

Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета у Београду донетом на седници одржаној 22.09.2014. именовани смо у комисију за преглед и оцену рукописа

Диференцијске схеме за решавање једначине субдифузије,

који је **Сандра Хоцић**, дипломирани математичар - мастер из Београда, поднела као своју докторску дисертацију. Након прегледа рукописа подносимо Наставно-научном већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

Биографија докторанткиње

Сандра Хоцић је рођена 27.08.1987. у Новом Пазару. Основну школу „Сретен Младеновић” је завршила у Десимировцу, а „Прву крагујевачку гимназију” у Крагујевцу, као носилац дипломе „Вук Караџић”. На Математички факултет у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, уписала се 2006. године. Дипломирала је 2010. године, са просечном оценом 9,55 чиме је стекла звање Дипломирани математичар. На мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација уписала се 2010. године. Мастер рад под насловом *Неки спектрални проблеми и њихово нумеричко решавање* одбранила је 1. јула 2011. године, под менторством проф. др Бошка Јовановића, чиме је стекла звање Дипломирани математичар - мастер. На докторске студије на Математичком факултету у Београду, одсек Математика, уписала се 2011. године.

Сандра Хоцић је од фебруара 2011. до децембра 2012. радила као сарадник у настави на Математичком факултету Универзитета у Београду. Од децембра 2012. ради као асистент на Математичком факултету Универзитета у Београду, где је држала вежбе из следећих курсева: *Увод у нумеричку математику, Линеарно програмирање, Теорија апроксимација, Обрада сигнала и Математика (за студенте Хемијског факултета)*.

Предмет дисертације

Рукопис се бави почетно-граничним проблемима за једначину субдифузије и њиховом апроксимацијом методом коначних разлика. Једначина субдифузије добија се из класичне дифузионе једначине заменом првог парцијалног извода по временској променљивој изводом разломљеног реда α , где је $0 < \alpha < 1$. Једначине овог типа описују различите физичке процесе у којима се среће аномална дифузија (турбулентно струјање, хаотичка динамика итд.). Осим тога, изводи разломљеног реда, као оператори нелокалног карактера, имају велику примену у задацима с "меморијским ефектом" (процеси у срединама с фракталном геометријом, неуређеним материјалима, аморфним

полупроводницима, вискоеластичним срединама итд.), као и у математичком моделирању економских, биолошких и социјалних феномена.

Почетно-гранични проблеми за једначину субдифузије имају слаба генерализована решења у одговарајућим просторима типа Собољева. У раду је извршена нумеричка апроксимација тих проблема, односно конструисане су коректне и економичне диференцијских схеме за њихово решавање.

Приказ дисертације и њених главних доприноса

Рукопис је сложен на рачунару, има 116 (9+103+4) страница и састоји се из следећих поглавља:

1. Математички апарат
 2. Једначина субдифузије
 3. Апроксимација методом коначних разлика
 4. Схеме променљивих праваца
- уз Предговор, Закључак, Списак литературе и Биографију докторанткиње.

Прво поглавље је уводног карактера и у њему су изложени основни појмови и резултати (без доказа) из теорије линеарних оператора, теорије функционалних простора и теорије фракционог рачуна који се користе у даљем раду.

У другом поглављу представљен је физички смисао једначине субдифузије. Уведени су специјални простори собољевског типа. Доказана је егзистенција и јединственост решења коришћењем метода функционалне анализе и теорије парцијалних диференцијалних једначина (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, лема Лакса-Милграма итд).

У трећем поглављу разматра се апроксимација првог почетно-граничног проблема за једначину субдифузије методом коначних разлика. Најпре је размотрена једнодимензиона једначина и за њу су уведене имплицитна диференцијска схема као и схема са тежином. Знатно детаљније су приказане исте схеме за дводимензиону једначину субдифузије, како са Лапласовим оператором тако и са општим диференцијалним оператором другог реда. Претпостављено је да коефицијенти задатих једначина задовољавају услове регуларности и елиптичности који омогућавају постојање генерализованих решења у одговарајућим просторима Собољева. За дате схеме конструисане су оцене брзине конвергенције. Типична брзина конвергенције износи $O(h^2 + \tau^{2-\alpha})$, где је h корак мреже по просторним променљивим, а τ корак по временској променљивој. Овакве оцене су добијене у две различите норме уз различите претпоставке о глаткости решења. У односу на корак h , добијене оцене су сагласне с глаткошћу улазних података и у том смислу су оптималне, то јест при датој глаткости улазних података не може се повећати ред конвергенције, нити се при фиксираном реду конвергенције могу ослабити захтеви глаткости. Приликом конструкције методе коначних разлика и испитивања њених особина коришћене су методе теорије диференцијских схема (простори функција дискретног аргумента, метода енергетских неједнакости итд). За извођење оцене брзине конвергенције коришћене су методе теорије диференцијских схема, као и методе теорије функционалних простора (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, простори мултипликатора, интегралне репрезентације, лема Брамбла-Хилберта итд).

Две важне особине које се очекују од добре диференцијске схеме јесу стабилност и економичност. Експлицитна схема, размотрена у трећем поглављу, је економична, пошто се вредности нумеричког решења на посматраном временском слоју $t = t_k$ лако израчунавају ако су познате његове вредности на претходним временским слојевима. Нажалост, ова схема није апсолутно стабилна. За разлику од ње, имплицитна схема је апсолутно стабилна. За израчунавање вредности решења на новом временском слоју у случају имплицитне схеме потребно је решити диференцијски проблем елиптичког типа. У једнодимензионом случају тај задатак се своди на систем линеарних једначина с тродијагоналном матрицом који се ефикасно решава Томасовим алгоритмом. Међутим, у вишедимензионом случају добија се систем с матрицом сложеније структуре на који се овај алгоритам не може применити. Тако се на природан начин појављује проблем конструкције диференцијске схеме за вишедимензиону једначину субдифузије која ће у исто време бити апсолутно стабилна и економична.

Докторанткиња је овај проблем решила у четвртном поглављу предложивши две нове диференцијске схеме за апроксимацију почетно-граничног проблема за дводимензиону једначину субдифузије. Обе спадају у схеме променљивих праваца (енг. ADI schemes – Alternating Direction Implicite schemes). Прва од њих је адитивна диференцијска схема којом се дати проблем своди на две спрегнуте једнодимензионе једначине које се наизменично решавају. Показана је стабилност адитивне схеме и конструисана оцена брзине конвергенције. Добијени теоријски резултати су тестирани на нумеричким примерима. Показало се да је ефективна брзина конвергенције по временској променљивој већа од теоријски предвиђене. Друга предложена схема је факторизована диференцијска схема. Њу карактерише увођење оператора погодне структуре, блиског идентичном оператору, који делује на фракциони извод. Решавање дискретизованог задатка се на сваком временском слоју своди на решавање два сукцесивна система линеарних једначина. Показана је стабилност факторизоване схеме и конструисана оцена брзине конвергенције која је тестирана и потврђена нумеричким примерима. Такође је показано да се факторизована схема може применити и на једначину с елиптичким оператором с променљивим коефицијентима. У случају обе предложене схеме повећана економичност је плаћена нешто споријом конвергенцијом у односу на корак τ . Такође је размотрена модификована факторизована схема која у случају дводимензионе једначине са Лапласовим оператором даје нешто већи ред конвергенције по временској променљивој. Међутим, ова схема се не може пренети на општу дводимензиону једначину са променљивим коефицијентима. Приликом конструкције методе коначних разлика и испитивања њених особина коришћене су методе теорије диференцијских схема (простори функција дискретног аргумента, метода енергетских неједнакости итд). За извођење оцене брзине конвергенције коришћене су методе теорије диференцијских схема, као и методе теорије функционалних простора (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, простори мултипликатора, интегралне репрезентације, лема Брамбла-Хилберта итд). Имплементација предложених метода коначних разлика реализована је у програмском окружењу Матлаб (Matlab).

Закључак рада дат је у петом поглављу.

Списак литературе састоји се од 54 библиографске јединице, од којих су три самоцитати, тј. радови докторанткиње.

Референце генерисане у току рада на дисертацији

Резултати приказани у овом рукопису публиковани су у

- два коауторска рада у часописима са SCI листе,
- једном самосталном раду у часопису са SCI листе.

Још један коауторски рад налази се на рецензији у часопису са SCI листе.

- [1] S.G. Hodžić: *Factorized Difference Scheme for 2D Fractional in Time Subdiffusion Equation*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 9(2): 199-208, 2015.
ISSN 1452-8630, IF(2014) = 0.860, M21 Mathematics
- [2] S.G. Hodžić, B.S. Jovanović: *Additive Difference Scheme for two-dimensional Fractional in Time Diffusion Equation*, *Filomat* 2015 (to appear).
ISSN 0354-5180, IF(2014) = 0.638, M22 Mathematics
- [3] A. Delić, S.G. Hodžić, B.S. Jovanović: *Factorized Difference Scheme for two-dimensional Subdiffusion Equation in Nonhomogeneous Media*, *Publ. Math. Inst.* 2015 (to appear).
ISSN 0350-1302, IF(2014) = 0.270, M23 Mathematics
- [4] A. Delić, S.G. Hodžić, B.S. Jovanović: *Difference Scheme for an Interface Problem for Subdiffusion Equation*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 2015 (на рецензији).
ISSN 1452-8630, IF(2014) = 0.860, M21 Mathematics

Закључак

Рукопис *Диференцијске схеме за решавање једначине субдифузије* садржи вредан научни допринос у области нумеричких метода решавања парцијалних диференцијалних једначина са изводима разломљеног реда. У њему је детаљно размотрена дводимензиона једначина субдифузије како са теоријског тако и са нумеричког аспекта. Предложене су две економичне схеме за решавање првог почетно-граничног проблема за једначину субдифузије и испитане њихове особине. Рад је написан на солидном математичком нивоу. Резултати добијени у овом рукопису приказани су у три научна рада у међународним часописима са SCI листе, од којих је један публикован, док су друга два прихваћена за штампу. Констатујемо да су испуњени сви циљеви наведени приликом предлагања теме дисертације, као и сви формални захтеви.

Имајући у виду наведено, предлагемо Наставно-научном већу Математичког факултета да рад Сандре Хоџић *Диференцијске схеме за решавање једначине субдифузије* прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 03.02.2016.

Чланови комисије:

др Бошко Јовановић, ментор, редовни професор
Математичког факултета у Београду

др Арпад Такачи, редовни професор
Природно-математичког факултета у Новом Саду

др Милан Дражић, ванредни професор
Математичког факултета у Београду

Додатак

Референце Сандре Хоџић

Мастер рад

1. Сандра Г. Хоџић: *Неки спектрални проблеми и њихово нумеричко решавање*, одбрањен на Математичком факултету Универзитета у Београду 2011. године (ментор: проф. др Бошко Јовановић).

Радови у часописима, публиковани или прихваћени за штампу

1. S. G. Hodžić, B. S. Jovanović: *Finite difference approximation of an elliptic problem with nonlocal boundary condition*, Filomat 2014 (to appear).
2. S. G. Hodžić, B. S. Jovanović: *Additive Difference Scheme for two-dimensional Fractional in Time Diffusion Equation*, Filomat 2015 (to appear).
3. S. G. Hodžić: *Factorized Difference Scheme for 2D Fractional in Time Subdiffusion Equation*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics 9(2): 199-208, 2015.
4. A. Delić, S. G. Hodžić, B. S. Jovanović: *Factorized Difference Scheme for two-dimensional Subdiffusion Equation in Nonhomogeneous Media*, Publ. Math. Inst. 2015 (to appear).

Радови на рецензији

1. A. Delić, S. G. Hodžić, B. S. Jovanović: *Difference Scheme for an Interface problem for Subdiffusion Equation*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 2015.

Радови у зборницима

1. S. G. Hodžić: *Problem sopstvenih vrednosti sa nelokalnim Robin-Dirihleovim граничним uslovima*, Zbornik radova III simpozijum „Matematika i primene“, Beograd 2012, 75-82.

Саопштења на научним скуповима

1. S. G. Hodžić: *Problem sopstvenih vrednosti sa nelokalnim Robin-Dirihleovim граничним uslovima*, Treći simpozijum „Matematika i primene“, Beograd 2012.
2. S. G. Hodžić, B. Jovanović: *About a nonlocal BVP for Poisson's equation*, XIII srpski matematički kongres, Vrnjačka banja 2014, Abstracts, p.27.

Учешће на пројектима

1. *Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене*, Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, ОИ 174015, 2011- 2016.