УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Александра М. Делић

ДИФУЗИОНО-ТАЛАСНА ЈЕДНАЧИНА РАЗЛОМЉЕНОГ РЕДА СА КОНЦЕНТРИСАНИМ КАПАЦИТЕТОМ И ЊЕНА АПРОКСИМАЦИЈА МЕТОДОМ КОНАЧНИХ РАЗЛИКА

докторска дисертација

Београд , 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Aleksandra M. Delić

FRACTIONAL DIFFUSION-WAVE EQUATION WITH CONCENTRATED CAPACITY AND ITS FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION

doctoral dissertation

Belgrade , 2016

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Бошко Јовановић,
редовни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Бошко Јовановић,
редовни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Градимир Миловановић,
академик,
Математички институт САНУ

др Милан Дражић,
ванредни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Захвалност

Желим да се захвалим свом ментору, професору др Бошку Јовановићу, на указаном поверењу, посвећености и несебично пренетом знању током израде ове дисертације.

Такође, захваљујем се члановима комисије академику Градимиру Миловановићу и професору др Милану Дражићу на корисним саветима и пруженој подршци током докторских студија.

Велику захвалност дугујем својој продици, Миши и пријатељима на подршци и разумевању.

Београд, 2016.
Александра Делић

ДИФУЗИОНО-ТАЛАСНА ЈЕДНАЧИНА РАЗЛОМЉЕНОГ РЕДА СА КОНЦЕНТРИСАНИМ КАПАЦИТЕТОМ И ЊЕНА АПРОКСИМАЦИЈА МЕТОДОМ КОНАЧНИХ РАЗЛИКА

Резиме

Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда по временској променљивој добија се из класичне дифузионе или таласне једначине заменом првог, односно другог извода по временској променљивој, изводом разломљеног реда α, где је $0 < \alpha \leq 2$. Посебно, у зависности од вредности параметра α, разликујемо субдифузију ($0 < \alpha < 1$), нормалну дифузију ($\alpha = 1$), супердифузију ($1 < \alpha < 2$) и балистичко кретање ($\alpha = 2$). Изводи разломљеног реда су нелокални оператори, што отежава конструисање ефикасне нумеричке методе.

Предмет ове докторске дисертације је дифузионо-таласна једначина разломљеног реда по временској променљивој са коефицијентом који садржи сингуларну дистрибуцију, пре свега Диракову дистрибуцију, и апроксимација овог проблема методом коначних разлика. Почетно-гранични проблеми овог типа обично се називају проблемима с интерфејсом. Изводи решења оваквих проблема имају прекиде на интерфејсу, тј. на носачу Диракове дистрибуције, па је тешко утврдити конвергенцију диференцијских схема користећи се класичним Тејлоровим развојем.

У раду је доказана егзистенција генералисаних решења овог почетно-граничног проблема. Испитивана је стабилност и изведена је оцена брзине конвергенције одговарајћих диференцијских схема у зависности од глаткости улазних података. Теоријски резултати су потврђени нумеричким примерима.

Кључне речи: изводи разломљеног реда, субдифузија, супердифузија, проблеми с интерфејсом, простори Собољева, слаба решења, априорна оцена, коначне разлике, брзина конвергенције.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Нумеричка математика

УДК број: [517.962.8:519.63]:517.958(043.3)

FRACTIONAL DIFFUSION-WAVE EQUATION WITH CONCENTRATED CAPACITY AND ITS FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION

Abstract

The time fractional diffusion-wave equation can be obtained from the classical diffusion or wave equation by replacing the first or second order time derivative, respectively, by a fractional derivative of order $0 < \alpha \leq 2$. In particular, depending on the value of the parameter α, we distinguish subdiffusion ($0 < \alpha < 1$), normal diffusion ($\alpha = 1$), superdiffusion ($1 < \alpha < 2$) and ballistic motion ($\alpha = 2$). Fractional derivatives are non-local operators, which makes it difficult to construct efficient numerical method.

The subject of this dissertation is the time fractional diffusion-wave equation with coefficient which contains a singular distribution, primarily Dirac distribution, and its approximation by finite differences. Initial-boundary value problems of this type are usually called interface problems. Solutions of such problems have discontinuities or non-smoothness across the interface, i.e. on support of Dirac distribution, making it difficult to establish convergence of the finite difference schemes using the classical Taylor's expansion.

The existence of generalized solutions of this initial-boundary value problem has been proved. Some finite difference schemes approximating the problem are proposed and their stability and estimates for the rate of convergence compatible with the smoothness of the solution are obtained. The theoretical results are confirmed by numerical examples.

Key words: fractional derivatives, subdiffusion, superdiffusion, interface problems, Sobolev spaces, weak solutions, a priori estimate, finite difference, rate of convergance

Scientific field: Mathematics

Scientific subfield: Numerical Mathematics

UDK number: [517.962.8:519.63]:517.958(043.3)

Садржај

1 Увод

У динамици флуида, нормална дифузија се може описати првим и другим Фиковим законом. За стационарно[1] стање дифузије, први Фиков закон гласи да је флукс[2] J пропорционалан градијенту концентрације u

$$J = -k\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.1}$$

где је $k > 0$ коефицијент дифузије, а x просторна координата. У нормалном систему, честице се не могу створити или уништити, што значи да промена концентрације честица у некој области мора бити једнака разлици броја честица које су ушле и изашле из те области. То се може математички записати једначином одржања

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}, \tag{1.2}$$

где је t временска промењлива. Заменом једнакости (1.1) у (1.2) добија се други Фиков закон

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1.3}$$

који представља стандардну једначину дифузије. Ова линеарна парцијална диференцијална једначина, осим кретања честица, описује и пренос топлоте и пренос енергије. У случају преноса топлоте, једнакост (1.1) се назива Фуријеовим законом, а једнакост (1.3) једначином простирања топлоте. Функција u представља температуру, k коефицијент топлотне проводљивост и J топлотни флукс, тј. количину топлоте која прође кроз јединицу површине, нормалне на правац дуж кога се температура мења, у јединици времена.

Једноставности ради, претпоставимо да је k константа. Ако је задат почетни услов

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

користећи Фуријеову трансформацију или методу раздвајања промењљи-

[1] Свака честица флуида која се нађе у некој струјној линији наставља да се креће у правцу струјнице као и претходна честица.

[2] Број честица који пролазе кроз јединицу површине, нормалне на правац тока, у јединици времена.

вих, лако можемо добити јединствено решење једначине (1.3):

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y)\varphi(y,t)dy, \tag{1.4}$$

где је

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}. \tag{1.5}$$

Функција $\varphi(x,t)$ представља фундаментално решење (или Гринову функцију) јер одговара почетном услову $\psi(x) = \delta(x)$, где је $\delta(x)$ Диракова дистрибуција.

У теорији вероватноће, функција $\varphi(x,t)$ представља функцију густине нормалне расподеле (или Гаусове расподеле)

$$\varphi(x,t) = \varphi(x;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

па је фундаментално решење (1.5) функција густине расподеле која одређује вероватноћу да се усамљена честица налази на позицији x у тренутку t, док (1.4) описује кретање система (групе) честица.

Случајну величину X која има нормалну расподелу карактеришу две вредности:

- математичко очекивање: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x;\sigma^2)dx = 0$ и
- дисперзија: $DX = E(X-EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2\varphi(x;\sigma^2)dx = \sigma^2 = 2kt$.

Како је $EX = 0$ следи да честица у просеку остаје на месту на ком је и била у тренутку $t = 0$. Док на основу дисперзије закључујемо да је померање честице пропорционално константи дифузије и расте линеарно са временом t.

Међутим, у турбулентним системима, који на пример садрже вирове који могу да заробе честице на неко дуже време или неке токове који могу да помере честицу за неко веће растојање, Фиков закон не важи. У таквим системима дифузија је спорија или бржа, односно карактерише се са

$$DX \sim k_\alpha t^\alpha.$$

Дифузију код које је експонент $\alpha \neq 1$ називамо аномалном дифузијом. Осим тога имамо и поделу на: субдифузију за $0 < \alpha < 1$, нормалну дифузију за $\alpha = 1$ и супердифузију за $\alpha > 1$. Простирање топлоте у системима који не задовољавају Фуријеов закон је анализирано у радовима [9, 34].

Аномална дифузија се моделује парцијалним диференцијалним једначинама у којима се јављају изводи разломљеног реда. Дифузионо-таласну једначину са изводом разломљеног реда α добијамо када у једначини простирања топлоте (тј. једначини дифузије) први извод по временској промењљивој заменимо изводом разломљеног реда $0 < \alpha \leq 2$ [41, 53]. Ова једначина се може добити и као резултат проблема непрекидног случајног хода [16, 17, 33, 44]. Модели овог типа се последњих година интензивно изучавају, аналитички и нумерички [2, 12, 19, 37, 49, 54, 55].

У дефиницији извода разломљеног реда се појављује интеграл на основу чега закључујемо да су ово нелокални оператори који могу описати меморијски ефекат различитих материјала. Са друге стране управо та нелокалност отежава конструисање ефикасних метода за њихово апроксимирање, јер проблем постаје глобалан. Решење у посматраном тренутку зависи од понашања функције у читавом претходном временском интервалу.

Ако је средина у којој се јавља пренос топлоте нехомогена, тј. састоји се од два или више различитих материјала, тада диференцијална једначина која описује овај процес може садржати коефицијенте који имају прекиде дуж хиперповрши коју називамо интерфејсом [14, 27, 57]. У општем случају, једначина провођења топлоте има облик

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$

где је ρ густина материјала, c коефицијент топлотног капацитета (специфична топлота)[3] и $f(x,t)$ интензитет топлотног извора у тачки у x у временском тренутку t.

Посматрајмо случај када имамо концентрисани топлотни капацитет величине $C > 0$ у некој унутрашњој тачки ξ интервала $(0, l)$. То значи да се укупан капацитет може представити као сума континуално промењљивог члана $c\rho$ и концентрисаног члана $C\delta(x - \xi)$, где је делта Диракова дистрибуција (види одељак 2.4). Дакле, у овом случају посматрамо

[3]Количина топлоте коју је потребно довести неком телу да би му се температура повисила за $1°C$.

проблем
$$[c\rho + C\delta(x-\xi)]\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t). \tag{1.6}$$
У тачки $x = \xi$ мора бити испуњен услов непрекидности температуре:
$$[u]_{x=\xi} = u(\xi+0,t) - u(\xi-0,t) = 0.$$
Овај услов називамо првим условом конјугације. Интегралећи једначину (1.6) по x у границама од $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$, за неко $\varepsilon > 0$, добијамо
$$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx + C\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} = k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} + \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f(x,t)dx.$$
Ако пустимо да $\varepsilon \to 0$, уз претпоставку да је топлотни извор f непрекидног интензитета, као и $\partial u/\partial t$, добијамо
$$C\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} = \left[k\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi}.$$
Овај услов називамо другим условом конјугације.

Параболичке и хиперболичке једначине које моделују проблеме с концентрисаним факторима (топлотни капацитет, маса итд.), њихове апроксимације коначним разликама и оцене брзине конвергенције предложених диференцијских схема се могу пронаћи у радовима [3, 14, 28, 29, 30].

За диференцијску апроксимацију једначине субдифузије, у радовима [38, 55], доказана је конвергенција реда $O(\tau^{2-\alpha} + h^2)$, где је τ корак за временску, а h корак за просторну промењљиву, у случају када је решење једначине два пута непрекидно диференцијабилно по t и четири пута непрекидно диференцијабилно по x. У раду [55] је предложена и диференцијска схема за једначину супердифузије. Доказан је ред конвергенције $O(\tau^{3-\alpha} + h^2)$ уз услов да је решење три пута непрекидно диференцијабилно по временској промењљивој и четири пута непрекидно диференцијабилно по просторној промењљивој. Поређење до сада предлаганих схема може се видети у раду [21].

Дисертација је подељена на седам поглавља, рачунајући и ову у којој је дата мотивација и представљена структура.

Друго поглавље садржи основне појмове и тврђења која се користе у раду. Уводе се простори Собољева који представљају основно окружење за решавање парцијалних диференцијалних једначина.

У трећем поглављу се уводи појам интеграла и извода разломљеног реда. У литератури се појављују многе дефиниције извода разломљеног реда: Риман-Лиувилова, Капутова, Грунвалд-Летниковљева, итд. У овом раду се користе Риман-Лиувилов и Капутов извод разломљеног реда.

Четврто поглавље се бави егзистенцијом решења дифузионо-таласне једначине. Уведени су простори функција са изводима разломљеног реда и њихова веза са просторима Собољева.

Пето поглавље се бави једначином субдифузије са концентрисаним капацитетом. Доказана је егзистенција решења, предложена апроксимација и изведена оцена брзине конвергенције. Резултати овог поглавља објављени су у радовима [5, 6, 8, 31, 25]. Шесто поглавље се бави једначином супердифузије са концентрисаним капацитетом. Део резултата из овог поглавља је прихваћен за штампу [4], а део је на рецензији [7]. У оба случаја су дати нумерички експерименти који потврђују теоријске резултате.

Закључак је дат у седмом поглављу.

2 Математички апарат

У овом поглављу је дат кратак преглед резултата из теорије функционалне анализе и парцијалних диференцијалних једначина који ће бити коришћени у даљем раду.

2.1 Теорија оператора

Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ два нормирана векторска простора. Линеаран оператор A је линеарна трансформација $A : \mathcal{D}(A) \to Y$, где је потпростор $\mathcal{D}(A) \subset X$ домен оператора A. Потпростор $\mathcal{R}(A) := \{y = A(x) |\, x \in \mathcal{D}(A)\} \subset Y$ називамо сликом или кодоменом оператора A.

Линеаран оператор A је ограничен ако постоји позитиван број M такав да је

$$\|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \tag{2.1}$$

за свако $x \in \mathcal{D}(A)$. У супротном, кажемо да је оператор неограничен.

Норма ограниченог оператора A је најмањи број M за који важи неједнакост (2.1), тј.

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ \|x\|_X \neq 0}} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ \|x\|_X = 1}} \|A(x)\|_Y.$$

Линеаран оператор је ограничен ако и само ако је непрекидан.

За два нормирана векторска простора X и Y кажемо да су изометрички изоморфна, и пишемо $X \cong Y$, ако постоји линеарна бијекција $L : X \to Y$ за коју је $\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$.

За две норме $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на векторском простору X кажемо да су еквивалентне и пишемо $\|\cdot\|_1 \asymp \|\cdot\|_2$ ако постоје константе $C_1, C_2 > 0$ такве да је

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Ако је $Y = \mathbb{C}$, тада оператор $A : X \to \mathbb{C}$ називамо функционалом. Специјално, ако је $\mathcal{R}(A) \subset \mathbb{R}$ кажемо да је A реалан функционал. Са X' означавамо простор свих непрекидних линеарних функционала дефинисаних на нормираном векторском простору X и називамо га дуалним простором простора X. X' је нормиран векторски простор у коме је линеарна структура дефинисана са

$$(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x), \quad f,g\in X',\, x\in X,\, \alpha,\beta\in\mathbb{C},$$

и норма са

$$\|f\|_{X'}:=\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{|f(u)|}{\|u\|_X}.$$

Нека је A ограничен линеаран оператор из Хилбертовог простора H у H. Са $(\cdot,\cdot)$ означимо скаларни производ у H, а са $\|\cdot\|$ одговарајућу индуковану норму. Величину (Ax,x) називамо енергијом оператора A. Оператор A називамо ненегативним ако је $(Ax,x)\geq 0$, позитивним ако је $(Ax,x)>0$ за $x\neq 0$ и позитивно дефинитним ако је $(Ax,x)\geq\delta\|x\|^2$, $\delta=$ const. >0.
Нека су A и A^* линеарни оператори који пресликавају H у H. Ако је $(Ax,y)=(x,A^*y)$ за свако $x,y\in H$ тада оператор A^* називамо конјугованим оператором оператора A. Ако је $A=A^*$ кажемо да је оператор A самоконјугован.

Нека је оператор B такав да је $B^2=A$, тада B називамо квадратним кореном из оператора А и пишемо $B=A^{1/2}$. Ако је оператор A ненегативан и самоконјугован може се показати да тада постоји јединствен квадратни корен $A^{1/2}$ који је такође ненегативан и самоконјугован.

Ако је A позитиван самоконјугован оператор, тада величина $(x,y)_A:=(Ax,y)$ задовољава аксиоме скаларног производа, а $\|x\|_A=(Ax,x)^{1/2}$ аксиоме норме. Ако поред тога постоји и A^{-1}, тада је $A^{-1}=(A^{-1})^*$, па се може дефинисати „негативна норма”

$$\|x\|_{A^{-1}}=(A^{-1}x,x)^{\frac{1}{2}}.$$

Може се показати да је

$$\|x\|_{A^{-1}}=\sup_{y\neq 0}\frac{(x,y)}{\|y\|_A}.$$

Инверзни оператор $A^{-1}:\mathcal{R}(A)\to\mathcal{D}(A)$ линеарног оператора A постоји и линеаран је ако и само ако је $A(x)=0$ само за $x=0$.

Теорема 2.1. *[22] Нека је $A:\mathcal{D}(A)\to\mathcal{R}(A)$ линеаран оператор. Да би инверзни оператор A^{-1} постојао и био ограничен потребно је и довољно да* *постоји константа $C > 0$ таква да је за свако $x \in \mathcal{D}(A) : \|Ax\| \geq C\|x\|$. При томе је $\|A^{-1}\| \leq 1/C$.*

Нека за нормиране векторске просторе X и Y важи релација $X \subset Y$. Дефинишемо идентички оператор $I : X \to Y$, такав да је $Ix = x$ за свако $x \in X$. Ако је овај оператор непрекидан, онда ћемо такво пресликавање називати потапањем простора X у простор Y и писаћемо $X \hookrightarrow Y$. Из непрекидности оператора потапања следи да постоји консатнта C таква да је

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

2.2 Реална интерполација Банахових простора

Нека су дата два Банахова простора X_0 и X_1, оба потопљена у Банахов простор X, и нека је $X_0 \cap X_1 \neq \{0\}$. Два оваква простора називамо интерполационим паром $\{X_0, X_1\}$. Реална интерполација представља процес помоћу којег конструишемо њихов „међупростор”. Пресек $X_0 \cap X_1$ и алгебарска сума ових простора $X_0 + X_1 = \{x = x_1 + x_2 : x_1 \in X_1,\, x_2 \in X_2\}$ су Банахови простори снабдевени нормама

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} := \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\},$$

$$\|x\|_{X_0 + X_1} := \inf_{\substack{x = x_0 + x_1 \\ x_i \in X_i}} \{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\}.$$

Очигледно, важи да је $X_0 \cap X_1 \subset X_i \subset X_0 + X_1$, $i = 0, 1$.

Функционал

$$K(t; x) = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1 \\ x_i \in X_i}} \{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}\},$$

за свако фиксирано $t > 0$, дефинише норму у простору $X_0 + X_1$ која је еквивалентна са нормом $\|\cdot\|_{X_0 + X_1}$.

Дефиниција 2.1. *Нека је $0 < \theta < 1$ и $1 \leq q \leq \infty$. Дефинишемо простор $[X_0, X_1]_{\theta,q}$ елемената $x \in X_0 + X_1$ за које је вредност $\|x\|_{[X_0,X_1]_{\theta,q}}$ коначна, где је*

$$\|x\|_{[X_0,X_1]_{\theta,q}} := \left\{ \int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t; x)\right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \qquad \text{ако је} \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|x\|_{[X_0,X_1]_{\theta,\infty}} := \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t; x) \qquad \text{ако је} \quad q = \infty.$$

Лема 2.2. *[56] Простор $[X_0, X_1]_{\theta,q}$ је Банахов простор у односу на норму из дефиниције 2.1. Простор $X_0 \cap X_1$ је густ у $[X_0, X_1]_{\theta,q}$.*

Лема 2.3. *[56, 27] Нека је $0 < \theta < 1$ и $1 \leq p \leq q \leq \infty$, тада је*

$$[X_0, X_1]_{\theta,1} \subset [X_0, X_1]_{\theta,p} \subset [X_0, X_1]_{\theta,q} \subset [X_0, X_1]_{\theta,\infty},$$

$$[X_0, X_1]_{\theta,q} = [X_1, X_0]_{1-\theta,q}, \quad [X, X]_{\theta,q} = X.$$

Теорема 2.4. *Нека је $\{X_0, X_1\}$ интерполациони пар који се састоји од два Хилбертова простора и нека је $0 < \theta < 1$. Тада је $[X_0, X_1]_{\theta,2}$ такође Хилбертов простор.*

За више детаља на тему реалне интерполације читаоца упућујемо на [27, 39, 56].

2.3 Функционални простори

Нека је Ω отворен скуп у $\mathbb{R}^n$. У овом раду, користићемо функције облика $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Сваку n-торку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ненегативних целих бројева називаћемо мултииндексом. Парцијалне изводе означавамо са

$$\partial^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где је $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Са $C^k(\Omega)$ означавамо скуп свих непрекидних функција f, дефинисаних на Ω, таквих да је $\partial^\alpha f$ непрекидна функција на Ω за сваки мултииндекс $|\alpha| \leq k$. $C^0(\Omega)$ означавамо са $C(\Omega)$. Ако је Ω ограничен отворен скуп, са $C^k(\overline{\Omega})$ означавамо скуп свих функција $f \in C^k(\Omega)$ за које се $\partial^\alpha f$ може непрекидно продужити са Ω на $\overline{\Omega}$, за сваки мултииндекс $|\alpha| \leq k$. Ово је Банахов простор снабдевен нормом

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|.$$

За $k \in \mathbb{N}$ и $0 < \lambda \leq 1$, са $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ означавамо скуп свих функција $f \in C^k(\overline{\Omega})$ за које

$$|f|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \Omega}} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda},$$

где је $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, има коначну вредност. $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ је Банахов простор снабдевен нормом

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + |f|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})}.$$

За функције $f \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda < 1$ кажемо да су Хелдер непрекидне са степеном λ. Ако је $\lambda = 1$ онда кажемо да је функција Липшиц непрекидна на $\overline{\Omega}$.

Носачем функције f, у ознаци $\operatorname{supp} f$, називамо затворење скупа тачака у којим је $f(x) \neq 0$. Са $C_0^k(\Omega)$ означавамо скуп свих функција $f \in C^k(\Omega)$ са компактним носачем у Ω. Дефинишемо

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C_0^k(\Omega).$$

Са $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ означавамо простор мерљивих функција таквих да је

$$\int_\Omega |f|^p dx < \infty, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Норма се дефинише са

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

За $p = \infty$ дефинишемо норму

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

За функцију кажемо да је локално интеграбилна на Ω ако је интеграбилна на свакој ограниченој подобласти области Ω. Простор локално интеграбилних функција означавамо са $L^p_{loc}(\Omega)$.

2.4 Дистрибуције

Дефиниција 2.2. *За низ функција $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ кажемо да конвергира ка функцији $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ако су испуњени следећи услови:*

(1) постоји компактан скуп $K \subset \mathbb{R}^n$ такав да је $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ за свако j;

(2) за сваки мултииндекс α, низ $\partial^\alpha \varphi_j$ униформно конвергира ка $\partial^\alpha \varphi$ на K кад $j \to \infty$.

Простор $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с овако дефинисаном конвергенцијом означавамо са $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, а елементе тог простора називамо тест или основним функцијама.

Линеаран функционал на $\mathcal{D}$ је линеарно пресликавање $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. Вредност линеарног функционала f на основној функцији $\varphi \in \mathcal{D}$ означавамо са $\langle f, \varphi \rangle$. Функционал f је непрекидан ако конвергенција $\varphi_j \to \varphi$, $j \to \infty$ у $\mathcal{D}$ имплицира конвергенцију $\langle f, \varphi_j \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$, $j \to \infty$ у $\mathbb{C}$.

Дефиниција 2.3. *Линеарне непрекидне функционале $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ називамо дистрибуцијама или генералисаним функцијама. Скуп дистрибуција означавамо са $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

За низ дистрибуција $f_j \in \mathcal{D}'$ кажемо да конвергира ка f и пишемо $f_j \to f$, $j \to \infty$, ако $\langle f_j, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$, $j \to \infty$ за свако $\varphi \in \mathcal{D}$. Може се доказати да је простор дистрибуција $\mathcal{D}'$ с овако уведеном конвергенцијом комплетан [58, 24].

Непосредно се проверава да свака функција $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ формулом

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

дефинише дистрибуцију (коју такође облежавамо са f). Дистрибуцију која је индукована неком локално интеграбилном функцијом називамо регуларном, у супротном, кажемо да је дистрибуција сингуларна.

Пример сингуларне дистрибуције је Диракова делта функција δ, која се дефинише са:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Диференцирање дистрибуција дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 2.4. *Нека је $f \in \mathcal{D}'$ и $\alpha \in \mathbb{N}^n \cup \{0\}$. Са $\partial^\alpha f$ означавамо функционал на $\mathcal{D}$, дефинисан на следећи начин:*

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Нека је $\{\partial^\alpha f(x)\}$ класичан извод функције $f(x)$. Ако функција $f(x) \in$

$C^m(\Omega)$, тада је $\partial^\alpha f(x) = \{\partial^\alpha f(x)\}$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leq m$. Ако је функција $f(x)$ реална функција једне променљиве која је непрекидно диференцијабилна на $\mathbb{R}$ осим у тачкама x_j, $j = 1, 2, \ldots$ у којима има изоловане прекиде прве врсте тада је

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_{j=1}^{\infty} [f]_{x_j} \delta(x - x_j), \tag{2.2}$$

где је $[f]_{x_j} = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$ скок функције у тачки x_j (види [24, 58]).

Нека су дате функције $f(x), g(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Њихова конволуција, у ознаци $f * g$, дефинише се на следећи начин:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy.$$

Може се дефинисати и конволуција две дистрибуције (види [24], поглавље 1.8). Напоменимо само да ако је $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, тада важи $f * \delta = \delta * f = f$. Лако се проверава да је $\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g$ за $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Означимо са $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ скуп свих функција $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ које опадају ка нули, заједно са свим својим изводима, брже од сваког степена функције $1/|x|$, када $|x| \to \infty$:

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,|\quad x^\beta \partial^\alpha f(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

За низ функција $\{f_j\} \in \mathcal{S}$ кажемо да конвергира ка функцији $f \in \mathcal{S}$ ако

$$\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \quad x^\beta \partial^\alpha f_j(x) \to x^\beta \partial^\alpha f(x), \quad j \to \infty,$$

униформно по $x \in \mathbb{R}^n$.

Простор тест функција $\mathcal{D}$ је прави подскуп од $\mathcal{S}$, јер на пример функција $e^{-|x|^2}$ припада $\mathcal{S}$, али не и $\mathcal{D}$.

Дефиниција 2.5. *Линеарне непрекидне функционале на скупу $\mathcal{S}$ називамо дистрибуцијама спорог раста, а њихов скуп означавамо са $\mathcal{S}'$. За низ дистрибуција $\{f_j\} \in \mathcal{S}'$ кажемо да конвергира ка $f \in \mathcal{S}'$ ако $\langle f_j, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ када $j \to \infty$ за свако $\varphi \in \mathcal{S}$.*

За функцију $f \in \mathcal{S}$ Фуријеова трансформација се дефинише са

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

где је $\xi \cdot x = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. При томе је $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}$. Фуријеова трансформација је непрекидна операција из $\mathcal{S}$ у $\mathcal{S}$.

Инверзна Фуријеова трансформација се дефинише на следећи начин:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\,](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Важи следећа веза

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[\psi(\xi)](-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[\psi(-\xi)](x).$$

Користећи Фуријеову трансформацију извода

$$\mathcal{F}[\partial^\alpha f](\xi) = (-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \tag{2.4}$$

видимо да диференцијалне једначине можемо пресликати у обичне алгебарске једначине.

Нека функција $f \in S(\mathbb{R})$ има носач садржан у $\{x \geq 0\}$. Тада је, за свако $\mu > 0$, и $e^{-\mu x} f(x) \in S(\mathbb{R})$. Следи

$$\mathcal{F}[e^{-\mu x} f(x)](\xi) = \int_0^\infty f(x) e^{-ix\xi} e^{-\mu x} dx = \mathcal{F}[f](\xi - i\mu).$$

Дакле, за $f \in S'$, $\operatorname{supp} f \in \{x \geq 0\}$ и $\mu > 0$ има смисла дефинисати $\mathcal{F}[f](\xi - i\mu)$ као $\mathcal{F}[e^{-\mu x} f(x)](\xi)$.

Лапласова трансформација се дефинише са

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f](s) := \mathcal{F}[f](-is), \quad s \in \mathbb{C}, \quad \Re s > 0, \tag{2.5}$$

где је $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp} f \in \{x \geq 0\}$ [47]. У случају када је $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ одатле добијамо

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx. \tag{2.6}$$

Стављајући у (2.5) $s = \mu + i\nu$, $\mu > 0$, и користећи инверзну Фуријеову трансформацију, добијамо

$$f(x) = e^{\mu x} \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{L}[f](\mu + i\,\cdot) \right](x),$$

односно, инверзна Лапласова трансформација се изражава формулом

$$[\mathcal{L}^{-1}\bar{f}](x) = e^{\mu x}\mathcal{F}^{-1}\left[\bar{f}(\mu + i\,\cdot)\right](x), \quad \mu > 0. \tag{2.7}$$

У случају када је $\bar{f}$ функција комплексне променљиве, аналитичка у полуравни $\Re s > 0$, одатле добијамо

$$f(x) = [\mathcal{L}^{-1}\bar{f}](x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} e^{sx}\bar{f}(s)ds. \tag{2.8}$$

Дефиниција 2.6. *[47] Нека је L деференцијални оператор са константним коефицијентима. Тада је фундаментално решење за оператор L дистрибуција $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ за коју је $Lg = \delta$.*

Значај фундаменталног решења лежи у следећој чињеници:

Теорема 2.5. *[58] Нека је $f \in \mathcal{D}'$ таква да конволуција $f * g$, где је g фундаментално решење за оператор L, постоји у $\mathcal{D}'$. Тада решење једначине*

$$Lu = f$$

постоји у $\mathcal{D}'$ и дато је формулом

$$u = f * g.$$

2.5 Билинеарни функционали на Хилбертовим просторима

Нека је V реалан Хилбертов простор са нормом $\|\cdot\|$ и нека је $a(\cdot,\cdot)$ функционал дефинисан на Декартовом производу $V \times V$ такав да је :

(1) билинеаран, тј. $a(u, v)$ је линеаран по u за фиксирано v и линеаран по v за фиксирано u.

(2) ограничен, тј. постоји позитиван реалан број C такав да важи следећа неједнакост

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \quad \forall\, u, v \in V,$$

(3) V-коерциван, тј. постоји позитиван реалан број c такав да важи

$$a(u, u) \geq c\|u\|^2, \quad \forall\, u \in V.$$

Билинеаран функционал се још назива и билинеарном формом.

Варијациона формулација граничних проблема за парцијалне диференцијалне једначине често има следећу форму: за дати ограничен функционал f на реалном Хилбертовом простору V и V-коерциван ограничен билинеаран функционал $a(\cdot,\cdot)$ на $V \times V$, наћи $u \in V$ тако да важи $a(u,v) = f(v)$, за свако $v \in V$.

Теорема 2.6. *(Лакс-Милграм) [27] Нека је f реалан ограничен линеаран функционал на реалном Хилбертовом простору V са нормом $\|\cdot\|$ и нека је $a(\cdot,\cdot)$ V-коерциван, ограничен, билинеаран функционал на $V \times V$. Тада постоји јединствен елемент $u \in V$ тако да важи:*

$$a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in V.$$

Осим тога важи и $\|u\| \leq 1/c \|f\|_{V'}$.

2.6 Простори Собољева

Дефиниција 2.7. *Нека је k ненегативан цео број и $1 \leq p \leq \infty$. Простор*

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) |\, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\},$$

где је ∂^α извод у смислу дистрибуција, назива се простором Собољева.

У просторима Собољева, за $1 \leq p < \infty$ норму дефинишемо са

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{j=0}^{k} |u|^p_{W_p^j(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

односно, за $p = \infty$,

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{j=0}^{k} |u|_{W_\infty^j(\Omega)},$$

где су полунорме $|u|^p_{W_p^j(\Omega)}$ и $|u|_{W_\infty^j(\Omega)}$ дефинисане са

$$|u|^p_{W_p^j(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{односно} \quad |u|_{W_\infty^j(\Omega)} := \max_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Преласком на нецелобројне индексе добијају се простори Собољева–

Слободецког.

Дефиниција 2.8. *[10] Нека је s позитиван реалан број, $s \notin \mathbb{N}$, $m = \lfloor s \rfloor$, где је $\lfloor s \rfloor$ највећи цео број мањи од s, и $1 \leq p < \infty$. Простор Собољева-Слободецког дефинише се на следећи начин*

$$W_p^s(\Omega) := \{u \in W_p^m(\Omega) : \|u\|_{W_p^s(\Omega)} < \infty\}$$

где је

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} := \left(\|u\|_{W_p^m(\Omega)}^p + |u|_{W_p^s(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$|u|_{W_p^s(\Omega)}^p := \left(\sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u|_{W_p^{s-m}(\Omega)}^p\right),$$

док је за $\sigma \in (0,1)$

$$|u|_{W_p^\sigma(\Omega)}^p := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{\sigma p+n}} dxdy\right)$$

где је n димензија простора.

Простор $W_p^s(\Omega)$, $s > 0$ је Банахов простор. За $p = 2$, $W_2^s(\Omega)$ је Хилбертов простор који још означавамо са $H^s(\Omega)$. У њему се скаларни производ дефинише са

$$(u,v)_{H^s(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq s} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx, \quad s \in \mathbb{N},$$

док је за $s \notin \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(u,v)_{H^s(\Omega)} := &\sum_{|\alpha| \leq \lfloor s \rfloor} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx \\ &+ \sum_{|\alpha| = \lfloor s \rfloor} \int_\Omega \int_\Omega \frac{(\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y))(\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y))}{|x-y|^{2\sigma+n}} \, dy \, dx\end{aligned}$$

где је $\sigma = s - \lfloor s \rfloor$ и n димензија простора.

Теорема 2.7. *[39] Простор $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ је густ у $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ за $1 \leq p < \infty$.*

Ако је Ω прави отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$ тада $\mathcal{D}(\Omega)$ није густ у $W_p^k(\Omega)$.

Дефиниција 2.9. *Затворење простора $\mathcal{D}(\Omega)$ у норми простора $W_p^k(\Omega)$ оз-*

начавамо са $\mathring{W}_p^k(\Omega)$.

Дефиниција 2.10. *[27] За* $s > 0$ *и* $1 < p < \infty$ *дефинишемо простор* $W_p^{-s}(\Omega)$ *који садржи све ограничене функционале на простору Собољева* $\mathring{W}_q^s(\Omega)$, *где је* $1/p + 1/q = 1$. *Овај простор је снабдевен нормом*

$$\|u\|_{W_p^{-s}(\Omega)} := \sup_{\varphi \in \mathring{W}_q^s(\Omega)} \frac{|\langle u, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W_q^s(\Omega)}}.$$

Дефиниција 2.11. *Нека је* Ω *ограничен отворен скуп и* $\mathbb{R}^n$. *Кажемо да је граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *Липшиц непрекидна ако за свако* $x \in \partial\Omega$ *постоји отворен скуп* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{O}$, *локално ортогонални координатни систем са координатама* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) =: (\zeta', \zeta_n)$ *и* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, *тако да важи*

$$\mathcal{O} = \{\zeta : -a_j < \zeta_j < a_j, \quad 1 \leq j \leq n\},$$

и постоји Липшиц непрекидна функција φ *дефинисана на скупу*

$$\mathcal{O}' = \{\zeta' \in \mathbb{R}^{n-1} : -a_j < \zeta_j < a_j, \quad 1 \leq j \leq n-1\},$$

са особином

$$|\varphi(\zeta')| \leq a_n/2, \quad \text{за} \quad \zeta' \in \mathcal{O}',$$

$$\Omega \cap \mathcal{O}' = \{\zeta : \zeta_n < \varphi(\zeta'),\, \zeta' \in \mathcal{O}'\} \quad \text{и} \quad \partial\Omega \cap \mathcal{O} = \{\zeta : \zeta_n = \varphi(\zeta'),\, \zeta; \in \mathcal{O}'\}.$$

Ограничен отворен скуп са Липшиц непрекидном границом називамо Липшицовом облашћу.

Теорема 2.8. *[27] (Фридрихсова неједнакост) Нека је* Ω *Липшицова област у* $\mathbb{R}^n$ *са коначном ширином* d, *у смислу да* Ω *лежи између две паралелне хиперравни димензије* $n-1$ *које су на растојању* d. *Тада постоји константа* C, *која зависи само од* s, p *и* d, *таква да је*

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)}^p \leq C|u|_{W_p^s(\Omega)}^p \tag{2.9}$$

за свако $u \in \mathring{W}_p^s(\Omega)$, $s > 0$, $1 \leq p < \infty$, $s - \lfloor s \rfloor > 1/p$.

Теорема 2.9. *[27] Нека је* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Липшицова област и* $1 \leq p < \infty$. *Тада је*

(1) простор $C^\infty(\overline{\Omega})$ *свуда густ у* $W_p^k(\Omega)$ *за* $k \geq 0$;

(2) Ако је $k \geq 1$, *тада постоји непрекидан линеаран оператор* $E : W_p^k(\Omega) \to$

$W_p^k(\mathbb{R}^n)$, *који називамо оператором продужења, са особином*

$$(Eu)|_\Omega = u, \quad u \in W_p^k(\Omega).$$

Теорема 2.10. *[39] Нека је Ω Липшицова област. Простор $\mathcal{D}(\Omega)$ је густ у $H^s(\Omega)$ ако и само ако је $s \leq 1/2$ (тада је $\mathring{H}^s(\Omega) = H^s(\Omega)$). Ако је $s > 1/2$, тада је $\mathring{H}^s(\Omega)$ строго садржан у $H^s(\Omega)$.*

Теорема 2.11. *[27] Нека је Ω Липшицова област, $0 \leq s_1, s_2 < \infty$, $s_1 \neq s_2$, $0 < \theta < 1$ и $1 \leq q \leq \infty$ тада је*

$$[W_q^{s_1}(\Omega), W_q^{s_2}(\Omega)]_{s,q} = W_q^s(\Omega) \quad \textit{за} \quad s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2 \notin \mathbb{N}.$$

Ако је $q = 2$ онда s може бити и природан број.

У општем случају, реалном интерполацијом, добијамо просторе Бесова:

$$B_{pq}^s(\Omega) := [W_p^{s_1}(\Omega), W_p^{s_2}(\Omega)]_{s,q}, \quad s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2.$$

Хилбертове просторе Собољева реда $s \in \mathbb{R}$ можемо дефинисати и преко Фуријеове трансформације.

Дефиниција 2.12. *За свако $s \in \mathbb{R}$ дефинишемо простор*

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}' \mid \quad (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

у коме се норма дефинише са

$$\|u\|_{\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)} := \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Теорема 2.12. *[59] Простори $W_2^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ су еквивалентни у смислу да су њихове норме еквивалентне.*

Дефиниција 2.13. *Нека је Ω отворен скуп у $\mathbb{R}^n$. Простор $\hat{H}^s(\Omega)$ се састоји од рестрикција на Ω свих дистрибуција из $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Норма у простору $\hat{H}^s(\Omega)$ дефинише се са*

$$\|u\|_{\hat{H}^s(\Omega)} := \inf_{\substack{\tilde{u} \in \hat{H}^s(\Omega) \\ \tilde{u}|_\Omega = u}} \|\tilde{u}\|_{\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Теорема 2.13. *[59] Ако постоји непрекидан оператор продужења*

$$E : W_2^s(\Omega) \to W_2^s(\mathbb{R}^n),$$

тада су простори $W_2^s(\Omega)$ *и* $\hat{H}^s(\Omega)$ *еквивалентни у смислу да су њихове норме еквивалентне.*

Теорема 2.14. *[43] Нека је* Ω *Липшицова област,* $s \geq 0$ *и* $1 \leq p \leq \infty$. *Тада постоји линеаран оператор* $E : W_p^s(\Omega) \to W_p^s(\mathbb{R}^n)$ *такав да је*

(1) $Eu|_\Omega = u$, *и*

(2) E *је непрекидан оператор. Тачније, постоји константа* $C(s, \Omega)$, *растућа у односу на* s, *таква да је за свако* $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|Eu\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} \leq C(s, \Omega)\|u\|_{W_p^s(\Omega)} \quad \text{за свако } u \in W_p^s(\Omega).$$

Теорема 2.15. *[39] Нека је* Ω *Липшицова област. Продужење функције и нулом изван области* Ω *представља непрекидно пресликавање* $H^s(\Omega) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ *ако и само ако је* $0 \leq s < 1/2$. *Продужење нулом представља непрекидно пресликавање* $\mathring{H}^s(\Omega) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ *за* $s > 1/2$, *ако и само ако је* $s \neq$ *цео број* $+ 1/2$.

Теорема 2.16. *[23] Нека је* Ω *Липшицова област у* $\mathbb{R}^n$, $s > 0$ *и* $0 \leq p \leq \infty$. *Тада важе следећа потапања*

(1) $W_p^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *за* $p \leq q \leq \frac{np}{n-sp}$, *ако је* $s - \frac{n}{p} < 0$,

(2) $W_p^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *за* $p \leq q < \infty$, *ако је* $s - \frac{n}{p} = 0$,

(3) $W_p^s(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, *ако је* $s - \frac{n}{p} > 0$.

Теорема 2.17. *[23] Нека је* $0 \leq t \leq s < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$ *и* $s - n/p \geq t - n/q$. *Тада је*

$$W_p^s(\Omega) \hookrightarrow W_q^t(\Omega).$$

Теорема 2.18. *[39] Нека је* Ω *Липшицова област,* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и* $0 < s < 1$, $s \neq 1/2$. *Тада је*

$$\mathring{H}^{k+s}(\Omega) = [\mathring{H}^k(\Omega), \mathring{H}^{k+1}(\Omega)]_{s,2}$$

и њихове норме су еквивалентне.

За $s = 1/2$, резултат реалне интерполације је простор

$$H_{00}^{k+1/2}(\Omega) := [\mathring{H}^k(\Omega), \mathring{H}^{k+1}(\Omega)]_{s,2},$$

који се назива Лионс-Маженесовим простором, а садржи функције $u \in \mathring{H}^{k+1/2}(\Omega)$ за које је $\varrho^{-1/2}\partial^k u \in L_2(\Omega)$ [56, 39]. Функција ϱ је бесконачно диференцијабилна функција на $\overline{\Omega}$, позитивна за свако $x \in \Omega$ за коју важи

$$0 < C_1 \leq \frac{\varrho(x)}{d(x,\Gamma)} \leq C_2, \quad \forall x \in \Omega,$$

где је $d(x,\Gamma)$ растојање тачке x од границе Γ области Ω.

Теорема 2.19. *[23] Нека је $u \in W_p^s(\Omega)$, $s > 1/p$, $s \neq$ цео број$+1/p$, и нека је граница области Ω довољно глатка ($\Gamma \in C^{\lfloor s \rfloor + 1}$). Тада постоји траг функције u на граници Γ, који припада простору $W_p^{s-1/p}(\Gamma)$, и важи следећа оцена*

$$\|u\|_{W_p^{s-1/p}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{W_p^s(\Omega)}.$$

2.7 Анизотропни простори Собољева

Означимо са $\mathbb{R}_+$ скуп свих ненегативних реалних бројева. Елементе скупа $\mathbb{R}_+^n$ називаћемо мултииндексима. За $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ дефинишемо

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad [\alpha] := ([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]), \quad \lfloor \alpha \rfloor := (\lfloor \alpha_1 \rfloor, \ldots, \lfloor \alpha_n \rfloor),$$

где је $[\alpha_i]$ највећи цео број $\leq \alpha_i$ и $\lfloor \alpha_i \rfloor$ највећи цео број $< \alpha_i$. Нека је $e_i = (\delta_{1i}, \ldots . \delta_{ni})$ за $i = 1, \ldots, n$, где је

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j, \end{cases}$$

Кронекеров симбол.

Дефинишемо следеће скупове

$$\begin{aligned} \Omega_i(x) :=& \{h_i : x + h_i e_i \in \Omega\}, \\ \Omega_{ij}(x) :=& \{(h_i, h_j) : x + c_i h_i e_i + c_j h_j e_j \in \Omega; c_i, c_j = 0, 1\}, \\ & \ldots \end{aligned}$$

$$\Omega_{1\ldots n}(x) :=\{(h_1,\ldots,h_n) : x+\sum_{k=1}^{n} c_k h_k e_k \in \Omega;\ c_k = 0,1;\ k=1,\ldots,n\}.$$

Уведимо и коначне разлике

$$\Delta_h u(x) := u(x+h) - u(x), \quad \Delta_h^k u(x) := \Delta_h(\Delta_h^{k-1} u(x)).$$

Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Липшицова област. За $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$ и $1 \le p < \infty$ дефинишемо

$$|u|^p_{\alpha,p} :=\|u\|^p_{L^p(\Omega)}, \qquad \text{за } \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

$$|u|^p_{\alpha,p} :=\int_\Omega \int_{\Omega_i(x)} \frac{|\Delta_{h_i e_i} u(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i}} dh_i\, dx, \qquad \text{за } 0<\alpha_i<1;\ \alpha_k = 0,\ k \neq i,$$

$$|u|^p_{\alpha,p} :=\int_\Omega \int_{\Omega_{ij}(x)} \frac{|\Delta_{h_i e_i}\Delta_{h_j e_j} u(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i}|h_j|^{1+p\alpha_j}} dh_i dh_j\, dx, \qquad \text{за } 0<\alpha_i,\alpha_j<1;\ \alpha_k = 0,\ k \neq i,j,$$

...

$$|u|^p_{\alpha,p} :=\int_\Omega \int_{\Omega_{1\ldots n}(x)} \frac{|\Delta_{h_1 e_1}\cdots\Delta_{h_n e_n} u(x)|^p}{|h_1|^{1+p\alpha_1}\cdots|h_n|^{1+p\alpha_n}} dh_1 \ldots dh_n\, dx,$$

$$\text{за } 0<\alpha_i,\ldots,\alpha_n<1;\ \alpha_k = 0,\ k \neq i,j,$$

$$|u|^p_{\alpha,p} :=|\partial^{[\alpha]} u|^p_{\alpha-[\alpha],p}, \qquad \text{ако је, за неко } k,\ \alpha_k \ge 1.$$

Када је $p=\infty$, полунорма $|\cdot|_{\alpha,\infty}$ се дефинише са

$$|u|_{\alpha,\infty} :=\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad \text{за } \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

$$|u|_{\alpha,\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega,\, h_i\in\Omega_i(x)} \frac{|\Delta_{h_i e_i} u(x)|}{|h_i|^{\alpha_i}}, \qquad \text{за } 0<\alpha_i<1,\ \alpha_k = 0,\ k \neq i,$$

и тако даље.

Коначан скуп мултииндекса $A \subset \mathbb{R}^n_+$ називамо регуларним ако је $0 := (0,\ldots,0) \in A$, и за свако $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in A$ постоје реални бројеви $\beta_k \ge \alpha_k$, $k=1,\ldots,n$, такви да $\beta_k e_k \in A$.

Са претпоставком да је A регуларан скуп мултииндекса, дефинишемо следеће норме:

$$\|u\|_{W^A_p(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha\in A} |u|^p_{\alpha,p}\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^A_\infty(\Omega)} := \max_{\alpha\in A} |u|_{\alpha,\infty}.$$

Затворење простора $C^\infty(\overline{\Omega})$ у норми $\|\cdot\|_{W^A_p}$ означавамо за $W^A_p(\Omega)$.

Нека је и $k \in \mathbb{N}_0$. Простор $C^k(I;X)$ садржи оне функције чији изводи по променљивој t закључно са редом k припадају простору $C(I;X)$. Са $C^k(\bar{I};X)$, означавамо простор свих функција $u \in C^k(I;X)$ чији се изводи по променљивој t закључно са редом k могу непрекидно продужити са отвореног интервала $I = (a,b)$ на затворени интервал $\bar{I} = [a,b]$. Ово је Банахов простор са нормом

$$\|u\|_{C^k(\bar{I};X)} := \max_{0 \le m \le k} \max_{t \in \bar{I}} \|\partial^m u(t)\|_X.$$

Дефинишимо простор $\mathcal{D}'(I;X)$ свих непрекидних линерних оператора који пресликавају $\mathcal{D}(I)$ у X. Вредност линеарног оператора $u \in \mathcal{D}'(I;X)$ на основној функцији $\varphi \in \mathcal{D}'(I)$ означавамо са $\langle u, \varphi \rangle$. На основу дефиниције је $\langle u, \varphi \rangle \in X$.

Нека је α позитиван цео број. Извод у смислу дистрибуција, по променљивој t, реда α оператора $u \in \mathcal{D}'(I;X)$ дефинишимо са

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

у смислу једнакости у простору X.

Нека је Ω Липшицов домен у $\mathbb{R}^n$ и $Q = \Omega \times I$. За ненегативне бројеве s и r дефинишемо анизотропни простор Собољева

$$W_p^{s,r}(Q) := L^p(I; W_p^s(\Omega)) \cap W_p^r(I; L^p(\Omega)),$$

снабдевен нормом

$$\|w\|_{W_p^{s,r}(Q)} := \left(\|w\|^p_{L^p(I;W_p^s(\Omega))} + \|w\|^p_{W_p^r(I;L^p(\Omega))} \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Теорема 2.20. *[27] Нека је $u \in W_2^{s,r}(Q)$, $s, r > 0$ и нека $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $k \in \mathbb{N}_0$ задовољавају услов $\frac{|\alpha|}{s} + \frac{k}{r} \le 1$. Тада $\partial_x^\alpha \partial_t^k u$ припада простору $W_2^{\mu,\nu}(Q)$ где је $\frac{\mu}{s} = \frac{\nu}{r} = 1 - \left(\frac{|\alpha|}{s} + \frac{k}{r} \right)$, а ∂_x и ∂_t означавају парцијалне изводе по $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и t, респективно .*

Теорема 2.21. *[27] Нека је $u \in W_2^{s,r}(Q)$, $s \ge 0$ и $r > 1/2$. Тада је, за ненегативан цео број k, $k < r - 1/2$, траг*

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0),$$

добро дефинисан елемент простора $W_2^q(\Omega)$, *где је* $q = \frac{s}{r}\left(r - k - \frac{1}{2}\right)$.

2.8 Лема Брамбла-Хилберта

Означимо са $\mathcal{P}_m$ скуп свих полинома степена m са n променљивих.

Лема 2.22. *[27] Нека је* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Липшицова област и нека је, за реалне бројеве* $s > 0$ *и* $p \in [1, \infty]$, η *ограничен линеаран функционал из простора Собољева* $W_p^s(\Omega)$ *такав да је, за* $s = m + \alpha$, $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$*:*

$$\mathcal{P}_m \subset Ker(\eta).$$

Тада постоји позитиван реалан број $C = C(s, p, n, \Omega)$ *такав да је*

$$|\eta(v)| \leq C\|\eta\||v|_{W_p^s(\Omega)} \quad \forall v \in W_p^s(\Omega).$$

Нека је $A \subset \mathbb{R}_+^n$ регуларан скуп ненегативних реалних мултииндекса. Са $\kappa(A)$ означимо конвексан омотач скупа A у $\mathbb{R}^n$. Нека је $\partial_0\kappa(A)$ део границе скупа $\kappa(A)$ који не припада координатним хиперравнима и $A_\partial = A \cap \overline{\partial_0\kappa(A)}$. Нека је B непразан подскуп од A_∂, такав да је $B \cup \{0\}$ регуларан скуп мултииндекса, и

$$\nu(B) = \{\beta \in \mathbb{N}_0^n : \partial^{\lfloor\alpha\rfloor} x^\beta \equiv 0, \forall \alpha \in B\}.$$

Нека је $\mathcal{P}_B$ скуп свих полинома са n променљивих облика

$$P(x) = \sum_{\alpha \in \nu(B)} p_\alpha x^\alpha.$$

Лема 2.23. *[27] Нека су* $\Omega_k \subset \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \ldots, m$ *Липшицове области и нека скупови* A_k *и* B_k *реалних ненегативних мултииндекса задовољавају услове који су горе формулисани. Нека је* $(v_1, \ldots v_m) \to \eta(v_1, \ldots v_m)$ *ограничен мултилинеарни функционал у простору*

$$W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times \cdots W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$$

који се анулира када је неки од његових аргумената облика $v_k = x^\alpha$, $x \in \Omega_k$,

$\alpha \in \nu(B_k)$. Тада постоји позитиван реалан број

$$C = C(A_1, B_1, p_1, n_1, \Omega_1, \ldots, A_m, B_m, p_m, n_m, \Omega_m)$$

такав да је

$$|\eta(v_1, \ldots v_m)| \leq C\|\eta\| \prod_{k=1}^{m} \sum_{\alpha \in B_k} |v_k|_{\alpha, p_k}$$

за свако $(v_1, \ldots v_m) \in W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times \cdots \times W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$.

За $m = 2$ добијамо билинеарну верзију леме Брамбла-Хилберта.

3 Интеграли и изводи разломљеног реда

Пре него што уведемо дефиниције интеграла и извода разломљеног реда наводимо само основне особине Гама и Бета функције. За више детаља погледати [46, 32].

Гама функција $\Gamma(z)$ се дефинише помоћу Ојлеровог интеграла друге врсте

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{3.1}$$

који конвергира за $Re(z) > 0$. Важи следећа једнакост

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}. \tag{3.2}$$

Користећи ову релацију, гама функцију можемо продужити до функције дефинисане за свако $z \in \mathbb{C}$ осим за $z = 0, -1, -2, \ldots$. Како је $\Gamma(1) = 1$, из (3.2) следи да је

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Бета функција $B(z, w)$ дефинише се помоћу Ојлеровог интеграла прве врсте

$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad Re(z), Re(w) > 0.$$

Између гама функције и бета функције постоји следећа веза

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \neq 0, -1, -2, \ldots.$$

3.1 Риман-Лиувилов интеграл разломљеног реда

Подсетимо се формуле за узастопну интеграцију:

$$\int_a^x \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n \cdots dt_2\, dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt, \tag{3.4}$$

која се једноставно доказује математичком индукцијом и заменом редоследа интеграције.

Како је $(n-1)! = \Gamma(n)$ видимо да десна страна једнакости (3.4) може имати смисла и за разломљене вредности броја n. Зато је природно дефинисати интеграл разломљеног реда на следећи начин:

Дефиниција 3.1. *Нека је $f(x) \in L^1(a,b)$ и $\alpha > 0$. Оператор $\partial_{a+}^{-\alpha}$ дефинисан са*

$$(\partial_{a_+}^{-\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a, \tag{3.5}$$

се назива левим Риман-Лиувиловим интегралним оператором разломљеног реда α. За $\alpha = 0$, дефинишемо $\partial_{a+}^{-0} := I$, где је I идентички оператор. Ако је $a = -\infty$ користићемо ознаку $\partial_{+}^{-\alpha}$.

Очигледно је да за $\alpha \geq 1$ интеграл постоји за свако $x \in [a,b]$, јер је подинтегрална функција производ интеграбилне функције f и непрекидне по t функције $(x-t)^{\alpha-1}$. У случају $0 < \alpha < 1$, егзистенцију интеграла можемо доказати тако што обе подинтегралне функције продужимо нулом на цело $\mathbb{R}$.

Дефиниција 3.2. *Нека је $f(x) \in L^1(a,b)$ и $\alpha > 0$. Оператор $\partial_{b_-}^{-\alpha}$ дефинисан са*

$$(\partial_{b_-}^{-\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b, \tag{3.6}$$

се назива десним Риман-Лиувиловим интегралом разломљеног реда α. За $\alpha = 0$, дефинишемо $\partial_{b_-}^{-0} := I$, где је I идентички оператор. Ако је $b = +\infty$ користићемо ознаку $\partial_{-}^{-\alpha}$.

Теорема 3.1. *[52] Нека је $\alpha > 0$. Оператор $\partial_{a_+}^{-\alpha} : L^p(a,b) \to L^p(a,b)$, односно $\partial_{b_-}^{-\alpha} : L^p(a,b) \to L^p(a,b)$, је непрекидан линеаран оператор.*

Доказ. Нека је $f \in L^p(a,b)$. Линеарност оператора $\partial_{a+}^{-\alpha}$ је очигледна. Докажимо да је непрекидан оператор, тј. да важи

$$\|\partial_{a+}^{-\alpha} f\|_{L^p(a,b)} \leq C \|f\|_{L^p(a,b)}, \quad C = const > 0.$$

$$\begin{aligned}
\|\partial_{a+}^{-\alpha} f\|_{L^p(a,b)}^p &= \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int_a^b \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \right|^p dx \\
&= \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int_a^b \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \right|^{p-1} \left| \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)ds \right| dx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int_a^b \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \right|^{p-1} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} |f(s)| ds dx \\
&= \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int_a^b \int_a^x \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \right|^{p-1} (x-s)^{\alpha-1} |f(s)| ds dx.
\end{aligned}$$

Заменом редоследа интеграције добијамо

$$\begin{aligned}\|\partial_{a+}^{-\alpha} f\|_{L^p(a,b)}^p &\leq \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int_a^b \int_s^b \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right|^{p-1} (x-s)^{\alpha-1} |f(s)| dx ds \\ &= \frac{1}{\alpha \Gamma^p(\alpha)} \int_a^b \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right|^{p-1} (b-s)^{\alpha} |f(s)| dx ds.\end{aligned}$$

Примењујући исти поступак још $p-1$ пута добијамо

$$\|\partial_{a+}^{-\alpha} f\|_{L^p(a,b)}^p \leq \frac{1}{\alpha^p \Gamma^p(\alpha)} \int_a^b |f(s)|^p (b-s)^{p\alpha} ds \leq \left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right)^p \int_a^b |f(s)|^p ds,$$

одакле следи да је

$$\|\partial_{a+}^{-\alpha} f\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L^p(a,b)}.$$

□

Теорема 3.2. *[52] Нека је $\alpha > 0$. Леви и десни Риман-Лиувилови интеграли разломљеног реда су узајамно адјунговани оператори у односу на $L^2(a,b)$ скаларни производ, тј.*

$$\left(\partial_{a_+}^{-\alpha} f,\, g\right)_{L^2(a,b)} = \left(f,\, \partial_{b_-}^{-\alpha} g\right)_{L^2(a,b)}.$$

Интеграли разломљеног реда имају особину полугрупе

$$\partial_{a_+}^{-\alpha} \partial_{a_+}^{-\beta} f = \partial_{a_+}^{-\alpha-\beta} f, \quad \partial_{b_-}^{-\alpha} \partial_{b_-}^{-\beta} f = \partial_{b_-}^{-\alpha-\beta} f, \quad \alpha > 0,\, \beta > 0. \tag{3.7}$$

Следећа теорема показује да интеграција разломљеним редом α побољшава особину глаткости функције.

Теорема 3.3. *[52] Нека је $f(x) \in C^{k,\lambda}[a,b]$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \lambda \leq 1$ и $\alpha > 0$. Тада Риман-Лиувилов интеграл разломљеног реда α функције f, има облик*

$$\left(\partial_{a_+}^{-\alpha} f\right)(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)} (x-a)^{\alpha+j} + g(x).$$

Нека је $s = k + \lambda + \alpha$. Ако $\lambda + \alpha$ није цео број или ако су λ и α цели бројеви, тада функција g припада простору

$$g(x) \in C^{\lfloor s \rfloor, s - \lfloor s \rfloor}[a,b].$$

Напомена 3.4. *Нека је* $\alpha > 0$ *и* $\beta > -1$. *Тада је*

$$\left(\partial_{a_+}^{-\alpha}(t-a)^{\beta}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta},$$

односно

$$\left(\partial_{b_-}^{-\alpha}(b-t)^{\beta}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(b-x)^{\alpha+\beta}.$$

3.2 Риман-Лиувилов извод разломљеног реда

Природно је дефинисати извод разломљеног реда као оператор инверзан оператору интеграције разломљеног реда.

Дефиниција 3.3. *Нека је функција* f *дефинисана на интервалу* (a,b), $\alpha > 0$ *и* n *најмањи цео број строго већи од* α ($n = [\alpha]+1$). *Оператор* $\partial_{a_+}^{\alpha}$ *дефинисан са*

$$\begin{aligned}\left(\partial_{a_+}^{\alpha} f\right)(x) :=& \frac{d^n}{dx^n}\left(\partial_{a_+}^{-(n-\alpha)} f\right)(x)\\ =&\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt,\end{aligned} \tag{3.8}$$

назива се левим Риман-Лиувиловим изводом разломљеног реда α. *За* $\alpha = 0$, *дефинишемо* $\partial_{a_+}^{0} := I$, *где је* I *идентички оператор. Ако је* $a = -\infty$ *користићемо ознаку* ∂_{+}^{α}.

Дефиниција 3.4. *Нека је функција* f *дефинисана на интервалу* (a,b), $\alpha > 0$ *и* n *најмањи цео број строго већи од* α ($n = [\alpha]+1$). *Оператор* $\partial_{b_-}^{\alpha}$ *дефинисан са*

$$\begin{aligned}\left(\partial_{b_-}^{\alpha} f\right)(x) :=& (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\partial_{b_-}^{-(n-\alpha)} f\right)(x)\\ =&\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1}f(t)dt,\end{aligned} \tag{3.9}$$

назива се десним Риман-Лиувиловим изводом разломљеног реда α. *За* $\alpha = 0$, *дефинишемо* $\partial_{b_-}^{0} := I$, *где је* I *идентички оператор. Ако је* $b = +\infty$ *користићемо ознаку* ∂_{-}^{α}.

Теорема 3.5. *[52] Нека је* $f \in L^1(a,b)$. *Тада је леви (десни) Риман-Лиувилов извод разломљеног реда* α *леви инверз левог (десног) Риман-Лиувиловог ин-*

теграла разломљеног реда α, тј.

$$\partial_{a_+}^{\alpha} \partial_{a_+}^{-\alpha} f = f, \quad \partial_{b_-}^{\alpha} \partial_{b_-}^{-\alpha} f = f, \tag{3.10}$$

скоро свуда на (a,b), за свако $\alpha > 0$.

Једнакости (3.10) су посебан случај опште особине:

Теорема 3.6. *[46, 32] Нека је $\alpha \geq \beta > 0$ и $f \in L^1(a,b)$. Тада је*

$$\partial_{a_+}^{\beta} \partial_{a_+}^{-\alpha} f = \partial_{a_+}^{\beta-\alpha} f, \quad \partial_{b_-}^{\beta} \partial_{b_-}^{-\alpha} f = \partial_{b_-}^{\alpha-\beta} f. \tag{3.11}$$

Теорема 3.7. *[52] Нека је $\alpha > 0$ и нека је функција f таква да је $\partial_{a_+}^{-\alpha} f \in C^n[a,b]$, односно $\partial_{b_-}^{-\alpha} f \in C^n[a,b]$, за $n = [\alpha] + 1$. Тада важи*

$$\left(\partial_{a_+}^{-\alpha} \partial_{a_+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left(\partial_{a_+}^{\alpha-k} f\right)(x)\Big|_{x=a}, \tag{3.12}$$

односно

$$\left(\partial_{b_-}^{-\alpha} \partial_{b_-}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left(\partial_{b_-}^{\alpha-k} f\right)(x)\Big|_{x=b}, \tag{3.13}$$

респективно.

Теорема 3.8. *[46] Нека је функција $f \in C^{n-1}[a,b]$, нека је њен n-ти извод интеграбилан на $[a,b]$ и $n-1 \leq \alpha < n$. Тада је услов*

$$\partial_{a_+}^{\alpha} f\Big|_{x=a} = 0$$

еквивалентан услову

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad \text{за} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Лема 3.9. *[46] Нека су испуњени услови става 3.8, $\alpha > 0$ и $\partial_{a_+}^{\alpha} f\big|_{x=a} = 0$. Тада је за свако $0 < \beta < \alpha$ такође и $\partial_{a_+}^{\beta} f\big|_{x=a} = 0$.*

Очигледно важи следећа особина

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\partial_{a_+}^{\alpha} f\right) = \partial_{a_+}^{n+\alpha} f, \qquad \frac{d^n}{dx^n}\left(\partial_{b_-}^{\alpha} f\right) = \partial_{b_-}^{n+\alpha} f, \tag{3.14}$$

где је $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, док за обрнути редослед операција целобројног и разломљеног диференцирања важи једнакост:

$$\partial_{a_+}^{\alpha}\left(\frac{d^n}{dx^n}f\right)=\partial_{a_+}^{\alpha+n}f,\qquad \partial_{b_-}^{\alpha}\left(\frac{d^n}{dx^n}f\right)=\partial_{b_-}^{\alpha+n}f, \tag{3.15}$$

само у случају да функција f задовољава услов $f^k(a)=0$, односно $f^k(b)=0$, за $k=0,1,\ldots,n-1$ [46].

Теорема 3.10. *[46] Нека су $\alpha,\beta>0$, $n=\max(\lfloor\alpha\rfloor,\lfloor\beta\rfloor)$, $f\in C^n(a,b)$ и $f^{(k)}(a)=0$, $\big(f^{(k)}(b)=0\big)$ за $k=0,1,\ldots,n$. Тада важи*

$$\partial_{a_+}^{\alpha}\partial_{a_+}^{\beta}f=\partial_{a_+}^{\alpha+\beta}f,\quad \left(\partial_{b_-}^{\alpha}\partial_{b_-}^{\beta}f=\partial_{b_-}^{\alpha+\beta}f\right).$$

Напомена 3.11. *Нека је $\alpha>0$ и $\beta>-1$. Тада је*

$$\left(\partial_{a_+}^{\alpha}(t-a)^{\beta}\right)(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} & , \quad \alpha-\beta\notin\mathbb{N}\\ 0 & , \quad \alpha-\beta\in\mathbb{N}\end{cases},$$

односно

$$\left(\partial_{b_-}^{\alpha}(b-t)^{\beta}\right)(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(b-x)^{\beta-\alpha} & , \quad \alpha-\beta\notin\mathbb{N}\\ 0 & , \quad \alpha-\beta\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

Приметимо да одавде следи да је Риман-Лиувилов извод разломљеног реда α ($\alpha>0$, $\alpha\notin\mathbb{N}$) константе C једнак

$$\left(\partial_{a_+}^{\alpha}C\right)(x)=\frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\neq 0.$$

3.3 Капутов извод разломљеног реда

Капутов извод разломљеног реда се дефинише на аналоган начин, само је разлика у томе што се редослед интеграције и диференцирања обрне.

Дефиниција 3.5. *Нека је функција f дефинисана на интервалу (a,b), $\alpha>0$ и n најмањи цео број строго већи од α ($n=[\alpha]+1$). Оператор ${}^{C}\partial_{a_+}^{\alpha}$ дефинисан са*

$$\left({}^{C}\partial_{a_+}^{\alpha}f\right)(x):=\left(\partial_{a_+}^{-(n-\alpha)}\frac{d^nf}{dx^n}\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt, \tag{3.16}$$

назива се левим Капутовим оператором извода разломљеног реда α.

Дефиниција 3.6. *Нека је функција* f *дефинисана на интервалу* (a,b), $\alpha>0$ *и* n *најмањи цео број строго већи од* α $(n=[\alpha]+1)$. *Оператор* ${}^C\partial^{\alpha}_{b_-}$ *дефинисан са*

$$\begin{aligned}\left({}^C\partial^{\alpha}_{b_-}f\right)(x) :=& (-1)^n\left(\partial^{-(n-\alpha)}_{b_-}\frac{d^nf}{dx^n}\right)(x)\\ =&\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b(t-x)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt,\end{aligned} \tag{3.17}$$

назива се десним Капутовим оператором извода разломљеног реда α.

Приметимо да је [32, 35, 36]:

$$\lim_{\alpha\to n^-}\left({}^C\partial^{\alpha}_{a_+}f\right)(x)=f^{(n)}(x),\quad \lim_{\alpha\to n^-}\left({}^C\partial^{\alpha}_{b_-}f\right)(x)=(-1)^nf^{(n)}(x). \tag{3.18}$$

Теорема 3.12. *[46, 11] Нека је* $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$ *и нека је функција* f *таква да су дефинисани* ${}^C\partial^{\alpha}_{a_+}f$ *и* $\partial^{\alpha}_{a_+}f$, *односно* ${}^C\partial^{\alpha}_{b_-}f$ *и* $\partial^{\alpha}_{b_-}f$. *Тада је*

$$\left({}^C\partial^{\alpha}_{a_+}f\right)(x)=\left(\partial^{\alpha}_{a_+}f\right)(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^kf(a)}{dx^k}\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)},$$

односно

$$\left({}^C\partial^{\alpha}_{b_-}f\right)(x)=\left(\partial^{\alpha}_{b_-}f\right)(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^kf(b)}{dx^k}\frac{(b-x)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

Последица 3.13. *Нека су испуњени услови теореме 3.12. Тада је*

$${}^C\partial^{\alpha}_{a_+}f=\partial^{\alpha}_{a_+}f,\qquad \left({}^C\partial^{\alpha}_{b_-}f=\partial^{\alpha}_{b_-}f\right)$$

ако и само ако је

$$\frac{d^kf(a)}{dx^k}=0,\quad \left(\frac{d^kf(b)}{dx^k}=0\right)\qquad \text{за}\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Теорема 3.14. *[11] Нека је* $\alpha>0$ *и* $f\in C[a,b]$. *Тада је*

$$\left({}^C\partial^{\alpha}_{a_+}\partial^{-\alpha}_{a_+}f\right)(x)=f(x),\quad \left(\left({}^C\partial^{\alpha}_{b_-}\partial^{-\alpha}_{b_-}f\right)(x)=f(x)\right). \tag{3.19}$$

Теорема 3.15. *[46, 11] Нека је* $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$, $f\in C^{n-1}[a,b]$ *и нека је* $f^{(n)}$

интеграбилна функција. Тада је

$$\left(\partial_{a_+}^{-\alpha}\ {}^C\partial_{a_+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!},$$

$$\left(\partial_{b_-}^{-\alpha}\ {}^C\partial_{b_-}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-x)^k}{k!}.$$

Напомена 3.16. *Нека је $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$. Тада је*

$$\left({}^C\partial_{a_+}^{\alpha} (t-a)^{\beta}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}, & \text{за } \beta > n-1, \\ 0, & \text{за } \beta \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

4 Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда

4.1 Простори функција с изводима разломљеног реда

Овде дајемо преглед резултата који се могу пронаћи у [19, 37, 12, 48, 52, 32].

Теорема 4.1. *[48] Нека је $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тада је Фуријеова трансформација извода разломљеног реда $\alpha > 0$:*

$$\mathcal{F}[\partial_+^\alpha u](\xi) = (-i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi), \tag{4.1}$$

$$\mathcal{F}[\partial_-^\alpha u](\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi). \tag{4.2}$$

Лема 4.2. *[37, 48] За сваки реалан број $\alpha > 0$ и $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ важи*

$$(\partial_+^\alpha u, \partial_-^\alpha u)_{L_2(\mathbb{R})} = \cos(\pi\alpha)\|\partial_+^\alpha u\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \cos(\pi\alpha)\|\partial_-^\alpha u\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{4.3}$$

Теорема 4.3. *[11, 46] Нека је функција $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ таква да постоји Лапласова трансформација $\mathcal{L}[u]$ на интервалу $[s_0, \infty)$ за неко $s_0 \in \mathbb{R}$. Тада је, за $\alpha > 0$ и $s > \max\{0, s_0\}$*

$$\mathcal{L}\left[\partial_{t,0_+}^{-\alpha} u\right](s) = s^{-\alpha}\bar{u}(s), \tag{4.4}$$

$$\mathcal{L}\left[\partial_{t,0_+}^{\alpha} u\right](s) = s^{\alpha}\bar{u}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\partial_{t,0_+}^{\alpha-k-1} u\right]_{t=0}, \quad n = \lfloor\alpha\rfloor + 1, \tag{4.5}$$

и

$$\mathcal{L}\left[{}^C\partial_{t,0_+}^{\alpha} u\right](s) = s^{\alpha}\bar{u}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} u^{(k)}(0), \quad n = \lfloor\alpha\rfloor + 1. \tag{4.6}$$

Дефиниција 4.1. *Нека је $\alpha > 0$. Дефинишемо полунорму*

$$|u|_{J_l^\alpha(\mathbb{R})} := \|\partial_+^\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

и норму

$$\|u\|_{J_l^\alpha(\mathbb{R})} := \left(\|u\|_{L_2(\mathbb{R})} + |u|_{J_l^\alpha(\mathbb{R})}\right)^{1/2}$$

и нека је $J_l^\alpha(\mathbb{R})$ затворење простора $C^\infty(\mathbb{R})$ у односу на норму $\|\cdot\|_{J_l^\alpha(\mathbb{R})}$.

Дефиниција 4.2. *Нека је* $\alpha > 0$*. Дефинишемо полунорму*

$$|u|_{J_r^\alpha(\mathbb{R})} := \|\partial_-^\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

и норму

$$\|u\|_{J_r^\alpha(\mathbb{R})} := \left(\|u\|_{L_2(\mathbb{R})} + |u|_{J_r^\alpha(\mathbb{R})}\right)^{1/2}$$

и нека је $J_r^\alpha(\mathbb{R})$ *затворење простора* $C^\infty(\mathbb{R})$ *у односу на норму* $\|\cdot\|_{J_r^\alpha(\mathbb{R})}$*.*

Дефиниција 4.3. *Нека је* $\alpha \neq n - \frac{1}{2}$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Дефинишемо полунорму*

$$|u|_{J_c^\alpha(\mathbb{R})} := \left|(\partial_+^\alpha u, \partial_-^\alpha u)_{L_2(\mathbb{R})}\right|^{1/2}$$

и норму

$$\|u\|_{J_c^\alpha(\mathbb{R})} := \left(\|u\|_{L_2(\mathbb{R})} + |u|_{J_c^\alpha(\mathbb{R})}\right)^{1/2}$$

и нека је $J_c^\alpha(\mathbb{R})$ *затворење простора* $C^\infty(\mathbb{R})$ *у односу на норму* $\|\cdot\|_{J_c^\alpha(\mathbb{R})}$*.*

Теорема 4.4. *[37, 12] Нека је* $\alpha > 0$*,* $\alpha \neq n - \frac{1}{2}$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Тада су простори* $J_l^\alpha(\mathbb{R})$*,* $J_r^\alpha(\mathbb{R})$*,* $J_c^\alpha(\mathbb{R})$ *и* $H^\alpha(\mathbb{R})$ *еквивалентни у смислу да су њихове полунорме и норме еквивалентне.*

Нека је $\Omega = (a, b)$ отворен интервал у $\mathbb{R}$.

Дефиниција 4.4. *Дефинишимо просторе* $\mathring{J}_l^\alpha(\Omega)$*,* $\mathring{J}_r^\alpha(\Omega)$ *и* $\mathring{J}_c^\alpha(\Omega)$ *као затворења простора* $C_0^\infty(\Omega)$ *у одговарајућим нормама.*

Теорема 4.5. *[48, 37] Нека је* $\alpha > 0$*,* $\alpha \neq n - 1/2$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Тада су простори* $\mathring{J}_l^\alpha(\Omega)$*,* $\mathring{J}_r^\alpha(\Omega)$*,* $\mathring{J}_c^\alpha(\Omega)$ *и* $\mathring{H}^\alpha(\Omega)$ *еквивалентни у смислу да су њихове полунорме и норме еквивалентне.*

Нека је u произвољна функција дефинисана на Ω. Продужење нулом функције u на $\mathbb{R}$ означаваћемо са $\tilde{u}$. Дефинишимо просторе:

$$\begin{aligned}
\mathring{C}_l^\alpha(\Omega) :=& \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \,|\, u^{(k)}(a) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ k < \alpha - 1/2\},\\
\mathring{C}_r^\alpha(\Omega) :=& \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \,|\, u^{(k)}(b) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ k < \alpha - 1/2\}.
\end{aligned}$$

Означимо са $\mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$ $\Big($односно, $\mathring{H}_r^\alpha(\Omega)\Big)$ простор оних функција чије продужење нулом на интервал $(-\infty, b)$ (односно, (a, ∞)) припада простору $H^\alpha(-\infty, b)$ (односно, $H^\alpha(a, \infty)$). За функцију $u \in \mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$, $\Big(u \in \mathring{H}_r^\alpha(\Omega)\Big)$ дефин-

ишемо
$$\|u\|_{\mathring{H}_l^\alpha(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{H^\alpha(-\infty,b)}, \quad \left(\|u\|_{\mathring{H}_r^\alpha(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{H^\alpha(a,\infty)}\right).$$
Простори $\mathring{C}_l^\alpha(\Omega)$ и $\mathring{C}_r^\alpha(\Omega)$ су густи у $\mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$ и $\mathring{H}_r^\alpha(\Omega)$, респективно [19].

Теорема 4.6. *[12] За сваки реалан број $\alpha > 0$ и $u \in C_0^\infty(\Omega)$ важи*
$$(\partial_{a+}^\alpha u, \partial_{b-}^\alpha u)_{L^2(\Omega)} = \cos(\pi\alpha)\|\partial_{a+}^\alpha u\|^2_{L_2(a,\infty)}. \tag{4.7}$$

Дефиниција 4.5. *Нека је $\alpha > 0$. Дефинишемо полунорме*
$$|u|_{J_l^\alpha(\Omega)} := \|\partial_{a+}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \quad и \quad |u|_{J_r^\alpha(\Omega)} := \|\partial_{b-}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$$
и норме
$$\|u\|_{J_l^\alpha(\Omega)} := \left(\|u\|_{L_2(\Omega)} + |u|_{J_l^\alpha(\Omega)}\right)^{1/2} \quad и \quad \|u\|_{J_r^\alpha(\Omega)} := \left(\|u\|_{L_2(\Omega)} + |u|_{J_r^\alpha(\Omega)}\right)^{1/2}.$$
Нека су $J_l^\alpha(\Omega)$ и $J_r^\alpha(\Omega)$ затворења простора $\mathring{C}_l^\alpha(\Omega)$ и $\mathring{C}_r^\alpha(\Omega)$, респективно, у одговарајућим нормама.

Теорема 4.7. *[19, 18] Важе следећа тврђења:*

(1) Оператори ∂_{a+}^α и ∂_{b-}^α се могу непрекидно продужити до оператора који пресликавају $\mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$ и $\mathring{H}_r^\alpha(\Omega)$, респективно, у $L^2(\Omega)$.

(2) Нека је $s, \alpha \geq 0$. Тада су $\partial_{a+}^{-\alpha} : \mathring{H}_l^s(\Omega) \to \mathring{H}_l^{\alpha+s}(\Omega)$ и $\partial_{b-}^{-\alpha} : \mathring{H}_r^s(\Omega) \to \mathring{H}_r^{\alpha+s}(\Omega)$ ограничени линеарани оператори.

Последица 4.8. *[19] Нека је $s \geq 0$. Тада функције $(x-a)^s$ и $(b-x)^s$ припадају просторима $\mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$ и $\mathring{H}_r^\alpha(\Omega)$, респективно, за свако $0 \leq \alpha < s + 1/2$.*

Слично као у [48] (лема 3.1.7) може се показати да важи следећи резултат:

Лема 4.9. *Нека је $n - 1/2 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. За $u \in \mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$ је $\partial_{a+}^{-\alpha}\partial_{a+}^\alpha u = u$, док за $u \in \mathring{H}_d^\alpha(\Omega)$ важи $\partial_{b-}^{-\alpha}\partial_{b-}^\alpha u = u$.*

Доказ. Простор $\mathring{C}_l^\alpha(\Omega)$ је густ у $\mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$, па постоји низ $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathring{C}_l^\alpha(\Omega)$ такав да је
$$\lim_{n\to\infty} \|u - \varphi_n\|_{H_l^\alpha(\Omega)} = 0.$$

Користећи неједнакост троугла добијамо

$$\|\partial_{a+}^{-\alpha}\partial_{a+}^{\alpha}u - u\|_{H_l^\alpha(\Omega)} \le \|\partial_{a+}^{-\alpha}\partial_{a+}^{\alpha}(u-\varphi_n)\|_{H_l^\alpha(\Omega)} + \|\partial_{a+}^{-\alpha}\partial_{a+}^{\alpha}\varphi_n - \varphi_n\|_{H_l^\alpha(\Omega)} + \|\varphi_n - u\|_{H_l^\alpha(\Omega)}.$$

На основу става 3.7 и леме 3.9 следи да је $\|\partial_{a+}^{-\alpha}\partial_{a+}^{\alpha}\varphi_n - \varphi_n\|_{H_l^\alpha(\Omega)} = 0$. Даље, користећи теорему 4.7 имамо да је

$$\|\partial_{a+}^{-\alpha}\partial_{a+}^{\alpha}(u-\varphi_n)\|_{H_l^\alpha(\Omega)} \le c\|\partial_{a+}^{\alpha}(u-\varphi_n)\|_{L^2(\Omega)} \le C\|u-\varphi_n\|_{H_l^\alpha(\Omega)}.$$

□

Последица 4.10. *Нека су испуњени услови леме 4.9. Тада, за* $u \in \mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$ *је* $\partial_{a+}^{-\beta}\partial_{a+}^{\beta}u = u$, *док за* $u \in \mathring{H}_d^\alpha(\Omega)$ *важи* $\partial_{b-}^{-\beta}\partial_{b-}^{\beta}u = u$, *за свако* $0 < \beta \le \alpha$.

Теорема 4.11. *Нека је* $n - 1/2 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. *Простори* $J_l^\alpha(\Omega)$ *и* $\mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$ $\left(J_r^\alpha(\Omega) \text{ и } \mathring{H}_r^\alpha(\Omega)\right)$ *су еквивалентни у смислу да су њихове полунорме и норме еквивалентне.*

Доказ. Неједнакост

$$\|\partial_{a+}^{\alpha}u\|_{L_2(\Omega)} \le c\|u\|_{H^\alpha(\Omega)},$$

следи из теореме 4.7. Са друге стране, за $u \in \mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$ користећи резултате из 4.9 и 4.7 следи

$$\|u\|_{H^\alpha(\Omega)} = \|\partial_{a+}^{-\alpha}\partial_{a+}^{\alpha}u\|_{H^\alpha(\Omega)} \le c\|\partial_{a+}^{\alpha}u\|_{L_2(\Omega)} = c|u|_{J_l^\alpha(\Omega)}.$$

□

Теорема 4.12. *[37] За свако* $0 < \alpha < 1$, *ако је* $u \in H^\alpha(\Omega)$ *и* $v \in C_0^\infty(\Omega)$, *тада је*

$$(\partial_{a+}^{\alpha}u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, \partial_{b-}^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Последица 4.13. *Нека је* $n - 1/2 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тада је за* $u \in \mathring{H}_l^\alpha(\Omega)$ *и* $v \in \mathring{H}_r^\alpha(\Omega)$

$$(\partial_{a+}^{\alpha}u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, \partial_{b-}^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)}.$$

Доказ.

$$(\partial_{a+}^{\alpha}u, v)_{L^2(\Omega)} = (\partial_{a+}^{\alpha}u, \partial_{b-}^{-\alpha}\partial_{b-}^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)} = (\partial_{a+}^{-\alpha}\partial_{a+}^{\alpha}u, \partial_{b-}^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)} = (u, \partial_{b-}^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)}.$$

$\square$

Теорема 4.14. *[37] За свако* $0 < \alpha < 1$, *ако је* $u \in \mathring{H}_l^1(\Omega)$ *и* $v \in \mathring{H}_l^{\alpha/2}(\Omega)$ *тада је*

$$(\partial_{a_+}^{\alpha} u, v)_{L^2(\Omega)} = (\partial_{a_+}^{\alpha/2} u, \partial_{b_-}^{\alpha/2} u)_{L^2(\Omega)}.$$

4.2 Специјалне функције

Двопараметарска функција Митаг-Лефлеровог типа дефинише се редом

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \beta \in \mathbb{C},\ Re(\alpha) > 0, \tag{4.9}$$

који је конвергентан за свако $z \in \mathbb{Z}$. Ово је цела функција.

Теорема 4.15. *[46] Нека је* $0 < \alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и* μ *такво да је* $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$. *Тада постоји константа* $C = C(\alpha, \beta, \mu) > 0$ *таква да је за* $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}. \tag{4.10}$$

Из дефиниције (4.9) следи

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

За $\beta = 1$ добија се једнопараметарска Митаг-Лефлерова функција

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} =: E_\alpha(z), \quad z \in \mathbb{C},\ Re(\alpha) > 0.$$

Важи следећа формула за диференцирање Митаг-Лефлерове функције [46]:

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)\right) = t^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(t^\alpha), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t > 0. \tag{4.11}$$

У каснијем раду биће корисна Лапласова трансформација функције $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})$:

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\right](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}, \tag{4.12}$$

за $Re(s) > 0$, $Re(\beta) > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda s^{-\alpha}| < 1$ [46, 32].

4.3 Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда на правој

Дифузионо-таласна једначина са изводом разломљеног реда по временској променљивој добија се заменом првог извода по временској променљивој изводом разломљеног реда $\alpha \in (0,2]$:

$${}^{C}\partial^{\alpha}_{t,0_+}u = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.13}$$

Задату једначину посматраћемо у полуравни $D = \{(x,t)|\, x \in \mathbb{R},\, t > 0\}$. Претпоставимо да је $0 < \alpha \leq 1$. Како би постојало јединствено решење датог проблема потребно је задати почетни услов:

$$u(x,0) = v(x). \tag{4.14}$$

Међутим, ако је $1 < \alpha \leq 2$, потребно је задати и почетну вредност првог извода по временској променљивој, тј. $\partial u(x,0)/\partial t$. Да бисмо обезбедили непрекидну зависност решења од параметра α приликом преласка са вредности $\alpha = 1^-$ на $\alpha = 1^+$ изабраћемо да је

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0. \tag{4.15}$$

Одредићемо фундаментално решење проблема (4.13)-(4.15) методом која је изложена у [40, 41, 42].

Дакле, решавамо проблем

$${}^{C}\partial^{\alpha}_{t,0_+}G = D\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha \leq 2. \tag{4.16}$$

$$G(x,t) = \delta(x), \quad \left(\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = 0\right) \quad t = 0. \tag{4.17}$$

Најпре одредимо Фуријеову трансформацију једначине (4.16) по просторној променљивој:

$$ {}^{C}\partial^{\alpha}_{t,0_+}\hat{G}(\xi,t) = -D\xi^2\hat{G}(\xi,t), $$

а затим Лапласову трансформацију добијене једнакости по временској променљивој

$$ \hat{\tilde{G}}(\xi,s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+D\xi^2}. \tag{4.18} $$

Користећи инверзну Лапласову трансформацију даље је

$$ \hat{G}(\xi,t) = E_{\alpha}(-D\xi^2 t^{\alpha}). $$

Инверзном Фуријеовом трансформацијом добија се

$$ \begin{aligned} G(x,t) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}E_{\alpha}(-D\xi^2 t^{\alpha})d\xi \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} E_{\alpha}(-D\xi^2 t^{\alpha})\cos(x\xi)d\xi \\ =& \frac{1}{2\sqrt{Dt^{\alpha}}}\, M_{\alpha/2}\left(\frac{|x|}{\sqrt{Dt^{\alpha}}}\right). \end{aligned} $$

Функција $M_{\nu}(x)$ је у литератури позната као M-Врајтова функција или као Маинардијева функција и дефинише се са:

$$ M_{\nu}(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k}{k!\Gamma(-\nu k+(1+\nu))}, \quad 0<\nu<1,\, z\in\mathbb{C}. $$

Посебно за $\nu = 1/2$ је

$$ M_{1/2}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2/4}, $$

одакле видимо да за $\alpha = 1$ добијамо фундаментално решење проблема нормалне дифузије.

Функција $M_{\nu}(z)$ је цела функција. Ако је посматрамо као функцију реалне променљиве тада се може показати да је

$$ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} M_{\nu}(|x|)dx = 1 $$

па је можемо сматрати функцијом густине расподеле. Осим тога је

$$ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}M_{\nu}(|x|)dx = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n\nu+1)}, \quad n=0,1,2,..., $$

тј.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 G(x,t)dx = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\alpha+1)} Dt^{\alpha},$$

одакле видимо да је варијанса пропорционална са Dt^{α}.

Сада лако добијамо решење проблема (4.13)-(4.14) конволуцијом:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)v(y)dy.$$

4.4 Једначина субдифузије – егзистенција и јединственост решења

Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, конвексна, једноструко повезана област, $\Gamma = \partial\Omega$, $0 < T < \infty$ и $0 < \alpha < 1$. Посматрамо почетно-гранични проблем

$$^{C}\partial^{\alpha}_{t,0_+} u + Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{4.19}$$

$$u|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \tag{4.20}$$

$$u|_{t=0} = v(x), \tag{4.21}$$

где је

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu. \tag{4.22}$$

Претпостављамо да коефицијенти a_{ij} и c задовољавају стандардне услове регуларности и елиптичности:

$$a_{ij}(x), c(x) \in L_{\infty}(\Omega), \quad a_{ij}(x) = a_{j\,i}(x), \quad c(x) \geq 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ скоро свуда у } \Omega.$$

Оператор L је позитивно дефинитан, самоконјугован и пресликава скуп $D(L) = H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ у $L^2(\Omega)$.

Нека је $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ низ сопствених вредности и сопствених функција оператора L. Познато је да је [13]

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots,$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty,$$

и функције φ_k се могу одабрати тако да чине ортонормирану базу у $L^2(\Omega)$.

Уведимо ознаке $u_k(t) := (u(\cdot,t),\varphi_k)_{L^2(\Omega)}$ и $f_k(t) = (f(\cdot,t),\varphi_k)$. Скаларним множењем једначине (4.19) са φ_k добијамо

$$^{C}\partial^{\alpha}_{t,0+} u_k(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t), \quad k = 1,2,\dots,$$

$$u_k(0) = (v,\varphi_k)_{L^2(\Omega)}.$$

Ово су обичне диференцијалне једначине разломљеног реда α чија решења су [46]

$$u_k(t) = u_k(0)E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^{\alpha}) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-\tau)^{\alpha}) f_k(\tau)d\tau.$$

Дакле, методом раздвајања променљивих добили смо да је

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x). \tag{4.23}$$

Потребно је доказати да ред (4.23) конвергира ка решењу проблема (4.19)-(4.21). За свако $q \geq -1$, дефинишимо простор $\bar{H}^q(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ снабдевен нормом:

$$\|u\|^2_{\bar{H}^q(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^q |(u,\varphi_k)_{L^2(\Omega)}|^2$$

Важи следеће [15, 20]

$$\|u\|_{\bar{H}^0(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \|u\|_{\bar{H}^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

$$\|u\|_{\bar{H}^1(\Omega)} = |u|_{H^1(\Omega)}, \quad \text{за } u \in \mathring{H}^1(\Omega),$$

$$\|u\|_{\bar{H}^2(\Omega)} = |u|_{H^2(\Omega)} \quad \text{за } u \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega).$$

Општије, простор $\bar{H}^q(\Omega)$ је еквивалентан простору који се добија интерполацијом простора $\mathring{H}^q(\Omega)$ и $L^2(\Omega)$ за $q \in [0,1]$ и интерполацијом простора $H^{-1}(\Omega)$ и $L^2(\Omega)$ за $q \in [-1,0]$.

Теорема 4.16. *[49] Нека је $v \in L^2(\Omega)$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$ и $f \equiv 0$. Тада израз (4.23) представља јединствено решење $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap$*

$C([0,T],H^2(\Omega)\cap \mathring{H}^1(\Omega))$ *такво да је* $\partial^\alpha_{t,0_+}u \in C([0,T];L^2(\Omega))$.

Теорема 4.17. *[15] Нека је* $f \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$ *и нека је* $v \equiv 0$. *Тада израз* (4.23) *представља јединствено решење*

$$u \in L^2((0,T);H^2(\Omega)\cap \mathring{H}^1(\Omega)),$$

и

$$u(x,\cdot) \in \begin{cases} H^\alpha(0,T), & 0 \le \alpha < 1/2 \\ \mathring{H}^\alpha_l(0,T), & 1/2 < \alpha < 1 \\ H^{1/2}_{00}(0,T), & \alpha = 1/2 \end{cases} \quad \text{за скоро свако } x \in \Omega$$

проблема (4.19)-(4.21). *Штавише, постоји константа* $C > 0$ *таква да важи оцена*

$$\|u\|_{H^\alpha((0,T);L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2((0,T);H^2(\Omega))} \le C\|f\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))}.$$

Теорема 4.18. *[20] Нека је* $f \in L^2((0,T);\bar{H}^q(\Omega))$, $-1 < q \le 1$, $a_{ij} = \delta_{ij}$, $c \equiv 0$ *и* $v \equiv 0$. *Тада израз* (4.23) *представља функцију* $u \in L^2((0,T);\bar{H}^{q+2}(\Omega))$ *која је решење проблема* (4.19)-(4.21) *и задовољава оцену:*

$$\|u\|_{L^2\left((0,T);\bar{H}^{q+2}(\Omega)\right)} + \|\partial^\alpha_{t,0_+}u\|_{L^2((0,T);\bar{H}^q(\Omega))} \le C\|f\|_{L^2((0,T);\bar{H}^q(\Omega))}.$$

Ако $f \in L^\infty((0,T);\bar{H}^{q+2}(\Omega))$ *тада је функција* $u(x,t) \in L^2((0,T);\bar{H}^{q+2-\varepsilon}(\Omega))$ *и задовољава оцену*

$$\|u\|_{\dot{H}^{q+2-\varepsilon}(\Omega)} \le C\varepsilon^{-1}t^{\varepsilon\alpha/2}\|f\|_{L^2((0,T);\bar{H}^q(\Omega))} \tag{4.24}$$

за свако $\varepsilon > 0$.

Напомена 4.19. *[20] Услов* $f \in L^\infty((0,T);\bar{H}^{q+2}(\Omega))$ *се може ослабити:* $f \in L^r((0,T);\bar{H}^{q+2}(\Omega))$, $r > \alpha/2$. *Тада је*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\bar{H}^q(\Omega)} \le \frac{C}{1+r'(\alpha-1)}t^{1+r'(\alpha-1)}\|f\|_{L^r((0,T);\bar{H}^q(\Omega))},$$

где је $1/r + 1/r' = 1$. *Овде почетни услов* $u(x,0) = 0$ *важи у смислу* $\lim_{t\to 0^+}\|u\|_{\mathring{H}^q(\Omega)} = 0$. *Дакле, за* $\alpha \in (1/2,1)$ *израз* (4.23) *је решење и под слабијом претпоставком* $f \in L^2((0,T);\mathring{H}^q(\Omega))$.

4.5 Једначина супердифузије – егзистенција и јединственост решења

Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, конвексна, једноструко повезана област, $\Gamma = \partial\Omega$, $0 < T < \infty$ и $1 < \alpha < 2$. Посматрамо почетно-гранични проблем

$$ {}^C\partial_{t,0_+}^{\alpha} u + Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{4.25}$$

$$ u|_{\Gamma \times (0,T)} = 0, \tag{4.26}$$

$$ u|_{t=0} = v(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = w(x), \tag{4.27}$$

где је оператор L дефинисан са (4.22).

У случају када се у једначини (4.19) појављује Риман-Луивилов извод разломљеног реда $\alpha \in (1,2)$ уместо Капутовог, други почетни услов се задаје са $\partial_{t,0_+}^{\alpha-1} u|_{t=0} = w$.

Слично као у претходном одељку, раздвајањем променљивих добијамо диференцијалне једначине разломљеног реда $1 < \alpha < 2$. Уведимо ознаке $u_k(t) := (u(\cdot,t), \varphi_k)_{L^2(\Omega)}$ и $f_k(t) := (f(\cdot,t), \varphi_k)_{L^2(\Omega)}$. Скаларним множењем једначине (4.25) са φ_k добијамо

$$ {}^C\partial_{t,0_+}^{\alpha} u_k(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$ u_k(0) = (v, \varphi_k)_{L^2(\Omega)}, \quad \frac{du_k(0)}{dt} = (w, \varphi_k)_{L^2(\Omega)},$$

чија су решења

$$\begin{aligned} u_k(t) =& u_k(0) E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^{\alpha}) + \frac{du_k(0)}{dt} t E_{\alpha,2}(-\lambda_k t^{\alpha}) \\ &+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-\tau)^{\alpha}) f_k(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Потребно је доказати да ред

$$ u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k(x) \tag{4.28}$$

конвергира ка решењу проблема (4.25)-(4.27).

Теорема 4.20. *[49] Нека је* $v \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$, $w \in \mathring{H}^1(\Omega)$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$,

$c \in C(\overline{\Omega})$ и $f \equiv 0$. Тада израз (4.28) представља јединствено решење $u \in C([0,T]; H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ проблема (4.25)-(4.27) и $\partial^\alpha_{t,0_+} u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Теорема 4.21. *[49] Нека је $v = w = 0$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$ и $f \in L^2((0,T); \Omega)$. Тада ред (4.28) представља функцију $u \in C([0,T]; \bar{H}^{2-2/\alpha}(\Omega))$ и важи оцена*

$$\|u\|_{C([0,T];\bar{H}^{2-2/\alpha}(\Omega))} \leq C\|f\|_{L^2((0,T);\Omega)}.$$

Претпоставимо сада да је $a_{ij} = \delta_{ij}$ и $c \equiv 0$.

Теорема 4.22. *[21] Нека је $v = w = 0$ и $f \in L^\infty([0,T]; \bar{H}^q(\Omega))$ за $-1 \leq q \leq 1$. Тада је за свако $\varepsilon \in (0,1)$*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\bar{H}^{q+2-\varepsilon}} \leq C\varepsilon^{-1} t^{\varepsilon\alpha/2} \|f\|_{L^\infty([0,T];\bar{H}^q(\Omega))}.$$

Теорема 4.23. *[21] Нека је $f \in W^1_\infty((0,T); L^2(\Omega))$ и $v = w = 0$. Тада је*

$$\|\partial^n_{t,0_+} u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_T t^{\alpha-n} \|f\|_{W^{n-1}_\infty((0,T);L^2(\Omega))}, \quad n \in \{1,2\}.$$

5 Једначина субдифузије са концентрисаним капацитетом

Нека је $0 < \alpha < 1$, $\Omega = (0,1)$, $I = (0,T)$ и $Q = \Omega \times I$. Посматрамо следећи почетно-гранични проблем за парцијалну диференцијалну једначину разломљеног реда по временској промењивој са концентрисаним капацитетом у тачки $\xi \in \Omega$

$$[1 + K\delta(x-\xi)]\, \partial^{\alpha}_{t,0+} u + Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{5.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in I, \tag{5.2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{5.3}$$

где је L симетричан елиптички оператор

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

K позитивна константа и $\delta(x)$ Диракова дистрибуција. Једнакост (5.1) важи у смислу теорије дистрибуција (види [58]) и може се формулисати и на другачији начин. Нека је дата део по део глатка функција $v \in C^1[0,\xi] \cap C^1[\xi,1]$. Тада је на основу (2.2) њен извод у смислу дистрибуција

$$v'(x) = \{v'(x)\} + [v]_{\xi}\delta(x-\xi), \tag{5.4}$$

где је $\{v'(x)\}$ извод функције у класичном смислу, а $[v]_{\xi} = v(\xi+0) - v(\xi-0)$ скок функције у тачки ξ.
Како је $\delta(x-\xi) = 0$ за $x \neq \xi$ из једначине (5.1) следи да је

$$\partial^{\alpha}_{t,0+} u + Lu = f(x,t), \tag{5.5}$$

у областима $Q_1 = (0,\xi) \times (0,T)$ и $Q_2 = (\xi,1) \times (0,T)$, док су за $x = \xi$ испуњени следећи услови конјугације

$$[u]_{x=\xi} = u(\xi+0,t) - u(\xi-0,t) = 0, \tag{5.6}$$

и

$$\left[p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi} = K\,\partial^{\alpha}_{t,0+} u(\xi,t). \tag{5.7}$$

Претпостављамо да коефицијент $p(x)$ задовољава услове регуларности и елиптичности

$$p \in L^{\infty}(\Omega), \quad p(x) \geq p_0 = \text{const.} > 0. \tag{5.8}$$

5.1 Егзистенција слабог решења

Дефинишимо простор $\widetilde{L}^2(\Omega)$ као затворење простора $C_0^{\infty}(\Omega)$ у норми

$$\|u\|_{\widetilde{L}^2(\Omega)} = (u,u)^{1/2}_{\widetilde{L}^2(\Omega)},$$

где је

$$(u,v)_{\widetilde{L}^2(\Omega)} = \int_0^1 u(x)v(x)dx + u(\xi)v(\xi).$$

Аналогно, дефинишимо простор $\widetilde{L}^2(Q)$ као затворење простора $C_0^{\infty}(Q)$ у норми

$$\|u\|_{\widetilde{L}^2(Q)} = (u,u)^{1/2}_{\widetilde{L}^2(Q)},$$

где је

$$(u,v)_{\widetilde{L}^2(Q)} = \int_0^T \int_0^1 u(x,t)v(x,t)dxdt + \int_0^T u(\xi,t)v(\xi,t)dt.$$

За $\alpha, \beta > 0$ дефинишемо анизотропне просторе Собољева

$$\widetilde{H}^{\alpha,\beta}(Q) = L^2(I, H^{\alpha}(\Omega)) \cap H^{\beta}(I, \widetilde{L}^2(\Omega))$$

и просторе

$$\widetilde{J}^{\alpha,\beta}_{\pm}(Q) = L^2(I, H^{\alpha}(\Omega)) \cap J^{\beta}_{\pm}(I, \widetilde{L}^2(\Omega)).$$

Нагласимо да је за $0 < \beta < 1/2$: $\widetilde{J}^{\alpha,\beta}_{+}(Q) = \widetilde{J}^{\alpha,\beta}_{-}(Q) = \widetilde{H}^{\alpha,\beta}(Q)$.

Дефинишимо Банахове просторе

$$C(\bar{I},\mathcal{U}) \quad \text{и} \quad C^{\alpha}_{+}(\bar{I},\mathcal{U})$$

функција $u : \bar{I} \to \mathcal{U}$ снабдевених нормом

$$\|u\|_{C(\bar{I},\mathcal{U})} = \max_{t\in\bar{I}} \|u(t)\|_{\mathcal{U}} \quad \text{и} \quad \|u\|_{C^{\alpha}_{+}(\bar{I},\mathcal{U})} = \max_{t\in\bar{I}} \|\partial^{\alpha}_{t,0+} u(t)\|_{\mathcal{U}},$$

респективно.

Помножимо једначину (5.1) са тест функцијом v и интегралимо по области Q. Користећи парцијалну интеграцију, став 3.10 и особину (4.8) добијамо следећу слабу формулацију проблема (5.1)-(5.3): одредити функцију u из простора $\mathring{\widetilde{H}}^{1,\alpha/2}(Q) = L^2(I, \mathring{H}^1(\Omega)) \cap H^{\alpha/2}(I, \widetilde{L}^2(\Omega))$ такву да важи

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \mathring{\widetilde{H}}^{1,\alpha/2}(Q), \tag{5.9}$$

где је

$$\begin{aligned} a(u, v) = \quad & \left(\partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u, \partial_{t,T_-}^{\alpha/2} u\right)_{L^2(Q)} + K\left(\partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u(\xi, \cdot), \partial_{t,T_-}^{\alpha/2} u(\xi, \cdot)\right)_{L^2(I)} \\ & + \left(p\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

и

$$l(v) = (f, v)_{L^2(Q)}.$$

Теорема 5.1. *Нека је* $\alpha \in (0, 1)$, $f \in L^2(Q)$ *и нека важе услови* (5.8). *Тада је варијациони проблем* (5.9) *добро постављен у простору* $\mathring{\widetilde{H}}^{1,\alpha/2}(Q)$ *и његово слабо решење задовољава априорну оцену*

$$\|u\|_{\widetilde{H}^{1,\alpha/2}(Q)} \le C \|f\|_{L^2(Q)} . \tag{5.10}$$

Доказ. Довољно је доказати да су испуњени услови Лакс-Милграмове леме.

Ограниченост функционала $l(\cdot)$ је очигледна.

Докажимо да је билинеарна форма ограничена. Користећи особину регуларности коефицијената (5.8) добијамо

$$\begin{aligned} |a(u, v)| \le & \int_0^T \int_0^1 \left|\partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u \partial_{t,T_-}^{\alpha/2} v\right| dxdt + K \int_0^T \left|\partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u(\xi, t) \partial_{t,T_-}^{\alpha/2} v(\xi, t)\right| dt \\ & + \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right| dxdt. \end{aligned}$$

Даље, користећи неједнакост Коши-Шварца имамо да је

$$\begin{aligned} |a(u, v)| \le \quad & \|\partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u\|_{L^2(Q)} \|\partial_{t,T_-}^{\alpha/2} v\|_{L^2(Q)} + K \|\partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u(\xi, \cdot)\|_{L^2(I)} \|\partial_{t,T_-}^{\alpha/2} v(\xi, \cdot)\|_{L^2(I)} \\ & + \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(Q)} \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(Q)} \\ \le \quad & C\left(\|\partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u\|^2_{\widetilde{L}^2(Q)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(Q)} + \|u\|^2_{L^2(Q)}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\times \left(\|\partial_{t,T_-}^{\alpha/2} v\|_{\widetilde{L}^2(Q)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \|v\|_{L^2(Q)}^2 \right)^{1/2}$$
$$\leq \quad C \, \|u\|_{\mathring{\widetilde{H}}^{1,\alpha/2}(Q)} \|v\|_{\mathring{\widetilde{H}}^{1,\alpha/2}(Q)},$$

где je

$$C = \max \left\{ 1, K, \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$$

Докажимо да je билинеарна форма коерцивна. Користећи особину (4.7) добијамо

$$\begin{aligned} a(u,u) = \quad & \cos \frac{\alpha\pi}{2} \left(\int_0^1 \left\| \partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u(x,\cdot) \right\|_{L^2(0,\infty)}^2 dx + K \left\| \partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u(\xi,\cdot) \right\|_{L^2(0,\infty)}^2 \right) \\ & + \left(p \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{L^2(Q)} \\ & \geq \cos \frac{\pi\alpha}{2} \left(\|\partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u\|_{L^2(Q)}^2 + K \|\partial_{t,0_+}^{\alpha/2} u(\xi,\cdot)\|_{L^2(I)}^2 \right) + p_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(Q)}^2 . \end{aligned}$$

На основу Поенкареове неједнакости je $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}$, па на крају добијамо да je

$$a(u,u) \geq C_1 \|u\|_{\mathring{\widetilde{H}}^{1,\alpha/2}(Q)}^2,$$

где je $C_1 = [(1+K)/(K\cos(\pi\alpha/2)) + 3/p_0]^{-1}$. Дакле, испуњени су услови Лакс-Милграмове леме.

Априорна оцена (5.10) следи из коерцивности билинеарне форме $a(\cdot,\cdot)$ и ограничености функционала $l(\cdot)$, тј.

$$C_1 \|u\|_{\widetilde{H}^{1,\alpha/2}(Q)}^2 \leq a(u,u) \leq \|f\|_{L^2(Q)} \|u\|_{L^2(Q)} \leq \|f\|_{L^2(Q)} \|u\|_{\widetilde{H}^{1,\alpha/2}(Q)}.$$

□

Напоменимо да решење проблема (5.9) не мора задовољавати хомогени почетни услов (5.3), јер за функције из простора $\mathring{\widetilde{H}}^{1,\alpha/2}(Q)$ са $\alpha \in (0,1)$ не постоји траг за $t=0$. Јасно je да je решење проблема (5.1)-(5.3) уједно и решење проблема (5.9), док je само довољно регуларно решење (такво да можемо дефинисати вредност функције за $t=0$) проблема (5.9) такође и решење проблема (5.1)-(5.3).

Може се показати да je (види [39])

$$\|u\|_{\widetilde{B}^{1,\alpha/2}(Q)} \leq C \, \|f\|_{L^2(Q)} \,, \tag{5.11}$$

у слабијој норми

$$\|u\|^2_{\widetilde{B}^{1,\alpha/2}(Q)} = \int_0^T \Big[(T-t)^{-\alpha}\|u(\cdot,t)\|^2_{\widetilde{L}^2(\Omega)} + \|u(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}\Big]\,dt. \tag{5.12}$$

Теорема 5.2. *Нека су испуњени услови теореме 5.1 и нека је* $p \in W^1_\infty(\Omega)$. *Тада је проблем* (5.1)-(5.3) *добро постављен у простору* $H^{2,0}(Q_1)\cap H^{2,0}(Q_2)\cap \widetilde{J}^{0,\alpha}_{+}(Q)\cap \dot{\widetilde{H}}^{1,\alpha/2}(Q)$ *и његово решење задовољава априорну оцену*

$$\left\|\partial^\alpha_{t,0_+}u\right\|_{\widetilde{L}^2(Q)} + \sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L^2(Q_i)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(Q)} + \|u\|_{L^2(Q)} \le C\,\|f\|_{L^2(Q)}. \tag{5.13}$$

Доказ. Помножимо једначину (5.1) са $\partial^\alpha_{t,0_+}u$ и интегралимо по области Q. Добијамо

$$\|\partial^\alpha_{t,0_+}u\|^2_{\widetilde{L}^2(Q)} + \left(p\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\partial^\alpha_{t,0_+}u\right)_{L^2(Q)} = (f, \partial^\alpha_{t,0_+}u)_{L^2(Q)}.$$

Слично као у доказу теореме 5.1, користећи особину регуларности (5.8) коефицијента p, став 3.10, особине (4.7) и (4.8), можемо доказати да је други сабирак са леве стране једнакости позитиван

$$\left(p\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\partial^\alpha_{t,0_+}u\right)_{L^2(Q)} \ge p_0\cos\frac{\alpha\pi}{2}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\partial^{\alpha/2}_{t,0_+}u\right\|^2_{L^2(Q)}, \tag{5.14}$$

па га можемо изоставити. Даље, користећи Коши-Шварцову неједнакост добијамо

$$\left\|\partial^\alpha_{t,0_+}u\right\|^2_{\widetilde{L}^2(Q)} \le \left(f, \partial^\alpha_{t,0_+}u\right)_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(Q)}\|\partial^\alpha_{t,0_+}u\|_{L^2(Q)} \le \|f\|_{L^2(Q)}\|\partial^\alpha_{t,0_+}u\|_{\widetilde{L}^2(Q)},$$

тј.

$$\|\partial^\alpha_{t,0_+}u\|_{\widetilde{L}^2(Q)} \le \|f\|_{L^2(Q)}. \tag{5.15}$$

Даље, помножимо једначину (5.5) са Lu и интегралимо по областима Q_1 и Q_2. Сабирањем добијених једнакост имамо

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\partial^\alpha_{t,0_+}u, Lu\right)_{L^2(Q_i)} + \sum_{i=1}^{2}\|Lu\|^2_{L^2(Q_i)} = \sum_{i=1}^{2}(f, Lu)_{L^2(Q_i)}. \tag{5.16}$$

Користећи парцијалну интеграцију по промењљивој x и услов конјугације

(5.7) добијамо да је

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\partial_{t,0_+}^{\alpha}u, Lu\right)_{L^2(Q_i)} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\partial_{t,0_+}^{\alpha}u, p\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L^2(Q)} + K\int_0^T (\partial_{t,0_+}^{\alpha}u(\xi,t))^2 dt,$$

одакле следи да је први члан у једнакости (5.16) позитиван па га можемо изоставити. Користећи Коши-Шварцову неједнакост даље добијамо да је

$$\sum_{i=1}^{2}\|Lu\|^2_{L^2(Q_i)} \le \|f\|^2_{L^2(Q_i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|Lu\|^2_{L^2(Q_i)},$$

односно

$$\|Lu\|_{L^2(Q_1)} + \|Lu\|_{L^2(Q_2)} \le C\|f\|_{L^2(Q)}. \tag{5.17}$$

Заменом оцена

$$\|Lu\|_{L^2(Q_i)} = \quad \left\|p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p'\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(Q_i)} \ge \left\|p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L^2(Q_i)} - \left\|p'\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(Q_i)}, \quad i = 1, 2$$

у неједнакост (5.17) добијамо

$$\begin{aligned}\sqrt{p_0}\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L^2(Q_i)} &\le C\|f\|_{L^2(Q)} + \sum_{i=1}^{2}\left\|p'\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(Q_i)} \\ &\le C\|f\|_{L^2(Q)} + \|p\|_{W^1_\infty(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(Q)}.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Из претходне теореме следи да је

$$\|u\|_{L^2(Q)} \le \|f\|_{L^2(Q)} \quad \text{и} \quad \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(Q)} \le C_2\|f\|_{L^2(Q)}. \tag{5.19}$$

На основу неједнакости (5.15)-(5.19) следи априорна оцена (5.13). □

5.2 Апроксимација методом коначних разлика

Нека су N и M природни бројеви. У области $\bar{Q} = [0,1]\times[0,T]$ уведимо равномерну мрежу $\bar{Q}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, где је

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih \,|\, i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N;\ h = 1/N\}$$

и

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau \,|\, j = 0,\, 1,\, \ldots,\, M;\ \tau = T/M\}.$$

Уведимо такође скупове $\omega_h = \bar{\omega}_h \cap (0,1)$, $\omega_h^- = \bar{\omega}_h \cap [0,1)$, $\omega_h^+ = \bar{\omega}_h \cap (0,1]$, $\omega_\tau = \bar{\omega}_\tau \cap (0,T)$, $\omega_\tau^- = \bar{\omega}_\tau \cap [0,T)$ и $\omega_\tau^+ = \bar{\omega}_\tau \cap (0,T]$. Ради једноставности, претпоставићемо да је тачка концентрисаног капацитета чвор мреже $\xi = x_m = m/N \in \omega_h$. Користићемо стандардне ознаке из теорије коначних разлика [50]:

$$v = v(x,t), \quad \hat{v} = v(x, t+\tau),$$

$$v_i = v(x_i, t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau\,, \qquad v^j = v(x, t_j), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$v_x = \frac{v(h+h,t) - v(x,t)}{h} = v_{\bar{x}}(x+h,t), \quad v_t = \frac{v(h,t+\tau) - v(x,t)}{\tau} = v_{\bar{t}}(x, t+\tau).$$

Леви Капутов извод разломљеног реда α, $0 < \alpha < 1$, функције u на временском слоју t_j апроксимирамо са тзв. $L1$-алгоритмом [45]:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{C}}\partial^{\alpha}_{\mathrm{t},0_+} u(x,t_j) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_j} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} (t_j - t)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{j} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} (t_j - t)^{-\alpha} dt \\
&\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{j} u^k_{\bar{t}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_j - t)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j} u^k_{\bar{t}} [(t_j - t_{k-1})^{1-\alpha} - (t_j - t_k)^{1-\alpha}] \\
&= \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j} a_{j-k} u^k_{\bar{t}} =: \left(\Delta^{\alpha}_{t,0_+} u_{\bar{t}}\right)^j
\end{aligned} \tag{5.20}$$

где је низ коефицијената $a_{j-k} = (j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}$ строго опадајући:

$$1 = a_0 > a_1 > \cdots > a_{M-1} > 0. \tag{5.21}$$

Слично апроксимирамо леви Риман-Лиувилов извод разломљеног реда α функције u:

$$\begin{aligned}
\partial^{\alpha}_{t,0_+} u(x,t_j) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t_j} u(x,t)(t_j - t)^{-\alpha} dt \\
&\approx \frac{1}{\tau\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^{t_j} u(x,t)(t_j - t)^{-\alpha} dt - \int_0^{t_{j-1}} u(x,t)(t_{j-1} - t)^{-\alpha} dt \right) \\
&\approx \frac{1}{\tau\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{j} u^k \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_j - t)^{-\alpha} dt - \sum_{k=1}^{j-1} u^k \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{j-1} - t)^{-\alpha} dt \right) \\
&= \left(\Delta^{\alpha}_{t,0_+} u\right)^j_{\bar{t}}\,.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Приметимо да ако функција u задовољава почетни услов $u(x,0)=0$, тада је $\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha}u_{\bar t}\right)^j=\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha}u\right)_{\bar t}^j$. Заиста, сменом $s=t+\tau$ у последњем интегралу и померањем индекса у последњој суми израза (5.22) добијамо

$$\begin{aligned}
\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha}u\right)_{\bar t}^j &= \frac{1}{\tau\Gamma(1-\alpha)}\left(\sum_{k=1}^{j}u^k\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_j-t)^{-\alpha}dt-\sum_{k=1}^{j-1}u^k\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_j-s)^{-\alpha}ds\right)\\
&= \frac{1}{\tau\Gamma(1-\alpha)}\left(\sum_{k=1}^{j}u^k\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_j-t)^{-\alpha}dt-\sum_{k=2}^{j}u^{k-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_j-s)^{-\alpha}ds\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{j}u_{\bar t}^k\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_j-t)^{-\alpha}dt=\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha}u_{\bar t}\right)^j.
\end{aligned}$$

Почетно-гранични проблем (5.1)-(5.3) апроксимирамо следећом имплицитном диференцијском схемом:

$$(1+K\delta_{h\xi})\Delta_{t,0_+}^{\alpha}v_{\bar t}-(\bar p\,v_{\bar x})_x=f,\quad (x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau^+, \tag{5.23}$$

$$v(0,t)=0,\quad v(1,t)=0,\quad t\in\omega_\tau^+, \tag{5.24}$$

$$v(x,0)=0,\quad x\in\bar\omega_h, \tag{5.25}$$

где је

$$\bar p\,(x)=\frac{p\,(x)+p\,(x-h)}{2} \tag{5.26}$$

апроксимација коефицијента $p(x)$ и

$$\delta_{h\xi}=\delta_h(x-\xi)=\begin{cases}0, & x\in\omega_h\backslash\{\xi\}\\ 1/h, & x=\xi\end{cases} \tag{5.27}$$

мрежна Диракова функција.

Видимо да диференцијска схема (5.23)-(5.25) на сваком временском слоју t_j представља тродијагоналан систем линеарних једначина. Познато је да је број аритметичких операција које је потребно извршити да би се решио систем линеарних једначина с тродијагоналном матрицом пропорционалан с димензијом система [26]. Међутим, решење v^j на временском слоју t_j експлицитно зависи од решења на свим претходним временским слојевима t_k, $k<j$. Дакле, систем се може решити помоћу $O(N\,M^2)$ аритметичких операција (уместо $O(N\,M)$ за $\alpha=1$). Све вредности v^k морају се одмах сачувати што може бити меморијски захтевно, посебно у вишедимензионом случају.

Дефинишимо следеће дискретне скаларне производе и норме:

$$(u,v)_h=(u,v)_{L^2(\omega_h)}=h\sum_{x\in\omega_h}u(x)v(x),\quad \|v\|_h=\|v\|_{L^2(\omega_h)}=(v,v)_h^{1/2},$$

$$(u,v]_h=(u,v]_{L^2(\omega_h^+)}=h\sum_{x\in\omega_h^+}u(x)v(x),\quad \|v]|_h=\|v]|_{L^2(\omega_h^+)}=(v,v]_h^{1/2},$$

$$[u,v)_h=[u,v)_{L^2(\omega_h^-)}=h\sum_{x\in\omega_h^-}u(x)v(x),\quad |[v\|_h=|[v\|_{L^2(\omega_h^-)}=[v,v)_h^{1/2},$$

$$(u,v)_{\widetilde{h}}=(u,v)_{\widetilde{L}^2(\omega_h)}=h\sum_{x\in\omega_h}u(x)v(x)+u(\xi)v(\xi)$$

$$\|v\|_{\widetilde{h}}=\|v\|_{\widetilde{L}^2(\omega_h)}=(v,v)_{\widetilde{h}}^{1/2}=\|(1+\delta_{h\xi})^{1/2}v\|_h,$$

$$|v|_{\widetilde{H}^1(\omega_h)}=|v|_{H^1(\omega_h)}=|[v_x\|_h,\quad \|v\|_{\widetilde{H}^1(\omega_h)}=\Big(|v|^2_{\widetilde{H}^1(\omega_h)}+\|v\|^2_{L^2(\omega_h)}\Big)^{1/2},$$

$$|v|_{\widetilde{H}^2(\omega_h)}=\|(1+\delta_{h\xi})^{-1/2}v_{x\bar{x}}\|_h,\quad \|v\|_{\widetilde{H}^2(\omega_h)}=\Big(|v|^2_{\widetilde{H}^2(\omega_h)}+\|v\|^2_{\widetilde{H}^1(\omega_h)}\Big)^{1/2},$$

$$\|v\|_{L^2(Q_{h\tau})}=\left(\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\|v(\cdot,t)\|_h^2\right)^{1/2},\quad \|v]|_{L^2(Q_{h\tau})}=\left(\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\|v(\cdot,t)]|_h^2\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})}=\left(\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\|v(\cdot,t)\|_{\widetilde{h}}^2\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{\widetilde{B}^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}=\left(\|v_{\bar{x}}]|^2_{L^2(Q_{h\tau})}+\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\Delta^\alpha_{t,0+}\|v_{\bar{t}}(\cdot,t)\|^2_{\widetilde{h}}\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{\widetilde{J}^{2,\alpha}_+(Q_{h\tau})}=\left[\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\Big(\|\Delta^\alpha_{t,0+}v_{\bar{t}}(\cdot,t)\|^2_{\widetilde{L}^2(\omega_h)}+\|v(\cdot,t)\|^2_{\widetilde{H}^2(\omega_h)}\Big)\right]^{1/2}.$$

Лема 5.3. *Нека је v функција дефинисана на мрежи $\bar{\omega}_h$ која задовољава хомогене Дирихлеове граничне услове $v(0)=v(1)=0$. Тада су за $k=1,2$ полунорма $|v|_{\widetilde{H}^k(\omega_h)}$ и норма $\|v\|_{\widetilde{H}^k(\omega_h)}$ еквивалентне.*

Доказ. Релација $|v|_{\widetilde{H}^1(\omega_h)}\asymp\|v\|_{\widetilde{H}^1(\omega_h)}$ следи директно из дискретне Фридрихсове неједнакости [50]

$$\|v\|_h\le\frac{1}{\sqrt{8}}\,|[v_x\|_h. \tag{5.28}$$

Дискретна теорема потапања [50] даје

$$\|v\|_{\widetilde{h}} \leq \sqrt{\frac{3}{8}}\,|[v_x\|_h.$$

Користећи Коши-Шварцову неједнакост добијамо

$$|[v_x\|_h^2 = (-v_{x\bar{x}}, v)_h \leq \|(1+\delta_{h\xi})^{-1/2} v_{x\bar{x}}\|_h \|(1+\delta_{h\xi})^{1/2} v\|_h = |v|_{\widetilde{H}^2(\omega_h)} \|v\|_{\widetilde{h}}.$$

Из последње неједнакости директно следи

$$\|v\|^2_{\widetilde{H}^2(\omega_h)} = |v|^2_{\widetilde{H}^2(\omega_h)} + |[v_x\|_h^2 + \|v\|_h^2 \leq \left(1 + \frac{3}{8} + \frac{3}{64}\right) |v|^2_{\widetilde{H}^2(\omega_h)}.$$

□

Лема 5.4. *Нека је $p(x)$ непрекидно диференцијабилна функција. Тада је*

$$\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2} (\bar{p} v_{\bar{x}})_x\|_h \asymp \|v\|_{\widetilde{H}^2(\omega_h)}. \tag{5.29}$$

Доказ. Еквиваленција (5.29) директно следи из Леме 5.3 и репрезентације:

$$(\bar{p} v_{\bar{x}})_x = p\, v_{\bar{x}x} + \frac{1}{2}\, p_{\bar{x}} v_{\bar{x}} + \frac{1}{2}\, p_x v_x\,.$$

□

Лема 5.5. *[1] Нека је v функција дефинисана на мрежи $\bar{\omega}_\tau$ која задовољава услов $v(0) = 0$. Тада важи следећа неједнакост*

$$v^j \left(\Delta^\alpha_{t,0_+} v_{\bar{t}}\right)^j \geq \frac{1}{2} \left(\Delta^\alpha_{t,0_+} \left(v^2\right)_{\bar{t}}\right)^j.$$

Доказ. Оценимо разлику

$$\begin{aligned} v^j \left(\Delta^\alpha_{t,0_+} v_{\bar{t}}\right)^j - \frac{1}{2} \left(\Delta^\alpha_{t,0_+} \left(v^2\right)_{\bar{t}}\right)^j &= \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j} a_{j-k} v^k_{\bar{t}} \left(v^j - \frac{v^k + v^{k-1}}{2}\right) \\ &= \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j} a_{j-k} v^k_{\bar{t}} \left(\frac{v^k_{\bar{t}}}{2} + \sum_{s=k+1}^{j} v^s_{\bar{t}}\right) \\ &= \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j} a_{j-k} (v^k_{\bar{t}})^2 + \sum_{k=1}^{j} a_{j-k} v^k_{\bar{t}} \sum_{s=k+1}^{j} v^s_{\bar{t}}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j} a_{j-k}(v_{\bar t}^k)^2 + \sum_{s=2}^{j} v_{\bar t}^s \sum_{k=1}^{s-1} a_{j-k} v_{\bar t}^k\right),$$

где узимамо да је сума једнака нули ако је горња граница суме мања од доње.

Уведимо ознаку

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_{j-k} v_{\bar t}^k = w^s.$$

Тада је $v_{\bar t}^1 = w^1/a_j$, $v_{\bar t}^s = (w^{s+1} - w^s)/a_{j-s}$, $s = 2, \ldots, j$. Сада претходну једнакост можемо записати као

$$\begin{aligned}
v^j\big(\Delta_{t,0_+}^{\alpha} v_{\bar t}\big)^j - \frac{1}{2}\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha}\left(v^2\right)_{\bar t}\right)^j &= \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{1}{2}\frac{\left(w^2\right)^2}{a_{j-1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{j}\frac{\left(w^{k+1} - w^k\right)^2}{a_{j-k}}\right.\\
&\quad \left. + \sum_{s=2}^{j}\frac{w^{s+1} - w^s}{a_{j-s}}\, w^s\right)\\
&= \frac{\tau^{2-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{\left(w^2\right)^2}{a_{j-1}} + \sum_{k=2}^{j}\frac{\left(w^{k+1}\right)^2 - \left(w^k\right)^2}{a_{j-k}}\right)\\
&= \frac{\tau^{2-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)}\left(\sum_{k=2}^{j}\left(a_{j-k+1}^{-1} - a_{j-k}^{-1}\right)\left(w^k\right)^2 + \left(w^{j+1}\right)^2\right) > 0,
\end{aligned}$$

јер је $a_{j-k+1}^{-1} - a_{j-k}^{-1} > 0$. □

Лема 5.6. *Нека је функција $v(t)$ дефинисана на мрежи $\bar\omega_\tau$ и $v(0) = 0$. Тада важи следећа једнакост*

$$\tau\sum_{j=1}^{M}\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha}(v^2)_{\bar t}\right)^j = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=1}^{M} a_{M-j}(v^j)^2.$$

Доказ. Из дефиниције оператора $\Delta_{t,0_+}^{\alpha}$ добијамо

$$\tau\sum_{j=1}^{M}\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha}(v^2)_{\bar t}\right)^j = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{j} a_{j-k}(v^k)^2 - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{j} a_{j-k}(v^{k-1})^2,$$

одакле заменом редоследа сумирања следи резултат. □

Последица 5.7. *Норма $\|v\|_{\widetilde{B}^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}$ је добро дефинисана.*

Норму $\|v\|_{\widetilde{B}^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}$ можемо сматрати дискретним аналогоном норме $\|v\|_{\widetilde{B}^{1,\alpha/2}(Q)}$ јер је

$$(1-\alpha)\tau(T-t_{k-1})^{-\alpha} \leq \tau^{1-\alpha}a_{m-k} \leq (1-\alpha)\tau(T-t_k)^{-\alpha}.$$

Теорема 5.8. *Нека је $\alpha \in (0,1)$. Тада је диференцијска схема* (5.23)-(5.25) *апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену:*

$$\|v\|_{\widetilde{B}^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C\|f\|_{L^2(Q_{h\tau})}. \tag{5.30}$$

Доказ. Множећи једнакост (5.23) са $h\,v$ и користећи парцијално сумирање по чворовима мреже ω_h добијамо

$$h\sum_{x\in\omega_h} v\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}} + Kv(\xi,t)\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}}(\xi,t) + (\bar{p}v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}]_h = (f,v)_h.$$

На основу леме 5.5 и ε-неједнакости следи

$$\frac{1}{2}\,h\sum_{x\in\omega_h}\Delta^{\alpha}_{t,0_+}(v^2)_{\bar{t}} + \frac{1}{2}\,K\Delta^{\alpha}_{t,0_+}\big(v^2(\xi,t)\big)_{\bar{t}} + (\bar{p}v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}]_h \leq \varepsilon\|v\|_h^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_h^2.$$

Користећи дискретну Фридрихсову неједнакост (5.28) за $0<\varepsilon<8p_0$ даље добијамо

$$\Delta^{\alpha}_{t,0_+}\|v_{\bar{t}}\|^2_{\widetilde{h}} + \|v_{\bar{x}}]|_h^2 \leq C\|f\|_h^2.$$

Множењем последње неједнакости са τ и сумирањем по мрежи ω_τ^+ добијамо априорну оцену (5.30). $\square$

Лема 5.9. *[55] Нека је $v(t)$ функција дефинисана на мрежи $\bar{\omega}_\tau$ и $v(0)=0$. Тада важи следећа неједнакост*

$$\tau\sum_{j=1}^{M} v^j\left(\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}}\right)^j \geq \frac{T^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,\tau\sum_{j=1}^{M}(v^j)^2.$$

Доказ. Запишимо апроксимацију извода разломљеног реда α (5.20) на следећи начин

$$\begin{aligned}\left(\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}}\right)^j &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=1}^{j}a_{j-k}(v^k-v^{k-1})\\ &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left[v^j-\sum_{k=1}^{j-1}(a_{j-k-1}-a_{j-k})v^k\right].\end{aligned} \tag{5.31}$$

Помножимо једнакост (5.20) са τv^j и сумирајмо по $j = 1, 2, \ldots, M$. Тако добијамо

$$
\begin{aligned}
\tau \sum_{j=1}^{M} v^j (\Delta_{t,0_+}^{\alpha} v_{\bar{t}})^j &= \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{M} \left[v^j - \sum_{k=1}^{j-1} (a_{j-k-1} - a_{j-k})\, v^k \right] v^j \\
&= \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\sum_{j=1}^{M} \left(v^j\right)^2 - \sum_{j=2}^{M} \sum_{k=1}^{j-1} v^j v^k \left(a_{j-k-1} - a_{j-k}\right) \right] \\
&\geq \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\sum_{j=1}^{M} \left(v^j\right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{M} \sum_{k=1}^{j-1} \Big(\left(v^j\right)^2 + \left(v^k\right)^2 \Big) \left(a_{j-k-1} - a_{j-k}\right) \right] \\
&= \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\sum_{j=1}^{M} \left(v^j\right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{M} \left(v^j\right)^2 \left(a_0 - a_{j-1}\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M-1} \left(v^k\right)^2 \left(a_0 - a_{M-k}\right) \right] \\
&= \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{M} \left(v^j\right)^2 \frac{a_{j-1} + a_{M-j}}{2} \\
&\geq a_{M-1} \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{M} \left(v^j\right)^2 \geq \frac{T^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\, \tau \sum_{j=1}^{M} \left(v^j\right)^2,
\end{aligned}
$$

где смо на крају искористили неједнакост

$$
\tau T^{-\alpha} = t_M^{-\alpha} \int_{t_{M-1}}^{t_M} dt \leq \int_{t_{M-1}}^{t_M} t^{-\alpha} dt = (M^{1-\alpha} - (M-1)^{1-\alpha}) \frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} = a_{M-1} \frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}.
$$

□

Теорема 5.10. *Нека је* $p\,(x) \in C^1[0,1]$. *Тада је диференцијска схема* (5.23)-(5.25) *апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену:*

$$
\|v\|_{\tilde{\mathcal{J}}_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})} \leq C \left\| (1 + K\delta_{h\xi})^{-1/2} f \right\|_{L^2(Q_{h\tau})}. \tag{5.32}
$$

Доказ. Помножимо скаларно (5.23) са $-(1 + K\delta_{h\xi})^{-1} (\bar{p} v_{\bar{x}})_x$. Након парцијалног сумирања добијамо неједнакост

$$
\begin{aligned}
\big(\Delta_{t,0_+}^{\alpha} v_{\bar{t}\bar{x}},\ \bar{p} v_{\bar{x}}\big]_h + \left\| (1 + K\delta_{h\xi})^{-1/2} (\bar{p} v_{\bar{x}})_x \right\|_h^2 &= \big(-(1 + K\delta_{h\xi})^{-1} (\bar{p} v_{\bar{x}})_x, f \big)_h \\
&\leq \frac{1}{2} \left\| (1 + K\delta_{h\xi})^{-1/2} (\bar{p} v_{\bar{x}})_x \right\|_h^2 + \frac{1}{2} \left\| (1 + K\delta_{h\xi})^{-1/2} f \right\|_h^2
\end{aligned}
$$

која је еквивалентна са

$$\left\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}(\bar{p}v_{\bar{x}})_x\right\|_h^2 + 2\left(\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}\bar{x}},\bar{p}v_{\bar{x}}\right]_h \le \left\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}f\right\|_h^2. \qquad (5.33)$$

Слично, множећи (5.23) скаларно са $\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}}$ и користећи Коши-Шварцову неједнакост добијамо

$$\left\|(1+K\delta_{h\xi})^{1/2}\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}}\right\|_h^2 + 2\left(\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}\bar{x}},\bar{p}v_{\bar{x}}\right]_h \le \left\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}f\right\|_h^2. \qquad (5.34)$$

Из неједнакости (5.33) и (5.34) сада директно следи

$$\begin{aligned}\tau\sum_{t\in\omega_\tau}\left\|(1+K\delta_{h\xi})^{1/2}\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}}\right\|_h^2 + \tau\sum_{t\in\omega_\tau}\left\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}(\bar{p}v_{\bar{x}})_x\right\|_h^2 \\ + 4\tau\sum_{t\in\omega_\tau}\left(\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}\bar{x}},\bar{p}v_{\bar{x}}\right]_h \le 2\tau\sum_{t\in\omega_\tau}\left\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}f\right\|_h^2.\end{aligned} \qquad (5.35)$$

Из лема 5.3 и 5.5 следи да је

$$\tau\sum_{t\in\omega_\tau}\left(\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}\bar{x}},\bar{p}v_{\bar{x}}\right]_h = h\tau\sum_{x\in\omega_h^+}\sum_{t\in\omega_\tau}\bar{p}\,v_{\bar{x}}\,\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}\bar{x}} \ge 0.$$

Користећи лему 5.4 и еквиваленцију норми

$$\left\|(1+K\delta_{h\xi})^{1/2}\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}}\right\|_h \asymp \left\|(1+\delta_{h\xi})^{1/2}\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}}\right\|_h = \left\|\Delta^{\alpha}_{t,0_+}v_{\bar{t}}\right\|_{\widetilde{L}^2(\omega_h)}$$

добијамо (5.32). □

Приметимо да је (5.32) дискретни аналогон априорне оцене (5.13).

5.3 Оцена брзине конвергенције диференцијске схеме

Нека је u решење почетно-граничног проблема (5.1)-(5.3) и нека је v решење диференцијског проблема (5.23)-(5.25). Грешка $z = u - v$ задовољава услове

$$\Delta^{\alpha}_{t,0_+}(z_{\bar{t}})_i = (\bar{p}\,z_{\bar{x}})_{x,i} + \psi_i, \quad i \ne m, \quad t\in\omega_\tau^+, \qquad (5.36)$$

$$\Delta^{\alpha}_{t,0_+}(z_{\bar{t}})_m = \frac{h}{K+h}(\bar{p}\,z_{\bar{x}})_{x,m} + \psi_m, \quad t\in\omega_\tau^+, \qquad (5.37)$$

$$z(0,t)=0, \quad z(1,t)=0, \quad t\in\omega_\tau^+, \qquad (5.38)$$

$$z(x,0)=0, \quad x\in\bar\omega_h, \tag{5.39}$$

где је $x_m=\xi$,

$$\psi_i=\Delta^{\alpha}_{t,0_+}(u_{\bar t})_i-(\bar p\, u_{\bar x})_{x,i}-f_i, \quad i\neq m, \tag{5.40}$$

$$\psi_m=\Delta^{\alpha}_{t,0_+}(u_{\bar t})_m-\frac{h}{K+h}(\bar p\, u_{\bar x})_{x,m}-\frac{h}{K+h}f_m. \tag{5.41}$$

Једначине (5.36) и (5.37) можемо записати као

$$(1+K\delta_{h\xi})\Delta^{\alpha}_{t,0_+}z_{\bar t}-(\bar p\, z_{\bar x})_x=(1+K\delta_{h\xi})\psi, \quad x\in\omega_h, \quad t\in\omega_\tau^+ \tag{5.42}$$

Под претпоставком довољне глаткости функција u и p из Тејлорове формуле добијамо

$$\begin{aligned}(\bar p u_{\bar x})_x=\frac{1}{2h^2}\Bigg[&\left(2p+hp'+\frac{h^2}{2}p''+O(h^3)\right)\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(h^4)\right)-\\ &\left(2p-hp'+\frac{h^2}{2}p''+O(h^3)\right)\left(h\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(h^4)\right)\Bigg]\\ =&\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+O(h^2).\end{aligned}$$

Развијањем $\bar p u_{\bar x}$ у Тејлоров ред око тачке $\xi-h/2$ добијамо

$$\bar p u_{\bar x}\Big|_{x=\xi}=\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi-\frac{h}{2}}+O(h^2)=\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi-0}-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi-0}+O(h^2)$$

и

$$\begin{aligned}(\bar p u_{\bar x})_x\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{h}\Bigg[&\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi+0}-\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi-0}+\\ &\frac{h}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi+0}+\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi-0}\right)+O(h^2)\Bigg].\end{aligned}$$

Како је

$$\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi+0}-\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi-0}=K\partial^{\alpha}_{t,0_+}u(\xi,t)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi+0}+\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=\xi-0}=2\partial^{\alpha}_{t,0_+}u(\xi,t)-2f(\xi,t)$$

добијамо

$$|\psi|\le\left|\Delta^{\alpha}_{t,0_+}u_{\bar t}-\partial^{\alpha}_{t,0_+}u\right|+O(h^2). \tag{5.43}$$

Лема 5.11. *[55] Нека је $\alpha \in (0,1)$, $w \in C^2[0,t]$ и $t \in \omega_\tau$. Тада је*

$$\left|{}^{\mathrm{C}}\partial^{\alpha}_{\mathrm{t},0_+} w - \Delta^{\alpha}_{t,0_+} w_{\bar{t}}\right| \leq \tau^{2-\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1+2^{-\alpha})\right] \max_{0\leq s\leq t} |w''(s)|. \tag{5.44}$$

Доказ. Уведимо ознаку $\eta = \Gamma(1-\alpha)({}^{\mathrm{C}}\partial^{\alpha}_{\mathrm{t},0_+} w - \Delta^{\alpha}_{t,0_+} w_{\bar{t}})$. Тада је

$$\eta(t_n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (w'(t) - w^k_{\bar{t}})(t_n - t)^{-\alpha} dt.$$

Користећи Тејлоров развој са интегралним остатком добијамо

$$\eta(t_n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t_{k-1}}^{t} w''(t')(t' - t_{k-1}) dt' - \int_{t}^{t_k} w''(t')(t_k - t') dt' \right) (t_n - t)^{-\alpha} dt.$$

Заменом редоследа интеграције даље добијамо

$$\begin{aligned} \eta(t_n) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Bigg(&(t_n - t')^{1-\alpha} - \frac{t' - t_{k-1}}{\tau}(t_n - t_k)^{1-\alpha} \\ &- \frac{t_k - t'}{\tau}(t_n - t_{k-1})^{1-\alpha} \Bigg) w''(t') dt', \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} |\eta(t_n)| = \max_{0\leq t\leq t_n} |w''(t)| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Bigg| &(t_n - t')^{1-\alpha} - \frac{t' - t_{k-1}}{\tau}(t_n - t_k)^{1-\alpha} \\ &- \frac{t_k - t'}{\tau}(t_n - t_{k-1})^{1-\alpha} \Bigg| dt'. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Нека је $g(t) = (t_n - t)^{1-\alpha}$. Тада је

$$\begin{aligned} g(t) - \frac{t' - t_{k-1}}{\tau} g(t_k) - \frac{t_k - t'}{\tau} g(t_{k-1}) &= \frac{1}{2} g''(\xi_k)(t - t_k)(t - t_{k-1}) \\ &= \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)(t_n - \xi_k)^{-\alpha-1}(t_k - t)(t - t_{k-1}) \geq 0 \end{aligned} \tag{5.46}$$

за произвољну тачку $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$ и $t \in (t_{k-1}, t_k)$. Даље добијамо

$$\sum_{k=n-1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(g(t') - \frac{t' - t_{k-1}}{\tau} g(t_k) - \frac{t_k - t'}{\tau} g(t_{k-1}) \right) dt' = \left[\frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1+2^{-\alpha}) \right] \tau^{2-\alpha} \tag{5.47}$$

Заменом (5.46) у (5.45) добијамо

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(g(t')-\frac{t'-t_{k-1}}{\tau}g(t_k)-\frac{t_k-t'}{\tau}g(t_{k-1})\right)dt'\\
&\quad=\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n-2}(t_n-\xi_k)^{-\alpha-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t'-t_k)(t'-t_{k-1})dt\\
&\quad\le\frac{\alpha}{12}(1-\alpha)\tau^3\sum_{k=1}^{n-2}(t_n-t_k)^{-\alpha-1}\le\frac{\alpha}{12}(1-\alpha)\tau^2\int_{t_1}^{t_{n-1}}(t_n-t)^{-\alpha-1}dt\\
&\quad\le\frac{1-\alpha}{12}\tau^{2-\alpha}.
\end{aligned}\tag{5.48}
$$

□

Теорема 5.12. *Нека је* $u\in C^{4,2}(\bar{Q}_1)\cap C^{4,2}(\bar{Q}_2)\cap C(\bar{Q})$, $u(\xi,\cdot)\in C^2[0,T]$ *и* $p\in C^3[0,\xi]\cap C^3[\xi,1]$. *Тада решење* v *диференцијске схеме* (5.23)-(5.25) *конвергира ка решењу* u *почетно-граничног проблема* (5.1)-(5.3) *и важи следећа оцена брзине конвергенције:*

$$\|u-v\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})}\le C(\tau^{2-\alpha}+h^2).\tag{5.49}$$

Доказ. Множећи (5.42) са $h\tau z$, сумирајући по члановима мреже $Q_{h\tau}$, користећи ε-неједнакост и лему 5.9 добијамо

$$\frac{T^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|z\|_{\widetilde{L}(Q^2_{h\tau})}+(\bar{p}z_{\bar{x}},z_{\bar{x}}]_{L^2(Q_{h\tau})}=\varepsilon\|z\|^2_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})}+\frac{1}{4\varepsilon}\|\psi\|^2_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})}$$

Користећи неједнакост

$$\|z\|^2_{\tilde{h}}=\|z\|^2_h+Kz^2(\xi)\le\frac{1}{8}\,\|z_{\bar{x}}]|^2_h+K\max_{\omega_h}|z|^2\le\left(\frac{1}{8}+\frac{K}{4}\right)\|z_{\bar{x}}]|^2_h,$$

за довољно мало $\varepsilon>0$ добијамо

$$\tau\sum_{j=1}^{M}\|z\|^2_{\tilde{h}}\le\tilde{C}\tau\sum_{j=1}^{M}||\psi^j||^2_{\tilde{h}},$$

где је $\tilde{C}=\text{const.}>0$. Резултат (5.49) следи директно из претходне неједнакости и (5.43)-(5.44). □

Теорема 5.13. *Нека је* $u\in C^{4,2}(\bar{Q}_1)\cap C^{4,2}(\bar{Q}_2)\cap C(\bar{Q})$, $u(\xi,\cdot)\in C^2[0,T]$ *и* $p\in C^3[0,\xi]\cap C^3[\xi,1]$. *Тада решење* v *диференцијске схеме* (5.23)-(5.25) *конвергира* *ка решењу u почетно-граничног проблема* (5.1)-(5.3) *и важи следећа оцена брзине конвергенције:*

$$\|u - v\|_{\widetilde{B}^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \le C(\tau^{2-\alpha} + h^2).$$

Доказ. Изводи се аналогно доказу теорема 5.12 и 5.8. □

Теорема 5.14. *Нека је* $u \in C^{4,2}(\bar{Q}_1) \cap C^{4,2}(\bar{Q}_2) \cap C(\bar{Q})$, $u(\xi, \cdot) \in C^2[0,T]$ *и* $p \in C^3[0,\xi] \cap C^3[\xi,1]$. *Тада решење v диференцијске схеме* (5.23)-(5.25) *конвергира ка решењу u почетно-граничног проблема* (5.1)-(5.3) *и важи следећа оцена брзине конвергенције:*

$$\|u - v\|_{\widetilde{\mathcal{I}}_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})} \le C(\tau^{2-\alpha} + h^2). \tag{5.50}$$

Доказ. Нека је u решење почетно-граничног проблема (5.1)-(5.3) и v решење диференцијског проблема (5.23)-(5.25). Тада грешка $z = u - v$ задовољава диференцијску схему (5.36)-(5.39). Из априорне оцене (5.32) директно следи да је

$$\|z\|_{\widetilde{\mathcal{I}}_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})} \le C\|\psi\|_{\widetilde{L}(Q_{h\tau})}.$$

Резултат (5.50) следи из претходне неједнакости и (5.43)-(5.44). □

Ако је десна страна f прекидна функција тада диференцијска схема (5.23)-(5.25) није добро дефинисана. У том случају једначину (5.23) апроксимирамо диференцијском схемом у којој је усредњена десна страна:

$$(1 + K\delta_{h\xi})\Delta_{t,0_+}^{\alpha} v_{\bar{t}} - (\bar{p}v_{\bar{x}})_x = T_x^2 f, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau^+, \tag{5.51}$$

где је T_x Стекловљев оператор усредњавања [51]:

$$T_x f(x,t) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x + hx', t)\,\mathrm{d}x',$$
$$T_x^2 f(x,t) = T_x\left(T_x f(x,t)\right) = \int_{-1}^{1} (1 - |x'|) f(x + hx', t)\,\mathrm{d}x',$$
$$T_x^{2-} f(x,t) = 2\int_{-1}^{0} (1 + x') f(x + hx', t)\,\mathrm{d}x',$$
$$T_x^{2+} f(x,t) = 2\int_{0}^{1} (1 - x') f(x + hx', t)\,\mathrm{d}x'.$$

Такође претпостављамо да коефицијент $p(x)$ може имати прекид прве врсте у тачки $x = \xi$ и дефинишемо вредности $\bar{p}(\xi)$ и $\bar{p}(\xi + h)$ на следећи начин:

$$\bar{p}(\xi) = [p(\xi - 0) + p(\xi - h)]/2\,, \qquad \bar{p}(\xi + h) = [p(\xi + h) + p(\xi + 0)]/2\,.$$

Граничне и почетни услов апроксимирамо поново са (5.24) и (5.25).

Показаћемо да диференцијска схема (5.51),(5.24),(5.25) конвергира под слабијим условима него диференцијска схема (5.23)-(5.25).

Теорема 5.15. *Нека је* $u \in C^{0,2}(\bar{Q}) \cap C^{\alpha}_{+}([0,T], H^2(0,\xi)) \cap C^{\alpha}_{+}([0,T], H^2(\xi,1)) \cap C([0,T], H^3(0,\xi)) \cap C([0,T], H^3(\xi,1))$ *и* $p \in H^3(0,\xi) \cap H^3(\xi,1)$. *Тада решење* v *диференцијске схеме* (5.51),(5.24),(5.25) *конвергира ка решењу* u *почетно-граничног проблема* (5.1)-(5.3) *и важи следећа оцена брзине конвергенције:*

$$\|z\|_{\widetilde{J}^{2,\alpha}_{+}(Q_{h\tau})} \le C(\tau^{2-\alpha} + h^2). \tag{5.52}$$

Доказ. Нека је u решење (5.1)-(5.3) и v решење (5.51),(5.24),(5.25). Тада грешка $z = u - v$ задовољава следећу диференцијску схему

$$\begin{gathered}(1 + K\delta_{h\xi})\Delta^{\alpha}_{t,0_+} z_{\bar{t}} - (\bar{p} z_{\bar{x}})_x = \varphi, \quad x \in \omega_h,\, t \in \omega_\tau \\ z(0,t) = 0, \quad z(1,t) = 0, \quad t \in \omega^{+}_{\tau}, \\ z(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h,\end{gathered} \tag{5.53}$$

где је

$$\varphi = (1 + K\delta_{h\xi})\phi + \chi + \zeta,$$

и

$$\phi = \Delta^{\alpha}_{t,0_+} u_{\bar{t}} - \partial^{\alpha}_{t,0_+} u, \qquad \chi = \partial^{\alpha}_{t,0_+}(u - T^2_x u), \qquad \zeta = T^2_x \biggl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr)\biggr) - (\bar{p} u_{\bar{x}})_x.$$

Из теореме 5.10 директно добијамо следећу априорну оцену за проблем (5.53)

$$\begin{aligned}\|z\|_{\widetilde{J}^{2,\alpha}_{+}(Q_{h\tau})} \le C\Bigl(&\|\phi\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})} + \|(1 + K\delta_{h\xi})^{-1/2}\chi\|_{L^2(Q_{h\tau})} \\ &+ \|(1 + K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta\|_{L^2(Q_{h\tau})}\Bigr).\end{aligned} \tag{5.54}$$

Користећи неједнакост (5.44) добијамо

$$\|\phi\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})} \le C\tau^{2-\alpha} \max_{t\in[0,T]} \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \le C\tau^{2-\alpha} \|u\|_{C^{0,2}(\bar{Q})}. \tag{5.55}$$

Користећи релације

$$\int_{x-h}^{x+h} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) dx' = h$$

и

$$\int_{x-h}^{x+h} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) (x'-x) dx' = 0$$

добијамо да је

$$\begin{aligned}
T_x^2 u - u =& \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) u(x',t)dx' - u(x,t)\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) dx' \\
=& \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x}^{x'} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) \frac{\partial u(x'',t)}{\partial x} dx''dx' \\
&- \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x}^{x'} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) dx''dx' \\
=& \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x}^{x'}\int_{x}^{x''} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) \frac{\partial^2 u(x''',t)}{\partial x^2} dx'''dx''dx',
\end{aligned}$$

за $x \neq \xi$, док за $x = \xi$ имамо

$$\begin{aligned}
T_x^2 u - u =\;& \frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi+h}\int_{\xi}^{x'} \left(1 - \frac{x'-\xi}{h}\right) \frac{\partial u(x'',t)}{\partial x} dx''dx' \\
&- \frac{1}{h}\int_{\xi-h}^{\xi}\int_{x'}^{\xi} \left(1 + \frac{x'-\xi}{h}\right) \frac{\partial u(x'',t)}{\partial x} dx''dx' \\
&- \frac{1}{h}\frac{\partial u(\xi+0,t)}{\partial x}\int_{\xi}^{\xi+h}\int_{\xi}^{x'} \left(1 - \frac{x'-\xi}{h}\right) dx''dx' \\
&+ \frac{1}{h}\frac{\partial u(\xi-0,t)}{\partial x}\int_{\xi-h}^{\xi}\int_{x'}^{\xi} \left(1 + \frac{x'-\xi}{h}\right) dx''dx' \\
&+ \frac{h}{6}\left(\frac{\partial u(\xi+0,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(\xi-0)}{\partial x}\right) \\
=\;& \frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi+h}\int_{\xi}^{x'}\int_{\xi}^{x''} \left(1 - \frac{x'-\xi}{h}\right) \frac{\partial^2 u(x''',t)}{\partial x^2} dx'''dx''dx' \\
&+ \frac{1}{h}\int_{\xi-h}^{\xi}\int_{x'}^{\xi}\int_{x''}^{\xi} \left(1 + \frac{x'-\xi}{h}\right) \frac{\partial^2 u(x''',t)}{\partial x^2} dx'''dx''dx' \\
&+ \frac{h}{6}\left(\frac{\partial u(\xi+0,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(\xi-0)}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Како је

$$\|[1+K\delta_{h\xi}]^{-1/2}\chi\|_h^2 = h\sum_{\omega_h\setminus\{\xi\}}|\chi|^2 + \frac{h^2}{K+h}|\chi(\xi,t)|^2$$

користећи претходне интегралне репрезентације и Собољевљеву теорему о трагу директно се добија оцена

$$\begin{aligned}
&\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\chi\|_{L^2(Q_{h\tau})} \\
&\qquad \le Ch^2 \max_{t\in[0,T]}\left(\|\partial^\alpha_{t,0_+}u(\cdot,t)\|_{H^2(0,\xi)} + \|\partial^\alpha_{t,0_+}u(\cdot,t)\|_{H^2(\xi,1)}\right) \\
&\qquad \le Ch^2\left(\|u\|_{C^\alpha_+([0,T],H^2(0,\xi))} + \|u\|_{C^\alpha_+([0,T],H^2(\xi,1))}\right).
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Члан ζ можемо декомпоновати на следећи начин: $\zeta=\sum_{k=1}^6\zeta_k$, где је

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= T_x^2\left(p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \left(T_x^2 p\right)\left(T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \\
\zeta_2 &= \left(T_x^2 p - p\right)\left(T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \\
\zeta_3 &= T_x^2\left(p'\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(T_x^2 p'\right)\left(T_x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\
\zeta_4 &= \left(T_x^2 p' - \frac{1}{2}\left(p_x + p_{\bar x}\right)\right)\left(T_x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\
\zeta_5 &= \frac{1}{2}\left(p_x + p_{\bar x}\right)\left(T_x^2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}(u_{\bar x} + u_x)\right), \\
\zeta_6 &= -\frac{1}{4}\left(p_x - p_{\bar x}\right)\left(u_x - u_{\bar x}\right),
\end{aligned}$$

за $x=x_i\ne\xi$, док за $x=\xi$ аналогно имамо

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{1}{2}\left[T_x^{2-}\left(p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \left(T_x^{2-}p\right)\left(T_x^{2-}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[T_x^{2+}\left(p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \left(T_x^{2+}p\right)\left(T_x^{2+}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right], \\
\zeta_2 &= \frac{1}{2}\left[\left(T_x^{2-}p\right) - p(\xi-0)\right]\left(T_x^{2-}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(T_x^{2+}p\right) - p(\xi+0)\right]\left(T_x^{2+}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \\
\zeta_3 &= \frac{1}{2}\left[T_x^{2-}\left(p'\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(T_x^{2-}p'\right)\left(T_x^{2-}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[T_x^{2+}\left(p'\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(T_x^{2+}p'\right)\left(T_x^{2+}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right], \\
\zeta_4 &= \frac{1}{2}\left[\left(T_x^{2-}p'\right) - p_{\bar x}\right]\left(T_x^{2-}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(T_x^{2+}p'\right) - p_x\right]\left(T_x^{2+}\frac{\partial u}{\partial x}\right),
\end{aligned}$$

$$\zeta_5 = \frac{1}{2}\, p_{\bar{x}} \left[\left(T_x^{2-} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u_{\bar{x}} \right] + \frac{1}{2}\, p_x \left[\left(T_x^{2+} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u_x \right],$$
$$\zeta_6 = 0\,.$$

За $x \neq \xi$, функционал ζ_1 можемо записати на следећи начин

$$\begin{aligned}
\zeta_1(x,t) = \quad & \frac{1}{h^2} \int_{x-h}^{x+h} \int_{x-h}^{x+h} \left(1 - \frac{|x''-x|}{h}\right) \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) p(x') \frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial x^2} dx'' dx' \\
& - \frac{1}{h^2} \int_{x-h}^{x+h} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) p(x') dx' \int_{x-h}^{x+h} \left(1 - \frac{|x''-x|}{h}\right) \frac{\partial^2 u(x'',t)}{\partial x^2} dx'' \\
= \quad & \frac{1}{2h^2} \int_{x-h}^{x+h} \int_{x-h}^{x+h} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) \left(1 - \frac{|x''-x|}{h}\right) (p(x'') - p(x')) \times \\
& \times \left(\frac{\partial^2 u(x'',t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial x^2} \right) dx'' dx' \\
= \quad & \frac{1}{2h^2} \int_{x-h}^{x+h} \int_{x-h}^{x+h} \int_{x'}^{x''} \int_{x'}^{x''} \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right) \left(1 - \frac{|x''-x|}{h}\right) p'(y') \times \\
& \times \frac{\partial^3 u(y'',t)}{\partial x^3} \, dy'' dy' dx'' dx'.
\end{aligned}$$

Користећи Коши-Шварцову неједнакост добијамо

$$|\zeta_1| \leq C h^{3/2} \|p\|_{C^1[x-h,x+h]} \|u(\cdot,t)\|_{H^3(x-h,x+h)}.$$

За $x = \xi$ аналогно добијамо

$$\begin{aligned}
\zeta_1(\xi,t) = \quad & \frac{1}{h^2} \int_{\xi-h}^{\xi} \int_{\xi-h}^{\xi} \int_{x'}^{x''} \int_{x'}^{x''} \left(1 + \frac{x'-\xi}{h}\right) \left(1 + \frac{x''-\xi}{h}\right) p'(y') \\
& \times \frac{\partial^3 u(y'',t)}{\partial x^3} \, dy'' dy' dx'' dx' \\
& + \frac{1}{h^2} \int_{\xi}^{\xi+h} \int_{\xi}^{\xi+h} \int_{x'}^{x''} \int_{x'}^{x''} \left(1 - \frac{x'-\xi}{h}\right) \left(1 - \frac{x''-\xi}{h}\right) p'(y') \\
& \times \frac{\partial^3 u(y'',t)}{\partial x^3} \, dy'' dy' dx'' dx'
\end{aligned}$$

одакле следи да је

$$|\zeta_1(\xi,t)| \leq C h^{3/2} \left(\|p\|_{C^1[\xi-h,\xi]} \|u(\cdot,t)\|_{H^3(\xi-h,\xi)} + \|p\|_{C^1[\xi,\xi+h]} \|u(\cdot,t)\|_{H^3(\xi,\xi+h)} \right).$$

Сумирајући по члановима мреже $Q_{h\tau}$ и користећи потапање $H^2 \hookrightarrow C^1$ за функције једне промењливе добијамо

$$\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta_1\|_{L^2(Q_{h\tau})} \le Ch^2\big(\,\|p\|_{H^2(0,\xi)}\|u\|_{C([0,T],H^3(0,\xi))} + \|p\|_{H^2(\xi,1)}\|u\|_{C([0,T],H^3(\xi,1))}\big). \tag{5.57}$$

Функционал ζ_2 можемо оценити на следећи начин

$$|\zeta_2| \le Ch^{3/2}\|p\|_{H^2(x-h,x+h)}\|u(\cdot,t)\|_{C^2[x-h,x+h]} \quad \text{за} \quad x\ne\xi,$$

$$|\zeta_2| \le Ch^{3/2}(\|p\|_{H^2(\xi,\xi+h)}\|u(\cdot,t)\|_{C^2[\xi,\xi+h]}+\|p\|_{H^2(\xi-h,\xi)}\|u(\cdot,t)\|_{C^2[\xi-h,\xi]}) \quad \text{за} \quad x=\xi.$$

Сумирајући по члановима мреже $Q_{h\tau}$ и користећи потапање $H^3\hookrightarrow C^2$ за функције једне промењливе добијамо

$$\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta_2\|_{L^2(Q_{h\tau})} \le Ch^2\big(\,\|p\|_{H^2(0,\xi)}\|u\|_{C([0,T],H^3(0,\xi))} + \|p\|_{H^2(\xi,1)}\|u\|_{C([0,T],H^3(\xi,1))}\big). \tag{5.58}$$

Користећи интегралну репрезентацију

$$\begin{aligned}\zeta_3(x,t) = \quad & \frac{1}{2h^2}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x''}^{x'}\int_{x''}^{x'}\left(1-\frac{|x'-x|}{h}\right)\left(1-\frac{|x''-x|}{h}\right)\\ & \times p''(y')\frac{\partial u^2(y'',t)}{\partial x^2}dy'dy''dx'dx'',\end{aligned}$$

за $x\ne\xi$ и

$$\begin{aligned}\zeta_3(\xi,t) = \quad & \frac{1}{h^2}\int_{\xi-h}^{\xi}\int_{\xi-h}^{\xi}\int_{x''}^{x'}\int_{x''}^{x'}\left(1+\frac{x'-\xi}{h}\right)\left(1+\frac{x''-\xi}{h}\right)\\ & \times p''(y')\frac{\partial u^2(y'',t)}{\partial x^2}dy'dy''dx'dx''\\ & + \frac{1}{h^2}\int_{\xi}^{\xi+h}\int_{\xi}^{\xi+h}\int_{x''}^{x'}\int_{x''}^{x'}\left(1-\frac{x'-\xi}{h}\right)\left(1-\frac{x''-\xi}{h}\right)\\ & \times p''(y')\frac{\partial u^2(y'',t)}{\partial x^2}dy'dy''dx'dx'',\end{aligned}$$

добијамо

$$\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta_3\|_{L^2(Q_{h\tau})} \le Ch^2\big(\,\|p\|_{H^2(0,\xi)}\|u\|_{C([0,T],H^3(0,\xi))} + \|p\|_{H^2(\xi,1)}\|u\|_{C([0,T],H^3(\xi,1))}\big). \tag{5.59}$$

Функционал ζ_4 запишимо као

$$\zeta_4 = \left(T_x^2 p' - \frac{1}{2}\left(p_x + p_{\bar{x}}\right)\right)\left(T_x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \zeta_{4,1}\left(T_x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

и оценимо $\zeta_{4,1}$ помоћу леме Брамбла-Хилберта. Линеарном сменом $x' = h\tilde{x} + x$ пресликајмо интервал $e = (x-h, x+h)$ на $E = (-1,1)$ и уведимо ознаку $\tilde{p}(\tilde{x}) = p(x + h\tilde{x})$. Тада је за $x \neq \xi$

$$\zeta_{4,1} = \frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{1}\left(1 - |\tilde{x}|\right)\tilde{p}'(\tilde{x})d\tilde{x} - \frac{\tilde{p}(1) - \tilde{p}(-1)}{2}\right)$$

и

$$|\zeta_{4,1}| \leq Ch^{-1}\|\tilde{p}\|_{C^1(\bar{E})} \leq \frac{C}{h}\|\tilde{p}\|_{H^3(E)},$$

Функционал $\zeta_{4,1}$ се анулира када је $\tilde{p}$ полином другог степена. Применом леме Брамбла-Хилберта добијамо

$$|\zeta_{4,1}| \leq \frac{C}{h}|\tilde{p}|_{H^3(E)},$$

а повратком на стару променљиву

$$|\zeta_{4,1}| \leq Ch^{3/2}|p|_{H^3(e)},$$

односно

$$|\zeta_4| \leq Ch^{3/2}|p|_{H^3(e)}\left\|u(\cdot,t)\right\|_{C^1(\bar{e})}.$$

Слично, за $x = \xi$, функционал ζ_4 је једнак:

$$\begin{aligned}\zeta_4 =& \frac{1}{h}\left(2\int_{-1}^{0}(1+\tilde{x})\tilde{p}'(\tilde{x})d\tilde{x} - \tilde{p}(0) + \tilde{p}(-1)\right)\left(T_x^{2-}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{1}{h}\left(2\int_{0}^{1}(1-\tilde{x})\tilde{p}'(\tilde{x})d\tilde{x} - \tilde{p}(1) + \tilde{p}(0)\right)\left(T_x^{2+}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ =& \zeta_{4,1}^{-}\left(T_x^{2-}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \zeta_{4,1}^{+}\left(T_x^{2+}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

Приметимо да су $\zeta_{4,1}^{-}$ и $\zeta_{4,1}^{+}$ ограничени линеарни функционали од $\tilde{p} \in H^2(-1,0)$, односно $\tilde{p} \in H^2(0,1)$, који се анулирају када је $\tilde{p} = 1, \tilde{x}$. Примењујући лему Брамбла-Хилберта и враћајући се на стару променљиву, после очигледне мајорације добијамо:

$$|\zeta_4(\xi)| \leq Ch^{1/2}\left(|p|_{H^2(\xi-h,\xi)}\|u\|_{C^1[\xi-h,\xi]} + |p|_{H^2(\xi,\xi+h)}\|u\|_{C^1[\xi,\xi+h]}\right).$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_h добијамо

$$\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta_4\|_h^2 \leq Ch \sum_{x\in\omega_h,\, x\neq\xi} h^3|p|^2_{H^3(e)}\|u\|^2_{C^1(\bar{e})}$$
$$+\frac{Ch^3}{K+h}\left(|p|^2_{H^2(\xi-h,\xi)}\|u\|^2_{C^1[\xi-h,\xi]}+|p|^2_{H^2(\xi,\xi+h)}\|u\|^2_{C^1[\xi,\xi+h]}\right)=I+II.$$

Први члан се лако оцењује користећи потапање $H^2 \hookrightarrow C^1$:

$$I \leq Ch^4(\|p\|^2_{H^3(0,\xi)}\|u\|^2_{H^2(0,\xi)}+\|p\|^2_{H^3(\xi,1)}\|u\|^2_{H^2(\xi,1)}).$$

Користећи неједнакост (види [27])

$$\|p\|_{L^2(0,\varepsilon)} \leq C\sqrt{\varepsilon}\|p\|_{H^1(0,1)}, \qquad 0<\varepsilon<1, \tag{5.60}$$

добијамо

$$|p|_{H^2(\xi-h,\xi)} \leq C\sqrt{h}\,\|p\|_{H^3(0,\xi)} \quad \text{и} \quad |p|_{H^2(\xi,\xi+h)} \leq C\sqrt{h}\,\|p\|_{H^3(\xi,1)}.$$

Из ових неједнакости коначно добијамо оцену

$$\begin{aligned}\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta_4\|_h \leq h^2 \big(&\|p\|_{H^3(0,\xi)}\|u(\cdot,t)\|_{H^2(0,\xi)}\\ &+\|p\|_{H^3(\xi,1)}\|u(\cdot,t)\|_{H^2(\xi,1)}\big)\,.\end{aligned} \tag{5.61}$$

Функционал ζ_5 запишимо као

$$\zeta_5=\frac{1}{2}\,(p_x+p_{\bar{x}})\left(T_x^2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}(u_{\bar{x}}+u_x)\right)=\frac{1}{2}\,(p_x+p_{\bar{x}})\,\zeta_{5,1}, \quad x\neq\xi.$$

Тада је

$$\zeta_{5,1}=\frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{1}(1-|\tilde{x}|)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}d\tilde{x}-\frac{\tilde{u}(1,t)-\tilde{u}(-1,t)}{2}\right),$$

односно

$$|\zeta_{51}| \leq \frac{C}{h}\|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{C(\bar{E})} \leq \frac{C}{h}\|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{H^3(E)}.$$

Овај функционал се анулира када је $\tilde{u}=1,\tilde{x},\tilde{x}^2$, па је на основу леме Брамбла-Хилберта

$$|\zeta_{51}| \leq \frac{C}{h}|\tilde{u}(\cdot,t)|_{H^3(E)}.$$

Враћањем на старе променљиве добијамо

$$|\zeta_5| \leq Ch^{3/2}\|p\|_{C^1(\bar{e})}\|u(\cdot,t)\|_{H^3(e)}.$$

Ако је $x = \xi$, тада на сличан начин добијамо

$$|\zeta_5| \le Ch^{1/2}(\|p\|_{C^1[\xi-h,\xi]}\|u(\cdot,t)\|_{H^2(\xi-h,\xi)} + \|p\|_{C^1[\xi,\xi+h]}\|u(\cdot,t)\|_{H^2(\xi,\xi+h)})$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_h и коришћењем потапања $H^2 \hookrightarrow C^1$, $H^3 \hookrightarrow H^2$ и неједнакости (5.3) добијамо

$$\begin{aligned}\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta_5\|_h \le Ch^2 \big(&\|p\|_{H^2(0,\xi)}\|u(\cdot,t)\|_{H^3(0,\xi)} \\ &+\|p\|_{H^2(\xi,1)}\|u(\cdot,t)\|_{H^3(\xi,1)}\big)\,.\end{aligned} \tag{5.62}$$

За $x \ne \xi$, функционал ζ_6 можемо записати на следећи начин

$$\zeta_6 = -\frac{1}{4}h^2\left(T_x^2 p''\right)\left(T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

Даље добијамо

$$|\zeta_6| \le Ch^{3/2}\|p\|_{H^2(x-h,x+h)}\|u(\cdot,t)\|_{C^2[x-h,x+h]}, \quad x \ne \xi.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_h добијамо

$$\begin{aligned}\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta_6\|_h \le h^2 \big(&\|p\|_{H^2(0,\xi)}\|u(\cdot,t)\|_{H^3(0,\xi)} \\ &+\|p\|_{H^2(\xi,1)}\|u(\cdot,t)\|_{H^3(\xi,1)}\big)\,.\end{aligned} \tag{5.63}$$

Сада резултат (5.52) следи из (5.55)-(5.63). $\square$

5.4 Нумерички експеримент

Да бисмо испитали конвергенцију диференцијске схеме, решимо проблем (5.1)-(5.3) за $K = 4\pi$, $\xi = \frac{1}{2}$, $T = 1$ и

$$f(x,t) = \sin(\pi x)\left[\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \pi^2 t^2\right] + 2\left|\sin(2\pi x)\right|\left[\frac{t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)} + \frac{4\pi^2 t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right].$$

Тачно решење проблема је

$$u(x,t) = \sin(\pi x)t^2 + |\sin(2\pi x)|\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Означимо грешку у максималној норми са

$$\|e(h,\tau)\|_\infty = \|u-v\|_\infty = \max_{\bar{\omega}_\tau}\left(\max_{\bar{\omega}_h}|u-v|\right)$$

и грешку у $\widetilde{B}_h^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})$ норми

$$\|e(h,\tau)\|_B = \|u-v\|_{\widetilde{B}_h^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}. \tag{5.64}$$

У табели 1 су дати експериментални резултати за различите временске кораке τ када је просторни корак фиксиране величине $h = 2^{-13}$. Из табеле, можемо закључити да је ред конвергенције по временској променљивој једнак $2-\alpha$.

У табели 2 су дати експериментални резултати за мало и фиксирано $\tau = 2^{-14}$ са различитим просторним корацима h. Разлог због кога је коришћен много мањи корак τ јесте да бисмо осигурали да доминантни утицај на ред грешке буде од просторне дискретизације. Из табеле можемо закључити да је ред конвергенције по просторној променљивој једнак 2.

График апроксимираног решења на временском слоју $t=1$ са кораком $h=\tau=1/60$ је приказан на слици 2, где је такође приказано и тачно решење ради упоређивања.

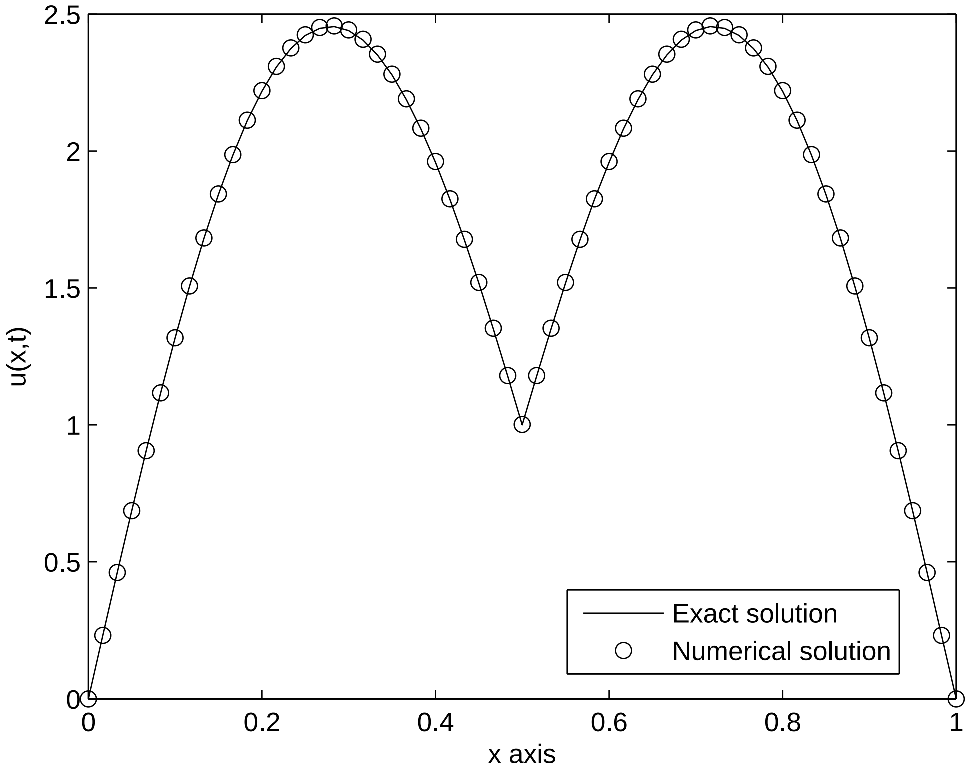
На основу приказаних резултата можемо видети да нумеричко решење добијено из диференцијске шеме (5.23)-(5.25) добро апроксимира тачно решење.

Табела 1: Експериментални резултати и ред конвергенције по временској промењљивој (последња колона) за $h = 2^{-13}$

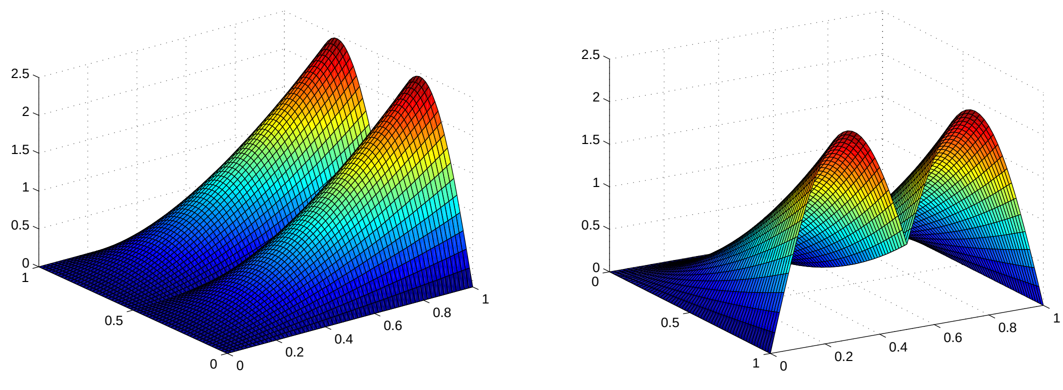
α	τ	$\|\|e(h,\tau)\|\|_\infty$	$\|\|e(h,\tau)\|\|_B$	$\log_2 \frac{\|\|e(h,\tau)\|\|_B}{\|\|e(h,\tau/2)\|\|_B}$
0.5	2^{-5}	2.205968e-3	6.190359e-3	1.47
	2^{-6}	7.936232e-4	2.222931e-3	1.48
	2^{-7}	2.839064e-4	7.995761e-4	1.48
	2^{-8}	1.011713e-4	2.857433e-5	1.49
	2^{-9}	3.594643e-5	1.018082e-5	
0.7	2^{-5}	6.428188e-3	1.448575e-2	1.29
	2^{-6}	2.636782e-3	5.916592e-3	1.29
	2^{-7}	1.076979e-3	2.416312e-3	1.29
	2^{-8}	4.389248e-4	9.859266e-4	1.29
	2^{-9}	1.786251e-5	4.018979e-4	
0.9	2^{-5}	1.704275e-2	2.768540e-2	1.11
	2^{-6}	7.995080e-3	1.285650e-2	1.10
	2^{-7}	3.742127e-3	5.998412e-3	1.10
	2^{-8}	1.749317e-3	2.803601e-3	1.10
	2^{-9}	8.171687e-4	1.311121e-3	
1	2^{-5}	2.690193e-2	3.435696e-2	1.01
	2^{-6}	1.347861e-2	1.703289e-2	1.01
	2^{-7}	6.746233e-3	8.479882e-3	1.00
	2^{-8}	3.337484e-3	4.230770e-3	1.00
	2^{-9}	1.687831e-3	2.113081e-3	

Табела 2: Експериментални резултати и ред конвергенције по просторној променљивој (последња колона) за $\tau = 2^{-14}$

α	h	$\|\|e(h,\tau)\|\|_\infty$	$\|\|e(h,\tau)\|\|_B$	$\log_2 \frac{\|\|e(h,\tau)\|\|_B}{\|\|e(h/2,\tau)\|\|_B}$
0.5	2^{-4}	1.449066e-2	4.464869e-2	1.99
	2^{-5}	3.660336e-3	1.120727e-2	1.98
	2^{-6}	9.136818e-4	2.848326e-3	1.98
	2^{-7}	2.285259e-4	7.218827e-4	
0.7	2^{-4}	1.691375e-2	5.220505e-2	1.99
	2^{-5}	4.257733e-3	1.313580e-2	1.99
	2^{-6}	1.063423e-3	3.314222e-3	1.99
	2^{-7}	2.668165e-4	8.351539e-4	
0.9	2^{-4}	1.929084e-2	5.879114e-2	1.97
	2^{-5}	4.847840e-3	1.502163e-2	1.98
	2^{-6}	1.217797e-3	3.815850e-3	1.99
	2^{-7}	3.109223e-4	9.617699e-4	
1	2^{-4}	2.042462e-2	6.185711e-2	1.96
	2^{-5}	5.137748e-3	1.595421e-2	1.97
	2^{-6}	1.303556e-3	4.073481e-3	1.98
	2^{-7}	3.447313e-4	1.029635e-3	



Слика 1: Решење на временском слоју $t = 1$ за $h = \tau = 1/60$ и $\alpha = 0.7$



Слика 2: Тачно решење

6 Једначина супердифузије са концентрисаним капацитетом

Нека је $\Omega = (0,1)$, $I = (0,T)$ и $Q = \Omega \times I$. Посматрамо следећу једначину за $1 < \alpha < 2$:

$$[1 + K\delta(x-\xi)]\partial^{\alpha}_{t,0_+}u - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{6.1}$$

са граничним и почетним условима:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad \forall t \in I, \tag{6.2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \tag{6.3}$$

где је K позитивна константа и $\delta(x)$ Диракова дистрибуција. Слично као код проблема субдифузије са концентрисаним капацитетом, једначина (6.1) је еквивалентна са:

$$\partial^{\alpha}_{t,0_+}u - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \quad (x,t) \in ((0,\xi) \cup (\xi,1)) \times I, \tag{6.4}$$

док су за $x = \xi$ испуњени следећи услови конјугације

$$\begin{aligned} [u]_{x=\xi} &= u(\xi+0,t) - u(\xi-0,t) = 0, \\ \left[p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi} &= K\partial^{\alpha}_{t,0_+}u(\xi,t). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Претпостављамо да функција $p\,(x)$ задовољава услове регуларности (5.8). Дефинишемо просторе као у поглављу 5.1.

Нека је A неограничен, самоконјугован, позитивно дефинитан оператор чији је домен $\mathcal{D}(A)$ густ у реалном Хилбертовом простору H који је снабдевен скаларним производом $(\cdot,\cdot)$ и нормом $\|\cdot\|$. Тада билинеарни функционал $(u,v)_A := (Au,v)$, $u,v \in \mathcal{D}(A)$ задовољава аксиоме скаларног производа, а величина $\|u\|_A := (u,u)_A^{1/2}$ аксиоме норме. Затворење скупа $\mathcal{D}(A)$ у норми $\|\cdot\|_A$ називамо енергетским простором оператора A и означавамо га са H_A. Простор H_A је густо и непрекидно потопљен у H. Оператор A има јединствени квадратни корен $A^{1/2}$ и важи $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H_A$ и $(u,v)_A = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)$ за свако $u,v \in \mathcal{D}(A)$.

Слично, затворењем скупа $\mathcal{D}(A^{-1})$ у норми $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ која је индукована скаларним производом $(u,v)_{A^{-1}} = (A^{-1}u, v)$ добијамо енергецки простор $H_{A^{-1}}$. Тада је простор $H \equiv H'$ непрекидно и густо потопљен у $H'_A = H_{A^{-1}}$ и кажемо да простори H_A, H и $H_{A^{-1}}$ чине Гељфандову тројку

$$H_A \hookrightarrow H \hookrightarrow H_{A^{-1}}.$$

Скаларни производ $(\cdot,\cdot)$ можемо непрекидно продужити на $H_A \times H_{A^{-1}}$, а оператор A се продужује тако да $A : H_A \to H_{A^{-1}}$.

Дефинишимо следеће операторе

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad Bu = [1 + K\delta(x-\xi)]u(x,t).$$

Оператор A пресликава скуп $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ у $L^2(\Omega)$. Ако је испуњен услов (5.8), оператор A је позитивно дефинитан, самоконјугован оператор и важи

$$(u,v)_A = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)dx \quad \text{за} \quad u,v \in \mathring{H}^1(\Omega)$$

и

$$\|u\|_A = \int_0^1 p(x)|u'(x)|^2 dx \asymp \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{за} \quad u,v \in \mathring{H}^1(0,1),$$

па можемо узети да је $H_A = \mathring{H}^1(\Omega)$.

Оператор B је самоконјугован, позитивно дефинитан оператор, па величина $(u,v)_B := (Bu,v)$ задовољава аксиоме скаларног производа и важи

$$(u,v)_B = \int_0^1 u(x)v(x)dx + Ku(\xi)v(\xi).$$

Оператор B се дефинише на простору H_B који се добија затворењем простора $C_0^\infty(\Omega)$ у норми

$$\|u\|_B^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + Ku^2(\xi) \asymp \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + u^2(\xi) = \|u\|_{\widetilde{L}^2(\Omega)}^2,$$

па можемо ставити да је $H_B = \widetilde{L}^2(\Omega)$. За оператор B „негативна" норма задовољава релацију

$$\|u\|_{B^{-1}} = (B^{-1}u,u)^{1/2} = \sup_{0\neq v\in H_B} \frac{|(u,v)|}{\|v\|_B}.$$

Очигледно важи релација

$$H_A = \mathring{H}^1(\Omega) \hookrightarrow C[0,1] \hookrightarrow \widetilde{L}^2(\Omega) = H_B.$$

Сада једначину (6.1) можемо записати као

$$B\partial_{t,0_+}^{\alpha} u + Au = f, \quad (x,t) \in Q. \tag{6.6}$$

Делујући на (6.6) оператором $B^{-1/2}$ и уводећи ознаке

$$\tilde{u} = B^{1/2}u, \quad \tilde{A} = B^{-1/2}AB^{-1/2}, \quad \tilde{f} = B^{-1/2}f \tag{6.7}$$

проблем (6.1)-(6.3) се своди на

$$\partial_{t,0_+}^{\alpha}\tilde{u} + \tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}, \quad (x,t) \in Q, \tag{6.8}$$

$$\tilde{u}(0,t) = 0, \quad \tilde{u}(1,t) = 0, \quad t \in I, \tag{6.9}$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{6.10}$$

Оператор $\tilde{A}$ је самоконјугован, позитивно дефинитан линеаран оператор на $H = L^2(\Omega)$:

$$(\tilde{A}u,u) = (B^{-1/2}AB^{-1/2}u,u) = (AB^{-1/2}u, B^{-1/2}u) \geq C(BB^{-1/2}u, B^{-1/2}u) = C\|u\|,$$

за свако $u \in \mathcal{D}(\tilde{A})$.

6.1 Априорне оцене

Теорема 6.1. *Нека је $\alpha \in (1,2)$, $f \in L^2(Q)$ и нека су испуњени услови (5.8). Тада је проблем (6.1)-(6.3) добро постављен у простору $C_+^{\alpha-1}(\bar{I}, \widetilde{L}^2(\Omega)) \cap H^{(\alpha-1)/2}(I, \mathring{H}^1(\Omega))$ и његово решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\max_{t\in[0,T]} \|\partial_{t,0_+}^{\alpha-1}u\|_{\widetilde{L}^2(\Omega)} + \left\| \partial_{t,0_+}^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(Q)} \leq C\|f\|_{L^2(Q)}. \tag{6.11}$$

Доказ. Нека је $\beta = \alpha - 1$. Тада је $\partial_{t,0_+}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial t}\partial_{t,0_+}^{\beta}u$. Множењем једначине (6.1) са $2\partial_{t,0_+}^{\beta}u$ и парцијалним интеграљењем по области Ω добијамо

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\partial_{t,0_+}^{\beta}u\|_{\widetilde{L}^2(\Omega)}^2 + 2\left(p\frac{\partial u}{\partial x}, \partial_{t,0+}^{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L^2(\Omega)} = 2(f, \partial_{t,0+}^{\beta}u)_{L^2(\Omega)},$$

Интеграљењем последње једнакости у границама од 0 до t, где је $t \le T$ коришћењем леме 3.9, особина (4.7), (4.8) и (5.8) и оцењивањем десне стране помоћу Коши-Шварцове неједнакости, добијамо

$$\begin{aligned}\|\partial^{\beta}_{t,0+}u(\cdot,t)\|^2_{\widetilde{L}^2(\Omega)}+2p_0\cos\frac{\pi\beta}{2}\left\|\partial^{\beta/2}_{t,0+}\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2((0,\infty),L^2(\Omega))}&\\ \le \|\partial^{\beta}_{t,0+}u(\cdot,0)\|^2_{\widetilde{L}^2(\Omega)}+2\|f\|_{L^2(Q_t)}\|\partial^{\beta}_{t,\,0+}u\|_{L^2(Q_t)}&\\ \le 2\sqrt{T}\max_{t\in[0,T]}\|\partial^{\beta}_{t,0+}u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(Q)}&\\ \le 2\sqrt{T}\max_{t\in[0,T]}\|\partial^{\beta}_{t,0+}u(\cdot,t)\|_{\widetilde{L}^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(Q)},&\qquad(6.12)\end{aligned}$$

где је $Q_t=(0,1)\times(0,t)$. Изостављањем другог позитивног сабирка на левој страни добијамо

$$\max_{t\in[0,T]}\|\partial^{\beta}_{t,0+}u\|_{\widetilde{L}^2(\Omega)}\le 2\sqrt{T}\|f\|_{L^2(Q)}. \qquad (6.13)$$

Слично, изостављањем првог позитивног сабирка на левој страни неједнакости (6.12), узимајући $t=T$ и користећи оцену (6.13) добијамо

$$\left\|\partial^{\beta/2}_{t,\,0+}\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(Q)}\le\left\|\partial^{\beta/2}_{t,\,0+}\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2((0,\infty),L^2(\Omega))}\le\sqrt{\frac{2T}{p_0\cos\frac{\pi\beta}{2}}}\|f\|_{L^2(Q)}. \qquad (6.14)$$

Резултат (6.11) следи из (6.13) и (6.14). □

Теорема 6.2. *Нека је* $\alpha\in(1,2)$, $f\in L^2(Q)$ *и нека су испуњени услови* (5.8). *Тада је проблем* (6.1)-(6.3) *добро постављен у простору* $\mathring{H}^{(\alpha+1)/2}_l(I,\widetilde{L}^2(\Omega))\cap C(\bar{I},\mathring{H}^1(\Omega))$ *и његово решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\left\|\partial^{\frac{\alpha+1}{2}}_{t,0+}u\right\|_{\widetilde{L}^2(Q)}+\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}\le C\|f\|_{L^2(Q)}. \qquad (6.15)$$

Доказ. Нека је $\beta=\alpha-1$. Из особине (3.15) следи да за функцију u која задовољава почетни услов $u(x,0)=0$ важи

$$\partial^{\alpha}_{t,\,0+}u=\frac{\partial}{\partial t}\partial^{\beta}_{t,\,0+}u=\partial^{\beta}_{t,\,0+}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Множењем једначине (6.1) са $2\frac{\partial u}{\partial t}$ и парцијалним интеграљењем по области Ω добијамо

$$2\left(\partial_{t,0+}^{\beta}\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\widetilde{L}^2(\Omega)}+2\left(p\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)_{L^2(\Omega)}=2\left(f,\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

Интеграљењем претходне једнакости у границама од 0 до t, где је $t\leq T$, коришћењем леме 3.9, особина (4.7), (4.8) и (5.8) и оцењивањем десне стране једнакости са ε-неједнакошћу добијамо

$$\begin{aligned}&2\cos\frac{\pi\beta}{2}\left\|\partial_{t,0+}^{\beta/2}\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{\widetilde{L}^2(Q)}+p_0\left\|\frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\ \leq\|p\|_{L^\infty(\Omega)}&\left\|\frac{\partial u(\cdot,0)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+2\varepsilon\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q_t)}+\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(Q_t)},\end{aligned}\tag{6.16}$$

где је $Q_t=(0,1)\times(0,t)$. На основу последице (4.10) и теореме (3.1) следи да је

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q_t)}&=\left\|\partial_{t,0+}^{-\beta/2}\partial_{t,0+}^{\beta/2}\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q_t)}\\&\leq\left(\frac{t^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2+1)}\right)^2\left\|\partial_{t,0+}^{\beta/2}\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q_t)}\\&\leq\left(\frac{T^{\beta/2}}{\Gamma(\beta/2+1)}\right)^2\left\|\partial_{t,0+}^{\beta/2}\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)}\end{aligned}\tag{6.17}$$

Бирајући $\varepsilon=\frac{\Gamma^2(\beta/2+1)}{2T^\beta}\cos\frac{\pi\beta}{2}$ добијамо

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}\leq C\|f\|_{L^2(Q)},\tag{6.18}$$

где је $C=(2\varepsilon p_0)^{-1/2}$.

Слично, изостављањем другог позитивног сабирка на левој страни неједнакости (6.16) и бирајући $t=T$, за $\varepsilon=\frac{\Gamma^2(\beta/2+1)}{2T^\beta}\cos\frac{\pi\beta}{2}$ добија се оцена

$$\left\|\partial_{t,0+}^{\beta/2}\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{\widetilde{L}^2(Q)}\leq C\|f\|_{L^2(Q)},\tag{6.19}$$

где је $C=\left(2\varepsilon\cos\frac{\pi\beta}{2}\right)^{-1/2}$. Резултат (6.15) следи из (6.18) и (6.19). $\square$

Теорема 6.3. *Нека је* $\alpha\in(1,2)$, $g\in L^2(Q)$ *и нека су испуњени услови* (5.8).

Тада решење проблема

$$[1+K\delta(x-\xi)]\partial_{t,0+}^{\alpha}u-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial g(x,t)}{\partial x},\quad (x,t)\in Q, \tag{6.20}$$

са граничним и почетним условима (6.2) *и* (6.3) *задовољава следећу априорну оцену*

$$\max_{t\in[0,T]}\|u\|_{\widetilde{L}^2(\Omega)}\leq C\|g\|_{L^2(Q)}.$$

Доказ. Прво делујмо оператором $B^{-1/2}$ на једнакост (6.20), а затим помножимо са $\tilde{A}^{-1}\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}$ и интегралимо по области Ω. Уводећи ознаке (6.7), добијамо

$$\left(\partial_{t,0+}^{\beta}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right)_{\widetilde{A}^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega)}=\left(B^{-1/2}\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right)_{\widetilde{A}^{-1}}=\left(\widetilde{A}^{-1/2}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x},\widetilde{A}^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega)},$$

где је $\partial\tilde{g}/\partial x=B^{-1/2}\partial g/\partial x$ и $\beta=\alpha-1$. Даље, аналогним поступком као у доказу теореме 6.2 добијамо

$$\begin{aligned}&2\cos\frac{\pi\beta}{2}\int_0^T\left\|\partial_{t,0+}^{\beta/2}\frac{\partial\tilde{u}(\cdot,t)}{\partial t}\right\|^2_{\widetilde{A}^{-1}}dt+\|\tilde{u}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\|\tilde{u}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\&+2\varepsilon\frac{T^{\beta}}{\Gamma^2(\beta/2+1)}\int_0^T\left\|\partial_{t,0+}^{\beta/2}\frac{\partial\widetilde{u}(\cdot,t)}{\partial t}\right\|^2_{\widetilde{A}^{-1}}dt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T\left\|\frac{\partial\tilde{g}(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{\widetilde{A}^{-1}}dt.\end{aligned} \tag{6.21}$$

Узимајући $\varepsilon=\frac{\Gamma^2(\beta/2+1)}{T^{\beta}}\cos\frac{\pi\beta}{2}$ и користећи особину

$$p_0\|u\|^2_{A_0}\leq\|u\|^2_{A}\leq\|p\|_{L^\infty}\|u\|^2_{A_0},$$

где је $A_0u=-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$, повратком на старе променљиве добијамо да је

$$\max_{t\in[0,T]}\|u(\cdot,t)\|^2_{\widetilde{L}^2(\Omega)}\leq C\int_0^T\left\|\frac{\partial g(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{A_0^{-1}}dt\leq C\|g\|^2_{L^2(Q)}.$$

□

Теорема 6.4. *Нека је* $\alpha\in(1,2)$, $g(x,0)\in H_{A^{-1}}$ *и* $g\in L^2((0,T);H_{B^{-1}})$ *и нека су испуњени услови* (5.8). *Тада решење проблема*

$$[1+K\delta(x-\xi)]\partial_{t,0+}^{\alpha}u-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial g}{\partial t} \tag{6.22}$$

са граничним и почетним условима (6.2) *и* (6.3) *задовољава следећу апри-*

орну оцену

$$\|u\|^2_{\widetilde{L}^2(Q)} \leq C\left(\|g(\cdot,0)\|^2_{A^{-1}} + \int_0^T \|g(\cdot,t)\|^2_{B^{-1}}dt\right).$$

Доказ. Делујмо с оператором $B^{-1/2}$ на једнакост (6.22) и запишимо је у облику

$$\frac{\partial}{\partial t}(\partial^\beta_{t,0_+}\tilde{u} - \tilde{g}) + \widetilde{A}\tilde{u} = 0, \tag{6.23}$$

где је $\tilde{g} = B^{-1/2}g$ и $\beta = \alpha - 1$, док су остале ознаке дефинисане са (6.7). Помножимо једначину (6.23) са $\widetilde{A}^{-1}(\partial^\beta_{t,0_+}\tilde{u} - \tilde{g})$ и интегралимо по области Ω. Добијамо

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\partial^\beta_{t,0_+}\tilde{u} - \tilde{g}\|^2_{\widetilde{A}^{-1}} + (\tilde{u}, \partial^\beta_{t,0_+}\tilde{u})_{L^2(\Omega)} = (\tilde{g}, \tilde{u})_{L^2(\Omega)}.$$

Интеграљењем последње једнакости по t од 0 до T и коришћењем ε-неједнакости добијамо

$$\begin{aligned}\|\partial^\beta_{t,0_+}\tilde{u}(\cdot,T) - \tilde{g}(\cdot,T)\|^2_{\widetilde{A}^{-1}} + 2\cos\frac{\beta\pi}{2}\|\partial^{\beta/2}_{t,0_+}\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} &\leq \|\tilde{g}(x,0)\|^2_{\widetilde{A}^{-1}} \\ &+ 2\varepsilon\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|\tilde{g}\|^2_{L^2(Q)}.\end{aligned}$$

Изостављајући први позитивни сабирак са леве стране неједнакости и користећи особину

$$\|\partial^{\beta/2}_{t,0_+}\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} \geq C\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)},$$

за довољно мало ε, повратком на старе променљиве добијамо

$$\|u\|^2_{\widetilde{L}^2(Q)} \leq C\left(\|g(\cdot,0)\|^2_{A^{-1}} + \int_0^T \|g(\cdot,t)\|^2_{B^{-1}}dt\right).$$

□

6.2 Апроксимација методом коначних разлика

У области $\bar{Q} = [0,1] \times [0,T]$ уводимо равномерну мрежу као у одељку 5.2.

Капутов извод разломљеног реда $\alpha \in (1,2)$ за $t = t_j$ можемо апроксимирати на следећи начин [55]:

$${}^C\partial^\alpha_{t,0_+}u(x,t_j) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=1}^{j}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial s^2}(t_j - s)^{1-\alpha}ds$$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{t}}^{k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_j - s)^{1-\alpha} ds$$

$$= \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{k=1}^{j} a_{j-k} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{t}}^{k} = \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{t}}\right)^{j} \tag{6.24}$$

где је

$$a_{j-k} = (j-k+1)^{2-\alpha} - (j-k)^{2-\alpha} > 0.$$

Користећи апроксимацију

$$u_t^{k-1} = \frac{\partial u(x, t_{k-1/2})}{\partial t} + O(\tau^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x, t_k)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t_{k-1})}{\partial t}\right) + O(\tau^2)$$

и (6.24), Капутов извод разломљеног реда $\alpha \in (1,2)$ сада за $t = t_{j-1/2}$ апроксимирамо са

$$\begin{aligned}
{}^{C}\partial_{t,0_+}^{\alpha} u^{j-1/2} &\approx \frac{1}{2}\left({}^{C}\partial_{t,0_+}^{\alpha} u^{j} + {}^{C}\partial_{t,0_+}^{\alpha} u^{j-1}\right) \\
&\approx \frac{\tau^{2-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)} \left[\sum_{k=2}^{j} a_{j-k} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{k} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{k-1}\right)_{\bar{t}} + a_{j-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{t}}^{1}\right] \\
&\approx \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left[\sum_{k=2}^{j} a_{j-k} u_{t\bar{t}}^{k} + \frac{a_{j-1}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\bar{t}}^{1}\right].
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Слично, Риман-Лиувилов извод разломљеног реда $\alpha \in (1,2)$ за $t = t_{j-1/2}$, $j = 1, 2, ..., M$ апроксимирамо са

$$\begin{aligned}
\partial_{t,0_+}^{\alpha} u^{j-1/2} &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\partial_{t,0_+}^{\alpha-1} u^{j} + \frac{\partial}{\partial t}\partial_{t,0_+}^{\alpha-1} u^{j-1}\right) \\
&\approx \left(\partial_{t,0_+}^{\alpha-1} u\right)_{\bar{t}}^{j} \\
&\approx \frac{\tau^{2-\alpha}}{\tau\Gamma(3-\alpha)} \left(\sum_{k=2}^{j} a_{j-k} u_{\bar{t}}^{k} - \sum_{k=2}^{j-1} a_{j-k-1} u_{\bar{t}}^{k} + \frac{a_{j-1}}{\tau} u^{1} - \frac{a_{j-2}}{\tau} u^{1}\right) \\
&= \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left(\sum_{k=3}^{j} a_{j-k} u_{t\bar{t}}^{k} + \frac{a_{j-2}}{\tau} u_{\bar{t}}^{2} + \frac{a_{j-1}}{\tau^2} u^{1} - \frac{a_{j-2}}{\tau^2} u^{1}\right).
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Додајемо нови слој $t_{-1} = -\tau$ и дефинишемо

$$u(x, -\tau) = u^{-1} = 0, \quad \frac{\partial u(x, -\tau)}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{-1} = 0.$$

Овај поступак је оправдан тиме што функцију u која задовољава почетне услове(6.3) можемо непрекидно продужити нулом по променљивој t на интервал $(-\infty, T)$.

Сада су апроксимације (6.25) и (6.26) еквивалентне и можемо их записати на следећи начин

$$ {}^{C}\partial_{t,0_+}^{\alpha} u^{j-1/2} = \partial_{t,0_+}^{\alpha} u^{j-1/2} \approx (\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} u_{\bar{t}})_{\bar{t}}^{j} = \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} u_{\bar{t}\bar{t}}\right)^{j}, \tag{6.27} $$

где је оператор $\Delta_{t,0_+}^{\alpha}$ дефинисан у одељку 5.2. Уведимо ознаку

$$ \bar{v}^{j} = \frac{v^{j} + v^{j-1}}{2}. $$

Користићемо следећи Стекловљев оператор усредњавања

$$ T_t f(x,t) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x, t + \tau t')\, dt' = T_t^{-} f(x, t + \tau/2). $$

Нека је H_h коначнодимензиони Хилбертов простор са скаларним производом $(\cdot,\cdot)_h$ и нормом $\|\cdot\|_h$. Нека су A_h и B_h самоконјуговани позитивни линеарни оператори у H_h, који не зависе од променљиве t, у општем случају некомутативни. Са H_{A_h}, где је $A_h = A_h^{*}$, означавамо простор $H_{A_h} = H_h$ са скаларним производом $(v,w)_{A_h} = (A_h v, w)_h$ и нормом $\|v\|_{A_h} = (A_h v, v)_h^{1/2}$.

Нека је $p \in C(\overline{\Omega})$. Почетно-гранични проблем (6.1)-(6.3) апроксимирамо следећом диференцијском схемом:

$$ \begin{gathered} B_h \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}}\right)_{\bar{t}}^{j} + A_h \bar{v}^{j} = \varphi^{j}, \\ j = 1, \ldots, M, \quad x \in \omega_h, \end{gathered} \tag{6.28} $$

$$ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_{\tau}, \tag{6.29} $$

$$ v(x,0) = 0, \quad v_{\bar{t}}^{0} = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{6.30} $$

где је

$$ \varphi^{j} = T_t T_x^2 f(x, (t_j + t_{j-1})/2), \quad A_h v = -(\bar{p} v_{\bar{x}})_x, \quad B_h v = [1 + K\delta_{h\xi}]\, v, $$

док су $\bar{p}$ и $\delta_{h\xi}$ дефинисани са (5.26) и (5.27), респективно.

Дефинишемо следеће енергетске норме:

$$\|v\|_{A_h}^2 = (A_h v, v)_h = h \sum_{x\in\omega_h} \bar{p}\, v_x^2(x) \asymp \|[v_x\|_h^2,$$

$$\|v\|_{B_h}^2 = (B_h v, v)_h = h \sum_{x\in\omega_h} v^2(x) + K v^2(\xi) \asymp \|v\|_{\tilde{h}}^2,$$

$$\|v\|_{B_h^{-1}}^2 = (B_h^{-1} v, v)_h = h \sum_{x\in\omega_h\setminus\{\xi\}} v^2(x) + \frac{h^2}{K+h} v^2(\xi),$$

$$\|v\|_{B^{(\alpha-1)/2}(\omega_\tau^+, H^1(\omega_h))} = \tau^{2-\alpha} \sum_{j=1}^{M} a_{M-j} \|v(\cdot,t)\|_{H^1(\omega_h)}.$$

Теорема 6.5. *Диференцијска схема* (6.28)-(6.30) *је апсолутно стабилна и њено решење задовољава априорну оцену*

$$\max_{1\le j\le M} \left\| \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}}\right)^j \right\|_{\tilde{h}}^2 + \|\bar{v}\|^2_{B^{(\alpha-1)/2}\left(\omega_\tau^+, H^1(\omega_h)\right)} \le C\tau \sum_{j=1}^{M} \left\|\varphi^j\right\|^2_{B_h^{-1}}. \tag{6.31}$$

Доказ. Помножимо једнакост (6.28) скаларно са $\tau\left((\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}})^j + (\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}})^{j-1}\right)$ $= 2\tau\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \bar{v}_{\bar{t}}\right)^j$. Добијамо

$$\left\|B_h^{1/2} (\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}})^j\right\|_h^2 - \left\|B_h^{1/2} (\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}})^{j-1}\right\|_h^2 + 2\tau\left(A_h \bar{v}^j, (\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \bar{v}_{\bar{t}})^j\right)_h = 2\tau\left(\varphi^j, \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}}\right)^j\right)_h.$$

На основу леме 5.5 је

$$\left(A_h \bar{v}, (\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \bar{v}_{\bar{t}})^j\right)_h = \left(A_h^{1/2} \bar{v}^j, \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} A_h^{1/2} \bar{v}_{\bar{t}}\right)^j\right)_h \ge \frac{1}{2}\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1}\left(\|A_h^{1/2} \bar{v}\|_h^2\right)_{\bar{t}}\right)^j.$$

Сумирањем по j од 1 до k, $k \le M$, добијамо

$$\begin{aligned} &\left\|B_h^{1/2} \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}}\right)^k\right\|_h^2 + \sum_{j=1}^{k}\left(\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \|A_h^{1/2} \bar{v}\|_h^2\right)^j - \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \|A_h^{1/2} \bar{v}\|_h^2\right)^{j-1}\right) \\ &\qquad \le \left\|B_h^{1/2} \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}}\right)^0\right\|_h^2 + 2\tau \sum_{j=1}^{k}\left(\varphi^j, (\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}})^j\right)_h. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Други члан с леве стране је ненегативан на основу леме 5.6, док је први члан са десне стране једнак нули због почетног услова. Тако добијамо

$$\left\|B_h^{1/2} \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v\right)_{\bar{t}}^k\right\|_h^2 \le \quad 2\tau \sum_{k=1}^{j}\left(\varphi^j, \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \bar{v}_{\bar{t}}\right)^j\right)_h$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau \sum_{j=1}^{k} \left(B_h^{-1/2} \varphi^j, B_h^{1/2} \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}} \right)^j + B_h^{1/2} \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}} \right)^{j-1} \right)_h \\
&\leq \frac{\tau}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{M} \left\| B_h^{-1/2} \varphi^j \right\|_h^2 + T\varepsilon \max_{1\leq j\leq M} \left\| B_h^{1/2} \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}} \right)^j \right\|_h^2 .
\end{aligned}
$$

Узимајући максимум леве стране по k, за довољно мало $\varepsilon\,(\varepsilon < 1/T)$ добијамо

$$
\max_{1\leq k\leq M} \left\| B_h^{1/2} \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} v_{\bar{t}} \right)^k \right\|_h^2 \leq C\tau \sum_{j=1}^{M} \left\| B_h^{-1/2} \varphi^j \right\|_h^j . \tag{6.33}
$$

Стављајући у (6.32) $k = M$ и изостављајући први позитиван члан са леве стране, добијамо

$$
\sum_{j=1}^{M} \left[\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \left\| A_h^{1/2} \bar{v} \right\|_h^2 \right)^j - \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \left\| A_h^{1/2} \bar{v} \right\|_h^2 \right)^{j-1} \right] \leq 2\tau \sum_{j=1}^{M} \left(\varphi^j, \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \bar{v}_{\bar{t}} \right)^j \right)_h .
$$

Оцењујући десну страну на исти начин као у претходном случају, стављајући, на пример $\varepsilon = 1$, и користећи неједнакост (6.33), добијамо

$$
\sum_{j=1}^{M} \left[\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \left\| A_h^{1/2} \bar{v} \right\|_h^2 \right)^j - \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \left\| A_h^{1/2} \bar{v} \right\|_h^2 \right)^{j-1} \right] \leq C\tau \sum_{j=1}^{M} \left\| B_h^{-1/2} \varphi^j \right\|_h^2 .
$$

Користећи лему 5.6 добијамо

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{M} \left[\left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \left\| A_h^{1/2} \bar{v} \right\|_h^2 \right)^j - \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} \left\| A_h^{1/2} \bar{v} \right\|_h^2 \right)^{j-1} \right] = \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^{M} a_{M-j} \left\| A_h^{1/2} \bar{v}^j \right\|_h^2 \\
&\qquad \geq \frac{p_0 \tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^{M} a_{M-j} ||\bar{v}_{\bar{x}}^j]|_h^2 \geq C \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^{M} a_{M-j} ||\bar{v}^j||_{H^1(\omega_h)}^2 \\
&\qquad = C_\alpha \|\bar{v}\|_{B^{(\alpha-1)/2}(\omega_\tau^+, H^1(\omega_h))}^2 ,
\end{aligned}
$$

одакле даље следи

$$
\|\bar{v}\|_{B^{(\alpha-1)/2}(\omega_\tau^+, H^1(\omega_h))}^2 \leq C\tau \sum_{j=1}^{M} \left\| B_h^{-1/2} \varphi^j \right\|_h^2 . \tag{6.34}
$$

Сабирањем неједнакости (6.33) и (6.34) добијамо априорну оцену (6.31). $\square$

Приметимо да је априорна оцена (6.31) дискретни аналогон априорне оцене (6.11).

Теорема 6.6. *Диференцијска схема* (6.28)-(6.30) *је апсолутно стабилна и њено решење задовољава априорну оцену*

$$\|v_{\bar t}\|^2_{B^{(\alpha-1)/2}(\omega_\tau^+,\,\widetilde{L}^2(\omega_h))} + \max_{1\le j\le M}\|v_x]|^2_h \le C\sum_{j=1}^{M}\|\varphi\|^2_{B_h^{-1}}. \tag{6.35}$$

Доказ. Помножимо једнакост (6.28) скаларно са $2\tau v_{\bar t}$. Добијамо

$$2\tau\left(B_h\left(\Delta^{\alpha-1}_{t,0_+}v_{\bar t}\right)_{\bar t}, v_{\bar t}\right)_h + 2\tau\left(A_h\bar v, v_{\bar t}\right)_h = 2\tau\left(\varphi, v_{\bar t}\right)_h.$$

Сумирањем по j од 1 до k, $k\le M$, добијамо

$$2\tau\sum_{j=1}^{k}\left(B_h\left(\Delta^{\alpha-1}_{t,0+}v_{\bar t}\right)^j_{\bar t}, v^j_{\bar t}\right)_h + \left\|A_h^{1/2}v^k\right\|^2_h \le \left\|A_h^{1/2}v^0\right\|^2_h + 2\tau\sum_{j=1}^{k}\left(\varphi^j, v^j_{\bar t}\right)_h. \tag{6.36}$$

Користећи ε-неједнакост и лему 5.9 десну страну можемо оценити са

$$\begin{aligned}2\tau\sum_{j=1}^{k}(\varphi^j, v^j_{\bar t})_h \le&\frac{\tau}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\left\|B_h^{-1/2}\varphi^j\right\|^2_h + \tau\varepsilon\sum_{j=1}^{k}\left\|B_h^{1/2}v^j_{\bar t}\right\|^2_h\\ \le&\frac{\tau}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M}\left\|B_h^{-1/2}\varphi^j\right\|^2_h + \varepsilon\frac{\Gamma(2-\alpha)}{T^{1-\alpha}}\tau\sum_{j=1}^{k}\left(B_h(\Delta^{\alpha-1}_{t,0+}v_{\bar t})^j_{\bar t}, v^j_{\bar t}\right)_h.\end{aligned}$$

За довољно мало $\varepsilon>0$ $(2-\varepsilon\Gamma(2-\alpha)T^{\alpha-1}>0)$ из неједнакости (6.36) добијамо да је

$$\tau\sum_{j=1}^{k}\left(B_h(\Delta^{\alpha-1}_{t,0+}v_{\bar t})^j_{\bar t}, v^j_{\bar t}\right)_h + \left\|A_h^{1/2}v^k\right\|^2_h \le C\tau\sum_{j=1}^{M}\left\|B_h^{-1/2}\varphi^j\right\|^2_h, \tag{6.37}$$

за $k\le M$.

Даље, користећи леме 5.5 и 5.6 имамо да је

$$\begin{aligned}\tau\sum_{j=1}^{k}\left(B_h(\Delta^{\alpha-1}_{t,0+}v_{\bar t})^j_{\bar t}, v^j_{\bar t}\right)_h \ge&\frac{1}{2}\tau\sum_{j=1}^{k}\left(\Delta^{\alpha-1}_{t,0+}\left(\|B_h^{1/2}v_{\bar t}\|^2_h\right)_{\bar t}\right)^j\\ =&\frac{\tau^{2-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)}\sum_{j=1}^{k}a_{k-j}\|B_h^{1/2}v_{\bar t}\|^2_h.\end{aligned}$$

Изостављањем другог сабирка са леве стране неједнакости (6.37) и бирајући $k=M$ добијамо

$$\|B_h^{1/2}v_{\bar{t}}\|^2_{B^{(\alpha-1)/2}(\omega_\tau^+,L^2(\omega_h))} \leq C\|B_h^{-1/2}\varphi\|^2_{L^2(Q_{h\tau})}. \tag{6.38}$$

Слично, изостављањем првог сабирка са леве стране неједнакости (6.37) и узимањем максимума леве стране по k добијамо

$$\max_{1\leq k\leq M} p_0\|v^k_{\bar{x}}]|^2_h \leq \max_{1\leq k\leq M}\|A_h^{1/2}v^k\|^2_h \leq C\|B_h^{-1/2}\varphi\|^2_{L^2(Q_{h\tau})}. \tag{6.39}$$

Даље, из неједнакости (6.38) и (6.39) следи оцена (6.35). □

6.3 Оцена брзине конвергенције диференцијске схеме

Нека је u решење почетно-граничног проблема (6.1)-(6.3) и v решење диференцијског проблема (6.28)-(6.25). Тада грешка $z=u-v$ задовољава једнакост

$$B_h\left(\Delta^{\alpha-1}_{t,0_+}z_{\bar{t}}\right)^j_{\bar{t}} + A_h\bar{z}^j = -\varphi^j + B_h\left(\Delta^{\alpha-1}_{t,0_+}u_{\bar{t}}\right)^j_{\bar{t}} + A_h\bar{u}^j =: \psi^j, \tag{6.40}$$

где је

$$\begin{aligned}\varphi =& T_tT_x^2 f\left(x,t+\tau/2\right) = T_t^- T_x^2 f(x,t)\\ =& T_t^-T_x^2\partial^\alpha_{t,0_+}u + KT_t^-T_x^2\delta(x-\xi)\partial^\alpha_{t,0_+}u - T_t^-T_x^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\\ =& T_x^2\left(\partial^{\alpha-1}_{t,0_+}u\right)_{\bar{t}} + K\delta_{h\xi}\left(\partial^{\alpha-1}_{t,0_+}u\right)_{\bar{t}} - T_t^-T_x^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right).\end{aligned}$$

Сада је грешка одсецања једнака

$$\begin{aligned}\psi =& -T_x^2\left(\partial^{\alpha-1}_{t,0_+}u\right)_{\bar{t}} - K\delta_{h\xi}\left(\partial^{\alpha-1}_{t,0_+}u\right)_{\bar{t}} + T_t^-T_x^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\\ &+ [1+K\delta_{h\xi}]\left(\Delta^{\alpha-1}_{t,0_+}u_{\bar{t}}\right)_{\bar{t}} - (\bar{p}\bar{u}_{\bar{x}})_x + (\partial^{\alpha-1}_{t,0_+}u)_{\bar{t}} - (\partial^{\alpha-1}_{t,0_+}u)_{\bar{t}}\\ =& \left(\partial^{\alpha-1}_{t,0_+}(u-T_x^2u)\right)_{\bar{t}} + [1+K\delta_{h\xi}]\left(\Delta^{\alpha-1}_{t,0_+}u_{\bar{t}} - \partial^{\alpha-1}_{t,0_+}u\right)_{\bar{t}}\\ &+ T_t^-T_x^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) - (\bar{p}\bar{u}_{\bar{x}})_x\end{aligned}$$

Дакле, грешка $z=u-v$ задовољава следећу диференцијску схему

$$
\begin{gathered}
B_h(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} z_{\bar{t}})_{\bar{t}}^j + A_h \bar{z}^j = B_h \chi_{\bar{t}}^j + \eta_{\bar{t}}^j + \zeta_x^j, \\
j = 1, 2, ..., M, \quad x \in \omega_h,
\end{gathered}
\tag{6.41}
$$

$$
z(0,t) = 0, \quad z(1,t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau \,, \tag{6.42}
$$

$$
z(x,0) = 0, \quad z_{\bar{t}}(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{6.43}
$$

где је

$$
\chi = \Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} u_{\bar{t}} - \partial_{t,0_+}^{\alpha-1} u, \quad \eta = \partial_{t,0_+}^{\alpha-1}\big(u - T_x^2 u\big) \quad \text{и} \quad \zeta = T_t^- T_x^- \left(p \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \bar{p} \bar{u}_{\bar{x}}.
$$

Лема 6.7. *[55] Нека је $\alpha \in (1,2)$, $w \in C^3[0,t]$ и $t \in \omega_\tau$. Тада је*

$$
|(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} w_{\bar{t}})_{\bar{t}} - {}^{\mathrm{C}}\partial_{\mathrm{t},0_+}^{\alpha} w| \leq C\tau^{3-\alpha} \max_{0 \leq s \leq t} |w'''(s)| \,. \tag{6.44}
$$

Теорема 6.8. *Нека је $u \in C^{0,3}(\bar{Q}) \cap C_+^{\alpha}\left([0,T], H^2(0,\xi)\right) \cap C_+^{\alpha}\left([0,T], H^2(\xi,1)\right) \cap C\left([0,T], H^3(0,\xi)\right) \cap C\left([0,T], H^3(\xi,1)\right)$ и $p \in H^3(0,\xi) \cap H^3(\xi,1)$. Тада решење v диференцијске схеме (6.28)-(6.30) конвергира ка решењу u почетно-граничног проблема (6.1)-(6.3) и важи следећа оцена брзине конвергенције:*

$$
\max_{1 \leq j \leq M} \left\| \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} z_{\bar{t}}\right)^j \right\|_{\tilde{h}}^2 + \|\bar{z}\|_{B^{(\alpha-1)/2}\left(\omega_\tau^+, H^1(\omega_h)\right)}^2 \leq C(\tau^{3-\alpha} + h^2). \tag{6.45}
$$

Доказ. Априорна оцена

$$
\max_{1 \leq j \leq M} \left\| \left(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} z_{\bar{t}}\right)^j \right\|_{\tilde{h}}^2 + \|\bar{z}\|_{B^{(\alpha-1)/2}\left(\omega_\tau^+, H^1(\omega_h)\right)}^2 \leq C\tau \sum_{j=1}^{M} \left(\left\|\chi_{\bar{t}}^j\right\|_{\tilde{h}}^2 + \left\|\eta_{\bar{t}}^j\right\|_{B_h^{-1}}^2 + \left\|\zeta_x^j\right\|_{B_h^{-1}}^2 \right).
$$

је директна последица оцене (6.31).

Аналогно оцени (5.56), добијамо

$$
\|(1 + K\delta_{h\xi})^{-1/2} \eta_{\bar{t}}\|_{L^2(Q_{h\tau})} \leq Ch^2 \left(\|u\|_{C_+^{\alpha}([0,T], H^2(0,\xi))} + \|u\|_{C_+^{\alpha}([0,T], H^2(\xi,1))} \right). \tag{6.46}
$$

Функционал χ оцењујемо помоћу (6.44):

$$
\|\chi_{\bar{t}}\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})} \leq C\tau^{3-\alpha} \max_{t \in [0,T]} \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \leq C\tau^{3-\alpha} \|u\|_{C^{0,3}(\bar{Q})}.
$$

Извршимо следећу декомпозицију функционала ζ_x:

$$\zeta_x = \sum_{k=1}^{7} \zeta_k,$$

где је

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= T_t^- T_x^2 \left(p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \left(T_x^2 p \right) \left(T_t^- T_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\
\zeta_2 &= \left(T_x^2 p - p \right) \left(T_t^- T_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\
\zeta_3 &= p \left(T_t^- T_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \bar{u}_{\bar{x}x} \right) \\
\zeta_4 &= T_t^- T_x^2 \left(p' \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(T_x^2 p' \right) \left(T_t^- T_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\
\zeta_5 &= \left(T_x^2 p' - \frac{1}{2} \left(p_x + p_{\bar{x}} \right) \right) \left(T_t^- T_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\
\zeta_6 &= \frac{1}{2} \, \left(p_x + p_{\bar{x}} \right) \left(T_t^- T_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} (\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{u}_x) \right), \\
\zeta_7 &= -\frac{1}{4} \, \left(p_x - p_{\bar{x}} \right) \left(\bar{u}_x - \bar{u}_{\bar{x}} \right),
\end{aligned}$$

за $x \neq \xi$, док је за $x = \xi$

$$\begin{aligned}
\zeta_1 = & \ \frac{1}{2} \left[T_t^- T_x^{2-} \left(p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \left(T_x^{2-} p \right) \left(T_t^- T_x^{2-} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[T_t^- T_x^{2+} \left(p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \left(T_x^{2+} p \right) \left(T_t^- T_x^{2+} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right], \\
\zeta_2 = & \ \frac{1}{2} \left[\left(T_x^{2-} p \right) - p(\xi - 0) \right] \left(T_t^- T_x^{2-} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left[\left(T_x^{2+} p \right) - p(\xi + 0) \right] \left(T_t^- T_x^{2+} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\
\zeta_3 = & \ \frac{1}{2} p(\xi - 0) \left(T_t^- T_x^{2-} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^{2-} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} p(\xi + 0) \left(T_t^- T_x^{2+} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^{2+} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right), \\
\zeta_4 = & \ \frac{1}{2} \left[T_t^- T_x^{2-} \left(p' \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(T_x^{2-} p' \right) \left(T_t^- T_x^{2-} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[T_t^- T_x^{2+} \left(p' \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(T_x^{2+} p' \right) \left(T_t^- T_x^{2+} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right], \\
\zeta_5 = & \ \frac{1}{2} \left[\left(T_x^{2-} p' \right) - p_{\bar{x}} \right] \left(T_t^- T_x^{2-} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(T_x^{2+} p' \right) - p_x \right] \left(T_t^- T_x^{2+} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\
\zeta_6 = & \ \frac{1}{2} \, p_{\bar{x}} \left[\left(T_t^- T_x^{2-} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \bar{u}_{\bar{x}} \right] + \frac{1}{2} \, p_x \left[\left(T_t^- T_x^{2+} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \bar{u}_x \right],
\end{aligned}$$

$\zeta_7 = 0$

На основу резултата из одељка 5.3 имамо да је

$$|\zeta_1| \leq Ch^{3/2}\|p\|_{C^1[x-h,x+h]}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{H^3(x-h,x+h)}, \quad x \neq \xi$$

и

$$|\zeta_1(\xi,t)| \leq Ch^{3/2}\left(\|p\|_{C^1[\xi-h,\xi]}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{H^3(\xi-h,\xi)} + \|p\|_{C^1[\xi,\xi+h]}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{H^3(\xi,\xi+h)}\right),$$

за $x = \xi$. Сумирајући по члановима мреже $Q_{h\tau}$ и користећи потапање $H^2 \hookrightarrow C^1$ за функције једне променљиве добијамо

$$\begin{aligned}\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta_1\|_{L^2(Q_{h\tau})} \leq Ch^2\big(&\|p\|_{H^2(0,\xi)}\|u\|_{C([0,T],H^3(0,\xi))}\\ &+\|p\|_{H^2(\xi,1)}\|u\|_{C([0,T],H^3(\xi,1))}\big).\end{aligned} \tag{6.47}$$

Аналогним поступком добијамо

$$\begin{aligned}\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\zeta_i\|_{L^2(Q_{h\tau})} \leq Ch^2\big(&\|p\|_{H^2(0,\xi)}\|u\|_{C([0,T],H^3(0,\xi))}\\ &+\|p\|_{H^2(\xi,1)}\|u\|_{C([0,T],H^3(\xi,1))}\big).\end{aligned}, \tag{6.48}$$

за $i = 2,3,\ldots,7$. Сада резултат (6.45) следи из (6.46)-(6.48).

□

Лема 6.9. *Диференцијска схема*

$$B_h(\Delta_{t,0_+}^{\alpha-1} z_{\bar{t}})_{\bar{t}}^j + A_h \bar{z}^j = \nu_{\bar{t}}^j, \quad j = 1,2,\ldots,M, \quad x \in \omega_h \tag{6.49}$$

$$z(0,t) = 0, \quad z(1,t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau,$$

$$z(x,0) = 0, \quad z_{\bar{t}}^0 = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

задовољава априорну оцену

$$\|\bar{z}\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})} \leq C(\|B_h^{-1/2}\nu^0\|_{A_h^{-1}} + \|\nu\|_{B_h^{-1}}). \tag{6.50}$$

Доказ. Делујмо на једнакост (6.49) оператором $B_h^{-1/2}$, а затим је помножимо са $2h\tau\widetilde{A}_h^{-1}\left(\Delta_{t,0_+}^{\beta}\bar{\tilde{z}}_{\bar{t}}^j - \bar{\tilde{\nu}}^j\right)$, где је $\widetilde{A}_h = B_h^{-1/2}A_hB_h^{-1/2}$, $\tilde{z} = B_h^{1/2}z$, $\tilde{\nu} =$

$B_h^{-1/2}\nu$ и $\beta=\alpha-1$. Сумирањем по чворовима мреже ω_h, добијамо

$$2\tau\left((\Delta^{\beta}_{t,0_+}\tilde{z}_{\bar{t}})^j_{\bar{t}}-\tilde{\nu}^j_{\bar{t}},\Delta^{\beta}_{t,0_+}\bar{\tilde{z}}^j_{\bar{t}}-\bar{\tilde{\nu}}^j\right)_{\tilde{A}_h^{-1}}+2\tau(\bar{\tilde{z}}^j,\Delta^{\beta}_{t,0_+}\bar{\tilde{z}}^j_{\bar{t}}-\bar{\tilde{\nu}}^j)_h=0.$$

Користећи релацију

$$2\tau\left((\Delta^{\beta}_{t,0_+}\tilde{z}_{\bar{t}})^j_{\bar{t}}-\tilde{\nu}^j_{\bar{t}},\Delta^{\beta}_{t,0_+}\bar{\tilde{z}}^j_{\bar{t}}-\bar{\tilde{\nu}}^j\right)_{\tilde{A}_h^{-1}}=\|(\Delta^{\beta}_{t,0_+}\tilde{z}^j_{\bar{t}}-\tilde{\nu}^j)\|^2_{\tilde{A}_h^{-1}}-\|(\Delta^{\beta}_{t,0_+}\tilde{z}^{j-1}_{\bar{t}}-\tilde{\nu}^{j-1})\|^2_{\tilde{A}_h^{-1}},$$

и ε-неједнакост добијамо

$$\begin{aligned}\|(\Delta^{\beta}_{t,0_+}\tilde{z}^j_{\bar{t}}-\tilde{\nu}^j)\|^2_{\tilde{A}_h^{-1}}-\|(\Delta^{\beta}_{t,0_+}\tilde{z}^{j-1}_{\bar{t}}-\tilde{\nu}^{j-1})\|^2_{\tilde{A}_h^{-1}}+2\tau(\bar{\tilde{z}}^j,\Delta^{\beta}_{t,0_+}\bar{\tilde{z}}^j_{\bar{t}})_h&=2\tau(\bar{\tilde{z}}^j,\bar{\tilde{\nu}}^j)_h\\&\le 2\varepsilon\tau\|\bar{\tilde{\nu}}^j\|^2_h+\frac{\tau}{2\varepsilon}\|\bar{\tilde{z}}^j\|^2_h.\end{aligned}$$

Сумирањем по j за $j=1,2,...,M$ и коришћењем особине (5.9) следи да је

$$\begin{aligned}\|\Delta^{\beta}_{t,0_+}\tilde{z}^M_{\bar{t}}-\tilde{\nu}^M\|^2_{\tilde{A}_h^{-1}}+\frac{2T^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\|\bar{\tilde{z}}^j\|^2_{L^2(Q_{h\tau})}&\le\|\Delta^{\beta}_{t,0_+}\tilde{z}^0_{\bar{t}}-\tilde{\nu}^0\|^2_{A_h^{-1}}+2\varepsilon\|\bar{\tilde{\nu}}^j\|^2_{L^2(Q_{h\tau})}\\&+\frac{1}{2\varepsilon}\|\bar{\tilde{z}}^j\|^2_{L^2(Q_{h\tau})}.\end{aligned}$$

Изостављањем првог позитивног члана са леве стране неједнакости, за $\varepsilon=T^{\beta}\Gamma(1-\beta)/2$ добијамо априорну оцену (6.50). □

Лема 6.10. *Диференцијска схема*

$$B_h(\Delta^{\alpha-1}_{t,0_+}z_{\bar{t}})^j_{\bar{t}}+A_h\bar{z}^j=\phi^j,\quad j=1,2,...,M,\quad x\in\omega_h \tag{6.51}$$

$$z(0,t)=0,\quad z(1,t)=0,\quad t\in\bar{\omega}_\tau\,,$$

$$z(x,0)=0,\quad z^0_{\bar{t}}=0,\quad x\in\bar{\omega}_h,$$

задовољава априорну оцену

$$\|z\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})}\le C\|A_{0h}^{-1/2}\phi\|_{L^2(Q_{h\tau})}, \tag{6.52}$$

где је $A_{0h}v=-v_{\bar{x}x}$.

Доказ. Делујмо на једнакост (6.51) оператором $B_h^{-1/2}$, а затим је помножимо са $2\tau h\widetilde{A}_h^{-1}\tilde{z}^j_{\bar{t}}$, где је $\widetilde{A}_h=B_h^{-1/2}A_hB_h^{-1/2}$, $\tilde{z}=B_h^{1/2}z$. Након сумирања по чворовима мреже ω_h искористимо ε-неједнакост, чиме добијамо да је

$$2\tau\left((\Delta^{\alpha-1}_{t,0_+}\tilde{z}_{\bar{t}})^j_{\bar{t}},\tilde{z}^j_{\bar{t}}\right)_{A_h^{-1}}+\|\tilde{z}^j\|^2_h-\|\tilde{z}^{j-1}\|^2_h\le 2\tau\varepsilon\|\widetilde{A}_h^{-1}\tilde{\phi}^j\|^2_h+\frac{\tau}{2\varepsilon}\|\widetilde{A}_h^{-1}\tilde{z}^j_{\bar{t}}\|^2_h,$$

где је $\tilde{\phi} = B_h^{-1/2}\phi$. Након сумирања по j од 1 до $k \leq M$, на основу леме 5.9, за $\varepsilon = \varepsilon_k = (k\tau)^\beta \Gamma(1-\beta)/2$ добијамо

$$\frac{(k\tau)^\beta}{\Gamma(1-\beta)}\tau \sum_{j=1}^{k} \|\widetilde{A}_h^{-1/2} \tilde{z}_{\bar{t}}^j\|_h^2 + \|\tilde{z}^k\|_h^2 \leq \Gamma(1-\beta)(k\tau)^\beta \sum_{j=1}^{k} \|\widetilde{A}_h^{-1/2}\tilde{\phi}^j\|_h^2$$
$$\leq \Gamma(1-\beta)T^\beta \|A_h^{-1/2}\tilde{\phi}^j\|_{L^2(Q_{h\tau})}^2.$$

Изостављањем првог позитивног сабирка на левој страни претходне неједнакости, затим множењем са τ и сумирањем по k од 1 до M, коришћењем особине $\|v\|_{A_h} \asymp \|v\|_{A_{0h}}$ добијамо априорну оцену (6.52). $\square$

Теорема 6.11. *Диференцијска схема* (6.41)-(6.43) *задовољава априорну оцену*

$$\|\bar{z}\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})} \leq C\left(\|\chi\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})} + \|B_h^{-1/2}\eta\|_{L^2(Q_{h\tau})} + \|\zeta\|_{L^2(Q_{h\tau})}\right). \tag{6.53}$$

Доказ. Доказ следи директно из лема 6.9, 6.10 и неједнакости $\|\bar{v}\|_{L^2(Q_{h\tau})} \leq \|v\|_{L^2(Q_{h\tau})}$. $\square$

Теорема 6.12. *Нека је* $u \in C^2(\bar{I}, C(\bar{\Omega})) \cap C_+^{\alpha-1}(\bar{I}, H^2(0,\xi)) \cap C_+^{\alpha-1}(\bar{I}, H^2(\xi,1)) \cap L^2((0,T), H^3(0,\xi)) \cap L^2((0,T), H^3(0,\xi)) \cap H^2((0,T), H^1(0,\xi)) \cap H^2((0,T), H^1(0,\xi))$ *и* $p \in H^2(0,\xi) \cap H^2(\xi,1)$. *Тада решење* v *диференцијског проблема* (6.28)-(6.30) *конвергира решењу* u *почетно-граничног проблема* (6.1)-(6.3) *и важи следећи оцена брзине конвергенције*

$$\|\bar{z}\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})} \leq C(\tau^{3-\alpha} + h^2). \tag{6.54}$$

Доказ. Да бисмо одредили брзину конвергенције диференцијске схеме (6.28)-(6.30), довољно је да оценимо десну страну неједнакости (6.53).

Из оцена (5.55) и (5.56) следи да је

$$\|\chi\|_{\widetilde{L}^2(Q_{h\tau})} \leq C\tau^{3-\alpha} \max_{t\in[0,T]} \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \leq C\tau^{3-\alpha}\|u\|_{C^{0,2}(\bar{Q})} \tag{6.55}$$

и

$$\begin{aligned} &\|(1+K\delta_{h\xi})^{-1/2}\eta\|_{L^2(Q_{h\tau})} \\ &\quad\leq Ch^2 \max_{t\in[0,T]} \left(\|\partial_{t,0+}^{\alpha-1}u(\cdot,t)\|_{H^2(0,\xi)} + \|\partial_{t,0+}^{\alpha-1}u(\cdot,t)\|_{H^2(\xi,1)}\right) \\ &\quad\leq Ch^2\left(\|u\|_{C_+^{\alpha-1}([0,T],H^2(0,\xi))} + \|u\|_{C_+^{\alpha-1}([0,T],H^2(\xi,1))}\right). \end{aligned} \tag{6.56}$$

Функционал ζ можемо декомпоновати на следећи начин: $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$, где је

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= T_t^- T_x^- \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(T_x^- p \right) \left(T_t^- T_x^- \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\
\zeta_2 &= \left(T_x^- p - \bar{p} \right) \left(T_t^- T_x^- \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\
\zeta_3 &= \bar{p} \left(T_t^- T_x^- \frac{\partial u}{\partial x} - \bar{u}_{\bar{x}} \right).
\end{aligned}$$

Пресликајмо домен $e = \{x' : x - h \leq x' \leq x\}$ на $E = \{s : -1 \leq s \leq 0\}$ линеарном сменом $x' = hs + x$. Тада је

$$\zeta_1 = \frac{1}{h} \left(\int_{-1}^{0} \tilde{p}(s) T_t^- \frac{\partial \tilde{u}(s,t)}{\partial s} ds - \int_{-1}^{0} \tilde{p}(s') ds' \int_{-1}^{0} \frac{\partial \tilde{u}(s,t)}{\partial s} ds \right),$$

где је $\tilde{p}(s) = p(hs + x)$ и $\tilde{u}(s,t) = u(hs + x, t)$.

Функционал ζ_1 можемо оценити на следећи начин

$$\begin{aligned}
|\zeta_1| &\leq \frac{2}{h} \left(\int_{0}^{1} |\tilde{p}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{0} \left| T_t^- \frac{\partial \tilde{u}(s,t)}{\partial s} \right|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{2}{h} \left(\int_{0}^{1} |\tilde{p}(s)|^{2q/2} ds \right)^{2/(2q)} \left(\int_{-1}^{0} \left| T_t^- \frac{\partial \tilde{u}(s,t)}{\partial s} \right|^{2q/(q-2)} ds \right)^{(q-2)/(2q)} \\
&\leq \frac{2}{h} \|\tilde{p}\|_{W_q^1(E)} \|T_t^- \tilde{u}\|_{W^2_{\frac{2q}{q-2}}(E)},
\end{aligned}$$

где је $q > 2$. Дакле, ζ_1 је ограничен билинеаран функционал аргумената $\tilde{p}$ и $\tilde{u}$. Даље, функционал ζ_1 се анулира када је $\tilde{p} = 1$ или $\tilde{u} = 1, s$. Користећи билинеарну верзију леме Брамбла-Хилберта добијамо

$$|\zeta_1(x,t)| \leq \frac{2}{h} \left| \tilde{p} \right|_{W_q^1(E)} \left| T_t^- \tilde{u}(\cdot, t) \right|_{W^2_{\frac{2q}{q-2}}(E)}, \quad q > 2,$$

односно, повратком на стару променљиву

$$|\zeta_1(x,t)| \leq 2h^{3/2} \left| p \right|_{W_q^1(e)} \left| T_t^- u(\cdot, t) \right|_{W^2_{\frac{2q}{q-2}}(e)}.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_h и применом Хелдерове неједнакости даље добијамо

$$\|\zeta_1(\cdot,t)\|_h \le Ch^2 \left(\|p\|_{W_q^1(0,\xi)} \|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^2_{\frac{2q}{q-2}}(0,\xi)} + \|p\|_{W_q^1(\xi,1)} \|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^2_{\frac{2q}{q-2}}(\xi,1)} \right).$$

На основу теореме 2.17 важе следећа потапања

$$W_2^{s-1}(a,b) \hookrightarrow W_q^1(a,b) \quad \text{за} \quad s > 5/2 - 1/q$$

и

$$W_2^s(a,b) \hookrightarrow W^1_{2q/(q-2)}(a,b) \quad \text{за} \quad s > 2 + 1/q,$$

где се може узети $(a,b) = (0,\xi)$, односно $(a,b) = (\xi,1)$. Даље, стављајући $s = 3$ добијамо

$$\|\zeta_1(\cdot,t)\|_h \le Ch^2 \left(\|p\|_{H^2(0,\xi)} \|T_t^- u(\cdot,t)\|_{H^3(0,\xi)} + \|p\|_{H^2(\xi,1)} \|T_t^- u(\cdot,t)\|_{H^3(\xi,1)} \right).$$

Одатле, сумирањем по чворовима мреже ω_τ добијамо

$$\begin{aligned} \|\zeta_1\|_{L^2(Q_{h\tau})} \le & Ch^2 \big(\|p\|_{H^2(0,\xi)} \|u\|_{L^2((0,T),H^3(0,\xi))} \\ & + \|p\|_{H^2(\xi,1)} \|u\|_{L^2((0,T),H^3(\xi,1))} \big). \end{aligned} \tag{6.57}$$

Функционал ζ_2 можемо представити на следећи начин

$$\zeta_2 = (T_x^- p - \bar{p}) \left(T_t^- T_x^- \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \zeta_{2,1} \left(T_t^- T_x^- \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Тада је

$$\zeta_{2,1}(x) = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} p(x')\, dx' - \frac{1}{2}(p(x) - p(x-h)) = \frac{1}{2} \left(2 \int_{-1}^{0} \tilde{p}(s)\, ds - \tilde{p}(-1) - \tilde{p}(0) \right).$$

Функционал $\zeta_{2,1}$ је ограничен линеаран функционал аргумента $\tilde{p} \in H^2(E)$, јер је

$$\max_{-1 \le s \le 0} |\tilde{p}(s)| \le \sqrt{2}\, \|\tilde{p}\|_{H^1(E)} \le \sqrt{2}\, \|\tilde{p}\|_{H^2(E)}.$$

Осим тога, $\zeta_{2,1}$ се анулира када год је $\tilde{p}$ полином првог степена. Примењујући лему Брамбла-Хилберта и враћајући се на стару независну промењљиву, после очевидне мајорације добијамо

$$|\zeta_2(x,t)| \le Ch^{3/2} |p|_{H^2(e)} \left\| T_t^- \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{C(\bar{e})}.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_h добијамо

$$\begin{aligned}\|\zeta_2(\cdot,t)\|_h \leq & Ch^2 \left(|p|_{H^2(0,\xi)} \left\| T_t^- \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{C[0,\xi]} + |p|_{H^2(\xi,1)} \left\| T_t^- \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{C[\xi,1]} \right) \\ \leq & Ch^2 \left(\|p\|_{H^2(0,\xi)} \left\| T_t^- \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{H^1(0,\xi)} + \|p\|_{H^2(\xi,1)} \left\| T_t^- \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{H^1(\xi,1)} \right).\end{aligned}$$

Одатле, сумирањем по чворовима мреже ω_τ добијамо

$$\begin{aligned}\|\zeta_2\|_{L^2(Q_{h\tau})} \leq & Ch^2 \big(\|p\|_{H^2(0,\xi)} \|u\|_{L^2((0,T),H^3(0,\xi))} \\ & + \|p\|_{H^2(\xi,1)} \|u\|_{L^2((0,T),H^3(\xi,1))} \big) .\end{aligned} \tag{6.58}$$

Функционал ζ_3 представимо на следећи начин:

$$\zeta_3 = \bar{p} \left(T_t^- T_x^- \frac{\partial u}{\partial x} - \bar{u}_{\bar{x}} \right) = \bar{p}\, \zeta_{3,1}.$$

Уведимо ознаку $w = T_x^- \frac{\partial u}{\partial x}$. Тада је

$$\zeta_{3,1} = T_t^- w - \bar{w}$$

па слично као приликом оцене члана $\zeta_{2,1}$ можемо закључити да је

$$|\zeta_{3,1}(x,t)| \leq C\tau^{3/2} |w(x,\cdot)|_{H^2(t-\tau,t)} \leq C\tau^{3/2} h^{-1/2} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right\|_{L^2((x-h,x)\times(t-\tau,t))}.$$

Сумирањем по чворовима мреже $Q_{h\tau}$ добијамо

$$\begin{aligned}\|\zeta_3\|_{L^2(Q_{h\tau})} \leq & C\tau^2 \left(\|p\|_{C[0,\xi]} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right\|_{L^2(Q_1)} + \|p\|_{C[\xi,1]} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right\|_{L^2(Q_2)} \right) \\ \leq & C\tau^2 \left(\|p\|_{H^1(0,\xi))} \|u\|_{H^2((0,T),H^1(0,\xi))} + \|p\|_{H^1(\xi,1)} \|u\|_{H^2((0,T),H^1(\xi,1))} \right) .\end{aligned} \tag{6.59}$$

Сада резултат (6.54) следи из (6.55)-(6.59).

□

6.4 Нумерички експеримент

Ради провере особина стабилности и ковергенције предложене нумеричке методе, решен је проблем (6.1)-(6.3) за $K = 2\pi$

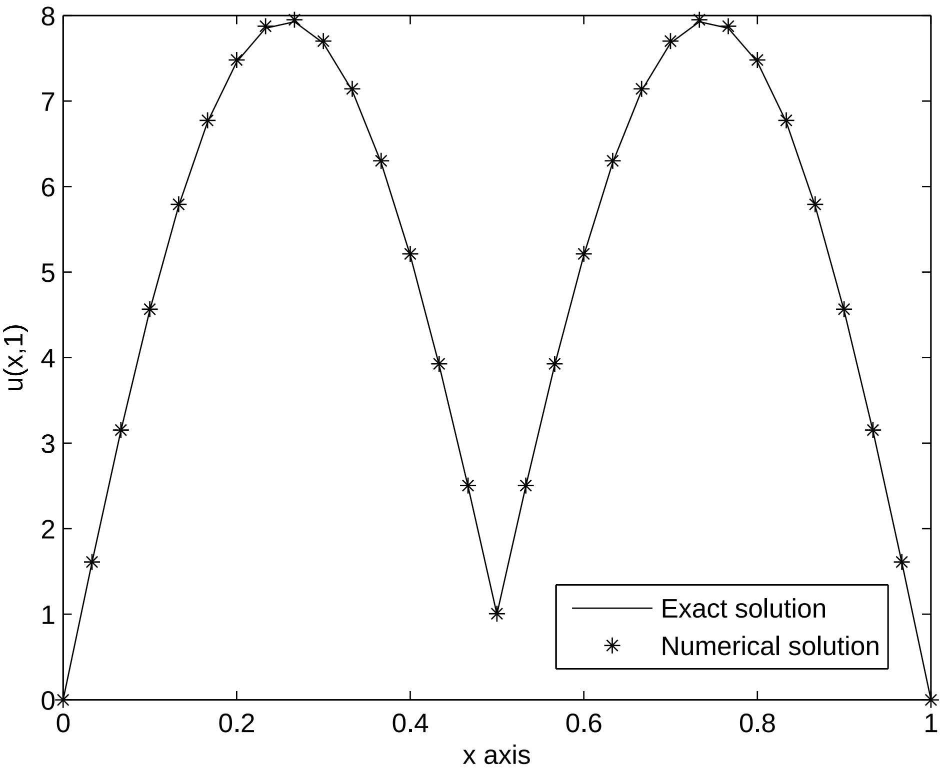
$$f(x,t) = t^4 \left[\sin(\pi x) \left(\frac{4! t^{-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \pi^2 \right) + 4! |\sin(2\pi x)| t^{-\alpha} \left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(5-2\alpha)} + \frac{4\pi^2}{\Gamma(5-\alpha)} \right) \right].$$

Тачно решење проблема је

$$u(x,t) = \sin(\pi x) t^4 + |\sin(2\pi x)| \frac{4! t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}.$$

Слично као у поглављу 5.2, у табели 3 су приказани експериментални резултати за различите временске кораке τ када је просторни корак фиксиран $h = 2^{-13}$. На основу приказаних резултата може се закључити да је ред конвергенције по временској променљивој једнак $3 - \alpha$.

У табели 4 су приказани нумерички резултати за фиксирано $\tau = 2^{-14}$ са различитим корацима h. Може се закључити да је ред конвергенције по просторној променљивој једнак 2.



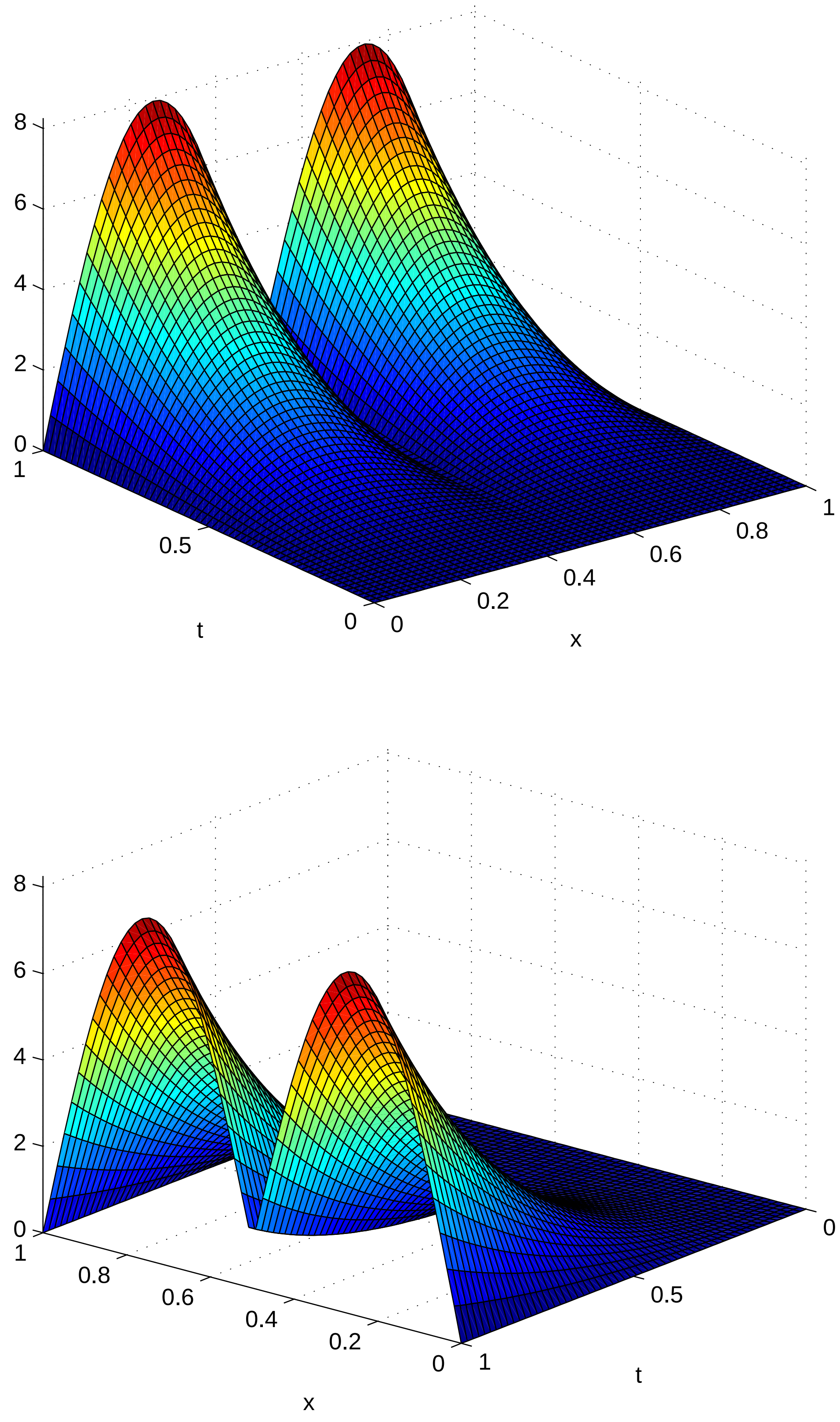
Слика 3: Решење на временском слоју $t = 1$ за $h = \tau = 1/60$ и $\alpha = 1.7$

Табела 3: Експериментални резултати и ред конвергенције по временској променљивој (последња колона) за $h = 2^{-14}$.

α	τ	$\|z\|_{L^2(Q_{h\tau})}$	$\log_2 \frac{\|\bar{z}\|_{L^2(Q_{h\tau})}}{\|\bar{z}\|_{L^2(Q_{h\tau/2})}}$
1.9	2^{-5}	$7.1321e-02$	1.09
	2^{-6}	$3.3545e-02$	1.09
	2^{-7}	$1.5727e-02$	1.10
	2^{-8}	$7.3561e-03$	1.10
	2^{-9}	$3.4358e-03$	1.10
	2^{-10}	$1.6035e-03$	
1.7	2^{-5}	$3.0943e-02$	1.26
	2^{-6}	$1.2924e-02$	1.27
	2^{-7}	$5.3416e-03$	1.28
	2^{-8}	$2.1927e-03$	1.29
	2^{-9}	$8.9616e-04$	1.29
	2^{-10}	$3.6529e-04$	
1.5	2^{-5}	$1.2254e-02$	1.42
	2^{-6}	$4.5871e-03$	1.44
	2^{-7}	$1.6873e-03$	1.46
	2^{-8}	$6.1307e-04$	1.47
	2^{-9}	$2.2090e-04$	1.48
	2^{-10}	$7.9126e-05$	
1.1	2^{-5}	$1.3096e-03$	2.00
	2^{-6}	$3.2835e-04$	1.97
	2^{-7}	$8.4045e-05$	1.94
	2^{-8}	$2.1977e-05$	1.91
	2^{-9}	$5.8550e-06$	1.89
	2^{-10}	$1.5770e-06$	

Табела 4: Експериментални резултати и конвергенција по просторној промењљивој (последња колона) за $\tau = 2^{-12}$.

α	h	$\|z\|_{L^2(Q_{h\tau})}$	$\log_2 \frac{\|\bar{z}\|_{L^2(Q_{h\tau})}}{\|\bar{z}\|_{L^2(Q_{h/2\tau})}}$
1.9	2^{-3}	$1.7565e-01$	2.02
	2^{-4}	$4.3162e-02$	2.01
	2^{-5}	$1.0724e-02$	2.01
	2^{-6}	$2.6581e-03$	2.04
	2^{-7}	$6.4707e-04$	
1.7	2^{-3}	$1.4041e-01$	2.02
	2^{-4}	$3.4517e-02$	2.01
	2^{-5}	$8.5901e-03$	2.00
	2^{-6}	$2.1423e-03$	2.01
	2^{-7}	$5.3254e-04$	
1.5	2^{-3}	$1.1526e-01$	2.02
	2^{-4}	$2.8358e-02$	2.01
	2^{-5}	$7.0611e-03$	2.00
	2^{-6}	$1.7631e-03$	2.00
	2^{-7}	$4.4020e-04$	
1.00	2^{-3}	$3.1844e-3$	2.00
	2^{-4}	$7.9355e-4$	2.00
	2^{-5}	$1.9823e-4$	2.00
	2^{-6}	$4.9547e-5$	2.00
	2^{-7}	$1.2386e-5$	



Слика 4: Тачно решење

7 Закључак

Почетно-гранични проблеми са изводима разломљеног реда почели су интензивно да се изучавају тек у последњих двадесетак година, када је установљена њихова широка примена у инжењерским проблемима. У дисертацији се анализира дифузионо-таласна једначина са изводом разломљеног реда по временској променљивој која као коефицијент садржи Дираковy дистрибуцију. Прецизније, испитује се једначина субдифузије и једначина супердифузије са концентрисаним капацитетом. С обзиром да имамо улазни податак који није функција (већ је сингуларна дистрибуција), решење се мора тражити у просторима собољевског типа.

Доказана је егзистенција генералисаних решења. За једначину субдифузије изведене су две априорне оцене. Првом од њих је показана егзистенција решења у простору $\tilde{H}^{1,\alpha/2}(Q)$, где је α ред извода разломљеног реда. Другом априорном оценом доказана је егзистенција решења из простора разломљеног реда $J_+^{2,\alpha}(Q)$. За $1/2 < \alpha < 1$ простор J_+^{α} је еквивалентан простору Собољева H_l^{α}, односно имамо траг, па је почетни услов добро дефинисан. За једначину супердифузије извели смо априорне оцене у просторима $C_+^{\alpha-1}(\bar{I}, \widetilde{L}^2(\Omega)) \cap H^{(\alpha-1)/2}(I, \mathring{H}^1(\Omega))$ и $\mathring{H}_l^{(\alpha+1)/2}(I, \widetilde{L}^2(\Omega)) \cap C(\bar{I}, \mathring{H}^1(\Omega))$. Из њих следи јединственост решења.

Предложене су имплицитне диференцијске схеме за решавање проблема субдифузије и супердифузије са концентрисаним капацитетом. Доказана је стабилност и испитивана је брзина конвергенције. У случају просторне променљиве, доказана је конвергенција реда 2 за решења глаткости H^3 по просторној променљивој, код обе једначине. За једначину субдифузије са концентрисаним капацитетом је доказан ред конвергенције $2-\alpha$ по временској променљивој са доста јаким захтевом да решења буду два пута непрекидно диференцијабилна по променљивој t, иако изведени нумерички експерименти показују исти ред и за решења ниже глаткости.

У случају супердифузије са концентрисаним капацитетом, доказан је ред конвергенције $3-\alpha$ по временској променљивој за решења која су два пута непрекидно диференцијабилна по t. За нижу глаткост нумерички експерименти не показују конвергеницју тог реда.

Од значаја би било посматрати једначине субдифузије и супердифузије када је почетни услов произвољна функција. У том случају нису еквивалентни Капутов и Риман-Лиувилов извод, па би се једначине морале посматрати одвојено. Почетно-гранични проблем у коме се појављује Риман-Лиувилов извод по временској променљивој занимљив је само са теоријске тачке гледишта, јер се код таквих проблема почетни услови задају са

$$\lim_{t \to 0} \partial_{t,0_+}^{\alpha-k} u(x,t) = u_k(x), \quad k = 1, 2, ..., n,$$

где је $n - 1 \leq \alpha < n$, чија физичка интерпретација није утврђена.

Литература

[1] A. A. Alikhanov. *Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings.* Appl. Math. Comput., 219(8): 3938–3946, 2012.

[2] A. A. Alikhanov. *A new difference scheme for the time fractional diffusion equation.* J. Comput. Phys., 280: 424–438, 2015.

[3] D. Bojović, B. S. Jovanović. *Convergence of finite difference method for the parabolic problem with concentrated capacity and variable operator.* J. Comput. Appl. Math., 189: 286–303, 2006.

[4] A. Delić. *Fractional in time diffusion-wave equation and its numerical approximation.* Filomat. http://journal.pmf.ni.ac.rs/filomat/filomat/issue/view/6 (to appear).

[5] A. Delić. *Convergence of a finite difference method for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity.* Proc. Appl. Math. Mech., 13(1): 349–350, 2013.

[6] A. Delić. *A finite difference approach for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity.* Lecture Notes in Comput. Sci., 8236: 231–238, 2013.

[7] A. Delić, Jovanović, B. S. *Finite difference approximation of fractional diffusion-wave equation with concentrated capacity.* Comput. Methods Appl. Math. (in review).

[8] A. Delić, B. S. Jovanović. *Numerical approximation of an interface problem for fractional in time diffusion equation.* Appl. Math. Comput., 229: 467–479, 2014.

[9] S. Denisov, J. Klafter, M. Urbakh. *Dynamical heat channels.* Phys. Rev. Lett., 91(19): 194301, 2003.

[10] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces.* Bull. Sci. Math., 136(5): 521–573, 2012.

[11] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations.* Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[12] V. J. Ervin, J. P. Roop. *Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation.* Numer. Methods Partial Differential Equations, 22(3): 558–576, 2006.

[13] L. C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2010.

[14] С. Геговска-Зајкова. *Спектрални проблеми кои содржат сингуларни дистрибуции и нивна примена.* Докторска дисертација, Универзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје, 2003.

[15] R. Gorenflo, Y. Luchko, M. Yamamoto. *Operator theoretic approach to the Caputo derivative and the fractional diffusion equations.* arXiv:1411.7289 [math.AP], 2014.

[16] R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, P. Paradisi. *Time fractional diffusion: A discrete random walk approach.* Nonlinear Dynam., 29: 129–143, 2002.

[17] B. I. Henry, T. A. M. Langlands, P. Straka. *An introduction to fractional diffusion.* In R. Dewar, F. Detering (eds.), *Complex Physical, Biophysical and Econophysical Systems, Proc. 22nd Canberra International Physics Summer School, The Australian National University, Canberra, 8-19 December 2008*, volume 9 of *World Scientific Lecture Notes in Complex Systems*, 37–89. World Scientific, Hackensack, NJ, 2010.

[18] B. Jin, R. Lazarov, X. Lu, Z. Zhou. *A simple finite element method for boundary value problems with a Riemann-Liouville derivative.* J. Comput. Appl. Math., 293: 94–111, 2016.

[19] B. Jin, R. Lazarov, J. Pasciak, W. Rundell. *Variational formulation of problems involving fractional order differential operators.* Math. Comp., 84(296): 2665–2700, 2015.

[20] B. Jin, R. Lazarov, J. Pasciak, Z. Zhou. *Error analysis of semidiscrete FEM for inhomogeneous time-fractional diffusion.* IMA J. Numer. Anal., 35(2): 561–582, 2015.

[21] B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou. *Two fully discrete schemes for fractional diffusion and diffusion-wave equations with nonsmooth data.* arXiv:1404.3800 [math.NA], 2015.

[22] B. S. Jovanović. *Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina.* Mat. inst., Beograd, 1989.

[23] B. S. Jovanović. *The Finite Difference Method for Boundary-Value Problems with Weak Solutions.* Mat. inst., Beograd, 1993.

[24] B. S. Jovanović. *Parcijalne jednačine.* Matematički fakultet, Beograd, 1999.

[25] B. S. Jovanović, A. Delić, L. G. Vulkov. *About some boundary value problems for fractional PDE and their numerical solution.* Proc. Appl. Math. Mech., 13(1): 445–446, 2013.

[26] B. S. Jovanović, D. Radunović. *Numerička analiza.* Matematički fakultet, Beograd, 2003.

[27] B. S. Jovanović, E. Süli. *Analysis of Finite Difference Schemes: For Linear Partial Differential Equations with Generalized Solutions*, volume 46. Springer-Verlag London, 2014.

[28] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov. *On the convergence of finite difference schemes for the heat equation with concentrated capacity.* Numer. Math., 89(4): 715–734, 2001.

[29] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov. *Operator's approach to the problems with concentrated factors.* Lecture Notes in Comput. Sci., 1988: 439–450, 2001.

[30] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov. *On the convergence of difference schemes for hyperbolic problems with concetrated data.* SIAM J. Numer. Anal., 41(2): 516–538, 2004.

[31] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, A. Delić. *Boundary value problems for fractional PDE and their numerical approximation.* Lecture Notes in Comput. Sci., 8236: 38–49, 2013.

[32] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier Science and Technology, Boston, 2006.

[33] J. Klafter, A. Blumen, M. Shlesinger. *Stochastic pathway to anomalous diffusion.* Phys. Rev. A, 35(7): 3081–3085, 1987.

[34] B. Li, J. Wang. *Anomalous heat conduction and anomalous diffusion in one-dimensional systems.* Phys. Rev. Lett., 91(4): 044301, 2003.

[35] C. Li, W. Deng. *Remarks on fractional derivatives.* Appl. Math. Comput., 187(2): 777–784, 2007.

[36] C. Li, D. Qian, Y. Chen. *On Riemann-Liouville and Caputo derivatives.* Discrete Dyn. Nat. Soc., 2011: 562494, 2011.

[37] X. Li, C. Xu. *A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation.* SIAM J. Numer. Anal., 47(3): 2108–2131, 2009.

[38] Y. Lin, C. Xu. *Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation.* J. Comput. Phys., 225(2): 1533–1552, 2007.

[39] J. L. Lions, E. Magenes. *Non homogeneous boundary value problems and applications.* Springer Berlin Heidelberg, 1972.

[40] Y. Luchko. *Fractional wave equation and damped waves.* J. Math. Phys., 54(3): 031505, 2013.

[41] F. Mainardi. *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation.* Appl. Math. Lett., 9(6): 23–28, 1996.

[42] F. Mainardi, P. Paradisi, R. Gorenflo. *Probability distributions generated by fractional diffusion equations.* arXiv:0704.0320 [cond-mat.stat-mech], 2007.

[43] W. McLean. *Strong Elliptic Systems and Boundary Integral Equations.* Cambridge University Press, 2000.

[44] R. Metzler, J. Klafter. *The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach.* Phys. Rep., 339: 1–77, 2000.

[45] K. B. Oldham, J. Spanier. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order.* Academic Press, New York, 1974.

[46] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, 1998.

[47] M. Renardy, R. C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations.* Springer, 2004.

[48] P. Roop. *Variational solution of the fractional advection disperzion equation.* PhD dissertation, Clemson University, 2004.

[49] K. Sakamoto, M. Yamamoto. *Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems.* J. Math. Anal. Appl., 382(1): 426–447, 2011.

[50] A. A. Samarskii. *The Theory of Difference Schemes.* CRC Press, 2001.

[51] А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. *Разностные схмеы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями.* Москва, Высшая школа, 1987.

[52] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[53] W. R. Schneider, W. Wyss. *Fractional diffusion and wave equations.* J. Math. Phys., 30(1): 134–144, 1989.

[54] H. Seybold, R. Hilfer. *Numerical algorithm for calculating the generalized Mittag-Lefler function.* SIAM J. Numer. Anal., 47(1): 69–88, 2008.

[55] Z.-Z. Sun, X. Wu. *A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system.* Appl. Numer. Math., 56(2): 193–209, 2006.

[56] L. Tartar. *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces.* Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[57] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. *Уравнения математической физики.* МГУ, Наука, 1977.

[58] V. S. Vladimirov. *Equations of Mathematical Physics.* Marcel Dekker Inc, New York, 1971.

[59] J. Wloka. *Partial differential equations.* Cambrige University press, 1987.

Биографија

Александра Делић рођена је 15.09.1982. године у Брчком, где је завршила основну школу и гимназију. Дипломирала је на смеру Нумеричка математика и оптимизација Математичког факултета Универзитета у Београду 2009. године, са просечном оценом 8.83. На истом факултету, мастер тезу под називом „Трансмисиони проблем”, под менторством проф. Бошка Јовановића, одбранила је 2011. године. Докторске студије Математичког факултета Универзитета у Београду уписала је 2009. године.

Запослена је на Математичком факултету у Београду од 2012. године. Држи вежбе на катедри за Нумеричку математику и оптимизацију. Учествује у раду пројекта 174015 „Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене”.

Објавила је следеће радове у периодичким публикацијама:

[1] A. Delić, B. S. Jovanović, Z. D. Milovanović. *On the transmission eigenvalue problem in disjoint domains.* Comput. Methods Appl. Math., 11(4): 407–417, 2011.

[2] A. Delić. *Convergence of a finite difference method for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity.* Proc. Appl. Math. Mech., 13(1): 349–350, 2013.

[3] A. Delić. *A finite difference approach for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity.* Lecture Notes in Comput. Sci., 8236: 231–238, 2013.

[4] B. S. Jovanović, A. Delić, L. G. Vulkov. *About some boundary value problems for fractional PDE and their numerical solution.* Proc. Appl. Math. Mech., 13(1): 445–446, 2013.

[5] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, A. Delić. *Boundary value problems for fractional PDE and their numerical approximation.* Lecture Notes in Comput. Sci., 8236: 38–49, 2013.

[6] A. Delić, B. S. Jovanović. *Numerical approximation of an interface problem for fractional in time diffusion equation.* Appl. Math. Comput., 229: 467–479, 2014.

[7] A. Delić. *Fractional in time diffusion-wave equation and its numerical approximation.* Filomat. http://journal.pmf.ni.ac.rs/filomat/filomat/issue/view/6 (to appear).

[8] A. Delić, S. Hodžić, B. S. Jovanović. *Factorized difference scheme for two-dimensional subdiffusion equation in nonhomogeneous media.* Publ. Inst. Math. (to appear).

У процесу рецензије налазе се следећи радови:

[1] A. Delić, S. Hodžić, B. S. Jovanović. *Difference scheme for an interface problem for subdiffusion equation.* Appl. Anal. Discrete Math. (in review).

[2] A. Delić, Jovanović, B. S. *Finite difference approximation of fractional diffusion-wave equation with concentrated capacity.* Comput. Methods Appl. Math. (in review).

Учествовала је на следећим конференцијама:

[1] A. M. Delić, Z. D. Milovanović. *About transmission eigenvalue problem in disjoint domains.* Pannonian Mathematical Modeling International Conference (PAMM 2011), Novi Sad, April 29-30, 2011.

[2] A. Delić. *A finite difference approach for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity.* Fifth International Conference on Numerical Analysis and Applications (NAA '12), Lozenetz (Bulgaria), June 15-20, 2012., Abstracts, p: 9.

[3] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, A. Delić. *Boundary value problems for fractional PDE and their numerical approximation.* Fifth International Conference on Numerical Analysis and Applications (NAA '12), Lozenetz (Bulgaria), June 15-20, 2012., Abstracts, p: 22.

[4] A. Delić. *Convergence of a finite difference method for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity.* GAMM 2013 - 84th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics, Novi Sad, March 18-22, 2013.

[5] A. Delić. *Convergence of finite-difference scheme for fractional in time wave equation with variable coefficients and concentrated data.* Sixth Conference on Finite Difference Method: Theory and Application (FDM'14), Lozenetz (Bulgaria), June 18-23, 2014.

[6] A. Delić. *A finite difference scheme for a fractional super-diffusion equation with concentrated capacity.* 13th Serbian Mathematical Congress, Vrnjačka Banja, May 22-25, 2014.

[7] A. Delić. *Ocena brzine konvergencije diferencijskih shema za jednačine anomalne difuzije sa koncentrisanim kapacitetom.* Šesti simpozijum „Matematika i primene" 2015, Beograd, Oktobar 16-17, 2015.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Александра Делић

број уписа 2010/2009

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда са концентрисаним капацитетом и њена апроксимација методом коначних разлика

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 8. 2. 2016.

A Делић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Александра Делић

Број уписа 2010/2009

Студијски програм Математика

Наслов рада Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда са концентрисаним капацитетом и њена апроксимација методом коначних разлика

Ментор др Бошко Јовановић, редовни професор

Потписани Александра Делић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 8. 2. 2016.

АДелић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда са концентрисаним капацитетом и њена апроксимација методом коначних разлика

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 8. 2. 2016.

A Delić

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.