нови увид и уграђује га у постојећу структуру знања, тако да на тај начин напушта стање неравнотеже, обогаћен апсорбованим сазнањем нових околности.

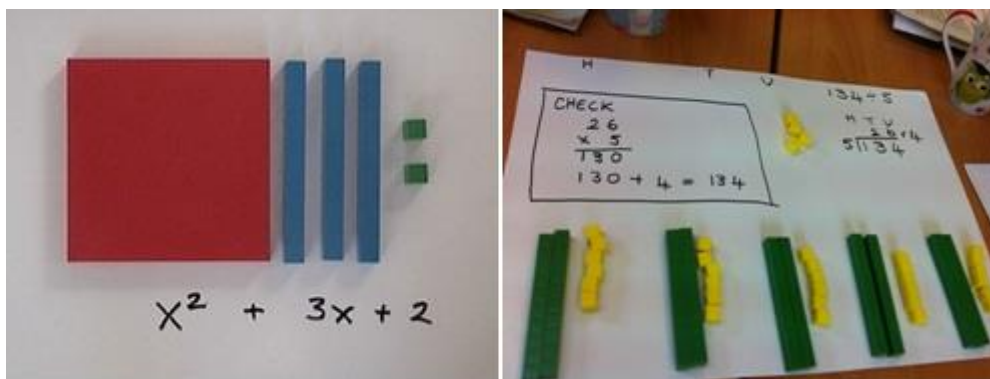
Пример 2 – Квизинерови штапићи.

Квизинерови штапићи (Cuisenaire rods) представљају сет од 18 разнобојних штапића од којих су по два исте величине и боје и две истобојне и изоморфне коцкице које се садрже цео број пута у штапићима (од два до десет пута) – *слика 5*.



Слика 5. Квизинерови штапићи

Уз помоћ Квизинерових штапића, ученици могу да обављају радње учећи основни рачун са природним бројевима, али и разломке, те упоређивати бројеве и успостављати кореспонденцију између фигуре и њених делова, која је направљена од ових средстава – погледати одговарајуће слике са примерима употребе Квизинерових штапића (слика 6).



Слика 6. Коришћење Квизинерових штапића у рачунским задацима

Напомена. Слике су преузете из ауторских текстова са интернета (Willingham, 2013) и (Bask, 2013).

Пример 3 – Импровизовани манипулативи.

Могуће је да наставник сам или уз помоћ ученика или родитеља припреми манипулатив за коришћење током активности учења на часу. У ту сврху могу да помогну различити природни материјали као што су дугмад, зрневље (семенке, плодови биљака), каменчићи, тестенине, шкољкице са плаже, затварачи од флаша (брендирани, небрендирани).

Свакако, могуће је исећи и направити од картона кругове који представљају целине, а ученицима дати инструкције у вези са сечењем пице, пите, бурека или неке врсте колача.

Манипулативи могу да буду и јестиви; различито воће и поврће можемо да користимо у активностима учења, тако што усвајамо разломке делећи их на одређени број делова између више особа по инструкцијама (Дамјановић, 2009) – слика 7.

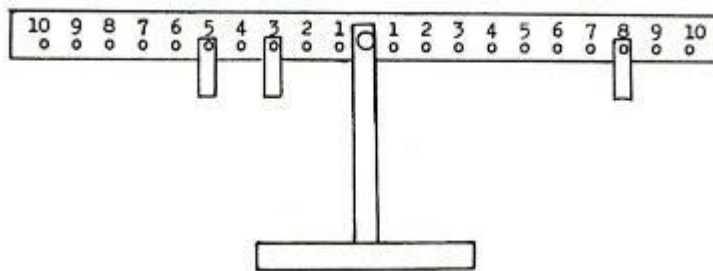


Слика 7. Разноврсност манипулатива

Права прилика је у разреду за време рођендана неког од ученика, уз помоћ торте кружног облика, ученицима демонстрирати шта је удубљено, а шта испупчено (конкавно и конвексно). На истом материјалу објаснити и углове ученицима. Основне радње за приказивање наведеног јесу у односу торте као целине и њеног парчета, уколико исецамо централне углове. Овако се могу учити и разломци, односи делова и целине.

Пример 4 – Манипулативи у облику различитих направа/средстава.

Да бисмо добили на очигледности, као једном од основних принципа наставе, користима различита дидактичка средства, осмишљена и пројектована да математичке концепте, појмове и идеје што верније материјализују, иако су математички објекти апстрактне, нематеријалне природе. Једна од таквих конкретних направа за учење математике јесте „вагица за учење једнакости“, којом уз помоћ „јачача“, ученицима приказујемо равнотежно стање у физици као математичку једнакост тежина/маса – слика 8. Пример је преузет из ауторског чланка (Kamii, Lewis and Kirkland, 2001, 28), приказује тачну бројевну једнакост $5 + 3 = 8$. Истовремено, помоћу „вагице једнакости“ можемо утврђивати да ли је неки математички исказ једнакости тачан или не, у зависности да ли се налази у равнотежи.

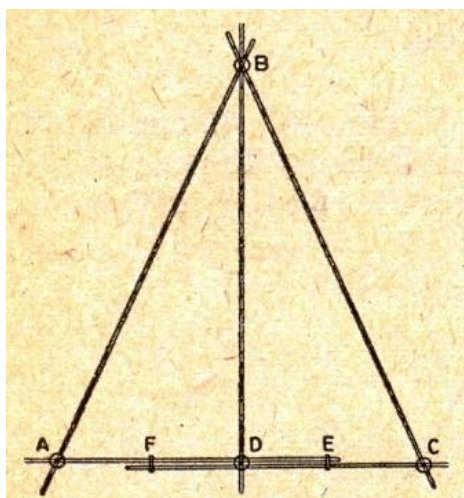


Слика 8. Вагица једнакости

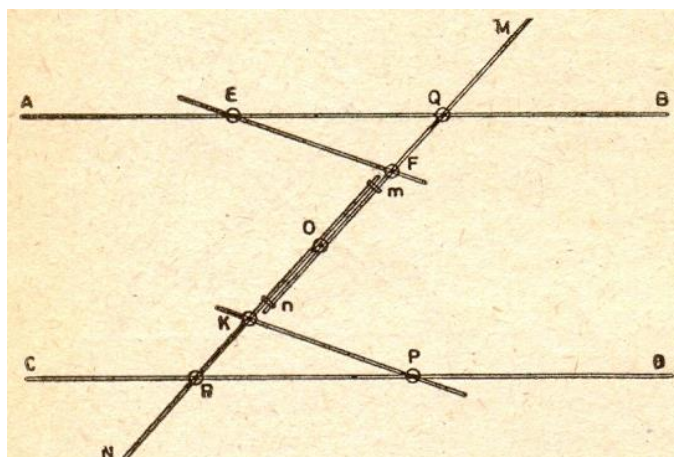
Уз помоћ дидактичког средства (слика 8) могуће је учити и једначине са једном непознатом, тако што ћемо инструкисати ученике да утврде који број треба додати да би „вагица за једнакости“ била у равнотежном положају.

Пример 5 – Манипулативи у учењу геометрије.

Геометрију можемо учити уз помоћ жичаног сета – шипки, прстена, четвороугаоних оквира, канапа или гуменог прстена. Уз помоћ канапа или гумених прстенова представљамо места пресека или инциденције, а жичане шипке и прстенови представљају праве и кружне линије, док четвороугаони оквири представљају равни. Свакако, жичане шипке треба да буду тако савитљиве да могу у траженим околностима да представљају делове кружног лука. Овај приступ учења геометрије представљен је детаљно од стране аутора М.В. Клочкова (1963) у публикацији о коришћењу очигледних средстава у настави геометрије и тригонометрије, под истим насловом. Сlike 9, 10 и 11 преузете су из наведене публикације и тамо означене бројевима 17, 26 и 63 (Клочков, 1963).



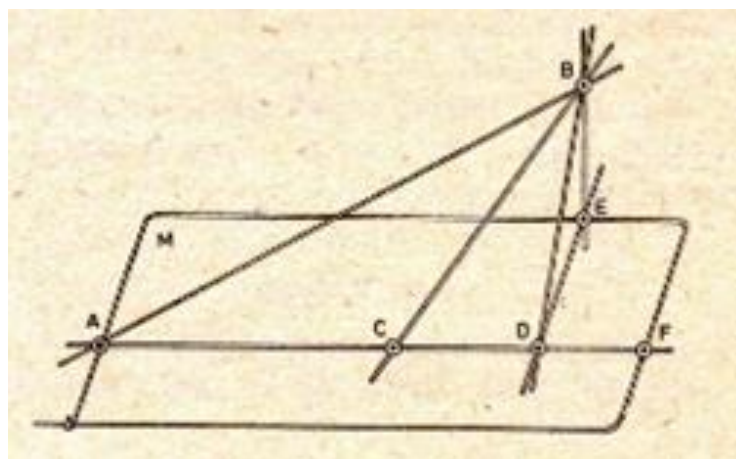
Слика 9. Жичани модел манипулатива у геометрији – приказ ситуације са једнакокраким троуглом



Слика 10. Жичани модел манипулатива у геометрији – приказ ситуације са трансверзалним угловима

Слика 9 приказује једнакокраки троугао и односе одговарајућих елемената троугла – страница и углова; уједно је приказана и осносиметричност ове фигуре. На слици 10 приказана је ситуација у равни са трансферзалним угловима када су пресечне праве међусобно паралелне.

Извесне околности у простору приказане на слици 11 јесу заправо скица услова задатка који је дат ученицима на израду. Наиме, потребно је одредити растојање темена B од равни која садржи страницу AC и са равни троугла ABC захвата угао од 45° . Мерни бројеви дужина страница дати су и износе $AB=9$, $BC=6$ и $AC=5$. (Клочков, 1963, 42)



Слика 11. Жичани модел манипулатива у геометрији – приказ ситуације у простору

УПОТРЕБА МАНИПУЛАТИВА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ – ИСТРАЖИВАЊЕ (ИЗВЕШТАЈ)²⁰

Савремени налази сугеришу „да је математика далеко од чистог културног конструкта: она захтева пуну функционалност и интегритет специфичних структура мозга“ и одговор тражимо у тзв. „пластичности – флексибилности – неуронских кола при математичким операцијама“ (ОЕСД, 2010d, 21). Дете, развијајући се успоставља *представе* о свету који га окружује, тј. прави *менталну слику (визуелизацију)*, што је начин стварања слике одређених објеката или предмета у њиховом одсуству, али и њихових својстава и односа (Марјановић, 1996а, 29) – прелазак са конкретног у апстрактно или формално. Што је искуство веће, обухватније, то је ментална слика квалитетнија, оштрија (Марјановић, 1996а, 30).

Математички објекти са којима радимо могу бити веома различити – геометријски облици (тачке, праве, равни, дужи, фигуре, тела...), искази (дефиниције, аксиоме, теореме, леме, тврђења, ставови, хипотезе...), низови симбола (формуле, релације, једначине, неједначине, једнакости и неједнакости, функције...)... Развојем, постаје нам јасно да одређени објекти не могу да се стављају у однос са неким другим и тако успостављамо сложенији систем функционисања мишљења. Ако кажемо кружница или круг, треба да разумемо основну разлику, између њих, а онда и разлику између њихове материјализоване од идеалне представе у менталној слици света. Кружница је линија без димензије у смислу идеалног математичког облика без ширине. Материјализована кружница, нацртана шестаром, већ има линију одређене ширине, тако да то није идеални објекат, већ његов репрезент, којим оперишемо у математичком мишљењу, не осврћући се на ова својства материјалности.

Потребни су „наставници који могу да рефлектују на своје ученике репрезентације математичких идеја и помогну им да развију невероватно софистициране математичке репрезентације“ (Clements, 1999, 47), у окружењу пуне партиципације ученика и социјално пожељних образаца интеракција.

²⁰ Поглавље је објављено у коауторству у часопису *Образовна технологија*, бр.4, за 2015. годину, као оригиналан научни рад. Погледај (Damjanović, Stamenković, Popović i Dimitrijević, 2015).

„Математички манипулативи нуде ученицима пут (начин) да разумеју апстрактне математичке концепте омогућујући им везу концепата са више неформалних (информалних) конкретних идеја“ (Uribe-Flórez & Wilkins, 2010, 363).

„Модели или манипулативна средства (помагала) помажу деци да схвате и развију менталне слике математичких принципа и процеса“ (Dunlap & Brennan, 1979, 89).

Основна идеја употребе манипулатива јесте да ученицима помогне да визуелизацијом створи дуалне репрезентације конкретних и апстрактних објеката и да их повеже са математичком симболизацијом. То није лако остварити и често се у пракси дешава да ученици раде са манипулативима, а не повезују те садржаје са математичким објектима, односно не праве везу са математичким објектима у смислу оперисања њима и превођења конкретних ситуација математичких репрезентација у ситуације оперисања математичким симболима. Дешава се, ученицима сами манипулативи нису транспарентни, тако да онда и не могу да направе везу са математичком симболизацијом (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997). Наравно, манипулативи помажу ученицима да апстрактне концепте запишу симболички, али уколико им је јасан однос између самих манипулатива у околностима у којима конкретно раде и ако су сами манипулативи структурисани, онда је могуће превести их у језик математике, математичког изражавања. Када су узраси млађи тешкоћа повезивања манипулатива и математичких концепата и симбола је већа, док код старијег узраста тешкоће повезивања су између геометријских конструкција и њихових доказа (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997).

Многи психолози тврде да дете треба да има што више искуства са физичким објектима и да ће то искуство бити добра основа за формирање формалног, апстрактног мишљења, за развој способности оперисања апстрактним концептима, примарно математичким репрезентацијама. То би онда значило да деца која су имала рано и значајно искуство са манипулативима, касније немају проблема са формирањем апстрактног мишљења и развоју мишљења уопште, што у пракси није тако (McNeil & Jarvin, 2007). Теоријска истраживања праксе кажу да подршка учењу физичком акцијом доноси добробит за памћење и разумевање садржаја учења, и наводи се да укрштене активности физичког манипулисања и рада на садржајима текста, повезано са вербализацијом и визуелизацијом одређених апстрактних концепата доноси резултате унапређеног учења (McNeil & Jarvin, 2007). Стога и произлази потреба за употребом манипулатива у настави математике, али и једна задршка која је одлично

артикулисана на следећи начин: „ако резултати појединих истраживања сугеришу да манипулатив X помаже детету Y у контексту Z , то не значи да сви манипулативи помажу свој деци у свим контекстима“ (McNeil & Jarvin, 2007, 312). *Манипулативи су заправо алати (помагала) осмишљени да стимулишу и подрже стваралачко математичко мишљење које се изводи из угњевжених когнитивних процеса интелектуално сложених активности.*

Физички и виртуелни манипулативи унапређују учење, виртуелним манипулативима се лакше, јасније и брже ради и омогућавају више времена за интеракцију између самих ученика, анализу и проверу стратегија учења и решавања проблема. Истовремено, замена физичких манипулатива виртуелним јесте неефективна (Yuan, Lee and Wang, 2010) посматрајући целокупни процес учења, учење као целовит животни процес, јер ако ништа друго, неопходно је да се виртуелни користе као надградња физичких манипулатива у једном тренутку процеса развоја субјекта.

Налази истраживања упућују да су манипулативи најефектнији када се конзистентно користе дуже времена (Sowell, 1989), а да је најбоље када се за математичке инструкције дуже времена користе исти (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997).

Да ли је разлог неуспеха ученика у учењу математике неуспех наставника да повезују стечена знања на сопственим студијским програмима са сликом математике којом желе да поучавају, маниром којим представљају садржаје, јесте питање које се поставља истраживањем реалности наставне праксе (Warkentin, 1975). Ученици често на различитим активностима учења математике добијају неповезане, нефункционалне информације и овај модел неинтегрисаног учења прати их тако да усвојивши различите концепте математике развијају своје мисаоне процесе до нивоа формалног и апстрактног мишљења. Овај конфузан и неадекватан пут развоја математичког мишљења и усвајања математичких знања захтева да се унапреде компетенције наставника за припремање поучавања, које треба да буде релевантније, а настава интегрисана и веома интерактивна.

Циљ (хипотезе) истраживања

Употреба манипулатива у настави математике јесте недвосмислено значајна са аспекта развоја мишљења, посебно математичког мишљења код деце/ученика. Уз овај когнитивни добитак, код ученика се функционално развијају и сензо-моторичке

способности и вештине, али и развој спацијалних способности је од посебног интереса, јер везан је за менталну визуелизацију која омогућава прелазак на формални и апстрактни ниво мишљења.

Циљ истраживања јесте да установи са аспекта употребе манипулатива тренутно стање у настави математике у Србији у прва два циклуса образовања. Нека од питања на које је истраживање требало да одговори су:

- да ли постоји уједначеност у употреби манипулатива у настави математике у основним школама на територији Србије;
- да ли постоји уједначеност у употреби манипулатива између два циклуса обавезног образовања;
- да ли примарно образовање и стручно усавршавање наставника, као један од инструмената корекције школске/наставне праксе, утиче на употребу манипулатива;
- да ли радни стаж наставника, који је евидентно једна од важних ставки за ефективност наставе и процеса учења, утиче на употребу манипулатива, односно да ли навике наставника о употреби манипулатива варирају с годинама радног стажа;
- да ли постоји разлика у употреби виртуелних манипулатива између наставника разредне наставе и наставника математике, што је значајно пре свега зато што виртуелни манипулативи представљају природну надоградњу у употреби физичких или реалних манипулатива, и на тај начин доприносе развоју математичког мишљења?

Како се Србија кроз образовну регулативу одлучила за увођење инклузије у школске процесе битно је посебно се осврнути на рад са децом којој је неопходна посебна образовно – васпитна подршка. Поред већ истакнутих тема истраживање је имало за циљ и да осветли употребу манипулатива у настави математике за ученике са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју, пре свега кроз испитивање ставова наставника о њиховом коришћењу у настави, као и њиховој употребљивости.

Варијабле (променљиве) истраживања

Варијабле у овом истраживању су:

- (1) Радно место наставника у школи – наставник разредне наставе и наставник предметне наставе (наставник математике) – категоријска варијабла

- (2) Пол наставника – категоријска варијабла
- (3) Величина места у коме се налази школа у којој наставник ради – категоријска варијабла
- (4) Школска управа којој припада школа у којој наставник ради – категоријска варијабла
- (5) Године стажа наставника – континуална (непрекидна) варијабла
- (6) Ниво образовања на коме се наставник први пут сусрео са појмом манипулатива – категоријска варијабла
- (7) Мера информисаности при првом сусрету са појмом манипулатива – категоријска варијабла
- (8) Мера информисаности о појму манипулатива – кумулативно током година стажа – категоријска варијабла
- (9) Употреба манипулатива – мера у којој наставник употребљава манипулативе током свог процеса рада – категоријска варијабла
- (10) Израда манипулатива – израда манипулатива од стране наставника или у сарадњи са одговарајућом службом за потребе наставе – категоријска варијабла
- (11) Врста манипулатива – врста манипулатива коју наставник користи – категоријска варијабла
- (12) Врста наставне јединице – врста наставне јединице у којима се обично користе манипулативи – категоријска варијабла
- (13) Врста наставне јединице за могућу употребу манипулатива – категоријска варијабла
- (14) Ниво ефективности – мера ефективности манипулатива приликом употребе – категоријска варијабла
- (15) Реакције ученика – повратна информација од ученика о употреби манипулатива – категоријска варијабла
- (16) Разлог употребе манипулатива – мотиви наставника за употребу манипулатива у настави – категоријска варијабла
- (17) Врста активности учења у којима се користе манипулативи – учење као обрада новог градива или утврђивање градива – категоријска варијабла
- (18) Део часа на коме се користе манипулативи – уводни, главни и завршни део часа – категоријска варијабла

- (19) Учешће или жеља ученика за израдом/набавком извесног манипулатива – категоријска варијабла
- (20) Коришћење манипулатива за ученике са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју – делотворност употребе манипулатива за ученике са сметњама и тешкоћама у учењу – категоријска варијабла
- (21) Унапређивање процеса учења употребом манипулатива – категоријска варијабла
- (22) Делотворност употребе манипулатива за све ученике – категоријска варијабла

Узорак истраживања

У циљу сагледавања стања у настави математике у Србији с аспекта употребе манипулатива изабрано је да се анкетају наставници из две школске управе – Крагујевац и Нови Сад. Величина узорка је 697 наставника разредне и предметне наставе из оба циклуса основног образовања школа са територија две школске управе – Школска управа Крагујевац (231 испитаник) и Школска управа Нови Сад (466 испитаника). Одступање у броју наставника две школске управе јесте због тога што једну школску управу чини територија једног управног округа, а другу два управна округа.

Узорком је обухваћено 416 наставника разредне наставе и 281 наставник предметне наставе (наставник математике) при чему они раде у 127 школа распоређених у 90 места. Међу наставницима су 554 жене и 95 мушкараца (поједини испитаници се нису изјаснили).

Инструмент и технике истраживања

Техника мерења јесте анкета путем упитника са питањима отвореног типа. Овакав упитник дат је да би могао да се оствари квалитативни увид у добијене резултате, а једнаковремено уочена је извесна структурисаност у одговорима тако да су они груписани у одговарајуће категорије, а потом обрађени и квантитативним методама.

Инструмент мерења јесте упитник за наставнике разредне и предметне наставе, који је посебно осмишљен за ово истраживање.

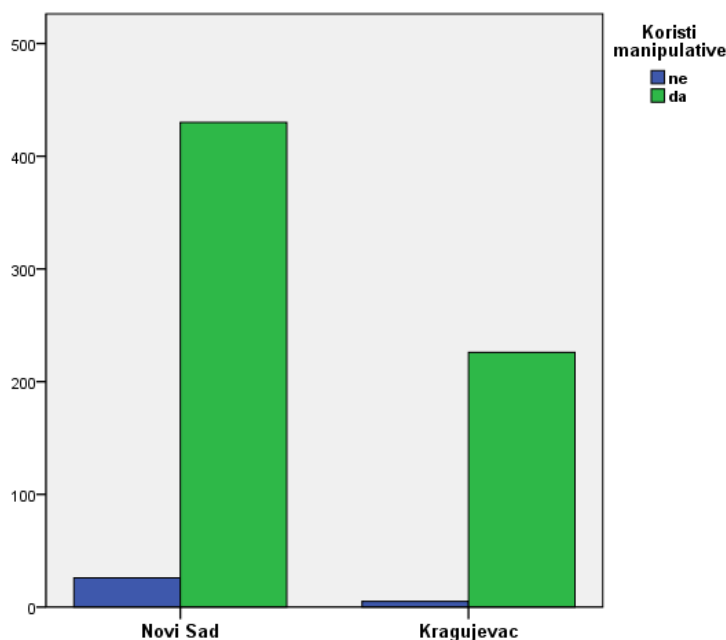
Поступак истраживања

Истраживање је обављено у школама Шумадијског управног округа (Школска управа Крагујевац) и Јужнобачког и Сремског управног округа (Школска управа Нови Сад), у мају 2015. године. Подаци су прикупљени у току две недеље. Упитници подељени почетком једне, а прикупљени до краја друге недеље. Наставници су добровољно попуњавали упитник, а одговори су достављени у писаној и/или електронској форми на адресу отворену за потребе овог истраживања upotreba.manipulativa@gmail.com.

Резултати истраживања

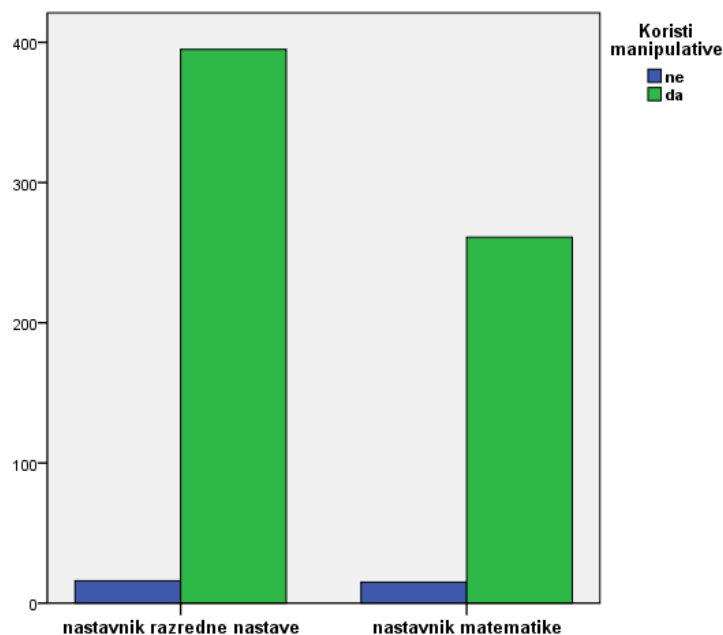
За тестирање хипотеза које се односе на повезаност категоријских променљивих коришћен је χ^2 -тест за табеле контингенције (χ^2 -тест независности), при чему је по потреби била посматрана корекција непрекидности према Јејтсу (Continuity Correction), односно Фишеров тест тачних вероватноћа (Fisher's Exact Test). За поређење расподела непрекидних променљивих у различитим групама коришћен је Ман-Витнијев U тест (Mann-Whitney U test), јер није потврђена хипотеза да променљиве имају нормалну расподелу у посматраним групама. Коришћењем поменутих тестова, добијени су следећи резултати.

- (1) Спроведени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности према Јејтсу) показао је да не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и припадности наставника различитим школским управама (Крагујевац и Нови Сад), $\text{Chi}^2(1, 687)=3,669$, $p=0,055>0,05$. Дакле, може се рећи да је употреба манипулатива на сличном нивоу у различитим школским управама.



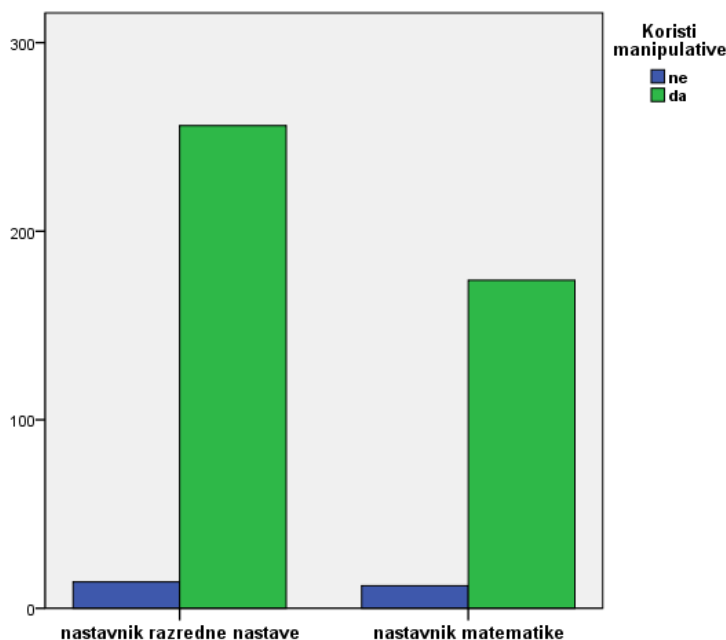
Слика 12.

- (2) Сprovedени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности по Јејтсу) показао је да не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и припадности наставничкој групи (наставник разредне наставе или наставник математике), тј. не постоје статистички значајне разлике у пропорцијама оних који користе и оних који не користе манипулативе у посматране две групе (група наставника разредне наставе и група наставника математике), $\text{Chi}^2(1, 687)=0,588, p=0,443>0,05$.



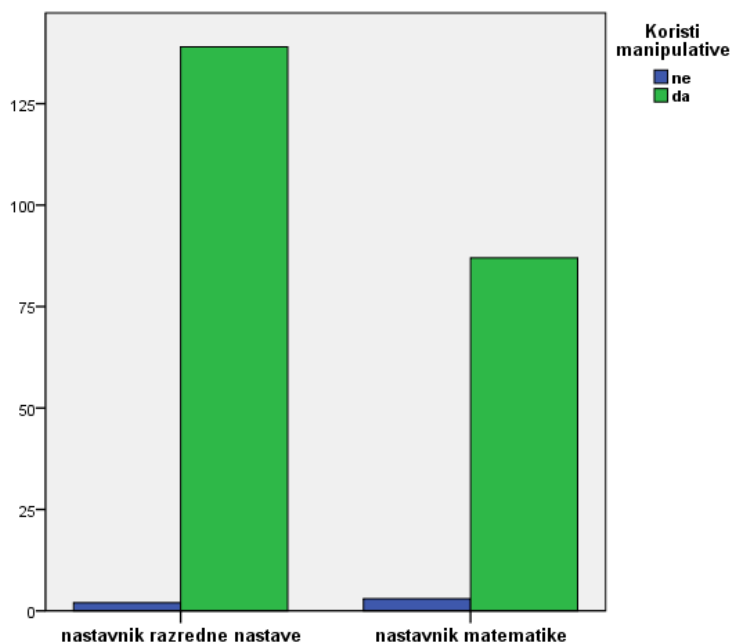
Слика 13.

- (3) Сprovedени χ^2 -тест независности показао је да у школској управи Нови Сад не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и припадности наставничкој групи (наставник разредне наставе или наставник математике), $\text{Chi}^2(1, 456)=0,135$, $p=0,713>0,05$.



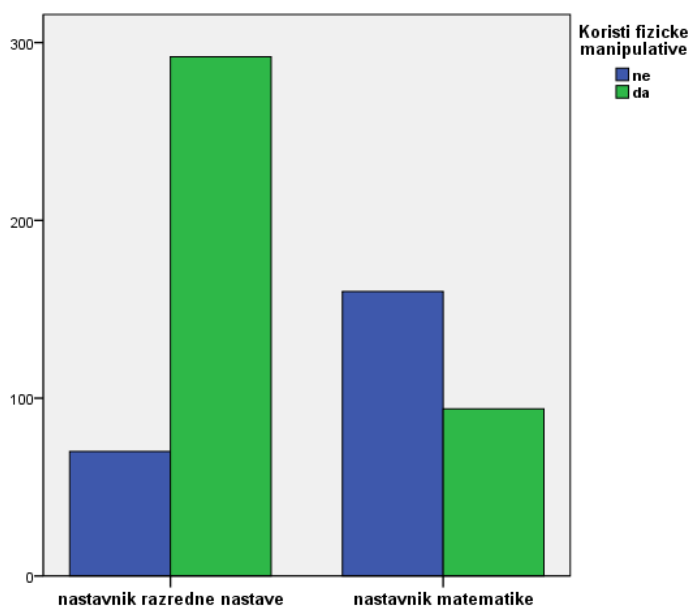
Слика 14.

- (4) Сprovedени Фишеров тест показао је да у школској управи Крагујевац не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и припадности наставничкој групи (наставник разредне наставе или наставник математике), $p=0,380>0,05$.



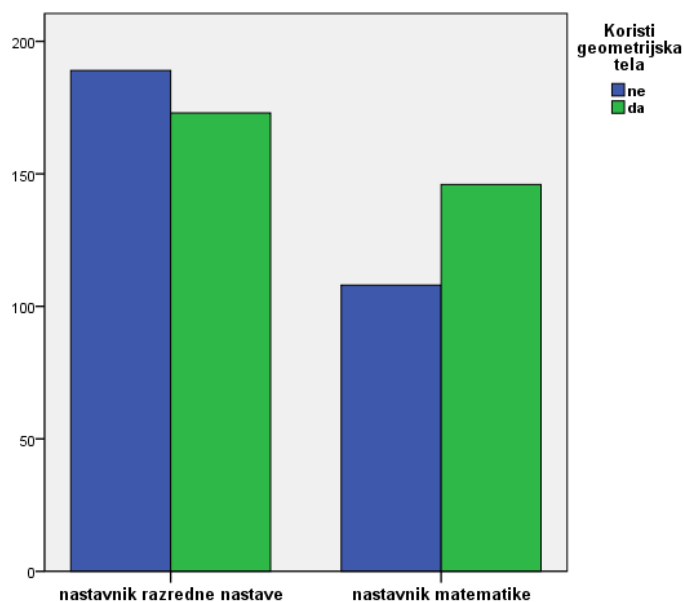
Слика 15.

- (5) Спроведени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности према Јејтсу) показао је да постоји статистички значајна веза између употребе физичких манипулатива (штапићи, жетони, танграм, зрневље) и посматраних наставничких занимања, $\text{Chi}^2(1, 616)=119,726$, $p<0,05$, $\text{Phi}=0,444$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра утицајем средње јачине). Наиме, наставници разредне наставе у 80,7% случајева користе ову врсту манипулатива, док само 37% наставника математике користи ову врсту манипулатива.



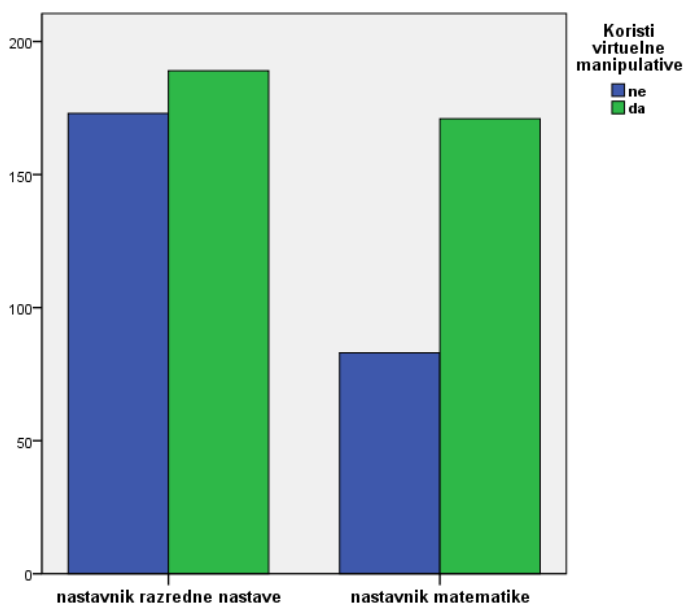
Слика 16.

- (6) Спроведени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности према Јејтсу) показао је да постоји статистички значајна веза између употребе геометријских тела као манипулатива и посматраних наставничких занимања, $\text{Chi}^2(1, 616)=5,232$, $p=0,022<0,05$, $\text{Phi}=-0,095$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем). Наиме, наставници разредне наставе у 47,8% случајева користе ову врсту манипулатива, док 57,5% наставника математике користи ову врсту манипулатива.



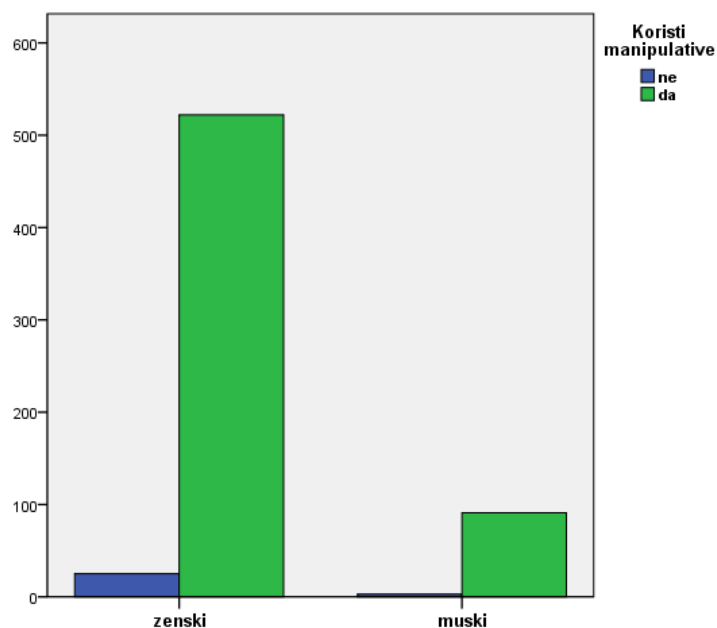
Слика 17.

(7) Сprovedени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности према Јејтсу) показао је да постоји статистички значајна веза између употребе виртуелних манипулатива (рачунарски програмски пакети, софтвер, рачунарски алат) и посматраних наставничких занимања, $\text{Chi}^2(1, 616)=13,422$, $p<0,05$, $\text{Phi}=-0,151$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем). Наиме, наставници разредне наставе у 52,2% случајева користе ову врсту манипулатива, док 67,3% наставника математике наставу изводи уз помоћ поменутог манипулатива.



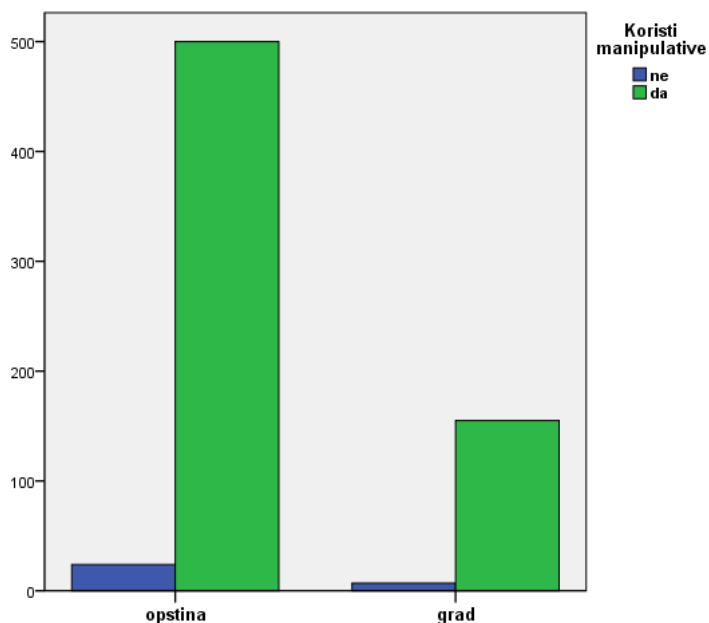
Слика 18.

(8) Спроведени Фишеров тестпоказао је да не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и пола наставника, $p=0,785>0,05$.



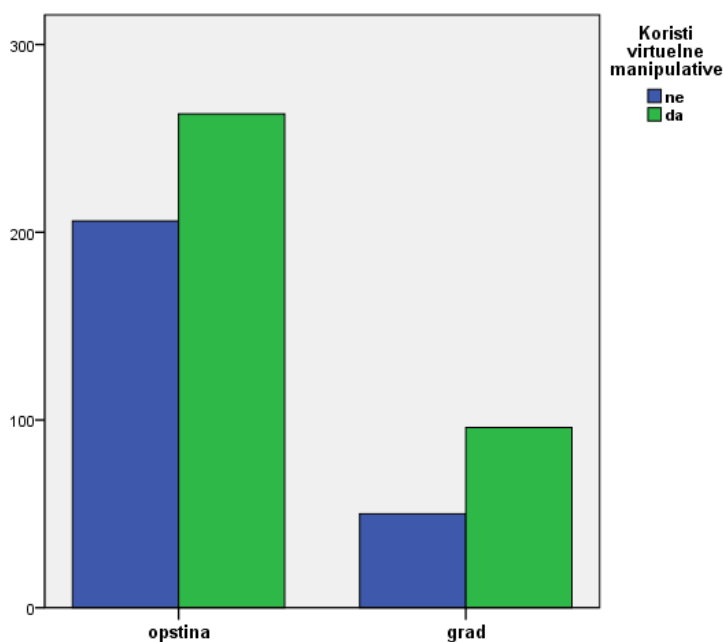
Слика 19.

(9) Спроведени χ^2 -тест независности показао је да не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива у настави и тога да ли се настава одвија у граду или мањем насељеном месту (нема статус града према *Закону о територијалној организацији Републике Србије*, "Службени гласник РС", бр. 129/2007), $\chi^2(1, 686)\approx 0, p>0,05$.



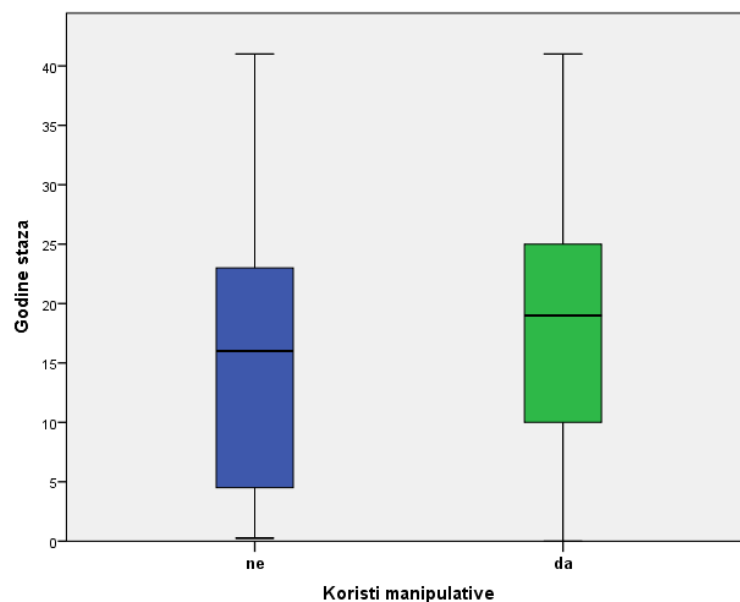
Слика 20.

- (10) Спроведени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између употребе виртуелних манипулатива (рачунарски програмски пакети, софтвер, рачунарски алат) и тога да ли се настава одвија у граду или мањем насељеном месту, $\text{Chi}^2(1, 615)=3,902$, $p=0,048<0,05$, $\text{Phi}=-0,084$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем). Виртуелни манипулативи су са 65,8% заступљени у настави математике која се одвија у градовима, а у настави математике која се одвија у мањим срединама са 56,1%.



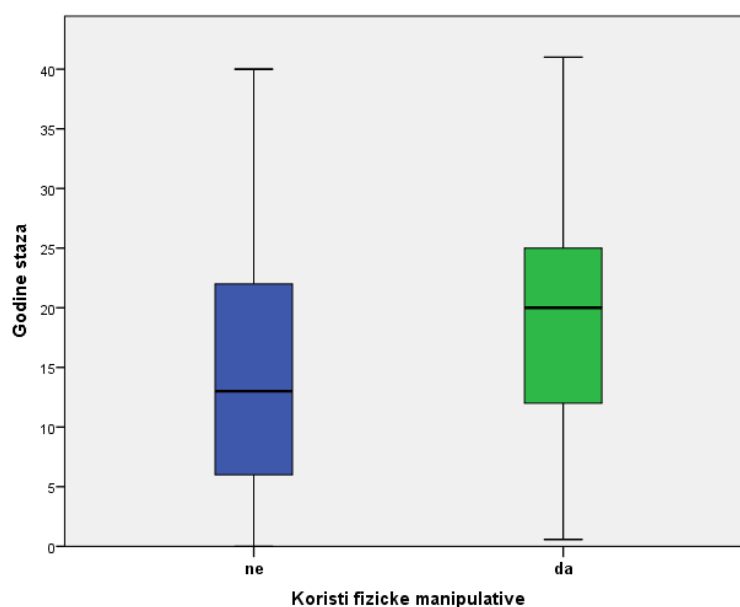
Слика 21.

- (11) Спроведен Ман-Витнијев U тест показао је да не постоји статистички значајна разлика у годинама радног стажа наставника који не користе манипулативе ($Md=16$, $n=31$) и оних који их користе ($Md=19$, $n=648$), $U=8769$, $Z=-1,196$, $p=0,232>0,05$.



Слика 22.

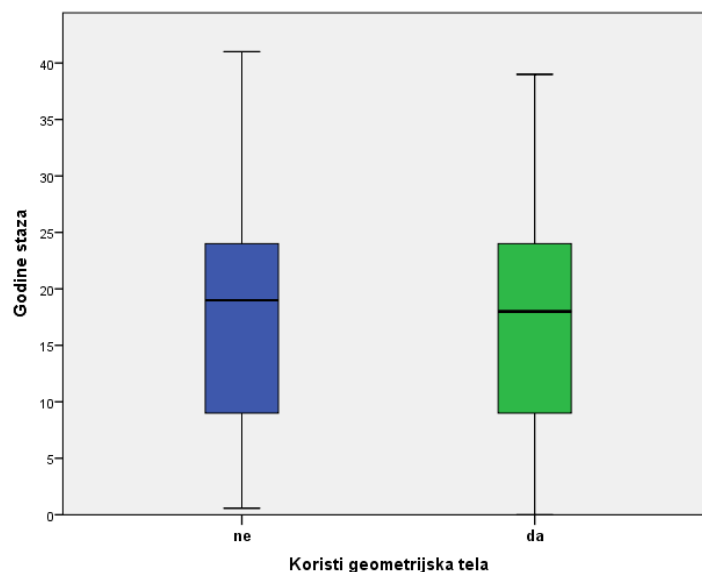
- (12) Сprovedени Ман-Витнијев U тест показује да постоји статистички значајна разлика у годинама радног стажа наставника који не користе физичке манипулативе ($Md=13$, $n=228$) и оних који их користе ($Md=20$, $n=380$), $U=31718$, $Z=-5,536$, $p<0,05$, $r=-0,225$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).



Слика 23.

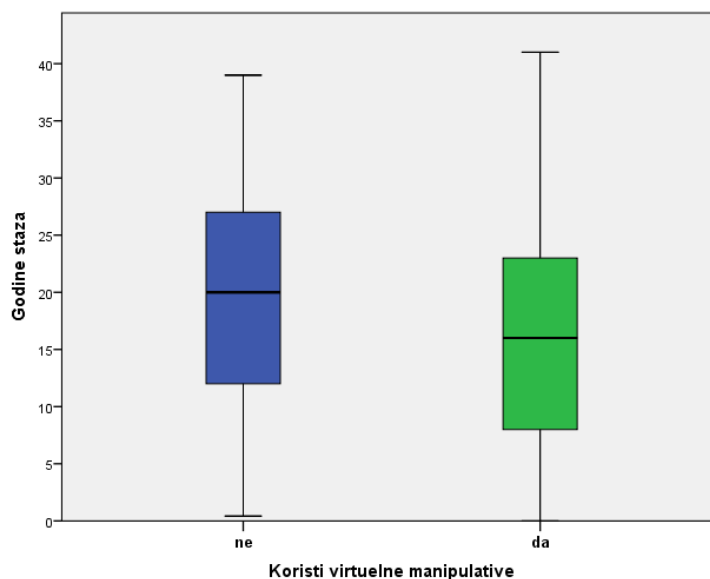
- (13) Сprovedени Ман-Витнијев U тест показао је да не постоји статистички значајна разлика у годинама радног стажа наставника који не користе

геометријска тела ($Md=19$, $n=293$) и оних који их користе ($Md=18$, $n=315$), $U=46038$, $Z=-0,051$, $p=0,960>0,05$.



Слика 24.

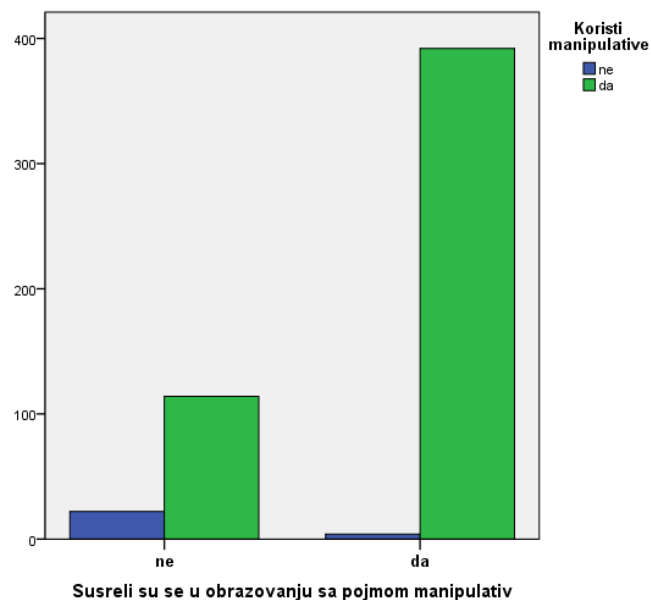
- (14) Спроведени Ман-Витнијев U тест показао је да постоји статистички значајна разлика у годинама радног стажа наставника који не користе виртуелне манипулативе ($Md=20$, $n=250$) и оних који их користе ($Md=16$, $n=358$), $U=35895,5$, $Z=-4,157$, $p<0,05$, $r=-0,169$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).



Слика 25.

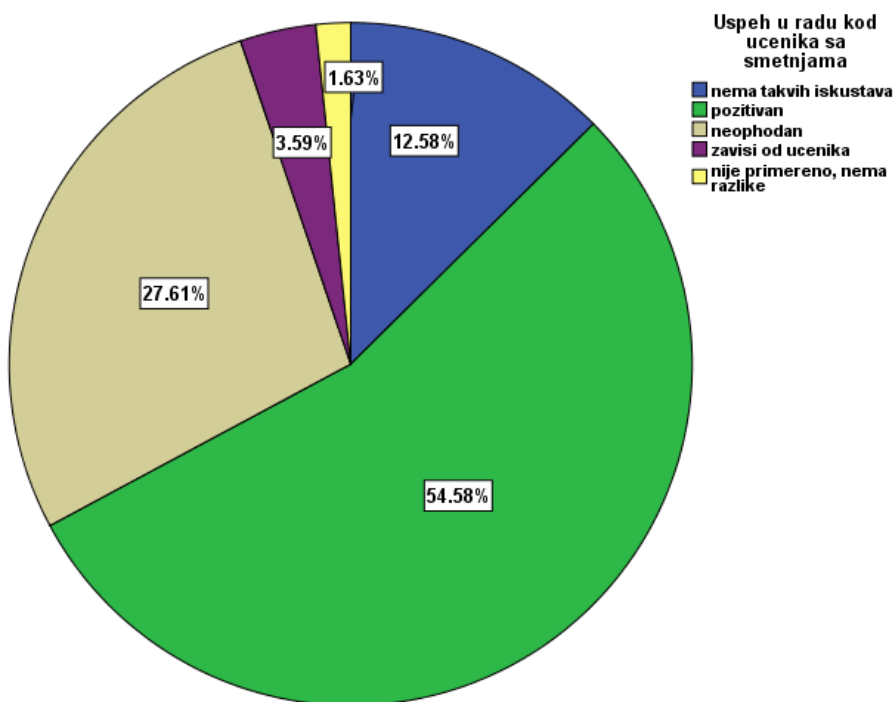
- (15) Спроведени Фишеров тест показује да постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и тога да ли су у току свог образовања наставници упознати са употребом манипулатива у настави, $\chi^2(1,$

532)=46,884, $p < 0,05$, $\Phi = 0,307$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра утицајем средње јачине). Чак 99% наставника који су са манипулативима упознати током свог образовања њих и користи у настави, док 83,8% наставника који се са овим појмом нису упознали током школовања користи манипулативе.



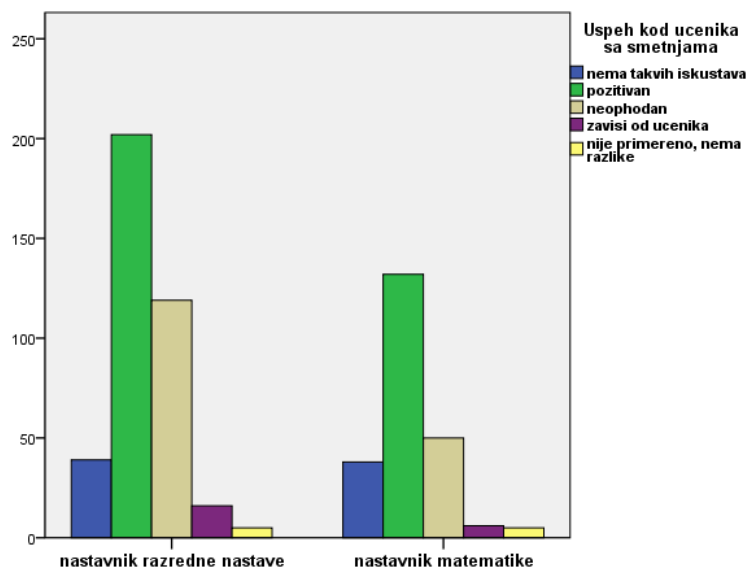
Слика 26.

(16) Дескриптивна статистика у вези са употребом манипулатива у процесу рада са децом са тешкоћама или сметњама у учењу и развоју.



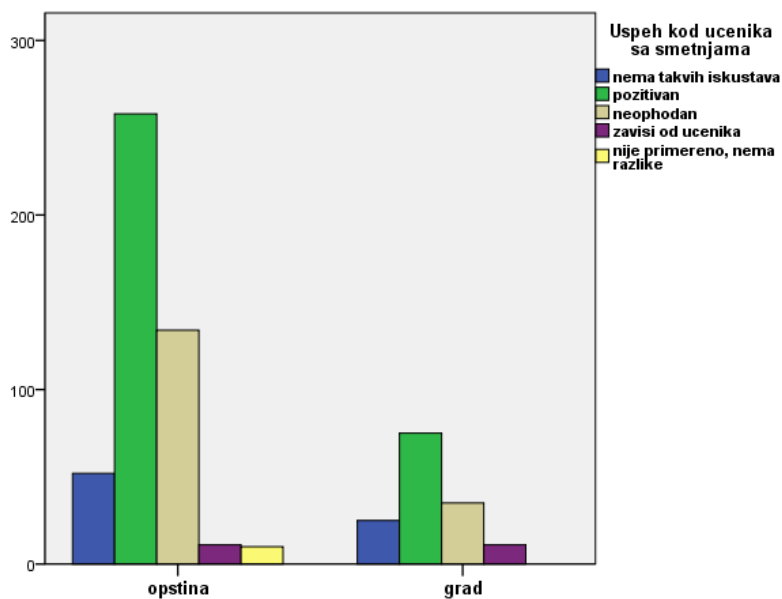
Слика 27.

- (17) Спроведени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између става о употреби манипулатива у раду са ученицима са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју и тога да ли је наставник у разредној или предметној настави (математика), $\text{Chi}^2(4, 612)=11,316$, $p=0,023<0,05$, Cramer's $V=0,136$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).



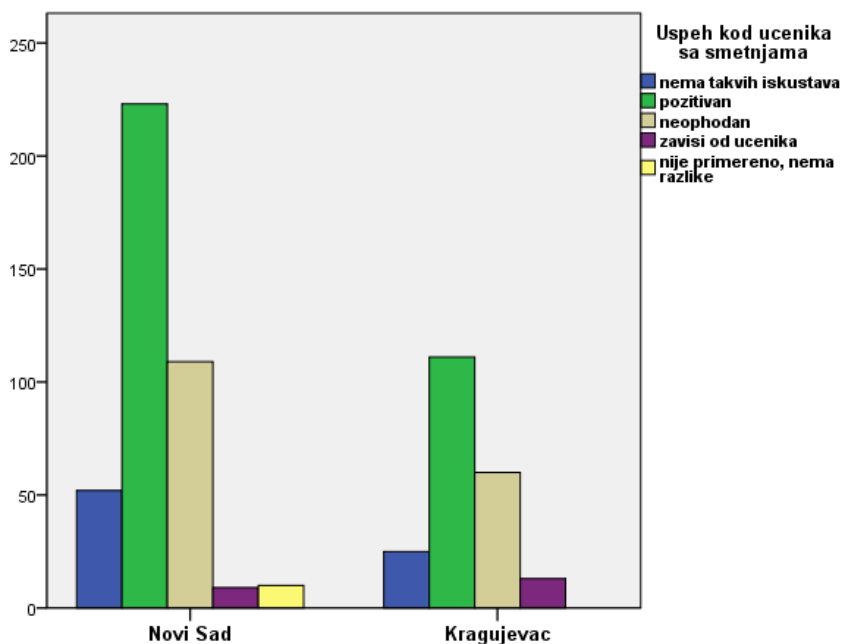
Слика 28.

- (18) Спроведени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између става о употреби манипулатива у раду са ученицима са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју и тога да ли је наставник запослен у школи у граду или у мањем насељу, $\text{Chi}^2(4, 611)=15,783$, $p=0,003<0,05$, Cramer's $V=0,161$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).



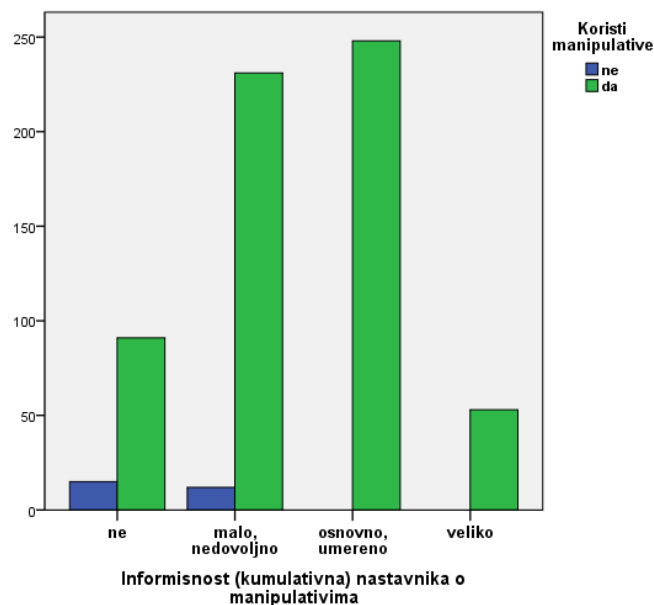
Слика 29.

- (19) Сprovedени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између става о употреби манипулатива у раду са ученицима са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју и тога да ли је наставник запослен у Школској управи Крагујевац или Школској управи Нови Сад, $\chi^2(4, 612)=11,631$, $p=0,020 < 0,05$, Cramer's $V=0,138$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).



Слика 30.

- (20) Спроведени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између стручног усавршавања наставника и употребе манипулатива, $\text{Chi}^2(3, 650)=40,030$, $p<0,05$, Cramer's $V=0,248$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).



Слика 31.

Коментар/интерпретација добијених података и налаза из истраживања

Спроведено истраживање о манипулативима у настави математике показује да не постоји разлика у њиховој употреби, односно у ставовима о њиховој употреби у различитим срединама, као ни у томе да ли се ради о наставницима разредне наставе или наставницима математике. Истоветно важи и када посматрамо по школским управама однос између наведене две групе - не постоји разлика у томе да ли сте наставник разредне наставе или математике, као ни ког је пола наставник, а ни да ли се школа налази у граду или мањем насељеном месту.

Наставници математике чешће користе као манипулативе геометријска тела (57,5%) наспрот наставницима разредне наставе (47,8%), док је однос у употреби манипулатива попут жетона, штапића, зрневља у корист првог циклуса образовања и васпитања, тако да се 80,7% наставника разредне наставе изјашњава да их користи, док 37% наставника математике користи ове видове манипулатива.

Теоријски налаз да је замена физичких манипулатива виртуелним неефективна (Yuan, Lee and Wang, 2010), на шта одговарамо тако да употребу физичких

манипулатива надопуњујемо употребом виртуелних, имплицира да у другом циклусу више наставника (67,3%) користи различите софтвере, аплете, рачунарске програме за унапређење развоја мишљења ученика него у првом циклусу образовања (52,2%). Налази истраживања дају резултат да се, нажалост, виртуелни манипулативи више користе током наставе математике у градовима (65,8%), него у мањим срединама (56,1%).

Налази који прате радни стаж наставника и употребу манипулатива, говоре да не постоји разлика између оних који их користе и оних који их не користе; исто важи и за однос радног стажа наставника и употребе геометријских тела као манипулатива. Када посматрамо употребу физичких или виртуелних манипулатива, постоји одступање у годинама радног стажа оних који их користе и оних који их не користе. Индикативно је да су они који користе физичке манипулативе у просеку старији од оних који их не користе, док је у случају виртуелних манипулатива ситуација обрнута. Ово сигурно има везе са променама факултетских курикулума и тек скорашњим увођењем савремених технологија у планове и програме методичко-дидактичких предмета на факултетима. Наставници који су се упознали са манипулативима током свог формалног образовања више користе манипулативе (99%), за разлику од оних који су са њима упознати након формалног образовања, неформалним учењем (83,3%). Стручно усавршавање наставника утиче на употребу манипулатива, али код оних наставника који их користе или су током претходног школовања са њима имали контаката.

Занимљиво је да манипулативе највише користе наставници између 15 и 30 година радног стажа и запослени су у градској школи. Може се закључити да искусни наставници (са доста стручног усавршавања) у срединама са бољим условима користе манипулативе.

Ученицима са сметњама у развоју и проблемима у учењу, према изјашњавању наставника, манипулативи помажу и томе у прилог изјаснило се њих 54,58%, док 27,61% наставника сматра да су им неопходни током учења. Занемарљив број наставника (1,63%) сматра да употреба манипулатива за ову децу није примерена, а 12,58% их никада није користило у овим околностима. Истовремено, статистика сугерише да постоји повезаност у изјашњавању наставника о корисности употребе манипулатива за ученике са сметњама и тешкоћама у развоју и учењу и тога да ли предаје у првом или другом циклусу обавезног образовања, али и тога да ли предаје у

граду или селу и тога да ли ради у Школској управи Нови Сад или Школској управи Крагујевац.

Налази истраживања нуде преглед битних карактеристика наставе математике прва два циклуса образовања с аспекта употребе манипулатива, што је и био примарни циљ истраживања. Установљено је да наставници уједначено (и по територијалној припадности и по нивоу основног образовања) користе манипулативе, да примарно образовање, као и стручно усавршавање наставника утиче на употребу манипулатива, као и да је повезаност са поучавањем деце са сметњама и тешкоћама у развоју и учењу евидентна. Виртуелни манипулативи су коришћенији у другом циклусу обавезног образовања, што доприноси ставу да они природно надограђују рад са физичким манипулативима и финије помажу изградњи менталних визуелизација и утиру пут ка формирању формалног, апстрактног мишљења.

Налази истраживања и изведени закључци могу бити основа за даље и детаљније анализе које би се потом преточиле у препоруке за националне образовне политике у области посебих дидактика, конкретно у препоруке за унапређење методике наставе математике, стручног усавршавања наставника, креирања стручно-педагошког надзора државе, педагошко-инструктивног рада у школама, и смернице за наставнике и одговарајућа стручна већа.

МАНИПУЛАТИВИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ – ИНВЕНТУРА

Тражећи упориште у очигледности као једном од основних принципа дидактике и методике наставе, још Коменски у свом познатом делу *Велика дидактика* (1997), а и Песталоци у 19. веку, према наводима ауторке Evelyn Sowell (Sowell, 1989, 498), заступа(ју) практичну примену знања или како се то у историји педагогије назива – примену тзв. *лабораторијске методе*. Неопходност заснивања наставе на чулном опажању, а затим и рационалној обради стеченог искуства у смислу развоја мишљења и компоненти које га сачињавају – пажња, памћење, разумевање, расуђивање (Коменски, 1997, 137), јесте један од основа за „лако поучавање и учење“ (Коменски, 1997, 131). Међутим, аутори Мрочек и Филиповић (1981) још давне 1910. године у свом првом издању дела *Педагогија математике* описали су разлику између *очигледне* и *лабораторијске* методе, те навели да ученици првом стичу *навику подражавања*, док потоња доводи до *самосталних навика*, јер „улога наставника се своди на регулисање и објашњавање индивидуалног рада појединих ученика“ (Мрочек и Филиповић, 1981, 99). Отуда и новија истраживања наставне праксе доводе до закључка да „лабораторијски приступ моделу поучавања употребом манипулатива ствара позитивне ефекте на ставове ученика према математици“ (Warkentin, 1975, 93).

Организација наставе математике на начин да ученици решавају проблеме истражујући концепте, појмове, учећи у контексту, благотворно делује у односу на предавачки приступ. Јачајући им мотивацију за учење, коришћењем методе истраживања, наставници ученике суочавају са тим да „искусе моћ и универзалност математике“ (Yuan, Lee & Wang, 2010, 307).

Истовремено, није ни новијег датума виђење да васпитач (читај: наставник, прим. аутора) „је не само извршни орган државних и друштвених наредби већ духовни творац своје и друштвене делатности“ (Мрочек и Филиповић, 1981, 16), те стога је обавезан да се снабдева или да буде снабдевен налазима многобројних наука које се баве учењем и образовањем на различите начине. Данас су то педагогија, психологија, педагошка психологија, дидактика, методика наставе, посебне методике и дидактике, психологија образовања, неуронауке, науке које истражују мозак и функције мозга и сл.

Употреба манипулатива у унапређивању наставе и учења математике налазима Пијажеа, добила је на замаху, јер је рационална обрада искуства постала део процеса стицања знања и уважавањем развојног приступа у формирању мишљења деце коначно утемељена истраживањем психолошких процеса усвајања знања и учења. Увођењем социокултурног контекста и инструменталног метода Виготског и учењем у *зони наредног развоја* добили смо још јаснију слику усвајања математике на искуству и под одређеним околностима које су колико спонтане толико и контролисане или вештачки изазване (у лабораторијским условима).

Проблем употребе манипулатива јесте вишеслојан и првенствено се односи на примереност, или педагошку одмереност, а заправо јесте промишљена употреба у циљу лакшег вођења процеса стварања дуалних репрезентација математичких концепата (појмова) и превођења у ниво формалног или апстрактног. Притом, проблем прилагођавања конкретним условима учења - прилагођавање параметрима групе, затим индивидуализација по различитим основама (различите могућности за учење и усвајање знања, тешкоће у учењу и развоју, појединачне врсте сметњи и сл.). Узрасна примереност коришћења математичких манипулатива, јесте истовремено једна од способности прилагођавања организације наставе и учења од стране наставника. Сагледавање околности учења или околности у којима се одвија процес наставе јесте примарно при подешавању параметара учења на улазу у процес. Коришћење извесног манипулатива може да буде вишеструко или вишенаменско у зависности од пројектованих циљева или исхода образовања. Он може да буде добар основ за почетне активности стварања визуелних слика или репрезентација, затим енергизирајућа активност у тренуцима релаксирања процеса учења, главна или носећа активност у вези са формирањем конкретног математичког појма, а и акт рефлексije процеса кроз који се прошло.

Манипулативи нису играчке, они су алати у добро вођеном процесу стицања знања и њихова правовремена употреба олакшава ученику структурисање и конструкцију знања, али и будуће разумевање околности учења. Управо, „образовање није научено знање; најбоље га је дефинисати као употребу знања... Вредност је у коришћењу онога што смо научили, а управо се школе на то не успевају усмерити“ (Glasser, 2004, 213). Нажалост, и данас имамо проблем са разумевањем процеса развоја од стране наставника. Стално нови научни налази стварају слику једне вртешке или метежа, којем је изложен методичар из праксе, тако да непрекидност или перпетуитет промена околности учења доводи до страха од губитка контроле над процесом или

способности праћења процеса и правовремених и одмерених интервенција са целисходним или благотворним разлозима.

Физички или виртуелни манипулативи према свим налазима истраживања наставне праксе имају делотворан утицај, тако да се успешно надовезују једно на друго, али и не замењују међусобно. Физичко искуство условљава способност менталног резонувања, али истовремено не значи да више физичког искуства условљава више менталне благодети манипулисања и развоја апстрактног мишљења (манипулације менталним сликама математичких репрезентација објеката). Једнаковремено, није утврђена ни узрасна пожељност увођења виртуелних манипулатива, али свакако за кориснике представља лакши начин учења у смислу понављања потеза, промишљања, испробавања и враћања на одређену позицију, заустављања процеса који се посматра у конкретном тренутку и читавање параметара потребних за ваљано закључивање, разматрање више могућности.

У приступима који инсистирају на препознавању осетљивости субјеката у одређеним врстама мишљења (нпр. логичко-математичке, спацијалне или природњачке), неопходно је уважити да способности не постоје саме од себе, већ да се структура ових облика мишљења изграђује, односно успоставља процесом подстицања развоја мишљења или спонтано до одређене мере у зависности од стимулуса који постоје у окружењу. Препознавање и смишљена реакција окружења и стављање у функцију развоја мишљења, посебно конкретних способности, јесте задатак наставе математике, односно активности учења које су вођене, педагошки усмерене. И наука(е) које се баве развојем и функцијама мозга, његовом пластичношћу (неуронауке), сугеришу да постоје одређене диспозиције или могућности за формирање и успостављање способности математичког мишљења код субјеката, а да у зависности од тога како је организовано деловање стимулуса средине, имамо за резултат извесни степен развоја мишљења. Познавање функционисања процеса развоја мишљења, психолошких и физиолошких процеса који се одвијају у мозгу и у вези са неуронским структурама, наставнику омогућавају да код ученика поспешују индивидуални напредак, прилагођавањем процеса учења у мери у којој је то могуће остварити реализацијом групног/одељењског облика рада.

Учење математичких садржаја и усвајање математичког начина мишљења, претпоставља и познавање или знање о начинима усвајања и организације ових знања, односно, да се са когнитивног пређе у метакогнитивно и тако управља процесом учења и саморегулације учења. Дакле, субјект, ученик, поред усвајања математике, усваја и

начине усвајања математике, тј. упознаје се са метакогнитивним аспектима учења и управљања знањем (или: знањима).

Уз когнитивне аспекте организације учења математике, неопходно је уважити и емоционалне, или оне конативне ефекте који поспешују учење, утичу на мотивацију (утичу на афективну компоненту процеса учења у коначном). Посебно се у образовној психологији истиче ефекат *flow*-а, који утиче на мотивисаност, конкретно на подршку успостављању и развоју интринзичке мотивације у контролисаним и правилно управљаним процесима учења (лабораторијски услови учења). Стога, употреба манипулатива у наставном процесу или сегменту активности учења треба да буде баш у правом тренутку или менаџерски речено *just-in-time* (у смислу управљања процесима). Дакле, манипулативи су у функцији само онда када имају ефекат на развој математичког мишљења и продукују могућност повезивања конкретних слика и акција са менталним сликама и визуелним репрезентацијама и све преводе у апстрактни ниво оперисања у мозгу субјекта.

Свако учење, данас се ка томе посебно усмерава пажња, јесте у извесном социјалном окружењу и наставник који организује активности учења и наставе уважава социјални амбијент учења. Поред правичности у избору наставних метода у смислу прилагођавања материјала и метода учења, услов за квалитет садржан је у уважавању групне интеракције у функцији учења, поспешивању коперативности, подели и успешној реализацији тимских улога. Свака спорна околност у процесу организованог учења треба да се конкретно анализира и усвоје корекције претварајући их у нове дидактичке ситуације око којих размењујемо и из којих добијамо нове елементе социјалних искустава и знања. Социјализацијска димензија учења примарно доприноси развоју социо-културног амбијента и оспособљава субјекта за ваљане комуникације и подиже му ниво посредовања са осталим субјектима, са другим, са не-ја.

Претпостављени фини моторички развој јесте полазна основа да се употребом манипулатива почну да стварају и развијају различити процеси математичког мишљења - развија запажање, уочавање детаља, разумевање разлика и сличности међу објектима, способност класификације, оперисања, стављања у релацију и функцију, држање пажње, стварање стратегија за решавање ситуација, присећање претходних начина и стратегија решавања ситуација и конструисања нових, памћење, производи могућност стварања латералног размишљања у сложеним околностима превазилажења готових образаца спремљених у меморији; конкретно разумевање физичких објеката и

ситуација у вези са њима, способност пројектовања у ментални план конструисањем менталних слика и решавањем менталних ситуација, те коначно превођење у план апстрактног комуницирања и посредовања ситуација и објеката мишљења симболима; процењивање извесне ситуације, способност конструисања у менталној сфери, откривање комплексности апстрактних ситуација и стваралачка продукција решења као исход превођења у ментално истраживање околности проблема јесте сврха употребе манипулатива; конструкција почетних околности, пројектовање низа дуалних репрезентација, од нивоа физичког и конкретног, до формалног и апстрактног. Мост између интенција превођења до апстрактног јесте у стварању менталних репрезентација са (или: над) којима субјект обавља радњу.

Коначно, ученичка партиципација у процесу наставе, односно учења, могуће је остварива уколико током читавог процеса има активну улогу. Манипулативи ово омогућавају, јер поступцима, прво моторичке природе, а онда и менталним радњама, обезбеђује се непрекидност активности, и приспајање дуалних репрезентација математичких објеката из физичког (виртуелног) и менталног света субјекта. На описани начин ментална слика се претвара у разумевање математичке ситуације која је спремљена за менталну обраду, алатима мозга, односно, мишљења (математичког мишљења у конкретним околностима учења математике).

ЗАВРШНА РЕЧ – ЗАКЉУЧАК

Емпиријска истраживања у Србији у наставничкој популацији у обавезном образовању (наставници разредне и наставници предметне наставе/математике у основној школи) говоре да се велики број наставника изјашњава да користи манипулативе (97,8%, односно 94,3%) и да је пропорција између оних који их користе и не користе иста у различитим Школским управама или окрузима (посматране су две школске управе – Крагујевац, Шумадијски округ и Нови Сад, Јужнобачки и Сремски округ обједињено). Сличан је и налаз када посматрамо одвојено наставничке групе – наставници разредне наставе (96,1%) и наставници предметне наставе (94,6%), уопште и по школским управама. Полна одређеност не утиче на употребу манипулатива од стране наставника.

Наставници разредне наставе (80,7%) у већој мери него наставници предметне наставе (37%) користе физичке манипулативе попут штапића, жетона, зрневља, танграма, док је однос другачији у употреби геометријских тела као манипулатива - 47,8% наставници разредне наставе, 57,5% наставници предметне наставе/математике. Виртуелне манипулативе радије користе наставници математике (67,3%), док учитељи то раде у мањем проценту (52,2%). Наставници у градовима чешће се одлучују на употребу манипулатива, него наставници у мањим местима/општинама, а виртуелни манипулативи су заступљенији у градовима у настави математике (65,8% у граду, 56,1% у мањим местима/општинама). Истраживање је показало да 55,38% од испитаних наставника самостално израђује манипулативе за потребе наставе.

Године радног стажа различито утичу на изјашњавање наставника о употреби различитих врста манипулатива. Нпр. наставници са више стажа чешће користе физичке манипулативе, док млађи наставници чешће користе виртуелне манипулативе. Између група оних који користе манипулативе и оних који их не користе не постоји разлика у годинама стажа.

Стручно усавршавање наставника као један од коректива и инпута у повратној спрези за унапређење наставне праксе у школама показује се као пожељније у групи наставника који их користе или су током претходног школовања имали сусрете са њима. Манипулативе највише користе наставници градских школа између 15 и 30 година радног стажа.

Претходно образовање наставника које је обухватало упознавање о употреби манипулатива утиче да 99% ових испитаника их користи, док 83,3% наставника који за манипулативе нису чули током свог школовања сада их користи.

Мали број наставника се изјашњава да манипулативи не помажу ученицима са сметњама и тешкоћама у развоју и учењу, односно да је њихова употреба непримерена (1,63%), док се у прилог употребе манипулатива изјашњава 54,58%, а 27,61% сматра да су им манипулативи неопходни током учења. Има и наставника који манипулативе никада нису користили у раду са ученицима са сметњама и тешкоћама у развоју и учењу (12,58%), а и оних који кажу да то зависи од ученика (3,59%). Истраживање је показало да се наставници у зависности од циклуса у коме предају различито изјашњавају у вези са употребом манипулатива у раду са овом групом ученика – код учитеља 53% изражава позитивне везе са успехом у раду и 31,2% њих да је неопходан алат, док 57,1% наставника математике исказује позитивно искуство и 21,6% неопходност употребе манипулатива у раду са ученицима са сметњама и тешкоћама у развоју и учењу. Разлике у изјашњавању о корисности употребе манипулатива у раду са ученицима са сметњама и тешкоћама у развоју и учењу појављују се и када упоређујемо наставнике две школске управе – у Јужнобачком и Сремском округу 55,3% исказује позитивне ефекте, 27% исказује неопходност употребе манипулатива у раду са овом групом ученика, 2,2% сматра да то зависи од конкретног ученика, а 2,5% сматра непримереним употребу манипулатива у раду са овом групом ученика, док у Шумадијском округу 53,1% даје позитивно мишљење, 28,7% изражава неопходност рада са манипулативима код ове осетљиве групе ученика, 6,2% сматра да то зависи од конкретног ученика, а нема наставника који употребу манипулатива у раду са овом групом ученика сматрају непримереном.

Ако се изјашњавају о наставним областима које су погодне за употребу манипулатива 4,03% наставника каже да су манипулативи могући за употребу у било којој наставној јединици, а готово сви су изrekli да је геометрија област у којој их је сигурно могуће користити. Мали број наставника изјаснио се да манипулативи немају утицаја у наставном процесу (2,11%), а незнатан број њих каже да нема битнијих промена у реакцијама ученика на манипулативе (0,78%). Најчешће виђење наставника је да ученици уз манипулативе брже и боље схватају (74,63%) и мотивисанији су и заинтересованији за рад на часу (94,56%). Иако исказују високу мотивисаност ученика за учењем употребом манипулатива, само 22,79% од испитаних наставника одлучује се за употребу манипулатива из наведеног разлога. Углавном се за манипулативе

наставници одлучују када је час обраде новог градива и то је 53,52% њих, и највећма у уводном и главном делу часа. У 72,14% случајева наставници су употребили манипулативе према исказаној потреби ученика. Већина наставника (97,7%) констатује да манипулативи унапређују учење, а нешто мање њих (86,72%) сматра да су делотворни за све ученике.

Неопходно је да се још током образовања за наставника математике покушава да превазиђе постојећи јаз између теорије и праксе дидактике математике, који више нико не оспорава. Један од могућих начина јесте да се студенти или кандидати за наставнике математике на основним студијама усмере на истраживања извесних тема из области наставе и учења и унапређивања наставних процеса, тако да се покуша да у старту превазиђу *имплицитну педагогију* и *фолк педагогију*, а и упознају са озбиљношћу околности у којима ће радити (Berg & Grevholm, 2012).

Образовање наставника нужно треба да укључује добро познавање развојног приступа процесу учења, сагледавање учења у одређеном социо-културном контексту, тако да наставник може да одговори захтеву комплексне организације и реализације учења математике.

Намера ове дисертације многострука је и исказује се у више праваца:

- (1) Теоријски преглед различитих научних налаза, сачињен је истраживањем референтне литературе у области развоја мишљења употребом манипулатива и систематизован усмереним током излагања. Почевши од околности и токова образовања у свету, преко поимања мишљења (од филозофског поимања, психолошких поставки, до онога што називамо математичким мишљењем), представљен је контекст за главну тему дисертације. Излагање когнитивних и метакогнитивних аспеката учења и дефинисање појма манипулатива и објашњавање њиховог значаја у процесу учења математике значајно је из разлога што на једном месту повезује многострукост излагања о теми и могућност за даљу вишеструку разраду теме о манипулативима. Упоредна анализа физичких и виртуелних манипулатива, наставничко познавање употребе манипулатива и примери употребе манипулатива као илустрација и конкретизација онога о чему се излаже јесте намера да се дисертација учини сваобухватном у смислу теоријског прегледа знања о манипулативима у свету. Емпиријска истраживања ставова наставника и њиховог изјашњавања о теми манипулатива и њиховој употреби у осмишљавању и организацији наставе и активности учења математике јесте

допринос успостављању основе за будућа емпиријска истраживања ове теме код нас (у Србији). Свакако, током излагања теоријских налаза у свету указано је и на разноврсну примену методологије емпиријског истраживања наставне праксе учења математике употребом манипулатива.

- (2) Дисертација се свеобухватно бави темом употребе манипулатива у настави и активностима учења математике и употребљива је као основа (или иницијална је) за даља теоријска и емпиријска истраживања код нас (у Србији). У области методике наставе математике ова дисертација на јединствен начин указује на најважнија истраживања и налазе теорије и праксе у области развоја математичког мишљења употребом манипулатива. Даља истраживања могу да буду усмерена ка темама: однос наставника према употреби манипулатива, физички и виртуелни манипулативи, манипулативи као агенс инклузивности наставе и учења математике, иницијално образовање и стручно усавршавање наставника математике и унапређивање ефективности употребе манипулатива у развоју математичког мишљења, подизање мотивације за учење употребом математичких манипулатива, интринзична и екстринзична мотивација за учење математике и употреба манипулатива, систематизација и употребна категоризација математичких манипулатива, унапређивање партиципације ученика у процесу учења математике употребом манипулатива. Свака од набројаних тема може да се даље разлаже на нове теме за обраду, чиме би се знања из ове области ширила и продубљивала у зависности од нивоа истраживања и начина употребе научне методологије. Од посебног значаја може да буде истраживање употребе једног (конкретног) манипулатива за развој више нивоа математичког мишљења или повезивање употребе манипулатива и примене Блумове таксономије за учење математике.
- (3) Факултети на којима се школују кандидати за наставнике разредне наставе и наставнике математике имају у овој дисертацији извор за унапређивање курикулума студијских програма, али и литературу која студентима може да помогне у разумевању процеса учења математике и коришћењу различитих ресурса за унапређивање ефективности наставе математике.
- (4) Институције и службе које се баве унапређивањем наставе, конкретно наставе математике, могу да користе налазе и садржај ове дисертације у

сврху осмишљавања обука и различитих видова подршке наставницима разредне наставе и наставницима математике.

Садржај ове дисертације на јединствен начин представља целовит приказ развоја математичког мишљења интервенцијом педагогије кроз наставу математике (или: наставом математике као инструментом педагогије) употребом манипулатива као алата у конкретном контексту образовања у друштву као спецификуму хомо сапијенса (који делује и промишља о делатном). Нова истраживања која би требало да проистекну из ове дисертације као извора знања требало би да повезују академско бављење развојем математичког мишљења употребом манипулатива и оснаживање струке у настојањима и напорима за унапређивање праксе наставе математике и неопходност подршке наставницима разредне наставе и математике.

Монографски карактер дисертације јесте у систематичном приказу теме манипулатива и њихове употребе у развоју математичког мишљења кроз наставу и активности учења математике. Једнаковремено, дисертацијом се отвара тема употребе манипулатива у настави математике код нас начином којим је изложен и приказан преглед теоријских и емпиријских налаза истраживања.

ЛИТЕРАТУРА

- (1) Alderson, P. (2000). Schools students views on school council and daily life at school. *Children and Society*, Vol. 14, No. 2, pp. 121-134.
- (2) Altiser, L. (2009). *Ideologija i državni ideološki aparati*. Loznica: Karpos.
- (3) Apple, M. W. (2012). *Ideologija i kurikulum*. Beograd: Fabrika knjiga.
- (4) Armstrong, T. (2006). *Višestruke inteligencije u razredu*. Zagreb: Educa.
- (5) Arnot, M. & Reay, D. (2004). The framing of pedagogic encounters: Regulating the social order in classroom learning. In J. Muller, B. Davis & A. Morais (Eds.), *Reading Bernstein, researching Bernstein* (pp. 137–150). London: RoutledgeFalmer.
- (6) Back, J. (2013). *Manipulatives in the Primary Classroom*. University of Cambridge. <http://nrich.maths.org/10461> (19.08.2015.)
- (7) Badiju, A. (2013). *Buđenje istorije*. Beograd: Centar za medije i komunikaciju, Fakultet za medije i komunikaciju, Univerzitet Singidunum.
- (8) Baki, A., Kosa, T. and Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. *Britysh Journal of Education Technology*. Vol. 42, No. 2, pp. 291-310.
- (9) Banković, D. (xxxx). *Statističke metode u istraživanjima*. (neobjavljen rukopis - interna skripta).
- (10) Barnett, J. C. & Eastman, P. M. (1978). The Use of Manipulative Materials and Student Performance in the Enactive and Iconic Modes. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 9, No. 2, pp. 94-102.
- (11) Beane, J. A. (2002). Beyond self-interest: A democratic core curriculum. *Educational Leadership*, Vol. 59, No. 7, pp 25–28.
- (12) Berg, C. V. & Grevholm, B. (2012). *Use of an inquiry-based model in pre-service teacher education: investigating the gap between theory and practice in mathematics education*. Presented at ICME12, Seoul, July 2012. (International Congres of Mathematical Education. Consulted at <http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/1239.pdf>).

- (13) Bloom, B. S. (1981). *Taksonomija ili klasifikacija obrazovnih i odgojnih ciljeva – Knjiga I Kognitivno područje*. Beograd: Republički zavod za unapređivanje vaspitanja i obrazovanja.
- (14) Boggan, M., Harper, S. and Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*. Vol. 3 (1), pp. 1-6.
- (15) Bognar, L. & Matijević, M. (2005). *Didaktika*. Zagreb: Školska knjiga.
- (16) Bourne, J. (2004). Framing talk: towards a 'radical visible pedagogy'. In Muller, J., Davis, B. and Morais, A. (Eds.). *Reading Bernstein, researching Bernstein* (pp. 61-74). London: RoutledgeFalmer.
- (17) Brooker, R. & Macdonald, D. (1999). Did we hear you: Issues of student voice in a curriculum innovation. *Journal of Curriculum Studies*, Vol. 31, No. 1, pp. 83–97.
- (18) Bruning, R. H., Schraw, G. J., Norby, M. M. and Ronning, R. R. (2004). *Cognitive Psychology and Instruction* (4th edn). Columbus, OH: Merrill.
- (19) Bruckner, P. (2005). *Babilonska vrtoglavica: kozmopolitizam i mondijalizam*. Zagreb: Algoritam.
- (20) Bruner, J. (2000). *Kultura obrazovanja*. Zagreb: Educa.
- (21) Burdije, P. (1999). *Nacrt za jednu teoriju prakse: tri studije o kabilskoj etnologiji*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- (22) Burdije, P. (2011). *Predavanje o predavanju*. Loznica: Karpos.
- (23) Burdije, P. & Paseron, Ž. K. (2014). *Reprodukcija: elementi za jednu teoriju obrazovnog sistema*. Beograd: Fabrika knjiga.
- (24) Carnap, R. (1987). Logicičko zasnivanje matematike. U Šikić, Z. (Ed.). *Novija filozofija matematike*. Beograd: Nolit.
- (25) Clements, D. H. (1999). 'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*. Vol. 1, No. 1, pp. 45-60.
- (26) Cohen, J. W. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. New Jersey: Hillsdale College.
- (27) Cole, M. (1985). The zone of proximal development: Where culture and cognition create each other. In Wertsch, J.V. (ed.). *Culture, Communication and Cognition: Vygotskian Perspectives* (pp. 146-161). Cambridge: Cambridge University Press.
- (28) Csikszentmihalyi, M. (1992). The flow experience and its significance for human psychology. In M. Csikszentmihalyi & I. Csikszentmihalyi (Eds.), *Optimal experience: Psychological studies of flow consciousness* (15-35). Cambridge, Press Syndicate of the University of Cambridge.

- (29) Дамјановић, Р. (2006). Одређивање површине геометријских фигура. *Настава математике*. Број 229, стр. 57-57.
- (30) Дамјановић, Р. (2008). Прилози за манифест педагогије постмодерне (нова педагошка реалност). *Иновације у настави*. Vol. 21, XXI, 2008/4, стр. 126-131.
- (31) Damjanović, R. (2008). Konkretno iskustvo kao snažan oslonac u formiranju formalnog, apstraktnog mišljenja. *Metodički obzori*. 3(2008)2, 35-45.
- (32) Дамјановић, Р. (2009). *Савремени приступ настави математике – бедекер*. Крагујевац: Мебијус.
- (33) Damjanović, R. (2010). *Blumova taksonomija u nastavi matematike: vademecum*. Крагујевац: Atos.
- (34) Дамјановић, Р. (2015). Провајдери образовања у Србији – школа као субјект образовања (оглед). *Шумадијски анали*, година X, број 8, стр. 342-358.
- (35) Damjanović, R., Stamenković, S., Popović, B. i Dimitrijević, S. (2015). Upotreba manipulativa u nastavi matematike – osnovni nalazi istraživanja (izvod iz izveštaja istraživanja). *Obrazovna tehnologija*. Godina XV, 4/2015, str. 311-324.
- (36) Darwin, Č. (2009). *Postanak vrsta: putem prirodnog odabiranja ili očuvanje povlašćenih rasa u borbi za život*. Novi Sad: Akademska knjiga.
- (37) De Bono, E. (2000). *Šest šešira za razmišljanje*. Beograd: Finesa.
- (38) De Bono, E. (2001). *Lateralno razmišljanje*. Beograd: Finesa.
- (39) De Bono, E. (2008). *De Bonov kurs razmišljanja: moćni alat koji će vam pomoći da promenite vaš način razmišljanja*. Novi Sad: ASEE.
- (40) De Bono, E. (2011). *Duh koji pleni*. Beograd: Mono i Manjana.
- (41) Djui, Dž. (1966). *Vaspitanje i demokratija*. Cetinje: Obod.
- (42) Dolo, L. (2000). *Individualna i masovna kultura*. Beograd: Clio.
- (43) Dunlap, W. P. & Brennan, A. H. (1979). Developing Mental Images of Mathematical Processes. *Learning Disability Quarterly*. Vol. 2, No. 2, pp. 89-96.
- (44) Feinberg, W. (2012). *Zejedničke škole/različiti identiteti: nacionalno jedinstvo i kulturna razlika*. Beograd: Fabrika knjiga.
- (45) Finke, R. A. (1989). *Principles of Mental Imagery*. Cambridge: MIT Press.
- (46) Flivbjerg, B. (2012). *Šta mogu društvene nauke: razlozi neuspeha i strategija za budućnost*. Beograd: Službeni glasnik.
- (47) Фридман, М. (2012). *Капитализам и слобода*. Београд: Службени гласник.
- (48) Frojd, S. (2006). *Kompletan uvod u psihoanalizu*. Podgorica: Nova knjiga.

- (49) Frojd, S. (2015). *Nacrt psihoanalize*. Beograd: Nova knjiga plus; Podgorica: Nova knjiga.
- (50) Fuko, M. (2007). *Poredak diskursa*. Loznica: Karpos.
- (51) Fuko, M. (2009). *Rađanje klinike: arheologija medicinskog opažanja*. Novi Sad: Mediterran Publishing.
- (52) Fuko, M. (2012). *Moć/znanje: odabrani spisi i razgovori 1972-1977*. Novi Sad: Mediterran Publishing.
- (53) Fuko, M. (2014). *Tehnologije sopstva: spisi o poznoj antici i ranom hrišćanstvu*. Loznica: Karpos.
- (54) Fuson, K. (1975). The Effects on Preservice Elementary Teachers of Learning Mathematics and Means of Teaching Mathematics through the Active Manipulation of Materials. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 6, No. 1, pp. 51-63.
- (55) Gardner, H., Kornhaber, M. L. & Wake, W. K. (1999). *Inteligencija: različita gledišta*. Jastrebarsko: Naklada Slap.
- (56) Gevirč, Š. & Krib, A. (2012). *Razumevanje obrazovanja: sociološka perspektiva*. Beograd: Fabrika knjiga.
- (57) Glasser, W. (2004). *Teorija izbora – nova psihologija osobne slobode*. Zagreb: Alinea.
- (58) Gojkov, G. (2002). *Prilozi postmodernoј didaktici*. Vršac: Viša škola za obrazovanje vaspitača.
- (59) Gojkov, G. (2006). *Didaktika i postmoderna: metateorijska polazišta didaktike*. Vršac: Viša škola za obrazovanje vaspitača.
- (60) Gudjons, H., Teske, R. i Winkel, R. (eds.). (1994). *Didaktičke teorije*. Zagreb: Educa.
- (61) Habermas, J. (2002). *Postmetafizičko mišljenje: filozofski članci*. Beograd: Časopis Beogradski krug.
- (62) Хајдегер, М. (1999). *Предавања и расправе*. Београд: Плато.
- (63) Hrnjica, S. (2005). *Opšta psihologija sa psihologijom ličnosti: uvodna predavanja*. Beograd: Naučna knjiga Nova.
- (64) Hwang, W. Y. & Hu, S. S. (2013). Analysis of peer learning behaviors using multiple representations in virtual reality and their impacts on geometry problem solving. *Computers & Education*. Vol. 62, pp. 308-319.
- (65) Imaj, M. (2008). *Kaizen: ključ japanskog poslovnog uspeha*. Beograd: Mono i Manjana.
- (66) Јасперс, К. (2000). *Ум и егзистенција*. Београд: Плато.

- (67) Јукић, С. (2003а). У основи сваког васпитања је образовање. *Педагошка стварност*. Нови Сад. Година XLIX, бр. 3-4, стр. 197-214.
- (68) Јукић, С. (2003б). У основи сваког васпитања је образовање (Други део). *Педагошка стварност*. Нови Сад. Година XLIX, бр. 5-6, стр. 375-393.
- (69) Kamii, C., Lewis, B. A. and Kirkland, L. (2001). Manipulatives: when are they useful? *Journal of Mathematical Behavior*. 20 (2001), pp. 21-31.
- (70) Kerekes, J. (2006). The Role of Simple Own Constructed Manipulatives in Improving Student Participation, Understanding and Mathematical Effectiveness. *Mathematics in School*. Vol. 35, No.1, pp. 11-14.
- (71) Kieren, T. E. (1971). Manipulative Activity in Mathematics Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 2, No. 3, pp. 228-234.
- (72) Ключков, М. В. (1963). *Једно очигледно средство у настави геометрије и тригонометрије*. Београд: Завод за издавање уџбеника СР Србије.
- (73) Коменски, Ј. А. (1997). *Велика дидактика*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
- (74) *Konvencija o pravima deteta*. Београд: UNICEF Београд. Preuzeto sa sajta: [http://www.unicef.org/serbia/Konvencija_o_pravima_deteta_sa_fakultativnim_protokolima\(1\).pdf](http://www.unicef.org/serbia/Konvencija_o_pravima_deteta_sa_fakultativnim_protokolima(1).pdf) (11. aprila 2012. godine).
- (75) Костић, А. (2010). *Когнитивна психологија*. Београд: Завод за уџбенике.
- (76) Kyriacou, C. (2001). *Temeljna nastavna umijeća*. Zagreb: EDUCA.
- (77) Lalović, Z. (2009). *NAŠA škola: metode učenja/nastave u školi*. Podgorica: Zavod za školstvo.
- (78) Lee, C. Y. & Chen, M. P. (2010). Taiwanese junior high school students' mathematics attitudes and perceptions towards virtual manipulatives. *British Journal of Educational Technology*. Vol. 41, No. 2, pp. 17-21.
- (79) Leron, U. (2010). Porijeklo matematičkog mišljenja. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*. Vol. II (2010), Broj 2, 21-25.
- (80) Liessmann, K. P. (2009). *Teorija neobrazovanosti: zablude društva znanja*. Zagreb: Naklada Jesenski i Turk.
- (81) Longman (2010). *Longman Active Study Dictionary, 5th Edition*. Harlow: Pearson Education Limited.
- (82) Lyotard, J. F. (1979). *La condition postmoderne*. Paris: Les Editions de Minuit.
- (83) Macmillan Education (2006). *Macmillan English Dictionary*. Oxford: Macmillan Publishers Limited.

- (84) Марјановић, М. (1996а). *Методика математике. Први део*. Београд: Учитељски факултет.
- (85) Марјановић, М. (1996б). *Методика математике. Други део*. Београд: Учитељски факултет.
- (86) Marzano, R. J., Pickering, D. J. & Pollock, J. E. (2006). *Nastavne strategije: kako primijeniti devet najuspješnijih nastavnih strategija*. Zagreb: Educa.
- (87) Maslov, A. (2001). *O životnim vrednostima: izabrani eseji o psihologiji vrednosti*. Beograd: IP „Žarko Albulj“.
- (88) McNeil, N. M. & Jarvin, L. (2007). When Theories Don't Add up: Disentangling the Manipulatives Debate. *Theory into Practice*. Vol. 46, No.4, pp. 309-316.
- (89) Miller, H. R. & Upton, D. S. (2008). Computer Manipulatives in an Ordinary Differential Equations Course: Development, Implementation, and Assessment. *Journal of Science Education and Technology*. Vol. 17, No. 2, pp. 124-137.
- (90) Montesori, M. (2003). *Upijajući um*. Beograd: DN Centar.
- (91) Morin, E. (2002). *Odgoj za budućnost: Sedam temeljnih spoznaja nužnih u odgoju za budućnost*. Zagreb: Educa.
- (92) Morin, J. & Samelson, V. M. (2015). Count on it: Congruent manipulative displays. *Teaching children mathematics*. Vol. 21, No. 6, pp. 363-370.
- (93) Moyer, P. (2001). Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 47, No. 2 (2001), pp. 175-197.
- (94) Moyer, P. S., Bolyard, J. J. and Spikell, M. A. (2002). What Are Virtual Manipulatives? *Teaching Children Mathematics*. Vol. 8, No. 6, pp. 372-377.
- (95) Moyer, P. S. & Jones, M. G. (2004). Controlling Choice: Teachers, Students, and Manipulatives in Mathematics Classrooms. *School Science and Mathematics*. Volume 104(1), pp. 16-31.
- (96) Mroček, V. i Filipović, F. (1981). *Pedagogija matematike. Istorijske i methodske studije. Tom prvi*. Čačak: Čačanski glas.
- (97) Muzheve, M. T. & Capraro, R.M. (2012). An exploration of the role natural language and idiosyncratic representations in teaching how to convert among fractions, decimals, and percents. *The Journal of Mathematics Behavior*. Vol. 31, pp. 1-14.
- (98) Nusbaum, M. (2012). *Ne za profit: zašto je demokratiji potrebna humanistika?*. Beograd: Fabrika knjiga.
- (99) OECD (2010a). *Razumevanje društvenih ishoda učenja*. Beograd: Ministarstvo prosvete Srbije, Zavod za udžbenike.

- (100) OECD (2010b). *Ljudski kapital: kako ono što znate oblikuje vaš život*. Beograd: Ministarstvo prosvete Srbije, Zavod za udžbenike.
- (101) OECD (2010c). *Nema više neuspešnih: deset koraka do jednakopravnosti u obrazovanju*. Beograd: Ministarstvo prosvete Srbije, Zavod za udžbenike.
- (102) OECD (2010d). *Razumeti mozak: rođenje nauke o učenju*. Beograd: Ministarstvo prosvete Srbije, Zavod za udžbenike.
- (103) Olson, J. K. (1988). *Microcomputers Make Manipulatives Meaningful*. Budapest: International Congress of Mathematics Education.
- (104) Omerbegović-Bijelović, J. (1998). *Metaupravljanje i kvalitet upravljanja*. Beograd: Zadužbina Andrejević.
- (105) Pallant, J. (2009). *SPSS priručnik za preživljavanje*. Beograd: Mikroknjiga.
- (106) Петронијевић, Б. (1991). *Метафизичке расправе*. Сремски Карловци: Издавачка књижарница Зорана Стојановића.
- (107) Ријаже, Џ. & Inhelder, B. (1990). *Психологија детета*. Сремски Карловци: Издавачка књижарница Зорана Стојановића; Нови Сад: Добра вест.
- (108) Пијаже, Ж. (1994). *Увод у генетичку епистемологију: математичко мишљење*. Сремски Карловци и Нови Сад: Издавачка књижарница Зорана Стојановића.
- (109) Ријаже, Џ. & Inhelder, B. (1996). *Интелектуални развој детета*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- (110) Попер, К. (2002а). *Претпоставке и побијања: раст научног знања*. Сремски Карловци, Нови Сад: Издавачка књижарница Зорана Стојановића.
- (111) Popper, K. (2002b). *Objektivno saznanje*. Beograd: PAIDEIA; Podgorica: CID.
- (112) Puchner, L., Taylor, A., O'Donnell, B. and Fick, K. (2008). Teacher Learning and Mathematics Manipulatives: A Collective Case Study About Teacher Use of Manipulatives in Elementary and Middle School Mathematics Lessons. *School Science and Mathematics*. Volume 108 (7), pp. 313-325.
- (113) Reimer, K. & Moyer, P. S. (2005). Third-Graders Learn About Fractions Using Virtual Manipulatives: A Classroom Study. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. Vol. 24, No. 1, pp. 5-25.
- (114) Robinson, K. (2011). *Out of our minds – learning to be creative*. Chichester: Capston Publishing Ltd.
- (115) Романо, Д. (2008). О мотивима изучавања математичког мишљења. *Настава математике*. LIII, 3-4 (2008), 1-11.
- (116) Rorti, R. (1992). *Konsekvence pragmatizma*. Beograd: Nolit.

- (117) Rudduck, J., & Flutter, J. (1998). *The dilemmas and challenges of Year 8*. Cambridge: Homerton Research Unit for the Essex TEC.
- (118) Rudduck, J. & Flutter, J. (2000). Pupil Participation and Pupil Perspective: 'carving a new order of experience'. *Cambridge Journal of Education*, Vol. 30, No. 1, pp. 75-89.
- (119) Saks, Dž. D. (2014). *Doba održivog razvoja*. Beograd: Centar za međunarodnu saradnju i održivi razvoj i Službeni glasnik.
- (120) Semprini, A. (2004). *Multikulturalizam*. Beograd: Clio.
- (121) Simić, D. (2005). *Englesko – srpski enciklopedijski rečnik*. Kragujevac: Centar za naučna istraživanja SANU i Univerziteta u Kragujevcu.
- (122) Sowell, E. J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 20, No. 5, pp. 498-505.
- (123) Spicer, J. (2000). Virtual manipulatives: A new tool for hands-on math. *ENC Focus*. Vol. 7, No. 4, pp. 14-15.
- (124) Stipanić, E. (1988). *Putevima razvitka matematike*. Beograd: Vuk Karadžić.
- (125) Стројк, Д. Ј. (1969). *Кратак преглед историје математике*. Београд: Завод за издавање уџбеника Социјалистичке Републике Србије.
- (126) Šikić, Z. (Ed.). (1987). *Novija filozofija matematike*. Beograd: Nolit.
- (127) Шинго, Ш. (1995). *Нова јапанска производна филозофија*. Нови Сад: Прометеј.
- (128) Tarner, Dž. H. (2009). *Sociologija*. Novi Sad: Mediterran Publishing.
- (129) Tasić, V. (2002). *Matematika i koreni postmodernog mišljenja*. Novi Sad: Svetovi.
- (130) Tejlor, Č. (2011). *Doba sekularizacije*. Beograd: Službeni glasnik i Albatros plus.
- (131) Todorović, J. (1999). *Menadžment i obrazovanje: Japanese Approach*. Beograd: Verzalpress i Mrlješ.
- (132) Thompson, D. (2009). *Kontraznanje: kako smo podlegli teorijama zavjere, nadriliječništvu, pseudoznanosti i kvazipovijesti*. Zagreb: Algoritam.
- (133) Uribe-Flórez, L. J. & Wilkins, J. L. M. (2010). Elementary School Teachers' Manipulative Use. *School Science and Mathematics*. Voluma 110 (7). pp. 363-371.
- (134) Uttal, D. H., Scudder, K. V. and DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as Symbols: A New Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*. 18, (1997), pp. 37-54.
- (135) Van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 74, No. 1, pp. 23-37.
- (136) Vigotski, L. S. (1996a). *Pitanja teorije i istorije psihologije*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

- (137) Vigotski, L. S. (1996b). *Problemi opšte psihologije*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- (138) Vigotski, L. S. (1996c). *Problemi razvoja psihe*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- (139) Vigotski, L. S. (1996d). *Dečja psihologija*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- (140) Вилотијевић, М. (1999). *Дидактика1: Предмет дидактике*. Београд: Научна књига и Учитељски факултет.
- (141) Vranješević, J. (2006). Razvojno-psihološki aspekt Konvencije o pravima deteta. *Pedagogija*, br. 4, str. 469 – 478.
- (142) Vulfolk, A., Hjuz, M. & Volkap, V. (2014a). *Psihologija u obrazovanju I*. Beograd: Clio.
- (143) Vulfolk, A., Hjuz, M. & Volkap, V. (2014b). *Psihologija u obrazovanju II*. Beograd: Clio.
- (144) Warkentin, G. (1975). The Effect of Mathematics Instruction Using Manipulative Models on Attitude and Achievement of Prospective Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 6, No. 2, pp. 88-94.
- (145) Windschitl, M. (2002). Framing constructivism in practice as the negotiation of dilemmas: An analysis of the conceptual, pedagogical, cultural and political challenges facing teachers. *Review of Educational Research*. 72, 131-175.
- (146) Watson, N. & Fullan, M. (1992). Beyond school-district-university partnership. in M. Fullan & A. Hargreaves (eds), *Teacher Development and Educational Change* (pp. 213-242), Lewes: Falmer Press.
- (147) Williams, G. (2000). Collaborative problem solving and discovered complexity. In Bana, J. & Chapman, A. (Eds.). *Mathematics education beyond 2000* (pp. 656-663). Perth, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- (148) Williams, G. (2002a). Associations between mathematically insight ful collaborative behavior and positive affect. In Cockburn, A. & Nardi, E. (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4 (pp. 402-409). University of East Anglia, UK: Psychology of Mathematics Education.
- (149) Williams, G. (2002b). Identifying tasks that promote creative mathematical thinking: Atool. In Barton, B., Irwin, K., Pfannkuch, M. & Thomas, M. (Eds.). *Mathematics Education in the South Pacific: Proceedings of the 25th annual conference of the*

Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol. 2 (pp. 698-705).
Auckland, New Zealand: Mathematics Education Research Group of Australasia.

- (150) Willingham, D. (2013). *How useful are manipulatives in mathematics?*
<http://www.danielwillingham.com/daniel-willingham-science-and-education-blog.html>
(19.08.2015.)
- (151) Wood, T., Williams, G. & McNeal, B. (2006). Children's Mathematical Thinking in
Different Classroom Cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol.
37, No. 3, pp. 222-255.
- (152) Yuan, Y., Lee, C. Y. and Wang, C. H. (2010). A comparison study of polyominoes
explorations in a physical and virtual manipulative environment. *Journal of Computer
Assisted Learning*. No. 26, pp. 307-316.
- (153) Žižek, S. (2008). *Ispitivanje realnog*. Novi Sad: Akademska knjiga.
- (154) Žižek, S. (2011). *U odbranu izgubljenih stvari*. Novi Sad: Akademska knjiga.
- (155) Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into
Practice*. 41, 64-70.

ПРИЛОЗИ

Прилог 1

Један пример - Школа са онтолошком грешком

Школа из времена социјалистичког самоуправљања, сходно друштвеним односима, декларисала се као школа у којој је ученик субјект процеса. У литератури која до у детаљ описује организацију рада и функционисања школе тога доба (Soldo & Stanić, 1980) уочљива је диверсификација и разрађеност по сегментима свих послова и задужења. Нпр. посао наставника, директора или кога год у школи описан је по ставкама, временској потрошњи за обављање послова по ставкама, бодован по основи тежине, одговорности и потребних психофизичких напора за обављање послова (Soldo & Stanić, 1980, 271). Ученици су остваривали партиципацију на различите начине, кроз ученичке организације, друштва и клубове, али и присуством на седницама стручних органа и органа управљања школом. Међутим, како је социјалистичко самоуправљање подразумевало да признавањем „... плурализма самоуправних интереса могу се изражавати изворне и аутентичне потребе свих произвођачких слојева и обезбедити њихово учествовање у обликовању властитог живота“ (Кардељ, 1977, 80), али и признањем „... да више него икада раније огромна већина интелигенције постаје нераздвојни део радничке класе и да само у заједништву са физичким радницима и другим радним људима може да извојује своје ослобођење, и то као резултат ослобођења целе радничке класе“ (Кардељ, 1977, 80), то доводи до тога да је интелектуални и физички рад сједињен и нераздвојан (један без другог не могу) и тако холистички повезан води развоју друштва. Истовремено, производни односи одређују друштвене односе, и како је основни „производни“ процес у школи настава, која је опет организовано учење, заправо оптимум процеса учења²¹, то излази да односи током учења јесу индикатор или слика „самоуправне базе“, односно стварних и суштинских самоуправних односа у школи. Идеолог социјалистичког самоуправљања, Едвард Кардељ (1977) каже: „Демократија, међутим, није списак формалних права грађана, него живи политички израз одређене друштвене и политичке структуре и одређеног односа моћи друштвених снага. Она има своје корене и ослонац како у одговарајућим

²¹ Истине ради, учење је овде било одложено, јер је ученик регистровао наставничко посредовање, а накнадно реконструисао процес учења, па је сад наставник регистровао и одмеравао количину повратних информација, условно означених као знање.

друштвено-економским односима тако и у одговарајућој друштвеној свести. Осим тога, демократија као облик политичког система мора бити обезбеђена и таквим државним институцијама које одговарају карактеру и потребама одређених производних односа“ (Кардељ, 1977, 86). Стога, иако је школа социјалистичког самоуправљања била сложено замишљена, каква она треба и да буде, у њој није формирана „самоуправна база“, јер ученик није имао еманциповану улогу у процесу наставе/учења – био је објект у односу наставник – ученик (доминацијом предавачке методе наставника, насупрот активности запамћивања и репродукције садржаја од стране ученика). Ученик у процесу рада/учења није био разотуђен што је својеврсна *онтолошка грешка* у школи социјалистичког самоуправљања; није био експлоатисан, али ни слободан; своју слободу је артикулисао и остваривао формално и мимо реалитета „производних“ односа, тј. *поред* непосредног процеса учења, учешћем у организацијама, друштвима и клубовима који су постојали у школи. Тако и демократија у школи самоуправног социјализма није била директна и постојала у процесима у *самоуправној бази*, већ *поред* - транспонована, фингирана, посредна и тако декорација у амбијенту тоталитета друштва социјалистичког самоуправљања. Иначе, предвиђена многострукост, разноврсност и дубока диверсификованост послова уствари даје привидну слику сложености ове школе, а реално постојала је неповезаност детаља образовно-васпитног поступка као целине.

Литература:

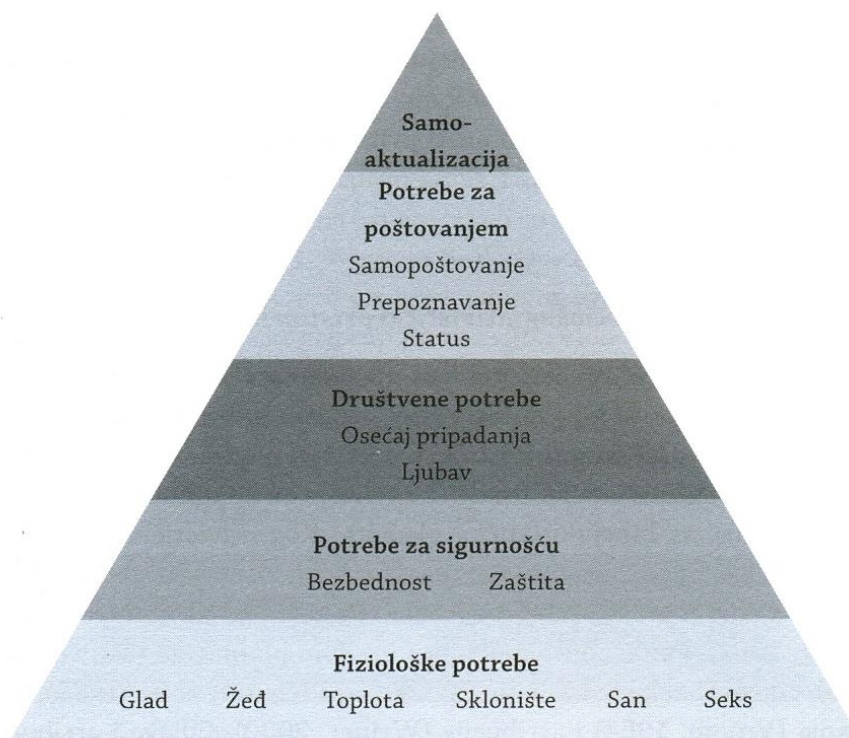
- (1) Кардељ, Е. (1977). *Правци развоја политичког система социјалистичког самоуправљања*. Београд: Издавачки центар „Комунист“.
- (2) Soldo, М. и Stanić, В. (1980). *Planiranje, programiranje i vrednovanje rada u osnovnoj školi*. Zagreb: Savez SIZ-ova vaspitanja i obrazovanja Jugoslavije.

Напомена: Текст је преузет из чланка *Провајдери образовања у Србији – школа као субјект образовања(оглед)*, аутора мр Радојка Дамјановића, објављеног у часопису *Шумадијски анали*, Крагујевац.

Дамјановић, Р. (2015). Провајдери образовања у Србији – школа као субјект образовања (оглед). *Шумадијски анали*, година X, број 8, стр. 342-358.

Прилог 2

Масловљева хијерархија потреба



Slika 10.1 Maslovljeva hijerarhija potreba

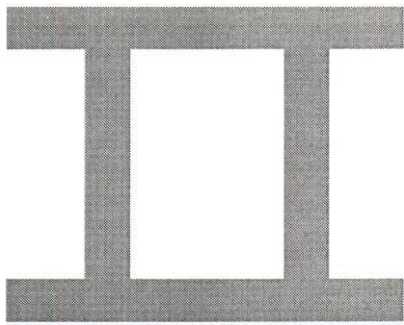
Izvor: Abraham Maslow, *Motivation and Personality* (2nd edn), Harper and Row, 1970. Ponovo štampano uz dopuštenje Ann Kaplan.

Напомена: Слика је преузета из публикације: Vulfolk, A., Hјuz, M. & Volkar, V. (2014b). *Psihologija u obrazovanju II*. Beograd: Clio.

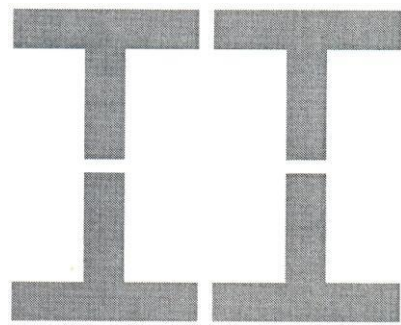
Прилог 3

Разлагање ситуације базичном јединицом

На слици 1 имамо ситуацију једне структуре, коју треба да разложимо на делове. Очигледно је можемо разложити на различите начине, али највећа јединица којом је можемо разложити јесте Т-јединица, као на слици 2.

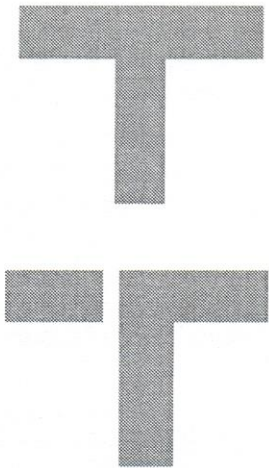


Слика 1.

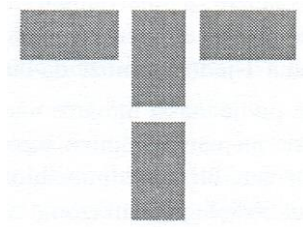


Слика 2.

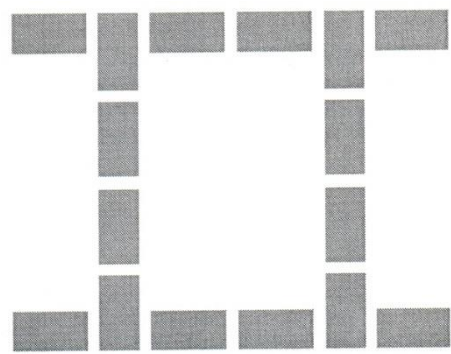
Пошто Т-јединицу можемо разложити на мање делове као на слици 3 и слици 4, имамо да смо и читаву почетну структуру, фигуру са слике 1, могли да разложимо и I-јединицом, што можемо да видимо на слици 5.



Слика 3.

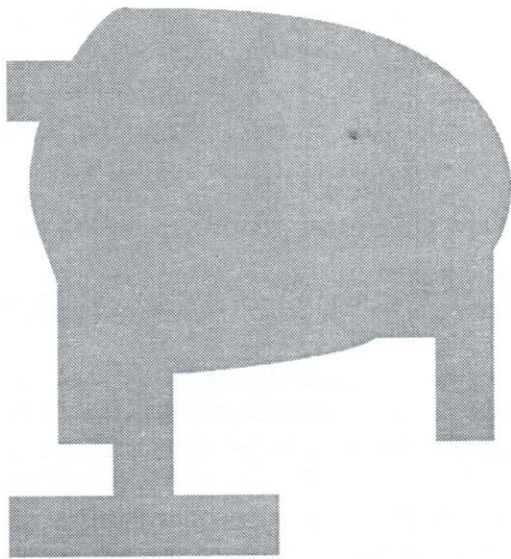


Слика 4.

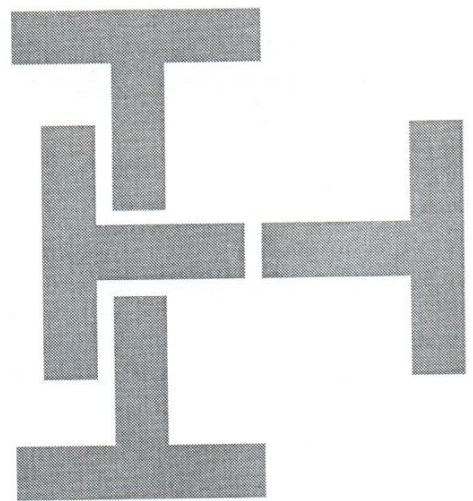


Слика 5.

Конечно, ево примера једне структуре са заклоњеним или сакривеним делом, при чему треба да откријемо њену базичну јединицу која је најбоље описује (слика 6 и слика 7).



Слика 6.



Слика 7.

Напомена: Приказане слике преузете су из публикације *Латерално размишљање*, аутора Едварда де Бона, у издању београдске куће *Финеса* из 2001. године.

Прилог 4

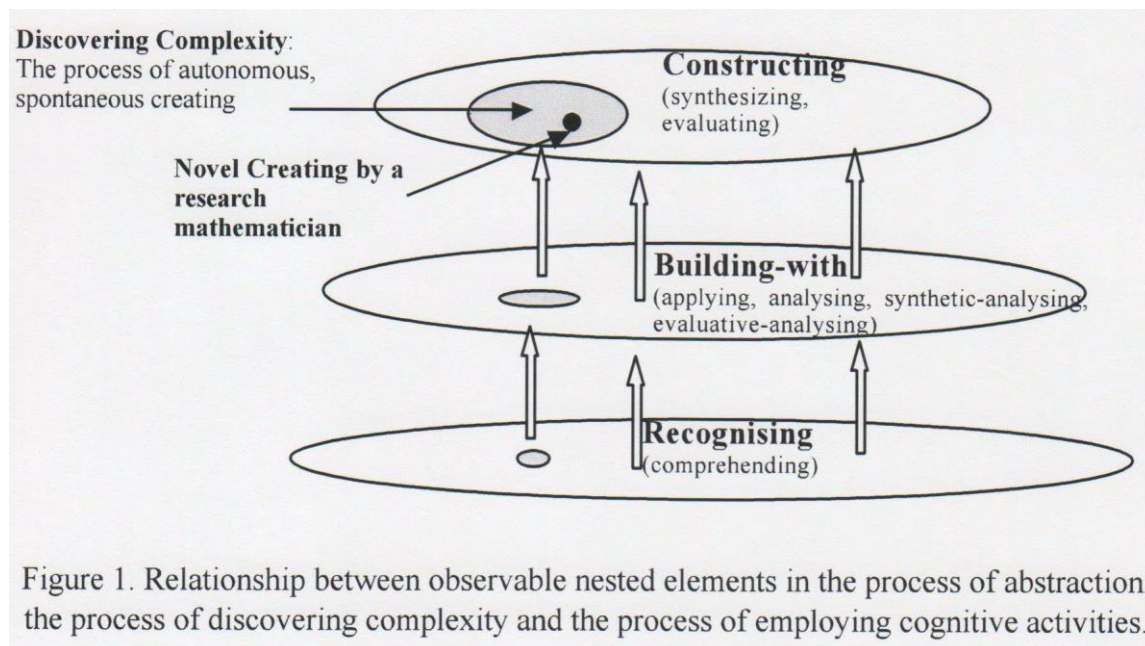
Табела и скица теоријског оквира хијерархије категорија и подкатегорија менталних активности (математичког мишљења) – Г. Вилијамс

Г. Вилијамс (Gaye Williams) је на основу неколико истраживања, налаза, резултата и различитих модификација Блумове таксономије из 1956. године у неколико својих радова (ауторски и коауторски) разрађивала и дала скицу једног комплексног теоријског оквира хијерархије категорија и подкатегорија елемената или менталних активности - математичког мишљења (Wood, Williams & McNeal, 2006). Овај прилог даје табеларни увид излистаних могућих активности сачињен на основу приказа у раду:

<i>Блумова таксономија (измењена)</i>	
Comprehending	Разумевање, схватање
Applying	Примењивање
Analyzing	Анализирање
Synthetic-analyzing	Синтетичко – анализирање
Evaluative-analyzing	Евалуативно – анализирање
Synthesizing	Синтетисање
Evaluating	Евалуација (процена, вредновање)
<i>Хијерархија специфичних врста менталних активности - Вилијамсова</i>	
<i>Recognizing</i>	Препознавање (увиђање)
Comprehending	Разумевање, схватање
Applying	Примењивање
<i>Building-with</i>	Изграђивање - са
Building-analyzing	Изграђивање – анализирањем
Building-synthetic-analyzing	Изграђивање – синтетичким-анализирањем
Building-evaluative-analyzing	Изграђивање – евалуативним-анализирањем

Constructing	Конструисање
Constructing-constructing	Конструисање – конструисањем
Constructing-synthesizing	Конструисање - синтетизовањем

Истовремено, из рада Г. Вилијамс (Williams, 2002b) преузета је скица која илуструје приказану табелу:



Литература:

Wood, T., Williams, G. & McNeal, B. (2006). Children's Mathematical Thinking in Different Classroom Cultures. *Journal for Resaearch in Mathematics Education*. Vol. 37, No. 3, pp. 222-255.

Williams, G. (2000). Collaborative problem solving and discovered complexity. In Bana, J. & Chapman, A. (Eds.). *Mathematics education beyond 2000* (pp. 656-663). Perth, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Williams, G. (2002a). Associations between mathematically insight ful collaborative behavior and positive affect. In Cockburn, A. & Nardi, E. (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4 (pp. 402-409). University of East Anglia, UK: Psychology of Mathematics Education.

Williams, G. (2002b). Identifying tasks that promote creative mathematical thinking: Atool. In Barton, B., Irwin, K., Pfannkuch, M. & Thomas, M. (Eds.). *Mathematics Educationin the South Pacific: Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics*

Education Research Group of Australasia, Vol. 2 (pp. 698-705). Auckland, New Zealand: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Williams, G. (2004). The nature of spontaneity in high quality learning situations. In Hoines, M. & Fuglestad, A.B. (Eds.). *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 433-440). Bergen University College, Norway: Psychology of Mathematics Education.

Напомена: Радови, налази и конструкти неколико аутора били су полазиште за оно што је Г. Вилијамс дала као оријентир за праћење развоја математичког мишљења. Заправо, она је разрадила оно што су други својим истраживањима и радовима већ дали. Референце на ове значајне радове су следеће:

Krutetskii, V. (1976). *Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. (J. Kilpatrick & I. Wirszup, (Eds.), J. Teller, Trans.). Chicago: The University of Chicago Press.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2001). *The construction of abstract knowledge in interaction*. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 377-384) Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2001). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Unpublished technical report available from the authors*. Tel Aviv University, Israel.

Chick, H. (1998). Cognition in the formal modes: research mathematics and the SOLO Taxonomy. *Mathematics Education Research Journal*, (Special issue. *Learning and Teaching Mathematics: acognitive perspective*) 10(2), 4-26.

Прилог 5

Приказ графиком феномена *flow*

Феномен *flow* у учењу математике објашњен је и анализиран у више текстова Г. Вилијамс. У овом прилогу дајемо преузет из оригинала приказ графиком из текста (Williams, 2002a, 2).

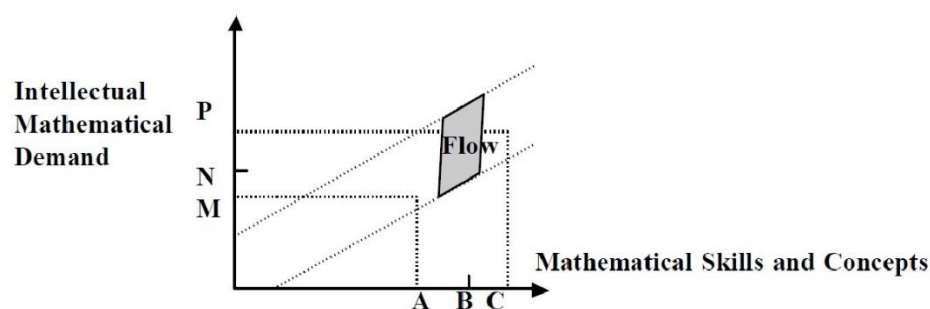


Figure 1. Representation of associations between discovered complexity and flow

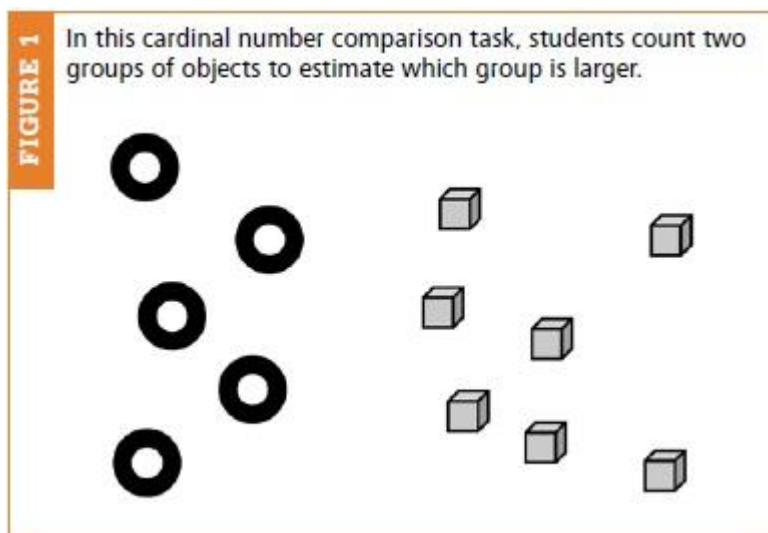
Напомена: Феноменом *flow* бавили су се уопштено други аутори и о томе је речено у основном тексту. Овде наводимо само како је то виђено у настави и учењу математике. Комплетна референца на текст из ког је преузет графички приказ за *flow* јесте:

Williams, G. (2002a). Associations between mathematically insight ful collaborative behavior and positive affect. In Cockburn, A. & Nardi, E. (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4 (pp. 402-409). University of EastAnglia, UK: Psychology of Mathematics Education.

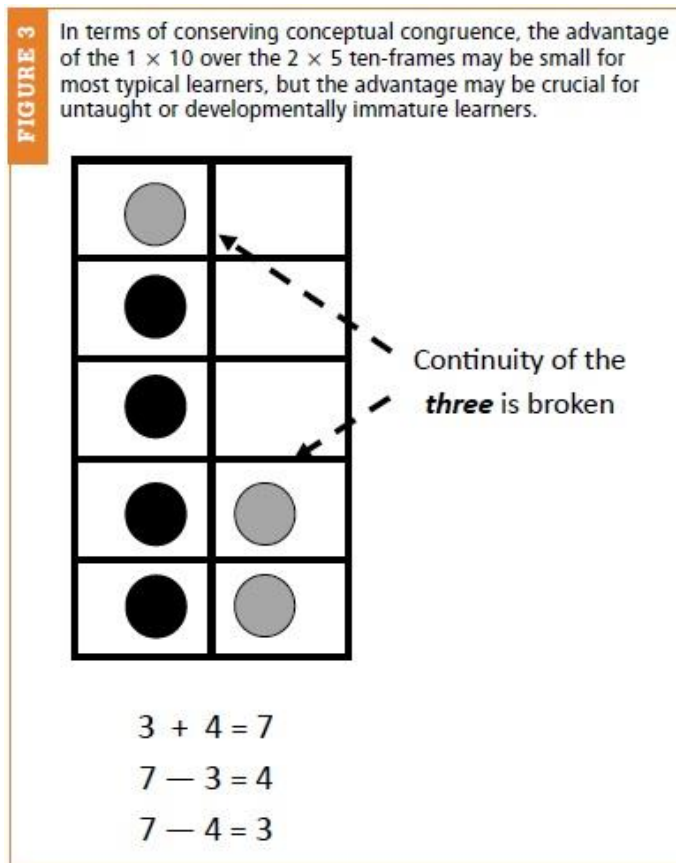
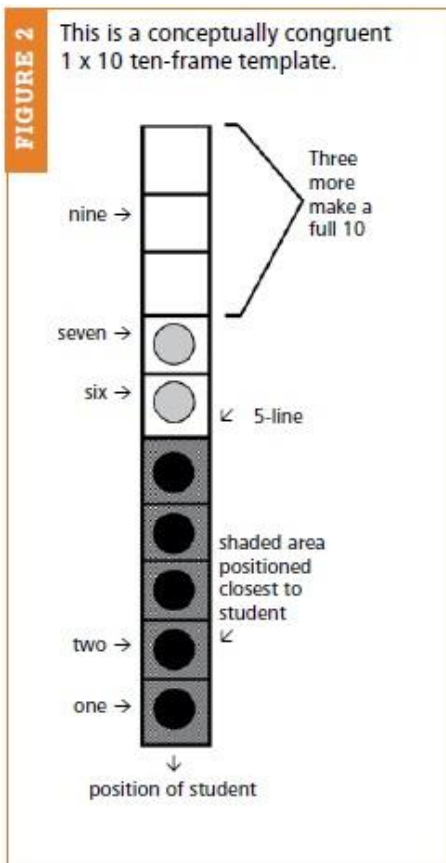
Прилог 6

Илустрације генезе потенцијалне ученичке конфузије у утврђивању кардиналних димензија манипулативних приказа и врста шаблона десетичног оквира

- (1) Ученици који још увек нису конзервирали знања о бројевима, релације и односе, заправо, који још увек немају кохерентну слику нумеричких концепата, праве извесне грешке у утврђивању кардиналних димензија скупова или манипулативних приказа. Наиме, уколико ученику представимо манипулативима један нехомоген манипулативни приказ који се састоји од жетона и коцкица и дамо инструкцију да утврди која класа има већу кардиналност може да дође до омашке и да одговори да је већа кардиналност онога скупа чији су елементи већи (имају већу магнитуду). О томе говори прва слика (Figure 1).



- (2) Конгруентни нумерички концепти са десетичном основом могу бити приказани у тзв. десетичном оквиру који ученицима даје могућност оријентације и хомогенизације знања о бројевима и лакшу визуелизацију нумеричких појмова и концепата. За ту прилику упутно је користити две врсте десетичних шаблона 1x10 и 2x5, које приказујемо двома одвојеним сликама (Figure 2 и Figure 3).



Напомена: Илустрације су преузете из текста: Morin, J. & Samelson, V.M. (2015). Count on it: Congruent manipulative displays. *Teaching children mathematics*. Vol. 21, No. 6, pp. 363-370.

Прилог 7

Час са танграмом

Час са употребом танграма објављен је у часопису *Настава математике* и представља пример добре праксе, као уводни час у тему са површинама за ученике шестог разреда основне школе. Утврђивање, односно, понављање градива које је усвојено још у првом циклусу основног образовања уз помоћ манипулатива у овом се случају показало веома корисним. Ученици су касније лакше разумели површину троуглова и четвороуглова и освежили своју менталну визуелизацију, спремивши се за сложеније концепте површине.

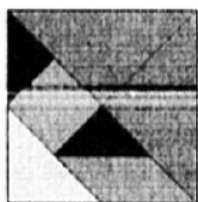
МОЈ ЧАС

Радојко Дамјановић

ОДРЕЂИВАЊЕ ПОВРШИНЕ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФИГУРА

Скица часа вежбања у шестом разреду
ОШ „Трећи крагујевачки батаљон“

- (1) Подела у групе (оптималан број би био четири до пет ученика у групи).
- (2) Свака група добија задатак да састави по једну фигуру (групе добијају различите фигуре) – танграм.



- (3) Изразити површину фигуре у јединици мере:
 - (а) најмањег троугла,
 - (б) квадрата,
 - (в) паралелограма,
 - (г) средњег троугла (троугао средње величине),
 - (д) највећег троугла.

- (4) Због чега све групе добијају исту вредност површине, иако имају различите фигуре?
- (5) Измерити страну квадрата (у см) и израчунати његову површину (у см²).
- (6) Колика је површина фигуре у см² ако познајемо површину квадрата?
- (7) Колика је површина најмањег троугла (у см²)?
- (8) Како ћемо израчунати површину фигуре (у см²) ако знамо површину малог троугла?
- (9) Од средњег троугла и паралелограма направи трапез. Ако је то јединица мере, колика је површина трапеза? Колика је површина трапеза (у см²)? Како ћемо добити површину фигуре (у см²) уз помоћ површине трапеза?
- (10) Које фигуре можемо добити од два највећа троугла и колика је њихова површина у см²?

У овом прилогу даје се исечак pdf-формата овог чланка, пренетог из часописа *Настава математике* (Дамјановић, 2006).

Прилог 8

Упитник за наставнике	
Овај упитник јесте инструмент истраживања у области <i>употребе манипулатива</i> у настави математике и користиће се искључиво у те сврхе, без навођења података о установама и лицима који су учествовали у њима.	
Манипулативи представљају <i>стварне</i> (физичке, реалне) или <i>виртуелне</i> (рачунарски/софтверски програми, пакети, алати) објекте помоћу којих (или: над којима) ученик ради, користећи своје сензо-моторне способности, при чему емпиријским путем врши проверу и вежба (утврђује) стечена знања, умења и вештине; уочава нове околности и чињенице, повезује и закључује, чиме изграђује нови корпус знања, умења и вештина.	
Назив школе и место	
Име лица које даје податке	
Радно место лица које даје податке (наставник разредне наставе, наставник математике) и ком разреду тренутно предајете	
Колико имате година радног стажа у образовању?	
На ком нивоу Вашег иницијалног професионалног образовања сте се сусрели са/учили о појму манипулатива у настави математике?	
У којој мери сте у оквиру Вашег иницијалног професионалног образовања учили о појму манипулатива у настави математике?	
У којој мери сте након завршеног формалног образовања учили о манипулативима у настави математике (на семинарима стручног усавршавања наставника, на разменама наставника у стручном већу, разменама наставника у стручном друштву и сл.)?	
У којој мери употребљавате манипулативе у процесу наставе и учења математике?	
Наведите примере у којим сте наставним јединицама математике користили манипулативе.	
Наведите примере наставних јединица математике у којима бисте могли да користите манипулативе, а нисте до сада, као и разлоге за то.	
Наведите које сте манипулативе у настави математике до сада користили.	

Јесте ли до сада Ви или у сарадњи са одговарајућом службом у школи сачинили неки манипулатив и употребили у процесу наставе и учења математике? Ако је одговор потврдан, наведите, односно опишите околности.	
Уколико употребљавате манипулативе наведите колико је ефикаснији и ефективнији процес наставе и учења математике и на основу чега то процењујете?	
Уколико сматрате да употреба манипулатива не унапређује наставу и учење математике, на основу чега то тврдите?	
Како ученици реагују на употребу манипулатива током процеса наставе и учења математике?	
На основу чега одлучујете да ли ћете употребити или не манипулатив у настави и учењу математике (шта је пресудно)?	
Уколико употребљавате манипулативе у настави и учењу математике, у којим то сегментима процеса најчешће радите и како се одлучујете за то?	
Јесу ли ученици у Вашој школи некада учествовали у изради или изразили жељу за набавку извесног манипулатива за наставу математике?	
Јесте ли и у којој мери користили неки програмски пакет, софтвер или алат у настави математике? Опишите детаљније овај случај и наведите колико често ово уводите у процес наставе и учења математике.	
Како процењујете утицај употребе манипулатива у процесу наставе и учења математике за ученике са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју, као и код ученика са инвалидитетом?	
Сматрате ли да употреба манипулатива у настави математике унапређује процес и образложите одговор?	
Јесте ли употреба манипулатива делотворна у настави математике за све категорије ученика? Образложите одговор.	

Прилог 9

Metodički obzori 3(2008)2
Pregledni rad
Review Article
UDK: 159.953 : 37.013.77
Primljeno: 7. 7. 2008.

KONKRETNO ISKUSTVO KAO SNAŽAN OSLOMAC U FORMIRANJU FORMALNOG, APSTRAKTOG MIŠLJENJA

*Radojko Damjanović, prof.
Osnovna škola "Treći kragujevački bataljon"
Kragujevac/Srbija
ratkokg@sbb.co.rs*

S a ž e t a k

Razvojni pristup procesu nastave/učenja se u suvremenim diskursima o nastavi ističe kao neophodnost. Manipulativi kao moćni alati imaju svoju djelotvornu ulogu u jačanju kontinuiteta ovog procesa. Njihova pravilna (svrsishodna) uporaba je moguća samo ukoliko postoji dobra ovladanost i vještina kreatora aktivnosti, ali i projicirana predikcija onoga što slijedi poslije aktivnosti, jer im je svrha da budu dobra podloga u izgradnji fleksibilnog mišljenja i upotrebljivog sustava znanja.

Ključne reči: *iskustvo, konkretno, formalno, apstraktno mišljenje, manipulativi, virtualan.*

Često ćemo se u nastavnoj praksi sresti sa problemom da učenik ne može, primjenom osnovne matematičke operacije, da zbroji dva decimalna broja (i to u starijim razredima osnovne škole); kada navedeno (heurističkim vođenjem procesa) prevedemo u novčane iznose, epilog je u formi hepienda.

Pred ovom je činjenicom mnogo nastavnika zbunjeno, ali odgovor nije nedokučiv. Izgleda da se nalazi u načinu formiranja matematičkog mišljenja učenika (djeteta), tj. previđanju potrebe za „kopčom“ između konkretnog i apstraktnog mišljenja. Ustvari, ta prirodna veza bi bila kroz iskustvo, tj. empirijski pristup, koji podrazumijeva inzistiranje na verbaliziranom i simboliziranom iskustvu nad strukturiranom nastavnim materijalom (iskustvo sa reprezentacijama iskustva).

Motivacija za ono što sledi u ovom tekstu, jesu stavovi filozofa, pedagoga i psihologa koji su se bavili razvojem djeteta (ovdje nas prvenstveno interesira kognitivni razvoj):

- "Ništa nije u razumu, što prethodno nije bilo u čulima" (Džon Lok)¹
- "Dobra konkretna aktivnost je dobra mentalna aktivnost" (Clements, 2007, str. 6)
- Djeca na uzrastu od 7(8) do 11(12) godina prelaze iz faze konkretnih operacija u fazu formalnih operacija (ka apstraktnom mišljenju).

Iskustvo stečeno u ovom periodu predstavlja podlogu nad kojom se kasnije izgrađuje apstraktno mišljenje. (Pijaže i Inhelder, 1996)

- "... mentalni razvoj *ne smije* se odvojiti od pokreta; on od njega zavisi. ... dijete uz pomoć pokreta razvija vlastitu inteligenciju. Pokret pomaže razvoju uma, a ovaj se, sa svoje strane, iskazuje novim pokretima i akcijama. Riječ je, dakle, o kružnom procesu jer su psiha i pokret dijelova jedinstvene cjeline. U tom procesu angažiraju se i čula. Zato dijete koje nema prilike da se oproma u senzornim aktivnostima zaostaje u razvoju." (Montesori, 2003, str. 189)

- "... učenik uči multiplikacijom iskustava koje doživljava, na koje reagira, čije efekte konstatira, opisuje i komentira, a ne registriranjem dogmatskog govora." (Šarpak, 2003, str. 106)

Prije nego pređemo na primjer iz prakse, koji ćemo da analiziramo, definirajmo pojam *manipulativa* u diskursu nastave matematike.

Manipulativi predstavljaju *stvarne* (fizičke, realne) ili *virtualne* (računarski/softverski programi, paketi) objekte sa kojima (ili: nad kojima) učenik radi, koristeći svoje senzo–motorne sposobnosti, pri čemu empirijskim putem vrši provjeru i vježba (utvrđuje) stečena znanja, umijeće i vještine; uočava nove okolnosti i činjenice, povezuje i zaključuje, čime izgrađuje novi korpus znanja, umijeće i vještina.

Manipulativima se senzo–motorne aktivnosti koordiniraju sa mentalnim aktivnostima; stvara se veza između konkretnog i apstraktnog.

Jedan primjer²



¹ Pogledaj (Durant, 1990, str. 252).

² Učenici koji su rešavali ovaj primer su uzrasta trećeg razreda osnovne škole (oko 10 godina).

Univerzum predstavlja skup od 24 različita dugmeta, i to:

- sa četiri rupice (sva crna – ima ih deset),
- sa dvije rupice (četiri bijela i dva crna),
- sa jednom rupicom (pet bijelih i tri narančasta).

Instrukcija: *Klasificiraj dugmad po broju rupica, pa svaku klasu predstavi razlomkom u odnosu na ukupan broj dugmadi*³.

Dobili su sljedeće stanje:

- sa jednom rupicom 8 dugmadi,
- sa dvije rupice 6 dugmadi,
- sa četiri rupice 10 dugmadi.

Odmah su ponosno odgovorili da je prva grupa $\frac{1}{3}$; na zahtjev da obrazlože – zato što je $24 : 8 = 3$ (neki učenici su odgovorili – zato što ima tri gomile, što je netočno, jer gomile, dijelovi ne moraju biti jednaki, pa smo i o tome razgovarali).

Za drugu grupu je odgovor bio sličan, to je $\frac{1}{4}$, jer je $24 : 6 = 4$.

Problem je nastao kod treće grupe, pa su dobili pomoć – pitanje: *Da li možemo dugmad iz klase sa četiri rupice da grupiramo (na jednak broj elemenata), tako da i ostatak skupa (univerzuma) – dugmad koja nemaju četiri rupice – grupiramo na isti način?*



Odgovor je potvrđan – Možemo da grupiramo po dva dugmeta!

³ Kada su počeli da postupaju po instrukciji, učenici su postavili pitanje za dugmad sa jednom rupicom – kako se računa – kao jedna ili dve rupice? Upućeni su da razmisle o tome da li tunnel ima dve "rupice" ili je on sâm jedna "rupica". Odmah su shvatili i nastavili dalje.

Ukupno ima 12 grupa po dva dugmeta, a od toga pet grupa čine dugmad sa po četiri rupice.

Jedna grupa je $\frac{1}{12}$, a pet grupa je $\frac{5}{12}$.

(Naravno, do ovog rezultata učenici su došli uz pomoć nastavnika)

Instrukcija: *Klasificiraj dugmad po boji, pa svaku klasu predstavi razlomkom u odnosu na ukupan broj dugmadi.*

Stanje koje su dobili je bilo sljedeće:

- crnih, 12 dugmadi,
- bijelih, 9 dugmadi,
- narančastih, 3 dugmeta.

Tvrdnja da crna i narančasta dugmad predstavljaju polovinu ($\frac{1}{2}$) i osminu ($\frac{1}{8}$), respektivno, u odnosu na ukupan broj dugmadi izvodi se jednostavno, jer je

$$24 : 12 = 2 \quad \text{i} \quad 24 : 3 = 8.$$

Da bismo utvrdili koji dio skupa (univerzuma) predstavljaju bijela dugmad, potrebno je klasu "bijelih" grupirati na jednak broj elemenata, tako da i ostatak/dopunu do univerzuma grupiramo na isti način.



Zaključujemo da možemo grupirati po tri elementa, tako da imamo ukupno osam grupa, od kojih su tri "bije"le".

Dakle, bijela dugmad predstavljaju $\frac{3}{8}$ cijelog skupa.

(Ovoga puta su učenici posljednji zaključak izveli potpuno samostalno)

Misaone operacije u prethodnom primjeru

Učenici su tokom rada sa materijalom, kako je to opisano u primjeru koji je prethodio, koristili određene misaone operacije. Navest ćemo ih, bez ambicije dubljeg i šireg razmatranja njihove prirode ili npr. djelotvornosti njihove češće i osmišljene uporabe.

Klasifikacija

- (a) po boji (jednostavnija),
- (b) po broju rupica (složenija),
- (v) grupiranje u dopuni do univerzuma, kao u njegovom dijelu (najsloženija).

Serijacija

Učenici su, i u prvom i u drugom dijelu izloženog primjera mogli da konstatiraju sljedeće:

$$\frac{1}{12} < \frac{2}{12} < \frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{5}{12}, \text{ odnosno, da je } \frac{1}{8} < \frac{2}{8} < \frac{3}{8}.$$

Aditivne operacije

Da bi odgovorio koliki dio čine dugmad sa četiri rupice, učenik je morao da zbroji grupe koje je dobio i od kojih je svaka predstavljala dvanaesti dio univerzuma.

$$\frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} \quad \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} \quad \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} \quad \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

Isto vrijedi i kada je razmišljao o tome koji dio čine bijela dugmad.

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} \quad \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Inkluzija klasa

Inkluzija klasa je proces koji je povezan sa aditivnim operacijama.

Npr. klasa "bijelih" se sastoji iz više potklasa "bijelih".

Komentar uz primjer

- Pojam broja se *izgrađuje* kod djece (učenika), a ne nalazi (kao komad lijepe stijene/kamena) ili prihvata od odraslih (kao što se prihvata i upotrebljava igračka) – Hermine Sinclair, Pijaževa suradnica (Clements, 2007, str. 4. i 5).

- Priča o diskretnom skupu (univerzumu) i njegovim podskupovima (o odnosu dijela prema cjelini), ako se prevede na mentalni plan, predstavlja priču o količniku

prirodnih brojeva – što zapravo i predstavljaju razlomci (razlomci – matematička reprezentacija konkretnih aktivnosti iz demonstriranog primjera).

- Sa druge strane promatrano, učenici su u prethodnom primjeru *dodirom i pomicanjem (pokretom)* pravili *vizualne* reprezentacije matematičkih koncepata.



Metodičke napomene

(1) Učenici ne uče momentalno ili kao rezultat nastavnikove riječi (o tome se često ne razmišlja).

(2) Manipulativi i za nastavnika predstavljaju novi put/način za prilaz pojmu.

(3) Pogled na pojam mora da bude algebriziran ili simbolima opisan, tako da je matematički formatiziran (dobije matematičku formu) – od esencijalnog značaja je izgraditi most između konkretnog iskustva i simbola (matematička formalizacija) – "jump for students".

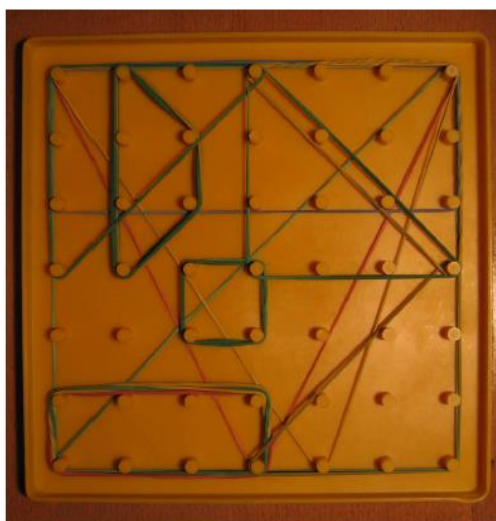
(4) Učenicima je potrebno da određeni problem sagledaju sa više pravaca (iz više smjerova), pa je zato potrebno omogućiti im odgovarajuće vrijeme (tzv. extra-vrijeme) za rad.

(5) Formirati fleksibilno okruženje u kome će učenik biti ohrabren da problem samostalno proba da riješi. Ukoliko nije u mogućnosti samostalno da dođe do rešenja, onda da potraži pomoć od drugog (drugih) učenika (kooperativno učenje), a zatim i od nastavnika.

(6) Kada se odgovori na sve pretpostavljene zahtjeve (direkcije, instrukcije), pripremiti nove, kojima bi se uvježbavala stečena znanja i/ili različitim vrstama spekulacija sistematizirala nova.

Što sve može biti od koristi?

Da bismo osmislili efektanu aktivnost, kao manipulativ nam može poslužiti mnogo što. Pored namjenski konstruiranih i samim tim standardiziranih objekata, npr. žetoni ili štapići, računaljke, razni manipulativni kompleti, za ovu svrhu, kao što smo već vidjeli, mogu da pomognu i "stara rashodovana dugmad iz bakine teglice", palidrvca (šibice), sjemenje raspoložive flore (grah – ima ga raznobojnog, kukuruz, kesten, bob, koštice kajsije, itd.), tjestenina (naravno, ona koja nije prethodno tretirana toplom vodom), školjčice sa plaže, zatvarači sa boca (brendirani – sa natpisima ili no name – bez natpisa), domina, tangram ili neka druga nastavna sredstva (npr. popularni "gumi", prikazan na priloženoj slici).



Virtualni manipulativi

Virtualni manipulativi su manipulativi kreirani u vidu računarskih programa, softverskih paketa, ali ih možete naći i pod odrednicom računarski mikrosvijet. Jednostavno, to su razni applet-i, namjenski urađeni za različite potrebe procesa učenja, odnosno, podučavanja. Predstavljaju posebnu oblast za izlaganje i odlična su podrška nastavnom procesu, pod uvjetom da je on sam (nastavni proces, prim. aut) na potrebnom tehnološkom nivou, tj. da zadovoljava neki minimum tehnoloških standarda.

Putem Interneta⁴ se distribuira mnoštvo raznovrsnog materijala, koji se daje podvesti pod pojam virtualnih manipulativa; ali i korektno je zaključiti da u razvijenim društvima sa rešenim obrazovnim sistemima (ma što to značilo) ova oblast predstavlja vrhunski domet u spoju suvremenih informacionih tehnologija i teorija učenja.

⁴ Pogledaj (Damjanović, 2007).

Različite slagalice, programirani i poluprogramirani materijali, interaktivni interfejs, tangrami, e-udžbenici, obrazovne igrice, samo su neki od sadržaja ove vrste manipulativa.

Ovdje je interesantno napomenuti da ćete pretraživanjem po najvećoj svjetskoj mreži (www), naići na raznorazna istraživanja posvećena temi virtualnih manipulativa, sprovedena nad različitim grupama (uzorcima), i da se njihovi rezultati uglavnom svode na to da su oni jedan od alata i da ne mogu znameniti konkretne (stvarne, realne) manipulativne u nastavnim konceptima (teaching concepts).

Aktivnosti sa manipulativima

Aktivnosti sa manipulativima u nastavi matematike mogu imati različitu ulogu (svrhu):

♦ inicijalna, uvodna aktivnost (brainstorming - "gomilanje/jurišanje ideja" ili "oluja mozga")

Npr. učenici prije početka obrade nastavne jedinice o površinama geometrijskih figura, kao početnu aktivnost imaju da pomoću pločica oblika kvadrata ili pravokutnika slažu različite figure.

♦ organizaciona aktivnost

Podjela učenika u grupe za rad – npr. školjčice u jednu grupu, sjemenke u drugu, itd.

♦ bazična, noseća aktivnost

Primjer sa dugmadima sa početka teksta; žetoni i štapići kod uvođenja računskih operacija u skupu prirodnih brojeva.

♦ energizirajuća aktivnost (tzv. energizer)

Tangram, domino i sl.

♦ korelativna, povezujuća uloga

Upotreba sjemenki/koštica različitih biljaka (kajsija, breskva, grah, bob, kukuruz, kesten, masline, itd.) kao manipulativa u korelaciji je sa nastavom poznavanja prirode (svet oko nas).

Uputstva i završne napomene

- Upotrebom manipulativa u nastavi matematike, uvodimo čula u proces učenja (involvement of multiple senses).

- Učenje na iskustvima i povezivanje matematike sa postojećim iskustvima pomaže učeniku da razume i cijeni matematiku.

- Manipulativi čine da učenje matematike bude interesantno i puno uživanja (enjoyable).

- U procesu učenja manipulative treba koncipirati kao alate, nikako kao igračke (learning tools, not toys!).

- Djeca uče kroz rad (aktivnosti) i misleći o onome što rade – izgrađivanje bića praxis-a.

- Suvremena nastava matematike podrazumijeva formiranje *fleksibilnog mišljenja* za rješavanje različitih *životnih situacija uz pomoć matematičkih ideja*.

- *Aktivnost* učenika (senzori – motorička razvija čula, a misaona razvija intelektualne sposobnosti) je pretpostavka *metakognitivnom* pristupu učenju (izbor odgovarajućih strategija, organizacija – povezivanje informacija, sagledavanje problema – rješavanje, generalizacija strategija za druge situacije).

Dilema

- nastava matematike kao kolekcija pravila i obrazaca za memoriranje (tehnika računa u najširem značenju)

- nastava matematike kao podrška misaonom (mentalnom) razvoju

Razrješenje dileme je u razvojnom pristupu procesu nastave/učenja, pri čemu bi početna nastava matematike trebalo da se prvenstveno bazira kao podrška misaonom razvoju naspram "tehnike računa", tako da tendencija bude u obrnutoj razmjeri, kako se proces vremenski odvija (primat obrazovnim ciljevima).

Literatura

[1] Damjanović, Radojko (2007), Manipulativi na Internetu, *Inovacije u nastavi*, Beograd, XIX, 2007/3, vol. 20, str. 151-155

[2] Durant, Vil (1990), *Um caruje: životi i mišljenja velikih filozofa (fototipsko izdanje)*, Beograd, Dereta

[3] Ludvigh (Ludwig), Harald (2007), Autentičnost i kreativnost u teoriji i praksi Montessori pedagogije, *Pedagoška stvarnost*, Novi Sad, LIII, 7-8, str. 693-703

[4] Montessori, Marija (2003), *Upijajući um*, Beograd, DN Centar

[5] Montessori, Marija (2007), *Od detinjstva do adolescencije*, Beograd, DN Centar

[6] Pijaže, Žan i Inhelder, Berbel (1990), *Psihologija deteta*, Sremski Karlovci – Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, Novi Sad – Dobra vest

[7] Pijaže, Žan i Inhelder, Berbel (1996), *Intelektualni razvoj deteta*, Beograd, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva

[8] Prvanović, Stanko (1959), *Metodika nastave računa (Priručnik za nastavnike – prva četiri razreda osnovne škole)*, Beograd, Savremena škola

- [9] Šarpak, Žorž (2003), *Ruka u testu – nauke u osnovnoj školi*, Beograd, Društvo fizičara Srbije
- (10) *Džepni kompjuterski rečnik* (2002), Čačak, Kompjuter biblioteka
- [11] Douglas H. Clements, (09.10.2007), " *'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas*", *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60,
http://www.gse.buffalo.edu/org/buildingblocks/Newsletters/Concrete_Yelland.htm
- [12] Suzanne Alejandre, (09.10.2007), "*Middle School Mathematics Curriculum*",
<http://mathforum.org/alejandre/nctm/position.html>
- (13) Marilyn Burns, (09.10.2007), *How to Make the Most of Math Manipulatives*,
<http://teacher.scholastic.com/lessonrepro/lessonplans/instructor/burns.htm>
- (14) Marilyn Burns, (09.10.2007), *7 Musts for Using Manipulatives*,
<http://teacher.scholastic.com/products/instructor/musts.htm>
- [15] Marilyn Burns, (09.10.2007), *A Letter to Parents - Manipulatives in Today's Classroom*,
<http://teacher.scholastic.com/products/instructor/letter.htm>
- [16] *Math Manipulatives*, (09.10.2007) http://www.ct4me.net/math_manipulatives.htm
- [17] *Arcytech's Educational Java Programs*, (09.10.2007) - *Pattern Blocks: Exploring Fractions with Shapes*, <http://arcytech.org/java/patterns/>
- [18] *Arcytech's Educational Java Programs - Fraction Bars*, (09.10.2007),
<http://arcytech.org/java/fractions/fractions.html>
- [19] <http://www.theteacherscorner.net/math/index.htm>, (09.10.2007)
- [20] <http://www.visualfractions.com/>, (09.10.2007)
- [21] http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_2_t_3.html, (09.10.2007)
- [22] <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>, (09.10.2007)
- [23] *Teaching Tables* (29.09.2007), <http://www.teachingtables.co.uk/>

CONCRETE EXPERIENCE AS A FIRM SUPPORT IN CREATING FORMAL, ABSTRACT THINKING

S u m m a r y

Developing approach to the process of teaching/ learning is being discussed as necessary in modern teaching. Manipulatives as mighty tools have their effective role in strengthening the continuity of the process. Their right (appropriate) use is possible not only if there is a good control and skillfulness of the activity creator, but also projected prediction of what is expected after the activity, because it is their purpose to be good foundation in developing flexible thinking and usable system of knowledge.

Key words: *experience, concrete, formal, abstract thinking, manipulatives, virtual*

**ESPERIENZE CONCRETE COME BASE IMPORTANTE PER LA
FORMAZIONE DEL PENSIERO ASTRATTO - FORMALE**

R i a s s u n t o

L'approccio evolutivo al processo d'insegnamento/apprendimento è d'obbligo nei dibattiti attuali sull'insegnamento. I manipolativi come strumenti potenti hanno un ruolo efficace nel rafforzare la continuità di questo processo. Il loro corretto (appropriato) uso è possibile soltanto se il creatore è abile e domina l'attività nonché se ha previsto ciò che seguirà dopo le attività perché il loro scopo è costituire la base per la costruzione del pensiero flessibile e di un sistema di conoscenze utili.

Parole chiave: *esperienza, concreta, formale, pensiero astratto, manipolativi, virtuale*

Прилог 10

Основне школе у Шумадијском управном округу – Школска управа Крагујевац

ОПШТИНА	ОСНОВНА ШКОЛА
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ПРОТА СТЕВАН ПОПОВИЋ", ЧУМИЋ
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "19. ОКТОБАР", МАРШИЋ
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "21. ОКТОБАР"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ВУК СТЕФАНОВИЋ КАРАЏИЋ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ДОСИТЕЈ ОБРАДОВИЋ", ЕРДЕЧ
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ДРАГИША ЛУКОВИЋ-ШПАНАЦ", БЕЛОШЕВАЦ
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ДРАГИША МИХАИЛОВИЋ", СТАНОВО
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЂУРА ЈАКШИЋ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЖИВАДИНКА ДИВАЦ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ПОПОВИЋ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈУЛИЈАНА ЋАТИЋ", СТРАГАРИ
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛОЈЕ СИМОВИЋ", ДРАГОБРАЋА
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛУТИН И ДРАГИЊА ТОДОРОВИЋ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "МИРКО ЈОВАНОВИЋ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "МОМА СТАНОЈЛОВИЋ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "НАТАЛИЈА-НАНА НЕДЕЉКОВИЋ", ГРОШНИЦА
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "РАДОЈЕ ДОМАНОВИЋ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТИ САВА"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТОЗАР МАРКОВИЋ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "СРЕТЕН МЛАДЕНОВИЋ", ДЕСИМИРОВАЦ
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "СТАНИСЛАВ СРЕМЧЕВИЋ"
КРАГУЈЕВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ТРЕЋИ КРАГУЈЕВАЧКИ БАТАЉОН"
РАЧА	ОСНОВНА ШКОЛА "КАРАЂОРЂЕ"
БАТОЧИНА	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТИ САВА"
ЛАПОВО	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТОЗАР МАРКОВИЋ"
ТОПОЛА	ОСНОВНА ШКОЛА "ЖИВКО ТОМИЋ", ДОЊА ШАТОРЊА
ТОПОЛА	ОСНОВНА ШКОЛА "КАРАЂОРЂЕ"
ТОПОЛА	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛАН БЛАГОЈЕВИЋ", НАТАЛИНЦИ
ТОПОЛА	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛУТИН ЈЕЛЕНИЋ", ГОРЊА ТРНАВА
ТОПОЛА	ОСНОВНА ШКОЛА "СЕСТРЕ РАДОВИЋ", БЕЛОСАВЦИ
КНИЋ	ОСНОВНА ШКОЛА "ВУК КАРАЏИЋ"
КНИЋ	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТИ САВА", ТОПОНИЦА

КНИЋ	ОСНОВНА ШКОЛА "РАДА ШУБАКИЋ", ГРУЖА
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ВЕЉА ГЕРАСИМОВИЋ", ВЕНЧАНИ
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ВУК КАРАЏИЋ", СТОЈНИК
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ДУШАН РАДОЊИЋ", БАЊА
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЉУБОМИР-ЉУБА НЕНАДОВИЋ", РАНИЛОВИЋ
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛАН ИЛИЋ-ЧИЧА"
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛОШ ОБРЕНОВИЋ"
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ПРВИ СРПСКИ УСТАНАК", ОРАШАЦ
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТИ САВА"
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТОЛИК РАНКОВИЋ"
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "СЛАВКО ПОПОВИЋ", ДАРОСАВА
АРАНЂЕЛОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ИЛИЈА ГАРАШАНИН"

Основне школе у Јужнобачком и Сремском управном округу – Школска управа Нови Сад

ОПШТИНА	ОСНОВНА ШКОЛА
БАЧ	ОСНОВНА ШКОЛА "ВУК КАРАЏИЋ"
БАЧ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈАН КОЛАР" СЕЛЕНЧА"
БАЧ	ОСНОВНА ШКОЛА "МОША ПИЈАДЕ"
БАЧ	ОСНОВНА ШКОЛА "АЛЕКСА ШАНТИЋ"
БАЧ	ОСНОВНА ШКОЛА "ИВО ЛОЛА РИБАР" ПЛАВНА
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАЋА НОВАКОВ" СИЛБАШ
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "АЛЕКСА ШАНТИЋ" ГАЈДОБРА
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "ЗДРАВКО ЧЕЛАР" ЧЕЛАРЕВО
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛЕТА ПРОТИЋ" ТОВАРИШЕВО
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "15. ОКТОБАР" ПИВНИЦЕ
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТИ САВА" БАЧКА ПАЛАНКА
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "ЖАРКО ЗРЕЊАНИН" ОБРОВАЦ
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "ДЕСАНКА МАКСИМОВИЋ" БАЧКА ПАЛАНКА
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАНКО ЋОПИЋ" МЛАДЕНОВО
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА "ВУК КАРАЏИЋ"
БАЧКА ПАЛАНКА	ОСНОВНА ШКОЛА " ХЕРОЈ ПИНКИ"
БАЧКА ПАЛАНКА	ШОМО"СТЕВАН ХРИСТИЋ"
БАЧКИ ПЕТРОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈАН АМОС КОМЕНСКИ" КУЛПИН
БАЧКИ ПЕТРОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЖАРКО ЗРЕЊАНИН" МАГЛИЋ
БАЧКИ ПЕТРОВАЦ	ОШ ЈОЗЕФ МАРЧОК-ДРАГУТИН" ГЛОЖАН
БАЧКИ ПЕТРОВАЦ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈАН ЧАЈАК" БАЧКИ ПЕТРОВАЦ

БЕОЧИН	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ГРЧИЋ МИЛЕНКО"
БЕОЧИН	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ПОПОВИЋ" СУСЕК
БЕЧЕЈ	ШОСО "БРАТСТВО",
БЕЧЕЈ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЗДРАВКО ГЛОЖАНСКИ"
БЕЧЕЈ	ОСНОВНА ШКОЛА "ПЕТЕФИ ШАНДОР"
БЕЧЕЈ	ШКОЛА ЗА ОСНОВНО МУЗИЧКО ВАСПИТАЊЕ И ОБРАЗОВАЊЕ "ПЕТАР КОЊОВИЋ"
БЕЧЕЈ	ОСНОВНА ШКОЛА "СЕВЕР ЂУРКИЋ"
БЕЧЕЈ	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТОЗАР МАРКОВИЋ" БАЧКО ГРАДИШТЕ
БЕЧЕЈ	ОСНОВНА ШКОЛА "ШАМУ МИХАЉ"
БЕЧЕЈ	ОСНОВНА ШКОЛА "ШАМУ МИХАЉ" БАЧКО ПЕТРОВО СЕЛО
ВРБАС	ОСНОВНА МУЗИЧКА ШКОЛА
ВРБАС	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАТСТВО ЈЕДИНСТВО"
ВРБАС	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАТСТВО ЈЕДИНСТВО" КУЦУРА
ВРБАС	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАНКО РАДИЧЕВИЋ" САВИНО СЕЛО
ВРБАС	ОСНОВНА ШКОЛА "ВУК КАРАЏИЋ" БАЧКО ДОБРО ПОЉЕ
ВРБАС	ОСНОВНА ШКОЛА "20. ОКТОБАР"
ВРБАС	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ЈОВАНОВИЋ ЗМАЈ" ЗМАЈЕВО
ВРБАС	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАНКО РАДИЧЕВИЋ" РАВНО СЕЛО
ВРБАС	ОСНОВНА ШКОЛА "ПЕТАР ПЕТРОВИЋ ЊЕГОШ"
ВРБАС	ОСНОВНА ШКОЛА "ПЕТАР ПЕТРОВИЋ ЊЕГОШ"
ЖАБАЉ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЂУРА ЈАКШИЋ" ЧУРУГ
ЖАБАЉ	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛОШ ЦРЂАНСКИ"
ЖАБАЉ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЖАРКО ЗРЕЊАНИН" ГОСПОЋИНЦИ
ЖАБАЉ	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ЈОВАНОВИЋ ЗМАЈ" ЂУРЂЕВО
НОВИ САД	ШКОЛА ЗА ОСНОВНОМ И СРЕДЊЕ ОБРАЗОВАЊЕ "МИЛАН ПЕТРОВИЋ" СА ДОМОМ УЧЕНИКА
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ВЕЉКО ПАТРОВИЋ" БЕГЕЧ
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ВАСА СТАЈИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ДУЧИЋ" ПЕТРОВАРАДИН
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ВЕЉКО ВЛАХОВИЋ" ШАНГАЈ
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "22. АВГУСТ" БУКОВАЦ
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЂУРА ЈАКШИЋ" КАЋ
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОЖЕФ АТИЛА"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЖАРКО ЗРЕЊАНИН"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ИВАН ГУНДУЛИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ПОПОВИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "КОСТА ТРИФКОВИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЛАЗА КОСТИЋ" КОВИЉ

НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЛУДОВИТ ШТУР" КИСАЧ
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "МИРОСЛАВ АНТИЋ" ФУТОГ
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "НИКОЛА ТЕСЛА"
НОВИ САД	ШООО " СВЕТИ САВА"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТОЗАР МАРКОВИЋ ТОЗА"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ДУШАН РАДОВИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТИ САВА" РУМЕНКА
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ИВО АНДРИЋ" БУДИСАВА
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАНКО РАДИЧЕВИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "МИХАЈЛО ПУПИН" ВЕТЕРНИК
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ПРВА ВОЈВОЂАНСКА БРИГАДА"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "МАРИЈА ТРАНДАФИЛ" ВЕТЕРНИК
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА ПРИ ГИМНАЗИЈИ "ЈОВАН ЈОВАНОВИЋ ЗМАЈ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ИВО ЛОЛА РИБАР"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ЈОВАНОВИЋ ЗМАЈ" СРЕМСКА КАМЕНИЦА
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "АЛЕКСА ШАНТИЋ" СТЕПАНОВИЋЕВО
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ДЕСАНКА МАКСИМОВИЋ" ФУТОГ
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ВУК КАРАЏИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ПЕТЕФИ ШАНДОР"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "СОЊА МАРИНКОВИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЂОРЂЕ НАТОШЕВИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА " ЂУРА ДАНИЧИЋ"
НОВИ САД	ОСНОВНА ШКОЛА "ДОСИТЕЈ ОБРАДОВИЋ"
НОВИ САД	БАЛЕТСКА ШКОЛА У НОВОМ САДУ
НОВИ САД	МУЗИЧКА ШКОЛА " ИСИДОР БАЈИЋ"
НОВИ САД	ШПОМО "ЈОСИП СЛАВЕНСКИ"
СРБОБРАН	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ЈОВАНОВИЋ ЗМАЈ"
СРБОБРАН	ОСНОВНА ШКОЛА "ВУК КАРАЏИЋ"
СРБОБРАН	ОСНОВНА ШКОЛА "ЖАРКО ЗРЕЊАНИН-УЧА" НАДАЉ
СРБОБРАН	ОСНОВНА ШКОЛА "ПЕТАР ДРАПШИН" ТУРИЈА
СРЕМСКИ КАРЛОВЦИ	ОСНОВНА ШКОЛА "23.ОКТОБАР"
ТЕМЕРИН	ОСНОВНА ШКОЛА "СЛАВКО РОДИЋ" БАЧКИ ЈАРАК
ТЕМЕРИН	ОСНОВНА ШКОЛА "ДАНИЛО ЗЕЛЕНОВИЋ" СИРИГ
ТЕМЕРИН	ОСНОВНА ШКОЛА "КОКАИ ИМРЕ"
ТЕМЕРИН	ОСНОВНА ШКОЛА "ПЕТАР КОЧИЋА"
ТИТЕЛ	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТОЗАР МИЛЕТИЋ"
ТИТЕЛ	ОСНОВНА ШКОЛА "ИСИДОРА СЕКУЛИЋ"

ИНЂИЈА	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАЋА ГРУЛОВИЋ" БЕШКА
ИНЂИЈА	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАНКО РАДИЧЕВИЋ" МАРАДИК
ИНЂИЈА	ОСНОВНА ШКОЛА "ДР ЂОРЂЕ НАТОШЕВИЋ" НОВИ СЛАНКАМЕН
ИНЂИЈА	ОШ "ДУШАН ЈЕРКОВИЋ"
ИНЂИЈА	ОШ "22.ЈУЛ" КРЧЕДИН
ИНЂИЈА	ОСНОВНА ШКОЛА "ПЕТАР КОЧИЋ "
ИНЂИЈА	ОСНОВНА ШКОЛА "СЛОБОДАН БАЈИЋ ПАЈА" НОВИ КАРЛОВЦИ
ИНЂИЈА	ОСНОВНА ШКОЛА „ЈОВАН ПОПОВИЋ"
ИНЂИЈА	ОСНОВНА ШКОЛА "РУЖА ЂУРЂЕВИЋ ЦРНА"
ИРИГ	ОСНОВНА ШКОЛА " МИЛИЦА СТОЈАДИНОВИЋ СРПКИЊА " ВРДНИК
ИРИГ	ОСНОВНА ШКОЛА "ДОСИТЕЈ ОБРАДОВИЋ"
ПЕЋИНСКИ	ОСНОВНА ШКОЛА „СЛОБОДАН БАЈИЋ ПАЈА"
ПЕЋИНСКИ	ОСНОВНА ШКОЛА "ДУШАН ВУКАСОВИЋ ДИОГЕН" КУПИНОВО
ПЕЋИНСКИ	ОСНОВНА ШКОЛА "ДУШАН ЈЕРКОВИЋ УЧА" ШИМАНОВЦИ
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "VI УДАРНА ВОЈВОЂАНСКА БРИГАДА" ГРАБОВЦИ
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАНКО РАДИЧЕВИЋ" НИКИНСКИ
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛОШ ЦРЊАНСКИ" ХРТКОВЦИ
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "23.ОКТОБАР" КЛЕНАК
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "ДУШАН ЈЕРКОВИЋ"
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "НЕБОЈША ЈЕРКОВИЋ"БУЂАНОВЦИ
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛИВОЈ ПЕТКОВИЋ-ФЕЊКО" ПЛАТИЧЕВО
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "ДОСИТЕЈ ОБРАДОВИЋ" ПУТИНСКИ
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "ВЕЉКО ДУГОШЕВИЋ"
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "ЗМАЈ ЈОВА ЈОВАНОВИЋ"
РУМА	ОСНОВНА ШКОЛА "ИВО ЛОЛА РИБАР"
РУМА	ОМШ "ТЕОДОР-ТОША АНДРЕЈЕВИЋ"
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ЈОВАНОВИЋ ЗМАЈ"
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ОСНОВНА ШКОЛА "СЛОБОДАН БАЈИЋ ПАЈА"
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ОСНОВНА ШКОЛА "БРАНКО РАДИЧЕВИЋ" КУЗМИН
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ОСНОВНА ШКОЛА "ТРИВА ВИТАСОВИЋ ЛЕБАРНИК" ЛАЂАРАК
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ЈОВАНОВИЋ ЗМАЈ" МАРТИНСКИ
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ОСНОВНА ШКОЛА "ДОБРОСАВ РАДОСАВЉЕВИЋ НАРОД" МАЧВАНСКА МИТРОВИЦА

СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ОСНОВНА ШКОЛА "БОШКО ПАЛКОВЉЕВИЋ ПИНКИ"
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ОСНОВНА ШКОЛА "СВЕТИ САВА"
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ПОПОВИЋ"
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	ШОСО "РАДИВОЈ ПОПОВИЋ" ,
СРЕМСКА МИТРОВИЦА	МУЗИЧКА ШКОЛА " ПЕТАР КРАНЧЕВИЋ"
СТАРА ПАЗОВА	ОСНОВНА ШКОЛА "ВЕРА МИШЧЕВИЋ" БЕЛЕГИШ
СТАРА ПАЗОВА	ОСНОВНА ШКОЛА "23.ОКТОБАР" ГОЛУБИНЦИ
СТАРА ПАЗОВА	ОСНОВНА ШКОЛА "СЛОБОДАН САВКОВИЋ" СТАРИ БАНОВЦИ
СТАРА ПАЗОВА	ОСНОВНА ШКОЛА " РАСТКО НЕМАЊИЋ-СВЕТИ САВА" НОВА ПАЗОВА
СТАРА ПАЗОВА	ШКОЛА ЗА ОСНОВНО И СРЕДЊЕ ОБРАЗОВАЊЕ "АНТОН СКАЛА"
СТАРА ПАЗОВА	ОСНОВНА ШКОЛА "СИМЕОН АРАНИЦКИ"
СТАРА ПАЗОВА	ОСНОВНА ШКОЛА " ХЕРОЈ ЈАНКО ЧМЕЛИК"
СТАРА ПАЗОВА	ОСНОВНА ШКОЛА "НИКОЛА ТЕСЛА" НОВИ БАНОВЦИ
СТАРА ПАЗОВА	ОСНОВНА ШКОЛА "МИЛАН ХАЦИЋ" ВОЈКА
СТАРА ПАЗОВА	ОСНОВНА ШКОЛА "БОШКО ПАЛКОВЉЕВИЋ ПИНКИ"
ШИД	ОСНОВНА ШКОЛА "ФИЛИП ВИШЊИЋ" МОРОВИЋ
ШИД	ОСНОВНА ШКОЛА "ЈОВАН ЈОВАНОВИЋ ЗМАЈ"
ШИД	ОСНОВНА ШКОЛА БРАНКО РАДИЧЕВИЋ
ШИД	ОСНОВНА ШКОЛА "ВУК КАРАЦИЋ" АДАШЕВЦИ
ШИД	ОСНОВНА ШКОЛА "САВА ШУМАНОВИЋ"ЕРДЕВИК,
ШИД	ОМШ "ФИЛИП ВИШЊИЋ"
ШИД	ОСНОВНА ШКОЛА "СРЕМСКИ ФРОНТ"

Прилог 11

ИЗВЕШТАЈ ИСТРАЖИВАЊА – необрађени материјал

Савремени налази сугеришу „да је математика далеко од чистог културног конструкта: она захтева пуну функционалност и интегритет специфичних структура мозга“ и одговор тражимо у тзв. „пластичности – флексибилности – неуронских кола при математичким операцијама“ (ОЕСД, 2010d, 21). Дете, развијајући се успоставља *представе* о свету који га окружује, тј. прави *менталну слику (визуелизацију)*, што је начин стварања слике одређених објеката или предмета у њиховом одсуству, али и њихових својстава и односа (Марјановић, 1996а, 29) – прелазак са конкретног у апстрактно или формално. Што је искуство веће, обухватније, то је ментална слика квалитетнија, оштрија (Марјановић, 1996а, 30).

Математички објекти са којима радимо могу бити веома различити – геометријски облици (тачке, праве, равни, дужи, фигуре, тела...), искази (дефиниције, аксиоме, теореме, леме, тврђења, ставови, хипотезе...), низови симбола (формуле, релације, једначине, неједначине, једнакости и неједнакости, функције...)... Развојем, постаје нам јасно да одређени објекти не могу да се стављају у однос са неким другим и тако успостављамо сложенији систем функционисања мишљења. Ако кажемо кружница или круг, треба да разумемо основну разлику, између њих, а онда и разлику између њихове материјализоване од идеалне представе у менталној слици света. Кружница је линија без димензије у смислу идеалног математичког облика без ширине. Материјализована кружница, нацртана шестаром, већ има линију одређене ширине, тако да то није идеални објекат, већ његов репрезент, којим оперишемо у математичком мишљењу, не осврћући се на ова својства материјалности.

Потребни су „наставници који могу да рефлектују на своје ученике репрезентације математичких идеја и помогну им да развију невероватно софистициране математичке репрезентације“ (Clements, 1999, 47), у окружењу пуне партиципације ученика и социјално пожељних образаца интеракција.

„Математички манипулативи нуде ученицима пут (начин) да разумеју апстрактне математичке концепте омогућујући им везу концепата са више неформалних (информалних) конкретних идеја“ (Uribe-Flórez & Wilkins, 2010, 363).

„Модели или манипулативна средства (помагала) помажу деци да схвате и развију менталне слике математичких принципа и процеса“ (Dunlap & Brennan, 1979, 89).

Основна идеја употребе манипулатива јесте да ученицима помогне да визуелизацијом створи дуалне репрезентације конкретних и апстрактних објеката и да их повеже са математичком симболизацијом. То није лако остварити и често се у пракси дешава да ученици раде са манипулативима, а не повезују те садржаје са математичким објектима, односно не праве везу са математичким објектима у смислу оперисања њима и превођења конкретних ситуација математичких репрезентација у ситуације оперисања математичким симболима. Дешава се, ученицима сами манипулативи нису транспарентни, тако да онда и не могу да направе везу са математичком симболизацијом (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997). Наравно, манипулативи помажу ученицима да апстрактне концепте запишу симболички, али уколико им је јасан однос између самих манипулатива у околностима у којима конкретно раде и ако су сами манипулативи структурисани, онда је могуће превести их у језик математике, математичког изражавања. Када су узрасти млађи тешкоћа повезивања манипулатива и математичких концепата и симбола је већа, док код старијег узраста тешкоће повезивања су између геометријских конструкција и њихових доказа (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997).

Многи психолози тврде да дете треба да има што више искуства са физичким објектима и да ће то искуство бити добра основа за формирање формалног, апстрактног мишљења, за развој способности оперисања апстрактним концептима, примарно математичким репрезентацијама. То би онда значило да деца која су имала рано и значајно искуство са манипулативима, касније немају проблема са формирањем апстрактног мишљења и развоју мишљења уопште, што у пракси није тако (McNeil & Jarvin, 2007). Теоријска истраживања праксе кажу да подршка учењу физичком акцијом доноси добробит за памћење и разумевање садржаја учења, и наводи се да укрштене активности физичког манипулисања и рада на садржајима текста, повезано са вербализацијом и визуелизацијом одређених апстрактних концепата доноси резултате унапређеног учења (McNeil & Jarvin, 2007). Стога и произлази потреба за употребом манипулатива у настави математике, али и једна задршка која је одлично артикулисана на следећи начин: „ако резултати појединих истраживања сугеришу да манипулатив X помаже детету Y у контексту Z , то не значи да сви манипулативи помажу свој деци у свим контекстима“ (McNeil & Jarvin, 2007, 312). *Манипулативи су*

заправо алати (помагала) осмишљени да стимулишу и подрже стваралачко математичко мишљење које се изводи из угњеждених когнитивних процеса интелектуално сложених активности.

Физички и виртуелни манипулативи унапређују учење, виртуелним манипулативима се лакше, јасније и брже ради и омогућавају више времена за интеракцију између самих ученика, анализу и проверу стратегија учења и решавања проблема. Истовремено, замена физичких манипулатива виртуелним јесте неефективна (Yuan, Lee and Wang, 2010) посматрајући целокупни процес учења, учење као целовит животни процес, јер ако ништа друго, неопходно је да се виртуелни користе као надградња физичких манипулатива у једном тренутку процеса развоја субјекта.

Налази истраживања упућују да су манипулативи најефектнији када се конзистентно користе дуже времена (Sowell, 1989), а да је најбоље када се за математичке инструкције дуже времена користе исти (Uttal, Scudder and DeLoache, 1997).

Да ли је разлог неуспеха ученика у учењу математике неуспех наставника да повезују стечена знања на сопственим студијским програмима са сликом математике којом желе да поучавају, маниром којим представљају садржаје, јесте питање које се поставља истраживањем реалности наставне праксе (Warkentin, 1975). Ученици често на различитим активностима учења математике добијају неповезане, нефункционалне информације и овај модел неинтегрисаног учења прати их тако да усвојивши различите концепте математике развијају своје мисаоне процесе до нивоа формалног и апстрактног мишљења. Овај конфузан и неадекватан пут развоја математичког мишљења и усвајања математичких знања захтева да се унапреде компетенције наставника за припремање поучавања, које треба да буде релевантније, а настава интегрисана и веома интерактивна.

Циљ (хипотезе) истраживања

Употреба манипулатива у настави математике јесте недвосмислено значајна са аспекта развоја мишљења, посебно математичког мишљења код деце/ученика. Уз овај когнитивни добитак, код ученика се функционално развијају и сензо-моторичке способности и вештине, али и развој спацијалних способности је од посебног интереса, јер везан је за менталну визуелизацију која омогућава прелазак на формални и апстрактни ниво мишљења.

Циљ истраживања јесте да установи са аспекта употребе манипулатива тренутно стање у настави математике у Србији у прва два циклуса образовања. Нека од питања на које је истраживање требало да одговори су:

- да ли постоји уједначеност у употреби манипулатива у настави математике у основним школама на територији Србије;
- да ли постоји уједначеност у употреби манипулатива између два циклуса обавезног образовања;
- да ли примарно образовање и стручно усавршавање наставника, као један од инструмената корекције школске/наставне праксе, утиче на употребу манипулатива;
- да ли радни стаж наставника, који је евидентно једна од важних ставки за ефективност наставе и процеса учења, утиче на употребу манипулатива, односно да ли навике наставника о употреби манипулатива варирају с годинама радног стажа;
- да ли постоји разлика у употреби виртуелних манипулатива између наставника разредне наставе и наставника математике, што је значајно пре свега зато што виртуелни манипулативи представљају природну надоградњу у употреби физичких или реалних манипулатива, и на тај начин доприносе развоју математичког мишљења?

Како се Србија кроз образовну регулативу одлучила за увођење инклузије у школске процесе битно је посебно се осврнути на рад са децом којој је неопходна посебна образовно – васпитна подршка. Поред већ истакнутих тема истраживање је имало за циљ и да осветли употребу манипулатива у настави математике за ученике са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју, пре свега кроз испитивање ставова наставника о њиховом коришћењу у настави, као и њиховој употребљивости.

Варијабле (променљиве) истраживања

Варијабле у овом истраживању су:

- (23) Радно место наставника у школи – наставник разредне наставе и наставник предметне наставе (наставник математике) – категоријска варијабла
- (24) Пол наставника – категоријска варијабла
- (25) Величина места у коме се налази школа у којој наставник ради – категоријска варијабла

- (26) Школска управа којој припада школа у којој наставник ради – категоријска варијабла
- (27) Године стажа наставника – континуална (непрекидна) варијабла
- (28) Ниво образовања на коме се наставник први пут сусрео са појмом манипулатива – категоријска варијабла
- (29) Мера информисаности при првом сусрету са појмом манипулатива – категоријска варијабла
- (30) Мера информисаности о појму манипулатива – кумулативно током година стажа – категоријска варијабла
- (31) Употреба манипулатива – мера у којој наставник употребљава манипулативе током свог процеса рада – категоријска варијабла
- (32) Израда манипулатива – израда манипулатива од стране наставника или у сарадњи са одговарајућом службом за потребе наставе – категоријска варијабла
- (33) Врста манипулатива – врста манипулатива коју наставник користи – категоријска варијабла
- (34) Врста наставне јединице – врста наставне јединице у којима се обично користе манипулативи – категоријска варијабла
- (35) Врста наставне јединице за могућу употребу манипулатива – категоријска варијабла
- (36) Ниво ефективности – мера ефективности манипулатива приликом употребе – категоријска варијабла
- (37) Реакције ученика – повратна информација од ученика о употреби манипулатива – категоријска варијабла
- (38) Разлог употребе манипулатива – мотиви наставника за употребу манипулатива у настави – категоријска варијабла
- (39) Врста активности учења у којима се користе манипулативи – учење као обрада новог градива или утврђивање градива – категоријска варијабла
- (40) Део часа на коме се користе манипулативи – уводни, главни и завршни део часа – категоријска варијабла
- (41) Учешће или жеља ученика за израдом/набавком извесног манипулатива – категоријска варијабла

- (42) Коришћење манипулатива за ученике са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју – делотворност употребе манипулатива за ученике са сметњама и тешкоћама у учењу – категоријска варијабла
- (43) Унапређивање процеса учења употребом манипулатива – категоријска варијабла
- (44) Делотворност употребе манипулатива за све ученике – категоријска варијабла

Узорак истраживања

У циљу сагледавања стања у настави математике у Србији с аспекта употребе манипулатива изабрано је да се анкетају наставници из две школске управе – Крагујевац и Нови Сад. Величина узорка је 697 наставника разредне и предметне наставе из оба циклуса основног образовања школа са територија две школске управе – Школска управа Крагујевац (231 испитаник) и Школска управа Нови Сад (466 испитаника). Одступање у броју наставника две школске управе јесте због тога што једну школску управу чини територија једног управног округа, а другу два управна округа.

Узорком је обухваћено 416 наставника разредне наставе и 281 наставник предметне наставе (наставник математике) при чему они раде у 127 школа распоређених у 90 места. Међу наставницима су 554 жене и 95 мушкараца (поједини испитаници се нису изјаснили).

Инструмент и технике истраживања

Техника мерења јесте анкета путем упитника са питањима отвореног типа. Овакав упитник дат је да би могао да се оствари квалитативни увид у добијене резултате, а једнаковремено уочена је извесна структурисаност у одговорима тако да су они груписани у одговарајуће категорије, а потом обрађени и квантитативним методама.

Инструмент мерења јесте упитник за наставнике разредне и предметне наставе, који је посебно осмишљен за ово истраживање.

Поступак истраживања

Истраживање је обављено у школама Шумадијског управног округа (Школска управа Крагујевац) и Јужнобачког и Сремског управног округа (Школска управа Нови Сад), у мају 2015. године. Подаци су прикупљени у току две недеље. Упитници подељени почетком једне, а прикупљени до краја друге недеље. Наставници су добровољно попуњавали упитник, а одговори су достављени у писаној и/или електронској форми на адресу отворену за потребе овог истраживања upotreba.manipulativa@gmail.com.

Резултати истраживања

За тестирање хипотеза које се односе на повезаност категоријских променљивих коришћен је χ^2 -тест за табеле контигенције (χ^2 -тест независности), при чему је по потреби била посматрана корекција непрекидности према Јејтсу (Continuity Correction), односно Фишеров тест тачних вероватноћа (Fisher's Exact Test). За поређење расподела непрекидних променљивих у различитим групама коришћен је Ман-Витнијев U тест (Mann-Whitney U test), јер није потврђена хипотеза да променљиве имају нормалну расподелу у посматраним групама. Коришћењем поменутих тестова, добијени су следећи резултати.

- (1) Спроведени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности према Јејтсу) показао је да не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и припадности наставника различитим школским управама (Крагујевац и Нови Сад), $\text{Chi}^2(1, 687)=3,669$, $p=0,055>0,05$. Дакле, може се рећи да је употреба манипулатива на сличном нивоу у различитим школским управама.

Skolska_uprava * Upotreba_manipulativa_da_ne Crosstabulation

		Upotreba_manipulativa_da_ne		Total	
		ne	da		
Skolska_uprava	Count	26	430	456	
	Novi Sad	5.7%	94.3%	100.0%	
	% within Skolska_uprava	83.9%	65.5%	66.4%	
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	3.8%	62.6%	66.4%	
	% of Total				
	Kragujevac	Count	5	226	231

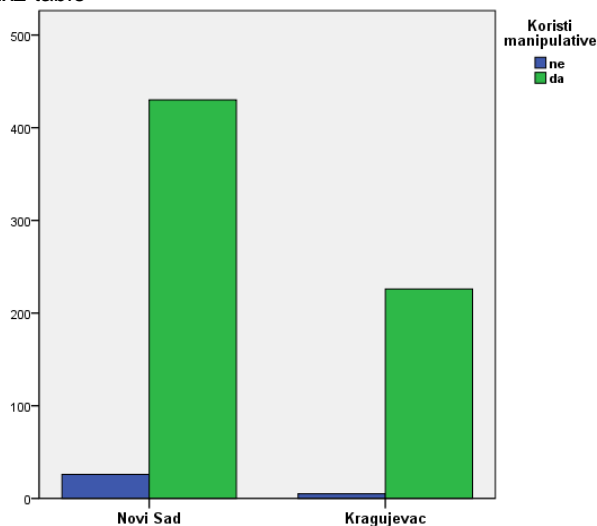
Total	% within Skolska_uprava	2.2%	97.8%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	16.1%	34.5%	33.6%
	% of Total	0.7%	32.9%	33.6%
	Count	31	656	687
	% within Skolska_uprava	4.5%	95.5%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	100.0%	100.0%	100.0%
	% of Total	4.5%	95.5%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	4.452 ^a	1	.035		
Continuity Correction^b	3.669	1	.055		
Likelihood Ratio	5.019	1	.025		
Fisher's Exact Test				.034	.023
Linear-by-Linear Association	4.446	1	.035		
N of Valid Cases	687				

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 10.42.

b. Computed only for a 2x2 table



- (2) Сprovedени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности по Јејтсу) показао је да не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и припадности наставничкој групи (наставник разредне наставе или наставник математике), тј. не постоје статистички значајне разлике у пропорцијама оних који користе и оних који не користе манипулативе у посматране две групе (група наставника разредне наставе и група наставника математике), $\text{Chi}^2(1, 687)=0,588, p=0,443>0,05$.

Nastavnik * Upotreba_manipulativa_da_ne Crosstabulation

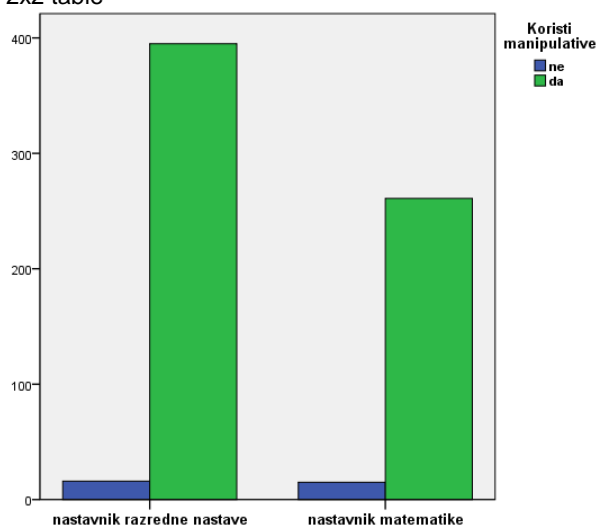
			Upotreba_manipulativa_da_ne		Total
			ne	da	
Nastavnik	Count		16	395	411
	nastavnik razredne nastave	% within Nastavnik	3.9%	96.1%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	51.6%	60.2%	59.8%
		% of Total	2.3%	57.5%	59.8%
	Count		15	261	276
	nastavnik matematike	% within Nastavnik	5.4%	94.6%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	48.4%	39.8%	40.2%
		% of Total	2.2%	38.0%	40.2%
	Total	Count		31	656
	% within Nastavnik		4.5%	95.5%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne		100.0%	100.0%	100.0%
	% of Total		4.5%	95.5%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	.911 ^a	1	.340		
Continuity Correction^b	.588	1	.443		
Likelihood Ratio	.896	1	.344		
Fisher's Exact Test				.354	.220
Linear-by-Linear Association	.910	1	.340		
N of Valid Cases	687				

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 12.45.

b. Computed only for a 2x2 table



- (3) Сprovedени χ^2 -тест независности показао је да у школској управи Нови Сад не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и припадности наставничкој групи (наставник разредне наставе или наставник математике), $\text{Chi}^2(1, 456)=0,135, p=0,713>0,05$.

Nastavnik * Upotreba_manipulativa_da_ne Crosstabulation

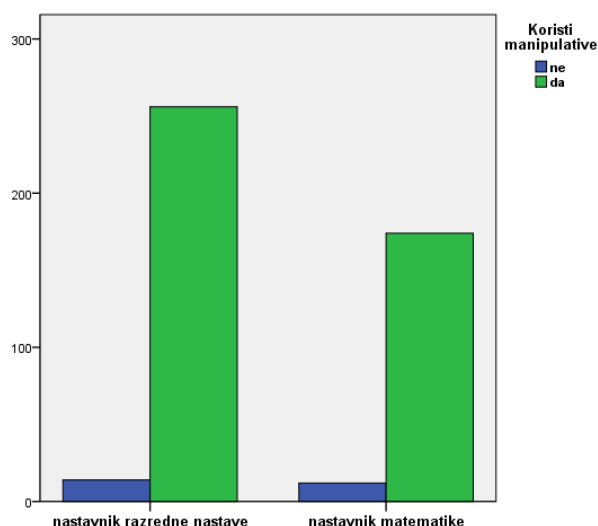
			Upotreba_manipulativa_da_ne		Total
			ne	da	
Nastavnik	razredne nastave	Count	14	256	270
		% within Nastavnik	5.2%	94.8%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	53.8%	59.5%	59.2%
	matematike	% of Total	3.1%	56.1%	59.2%
		Count	12	174	186
		% within Nastavnik	6.5%	93.5%	100.0%
Total	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	46.2%	40.5%	40.8%	
	% of Total	2.6%	38.2%	40.8%	
	Count	26	430	456	
	% within Nastavnik	5.7%	94.3%	100.0%	
			100.0%	100.0%	100.0%
			5.7%	94.3%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	.329 ^a	1	.567		
Continuity Correction^b	.135	1	.713		
Likelihood Ratio	.325	1	.569		
Fisher's Exact Test				.682	.353
Linear-by-Linear Association	.328	1	.567		
N of Valid Cases	456				

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 10.61.

b. Computed only for a 2x2 table



- (4) Сprovedени Фишеров тест показао је да у школској управи Крагујевац не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и припадности наставничкој групи (наставник разредне наставе или наставник математике), $p=0,380>0,05$.

Nastavnik * Upotreba_manipulativa_da_ne Crosstabulation

		Upotreba_manipulativa_da_ne		Total
		ne	da	
Nastavnik	Count	2	139	141
	nastavnik razredne nastave % within Nastavnik	1.4%	98.6%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	40.0%	61.5%	61.0%
	% of Total	0.9%	60.2%	61.0%
Total	Count	3	87	90
	nastavnik matematike % within Nastavnik	3.3%	96.7%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	60.0%	38.5%	39.0%
	% of Total	1.3%	37.7%	39.0%
Total	Count	5	226	231
	% within Nastavnik	2.2%	97.8%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	100.0%	100.0%	100.0%
		2.2%	97.8%	100.0%

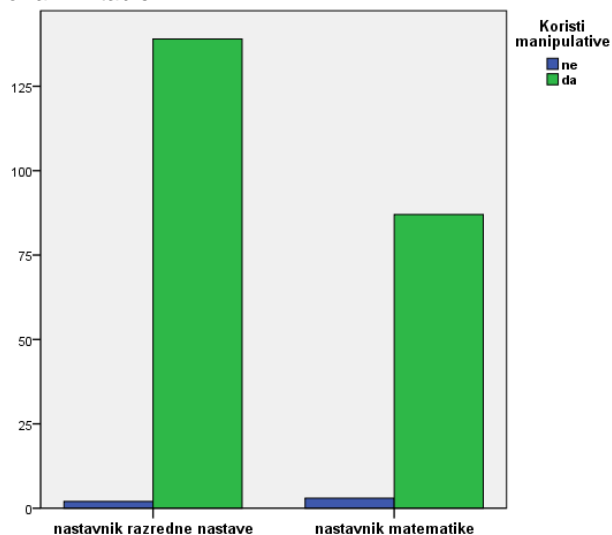
Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	.951 ^a	1	.329		
Continuity Correction ^b	.262	1	.609		

Likelihood Ratio	.921	1	.337		
Fisher's Exact Test				.380	.298
Linear-by-Linear Association	.947	1	.330		
N of Valid Cases	231				

a. 2 cells (50.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 1.95.

b. Computed only for a 2x2 table



- (5) Сprovedени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности према Јејтсу) показао је да постоји статистички значајна веза између употребе физичких манипулатива (штапићи, жетони, танграм, зрневље) и посматраних наставничких занимања, $\chi^2(1, 616)=119,726$, $p<0,05$, $\Phi=0,444$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра утицајем средње јачине). Наиме, наставници разредне наставе у 80,7% случајева користе ову врсту манипулатива, док само 37% наставника математике користи ову врсту манипулатива.

Nastavnik * Fizicki_manipulativi_da_ne Crosstabulation

			Fizicki_manipulativi_d		Total
			a_ne		
			da	ne	
Nastavnik	nastavnik	Count	292	70	362
	razredne	% within Nastavnik	80.7%	19.3%	100.0%
	nastave	% within Fizicki_manipulativi_da_ne	75.6%	30.4%	58.8%
		% of Total	47.4%	11.4%	58.8%
Nastavnik	nastavnik	Count	94	160	254
	matematike	% within Nastavnik	37.0%	63.0%	100.0%

Total	% within Fizicki_manipulativi_da_ne	24.4%	69.6%	41.2%
	% of Total	15.3%	26.0%	41.2%
	Count	386	230	616
	% within Nastavnik	62.7%	37.3%	100.0%
	% within Fizicki_manipulativi_da_ne	100.0%	100.0%	100.0%
	% of Total	62.7%	37.3%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	121.584 ^a	1	.000		
Continuity Correction^b	119.726	1	.000		
Likelihood Ratio	123.710	1	.000		
Fisher's Exact Test				.000	.000
Linear-by-Linear Association	121.387	1	.000		
N of Valid Cases	616				

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 94.84.

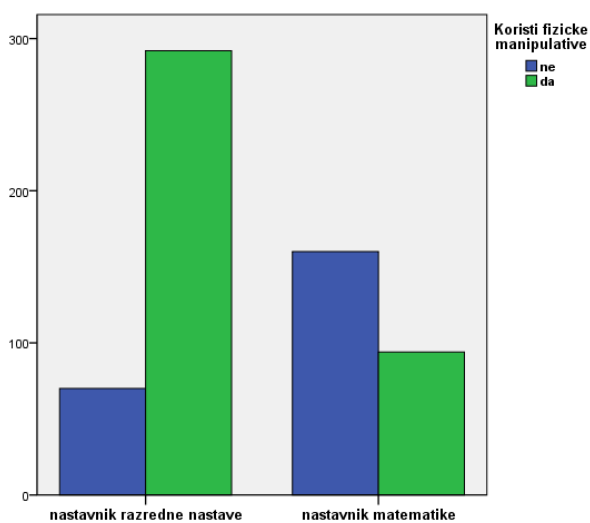
b. Computed only for a 2x2 table

Symmetric Measures

	Value	Approx. Sig.
Phi	.444	.000
Nominal by Nominal		
Cramer's V	.444	.000
Contingency Coefficient	.406	.000
N of Valid Cases	616	

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



- (6) Сprovedени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности према Јејтсу) показо је да постоји статистички значајна веза између употребе геометријских тела као манипулатива и посматраних наставничких занимања, $\text{Chi}^2(1, 616)=5,232$, $p=0,022<0,05$, $\text{Phi}=-0,095$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем). Наиме, наставници разредне наставе у 47,8% случајева користе ову врсту манипулатива, док 57,5% наставника математике користи ову врсту манипулатива.

Nastavnik * Geometrijska_tela_da_ne Crosstabulation

			Geometrijska_tela_d		Total
			a_ne		
			da	ne	
Nastavnik	razredne nastave	Count	173	189	362
		% within Nastavnik	47.8%	52.2%	100.0%
		% within Geometrijska_tela_da_ne	54.2%	63.6%	58.8%
	% of Total		28.1%	30.7%	58.8%
	nastavnik matematike	Count	146	108	254
		% within Nastavnik	57.5%	42.5%	100.0%
% within Geometrijska_tela_da_ne		45.8%	36.4%	41.2%	
% of Total		23.7%	17.5%	41.2%	
Total	Count		319	297	616
	% within Nastavnik		51.8%	48.2%	100.0%
	% within Geometrijska_tela_da_ne		100.0%	100.0%	100.0%
	% of Total		51.8%	48.2%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	5.614 ^a	1	.018		
Continuity Correction^b	5.232	1	.022		
Likelihood Ratio	5.628	1	.018		
Fisher's Exact Test				.022	.011
Linear-by-Linear Association	5.605	1	.018		
N of Valid Cases	616				

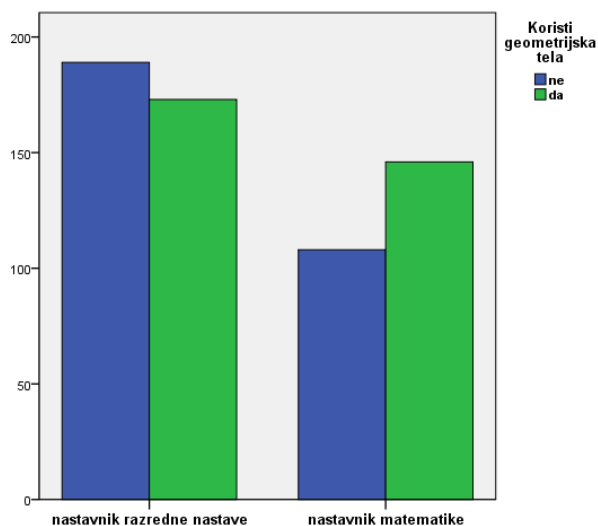
a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 122.46.

b. Computed only for a 2x2 table

		Value	Approx. Sig.
Phi		-.095	.018
Nominal by Nominal	Cramer's V	.095	.018
	Contingency Coefficient	.095	.018
N of Valid Cases		616	

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



(7) Сprovedени χ^2 -тест независности (уз корекцију непрекидности према Јејтсу) показао је да постоји статистички значајна веза између употреб евиртуелних манипулатива (рачунарски програмски пакети, софтвер, рачунарски алат) и посматраних наставничких занимања, $\chi^2(1, 616)=13,422$, $p<0,05$, $\text{Phi}=-0,151$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем). Наиме, наставници разредне наставе у 52,2% случајева користе ову врсту манипулатива, док 67,3% наставника математике наставу изводи уз помоћ поменутог манипулатива.

		Virtuelni_manipulativi_da_ne		Total	
		da	ne		
Nastavnik	nastavnik razredne nastave	Count	189	173	362
		% within Nastavnik	52.2%	47.8%	100.0%
		% within Virtuelni_manipulativi_da_ne	52.5%	67.6%	58.8%
		% of Total	30.7%	28.1%	58.8%
	nastavnik	Count	171	83	254

Total	matematike	% within Nastavnik	67.3%	32.7%	100.0%
		% within Virtuelni_manipulativi_da_ne	47.5%	32.4%	41.2%
		% of Total	27.8%	13.5%	41.2%
		Count	360	256	616
		% within Nastavnik	58.4%	41.6%	100.0%
		% within Virtuelni_manipulativi_da_ne	100.0%	100.0%	100.0%
		% of Total	58.4%	41.6%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	14.037 ^a	1	.000		
Continuity Correction^b	13.422	1	.000		
Likelihood Ratio	14.194	1	.000		
Fisher's Exact Test				.000	.000
Linear-by-Linear Association	14.014	1	.000		
N of Valid Cases	616				

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 105.56.

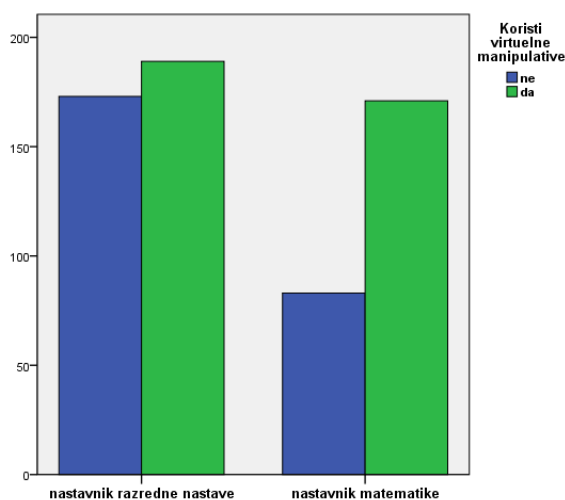
b. Computed only for a 2x2 table

Symmetric Measures

	Value	Approx. Sig.
Phi	-.151	.000
Nominal by Nominal		
Cramer's V	.151	.000
Contingency Coefficient	.149	.000
N of Valid Cases	616	

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



- (8) Сprovedени Фишеров тест показао је да не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и пола наставника, $p=0,785>0,05$.

Pol * Upotreba_manipulativa_da_ne Crosstabulation

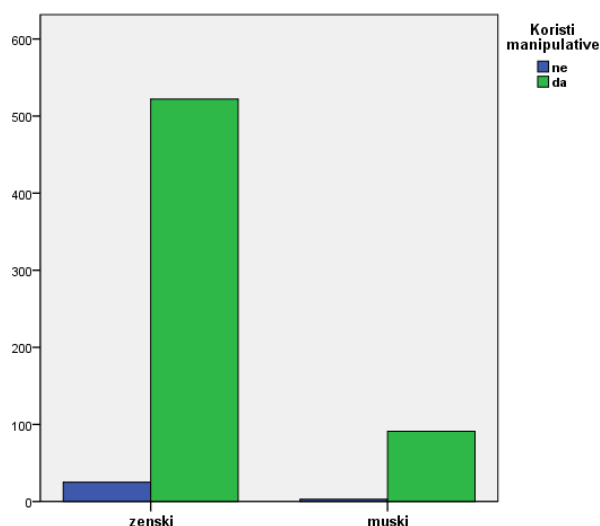
		Upotreba_manipulativa_da_ne		Total	
		ne	da		
Pol	zenski	Count	25	522	547
		% within Pol	4.6%	95.4%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	89.3%	85.2%	85.3%
		% of Total	3.9%	81.4%	85.3%
		Count	3	91	94
		% within Pol	3.2%	96.8%	100.0%
	muski	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	10.7%	14.8%	14.7%
		% of Total	0.5%	14.2%	14.7%
Total		Count	28	613	641
		% within Pol	4.4%	95.6%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	100.0%	100.0%	100.0%
		% of Total	4.4%	95.6%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	.365 ^a	1	.546		
Continuity Correction ^b	.110	1	.741		
Likelihood Ratio	.395	1	.530		
Fisher's Exact Test				.785	.392
Linear-by-Linear Association	.365	1	.546		
N of Valid Cases	641				

a. 1 cells (25.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4.11.

b. Computed only for a 2x2 table



- (9) Сprovedени χ^2 -тест независности показао је да не постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива у настави и тога да ли се настава одвија у граду или мањем насељеном месту (нема статус града према *Закону о територијалној организацији Републике Србије*, "Службени гласник РС", бр. 129/2007), $\chi^2(1, 686) \approx 0, p > 0,05$.

Velicina_mesta * Upotreba_manipulativa_da_ne Crosstabulation

		Upotreba_manipulativa_da_ne		Total
		ne	da	
Velicina_mesta	Count	24	500	524
	% within Velicina_mesta	4.6%	95.4%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	77.4%	76.3%	76.4%
	% of Total	3.5%	72.9%	76.4%
	Count	7	155	162
	% within Velicina_mesta	4.3%	95.7%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	22.6%	23.7%	23.6%
Total	% of Total	1.0%	22.6%	23.6%
	Count	31	655	686
	% within Velicina_mesta	4.5%	95.5%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	100.0%	100.0%	100.0%
	% of Total	4.5%	95.5%	100.0%

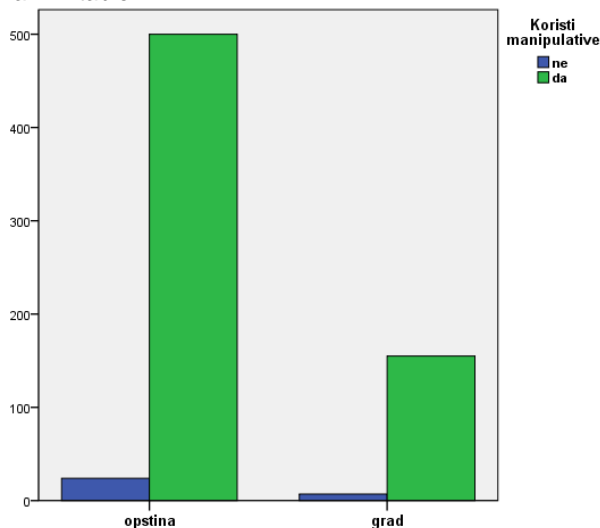
Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	.019 ^a	1	.890		

Continuity Correction^b	.000	1	1.000		
Likelihood Ratio	.019	1	.889		
Fisher's Exact Test				1.000	.545
Linear-by-Linear Association	.019	1	.890		
N of Valid Cases	686				

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 7.32.

b. Computed only for a 2x2 table



(10) Сprovedени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између употребе виртуелних манипулатива (рачунарски програмски пакети, софтвер, рачунарски алат) и тога да ли се настава одвија у граду или мањем насељеном месту, $\text{Chi}^2(1, 615)=3,902$, $p=0,048<0,05$, $\text{Phi}=-0,084$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра слабим утицајем). Виртуелни манипулативи су са 65,8% заступљени у настави математике која се одвија у градовима, а у настави математике која се одвија у мањим срединама са 56,1%.

Velicina_mesta * Virtuelni_manipulativi_da_ne Crosstabulation

		Virtuelni_manipulativi_da_ne		Total
		da	ne	
Velicina_mesta	Count	263	206	469
	opstina % within Velicina_mesta	56.1%	43.9%	100.0%
	% within Virtuelni_manipulativi_da_ne	73.3%	80.5%	76.3%
	% of Total	42.8%	33.5%	76.3%
	grad Count	96	50	146
	% within Velicina_mesta	65.8%	34.2%	100.0%

Total	% within Virtuelni_manipulativi_da_ne	26.7%	19.5%	23.7%
	% of Total	15.6%	8.1%	23.7%
	Count	359	256	615
	% within Velicina_mesta	58.4%	41.6%	100.0%
	% within Virtuelni_manipulativi_da_ne	100.0%	100.0%	100.0%
	% of Total	58.4%	41.6%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	4.291 ^a	1	.038		
Continuity Correction^b	3.902	1	.048		
Likelihood Ratio	4.356	1	.037		
Fisher's Exact Test				.043	.024
Linear-by-Linear Association	4.284	1	.038		
N of Valid Cases	615				

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 60.77.

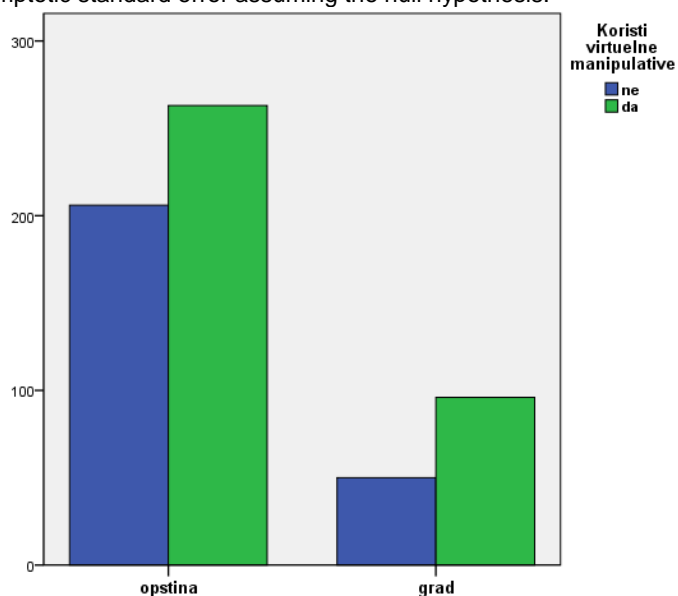
b. Computed only for a 2x2 table

Symmetric Measures

	Value	Approx. Sig.
Phi	-.084	.038
Nominal by Nominal		
Cramer's V	.084	.038
Contingency Coefficient	.083	.038
N of Valid Cases	615	

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



(11) Спроведен Ман-Витнијев U тест показао је да не постоји статистички значајна разлика у годинама радног стажа наставника који не користе манипулативе (Md=16, n=31) и оних који их користе (Md=19, n=648), U=8769, Z=-1,196, p=0,232>0,05.

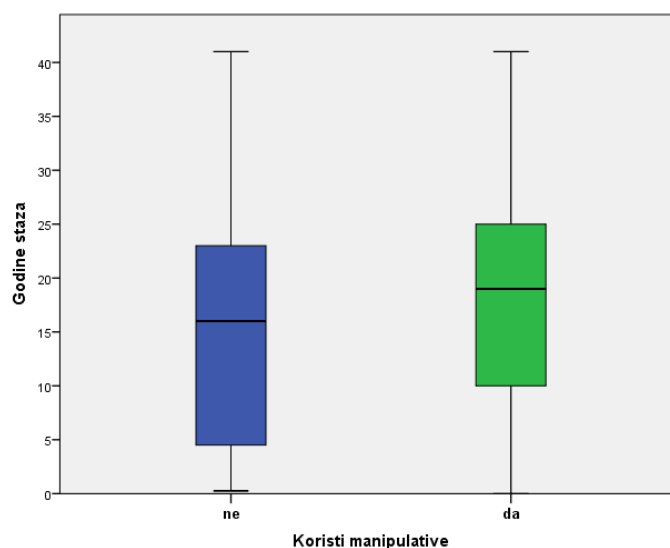
Ranks

Upotreba_		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Godine_staza	ne	31	298.87	9265.00
	da	648	341.97	221595.00
Total		679		

Test Statistics^a

	Godine_staza
Mann-Whitney U	8769.000
Wilcoxon W	9265.000
Z	-1.196
Asymp. Sig. (2-tailed)	.232

a. Grouping Variable: Upotreba_manipulativa_da_ne



(12) Спроведени Ман-Витнијев U тест показује да постоји статистички значајна разлика у годинама радног стажа наставника који не користе физичке манипулативе (Md=13, n=228) и оних који их користе (Md=20, n=380), U=31718, Z=-5,536, p<0,05, r=-0,225 (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).

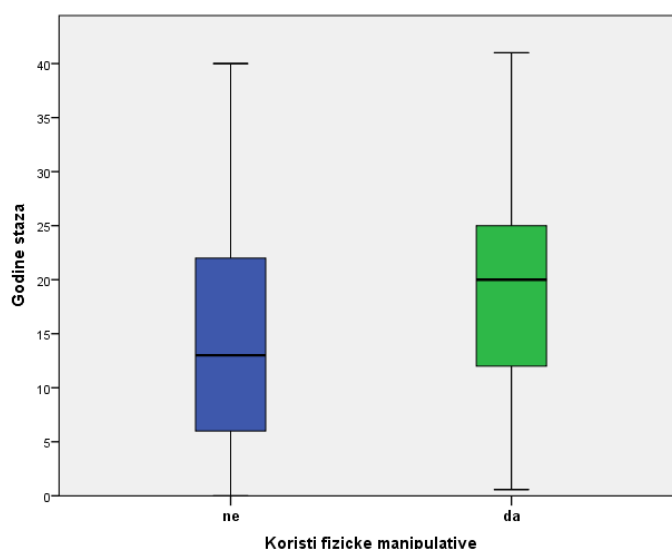
Ranks

Fizicki_manipulativ i_		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Godine_staza	da	380	335.03	127311.50
	ne	228	253.62	57824.50
Total		608		

Test Statistics^a

	Godine_staza
Mann-Whitney U	31718.500
Wilcoxon W	57824.500
Z	-5.536
Asy mp. Sig. (2-tailed)	.000

a. Grouping Variable: Fizicki_manipulativi_da_ne



(13) Сprovedени Ман-Витнијев U тест показао је да не постоји статистички значајна разлика у годинама радног стажа наставника који не користе геометријска тела (Md=19, n=293) и оних који их користе (Md=18, n=315), U=46038, Z=-0,051, p=0,960>0,05.

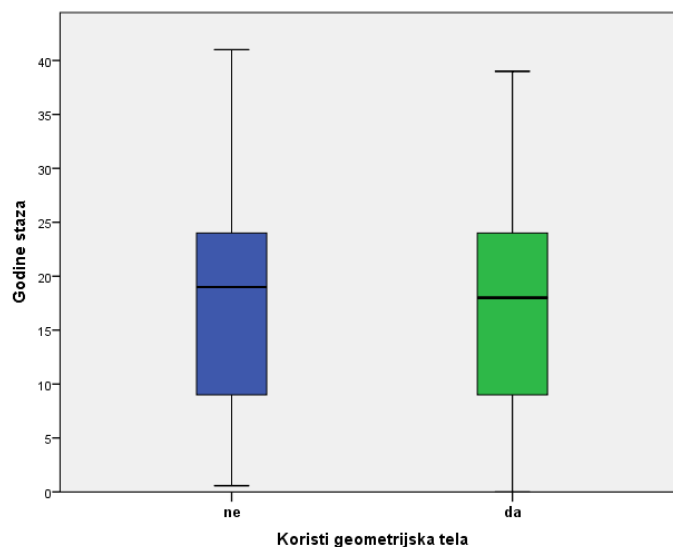
Ranks

	Geometrijska tela_da_ne	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Godine_staza	da	315	304.15	95808.00
	ne	293	304.87	89328.00
	Total	608		

Test Statistics^a

	Godine_staza
Mann-Whitney U	46038.000
Wilcoxon W	95808.000
Z	-.051
Asy mp. Sig. (2-tailed)	.960

a. Grouping Variable: Geometrijska_tela_da_ne



(14) Сprovedени Ман-Витнијев U тест показао је да постоји статистички значајна разлика у годинама радног стажа наставника који не користе виртуелне манипулативе (Md=20, n=250) и оних који их користе (Md=16, n=358), $U=35895,5, Z=-4,157, p<0,05, r=-0,169$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).

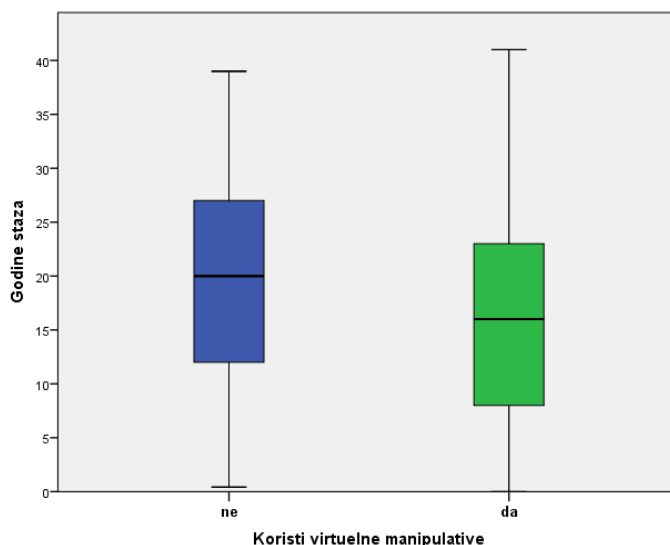
Ranks

Virtuelni_		N	Mean Rank	Sum of Ranks
Godine_staza	da	358	279.77	100156.50
	ne	250	339.92	84979.50
	Total	608		

Test Statistics^a

	Godine_staza
Mann-Whitney U	35895.500
Wilcoxon W	100156.500
Z	-4.157
Asymp. Sig. (2-tailed)	.000

a. Grouping Variable: Virtuelni_manipulativ i_da_ne



(15) Сprovedени Фишеров тест показује да постоји статистички значајна веза између употребе манипулатива и тога да ли су у току свог образовања наставници упознати са употребом манипулатива у настави, $\chi^2(1, 532)=46,884$, $p<0,05$, $\Phi=0,307$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра утицајем средње јачине). Чак 99% наставника који су са манипулативима упознати током свог образовања њих и користи у настави, док 83,8% наставника који се са овим појмом нису упознали током школовања користи манипулативе.

Da_li_su_se_susreli_u_obrazovanju_sa_pojmom_manipulativ * Upotreba_manipulativa_da_ne

Crosstabulation

		Upotreba_manipulativa_		Total
		da_ne		
		ne	da	
ne	Count	22	114	136
	% within			
	Da_li_su_se_susreli_u_obrazovanju_sa_pojmom_manipulativ	16.2%	83.8%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	84.6%	22.5%	25.6%
Da_li_su_se_susreli_u_obrazovanju_sa_pojmom_manipulativ	% of Total	4.1%	21.4%	25.6%
da	Count	4	392	396
	% within			
	Da_li_su_se_susreli_u_obrazovanju_sa_pojmom_manipulativ	1.0%	99.0%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	15.4%	77.5%	74.4%
	% of Total	0.8%	73.7%	74.4%

Total	Count	26	506	532
	% within			
	Da_li_su_se_susreli_u_obrazovanju_sa_pojmom_manipulativ	4.9%	95.1%	100.0%
	% within Upotreba_manipulativa_da_ne	100.0%	100.0%	100.0%
	% of Total	4.9%	95.1%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	50.094 ^a	1	.000		
Continuity Correction^b	46.884	1	.000		
Likelihood Ratio	42.569	1	.000		
Fisher's Exact Test				.000	.000
Linear-by-Linear Association	50.000	1	.000		
N of Valid Cases	532				

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6.65.

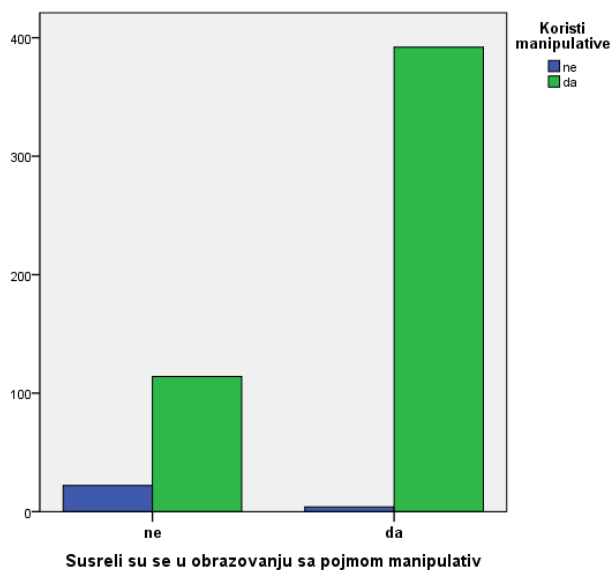
b. Computed only for a 2x2 table

Symmetric Measures

	Value	Approx. Sig.
Phi	.307	.000
Nominal by Nominal		
Cramer's V	.307	.000
Contingency Coefficient	.293	.000
N of Valid Cases	532	

a. Not assuming the null hypothesis.

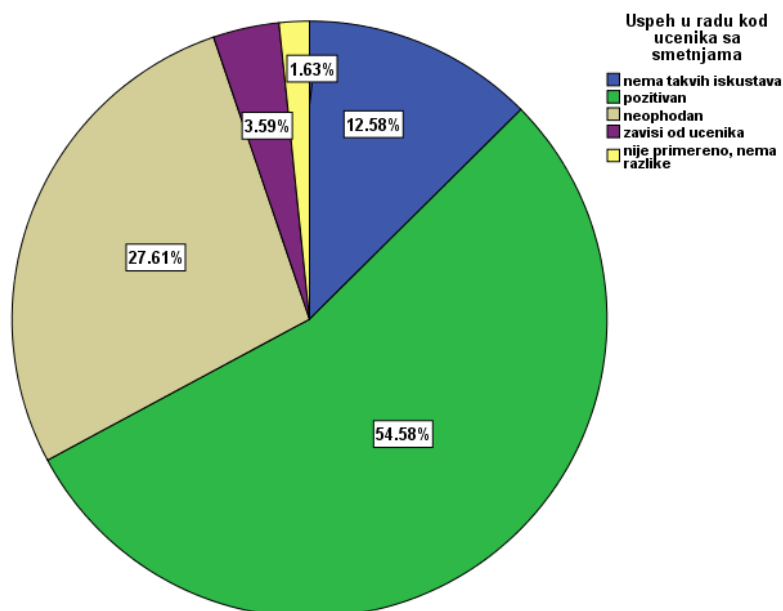
b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



(16) Дескриптивна статистика у вези са употребом манипулатива у процесу рада са децом са тешкоћама или сметњама у учењу и развоју.

Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama

	Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
nema takvih iskustava	77	11.0	12.6	12.6
pozitivan	334	47.9	54.6	67.2
neophodan	169	24.2	27.6	94.8
zavisi od ucenika	22	3.2	3.6	98.4
nije primereno, nema razlike	10	1.4	1.6	100.0
Total	612	87.8	100.0	
Missing System	85	12.2		
Total	697	100.0		



(17) Сprovedени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између става о употреби манипулатива у раду са ученицима са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју и тога да ли је наставник у разредној или предметној настави (математика), $\text{Chi}^2(4, 612)=11,316$, $p=0,023<0,05$, Cramer's $V=0,136$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра слабим утицајем).

Nastavnik * Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjamaCrosstabulation

		Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama					Total
		nema takvih iskustava	pozitivan	neophodan	zavisi od ucenika	nije primereno, nema razlike	
Nastavnik	Count	39	202	119	16	5	381
	% within Nastavnik	10.2%	53.0%	31.2%	4.2%	1.3%	100.0%
	% within razredne nastave	50.6%	60.5%	70.4%	72.7%	50.0%	62.3%
	Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama	50.6%	60.5%	70.4%	72.7%	50.0%	62.3%
	% of Total	6.4%	33.0%	19.4%	2.6%	0.8%	62.3%
	Count	38	132	50	6	5	231
nastavnik matematike	% within Nastavnik	16.5%	57.1%	21.6%	2.6%	2.2%	100.0%
	% within	49.4%	39.5%	29.6%	27.3%	50.0%	37.7%
	Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama	49.4%	39.5%	29.6%	27.3%	50.0%	37.7%
	% of Total	6.2%	21.6%	8.2%	1.0%	0.8%	37.7%
Total	Count	77	334	169	22	10	612
	% within Nastavnik	12.6%	54.6%	27.6%	3.6%	1.6%	100.0%
	% within	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% of Total	12.6%	54.6%	27.6%	3.6%	1.6%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	11.316^a	4	.023
Likelihood Ratio	11.379	4	.023
Linear-by-Linear Association	6.274	1	.012
N of Valid Cases	612		

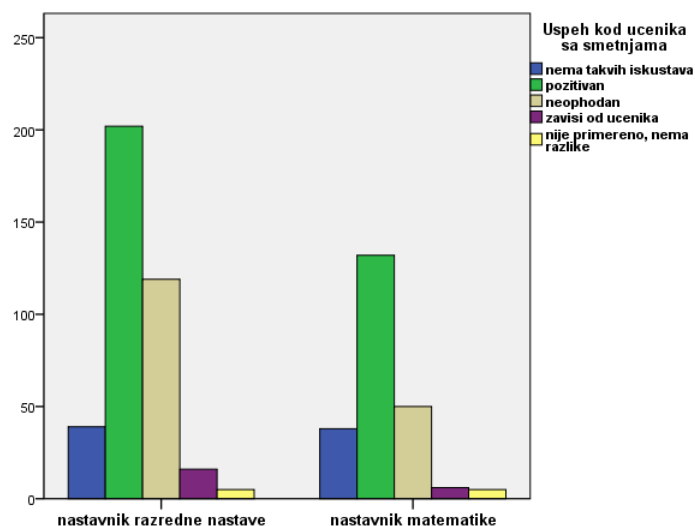
a. 1 cells (10.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 3.77.

Symmetric Measures

	Value	Approx. Sig.
Phi	.136	.023
Nominal by Nominal Cramer's V	.136	.023
Contingency Coefficient	.135	.023
N of Valid Cases	612	

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



(18) Сprovedени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између става о употреби манипулатива у раду са ученицима са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју и тога да ли је наставник запослен у школи у граду или у мањем насељу, $\chi^2(4, 611)=15,783$, $p=0,003<0,05$, Cramer's $V=0,161$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).

Velicina_mesta * Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama Crosstabulation

		Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama					Total
		nema takvih iskustava	pozitiva n	neophodan	zavisi od učenika	nije primereno, nema razlike	
Velicina_mesta	Count	52	258	134	11	10	465
	% within Velicina_mesta	11.2%	55.5%	28.8%	2.4%	2.2%	100.0%
	opstina						
	% within opstina						
	Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama	67.5%	77.5%	79.3%	50.0%	100.0%	76.1%
	% of Total	8.5%	42.2%	21.9%	1.8%	1.6%	76.1%
Velicina_mesta	Count	25	75	35	11	0	146
	% within Velicina_mesta	17.1%	51.4%	24.0%	7.5%	0.0%	100.0%
	grad						
	% within grad						
	Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama	32.5%	22.5%	20.7%	50.0%	0.0%	23.9%
	% of Total	4.1%	12.3%	5.7%	1.8%	0.0%	23.9%

Total	Count	77	333	169	22	10	611
	% within Velicina_mesta	12.6%	54.5%	27.7%	3.6%	1.6%	100.0%
	% within Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% of Total	12.6%	54.5%	27.7%	3.6%	1.6%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	15.783^a	4	.003
Likelihood Ratio	16.686	4	.002
Linear-by-Linear Association	.852	1	.356
N of Valid Cases	611		

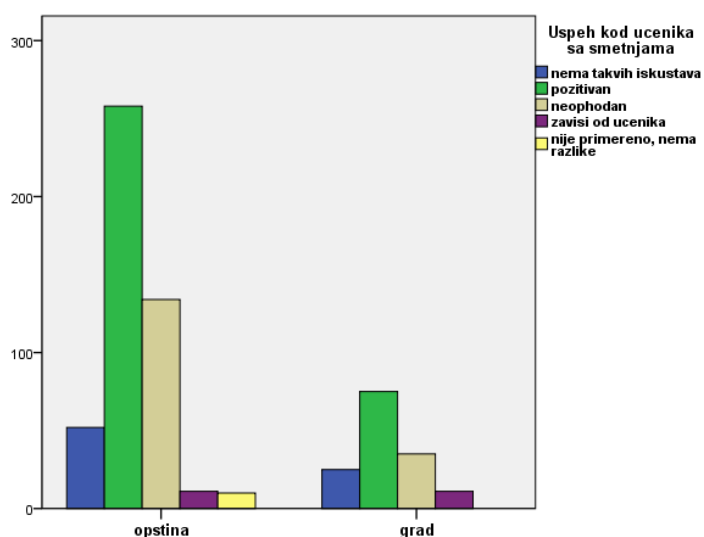
a. 1 cells (10.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2.39.

Symmetric Measures

	Value	Approx. Sig.
Phi	.161	.003
Nominal by Nominal Cramer's V	.161	.003
Contingency Coefficient	.159	.003
N of Valid Cases	611	

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



(19) Сprovedени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између става о употреби манипулатива у раду са ученицима са сметњама и тешкоћама у учењу и развоју и тога да ли је наставник запослен у Школској

управи Крагујевац или Школској управи Нови Сад, $\chi^2(4, 612)=11,631$, $p=0,020<0,05$, Cramer's $V=0,138$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра слабирм утицајем).

Skolska_uprava * Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama Crosstabulation

		Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama					Total		
		nema takvih iskustava	pozitivan	neophodan	zavisi od ucenika	nije primereno, nema razlike			
Skolska_uprava	Novi Sad	Count	52	223	109	9	10	403	
		% within Skolska_uprava	12.9%	55.3%	27.0%	2.2%	2.5%	100.0%	
		% within Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama	67.5%	66.8%	64.5%	40.9%	100.0%	65.8%	
		% of Total	8.5%	36.4%	17.8%	1.5%	1.6%	65.8%	
	Kragujevac		Count	25	111	60	13	0	209
			% within Skolska_uprava	12.0%	53.1%	28.7%	6.2%	0.0%	100.0%
		% within Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama	32.5%	33.2%	35.5%	59.1%	0.0%	34.2%	
		% of Total	4.1%	18.1%	9.8%	2.1%	0.0%	34.2%	
Total		Count	77	334	169	22	10	612	
		% within Skolska_uprava	12.6%	54.6%	27.6%	3.6%	1.6%	100.0%	
		% within Uspeh_kod_ucenika_sa_smetnjama	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	
		% of Total	12.6%	54.6%	27.6%	3.6%	1.6%	100.0%	

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	11.631^a	4	.020
Likelihood Ratio	14.403	4	.006
Linear-by-Linear Association	.218	1	.641
N of Valid Cases	612		

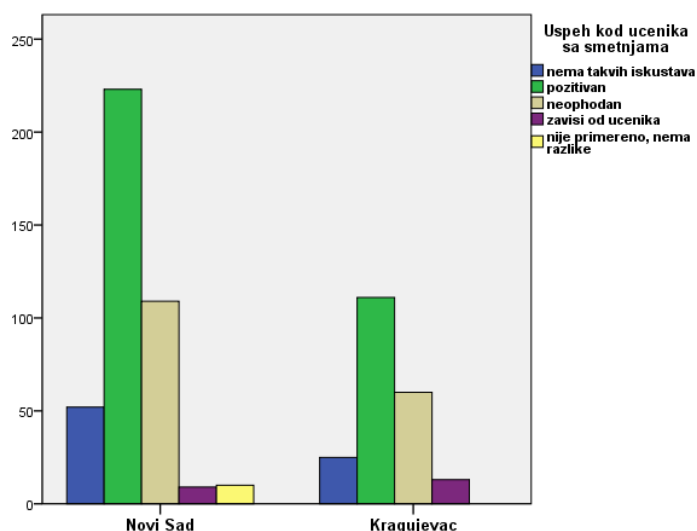
a. 1 cells (10.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 3.42.

Symmetric Measures

		Value	Approx. Sig.
Nominal by Nominal	Phi	.138	.020
	Cramer's V	.138	.020
	Contingency Coefficient	.137	.020
N of Valid Cases		612	

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



(20) Сprovedени χ^2 -тест независности показао је да постоји статистички значајна веза између става о стручном усавршавању наставника и употребе манипулатива, $\chi^2(3, 650)=40,030$, $p<0,05$, Cramer's $V=0,248$ (по Коеновом критеријуму (Cohen, 1988) ово се сматра slabим утицајем).

U_kojoj_meri_naknadno * Upotreba_manipulativa_da_ne Crosstabulation

		Upotreba_manipulativa_da_ne		Total	
		ne	da		
U_kojoj_meri_naknadno	ne	Count	15	91	106
		% within U_kojoj_meri_naknadno	14.2%	85.8%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	55.6%	14.6%	16.3%
	% of Total	2.3%	14.0%	16.3%	
malo, nedovoljno		Count	12	231	243
		% within U_kojoj_meri_naknadno	4.9%	95.1%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	44.4%	37.1%	37.4%
	% of Total	1.8%	35.5%	37.4%	

Total	osnovno, umereno	Count	0	248	248
		% within U_koj_j_meri_naknadno	0.0%	100.0%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	0.0%	39.8%	38.2%
		% of Total	0.0%	38.2%	38.2%
	veliko	Count	0	53	53
		% within U_koj_j_meri_naknadno	0.0%	100.0%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	0.0%	8.5%	8.2%
		% of Total	0.0%	8.2%	8.2%
	Total	Count	27	623	650
		% within U_koj_j_meri_naknadno	4.2%	95.8%	100.0%
		% within Upotreba_manipulativa_da_ne	100.0%	100.0%	100.0%
		% of Total	4.2%	95.8%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	40.030^a	3	.000
Likelihood Ratio	42.620	3	.000
Linear-by-Linear Association	34.059	1	.000
N of Valid Cases	650		

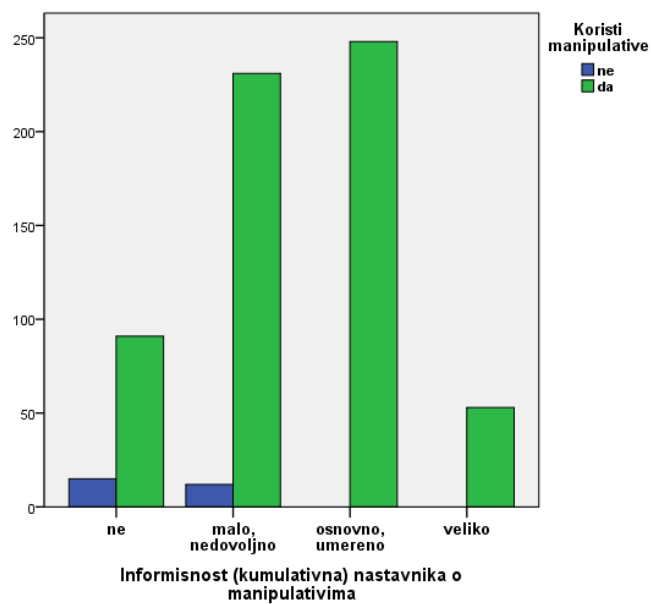
a. 2 cells (25.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2.20.

Symmetric Measures

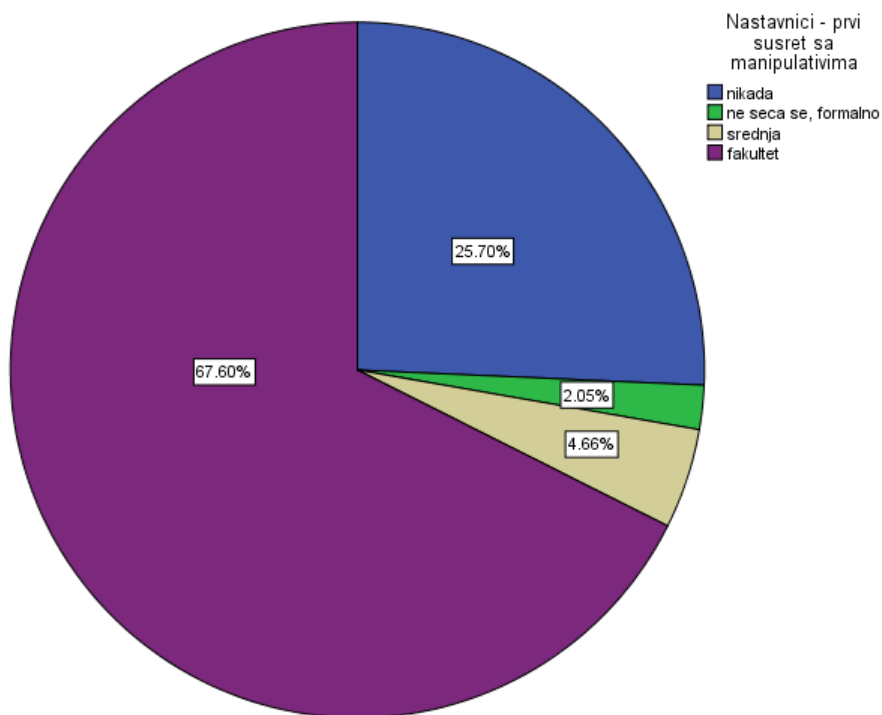
	Value	Approx. Sig.
Phi	.248	.000
Nominal by Nominal Cramer's V	.248	.000
Contingency Coefficient	.241	.000
N of Valid Cases	650	

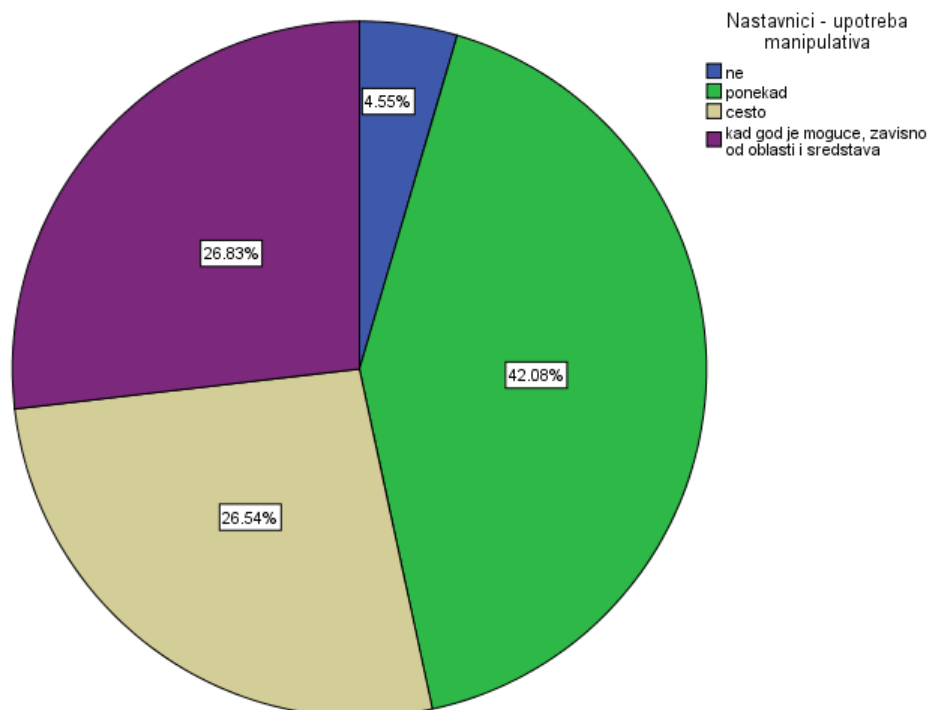
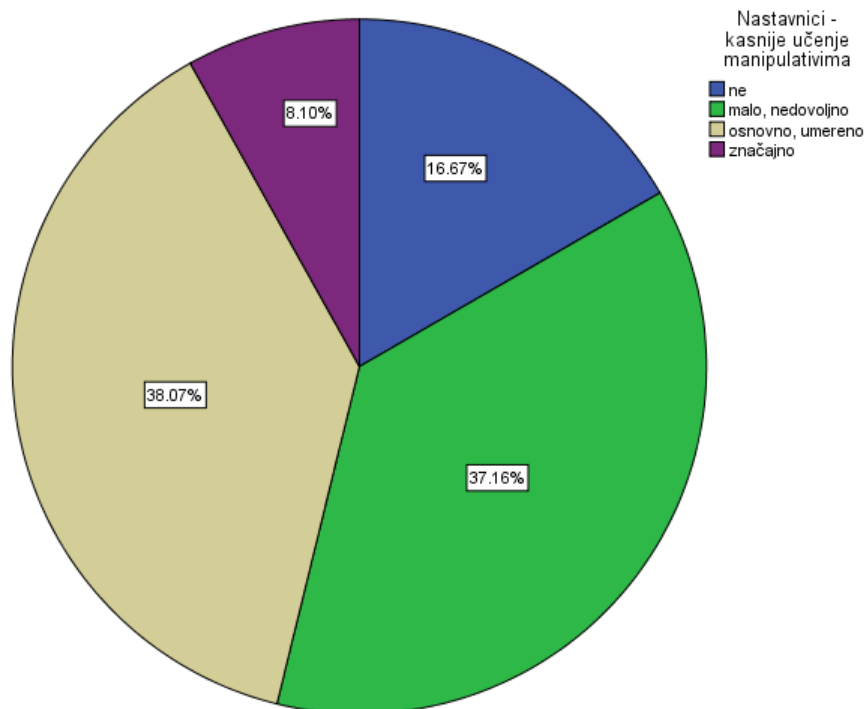
a. Not assuming the null hypothesis.

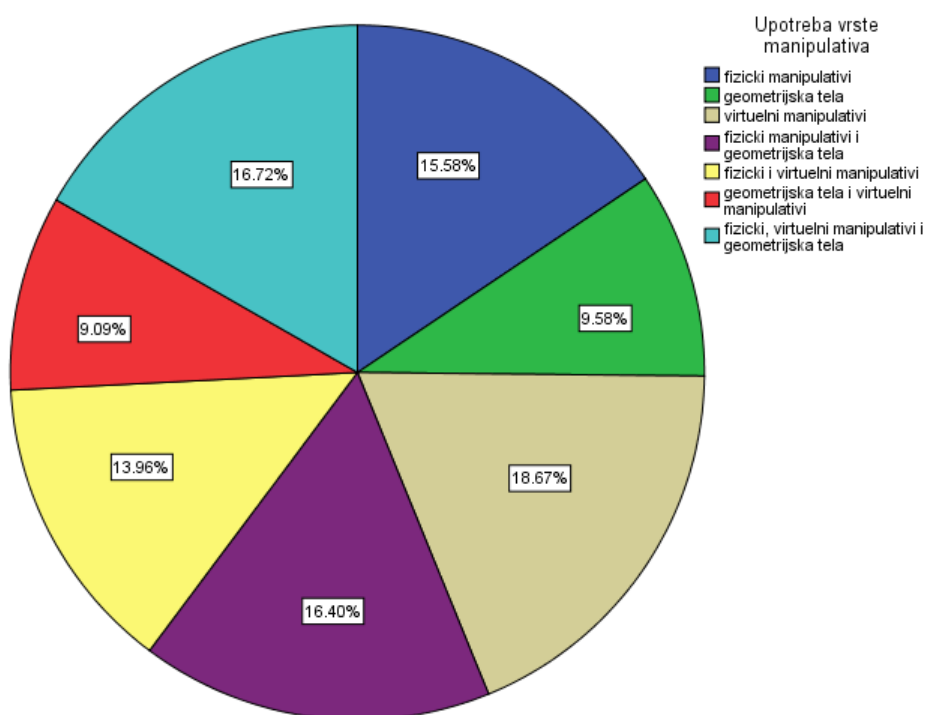
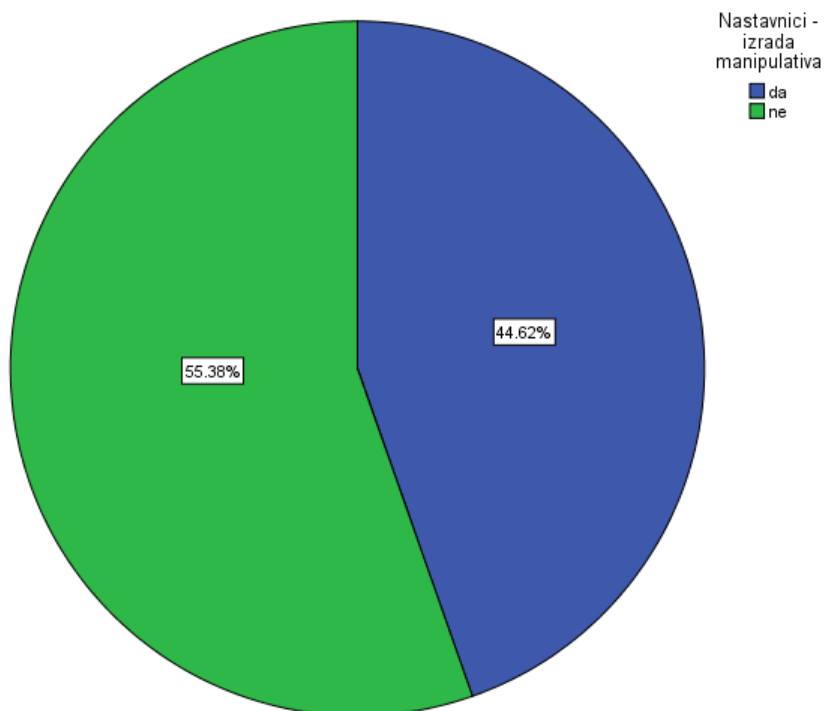
b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.

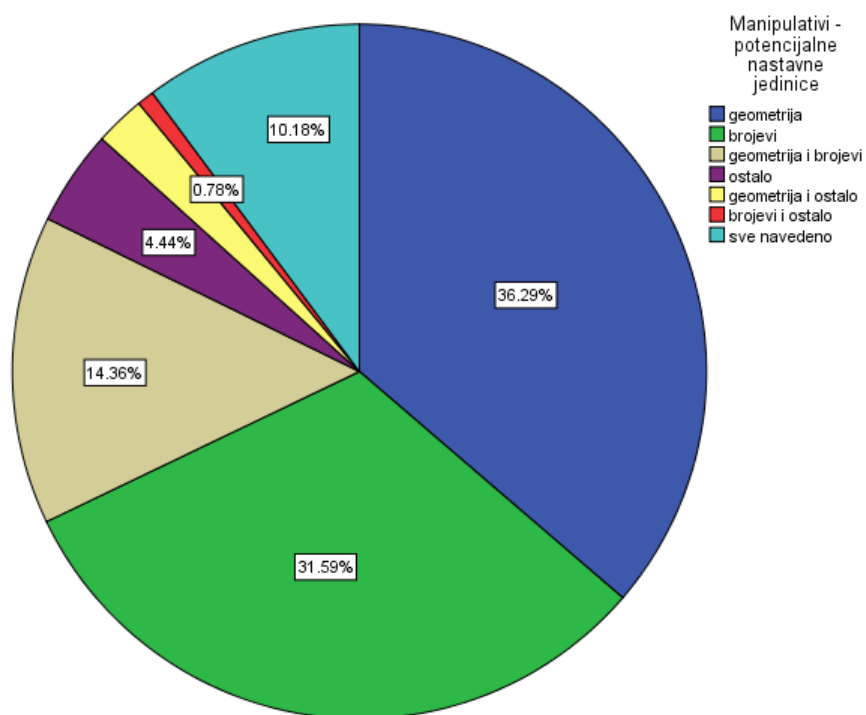
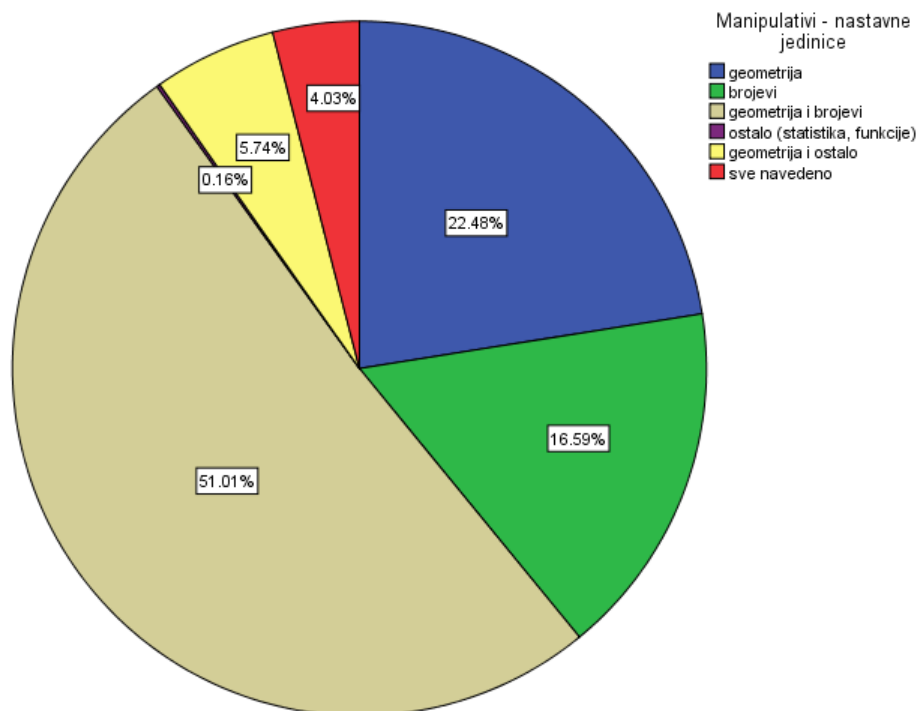


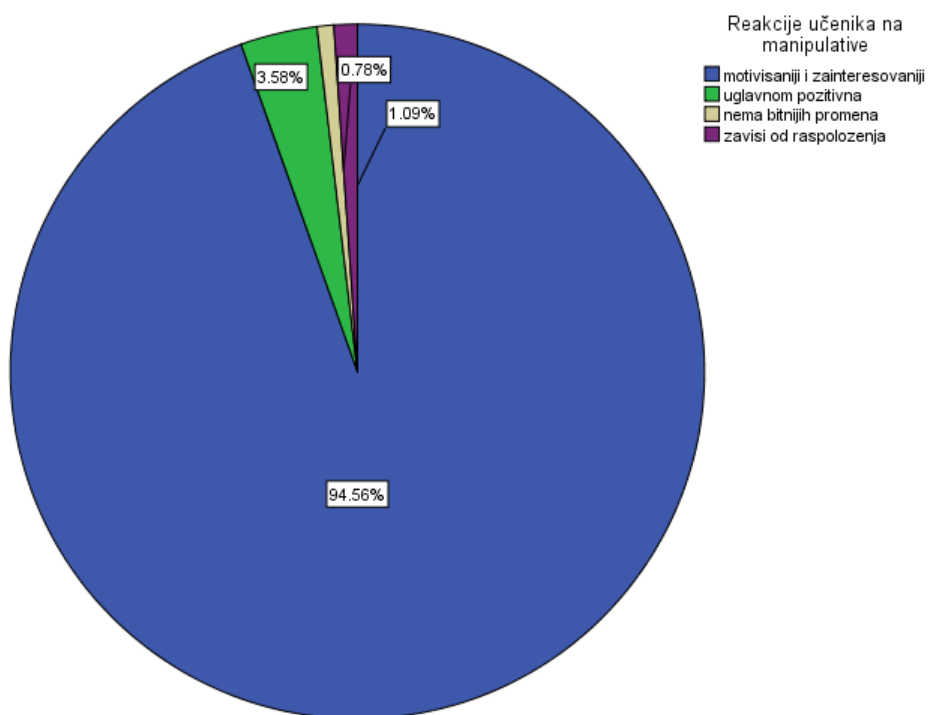
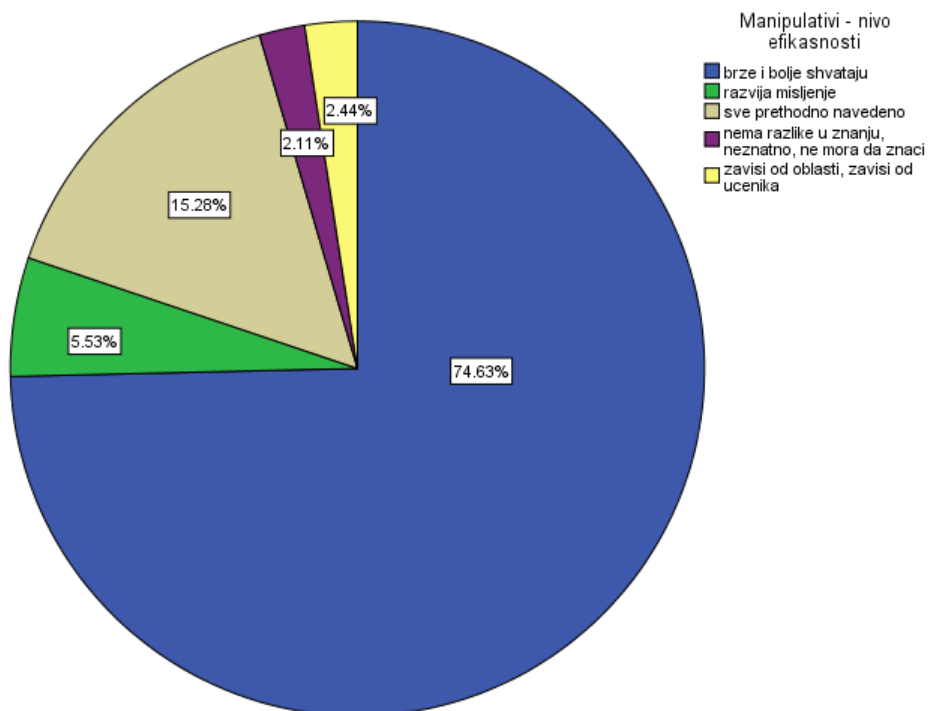
(21) Графички приказ осталих резултата истраживања.

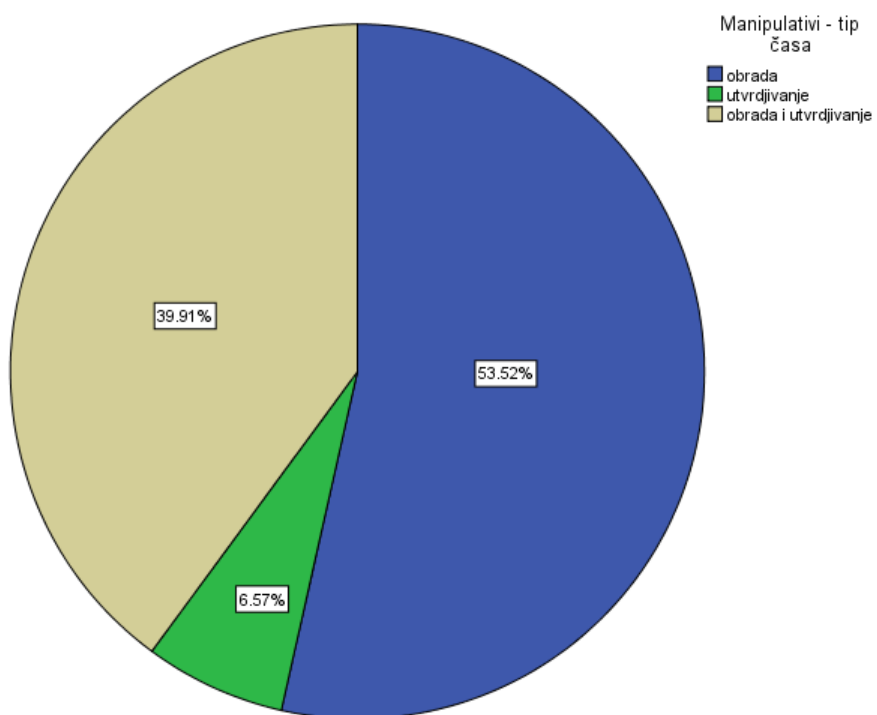
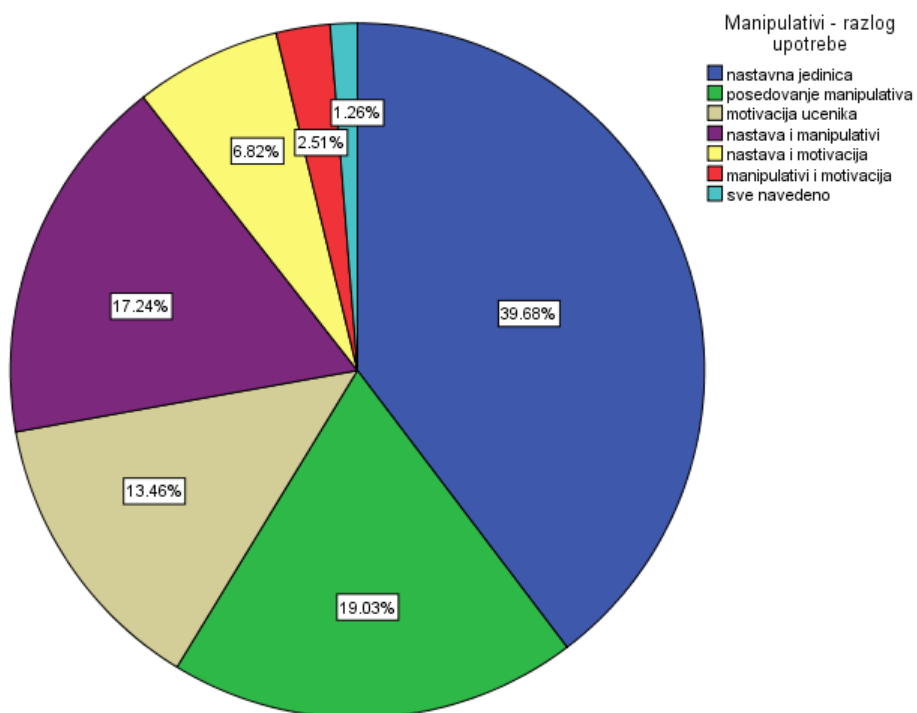


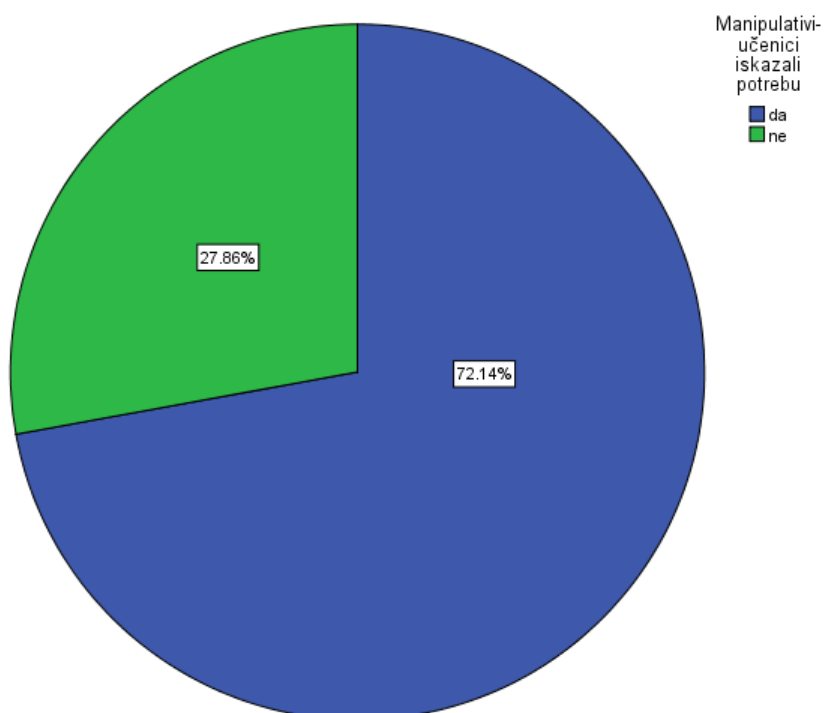
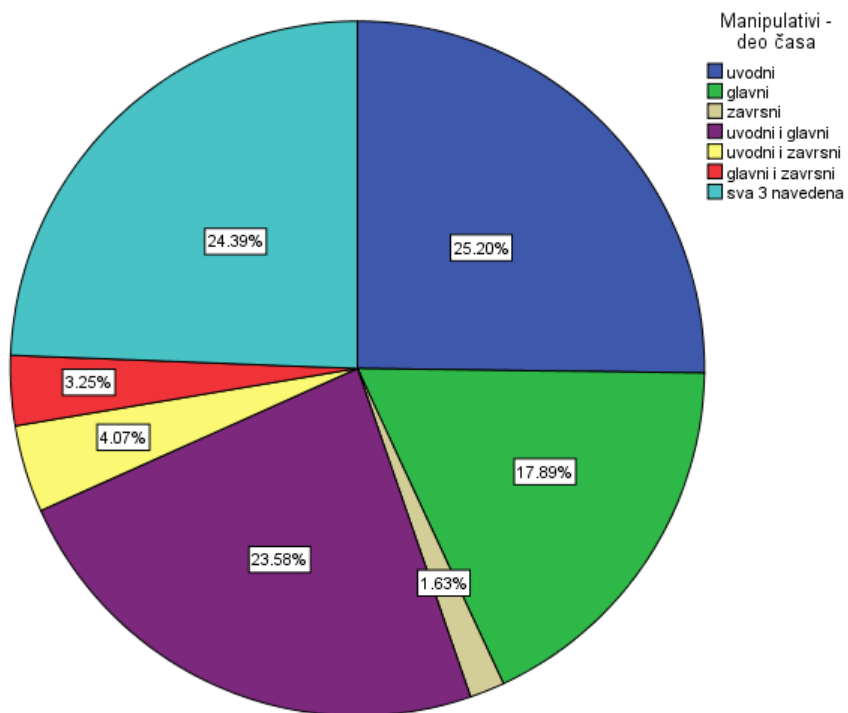


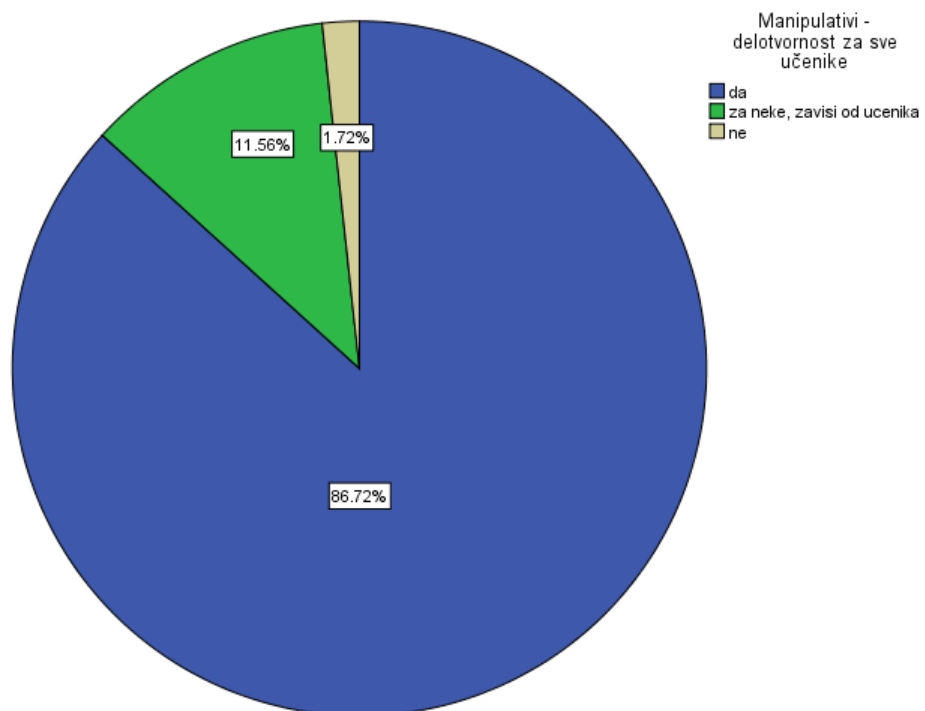
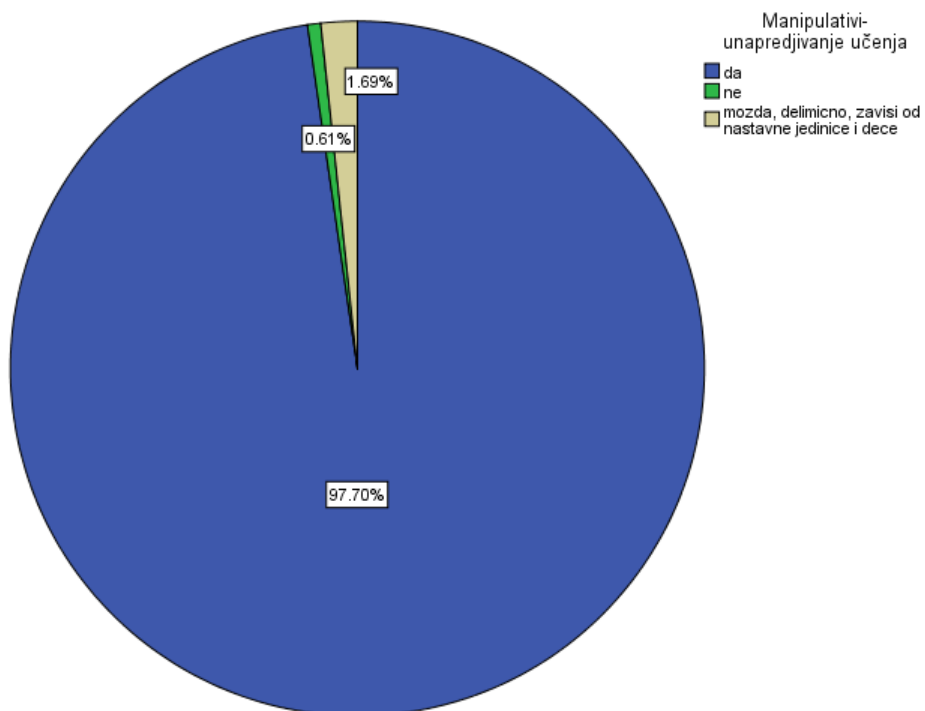












Литература:

- Banković, D. (xxxx). *Statističke metode u istraživanjima*. (neobjavljen rukopis - interna skripta).
- Clements, D.H. (1999). 'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*. Vol. 1, No. 1, pp. 45-60.
- Cohen, J. W. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. New Jersey: Hillsdale College.
- Dunlap, W.P. & Brennan, A.H. (1979). Developing Mental Images of Mathematical Processes. *Learning Disability Quarterly*. Vol. 2, No. 2, pp. 89-96.
- Марјановић, М. (1996а). *Методика математике. Први део*. Београд: Учитељски факултет.
- McNeil, N.M. & Jarvin, L. (2007). When Theories Don't Add up: Disentangling the Manipulatives Debate. *Theory into Practice*. Vol. 46, No.4, pp. 309-316.
- OECD (2010d). *Razumeti mozak: rođenje nauke o učenju*. Beograd: Ministarstvo prosvete Srbije, Zavod za udžbenike.
- Pallant, J. (2009). *SPSS priručnik za preživljavanje*. Beograd: Mikroknjiga.
- Sowell, E.J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 20, No. 5, pp. 498-505.
- Uribe-Flórez, L. J. & Wilkins, J. L. M. (2010). Elementary School Teachers' Manipulative Use. *School Science and Mathematics*. Vol. 110 (7). pp. 363-371.
- Uttal, D.H., Scudder, K.V. and DeLoache, J.S. (1997). Manipulatives as Symbols: A New Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*. 18, (1997), pp. 37-54.
- Yuan, Y., Lee, C.Y. and Wang, C.H. (2010). A comparison study of polyominoes explorations in a physical and virtual manipulative environment. *Journal of Computer Assisted Learning*. No. 26, pp. 307-316.
- Warkentin, G. (1975). The Effect of Mathematics Instruction Using Manipulative Models on Attitude and Achievement of Prospective Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 6, No. 2, pp. 88-94.

Прилог 12

Литература – систематизација коришћених референци

Приказ систематизације употребљених референци на основу више категорија (страни и домаћи часописи, број аутора, година издања, ранг часописа, импакт фактор, језик на коме је рад писан, саопштење на конференцији)

Страни часописи					
Број аутора	Година издања	Име часописа	Ранг часописа	Импакт фактор	Језик на коме је рад писан
1	2000	<i>Children and Society</i>			Енглески језик
3	2011	<i>Britysh Journal of Education Technology</i>			Енглески језик
2	1978	<i>Journal for Research in Mathematics Education</i>		1,000	Енглески језик
1	2002	<i>Educational Leadership</i>		0,123	Енглески језик
3	2010	<i>Journal of Instructional Pedagogies</i>			Енглески језик
2	1999	<i>Journal of Curriculum Studies</i>		0,7999	Енглески језик
1	1999	<i>Contemporary Issues in Early Childhood</i>			Енглески језик

1	2008	<i>Metodički obzori</i>			Хрватски језик
2	1979	<i>Learning Disability Quarterly</i>			Енглески језик
1	1975	<i>Journal for Research in Mathematics Education</i>		1,000	Енглески језик
2	2013	<i>Computers & Education</i>			Енглески језик
3	2001	<i>Journal of Mathematical Behavior</i>			Енглески језик
1	2006	<i>Mathematics in School</i>			Енглески језик
1	1971	<i>Journal for Research in Mathematics Education</i>		1,000	Енглески језик
2	2010	<i>British Journal of Educational Technology</i>			Енглески језик
1	2010	<i>Istraživanje matematičkog obrazovanja</i>			бхс
2	2007	<i>Theory into Practice</i>		0,528	Енглески језик
2	2008	<i>Journal of Science Education and Technology</i>			Енглески језик

2	2015	<i>Teaching children mathematics</i>			Енглески језик
1	2001	<i>Educational Studies in Mathematics</i>		0,678	Енглески језик
3	2002	<i>Teaching Children Mathematics</i>			Енглески језик
2	2004	<i>School Science and Mathematics</i>			Енглески језик
2	2012	<i>The Journal of Mathematics Behavior</i>			Енглески језик
4	2008	<i>School Science and Mathematics</i>			Енглески језик
2	2005	<i>Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching</i>			Енглески језик
2	2000	<i>Cambridge Journal of Education</i>		0,474	Енглески језик
1	1989	<i>Journal for Research in Mathematics Education</i>		1,000	Енглески језик
1	2000	<i>ENC Focus</i>			Енглески језик

2	2010	<i>School Science and Mathematics</i>			Енглески језик
3	1997	<i>Journal of Applied Developmental Psychology</i>			Енглески језик
1	2010	<i>Educational Studies in Mathematics</i>		0,678	Енглески језик
1	1975	<i>Journal for Research in Mathematics Education</i>		1,000	Енглески језик
1	2002	<i>Review of Educational Research</i>		5,000	Енглески језик
3	2006	<i>Journal for Resaearch in Mathematics Education</i>		1,000	Енглески језик
3	2010	<i>Journal of Computer Assisted Learning</i>			Енглески језик
1	2002	<i>Theory into Practice</i>		0,528	Енглески језик

Домаћи часописи

Број аутора	Година издања	Име часописа	Ранг часописа	Импакт фактор	Језик на коме је рад писан
1	2008	<i>Иновације у настави</i>	M52		Српски језик

1	2008	<i>Настава математике</i>			Српски језик
1	2006	<i>Педагогија (Pedagogija)</i>	R61		Српски језик
4	2015	<i>Образовна технологија</i>	M53		Српски језик

Конгреси, конференције и поглавља у књигама				
Број аутора	Година саопштења	Извор	Језик саопштења	Напомена
2	2004	<i>Reading Bernstein, researching Bernstein</i>	Енглески језик	Поглавље у књизи
2	2012	International Congress of Mathematical Education	Енглески језик	Seoul, July 2012
1	2004	<i>Reading Bernstein, researching Bernstein</i>	Енглески језик	Поглавље у књизи
1	1985	<i>Culture, Communication and Cognition: Vygotskian Perspectives</i>	Енглески језик	Поглавље у књизи
1	1992	<i>Optimal experience: Psychological studies of flow in consciousness</i>	Енглески језик	Поглавље у књизи

1	1988	International Congress of Mathematics Education	Енглески језик	Budapest, August 1988
2	1992	<i>Teacher Development and Educational Change</i>	Енглески језик	Поглавље у књизи
1	2000	<i>Mathematics education beyond 2000</i>	Енглески језик	Mathematics Education Research Group of Australasia
1	2002	<i>Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education</i>	Енглески језик	21-26 July 2002, Norwich, UK
1	2002	<i>Mathematics Education in the South Pacific: Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia</i>	Енглески језик	7–10 July 2002, Auckland, Australia