

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Љубиша Бучановић

**Прилог математичком моделирању и
динамичкој анализи једног
мехатроничког система управљања**

докторска дисертација

Београд, 2015

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Ljubiša Bučanović

**Contribution to mathematical modeling
and dynamic analysis of a mechatronic
system of control**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015

Ментор: др Михаило Лазаревић, редовни професор, Универзитета у Београду,
Машински факултет

Чланови комисије:

др Зоран Митровић, редовни професор, Универзитета у Београду,
Машински факултет

др Драгутин Дебелковић, редовни професор, Универзитета у Београду,
Машински факултет

др Немања Зорић, доцент, Универзитета у Београду,
Машински факултет

др Томислав Шекара, ванредни професор, Универзитета у Београду,
Електротехнички факултет

Датум одбране: _____

ИЗЈАВА ЗАХВАЛНОСТИ

Најпре бих желео да се захвалим свом ментору, проф. др Михаилу Лазаревићу, за подршку, усмеравање и консултације током израде дисертације и на датим сугестијама и саветима око научно-методолошке основе рада. Такође захваљујем својој фирми *Мессер Техногас АД* на финансијској подршци и на крају се захваљујем својој породици на пруженој подршци током мојег научно-истраживачког усавршавања.

Аутор

Резиме

Ова докторска дисертација даје савремен и оригиналан приступ истраживању и допринос актуелним методама проучавања динамичког понашања и управљања једног дела мехатроничког система – криогене експанзионе турбине у процесу производње техничких криогених гасова. Развијен је унапређени математички модел криогене експанзионе турбине, као објекта аутоматског управљања, чиме је омогућена и квалитативна и квантитативна анализа његових статичких и динамичких карактеристика. У циљу квалитетнијег моделирања утицаја пасивног момента у оквиру одређивања једначине поља обртања ротора експанзионе криогене турбине он је моделиран и уведен имајући у виду ефекте стишљивости и вискозности криогеног флуида применом рачуна нецелог реда. Затим је спроведен поступак добијања линеаризованог математичког модела експанзионе турбине применом конкретних вредности коефицијената у диференцијалним једначинама понашања за дати, усвојени номинални радни режим рада експанзионе турбине. На основу одскочног одзива релативне промене температуре на излазу потврђена је веродостојност математичког модела експанзионе турбине као и аутентичност истог.

Развијен је и предложен оригинални оптимизациони алгоритам, целог и нецелог реда применом генетских алгоритама којим је постигнуто децентрализовано мултиваријабилно оптимално управљање датим криогеним мехатроничким објектом. Примењена оптимизациона метода се овде фокусира у оквиру критеријума оптималности на смањење прескока, време смирења и минимизацију интегралне грешке. Спроведене симулације у временском домену показују боље перформансе оптималног $PI^{\beta}D^{\alpha}$ регулатора нецелог реда у односу на класични оптимални ПИД регулатор. Такође, спроведено је испитивање робусности сугерисаног напредног децентрализованог управљања, где су сада поремећаји представљени у виду релативне промене улазних температура две струје гасовитог ваздуха. Исто тако, развијени нови мултиваријабилни управљачки систем на бази нових концепата и алгоритама управљања омогућавају сада да се

добију знатно боље перформансе датог криогеног мехатроничког система управљања и већу флексибилност у погледу преласка на нове радне режиме.

На бази строго постављених захтева синтетизован је нови оригинални аналитички мултиваријабилни ПИД регулатор целог реда и повезан са датим мехатроничким објектом управљања у систем у затвореном колу дејстава. Овде је („*Multiple inputs – multiple outputs*“, *MIMO*) систем дат са два улаза и два излаза познати и као (ТИТО) системи управљања. Прво је примењено распрезање система коришћењем адекватног динамичког декуплера, а затим је спроведена синтеза аналитичког регулатора целог реда у функцији једног слободног параметра λ . Главна идеја овог управљачког система је одређивање аналитичких израза за коефицијенте пропорционалног/диференцијалног/ интегралног дејства у функцији слободног параметра λ узимајући у обзир и комплементарну функцију осетљивости у циљу потискивања поремећаја. У даљем раду, за идентичне захтеве рада криогеног процеса мешања два гасовитих ваздушних токова струјања испред експанзионе турбине, извршена је синтеза новог, сложеног ПИД регулатора нецелог реда, уз коришћење параметарске методе Д-разлагања и који је интегрисан у одговарајући систем регулисања. Скупом од три подешљива параметра (од четири могућа) за које је разматрани систем стабилан, одређене су и одговарајуће области (релативне) стабилности система у простору датих параметара. При томе испитане су све могуће комбинације параметара, што је и илустровано и 3D графичким приказом области стабилности за све вредности нецелог реда у интервалу од нула до један у параметарском простору односно одговарајућим контурним приказом истог. Као резултат у простору подешљивих параметара добијене су одговарајуће области оивичене отвореним или затвореним контурама које представљају потенцијалне области стабилности. Посебно, у циљу провере домена стабилности уочена је једна област у параметарској равни а за једну фиксирану вредност параметра нецелог реда тако да су применом симулације верификовани претходно добијени резултати што је и илустровано на сликама где су приказани импулсни одзиви датог система управљања.

Кључне речи: криогени процеси, технички гасови, рачун нецелог реда, моделирање, ПИД регулатор, аналитичко пројектовање, метода Д- разлагања, оптимално управљање, генетски алгоритми,

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Механика

УДК 621.59:681.5:007.52(043.3)

Summary

This doctoral thesis provides a modern and original research approach and unique contribution to the current methods of studying of dynamic behavior and control of one mechatronic system part - cryogenic expansion turbine in the process of technical cryogenic gases production. An improved mathematical model of cryogenic expansion turbine as automatic controlled object is developed and it offers both qualitative and quantitative analysis of system static and dynamic characteristics. In order to improve the modeling of passive torque impact within the field equations for determining rotation of cryogenic expansion turbine this model is implemented taking into account the effects of compressibility and viscosity of cryogenic fluid by applying a fractional-order system. The procedure is carried out to obtain a linear mathematical model of the expansion turbine using concrete values of the coefficients of differential equations for a given system behavior in assumed expansion turbine nominal operating mode. Based on the step response of the relative temperature change at turbine outlet the credibility as well as authenticity of expansion turbine mathematical model is confirmed.

An original optimization algorithm of whole-number and fractional order is proposed and developed by using of genetic algorithms which enabled decentralized multivariable optimal control of cryogenic mechatronic object. Applied optimization method uses optimum criterion to focus on the overshooting, reset time and integral error minimization. Conducted time domain simulations show better performance of optimal fractional order PI^bD^a controller compared to the classical optimal PID controller. Further a survey is carried out to determine the robustness of suggested advanced decentralized control, where an input disturbances are now represented as a relative change of input temperatures of two gaseous air streams. A newly developed multivariable control system, based on a new concepts and control algorithms, now allow obtaining better performances of the cryogenic mechatronic control system and greater flexibility in terms of switching to new operating modes.

Starting with a strict demands, new original analytical multivariable PID integer order regulator is developed and associated with a given mechatronic object control system in a closed loop system. Here the "Multiple inputs - multiple outputs" (MIMO) system is set for two inputs and two outputs, also known as TITO system control. First, a system decoupling is performed using an adequate dynamic decoupler and then a synthesis of analytical whole-number order regulator is applied as a function of one free parameter λ . The main idea of this control system is determination of analytical expressions of proportional/differential/integral gain coefficients as a function of one free parameter λ taking into account the complementary sensitivity function aiming to suppress input disorder.

Further, for identical working requirements of cryogenic mixing process of two gaseous air streams in front of the expansion turbine, the synthesis of new and complex

fractional order PID controller is implemented, using parametric methods of D-decomposition, and then integrated in the appropriate regulation system. Using a set of three adjustable parameters (out of four available), which are supposed to keep the system stable, it is determined an appropriate field of relative system stability in the given parameter space. For that purpose all the possible parameter combinations are examined, which is illustrated in a 3D graphic-view of stability area for all values of fractional order in the interval from zero to one in the given parameter space or its corresponding contour-view. As a result, in the space of adjustable parameters, the corresponding area bordered by open or closed contours are obtained, which represent potential areas of stability. In particular, in order to verify the domain of stability, one area in the parameter space is chosen, for a fixed value of the fractional order parameter, so that the application of simulation could verify previously obtained results which is illustrated in the figures presenting step response of a given control system.

Key words: cryogenic processes, technical gases, fractional calculus, modeling, PID controller, an analytical design, D-decomposition method, optimal control, genetic algorithms

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Mechanics

UDC 621.59:681.5:007.52(043.3)

Садржај

1. Увод

1.1 Основне напомене, прелиминарна разматрања.....	1
1.2 Предмет истраживања значај и циљ рада, организација дисертације.....	4

2. Основе сепарације ваздуха

2.1. Историјат развоја постројења за разлагање ваздуха.....	11
2.2. Техничко-технолошки поступак производње техничких гасова из ваздуха.....	13
2.2.1. Сврха и основни опис технологије.....	13
2.3. Термодинамичке основе процеса добијања техничких гасова.....	16
2.3.1. Генерални опис разлагања ваздуха.....	19
2.4. Опис постројења	20
2.4.1 Опис процеса разлагања ваздуха, фабрика техничких гасова у Бору.....	23
2.5. Идеални процес утечњавања ваздуха	27
2.5.1. Пригушни ефект.....	28
2.5.2. Утечњавање ваздуха ниског притиска.....	31
2.5.3. Основне поставке експанзије ваздуха.....	34

3. Динамика криогене експанзионе турбине као објекта управљања

3.1. Једначина поља обртања ротора гасне турбине.....	38
3.1.1 Линеаризација једначине поља обртања ротора гасне турбине	50
3.2. Једначина поља притиска у гасној турбини.....	52
3.2.1 Линеаризација једначине поља притиска у експанзионој турбини	55
3.3. Једначина поља температуре у гасној турбини.....	59
3.3.1 Линеаризација једначине поља температуре у експанзионој турбини	63
3.4. Једначина излаза експанзионе турбине.....	71
3.5. Математички модел турбине у простору стања.....	74
3.5.1 Јединични одскочни одзиви система при појединачним променама улазних величина.....	75

4. Преглед најбитнијих резултата у примени теорије рачуна нецелог реда у системима ПИД управљања

4.1 Увод у управљање криогеним процесом.....	76
4.2 Основе рачуна нецелог реда (фракционог рачуна).....	79
4.2.1 Дефиниције извода и интеграла фракционог реда.....	81
4.3 Преглед релевантних резултата примене управљања нецелог реда	84
4.3.1 Основе управљања применом ПИД алгоритама управљања нецелог реда.....	84
4.3.2 Увод у управљање нецелог реда.....	87
4.3.3 ПИД контролер нецелог реда.....	92

5. Децентрализовано оптимално управљање целог и нецелог реда криогене експанзионе турбине у процесу сепарације ваздуха применом генетских алгоритама

5.1 Основне поставке генетских алгоритама.....	98
5.2 Математички модел процеса мешање две струје гасовитог ваздуха различитих температура пре улаза у експанзиону турбину.....	101
5.3 Оптимално подешавање параметара нецелог реда ПИД контролера применом генетских алгоритама.....	106

6. Напредно мултиваријабилно управљање криогеним процесом применом аналитичког пројектовања стандардног регулатора

6.1 Уводна разматрања.....	116
6.2 Синтеза аналитичког ПИД регулатора за управљање криогеним процесом...	118

7. Управљање криогеним процесом применом напредног ПИД регулатора нецелог реда и параметарске методе Д-разлагања

7.1 Уводна разматрања - увод у синтезу система аутоматског управљања у параметарској равни.....	129
7.2 Хронолошки преглед постојећих резултата у области параметарске анализе и синтезе са освртом на историјат развоја и примене методе Д-разлагања....	132
7.3 О методи Д-разлагања	135
7.3.1.Метода Д-разлагања у равни једног подешљивог параметра.....	139
7.3.2 Метода Д-разлагања у равни два подешљива параметра.....	141
7.4 Синтеза регулатора нецелог реда применом Д-разлагања у простору три подешљива параметра.....	146
7.4.1 Метода Д разлагања у простору три параметра $(k_p, k_i, \alpha, k_d = const)$	149
7.4.2 Метода Д разлагања у простору три параметра $(k_p, k_d, \alpha, k_i = const)$	156
7.4.3 Метода Д разлагања у простору три параметра $(k_i, k_d, \alpha, k_p = const)$	162

8. Закључак, доприноси и правци даљих истраживања

8.1 Резултати и доприноси истраживања.....	171
8.2 Препоруке за будући рад.....	173

Литература

Прилози

Биографија

Глава 1

1. УВОД

1.1 Основне напомене, прелиминарна разматрања

Савремени трендови у науци посебну пажњу поклањају мултидисциплинарним истраживањима и у оквиру њих посебно се истичу тзв. *мехатронички криогени системи* у оквиру криогеног инжењерства.

Реч *криогеника* потиче од грчких речи *kryos* - мраз и *genos* – стварање при чему је употреба тог израза најчешће повезана са технологијама и техникама остваривања ниских температура и у свакодневној употреби је синоним за ниске температуре. Данас се под речју *криогеника* подразумева проучавање појава, техника и концепата који се појављују или припадају температурама нижим од 120К. На XIII Конгресу Међународног института за хлађење (*International Institute of Refrigeration*) је усвојена претходна дефиниција. Осим тога израз *криогено инжењерство* означава подручје у техници у оквиру којег се развија и у пракси потврђује нискотемпературна техника, процеси и опрема. За разлику од физике ниских температура која се првенствено односи на фундаментална истраживања, криогено инжењерство се примарно бави практичним коришћењем нискотемпературских појава, *Раиковић, (2005)*.

Овде се под *криогеним системом*, подразумева скуп компонената, повезани и интегрисани одређеним везама у циљу извршавања задате функције у области ниских, криогених температура. При томе јасну разлику између криогеног система и компоненте није увек лако уочити и углавном зависи од тачке гледишта на пример, криогени резервоар са опремом може сматрати једним криогеним системом али и одговарајућом криогеном компонентом.

У овој докторској дисертацији је од значаја да се проучи једно криогено мехатроничко постројење- криогено постројење за добијање техничких гасова које ће се посматрати као објект управљања. Такође, све више се системи

разматрају и оцењују са становишта енергетске ефикасности имајући у виду значај смањења утrophка енергије у датом систему, а чиме се даје значајан допринос и у екологији и заштити животне средине. При томе, циљ је да постројење за добијање техничких гасова произведе у складу са потребама потрошача, захтевану количину прописане чистоће и температуре, гасовитог кисеоника и азота, као и течног кисеоника и азота уз минималну (оптималну) потрошњу електричне енергије и уз истовремено поштовање безбедносних прописа саме производње а који се односе на заштиту околне средине.

У конвенционалној производњи техничких гасова која се примењује дешавају се одређене промене у производњи као одговор на захтеве тржишта за техничким гасовима (N_2, O_2) у течном и гасовитом стању, тако да усвојени план производње није онакав какав би требао да буде. Сама процесна опрема у криогеном постројењу за добијање техничких гасова је пројектована за номиналне услове рада, међутим, стварни услови рада се често разликују од номиналних, због присутних поремећаја (на пр. промена температуре улазног атмосферског ваздуха, итд.) чиме дато постројење не може остварити жељене циљеве.

Такође криогена експанзиона турбина не показује задовољавајуће динамичко понашање за постојеће радне режиме. Стога ће овде од интереса спровођење теоријске анализе - математичко моделирање динамичког система аутоматског управљања –криогене експанзионе турбине у постојећим радним режимима као и могуће предвиђање нових радних режима. Примарни циљ је свакако добијање квалитетнијег модела који ће касније моћи користити у динамичкој анализи и предвиђању опционо нових радних режима, односно верификацији експерименталних резултата.

Наиме, анализа и пројектовање савремених система аутоматског управљања, као и неопходност испуњавања веома строгих захтева који се намећу квалитету динамичког понашања система у целини, траже познавање њихових довољно тачних, у инжењерско-техничком смислу, математичких модела. Ако се претпостави да математички модели довољно тачно описују физичке системе и да дају њихов веродостојан опис, онда они садрже све информације о особинама тих система и у тој форми пружају могућност да се применом одговарајућих метода и

поступака, кроз анализу и синтезу, утврде њихове објективне особине или пројектују нове управљачке целине сходно постављеним захтевима или усвојеним критеријумима, *Дебељковић, (2006а)*.

Под моделом се подразумева један идеализовани процес проистекао као последица упрошћавања стварног процеса. Имајући у виду неопходност даљњег коришћења математичког модела за анализу динамике процеса, природно је направити компромис између дубине анализе физичких појава у процесу и употребне вредности математичког модела у инжењерско-техничком смислу. Математички модел представља формалан опис помоћу математичких симбола, релација, операција и/или дијаграма статичких и динамичких особина система независно од почетних услова, вредности улазних величина и карактера њихових промена, *Милојковић, Грујић (1990)*.

У свом изворном облику математички модели објеката и процеса најчешће се добијају у облику диференцијалних једначина. Избор величина стања, као што је познато, није једнозначан што може довести и до више различитих репрезентација математичког модела у простору стања. Коначно обликовање математичких модела одвија се кроз нумеричку конкретизацију добијених општих израза за временске и друге константе система. Како је обично реч о линеаризованим математичким моделима, овај задатак започиње усвајањем једног номиналног радног режима рада система и прикупљањем релевантних података о њему. Једини исправни одговор на ово питање се може добити ако се располаже експериментално снимљеним понашањем реалног система и уколико постоји могућност да се добијени систем једначина реши за идентичне услове у којима је спроведен експеримент и да се добијени резултати, у графичком облику, упореде са оним експерименталним. Најквалитетнији резултати, добијају се, уколико се експериментална анализа спроводи у условима нормалног функционисања објекта или процеса, што подразумева присуство произвољних улазних величина. Међутим, како би и у симулационим поступцима било потребно обезбедити идентичне улазне функције обично се одустаје од оваквих прилаза и примењују типичне улазне побуде.

Овде је такође и од интереса управљање секцијом *хладног циклуса* односно развоја новог управљачког система на бази нових концепата и

алгоритама управљања који ће сада омогућити да се добију знатно боље перформансе датог система. Не мањи значај има и управљање радом криогене експанзионе (гасне) турбине током нормалног рада постројења (фаза у раду и управљању када се у дужем временском периоду добијају гасовити кисеоник и азот и течни кисеоник и азот) где је уочено да исправан рад експанзионе (гасне) турбине, а самим тим и целог постројења, у великој мери зависи од температуре, притиска и масеног протока гасовитог ваздуха на њеном улазу.

Са становишта теорије управљања конвенционална метода производње техничких гасова има *систем ручног управљања*. На динамичко понашање таквог система са ручним управљањем веома је тешко извршити било какав утицај у смислу корекције и остваривања новог жељеног динамичког понашања. Због наведених разлога јавила се потреба за развојем система управљања која би у потпуности елиминисао недостатак класичне производње техничких гасова.

Из тог разлога потребно је обезбедити одговарајући управљачки систем који ће обезбеђивати да постројење за добијање техничких гасова оствари жељене захтеве у номиналним радним условима, а у условима различитим од номиналних радних услова омогућити задовољавајуће понашање истог у прописаним границама.

1.2 Предмет истраживања, значај и циљ рада, организација дисертације

Предмет дисертације представљаће теоријска анализа - математичко моделирање динамичког система аутоматског управљања—једне криогене експанзионе турбине у постојећим радним режимима. Циљ је добијање квалитетнијег модела који ће касније моћи користити у динамичкој анализи и предвиђању опционо нових радних режима односно верификацију експерименталних резултата.

Такође експанзиона турбина не показује задовољавајуће динамичко понашање за постојеће радне режиме. Са становишта теорије управљања конвенционална метода производње техничких гасова има *систем ручног управљања*. На динамичко понашање таквог система са ручним управљањем веома је тешко извршити било какав утицај у смислу корекције и остваривања

новог жељеног динамичког понашања. Због наведених разлога јавила се потреба за развојем система управљања која би у потпуности елиминисао недостатак класичне производње техничких гасова. У циљу квалитетнијег управљања односно повећању аутоматизације процеса производње неопходно је развити управљачки систем који би у потпуности омогућио остваривање и под дејством ограничених поремећаја производњу захтеваних режимима рада и могућност брзог преласка на нове радне режиме. У том циљу, биће примењен нови алгоритам управљања који су базирани на примени теорије фракционог рачуна чиме ће бити обезбеђено жељено динамичко понашање система управљања. Шта више, то ће бити омогућено коришћењем тзв. $PI^{\alpha}D^{\beta}$ регулаторима који осим предности које садрже класични ПИД регулатори имају предности финијег подешавања употребом датих експонената α, β који су у општем случају нецелог реда.

При томе, ова докторска дисертација је приказана и организована на следећи начин:

Глава 1: Увод

У првом, уводном поглављу дате су основне напомене о проблемима који се јављају код датог мехатроничког система-постројења за добијање техничких гасова путем криогеног процеса. При томе, истиче се да је остварењу циља датог мехатроничког система-производња техничких гасова према прописаним стандардима и прописима неопходно остварити уз минималну (оптималну) потрошњу електричне енергије и уз истовремено поштовање безбедносних прописа саме производње а који се односе и на заштиту околне средине.

У том смислу се пажња у дисертацији у првом делу посвећује проблематици математичког моделирања једног дела датог система, који је од изузетног значаја у процесу добијања криогених гасова, тј. добијању квалитетног модела криогене експанзионе турбине.

Осим тога, са становишта теорије управљања као једна од заступљених конвенционалних метода производње техничких гасова јесте и систем ручног

управљања. Уочава се да на динамичко понашање таквог система са ручним управљањем веома је тешко извршити брзи утицај у смислу корекције и остваривања новог жељеног динамичког понашања. Због наведених разлога овде ће преокупација аутора бити усмерена и на развој напредних система управљања применом рачуна нецелог реда/целог реда који би на оптимималан начин превазишао овај недостатак класичне производње техничких гасова.

Симулационим поступцима биће верификовани изведени резултати односно одговарајући модел је базиран на поређењу и примени одговарајућих експерименталних резултата.

Глава 2: Основе сепарације ваздуха

У овој глави описан је поступак разлагања ваздуха у циљу добијања техничких гасова. Глава је подељена на три потпоглавља, где је у кратким цртама описан историјат развоја постројењеа за разлагање ваздуха, затим је описан техничко-технолошки поступак за производњу техничких гасова из ваздуха. Ова глава се завршава излагањем где су дате термодинамичке основе процеса добијања техничких гасова.

Глава 3: Динамика криогене експанзионе турбине као објекта управљања

У овом поглављу спроводи се математичко моделовање криогене експанзионе турбине чиме се омогућава квалитативна и квантитативна анализа његових статичких и динамичких карактеристика. Добијени унапређени математички модел се затим линеаризује да би се, затим, одговарајући модел могао трансформисати и приказати у простору стања. У циљу квалитетнијег моделирања утицаја пасивног момента у оквиру одређивања једначине поља обртања ротора експанзионе криогене турбине исти се моделује применом савременог рачуна нецелог реда имајући у виду ефекте стишљивости и вискозности криогеног флуида.

Глава 4: Преглед релевантних резултата у примени теорије рачуна нецелог реда у системима управљања

У овој глави даје се преглед постојеће литературе где је прво дата кратка рекапитулација основних резултата у управљању датим криогеним процесом /турбином, затим су дате основе рачуна нецелог реда (*fractional calculus*), због значаја и примене истог, и на крају је дат преглед резултата примене алгоритама управљања нецелог реда са акцентом на ПИД управљање нецелог реда.

Глава 5: Децентрализовано оптимално управљање целог и нецелог реда експанзионе турбине у процесу сепарације ваздуха применом генетских алгоритама

У овом поглављу уводи се и детаљно објашњава један нови алгоритам ПИД управљања заснованог на рачуну нецелог реда у производњи техничких гасова, односно у процесу сепарације утечњеног ваздуха. Производња утечњеног ваздуха ниског притиска је по први пут била уведена од стране Капице где се експанзија одвијала у гасној турбини. При томе, одговарајући модел је линеаризован и декуплован где су примењени истовремено класични(целог реда) ПИД као и ПИД контролери нецелог реда ($PI^{\beta}D^{\alpha}$) да би се проценио квалитет предложеног новог управљања датим процесом. Скуп оптималних параметара датих контролера се постиже применом оптимизационе процедуре базиране на генетским алгоритмима минимизовањем одговарајућег критеријума оптималности. Примењена оптимизациона метода се овде фокусира у оквиру критеријума оптималности на смањење прескока, време смирења и минимизацију интегралне грешке. Спроведене симулације у временском домену показују боље перформансе оптималног $PI^{\beta}D^{\alpha}$ контролера у односу на класични оптимални ПИД контролер.

Глава 6: Напредно мултиваријабилно управљање криогеним процесом применом аналитичког стандардног регулатора

Овде је од интереса применити одговарајуће мултиваријабилно управљање задатим криогеним процесом. С друге стране, пројектовање мултиваријабилних регулатора је захтеван и сложен проблем. Уочава се да мултиваријабилно управљање које се данас користи углавном је на вишем нивоу, док се задавање радних тачака и побољшање перформанси дешава због побољшања у ПИД петљама на нижим нивоима. Овде се примењује распрезање *ММО* система дат са два улаза и два излаза познати и као (ТИТО) системи коришћењем динамичког декуплера, а затим се спроводи синтеза аналитичког ПИД регулатора – тзв. (λ подешавање). Главна идеја овог управљачког система је одређивање аналитичких израза за коефицијенте пропорционалног/диференцијалног/интегралног дејства у функцији слободног параметра λ узимајући у обзир и комплементарну функцију осетљивости у циљу потискивања поремећаја.

Глава 7 : Управљање криогеним процесом применом напредног ПИД регулатора нецелог реда и параметарске методе Д-разлагања

Спроводи се синтеза сложеног регулатора нецелог реда применом методе Д-разлагања у равни три подешљива параметра. Скупом променљивих параметара за које је разматрани систем стабилан, одређује се одговарајућа област стабилности система у 3Д простору, а скуп истих који поврх тога гарантују и релативну стабилност система дефинишу област релативне стабилности система. Као резултат у равни/простору подешљивих параметара добијају се одговарајуће области оивичене отвореним или затвореним контурама које представљају потенцијалне области стабилности. Затим се касније адекватном применом одговарајућих поступака утврђује која од добијених области, уколико постоји, представља тражени скуп подешљивих параметара за који је систем стабилан.

Глава 8: Закључак, доприноси и правци даљих истраживања

Овде су дати главни закључци докторске дисертације, практичну корист и предлоге даљих истраживања. У оквиру закључних разматрања сажето се приказују добијени резултати теоријског и експерименталног истраживања и истиче научни допринос дисертације и применљивост резултата истраживања у пракси. Такође, дају се и могуће перспективе и смернице за даља истраживања.

Глава 2

Основе сепарације ваздуха

О разлагању ваздуха

Циљ процеса разлагања ваздуха на компоненте је у томе да се на што економичнији начин изврши издвајање једне или више главних компонената ваздуха. Разлагање ваздуха врши се у постројењима која су дизајнирана да задовоље специфичне захтеве производа.

За производњу поменутих гасова из смеше ваздуха користе се различити поступци који зависе од више фактора. Ради утврђивања који је поступак сепарације најисплативији извршено је њихово поређење са одређеним специфичностима сваког понаособ које је изложено у Табели 2.1.

Табела 2.1. *Поређење технологија за разлагање ваздуха**

Процес	Статус	Квалитет продуката	Чистоћа(%)	Време покретања
Адсорпција	Полу-развијен	Лош	93-95	Минути
Хемијски	У развоју	Лош	>99	Часови
Криогени	Развијен	Одличан	>99	Часови
Мембрански	Полу-развијен	Лош	40	Минути
(ИТМ) Јонски	У развоју	Лош	>99	Часови

*[Smith, Klosekr,2001]

Као што се из Табеле 2.1 види, поступак криогене сепарације је у развијеној фази и најзаступљенији поступак, односно једини начин за масовну производњу кисеоника, азота, аргона, задовољавајућег квалитета.

Не-криогени поступци су погоднији, ефикаснији што се тиче трошкова, у случају када се не захтева велика чистоћа производа, или када није потребна велика количина излазних производа. Ови процеси користе, осим тачке кључања, друге физичке особине компонената. Раздвајање и пречишћавање се врши на температури блиској амбијенталној. Два основна не-криогена сепарациона поступка су адсорпција и мембрански поступак издвајања.

2.1. Историјат развоја постројења за разлагање ваздуха*

1895. година:

Линде (*Carl Paul Gottfried Linde*, 1842–1934) и Hampson (*William Hampson*, 1854–1926) су изградили први утечњивач ваздуха са континуалним радом користећи Џул-Томсонов (Joule-Thompson) експанзиони вентил и извршили делимично раздвајање ваздуха испаравањем.

1902. година:

Клод (Claude) је кондензовао ваздух у постројењу са експанзионом машином. Линде је изградио прву колону за разлагање ваздуха.

1904. година:

Прво постројење за издвајање азота из ваздуха.

1910. година:

Линде изградио прво постројење за разлагање ваздуха ректификацијом са „дуплим колонама”.

1930. година:

Развој Линде-Френкл-овог поступка разлагања ваздуха.

1934. година:

Капица (Пётр Леонідович Капи́ца) изградио прву експанзиону машину за хелијум

1939. година:

Капица (Пётр Леонідович Капи́ца) увео утечњавање ваздуха ниског

притиска 6-7 бара и експанзију у гасној турбини.

1950.година:

Прво постројење са колонама са паковањима.

1954.година:

Прво постројење за разлагање ваздуха са пречишћавањем ваздуха путем адсорпције.

1968.година:

Увођење технологије молекуларних сита.

1978.година:

Унутрашња компресија кисеоника.

1981.година:

Увођење процеса са високим притисцима.

1990.година:

Производња аргона.

1992.година:

Производња изузетно чистих гасова.

2000.година:

Развој вишестепених кондензатора са урањањем.

**[History of Cryogenics,1999]*

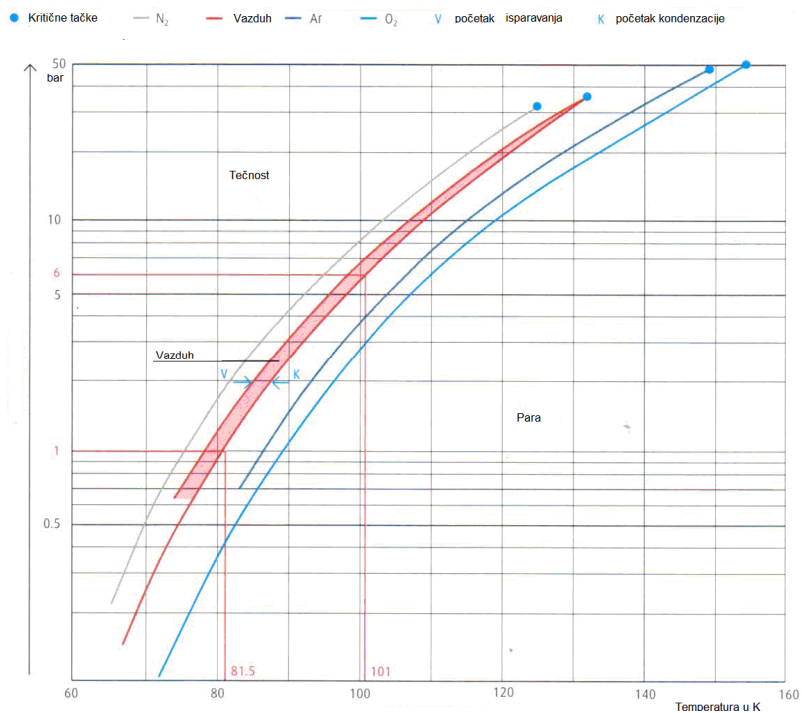
2.2. Техничко-технолошки поступак производње техничких гасова из ваздуха

2.2.1. Сврха и основни опис технологије

Поступак производње техничких гасова подразумева разлагање атмосферског ваздуха на примарне компоненте, азот, кисеоник и аргон, и ретко на друге инертне гасове. Један од најпопуларнијих процеса разлагања ваздуха је криогени поступак односно поступак криогене дестилације. Циљ постројења за разлагање ваздуха је производња: ГОХ- гасовити кисеоник,ЛОХ- течни кисеоник,ГАН- гасовити азот, ЛИН- течни азот, ГАР- гасовити аргон,ЛАР- течни аргон.

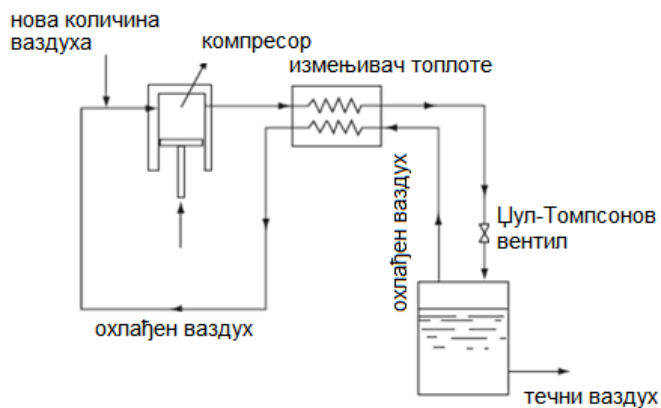
Криогени поступак за добијање азота и кисеоника заснован је на превођењу ваздуха у течно стање, а затим на његовој ректификацији при чему се азот и кисеоник одвајају на основу различитих тачки кључања. Криве кључања приказане су на слици 2.1, са назначеним почецима кондензације и кључања.

Проблем ликвификације ваздуха технички је први решио Линде (*Carl von Linde*), маја 1895. Године. Линде се користио Џул-Томпсоновим ефектом, односно чињеницом да се компримовани гасови при наглој адијабатској експанзији хладе (у просеку за $0,25^{\circ}\text{C}$ по атмосфери сниженог притиска) јер сопствену унутрашњу енергију троше за савладавање међумолекулских сила. Линдеову машину сачињавали су компресор, размењивач топлоте, Џул-Томпсонов вентил и резервоар, чији је шематски изглед и повезаност дат на слици 2.2.



Слика 2.1: Криве кључања атмосферских гасова

[www.linde-engineering.com/.../air_separation.../i...]

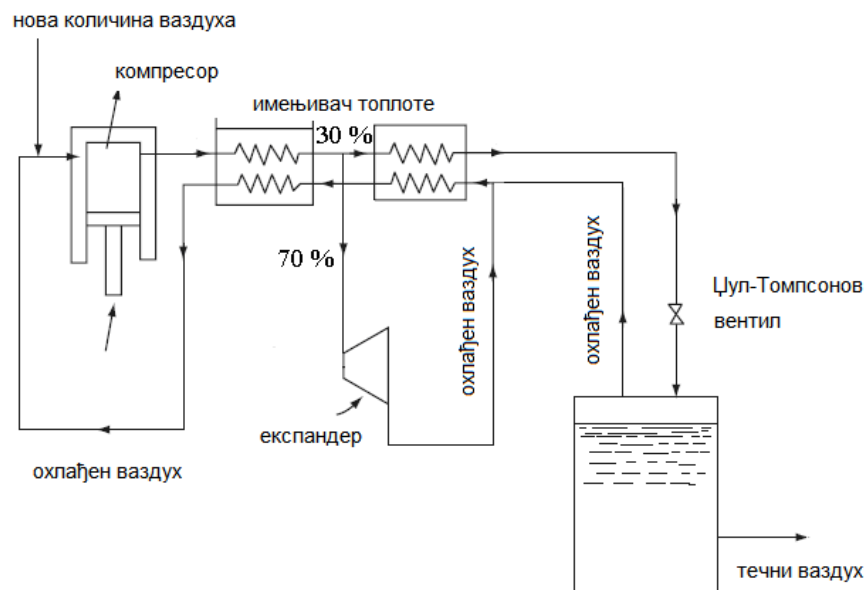


Слика 2.2: Шема постројења за утечњавање ваздуха, Рашковић, (2005)

Пречишћени ваздух се доводи на усис компресора, компримује се и одатле одводи на размењивач топлоте. Након тога гас експандира помоћу Цул-Томпсоновог вентила услед чега се хлади. Тако охлађен гас враћа се у компресор преко размењивача где у пролазу хлади гас који улази у

размењивач и самим тим се на вентилу добија хладнији гас него у претходном циклусу. Сада тај, више охлађени ваздух поново пролази кроз размењивач топлоте назад до компресора, хладећи гас који тренутно пролази кроз размењивач на још нижу температуру, тако да у сваком следећем циклусу ваздух који долази до Џул-Томпсоновог вентила је све хладнији. Након одговарајућег броја понављања овог поступка, ваздух постаје довољно охлађен да се након адијабатске експанзије ликвефикује и сакупи у резервоару. Део ваздуха који није утечњен се из резервоара враћа у размењивач па у компресор и пролази поново кроз исти циклус све до постизања температуре одговарајуће за утечњавање.

Линдеов процес утечњавања допунио је Клод (*Claude*) једним додатним експандером. За разлику од претходно описаног поступка кључна разлика/напредак је то што се у експандеру унутрашња енергија гаса не троши само за савладавање међумолекулских сила већ и за вршење рада, тако да се при истој полазној температури и једнаком снижењу притиска постиже јаче хлађење. На слици 2.3 се може видети апаратура Клодовог поступка.



Слика 2.3: Клодов поступак за ликвефакцију ваздуха, Раиковић, (2005)

2.3. Термодинамичке основе процеса добијања техничких гасова

Сировина за добијање кисеоника и азота у „Фабрици Техничких Гасова“ у Бору, слика 2.4 је атмосферски ваздух, где кисеоник и азот нису у хемијској вези са осталим компонентама.



Слика 2.4: Криогено постројење за добијање кисеоника и азота у „Фабрици Техничких Гасова“ у Бору

Саставни делови ваздуха могу се поделити у две групе:

- постојани
- променљиви

У прву групу спадају кисеоник, азот, и инертни гасови (аргон, неон, хелијум, криптон, ксенон) чији је садржај у ваздуху непромењен. У другој групи су водена пара и угљендиоксид (CO_2).

Садржај водене паре у ваздуху зависи од климатских услова, а количина угљендиоксида у ваздуху у околини великих индустријских комбината и термоелектрана може бити увећана. У зонама великих индустријских комбината ваздух садржи чврсте примесе у виду прашине, а у околини металуршких и хемијских комбината ваздух може да садржи примесе органских и неорганских једињења као што су угљоводоници, сумпордиоксид (SO_2), амонијак (NH_3), азотдиоксид (NO_2) и друго.

Садржај и својства компонената сувог атмосферског ваздуха приказани су у Табели 2.2.

За раздвајање компонената ваздуха могу се искористити различити начини. Најекономичнији метод раздвајања компонената ваздуха јавља се његова нискотемпературска ректификација (дестилација, раздвајање), заснована на различитости температура кључања компонената течног ваздуха. Овај процес изискује предходно утечњавање дела атмосферског ваздуха.

Да би се неки гас утечнио треба му снизити температуру испод критичне вредности. При температури вишој од критичне гас не може бити утечњен при било којем притиску.

Табела 2.2. Састав и својства сувог атмосферског ваздуха

Редни број	Назив гаса	Садржај, [%]		Густина ρ при 0°C и $1,013\text{bar}$, $[\text{kg}/\text{m}^3]$	Тачка кључања	
		Запремински	Масени		[K]	[$^\circ\text{C}$]
1	Азот, N_2	78,09	75,52	1,25	77,34	-195,81
2	Кисеоник, O_2	20,95	23,15	1,428	90,18	-182,97
3	Аргон, Ar	0,93	1,28	1,784	87,28	-185,87
4	Неон, Ne	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0,899	27,092	-246,06
5	Криптон, Kr	$1,14 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$	3,749	119,8084	-153,34
6	Ксенон, Xe	$8,7 \cdot 10^{-6}$	$3,9 \cdot 10^{-6}$	5,8971	165,0435	-108,11
7	Хелијум, He	$5,24 \cdot 10^{-4}$	$7,2 \cdot 10^{-4}$	0,1785	4,25	-268,9
8	Водоник, H_2	$5 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	0,0898	20,4	-252,75
9	Метан, CH_4	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$0,8 \cdot 10^{-4}$	0,7174	111,66	-161,49
10	Азотсубоксид, N_2O	$5 \cdot 10^{-5}$	$0,8 \cdot 10^{-5}$	1,9768	184,45	-88,7
11	Озон, O_3	$10^{-6} \div 10^{-5}$	$10^{-6} \div 10^{-5}$	2,22	161,15	-112
12	Угљендиоксид, CO_2	0,03	0,046	1,977	194,67	-78,48
13	Ваздух			1,2928	79,15	-194

2.3.1. Генерални опис процеса разлагања ваздуха

Турбо компресор усисава ваздух после филтра у коме се врши пречишћавање ваздуха од прашине и чврстих честица. Сабијени ваздух се у хладњаку хлади водом. Ваздух из орошавајућег хладњака долази у сабирну цев реверзних размењивача топлоте и грана се у сва четири размењивача топлоте. Сваки од размењивача топлоте има по шест канала и у сваком од њих струји различит гас. Приликом проласка кроз канал размењивача топлоте гасовити процесни ваздух се хлади и на површини канала размењивача топлоте остаје лед и суви лед, и након промене тока отпадни гасовити азот избацује тај лед из канала и тиме се врши регенерација канала размењивача топлоте.

Пречишћен ваздух од угљендиоксида, водене паре одлази у главни размењивач топлота у коме се хлади до температуре блиске температури утечњавања. Хлађење се врши произведеним кисеоником и азотом кој се у размењивачу загревају до температуре околине. Мања количина ваздуха одлази у ваздушну експанзиону турбину која ствара хладноћу неопходну за покривање губитака као и производњу аргона у течном стању. Ваздух се после експанзије шаље у доњу колону, односно на дно колоне средњег притиска.

Охлађени ваздух из размењивача одлази у доњу колону где се утечњава и раздваја на такозвану обогаћену течност (37-38% O_2) и чист азот. Обогаћени ваздух и чист азот се одводе у горњу колону ради производње чистог кисеоника (99,58% O_2). Кисеоник се у течном стању сакупља на дну горње колоне а гасовити азот на врху. За обављање процеса раздвајања ваздуха у колони (ректификација) за доњу колону је потребан азот у течном стању. Утечњавање азота се врши у кондензатору на рачун испаравања течног кисеоника.

Произведени азот који се издваја из горње колоне са температуром нижом од температуре кондензације ваздуха, пролази кроз размењивач топлоте, загрева се и потхлађује производе (течни кисеоник, обогаћени ваздух и течни азот за горњу колону). На тај начин се спречава стечњавање ваздуха у размењивачу.

Гасовити кисеоник после испаравања у кондензатору предаје своју хладноћу у размењивачу и одлази на ниском притиску на усис компресора или у атмосферу. Течни кисеоник са дна горње колоне и потхлађивања у размењивачу одлази у резервоар течног кисеоника. Течни азот се може добити (без рада утечњивача) са

врха доње колоне. Поред производње кисеоника и азота у горњој колони се издваја и сирова фракција за производњу аргона.

2.4 Опис постројења

Фабрика техничких гасова у Бору почела је са производњом 1978. године. Постројење производи течни и гасовити кисеоник и течни и гасовити азот. Испоручилац пројекта и опреме је била фирма Хитачи из Јапана.

Параметри радних флуида по одређеним операцијама дати су Табели 1.3.

Табела 2.3. Капацитет „Фабрике Техничких Гасова“ у Бору*

* (Техничка документација „Fabrike Tehničkih Gasova“ у Boru, 1978)

Производ	Запремински и масени проток по операцијама			Чистоћа производа
	операција I	операција II	операција III	
Гасовити кисеоник	3500 m ³ _N /h	2916 m ³ _N /h	2916 m ³ _N /h	мин. 95 % O ₂
	120 t/24h	100 t/24h	100 t/24h	
Гасовити азот	60 m ³ _N /h	60 m ³ _N /h	60 m ³ _N /h	макс. 10 ppmO ₂
	1.8 t/24h	1.8 t/24h	1.8 t/24h	
Течан кисеоник	-	292 m ³ _N /h	-	мин. 99,5 % O ₂
	-	10 t/24h		
Течан азот	-	-	290 m ³ _N /h	макс. 10 ppmO ₂

Постројење се према функцији опреме може поделити на пет секција.

- Секција за снабдевање и пречишћавање ваздуха
- Секција хладног циклуса
- Секција ректификације
- Секција за складиштење и дистрибуцију производа

Нормалан рад постројења означава фазу у раду и управљању у којој се постројење најчешће и временски најдуже налази и у којој се добијају производи: гасовити кисеоник ГОХ, гасовити азот ГАН, течни кисеоник ЛОХ и течни азот ЛИН прописане чистоће и температуре у складу са потребама потрошача, при оптималној потрошњи електричне енергије и потпуно безбедно по околину.

У току нормалног рада постројења врши се управљање сваком секцијом постројења да би се добила захтевана количина производи прописане чистоће. На основу тога што свака од секција постројења има различите функције у процесу добијања техничких гасова тако и управљачки системи одговарајућих секција формирају различит ниво управљања одговарајућом процесном опремом да би постројење остварило прописане задатке. Неки од битнијих задатака које одговарајуће секције остварују у овој фази су:

- Секција за снабдевање и пречишћавање ваздуха обезбеђује ваздух очишћен од прашине и других нечистоћа одговарајуће количине тј. масеног протока у опсегу од $25856 \div 27148,8$ [kg/h] и температуре у опсегу од $5 \div 25$ [°C], а то се остварује управљањем рада филтером за ваздух где се врши филтрирање процесног ваздуха од прашине и других нежељених елемената, компресором за ваздух на коме се масени проток процесног ваздуха мења отварањем и затварањем улазних лопатица компресора, а промена температуре процесног ваздуха врши променом степена хлађења у међухладњацима.

- Секција хладног циклуса обезбеђује ефикасно хлађење процесног ваздуха тако да се врши издвајање влаге и угљендиоксида из њега, а такође и обезбеђује да процесни ваздух оствари такво термодинамичко стање да би се успешно обавио процес ректификације, а то се остварује управљањем рада реверзним размењивачима топлоте, при чему температура процесног ваздуха на хладном крају размењивача топлоте треба да буде у опсегу од $-172 \div 176$ [°C], а температура на излазу средине размењивача топлоте у опсегу од -120 ± 5 [°C], при чему разлика температура на топлим и хладном крају размењивача топлоте између процесног ваздуха, производа и отпадног азота треба да буде у границама од $3 \div 5$ [°C], такође је од великог значаја управљање радом експанзионе турбине, при чему температура процесног ваздуха на улазу у експанзиону турбину треба да буде у опсегу од -145 ± 5 [°C], а да температура процесног ваздуха на излазу из

експанзионе турбине буде у опсегу од -180 ± 5 [°C], при томе број обртаја турбине мора бити мањи од 15600 [min^{-1}]. За експанзију дела ваздуха након проласка кроз реверзинилне измењиваче, у „Фабрици Техничких Гасова“ у Бору, уграђене су две експанзионе турбине, различитих капацитета. Једна гасна турбина је стално у погону, друга у резерви, а у припреми фабрике за старт након дужих застоја обе турбине раде паралелно.

Енергија која се добија у експанзионој турбини у току рада троши се за погон вентилатора који усисава ваздух из атмосфере независно од струјања ваздуха у гасној турбини. Вентилатор компримира ваздух и на тај начин спречава неограничен пораст броја обртаја ротора турбине, а компримирани ваздух се испушта у атмосферу што није оправдано са енергетског аспекта.

- Секција ректификације треба да обезбеди успешно одвијање процеса ректификације процесног ваздуха и добијање производа: гасовитог кисеоника, гасовитог азота, течног кисеоника и течног азота прописане чистоће, а то се остварује управљањем рада ректификационе колоне, при чему температура у доњој ректификационој колони треба да буде у опсегу од $-173 \div -177$ [°C] при притиску од $5,3 \div 6$ [bar] при чему ниво течног ваздуха треба да буде 600 [mm], а температура у горњој ректификационој колони треба да буде у опсегу од $-180 \div -195$ [°C] при притиску од $1,35 \div 1,4$ [bar] при чему ниво течног кисеоника у главном кондензатору горње ректификационе колоне треба да буде у опсегу од $1700 \div 1800$ [mm].

- Секција за складиштење и дистрибуцију производа обезбеђује поуздано и сигурно складиштење и дистрибуцију производа потрошачима без икаквих ризика од настанка експлозије или цурења производа, а то се остварује управљањем протоком произведеног гасовитог кисеоника који треба да буде у опсегу $4544 \div 4970$ [kg/h], при чему се у резервоару за течан кисеоник налази 100595 [kg] течног кисеоника, а проток произведеног гасовитог азота треба да буде у опсегу $75,03 \div 100,04$ [kg/h], при чему се у резервоару за течан азот налази 36375 [kg] течног азота.

2.4.1 Опис процеса разлагања ваздуха -Фабрика техничких гасова у Бору

Турбокомпресор за ваздух 3 усисава ваздух кроз усисну цев (слика 2.5) и мокри филтер ваздуха, који служи да се из ваздуха одстрани механичке нечистоће и сумпордиоксид. Ваздух се у филтеру пере млазом воде и пролази кроз две секције филтера од синтетичког влакна. Ваздух из орошавајућег хладњака долази у сабирну цев реверзних размењивача топлоте и грана се у сва четири размењивача топлоте. Сваки од размењивача топлоте има по шест канала и у сваком од њих струји различит гас. Кроз канале 1 и 2 гледано са спољне стране на технолошкој шеми долази до промене тока и врсте гаса, док у остала четири канала ток и врста гаса остају исти. Кроз канале 1 и 2 наизменично струје гасовити процесни ваздух и отпадни гасовити азот, који имају супротне смерове струјања, ако кроз канал 1 струји гасовити процесни ваздух кроз канал 2 струји отпадни гасовити азот, и на тај начин долази до размене топлоте у сва четири размењивача топлоте. Приликом проласка кроз канал размењивача топлоте гасовити процесни ваздух се хлади и на површини канала размењивача топлоте остаје лед и суви лед, и након промене тока отпадни гасовити азот избацује тај лед из канала и тиме се врши регенерација канала размењивача топлоте.

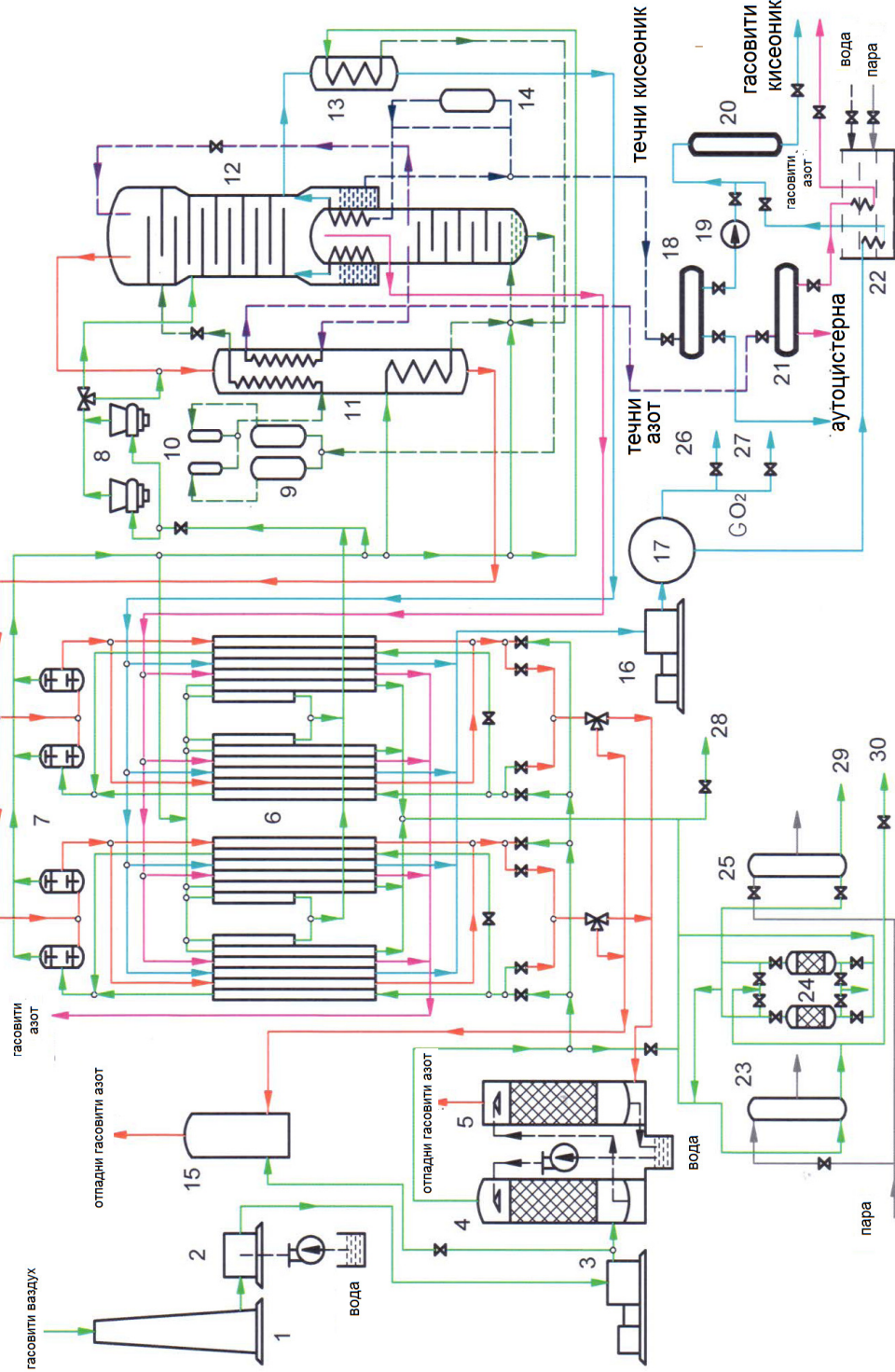
Време измене тока подешава се на тајмеру и обично износи 5 минута, али то значи да ваздух кроз један канал протиче 10 минута а следећих 10 минута кроз тај исти канал протиче гасовити отпадни азот. Кроз канал 3 увек у истом смеру струји гасовити кисеоник. Кроз канал 4 увек у истом смеру струји гасовити азот. Кроз канал 5 увек у истом смеру струји инструментални ваздух. Кроз канал 6 који је од осталих краћи и има излаз на половини размењивача, и њиме увек у истом смеру струји део хладног процесног ваздуха, који се враћа у размењивач топлоте у супротном смеру тј. од хладног краја ка топлим крају размењивача топлоте да би могло да се управља температуром средине размењивача топлоте.

Овај процесни ваздух се затим води у експанзиону турбину. Постоје две експанзионе турбине. Обе турбине раде само код старта фабрике на подхлађивању целог система и после дужег застоја приликом грејања размењивача топлоте, док у нормалним условима рада фабрике ради само турбина ЕТВ – 7600. Након експанзије у гасној турбини процесни ваздух улази у горњу ректификациону колону 12 на процес ректификације. Део процесног ваздуха са

хладног краја размењивача топлоте грана се у три правца. Један правац иде преко првостепеног кондензатора ваздуха, ту се врши утечњавање ваздуха отпадним гасовитим азотом, који долази са врха горње ректификационе колоне.

При томе су:

1-Усисни торањ за ваздух, 2-Филтер за ваздух, 3-Компресор за ваздух, 4-Орошавајући филтер и хладњак ваздуха, 5-Хладњак за воду, 6-Реверзни рекуперативни размењивачи топлоте,7-Вентили,8-Гасне турбине,9- Адсорбери угљоводоника, 10-Филтер за течни ваздух,11-Првостепени кондензатор ваздуха,12-Ректификациона колона, 13-Другостепени кондензатор ваздуха, 14-Циркулациони адсорбер,15-Пригушивач звука,16-Компресор за кисеоник,17-Сферни резервоар за гасовити кисеоник,18-Резервоар за течни кисеоник,19-Пумпа за течни кисеоник, 20-Резервоар за кисеоник за заваривање и сечење,21-Резервоар за течни азот,22-Испаривач течног азота и кисеоника,23-Регенеративни грејач ваздуха,24-Адсорпциони сушач инструменталног ваздуха и ваздуха за загревање,25-Грејач ваздуха,26-Гасовити кисеоник за топионицу,27-Гасовити кисеоник за златару,28-Инструментални ваздух,29-Ваздух за загревање,30-Ваздух за регенерацију



Слика 2.5. Технолошка шема „Фабрике Техничких Гасова“

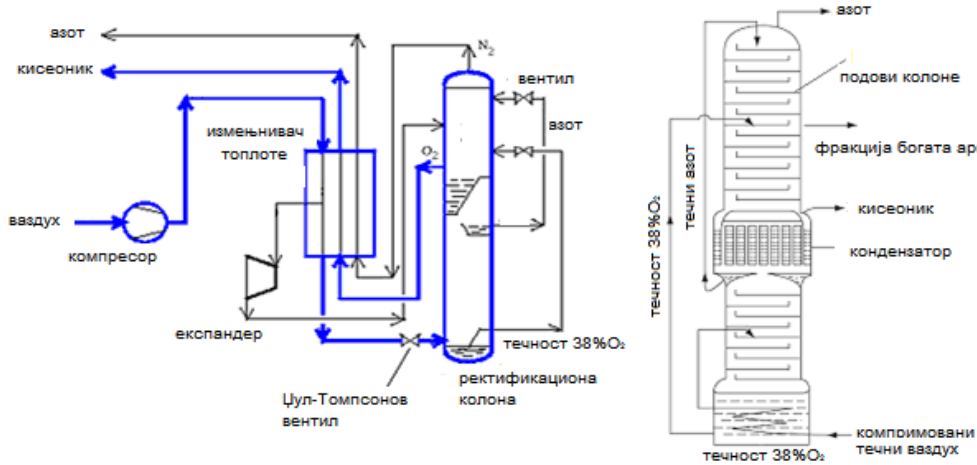
Други правац иде преко другостепеног кондензатора ваздуха, ту се врши утечњавање ваздуха гасовитим кисеоником. Трећи правац процесног ваздуха спаја се са претходна два тока утечњеног ваздуха и као смеша утечњеног и хладног ваздуха уводи се у доњу ректификациону колону на даљи процес ректификације. Течан ваздух богат кисеоником са дна доње ректификационе колоне води се у један од два адсорбера угљоводоника да би се одстранили преостали угљоводоници. Постоје две адсорбера угљоводоника.

Након проласка кроз адсорбер угљоводоника течан ваздух се води у један од два филтера течног ваздуха који је од специјалног филтер платна и има улогу да задржи прах силика гела који се током рада створи, и не дозволи да са течним ваздухом оде у горњу ректификациону колону. Постоје два пара адсорбера и филтера течног ваздуха, један пар ради четири дана и након тога се врши њихова регенерација. Течан ваздух се води у првостепени кондензатор ваздуха где се додатно охлади, затим се пригушује на радни притисак горње колоне и уводи у њу на даљи процес ректификације у горњу колону.

Течан кисеоник са дна горње ректификационе колоне се води у циркулациони адсорбер угљоводоника где се одстрањују заостали угљоводоници, затим део одлази у резервоар течног кисеоника. Други део течног кисеоника се одводи у главни кондензатор где размењује топлоту са гасовитим азотом, кисеоник испарава, а азот кондензује. Гасовити кисеоник затим одлази у другостепени кондензатор ваздуха а затим и у реверзне рекуперативне размењиваче топлоте, одакле се клипним компресором за кисеоник шаље у сферни резервоар кисеоника.

Гасовити азот се са врха доње колоне води у реверзне размењиваче топлоте. Течни азот са врха доње ректификационе колоне се делом пригушује на радни притисак горње ректификационе колоне и уводи у њу, а делом се води у првостепени кондензатор ваздуха где се додатно охлади и води у резервоар за течан азот. Отпадни гасовити азот са врха горње ректификационе колоне одлази у првостепени кондензатор затим у реверзне размењиваче топлоте, затим се води у

хладњак где хлади воду која се угрејала приликом хлађења процесног ваздуха са излаза турбокомпресора, и након тога се испушта у атмосферу.

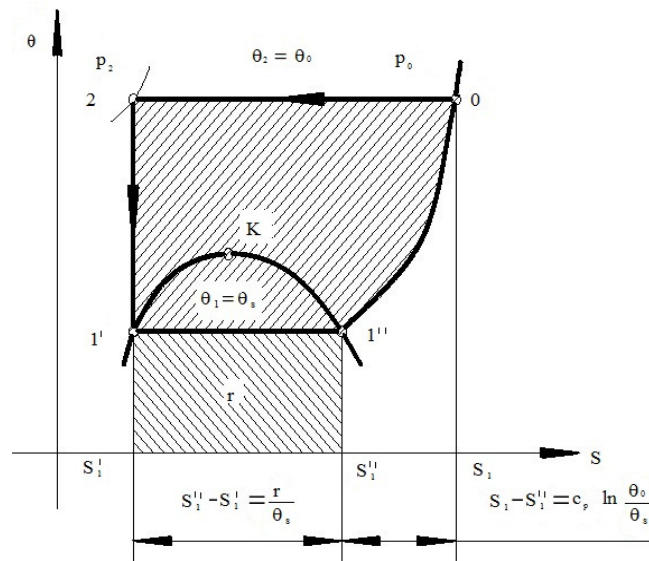


Слика 2.6. Ректификација течног ваздуха, *Баљак, (2011)*

2.5. Идеални процес утечњавања ваздуха

На основу T - s дијаграма ваздух се из околине стања 0 (θ_0, p_0) сл.2.7, у којој се налази као прегрејана пара, компријусе изотермно до стања 2 (θ_2, p_2), при чему се топлота при компресији одводи од ваздуха и предаје околини исте температуре. Прелаз топлоте је повратан, односно процес имајући у виду да између температуре компримованог ваздуха и температуре околине нема разлике. После изотермне компресије ваздуха одвија се изентропска (адијабатска) експанзија до стања 1 ($\theta_1 = \theta_s, p_1 = p_0$), где се добија течан ваздух.

Уочава се да теоријски процес утечњавања ваздуха са изотермном ($\theta = idem$) компресијом (0–2) и адијабатском експанзијом ($pv^k = idem$) у инжењерској пракси је тренутно неизводљив, јер се тачка 2 налази у подручју веома високих притисака (око 50[GPa]).



Слика.2.7. Процес утешњавања ваздуха у T-s дијаграму, Митовски,(1994)

К. Линде (*Karl von Linde*) крајем XIX века на један нови начин дошао до решења ка техничком утешњавању ваздуха.

Линде је уз помоћ рекуперативног размењивача топлоте искористио незнатно хлађење ваздуха које се појављује код пригушивања од вишег притиска на нижи, чиме је успео да економичније утешњавања велике количине ваздуха.

2.5.1. Пригушни ефект

Из праксе, пригушивање неког гаса настаје кад се слободни пресек струјања нагло сузи а затим опет прошири, услед чега долази до наглог смањења притиска и наглог повећања брзине струјања флуида. Само нагло смањење локалног попречног пресека може се извршити уграђивањем одговарајуће прирубнице или вентила.

Овде је посебно битно истаћи да једна од битних особина идеалних гасова при адијабатском пригушивању је да енталпија радног тела остаје константна. Другим речима, температура неког идеалног гаса се не мења када се гас

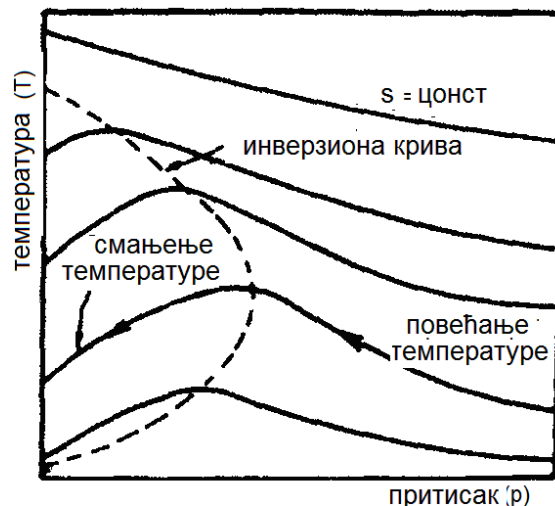
пригушује од притиска p_1 на нижи притисак p_2 . На сличан начин се понашају при ниским притисцима и реални гасови.

Међутим, код адијабатског пригушивања реалних гасова појављује се при вишим притисцима већа или мања промена температуре, познат под називом као Џул–Томсонов (*Joule-Thompson*) ефект или пригушни ефект, и дат је следећим изразом:

$$\mu_s = [\partial\theta / \partial p]_s = \frac{1}{c_p} [\theta(\partial v / \partial \theta)_p - v] \quad [K / kPa] \quad (2.1)$$

За случај када је $\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_p < \frac{v}{\theta}$, произилази да је $\mu_s < 0$, температура гаса при пригушивању расте (гас се загрева), а у случају да је $\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_p > \frac{v}{\theta}$, гас се хлади и када је $\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_p = \frac{v}{\theta}$, $\mu_s = 0$, температура гаса остаје непромењена.

Посебно када је стање реалног гаса у коме је $\mu_s = 0$ назива се тачком инверзије. Одређено је да је инверзна температура за ваздух $760[K](487[^\circ C])$, ако је температура реалног гаса виша од инверзне температуре ($\theta > \theta_{inv}$) при пригушивању он загрева, ако је нижа ($\theta < \theta_{inv}$) гас се хлади и код једнаке температуре гаса са инверзном ($\theta = \theta_{inv}$) његова температура се не мења.



Слика 2.8. Изенталпска експанзија реалног гаса, Раиковић, (2005)

Тако се на пример пригушивањем ваздуха на температури околине он хлади, а водоник и хелијум се загревају. Показано је експериментима да у подручју од $0 \div 100 [^{\circ}C]$ и притиска до $6 [bar]$ пригушни ефект зависи само од температуре, а не и од притиска тј.:

$$\mu_s = [\partial \theta / \partial p]_s = \beta (273 / \theta)^2 \quad (2.2)$$

У случају ваздуха добија се $\beta = 2,65 \cdot 10^{-6} \left[\frac{K}{Pa} \right] = 0,265 \left[\frac{K}{bar} \right]$.

Адијабатско ширење

У идеалном случају ширење гаса је адијабатски повратни процес тј. изентропски. За добијање ниских температура користи се адијабатско ширење гаса кроз експанзиону машину при чему се добија и рад. У том случају можемо написати да је коефицијент изентропског ширења $\mu_s = [dT / dp]_s$. Такође се може написати, *Рашковић, (2005)*:

$$\mu_s = [dT / dp]_s = [dT / ds]_p [ds / dp]_T = (T / c_p) [dv / dT]_p \quad (2.3)$$

за идеалан гас је $[dv / dT]_p = R / \rho = v / T$ па је сада:

$$\mu_s = v / c_p \quad (2.4)$$

Видимо да изоентропско ширење гаса кроз експанзиону машину увек проузрокује пад температуре за разлику од ширења кроз експанзиони вентил. Ширењем кроз експанзиону машину гасу се одузима енергија у облику рада и тај метод се зове метод спољашњег рада. Код ширења кроз експанзиони вентил не одводи се енергија гасу, већ се удаљавају молекули гаса један од другог под утицајем међумолекулских сила, па се тај метод зове *метод унутрашњег рада*.

Ширење гаса кроз експанзиону машину је ефикаснији метод снижавања температуре гаса. Због практичних проблема везаних за ширење двофазних смеша /течност-пара/ у експанзионим машинама, употреба експанзионог вентила је нужна у свим системима за утечњавање гасова.

2.5.2. Утечњавање ваздуха ниског притиска

Руски академик П.Л.Капице (П.Л.Капица¹), је први пут увео 1938. године утечњавање ваздуха ниског а подразумева утечњавање ваздуха притиска $p_2 = 6 \div 7 [\text{bar}]$ и експанзију у гасној (експанзионој) турбини.

Поступак почиње тако да се ваздух из околине стања 1 компримира турбокомпресором и хлади до стања 2, (види сл.2.9). Затим се компримирани ваздух под притиском p_2 доводи у одговарајући реверзни размењивач топлоте, где се хлади до стања 3, *Гајић, (2008)*.

При томе се део ваздуха са средине размењивача топлоте стања 3* и део са стањем 3, који чине $m_e \left[\frac{\text{kg}}{\text{kg}} \right]$ компримираног ваздуха, доводи у експанзиону криогену турбину где након експанзије постиже стање 8, притиска p_1 .

Међутим, услед губитака при струјању и других неповратности експанзија не иде изентропски до стања 8_{ad} , већ до стања 8, која се налази десно од идеалног стања. Уочава се такође, да се бира место за одузимање ваздуха стања 4 стање 8, на крају експанзије, и које лежи у прегрејаном подручју у близини горње граничне криве (у $T-s$ дијаграму, $x=1,0$) на $1 \div 3 [K]$ изнад температуре сувозасићене паре.

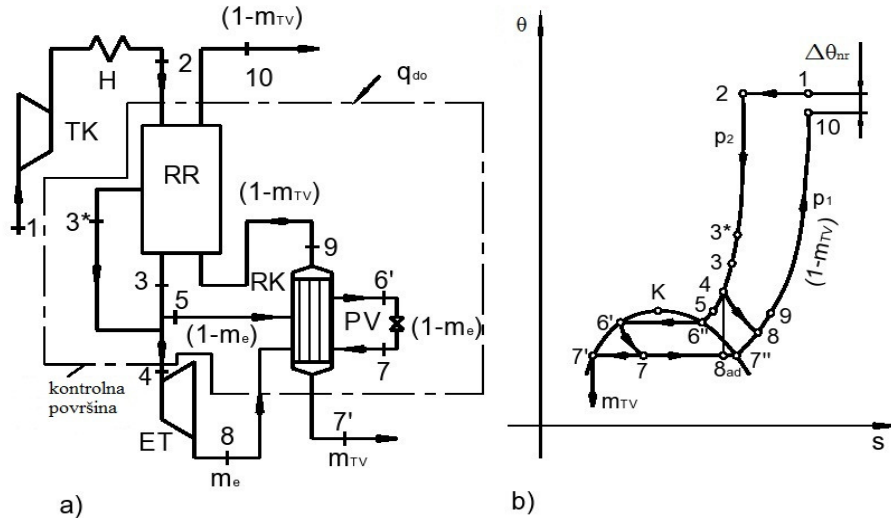
Затим се охлађени експандирани ваздух m_e, kg стања 8 води се у кондензатор где се меша са $(1 - m_e - m_{TV}) \text{kg}$ након одговарајућег пригушивања.

При томе се тако измешана струја ваздуха од $(1 - m_{TV}) \text{kg}$ користи за утечњавање $(1 - m_e) \text{kg}$ компримираног ваздуха који долази са стањем 5 из хладног краја размењивача топлоте и утечњава се на стање 6'.

Утечњени ваздух стања 6' се пригушује са p_2 на p_1 , тако да се добија стање 7. У стању 7 ваздух се раздваја на течни ваздух стања 7' и $(1 - m_e - m_{TV}) \text{kg}$ сувозасићеног ваздуха стања 7'', који се затим враћа кроз размењивач топлоте.

¹ Пётр Леонидович Капица (1894-1984), добитник Нобелове награде за физику 1978. године.

Сама шема постројења за утечњавање ваздуха ниског притиска и процес приказан у T-s дијаграму су приказани на слици 2.9.



Слика 2.9. Шема постројења за утечњавање ваздуха ниског притиска (а) и T-s дијаграм процеса (б), Митовски, (1994)

Основни уређаји датог криогеног постројења су: ТК – турбокомпресор, РР – реверзни размењивач топлоте, ЕТ – експанзиона турбина, Х – хладњак ваздуха, РК – размењивач топлоте тј. кондензатор ваздуха, ПВ– пригушни вентил

Утечњен ваздух количине m_{TV} може да се одреди на основу топлотног биланса:

$$i_2 = m_{TV} i_7' + (1 - m_{TV}) i_{10} + m_e (i_4 - i_8) - q_{do}; \left[\frac{kJ}{kg} \right] \quad (2.5)$$

где су:

$q_{do} \left[\frac{kJ}{kg} \right]$ - топлота доведена из околине по kg ваздуха, $m_{TV} \left[\frac{kg}{kg} \right]$ - маса утечњеног

ваздуха, $m_e \left[\frac{kg}{kg} \right]$ - маса ваздуха који експандира у експанзионој турбини

У идеалном случају када је $q_{do} \approx 0$ и $\Delta\theta_{nr} = \theta_1 - \theta_{10} \approx 0$ маса утечњеног ваздуха износи:

$$m_{TV} = \frac{i_{10} - i_2}{i_{10} - i_7} + m_e \cdot \frac{i_4 - i_8}{i_{10} - i_7} \leq \frac{i_1 - i_2}{i_{10} - i_7} + m_e \cdot \frac{i_4 - i_8}{i_{10} - i_7} \quad (2.6)$$

Предност поступка према Капици у односу на друге поступке утечњавања *Митовски, (1994)* је да се и при ниском притиску још увек не мора утрошити претеран рад за утечњавање $1[kg]$ ваздуха. С обзиром да је турбина способна за много веће протоке него клипни компресор овај поступак је прилагођен за велика постројења каква се сусрећу у пракси.

Као што је добро познато експанзионе (гасне) турбине спадају у групу турбомашина заједно са пумпама, вентилаторима, парним турбинама и турбокомпресорима. При томе, ужи део ове групе представља група топлотних турбомашина коју чине парне и гасне турбине и турбокомпресори. Турбине спадају у проточне машине које континуално дају рад, јер се у турбомашинама рад директно добија преко обртног кретања радних делова када су у питању турбине.

Конструкционо гледано, основне делове турбине чине кућиште и покретна решетка радног кола, спојена са вратилом, где се под решетком подразумева већи број идентичних аеропрофила постављених на истом међусобном одстојању. Код турбомашина се мисли на кружне решетке, где су лопатице (аеропрофилна тела) постављене осносиметрично при чему лопатице радног кола заједно са вратилом чине ротор који се ослања на лежишта.

Обрћући се, коло путем лопатица прима енергију флуида и преноси је на вратило, за рад кола неопходно је да постоји сила која делује између кола и флуида. Обимна компонента ове силе условљава пренос енергије са флуида на лопатице. Због дејства ових сила, флуид, при пролазу кроз коло, мења правац струјања, односно скреће, *Гајић, (2008)*.

Без скретања флуида нема ни преноса енергије, при чему је интензитет преноса енергије сразмеран струјном скретању, где су јача скретања условљена већим силама по јединици протока.

Историјски гледано, први је увео П.Л.Капица (П.Л.Капица) експанзиону турбину у процес утечњавања ваздуха и она служи за експанзију (ширење)

ваздуха са термодинамичког стања $P(p_p, \theta_p)$ на стање $K(p_k, \theta_k)$ снижавајући при томе температуру ваздуха са θ_p на θ_k и притиска са p_p на p_k .

При томе, после експандирања ваздух хлади опрему при старту и одводи топлоту насталу услед размене топлоте са околином у току рада.

Према *Митовски, (1994)*, количина ваздуха која експандира у гасној турбини, не прелази 25% количине прерађиваног ваздуха.

За експанзију дела ваздуха након проласка кроз реверзинилне измењиваче, користе се две експанзионе турбине у „Фабрици Техничких Гасова“ у Бору, различитих капацитета. При томе, увек је једна гасна турбина стално у погону, док је друга у резерви, а у припреми фабрике за старт након дужих застоја обе турбине раде паралелно.

Добијена енергија у експанзионој турбини се током рада троши се за погон вентилатора који усисава ваздух из атмосфере независно од струјања ваздуха у гасној турбини.

Даље, вентилатор компримира ваздух чиме се спречава неограничен пораст броја обртаја ротора турбине, где се компримирани ваздух испушта у атмосферу што није оправдано са енергетског аспекта.

2.5.3. Основне поставке експанзије ваздуха

Са становишта термодинамике експанзиона турбина је дефинисана следећим параметрима радног флуида (ваздуха), а то су:

-Масени проток $G [kg / s]$, Почетни притисак $p_p [bar]$

-Почетна температура $\theta_p [K]$, Крајњи притисак $p_k [bar]$

-Крајња температура $\theta_k [K]$, однос притисака $\lambda = \frac{p_k}{p_p}$

На основу ових параметара могуће је сада одредити и специфични расположиви (изентропски) топлотни пад на следећи начин:

$$\Delta i' = i_p - i_k; \left[\frac{kJ}{kg} \right] \quad (2.7)$$

где су:

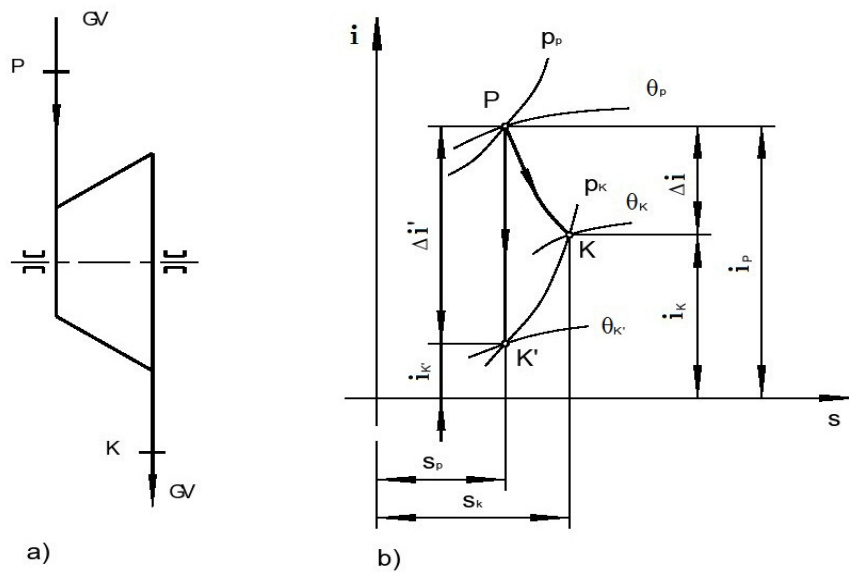
$i_k \left[\frac{kJ}{kg} \right]$ - енталпија ваздуха након изентропске експанзије до притиска p_k

и температуре θ_k

$i_p \left[\frac{kJ}{kg} \right]$ - енталпија ваздуха у почетном термодинамичком стању при

параметрима p_p, θ_p ,

На доњој сл.2.10. величина специфичног изентропског топлотног пада је представљена одговарајућом дужином $\overline{PK'}$.



Слика. 2.10. Шема експанзионе турбине (а) и i - s дијаграм експанзије ваздуха у гасној турбини (б), *Митовски, (1994)*

Стварни специфични топлотни пад се одређује према следећој једначини:

$$\Delta i = i_p - i_k; \left[\frac{kJ}{kg} \right] \quad (2.8)$$

где је:

$i_k \left[\frac{kJ}{kg} \right]$ - енталпија ваздуха након изентропске експанзије до притиска p_k и

температуре θ_k

Величина специфичног стварног топлотног пада је приказана и илустрована о на слици 2.10 догварајућом пројекцијом дужине $\overline{PK'}$ по ординати i .

Може се такође закључити да на основу закона о одржању енергије, да је, код идеално термички изоловане гасне турбине и при једнаким брзинама струјања ваздуха на улазу и излазу из ње, специфични изентропски топлотни пад $\Delta i'$ (дуж $\overline{PK'}$ на сл.2.10) еквивалентан унутрашњем раду гасне турбине, *Гајућ,(2008), Митовски,(1994)*.

Међутим као што је добро познато, код реалних гасних турбина експанзија ваздуха праћена је увек топлотним губицима, па се последично, промена термодинамичког стања ваздуха у гасној турбини одвија неповратно, тј. праћено је са порастом ентропије ($s_{k'} < s_k$). На тај начин, тачка која означава термодинамичко стање ваздуха на крају експанзије K увек се налази десно од почетне тачке P и енталпија i_k увек је мања од $i_{k'}$, а тиме је и $\Delta i < \Delta i'$.

Са термодинамичког становишта за квалитативну оцену рада гасне турбине, користи се изентропски (унутрашњи) степен корисности који се одређује следећим изразом:

$$\eta_T = \frac{\Delta i}{\Delta i'} = \frac{i_p - i_k}{i_p - i_{k'}} \approx \frac{\theta_p - \theta_k}{\theta_p - \theta_{k'}} \quad (2.9)$$

Код савремених експанзионих турбина унутрашњи степен корисности креће се у границама $\eta_T = 0,80 \div 0,85$.

На основу следећег израза тј. односа:

$$\frac{\theta_p}{\theta_{k'}} = \lambda^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (2.10)$$

Може се одредити температура ваздуха након експанзије:

$$\theta_k = \theta_p \left[1 - \left(1 - \lambda^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) \cdot \eta_T \right]; [K] \quad (2.11)$$

При томе специфични стварни топлотни пад у експанзионој гасној турбини је сада:

$$\Delta i = i_p - i_k = c_p \cdot \theta_p \left(1 - \lambda^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) \cdot \eta_T; \left[\frac{kJ}{kg} \right] \quad (2.12)$$

где је узето да је специфична топлота ваздуха c_p константна. Технички адијабатски (изентропски) рад експанзије ваздуха у гасној турбини је:

$$L_{t,ad} = 10^{-3} \frac{\kappa}{\kappa-1} R \cdot \theta_p \left[1 - \left(\frac{p_k}{p_p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]; \left[\frac{kJ}{kg} \right] \quad (2.13)$$

Тако да се може одредити снага турбине на вратилу – *ефективна снага*, при експанзији $G \left[\frac{kg}{s} \right]$ приликом промене притиска са p_p на p_k и она има вредност:

$$N_{eT} = N_i \cdot \eta_m = G \cdot L_{t,ad} \cdot \eta_T \cdot \eta_m; [kW] \quad (2.14)$$

где су:

$N_i [kW]$ - унутрашња (изентропска) снага гасне турбине

η_m - механички степен корисности гасне турбине ($\eta_m = 0,95 \div 0,97$).

Глава 3

3. Динамика криогене експанзионе турбине као објекта управљања

За описивање динамичког понашања експанзионе (гасне) турбине која служи за снижавање температуре у постројењу полазимо од следећих закона о одржању: масе, енергије, импулса и једначина промене стања.

Применом ових закона налазимо једначине које, у инжењерско техничком смислу, описују динамичко понашање гасне (експанзионе) турбине:

- Једначина поља обртања ротора гасне турбине
- Једначина поља притиска у гасној турбини
- Једначина поља температуре у гасној турбини

3.1. Једначина поља обртања ротора гасне турбине

У циљу одређивања једначине поља обртања ротора гасне турбине прво се дају теоријске основе одговарајућих закона механике који се примењују за разматрани случај.

Општи закони динамике, Лангражеве једначине 2 врсте

Овде ће бити од интереса представити и користити један облик диференцијалних једначина кретања система крутих тела $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ и то Лангранжевих једначина друге врсте јер у њима експлицитно не фигуришу реакције веза, што олакшава њихово решавање у функцији независних генералисаних координата (q^1, q^2, \dots, q^N) . У случају да је систем подвргнут реалним везама, реакције је потребно придружити активним силама. У општем случају, када су присутне двостране холономне (k) и нехолономне везе (l) дате респективно са:

$$f_j(q^1, q^2, \dots, q^N) = 0, j = 1, \dots, k, \quad \sum_{\gamma=1}^N R_{s\gamma} dq_\gamma + g_s dt = 0, s = 1, 2, \dots, l \quad (3.1)$$

Лангранжеве једначине друге врсте су облика:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q^\gamma} = Q_\gamma + \sum_{s=k+1}^{k+l} \mu_s R_{s\gamma}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, N = 3n - k \quad (3.2)$$

где је потребно придужити једначине нехолономних веза облика

$$\sum_{\gamma=1}^N R_{s\gamma} dq_\gamma + g_s dt = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (3.3)$$

Ако не постоје нехолономне везе онда Лангражеве једначине друге врсте за дати систем су:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q^\gamma} = Q_\gamma \quad \gamma = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

Кинетичка енергија система од n крутих тела

Потребно је сада одредити кинетичку енергију за дати систем крутих тела. Уочава се да је диференцијал кинетичке енергије крутог тела (V_i), (види Човић, Лазаревић, 2009), масе m_i , једнак

$$dE_{k(i)} = \frac{1}{2} dm_i v_{M_i}^2, \quad (3.5)$$

где је \vec{v}_{M_i} брзина унутрашње тачке M_i елементарне запремине dV_i , (маса dm_i , C_i -центар инерције датог тела (V_i), $\vec{\omega}_i$ - угаона брзина сегмента (V_i)) је једнака:

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_i = \vec{v}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i. \quad (3.6)$$

Сада је кинетичка енергија тела одређена са:

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} \int_{(V_i)} (\vec{v}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) \cdot (\vec{v}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) dm_i. \quad (3.7)$$

Након одређених трансформација претходни израз се добија као:

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2} \int_{(V_i)} (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) \cdot (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) dm_i \quad (3.8)$$

Како је

$$(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) \cdot (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) = (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) \cdot \{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\} = -(\vec{\omega}_i) [\rho_i^d]^2 \{\vec{\omega}_i\}, \quad (3.9)$$

и имајући у виду да је са $[\rho^d]$ означен дуални објекат датог вектора као и да је тензор инерције тела (V) , у односу на $C\xi\eta\zeta$, дефинисан следећом релацијом, (види Човић, Лазаревић, 2009)

$$[J_C] \stackrel{def}{=} - \int_{(V)} [\rho^d]^2 dm = \begin{bmatrix} J_{C\xi\xi} & J_{\xi\eta} & J_{\xi\zeta} \\ J_{\eta\xi} & J_{C\eta\eta} & J_{\eta\zeta} \\ J_{\zeta\xi} & J_{\zeta\eta} & J_{C\zeta\zeta} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

слиди да се претходни израз може написати као:

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2} (\bar{\omega}_i) [J_{C_i}] \{ \bar{\omega}_i \}, \quad (3.11)$$

За случај када је брзина центра маса $v_c = 0$, (пример обртања једног крутог тела око непокретне осе- случај ротора у експанзионој турбини) претходни израз се своди на

$$E_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_\zeta \end{pmatrix} [J_{C_i}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\zeta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} J_{C_\zeta} \omega_\zeta^2 \quad (3.12)$$

У општем случају, моменти инерције могу бити и функције времена, $J_{C_\zeta}(t)$ (пример намотавања материјала на ротациони део машине итд.), тако да се у том случају одговарајућа Лангражева једначина кретања добија на следећи начин:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma} = \frac{\partial E_k}{\partial \omega_\zeta} = J_{C_\zeta}(t) \omega_\zeta(t), \quad \frac{\partial E_k}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial E_k}{\partial \omega_\zeta} = 0 \quad (3.13)$$

односно

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma} = \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \omega_\zeta} = \frac{d}{dt} (J_{C_\zeta}(t) \omega_\zeta(t)) + (J_{C_\zeta}(t)) \frac{d\omega_\zeta(t)}{dt} \quad (3.14)$$

Заменом у одговарајући израз (3.4) слиди

$$\frac{d}{dt} (J_{C_\zeta}(t) \omega_\zeta(t)) + (J_{C_\zeta}(t)) \frac{d\omega_\zeta(t)}{dt} = Q_1, \quad Q_1 = M^s(t) \quad (3.15)$$

где је са десне стране неопходно да одредимо генералисане силе Q_1 услед дејства $M_a(t)$ активних(покретачких) момената, и одговарајућих момената унутрашњих отпорних сила као $M_{ot}(t)$ као и момента спољнег оптерећења $M_{op}(t)$.

$$M^s(t) = M_a(t) - M_{op}(t) - M_{ot}(t) \quad (3.16)$$

Када је $J_{C\zeta} = const$ добија се једноставнији облик -добро познати закон обртања ротора турбине као:

$$J_{C\zeta} \frac{d\omega_\zeta(t)}{dt} = J_{C\zeta} \varepsilon_\zeta(t) = M^s(t) \quad (3.17)$$

До исте диференцијалне једначине кретања ротора експанзионе турбине могло се доћи и применом закона о промени момента количине кретања крутог тела –*дат општи случај*:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = m\vec{v}_C \times \vec{v}_A + \vec{M}_{AR}^s \quad (3.18)$$

где су сада \vec{M}_{AR}^s - главни момент спољашњих сила које делују на дато тело (V), срачунат у односу на произвољно изабрану тачку A , \vec{v}_C -брзина средишта маса тела, а са \vec{L}_A кинетички момент тела срачунат у односу на тачку A и који је облика:

$$\{\vec{L}_A\} = m\{\vec{\rho}_C \times \vec{v}_A\} + [J_A]\{\vec{\omega}\}, \quad (3.19)$$

За случај када је $A \equiv C$ следи:

$$\vec{L}_C = [J_C]\{\vec{\omega}\} \quad (3.20)$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{d}{dt}([J_C]\vec{\omega}) = \frac{d_r \vec{L}_C}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_C = \vec{M}_R^s \quad (3.21)$$

где је са $d_r \vec{L}_C / dt$ означен релативни извод вектора момента количине кретања

$$\frac{d_r \vec{L}_C}{dt} = \frac{d L_{C\xi}}{dt} \vec{\lambda} + \frac{d L_{C\eta}}{dt} \vec{\mu} + \frac{d L_{C\zeta}}{dt} \vec{v} \quad (3.22)$$

Усвајајући осу обртања као $O\zeta$ код ротације ротора експанзионе турбине следи

$$\vec{L}_C = [J_C] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \omega_\zeta \end{array} \right\} = J_{C\zeta} \omega_\zeta \vec{v} \quad (3.23)$$

Заменом у (3.21) на крају се добија:

$$\frac{d\bar{L}_C}{dt} = \frac{d}{dt} (J_{C\zeta}(t) \omega_\zeta(t)) \bar{v} = M_R^s \bar{v} \quad (3.24)$$

односно за случај $J_{C\zeta} = const$ добија се исти облик једначине као и у претходном случају, (3.17).

Овде је од посебног интереса одређивање генералисаних сила Q услед дејства $M_a(t)$ активних(покретачких) момената, и одговарајућих момената унутрашњих отпорних сила као $M_{or}(t)$ као и момента спољнег оптерећења $M_{op}(t)$. Уочава се да израз за активни момент може имати најразличитије облике, од којих се овде наводе само неки, на пример, (Дебељковић, 2006,2012):

$$M_a(t) = M_a(\omega(t), Y(t)), M_a(t) = M_a(\omega(t), Y(t), p(t), \theta(t), \dots) \quad (3.25)$$

Док израз је отпорни момент најчешће само функција угаоне брзине обртања

$$M_{or}(t) = M_{or}(\omega(t)). \quad (3.26)$$

С друге стране момент оптерећења зависи од карактеристике датог уређаја или прикључене машине и у општем случају он представља поремећај у односу на дати мотор или радну машину и он је најчешће нелинеарна функција угаоне брзине и/или времена:

$$M_{op}(t) = \left\{ \begin{array}{l} M_{op}(\omega(t), t) \\ M_{op}(\omega(t)) \\ M_{op}(t) \end{array} \right\}. \quad (3.27)$$

Сматраће се да током рада турбина не мења смер обртања.

Даље, уводимо ознаку за пасивни момент као $M_p(t) = M_{op}(t) + M_{or}(t)$.

У литератури се може наћи следећи облик за пасивни момент који је следећег облика, (види Дебељковић, 2006, 2007)

$$M_p(t) = \gamma_1 \omega^2(t) + \gamma_2 \omega(t) + \gamma_3 \sqrt{\omega(t)}, \quad \gamma_i = const., \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.28)$$

при чему се до тачног облика ове зависности долази експерименталним путем.

Овде се даје један општији облик за пасивни момент $M_p(t)$ сматрајући да одговарајући моменти унутрашњих отпорних сила $M_{or}(t)$ може зависити од $\omega(t)$

на сложенији начин. Наиме, ако се узме ефекат акумулације услед стишљивости флуида и особине дисипативности са једне стране која утиче на карактер унутрашњих отпорних сила и особина фракционих оператора са друге стране, овде се даје следећа зависност за пасивни момент $M_p(t)$.

Израз за пасивни момент $M_p(t)$ је функција нецелог реда угаоне брзине $\omega(t)$ и приказана у следећем облику:

$$M_p(t) = {}_0D_t^\alpha \omega(t), \quad (3.29)$$

где је са ${}_0D_t^\alpha(\cdot)$ представљен тзв. нецели извод, леви Риман-Луивилов извод за $\alpha \in (0,1)$, где је $\omega(t)$ апсолутно непрекидна функција на интервалу $t \in [a,b]$ и дат са:

$${}_0D_t^\alpha \omega(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \omega(\tau) d\tau, \quad a=0, 0 < \alpha < 1 \quad (3.30)$$

За практичну примену претходни израз је потребно апроксимирати. Ако је $\omega(t)$ аналитичка функција онда претходни нецели извод се може развити у степени ред у функцији извода целог реда, (*Samko, Kilbas, Marichev, 1993*):

$${}_0D_t^\alpha \omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \omega^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha \Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(n+1)} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \omega^{(n)}(t) \quad (3.31)$$

Међутим, претходни израз за практичну примену није толико корисна јер важи само за аналитичке функције и тражи се да је позната почетна вредност разматране функције $\omega(0)$ и да су дефинисани сви изводи у почетном тренутку.

Овде ће даље бити искоришћена апроксимација извода ${}_0D_t^\alpha \omega(t)$ коју су извели у радовима (*Atanacković, Stanković, 2004*) и која је применљива и за неаналитичке функције и садржи коначан број целих извода функција и тзв. момената функције $V_p(t)$.

$${}_0D_t^\alpha \omega(t) = A(N, \alpha) \omega(t) t^{-\alpha} + B(N, \alpha) t^{1-\alpha} \dot{\omega}(t) - \sum_{p=2}^N C(p, \alpha) t^{1-p-\alpha} \tilde{V}_p(t) + R_N(t) \quad (3.32)$$

где су $A(N, \alpha), B(N, \alpha), C(p, \alpha)$ и $R_n(t)$ одређени следећим изразима:

$$\begin{aligned}
A(N, \alpha) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(p-1)!} \right], \\
B(p, \alpha) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)p!} \right], \\
C(p, \alpha) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{(p-1)!}, \\
R_n(t) &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \omega^{(2)}(\tau) \left(\sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)p!} \left(\frac{\tau}{t}\right)^p \right) d\tau
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Остатак $R_n(t)$ се може занемарити узимајући у обзир довољно велико N , *Atanacković, Zorica, (2013)*, односно имамо следећу апроксимацију облика:

$${}_0D_t^\alpha \omega(t) \approx A(N, \alpha) \omega(t) t^{-\alpha} + B(N, \alpha) t^{1-\alpha} \dot{\omega}(t) - \sum_{p=2}^N C(p, \alpha) t^{1-p-\alpha} \tilde{V}_p(t) \tag{3.34}$$

Моменти функције $V_p(t)$, $p = 2, 3, \dots$ су дефинисани следећим изразом:

$$V_p(\omega(t)) = V_p(t) = (1-p) \int_0^t t^{p-2} \omega(\tau) d\tau, \quad p \in N, t \geq 0 \tag{3.35}$$

и представљају $(p-2)$ моменте функције $\omega(\cdot) \in AC^2[a, b]$. Моменти се могу одредити и као решење следећег система диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_p(\omega(t)) &= (1-p)t^{p-2}\omega(t), \\
V_p(\omega(0)) &= 0, \quad p = 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{3.36}$$

На тај начин експанзиона формула се може интерпретирати као израз за фракциони извод ${}_0D_t^\alpha \omega(t)$ у функцији $\omega(t)$ и „интерних променљивих“ $V_p(t)$, $p = 2, 3, \dots, N$.

За случај да је $\alpha \leq 0.5$ и $N \geq 50$ довољно велико $B(N, \alpha) \approx 0$ онда се у том случају може користити

$${}_0D_t^\alpha \omega(t) \approx \omega(t) t^{-\alpha} A(N, \alpha) - \sum_{p=2}^N C(p, \alpha) t^{1-p-\alpha} \tilde{V}_p(t) \tag{3.37}$$

На основу закона о промени момента количине кретања (3.17) и (3.32) има се следећа диференцијална једначина кретања ротора турбине у облику:

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega(t)}{dt} &= M_a(t) - M_p(t) = M_a(t) - {}_0D_t^\alpha \omega(t) = \\ &= M_a(t) - A(5, \alpha) \omega(t) t^{-\alpha} - B(5, \alpha) t^{1-\alpha} \dot{\omega}(t) + \sum_{p=2}^{N=5} C(p, \alpha) t^{1-p-\alpha} \tilde{V}_p(t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\omega(t)) &= -\omega(t), \\ \dot{V}_3(\omega(t)) &= -2t\omega(t), \\ \dot{V}_4(\omega(t)) &= -3t^2\omega(t), \\ \dot{V}_5(\omega(t)) &= -4t^3\omega(t) \\ V_p(\omega(0)) &= 0, \quad p = 2, 3, 4, 5, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где је усвојено $N = 5$. После сређивања добија се:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = [J + B(5, \alpha) t^{1-\alpha}]^{-1} \left(M_a(t) - A(5, \alpha) \omega(t) t^{-\alpha} + \sum_{p=2}^{N=5} C(p, \alpha) t^{1-p-\alpha} V_p(t) \right) \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(\omega(t))}{dt} &= -\omega(t), \\ \frac{dV_3(\omega(t))}{dt} &= -2t\omega(t), \\ \frac{dV_4(\omega(t))}{dt} &= -3t^2\omega(t), \\ \frac{dV_5(\omega(t))}{dt} &= -4t^3\omega(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Увођењем следећих променљивих $x_1 = \omega$, $x_2 = V_2$, $x_3 = V_3$, $x_4 = V_4$, $x_5 = V_5$, може се претходне једначине приказати у простору стања на следећи начин:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= [J + B(5, \alpha) t^{1-\alpha}]^{-1} \left(M_a(t) - A(5, \alpha) x_1(t) t^{-\alpha} + \sum_{p=2}^{N=5} C(p, \alpha) t^{1-p-\alpha} x_p(t) \right) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_1(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -2tx_1(t), \\ \frac{dx_4(t)}{dt} &= -3t^2x_1(t), \\ \frac{dx_5(t)}{dt} &= -4t^3x_1(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Претпоставка 1. Ако се занемари ефекат акумулације услед стишљивости флуида и узимајући у обзир да је у питању ваздушна кочница, може се усвојити са довољном тачношћу следећа једноставнија зависност за пасивни момент $M_p(t)$ облика:

$$M_p(t) = \gamma \omega^3(t), \quad (3.43)$$

Претпоставка 2: Жељено обртање ротора одређено је следећом зависношћу $\omega_z = const$.

$$J_C \frac{d\omega(t)}{dt} = M_a(t) - M_{op}(t) - M_{ot}(t) = M_a(t) - M_p(t) \quad (3.44)$$

Применом Љапуновљеве трансформације координата, могуће је увести релативна одступања следећих величина:

$$\overline{\Delta\omega}(t) = \frac{\omega(t) - \omega_z}{\omega_z} \quad \omega(t) = \omega_z (1 + \overline{\Delta\omega}(t)) \quad (3.45)$$

$$\overline{\Delta M}_a(t) = \frac{M_a(t) - M_{aN}}{M_{aN}} \quad M_a(t) = M_{aN} (1 + \overline{\Delta M}_a(t)) \quad (3.46)$$

$$\overline{\Delta M}_{ot}(t) = \frac{M_{ot}(t) - M_{otN}}{M_{otN}} \quad M_{ot}(t) = M_{otN} (1 + \overline{\Delta M}_{ot}(t)) \quad (3.47)$$

$$\overline{\Delta M}_{op}(t) = \frac{M_{op}(t) - M_{opN}}{M_{opN}} \quad M_{op}(t) = (1 + \overline{\Delta M}_{op}(t)) \quad (3.48)$$

Како једначина (3.17) важи за сваки радни режим то важи и за номинални радни режим у коме поприма следећи облик:

$$M_{aN} - M_{otN} - M_{opN} = 0. \quad (3.49)$$

Ако се одузме израз (3.49) од израза (3.44), при том узимајући у обзир и релације (3.32)-(3.35), добија се следећа једначина, облика:

$$T \frac{d(\overline{\Delta\omega}(t))}{dt} = \overline{\Delta M}_a(t) - K_{ot} \overline{\Delta M}_{ot}(t) - K_{op} \overline{\Delta M}_{op}(t) \quad (3.50)$$

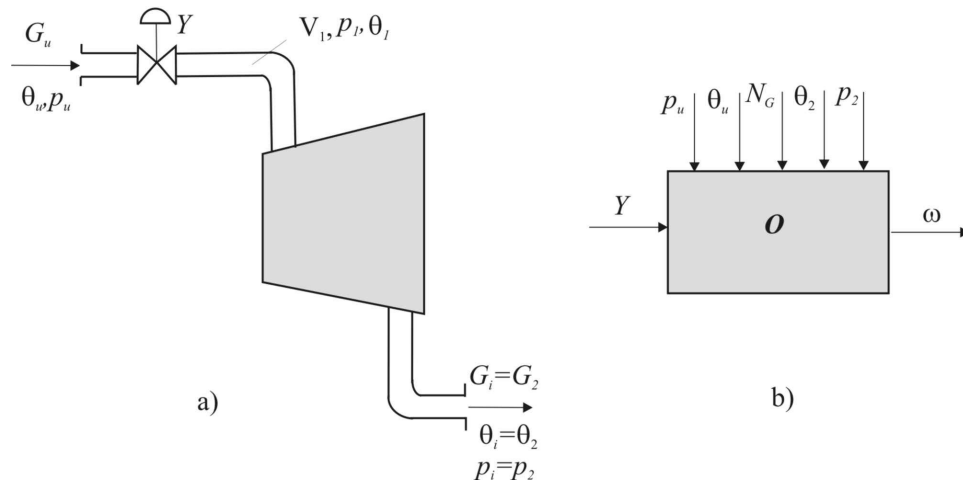
$$T \frac{d(\overline{\Delta\omega}(t))}{dt} = \overline{\Delta M}_a(t) - \overline{\Delta M}_p(t),$$

при чему је $\overline{\Delta M}_p(t) = K_{ot} \overline{\Delta M}_{ot}(t) + K_{op} \overline{\Delta M}_{op}(t)$ као и следеће ознаке

$$T = \frac{J\omega_z}{M_{aN}}, \quad K_{ot} = \frac{M_{otN}}{M_{aN}}, \quad K_{op} = \frac{M_{opN}}{M_{aN}}. \quad (3.51)$$

Даље, неопходно је одредити аналитичке изразе за претходно разматране моменте.

Постојање гасног простора и остале делове експанзионе турбине се може представити следећом упрошћеном симболичко-функционалном шемом приказана на сл. 3.1.а, и његов структурни блок дијаграм приказан је на сл. 3.1.б.



Слика 3.1 а) симболичко-функционална шема, б) структурни блок дијаграм

С друге стране познато је да разматрани процес струјања у гасној турбини има одлике нестационарног, просторног струјања, и то стишљивог, вискозног флуида, где одговарајуће динамичке и термодинамичке величине стања су функције просторних координата и времена. У том смислу, потребно је због изузетне

сложености увести одговарајуће претпоставке чиме би се добио адекватан модел гасне (експанзионе) турбине.

Низ уобичајних претпоставки које се уводе су:

Претпоставка 3: Процес струјања сматра се стационарним.

Претпоставка 4: Динамичке и термодинамичке величине стања зависе само од времена

Претпоставка 5: Посматрају се квазистатичке промене стања термодинамичких величина стање

Претпоставка 6: Занемарују се сви ефекти проузроковани вискозношћу радног флуида

Претпоставка 7: Процес у турбини представљен је једним адијабатско – политропским процесом (претпостављено је да је турбина топлотно изолована)

Претпоставка 8: Механички степен корисности турбине η_m има константну вредност.

Претпоставка 9: Унутрашњи изентропски степен корисности турбине η_{izs} има константну вредност.

Претпоставка 10: Посматрају се линеаризоване статичке карактеристике турбине

Претпоставка 11: Разматране величине се мењају у довољно уским границама око својих стационарних вредности па је оправдана линеаризација

Претпоставка 12: Са довољном тачношћу може се занемарити динамика гасног простора

Претпоставка 13: Коефицијент протока k_{peq} има константну вредност.

Претпоставка 14: Експонент m има константну вредност.

Оправданост уведених претпоставки може се наћи у *Дебељковић, (2006а)*.

Израз за $M_a(t)$ активни момент је одређен следећим изразом имајући у виду претходне претпоставке

$$M_a(t) = \eta_m \eta_{izs} G_{GT}(t) H_{izs}(t) \omega^{-1}(t). \quad (3.52)$$

где су проточна карактеристика и изентропски топлотни пад, $G_{GT}(t), H_{izs}(t)$ респективно дефинисани са, (Дебелковић, 2006):

$$G_{GT}(t) = k_{peq} A_{eq}(Y_{RV}(t)) \frac{p_{GTu}(t)}{\sqrt{R\theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)}\right)^{\frac{m+1}{m}}}. \quad (3.53)$$

$$H_{izs}(t) = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \theta_{GTu}(t) \left[1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right]. \quad (3.54)$$

Према томе, сада је $M_a(t)$ једнак, имајући у виду вредности $p_{GTi}(t), p_{GTu}(t), m, \kappa$,

$$M_a(t) = \delta \omega^{-1}(t) A_{eq}(Y_{RV}(t)) p_{GTu}(t) \sqrt{\theta_{GTu}(t)}, \quad \delta = const. \quad (3.55)$$

где је сада $\delta = \kappa \eta_m \eta_{izs} k_{peq} (\kappa - 1)^{-1} R^{1/2}$, односно момент $M_p(t)$ је дат изразом (3.43).

Заменом једначина (3.43, 3.55) у јед. (3.44) чиме се добија поље обртања гасне турбине, односно:

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega(t)}{dt} &= M_a(t) - M_p(t) \\ &= \delta \omega^{-1}(t) A_{eq}(Y_{RV}(t)) p_{GTu}(t) \sqrt{\theta_{GTu}(t)} - \bar{\gamma} \omega^3(t) \\ &= f_1(Y_{RV}(t), \omega(t), p_{GTu}(t), \theta_{GTu}(t)) \end{aligned} \quad (3.56)$$

У циљу формирања линеарног математичког модела гасне турбине, потребно је увести следеће претпоставке које знатно олакшавају поступак математичког моделовања.

Претпоставка15: Нелинеарна(е) функција(е) $f(..)$ су диференцијабилне по свим својим аргументима.

Усвајањем претходне претпоставке омогућава нам сада да развијемо дате функције у одговарајуће *Max-Lorenove* редове.

Претпоставка16: Статичке карактеристике управљачких вентила су линеарне.

3.1.1. Линеаризација једначине поља обртања ротора гасне турбине

Полазимо од нелинеарне једначине поља обртања ротора гасне турбине (3.56) у облику:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega(t)}{dt} &= \frac{1}{J} \left(\delta \omega^{-1}(t) A_{eq}(Y_{RV}(t)) p_{GTu}(t) \sqrt{\theta_{GTu}(t)} - \gamma \omega^3(t) \right) \\ &= f_1(\omega(t), Y_{RV}(t), p_{GTu}(t), \theta_{GTu}(t)) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Једначина (3.57) важи за сваки па и номинални радни режим:

$$\frac{1}{J} \left[\delta \omega_N^{-1}(t) A_{eq}(Y_{RV,N}) p_{GTu,N} \sqrt{\theta_{GTu,N}} - \gamma \omega_N^3 \right] = 0 \quad (3.58)$$

Уводимо релативна одступања појединих величина коришћењем Љапуновљеве трансформације кордината, као што следи:

$$\overline{\Delta Y_{RV}}(t) = \frac{Y_{RV}(t) - Y_{RV,N}}{Y_{RV,N}} \quad Y_{RV}(t) = Y_{RV,N} (1 + \overline{\Delta Y_{RV}}(t)) \quad (3.59)$$

$$\overline{\Delta \omega}(t) = \frac{\omega(t) - \omega_N}{\omega_N} \quad \omega(t) = \omega_N (1 + \overline{\Delta \omega}(t)) \quad (3.60)$$

$$\overline{\Delta p_{GTu}}(t) = \frac{p_{GTu}(t) - p_{GTu,N}}{p_{GTu,N}} \quad p_{GTu}(t) = p_{GTu,N} (1 + \overline{\Delta p_{GTu}}(t)) \quad (3.61)$$

$$\overline{\Delta \theta_{GTu}}(t) = \frac{\theta_{GTu}(t) - \theta_{GTu,N}}{\theta_{GTu,N}} \quad \theta_{GTu}(t) = \theta_{GTu,N} (1 + \overline{\Delta \theta_{GTu}}(t)) \quad (3.62)$$

Уведена релативна одступања усвајамо за величине стања, односно улаза:

$$\begin{aligned} \Delta \omega(t) &= x_1(t), \quad \overline{\Delta Y_{RV}}(t) = u(t) \\ \overline{\Delta p_{GTu}}(t) &= z_1(t), \quad \overline{\Delta \theta_{GTu}}(t) = z_2(t) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Одузимањем јед. (3.58) од јед. (3.57) и преласком на релативна одступања усвојена за величине стања, добија се нелинеарна једначина поља обртања ротора турбине у релативним одступањима:

$$\begin{aligned} \frac{d(\omega_N(1+x_1(t)))}{dt} &= \\ &= \frac{1}{J} \left(\begin{array}{l} \delta \frac{1}{\omega_N(1+x_1(t))} A_{eq}(Y_{RV,N}(1+u(t))) P_{GTu,N}(1+z_1(t)) \sqrt{\theta_{GTu,N}(1+z_2(t))} \\ -\gamma \omega_N^3 (1+x_1(t))^3 - \delta \omega_N^{-1} A_{eq}(Y_{RV,N}) P_{GTu,N} \sqrt{\theta_{GTu,N}} + \gamma \omega_N^3 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

После сређивања добијамо нелинеарну једначину поља окретања ротора турбине по релативним одступањима у облику:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \\ &= \frac{1}{J\omega_N} \left(\begin{array}{l} \delta \omega_N^{-1} P_{GTu,N} \sqrt{\theta_{GTu,N}} \left(\frac{1}{(1+x_1(t))} A_{eq}(Y_{RV,N}(1+u(t))) (1+z_1(t)) \sqrt{(1+z_2(t))} \right) \\ -A_{eq}(Y_{RV,N}) \\ -\gamma \omega_N^3 \left((1+x_1(t))^3 - 1 \right) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), u(t), z_1(t), z_2(t)) \\ f(0,0,0,0) &= 0, f: R^4 \rightarrow R \end{aligned} \quad (3.66)$$

Ради једноставности уводе се следеће ознаке:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{J\omega_N} = 6.6 \cdot 10^{-5} \\ C_{12} &= \delta \omega_N^{-1} P_{GTu,N} \sqrt{\theta_{GTu,N}} = 1.5357 \cdot 10^5 \\ C_\gamma &= \gamma \omega_N^3 = 7.7 \cdot 10^7 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Узимајући у обзир претходно уведене ознаке, нелинеарна једначина поља обртања ротора гасне турбине поприма следећи облик:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= C_1 \left(\begin{array}{l} C_{12} \left(\frac{1}{(1+x_1(t))} A_{eq}(Y_{RV,N}(1+u(t))) (1+z_1(t)) \sqrt{(1+z_2(t))} - A_{eq}(Y_{RV,N}) \right) \\ -C_\gamma \left((1+x_1(t))^3 - 1 \right) \end{array} \right) \\ &= f_1(x_1(t), u(t), z_1(t), z_2(t)) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Претпоставка16: Статичка карактеристика вентила је линеарна.

Линеаризована једначина стања, дата је са

$$\frac{d(x_1(t))}{dt} = a_{11} \cdot x_1(t) + b_1 \cdot u(t) + f_{11} \cdot z_1(t) + f_{12} \cdot z_2(t) \quad (3.69)$$

Линеаризацијом функције $f_1(\cdot)$ око номиналног радног режима добија се:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_N = C_1 (-Y_{RV,N} C_{12} - 3C_\gamma) \\ b_1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \right)_N = C_1 C_{12} Y_{RV,N} \left(\frac{\partial A_{eq}}{\partial u} \right)_N = 10.136 \cdot Y_{RV,N} \left(\frac{\partial A_{eq}}{\partial u} \right)_N \\ f_{11} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} \right)_N = C_1 C_{12} Y_{RV,N} = 10.3136 \cdot Y_{RV,N} \\ f_{12} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_2} \right)_N = 0.5 \cdot C_1 C_{12} Y_{RV,N} = 5.068 \cdot Y_{RV,N} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Вредности коефицијената срачунате су на основу података из Додатка Б, и дате у Таб.3.1.

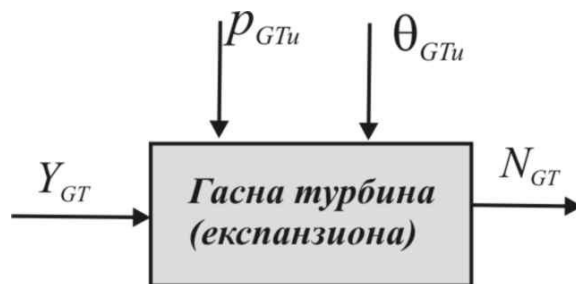
Табела 3.1 Вредности коефицијената линеаризоване једначине поља обртања ротора експанзионе турбине

$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_2} \right)_N$
$-1.524 \cdot 10^4$	0.2635	0.2635	0.1318

Постављају се даље, једначина континуитета (3.71) и енергијска једначина (3.94).

3.2. Једначина поља притиска у гасној турбини

Следећа разматрања се односе на случај када не постоји гасни простор при чему се гасна турбина посматра као размењивач топлоте а са циљем да се добије промена излазне температуре и излазног притиска у функцији свих осталих улазних величина, види сл. 3.2.



Слика 3.2 Структурни блок дијаграм гасне турбине

При томе, једначина континуитета је облика као што следи:

$$\begin{aligned}
 V_{PT} \frac{d\rho_{GT}(t)}{dt} &= G_{GTu}(t) - G_{RT}(t) = G_{RV}(t) - G_{GT}(t) \\
 &= k_v A_{RV}(Y_{RV}(t)) \sqrt{P_{GT}(t) \rho_{GTu}(t) \left(1 - \frac{P_{GT}(t)}{P_{GTu}(t)}\right)} \\
 &\quad - k_{peq} A_{eq} \frac{P_{GTu}(t)}{\sqrt{R \theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \Pi_T^{-2}(t)} \\
 &= k_v A_{RV}(Y_{RV}(t)) \sqrt{P_{GT}(t) \frac{1}{R} \frac{P_{GTu}(t)}{\theta_{GTu}(t)} \left(1 - \frac{P_{GT}(t)}{P_{GTu}(t)}\right)} \\
 &\quad - k_{peq} A_{eq} \frac{P_{GTu}(t)}{\sqrt{R \theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \Pi_T^{-2}(t)} \\
 &= k_v A_{RV}(Y_{RV}(t)) \sqrt{\frac{1}{R} \frac{P_{GT}(t)}{\theta_{GTu}(t)} (P_{GTu}(t) - P_{GT}(t))} \\
 &\quad - k_{peq} A_{eq} \frac{P_{GTu}(t)}{\sqrt{R \theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \Pi_T^{-2}(t)}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

где је са Π_T дефинисан уопштени степен ширења гасне турбине.

$$\Pi_T = \frac{P_{GTu}(t)}{P_{GT}(t)}. \tag{3.72}$$

Даље, неопходно је елиминисати густину ваздуха унутар гасне турбине $\rho_{GT}(t)$ у јед. (3.71), што се постиже одговарајућим логаритамским диференцирањем, из једначине промене стања (адијабатски процес) (3.73) и једначине стања (3.74):

$$p_p(t) \rho_p^{-\kappa}(t) = const,$$

$$p_{GTu}(t) \rho_{GTu}^{-\kappa}(t) = p_{GT}(t) \rho_{GT}^{-\kappa}(t) = p_{GTi}(t) \rho_{GTi}^{-n}(t) = const. \quad (3.73)$$

$$\rho_{GTu}(t) = \rho_{GT}(t) \left(\frac{p_{GTu}(t)}{p_{GT}(t)} \right)^{1/n}, \quad \rho_{GTi}(t) = \rho_{GT}(t) \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GT}(t)} \right)^{1/n}$$

$$p_{GTu}(t) = \rho_{GTu}(t) R \theta_{GTu}(t),$$

$$p_{GT}(t) = \rho_{GT}(t) R \theta_{GT}(t), \quad (3.74)$$

$$p_{GTi}(t) = \rho_{GTi}(t) R \theta_{GTi}(t)$$

односно, диференцирањем израза $p_{(\cdot)}(t) \rho_{(\cdot)}^{-\kappa}(t) = const.$ и повезивањем са јед.(3.74), добија се диференцијална веза:

$$\frac{d\rho_{(\cdot)}(t)}{dt} = \frac{1}{\kappa R \theta_{(\cdot)}(t)} \frac{dp_{(\cdot)}(t)}{dt}, \quad (3.75)$$

Тако се добија:

$$\begin{aligned} \frac{V_{GT}}{\kappa R \theta_{GT}(t)} \frac{d p_{GT}(t)}{dt} &= k_v A_{RV} (Y_{RV}(t)) \sqrt{\frac{1}{R} \frac{p_{GT}(t)}{\theta_{GTu}(t)} (p_{GTu}(t) - p_{GT}(t))}, \\ &- k_{peq} A_{eq} \frac{p_{GTu}(t)}{\sqrt{R \theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \Pi_T^2(t)} \end{aligned} \quad (3.76)$$

ОДНОСНО:

$$\begin{aligned} \frac{V_{GT}}{\kappa R} \frac{d p_{GT}(t)}{dt} &= k_v A_{RV} (Y_{RV}(t)) \theta_{GT}(t) \sqrt{\frac{1}{R} \frac{p_{GT}(t)}{\theta_{GTu}(t)} (p_{GTu}(t) - p_{GT}(t))}. \\ &- k_{peq} A_{eq} \frac{p_{GTu}(t) \theta_{GT}(t)}{\sqrt{R \theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_{GT}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^2} \end{aligned} \quad (3.77)$$

На крају, сада је могуће одредити коначно једначину поља притиска:

$$\begin{aligned} \frac{d p_{GT}(t)}{dt} &= k_v \left(\frac{\kappa R}{V_{GT}} \right) A_{RV} (Y_{RV}(t)) \theta_{GT}(t) \sqrt{\frac{1}{R} \frac{p_{GT}(t)}{\theta_{GTu}(t)} (p_{GTu}(t) - p_{GT}(t))}, \\ &- k_{peq} \left(\frac{\kappa R}{V_{GT}} \right) A_{eq} \frac{p_{GTu}(t) \theta_{GT}(t)}{\sqrt{R \theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_{GT}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^2} \\ &= f_2(Y_{RV}(t), p_{GTu}(t), \theta_{GTu}(t), p_{GT}(t), \theta_{GT}(t)) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Тиме се добија нелинеарна једначина поља притиска унутар гасне турбине.

3.2.1. Линеаризација једначине поља притиска у експанзионој турбини

Полазимо од нелинеарне једначине поља притиска у гасној турбини облика и претходно усвојене *Претпоставке (1-16)*:

$$\begin{aligned} \frac{d p_{GT}(t)}{dt} &= \frac{\kappa R}{V_{PT}} \left[\begin{array}{l} k_v A_{RV}(Y_{RV}(t)) \theta_{GT}(t) \sqrt{\frac{(p_{GT}(t) \cdot p_{GTu}(t) - p_{GT}^2(t))}{R \theta_{GTu}(t)}} \\ -k_{peq} A_{eq} \theta_{GT}(t) \sqrt{\frac{p_{GTu}^2(t) - p_{GT}^2(t)}{R \theta_{GTu}(t)}} \end{array} \right] \\ &= f_2(Y_{RV}(t), p_{GTu}(t), \theta_{GTu}(t), p_{GT}(t), \theta_{GT}(t)) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Једначина (3.79) важи за сваки па и номинални радни режим

$$\frac{\kappa R}{V_{GT}} \left[\begin{array}{l} k_v A_{RV}(Y_{RV,N}) \theta_{GT,N} \sqrt{\frac{(p_{GT,N} \cdot p_{GTu,N} - p_{GT,N}^2)}{R \theta_{GTu,N}}} \\ -k_{peq} A_{eq} \theta_{pPT,N} \sqrt{\frac{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2}{R \theta_{GTu,N}}} \end{array} \right] = 0 \quad (3.80)$$

Уводимо релативна одступања појединих величина коришћењем Лапуновљеве трансформације координата, као што следи:

$$\overline{\Delta Y}_{RV}(t) = \frac{Y_{RV}(t) - Y_{RV,N}}{Y_{RV,N}} \quad Y_{RV}(t) = Y_{RV,N} (1 + \overline{\Delta Y}_{RV}(t)) \quad (3.81)$$

$$\overline{\Delta p}_{GTu}(t) = \frac{p_{GTu}(t) - p_{GTu,N}}{p_{GTu,N}} \quad p_{GTu}(t) = p_{GTu,N} (1 + \overline{\Delta p}_{GTu}(t)) \quad (3.82)$$

$$\overline{\Delta \theta}_{GTu}(t) = \frac{\theta_{GTu}(t) - \theta_{GTu,N}}{\theta_{GTu,N}} \quad \theta_{GTu}(t) = \theta_{GTu,N} (1 + \overline{\Delta \theta}_{GTu}(t)) \quad (3.83)$$

$$\overline{\Delta p}_{GT}(t) = \frac{p_{GT}(t) - p_{GT,N}}{p_{GT,N}} \quad p_{GT}(t) = p_{GT,N} (1 + \overline{\Delta p}_{GT}(t)) \quad (3.84)$$

$$\overline{\Delta\theta_{GT}}(t) = \frac{\theta_{GT}(t) - \theta_{GT,N}}{\theta_{GT,N}} \quad \theta_{GT}(t) = \theta_{GT,N} (1 + \overline{\Delta\theta_{GT}}(t)) \quad (3.85)$$

Уведена релативна одступања усвајамо за величине стања, односно улаза:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta Y_{RV}}(t) &= u(t), & \overline{\Delta p_{GTu}}(t) &= z_1(t) \\ \overline{\Delta\theta_{GTu}}(t) &= z_2(t), & \overline{\Delta p_{GT}}(t) &= x_2(t) \\ \overline{\Delta\theta_{GT}}(t) &= x_3(t), \end{aligned} \quad (3.86)$$

Одузимањем јед. (3.80) од јед. (3.79) и преласком на релативна одступања усвојена за величине стања, добија се нелинеарна једачина поља обртања гасне турбине у релативним одступањима:

$$\begin{aligned} \frac{d p_{GT,N} (1 + x_2(t))}{dt} = & \\ & \left(\begin{aligned} & k_v A_{RV} (Y_{RV,N} (1 + u(t))) \theta_{GT,N} (1 + x_3(t)) \cdot \\ & \sqrt{\frac{(p_{pPT,N} (1 + x_2(t)) \cdot p_{GTu,N} (1 + z_1(t)) - p_{GT,N}^2 (1 + x_2(t))^2)}{R \theta_{GTu,N} (1 + z_2(t))}} \\ & - k_v A_{RV} (Y_{RV,N}) \theta_{GT,N} \sqrt{\frac{(p_{GT,N} \cdot p_{GTu,N} - p_{GT,N}^2)}{R \theta_{GTu,N}}} \\ & - k_{peq} A_{eq} (Y_{RV,N} (1 + u(t))) \theta_{GT,N} (1 + x_3(t)) \cdot \\ & \sqrt{\frac{p_{GTu,N}^2 (1 + z_1(t))^2 - p_{GT,N}^2 (1 + x_2(t))^2}{R \theta_{GTu,N} (1 + z_2(t))}} \\ & + k_{peq} A_{eq} \theta_{GT,N} \sqrt{\frac{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2}{R \theta_{GTu,N}}} \end{aligned} \right) \quad (3.87) \end{aligned}$$

После сређивања добијамо нелинеарну једначину поља притиска у турбини, у релативним одступањима, у следећем облику:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2(t)}{dt} &= \\
&= \frac{\kappa R \theta_{GT,N}}{P_{GT,N} V_{GT} \sqrt{R \theta_{GTu,N}}} \left(\begin{array}{l} k_v \sqrt{P_{pPT,N}} \left(\begin{array}{l} A_{RV} (Y_{RV,N} (1+u(t))) (1+x_3(t)) \cdot \\ \sqrt{\frac{((1+x_2(t)) \cdot P_{GTu,N} (1+z_1(t)) - P_{GT,N} (1+x_2(t))^2)}{(1+z_2(t))}} \\ - A_{RV} (Y_{RV,N}) \sqrt{P_{GTu,N} - P_{GT,N}} \end{array} \right) \\ -k_{peq} \left(\begin{array}{l} A_{eq} (Y_{RV,N} (1+u(t))) (1+x_3(t)) \cdot \\ \sqrt{\frac{P_{GTu,N}^2 (1+z_1(t))^2 - P_{GT,N}^2 (1+x_2(t))^2}{(1+z_2(t))}} \\ - A_{eq} \sqrt{P_{GTu,N}^2 - P_{GT,N}^2} \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (3.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(u(t), z_1(t), z_2(t), x_2(t), x_3(t)) \\
&f(0,0,0,0,0) = 0, f: R^5 \rightarrow R \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Ради једноставности уведена је следећа ознака:

$$C_2 = \frac{\kappa R \theta_{GT,N}}{P_{GT,N} V_{GT} \sqrt{R \theta_{GTu,N}}} = 0.3472 \quad (3.90)$$

Узимајући у обзир претходно уведену ознаку, нелинеарна једначина поља обртања турбине поприма следећи облик:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2(t)}{dt} = C_2 & \left(\begin{array}{l} A_{RV}(Y_{RV,N}(1+u(t)))(1+x_3(t)) \cdot \\ k_v \sqrt{P_{GT,N}} \cdot \sqrt{\frac{((1+x_2(t)) \cdot P_{GTu,N}(1+z_1(t)) - P_{GT,N}(1+x_2(t))^2)}{(1+z_2(t))}} \\ -A_{RV}(Y_{RV,N})\sqrt{P_{GTu,N} - P_{GT,N}} \end{array} \right) \\
& \left(\begin{array}{l} A_{eq}(Y_{RV,N}(1+u(t)))(1+x_3(t)) \cdot \\ -k_{peq} \cdot \sqrt{\frac{P_{GTu,N}^2(1+z_1(t))^2 - P_{GT,N}^2(1+x_2(t))^2}{(1+z_2(t))}} \\ -A_{eq}\sqrt{P_{GTu,N}^2 - P_{GT,N}^2} \end{array} \right) \\
& = f_2(u(t), z_1(t), z_2(t), x_2(t), x_3(t))
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Линеаризована једначина стања, дата је са

$$\frac{d(x_2(t))}{dt} = a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t) + b_2 \cdot u(t) + f_{21} \cdot z_1(t) + f_{22} \cdot z_2(t) \tag{3.92}$$

Линеаризацијом функције $f_2(\cdot)$ око номиналног радног режима добија се:

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_N = C_2 Y_{RV,N} \left(0.5k_v \sqrt{p_{GT,N}} \frac{(p_{GTu,N} - 2p_{GT,N})}{\sqrt{(p_{GTu,N} - p_{GT,N})}} - k_{peq} \frac{p_{GT,N}^2}{\sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2}} \right) \\
a_{23} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right)_N = C_2 Y_{RV,N} \left(\begin{array}{l} k_v \sqrt{p_{GT,N}} (p_{GTu,N} - p_{GT,N}) \\ -k_{peq} \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2} \end{array} \right) \\
b_2 &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} \right)_N = C_2 Y_{RV,N} \left(\begin{array}{l} k_v \sqrt{p_{GT,N}} (p_{GTu,N} - p_{GT,N}) \left(\frac{\partial A_{RV}}{\partial u} \right)_N \\ -k_{peq} \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2} \left(\frac{\partial A_{eq}}{\partial u} \right)_N \end{array} \right) \\
f_{21} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial z_1} \right)_N = C_2 Y_{RV,N} \left(0.5k_v \sqrt{p_{GT,N}} \frac{p_{GTu,N}}{\sqrt{(p_{GTu,N} - p_{GT,N})}} - k_{peq} \frac{p_{GTu,N}^2}{\sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2}} \right) \\
f_{22} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial z_2} \right)_N = C_2 Y_{RV,N} \left(\begin{array}{l} -0.5k_v \sqrt{p_{GT,N}} (p_{GTu,N} - p_{GT,N}) \\ +0.5k_{peq} \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2} \end{array} \right)
\end{aligned}
\tag{3.93}$$

Вредности коефицијената срачунате су на основу података из Додатка Б, и дате у Табели. 3.2.

Табела 3.2 Вредности коефицијената линеаризоване једначине поља притиска у парној турбини

$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_2}{\partial u} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_2}{\partial z_1} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_2}{\partial z_2} \right)_N$
$-2.6392 \cdot 10^3$	-980.86	-980.86	$-2.199 \cdot 10^3$	490.43

3.3. Једначина поља температуре у експанзионој (гасној) турбини

Претпоставка 17: Занемарују се топлотни губици на оклопу експанзионе турбине.

Одговарајућа енергијска једначина је за дату турбину, облика:

$$V_{GT} \frac{d(\rho_{GT}(t)i_{GT}(t))}{dt} = G_{GTu}(t)i_{GTu}(t) - G_{GT}(t)i_{GTi}(t) - N_{GT}(t) \quad (3.94)$$

$$i_{GTi}(t) = i_{GTi}(p_{GT}(t), \theta_{GT}(t)) \quad (3.95)$$

$$\rho_{GT}(t) = \rho_{GT}(p_{GTu}(t), \theta_{GTu}(t)), \quad (3.96)$$

При томе, одговарајући израз за снагу гасне турбине $N_{GT}(t)$ је, (Дебелковић, 2006а):

$$\begin{aligned} N_{GT}(t) &= M_{GT}(t)\omega(t) = \eta_m \eta_{isz} H_{isz}(t) G_{GT}(t) \\ &= \eta_m \eta_{isz} \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \theta_{GTu}(t) \left(1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \right) \cdot k_{peq} A_{eq}(Y_{RV}(t)) \frac{p_{GTu}(t)}{\sqrt{R \theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^2} \end{aligned} \quad (3.97)$$

односно $N_{GT}(t)$ је снага експанзионе турбине на спојници са генератором, овде ваздушном кочницом.

Даље, уочава се да једначина (3.94), њена лева страна садржи две величине под изводом и она се може средити на следећи начин. Како је:

$$\begin{aligned} V_{GT} \frac{d(\rho_{GT}(t)i_{GT}(t))}{dt} &= V_{GT} \left(\rho_{GT}(t) \frac{di_{GT}(t)}{dt} + i_{GT}(t) \frac{d\rho_{GT}(t)}{dt} \right) \\ &= G_{GTu}(t)i_{GTu}(t) - G_{GT}(t)i_{GTi}(t) - N_{GT}(t) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Према томе добија се:

$$\begin{aligned} V_{GT} \rho_{GT}(t) \frac{di_{GT}(t)}{dt} &= V_{GT} c_{GT} \rho_{GT}(t) \frac{d\theta_{GT}(t)}{dt} = \\ &= G_{GTu}(t)i_{GTu}(t) - G_{GT}(t)i_{GTi}(t) - N_{GT}(t) - V_{GT} i_{GT}(t) \frac{d\rho_{GT}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Сада се убацују следеће једначине, редом: проток ваздуха кроз регулациони вентил $G_{RV}(t)$, проток ваздуха кроз турбину $G_{GT}(t)$, за снагу гасне турбине

$N_{GT}(t)$, јед. (3.97) и израз за $\frac{d\rho_{GT}(t)}{dt}$, види (3.101):

$$G_{Tu}(t) = k_v A_{RV}(Y_{RV}(t)) \sqrt{\frac{1}{R} \frac{p_{GT}(t)}{\theta_{GTu}(t)} (p_{GTu}(t) - p_{GT}(t))}, \quad (3.100a)$$

$$G_T(t) = k_{peq} A_{eq} (Y_{RV}(t)) \frac{p_{GTu}(t)}{\sqrt{R\theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^2} \quad (3.100б)$$

при чему за израз $\frac{d\rho_{GT}(t)}{dt}$ се израчунава узимајући у обзир адијабатску промену стања као и саме једначине стања (3.73,3.74) на следећи начин. Логаритамским диференцирањем израза (3.73) добија се

$$\frac{d\rho_{GT}}{dt} = \frac{\rho_{GT}}{\kappa p_{GT}} \frac{dp_{GT}}{dt}, \quad (3.101)$$

и узимајући у обзир једначину стања (3.74) следи:

$$\frac{d\rho_{GT}}{dt} = \frac{1}{\kappa R \theta_{GT}} \frac{dp_{GT}}{dt}. \quad (3.102)$$

Заменом добија се следећи израз:

$$\begin{aligned} & V_{GT} c_{GT} \frac{d\theta_{GT}(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{\rho_{GT}(t)} \left(c_{GTu} k_v A_{RV} (Y_{RV}(t)) \theta_{GTu}(t) \sqrt{\frac{1}{R} \frac{p_{GT}(t)}{\theta_{GTu}(t)} (p_{GTu}(t) - p_{GT}(t))} \right. \\ & \quad \left. - c_{GTi} k_{peq} A_{eq} (Y_{RV}(t)) \frac{p_{GTu}(t)}{\sqrt{R\theta_{GTu}(t)}} \theta_{pPTi}(t) \sqrt{1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^2} \right) \\ & - \frac{1}{\rho_{GT}(t)} \eta_m \eta_{izs} k_{peq} \frac{\kappa R}{\kappa - 1} A_{eq} (Y_{RV}(t)) \left(1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \right) \frac{p_{GTu}(t) \theta_{GTu}(t)}{\sqrt{R\theta_{GTu}(t)}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^2} \\ & - V_{GT} c_{GT} \frac{\theta_{GT}(t)}{\rho_{GT}(t)} \cdot \frac{1}{\kappa R \theta_{GT}(t)} \frac{d p_{GT}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.103)$$

односно после сређивања и узимајући у обзир и једначину (3.78), следи:

$$\begin{aligned}
& V_{GT} c_{GT} \frac{d\theta_{GT}(t)}{dt} \\
&= \frac{1}{\rho_{GT}(t)} \left(\frac{c_{GTu} k_v}{\sqrt{R}} A_{RV}(Y_{RV}(t)) \sqrt{\theta_{GTu}(t)} \sqrt{p_{GT}(t)(p_{GTu}(t) - p_{GT}(t))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{c_{GTi} k_{peq}}{\sqrt{R}} A_{eq}(Y_{RV}(t)) \frac{\theta_{GTi}(t)}{\sqrt{\theta_{GTu}(t)}} \sqrt{p_{GTu}^2(t) - p_{GTi}^2(t)} \right) \\
&\quad - \eta_m \eta_{izs} k_{peq} \frac{\kappa \sqrt{R}}{\kappa - 1} A_{eq}(Y_{RV}(t)) \frac{1}{\rho_{GT}(t)} \left(1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \right) \times \\
&\quad \times \sqrt{\theta_{GTu}(t)} \sqrt{p_{GTu}^2(t) - p_{GTi}^2(t)} \\
&\quad - V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} \frac{1}{\rho_{GT}(t)} \cdot f_2(Y_{RV}(t), p_{GTu}(t), \theta_{GTu}(t), p_{GT}(t), \theta_{GT}(t))
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Потребно је још елиминисати и величину $\rho_{GT}(t)$, за шта се користи поново једначину стања ваздуха у турбини (3.74) дату са

$$\frac{1}{\rho_{GT}(t)} = R \frac{\theta_{GT}(t)}{p_{GT}(t)} \tag{3.105}$$

Исто тако, потребно је на основу једначине стања и адијабатске промене стања успоставити следећу везу:

$$\theta_{GTi}(t) = f_i(p_{GTi}(t), p_{GT}(t), \theta_{GT}(t)) \tag{3.106}$$

На основу једначине стања (3.74) добија се:

$$\frac{\theta_{GTi}(t)}{\theta_{GT}(t)} = \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GT}(t)} \right) \cdot \left(\frac{\rho_{GT}(t)}{\rho_{GTi}(t)} \right) \tag{3.107}$$

односно на основу израза (3.73)

$$\left(\frac{\rho_{GT}(t)}{\rho_{GTi}(t)} \right) = \left(\frac{p_{GT}(t)}{p_{GTi}(t)} \right)^{1/\kappa} \tag{3.108}$$

и после замене у (3.107) следи:

$$\frac{\theta_{GTi}(t)}{\theta_{GT}(t)} = \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GT}(t)} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \tag{3.109}$$

Заменом у (3.104) добија се коначно једначина за енергетски биланс:

$$\begin{aligned}
& V_{GT} c_{GT} \frac{d\theta_{GT}(t)}{dt} \\
&= R \frac{\theta_{GT}(t)}{p_{GT}(t)} \left(\begin{aligned} & \frac{c_{GTu} k_v}{\sqrt{R}} A_{RV}(Y_{RV}(t)) \sqrt{\theta_{GTu}(t)} \sqrt{p_{GT}(t)(p_{GTu}(t) - p_{GT}(t))} \\ & - \frac{c_{GTi} k_{peq}}{\sqrt{R}} A_{eq}(Y_{RV}(t)) \frac{\theta_{GT}(t)}{\sqrt{\theta_{GTu}(t)}} \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GT}(t)} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \sqrt{p_{GTu}^2(t) - p_{GTi}^2(t)} \end{aligned} \right) \\
& - \eta_m \eta_{izs} k_{peq} \frac{\kappa \sqrt{R}}{\kappa - 1} A_{eq}(Y_{RV}(t)) R \frac{\theta_{GT}(t)}{p_{GT}(t)} \left(1 - \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GTu}(t)} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \times \\
& \times \sqrt{\theta_{GTu}(t)} \sqrt{p_{GTu}^2(t) - p_{GTi}^2(t)} \\
& - V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} R \frac{\theta_{GT}(t)}{p_{GT}(t)} \cdot f_2(Y_{RV}(t), p_{GTu}(t), \theta_{GTu}(t), p_{GT}(t), \theta_{GT}(t))
\end{aligned} \tag{3.110}$$

или приказана као нелинеарна функција датих променљивих облика:

$$\frac{d\theta_{GT}(t)}{dt} = f_3(Y_{RV}(t), p_{GTu}(t), \theta_{GTu}(t), p_{GT}(t), \theta_{GT}, p_{GTi}(t)) \tag{3.111}$$

Према томе јед.(3.57) описује динамику обртања ротора гасне (експанзионе) турбине а јед. (3.78) поље притиска и јед. (3.111) поље температуре унутар турбине.

3.3.1 Линеаризација једначине поља температуре у експанзионој турбини

Нелинеарна једначине поља температуре у гасној турбини је облика:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\theta_{GT}(t)}{dt} = \\
& = \frac{R}{V_{GT}c_{GT}} \frac{\theta_{GT}(t)}{P_{GT}(t)} \times \\
& \left(\begin{aligned}
& \frac{c_{GT}k_v}{\sqrt{R}} A_{RV}(Y_{RV}(t)) \sqrt{\theta_{GTu}(t)} \sqrt{P_{GT}(t)(P_{GTu}(t) - P_{GT}(t))} \\
& - \frac{c_{GT}k_{peq}}{\sqrt{R}} A_{eq}(Y_{RV}(t)) \frac{\theta_{GT}(t)}{\sqrt{\theta_{GTu}(t)}} \left(\frac{P_{GTi}(t)}{P_{GT}(t)} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \sqrt{P_{GTu}^2(t) - P_{GTi}^2(t)} \\
& - \eta_m \eta_{izs} k_{peq} \frac{\kappa \sqrt{R}}{\kappa - 1} A_{eq}(Y_{RV}(t)) \left(1 - \left(\frac{P_{GT}(t)}{P_{GTu}(t)} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \\
& \cdot \sqrt{\theta_{GTu}(t)} \sqrt{P_{GTu}^2(t) - P_{GTi}^2(t)} \\
& - V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} k_v \left(\frac{\kappa R}{V_{GT}} \right) A_{RV}(Y_{RV}(t)) \theta_{GT}(t) \sqrt{\frac{(P_{GT}(t) P_{GTu}(t) - P_{GT}^2(t))}{R \theta_{GTu}(t)}} \\
& + V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} k_{peq} \left(\frac{\kappa R}{V_{PT}} \right) A_{eq}(Y_{RV}(t)) \theta_{GT}(t) \sqrt{\frac{P_{GTu}^2(t) - P_{GT}^2(t)}{R \theta_{GTu}(t)}}
\end{aligned} \right) \quad (3.112)
\end{aligned}$$

Једначина (3.108) важи за сваки па и номинални радни режим

$$\begin{aligned}
& \frac{R}{V_{GT}c_{GT}} \frac{\theta_{GT,N}}{P_{GT,N}} \times \\
& \left(\begin{aligned}
& \frac{c_{GT}k_v}{\sqrt{R}} A_{RV}(Y_{RV,N}) \sqrt{\theta_{GTu,N}} \sqrt{P_{GT,N}(P_{GTu,N} - P_{GT,N})} \\
& - \frac{c_{GT}k_{peq}}{\sqrt{R}} A_{eq}(Y_{RV,N}) \frac{\theta_{GT,N}}{\sqrt{\theta_{GTu,N}}} \left(\frac{P_{GTi,N}}{P_{GT,N}} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \sqrt{P_{GTu,N}^2 - P_{GT,N}^2} \\
& - \eta_m \eta_{izs} k_{peq} \frac{\kappa \sqrt{R}}{\kappa - 1} A_{eq}(Y_{RV,N}) \left(1 - \left(\frac{P_{GT,N}}{P_{GTu,N}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \\
& \cdot \sqrt{\theta_{GTu,N}} \sqrt{P_{GTu,N}^2 - P_{GT,N}^2} \\
& - V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} k_v \left(\frac{\kappa R}{V_{PT}} \right) A_{RV}(Y_{RV,N}) \theta_{GT,N} \sqrt{\frac{(P_{GT,N} P_{GTu,N} - P_{GT,N}^2)}{R \theta_{GTu,N}}} \\
& + V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} k_{peq} \left(\frac{\kappa R}{V_{GT}} \right) A_{eq}(Y_{RV,N}) \theta_{GT,N} \sqrt{\frac{P_{GTu,N}^2 - P_{GT,N}^2}{R \theta_{GTu,N}}}
\end{aligned} \right) = 0 \quad (3.113)
\end{aligned}$$

Уводимо релативна одступања појединих величина коришћењем Љапуновљеве трансформације координата, као што следи:

$$\overline{\Delta Y_{RV}}(t) = \frac{Y_{RV}(t) - Y_{RV,N}}{Y_{RV,N}} \quad Y_{RV}(t) = Y_{RV,N} (1 + \overline{\Delta Y_{RV}}(t)) \quad (3.114)$$

$$\overline{\Delta p_{GTu}}(t) = \frac{p_{GTu}(t) - p_{GTu,N}}{p_{GTu,N}} \quad p_{GTu}(t) = p_{GTu,N} (1 + \overline{\Delta p_{GTu}}(t)) \quad (3.115)$$

$$\overline{\Delta \theta_{GTu}}(t) = \frac{\theta_{GTu}(t) - \theta_{GTu,N}}{\theta_{GTu,N}} \quad \theta_{GTu}(t) = \theta_{GTu,N} (1 + \overline{\Delta \theta_{GTu}}(t)) \quad (3.116)$$

$$\overline{\Delta p_{GT}}(t) = \frac{p_{GT}(t) - p_{GT,N}}{p_{GT,N}} \quad p_{GT}(t) = p_{GT,N} (1 + \overline{\Delta p_{GT}}(t)) \quad (3.117)$$

$$\overline{\Delta \theta_{GT}}(t) = \frac{\theta_{GT}(t) - \theta_{GT,N}}{\theta_{GT,N}} \quad \theta_{GT}(t) = \theta_{GT,N} (1 + \overline{\Delta \theta_{GT}}(t)) \quad (3.118)$$

$$\overline{\Delta p_{GTi}}(t) = \frac{p_{GTi}(t) - p_{GTi,N}}{p_{GTi,N}} \quad p_{GTi}(t) = p_{GTi,N} (1 + \overline{\Delta p_{GTi}}(t)) \quad (3.119)$$

Уведена релативна одступања усвајамо за величине стања, поремећаја, односно улаза:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta Y_{PT}}(t) &= u(t) \\ \overline{\Delta p_{GTu}}(t) &= z_1(t) \\ \overline{\Delta \theta_{GTu}}(t) &= z_2(t) \\ \overline{\Delta p_{GT}}(t) &= x_2(t) \\ \overline{\Delta \theta_{GT}}(t) &= x_3(t) \\ \overline{\Delta p_{GTi}}(t) &= z_3(t) \end{aligned} \quad (3.120)$$

Одузимањем јед. (3.113) од јед. (3.112) и преласком на релативна одступања усвојена за величине стања, добија се нелинеарна једначина поља обртања турбине у релативним одступањима:

$$\begin{aligned}
\frac{d \theta_{GT,N} (1 + x_3(t))}{dt} &= \frac{R}{V_{GT} c_{GT}} \frac{\theta_{GT,N} (1 + x_3(t))}{p_{GT,N} (1 + x_2(t))} \cdot \\
&\left(\frac{c_{GT} k_v}{\sqrt{R}} A_{RV} (Y_{RV,N} (1 + u(t))) \sqrt{\theta_{GTu,N} (1 + z_2(t))} \cdot \right. \\
&\cdot \sqrt{(p_{GT,N} (1 + x_2(t)) p_{GTu,N} (1 + z_1(t)) - p_{GT,N}^2 (1 + x_2(t))^2)} \\
&- \frac{c_{GT} k_v}{\sqrt{R}} A_{RV} (Y_{RV,N}) \sqrt{\theta_{GTu,N}} \sqrt{p_{GT,N} (p_{GTu,N} - p_{GT,N})} \\
&- \frac{c_{GT} k_{peq}}{\sqrt{R}} A_{eq} (Y_{RV,N} (1 + u(t))) \frac{\theta_{GT,N} (1 + x_3(t))}{\sqrt{\theta_{GTu,N} (1 + z_2(t))}} \left(\frac{p_{GTi,N} (1 + z_3(t))}{p_{GT,N} (1 + x_2(t))} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \\
&\cdot \sqrt{p_{GTu,N}^2 (1 + z_1(t))^2 - p_{GTi,N}^2 (1 + z_3(t))^2} \\
&+ \frac{c_{GT} k_{peq}}{\sqrt{R}} A_{eq} (Y_{RV,N}) \frac{\theta_{GT,N}}{\sqrt{\theta_{GTu,N}}} \left(\frac{p_{GTi,N}}{p_{GT,N}} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GTi,N}^2} \\
&- \eta_m \eta_{izs} k_{peq} \frac{\kappa \sqrt{R}}{\kappa - 1} A_{eq} (Y_{RV,N} (1 + u(t))) \left(1 - \left(\frac{p_{GT,N} (1 + x_2(t))}{p_{GTu,N} (1 + z_1(t))} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \\
&\cdot \sqrt{\theta_{GTu,N} (1 + z_2(t))} \sqrt{p_{GTu,N}^2 (1 + z_1(t))^2 - p_{GTi,N}^2 (1 + z_3(t))^2} \\
&\times + \eta_m \eta_{izs} k_{peq} \frac{\kappa \sqrt{R}}{\kappa - 1} A_{eq} (Y_{RV,N}) \left(1 - \left(\frac{p_{GT,N}}{p_{GTu,N}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \\
&\cdot \sqrt{\theta_{GTu,N}} \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2} \\
&- V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} k_v \left(\frac{\kappa R}{V_{GT}} \right) A_{RV} (Y_{RV,N} (1 + u(t))) \theta_{GT,N} (1 + x_3(t)) \cdot \\
&\cdot \sqrt{\frac{(p_{GT,N} (1 + x_2(t)) p_{GTu,N} (1 + z_1(t)) - p_{GT,N}^2 (1 + x_2(t))^2)}{R \theta_{GTu,N} (1 + z_2(t))}} \\
&+ V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} k_v \left(\frac{\kappa R}{V_{GT}} \right) A_{RV} (Y_{RV,N}) \theta_{GT,N} \sqrt{\frac{(p_{GT,N} p_{GTu,N} - p_{GT,N}^2)}{R \theta_{GTu,N}}} \\
&+ V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} k_{peq} \left(\frac{\kappa R}{V_{GT}} \right) A_{eq} (Y_{RV,N} (1 + u(t))) \theta_{GT,N} (1 + x_3(t)) \cdot \\
&\cdot \sqrt{\frac{p_{GTu,N}^2 (1 + z_1(t))^2 - p_{GT,N}^2 (1 + x_2(t))^2}{R \theta_{GTu,N} (1 + z_2(t))}} \\
&- V_{GT} \frac{c_{GT}}{\kappa R} k_{peq} \left(\frac{\kappa R}{V_{GT}} \right) A_{eq} (Y_{RV,N}) \theta_{GT,N} \sqrt{\frac{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2}{R \theta_{GTu,N}}}
\end{aligned}
\tag{3.121}$$

После сређивања добијемо нелинеарну једначину поља притиска у турбини, у релативним одступањима, у облику:

$$\begin{aligned}
\frac{d x_3(t)}{d t} &= \\
&= \frac{R}{V_{GT} c_{GT}} \frac{1}{p_{GT,N}} \frac{(1+x_3(t))}{(1+x_2(t))} \times \\
&\quad \left(\begin{aligned} &\frac{c_{GT} k_v \sqrt{\theta_{GTu,N} p_{GT,N}}}{\sqrt{R}} \left(\begin{aligned} &A_{RV} (Y_{RV,N} (1+u(t))) \sqrt{(1+z_2(t))} \\ &\cdot \sqrt{\left((1+x_2(t)) p_{GTu,N} (1+z_1(t)) - p_{GT,N} (1+x_2(t))^2 \right)} \\ &- A_{RV} (Y_{RV,N}) \sqrt{(p_{GTu,N} - p_{GT,N})} \end{aligned} \right) \\ &- \frac{c_{GT} k_{peq} \theta_{GT,N}}{\sqrt{R \theta_{pGTu,N}}} \left(\frac{p_{GTi,N}}{p_{GT,N}} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \left(\begin{aligned} &A_{eq} (Y_{RV,N} (1+u(t))) \frac{(1+x_3(t))}{\sqrt{(1+z_2(t))}} \cdot \left(\frac{(1+z_3(t))}{(1+x_2(t))} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \\ &\sqrt{p_{GTu,N}^2 (1+z_1(t))^2 - p_{GTi,N}^2 (1+z_3(t))^2} \\ &- A_{eq} (Y_{RV,N}) \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GTi,N}^2} \end{aligned} \right) \\ &\times -\eta_m \eta_{isz} k_{peq} \frac{\kappa \sqrt{R}}{\kappa-1} \sqrt{\theta_{GTu,N}} \left(\begin{aligned} &A_{eq} (Y_{RV,N} (1+u(t))) \left(1 - \left(\frac{p_{GTi,N} (1+z_3(t))}{p_{GTu,N} (1+z_1(t))} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \\ &(1+z_2(t)) \sqrt{p_{GTu,N}^2 (1+z_1(t))^2 - p_{GTi,N}^2 (1+z_3(t))^2} \\ &- A_{eq} (Y_{RV,N}) \left(1 - \left(\frac{p_{GTi,N}}{p_{GTu,N}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \cdot \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GTi,N}^2} \end{aligned} \right) \\ &- \frac{c_{GT} k_v \theta_{GT,N} \sqrt{p_{GT,N}}}{\sqrt{R \theta_{GTu,N}}} \left(\begin{aligned} &A_{RV} (Y_{RV,N} (1+u(t))) (1+x_3(t)) \cdot \\ &\sqrt{\frac{\left((1+x_2(t)) p_{GTu,N} (1+z_1(t)) - p_{GT,N} (1+x_2(t))^2 \right)}{(1+z_2(t))}} \\ &- A_{RV} (Y_{RV,N}) \sqrt{(p_{GTu,N} - p_{GT,N})} \end{aligned} \right) \\ &+ k_{peq} \frac{c_{GT} \theta_{GT,N}}{\sqrt{R \theta_{GTu,N}}} \left(\begin{aligned} &A_{eq} (Y_{RV,N} (1+u(t))) (1+x_3(t)) \cdot \\ &\sqrt{\frac{p_{GTu,N}^2 (1+z_1(t))^2 - p_{GT,N}^2 (1+x_2(t))^2}{(1+z_2(t))}} \\ &- A_{eq} (Y_{RV,N}) \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \tag{3.122}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d x_2(t)}{d t} &= f_2(u(t), z_1(t), z_2(t), z_3(t), x_2(t), x_3(t)) \\ &f(0,0,0,0,0) = 0, f: R^5 \rightarrow R \tag{3.123}
\end{aligned}$$

Ради једноставности записа једначина, уведене су следеће ознаке

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{R}{V_{GT} c_{GT}} \frac{1}{P_{GT,N}} = 4.452 \cdot 10^{-4}, \quad C_{31} = \frac{c_{GT} k_v \sqrt{\theta_{GTu,N} P_{GT,N}}}{\sqrt{R}} = 3.015 \cdot 10^5 \\
C_{32} &= \frac{c_{GT} k_{peq} \theta_{GT,N}}{\sqrt{R \theta_{GTu,N}}} \left(\frac{P_{GT,N}}{P_{GT,N}} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 590.83, \\
C_{33} &= \eta_m \eta_{tzs} k_{peq} \frac{\kappa \sqrt{R}}{\kappa-1} \sqrt{\theta_{GTu,N}} = 535.784 \\
C_{34} &= \frac{c_{GT} k_v \theta_{GT,N} \sqrt{P_{GT,N}}}{\sqrt{R \theta_{GTu,N}}} = 2.554 \cdot 10^5 \quad C_{35} = \frac{c_{GT} k_{peq} \theta_{GT,N}}{\sqrt{R \theta_{GTu,N}}} = 473.5
\end{aligned} \tag{3.124}$$

Узимајући у обзир претходно уведене ознаке, нелинеарна једначина поља обртања турбине поприма следећи облик:

$$\begin{aligned}
\frac{d x_3(t)}{dt} &= C_3 \frac{(1+x_3(t))}{(1+x_2(t))} \\
&\left(\begin{aligned}
&C_{31} \left(\begin{aligned}
&A_{RV} (Y_{RV,N} (1+u(t))) \sqrt{(1+z_2(t))} \sqrt{((1+x_2(t)) P_{GTu,N} (1+z_1(t)) - P_{GT,N} (1+x_2(t))^2)} \\
&- A_{RV} (Y_{RV,N}) \sqrt{(P_{GTu,N} - P_{GT,N})}
\end{aligned} \right) \\
&- C_{32} \left(\begin{aligned}
&A_{eq} (Y_{RV,N} (1+u(t))) \frac{(1+x_3(t))}{\sqrt{(1+z_2(t))}} \left(\frac{(1+z_3(t))}{(1+x_2(t))} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \sqrt{P_{GTu,N}^2 (1+z_1(t))^2 - P_{GTi,N}^2 (1+z_3(t))^2} \\
&- A_{eq} (Y_{RV,N}) \sqrt{P_{GTu,N}^2 - P_{GTi,N}^2}
\end{aligned} \right) \\
&- C_{33} \left(\begin{aligned}
&A_{eq} (Y_{RV,N} (1+u(t))) \left(1 - \left(\frac{P_{GTi,N} (1+z_3(t))}{P_{GTu,N} (1+z_1(t))} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \\
&\sqrt{(1+z_2(t))} \sqrt{P_{GTu,N}^2 (1+z_1(t))^2 - P_{GTi,N}^2 (1+z_3(t))^2} \\
&- A_{eq} (Y_{RV,N}) \left(1 - \left(\frac{P_{GTi,N}}{P_{GTu,N}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \sqrt{P_{GTu,N}^2 - P_{GTi,N}^2}
\end{aligned} \right) \\
&- C_{34} \left(\begin{aligned}
&A_{RV} (Y_{RV,N} (1+u(t))) (1+x_3(t)) \sqrt{\frac{((1+x_2(t)) P_{GTu,N} (1+z_1(t)) - P_{GT,N} (1+x_2(t))^2)}{(1+z_2(t))}} \\
&- A_{RV} (Y_{RV,N}) \sqrt{(P_{GTu,N} - P_{GT,N})}
\end{aligned} \right) \\
&+ C_{35} \left(\begin{aligned}
&A_{eq} (Y_{RV,N} (1+u(t))) (1+x_3(t)) \sqrt{\frac{P_{GTu,N}^2 (1+z_1(t))^2 - P_{GT,N}^2 (1+x_2(t))^2}{(1+z_2(t))}} \\
&- A_{eq} (Y_{RV,N}) \sqrt{P_{GTu,N}^2 - P_{GT,N}^2}
\end{aligned} \right)
\end{aligned} \right) \tag{3.125}
\end{aligned}$$

Линеаризована једначина стања, дата је са:

$$\frac{d(x_3(t))}{dt} = a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t) + b_3 \cdot u(t) + f_{31} \cdot z_1(t) + f_{32} \cdot z_2(t) + f_{33} \cdot z_3(t) \quad (3.126)$$

Линеаризацијом функције $f_3(\cdot)$ око номиналног радног режима добија се:

$$a_{32} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right)_N = C_3 Y_{RV,N} \cdot \begin{pmatrix} -0.5C_{31} \frac{2p_{GT,N} - p_{GTu,N}}{\sqrt{(p_{GTu,N} - p_{GT,N})}} \\ -C_{32} \frac{\kappa-1}{\kappa} \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GTi,N}^2} \\ +0.5C_{34} \cdot \frac{2p_{GT,N} - p_{GTu,N}}{\sqrt{(p_{GTu,N} - p_{GT,N})}} \\ -C_{35} \frac{p_{GT,N}^2}{\sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2}} \end{pmatrix}$$

$$a_{33} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right)_N = C_3 Y_{RV,N} \cdot \begin{pmatrix} -C_{32} \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GTi,N}^2} \\ -C_{34} \sqrt{(p_{GTu,N} - p_{GT,N})} \\ +C_{35} \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2} \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial u} \right)_N = C_3 Y_{RV,N} \cdot \begin{pmatrix} C_{31} \left(\frac{\partial A_{RV}}{\partial u} \right)_N \sqrt{p_{GTu,N} - p_{GT,N}} \\ -C_{32} \left(\frac{\partial A_{eq}}{\partial u} \right)_N \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GTi,N}^2} \\ -C_{33} \left(\frac{\partial A_{eq}}{\partial u} \right)_N \left(1 - \left(\frac{p_{GTi,N}}{p_{GTu,N}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \times \\ \times \sqrt{p_{GTu}^2(t) - p_{GTi,N}^2} \\ -C_{34} \left(\frac{\partial A_{RV}}{\partial u} \right)_N \sqrt{(p_{GTu,N} - p_{GT,N})} \\ +C_{35} \left(\frac{\partial A_{eq}}{\partial u} \right)_N \sqrt{p_{GTu,N}^2 - p_{GT,N}^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
f_{31} &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial z_1} \right)_N = C_3 Y_{RV,N} \cdot \left(\begin{array}{l} 0.5C_{31} \frac{P_{GTu,N}}{\sqrt{P_{GTu,N} - P_{GT,N}}} - C_{32} \frac{P^2_{GTu,N}}{\sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GTi,N}}} \\ -C_{33} \left(1 - \left(\frac{P_{GTi,N}}{P_{GTu,N}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \frac{P^2_{GTu,N}}{\sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GTi,N}}} + \\ -\frac{\kappa}{\kappa-1} C_{33} \left(\frac{P_{GTi,N}}{P_{GTu,N}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GTi,N}} \\ -0.5C_{34} \frac{P_{GTu,N}}{\sqrt{P_{GTu,N} - P_{GT,N}}} + C_{35} \frac{P^2_{GTu,N}}{\sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GT,N}}} \end{array} \right) \\
f_{32} &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial z_2} \right)_N = C_3 Y_{RV,N} \cdot \left(\begin{array}{l} 0.5C_{31} \sqrt{P_{GTu,N} - P_{GT,N}} \\ +0.5C_{32} \sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GTi,N}} \\ -0.5C_{33} \left(1 - \left(\frac{P_{GTi,N}}{P_{GTu,N}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \cdot \sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GTi,N}} \\ +0.5C_{34} \sqrt{P_{GTu,N} - P_{GT,N}} \\ -0.5C_{35} \sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GT,N}} \end{array} \right) \quad (3.127) \\
f_{33} &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial z_3} \right)_N = C_3 Y_{RV,N} \cdot \left(\begin{array}{l} C_{32} \left(-\frac{1-\kappa}{\kappa} \sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GTi,N}} + \frac{P^2_{GTi,N}}{\sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GTi,N}}} \right) \\ \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \right) \left(\frac{P_{GTi,N}}{P_{GTu,N}} \right)^{(\kappa/\kappa-1)} \sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GTi,N}} + \\ +C_{33} \left(1 - \left(\frac{P_{GTi,N}}{P_{GTu,N}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right) \frac{P^2_{GTi,N}}{\sqrt{P^2_{GTu,N} - P^2_{GTi,N}}} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Вредности коефицијената срачунате су на основу података из Додатка Б, и дате у Табели 3.3.

Табела.3.3 Вредности коефицијената линеаризоване једначине поља притиска у парној турбини

$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_3}{\partial u} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_3}{\partial z_1} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_3}{\partial z_2} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_3}{\partial z_3} \right)_N$
$-2.308 \cdot 10^3$	$-2.235 \cdot 10^3$	$-3.4754 \cdot 10^3$	$-2.693 \cdot 10^3$	497.7307	$1.5265 \cdot 10^3$

Смењујући добијене коефицијенте из (таб.3.1),(таб.3.2) и (таб.3.3) у јед. (3.90), (3.105) и (3.125) добијамо линеаризовани модел експанзионе турбине у облику:

$$\frac{d(x_1(t))}{dt} = -1.5246 \cdot 10^4 x_1(t) + 0.2635 u(t) + 0.2635 z_1(t) + 0.1318 z_2(t) \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(x_2(t))}{dt} = & -2.6392 \cdot 10^3 x_2(t) - 980.86 x_3(t) \\ & - 980.86 u(t) - 2.199 \cdot 10^3 z_1(t) + 490.43 z_2(t) \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(x_3(t))}{dt} = & -2.308 \cdot 10^3 x_2(t) - 2.235 \cdot 10^3 x_3(t) - 3.4754 \cdot 10^3 \cdot u(t) \\ & - 2.693 \cdot 10^3 \cdot z_1(t) + 4907.73 \cdot z_2(t) + 1.5265 \cdot 10^3 \cdot z_3(t) \end{aligned} \quad (3.130)$$

Динамичко понашање турбине описано је једначинама (3.127), (3.128) и (3.129).

3.4 Једначина излаза у експанзионој (гасној) турбини

Једначина излаза која нас интересује добија се из адијабатске промене стања односно једначине стања у експанзионој турбини и које су облика:

$$p_{GT}(t) \rho_{GT}^{-\kappa}(t) = p_{GTi}(t) \rho_{GTi}^{-\kappa} = const \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} p_{GT}(t) &= \rho_{GT}(t) R \theta_{GT}(t) \\ p_{GTi}(t) &= \rho_{GTi}(t) R \theta_{GTi}(t) \end{aligned} \quad (3.132)$$

Наиме, потребно је на основу претходних израза да успоставимо следећу везу:

$$\theta_{GTi}(t) = f_i(p_{GTi}(t), p_{GT}(t), \theta_{GT}(t)) \quad (3.133)$$

На основу (3.132) добија се:

$$\frac{\theta_{GTi}(t)}{\theta_{GT}(t)} = \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GT}(t)} \right) \cdot \left(\frac{\rho_{GT}(t)}{\rho_{GTi}(t)} \right) \quad (3.134)$$

односно на основу израза (3.130)

$$\left(\frac{\rho_{GT}(t)}{\rho_{GTi}(t)} \right) = \left(\frac{p_{GT}(t)}{p_{GTi}(t)} \right)^{1/\kappa} \quad (3.135)$$

и после замене у (3.134) следи:

$$\frac{\theta_{GTi}(t)}{\theta_{GT}(t)} = \left(\frac{p_{GTi}(t)}{p_{GT}(t)} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \quad (3.136)$$

Једначина излаза (3.136) важи за сваки па и номинални радни режим, тј:

$$\frac{\theta_{GTiN}(t)}{\theta_{GTN}(t)} = \left(\frac{p_{GTiN}(t)}{p_{GTN}(t)} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \quad (3.137)$$

Уводимо релативна одступања појединих величина коришћењем Лапуновљеве трансформације координата, као што следи:

$$\overline{\Delta p_{GTi}}(t) = \frac{p_{GTi}(t) - p_{GTi,N}}{p_{GTi,N}} \quad p_{GTi}(t) = p_{GTi,N} \left(1 + \overline{\Delta p_{GTi}}(t) \right) \quad (3.138)$$

$$\overline{\Delta \theta_{GTi}}(t) = \frac{\theta_{GTi}(t) - \theta_{GTi,N}}{\theta_{GTi,N}} \quad \theta_{GTi}(t) = \theta_{GTi,N} \left(1 + \overline{\Delta \theta_{GTi}}(t) \right) \quad (3.139)$$

$$\overline{\Delta p_{GT}}(t) = \frac{p_{GT}(t) - p_{GT,N}}{p_{GT,N}} \quad p_{GT}(t) = p_{GT,N} \left(1 + \overline{\Delta p_{GT}}(t) \right) \quad (3.140)$$

$$\overline{\Delta \theta_{GT}}(t) = \frac{\theta_{GT}(t) - \theta_{GT,N}}{\theta_{GT,N}} \quad \theta_{GT}(t) = \theta_{GT,N} \left(1 + \overline{\Delta \theta_{GT}}(t) \right) \quad (3.141)$$

Уведена релативна одступања усвајамо за величине стања, односно излаза:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_{GTi}}(t) &= z_3(t) \\ \overline{\Delta \theta_{GTi}}(t) &= x_i(t) \\ \overline{\Delta p_{GT}}(t) &= x_2(t) \\ \overline{\Delta \theta_{GT}}(t) &= x_3(t) \end{aligned} \quad (3.142)$$

Одузимањем јед. (3.137) од јед. (3.136) и преласком на релативна одступања усвојена за величине стања, добија се нелинеарна једначина излаза експанзионе турбине у релативним одступањима:

$$x_i(t) = \left(\frac{\theta_{GT,N}}{\theta_{GTi,N}} \right) \left(\frac{p_{GTi,N}(t)}{p_{GT,N}(t)} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \left[(1+x_3)(1+z_3)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} (1+x_2)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right] \quad (3.143)$$

$$x_i(t) = f_i(x_2(t), x_3(t), z_3(t))$$

$$f(0,0,0) = 0, \quad f: R^3 \rightarrow R \quad (3.144)$$

Ради једноставности уведена је следећа ознака:

$$C_i = \left(\frac{\theta_{GT,N}}{\theta_{GTi,N}} \right) \left(\frac{P_{GTi,N}}{P_{GT,N}} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 1.523 \quad (3.145)$$

Односно може се израз (3.139) записати у следећем облику:

$$x_i(t) = C_i \left[(1+x_3)(1+z_3)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} (1+x_2)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right] \quad (3.146)$$

Сада је линеаризована једначина излаза одређена са:

$$x_i(t) = c_{i2}x_2(t) + c_{i3}x_3(t) + d_{i3} \cdot z_3(t) \quad (3.147)$$

Линеаризацијом функције $f_i(\cdot)$ око номиналног радног режима добија се:

$$c_{i2} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right)_N = C_i \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)$$

$$c_{i3} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_3} \right)_N = C_i \quad (3.148)$$

$$d_{i3} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_3} \right)_N = C_i \left(\frac{\kappa-1}{\kappa} \right)$$

Вредности коефицијената срачунате су на основу података из Додатка Б, и дате у таб.3.4.

Табела.3.4 Вредности коефицијената линеаризоване једначине излаза (адијабатска промена стања)

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_3} \right)_N$	$\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_3} \right)_N$
-0.4351	1.5229	0.4351

3.5. Математички модел експанзионе турбине у простору стања

На основу јед. (3.128-3.130), које описују динамичко понашање експанзионе турбине, добија се математички модел турбине у простору стања као што следи:

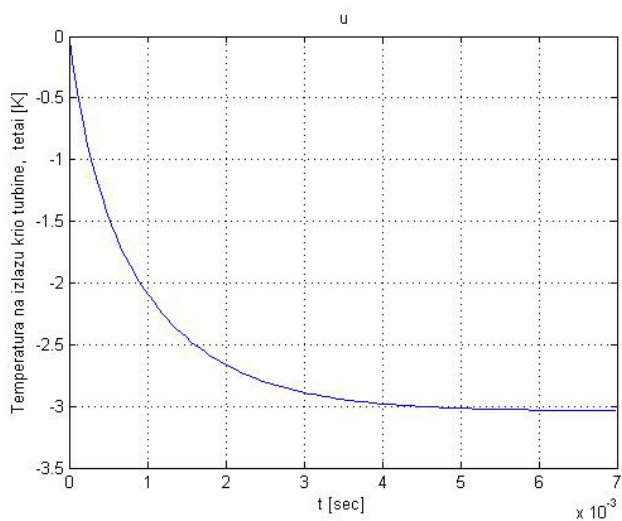
$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + bu(t) + Fz(t) \\ x_i(t) &= Cx(t) + Dz(t)\end{aligned}\quad (3.149)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1.5246 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -2.6392 \cdot 10^3 & -980.86 \\ 0 & -2.308 \cdot 10^3 & -2.235 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.2635 \\ -980.86 \\ -3.475 \cdot 10^3 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.2635 & 0.1318 & 0 \\ -2.199 \cdot 10^3 & 490.43 & 0 \\ -2.693 \cdot 10^3 & +490.73 & 1.5265 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.150)$$

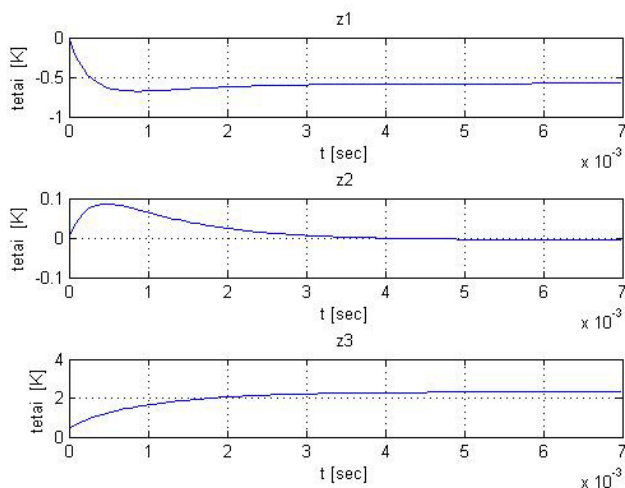
$$x_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & -0.4351 & 1.523 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4531 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}\quad (3.151)$$

3.5.1. Јединични одскачни одзиви система при појединачним променама улазних величина

На доњим сликама приказани су јединични одскачни одзиви система при појединачним променама улазних величина и који су израчунати у МАТЛАБ програмском окружењу.



Слика 3.3 Јединични одзив система –температуре на излазу криогене експанзионе турбине



Слика 3.4 Јединични одзив система на поремећаје–температуре на излазу криогене експанзионе турбине

Глава 4

Преглед најбитнијих резултата у примени теорије рачуна нецелог реда у системима ПИД управљања

4.1 Увод у управљање криогеним процесом

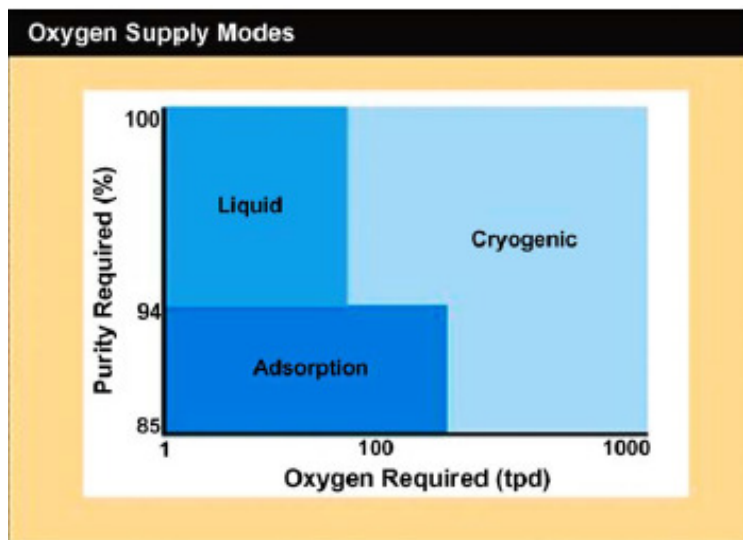
Постизање високих перформанси управљањем процесима захтева да управљачки систем управља датим постројењем на оптималан начин у односу на комплетан опсег стационарних и динамичних услова *Vinson, (2006)*. Процеси сепарације ваздуха представљају посебан изазов због њихове енергетске интензивне природе и захтевних производних програма. Способност да се остваре максимална побољшања у самом криогеном процесу одвајања ће зависити од даљег напретка у истраживању напредних техника управљања процесима.

Сепарација (разлагање) ваздуха је постао саставни процес у многим производним процесима при чему највећа тржишта за кисеоник су у примарној производњи метала, хемикалија и гасификација, стакла и бетона, нафтних рафинерија, као и заваривања. Исто тако употреба медицинског кисеоника је све заступљенија у медицинске сврхе. Гасовити азот се користи у хемијској и нафтној индустрији и такође се интензивно користи од у електроници и металској индустрији због својих инертних својстава. Течни азот се користи у апликацијама за криогено млевење пластике и за замрзавање хране у прехранбеној индустрији.

На крају гас аргон као трећа главна компонента ваздуха, због својих инертних својстава има примену у области заваривања челика и у производним процесима за електронских уређаја.

Раздвајање ваздуха на његове компоненте је свакако енергетски интензиван и захтеван процес, тако да је акценат у савременим постројењима где се одвијају процеси раздвајања ваздуха смањење потребне енергије за постизање крајњег циља. Један од начина реализације претходног јесте примена напредних стратегија у процесу управљања датим криогеним процесом.

Значајнији алгоритми управљања уз компјутерску подршку су примењени у раним седамдесетим годинама. Од тада, један већи број алгорита напредних управљања је примењен са циљем да побољшају ефикасност и продуктивност у производњи криогених гасова.



Слика 4.1.-Процес производње кисеоника –дијаграм селекције,
Air Products ,(1997).

Уопштено говорећи, постоје две основне методе за одвајање ваздуха у његове две главне компоненте. Ако се захтева гасовити кисеоник или азот мање запремине, онда се кроз процес адсорпције то реализује уз помоћ разлике притисака између адсорпционог корака и десорпционог/реактивационог могу се користити. С друге стране, ако је потребно течни продукти, веће запремине

гасификовани продукти или продукти високе чистоће, онда се могу употребити криогени процеси, слика 4.1, *Air Products*, (1997).

Криогенска сепарација ваздуха, представља један интензиван процес са становишта енергије. Садашња очекивања су да се применом ефикасне синтезе новог управљања побољша ефикасност и смањи потрошњу енергије, што у присуству неизвесности и поремећаја представља сложен и захтеван задатак. Посебно, оптималан рад и управљање криогеним процесом сепарације ваздуха добија све више на значају и одговарајућу пажњу, чији је основни циљ смањења потрошње енергије и побољшање економског учинка током рада.

Утврђено је да одговарајуће променљиве процеса одликује велики интезитет интеракције (један од разлога је и сам процес размене топлоте) и оне су одговорне за тешкоће које се јављају у примени постојећих ПИД управљачких алгоритама, на пример које су уобичајене у објектима сепарације ваздуха. Према томе, од нових напредних алгоритама мултиваријабилног управљања очекује се да имају одговарајући квалитет и ефикасност у превазилажењу предочених тешкоћа које се јављају овде је од интереса примена у процесима криогене сепарације ваздуха.

Типично, употреба конвенционалних ПИД регулатора за управљање гасном турбином је широко распрострањена, *Vinson*,(2006), *Balamurugan et al.*,(2007). У литератури постоје неколико метода за синтезу контролера за гасне турбине, на пример у раду *Moellenhoff, Vittal*,(1991) је предложен робусни контролер који је заснован на бази методологије синтезе LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery*). Такође, примењене су неке од савремених техника управљања као што су МПЦ-(предиктивно управљење засновано на моделу, адаптивно управљање *Goodhart, Venderbosch, et al.* (1999), *Ghorbani, Ghaffari, Rahnama*,(2008), или нелинеарном НМПЦ, *Zavala & Biegler*,(2009), или H_{∞} -бесконечно управљање *Najimi, Ramezani* (2012). Даље, имајући у виду online динамичку оптимизацију, *Zhu, Laird*, (2008) су предложили ефикасно паралелно нелинеарно решење које је базирано на примени теорије оптималног управљања у присуству неизвесности у процесу рада за две високо спрегнуте колоне за криогену сепарацију ваздуха.

С друге стране, увидом у постојеће примењене управљачке системе може се констатовати да нису искоришћени све предности напредне теорије управљања да се постигне жељени рад гасне турбине у задатом процесу.

Недавно, имајући у виду скорашње примене рачуна нецелог реда (*fractional calculus*) у системима управљања, *Caponetto, et al. (2010)*, *Monje et al. (2010)*, у раду *Jadhav, Chile, Hamde, (2014)* аутори су предложили робусни контролер нецелог реда базиран на концепту Бодеве идеалне преносне функције *Barbosa, Tenreiro, Ferreira, (2004)* у брзинској петљи која одговара брзини потрошње горива. На основу симулационих резултата показана је супериорност предложеног контролера у односу на класични ПИД контролер у погледу одговора у затвореној петљи, робусности на промену параметара датог система и такође у односу на поремећаје.

4.2 Основе рачуна нецелог реда (фракциони рачун)

У литератури се могу наћи више назива за математичку теорију под називом „*fractional calculus*“ као што су фракциони рачун, рачун нецелобројног/нецелог или произвољног реалног реда, рачун рационалног реда, и други. Рачун нецелог реда уопштава класична правила диференцирања или интеграљења целог реда на диференцирање и интеграљење произвољног нецелог реда. тј. представља уопштење класичне теорије интегралног и диференцијалног рачуна. Другим речима, *фракциони рачун** (*енг. fractional calculus*) је област математичке анализе која се бави изучавањем и применом извода и интеграла произвољног реалног или комплексног реда. Корени сежу до краја 17. века када су Њутн и Лајбниц постављали основе диференцијалног и интегралног рачуна. Када је у 17. веку интегрални рачун био развијен, Лајбниц (*Gottfried Leibniz 1646-1716*) и Лопитал (*Guillaume de L'Hopital 1661-1704*) су били такође заинтересовани и за проблеме фракционог рачуна (ФР) и најједноставнијим диференцијалним фракционим једначинама (ДФЈ) што се могло видети из кореспонденције коју су они имали

* коректније је рећи *рачун нецелог реда*, пошто степен може бити и реалан, комплексан број али задржаће се назив у овим разматрањима због препознатљивости самог појма.

путем писама. Тако је у једном писму упућеном Лопиталу, Лајбниц написао следеће:

Може ли значење извода целобројног реда $d^n f(x)/dx^n$ бити проширено и имати смисла када степен извода није цео број, већ било који број (рационалан (дат у виду разломка), ирационалан или чак комплексан? Лопитал је одговорио: Шта ако је $n=1/2$ тј. $d^{1/2} f(x)/dx^{1/2}=?$ за $f(x)=x$. Лајбниц је у писму датираном на 30 септембар 30, 1695, одговорио: То ће довести до парадокса, од којих ће се једног дана проистећи корисне последице. Овим речима фракциони рачун је био рођен и установљен.

Не задуго, новом теоријом су почели да се баве многи познати математичари и научници тог доба, међу којима су Ојлер, Риман, Лиувил, Абел, Фурије. До краја 20. века откривене су многе физичке манифестације и различите примене фракционог рачуна. Модели засновани на фракционим диференцијалним једначинама су се показали корисним у физици, механици, електротехници, биохемији, медицини, финансијама, теорији вероватноће и многим другим наукама које су се развијале последњих деценија. У периоду од 1900-1970 публикован је мали број радова везан за област фракционог рачуна. Допринос су дали Х. Дејвис, А. Ердели, Г. Харди, Х. Кобер, Ј.Литлвуд, М. Риз, С. Самко, Х. Вејл и други. Године 1974. у Конетикату је одржана прва међународна конференција на тему фракционог рачуна. Након тога, теорија фракционих оператора доживљава нагли развој. До данашњег дана списак књига, радова и текстова посвећених теорији и примени фракционог рачуна броји више стотина наслова. Детаљан преглед већине поменутих дела као и одржаних конференција, курсева и семинара на дату тему се може видети у *Machado et al. (2011)*.

У овој дисертацији користиће се називи „фракциони рачун“ / „рачун нецелог реда“ поједнако као и називе изводи и интегрални „фракционог/нецелог реда“ где ће се термин рачун нецелог реда или извод нецелог реда користити у смислу оператора извода нецелог у моделирању механичког дела кригоене

експанзионе турбине тако и у синтези напредног управљања које је сада целог и/или нецелог реда.

4.2.1 Дефиниције извода и интеграла фракционог реда

Применом Кошијеве интегралне формуле (види Додатак Д) и заменом факторијела одговарајућом Гама функцијом та формула се сада може представити у следећем облику

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau, \quad t \in [a, b], n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где је претпостављено да важи: $f(t) = 0, t < a$. Овде, Γ означава Ојлерову гама функцију и она се дефинише користећи Ојлеров интеграл друге врсте:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.2)$$

Даље, може се рећи да је једна од основних особина гама функције да она задовољава тзв. редукциону формулу тј. важи

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (4.3)$$

односно важи

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n! \quad n \in \mathbb{N} \\ \Gamma(1) &= 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Даље се даје дефиниција *левог Риман-Лиувиловог фракционог интеграла* реда $\alpha \in \mathbb{C}$ је дата са:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad t \in [a, b], \operatorname{Re} \alpha > 0 \quad (4.5)$$

као и десног *Риман-Лиувиловог фракционог интеграла* реда $\alpha \in \mathbb{C}$ који је:

$${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau) (\tau - t)^{\alpha-1} d\tau, \quad t \in [a, b], \operatorname{Re} \alpha > 0 \quad (4.6)$$

Такође, могу се дефинисати и одговарајући леви и десни Риман-Лиувилеви фракциони изводи ${}_a D_t^\alpha f, {}_t D_b^\alpha f$, реда $\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha \geq 0, n-1 < \operatorname{Re} \alpha < n, n \in \mathbb{N}$, као и да $f \in AC^n([a, b])$ онда изводи постоје готово свуда на $[a, b]$ и који су облика, *Kilbas et al., (2006)*:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left({}_a I_t^{n-\alpha} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad t \in (a, b), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} {}_t D_b^\alpha f(t) &= (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left({}_t I_b^{n-\alpha} f(t) \right) = \\ &= (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad t \in (a, b), \end{aligned} \quad (4.8)$$

За случај када је $0 \leq \alpha < 1$ и нека је $t > a, t < b$ имамо следеће изразе:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad t \in (a, b), \quad (4.9)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = (-1) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^\alpha} d\tau, \quad t \in (a, b), \quad (4.10)$$

Показано је да важи, *Samko et al., (1993)* за свако $\operatorname{Re} \alpha > 0, f \in L^p(a, b), 1 \leq p \leq \infty$ композиција фракционих извода и интеграла важи готово свуда $t \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \left({}_a D_t^\alpha {}_a I_t^\alpha \right) f(t) &= f(t), \quad t \in (a, b), \\ \left({}_t D_b^\alpha {}_t I_b^\alpha \right) f(t) &= f(t), \quad t \in (a, b), \end{aligned} \quad (4.11)$$

Лапласова трансформација Риман-Лиувилевиких интеграла и извода је дата следећим изразима, под претпоставком да је функција $f(\cdot)$ експоненцијално ограничена:

$$L\left[{}_0D_t^\alpha f(t)\right](s) = s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left[D^k {}_0I_t^{n-\alpha} f(t) \right]_{t=0}, \quad \operatorname{Re} s > s_0 \quad (4.12)$$

односно ако је $0 < \alpha < 1$

$$L\left[{}_0D_t^\alpha f(t)\right](s) = s^\alpha \tilde{f}(s) - \left[{}_0I_t^{1-\alpha} f(t) \right]_{t=0}, \quad \operatorname{Re} s > s_0 \quad (4.13)$$

У наставку представљена је и дефиниција *левог и десног Капутовог фракционог извода* реда $\alpha \in \mathbb{C}$ која је изворно уведена од стране Капута, *Caputo, (1967)*, респективно:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 \leq \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n, \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.14)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \begin{cases} (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 \leq \alpha < n \\ (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n, \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.15)$$

Уочава се да је Капуто извод од константе једнак нули, тј.

$${}_a^C D_t^\alpha C = 0, \quad {}_t^C D_b^\alpha C = 0, \quad (4.16)$$

У општем случају, Капуто и Риман-Лиувилев фракциони изводи се не поклапају односно у важности је следећа веза:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right), \quad t \in [a, b] \quad (4.17)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t^C D_b^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(b) \right), \quad t \in [a, b] \quad (4.18)$$

На сличан начин се дефинише Лапласова трансформација за Капуто фракционе извод, овде је приказан на пример, леви Капуто извод. Претпоставимо да је

$n-1 < \alpha \leq n$ и нека је $f(\cdot)$ таква да $f \in C^n(\mathbb{R}_+)$, $|f(t)|, |f^1(t)|, \dots, |f^n(t)| \leq \text{Be}^{s_0 t}$.

$\forall s_0 > 0, t > 0$. Такође важи: $\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(k)}(t) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ онда је:

$$L\left[{}^C_0 D_t^\alpha f(t) \right](s) = s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \text{Re } s > s_0 \quad (4.19)$$

односно ако је $0 < \alpha < 1$, следи:

$$L\left[{}^C_0 D_t^\alpha f(t) \right](s) = s^\alpha \tilde{f}(s) - s^{\alpha-1} f(0), \text{Re } s > s_0 \quad (4.20)$$

Такође, дефинисан је од стране Грунвалд-Летникова, фракциони извод, који је погодан за нумеричка израчунавања, *Kilbas et al., (2006)* и то леви и десни на следећи начин, респективно:

$${}^{G-L}D_a^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil (t-a)/h \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \right), \quad t > a, \quad \alpha > 0. \quad (4.21)$$

$${}^{G-L}D_b^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil (t-a)/h \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t+jh) \right), \quad t > a, \quad \alpha > 0. \quad (4.22)$$

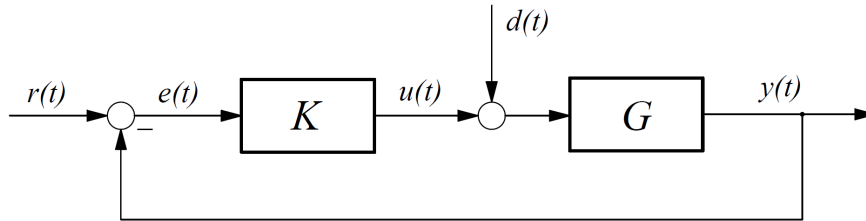
4.3 Преглед релевантних резултата примене управљања нецелог реда

4.3.1 Основе управљања применом ПИД алгоритама управљања нецелог реда

ПИД алгоритам управљања: конвенционални- целог реда и нецелог реда

Из теорије управљања нам је познато да када систем, објект управљања који разматрамо, није сам у стању да оствари динамичко понашање, какво желимо, принуђени смо да уведемо управљачки систем (даље ПИД контролер) којим ћемо обезбедити жељено кретање објекта управљања у простору променљивих за које

смо заинтересовани. Општа шема система управљања је дата следећим блок дијаграмом



Слика 4.2 Општи блок дијаграм система управљања.

при чему је G -објекат управљања заједно са актуатором, K - управљачки систем (овде ПИД контролер), а сигнали који су сви у општем случају зависни од времена t , $r(t)$, $y(t)$, $e(t) = r(t) - y(t)$, $u(t)$ и $d(t)$ су редом референтна (жељена) вредност излаза, излаз, грешка, управљање и поремећај на улазу објекта. Од оваквог система аутоматског управљања (САУ) се очекује да обезбеди пре свега стабилност рада датог система, задовољење пројектних захтева у смислу квалитета одзива, добро потискивање поремећаја на улазу и што мању осетљивост на пертурбације параметара модела објекта, *Стојић (1999), Грујић, Милојковић, (1990)*.

С друге стране, познато је да класичан пропорционални-интегрални-диференцијални (ПИД) контролер представља највише проучаван и примењиван контролер у постојећим системима управљања како у теоријских разматрања на академском нивоу тако и у индустријским апликацијама. У литератури данас постоје веома велики број различитих ПИД контролера по структури, као и обиље техника подешавања параметара, *Johnson et al. (2005)*. ПИД контролер се састоји од пропорционалног, интегралног и диференцијалног члана који се множе одговарајућим појачањима која представљају параметре који се могу подешавати. Наиме, због своје релативне једноставне структуре, интуитивног начина рада, добрих перформанси и робусности параметарског подешавања, ПИД контролер се широко користи у области индустријског управљања тако да се до данашњих дана он позиционирао као водећи алгоритам управљања у индустрији. Према доступним подацима може се рећи да око 95% повратних спрега у индустрији је

реализовано преко ПИД/ПИ регулатора, *Yamamoto, Hashimoto (1991)* док је тај процес у петрохемијској индустрији чак и нешто већи око 97%, *Åström, Hägglund, (2004), Desborough, Miller, (2002)*.

У временском домену ПИД контролер представљен је следећим изразом

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \frac{d}{dt} e(t) + k_i \int e(t) dt \quad (4.23)$$

где је $e(t)$ грешка, а k_p, k_d и k_i одговарајућа појачања. У комплексном домену претходни израз је облика

$$U(s) = (k_p + k_d s + \frac{k_i}{s}) E(s) = C(s) E(s) \quad (4.24)$$

или

$$C(s) = k \frac{(s / \omega_c)^2 + 2\delta_c s / \omega_c + 1}{s} \quad (4.25)$$

где су $\omega_c = \sqrt{K_i / K_d}$, $\delta = K_p / (2\sqrt{K_i K_p})$, $k = K_i$. Такође, може бити дат и у следећем облику:

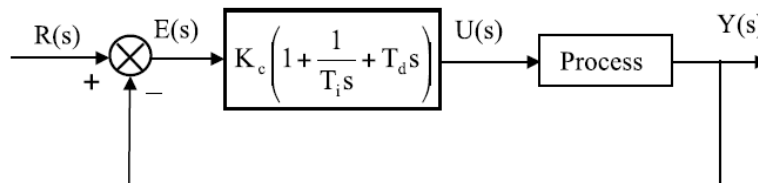
$$C(s) = k \frac{(s+a)(s+b)}{s} \quad (4.26)$$

где се могу лако одредити вредности за a, b имајући у виду претходни израз.

Правила подешавања контролера имају предност лакшег прорачуна параметара контролера (у поређењу са више аналитичких метода у поступку синтезе датог контролера), с једне стране. Са друге стране, употреба правила подешавања је добра алтернатива за подешавање помоћу покушаја и грешке. Практична потешкоћа са технологијом ПИД управљања је недостатак индустријских стандарда, што је резултирало у широком спектру архитектуре ПИД контролера. Девет различитих структура ПИ/ПИД контролера су идентификоване у пракси, *ODwyer, (2009)*. Подешавањем контролера може се остварити да добро ради на једној архитектури али са друге стране може лоше радити на другој архитектури ПИД контролера. Даље су дате две уобичајене архитектуре ПИД контролера:

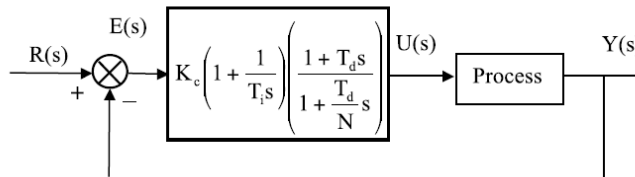
◦ 'идеални' ПИД контролер (слика. 4.3),

$$G_C(s) = K_c \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4.27)$$



Слика 4.3 Идеални ПИД контролер са јединичном повратном спрегом. Ова структура контролера и еквивалентна структура је такође позната као паралелна, идеално паралелна, неинтерактивна, независна или ИСА.

◦ Класични ПИД контролер (Слика 4.4) који је облика



Слика 4.4 Класични ПИД контролер са јединичном повратном спрегом. Ова структура контролера је позната као каскадна, интерактивна, аналогна.

$$G_C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \frac{1 + s T_d}{1 + s \frac{T_d}{N}} \quad (4.28)$$

4.3.2 Увод у управљање нецелог реда

Примена и присуство рачуна фракционог (нецелог) реда у свим гранама науке и технике више је него евидентно заступљена јер омогућава да се уочени системи квалитетније, боље моделирају, односно развију и примене квалитетнији системи управљања. У том смислу бројни научни радови и обимна публицистичка

делатност у пуној мери су исказали интерес који је за њих био показан. У математичком смислу, за разлику од „класичног“ диференцијалног и интегралног рачуна, овде степен може бити реалан број чак и комплексан број, тако да су одговарајући оператори диференцирања и интеграљења нелокални оператори и дати системи се сад могу описати са диференцијалним једначинама али нецелобројног реда тако да систем има више степени слободе. У специјалном случају када је степен целобројан онда се претходни оператори свде на „класичне“ операторе диференцирања и интеграљења. Такође, системи описани диференцијалним једначинама нецелог реда могу описати меморијске ефекте као и наследне особине система, које су карактеристика највећег броја реалних (био)техничких система.

Употребом појма „фракциони“ ми смо на неки начин ближи реалном свету, јер стварни процеси су углавном или највероватније фракциони, *Bagley, Torvik, (1984)* мада, многи од њих су фракционог реда који су веома мали. У теорији управљања, разматрани системи аутоматског управљања могу укључивати динамичке системе фракционог реда или да објекти управљања буду управљани контролерима који су фракционог реда што и представља чешћи случај у пракси. Тиме је омогућено да се применом управљања фракционог реда побољшају перформансе управљачког система, односно датог система управљања.

С друге стране, деценијски развој ПИД контролера и уз последњих година све више заступљеног развоја и примене рачуна нецелог реда омогућава нам једну нову перспективу у примени и развоју нових алгоритама управљања. На пример, ПИД контролери као најзаступљенији индустријски контролери се могу модификовати увођењем интегратора и диференцијатора фракционог реда где употребом допунског степена тј. параметра фракционог реда интегратора и/или диференцијатора се омогућава додатно побољшање перформанси традиционалних ПИД контролера, *Monje et al., (2010)*.

Применом рачуна нецелог реда можемо добити опис стварног објекта много прецизније него ако применимо тзв. постојеће класичне методе класичне целог реда. За системе аутоматског управљања у затвореној петљи, што се тиче примене односно постојања фракционалности постоје могуће четири ситуације, *Chen. (2006)*: а) објект управљања целог реда (ИО) са контролером целог реда

(ИО), б) објект управљања ИО са контролером фракционог реда (ФО), ц) објект управљања ФО са контролером ИО, д) објект управљања ФО са контролером ФО. Посебно је у литератури, *Monje et al.,(2008)*, показана и доказана оправданост саме примене алгоритама управљања фракционог реда у поређењу са применом управљања целог реда (класичан случај) и то вишег реда која такође даје добре резултате у пракси. Осим тога узимајући у обзир чињеницу да су ПИД контролери најзаступљенији у индустрији примена и утицај ПИД контролера фракционог (нецелог) реда би требала да заузме у будућности такође важно место у индустријској примени.

Постоје многе публикације посвећене анализи и синтези аналогног и дигиталног управљачког система управљања датим објектима управљања, су углавном ПИД контролери нецелог (*fractional*) реда различитих врста, *Podlubny,(1999),Monje et al.,(2010), Caponetto, (2010), Lazarević, Vučanović,(2009),(2010),(2011)*. Такви управљачки системи се користе за управљање динамичких система како нецелог тако и целог реда (класични), *Butkovskii et al.,(2013)*. Могу се уочити четири главне групе нецелог реда ПИД-контролера и то:

- „нагнут“ интегрално/диференцијални (ТИД) контролер (*tilted integral derivative (TID) controller*), *Lurie,(1994)*.
- CRONE-контролер (на француском“*Contrôle Robust d’Ordre Non Entier*,”то јест нецелог реда робусно управљање), *Oustaloup, (1991)*.
- $PI^\lambda D^\mu$ - контролер, који је, пропорционално интегро-диференцијални регулатор са редом интеграције $\lambda \geq 0$ и редом диференцијације $\mu \geq 0$, *Caponetto et al. (2010)*.
- стабилизирајући компезатор нецелог реда, *Monje et al,(2010)*, где поједини аутори разматрају и тзв. *phase shaper* нецелог реда као посебну класу контролера нецелог реда.

Историјски гледано, ТИД-контролер је био први контролер нецелог реда који је пројектован на сличан начин као и првог реда ПИД-контролер где је пропорционално појачање које је једнако јединици било замењено

карактеристиком накривљења (*a tilted characteristic*) $s^{-1/n}$, $n \neq 0$, $n \in [2,3] \in R$.

Одговарајућа преносна функција таквог контролера је дата са:

$$C(s) = K_i s^{-1/n} + K_i / s + K_d s \quad (4.29)$$

где је у раду, *Lurie,(1994)* посебно показано да она боље апроксимира оптималну (идеалну) Бодеову преносну функцију. Предност разматраног контролера се огледа у чињеници да се он може подешавати на систематичан начин где је пертурбациони коефицијент потискивања бољи у односу на класичне ПИД контролера, као и ниска осетљивост на варијацију параметара управљаног система.

Такође, CRONE-контролер представља један од најпопуларнијих контролера нецелог реда где су до сада развијене три генерације, *Monje et al.(2010)*, *Oustaloup (1991)*. Контролери нецелобројног реда су првобитно уведени од стране *Oustaloup (1991)*, који је развио такозвани *Commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE) controller*. Он је демонстрирао предности предложеног контролера на класичним ПИД контролером. Прва генерација КРОН контролера има функцију преноса у следећем облику:

$$C(s) = C_0 s^\alpha, \quad C_0, \alpha \in R \quad (4.30)$$

Избор параметара оваквог контролера је заснована на *Oustaloup*-ој рекурзивној апроксимацији *Monje et al.(2010)*, *Oustaloup (1991)*, *Oustaloup, (1999)*. Погодност примене овог Крон контролера је да за фреквентни опсег у ком је фаза константна обезбеђује знатну робусност на варијацију коефицијената преносне функције управљаног система.

Следећа (друга) генерација Крон контролера је пројектована са циљем да преносна функција отвореног кола управљаног система буде једнака идеалној Бодеовој преносној функцији, тј:

$$F(s) = C(s)G(s) = (\omega_{cg} / s)^\alpha, \quad (4.31)$$

где је са $G(s)$ означена преносна функција управљаног система, а ω_{cg} је пресечна фреквенција. Друга генерација Крон контролера омогућава сада да обезбеди

робусност на варијацију коефицијената преносне функције управљаног система у датом разматраном фреквентном опсегу и то када фаза није константна. На сличан начин као и код прве генерације Крон-контролера процедура селекције параметара је заснована на рекурзивној Оусталоповој апроксимацији или на апроксимацији преносне функције контролера са степеном функцијом са каснијим коришћењем одговарајућих метода идентификације, *Monje et al.(2010)*. Трећа генерација Крон-контролера представља логичан наставак и надградњу друге генерације контролера где је већ обезбеђена позната робусност коју има друга генерација али и робусност на друге неизвесности које потичу на пример од аномалија нула-пол конфигурације дате карактеристичне једначине.

Даље се посвећује пажња и опис треће можда најзаступљеније групе тј. $PI^\lambda D^\mu$ - контролера. Мало касније, *Podlubny,(1999)*, Подлубни је предложио генерализацију ПИД контролера тзв. $PI^\alpha D^\beta$ контролера нецелобројног реда. За разлику од класичног ПИД контролера који има три параметра за подешавање K , T_i , и T_d , овде код ПИД контролера нецелог реда имамо пет параметара λ , μ , K , T_i , и T_d . Он у суштини представља линеарни филтар бесконачног реда и сам контролер се може приказати следећом преносном функцијом:

$$C(s) = K + T_i s^{-\lambda} + T_d s^\mu \quad (4.32)$$

Пошто сада има више параметара за подешавање постоји већи број процедура које су предложене у теорији и пракси за подешавање датог контролера нецелог реда и које ће неке најзначајније бити и мало касније и приказане, *Das et al.(2011)*. Стабилизирајући компезатор нецелог реда такође се може идентификовати као још једна посебна врста контролера нецелог реда и који се може представити следећој преносном функцијом:

$$C(s) = C_0 \left(\frac{1 + s / \omega_b}{1 + s / \omega_h} \right)^\alpha, \quad C_0 > 0, |\alpha| \in (0,1) \quad (4.33)$$

Са ω_b, ω_h су означена лева и десна гранична вредност фреквентног опсега при чему коефицијенти преносне функције контролера линеарно расту са фреквенцијом. Овде се разликују два могућа случаја по питању вредности α , и то

$\alpha < 0$ када контролер ради као контролер нецелог реда интеграционог типа, и у случају када је $\alpha > 0$ онда контролер ради као одговарајући контролер нецелог реда диференцијалног типа. На квалитативно сличан начин као за случај $PI^\lambda D^\mu$ контролера могуће је спровести и за овај контролер процедуру подешавања параметара контролера, *Raynaud, Zergainoh, (2000)*.

4.3.3 ПИД контролер нецелог реда

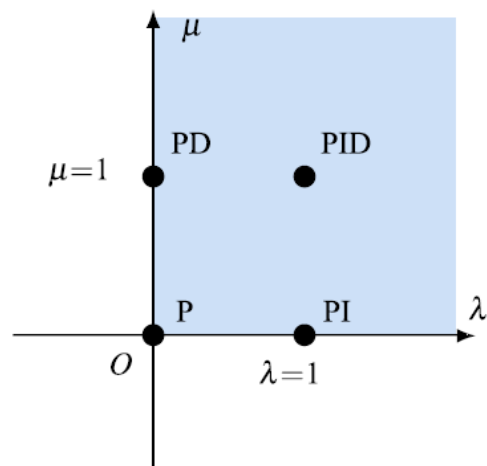
Као што је то раније истакнуто, ПИД алгоритам управљања нецелог реда представља уопштење конвенционалног ПИД алгоритма управљања и дат је наредним изразом

$$u(t) = k_p e(t) + k_d D^{\alpha_d} [e(t)] + k_i D^{-\alpha_i} [e(t)]; \alpha_d, \alpha_i \in [0, 1] \quad (4.34)$$

Док је одговарајући израз у комплексном домену

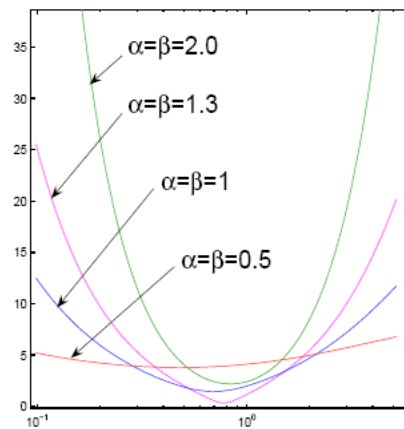
$$U(s) = (k_p + k_d s^{\alpha_d} + k_i s^{-\alpha_i}) E(s) = C(s) E(s) \quad (4.35)$$

Пошто ПИД алгоритам управљања нецелог реда осим одговарајућих појачања има подешљиве и степене за диференцирања и интеграљење, јасно је да даје веће могућности за управљање и види се да је конвенционални ПИД алгоритам управљања само посебан случај израза (4.32) или (4.33) за $\alpha_d = 1, \alpha_i = 1$. Ово је приказано на наредној слици 4.5.



Слика 4.5 Параметарска равна нецелог реда ПИД алгоритма управљања

Из наведеног се може закључити да ће ПИД алгоритам управљања нецелобројног реда у најгорем случају дати резултате исте као конвенционални ПИД алгоритам управљања. ПИД алгоритам управљања нецелобројног реда се може разматрати и као класични ПИД алгоритам управљања који има особине филтра пропусника опсега. Мењањем степена нецелобројног реда извода и интегратора могуће је мењати пропусни опсег филтра као што је приказано на слици 4.6.



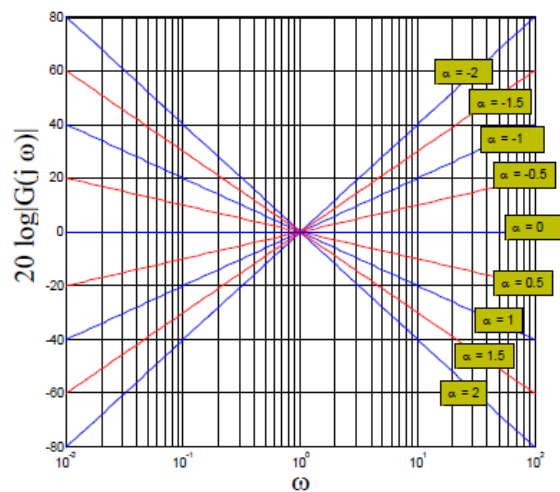
Слика 4.6 Приказ опсега пропусности филтера за различите вредности α, β

Као што је истакнуто раније употребом регулатора нецелог реда могуће је остварити много регулација система (знатно мањи прескок, време смирења). Овде је неопходно истаћи о могућности потискивања поремећаја у случају интегралног дејства нецелобројног реда и то у случају када систем не поседује астатизам онда неће потискивати поремећај на улазу у потпуности, односно треба водити рачуна у том случају о избору параметара регулатора нецелобројног реда као и избору допунског компензатора нецелобројног реда. Исто тако, у случају практичне дигиталне реализације датог ПИД алгоритма управљања нецелог реда део који се односи на извод нецелобројног реда је најчешће проширен са филтером првог реда у циљу потискивања шума у опсегу виших фреквенција у датој управљачкој петљи.

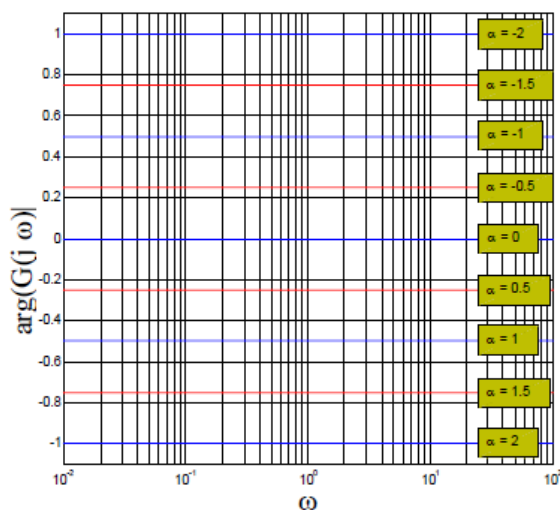
$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s^\alpha} + \frac{T_d s^\beta}{1 + s \frac{T_d}{N}} \right) \quad (4.36)$$

Преносне функције нецелобројног реда је теже практично применити од обичних тј. преносних функција са целобројним експонентима у имениоцу и бројиоцу тако да се у пракси често прибегава апроксимирању преносних функција нецелобројног реда конвенционалним преносним функцијама. Постоји више метода помоћу којих се ово може урадити и овде се приказују само неке од њих.

Такође, добро позната чињеница је да је нагиб амплитудне карактеристике система целог реда увек једнак целобројном умножку од 20 dB/dekadi . То није случај код система нецелог реда који сада могу у општем случају да имају амплитудну карактеристику произвољног нагиба, слика 4.7., *Lazarević, i dr. (2014)* Слично, уочава се да код система целог реда (класичног) он може имати константну фазу која је умножак $\pi/2$, док системи нецелог реда (фракциони) могу имати произвољну константу фазу, слика 4.8. У том смислу, понекад се системи нецелог реда, називају и идеалним Бодеоим системима.



Слика 4.7 Логаритамска амплитудна карактеристика за неколико вредности диференцијатора нецелог реда



Слика 4.8 Фазна карактеристика за неколико диференцијатора нецелог реда

У циљу практичне реализације оператор нецелог реда s^ν , $\nu \in \mathbb{R}$ је потребно апроксимирати и овде се даје једна од постојећих метода тзв. Оустолупова фреквентна апроксимативна метода који је у потпуности дат у раду *Oustaloup*, (2000).

Ова метода даје континуалну апроксимацију са N нула и полова. Да би се ова апроксимација користила број нула и полова као и интервал фреквенција на коме она важи морају се унапред задати. Апроксимација је облика

$$\hat{W}(s) = C_0 \prod_{n=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{zn}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pn}}} \quad (4.37)$$

Нека је $[\omega_l; \omega_h]$ интервал фреквенција на коме се ради апроксимација. Фреквенција нула и полова ће тада бити

$$\begin{aligned} \omega_{z1} &= \omega_l \sqrt{\eta} \\ \omega_{pn} &= \omega_{zn} \alpha, n = 1 \dots N \\ \omega_{zn+1} &= \omega_{pn} \eta, n = 1 \dots N - 1 \\ \omega_h &= \omega_{pN} \sqrt{\eta} \end{aligned} \quad (4.38)$$

ако се почне са нулом или

$$\begin{aligned} \omega_{p1} &= \omega_l \sqrt{\eta} \\ \omega_{zn} &= \omega_{pn} \alpha, n = 1 \dots N \\ \omega_{pn+1} &= \omega_{zn} \eta, n = 1 \dots N - 1 \\ \omega_h &= \omega_{zN} \sqrt{\eta} \end{aligned} \quad (4.39)$$

ако се почне са полом. Примена израза (4.38) даје повећање појачања и позитивну фазу што одговара случају $\nu > 0$ док се применом израза (4.39) добија смањење појачања и негативна фаза што одговара случају $\nu < 0$. Изрази (4.38) и (4.39) доводе до следећег израза

$$\omega_h = \omega_l (\alpha \eta)^N \Rightarrow \alpha \eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{1/N} \quad (4.40)$$

који се разлаже на

$$\alpha = (\alpha \eta)^{|\nu|} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{|\nu|}{N}} \quad (4.41)$$

$$\eta = (\alpha \eta)^{1-|\nu|} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{1-|\nu|}{N}} \quad (4.42)$$

Глава 5

Децентрализовано оптимално управљање целог и нецелог реда криогене експанзионе турбине у процесу сепарације ваздуха применом генетских алгоритама

У овом делу уведен је и детаљно објашњен један нови алгоритам ПИД управљања заснованог на рачуну нецелог реда (*fractional calculus*), *Podlubny,(1999), Kibas, Srivastava,Trujillo,(2006), Monje et al. (2010)* у производњи техничких гасова, односно у процесу сепарације утечњеног ваздуха, *arron,(1985), Castle,(2002),Vinson,(2006)*. Производња утечњеног ваздуха ниског притиска је по први пут била уведена од стране Капице где се експанзија одвијала у гасној турбини, *Mitovski,(1994),Раиковић,(2005)*. За примену у синтези управљања улазне температуре и протока ваздуха у експанзионој турбини, потребно је одредити одговарајуће диференцијалне једначине криогеног процеса мешања два гаса на различитим температурама на улазу у експанзиону турбину.

При томе, одговарајући модел је линеаризован и декуплован где су примењени истовремено класични (целог реда) ПИД као и ПИД контролери нецелог реда $PI^{\beta}D^{\alpha}$, *Podlubny,(1999)* да би се проценио квалитет предложеног новог управљања датим процесом. Скуп оптималних параметара датих контролера се постиже применом оптимизационе процедуре базиране на генетским алгоритмима минимизовањем одговарајућег критеријума

оптималности. Примењена оптимизациона метода се овде фокусира у оквиру критеријума оптималности на смањење прескока, време смирења и минимизацију интегралне грешке. Спроведене симулације у временском домену показују боље перформансе оптималног $PI^{\beta}D^{\alpha}$ контролера у односу на класични оптимални ПИД контролер, *Bučanović, Lazarević, Batalov, (2014)*.

5.1 Основне поставке генетских алгоритама

У последњих двадесетак година уочен је значајан развој и примена генетских алгоритама (ГА). ГА су предложени и уведени у решавању практичних проблема од стране *Hollanda, (1976)*, *Davis-a, (1991)* још у раним седамдесетима. На сличан начин, ГА је популарисао и представио у својој књизи, *Goldberg, (1989)*. У групи са ГА се могу сврстати и следеће методе које се темеље на сличним принципима, као на пример: еволуцијске стратегије (*evolutionary strategies*), симулирано каљење (*simulated annealing*), генетско програмирање (*genetic programming*) итд.. Сада су већина тих метода обједињене и познате под називом еволутивни алгоритми односно еволутивни алгоритми (ЕАС) су глобалне, паралелне, оптимизационе методе претраживања који су засновани на принципима природне селекције и популационе генетике. Област ЕАС има своје корене у четири еволутивна приступа: еволутивно програмирање (ЕП), еволуционе стратегије (ЕС), генетски алгоритми (ГА), као и генетско програмирање (ГП).

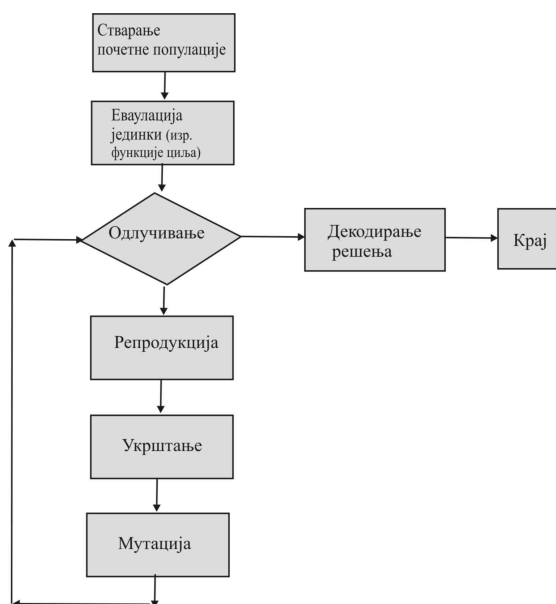
Овде је од интереса применити генетске алгоритме у решавању постављеног проблема. ГА су се показали врло корисним и моћним алатом за решавање читавог низа проблема из инжењерске праксе. Наиме, једна од модерних метода пројектовања оптималних контролера је и примена генетских алгоритама, који представљају део веће групе еволутивних алгоритама, *Haupt, Haupt, (2004)*. Разлог можда лежи у чињеници да је једноставан по самој структури тако и по питању њихове примене. Са математичке тачке гледишта ГА представља једну робусну хеуристичку методу оптимизације која имитира природни еволуцијски процес. Генетски алгоритми (ГА) садрже одговарајућа правила претраживања као и

поступак оптимизације циљних функција која почивају на основним механизмима природне селекције, генетике и еволуције *Goldberg,(1989), Haupt,Haupt,(2004)*. Технике које се том приликом користе су добијене покушајима да се опонашају природни процеси и операције над хромозомима, која у себи садрже кодирану структуру и информације о особинама живих организама, и последично и у овим ГА имамо процедуре наслеђивања, укрштања, мутације, репродукције и селекције.

Наиме, као што је добро познато, жива бића се током еволуције прилагођавају условима у природи, тј животној околини. Овде еволуција представља један робустан процес претраживања простора решења са циљем достизања глобалног оптималног решења у идеалном случају или решења блиског оптималном глобалном решењу (реални и најчешћи случај). Овде се користи биолошки аналогон еволуције као природног процеса тј. ГА као методе оптимизације што се види у процесу селекције и одговарајућим генетским операторима. У основи ГА лежи идеја о преживљавању најбољих јединки (решења) у датој популацији, где се на основу преживљавања најбољих јединки ГА усмерава у околину оптималног решења при чему се претражују само они делови простора који садрже само „добра решења“. По начину деловања ГА спадају у методе усмереног претраживања простора решења (*guided random search techniques*) у тражењу глобалног оптимума. У току претраживања ГА покушава уравнотежити два супротна циља тј. претраживање најбољег решења уз истовремено истраживање (проширивање) простора који садржи тражено оптимално решење.

У примени ГА једно решење одговара једној јединици. Како преживљавају најбоље јединке онда је и последично већа вероватноћа да ће се те јединке укрстити у циљу преноса генетског материјала на потомке који ће имати боље особине него родитељи и који ће формирати следећу генерацију. Према томе, селекцијом се одабирају добре јединке које се преносе у следећу популацију, а манипулацијом датог генетског материјала (путем укрштања, мутације) стварају се нове јединке. Кључ селекције у природи над датом врстом живих бића представљају околина и одговарајући услови, док је код ГА *функција циља* кључ за селекцију над датом популацијом решења.

При томе, прва генерација се случајно одабира и горе наведени циклус селекције, репродукције и манипулације генетским материјалом јединки се понавља на итеративни начин док се не достигне услов заустављања еволуцијског процеса и што је приказано на Сл.5.1.



Слика 5.1 Дијаграм тока рада ГА

5.2 Математички модел процеса мешање две струје гасовитог ваздуха различитих температура пре улаза у експанзиону турбину

Овде је од интереса да постројење за добијање техничких гасова посматрамо као објект управљања јер као што је добро познато из теорије аутоматског управљања да систем који треба да оствари одређено (прописано, задато, номинално) понашање (рад, процес) је објект, а само то понашање (рад, процес) је његово жељено понашање (жељени рад, жељени процес). При томе, циљ је да постројење за добијање техничких гасова произведе у складу са потребама потрошача, захтевану количину прописане чистоће и температуре, гасовитог кисеоника и азота, као и течног кисеоника и азота уз минималну (оптималну) потрошњу електричне енергије и уз истовремено поштовање безбедносних прописа саме производње а који се односе на заштиту околне средине.

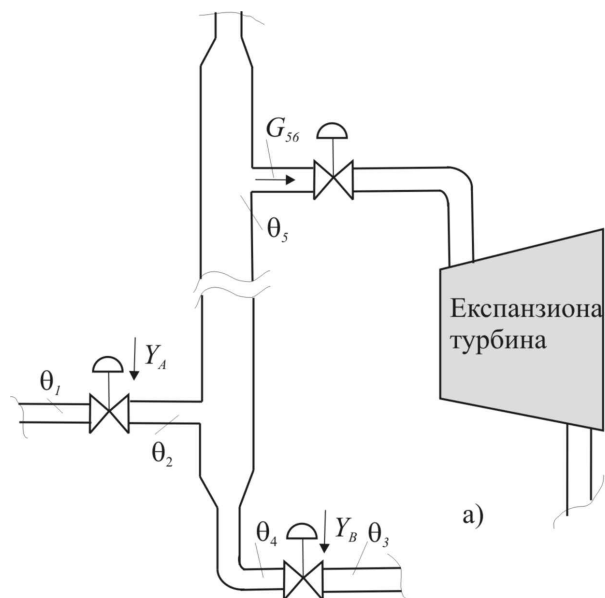
Постројење за добијање техничких гасова се може поделити према главним функцијама процесне опреме на следеће секције и то: секција за снабдевање и пречишћавање ваздуха, секција хладног циклуса, секција ректификације, секција за складиштење и дистрибуцију производа као и секција за грејање постројења.

Сама процесна опрема у постројењу за добијање техничких гасова је пројектована за номиналне услове рада, међутим, стварни услови рада се често разликују од номиналних, због присутних поремећаја (на пр. промена температуре улазног атмосферског ваздуха, итд.) чиме дато постројење не може остварити жељене циљеве. Из тог разлога потребно је обезбедити одговарајући управљачки систем који ће обезбеђивати да постројење за добијање техничких гасова оствари жељене захтеве у номиналним радним условима, а у условима различитим од номиналних радних услова омогућити задовољавајуће понашање истог у прописаним границама.

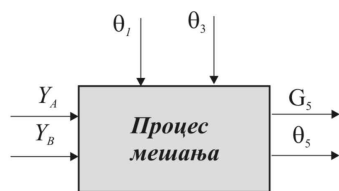
Овде је од интереса управљање секцијом *хладног циклуса* односно развоја новог управљачког система на бази нових концепата и алгоритама управљања који ће сада омогућити да се добију знатно боље перформансе датог система. Не мањи значај има и управљање радом експанзионе (гасне) турбине током нормалног рада постројења (фаза у раду и управљању када се у дужем временском периоду добијају гасовити кисеоник и азот и течни кисеоник и азот)

где је уочено да исправан рад експанзионе (гасне) турбине, а самим тим и целог постројења, у великој мери зависи од температуре, притиска и масеног протока гасовитог ваздуха на њеном улазу. При томе температура процесног ваздуха на улазу у експанзиону турбину $\theta_5(t) \approx \theta_{uGT}(t)$, сл.5.2 треба да буде у опсегу од $-145 \pm 5 [^{\circ}C]$ $-149 \pm 5 [^{\circ}C]$, притисак од $5,75 [bar]$ и масени проток $G_5(t)$ од $7600 [m^3 / h]$, а да температура процесног ваздуха на излазу из експанзионе турбине буде у опсегу од $-180 \pm 5 [^{\circ}C]$, при чему се мора испоштовати ограничење да број обртаја турбине не сме прећи број обртаја од $15600 [min^{-1}]$. То је могуће обезбедити мешањем две струје гасовитог ваздуха различитих температура и то струја гасовитог ваздуха са хладног краја реверзних рекуперативних размењивача топлоте температуре од $\theta_3(t) = -172 \pm 4 [^{\circ}C]$ и струје гасовитог ваздуха са средине истих температуре $\theta_1(t) = -120 \pm 5 [^{\circ}C]$.

За потребе синтезе управљања температуре улазног ваздуха и протока ваздуха кроз експанзиону турбину, неопходно је овде одредити одговарајуће линеаризоване диференцијалне једначине криогеног процеса мешање две струје гасовитог ваздуха различитих температура пре улаза у експанзиону турбину, сл.5.2. На основу описа процеса може се видети сва његова сложеност, нарочито везана за међусобне утицаје промена одређених величина, *Рашковић, (2005)*. Пошто ваздух струји кроз цевовод одређене дужине, вредности одређених величина стања биће функције како времена тако и просторних координата. Због свега тога у току процеса моделовања уведен је одговарајући број претпоставки што говори у прилог максимално допуштеној идеализацији процеса, *Гајић, (2008)*.



Слика 5.2а Символично-функционална шема



b)

Слика 5.2б Дијаграм процеса (б)

На основу самог процеса мешања две струје гасовитог ваздуха усвајају се одговарајуће величине стања, управљања као и поремећаја где се применом Љапуновљеве трансформације координата могуће дефинисати одступања појединих величина:

$$\Delta G_{56} = G_{56}(t) - G_{56N} = x_1(t), \quad \Delta \theta_5 = \theta_5(t) - \theta_{5N} = x_2(t) \quad (5.1)$$

$$\Delta Y_A(t) = Y_A(t) - Y_{AN} = y_A(t) = u_1(t); \quad \Delta Y_B(t) = Y_B(t) - Y_{BN} = y_B(t) = u_2(t);$$

$$\Delta \theta_1(t) = \theta_1(t) - \theta_{1N} = z_1(t); \quad \Delta \theta_3(t) = \theta_3(t) - \theta_{3N} = z_2(t);$$

где је на основу уведених претпоставки у важности:

$$\theta_2(t) \approx \theta_1(t); \quad \theta_4(t) \approx \theta_3(t); \quad (5.2)$$

На тај начин могуће је добити систем диференцијалних једначина разматраног процеса који представља нелинеарни математички модел истог и дат са:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), y_A(t), y_B(t)) \quad (5.3a)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), y_A(t), y_B(t), z_1(t), z_2(t)). \quad (5.3b)$$

Применом поступка линеаризације претходних једначина, *Гаџућ, (2008)* добијају се линеарне диференцијалне једначине које описују криогени процес мешања два гасовитих ваздушних токова различитим температурама пре уласка у експанзиону турбину у простору стања и излаза:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} -0,2 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 45,736 & 28,07 \\ 0,174 & -0,085 \end{bmatrix} u(t) \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,088 & 0,112 \end{bmatrix} z(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$x_o(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (5.5)$$

У кондезованој форми једначина стања односно излаза је:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_z z(t), \quad x_o(t) = Cx(t) \quad (5.6)$$

где су одговарајући вектори дати са: $u(t) = [y_A(t) \ y_B(t)]^T$, $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t)]^T$, а A, B_u, B_z, C су матрице одговарајућих димензија. Из онога што је горе речено, јасно је да модел представља један МИМО систем, где је број улаза је да је једнак броју излаза, односно систем је «квадратни» и према томе могуће је применити стратегију управљања која се заснива на распрезању истог, где сваки од улаза може утицати на само један излаз. На тај начин, може добити тзв. *не-интерактивни систем* у којем је преносна функција система $W(s)$ распрегнута, односно матрица система је дијагонална и несингуларна. У циљу распрезања датог система предлаже се и уводи следеће управљање помоћу повратне спреге *Brogan, (1985)*.

$$u(t) = -K_c x(t) + F_c v(t) \quad (5.7)$$

где је са c_i означен i -ти ред матрице C односно, матрица N је одређена следећим изразом:

$$N = \left(c_1 A^{p_1} B_u, c_2 A^{p_2} B_u, \dots, c_m A^{p_m} B_u \right)^T, \det N \neq 0$$

$$p_i = \begin{cases} \min(j, c_i A^j B_u \neq 0) \\ n-1, c_i A^j B_u = 0, \forall j \end{cases}, \forall j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (5.8)$$

На тај начин добија се:

$$F_c = N^{-1}, K_c = N^{-1} \begin{bmatrix} c_1 A^{p_1+1} & c_2 A^{p_2+1} & \dots & c_m A^{p_m+1} \end{bmatrix}^T. \quad (5.9)$$

Преносна функција $W(s)$ почетног система је

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B_u = \begin{bmatrix} \frac{45.736}{s+0.2} & \frac{28.07}{s+0.2} \\ \frac{0.174}{s+0.2} & \frac{-0.85}{s+0.2} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

и после примене новог управљања, добија се

$$W(s) = C(sI - A + B_u K_c)^{-1} B_u F_c. \quad (5.11)$$

За наш случај, применом предложене процедуре за одређивање F_c, K_c следи:

$$c_1 = [1 \ 0], c_2 = [0 \ 1], p_1 = 0, p_2 = 0, \quad (5.12)$$

$$N = B_u, F_c = B_u^{-1}, K_c = B_u^{-1} A,$$

односно

$$W(s) = C(sI)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Према томе у простору стања распрегнути систем је сада облика:

$$\dot{x}_1 = v_1, \quad (5.14)$$

$$\dot{x}_2 = v_2 + 0.088z_1 + 0.112z_2.$$

5.3 Оптимално подешавање параметара нецелог реда ПИД контролера применом генетских алгоритама

У овом поглављу ће се разматрати приступ пројектовању оптималних система управљања путем подешавања параметара предложеног ПИД контролера применом генетских алгоритама за потребе синтезе управљања температуре улазног ваздуха и протока ваздуха кроз експанзиону турбину у процесу мешање две струје гасовитог ваздуха различитих температура.

У циљу односно минимизације погодно одабраног критеријума перформансе, односно даљег побољшања оптималности, предложени су и примењени поред конвенционалних и управљачки системи нецелог реда. Примена рачуна нецелог реда у теорији управљања иако изгледа на први поглед као специјалан случај класичних техника, у ствари представља уопштење стандардног приступа. Овакви управљачки системи поседују неке нове карактеристике, и које су саме по себи донекле другачије у односу на оне већ традиционалне. Наиме, код ПИД контролера нецелог реда-*FrPID*-а, који ће даље бити обележен са $PI^\beta D^\alpha$ дозволити да, диференцијално и интегрално дејство може бити и нецелог реда, уместо до садашњих јединичних експонената тј.

$$s \rightarrow s^\alpha, \quad 1/s \rightarrow s^{-\beta} \quad (5.15)$$

При томе, најчешће вредности за $\alpha, \beta \in (0,1)$, мада могу бити и већи од један. Овде је предложен и примењен *FrPID* ($PI^\beta D^\alpha$) контролер, *Podlubny, (1999), Monje, et al. (2010)* у циљу примене квалитетног напредног управљања процесом производње техничких гасова и који је у временском домену дат са:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d D_t^\alpha e(t) + K_i D_t^{-\beta} e(t). \quad (5.16)$$

Применом Лапласове трансформације, може се добити функција преноса фракционог ПИД контролера је (*Kilbas, Srivastava, Trujillo, 2006*):

$$G_{FOPID}(s) = K_p + K_d s^\alpha + K_i s^{-\beta}, \quad (\alpha, \beta > 0), \quad (5.17)$$

односно:

$$G_{FrPID}(s) = \frac{K_p s^\beta + K_i + K_d s^{\beta+\alpha}}{s^\beta}, \quad (\alpha, \beta > 0), \quad (5.18)$$

За разлику од класичног ПИД контролера, *FrPID* контролер осим стандардних појачања K_p , K_i и K_d поседује још и редове диференцирања α и интегралења β који се сада могу слободно бирати, па према томе уместо три подешљива параметра сада имамо пет параметара што свакако пружа шири простор за подешавање истих. То је илустровано на слици 4.5, 4 поглавље, са које је јасно да конвенционални ПИД контролер представља само специјални случај *FrPID*-а за $\alpha=1$ и $\beta=1$. Параметри управљања су: пропорционално појачање K_p , диференцијално појачање K_d , интегрално појачање K_i , нецели ред α извода, као и нецели ред интеграла β , (5.16). Одавде би се могло закључити да ПИД нецелог реда у најнеповољнијем случају даје резултате исте као класични ПИД, што представља мотивацију да се и примени и види ефекат оваквог управљачког система у примени. За разлику од конвенционалних ПИД регулатора, не постоји систематски и детерминисани начин пројектовања или метода за подешавање датих *FrPID* контролера, *Sabatier, Agrawal, Machado, (2007)*.

Исто тако, у случају практичне дигиталне реализације датог ПИД алгоритма управљања нецелог реда део који се односи на извод нецелог реда је најчешће проширен са филтером првог реда у циљу потискивања шума у опсегу виших фреквенција у датој управљачкој петљи.

$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s^\alpha} + \frac{T_d s^\beta}{1 + s \cdot T_i / N} \right) \quad (5.19)$$

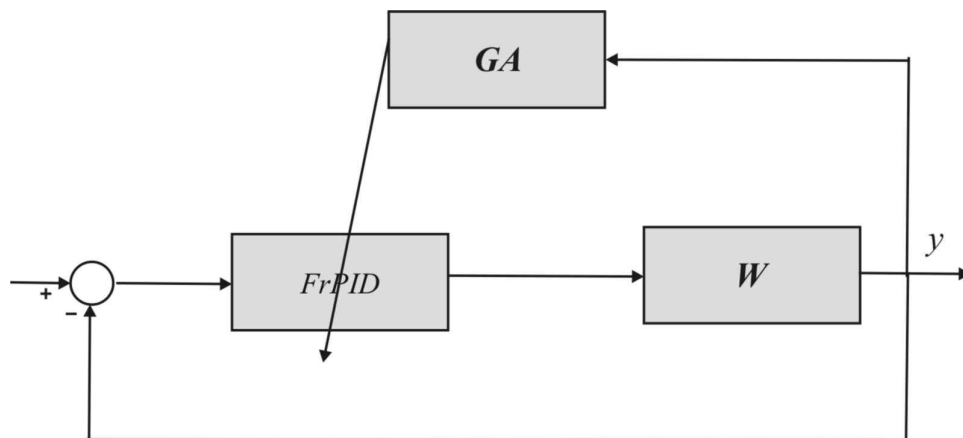
Поред тога, за већину апликација поремећаји оптерећења су обично сигнали ниске фреквенције и њихово слабљење је веома важна карактеристика контролера. Шта више, показано је у раду, *Astrom, Hagglund, (1995)* да ће са максималним интегралним појачањем K_i , ефекат поремећаја оптерећења на излазу ће бити минимална. Очигледно је да диференцијално дејство мора постојати јер се у случају *feedback* линеаризованог система он понаша као двоструки интегратор те би у случају само П или ПИ дејства, систем у затвореној спреси са контролером био нестабилан.

Уочава се да је тешко подесити параметре нецелог реда ПИД контролера, а да при томе задовољи свеукупну перформансу истовремено.

Пројектовање ПИД контролера нецелог реда може се разматрати као мулти-објективни проблем оптимизације, који при томе на компромисни начин укључује брзину, стабилност и прецизност система управљања. Неки аутори су у својим радовима користили за индексе перформанси критеријумске функције на следећи начин: интеграл апсолутне вредности грешке (*IAE*), средња квадратна грешка (*MSE*), интеграл времена помножен са апсолутном грешком (*ITAE*), интеграл квадратне грешке (*ISE*), интеграл времена помножен квадратом грешке (*ITSE*), *Astrom, Hagglund, (2005); Monje et.al, (2010)*.

$$\begin{aligned} IAE &= \int |e(t)| dt, \quad MSE = \frac{1}{T} \int (e(t))^2 dt, \\ ITAE &= \int t |e(t)| dt, \quad ISE = \int e(t)^2 dt, \quad ITSE = \int te(t)^2 dt. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Као математичко средство за оптимизацију генетски алгоритми (ГА) се могу природно применити за оптимално подешавање параметара нецелог реда ПИД регулатора. Другим речима, ГА је препознат као ефективна и ефикасна техника за решавање проблема оптимизације. ГА је техника претраживања која манипулише кодираном презентацијом параметарског скупа у циљу тражења блиског решења оптималном решењу кроз кооперацију и такмичење потенцијалних решења. Алгоритам заснован на генетским алгоритмима је веома релевантан за индустријску примену, јер је алгоритам погодан за решавање проблема са ограничењима, циљевима и динамичким компонентама. ГА користи природну еволуцију у циљу достизања глобалног оптималног решења. Овде се предлаже примена примена генетских алгоритама за одређивање оптималних параметара нецелог реда ПИД регулатора, сл.5.3, *Bučanović, Lazarević, Batalov, (2014)*.



Слика 5.3 Структурни блок дијаграм тока рада ГА

У фази имплементације реалног кодирања, сваки хромозом се кодира као вектор реалних бројева, исте дужине као вектор траженог решења. Према постављеним циљевима управљања, пет параметара $K_p, K_d, K_i, \alpha, \beta$ ПИД контролера нецелог реда ($FrPID$) је потребно подесити, тј. параметри контролера су пропорционално, интегрално и диференцијално појачање, редом K_p, K_i и K_d , у случају класичног PID -а, као и додатни α и β код $FrPID$ -а.

Као функцију циља (*фитнес функција*)- J , односно индекс перформансе који желимо да минимизујемо, изабрана је функција као линеарна комбинација прескока P_0 , времена смирења T_s и интеграла апсолутне грешке e .

$$J = |P_0| + T_s + \int |e| dt \rightarrow \min \quad (5.21)$$

У разматраном случају *фитнес функција* је усвојена:

$$f_g = J_{\max} + J_{\min} - J_g \quad (5.22)$$

где су са J_{\max}, J_{\min} означене највећа и најмања вредност фитнес функције J респективно односно J_g вредност фитнес функције за текућу(тренутну) популацију. Параметри датог контролера су представљени одговарајућим редоследом употребом одговарајућег броја битова и који су спојени у један хромозом који садржи комплетну информацију о датим параметрима ПИД контролера. За конкретан случај усвојено је да укупан број хромозома у

популацији буде $N = 100$ где се почетна популација бира на стохастички начин. При томе, за сваки хромозом је неопходно проверити да ли је такав систем у затвореној спрези стабилан, и ако се покаже да то није испуњено поступак се наставља док хромозом који се бира поново не испуни постављени захтев. Даље, на почетку сваке итерације ГА спроводи се евалуација сваког хромозома, као и израчунавање његове функције циља. Следећи корак ГА представља примену операције репродукције, чији је основни задатак да обезбеди да боље јединке (решења) имају веће шансе да преживе. Већина стратегија које се примењују су елитистичке чиме се гарантују бољим јединкама сигурно место у наредној генерацији. У нашем случају примењена је и спроведена операција репродукције позната под називом *одабирање остатака без замене* која i -тој јединки гарантује $nf_i / \sum f_i$ копија, при чему се врши одсецање разломљеног дела, где је n - укупан број хромозома у популацији, а f_i - вредност евалуационе функције i -тог хромозома. Разломљени део представља вероватноћу да ће ова јединка имати још једну јединку у наредној генерацији.

Иако применом операције репродукције која води рачуна о најбољим јединкама из популације, она не генерише нови квалитет у смислу нових хромозома, па је потребно применити нову операцију - укрштање којом је сада омогућено да се из најбољег материјала могуће створити још бољи материјал што представља главни оператор који ради над генима родитеља. За разматрани случај овде је изабрано да вероватноћа укрштања буде $p_c = 0.75$. Сам поступак репродукције се обавља тако да се бирају из датог скупа јединки бирају по две, где се затим на случајан начин бира место преласка генетског материјала. Када се операција укрштања заврши приступа се провери да ли два ново добијена хромозома испуњавају услов стабилности, и ако се деси да не испуњавају постављени услов у популацију је неопходно вратити стари хромозом родитељ. Даље, поступак се наставља на итеративан начин где се на почетак сваке наредне генерације спроводи евалуација ново добијених потомака и формирања потпуно нове популације хромозома од родитеља и потомака. При томе, проценат хромозома родитеља (тзв. *генерацијски размак*) који ће бити замењен популацијом потомака је изабран овде да буде $gr = 0.34$ односно од потомака се

узима 34% најбољих јединки док се преостали хромозоми из родитеља на случајан начин одабирају. Тиме је омогућено да и «лошије јединке» могу дуже преживети чиме је дата могућност њима да укажу и пронађу потенцијално боље просторе претраживања оптималног решења. Овде је усвојен услов изласка из итеративне петље ГА да барем 50% јединки има приближно минималну вредност функције циља или да број генерација постане 2,5 пута већи од броја јединки тј. 250. Познато је да операције укрштања и репродукције воде генерално ка добијању бољих резултата, они не дају нови квалитет(информацију) на нивоу бита. У циљу превазилажења овог проблема користи се и операција мутације са малом вероватноћом p_m као извор другачијих вредности битова, чиме се случајно изабрани бит инвертује. С друге стране као што је познато и у природи, мутација може довести до потпуно новог квалитета или до дегенеративних јединки (које ће бити одбачене са великом вероватноћом бити одбачене у процесу репродукције). У разматраном случају сугерисан је и примењен тзв. променљив степен мутације који је дат следећим изразом:

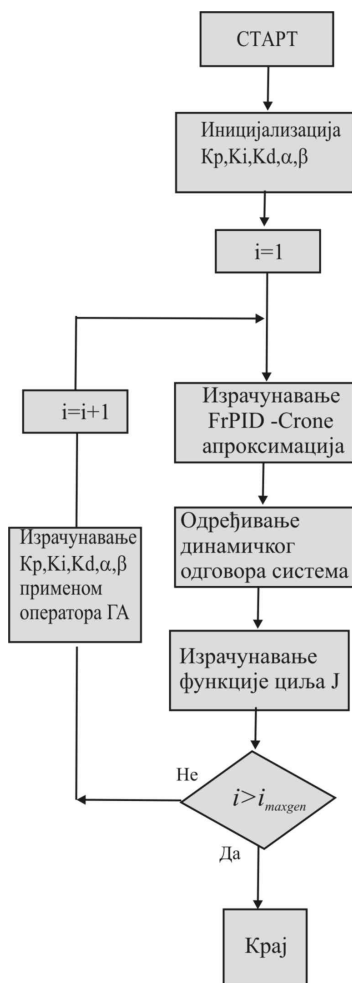
$$p_m = p_{m0} \min(l / g_c, 1) \quad (5.23)$$

где су: p_{m0} - почетна вероватноћа мутације l - праг слабљења, g_c - текућа генерација. Уочава се да је у почетној фази примене датог израза за вредност вероватноће мутације p_m је велика, са циљем да се повећа тзв. разноврсност јединки, док касније та вредност постепено опада. Према томе, даље су приказани на једном месту сви ГА параметри:

- величина популације $N = 100$,
- вероватноћа укрштања $p_c = 0.75$,
- вероватноћа мутације $p_m = p_{m0} \min(1, l / g)$, $p_{m0} = 0.1$, $l = 25$
- генерацијски размак $gr = 0.34$

У нашем случају, сваки индивидуални вектор има пет параметара $FrPID$ -а, где у циљу смањења времена оптимизације, сл.5.4, интервали параметара су одабрани као

$$K_p \in [0, 20], K_i \in [0, 20], K_d \in [0, 20], \alpha \in (0, 1], \beta \in [0, 1], \quad (5.24)$$

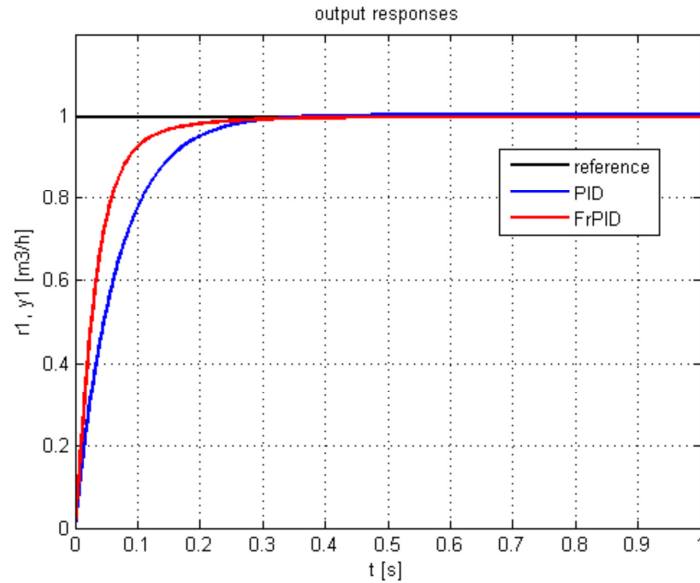


Слика 5.4 Дијаграм тока оптимизације *FrPID*-а применом ГА

<i>kontroler</i>		K_p	K_i	K_d	β	α	J
<i>PID</i>	1.	15	1	0	1	1	0.81
	2.	15	7	0	1	1	19.15
<i>FrPID</i>	1.	13	3	11	0.034	0.073	0.24
	2.	14	8	11	0.98	0.069	13.22

Табела 5.1. Вредности оптималних параметара ПИД контролера нецелог и целог реда (класични ПИД контролер) засновани на примени ГА

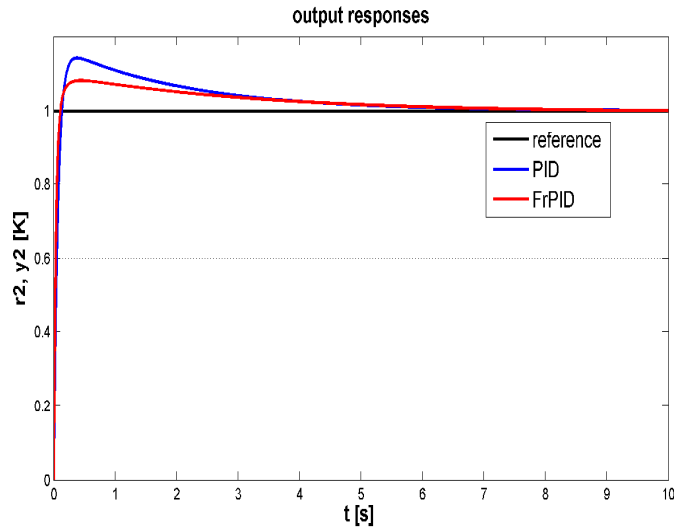
Овде ће бити представљени резултати симулације система управљања са *PID* и *FrPID* контролерима пројектованим помоћу ГА, *Вићановић, Lazarević, Batalov (2014)*.



Слика 5.5 Јединични одзив $y_1(t) = x_{i1}(t) [m^3 / h]$ - гасовитог протока ваздуха на самом улазу у експанзиону турбину применом оптималног ПИД контролера нецелог (*FrPID*) као и оптималног ПИД контролера целог реда

Као што се види на сл.5.5 на бази јединичног одзива $y_1(t) = x_{i1}(t) [m^3 / h]$ управљање гасовитом струјањем ваздуха на улазу у експанзиону турбину показује боље карактеристике у случају управљања применом оптималног ПИД контролера нецелог (*FrPID*) у односу на примену оптималног ПИД контролера целог реда. Такође, добили смо да применом *FrPID* контролера добијају следеће карактеристике: прескок је 0,006%, а време пораста је 0.184. С друге стране, са класичним ПИД контролером се добија 0,43% прескок док је време пораста 0.248.

С обзиром на изведени математички модел мешања две струје гасовитог ваздуха различитих температура пре улаза у експанзиону турбину уочава се да поремећаји утичу само на величину $y_2(t) = x_{i2}(t)$, где су вредности поремећаја дати са $z_1 = 10[K], z_2 = 10[K]$.



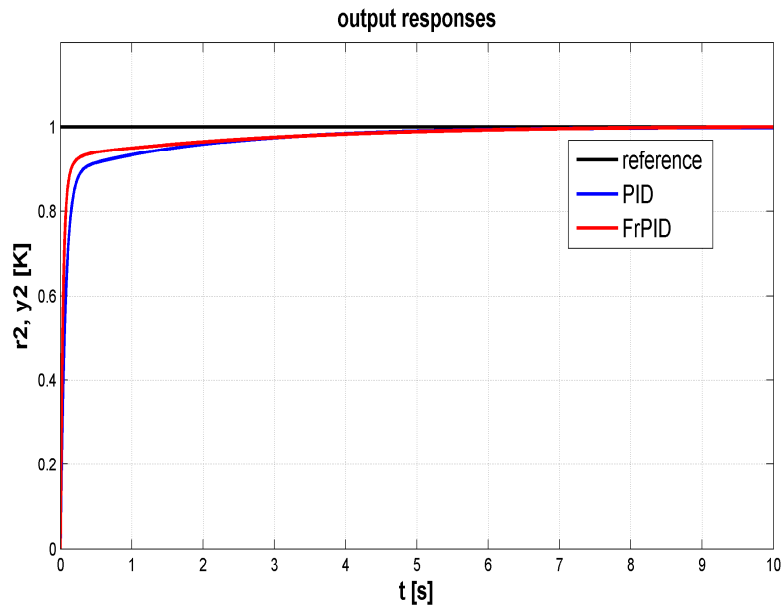
Слика 5.6 Јединични одзив $x_{r_2}(t)$ [K]- температуре гасовитог ваздуха на самом улазу у експанзиону турбину применом оптималног ПИД контролера нецелог (*FrPID*) као и оптималног ПИД контролера целог реда у присуству поремећаја $z_1 = 10[K]$, $z_2 = 10[K]$,

На сличан начин, сл.5.6, добија се у овом случају да применом *FrPID* контролера прескок износи 8.19%, а време раста 4.520 *sec* док у случају примене класичног ПИД контролера се добија да је прескок 14.25%, односно време раста је 4.609 *sec*.

У циљу тестирања робусности управљања у односу на поремећаје, где је сада примењен поремећај који је промењен за следећу вредност

$$\Delta z_i = 20[K], i = 1, 2 \text{ тј. } z_1 = -10[K] \text{ и } z_2 = -10[K]. \quad (5.25)$$

Са слике 5.7 такође се може уочити да су и у овом случају добијене боље карактеристике када се примени предложени оптимални ПИД контролер нецелог реда у поређењу са класичним ПИД контролером који је целог реда.



Слика 5.7 Јединични одзив $x_{i2}(t)$ [K]- температуре гасовитог ваздуха на самом улазу у експанзиону турбину применом оптималног ПИД контролера нецелог (*FrPID*) као и оптимално ПИД контролера целог реда у присуству поремећаја $z_1 = z_2 = -10$ [K].

Глава 6

Напредно мултиваријабилно управљање криогеним процесом применом аналитичког пројектовања стандардног регулатора

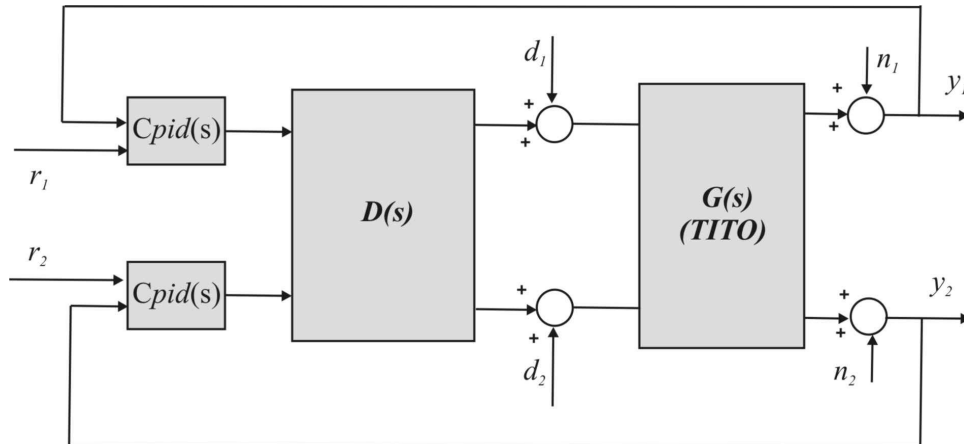
6.1 Уводна разматрања

Овде је од интереса применити одговарајуће мултиваријабилно управљање задатим криогеним процесом. Данас, највећи број управљачких система су комплексни и вишепроменљиви, односно састоје се од неколико управљачких сигнала као и неколико мерених сигнала, где често постоје сложена спрезања између различитих сигнала. С друге стране, пројектовање мултиваријабилних регулатора је захтеван и сложен проблем.

Уочава се да мултиваријабилно управљање које се данас користи углавном је на вишем нивоу, док се задавање радних тачака и побољшање перформанси дешава због побољшања у ПИД петљама на нижим нивоима.

Један од начина је да полазећи од чињенице да су за системе са једним улазом и једним излазом *SISO* (*Single-Input Single-Output*) већ развијене адекватне технике управљања и да се оне употребе за систем са више улаза и више излаза *MIMO* (*Multiple-Input Multiple-Output*) димензија $n \times n$ када се он представи као n -*SISO* система за које се потом пројектују одговарајући регулатори. Побољшање на овом нижем нивоу се углавном добија на два начина. У првом случају ако је могуће пронаћи ефикасан поступак за децентрализовано управљање *Gundes*,

Mete, Palazoglu, (2009) или у другом случају да се користи декуплер, статички (*Astrom, Johansson, Wang, 2002*) или динамички *Nordfeldt, Hagglund, (2006); Huang, Lin, (2006); Jevtović, Mataušek, (2010)*.



Слика 6.1 МИМО систем са два улаза и излаза (ТИТО) са регулаторима $C_{PID}(s)$ и декуплером $D(s)$

У многим проблемима управљања јављају се две управљачке величине које интерагују и које су примењене на системе димензије два пута два, тј. системе са два улаза и два излаза познати и као (ТИТО) системи управљања. У циљу примене декуплера за ТИТО процесе уводи се претпоставка да је одговарајући систем линеарно стабилан несингуларан систем са два улаза и два излаза *Nordfeldt, Hagglund, (2006)*.

Посебно, идеални декуплер треба да задовољи следеће релације:

$$W(s) = G_p(s) \cdot D(s), \quad (6.1)$$

односно за случај ТИТО система:

$$W(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & 0 \\ 0 & w_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Један од начина добијања дијагоналне $W(s)$ је представљен у раду *Tavakoli, Griffin, Fleming, (2006)*. Овде ће бити искоришћен други начин који сугерише

примену дијагоналне $K(s)$ и презентован у радовима *Nordfeldt, Hagglund,(2006)*; *Huang, Lin,(2006)* на следећи начин:

$$D(s) = adj(G_p(s)) \cdot K(s) \quad (6.3)$$

При томе у раду(*Nordfeldt, Hagglund,(2006)*), аутори су предложили избор $K(s)$ тако да $W(s)$ мора бити дијагонална матрица; као и да не треба да буде високо пропусног карактера уз истовремено редукацију заједничких елемената. С друге стране *Huang, Lin,(2006)* користе $K(s)$ да избегну потешкоће у инверзији факторизованог $G_p(s)$ уз истовремено подешавање динамичких карактеристика $W(s)$. При томе, идеално (пуно) распрезање има неке очигледне предности са оперативне тачке гледишта али са друге стране плаћена је цена декупловању (распрезању) и то што смо ближи потпуном распрезању датог система то је већи пик осетљивости датог система, *Goodwin, Graebe, Salgado,(2001)*.

6.2 Синтеза аналитичког ПИД регулатора за управљање криогеним процесом

Овде је од интереса спровести синтезу једног новог мултиваријабилног управљања базираног на аналитичком пројектовању ПИД регулатора и то криогеног процеса мешање две струје гасовитог ваздуха различитих температура пре улаза у експанзиону турбину. Осим саме динамике криогеног процеса и овде је узета у обзир и динамика управљачког дела објекта ког чине позиционер, пнеуматски појачавач (*volume booster*) и пнеуматски мотор *,Гажућ, (2008)* . После елементарних трансформација добија се у s –домену одговарајућа преносна функција следећег облика:

$$\begin{pmatrix} g_5(s) \\ \theta_5(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2963.04}{(s+0.2)(s+27.78)} & \frac{747.5}{(s+0.2)(s+8.62)} & 0 & 0 \\ \frac{11.27}{(s+0.2)(s+27.78)} & \frac{-2.26}{(s+0.2)(s+8.62)} & \frac{0.088}{s+0.2} & \frac{0.112}{s+0.2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_A(s) \\ i_B(s) \\ z_1(s) \\ z_2(s) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

где су, *Гажућ, (2008)* :

$g_5(t)$ [m_N^3 / h]- одступање вредности протока од номиналне вредности протока гасовитог ваздуха на улазу у експанзиону турбину: $G_{56N} = 7600$ [m_N^3 / h],

$\theta_5(t)$ [K] - одступање вредности температуре од номиналне вредности температуре гасовитог ваздуха на улазу у експанзиону турбину $T_{5N} = 124$ [K],

$i_A(t)$ [mA]- одступање вредности управљачког сигнала од номиналне вредности управљачког сигнала који представља излаз из корекционог органа, а улаз позиционера на управљачком вентилу *TV946A* $I_{AN} = 6,19$ [mA],

$i_B(t)$ [mA]- одступање вредности управљачког сигнала од номиналне вредности управљачког сигнала који представља излаз из корекционог органа, а улаз позиционера на управљачком вентилу *TV946B* $I_{BN} = 9,47$ [mA].

$z_1(t) = \theta_1(t)$ [K] - одступање вредности температуре од номиналне вредности температуре гасовитог ваздуха са средине размењивача топлоте $T_{1N} = 153$ [K],

$z_2(t) = \theta_3(t)$ [K] - одступање вредности температуре од номиналне вредности температуре гасовитог ваздуха са хладног краја размењивача топлоте $T_{3N} = 101$ [K],

У конкретном нашем случају, види (6.4), $G(s)$ је сада:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2963.04}{(s+0.2)(s+27.78)} & \frac{747.5}{(s+0.2)(s+8.62)} \\ \frac{11.27}{(s+0.2)(s+27.78)} & \frac{-2.26}{(s+0.2)(s+8.62)} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Идеални декуплер који се овде предлаже и разматра дат је са

$$D_{2 \times 2}(s) = \text{adj}(G_{2 \times 2}(s)) \cdot K_{2 \times 2}(s), \quad (6.6)$$

$$K(s) = \text{diag}(k_{ii}(s)), \quad ii = 1, 2, \dots, n \quad (6.7)$$

Овде је са $K(s)$ дефинисана одговарајућа дијагонална матрица функција преноса у циљу елиминације заједничке динамике (нуле, полови и транспортно кашњење) у одговарајућим колонама матрице $\text{adj}(G(s))$. Имајући у виду (6.5), $G(s)$ се може приказати у следећем облику

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

На основу (6.6) можемо одредити чланове $D(s)$ на следећи начин:

$$\begin{aligned} d_{11}(s) &= k_{11}(s) \cdot g_{22}(s), \\ d_{12}(s) &= k_{22}(s) \cdot g_{12}(s) \\ d_{21}(s) &= k_{11}(s) \cdot g_{21}(s) \\ d_{22}(s) &= k_{22}(s) \cdot g_{12}(s) \end{aligned} \quad (6.9)$$

На тај начин можемо одредити $W(s) = D(s)G(s)$ тј. два независна СИСО система $w_{11}(s)$, $w_{22}(s)$ где је

$$W(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & 0 \\ 0 & w_{22}(s) \end{bmatrix} = \det(G(s)) \cdot K(s), \quad (6.10)$$

односно у развијеном облику као:

$$w_{11}(s) = k_{11}(s)(g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{21}(s)g_{12}(s)) \quad (6.11)$$

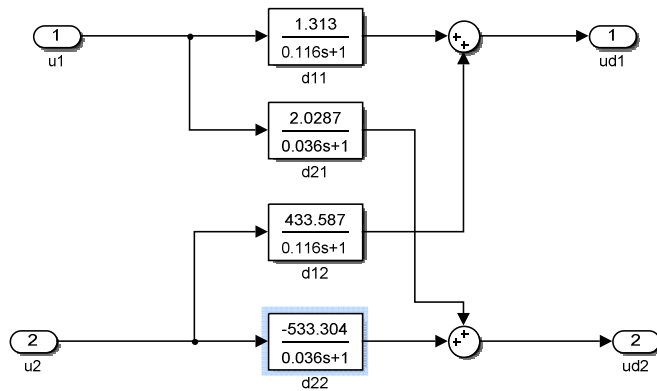
$$w_{22}(s) = k_{22}(s)(g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{21}(s)g_{12}(s)) \quad (6.12)$$

То ће бити даље основа за примену метода пројектовања ПИД регулатора али за СИСО системе. На основу чега се усваја имајући у виду циљеве идеалног декуплера матрица $K(s)$ тј.

$$K(s) = \text{diag}(k_{ii}(s)) = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & 0 \\ 0 & k_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5(s+0.2) & 0 \\ 0 & -5(s+0.2) \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Чланови матрице декуплера су узимајући у обзир (6.13) сада:

$$D(s) = \text{adj}(G(s)) \cdot K(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.313}{0.116s+1} & \frac{2.0287}{0.036s+1} \\ \frac{433.587}{0.116s+1} & \frac{-533.304}{0.036s+1} \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$



Слика 6.2 Блок дијаграм декуплера $D(s)$ -СИМУЛИНК окружење

Еквивалентна преносна функција за тако распрегнути систем $W(s)$ је сада облика

$$W(s) = \text{diag}[w_{ii}], \quad ii = 1, 2, \quad w_{11} = w_{22} \quad (6.15)$$

$$w_{11}(s) = w_{22}(s) = \frac{1579.85}{(0.116s + 1)(0.036s + 1)(5s + 1)}. \quad (6.16)$$

Увидом у полове дате преносне функције односно доминантне полове, добија се:

$$w_{11}(s) = w_{22}(s) \approx \frac{1579.85}{(0.116s + 1)(5s + 1)} \quad (6.17)$$

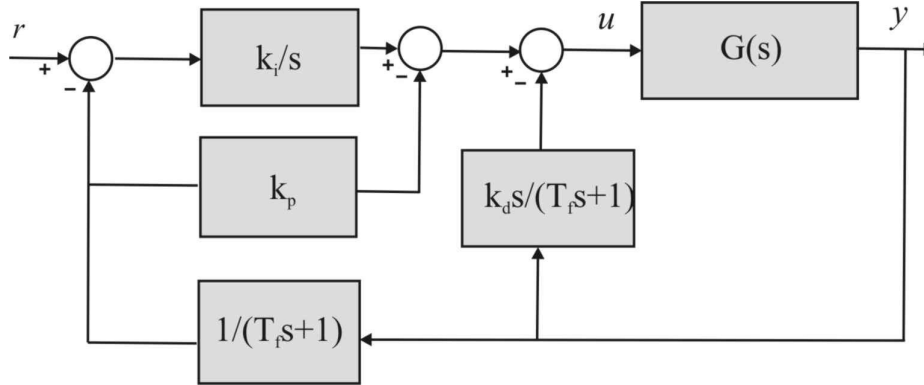
односно:

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1579.85}{(0.116s + 1)(5s + 1)} & 0 \\ 0 & \frac{1579.85}{(0.116s + 1)(5s + 1)} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

ПИД регулатор анализиран овде и примењен за дати процес $C_{PID}(s)$ има следећи облик, слика 6.3

$$C_{PID}(s) = (k + k_i / s + k_d s) \cdot \frac{1}{T_f s + 1} = \frac{k_d s^2 + ks + k_i}{s(T_f s + 1)}, \quad (6.19)$$

где је нископропусни филтар $F(s) = 1 / (T_f s + 1)$ уведен је због каузалности регулатора и смањења утицаја мерног шума на управљање.



Слика 6.3 Блок дијаграм објекта управљања $G(s)$ са класичним ПИД регулатором предложене управљачке структуре

Само управљање је овде реализовано са издвојеним пропорционалним и диференцијалним дејством у директној грани што се може видети на Слици 6.3 и то за оба канала.

$$U(s) = -\frac{1}{(T_f s + 1)} k_p Y(s) - \frac{1}{(T_f s + 1)} k_d s Y(s) + k_i (R(s) - \frac{1}{(T_f s + 1)} Y(s)). \quad (6.20)$$

После декупловања спроводи се фаза аналитичког пројектовања ПИД регулатора целог реда у функцији једног слободног параметра λ , *Lee et al. (1998)*, *Skogestad, (2003)*.

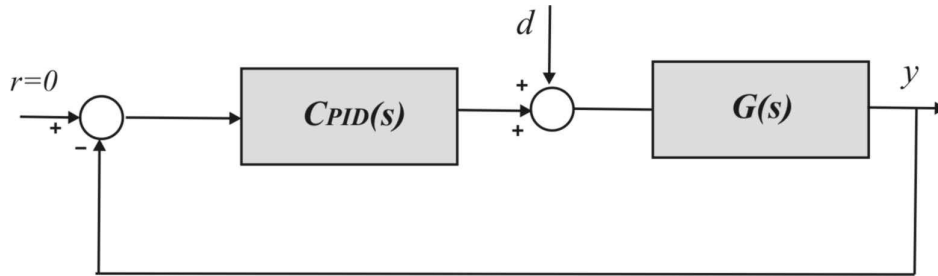
С друге стране, познато је да у системима управљања велики значај имају функција осетљивости S спрегнутог система као и функција комплементарне осетљивости T , *Astrom Murray, (2008)* и који су дефинисане на следећи начин:

$$T = \frac{CG}{1+CG}, \quad S = \frac{1}{1+CG} \Rightarrow T + S = 1 \quad (6.21)$$

При томе, познато је да испитивање осетљивости система аутоматског управљања се у основи своди на процену утицаја промене параметара разматраног процеса на стање система. Осим тога уочено је да је САУ робуснији ако је његова комплементарна функција осетљивости T у односу на све фреквенције мала, тј. уколико промена параметара датог процеса мање утиче на стање разматраног система.

У том смислу овде се уочава и разматра следећа жељена комплементарна функција осетљивости $T = T_z(s)$ за дати структурни дијаграм

$$T = T_z(s) = \frac{C_{PID}(s)G_p(s)}{1 + C_{PID}(s)G_p(s)} \quad (6.22)$$



Слика 6.4 Блок дијаграм основног управљања са негативном повратном спрегом и са поремећајем

Наиме, може се одредити за дати систем који је дат структурним дијаграмом

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + C_{PID}(s)G_p(s)} = \left(1 - \frac{C_{PID}(s)G_p(s)}{1 + C_{PID}(s)G_p(s)} \right) \cdot G_p(s) \quad (6.23)$$

односно:

$$G_p(s) = w_{11}(s) = \frac{k_p}{(T_1s + 1) \cdot (T_2s + 1)} = \frac{1579.85}{(0.116s + 1)(5s + 1)} \quad (6.24)$$

Према томе, уводи се следећа жељена преносна комплементарна функција осетљивости, *Mataušek, Šekara, (2011)* која је функција следећих параметара η_2, η_1, λ .

$$T_z(s) = \frac{\eta_2 s^2 + \eta_1 s + 1}{(\lambda s + 1)^4} = \frac{C_{PID}(s)G_p(s)}{1 + C_{PID}(s)G_p(s)} \quad (6.25)$$

У циљу потискивања поремећаја потребно је да је испуњен следећи услов:

$$(1 - T_z(s)) \Big|_{s_1 = -1/T_1} = 0 \quad (6.26)$$

тј.

$$(\lambda s + 1)^4 - \eta_2 s^2 - \eta_1 s - 1 = 0 \Big|_{\substack{s_1 = -1/T_1 \\ s_2 = -1/T_2}} \quad (6.27)$$

Решавањем претходног система од две једначине по $\eta_2 = \eta_2(s, \lambda)$, $\eta_1 = \eta_1(s, \lambda)$ следи:

$$\eta_1 = \frac{\lambda(4T_1^2 T_2^2 - 4T_1 T_2 \lambda^2 + T_1 \lambda^3 + T_2 \lambda^3)}{T_1^2 T_2^2}, \quad (6.28)$$

$$\eta_2 = \frac{\lambda^2(6T_1^2 T_2^2 - 4T_1 T_2 \lambda + T_1^2 \lambda^2 - 4T_1 T_2^2 \lambda + T_1 T_2 \lambda^2 + T_2^2 \lambda^2)}{T_1^2 T_2^2} \quad (6.29)$$

На основу (6.25) може се одредити израз за $C_{PID}(s)$ где је $T_z = T_z(s, \eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda), \lambda)$,

$$C_{PID}(s) = \frac{T_z(s, \lambda)}{1 - T_z(s, \lambda)} \cdot \frac{1}{G_p(s)} \quad (6.30)$$

С друге стране је

$$C_{PID}(s) = \frac{k_d s + k + k_i / s}{(T_f s + 1)} \quad (6.31)$$

Изједначавањем горњих израза и решавањем и упоређивањем може се доћи до следећих израза за k_i, k, k_d, T_f у функцији подешљивог параметра λ где су узете у обзир следеће познате вредности $T_1 = 0.116$, $T_2 = 5$, $Kp = 1579.85$.

$$k_i = \frac{0.0002129316074}{\lambda^3(-5.116\lambda + 2.320)} \quad (6.32)$$

$$k = \frac{0.0006329714846(5.116\lambda^4 - 2.320\lambda^2 + 1.345600\lambda)}{\lambda^3(-5.116\lambda + 2.320)} \quad (6.33)$$

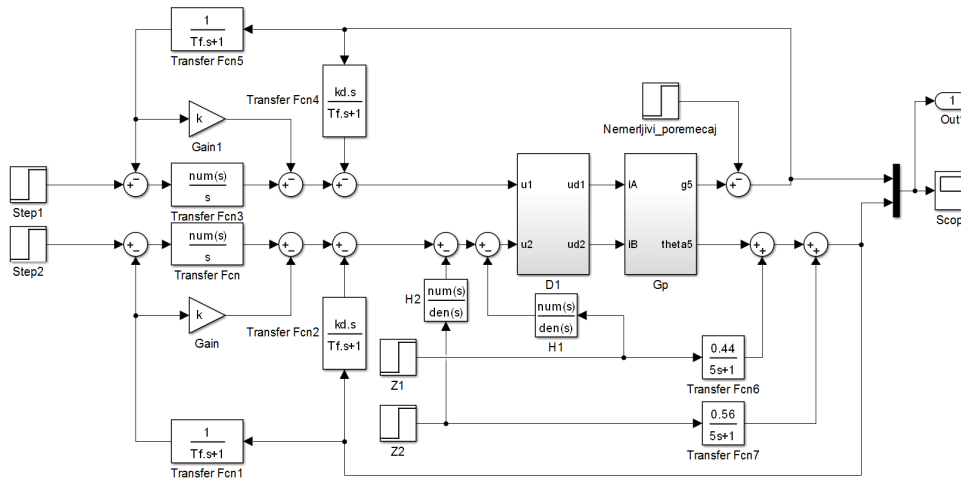
$$k_d = \frac{0.0006329714846(25.593456\lambda^4 - 11.86912\lambda^3 + 2.018400\lambda^2)}{\lambda^3(-5.116\lambda + 2.320)} \quad (6.34)$$

$$T_f = \frac{0.580\lambda}{(-5.116\lambda + 2.320)} \quad (6.35)$$

На пример за случај да је $\lambda = 0.1$ добијају се следећи параметри ПИД-а

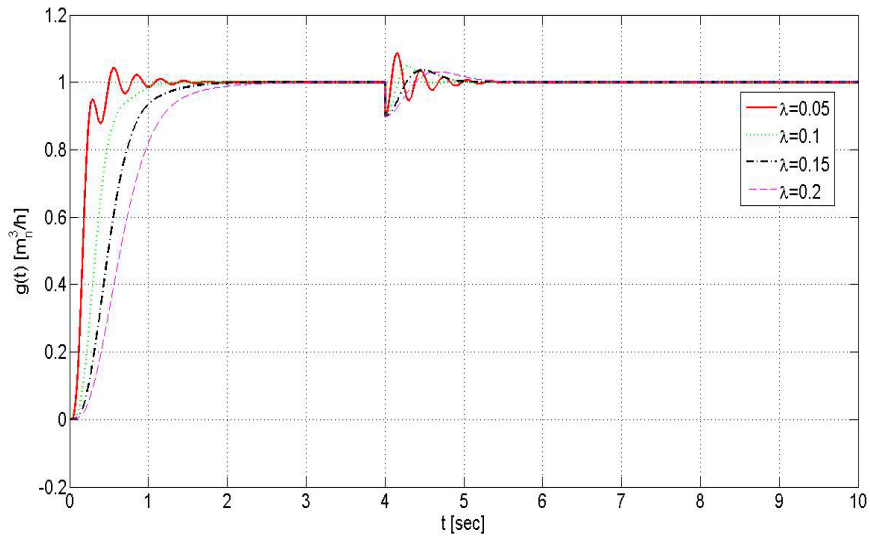
$$C_{PID}(s) = \frac{k_d s + k + k_i / s}{(T_f s + 1)} = \frac{0.003806168282s + 0.0464537123 + \frac{0.1177458568}{s}}{0.03207255032s + 1} \quad (6.36)$$

Овде је потребно истакнути да се за оба канала користи исти пројектовани ПИД регулатор целог реда. Временска константа на задату референцу је пропорционална параметру λ и може се сматрати да 4λ одговара временској константи спрегнутог система од улаза до излаза за оба канала.



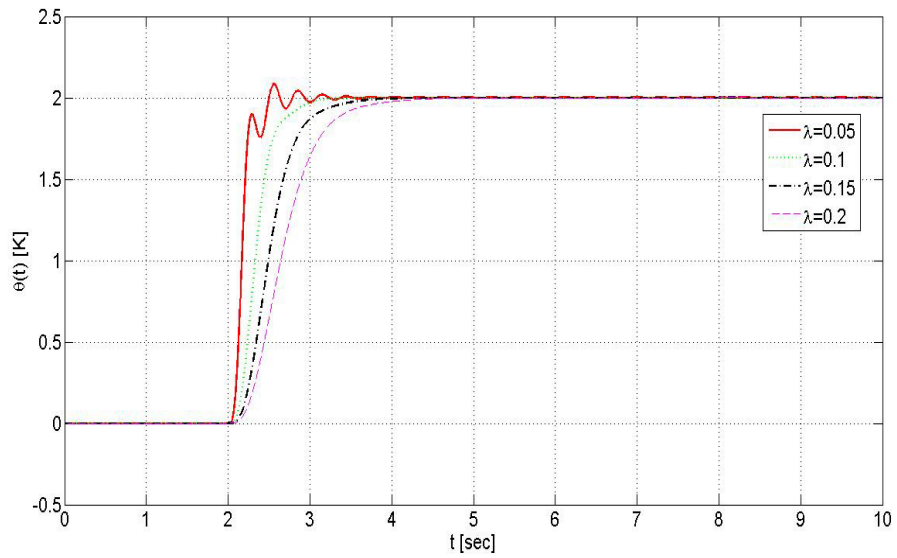
Слика 6.5 Блок дијаграм САУ-СИМУЛИНК окружење

Такође спроведена је симулација где је од интереса пратити одзиве система по питању протока и промену температуре за следеће вредности $\lambda = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$. Резултати симулације су приказани на доњим сликама, (Сlike 6.6-6.8). Уочава се да се најбољи резултати добијају за вредност подешљивог параметра $\lambda = 0.1$.

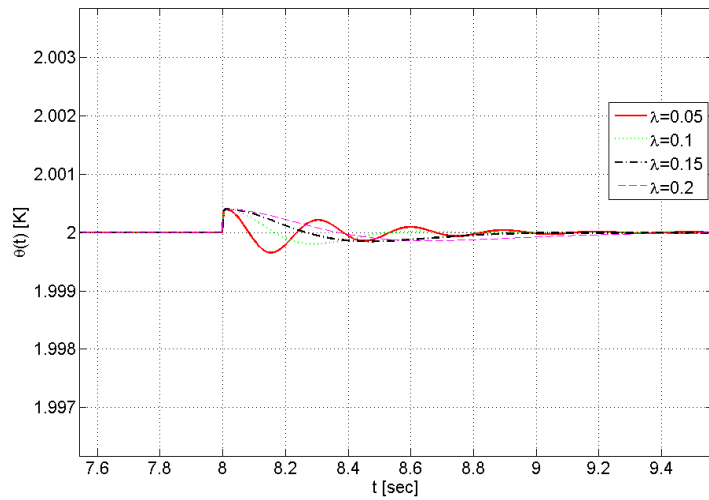


Слика 6.6 Јединични одзив система ($g(t)$ - одступање вредности протока од номиналне вредности протока гасовитог ваздуха на улазу у експанзиону турбину) на немерљив поремећај који делује после $t = 4\text{sec}$

Посебно је уведен и симулиран одзив система на немерљив поремећај који делује после $t = 4\text{sec}$ и овде је примењено на величину $g(t)$ - одступање вредности протока од номиналне вредности протока гасовитог ваздуха на улазу у експанзиону турбину, што се може уочити са слике 6.6 да пројектовани аналитички ПИД регулатор успешно регулише односно потискује поремећај.



Слика 6.7 Одзив система ($\theta_s(t)$) - одступање вредности температуре од номиналне вредности температуре гасовитог ваздуха на улазу у експанзиону турбину, на мерљив поремећај који делује после $t = 8\text{sec}$)



Слика 6.8 Потискивање поремећаја који делује после $t = 8\text{sec}$

Такође, из модела процеса добија се да се остварује утицај мерљивог поремећаја само на температуру $\theta(t)$.

$$\theta(s) = (..) + \frac{0.088}{s+0.2} \cdot z_1(s) + \frac{0.112}{s+0.2} \cdot z_2(s) \quad (6.37)$$

У циљу потискивања мерљивог поремећаја $z_1(t), z_2(t)$ уводе се додатни компезатори $H_1(s)$ и $H_2(s)$ на следећи начин:

$$H_1(s) = (0.44 / 1579.85) \cdot \frac{(0.116s + 1) \cdot (0.036s + 1)}{(\tau s + 1)^2} \quad (6.38)$$

$$H_2(s) = (0.56 / 1579.85) \cdot \frac{(0.116s + 1) \cdot (0.036s + 1)}{(\tau s + 1)^2} \quad (6.39)$$

У конкретном случају изабрано је $\tau = 0.001$ при чему је избор мањих вредности за τ доводи до већег потискивања мерљивог поремећаја за дато дозвољено управљање. Овде мерљиви поремећај делује у $t = 8\text{sec}$ и са слика 6.7, 6.8 може се уочити да је дошло значајног потискивања датог мерљивог поремећаја.

Глава 7

Управљање криогеним процесом применом напредног ПИД регулатора нецелог реда и параметарске методе Д-разлагања

7.1 Уводна разматрања - увод у синтезу система аутоматског управљања у параметарској равни

Као што је познато, у систему аутоматског управљања (САУ) од објекта се увек захтева да оствари неко задато динамичко понашање. Да би се то спровело он се спреже са управљачким делом система, по одређеним концепту управљања, односно пројектовањем управљачког система, се назива *синтеза система*. У поступку синтезе се технички захтеви преводе на погодан математички облик изражен кроз бројне вредности различитих параметара метода и критеријума, а на бази којих се спроводи поступак синтезе у циљу остварења жељеног динамичког понашања система. Осим тога, не постоје строга правила у поступцима синтезе, већ је овде циљ да се на што ефикаснији и једноставнији начин оствари за дато динамичко понашање система.

Жељено динамичко понашање објекта управљања може се остварити његовом спрегом са управљачким уређајима, који својим дејством треба да обезбеди задовољавајуће понашање целокупног система. При томе даље се намеће питање самог избора подешљивих параметара управљачког уређаја да се

остварио постављени циљ. У општем случају, задато динамичко понашање се може остварити у већем броју случајева и при различитим комбинацијама вредности подешљивих параметара управљачког система, што значи да њихов избор не мора да буде једнозначан. У зависности од предложеног концепта управљања синтеза САУ може да се оствари у отвореном, или затвореном колу дејства или комбиновано. При спецификацији техничких захтева за пројектовање САУ свакако се прво мора узети у обзир најважнији фактор, а то је стабилност система. Другим речима, основни задатак јесте обезбеђивање стабилног рада система управљања. Стабилност је од суштинског значаја за систем да ради исправно. Стабилност линеарног система је блиско у вези са локацији корена полинома на комплексној равни. С друге стране, у литератури постоје различити критеријуми стабилности који са гледишта практичне примене имају недостатак, а то је што се помоћу њих у општем случају не може вршити анализа утицаја појединих параметара система на стабилност система. Наиме, ако се применом једног од ових критеријума покаже да је за дати скуп вредности параметара посматрани систем нестабилан, у општем случају, неће бити могуће закључити у ком износу и који параметар система треба променити да би систем постао стабилан. Други недостатак изложених критеријума огледа се у чињеници да они дају само одговор на питање да ли је анализирани систем стабилан или није, односно да ли карактеристична једначина има или нема све корене лево од имагинарне осе равни. При томе се не даје ни приближан одговор и увид у стварну расподелу ових корена у левој полуравни s -равни. Међутим, познавање ужег домена локације корена карактеристичне једначине стабилног система може да послужи као оцена квалитета понашања система у прелазном режиму, односно као мера степена стабилности система. Према томе, првенствено треба апсолутну стабилност система обезбедити за успешно функционисање датог САУ, док се остваривање траженог квалитета динамичког понашања реализује обезбеђивањем и релативне стабилности система.

Она подразумева унапред задату локацију полова преносне функције система у комплексној равни s , утврђеном на основу познатих захтева. Скупом променљивих параметара за које је разматрани систем стабилан, одређује се одговарајућа област стабилности система, а скуп истих који поврх тога гарантују

и релативну стабилност система дефинишу област релативне стабилности система. Управо то представља суштину параметарске методе која је позната у литератури као метода Д-разлагања. Основна идеја те методе лежи у поступку одређивања скупа свих вредности подешљивих параметара за које ће разматрани САУ бити стабилан. Као резултат у равни подешљивих параметара добијају се одговарајуће области оивичене отвореним или затвореним контурама које представљају потенцијалне области стабилности, *Дебељковић, (2002)*. Затим се касније адекватном применом одговарајућих поступака утврђује која од добијених области, уколико постоји, представља тражени скуп подешљивих параметара за који је систем стабилан.

У практичним примерима, може се јавити случај када посматрани систем, да ни при било ком избору подешљивих параметара не може да реализује постављане захтеве, односно за такав систем кажемо да је структурно неподесан. У овим случајевима када није могуће обезбедити ни апсолутну стабилност, користи се појам структурно нестабилног система, што указује да једино реорганизацијом његове структуре и/или убацивањем додатних корекционих уређаја, такав систем, може погодним избором подешљивих параметара прво стабилизovati а касније и даље прилагодити постављеним захтевима. Број променљивих (подешљивих) параметара може бити мањи или у општем случају једнак n , тј. не већи од реда (димензије) система. У том, општем случају област стабилности је дата у виду хипер површи у n -димензионалном простору подешљивих параметара, *Дебељковић, Ђорђевић, (2005)*.

Најчешће се из практичних разлога, у литератури због немогућности адекватног графичког приказа добијених резултата се ови поступци параметарске синтезе дају за системе за један или два параметра а одавно се могу наћи и примери са три подешљива параметра. Најчешће се узима Декартова раван где се приказује раван подешљивих параметара или Декартов простор за случај са три подешљива параметра. Тиме није умањена општост излагања и примене добијених резултата и закључака имајући у виду број разматраних подешљивих параметара. Из предходног изложеног очигледно је да за примену ових параметарских метода неопходно познавање математичког модула система који се овде по правилу увек даје у виду карактеристичне једначине система, чији су

коэффициенти (или неки од њих) функције подешљивих параметара односно за функционисање пресликавања се узима карактеристични полином система (ЗСАУ или отворен САУ). Методе параметарске синтезе са математичког гледишта, имају за циљ пресликавања границе унапред задате области из комплексне равни s , којом је обухваћена жељена локација нула карактеристичног полинома система, у раван подешљивих параметара (параметарску раван) где се добија област која уколико постоји, представља тражени скуп подешљивих параметара за који је систем стабилан.

Овде треба напоменути да се не узимају у обзир нуле преносне функције које с друге с стране без обзира какав оне имале утицај на квалитет понашања система, разматрана параметарска метода у случајевима када је могуће до позитивног резултата гарантује тражени квалитет рада система у односу на постављене захтеве. Подешљиви параметри у коефицијентима карактеристичне једначине су углавном линеарно везани, а код сложенијих система (са кашњењем) се сусрећу и линеарни и нелинеарно везани, зависно од методе и прилаза проблему, *Шилџак, (1966)*.

7.2 Хронолошки преглед постојећих резултата у области параметарске анализе и синтезе са освртом на историјат развоја и примене методе Д-разлагања

На основу доступне литературе можемо рећи са великом поузданошћу да почетак примене идеје методе Д-разлагања се односи на пионирски рад руског научника *Вишеградског, (1876,1949)* где је он године 1876, описао структуру домена стабилности полинома трећег степена–карактеристичног полинома датог система где су фигурисала два коефицијента која се могу подешавати и друга два коефицијента која су била једнака јединици. Наиме, он је проучавао карактеристични полином трећег реда облика

$$f(s, k) = s^3 + k_1 s^2 + k_2 s + 1 \quad (7.1)$$

где је коефицијенте k_1, k_2 разматрао као подешљиве параметре. Како је граница домена стабилности у параметарском простору $k = (k_1, k_2)$ дефинисана са

$$f(j\omega, k) = u(\omega, k) + jv(\omega, k) = 0, \quad \omega \in (-\infty, +\infty) \quad (7.2)$$

он је одредио

$$\begin{aligned} u(\omega, k_1, k_2) = 0, & \Rightarrow k_1 = \frac{1}{\omega^2} \\ v(\omega, k_1, k_2) = 0, & \Rightarrow \omega(k_2 - \omega^2) = 0 \Rightarrow k_2 = \omega^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

где се на основу елиминације ω добија крива разлагања у облику хиперболе $k_1 k_2 = 1$. На основу те криве и графичког приказа исте добијена је област стабилности за $k_1 k_2 > 1$. Затим, касније су аутори, *Frazer, Duncan, (1929)* развили графички метод за одређивање домена стабилности полинома произвољног степена са два параметра.

Руски научник *Неимарк, (1978)* је даље у својим радовима одредио домене који садрже одређени број коренова датог домена и којих може имати више у параметарском простору. Уопштавајући раније добијене резултате Вишеградског, и дозвољавајући да се линеарно везани подешљиви параметри појаве у било ком или свим коефицијентима карактеристичног полинома система (најчешће су то два подешљива параметра нађу у било ком коефицијенту карактеристичног полинома), и без ограничења на ред система, Неимарк је установио методу Д-разлагања. Основна поставка те методе полази од захтева да се у параметарској равни дата два параметра, одреди скуп свих вредности подешљивих параметара за које ће разматрани систем, дат својом карактеристичном једначином, бити стабилан. Његова метода Д-разлагања је постала широко коришћена у решавању проблема робусне стабилности и пројектовању контролера нижег реда, *Ackermann, (2002)*.

Метода Д-разлагања је касније проширена и за случај нелинеарних система, односно нелинеарне везе подешљивих параметара, *Šiljak, (1966)*. Мало затим, српски научник *Митровић, (1958, 1959)* даје проширење концепта параметарске равни уместо пресликавања имагинарне осе пресликава одговарајућу контуру где се тиме успоставља веза између подешљивих параметара са изгледом прелазног

процеса што је и дато кроз одговарајући степен релативне стабилности система. При томе он се ограничио на случај када се као једини променљиви параметри система третирају само прва два коефицијента карактеристичног полинома без обзира на ред, што свакако представља извесан недостатак ове методе.

Нешто мало касније, предложени приступ познат као Митровићева метода допуњују, *Thaler, Brown, (1960)* и дају ефикасне алгоритме у циљу одређивања полова преносне функције система у жељеној контури у левој полуравни комплексне равни s . Уопштење Митровићеве методе, за случај када било која два коефицијента карактеристичног полинома могу преузети улогу подешљивих параметара, независно један од другог дали су *Грујић, (1966); Шиљак, (1964, 1966)*. Даље проширење Митровићеве методе наставља и даје *Шиљак, (1966, 1968)* и он дате резултате и прилаз уобличава у тзв. *алгебарску методу* којом је сада могуће разматрати случајеве где се променљиви параметри истовремено појављују и више (или свим) коефицијентима карактеристичног полинома, у линеарној или нелинеарној комбинацији. Он при томе акценат даје у обезбеђивању релативне стабилности система а на основу захтева у погледу квалитета динамичког понашања, где он користи два основна прилаза, која се могу и комбиновати, а то су:

- издвајање области унапред задатог времена смирења у параметарској равни

- издвајање области унапред задатог степена пригушења у параметарској равни

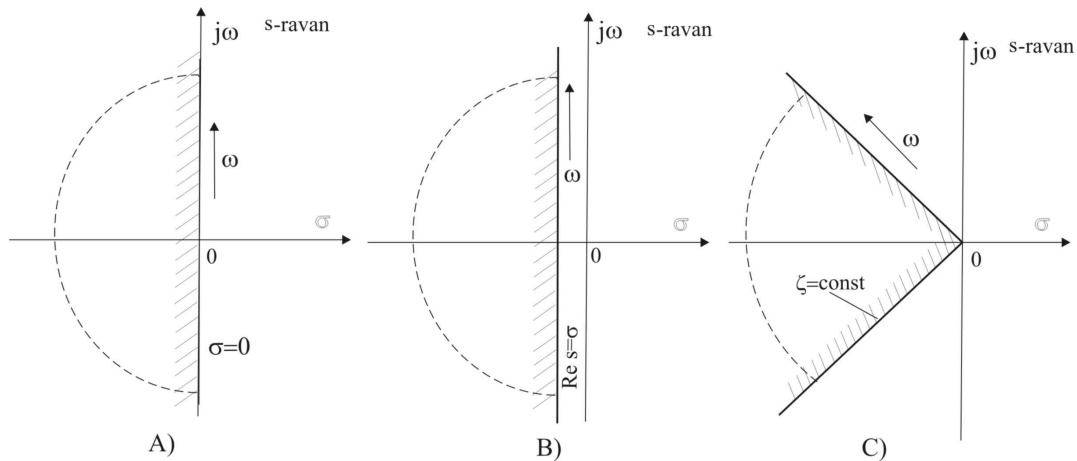
На основу тога, било је омогућено да се било која контура C у s -равни, а која је омеђена кривама $\zeta = const$, $\omega = const$, $\omega_n = const$, $\zeta\omega_n = const$ преслика у дату параметарску раван $k = (k_1, k_2)$, (α, β) јер је тиме загарантован тражени квалитет рада система у погледу степена пригушења и/или времена смирења јер ти показатељи као што је одбро познато имају и играју важну улогу у практичним применама САУ. Такође, новије примене методе Д- разлагања могу се наћи у књизи *Ackermann, (2002)*; односно у раду, *Ackermann, Kaesbauer, (2003)* где је метода искоришћена за пројектовање контролера нижег реда.

Примена методе Д разлагања која је односи на системе нецелог (фракционог) реда је представљена у радовима, *Коробов, (1971)* и касније у радовима *Дебелковић, (1986, 1999)* где су у карактеристичном (квази) полиному био обавезно заступљен члан \sqrt{s} који одговара систему у временском домену

који има нецели извод $1/2$. Они су представили не примењујући теорију нецелог реда два приступа где полазе од тзв. фиктивног карактеристичног полинома система, где се у првом прилазу користи чињеница да се закон промене комплексно променљиве z , у фиктивној равни, може једноставно дефинисати дуж специфичних вредности кривих константног степена пригушења. Други прилаз користи чињеницу да се $(j)^k = (\sqrt{-1})^k$ може представити у једној специфичној форми, подесној за примену у изразу за фиктивни карактеристичан полином, *Дебељковић, Ђорђевић, (2005)*.

7.3 О методи Д-разлагања

Руски научник *Неимарк, (1947, 1948)*, уопштавајући раније постојеће резултате, и дозвољавајући да се два подешљива параметра нађу у било ком коефицијенту карактеристичне једначине, разрадио је тај проблем кроз тзв. *методу Д-разлагања*. Основна поставка методе Д-разлагања полази од захтева да се у параметарској равни одреди скуп свих вредности подешљивих параметара, за које ће разматрани систем, дат карактеристичном једначином, бити стабилан. Другим речима, за стабилност система потребно је одредити скуп тако да све нуле карактеристичног полинома леже у левој полуравни, комплексне равни s , слика 7.1.а. Систем ће бити гранично стабилан ако његова карактеристична једначина нема корена у десној полуравни, а при томе има бар један прост (једнострук) корен на имагинарној оси, *Стојић, (1996)*.



Слика 7.1 Графички приказ карактеристичних контура у s -равни

Метода се базира на пресликавању контуре C , из комплексне равни s , у раван подешљивих параметара, а да би се обезбедила апсолутна стабилност, контура C обухвата целу леву полураван равни s као што је приказано на сл.7.1.a. или сл. 7.1.b, сл. 7.1.c. Наиме, у стабилном систему прелазни режим ишчезава када $t \rightarrow \infty$, а за то је потребно и довољно да реални делови свих корена карактеристичне једначине буду негативни, односно буду смештени унутар контуре C_0 , као на слици 7.1.a. Такође, можемо лако закључити да ће прелазни режим брже ишчезавати ако су негативни делови свих корена карактеристичне једначине већи по апсолутној вредности. На тај начин, од система се може захтевати не само да буду стабилан, већ се може специфицирати захтев да у сви корени карактеристичне једначине буду са негативним деловима, који су по апсолутној вредности већи од неког унапред задатог $\sigma = const$. Другим речима, то ће значити да сви коренови карактеристичне једначине се морају налазити лево од праве $Re s = \sigma = const$ унутар контуре C у s -равни, (слика 7.1.b). Тиме је обезбеђено да систем који испуњава овај захтев поседује време смирења прелазног процеса мање од неког унапред задатог $\sigma = const$. Исто тако, могу се задати и други домени у s -равни у којим се захтева да буду смештени сви корени карактеристичне једначине система и овде је од посебног интереса домен C (слика 7.1.c). За системе чији су сви корени карактеристичне једначине лоцирани унутар датог домена C , сл.7.1.c, да имају унапред задати степен релативне стабилности ограничен фактором релативног пригушења ζ , тј. системи имају

унапред задати степен пригушења, односно осцилаторности прелазног режима који је мањи од неког унапред задатог $\zeta = const$. Специфицирањем овог домена пажња се посвећује локацији парова коњуговано комплексних корена дате карактеристичне једначине.

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -\omega_n \zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (7.1)$$

Присуство комплексних корена у решењу карактеристичне једначине условљава осцилаторни карактер компоненти прелазног режима система, и представља задато ограничење у погледу максимално дозвољених величина амплитуда осцилаторних компоненти прелазног режима у датом систему. Исто тако, од система се може захтевати истовремено и максимално дозвољено време смирења, тј. да му се сви корени карактеристичне једначине морају налазити лево од праве $\operatorname{Re} s = \sigma = const$ унутар контуре C у s -равни.

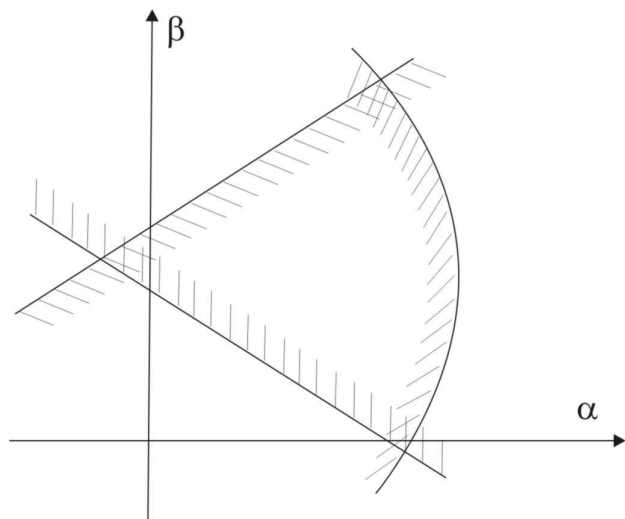
Како се подешљиви параметри налазе у коефицијентима карактеристичне једначине система, то се основна идеја методе Д разлагања реализује кроз преликавање имагинарне осе, као границе стабилности s -равни и полукруга бесконачног полупречника, карактеристичним полиномом, као функцијом преликавања. У резултату пресликавања добијају се граничне криве (контуре) које оивичавају одређене области, за које је даље потребно утврдити, која од њих представља тражену област стабилности. Област одређена скупом променљивих параметара α и β , назива се *потенцијална област стабилности система* при којим систем има највећи број полова преносне функције система у левој полуравни, равни s . За обележавање области користи се ознака $D(k, n-k)$, где је n -ред система односно ред карактеристичне једначине, k -број полова преносне функције система у левој полуравни s , а $n-k$ број полова преносне функције у десној полуравни. Ако је $n=k$, односно $D(n, 0)$, тада је та област *област стабилности система*, и за сваки пар вредности подешивих параметара унутар те области разматрани систем је стабилан. Ако систем не поседује област $D(n, 0)$ онда је такав систем структурно нестабилан. За случај када је у питању карактеристични полином који одговара систему нецелог (*фракционог*) реда или када коефицијенти карактеристичног полинома садрже трансцедентне функције

или тригонометријске функције комплексно променљиве s , такав (квази)полином има бесконачан број коренова и том случају уводи се ознака $D(0)$ која сада указује на област која не садржи корене у десној полуравни комплексне равни s .

Утврђивање да ли потенцијална област стабилности представља заиста област стабилности може се извршити применом неког од алгебарских критеријума (Раус, Хурвиц), графо-аналитичких (Најквист)-овог критеријума, критеријумом Михајлова или нумеричком симулацијом, а за произвољно изабрану тачку унутар те потенцијалне области стабилности.

За очекивати је, у општем случају, да се променом вредности подешљивих параметара, се мења положај полова преносне функције система у равни, и то појединачно или у паровима, прелазећи преко имагинарне осе у s равни. Тиме се утиче на промену броја k , што повлачи постојање више различитих области са различитом вредношћу броја k у датој параметарској равни. У циљу прегледности и ефикасније анализе користи се шрафирање добијених граничних кривих у параметарској равни, (слика 7.2) која може бити једнострука, двострука или вишеструка а што зависи шта ће прелазити преко границе стабилности у s равни, један реалан пол и/или пар коњуговано-комплексних полова а при промени променљивих параметара α и β .

При томе се користи правило да је шрафура увек окренута ка области у којој се налази већи број полова преносне функције система, при чему где ће бити шрафура зависи од тога да ли полови прелазе из леве у десну полуравну, равни s или обрнуто, *Дебељковић, (2002)*.



Слика 7.2 Графички приказ криве разлагања са шрафуром у (α, β) параметарској равни

Даље, граничне криве се састоје од тзв. кривих разлагања (декомпозиције) које се добијају из карактеристичне једначине, дуж којих се мења учестаност ω , као параметар и сингуларних правих дуж којих је $\omega = const$. Први случај одговара пресликавању дела имагинарне осе и полупречника $R \rightarrow \infty$ без узимања тачака где је $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \pm\infty$. Шта више, овим тачкама одговарају сингуларне праве у параметарској равни где сада ω не мења своју вредност. Од посебне важности је одредити и смер пораста или опадања учестаности дуж кривих разлагања што је неопходно да би се урадила коректно шрафура датих кривих.

Са становишта практичне примене, метода D -разлагања се најчешће користи у равни једног и два подешљива параметра и одавно у простору три параметра. Основни разлог за то је могућност одговарајуће графичке интерпретације у равни као и у простору.

7.3.1. Метода D -разлагања у равни једног подешљивог параметра

Нека је карактеристични полином САУ дат са:

$$f(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n \quad (7.2)$$

где се такође уводи претпоставка о линеарној вези променљивих параметара коефицијентима карактеристичног полинома (7.2). Следи да је

$$F(s, \alpha) = \alpha R(s) + Q(s) = 0 \quad (7.3)$$

где су очигледно $R(s), Q(s)$ одговарајући полиноми по s . Решавајући претходну једначину по параметру α који може и у општем случају узети комплексну вредност добија се:

$$\alpha(s) = -\frac{Q(s)}{R(s)}, \quad (7.4)$$

Односно овде је од интереса случај $s = j\omega$ што после замене се добија:

$$\alpha(j\omega) = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) \quad (7.5)$$

На основу једначина у $U(\omega)$ и $V(\omega)$, црта се у параметарској равни крива разлагања (гранична крива) за промене учестаности $\omega \in \{-\infty, +\infty\}$. С обзиром да је $U(\omega)$, парна функција по учестаности ω , може се нацртати крива разлагања само за део $\omega \in \{0, +\infty\}$ а други део симетрично нанети у односу на реалну осу.

У литератури је доказано и дато следећом теоремом естимација броја могућих инваријантних региона(области) коренова за случај једног подешљивог параметра. Доказ се може наћи у раду *Gryazina, Polyak, (2006)*.

Теорема Д1. Број N инваријантних региона(области) коренова за полином $F(s, \alpha) = \alpha R(s) + Q(s) = 0$, на комплексној параметарској равни $\alpha(s)$ је:

$$N \leq (n-1)^2 + 2.$$

Добијене криве разлагања шрафирају се према следећем простом правилу. Крива разлагања се увек шрафира са леве стране при порасту кружне учестаности ω и супротно са десне стране при опадању учестаности ω дуж те криве. Осим тога, уочава се да раван подешљивог параметра α представља истовремено и комплексну s -раван, па се овде не јављају сингуларне праве, тако да све добијене криве представљају истовремено и криве разлагања. Њихово шрафирање је

обично једноструко, али се у посебним случајевима може јавити и двострука шрафура односно дупла шрафура. На тај начин могуће је одредити потенцијалну област стабилности на основу посматрања шрафуре која тада у највећој мери треба да буде дуж криве разлагања која обухвата област уперена ка унутрашњој равни, *Дебељковић,(2002)*. Затим се усваја произвољна тачка из потенцијалне области и са неким од алгебарских критеријума једноставно проверава да ли је то истовремено и област стабилности система. При томе се за подешљиви параметар α , бирају вредности са реалне осе, с обзиром да је код САУ такав параметар по правилу нека физичка величина система, *Gryazina, Polyak,(2006)*.

7.3.2 Метода Д-разлагања у равни два подешљива параметра

Разматраће се поново карактеристични полином (7.2) САУ при чему су сада, неки (или сви)

$$f(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n \quad (7.6)$$

кофицијенти карактеристичног полинома су функције су променљивих параметара α и β , тј. $a_k = a_k(\alpha, \beta)$ односно:

$$f(s) = \sum_{k=0}^n a_k(\alpha, \beta) s^k \quad (7.7)$$

Тако да се карактеристична једначина после замене $s = j\omega$ може написати као:

$$f(s)|_{s=j\omega} = \sum_{k=0}^n a_k(\alpha, \beta) (j\omega)^k = U(\alpha, \beta, \omega) + jV(\alpha, \beta, \omega) = 0 \quad (7.8)$$

и она важи за случај линеарне и нелинеарне везе коефицијената са α, β , односно:

$$U(\alpha, \beta, \omega) = 0, \quad V(\alpha, \beta, \omega) = 0 \quad (7.9)$$

Ако су претходне једначине независне, онда постоји решење по α, β у функцији независне променљиве ω тј.

$$\alpha = \alpha(\omega), \quad \beta = \beta(\omega) \quad (7.10)$$

Даље ће бити овде од интереса разматрати случај када су коефицијенти функције променљивих параметара α, β који су међусобно линеарно повезани и дати су са:

$$a_k = a_k(\alpha, \beta) = \alpha p_k + \beta r_k + q_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7.11)$$

Онда се карактеристична једначина система (7.7), узимајући у обзир (7.11) тада постаје:

$$f(s) \Big|_{s=j\omega} = \sum_{k=0}^n a_k(\alpha, \beta) (j\omega)^k = \alpha P(j\omega) + \beta R(j\omega) + Q(j\omega) = 0 \quad (7.12)$$

односно уважавајући да је:

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= P_1(\omega) + jP_2(\omega) \\ R(j\omega) &= R_1(\omega) + jR_2(\omega) \\ Q(j\omega) &= Q_1(\omega) + jQ_2(\omega) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Израз (7.12) се може приказати на следећи начин:

$$\begin{aligned} f(j\omega) &= U(\alpha, \beta, \omega) + jV(\alpha, \beta, \omega) = \alpha P_1(\omega) + \beta R_1(\omega) + Q_1(\omega) + \\ &+ j(\alpha P_2(\omega) + \beta R_2(\omega) + Q_2(\omega)) = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

тј. добијају се две линеарне једначине по α, β

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \omega) &= \alpha P_1(\omega) + \beta R_1(\omega) + Q_1(\omega) = 0 \\ V(\alpha, \beta, \omega) &= \alpha P_2(\omega) + \beta R_2(\omega) + Q_2(\omega) = 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

Применом Крамеровог правила добијају се тражене *параметарске једначине осцилаторне границе стабилности*:

$$\alpha(\omega) = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -Q_1(\omega) & R_1(\omega) \\ -Q_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{R_1(\omega)Q_2(\omega) - R_2(\omega)Q_1(\omega)}{P_1(\omega)R_2(\omega) - P_2(\omega)R_1(\omega)}, \quad (7.16)$$

$$\beta(\omega) = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & -Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -Q_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{Q_1(\omega)P_2(\omega) - P_1(\omega)Q_2(\omega)}{P_1(\omega)R_2(\omega) - P_2(\omega)R_1(\omega)}, \quad (7.17)$$

где је главна детерминанта система дата са:

$$\Delta(\omega) = \Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix}, \quad \omega \in \{-\infty, +\infty\}. \quad (7.18)$$

Она се може такође директно одредити на основу (7.14) тј. одредити Јакобијан система као:

$$J(\omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial \alpha} & \frac{\partial U}{\partial \beta} \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha} & \frac{\partial V}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \Delta(\omega) \quad (7.19)$$

Уочава се да је она непарна функција ω , тј.:

$$\Delta(\omega) = -\Delta(-\omega) \quad (7.20)$$

што нам сада омогућава да се крива разлагања црта за вредности ω само од $\omega \in \{0, +\infty\}$, док се за вредности $\omega \in \{-\infty, 0\}$ добија иста крива само супротног смера кретања од првобитног што повлачи двоструко шрафирање криве разлагања (овај случај одговара случају преласка два корена карактеристичне једначине система прелазе имагинарну осу с једне на другу страну). Имајући у виду да је главна детерминанта система $\Delta(\omega)$ непарна функција ω , онда се она увек може приказати као:

$$\Delta(\omega) = \omega \Delta_r(\omega). \quad (7.21)$$

Како само шрафирање кривх разлагања зависи од промене знака $\Delta(\omega)$ овде се дају случајеви када се то дешава, наиме:

- за вредности кружне фреквенције $\omega = 0$,
- за вредности кружне фреквенције $\omega = \infty$,
- за вредности кружне фреквенције $\Delta(\omega^*) = \omega^* \Delta_r(\omega^*) = 0$, $\omega^* \neq 0$

Могуће је спровести процедуру шрафирања у једноставнијим случајевима када је израз $\Delta(\omega)$ релативно једноставан. Ако се на апсцису наноси параметар α , а на ординату β онда се посматра знак Јакобијана (промена) односно главне детерминанте $\Delta(\omega)$ и то тако ако је при кретању дуж криве разлагања у смеру пораста ω Јакобијан J позитиван, тада се крива шрафира са леве стране, гледано у смеру пораста ω , док за случај негативног J црта са десне стране криве разлагања. Ово правило не важи за сингуларне праве и у случају сложенијих примера потребно је узети у обзир тачке пресека сингуларне праве са кривом разлагања као и асимптотска приближавања кривој разлагања.

У случају да је детерминанта система $\Delta(\omega) \neq 0$, имамо јединствено решење за параметарске криве $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$. У поступку цртања истих, олакшава нам чињеница да се параметарске криве $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ јављају као парне функције кружне учеставности ω тј. :

$$\alpha(\omega) = \alpha(-\omega), \beta(\omega) = \beta(-\omega) \quad (7.22)$$

што омогућава да се крива разлагања црта за вредности учеставности само од $\omega \in \{0, +\infty\}$. Даље, ако је могуће извршити елиминацију ω добијамо криву $\alpha = \alpha(\beta)$ у параметарској равни, која је сада погодна за одређивање кривих разлагања. Важно је овде напоменути овде да у општем случају претходна крива не мора у потпуности да одређује целу криву разлагања већ један њен део.

Осим тога у параметарској равни се приказују и *сингуларне праве* за случај тзв. *сингуларних кружних фреквенција* (укључујући и случајеве $\omega_s = 0, +\infty$). У тим случајевима је

$$\Delta(\omega_s) = \Delta_\alpha(\omega_s) = \Delta_\beta(\omega_s) = 0 \quad (7.23)$$

На пример, ако је $\omega_s = 0$ што одговара услову да је $a_0 = 0$,

$$a_0 = a_0(\alpha, \beta) = \alpha P_1(0) + \beta R_1(0) + Q_1(0) = 0 \quad (7.24)$$

Није тешко доказати да су у овом случају $\Delta(0) = \Delta_\alpha(0) = \Delta_\beta(0) = 0$ тако да се добијају неодређени изрази, односно да се систем (7.15) своди на једну једначину

тј. сингуларну праву. При томе, сингуларна права се шрафира ако бар једну заједничку тачку са кривом разлагања за исту вредност кружне учестаности ω . Остала правила се овде не наводе и могу се наћи на пример у књизи *Дебељковић, (2002)*. За случај $\omega_s \rightarrow \infty$ он одговара случају када је $a_n = 0$ што се може исказати са:

$$a_n = a_n(\alpha, \beta) = \alpha p_n + \beta r_n + q_n = 0 \quad (7.25)$$

Ова сингуларна права представља границу у α, β равни преко које један корен карактеристичне једначине прелази кроз бескочаност из једн у другу полураван s – равни.

Такође, може се десити случај да за неку вредност ω^* детерминанта система $\Delta(\omega)$ је једнака нули, $\Delta(\omega^*) = 0$ док су $\Delta_\alpha(\omega^*) \neq 0, \Delta_\beta(\omega^*) \neq 0$ и одговарајуће једначине у (7.15) су несагласне и као такве немају коначно решење. Наиме, одговарајућа тачка у (α, β) равни се у ствари налази у бесконачности и није је могуће графички приказати.

Слично као и у случају једног подешљивог параметра, у раду *Gryazina, Polyak, (2006)* је дат доказ за случај два подешљива параметра и представљено је следећом теоремом где је такође дата естимација максималног броја могућих инваријантних региона(области) коренова.

Теорема Д.2 Број N инваријантних региона(области) коренова за полином $p(s) = a(s) + k_1 b(s) + k_2 c(s)$, где су $a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n$, $b(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n$, $c(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_n s^n$ на параметарској равни $\{k_1, k_2\}$ има следећу горњу границу: $N \leq 2n(n-1) + 3$.

При томе најмањи број инваријантних региона је једнак јединици.

7.4 Синтеза регулатора нецелог реда применом Д-разлагања у простору три подешљива параметра

У циљу синтезе регулатора нецелог реда и одговарајуће параметарске анализе применом методе Д-разлагања у равни три подешљива параметра полази се од претходно добијене еквивалентне преносне функције за тако распрегнути систем $W(s)$, види (6.15,6.16) и она је облика

$$W(s) = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix}, \quad w_{11} = w_{22} \quad (7.26)$$

$$G_{obj}(s) = w_{11}(s) = w_{22}(s) = \frac{1579.85}{(0.116s + 1)(0.036s + 1)(5s + 1)} \quad (7.27)$$

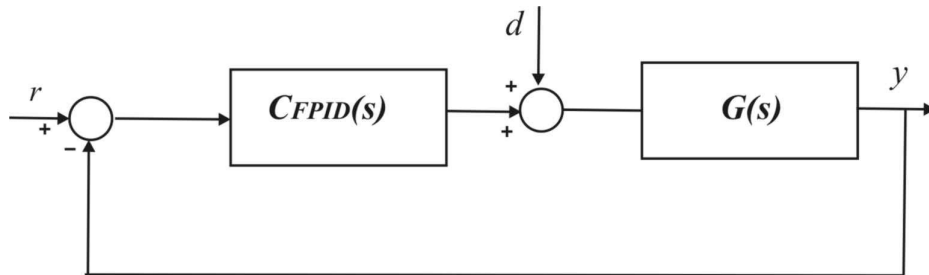
или као

$$G_{obj}(s) = \frac{K}{(as + 1)(bs + 1)(cs + 1)} \quad (7.28)$$

где су сада $K = 1579.85$, $a = 0.116$, $b = 0.036$, $c = 5$.

Овде је од интереса применити управљање нецелог реда тј. ПИД регулатор нецелог реда и који ће бити анализиран овде и примењен за дати процес $C_{FPID}(s)$ има следећи облик, (7.29), слика 7.3.

$$C_{FPID}(s) = (k_p + k_i / s + k_d s^\alpha) \cdot \frac{1}{T_f s + 1} = \frac{k_d s^{1+\alpha} + k_p s + k_i}{s(T_f s + 1)}, \quad (7.29)$$



Слика 7.3 Блок дијаграм основног управљања са негативном повратном спрегом и са поремећајем

Проблем МИМО система, односно мултиваријабилног управљања се сада може свести на два СИСО система који имају исти $C_{FPID}(s)$, тј.

$$Y(s) = \frac{C_{FPID}(s)G_{obj}(s)}{1 + C_{FPID}(s)G_{obj}(s)}R(s) \quad (7.30)$$

Одакле се може лако одредити и израчунати карактеристични квазиполином затвореног САУ, односно

$$f(s) = s(T_f s + 1)(as + 1)(bs + 1)(cs + 1) + K(k_p s + k_d s^{1+\alpha} + k_i) \quad (7.31)$$

С друге стране, познато је да ће се разматрани САУ бити на граници стабилности његова карактеристична једначина ако има један или више једноструких корена на имагинарној оси комплексне s -равни и да нема корене са позитним реалним деловима, тј. не налазе се у десној полуравни.

Претходни услов граничне стабилности може се изразити следећом релацијом за $s = j\omega$

$$f(j\omega) = 1 + C_{FPID}(j\omega)G_{obj}(j\omega) = 0 \quad (7.32)$$

У проширеном облику карактеристична једначина се може приказати и са:

$$f(j\omega) = j\omega(T_f(j\omega) + 1)(a(j\omega) + 1)(b(j\omega) + 1)(c(j\omega) + 1) + K(k_p(j\omega) + k_d(j\omega)^{1+\alpha} + k_i) = 0 \quad (7.33)$$

$$f(j\omega) = j\omega(T_f(j\omega) + 1)G_{obj}(j\omega) + K(k_p(j\omega) + k_d(j\omega)^{1+\alpha} + k_i) = 0 \quad (7.34)$$

Како је

$$G_{obj}(s) = \frac{G_{obj}(s)}{G_{obj}(s)} = \frac{K}{(as + 1)(bs + 1)(cs + 1)} \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} G_{obj}(s = j\omega) &= R_{Gi}(\omega) + jI_{Gi}(\omega) = (aj\omega + 1)(bj\omega + 1)(cj\omega + 1) = \\ &= (1 - (ab + ac + bc)\omega^2) + j\omega((a + b) + c(1 - ab\omega^2)) \end{aligned} \quad (7.36)$$

без тешкоћа се сада лако одређује реални и имагинарни део као:

$$R_{Gi}(\omega) = (1 - (ab + ac + bc)\omega^2), \quad (7.37)$$

$$I_{Gi}(\omega) = \omega((a+b) + c(1-ab\omega^2)). \quad (7.38)$$

За дате нумеричке вредности следи:

$$R_{Gi}(\omega) = (1 - 0.764176\omega^2) \quad (7.39)$$

као и

$$I_{Gi}(\omega) = \omega(5.152 - 0.02088\omega^2) \quad (7.40)$$

Нека је са $k = (k_p; k_d; k_i)$ означена одговарајућа појачања ПИД нецелог реда респективно, онда се претходни израз може приказати у следећем облику где се посебно уочава реални и комплексни део претходног израза:

$$f(j\omega) = U(\omega, k, \alpha) + jV(\omega, k, \alpha) = 0 \quad (7.41)$$

односно:

$$U(\omega, k, \alpha) = 0, \quad V(\omega, k, \alpha) = 0 \quad (7.42)$$

или у развијеној форми:

$$\begin{aligned} U(\omega, k, \alpha) = & -T_f \omega^2 R_{Gi}(\omega) - I_G(\omega) \omega + K \cdot k_i + \\ & + K k_d \omega^{1+\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) = 0 \end{aligned} \quad (7.43a)$$

$$\begin{aligned} V(\omega, k, \alpha) = & -T_f \omega^2 I_{Gi}(\omega) + R_{Gi}(\omega) \cdot \omega + \omega K \cdot k_p + \\ & + k_d K \cdot \omega^{1+\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) = 0 \end{aligned} \quad (7.43b)$$

Ако се уведу следеће ознаке као:

$$\begin{aligned} A_{ip}(\omega, \alpha) &= 0, \\ A_{id}(\omega, \alpha) &= K \omega^{1+\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right), \\ A_{ii}(\omega, \alpha) &= K, \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned}
B_{vp}(\omega, \alpha) &= K\omega, \\
B_{vd}(\omega, \alpha) &= K\omega^{1+\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right), \\
B_{vi}(\omega, \alpha) &= 0.
\end{aligned} \tag{7.45}$$

$$\begin{aligned}
C_u(\omega) &= \omega [T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)] \\
C_v(\omega) &= \omega [T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)]
\end{aligned} \tag{7.46}$$

Онда се претходна два израза могу представити у следећем облику:

$$A_{up}(\omega, \alpha) \cdot k_p + A_{ud}(\omega, \alpha) \cdot k_d + A_{ui}(\omega, \alpha) \cdot k_i = C_u(\omega) \tag{7.47}$$

$$B_{vp}(\omega, \alpha) \cdot k_p + B_{vd}(\omega, \alpha) \cdot k_d + B_{vi}(\omega, \alpha) \cdot k_i = C_v(\omega). \tag{7.48}$$

7.4.1 Метода Д разлагања у простору три параметра ($k_p, k_i, \alpha, k_d = const$)

Овде је од интереса да се формира и посматра k_p, k_i у функцији ω , где је сада $k_d = const$, а $0 < \alpha \leq 1$ променљиво.

$$\begin{bmatrix} A_{up} & A_{ui} \\ B_{vp} & B_{vi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_p \\ k_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_u^* \\ C_v^* \end{Bmatrix}, \tag{7.49}$$

где су сада са C_u^*, C_v^* означене:

$$\begin{aligned}
C_u^*(\omega, \alpha) &= C_u(\omega) - A_{ud}(\omega, \alpha) \cdot k_d = \\
&= \omega [T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)] - k_d \cdot K \omega^{1+\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right),
\end{aligned} \tag{7.50}$$

$$\begin{aligned}
C_v^*(\omega, \alpha) &= C_v(\omega) - B_{vd}(\omega, \alpha) \cdot k_d = \\
&= \omega [T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)] - k_d \cdot K \cdot \omega^{1+\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right),
\end{aligned} \tag{7.51}$$

Решавањем по k_p, k_i следи:

$$k_p = \frac{\Delta_p}{\Delta_{PI}} = \frac{\begin{vmatrix} C_u^* & A_{ui} \\ C_v^* & B_{vi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{up} & A_{ui} \\ B_{vp} & B_{vi} \end{vmatrix}}, \quad k_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{PI}} = \frac{\begin{vmatrix} A_{up} & C_u^* \\ B_{vp} & C_v^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{up} & A_{ui} \\ B_{vp} & B_{vi} \end{vmatrix}}. \quad (7.52)$$

где су сада:

$$\Delta_{PI}(\omega) = -K^2 \omega \quad (7.53)$$

$$\Delta_p = -K\omega \left[T_f \omega I_{G_i}(\omega) - R_{G_i}(\omega) - k_d \cdot K \omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) \right] \quad (7.54)$$

$$\Delta_i = -K \cdot \omega^2 \cdot \left[T_f \cdot \omega \cdot R_{G_i}(\omega) + I_{G_i}(\omega) - k_d \cdot K \omega^\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) \right] \quad (7.55)$$

Заменом у претходни израз добија се израз за k_p

$$k_p(\omega, \alpha, k_d) = \frac{1}{K} \left[T_f \omega I_{G_i}(\omega) - R_{G_i}(\omega) - k_d \cdot K \omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) \right], \quad (7.56)$$

односно израз за k_i

$$k_i(\omega, \alpha, k_d) = \frac{\omega}{K} \cdot \left[T_f \cdot \omega \cdot R_{G_i}(\omega) + I_{G_i}(\omega) - k_d \cdot K \omega^\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) \right] \quad (7.57)$$

под условом да је $\Delta_{PI}(\omega) = -K^2 \omega \neq 0$, што се своди на услов да је $\forall \omega \neq 0$.

У параметарској равни k_p, k_i је сада могуће приказати узимајући и у обзир $k_d = const$

$$k_p(\omega, \alpha, k_d = const), k_i(\omega, \alpha, k_d = const). \quad (7.58)$$

Чиме се омогућује да се одреде одговарајуће криве разлагања у датој параметарској равни/простору.

У случају да је $\omega_s = 0$, има се:

$$\Delta_{PI}(\omega_s) = -K^2 \omega_s = 0, \quad (7.59)$$

с обзиром да је K различито од нуле. Такође, добија се:

$$\Delta_i(\omega_s = 0) = 0, \quad \Delta_p(\omega_s = 0) = 0,$$

односно одговарајућа сингуларна права $k_i = 0$ у параметарском простору (k_p, k_i) што се може лако одредити из једначине (7.60).

$$0 \cdot k_d + K \cdot k_i = 0 \Rightarrow k_i = 0 \quad (7.60)$$

јер је

$$A_{up}(\omega, \alpha) = 0, \quad A_{ud}(0, \alpha) = 0, \quad A_{ui}(0, \alpha) = K, \quad (7.61)$$

$$B_{vp}(0, \alpha) = 0, B_{vd}(0, \alpha) = 0, \quad B_{vi}(0, \alpha) = 0. \quad (7.62)$$

$$C_u(0) = 0, \quad C_v(0) = 0$$

Уочава се да се у датом случају, $k_i = 0$ контролер $C_{FPID}(s)$ своди на PD^α контролер тј. облика

$$C_{FPID}(s) = (k_p + k_d s^\alpha) \cdot \frac{1}{T_f s + 1} = \frac{k_d s^\alpha + k_p}{(T_f s + 1)}, \quad (7.63)$$

За случај да је $\omega \neq 0$, и да је $\alpha = 1$ (случај класичног ПИД контролера) има се:

$$C_{FPID}(s) = (k_p + k_i / s + k_d s) \cdot \frac{1}{T_f s + 1} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s(T_f s + 1)}, \quad (7.64)$$

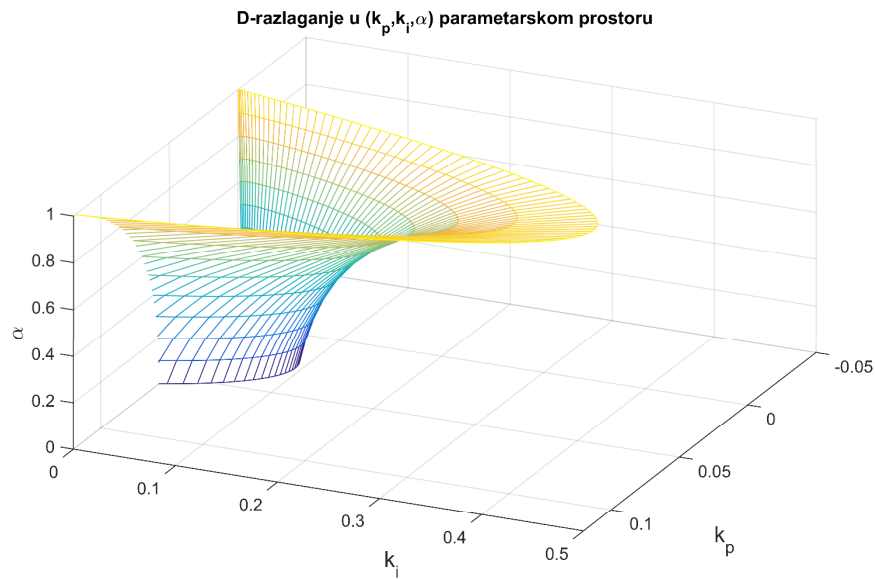
односно за случај $\alpha = 1$ изрази за k_p и k_i су сада облика:

$$k_p(\omega, k_d) = \frac{1}{K} [T_f \omega I_{G_i}(\omega) - R_{G_i}(\omega)], \quad (7.65)$$

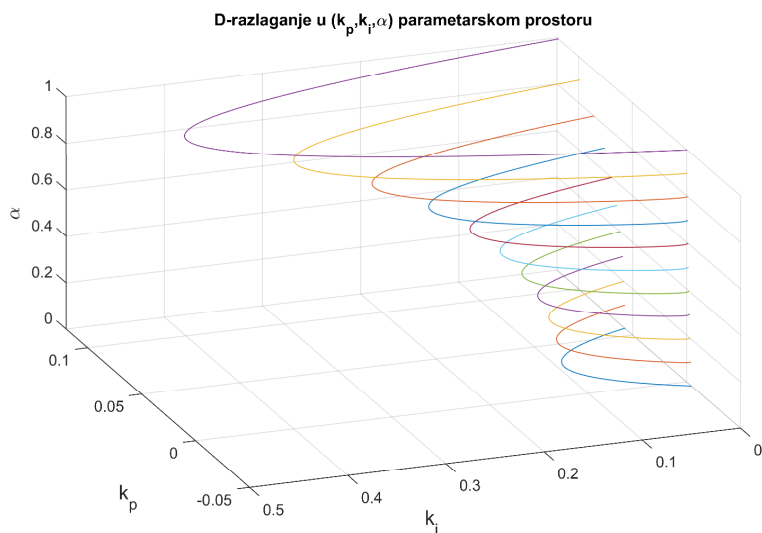
$$k_i(\omega, k_d) = \frac{\omega}{K} \cdot [T_f \cdot \omega \cdot R_{G_i}(\omega) + I_{G_i}(\omega) + k_d \cdot K \omega]. \quad (7.66)$$

Сада, се може испитати применом Д-разлагања утицај параметара $(k_p, k_i, \alpha, k_d = const)$ на стабилност система и 3D графички приказ области стабилности за $\alpha \in [0,1]$ у (k_i, k_p, α) параметарском простору приказан на слици 7.4 односно контурни приказ на слици 7.5. Одговарајући приказ области стабилности је дат на слици 7.6 у параметарској равни (k_i, k_p) за вредности $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$. Уочава се да избором различитих вредности α добијају

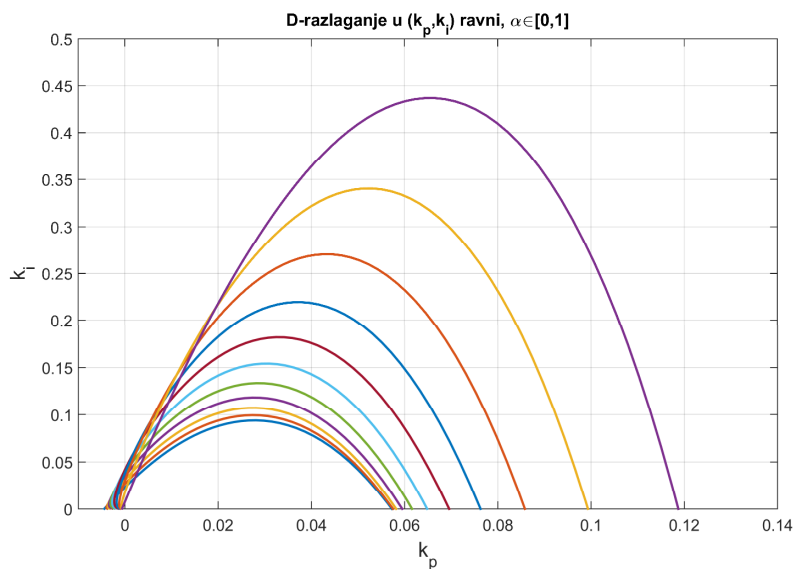
различите областима стабилности и то тако да се повећањем параметра α повећава област стабилности. Овде је спроведена анализа за вредности $\alpha \in [0,1]$ мада се одговарајућа анализа може спровести уз одговарајуће модификације и за вредности $\alpha > 1$. Такође, сада је омогућено да се избором тачке дубље од границе стабилности обезбеди већа робусност на варијацију параметара датог система.



Слика 7.4 3D графички приказ области стабилности за $\alpha = [0,1]$ у (k_i, k_p, α) параметарском простору



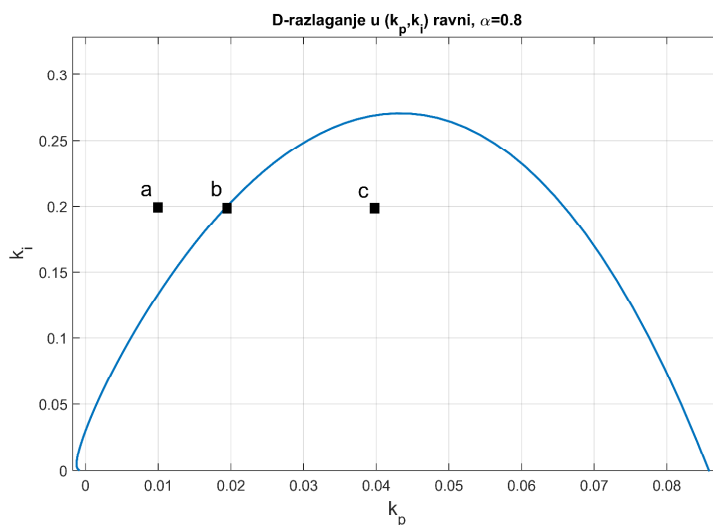
Слика 7.5 3D контурни приказ области стабилности за $\alpha = [0,1]$ у (k_i, k_p, α) параметарском простору



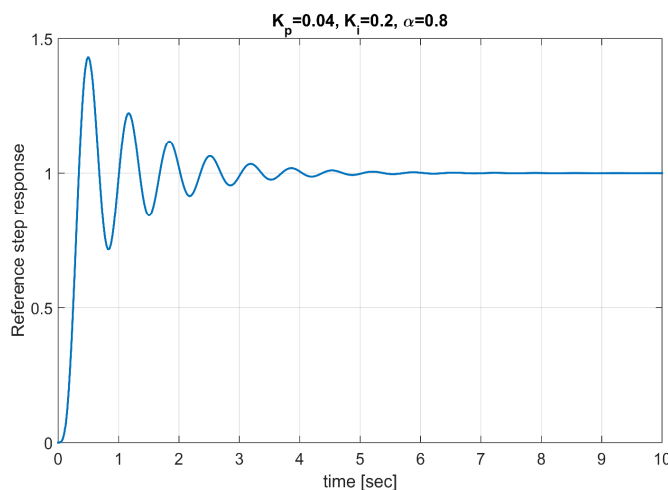
Слика 7.6 2D графички приказ области стабилности у (k_i, k_p) параметарској равни, за вредности $\alpha = [0,0.1, \dots, 0.9, 1]$

Генералисаним критеријумом Михајлова, *Дебелковић, Милојковић, (1987)* може се за уочене тачке добијених области извршити провера, односно утврдити која од њих представља област релативне стабилности система. Овде се у циљу

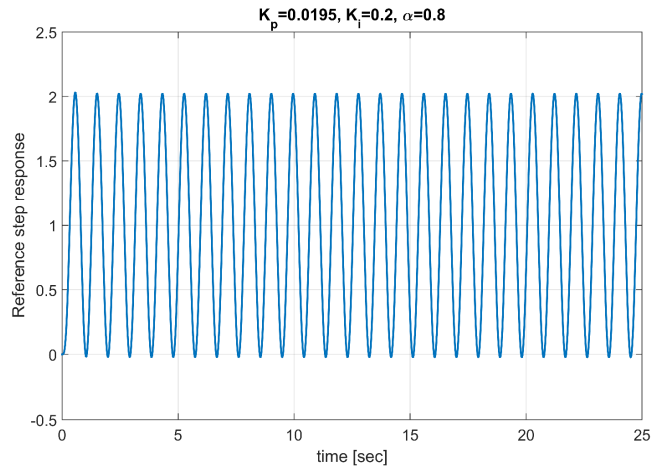
илустрације и провере домена стабилности то може спровести и урадити на следећи начин. Уочава следећа област стабилности у (k_i, k_p) параметарској равни, за вредности $\alpha = 0.8$, слика 7.7. На сликама 7.8-7.10 приказани су одговарајући импулсни одзиви система за уочене вредности са слике 7.7 где се може видети и проценити (релативна) стабилност система.



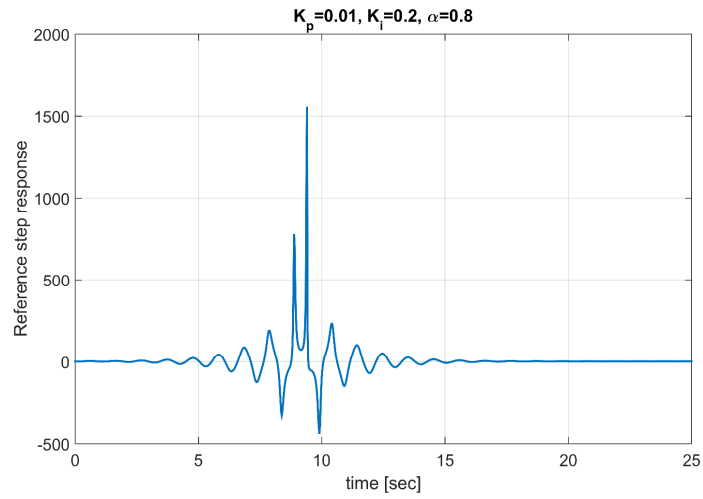
Слика 7.7 2D графички приказ области стабилности у (k_i, k_p) параметарској равни, за вредност $\alpha = 0.8$



Слика 7.8 Импулсни одговор система- тачка ц),



Слика 7.9 Импулсни одговор система -тачка б),



Слика 7.10 Импулсни одговор система -тачка а),

7.4.2 Метода Д разлагања у простору три параметра ($k_p, k_d, \alpha, k_i = const$)

Даље, овде је од интереса приказати односно одредити област стабилности али сада у параметарској равни (k_p, k_d). На основу (7.47) следи

$$A_{up}(\omega, \alpha) \cdot k_p + A_{ud}(\omega, \alpha) \cdot k_d = \underbrace{C_u - A_{ui}(\omega, \alpha) \cdot k_i}_{C_u^{**}} \quad (7.67)$$

$$B_{vp}(\omega, \alpha) \cdot k_p + B_{vd}(\omega, \alpha) \cdot k_d = \underbrace{C_v - B_{vi}(\omega, \alpha) \cdot k_i}_{C_v^{**}} \quad (7.68)$$

тј. у кондезованој форми као:

$$\begin{bmatrix} A_{up} & A_{ud} \\ B_{vp} & B_{vd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_p \\ k_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_u^{**} \\ C_v^{**} \end{Bmatrix}, \quad (7.69)$$

Решавањем по k_p, k_d следи:

$$k_p = \frac{\Delta_p^*}{\Delta_{PD}} = \frac{\begin{vmatrix} C_u^{**} & A_{ud} \\ C_v^{**} & B_{vd} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{up} & A_{ud} \\ B_{vp} & B_{vd} \end{vmatrix}}, \quad k_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{PD}} = \frac{\begin{vmatrix} A_{up} & C_u^{**} \\ B_{vp} & C_v^{**} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{up} & A_{ud} \\ B_{vp} & B_{vd} \end{vmatrix}}. \quad (7.70)$$

На сличан начин као у претходном случају, одређују се одговарајуће детерминанте:

$$\Delta_{PD} = \begin{vmatrix} A_{up} & A_{ud} \\ B_{vp} & B_{vd} \end{vmatrix} = -B_{vp} \cdot A_{ud} = -K^2 \omega^{\alpha+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) \quad (7.71)$$

$$\Delta_p^* = K \omega \left\{ \begin{array}{l} \omega^{\alpha+1} \left(\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) (T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)) - \\ -\cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) (T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)) \end{array} \right) - \\ -K \cdot k_i \cdot \omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) \end{array} \right\} \quad (7.72)$$

$$\Delta_d^* = -K\omega \left\{ \omega(T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)) - K \cdot k_i \right\} \quad (7.73)$$

Заменом у израз (7.70) добија се израз за k_p

$$k_p(\omega, \alpha, k_i = const) = -\frac{1}{K} \tan\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) (T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)) + \frac{1}{K} (T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)) + \frac{k_i}{\omega} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) \quad (7.74)$$

односно израз за k_d

$$k_d(\omega, \alpha, k_i = const) = \frac{1}{K \cdot \omega^{1+\alpha} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right)} \left[\omega(T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)) - K \cdot k_i \right], \quad (7.75)$$

под условом да је

$$\Delta_{PD} = -K^2 \omega^{\alpha+2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) \neq 0. \quad (7.76)$$

што је испуњено за свако, $\forall \omega \neq 0$.

У случају система целог реда када је $\alpha = 1$, и $\forall \omega \neq 0$ добијају се следећи изрази за k_p, k_d :

$$k_p(\omega, k_i = const) = \frac{1}{K} (T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)) \quad (7.77)$$

$$k_d(\omega, k_i = const) = -\frac{1}{K \cdot \omega^2} \left[\omega(T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)) - K \cdot k_i \right] \quad (7.78)$$

чијим цртањем се може одредити област(и) стабилности у датој параметарској равни k_p, k_d .

Детерминанта система $\Delta_{PD}(\omega, \alpha)$ је једнака нули ако је:

$$\text{а) } \omega_s = 0, \quad (7.79)$$

$$\text{б) } \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) = 0 \Rightarrow \alpha = 0. \quad \alpha \in [0,1] \quad (7.80)$$

У првом случају

$$\Delta_{pD}(0, \alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in (0, 1], \quad (7.81)$$

као и да је $\Delta_p^*(0) = 0$, односно $\Delta_d^*(0) = 0$ тако да узимајући у обзир (7.67)

$$\begin{aligned} A_{ud}(0, \alpha) \cdot k_d &= \underbrace{C_u(0, \alpha) - A_{ui}(0, \alpha) \cdot k_i}_{C_u^{**}} \\ 0 \cdot k_d &= 0 - Kk_i \neq 0 \end{aligned} \quad (7.82)$$

следи да систем нема решења за k_d , односно k_p тако да у овом случају нема сингуларних правих.

У другом случају важи

$$\Delta_{pD}(\omega, \alpha = 0) = 0, \quad \forall \omega \in (0, \infty], \quad (7.83)$$

односно потребно је да је и

$$\Delta_p^*(\omega, 0) = K\omega \{ \omega(T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)) - K \cdot k_i \cdot \} = 0 \quad \forall \omega \in (0, \infty] \quad (7.84)$$

$$\Delta_d^*(\omega) = -K\omega \{ \omega(T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)) - K \cdot k_i \cdot \} = 0, \quad \forall \alpha \quad (7.85)$$

Другим речима потребно је да

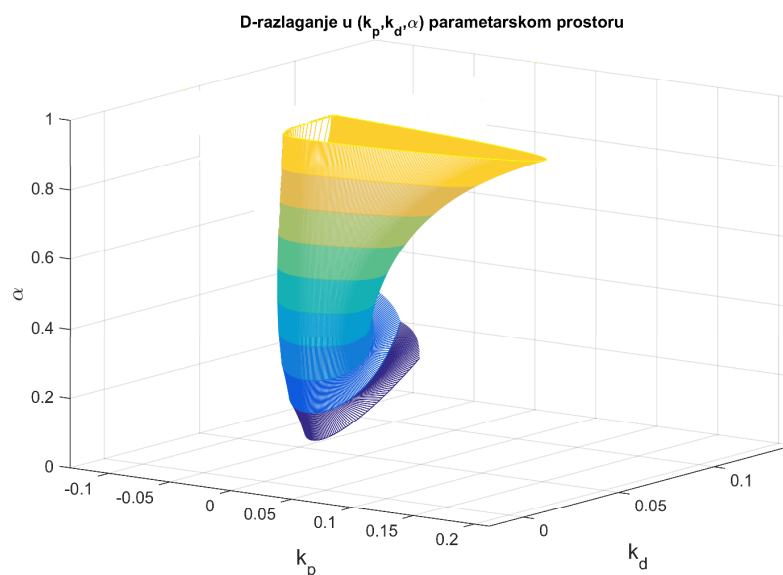
$$\{ \omega_s (T_f \omega_s R_{Gi}(\omega_s) + I_{Gi}(\omega_s)) - K \cdot k_i \cdot \} = 0 \quad (7.86)$$

што се може проверити да за дате вредности T_f, K, k_i, a, b, c не може бити испуњено ни за једно $\omega \in (0, \infty]$. Тиме је показано да у овом случају нема сингуларних правих.

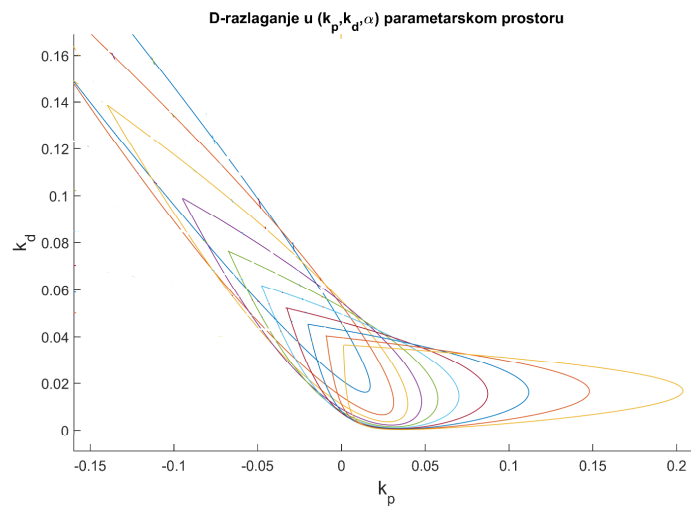
На исти начин као и у претходном случају може се испитати применом Д-разлагања утицај параметара $(k_p, k_d, \alpha, k_i = const)$ на стабилност система.

Одговарајући 3D графички приказ области стабилности за $\alpha \in [0, 1]$ у (k_p, k_d, α) параметарском простору приказан на слици 7.11.

Одговарајући приказ области стабилности је дат на слици 7.12 у параметарској равни (k_p, k_d) за вредности $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$. Такође, се избором различитих вредности α добијају одговарајуће области стабилности. Овде је такође спроведена анализа за вредности $\alpha \in [0, 1]$ где се погодним избором тачке дубље од границе стабилности обезбеђује већа робусност на варијацију параметара датог система.

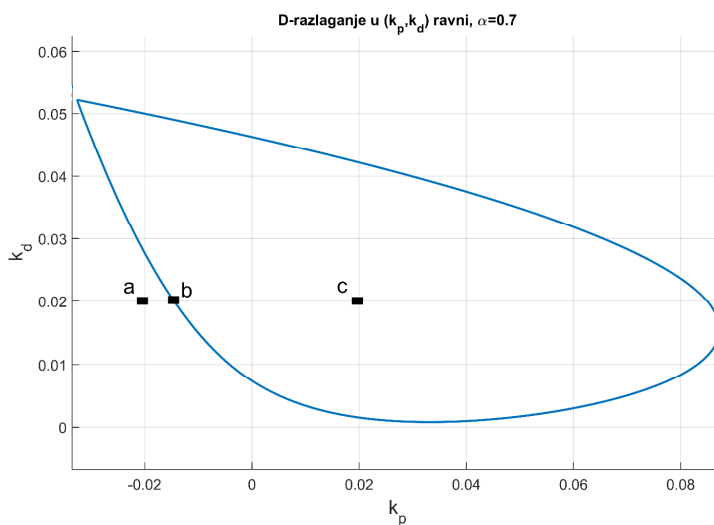


Слика 7.11 3D графички приказ области стабилности за $\alpha = [0, 1]$ у (k_p, k_d, α) параметарском простору

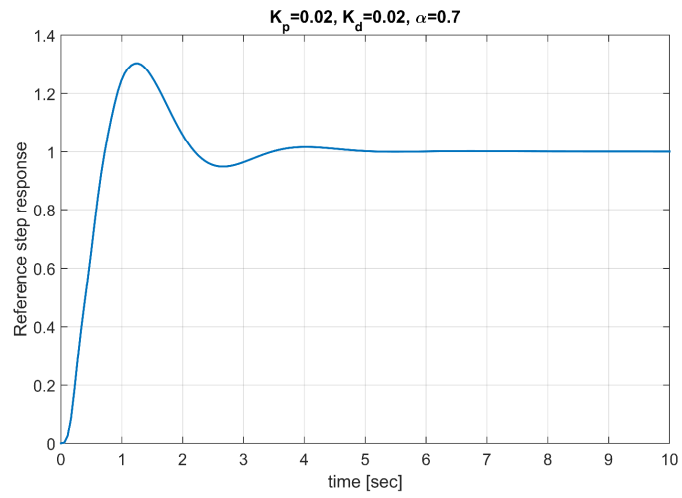


Слика 7.12 2D графички приказ области стабилности у (k_p, k_d) параметарској равни, за вредности $\alpha = [0, 0.1, \dots, 0.9, 1]$

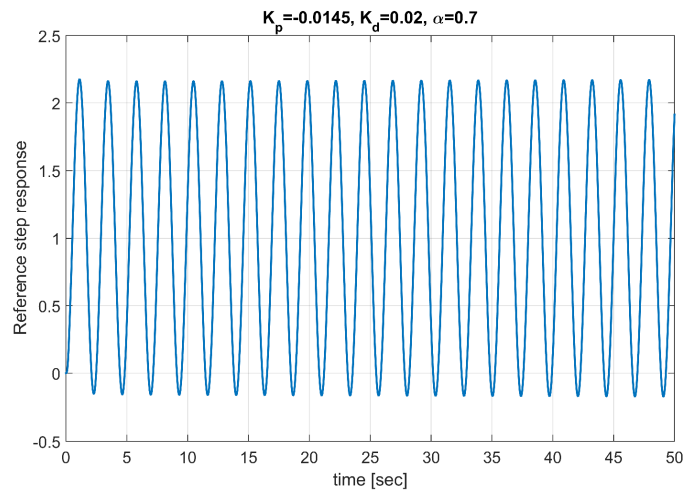
Слично као и у претходном случају, у циљу илустрације и провере домена стабилности уочава се следећа област стабилности у (k_d, k_p) параметарској равни, за вредности $\alpha = 0.7$, слика 7.13. На наредним сликама 7.14-7.16 приказани су одговарајући импулсни одзиви система за уочене вредности са слике 7.13.



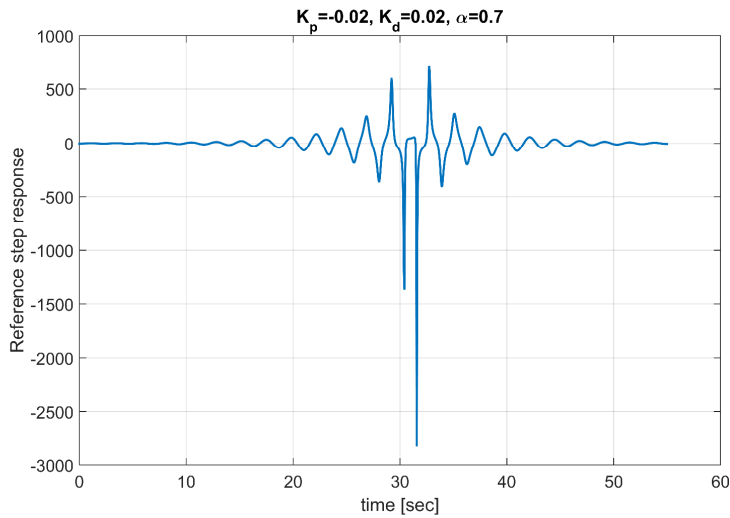
Слика 7.13 2D графички приказ области стабилности у (k_p, k_d) параметарској равни, за вредност $\alpha = 0.7$



Слика 7.14 Импулсни одговор система- тачка ц),



Слика 7.15 Импулсни одговор система -тачка б),



Слика 7.16 Импулсни одговор система -тачка а),

7.4.3 Метода Д разлагања у простору три параметра ($k_i, k_d, \alpha, k_p = const$)

На крају, од интереса је такође овде одредити област стабилности и у параметарској равни (k_i, k_d). Слично као и у претходном случају, није тешко закључити и формирати следеће изразе:

$$A_{ui}(\omega, \alpha) \cdot k_i + A_{ud}(\omega, \alpha) \cdot k_d = \omega \underbrace{[T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)]}_{C_u^{***}} - A_{up}(\omega, \alpha) \cdot k_p \quad (7.87)$$

$$B_{vi}(\omega, \alpha) \cdot k_i + B_{vd}(\omega, \alpha) \cdot k_d = \omega \underbrace{[T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)]}_{C_v^{***}} - B_{vp}(\omega, \alpha) \cdot k_p \quad (7.88)$$

што се може приказати са:

$$\begin{bmatrix} A_{ui} & A_{ud} \\ B_{vi} & B_{vd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_i \\ k_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_u^{***} \\ C_v^{***} \end{Bmatrix}, \quad (7.89)$$

Решавањем датог линеарног система једначина у односу на k_i, k_d произилази да је:

$$k_i = \frac{\Delta_I^{***}}{\Delta_{ID}} = \frac{\begin{vmatrix} C_u^{***} & A_{ud} \\ C_v^{***} & B_{vd} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{ui} & A_{ud} \\ B_{vi} & B_{vd} \end{vmatrix}}, \quad k_d = \frac{\Delta_D^{***}}{\Delta_{ID}} = \frac{\begin{vmatrix} A_{ui} & C_u^{***} \\ B_{vi} & C_v^{***} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{ui} & A_{ud} \\ B_{vi} & B_{vd} \end{vmatrix}}. \quad (7.90)$$

Детерминанта система Δ_{ID} је дата следећим изразом:

$$\Delta_{ID} = \begin{vmatrix} A_{ui} & A_{ud} \\ B_{vi} & B_{vd} \end{vmatrix} = A_{ui}B_{vd} - A_{ud}B_{vi} = K^2 \omega^{1+\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right). \quad (7.91)$$

Детерминанта система $\Delta_{ID}(\omega, \alpha)$ је једнака нули ако је:

$$\text{а) } \omega_{s1} = 0, \quad (7.92)$$

$$\text{б) } \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) = 0 \Rightarrow \alpha = 1. \quad \alpha \in [0,1] \quad (7.93)$$

Детерминанте $\Delta_I^{***}, \Delta_D^{***}$ су одређене следећим изразима респективно:

$$\begin{aligned} \Delta_I^{***} &= \begin{vmatrix} C_u^{***} & A_{ud} \\ C_v^{***} & B_{vd} \end{vmatrix} = C_u^{***} B_{vd} - C_v^{***} A_{ud} = \\ &= K \omega^{1+\alpha} \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) \cdot (\omega [T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)]) - \\ &-\cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right) (\omega [T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)] - K \omega \cdot k_p) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (7.94)$$

$$\begin{aligned} \Delta_D^{***} &= \begin{vmatrix} A_{ui} & C_u^{***} \\ B_{vi} & C_v^{***} \end{vmatrix} = C_v^{***} A_{ui} = \\ &= K \omega \cdot ([T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)] - K \cdot k_p) \end{aligned} \quad (7.95)$$

Израз $k_i = k_i(\omega, \alpha, k_p = const)$ је сада облика:

$$k_i(\omega, \alpha, k_p = \text{const}) = \frac{\omega}{K \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha + 1)\right)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha + 1)\right)(T_f \omega R_{Gi}(\omega) + I_{Gi}(\omega)) - \\ - \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha + 1)\right)(T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)) - \\ - K \cdot k_p \end{array} \right\} \quad (7.96)$$

под условом $\omega_{s1} \neq 0$, $\alpha \neq 1$ (види (7.92),(7.93)).

Исто тако, израз за $k_d = k_d(\omega, \alpha, k_p = \text{const})$ је

$$k_d(\omega, \alpha, k_p = \text{const}) = \frac{1}{\omega^\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha + 1)\right)} \cdot \{(T_f \omega I_{Gi}(\omega) - R_{Gi}(\omega)) - K \cdot k_p\} \quad (7.97)$$

под условом $\omega_{s1} \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Даље се спроводи анализа сингуларности, тј. одређивања сингуларних правих.

На основу (види (7.92),(7.93)), уочава се да је у првом случају за $\omega_{s1} = 0$

$$\Delta_D(0, \alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1), \quad (7.98)$$

Даље, потребно је одредити само сингуларне криве(праве) односно на основу услова да постоји решења да за дати систем једначина потребно је да су

$$\Delta_I^{***}(\omega_{s1}) = \Delta_d^{***}(\omega_{s1}) = 0. \quad (7.99)$$

Имајући у виду изразе за договарајуће детерминанте (7.94),(7.95) може се закључити да је $\Delta_I^{***}(0) = 0$, односно $\Delta_d^{***}(0) = 0$ тако да узимајући у обзир (7.100)

$$K \cdot k_i + 0 \cdot k_d = 0 \Rightarrow k_i = 0 \quad (7.100)$$

добија се прва сингуларна права $k_i = 0$.

У другом случају када је $\alpha = 1$ неопходно је да су задовољени:

$$\Delta_I^{***}(\omega_{s2,3}) = \Delta_d^{***}(\omega_{s2,3}) = 0 \quad \alpha = 1 \quad (7.101)$$

односно потребно је одредити $\omega_s \neq 0$ за које је задовољени претходни услови.

Заменом $\alpha = 1$ у изразе (7.94) односно (7.95) следи:

$$\Delta_I^{***}(\omega_s) = K\omega_s^3 \left\{ \left[T_f \omega_s I_{Gi}(\omega_s) - R_{Gi}(\omega_s) \right] - K \cdot k_p \right\} = 0 \quad (7.102)$$

$$\Delta_D^{***}(\omega_s) = K\omega_s \cdot \left(\left[T_f \omega_s I_{Gi}(\omega_s) - R_{Gi}(\omega_s) \right] - K \cdot k_p \right) = 0 \quad (7.103)$$

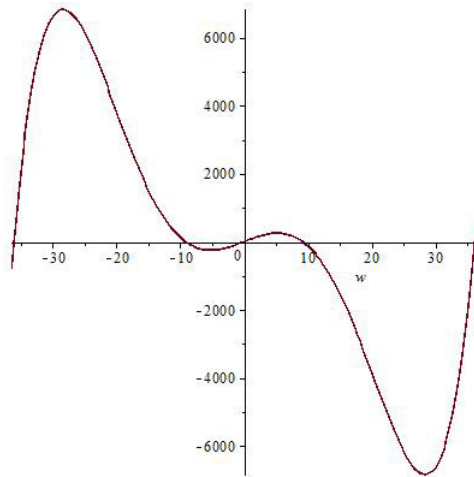
Наиме, уочава се исти израз да фигурише у претходна два израза ако се узме у обзир

$$f^s(\omega_s) = \omega_s \cdot \left(\left[T_f \omega_s I_{Gi}(\omega_s) - R_{Gi}(\omega_s) \right] - K \cdot k_p \right) = 0 \quad (7.104)$$

За познате вредности $K = 1579.85$, $T_f = 0.032$, $K_p = 0.046$ добија се следећи израз у облику полинома по ω_s :

$$f^s(\omega_s) = 0.000668160 \cdot \omega_s^5 - 0.929040 \cdot \omega_s^3 + 73.67310 \cdot \omega_s = 0 \quad (7.105)$$

чијим се решавањем у програмском пакету MAPLE, добијају одговарајуће корени датог полинома, што је и на доњој слици приказано.



(7.106)

Слика 7.17 Графички приказ одређивања решења $f^s(\omega_s) = 0$

Узимајући у обзир само позитивне вредности следи да су у нашем случају $\omega_s, s = 1, 2, 3$ једнаки

$$\omega_{s1} = 0, \quad \omega_{s2} = 9.188391942, \quad \omega_{s3} = 36.13888288 \quad (7.107)$$

Заменом у дату једначине(у) (7.87) добијају се следеће сингуларне праве:

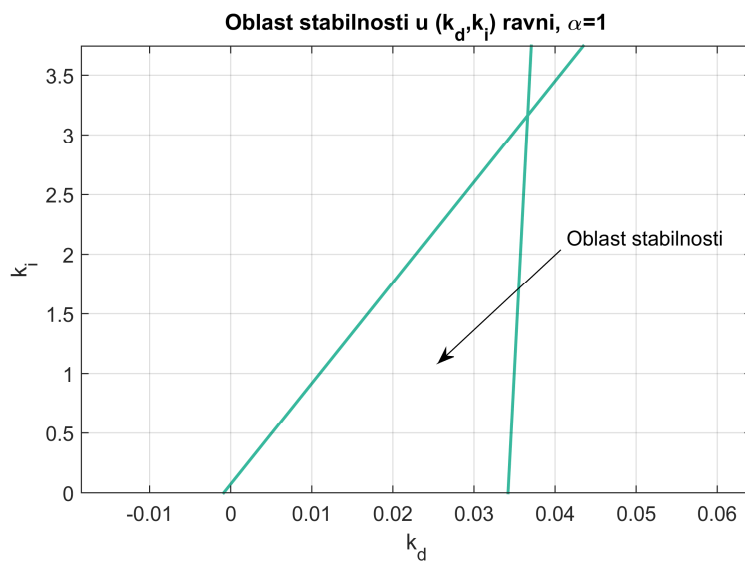
$$\omega_{s1} = 0, \quad \Rightarrow \quad k_i = 0 \quad (7.108)$$

што је и добијено у претходним разматрањима на други начин. Затим за следеће две вредности ω_s , $s = 2,3$ добијају се и преостале две сингуларне праве

$$\omega_{s2} = 9.188391942 \quad \Rightarrow \quad k_i = 84.42654755k_d + 0.0724981862 \quad (7.109)$$

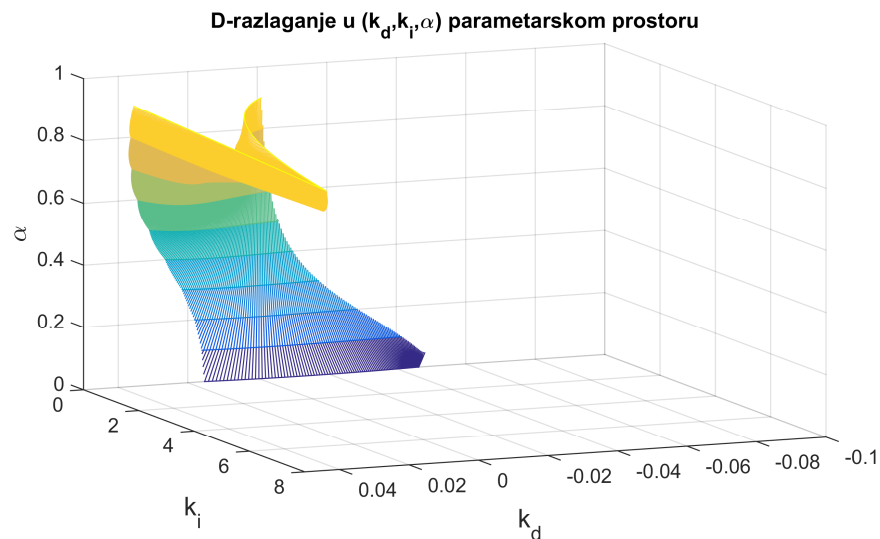
$$\omega_{s3} = 36.138883 \quad \Rightarrow \quad k_i = 1306.018864k_d + 44.65899085 \quad (7.110)$$

Оне су приказане на слици 7.18 при чему дате сингуларне праве формирају дату област стабилности, за вредност $\alpha = 1$.

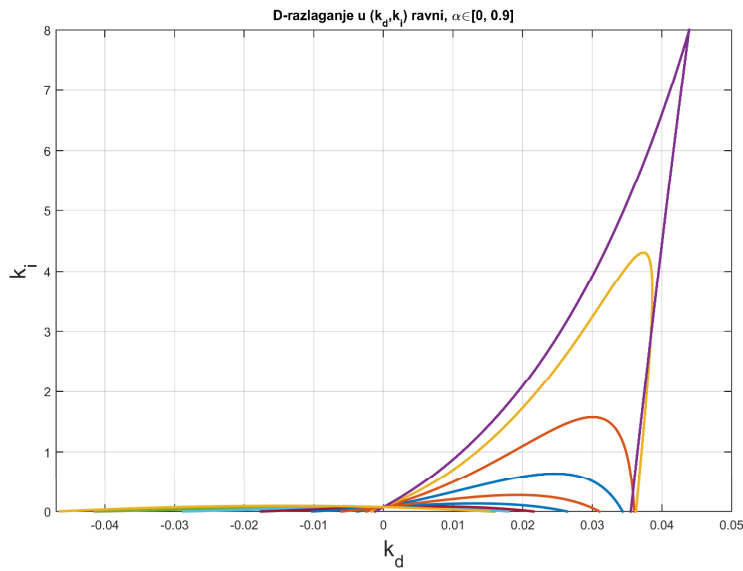


Слика 7.18 2D графички приказ области стабилности у (k_i, k_d) параметарској равни, за вредност $\alpha = 1$

Сада се може, на сличан начин као и у претходна два случаја може спровести анализа применом методе Д-разлагања утицаја параметара ($k_i, k_d, \alpha, k_p = const$) на стабилност система. При томе, 3D графички приказ области стабилности за вредности $\alpha \in [0, 0.9]$ у (k_i, k_d, α) параметарском простору приказан је на слици 7.19. Одговарајући 2Д приказ области стабилности је дат на слици 7.20 у параметарској равни (k_i, k_p) за вредности $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9$. Уочава се да избором различитих вредности α добијају различите областима стабилности али за разлику од првог случаја највећа област се добија за вредност $\alpha \approx 0.9$ а затим се порастом вредности α та област смањује, (види слику 7.18 која је израчуната за вредност $\alpha = 1$). На тај начин види се утицај параметра α , и да постоји оптимална вредност $\alpha \in [0, 1]$ за коју се добија највећа област стабилности система.

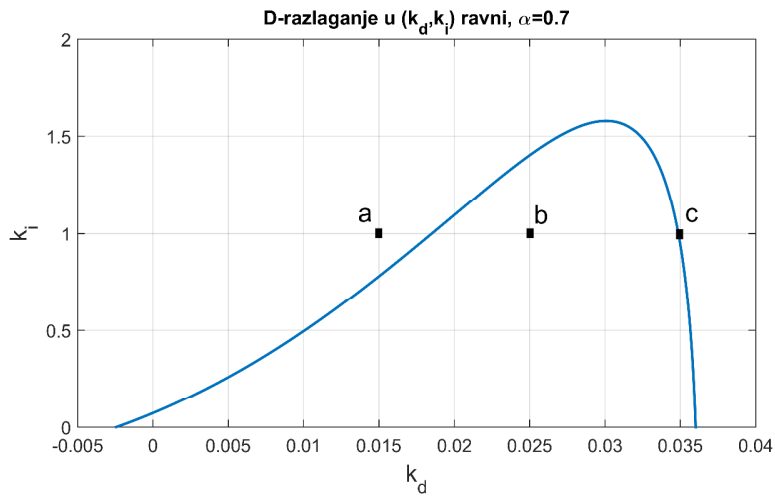


Слика 7.19 3D графички приказ области стабилности за $\alpha \in [0, 1]$ у (k_i, k_d, α) параметарском простору

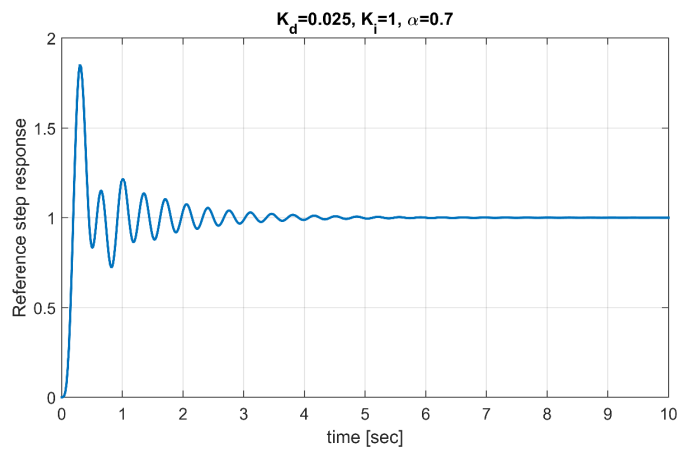


Слика 7.20 2D графички приказ области стабилности у (k_i, k_d) параметарској равни, за вредности $\alpha \in [0, 0.1, \dots, 0.8, 0.9]$

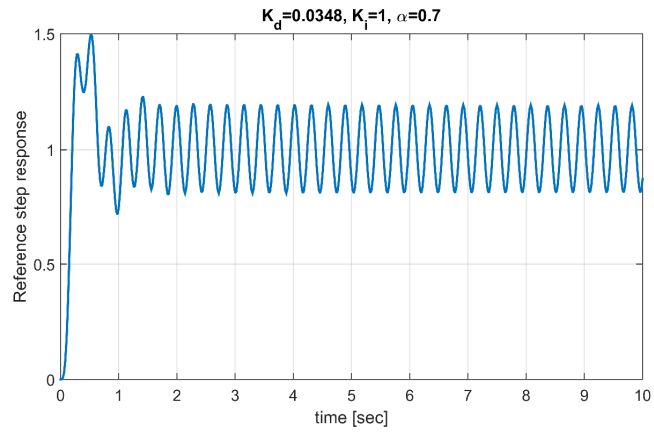
Слично као и у претходна два случаја спроводи се , у циљу илустрације и провере домена стабилности, уочава се следећа област стабилности у (k_i, k_d) параметарској равни, за вредности $\alpha = 0.7$, слика 7.21. На наредним сликама 7.22-7.24 приказани су одговарајући импулсни одзиви система за уочене вредности са слике 7.21.



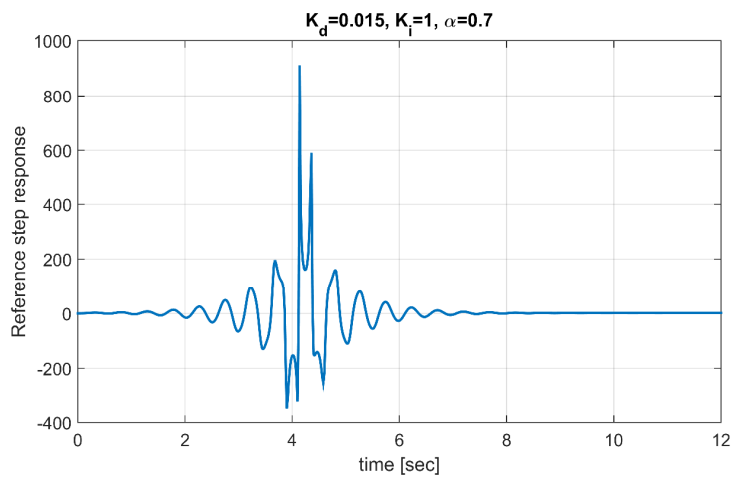
Слика 7.21 2D графички приказ области стабилности у (k_i, k_d) параметарској равни, за вредност $\alpha = 0.7$



Слика 7.22 Импулсни одговор система- тачка б),



Слика 7.23 Импулсни одговор система- тачка ц),



Слика 7.24 Импулсни одговор система- тачка а),

Глава 8

Закључак, доприноси и правци даљих истраживања

8.1 Резултати и доприноси истраживања

У овој дисертацији истраживано је једно криогено мехатроничко постројење- криогено постројење за добијање техничких гасова које ће се посматрати као објект управљања. У дисертацији у првом делу посвећена је пажња проблематици математичког моделирања једног дела датог система, који је од изузетног значаја у процесу добијања криогених гасова, тј. добијању квалитетнијег модела криогене експанзионе турбине. На тај начин развијени унапређени нелинеарни математички модел криогене експанзионе турбине се може искористити у динамичкој анализи и предвиђању нових радних режима, односно верификацији експерименталних резултата.

У другом делу дисертације напори су били усмерени и на развој напредних система управљања применом рачуна нецелог реда/целог реда који би на оптималан начин елиминисао уочене недостатке класичне производње техничких гасова. У наставку даје се кратак преглед као и доприноса истраживања ове докторске дисертације:

- Развијен је унапређени математички модел криогене експанзионе турбине, чиме је омогућена и одговарајућа квалитативна и квантитативна анализа његових статичких и динамичких карактеристика. Такође, у самом развоју поменутог

модела дат је један општији облик за пасивни момент кроз неколико сопствених, и оригиналних формула за потребе решавања математичког модела разматраног процеса. При томе пасивни момент је уведен и представљен на адекватан начин применом рачуна нецелог реда за разлику од до сада постојећих и тиме се даје на општости у формирању датог математичког модела.

- Развијено је и предложено децентрализовано оптимално управљање датим криогеним мехатроничким објектом уз истовремену примену генетских алгоритама као и особина ПИД алгоритама целог и нецелог реда. Такође, спроведено је испитивање робусности сугерисаног напредног децентрализованог управљања, где су сада поремећаји представљени у виду релативне промене улазних температура две струје гасовитог ваздуха.

- Такође, синтетизован је нови, оригинални аналитички мултиваријабилни ПИД регулатор целог реда датим мехатроничким објектом управљања. Овде је („*Multiple inputs – multiple outputs*“, *ММО*) систем дат са два улаза и два излаза познати и као (*ТИТО*) системи управљања. Прво је примењено распрезање система коришћењем адекватног динамичког декуплера, а затим је спроведена синтеза аналитичког регулатора целог реда у функцији једног слободног параметра λ .

- За идентичне захтеве рада криогеног процеса мешања двеју гасовитих ваздушних токова струјања испред експанзионе турбине, пројектован је нови, сложен ПИД регулатор нецелог реда, уз коришћење параметарске методе Д разлагања и који је интегрисан у одговарајући систем регулисања уз коришћење параметарске методе Д-разлагања и који је интегрисан у одговарајући систем регулисања. Скупом од три подешљива параметра (од четири могућа) за које је разматрани систем стабилан, одређене су и одговарајуће области (релативне) стабилности система у простору датих параметара. При томе испитане су све могуће комбинације параметара, што је и илустровано и 3D графичким приказом области стабилности за све вредности нецелог реда у интервалу од нула до један у

параметарском простору односно одговарајућим контурним приказом истог. Посебно, у циљу провере домена стабилности уочена је једна област у параметарској равни а за једну фиксирану вредност параметра нецелог реда тако да су применом симулације верификовани претходно добијени резултати што је и илустровано на сликама где су приказани импулсни одзиви датог система управљања.

8.2 Препоруке за будући рад

Препоруке за будући рад би опционо биле:

- На бази развијеног математичког модела експанзионе криогене турбине спровести допунску динамичку анализу за различите режиме рада, као и у опционо новим режимима рада исте узимајући и динамику процеса мешања ваздушних струја испред експанзионе турбине.
- Код децентрализованог оптимизованог управљачког система примењени су генетски алгоритми. Неко наредно истраживање може обухватити испитивање примену других критеријума оптималности, као и напредних еволуционих алгоритама уз истовремено компаративно поређење истих.
- У овој дисертацији спроведена је синтеза аналитичког регулатора целог реда у функцији једног слободног параметра λ . Неки будући рад може се бавити и синтезом управљања применом аналитичког регулатора целог реда саме криогене турбине као представника МИМО система. Такође, може бити примењен и претходно уведен и презентован сложени ПИД регулатор нецелог реда, уз коришћење параметарске методе Д разлагања и који би био интегрисан у одговарајући систем регулисања.

Литература

- [1] Гајић, Б., *Мogućност примене рачунарског управљања одређеним процесима у „Фабрици Техничких Гасова“ у Бору*, Дипломски рад, Машински факултет, Београд, 2008.
- [2] Дебелковић, Љ.Д., Д.Бабић, *Даље уопштавање Митровићеве методе на системе на расподељеним параметрима*, Техника, (9), 885-891, 1986.
- [3] Дебелковић Љ.Д., Б.Р.Милојковић, *Пројектовање линеарних система*, Машински факултет, Београд, 1987.
- [4] Дебелковић, Љ.Д., С.А.Милинковић, З.Алексић, М.Б.Јовановић, *Нови прилаз у примени методе Д-разлагања на системе са расподељеним параметрима*, Техника-Е, Но4., Е1-Е5, 1999.
- [5] Дебелковић, Д., *Синтеза линеарних система: класичан и модеран приступ*, Београд, Србија, Чигоја, 2002.
- [6] Дебелковић Д, А. Ђорђевић, *Анализа и синтеза процеса са расподељеним параметрима и чистим временским кашњењем у параметарској равни*, Београд, Чигоја, 2005.
- [7] Дебелковић, Љ.Д., Д. Стевић, Г. Симеуновић, Н. Димитријевић, С. Рибар, *Динамика објекта и процеса у системима аутоматског управљања X*, Машински факултет, Универзитета у Београду, 2012.
- [8] Коробов, Ј.А., *Стабилност неких система са расподељеним и концентрисаним параметрима методом Митровића*, Аутоматика, (3), 147-154, 1971.
- [9] Лазаревић, М., Љ.Бучановић, *Прилог моделирању и динамичкој анализи система нецелобројног реда са основама рачуна нецелобројног реда*,

Машински факултет, Универзитет у Београду, Београд, 2012, п.222, ISBN 978-86-7083-747-8.

- [10] Грујић Љ.Т., Милојковић Б.Р. – *Аутоматско управљање*, Машински факултет, Београд 1990.
- [11] Митовски, М. „*Енергетска ефикасност криогеног процеса*“, Штампарско – издавачко предузеће „Бакар“, Бор, 1994.
- [12] Рашковић Љубиша, *Основи криогене технике*, Академска мисао, Београд, 2005.
- [13] Стојић, М., *Континуални системи аутоматског управљања*, Београд, Наука, 1996.
- [14] Ackermann, J., *Robust Control: The Parameter Space Approach*, New York: Springer-Verlag, 2002.
- [15] Ackermann, J., & Kaesbauer, D. Stable polyhedra in parameter space. *Automatica*, 39, 937–943, 2003.
- [16] Air Products, *Cryogenic Oxygen Generators*. Allentown, Air Products & Chemicals Inc., 1997.
- [17] Astrom, K.J., T. Hägglund, *PID controller: Theory, design and tuning*, Instrument Society of America, 1995.
- [18] Åström, K.J., T. Hägglund, Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control, *Journal of Process Control*, vol. 14, pp. 635-650, September 2004.
- [19] Astrom, K.J., K.H. Johansson, Q.-G. Wang, Design of decoupled PI controllers for two-by-two system, *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 149, 74–81, Special Section on PID Control, 2002.
- [20] Astrom K.J., R.M. Murray, *Feedback Systems*, Princeton University Press, USA, 2008.
- [21] Atanacković, T.M., Stanković, B., An expansion formula for fractional derivatives and its applications. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 7, 365–378, Available at: <http://hdl.handle.net/10525/1232>, 2004.
- [22] Atanacković, T.M., Zorica, D., 2013. *On the Bagley–Torvik equation*. *ASME J. Appl. Mech.* 80, pp. 041013-1–041013-4., 2013.

- [23] Bagley R.L., P. Torvik. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Journal of Applied Mechanics*, 51:294–298, 1984.
- [24] Baljak, V., *Industrijska hemija*, Metalurško tehnološki fakultet, Podgorica, 2011.
- [25] Balamurugan, S., R. Joseph Xavier and A. Ebenezer Jeyakumar, Simulation of Response of Gas Turbine Plant with Controllers, Proceedings of National System Conference, Manipal, India, pp. P105, 2007.
- [26] Barbosa R., Tenreiro J. A. and Ferreira, I. M, Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function, *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, pp. 305321, 2004.
- [27] Barron, R.F., *Cryogenic Systems*, Oxford Press, New York, 1985.
- [28] Brogan, W., *Modern Control Theory*, QPI, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, USA, 1985.
- [29] Bučanović, Lj., M. Lazarević, S. Batalov, Fractional PID Controllers Tuned by Genetic Algorithms for Expansion Turbine in the Cryogenic Air Separation Process, *Chemical Industry*, (Hem. Industrija), ISSN 2217-7426, Hem. Ind. 68 (5) 519–528 (2014), doi: 10.2298/HEMIND130717078B
- [30] Brown, R. G., Thaler, G.J., *Analysis and Design of Feedback Control Systems*, McGraw-Hill Inc., USA, 1960.
- [31] Butkovskii, A.G., S.S. Postnov, E.A. Postnova, Fractional Integro-Differential Calculus and Its Control-theoretical Applications. II. Fractional Dynamic Systems: Modeling and Hardware Implementation, *Automation and Remote Control*, Vol. 74, No. 5, pp. 725–749, 2013.
- [32] Caponetto, R., Dongola, G., Fortuna, L., and Petras, I., *Fractional Order Systems. Modelling and Control Applications*, Singapore: World Scientific, 2010.
- [33] Caputo M., Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, vol. 13, pp. 529–539, 1967.
- [34] Castle, W.F., Air separation and liquefaction: recent developments and prospects for the beginning of the new millennium, *Int. J. Refrig.* 25, 158–172, 2002.
- [35] Chen, Y.Q., Ubiquitous fractional order controls? In Proceedings of the Second IFAC Workshop on Fractional Derivatives and Applications, Porto, Portugal, 19–21 July, 2006.

- [36] Das, S., Saha, S., Das, S., and Gupta, A., On the Selection of Tuning Methodology of FOPID Controllers for the Control of Higher Order Processes, *ISA Trans.*, 2011, vol. 50, pp. 376–388,2011.
- [37] Davis, L., *Handbook of Genetic Algorithms*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- [38] Debeljković, Lj.D., G. V. Simeunović, V. S. Mulić, *Matematički modeli objekata i procesa u sistemima automatskog upravljanja*, Mašinski fakultet, Univerziteta u Beogradu, 2006a.
- [39] Desbrough, L.R. Miller, Increasing customer value of industrial control performance monitoring—Honeywell’s experience, in: *Sixth International Conference on Chemical Process Control*, AIChE Symposium Series Number 326, Vol. 98, 2002.
- [40] Frazer, R.A. and Duncan, W.J., On the Criteria for Stability for Small Motions, *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 1929, vol. 124, pp. 642-654.
- [41] Ghorbani H, Ghaffari A and Rahnama M, Constrained model predictive control implementation for a heavy-duty gas turbine power plant, *WSEAS Trans Syst Cont*, vol. 3, pp. 507-523, 2008.
- [42] Goodhart, S. G., Venderbosch, H. M., et al. , DMCplus control on the Messer Griesheim air separation unit. In *AspenTech’s 1999 Advanced Control and Optimization European Users Group Meeting*, 1999.
- [43] Goodwin, C.G., S.F. Graebe, M.E. Salgado, *Control System Design*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [44] Gundes A.N.Mete, A. Palazoglu, Reliable decentralized PID controller synthesis for two-channel MIMO processes, *Automatica* 45, 353–363, 2009.
- [45] Goldberg, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*. Reading MA: Addison-Wesley, 1989.
- [46] Grujić T. Lj., Possibilities of linear system design on the basis of conditional optimization in parameter plane, Part I: "Linear continual systems with constant parameters", *Ibid*, No. 1-2, pp. 49-60, 1966.
- [47] Gryazina N., E., B.T. Polyak, Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited, *Journal Automatica*, Vo.41 Issue 1, pp.13-26, January 2006.
- [48] Haupt, R., S.E. Haupt, *Practical Genetic Algorithms*, Wiley-IEEE, New York, 2004.

- [49] Holland, J., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1976.
- [50] Huang, H.P., F.Y. Lin, Decoupling multivariable control with two degrees of freedom, *Industrial and Engineering Chemistry Research* 45, 3161–3173, 2006.
- [51] History of Cryogenics - *From the Fall 1999 issue of Cold Facts magazin.*
- [52] Jevtović, B.T, M. R. Mataušek, PID controller design of TITO system based on ideal decoupler, *Journal of Process Control* 20 (2010) 869–876.
- [53] Jadhav S., Chile R., Hamde S., Robust Fractional-order Controller using Bode's Ideal Transfer Function for Power Plant Gas Turbine, *International Journal of Computer Applications*, Volume 88 - No. 16, February, 2014.
- [54] Johnson M, Croweand J, Moradi MH. PID control: new identification and design methods. London, UK: Springer; 2005.
- [55] Kilbas, A., A., H.M. Srivastava, J.J Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [56] Lazarević, P.M., Lj. Bučanović, Control algorithms of PI D alphabeta type in process control systems: new results, 2nd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2009), Palić (Subotica), Serbia, 1-5 June 2009, A-01:1-15.
- [57] Lazarević, P.M., Lj. Bučanović, A. Spasić, $PI^\alpha D^\beta$ feedback type control of expansion turbine in the air production cryogenic liquid, CHISA2010, August, Prague, Czech Republic, 2010.
- [58] Lazarević, P.M., Lj., Bučanović, Further results on PIalphaDbeta type control of expansion turbine in the air production cryogenic liquid, *Proceedings IConSSM2011/The 3rd International Conference of Serbian Society of Mechanics*, p.122-136, 2011, ISSN:978-86-909973-3-6.
- [59] Lazarević, M. Editor of, *Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability And Modeling*, WSEAS, ID 9028, ISBN: 978-960-474-348-3, pp. 202, 2014.
- [60] Lee, Y., Lee, M., Park., S., Brosilow, C. PID controller tuning for desired closed-loop responses for SI/SO system, *A.I.Ch.E. Journal* 44(1), 106-115, 1998.
- [61] Lurie, B.J., Three-Parameters Tunable Tilt-Integral-Derivative (TID) Controller, US Patent 5371670, 1994.

- [62] Machado, J.T., Kiryakova, V., Mainardi, F. Recent history of fractional calculus. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16(3):1140-1153,2011.
- [63] Maxwell, D.K., Vyshnegradsky, I.A., and Stodola, A., *Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya* (Automatic Control Theory), Moscow: Akad. Nauk SSSR, 1949.
- [64] Mataušek, M.R,T.B. Šekara, PID controller frequency-domain tuning for stable, integrating and unstable processes, including dead-time, *J. Process Control*, 21, pp.17–27,2011.
- [65] Mitrović, D., Graphical analysis and synthesis of feedback control systems: I Theory and analysis, II-Synthesis, *IEEE Trans. On Applications and Industry*, Vol. 77, pp.476-496,1958.
- [66] Mitrović D., Graphical analysis and synthesis of feedback control systems. I - Theory and analysis, II - Synthesis, III – Sampled data feedback control systems, *AIEE Transactions (Application and Industry)*, 77, pp. 476–496,1959.
- [67] Moellenhoff D.E,R.S Vittal, Design of robust controllers for gas turbine engines, *J Eng Gas Turbines Power*, vol. 113, pp. 283-292,1991.
- [68] Monje,C.A, B. M. Vinagre, V. Feliu, and Y. Q. Chen. Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. *Control Engineering Practice*, 16 798–812, 2008.
- [69] Monje, C.A., Chen, Y.Q., Vinagre, B.M., Xue, D., V. Feliu , *Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, London: Springer, 2010.
- [70] Najimi E.,M.H., Ramezani, Robust control of speed and temperature in a power plant gas turbine, *ISA Transactions*, vol. 51, pp. 304-308, 2012.
- [71] Neimark,I.Y, On the problem of the distribution of the roots of polynomials, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 58, pp. 357-360, 1947 (in Russian).
- [72] Neimark, Yu.I., *Ustoichivost linearizovannykh sistem upravleniya* (Stability of Linearized Control Systems), Leningrad: LKVVIA, 1949.
- [73] Neimark, Yu.I., *Dinamičeskie sistemy i upravlyaemye protsessy* (Dynamic Systems and Control Processes), Moscow: Nauka, 1978.
- [74] Nordfeldt,P., T. Hagglund, Decoupler and PID controller design of TITO systems,*Journal of Process Control* 16,923–936,2006.
- [75] ODwyer. A, *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, 3rd edn. Imperial College Press, London,2009.

- [76] Oustaloup, A., *La commande CRONE: commande robuste d'ordre non entier*, Hermes: Paris, 1991.
- [77] Oustaloup, A., Sabatier, J., and Lanusse, P., *From Fractional Robustness to CRONE Control*, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, vol. 2, no. 1, pp. 1–30, 1999.
- [78] Podlubny, I., *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [79] Raynaud, H.F. and Zergainoh, A., *State-Space Representation for Fractional Order Controllers*, *Automatica*, vol. 36, pp. 1017–1021, 2000.
- [80] Sabatier, J.O., P. Agrawal, J. A. Tenreiro Machado, *Advances in Fractional Calculus*, Springer, Netherlands, 2007.
- [81] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., *Fractional Integrals and Derivatives*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1993.
- [82] Skogestad, S., *Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning*, *Journal of Process Control*, Vol. 13, pp. 291–309, 2003.
- [83] Smith, A.R., J. Klosekr, *Fuel Processing Technology* 70, 115–134, 2001.
- [84] Tavakoli, S., I. Griffin, P.J. Fleming, *Tuning of decentralized PI (PID) controllers for TITO processes*, *Control Engineering Practice* 14, 1069–1080, 2006.
- [85] Tehnička dokumentacija „*Fabrike Tehničkih Gasova*“ u Boru, 1978.
- [86] Yamamoto S., I. Hashimoto, *Present status and future needs: the view from Japanese industry*, In Arkun and Ray, Eds., *Chemical Process Control-CPCIV. Proc. 4th Inter. Conf. on Chemical Process Control*, TX, 1991.
- [87] Vinson, D.R., *Air separation control technology*, *Comput. Chem. Eng.*, 30, 1436–1446, 2006.
- [88] Šiljak D., *Analysis and synthesis of feedback control systems in the parameter plane. I- Linear continuous systems, II - Sampled-data systems*, *AIEE Transactions (Application and Industry)*, 83, pp 449–466, 1964.
- [89] Šiljak D., *Generalization of the Parameter Plane Method*, *IEEE Trans. On AC*, Vol. 11 No. 1, 1966.
- [90] Šiljak D., *Nonlinear systems: the parameter analysis and design*, J. Wiley, New York, 1968.

- [91] Zavala, V., Biegler, L., The advanced step NMPC controller: optimality, stability and robustness. *Automatica*, 45(1), 86–93, 2009.
- [92] Zhu, Y., Laird, C., A parallel algorithm for structured nonlinear programming. In *Proceeding of 5th International Conference on Foundations of Computer-Aided Process Operation, FOCAPO*, pp. 345–348, 2008.

ПРИЛОЗИ

Прилог А-Номенклатура

A, B_u, B_z, C, D_z - константне матрице

b, B -матрица управљања

β - коефицијент смањења запремине

c - специфични топлотни капацитет

c_{pl}, c_{pII} - специфична топлота предајника и пријемника топлоте

C - број степени слободе,

$C_{(.)}$ - константе,

D - запремински проток

$D(k, n - k)$ - област стабилности система –метода Д разлагања

${}_0 D_t^\alpha (..)$ - нецели извод/интеграл типа Риман-Лиувил,Капутов, реда α у границама од 0 до t

$d(t)$ - поремећај на улазу објекта

F_k - корекциони фактор завистан од врсте гаса

F - број фаза у систему,

$f(\cdot)$ - векторска функција

$f(s)$ – карактеристични полином

G - масени проток гаса, матрица,скуп

G_g - масени проток

g - убрзање земљине теже, елементи матрице G

$g(t)$ - одскочни одзив ,функција

\bar{M}_{AR}^s - главни момент спољашњих сила које делују на дато тело

M_{op} - момент спољашњег оптерећења

M_{sc} - маса гасовитог ваздуха у сабирној цев

\dot{m}_I, \dot{m}_{II} - масени проток предајника и пријемника топлоте

m_{TV} - маса утечњеног ваздуха

m_e - маса ваздуха који експандира у експанзионој турбини

p_k, p_2 - крајњи притисак ваздуха

p_0, p_1 - почетни притисак ваздуха

p_i - парцијални притисак и-те компоненте у продуктима издвајања

p - укупни притисак парне (гасовите) фазе.

p_A, p_B - парцијални притисак компоненте А и В у гасовитој фази изнад течне фазе

у условима термодинамичке равнотеже,

P_A, P_B - притисак zasiћене паре чисте компоненте А и В на посматраној

температури (равнотежни напон паре компоненте А и В),

\dot{Q}_I - количина топлоте (топлотни флуks) одведена са предајника (I)

\dot{Q}_{II} - количина топлоте доведена пријемнику топлоте (II)

$\Delta\dot{Q}$ - количина топлоте предата околина

Q_o - количина топлоте размењена са околином

Q - топлотни проток

$q_{(c)}$ - топлотни проток по јединици дужине

q_{do} - топлота доведена из околине по kg ваздуха

θ - температура

$\theta_{I,1}, \theta_{I,2}; \theta_{II,1}, \theta_{II,2}$ - температура предајника и пријемника топлоте на улазу

$\Delta\theta_{sr}$ - средња разлика температура.

N_i - унутрашња (изентропска) снага гасне турбине

η_m - механички степен корисности гасне турбине ,

$$\eta = 1 - \frac{\Delta \dot{Q}}{\dot{Q}_I} = \frac{\dot{Q}_{II}}{\dot{Q}_I} - \text{степен корисности размењивача топлоте;}$$

$Im(\)$ - имагинарни део од ()

I - јединична матрица

i - специфична енталпија

i_p - енталпија ваздуха у почетном термодинамичком стању при параметрима

p_p, θ_p

i_k' - енталпија ваздуха након изентропске експанзије до притиска p_k и

температуре θ_k'

i_k - енталпија ваздуха након изентропске експанзије до притиска p_k и

температуре θ_k

J - матрица осетљивости

$[J_C]$ - тензор инерције крутог тела

$J(\omega)$ - Јакобијан система

κ - експонент изентропе

K_x - матрица Калмановог појачања

L_t - технички адијабатски (изентропски) рад експанзије ваздуха у гасној турбини

$Re(\)$ - реални део од ()

R - универзална гасна константа

R_i - гасна константа i -те компоненте

$r_i = \frac{V_i}{V}$ - запремински удели појединих гасова у мешавини

N_{eT} - снага турбине на вратилу – *ефективна снага*, при експанзији.

N_i - унутрашња (изентропска) снага гасне турбине

N - број спољашњих фактора који утичу на стање равнотеже посматраног система,

n - број независних компонената система

(q^1, q^2, \dots, q^N) - генералисане координате

Y_{Ar}, Y_{Br} - молски удео компоненте А и В у гасној фази,

$y \left[\frac{\text{kg гасовите фазе компоненте А}}{\text{kg гасовите фазе мешавине}} \right]$ - масени удео гасовите фазе компоненте

α, β, γ - реалан позитиван број, константа

Δ - коначна разлика

РВ – расхладна вода

ТВ - течан ваздух

TN_2 - течан азот

TO_2 - течан кисеоник

ГВ - гасовити ваздух

GN_2 - гасовити азот

OGN_2 - отпадни гасовити азот

GO_2 - гасовити кисеоник

ПВ - пригушни вентил

ТК – турбокомпресор

РР – реверзни размењивач топлоте

ЕТ – експанзиона турбина

Х – хладњак ваздуха

РК – размењивач топлоте тј. кондензатор ваздуха,

v_i - специфична запремина i -те компоненте у продуктима издвајања

s - ентропија

ρ - густина гаса

Y - експанзиони фактор

$r(t)$ - референтна (жељена) вредност излаза

$\mathbf{x}(t)$ - вектор стања $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{X}^n$,

$\mathbf{x}_{ip}(t)$ – партикуларно решење диференцијалне једначине

$\mathbf{x}_{ih}(t)$ – хомогено решење диференцијалне једначине

$\mathbf{x}_i(t)$ - вектор излаза $\mathbf{x}_i(t) \in \mathfrak{R}^N$,

X_A, X_B - молски удео компоненте А и В у течној фази, која је у равнотежи са гасном фазом,

$x_m, x_s, x, x_g \left[\frac{\text{kg течне фазе компоненте А}}{\text{kg течне фазе мешавине}} \right]$ - масени удели течне фазе компоненте

$\mathbf{u}(t)$ - вектор управљања,

μ_s - Цул-Томпсонов коефицијент

ξ, r и ϕ - цилиндричне координате

ξ - правац струјања радног флуида, коефицијент губитка притиска ваздуха услед његовог струјања кроз цевовод,

V - запремина тела

ε - коефицијент фазног прелаза

ψ - бездимензиона координата

$\lambda, \lambda = \frac{P_k}{P_p}$ - коефицијент топлотне проводљивости, однос притисака

ζ - параметар пригушења

$z(t)$ - вектор мерљивих константних поремећаја,

w - брзина

$\bar{\omega}_i$ - угаона брзина сегмента

\bar{v}_C, \bar{v}_{M_i} - брзина средишта маса тела, брзина тачке M_i елементарне запремине

dV_i ,

E_k - кинетичка енергија тела

C_i - центар инерције датог тела (V_i)

$M_{op}(t)$ - момент спољњег оптерећења.

$M_{ot}(t)$ - момент унутрашњих отпорних сила

\bar{M}_{AR}^s - главни момент спољашњих сила које делују на дато тело

\bar{L}_A - кинетички момент тела срачунат у односу на тачку А

$N_{GT}(t)$ - снага експанзионе турбине на спојници са генератором

$G_{RV}(t)$ - проток ваздуха кроз регулациони вентил,
 $G_{GT}(t)$ - проток ваздуха кроз турбину,
 K_p - пропорционално појачање,
 K_d - диференцијално појачање,
 K_i - интегрално појачање,
 (IAE) , - интеграл апсолутне вредности грешке
 $(ITAE)$, - интеграл времена помножен са апсолутном грешком
 (MSE) , - средња квадратна грешка
 $(ITSE)$, - интеграл времена помножен квадратом грешке
 n - укупан број хромозома у популацији,
 f_i - вредност евалуационе функције
 i - број итерације,
 p_{m0} - почетна вероватноћа мутације,
 l - праг слабљења,
 g_c - текућа генерација,
 $g_s(t)$ - одступање вредности протока од номиналне вредности
 $\theta_s(t)$ - одступање вредности температуре од номиналне вредности
 $i_A(t)$ - одступање вредности управљачког сигнала од номиналне вредности управљачког сигнала на управљачком вентилу $TV946A$,
 $i_B(t)$ - одступање вредности управљачког сигнала од номиналне вредности управљачког сигнала на управљачком вентилу $TV946B$.
 $z_1(t), z_2(t)$ - поремећај
 $V_p(t), p = 2, 3, \dots$ -моменти функције
 $H(t)$ Хевисајдова функција, $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$
 \mathcal{L} Лапласова трансформација
 \mathbb{C} скуп комплексних бројева
 \mathbb{N} скуп природних бројева $\{1, 2, 3, \dots\}$

\mathbb{Q}	скуп рационалних бројева
\mathbb{R}	скуп реалних бројева
$\Re[z]$	реални део броја z
S-	функција осетљивости система
T-	функција комплементарне осетљивости система
η_2, η_1, λ	параметри
s	комплексна променљива
$\mathfrak{S}(\cdot)$	трансформација од t у Лапласовом домену
t	независна реална променљива; у инжењерским проблемима, време
x	независна реална променљива;
\mathbb{Z}	скуп целих бројева $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
$j = \sqrt{-1}$	имагинарна јединица
$\Gamma(x)$	гама функција
ω	учестаност, кружна фреквенција
ε	грешка
$\binom{a}{b}$	биномни коефицијент
Σ	сума

$\lfloor x \rfloor$ доњи цео део броја $x \in \mathbb{R}$, при чему је $\max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$;

$$\text{нпр. } \lfloor 2 \rfloor = 2, \lfloor 2,5 \rfloor = 2, \lfloor -2,5 \rfloor = -3$$

$\lceil x \rceil$ горњи цео део броја $x \in \mathbb{R}$, при чему је $\min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$;

$$\text{нпр. } \lceil 2 \rceil = 2, \lceil 2,5 \rceil = 3, \lceil -2,5 \rceil = -2$$

$\det()$ - детерминанта матрице $()$

$\text{diag}\{ \}$ – дијагонална матрица $\{ \}$

$\text{adj}\{ \}$ - адјугована матрица $\{ \}$

Прилог Б- Геометријске и радне карактеристике експанзионе турбине ETV – 7600 „Фабрике Техничких гасова“ у Бору

Табела Б- Радни параметри експанзионе турбине ETV – 7600

Geometrijske i radne karakteristike procesa				
Naziv veličine	Oznaka	Vrednost	Dimenzija	Napomena
Nominalni zapreminski protok kroz turbinu	$D_{GT,N}$	2,027	m^3/s	$7296 m^3_N$
Nominalni maseni protok kroz turbinu	$G_{GT,N}$	23.40	kg/s	
Nominalni pritisak vazduha na ulazu u turbinu	$P_{GTu,N}$	4.5×10^5	N/m^2	4,5 bar
Nominalni pritisak vazduha na izlazu iz turbine	$P_{GTi,N}$	1.35×10^5	N/m^2	1.35 bar
Nominalni pritisak vazduha u turbini	$P_{GT,N}$	2.93×10^5	N/m^2	2.93 bar
Nominalna temperatura na ulazu u turbinu	$\theta_{GTu,N}$	124.15	K	-149 C
Nominalna temperatura na izlazu iz turbine	$\theta_{GTi,N}$	86.15	K	-187 C
Nominalna temperatura vazduha u turbini	$\theta_{GT,N}$	105.15	K	-168 C
Gustina vazduha na ulazu u turbinu	$\rho_{GTu,N}$	12.64	kg/m^3	12,64
Gustina vazduha na izlazu iz turbine	$\rho_{GTi,N}$	5.46	kg/m^3	5,46
Gustina vazduha u turbini	ρ_{GT}	9.71	kg/m^3	9,71
Specifična entalpija vazduha na ulazu	$i_{GT,u}$	124.2	kJ/kg	124.2
Specifična entalpija vazduha na izlazu	i_{GTi}	90.11	kJ/kg	90.11
Specifični stvarni toplotni pad	Δi	35	kJ/kg	
Specifični raspoloživi (izentropski) toplotni pad	$\Delta i'$	42.17	kJ/kg	
Entropija vazduha na ulazu	$s_{GT,u}$	2.47	kJ/kgK	
Entropija vazduha na izlazu	$s_{GT,i}$	2.51	kJ/kgK	
Nominalna snaga turbine	N_N	90.58	kW	
Nominalni broj obrtaja radnog kola	n_N	15000	o/min	
Nominalna ugaona brzina obrtanja radnog kola	ω_N	1570	$1/s$	
Nominalni hod ventila	$Y_{RV,N}$	0.026	m	
Radna zapremina turbine	V_{GT}	$2.2 \cdot 10^{-3}$	m^3	
Ukupan moment inercije masa	J	9.65	kgm^2	
Koeficijent adijabate	κ	1.4		
Gasna konstanta vazduha	R	287	$J/kg \cdot K$	

Mehanički stepen korisnosti	η_m	0.998		
Izentropski stepen korisnosti	η_{izs}	0.956		
Koeficijent ventila	k_v	0.847		
Koeficijent aktivnog momenta turbine	δ	48.09		
Koeficijent otpora (pasivnog momenta) turbine	γ	0.02		

Прилог Ц - Гама функција

Гама функција

Гама функција која је често позната и под називом *Ојлерова гама функција* Γ се дефинише користећи Ојлеров интеграл друге врсте, види на пр. *Лазаревић, Бучановић, (2012)*:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \quad (\text{Ц.1})$$

при чему је $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$. Лако је показати да претходни интеграл конвергира за све комплексне вредности z за које је $\text{Re}(z) > 0$. Наиме,

$$\begin{aligned} \Gamma(x+iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \ln t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \ln t) + i \sin(y \ln t)] dt \end{aligned} \quad (\text{Ц.2})$$

израз у угластим заградама је ограничен за свако t , где је конвергенција у ∞ , обезбеђена чланом e^{-t} , док је за конвергенцију у нули неопходно обезбедити да је $x = \text{Re}(z) > 1$.

Деф.1 Ојлерова константа γ је одређена следећим изразом:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \approx 0.5772156649 \quad (\text{Ц.3})$$

Често се у литератури може наћи и оштира дефиниција гама функције: гама функција Γ је мероморфна функција независне променљиве z (без допунског услова по питању $\text{Re}(z) > 0$) тако да је њена реципрочна вредност облика:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k} \right)^{-z/k} \quad (\text{Ц.4})$$

где је $\gamma = 0.57721566\dots$ Ојлерова константа. Даље, може се рећи да је једна од основних особина гама функције да она задовољава тзв. *редукциону формулу* тј. важи

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (\text{Ц.5})$$

која се може доказати парцијалном интеграцијом:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (\text{Ц.6})$$

Лако се може израчунати:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} / 0^{+\infty} = 1 \quad (\text{Ц.7})$$

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = -e^{-t} (t+1) / 0^{+\infty} = 1 \quad (\text{Ц.8})$$

Очигледно, $\Gamma(1)=1$ и користећи редукциону формулу добијамо за вредности $z=1,2,3,\dots$

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!, \\ &\dots\dots\dots \\ \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n! \end{aligned} \quad (\text{Ц.9})$$

Због ове особине се често каже да је гама функција уопштење појма факторијела на произвољне бројеве. Вредност гама функције за нпр. $z=1/2$ је

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \quad (\text{Ц.10})$$

Такође, користећи релацију (2.4) гама функцију можемо продужити и на леву полураван, тј. за вредности $\operatorname{Re}(z) \leq 0$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \operatorname{Re}(z) > -n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{Z}_0^- := \{0, -1, -2, \dots\} \quad (\text{Ц.11})$$

где је $(z)_n$ за $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ дефинисано са:

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1), \quad (\text{Ц.12})$$

На основу претходних релација добијају се следећи индетитети:

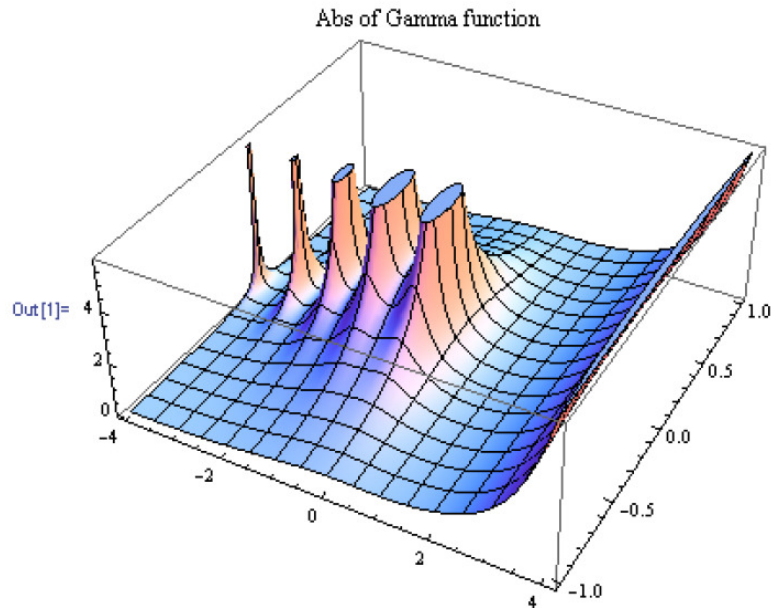
$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n! \quad (\text{Ц.13})$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \quad (\text{Ц.14})$$

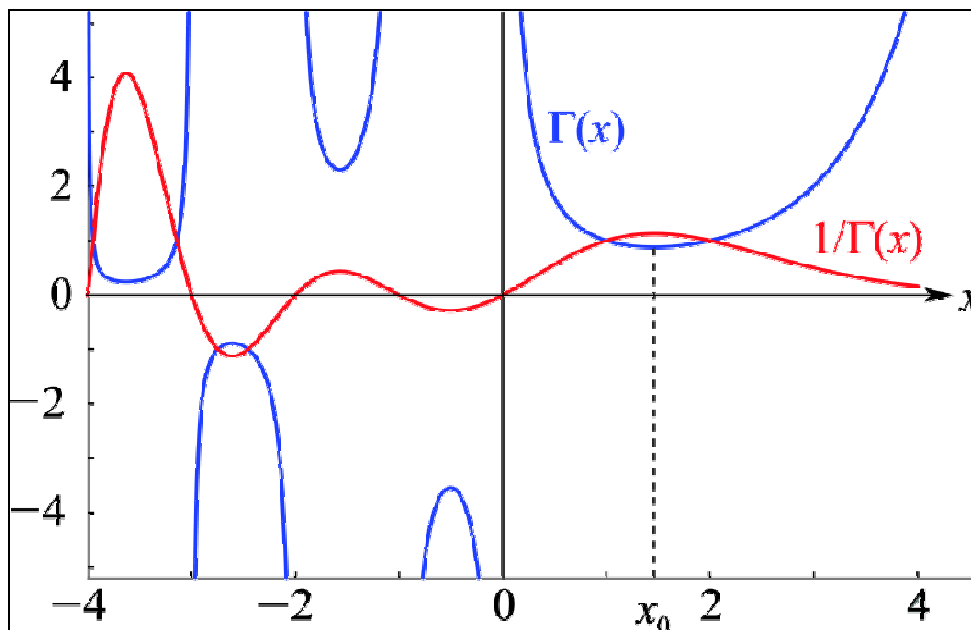
Деф.2 За $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ Ојлерова гама функција је дефинисана са:

$$\Gamma(z+1) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt & \text{ако } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \Gamma(z+1)/z & \text{ако } \operatorname{Re}(z) \leq 0, \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots \end{cases} \quad (\text{Ц.15})$$

односно дефинисана је у целој комплексној равни осим у нули и у тачкама које имају негативне целобројне вредности.



Слика Ц.1 Приказ Ојлерове гама функције $\Gamma(z)$ у 3Д простору



Слика Ц.2 Ојлерова гама функција $\Gamma(z)$ (пуна) и њена реципрочна вредност (испрекидана) линија на интервалу $[-4, 4]$, 2Д приказ

Теорема 1. Ојлерова гама функција задовољава следеће особине:

1) за $\text{Re}(z) > 0$ $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$, $\text{Re}(z) > 0$ је еквивалентан следећем изразу

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{z-1} dt, \quad (\text{Ц.16})$$

2) за $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ важи редукциона формула

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{Ц.17})$$

3) за $n \in \mathbb{N}$ $\Gamma(n) = (n-1)!$ (Ц.18)

4) за $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ важи следећа формула

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z) \quad (\text{Ц.19})$$

5) Гама функција се може приказати и у форми граничне вредности следећег израза:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (\text{Ц.20})$$

Претходна репрезентација је еквивалентна Ојлеровом бесконачном производу

$$\frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(1/n))^z}{1+(z/n)} \quad (\text{Ц.21})$$

- 6) (Вајерштрасова (Weierstrass) дефиниција) Нека је $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$
 онда Ојлерова гама функција се може дефинисати следећим изразом:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-z/k}, \quad (\text{Ц.22})$$

где је $\gamma = 0.57721566\dots$ Ојлерова константа.

- 7) Ојлерова гама функција је аналитичка за све $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$.

- 8) Ојлерова гама функција је увек различита од нуле.

- 9) (Теорема рефлексije) За све нецелобројне вредности $z \in \mathbb{C}$ важи

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \text{и} \quad \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}, \quad (\text{Ц.23})$$

- 10) За аргументе половичне целобројне $\Gamma(n/2)$, $n \in \mathbb{N}$ има специјалну форму облика:

$$\Gamma(n/2) = \frac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(n-1)/2}} \quad (\text{Ц.24})$$

где је са $n!!$ означен двоструки факторијел и он је дефинисан са:

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 & n > 0 \text{ непарни} \\ n \cdot (n-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2 & n > 0 \text{ парни} \\ 1 & n = 0, -1 \end{cases} \quad (\text{Ц.25})$$

Слично, имајући у виду дефиницију гама функције, могу се дефинисати и генерализовани биномијални коефицијенти као:

Деф. 1 Генерализовани биномијални коефицијенти $\binom{\alpha}{k}$ за $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$

су дефинисани са:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(-1)^{k-1} \Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (\text{Ц.26})$$

Комбинујући девету особину и четврту особину добијамо

$$\Gamma(-z)\Gamma(z+1) = \frac{\Gamma(1-z)}{-z}\Gamma(z)z = -\Gamma(1-z)\Gamma(z) = -\frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (\text{Ц.27})$$

или општије за $k \in \mathbb{N}_0$

$$(-1)^{k+1} \Gamma(z-k)\Gamma(k+1-z) = \Gamma(-z)\Gamma(z+1) \quad (\text{Ц.28})$$

Како је раније истакнуто гама функцију можемо приказати

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \quad (\text{Ц.29})$$

која има полове првог реда и може се представити следећом формулом:

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{(z+k)k!} [1 + O(z+k)], \quad z \rightarrow k, k \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{Ц.30})$$

што се добија заменом $z=1-n, n-1=k$. Коефицијент $(z+k)^{-1}$ у околини пола

$z=-k$ се назива резидуум (остатак) гама функције $\text{Res}\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$. Са

$f(z) = O(g(z))_{z \rightarrow a}$ је означена функција где за $\varepsilon > 0$ за које је

$$|z-a| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| < M, \text{ за неко } M < \infty.$$

Прилог Д- Кошијева формула

Рачун целог реда-(класични интегрални рачун)

Овде ће бити изложени основни појмови интегралног рачуна где ће се почети од класичне дефиниције извода функције. Лазаревић, Бучановић, (2012). Уводи се следећи оператор D (уместо d/dx). Ако је $h > 0$ добијамо дефиницију тзв. левог извода док се за случај $h < 0$ добија десни извод.

$$\frac{df(x)}{dx} = Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (\text{Д.1})$$

и за изводе вишег реда:

$$\begin{aligned} D^2 f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D^1 f(x) - D^1 f(x-h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{Д.2})$$

⋮

Односно може се доказати математичком индукцијом да је

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh)}{h^n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{Д.3})$$

где је биномијални коефицијент $\binom{n}{k}$ одређен следећим изразом:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (\text{Д.4})$$

Израз (Д.3) за случај $n \in \mathbb{R}^+$ води ка Грунвалд-Летниковој дефиницији за извод нецелобројног реда n , што ће се касније и детаљније разматрати.

Даље, се представља и уводи рекурзивна дефиниција другог оператора-неодређеног интеграла- на следећи начин:

$${}_c I_x^n f(x) = \begin{cases} \int_c^x f(x) dx, & \text{ако } n=1 \\ \int_c^x {}_c I_x^{n-1} f(x) dx, & \text{ако } n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \end{cases} \quad (\text{Д.5})$$

Познато је да интеграција и диференцирање представљају инверзне операције пошто важи:

$$D^n {}_c I_x^n f(x) = f(x) \quad (\text{Д.6})$$

што омогућава да дефинишемо изводе функција на следећи начин:

$${}_c D_x^n f(x) \triangleq {}_c I_x^{-n} f(x), \quad n \in \mathbb{Z}^- \quad (\text{Д.7})$$

За оператор D^n који је дефинисан овде за природне бројеве n потребно је дефинисати и

$$D^0 f(x) \triangleq f(x) \quad (\text{Д.8})$$

Уочава се да редослед примене оператора је битан, *Samko et al. (1993)*. У ствари, оператор D јесте лева инверзија оператора I , као што је показано, али није њена десна инверзија, пошто

$$\begin{aligned} {}_c I_x^1 D^1 f(x) &= f(x) - (x-c)^0 f(c) \\ {}_c I_x^2 D^2 f(x) &= f(x) - (x-c)^0 f(c) - (x-c) Df(c) \\ &\vdots \\ {}_c I_x^n D^n f(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-c)^i}{i!} D^i f(c) \end{aligned} \quad (\text{Д.9})$$

Ово представља основу за закон експонената оператора D^n , који гласи:

$${}_c D_x^{-n} {}_c D_x^n f(x) = \begin{cases} f(x), & n \in \mathbb{Z}_0^- \\ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-c)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} D^{n-k-1} f(c), & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{Д.10})$$

На основу последице израза (Д.6) добија се:

$$\begin{aligned} {}_c D_x^m {}_c D_x^n f(x) &= {}_c D_x^{m+n} f(x), \\ n, m \in \mathbb{N}_0 \vee n, m \in \mathbb{Z}_0^- \vee (m \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \in \mathbb{Z}^-) \end{aligned} \quad (\text{Д.11})$$

Разматрају се следећи примери функција у циљу илустрације претходних особина оператора са идејом генерализације истих.

$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad a \neq 0 \quad (\text{Д.12})$$

онда је:

$$\begin{aligned} Df(x) &= ax^{a-1}, \\ D^2 f(x) &= a(a-1)x^{a-2} \\ D^3 f(x) &= a(a-1)(a-2)x^{a-3} \end{aligned} \quad (\text{Д.13})$$

где се математичком индукцијом може доказати да је у општем случају (Д.14)

$$D^n f(x) = a(a-1)(a-2)\dots[a-(n-1)]x^{a-n} = x^{a-n} \prod_{i=0}^{n-1} (a-i), \quad n \in \mathbb{N}$$

Осим када је $a-n$ негативни број и када је $D^n f(x) = 0$.

Користећи израз за гама функцију $\Gamma(\cdot)$ претходни израз се може приказати као:

$$\begin{aligned} D^n f(x) &= x^{a-n} \prod_{i=0}^{n-1} (a-i) = (-1)^n x^{a-n} \prod_{i=0}^{n-1} (-a+i) = \\ &= (-1)^n x^{a-n} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)} (-1)^n = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)} x^{a-n} \end{aligned} \quad (\text{Д.15})$$

На сличан начин се добија и формула у случају интеграције $a \neq -1$:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(\xi) d\xi &\equiv \int f(x) dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \\ \int \int f(x) dx dx &= \frac{1}{(a+1)(a+2)} x^{a+2} \\ \int \int \int f(x) dx dx dx &= \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} x^{a+3} \end{aligned} \quad (\text{Д.16})$$

Односно интеграл у општем случају је одређен следећим изразом:

$$D^n f(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{-n} (a+i)} x^{a-n}, \quad n \in \mathbb{Z}^- \quad \text{под условом} \quad (a \in \mathbb{Z}^- \wedge a-n \in \mathbb{N}_0) \quad (\text{Д.17})$$

На сличан начин и овде се за претходни израз може увести гама функција тј.

$$\begin{aligned}
D^n f(x) &= x^{a-n} \frac{1}{\prod_{i=1}^{-n} (a+i)} = x^{a-n} \frac{1}{\prod_{i=0}^{-n-1} (a+i+1)} = x^{a-n} \frac{1}{\frac{\Gamma(a+1-n)}{\Gamma(a+1)}} = \\
&= \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)} x^{a-n}
\end{aligned} \tag{Д.18}$$

Овај израз се може генерализовати и за случај када извод није целобројног реда већ нецелобројног реда тј.

$${}_0D_x^\nu f(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\nu+1)} x^{a-\nu}, \quad \nu \in \mathbb{R} \tag{Д.19}$$

Под условом да важи $a - \nu \notin \mathbb{Z}^- \wedge a \in \mathbb{Z}^-$ јер тиме се обезбеђује дефинисаност гама функције Γ .

Рачун нецелобројног реда према дефиницији Риман-Лиувила

Овде се даје генерализација оператора D нецелобројног реда према Риман-Лиувиловој дефиницији. Показује се да се може добити претходни генерализовани оператор генерализацијом Кошијеве формуле познате из класичног интегралног рачуна.

Први начин: До Кошијеве формуле може се доћи на основу следећих разматрања. Нека су почетни услови за разматрану функцију једнаки нула. Ако се дефинише $F(s)$ као Лапласова трансформација функције $f(t)$, $F(s) = L(f(t))$, онда $(1/s^n)F(s)$ представља у s -домену лик n -струког интеграла функције $f(t)$. Такође, размотримо примитивну функцију функције $f(t)$, тј.

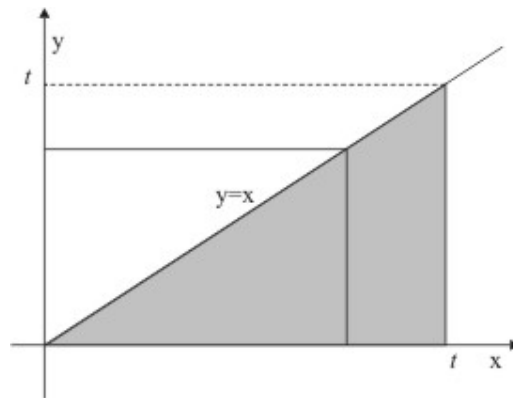
$$D^{-1} f(t) = \int_0^t f(x) dx \tag{Д.20}$$

Ако се поново примени претходни оператор добија се:

$$D^{-2} f(t) = \int_0^t \int_0^x f(y) dy dx \tag{Д.21}$$

Претходни израз се може разматрати као двоструки интеграл, види слику (Д-1) где је приказана $x - y$ равна где се врши интеграција. Заменом редоследа интегралања следи:

$$D^{-2} f(t) = \int_0^t \int_y^t f(y) dx dy \quad (Д.22)$$



Слика Д-1 $x - y$ равна интеграције

Како је $f(y)$ је константа у односу на x , може се одредити унутрашњи интеграл који је сада $(t - y)f(y)$

$$D^{-2} f(t) = \int_0^t (t - y) f(y) dy \quad (Д.23)$$

На сличан начин добија се:

$$D^{-3} f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t - y)^2 f(y) dy \quad (Д.24)$$

Односно, у општем случају следи:

$$D^{-n} f(t) = \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_n f(y) \underbrace{dy \dots dy}_n = \int_0^t \frac{f(y)(t - y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \quad (Д.25)$$

Последњи израз се може схватити као тежински једноструки интеграл са одговарајућом тежинском функцијом и познат је као Кошијева формула за поновљени интеграл, тј. n -струки интеграл. Претходни израз се може генерализовати ако се узме да је $n \in R^+$ тако да се добија израз који одговара Риман-Лиувиловој дефиницији за интеграл нецелобројног реда n .

$$D^{-n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(y)(t-y)^{n-1} dy \quad (\text{Д.26})$$

Други начин: Може се добити исти резултат ако се одреди инверзна Лапласова трансформација $1/s^n$, $n \in R^+$, тј:

$$L^{-1}(1/s^n) = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \quad (\text{Д.27})$$

Према томе, $(1/s^n)F(s)$ је у временском домену дат са конволуцијским производом са:

$$D^{-n} f(t) = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} * f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(y)(t-y)^{n-1} dy \quad (\text{Д.28})$$

Теорема (Кошијева формула) Неодређени интегрални су дати са:

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{Д.29})$$

Доказ: Доказ се спроводи применом математичке индукције. Прво је потребно уочити да се ${}_c D_x^{-n} f(x)$ може приказати и у следећем облику:

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \int_c^x \int_c^{x_1} \int_c^{x_2} \dots \int_c^{x_{n-1}} f(t) dt \dots dx_3 dx_2 dx_1, \quad (\text{Д.30})$$

Дирихле је показао да важи:

$$\int_c^x \int_c^{x_1} f(x_1, t) dt dx_1 = \int_c^x \int_t^x f(x_1, t) dx_1 dt, \quad (\text{Д.31})$$

Посебно, ако је f функција само t ,

$$\int_c^x \int_c^{x_1} f(t) dt dx_1 = \int_c^x \int_t^x f(t) dx_1 dt = \int_c^x f(t) \int_t^x dx_1 dt = \int_c^x f(t)(x-t) dt \quad (\text{Д.32})$$

Примењујући исту процедуру следи:

$$\begin{aligned}
\int_c^x \int_c^{x_1} (x_1 - t) f(t) dx_1 dt &= \int_c^x \int_c^{x_1} \int_c^{x_2} f(t) dt dx_2 dx_1 = \\
&= \int_c^x \int_c^x (x_1 - t) f(t) dx_1 dt = \int_c^x f(t) \frac{(x-t)^2}{2} dt
\end{aligned} \tag{Д.33}$$

Закључује се да претходне потврђују важност Кошијеве формуле, онда је у важности применом математичке индукције за $n-1$ добија се да важи и за n као што следи:

$$\begin{aligned}
\int_c^x \int_c^{x_1} \frac{(x_1 - t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt dx_1 &= \int_c^x \int_t^x \frac{(x_1 - t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dx_1 dt = \\
&= \int_c^x f(t) \int_t^x \frac{(x_1 - t)^{n-1}}{(n-1)!} dx_1 dt = \int_c^x f(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt
\end{aligned} \tag{Д.34}$$

чиме је доказ завршен. Имајући у виду чињеницу да је $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, Кошијева формула се може приказати у следећем облику:

$${}_c D_x^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \tag{Д.35}$$

Биографија

Име и презиме: Љубиша Бучановић

Датум рођења: 25.05.1958.

Место рођења: Бор, Србија

1964.-1972.: Основна школа у Бору

1972.-1976.: Гимназија "Бора Станковић", Бор

1976.-1982.: Технички Факултет Бор, Универзитет у Београду,

Школовање:

1996.-2000.: Магистарске студије на Технолошко Металуршком факултету Београд, Универзитета у Београду

Кретање у послу:

1982-1989, послови руководиоца сектора одржавања за транспорт гасова.

1989 - 1994. послови руководиоца одржавања РЈ Енергетика, ТИР Топионица.

1994-2003. послови руководиоца Фабрике кисеоника РТБ ТИР Бор.

2003-2006. послови техничког руководиоца одржавања РТБ ТИР Топионице .

2006-2009. послови руководиоца Фабрике кисоника РТБ ТИР

2009. управник Фабрике техничких гасова Мессер Техногас АД.

Референце:

- Lj.Bučanović,M.Lazarević,S.Batalov,Fractional PID Controllers Tuned by Genetic Algorithms for Expansion Turbine in the Cryogenic Air Separation Process, *Chemical Industry*,ISSN2217-7426, Vol. 68,(5),519-528,2014.
- M.P.Lazarević,Lj. Bučanović, Control algorithms of PI D alphabeta type in process control systems:new results, *2nd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2009)*,Palić (Subotica), Serbia, 1-5 June 2009,A-01:1-15.
- M.P.Lazarević,Lj. Bučanović,A.Spasić, $PI^{\alpha}D^{\beta}$ feedback type control of expansion turbine in the air production cryogenic liquid, *CHISA2010,August,Prague, Czech Republic,2010*.
- M. Lazarević, Lj.,Bučanović, Furher results on PIalphaDbeta type control of expansion turbine in the air production cryogenic liquid, *Proceedings IConSSM2011/The 3rd International Conference of Serbian Society of Mechanics*,p.122-136, 2011,ISSN:978-86-909973-3-6.

Прилог 1.

1 Изјава о ауторству

Потписани-а _____ **мр Љубиша Бучановић** _____

број индекса _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Прилог математичком моделирању и динамичкој анализи једног мехатроничког

система управљања

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 23.11.2015



Прилог 2.

2 Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора мр Љубиша Бучановић

Број индекса _____

Студијски програм _____

Наслов рада Прилог математичком моделирању и динамичкој анализи једног мехатроничког система управљања

Ментор проф. др Михаило Лазаревић

Потписани/а мр Љубиша Бучановић

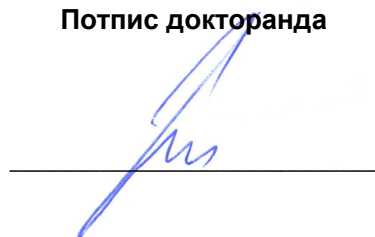
Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 23.11.2015



Прилог 3.

3 Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Прилог математичком моделирању и динамичкој анализи једног мехатроничког система управљања

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, 23.11.2015

Потпис докторанда

