

## **Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду**

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета у Београду донетом на седници одржаној 04.10.2013. именовани смо у комисију за преглед и оцену рукописа

### **„Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда са концентрисаним капацитетом и њена апроксимација методом коначних разлика”**

који је **Александра Делић**, дипломирани математичар - мастер из Београда, поднела као своју докторску дисертацију. Након прегледа рукописа подносимо Наставно-научном већу следећи

### **Извештај**

#### **Биографија докторанткиње**

Александра Делић је рођена 15.09.1982. у Брчком, где је завршила Општу гимназију „Васа Пелагић“. На Математички факултет у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, уписала се 2001. године. Дипломирала је 2009. године и стекла звање Дипломирани математичар. На мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација уписала се 2010. године. Мастер рад под насловом „Трансмисиони проблем” одбранила је 7. октобра 2011. године, под менторством проф. др Бошка Јовановића, чиме је стекла звање Дипломирани математичар-мастер. На докторске студије на Математичком факултету у Београду, одсек Математика, уписала се 2009. године.

Од фебруара до маја 2007. радила је као наставник математике у Основној школи „Јован Стерија Поповић” у Београду. Од августа 2009. до августа 2010. радила је као програмер у фирми „Maxteam” d.o.o. у Београду и стекла радно искуство у примени нумеричких метода за дигиталну обраду слике. Од септембра 2010. до фебруара 2011. радила је као наставник математике у Основној школи „Драган Ковачевић” у Београду.

Од фебруара 2011. године радила је на Математичком факултету у Београду као истраживач приправник на научном пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја: 174015 „Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене”. Од октобра 2012. ангажована је на Математичком факултету Универзитета у Београду, прво као сарадник у настави, а затим од 2015. године у звању асистента. Током тог времена држала је вежбе из предмета: Увод у нумеричку математику, Математичко моделирање, Методе коначних елемената, Математичка оптимизација и Математика за студенте хемије.

## Предмет дисертације

Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда добија се из класичне дифузионе или таласне једначине заменом првог, односно другог извода по временској променљивој изводом разломљеног реда  $\alpha$ , где је  $0 < \alpha \leq 2$ . Посебно, у зависности од вредности параметра  $\alpha$ , врши се подела на субдифузију ( $0 < \alpha < 1$ ), нормалну дифузију ( $\alpha = 1$ ), супердифузију ( $1 < \alpha < 2$ ) и таласну једначину ( $\alpha = 2$ ).

Предмет ове докторске дисертације је почетно-гранични проблем за једнодимензиону дифузионо-таласну једначину разломљеног реда с коефицијентом који садржи Диракову дистрибуцију, и његова апроксимација методом коначних разлика. Контурни проблеми оваквог типа обично се називају проблемима с интерфејсом. Карактеришу се прекидом појединих парцијалних извода решења на интерфејсу, тј. носачу Диракове дистрибуције, што отежава конструкцију нумеричких метода за њихово решавање.

## Приказ дисертације и њених главних доприноса

Рукопис је сложен на рачунару, има 121 (8+109+4) страница и састоји се из следећих поглавља:

1. Увод
2. Математички апарат
3. Интегрални и изводи разломљеног реда
4. Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда
5. Једначина субдифузије са концентрисаним капацитетом
6. Једначина супердифузије са концентрисаним капацитетом
7. Закључак

уз Списак литературе и Биографију докторанткиње.

У првом поглављу је представљен је физички смисао дифузионо-таласне једначине разломљеног реда са концентрисаним капацитетом и представљена структура дисертације.

У другом поглављу изложени су основни појмови и резултати из теорије линеарних оператора, функционалних простора и парцијалних диференцијалних једначина који се користе у даљем раду.

Треће поглавље садржи кратак преглед опште теорије фракционог рачуна. Уведен је појам интеграла разломљеног реда, дефинисан Риман-Лиувилев и Капутов извод разломљеног реда и наведене њихове особине.

У четвртном поглављу уведени су простори извода разломљеног реда и показана њихова веза (еквиваленција) са просторима Соболјева разломљеног реда. Дат је преглед досадашњих резултата о егзистенцији и јединствености решења дифузионо-таласне једначине. Приказане су методе за решавање дифузионо-таласне једначине.

У петом поглављу разматра се први почетно-гранични проблем за једначину субдифузије са концентрисаним капацитетом. Изведене су две априорне оцене за

његово решење. Показано је да се разматрани проблем може свести на варијациони задатак елиптичког типа. Помоћу Лакс-Милграмове леме доказана је егзистенција слабог решења у простору  $\hat{H}^{1,\alpha/2}$ . С обзиром да функције из овог простора не морају имати траг за  $t = 0$ , егзистенција решења је испитивана и у просторима функција веће глаткости. Коришћене су методе функционалне анализе и теорије парцијалних диференцијалних једначина (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, лема Лакса-Милграма итд). Разматрани почетно-гранични проблем апроксимиран је методом коначних разлика. Предложена је имплицитна схема и доказана је њена стабилност. Приликом испитивања њених особина коришћене су методе теорије диференцијских схема (простори функција дискретног аргумента, метода енергетских неједнакости итд). Изведене су оцене брзине конвергенције у различитим дискретним нормама типа Собољева, уз различите претпоставке о глаткости решења. Неке од њих су сагласне с глаткошћу улазних података по просторној променљивој и у том смислу су оптималне, то јест при датој глаткости улазних података не може се повећати ред конвергенције, нити се при фиксираном реду конвергенције могу ослабити захтеви глаткости. За извођење оцена брзине конвергенције коришћене су методе теорије диференцијских схема, као и методе теорије функционалних простора (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, интегралне репрезентације, лема Брамбла-Хилберта итд). Добијени теоријски резултати су потврђени нумеричким примерима. Имплементација метода коначних разлика реализована је у програмском окружењу МАТЛАБ (MATLAB).

У шестом поглављу разматра се први почетно-гранични проблем за једначину супердифузије са концентрисаним капацитетом. Изведено је неколико априорних оцена из којих следи јединственост решења разматраног проблема. Проблем је апроксимиран имплицитном диференцијском схемом. Доказана је њена стабилност. Изведени су диференцијски аналози априорних оцена из континуалног случаја. Изведене су оцене брзине конвергенције у различитим дискретним нормама и уз различите претпоставке о глаткости решења. За извођење оцена брзине конвергенције коришћене су методе теорије диференцијских схема, као и методе теорије функционалних простора (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, интегралне репрезентације, лема Брамбла-Хилберта итд). Добијени теоријски резултати су потврђени нумеричким примерима. Имплементација метода коначних разлика реализована је у програмском окружењу МАТЛАБ.

Закључак рада дат је у седмом поглављу.

Списак литературе састоји се од 59 библиографских јединица, од којих су 7 самоцитати, тј. радови докторанткиње.

## Референце генерисане у току рада на дисертацији

Резултати приказани у овом рукопису публиковани су у

- једном коауторском раду у међународном часопису са SCI листе,
- једном самосталном раду у домаћем часопису са SCI листе,
- два коауторска рада у зборницима међународних скупова,
- два самостална рада у зборницима међународних скупова.

Још један коауторски рад налази се на рецензији у часопису са проширене SCI листе.

- [1] A. Delić, B.S. Jovanović: *Numerical approximation of an interface problem for fractional in time diffusion equation*. Appl. Math. Comput. 229 (2014), 467-479. Elsevier, ISSN 0096-3003, IF(2014) = 1.551, M21 Mathematics, Applied
- [2] A. Delić: *Fractional in time diffusion-wave equation and its numerical approximation*, Filomat 2015 (to appear). ISSN 0354-5180, IF(2014) = 0.638, M22 Mathematics
- [3] B.S. Jovanović, L.G. Vulkov, A. Delić: *Boundary value problems for fractional PDE and their numerical approximation*. Lect. Notes Comput. Sci. 8236 (2013), 38-49. Springer, ISSN 0302-9743, Naši u WOS
- [4] A. Delić: *A Finite Difference Approach for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity*. Lect. Notes Comput. Sci. 8236 (2013), 231-238. Springer, ISSN 0302-9743, Naši u WOS
- [5] A. Delić: *Convergence of a finite difference method for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity*. Proc. Appl. Math. Mech. 13 (2013), 349-350. Wiley, ISSN 1617-7061
- [6] B.S. Jovanović, A.Delić, L.G. Vulkov: *About some boundary value problems for fractional PDE and their numerical solutions*. Proc. Appl. Math. Mech. 13 (2013), 445-446. Wiley, ISSN 1617-7061
- [7] A. Delić, B.S. Jovanović: *Finite difference approximation of fractional diffusion-wave equation with concentrated capacity*. Comput. Methods Appl. Math. 2016 (in review) De Gruyter, ISSN 1609-4840

## Закључак

Рукопис „Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда са концентрисаним капацитетом и њена апроксимација методом коначних разлика” садржи вредан научни допринос у области нумеричких метода решавања парцијалних диференцијалних једначина са изводима разломљеног реда. У њему су детаљно размотрене једначине субдифузије и супердифузије како са теоријског тако и са нумеричког аспекта. Рад је написан на солидном математичком нивоу. Резултати добијени у овом рукопису приказани су у пет публикованих (или прихваћених за штампу) научних радова. Констатујемо да су испуњени сви циљеви наведени приликом предлагања теме дисертације, као и сви формални захтеви.

Имајући у виду наведено, предлагемо Наставно-научном већу Математичког факултета да рад Александре Делић „Дифузионо-таласна једначина разломљеног реда са концентрисаним капацитетом и њена апроксимација методом коначних разлика” **прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за њену јавну одбрану.**

Београд, 05.02.2016.

### Чланови комисије:

---

др Бошко Јовановић, ментор, редовни професор  
Математичког факултета у Београду

---

академик Градимир Миловановић,  
Математички институт САНУ

---

др Милан Дражић, ванредни професор  
Математичког факултета у Београду

## Додатак

### Референце Александра Делић

#### Мастер рад

Александра Делић: „Трансмисиони проблем”, одбрањен на Математичком факултету Универзитета у Београду 2011. године (ментор: проф. др Бошко Јовановић).

#### Научни радови у часописима, публиковани или прихваћени за штампу

- [1] A.M. Delić, B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović: *On the transmission eigenvalue problem in disjoint domains*. Comput. Methods Appl. Math. 11 (2011), 407-417.
- [2] A. Delić, B.S. Jovanović: *Numerical approximation of an interface problem for fractional in time diffusion equation*. Appl. Math. Comput. 229 (2014), 467-479.
- [3] A. Delić: *Fractional in time diffusion-wave equation and its numerical approximation*. Filomat (to appear).
- [4] A. Delić, S.G. Hodžić, B.S. Jovanović: *Factorized Difference Scheme for two-dimensional Subdiffusion Equation in Nonhomogeneous Media*. Publ. Math. Inst. (to appear)

#### Радови на рецензији

- [5] A. Delić, S. Hodžić, B.S. Jovanović: *Difference scheme for an interface problem for subdiffusion equation*. Appl. Anal. Discrete Math. (in review)
- [6] A. Delić, B.S. Jovanović: *Finite difference approximation of fractional diffusion-wave equation with concentrated capacity*. Comput. Methods Appl. Math. (in review)

#### Саопштења на научним скуповима међународног значаја штампана у целини

- [7] A. Delić: *Convergence of a finite difference method for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity*. Proc. Appl. Math. Mech. 13 (2013), 349-350.
- [8] A. Delić: *A finite difference approach for the time-fractional diffusion equation with concentrated capacity*. Lecture Notes in Comput. Sci. 8236 (2013), 231-238.
- [9] B.S. Jovanović, A.Delić, L.G. Vulkov: *About some boundary value problems for fractional PDE and their numerical solutions*. Proc. Appl. Math. Mech. 13 (2013), 445-446.
- [10] B.S. Jovanović, L.G. Vulkov, A.Delić: *Boundary value problems for fractional PDE and their numerical approximation*. Lecture Notes in Comput. Sci. 8236 (2013): 38-49.

#### Саопштења на научним скуповима штампана у изводу (апстракт)

- [11] A.M. Delić, Z.D. Milovanović: *About transmission eigenvalue problem in disjoint domains*. Pannonian Mathematical Modeling International Conference (PAMM 2011), Novi Sad, April 29-30, 2011.
- [12] A. Delić: *Convergence of finite-difference scheme for fractional in time wave equation with variable coefficients and concentrated data*. Sixth Conference on Finite Difference Method: Theory and Application (FDM'14), Lozenetz (Bulgaria), June 18-23, 2014.

- [13] A. Delić: *A finite difference scheme for a fractional super-diffusion equation with concentrated capacity*. 13th Serbian Mathematical Congress, Vrnjačka Banja, May 22-25, 2014.
- [14] A. Delić: *Ocena brzine konvergencije diferencijalnih shema za jednačine anomalne difuzije sa koncentrisanim kapacitetom*. Šesti simpozijum „Matematika i primene” 2015, Beograd, Oktobar 16-17, 2015.

**Учешће на пројектима**

„Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене”, ОИ 174015, 2011-2016, Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.