

Универзитет у Београду

Архитектонски факултет

мр Јана А. Липковски

**ОПТИМАЛНОСТ ПРИМЕНЕ НУМЕРИЧКИХ  
МЕТОДА ОДРЕЂИВАЊА ПОЧЕТНЕ И  
ДЕФОРМИСАНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ  
МЕМБРАНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА**

докторска дисертација

БЕОГРАД, 2015

Ментор:

**Проф. др Милан Глишић**, редовни професор у пензији, Архитектонски факултет  
Универзитета у Београду

Чланови комисије за оцену завршене докторске дисертације:

- 1) **Др Ђорђе Вуксановић**, дипл. инг. грађ, редовни професор Грађевинског факултета Универзитета у Београду
- 2) **Др Ружа Окрајнов Бајић**, дипл. инг. грађ, доцент Архитектонског факултета Универзитета у Београду

Датум одбране:

\_\_.\_\_.2016.

## ЗАХВАЛНОСТ

Као прво, аутор жели да изрази своју захвалност Јиргену Холу (Jürgen Holl) и Бернду Старију (Bernd Stary) из Technet GmbH за временски ограничену лиценцу софтверског пакета EASY®.

Затим, аутор се захваљује и подршци Министарства за образовање, науку и технолошки развој Републике Србије (пројекат ОI 174020).

У даљем раду, аутора су подржали Ник Никнам (Nick Nicknam) и Зина Фарук (Zeena Farook), сарадници фирме OASYS, који су аутору ставили на располагање временски ограничену лиценцу софтвера GSA Suite и пружили техничку подршку.

Напоследку, аутор се захваљује сарадницима: Флориану Вајнману власнику фирме Florian Weinmann Modelle за уступање софтвера Rhinoceros® као и Марку Станићу, власнику фирме ТЕНДАМОНТ из Београда, на уступању софтвера MEMBRANE® за коришћење у дисертацији.

Аутор се захваљује Флориану Вајнману власнику фирме Florian Weinmann Modelle на подршци у области моделирања, као и проф. др Александру Липковском, редовном професору на Математичком факултету Универзитета у Београду, на подршци из области програмирања.

ОПТИМАЛНОСТ ПРИМЕНЕ НУМЕРИЧКИХ  
МЕТОДА ОДРЕЂИВАЊА ПОЧЕТНЕ И ДЕФОРМИСАНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ  
МЕМБРАНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА

- Резиме -

Овај рад се бави оптималношћу метода за генерисање почетне геометрије претходно затегнутих, тензилних конструкција, анализом и поређењем резултата ових метода, као и софтверских пакета у којим су имплементирани.

Тензилне конструкције (енг. *Tensile structures*), су најадекватнији начин за наткривање великих објеката и јавних површина великог распона без захтева термике. Минималан утрошак материјала конструкција оптерећених искључиво на затезање је непобедив аргумент у корист ових конструкција. Нажалост, у нашем региону је овај вид конструкције готово незаступљен. Многи пројектанти и инвеститори по инерцији користе конструкције од крутих материјала, чак и када су све индикације у корист мембранских и других лаких носећих конструктивних система (нпр. челичних мрежа).

С обзиром на то да геометрија тензилних конструкција подлеже строгим математичким правилима, овај рад анализира методе генерисања почетне геометрије – тзв. формфајндинга, са циљем поређења ефикасности и резултата признатих метода. У самом почетку формфајндинг је итеративан, интуитиван и експерименталан – архитекта уз помоћ физичких модела од сапунице, најлон чарапа или еластичног тела долази до представе о геометрији тензилних конструкција.

Развојем тензилних конструкција временом се створила потреба да се овај комплексни процес дигитализује, тј. да се развију алгоритми који би бар приближно одређивали положај чворних тачака конструкције на рачунски начин. Из ове прагматичне потребе родиле су се методе рачунског изналажења почетне геометрије, попут методе густине силе (енг. *Force density method* - Линквиц, Шек 1974) или методе динамичке релаксације (енг. *Dynamic relaxation* - Барнс 1977), а касније и метода ажурирања референтног положаја (енг. *Updated Reference Strategy* – Блестингер, Вихнер 2005).

Тема научног истраживања је утврђивање оптималности поређењем резултата признатих метода за пројектовање тензилних конструкција, као и комерцијалног софтвера који се базира на поменутих методама.

До равнотежне геометрије типских примера се долази применом признатих метода за генерисање геометрије тензилних конструкција: линеаризованом методом „густине силе“, која је настала 70-тих година 20. века и развијена је од стране Линквица и Шека (Linkwitz, Schek) на Универзитету у Штутгарту, затим применом динамичке релаксације која је развијена 70-тих година 20. века у Великој Британији од стране Барнса (Barnes), затим методом ажурирања референтног положаја, развијеном од стране Блецингера на ТУ Минхен и напослетку применом методе коначних разлика, програмиране од стране аутора, која је универзална метода решавања система парцијалних диференцијалних једначина.

Признате методе формфајндинга су изложене у првом делу рада, као и досадашње компарације у стручној литератури.

У другом делу рада се анализирају и пореде резултати метода, генерисани на задатим типским примерима.

Софтверски пакети који користе горе наведене методе (конкретно EASY<sup>®</sup>, GSSuite<sup>®</sup>, Rhinomembrane) анализирани су у последњем делу рада са више аспеката.

Теорија штапова са образложењем појма геометријске матрице крутости изложена је у Прилогу I.

Процес експерименталног моделирања описан је у Прилогу II.

Програмски код у пакету Mathematica<sup>®</sup> за налажење минималне површи над задатим граничним условима дат је у Прилогу III.

Циљ истраживања је утврђивање оптималности метода формфајндинга – уз уважавање досадашњег рада у овом пољу приказаног у стручној литератури, као и оптималности софтвера који исте методе користе.

Пошто је оптималност методе, као и софтвера, појам који зависи од корисника и конкретног пројекта, извршен је осврт и на сврху, економску оправданост, као и крајњег корисника софтвера и његове захтеве.

Методолошки, овај истраживачки рад има две димензије. Прву димензију чини аналитичко поређење резултата добијених наведеним методама изналажења почетне геометрије - формфајндинга.

Другу димензију чини емпиријско-искуствено поређење, које проистиче из дугогодишње примене софтвера за пројектовање мембранских конструкција коју је аутор стекла на Универзитету у Штутгарту, учествујући у радионицама за мембранско пројектовање на Универзитету у Берлину, последипломским студијама на Грађевинском факултету у Београду, као и у сарадњи са фирмом ТЕНДАМОНТ из Београда и фирмом Florian Weinmann Modelle из Штутгарта.

С обзиром да је програмирање метода формфајндинга веома сложен, обиман и одговоран посао, који захтева читаве тимове експерата из овог поља, аутор је за добијање већег броја резултата различитих метода користила постојећи, комерцијални софтвер који јој је љубазношћу њених сарадника стављен на располагање.

За добијање почетне геометрије мембранске конструкције коришћен је софтвер EASY стављен аутору на располагање љубазношћу фирме TECHNET GmbH из Немачке, који користи метод густине силе (FDM). За добијање резултата методом динамичке релаксације (DR) коришћен је софтвер GS Suite који је аутору стављен на располагање љубазношћу фирме OASYS из Велике Британије. Затим, за добијање резултата стратегијом ажуриране референце (URS) коришћен је софтвер Rhinoceros, уз софтверски додатак Rhinomembrane, који је аутору стављен на располагање љубазношћу фирме Florian Weinmann Modelle. За добијање минималне површи типских примера коришћен је програм аутора у Mathematica<sup>®</sup>-и у сарадњи са Математичким факултетом Универзитета у Београду.

У склопу ове дисертације су анализирана четири типска примера: асиметрични хиперболоид (тзв. „једро“, нем. „4-Punkt Segel“), Конкусова минимална површ са синусоидалним луком као граничним условом, модификована седласта структура и конични шатор са сингуларним граничним условом. Разлика између симулација минималне површи и резултата генерисаног уз помоћ комерцијалног софтвера у анализираним примерима није премашивала 1.50% висине, а између геометрије генерисане уз помоћ URS са RHINOMEMBRANE износи свега 1%.

Методом DR је у склопу софтверског пакета GSA Suite анализиран пример из магистарског рада аутора. Овај пример упоређен је са решењем до којег је аутор дошла уз помоћ FDM и софтверског пакета EASY. Површ добијена уз помоћ FDM има већу закривљеност у односу на површ добијену DR за приказане параметре. Разлика у висини конструкције са истим фиксним тачкама износи до 1.6%.

Међутим, укупна разлика у геометрији (нпр. деформација граничних услова приликом формфајдинга) ових површи није занемарљива и графички је приказана у склопу дисертације.

Могуће је да у ступњу формфајдинга разлика између анализираних примера не буде од сигнификантног значаја, али под утицајем великог оптерећења снегом или ветром ова разлика може бити знатна и захтева додатно испитивање.

За поређење ефикасности комерцијалних софтвера, коришћен је и софтвер Membrane који је аутору стављен на располагање љубазношћу фирме ТЕНДАМОНТ Београд која се бави извођењем мембранских конструкција. Такође је поменут и софтвер Surface Evolver, аутора Кена Бракеа (Ken Brakke) који је бесплатан и доступан на интернету.

*Кључне речи: тензилне конструкције, формфајдинг, минимална површ, нумеричке методе, метода густине силе, динамичка релаксација, стратегија ажурирања референтног положаја, софтверско моделовање*

Научна област: Грађевинско-урбанистичке науке

Ужа научна област: Архитектонске технологије

УДК број: 624.01

APPLICATION OPTIMALITY OF NUMERICAL METHODS FOR  
FORMFINDING OF THE PRELIMINARY AND DEFORMED GEOMETRY OF  
MEMBRANE STRUCTURES

- Abstract -

This work deals with optimality of the existing form-finding methods for generation of initial geometry of tensile structures. It compares the geometry results and the efficiency of these methods, as well as the software packages based on these methods.

Tensile structures are the most appropriate way for covering large scale areas and buildings, with no thermal insulation requirements. The minimal usage of constructing materials of tensile structures is an inevitable argument in their favor. In the region of Balkans, these structures are still very rare. Often, the architects and the engineers use habitually stiff structures for spanning large areas, even if all the indicators are in favor of tensile structures (membranes or cable nets).

Regarding the fact, that the geometry of tensile structures obeys strict mathematical rules, this work analyses the methods for generating the preliminary geometry of a tensile structure – also called form-finding, from the aspect of the efficiency of the methods and their results. In the very beginning, form-finding is an iterative, intuitive and experimental process, the architect obtains the structural geometry by making soap-film, stocking or elastic tulle models.

With further development of tensile structures, this process became more and more digitalized. It was necessary to develop algorithms, that would make it possible to approximately calculate (by the computer) the position of the structural nodes, so the structure itself is in static equilibrium. From this pragmatic need, many form-finding methods were developed: Force-density method (by Linkwitz and Schek 1974), Dynamic relaxation (Barnes 1977), later on Updated Reference Strategy (Bletzinger 2001) and others.

This work will compare these methods and the software packages they are implemented in.

To find the initial equilibrium geometry of typical structure examples several form-finding methods have been used: the linearized Force-density method (FDM), Dynamic relaxation (DR), Updated reference strategy (URS) and the finite-differences method for



calculating minimal surfaces over the same boundary conditions (programmed in Mathematica by the author).

The stated form-finding methods have been analysed in the first part of the dissertation, as well as the comparisons that have been published in the scientific literature.

The second part of the dissertation deals with the comparison of results of the reviewed methods applied to typical structural examples (e.g. the saddle, conical membrane, etc.)

The last part analyses the software packages that use the reviewed methods (e.g. EASY<sup>®</sup>, GS Suite<sup>®</sup>, Rhinomembrane) from several aspects.

The structural theory with the explanation of the geometrical stiffness matrix has been explained in the Appendix I.

The experimental modelling process has been presented in the Appendix II.

The programming code (programmed in Mathematica<sup>®</sup>) for calculating a minimal surface with identical boundary conditions has been presented in the Appendix III.

The aim of the research is to determine the optimal form-finding method, respecting the previous research in this field, as well as the optimal form-finding software.

The optimality of the software package, as well as the supporting method is depending on the user and the specific project and the economical validity, those aspects will be included in the conclusions of this research.

Methodologically, this work has two dimensions. The first dimension is an analytical comparison of the results of the presented form-finding methods.

The second dimension are empirical, experience based acknowledgements, that the author collected during long term use of software for membrane structural design and form-finding, throughout her studies at the University in Stuttgart and several Workshops at the University of Berlin, as well as during the master course at the Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade and in collaboration with the company TENDAMONT from Belgrade and Florian Weinmann Modelle from Stuttgart.

Programming software for form-finding of tensile structures is a very complicated, voluminous and responsible work, which demands a team made of experts in several disciplines. That is the reason why the author used existing, commercial software for gathering the results of her research that was kindly made available to the author by the companies and their associates.

For generating the preliminary geometry of typical examples with FDM the software package EASY has been used, made available to the author by the courtesy of TECHNET GmbH from Germany. For generating the results by dynamic relaxation (DR), the software-package GS Suite, made available to the author by the company OASYS from Great Britain. For generating the geometry with Updated Reference Strategy (URS) the software package Rhinoceros and the plug-in for formfinding Rhinomembrane have been used, that was made available to the author by the courtesy of Florian Weinmann Modelle. Finally, for the minimal surface solution, the author's program in Mathematica<sup>®</sup> in collaboration with the Faculty of Mathematics, University of Belgrade has been used.

Within this dissertation, four typical examples were analysed: an asymmetrical hyperboloid (4-point sail), the minimal surface of Concus (with a sinusoidal arch as boundary condition, a saddle-shaped surface and a conical tent with a singular boundary condition (BC). The simulation of the minimal surface with the same BC that was obtained by the finite differences method programmed by the author and the results gained by the commercial software using FDM and URS was max. 1.50% of the structure elevation, but the difference of the overall geometry (for example the deformation of the boundary conditions during formfinding) is not negligible and has been presented graphically within the dissertation.

A further example from the author's master thesis was analyzed using Dynamic relaxation within the software package GSASuite and the results were compared to the results obtained by the FDM using the software package EASY. The curvature of the surface obtained by FDM was greater than the DR generated surface. The elevation difference (with the same fixed points) of the structure was 1.6%.

In a preliminary, form-finding stage, these geometry differences may not be significant, but it could be of significance under external loads and their combinations (heavy wind or snow load conditions).

For the comparison of commercial software packages, except of the mentioned packages, the program Membrane that was made available to the author by the company TENDAMONT

from Belgrade, have been used. Also, Ken Brakke's Surface Evolver have been mentioned, a minimal surface generating software that is available on the internet.

*Key words: tensile structures, formfinding, minimal surface, numerical methods, Force-density method, Dynamic relaxation, Updated reference strategy, software modelling*

Scientific field: Engineering and urbanistic sciences

Narrow scientific field: Architectural technologies

UDC 624.01

## Садржај:

### 1. УВОД

- 1.1 Тема
- 1.2 Циљ
- 1.3 Методологија

### 2. ТЕНЗИЛНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ - Историјат, преглед и типологија

- 2.1. Историјат развоја мембранских конструкција и конструкција од челичних каблова
- 2.2. Принцип на коме почивају претходно затегнуте мембранске конструкције – принцип минималне површи
- 2.3. Специфичности тензилних конструкција
- 2.4. Типологија и категоризација мембранских конструкција и челичних мрежа

### 3. „FORMFINDING“ – генеза геометрије тензилних конструкција

- 3.1. Опште карактеристике генезе геометрије „FORMFINDING“ – при пројектовању – геометрија минималне површи
- 3.2. Најчешће методе генерисања почетне геометрије тензилних конструкција – хронологија, карактеристике, формулација, примене
  - 3.2.1. Метода густине силе (енг. Force density method)
  - 3.2.2. Стратегија ажурирања референтног положаја са хомотопским пресликавањем (енг. Updated Reference Strategy with Homotopy Mapping)
  - 3.2.3 Метода динамичке релаксације (енг. Dynamic relaxation)
  - 3.2.4. Методе матрице крутости (Stiffness Matrix Method - SM)
- 3.3. Сличности и разлике представљених метода
- 3.4. Досадашња поређења метода у стручној литератури

### 4. Анализа генерисаних геометрија на типским примерима

- 4.1. Избор типских примера и метода за анализу

- 4.1.1. Дефинисање облика, степена комплексности, броја чворова, типа мреже, граничних услова
  - 4.1.2. Коришћене методе
  - 4.1.3. Директно нелинеарно итеративно решење проблема за налажење геометрије минималне површи (сапунске мембране)
  - 4.1.4. Резултати формфајндинга
5. Поређење софтверских пакета за формфајндинг са аспекта уграђених метода и њихове ефикасности, компатибилности, приступачности и економичности
- 5.1. Поређење софтверских пакета за формфајндинг са аспекта генерисане геометрије
  - 5.2. Поређење резултата добијених под утицајем спољног оптерећења
  - 5.3. Дефинисање критеријума
  - 5.4. Поређење софтверских пакета – Табеларни и графички прикази
6. Закључак и препоруке
- 6.1. Анализа и дискусија резултата истраживања
  - 6.2. Препоруке за архитекте и инжењере

Садржај прилога:

ПРИЛОГ 1 – Теорија деформације I, II и III реда

ПРИЛОГ 2 – Експериментални формфајндинг - физичко моделирање

ПРИЛОГ 3 – Програмски код за генерисање минималне површи у софтверу

Mathematica®

- I. Извор илустрација
- II. Литература
- III. Биографија аутора
- IV. Захвалност

## ПРЕДГОВОР

Тензилне конструкције, којима припадају мембранске конструкције и конструкције од мрежа каблова су најадекватнији начин наткривања великих површина или објеката код којих су термички захтеви занемарљиви. Нажалост, у нашем региону, готово да нема репрезентативног објекта изведеног у виду мембранске или друге тензилне конструкције. Због мањка информисаности домаћих инжењера у овој области, многи инвеститори по инерцији користе круте конструкције, чак и када све упућује на тензилну. Форма претходно затегнутих конструкција подлеже стриктним математичким правилима, тако да је пре приступања пројектовању ових конструкција неопходно упознати се са њима, теоријски и експериментално. Примена ових математичких правила или законитости приликом проналажења оптималне геометрије (форме) претходно затегнутих конструкција се у инжењерском свету назива и «формфајндинг» (eng. formfinding).

Овај рад приказује и анализира, на компаративни начин, методе моделовања мембранских конструкција применом дигиталне технологије, тј. специјализованог софтвера.

Софтверско моделовање спроведено је уз помоћ софтверског пакета EASY, који користи тзв. методу "густине силе" (Force-density method) аутору стављеног на располагање за израду овог рада љубазношћу особља фирме Technet GmbH; затим GSA SUITE, софтверски пакет који користи методу динамичке релаксације (Dynamic relaxation method), стављеног на располагање за израду овог рада љубазношћу особља фирме OASYS, софтверски пакет Rhinoceros (уз помоћ додатка за формфајндинг Rhino Membrane) и напослетку сопствени програм написан у Mathematica-и, који користи методу коначних разлика.

Такође бих се захвалила проф. Александру Липковском за подршку приликом програмирања у Mathematica-и, као и Флориан Вајнману приликом анализирања Rhinoceros, тј. Rhino Membrane.

## 1. УВОД

Тензилне конструкције (енг. Tensile structures), су несумњиво најадекватнији начин за наткривање великих објеката и јавних површина великог распона без захтева термике. Минималан утрошак материјала конструкција оптерећених искључиво на затезање је непобедив аргумент у корист ових конструкција у доба мера штедње и у државном и у приватном сектору. Нажалост, у нашем региону је овај вид конструкције готово незаступљен. Многи пројектанти и инвеститори по инерцији користе „класичан“ вид конструкције од крутих материјала, чак и када су све индикације у корист мембранских и других лаких носећих конструктивних система (нпр. челичних мрежа). Иако, у Европи и у свету, овај вид конструкција има потпуно равноправан положај у односу на друге типове конструкција, у нашем региону готово да се не може наћи стадион, аеродром, градски трг или зелена пијаца наткривена мембранским кровом.

Обзиром на то да геометрија мембранских конструкција подлеже строгим математичким правилима, потребно је упознати се са методама за њихово пројектовање, са циљем успешног моделовања ових конструкција. Ово упознавање у самом почетку треба да буде интуитивно и експериментално – уз помоћ физичких модела од сапунице, најлон чарапа или еластичног тила. Експериментално моделовање је од кључне важности за интуитивно поимање појма „*формфајндинг*“, поготово за архитекте, који и јесу задужени за овај први степен пројектовања.

Изналажење оптималне геометрије мембране одвија се итеративним процесом који се назива „*формфајндинг*“. У самом зачетку тензилних конструкција овај процес је био везан искључиво за физичко моделирање уз помоћ сапунице, еластичних текстила (најлон чарапе, еластични жерсеј), жичаних модела, итд. Временом се створила потреба да се овај комплексни процес изналажења форме дигитализује, тј. да се развију алгоритми који би, бар приближно одређивали положај чворних тачака конструкције на рачунски начин. Из ове прагматичне потребе изродиле су се различите методе рачунског изналажења почетне геометрије претходно затегнутих конструкција, попут: методе густине силе

(Линквиц, Шек 1974) или методе динамичке релаксације (Барнс 1977). При томе је друга наведена метода нашла на много ширу примену, док се прва углавном користи за тзв. “*формфајдинг*” мембранских конструкција, конструкција од челичних ужади и пнеуматских конструкција. Метода ажурирања референтног положаја (енг.Updated Reference Strategy ), такође коришћена у комерцијалном софтверу је новијег датума (Блецингер, Вихнер 2005).

Овај рад се бави оптималношћу поменутих метода, поређењем њихових резултата, као и софтверских пакета у којим су имплементирани.



## 1.1 Тема

Тема научног истраживања је утврђивање оптималности у поступку компарације резултата признатих метода за пројектовање мембранских конструкција и конструкција од челичних каблова. До мембранске конструкције као глатке површи долазимо дискретним моделом. Дискретан модел углавном подразумева мрежу каблова, тј штапова. Имајући на уму да мембранске површи настају затезањем, мрежа каблова мора да задовољи равнотежу чворова у случајевима када на конструкцију делују и када не делују спољна оптерећења (PRESTRESS стање – стање претходног затезања).

До равнотежне геометрије типског примера се долази применом признатих метода за генерисање геометрије тензилних конструкција: применом линеаризоване методе „густине силе“, која је настала 70-тих година 20. века и развијена је од стране Линквица и Шека (Linkwitz, Schek) на Универзитету у Штутгарту, затим применом методе динамичке релаксације која је 70-тих година 20. века у Великој Британији од стране Барнса (Барнес), затим методом ажурирања референтног положаја, развијена од стране Блецингера на ТУ Минхен и напоследку применом методе коначних разлика, која је универзална метода решавања система парцијалних диференцијалних једначина.

Признате методе формфајндинга су изложене у првом делу рада, као и њихови резултати, који су досада анализирани у стручној литератури.

У другом делу рада се анализирају и пореде резултати метода генерисани на задатим типским примерима.

Софтверски пакети који користе горе наведене методе (конкретно EASY, GS Suite, Rhinomembrane) анализирају су у последњем делу рада са више аспеката.

Теорија штапова са образложењем појма геометријске матрице крутости изложена је у Прилогу I.

## 1.2 Циљ

Циљ истраживања је утврђивање оптималности метода формфајндинга – у поређењу са више аспеката уз уважавање досадашњег рада у овом пољу приказаног у стручној литератури, као и оптималности софтвера који исте методе користе.

Пошто је оптималност методе, као и софтвера, појам који зависи од корисника и конкретног пројекта, биће извршен осврт и на сврху, економску оправданост, као и крајњег корисника софтвера и његове захтеве.

## 1.3 Методологија

Методолошки, овај истраживачки рад има две димензије. Прву димензију чини аналитичко поређење резултата добијених наведеним методама изналажења почетне геометрије.

Другу димензију чини емпиријско-искуствено поређење, које проистиче из дугогодишње примене софтвера за пројектовање мембранских конструкција коју је аутор стекао на Универзитету у Штутгарту, учествујући у радионицама за мембранско пројектовање на Универзитету у Берлину, последипломским студијама на Грађевинском факултету у Београду, као и у сарадњи са фирмом ТЕНДАМОНТ из Београда и фирмом Florian Weinmann Modelle из Штутгарта.

С обзиром да је програмирање метода формфајндинга веома сложен, обиман и одговоран посао, који захтева читаве тимове експерата из овог поља, аутор је за добијање већег броја резултата различитих метода користила постојећи, комерцијални софтвер који је аутору љубазношћу њених сарадника стављен на располагање.

За добијање почетне геометрије мембранске конструкције уз помоћ ФДМ коришћен је софтвер EASY стављен аутору на располагање љубазношћу фирме TECHNETH GmbH из Берлина, који користи метод “густине силе”. За добијање резултата методом динамичке релаксације коришћен је софтвер GS Suite у својој пробној верзији. Затим, за добијање резултата стратегијом ажуриране рефернце (УРС) коришћен је софтвер Rhinoceros, уз софтверски додатак Rhinomembrane,

који је аутору стављен на располагање љубазношћу фирме Florian Weinmann Modelle.

За анализу и компарацију комерцијалних софтвера, коришћен је и софтвер Membrane који је аутору стављен на располагање љубазношћу фирме ТЕНДАМОНТ, Београд, која се бави извођењем мембранских конструкција. Такође је поменут и софтвер Surface Evolver, аутора Кена Бракеа (Ken Brakke) који је бесплатан и доступан на интернету.

## 2. ТЕНЗИЛНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ - Историјат, преглед и типологија

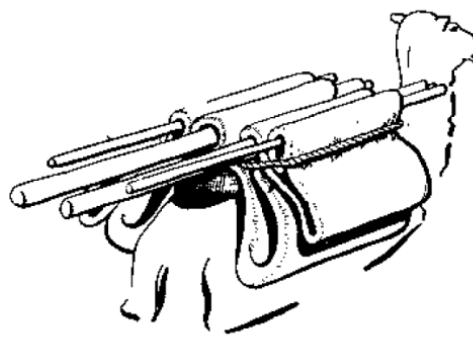
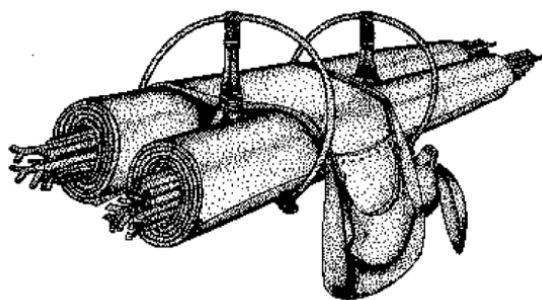
### 2.1. Историјат развоја мембранских конструкција и конструкција од челичних каблова

Шатори су један од најстаријих видова људских домова у најразличитијим цивилизацијама и представљају „претече“ савремених мембранских конструкција. Кроз историју су се разликовали по коришћеним материјалима, климатским условима и друштвеним структурама у којима су настали. Најстарији шатори су били кожни или текстилни.



Слика 1а и б – номадска склоништа у Тундри и Ирану

(извор: [3])



Слика 2а и б – транспорт привремених склоништа

(извор:[3])

У развоју тензилних конструкција је присутна константна оптимизација: обзиром на то да су народи, од којих неки и данас користе шаторе као своје домове (нпр. монголске јурте) често номадски народи, били су принуђени да своје

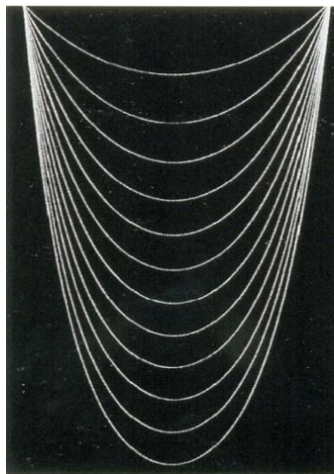
домове често демонтирају и пакују на начин који је практичан за ношење, (Слика 2) а затим да их поново у најкраћем могућем року састављају на другом месту – попут монголске јурте (Слика 3а) или индијанског типија (Слика 3б).



Слика 3а и б– монголска јурта и индијански типи (извор:[8])

Шатори су лаке носеће конструкције које се састоје од једног или више стубова и фолија, тканина, коже или мрежа. Стубови су оптерећени на притисак, док је облагајућа „мембрана“ оптерећена искључиво на затезање – обзиром да због њене флексибилности, није могућ ни један други вид оптерећења.

Мембрана и челични каблови су флексибилни. Када конопац виси слободно, он се деформише у облику криве коју зовемо ланчаницом (енг. *catenary*).



Слика 4а – ланчанице и модел висећег крова (извор: [6])

Оптимална искоришћеност материјала мембранских конструкција, као и мрежа од челичних каблова, потиче од чињенице да је цео пресек конструкције равномерно оптерећен.

Мембранске структуре имају само мембранску крутост. Крутост танке љуске или мембране једнака је:

$$D_M = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

*Израз 1а*

Крутост мембране на савијање је занемарљива,

$$D_B = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \rightarrow 0$$

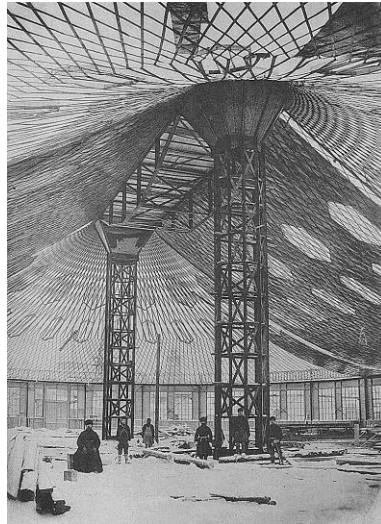
*Израз 1б*

због њене занемарљиве дебљине  $t$ . Ово значи да мембрана не може да пружи отпор деформацији савијања. То не значи да мембрана нема деформацију савијања, односно промену кривине  $k$ , већ јој не пружа отпор.

Да би одолеле спољном оптерећењу, сајла или мембрана морају да буду стабилизоване, односно претходно затегнуте. У том случају оптерећење у виду аксијалног притиска на сајлу, односно мембрану, заправо је смањење претходног затезања. Оптерећење мембранске површи снегом или ветром изазива повећање претходног затезања. Због готово занемарљиве сопствене тежине, претходно затезање је посебно важно код сишућег и притискајућег дејства ветра на мембранске конструкције.

Пнеуматске конструкције користе унутрашњи ваздушни притисак да би одолевале оптерећењу – те је геометрија ових конструкција тема која излази изван обима овог рада. Код мембранских и конструкција од челичних каблова, ова претходна затегнутост се постиже посебном геометријом коју овакве конструкције захтевају: двоструко закривљеном, антикластичној површи.

Први инжењер који је употребио својства хиперболичне, двоструко закривљене површи у грађевинарству био је руски инжењер Владимир Шухов (1853-1939) и може се рећи да су његова достигнућа претече и узор савремених тензилних конструкција.



Слика 4б – Владимир Шухов, кров од челичних трака „Овалног павиљона“ у Нижни Новгороду, 1895 (извор: [2])

Шухов је био у стању да конструише мостове, кровове и торњеве са минималним утрошком материјала. Његове конструкције, углавном хиперболоидалног облика биле су потпуно иновативна решења, која су пленила својом једноставношћу, елеганцијом и одважношћу.



Слика 4в – Владимир Шухов, радио торањ, Москва 1922 (извор: [16,17])

Савремени пионир проучавања овог принципа средином двадесетог века био је немачки инжењер Фрај Ото (Frei Otto), који је педесетих година двадесетог века заједно са Бодо Рашом (Bodo Rasch) и својим мултидисциплинарним тимом на Универзитету у Штутгарту извршио најважнија истраживања у циљу примене „прапринципа“ мембранских конструкција – сапунске мембране. Тиме је поставио законитости на којима се пројектовање ових конструкција базира и данас.

На немачким, британским и америчким универзитетима 70-тих година развијени су основни алгоритми данашњих програма за изналажење оптималне геометрије мембранских конструкција на основу задатих граничних услова. Током 80-тих година разрађен је и касније готово до савршенства доведен софтвер за изналажење оптималне геометрије, за прелиминарну статичку анализу и за израду кројних листи ових конструкција.



## 2.2 Принцип на коме почивају претходно затегнуте мембранске конструкције – принцип минималне површи

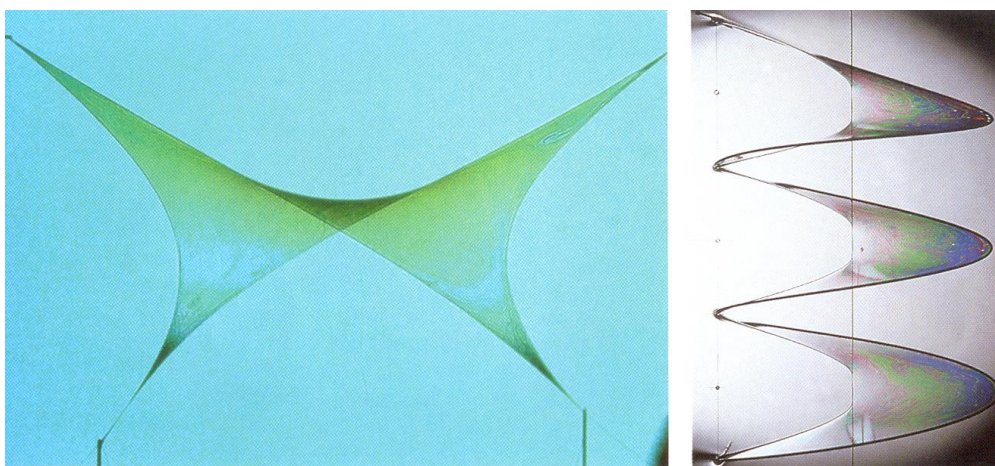
Често међу архитектама влада заблуда, да се код тензилних конструкција ради о конструкцијама „слободне форме“ (енг. „*free-form*“). Форма, односно геометрија мембранских конструкција није ни најмање „слободна“, тј. произвољна. Од свих геометријских форми са којима се архитекта и грађевински инжењер срећу, ова геометрија подлеже најстрожијим математичким правилима. Може се чак рећи да су геометрије настале пројектовањем крутих конструкција много „слободније“, тачније „произвољније“, од геометрије тензилних конструкција. Геометрија тензилне конструкције само лаику може изгледати слободна, међутим, пошто подлеже строгим математичким правилима она је заправо јединствена у односу на остале форме. Крајем 19. и почетком 20. века са различитим правцима тадашње савремене архитектуре и периодом интернационализма (Chicago School, International Style, Bauhaus, итд.), у Америци је формулисана је теза: „*Form follows function*“. У тадашњем контексту, архитектке су користиле овај принцип да би показале, да се не треба држати историјске спољашњости приликом пројектовања модерних објеката (нпр. Саливен користи овај принцип да докаже да на његовим солитерима нису пожељни историјски орнаменти који су до тада били коришћени). Овим принципом се руководе архитектке и у каснијим правцима гледано са аспекта историје архитектуре.

Пројектовање тензилних конструкција захтева формулацију друге тезе: „*Form follows force*“ је нова теза на којој се базира естетика тензилних конструкција и ова теза уједно описује сам задатак пројектовања ових конструкција. Због специфичности облика, тј. геометрије ових конструкција уведен је и нови термин: „FORM-FINDING“, који означава процес тражења и изналажења равнотежног облика тензилних конструкција.

Овај појам се потом раширио и на класичне видове конструкција. Користи се врло често приликом оптимизације крутих конструктивних делова – челичних или бетонских носача, стубова, решетки итд. У општем случају, уз тезу „*Form follows force*“ он означава да, геометрија ма којег дела конструкције заправо не може и не треба бити произвољна, већ да се спољни облик конструктивних елемената прилагођава силама које унутар тог елемента делују. Естетика овог

принципа огледа се у савременим делима и пројектима Фрај Отоа, Сантијага Калатраве, Николаса Гримшоа и др.

Развојем софтвера за оптимизацију уз помоћ коначних елемената – овај принцип је примењив и примењује се у многим областима савременог инжењерства – на жалост још увек најмање у архитектури.



Слика 5а и б – модели од сапунице, хиперболични параболоид и хеликоид (извор:[1])

Облик мембранских конструкција и челичних мрежа заснива се на геометрији минималних површи и сапунске мембране. Минимална површ је седласта закривљена површ која заузима најмању површину при одређеним задатим граничним условима – односно при одређеном облику граничне криве. Мембране, чији облик приближно одговара минималној површи имају особину да су у свим правцима равномерно затегнуте. Принцип минималне површи се огледно може схватити помоћу модела од сапунице или модела од најлон чарапе, тј. еластичног тила. Минимална површ је приближно она површ коју ће сапуница „заузети“ услед земљине теже када се развуче преко жице одређеног облика (Слика 5а и б).

## 2.3 Специфичности тензилних конструкција

У претходном поглављу је протумачено, да тензилне конструкције подлежу строгим математичким правилима и то их чини посебним у многим аспектима. У смислу економичности, нема начина да се са мање утрошеног материјала наткрије већа површина него мембранском конструкцијом. Чак су и материјали који се обично користе релативно повољни: ПВЦ фолија (често обложена тефлоном - PTFE) уз релативно мале количине челика, који је веома скуп грађевински материјал. На први поглед нема препрека за избор на око допадљиве мембранске конструкције када треба прекрити одређени простор. Међутим, математички апарат потребан за пројектовање и конструисање ових конструкција је сложен, те је потребан одговарајући софтвер и одговарајуће обучени стручњаци, што драматично поскупљује пројекат ове конструкције. На пример, за пројектовање покретне шаторске конструкције димензија 40м x 100м до нивоа главног пројекта хонорар инжењерске фирме у Немачкој, која се бави разрађивањем идејног пројекта мембранских конструкција до нивоа главног пројекта износи око 200.000,- евра. Развојем и комерцијализацијом софтвера и све већим бројем инжењера обучених из области тензилних конструкција цена инжењерског пројектовања за овакве конструкције ће бити у тенденцији опадања. Такав развој догађаја оставља наду да ће ови кровови у скорој будућности бити у великом броју заступљени и у нашој земљи.

Још један критеријум треба имати у виду када се треба одредити за овај вид конструкције: конструктивни детаљи и чворови ових конструкција (места затезања и везивања мембране за потконструкцију или челичног ужета за равне елементе) су компликовани и заузимају много простора (зглобне везе, детаљи врха или фундамента пилона, сајле за затезање итд.), а ако им се не посвети посебна пажња у пројектовању могу лако да наруже ову елегантну конструкцију.

Тензилне конструкције су дакле економичне у случајевима у којима је распон који треба да се премости сразмерно велики у односу на величину чворних веза које настају приликом „прихватања“ сила из мембране у сајле и стубове.

Следећи проблем са којим се сусрећу тензилне конструкције јесте проблем термике и хидроизолације самог крова и проблем „затварања“ ове конструкције која трпи велика померања бочним, вертикалним, најчешће крутим фасадама. Овим проблемом су се бавили многи, између осталог и сам Фрај Ото. Један од

примера решења тог проблема постигнут је у Америци од стране америчког инжењера Хорста Бергера (Horst Berger) који је заједно са фирмом Бирдер (Birdair Inc.) и њеним оснивачем Валтером Бирдом (Walter Bird) развио систем двоструке мембране чија је међукомора термички изолована. Фирма Бирдаир је и данас једна од водећих америчких компанија која се бави пројектовањем и извођењем мембранских кровова. Што се тиче проблема затварања мембранске конструкције вертикалном фасадом до данас се истражују разне могућности спајања круте фасаде са флексибилним кровом који подлеже великим померањима. На овом пољу је можда најзначајнији пример новијег датума БМВ павиљон проф. Вернера Зобека (Werner Sobek) са Универзитета у Штутгарту (Слика 6) где су ове везе постигнуте ваздушним јастуцима који се растежу и скупљају у складу са померањем крова.



Слика 6 – BMW павиљон  
(извор:[11])

Најновија технологија иде у смеру коришћења мембранских кровова за добијање електричне енергије фотоволтаик ћелијама. Фирма за соларне системе Соларнект (SOLARNEXTAG) из немачког Бернауа је заједно са швајцарским произвођачем соларних ћелија VHF-Technologies SA развила флексибилне фотоволтаик ћелије под брендом Флексцел (Flexcell) које се наносе на материјал мембране и са њом чине јединствену ламинирану целину, тако да у потпуности прате њену закривљеност. Овом типу соларног крова или фасаде (енгл. BIPV – Building integrated photovoltaic) није потребна додатна потконструкција, а технологија омогућава потпуну слободу геометрије крова. Осим тога, ове ћелије пружају смањење транслуценције мембране, што резултује смањењем количине сунчеве енергије која пролази кроз мембрану, дакле смањењем загревања

површине испод крова. Ово откриће је мембранске и пнеуматске конструкције поново ставило у центар дешавања на пољу енергетске ефикасности и добијања енергије из обновљивих ресурса и показало да потенцијал ових конструкција није у потпуности искоришћен. На слици је приказан пример пре и после уградње флексибилних фотоволтаик ћелија у покретни кров Мерцедес-Бенц Арене (некада Готлиб-Даимлер Стадион) у Штутгарту (Слика 7).



Слика 7 – покретни мембрански кров Готлиб-Даимлер Стадиона (Gottlieb-Daimler Stadion) у Штутгарту пре и после ламинирања Флексцелом (извор:[14])

## 2.4. Типологија и категоризација мембранских конструкција и челичних мрежа

Ове конструкције могу се поделити на две основне категорије:

- а) централизовани системи са унутрашњим пилоном изведени од минималне површи катеноида – принцип конусног шатора
- б) системи изведени из минималне површи хиперболичног параболоида – принцип седла или једра.

Ова два типа су основа за остале геометрије мембранских конструкција.

Прва категорија функционише по принципу антикластичне површи сличне катеноиду са горњим ослоном у виду једног или више стубова у унутрашњости површине која се наткрива, као што је то приказано на *Слици 8*.

Ова површ има двоструку закривљеност која је неопходна за супротстављање оптерећењу из различитих праваца. Хоризонтални прстенови у комбинацији са изводницама купастог облика се наизменично супротстављају оптерећењу усмереном ка спољашњости и унутрашњости мембране (нпр. услед сишућег дејства ветра, тј. притискајућег дејства снега). Код мрежастих конструкција се те две врсте кабла означавају као: *Druckseil* (кабл за притисак) и *Zugseil* (затезни кабл). У случају мембране ову улогу преузимају основа и потка мембранског платна. Притом се подразумева да поменути кабл, тј, челично уже не пружа отпор приликом притискања, већ се ради о смањењу претходног затезања.



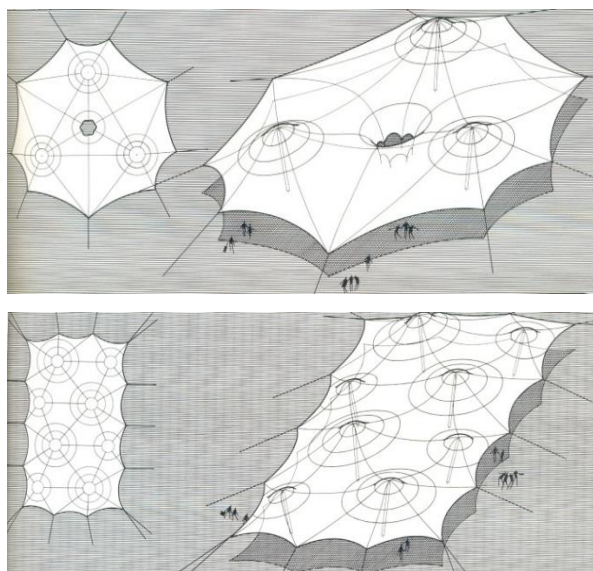
Слика 8 – Роберта Бондар парк павиљон, Солт Ст. Мари, Онтарио, САД (извор: [12])

Прву категорију тензилних конструкција карактеришу велики напони у близини централног пилона (тачка сингуларитета – види поглавље 4.1.4.), јер је све мање и мање материјала који би силе пренео ка тачки ослонаца. Да би се енормна концентрација радијалних сила избегла, при врховима ослонаца (стубова) често срећемо карактеристичне прстенове, калоте или сличне елементе.



Слика 9 – карактеристични детаљи прстенова око тачке ослонаца шаторастог типа конструкције (извор: [3])

Надовезивањем коничних облика могу се добити конструкције у којима се пилони ослонаца – тзв. високе тачке (*high points- HP*) наизменично смењују са увалама у мембранској површи – тзв. ниске тачке (*low points- LP*). Ове високе и ниске тачке ослонаца наравно могу постати и криве, захваљујући луковима или сајлама који пролазе кроз високе или ниске пределе мембранске конструкције. На сличан начин се могу комбиновати и седласти елементи.

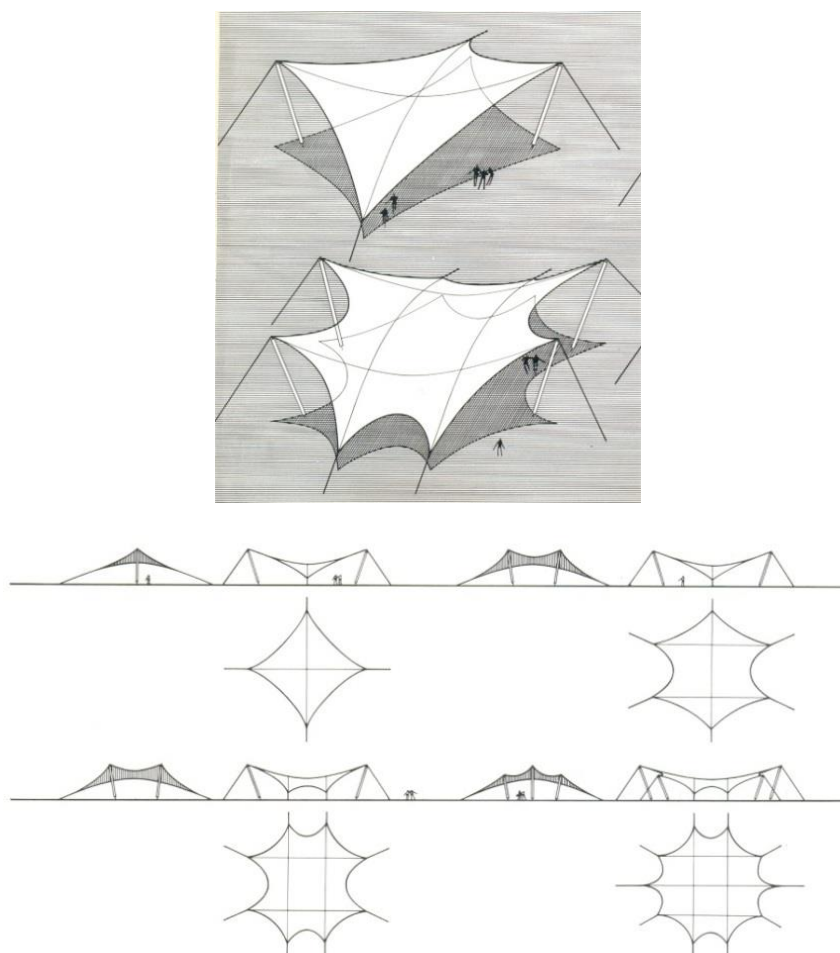


Слика 10 – комбинација коничних мембрана, (извор:[4])

Другу категорију чине конструкције ослоњене само на ивицама наткривене површине, у унутрашњости нема стубова или других носећих елемената, попут примера седласте површи са 8 наизменичних високих и ниских тачака ослоња на ободу структуре приказаном на *Слици 11*.



*Слика 11* – привремена мембранска структура,  
(извор:[3])



*Слика 12* – седласте мембранске конструкције,  
(извор:[4])

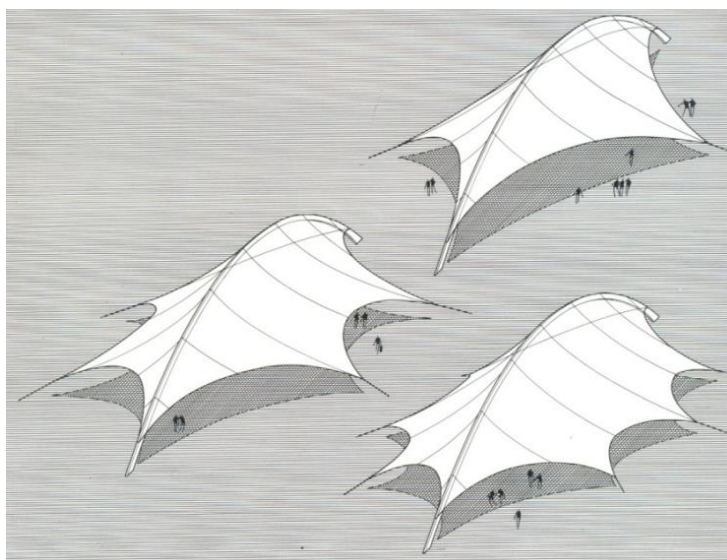
Варирањем овог принципа, комбинацијом или надовезивањем седластих површи добијамо огроман спектар облика који подсећају на таласе, попут ових приказаних на *Слици 12*.





Слика 13 – покретна мембранска конструкција,  
атриум градске скупштине у Бечу, Аустрија  
(извор:[10])

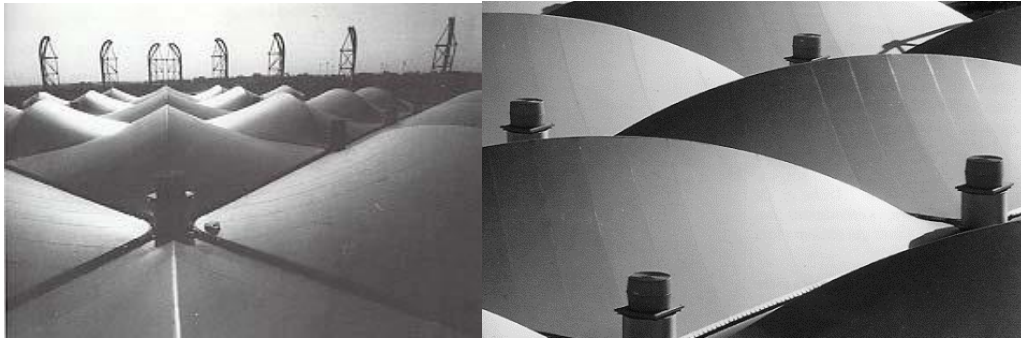
Подела приказана у овом поглављу је основна типолошка подела, а посебну пажњу завређују још 3 подтипа конструкција коју Бодо Раш помиње у [21]: мембрана причвршћена за лук (Слике 14-16), при којој мембрана уједно служи за додатну хоризонталну стабилизацију лукова;



Слика 14 – мембранска конструкција са луком,  
(извор:[4])



Слика 15– аеродром у Бангкоку, Таиланд  
(извор:[11])



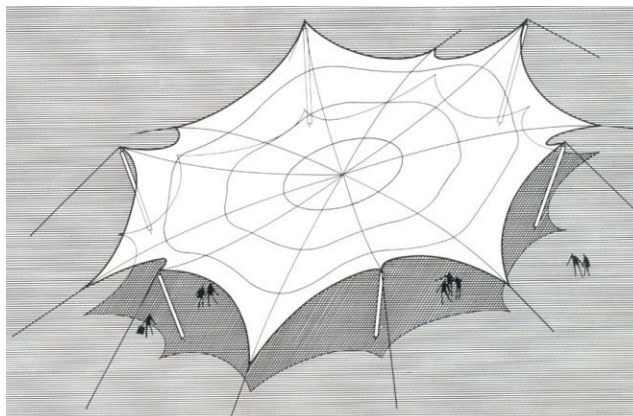
Слика 16 - Зенит у Паризу и Монпељеу, у основи  
су квадрати по дијагонали повезани луком  
(извор:[3])

мембрана са „грбом“ (помиње се код система са централним ослонцем), односно ослоњена на печуркасти стуб или на ламеле (Слика 16);



Слика 17 – павиљон на обали Рајне за време  
Сајма баштованства 1957  
(извор:[1])

звездаста мембранска конструкција (названа „Звездани талас“) која је заправо деривација друге типолошке групе - седластих површи, при којој су надовезане седласте површи поређане радијално у виду звезде (Слике 18 и 19).



Слика 18а и б – „Звездани талас“ - павиљон изнад фонтане у Келну (извор:[4] и [1])

Све остале конструкције са којима се срећемо су хибриди неких од ових наведених главних типова.

Да естетика мембранских конструкција и конструкција од челичних каблова није исцрпљена и после више деценија примене, показују најновији примери, у свету, а нажалост не на територији југоисточног Балкана. Један од најсвежијих и естетски врло привлачних примера јесте овде приказан шангајски бар који се налази на крову једне од зграда у Шангају а који је наткривен челичном мрежом, која локацији даје атрактивну и несвакидашњу атмосферу.



Слика 19а и б – „Minimal relaxation“  
привремена конструкција изнад бара у Шангају  
(извор:[18] и [19])

### 3. „FORMFINDING“ – генеза геометрије тензилних конструкција

#### 3.1. Опште карактеристике генезе геометрије „FORMFINDING“– при пројектовању – геометрија минималне површи

Речено је да се геометрија тензилних конструкција генерише процесом који се означава термином „формфајндинг“ (или нем. „формфиндунг“) и да форма ових конструкција приближно одговара тзв. минималној површи. Мембранска површ је заправо једна једина глатка, континуална, неизломљена, двоструко закривљена, антикластична површ локално минималне величине за одређене задате граничне услове.

Математичким језиком изражено, минималне површи се могу описати на много начина, што говори о чињеници да је то један важан појам преко кога се повезују многобројне математичке теорије: варијациони рачун, теорија потенцијала, диференцијална геометрија, комплексна анализа. Варијационим речником речено, минимална површ представља критичну тј. стационарну тачку функционала површине.

У тродимензионалном еуклидском простору површ је дводимензионалног карактера, с обзиром да су њене све три Декартове координате изражене помоћу два параметра површи  $u_1$  и  $u_2$ , тј.

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1, u_2) \\ x_2 = x_2(u_1, u_2), \quad (u_1, u_2) \in D \subset R^2 \\ x_3 = x_3(u_1, u_2) \end{cases}$$

*Израз 2*

при чему треба нагласити да су параметри површи уједно и њене криволинијске координате, док су  $x_1, x_2, x_3$  Декартове координате посматране површи.

У том случају функционал површине можемо изразити као:

$$A(x) = \int_D \sqrt{g(u_1, u_2)} du_1 du_2$$

*Израз 3*

где је

$$g = \det g_{ij}, \quad g_{ij} = \left( \frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^T \left( \frac{\partial x}{\partial u_j} \right)$$

*Израз 4а*

детерминанта метричког тензора  $g_{ij}$ , који можемо написати и у матричној форми као:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

*Израз 4б*

Једначину површи можемо записати и експлицитном једначином, односно:

$$z = f(x, y), (x, y) \in D \subset R^2,$$

*Израз 5*

тако да одговарајући функционал површи постаје:

$$A(f) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

*Израз 6*

при чему уведене ознаке  $f_x$  и  $f_y$  представљају парцијалне изводе функције  $f(x, y)$  по  $x$ -у и  $y$ -у, респективно.

Минимална површина обезбеђена је из услова да је прва варијација функционала површи по криволинијским координатама  $u_1$  и  $u_2$  или  $x$  и  $y$  једнака нули (*Израз 7а*), а друга варијација већа од нуле (*Израз 7б*).

$$\delta A(x) = 0$$

*Израз 7а*

$$\delta^2 A(x) > 0$$

*Израз 7б*

Услови исказани претходним једначинама свде се на решавање проблема задатог Лагранж-Монжовом парцијалном диференцијалном једначином другог реда:

$$(1 + z_x^2) z_{yy} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2) z_{xx} = 0$$

*Израз 8*

где су уведене ознаке парцијални изводи првог и другог реда функције површине по координатама  $x$  и  $y$ .

Свака функција која задовољава ову једначину је минимална површ. Основе студија о минималним површима су уско повезане са радом Жан-Жозефа де Лагранжа, који је у другој половини 18. века разматрао проблеме минималних

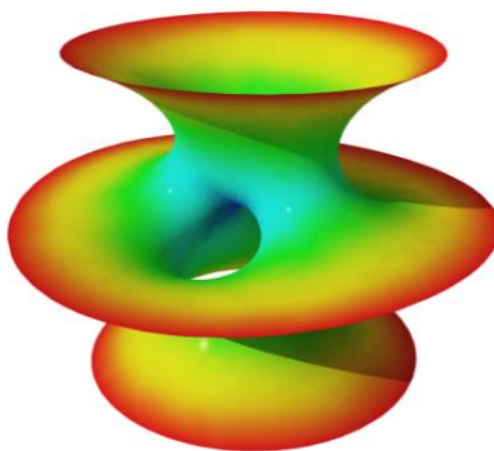
површи и истовремено покушавао и да минимизира површ која ограничава одређену запремину.

Површ чија је средња кривина дефинисана као полузбир главних кривина  $k_1$ ,  $k_2$  једнака нули, тј.

$$H(u_1, u_2) = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$$

*Израз 9*

задовољава диференцијалну једначину (*Израз 8*) и представља услов егзистенције минималне површи у ма којој њеној тачки.



*Слика 20* – Минимална површ Целза Косте из 1982 (извор:[15])

Из *Изрази 9* лако се да уочити да средња кривина може бити једнака нули само у случају да је површ хиперболичког типа, што значи да су све њене тачке хиперболичке. Услов хиперболичке тачке подразумева да је Гаусова кривина у тој тачки, дефинисана као производ главних кривина, мања од нуле, односно:

$$K_G = k_1 \cdot k_2 < 0$$

*Израз 10*

што за последицу има да су њене главне кривине супротног знака. Једнаке апсолутне вредности главних кривина хиперболичку површ преводе у минималну површ.

Пројекцијом вектора кривине линије на нормалу површи дефинисана је нормална кривина линије у посматраној тачки,

$$K_n = \vec{K} \cdot \vec{n}_0$$

$$K_n = K \cdot \cos(\vec{K}, \vec{n}_0)$$

*Израз 11*

где је  $K_n$  вектор кривине линије у посматраној тачки, а  $n_0$  јединични вектор нормале на површ у тој тачки.

Имајући на уму да кроз једну тачку на површи можемо провући бесконачно много линија, лако се да закључити да постоји линија са највећом и најмањом нормалном кривином. Те линије су линије кривина на површи, а њихове кривине главне кривине у посматраној тачки.

Увођењем другог метричког тензора (друге квадратне фундаменталне форме) или тензора кривине површи:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, b_{ij} = b_{ji}$$

*Израз 12*

главне кривине површи у ма којој њеној тачки одређују се као сопствене вредности тензора кривине, тј.

$$\det(b_{ij} - \Lambda g_{ij}) = 0$$

*Израз 13*

*Израз 13* у математици је познат као уопштени проблем сопствених вредности. Карактеристична једначина проблема сопствених вредности (*Израз 14*) је следећег облика:

$$\Lambda^2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) - \Lambda(b_{22}g_{11} + b_{11}b_{22} - 2b_{12}g_{12}) + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$$

односно,

$$\Lambda^2 - \Lambda \frac{(b_{22}g_{11} + b_{11}b_{22} - 2b_{12}g_{12})}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} + \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 0$$

*Израз 14a и b*

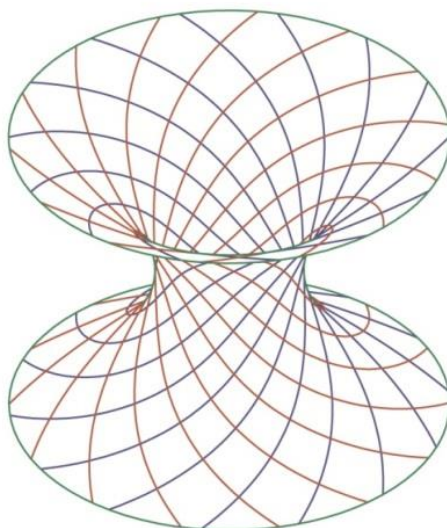
при чему корени карактеристичне једначине,  $\Lambda_1 = k_{nmax}$  и  $\Lambda_2 = k_{nmin}$  представљају поменуте главне кривине  $k_1$  и  $k_2$  респективно.

Сопствени вектори проблема исказаног *Изразом 14* представљају правце главних кривина површи, односно тангентне векторе на линијама главних кривина.



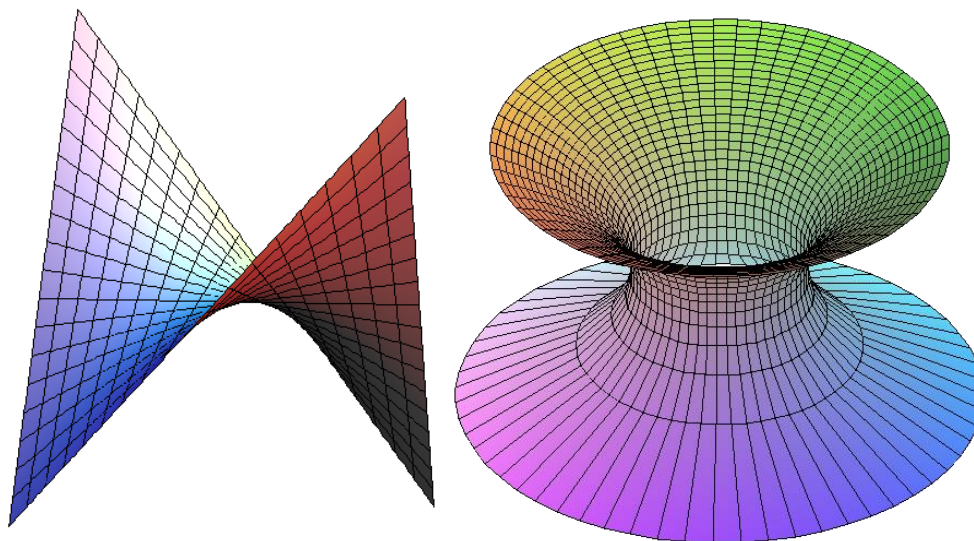
Линија на површи која има особину да је њена нормална кривина у свакој тачки једнака нули позната је као асимптотска линија. Из *Израза 11* следи да је асимптотска линија на површи обезбеђена онда, ако је вектор кривине линије управан на нормалу површи, што има за последицу да се вектор бинормале линије поклапа са вектором нормале површи. Другим речима, асимптотска линија на површи постоји, ако се у свакој њеној тачки секуларна раван линије и тангентна раван површи међусобно поклапају. Имајући на уму да хиперболичке површи поседују две фамилије асимптотских линија, лако се да закључити да минимална површ егзистира само онда, ако асимптотске линије површи чине ортогоналну мрежу.

У свакој тачки минималне површи постоје линије главних кривина чији су тангентни вектори међусобно ортогонални, као и асимптотске линије чије тангенте такође заклапају прави угао. Само хиперболичке површи имају две фамилије асимптотских линија и такође, главне кривине које су супротног знака. Параболичне и елиптичне површи не могу формирати минималну површ из разлога што су њихове кривине истог знака (*елиптичне површи*), или је једна кривина једнака нули (*параболичне површи*), док у погледу асимптотских линија имају једну фамилију линија (*параболичне површи*) или немају асимптотске линије (*елиптичне површи*).



Слика 21 – Асимптотске линије катеноида  
(извор:[5])

Од хиперболичког параболоида настале су мембранске конструкције које се базирају на принципу седла или једра описане у претходном поглављу.



Слика 22а и б – Хиперболички параболоид и катеноид (извор: [15])

Катеноид и хеликоид су минималне површи, уз помоћ којих је први пут аналитички доказано постојање површи које задовољавају Лагранж-Монжову једначину. Катеноид је једина закривљена минимална ротациона површ – настала ротацијом ланчанице:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Од облика катеноида настао је тип мембранске конструкције у облику купастог шатора.

Најједноставнији модели минималних површи добијају се помоћу сапунских мембрана разапетих преко дате затворене граничне криве. Ово је фотографски документовано на Институту за лаке носеће конструкције у Штутгарту и може се наћи у саопштењима Института, нпр. у [23].

У грађевинарству се минималне површи користе управо због особине сапунске мембране да је у свакој њеној тачки напон исти у свим смеровима. Мембране, чији облик приближно одговара минималној површи имају особину да су у свим правцима равномерно затегнуте, као и да је пресек ове носеће конструкције равномерно оптерећен.

Вихнер и Блещингер у [33] разматрају примену минималних површи као оптималне геометрије у пројектовању мембранских конструкција и конструкција челичних мрежа:

„Добро је познато да константан и изотропни површински напон даје тзв. минималну површ. Постоји неколико аргумената на тему, да ли су оне (минималне површи) добри облици за конструкције или не. Са архитектонског становишта, минималне површи су омиљеније, због јасног принципа на којем почивају. У супротности са тим, други облици су схваћени као „произвољни“. Са тачке гледишта инжењера, дискусија је контроверзнија и мора да узме у обзир и особине материјала, као и спољна оптерећења као снег и ветар. Материјали за мембранске конструкције су ткани у два правца, а затим пресвучени против утицаја средине. Ови материјали су анизотропни, нееластични и понашају се нелинеарно у погледу течења и релаксације.“<sup>1</sup>

У даљем излагању, Блецингер помиње и чињеницу, да су минималне површи углавном доста „равне“, тј. да немају довољну закривљеност, поготово у унутрашњости, те да су „осетљиве“ на спољна оптерећења (конкретно помиње појаву флатера). Услед оптерећења снегом, ови претежно равни делови површи могу довести до веома неповољног нагомилавања снега, који може довести до попуштања носивости конструкције. Ови проблеми могу навести архитекту или инжењера да одступи од „савршене“ геометрије анизотропног напонског стања, те да промени силе претходног затезања у различитим правцима и тако прилагоди геометрију пројектном задатку. Ово захтева ангажовање додатних нумеричких метода за формфајндинг.

Као што је већ поменуто у уводном поглављу, мембранска матрица крутости у систему Декартових координата једнака је:

$$\mathbf{D}_M = \frac{Et}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix}$$

*Израз 15a*

Мембранска матрица крутости у систему произвољних криволинијских координата изражена је као:

$$\mathbf{D} = \frac{Et}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} g^{11}g^{11} & g^{12}g^{12} + \nu g^{-1} & g^{11}g^{12} \\ g^{21}g^{21} + \nu g^{-1} & g^{22}g^{22} & g^{22}g^{12} \\ g^{11}g^{21} & g^{22}g^{21} & g^{12}g^{21} + \frac{(1 - \nu)g^{-1}}{2} \end{bmatrix}$$

*Израз 15b*

<sup>1</sup> „Stress-adapted numerical form finding of pre-stressed surfaces by the updated reference strategy“, R. Wüchner, K.-U. Bletzinger, International Journal for Numerical Methods in Engineering Int. J. Numer. Meth. Engng 2005; 64:143–166

при чему су  $g^{ij}$  компоненте његовог реципрочног метричког тензора криволинијских координата, док је  $g^{-1}$  његова детерминанта. У систему линија главних кривина израз постаје:

$$\mathbf{D} = \frac{Et}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} g^{11}g^{11} & \nu g^{-1} & 0 \\ \nu g^{-1} & g^{22}g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)g^{-1}}{2} \end{bmatrix}$$

*Израз 15в*

Мембранска крутост на савијање занемарљива је због јако мале дебљине мембране  $t$  и једнака је:

$$\mathbf{D}_B = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \rightarrow 0$$

*Израз 16*

То значи да мембрана није способна да пружи отпор промени кривина  $\kappa$ , односно деформацији савијања.

Двострука закривљеност површи тензилне конструкције омогућује да она буде у стању претходног затезања. Ово претходно затезање омогућује да се површинско оптерећење (нпр. снег, ветар), које мембрана због своје флексибилности не може да преузме, преводи у повећање претходне затегнутости мембране. Ово је чини најлакшим и „најштедљивијим“ начином покривања површина.

На геометрију ових конструкција можемо само индиректно да утичемо: мењањем граничних услова и фиксних тачака, а не директно, како је уобичајено код архитектонског пројектовања. Променом граничних услова, односно тачака ослонца мембране ми заправо утичемо на коначан изглед мембране који се „етаблира“ према ослонцима. Притом је важно да ослонци не буду копланарни – да не леже у истој равни. За интуитивну спознају овог принципа пресудно је експериментисање физичким моделима. Обзиром на то да просечан архитекта не барата математичким апаратом који је потребан да би се срачунала минимална површ, тј. мембранска површ која се успоставља између четири или више задатих некопланарних тачака, овај процес мора бити пропраћен и употребом одговарајућег софтвера.

У већини метода модел мреже користи се и за генерисање мембранских површи – мрежа је најчешћа дискретизација мембранске површи. За генерисање исправне геометрије тензилних конструкција важна је расподела сила затезања унутар мембране или мреже. Ниво претходног затезања мора бити одговарајући, обзиром на животни век конструкције и евентуалног губитка претходног затезања због цикличног оптерећења. Насупрот томе, конструкција не сме бити превише затегнута у почетној конфигурацији (без нанетог спољног оптерећења), да не би дошло до кидања мембране под спољним оптерећењем (ветром, снегом). У [12] аутор наводи да се под спољним оптерећењем (ветар, снег) затезање у мембрани повећава и 10 пута. Из тог разлога, ниво претходног затезања треба у почетној конфигурацији одржавати негде око  $1/20$  од критичних вредности кидања мембране, наводи Луис у [12]. Исто треба имати у виду да униаксијални тестови којим се фолије за изградњу мембранске конструкције подвргавају, дају двоструко више критичне вредности сила кидања мембране, него када се исти материјал подвргне биаксијалном тесту. Такође су тестирани материјали нови и нису излагани климатским утицајима, УВ зрачењу, влази и цикличним оптерећењима. У најновијим истраживањима направљени су покушаји да се и ова циклична оптерећења симулирају, као и климатски утицаји којима су мембране изложене [31,34,35]. Ово су основне препоруке, које треба имати у виду приликом испитивања стања претходног затезања у току генезе исправне геометрије тензилних конструкција.

Основне карактеристике мембранских конструкција и челичних мрежа су:

- Геометрија ових конструкција није произвољна и унапред позната, одређена је строгим математичким правилима и „проналази“ се или „генерише“ формфајндингом. Геометрија ових конструкција зависи од диспозиције тачака ослонаца, граничних услова, тј. кривих на ободу конструкције и од типологије површине коју треба наткрити (детаљно у поглављу 2.4.);
- Носивост конструкције се остварује путем промене претходног затезања унутар површи и веома великих померања. Ово се назива геометријски нелинеарно понашање конструкције (види Апендикс 1). Зато се приликом статичке анализе ових конструкција мора у обзир узети

и промена почетне геометрије, које улази у геометријску матрицу крутости;

- Претходно затезање мора бити адекватно, да би се обезбедила носивост и под нанетим оптерећењем;
- Смицање и угибање мембранске конструкције је занемарљиво, само у потпорним пилонима и стубовима на које се ослања мембранска конструкција (тј. челична мрежа) се јављају силе притиска и угибања.

Ове чињенице треба имати на уму пре него што се отпочне пројектовање тензилних конструкција.

### 3.2 Најчешће методе генерисања почетне геометрије тензилних конструкција – хронологија, карактеристике, формулација, примене

У претходним поглављима поменуто је да су 60-тих година 20. века вршени бројни експерименти како би се проучила геометрија и статичко понашање тензилних конструкција. Експериментисање физичким моделима ради одређивања почетне геометрије конструкције (сапуница, жерсеј, еластични тил), одређивања деформације конструкције при деловању спољног оптерећења и сила које делују у мембрани, тј. сајлама (жичани модели са теговима), довело је до закључка да физички модели имају своја ограничења. Један од највећих проблема физичког моделовања је грешка приликом промене размере, тј. приликом „скалирања“ модела на димензије реалне конструкције. О експериментима физичким моделима детаљније у Прилогу 2.

Да би се омогућило брзо и ефикасно дефинисање почетне геометрије и статичка анализа конструкције са великим бројем чворова, примењене су бројне апроксимације геометрије. Развијене су нове и модификоване постојеће методе за одређивање почетне и деформисане геометрије ових конструкција. Заједничко већини метода је да је мембранска конструкција апроксимирана као мрежа танких штапова (тј. каблова). Касније су код неких метода ови линеарни коначни елементи замењени троугловима и четвороугловима.

Све методе су итеративног карактера – што значи да се коначном решењу приближавају „корак по корак“, уз нумеричко решавање система нелинеарних једначина које означавају координате положаја чворова у равнотежном стању.

Данас су најзаступљеније методе за одређивање полазне геометрије претходно затегнутих мембранских конструкција: метода „густине силе“ (*Force-density method - FDM*), метода динамичке релаксације (*Dynamic relaxation method - DR*) и метода матрице крутости (*Stiffness Matrix Method - SM*), која се најређе користи у ове сврхе. У склопу овог рада описане су наведене методе, као и савременија стратегија ажурирања референтног положаја (*Updated reference strategy - URS*), која је генерализована метода густине силе.

Венендал и Блок у [8] методе формфајндинга деле на три основне врсте:

- Методе „густине силе“ (*Force-density method - FDM*)
- Методе „динамичке релаксације“ (*Dynamic relaxation method – DR*)
- Методе матрице крутости (*Stiffness Matrix Method - SM*)

Луис у [12] последњу категорију назива методом „привремене“ крутости (*Transient Stiffness Method - TSM*), а код других аутора наилазимо на још различитих имена која описују ту категорију. У одељку овог рада који представља различите формулације ових метода ће се користити појам методе матрице крутости (*Stiffness Matrix Method - SM*) за описивање ове категорије.

Исти аутори у [8] дају и следећу категоризацију, која се ослања на категоризацију Вихнера и Блестингера [33], а која методе категорише на следећи начин:

- Методе матрице крутости (*Stiffness Matrix Method - SM*) - базиране на стандардним еластичним и геометријским матрицама крутости – методе преузете из статичке анализе и адаптиране за формфајндинг,
- Методе геометријске крутости – које не зависе од еластичних својстава материјала. Овде спада метода „густине силе“ (*Force-density method - FDM*), као и све касније развијене методе које су као основу имале ову методу (нпр. *Updated reference strategy – URS*, *Multistep FDM – MFDM*, и др.),
- Методе динамичке равнотеже – методе које решавају проблем динамичке равнотеже (*Dynamic relaxation method – DR*)

Детаљна и вишеслојна класификација метода и њихових резултата може се наћи у [8].

Хронолошки посматрано, најстарије методе су методе прве категорије, које су развијене још средином 60-тих година 20. века. Аутори метода матрице крутости су: Сиев и Еиделман (Siev and Eidelman, 1964), затим Хауг и Пауел (Haug and Powell, 1971), Аргирис (Argyris 1974) и др.



Ове методе су најразуђеније и најстарије методе које су у употреби. Углавном су напуштене, због проблема са конвергенцијом решења. Ове методе укључују и еластичне особине материјала, што није неопходно за решавање овог проблема. Углавном то захтева више итеративних корака, што их чини неекономичним и нестабилним. Често је неопходна додатна нумеричка интервенција за обезбеђивање конвергенције.

Методе геометријске крутости су развијене током 70-тих година 20. века од стране Линквица и Шека (*Force- Density Method*, Linkwitz and Schek 1971), а унапређене током 80-тих година, од стране Хабера и Абела (*Assumed geometric stiffness method*, Haber and Abel, 1982), а касније Сингера (Singer 1995), Блецингера и Рама (*Updated Reference Strategy*, Bletzinger and Ramm 1999), као и Санчеца и др. (*Multistep FDM*, Sanchez et al. 2006).

Најчешћа критика основне методе геометријске крутости - ФДМ је, да појам густине силе није смислена или интуитивна величина, већ физички неутемељен појам, који служи за линеаризацију иначе нелинеарног система једначина равнотеже чворова. Због тога је тешко унапред задати ову величину (што је неопходно), као и предвидети резултат за различите вредности ове величине, те се зато мора ослонити на емпиријске или тривијалне вредности које дају прихватљиве резултате.

Методе динамичке равнотеже, у које се убраја и веома распрострањена метода динамичке релаксације, развијане су 70-тих година прошлог века, од стране Барнса (Barnes 1977), који је своја истраживање и унапређење методе наставио и током 80-их и 90-их година. У скорије време су Килијан и Оксендорф (Kilian and Ochsendorf 2005) развили сродну методу честица-опруга (*Particle spring system- PS*). Критике ових метода односе се углавном на превелики број параметара за контролу стабилности и конвергенције (као нпр. кинетичко или вискозно пригушење и временски интервал). При томе су параметри концентрисаних маса и пригушења такође фиктивни и немају физичко значење.

У следећем одељку ће бити представљене најчешће коришћене методе и њихове математичке формулације.

### 3.2.1. Метода густине силе (енг. Force density method)

Пре коначне формулације ове методе, Сиев и Еиделман [24] су радили на примени линеарних система једначина са циљем моделовања равнотежних стања геометријски нелинеарних конструкција. Луис у [12] наводи претпоставке на којима се базирало њихово истраживање: да је хоризонтална компонента силе претходног затезања у сваком челичном ужету константна, да ужад леже у вертикалним паралелним равнима, и да су парови равни управне једна на другу. Кад су примењене наведене претпоставке систем равнотежних једначина постао је линеаран у односу на непозната померања у вертикалном правцу. Добијене геометрије су биле доста ограничене због наведених услова.

Метода густине силе, чија је формулација наступила нешто касније, мање је рестриктивна у односу на поменути рад. Метода се заснива на математичкој претпоставци, да је однос затезне силе и дужине ужета (тј. штапа) између чворова константна. Ова претпоставка нелинеарни систем једначина равнотеже преводи у линеарни, који је могуће решити једним рачунским кораком. Наравно, резултат може бити од користи само као претпоставка почетне геометрије. Овај први корак не узима у обзир еластична својства материјала, као ни једно од оптерећења које делује на систем. У другом кораку, који узима у обзир наведене факторе систем се мора решавати итеративно.

Методу су почели да развијају Линквиц и Шек (Linkwitz, Schek) 1971. године на Универзитету у Штутгарту. Ова метода развијена је за потребе моделовања конструкције крова олимпијског стадиона у Минхену, чији је пројектант Фрај Ото – пионир тензилних конструкција.

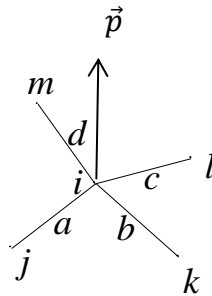
Полазну основу формфајндинга чини мрежна структура састављена од чворова и штапова (Слика 23) чија је топологија (тј. начин повезивања) описана матрицом  $C$  - матрицом чворова и штапова (*branch-node matrix* или *Kanten-Knoten-Matrix*). У математици, она је аналогон матрице инциденције у теорији графова. Чворови мреже могу бити две врсте: фиксни (гранични) и покретни (унутрашњи).

Координате чворова формирају вектор координата чворова  $x$ , а производ  $u=Cx$  представља вектор координата штапова, добијен као разлика координата

крајева за сваки штап. Дужине штапова добијају се као  $l = (\mathbf{u}^T \mathbf{u})^{1/2}$ . Укупне матрице система кабловске мреже, које садрже координате чворова, штапова и њихових дужина обележићемо са  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{L}$ , респективно.

У даљем тексту ће се користити стандардна конвенција означавања: мала масна слова означавају векторе, а одговарајућа велика масна слова означавају њима одговарајуће дијагоналне матрице. При томе тривијално важи  $\mathbf{a}^T \mathbf{B} = \mathbf{b}^T \mathbf{A}$ .

Мрежа је у равнотежи, уколико су у сваком чвору унутрашње силе мреже уравнотежене са спољашњим оптерећењима  $\mathbf{p}$ . За појединачни чвор мреже ситуација је приказана на цртежу:



Слика 23– Појединачни чвор мреже  $i$  који се налази у равнотежном стању (извор: аутор)

За изабрани чвор  $i$  мреже  $j, k, l, m$  њему суседни чворови,  $a, b, c, d$  штапови одређени паровима чворова  $i-j, i-k, i-l, i-m$  респективно. Равнотежа сила се изражава једначином:

$$\vec{f}_a + \vec{f}_b + \vec{f}_c + \vec{f}_d = \vec{p}$$

Израз 17

Ако приметимо да је

$$\vec{f}_a = f_a \cdot \frac{\vec{u}_a}{l_a}$$

Израз 18

где је

$$\vec{u}_a = \frac{\mathbf{u}_a}{l_a}$$

Израз 19

односно

$$\vec{u}_a = [x_j - x_i \quad y_j - y_i \quad z_j - z_i]$$

Израз 20а

или

$$\vec{u}_a = (x_j - x_i)\vec{i} + (y_j - y_i)\vec{j} + (z_j - z_i)\vec{k}$$

Израз 20б

а  $\vec{u}_a/l_a$  орт вектора штапа  $a$ , видимо да се једначина равнотеже може записати у облику

$$q_a \vec{u}_a + q_b \vec{u}_b + q_c \vec{u}_c + q_d \vec{u}_d = \vec{p}$$

Израз 21

где се појављују нове величине  $q_a = f_a/l_a$ ,  $q_b = f_b/l_b$ ,  $q_c = f_c/l_c$ ,  $q_d = f_d/l_d$  које формирају вектор  $\mathbf{q}$  са компонентама:

$$\mathbf{q}^T = [q_a \quad q_b \quad q_c \quad q_d]$$

Израз 22

Ова величина представља силу по јединици дужине штапа, у литератури познату као густина силе (Schek, 1974), односно напонски коефицијент (Barnes, 1977), иако она заправо нема физички смисао. Једначина равнотеже исказана Изразом 17 је векторског карактера и разлаже се на три скаларне једначине, односно:

$$q_a \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} + q_b \frac{x_k - x_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}} + q_c \frac{x_l - x_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2 + (z_l - z_i)^2}} + q_d \frac{x_m - x_i}{\sqrt{(x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2}} = p_x$$

Израз 23а

$$q_a \frac{y_j - y_i}{l_a} + q_b \frac{y_k - y_i}{l_b} + q_c \frac{y_l - y_i}{l_c} + q_d \frac{y_m - y_i}{l_d} = p_y$$

Израз 23б

$$q_a \frac{z_j - z_i}{l_a} + q_b \frac{z_k - z_i}{l_b} + q_c \frac{z_l - z_i}{l_c} + q_d \frac{z_m - z_i}{l_d} = p_z$$

Израз 23в

Ове једначине нису линеарне, с обзиром да у имениоцу свих сабирака фигуришу квадрати координата крајева штапова  $a, b, c, d$ .

Једначину равнотеже целокупне мреже каблова написаћемо у облику:

$$\mathbf{P}_i - \mathbf{C}_i^T \mathbf{g}(u) = 0$$

*Израз 24а*

при чему  $\mathbf{P}_i$  садржи векторе спољашњих сила свих унутрашњих чворова, а други члан  $\mathbf{C}_i^T$  представља вектор унутрашњих еквивалентних чворних сила целокупне мреже. Имајући на уму да је претходни систем једначина нелинеарног карактера, садржан у другом члану  $\mathbf{C}_i^T \mathbf{g}(u)$ , извршићемо линеаризацију система једначина Тејлоровим развојем другог члана

$$\mathbf{P}_i - \mathbf{C}_i^T \mathbf{g}(u_0) - \mathbf{C}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{g}(u)}{\partial u} \right)_{u=0} \cdot \Delta x$$

*Израз 24б*

односно

$$\mathbf{C}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{g}(u)}{\partial u} \right)_{u=0} \cdot \Delta x = \mathbf{P}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{g}(u_0)$$

*Израз 24в*

одакле резултира систем линеарних једначина по непознатим координатама унутрашњих чворова, тј.

$$\mathbf{K}_T \Delta x = \mathbf{r}$$

*Израз 25*

при чему

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{C}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{g}(u)}{\partial u} \right)_{u^i=u_0}$$

*Израз 26*

представља тангенцијалну матрицу крутости мреже каблова а  $\mathbf{r}(u)=\mathbf{r}(x)$  представља неуравнотежено оптерећење у чворовима мреже у произвољној итерацији. Вектор  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  садржи координате штапова из претходног равнотежног положаја посматране мреже.

Систем једначина у *Изразу 25* је итеративног карактера, тј.

$$\mathbf{K}_T^{(i)} \Delta x^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)}$$

*Израз 27*

при чему итеративни процес спроводимо све док резидуално оптерећење не буде једнако нули  $\mathbf{r}^{(i)} = 0$ , односно до унапред прописане толеранције, чиме је задовољена равнотежа кабловске мреже у сваком њеном чвору.

Како је

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{U}\mathbf{l}^{-1}\mathbf{f}$$

*Израз 28*

резидуално оптерећење у одсуству спољашњих сила можемо представити у следећем облику:

$$\mathbf{r} = \mathbf{P} - \mathbf{C}_i^T \mathbf{U}\mathbf{l}^{-1}\mathbf{f}$$

*Израз 29*

Надаље извршићемо декомпозицију густине силе на следећи начин:

$$\mathbf{q} = \mathbf{l}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{q}_g + \mathbf{q}_e$$

*Израз 30*

где су

$$\mathbf{q}_g = \mathbf{l}^{-1}\mathbf{f}_0$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{l}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}$$

*Израз 31а и б*

геометријски и еластични део густине сила, док је  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{l - l_0}{l_0} = \mathbf{l}_0^{-1}(l_0 l)$$

*Израз 32*

дилатација посматраног штапа.

Сила у каблу услед јединичног издужења кабла представља крутост кабла третираног као опруга и једнака је:

$$k_s = \mathbf{l}_0^{-1}\mathbf{E}\mathbf{A}$$

*Израз 33*

У складу са декомпозицијом у *Изразу 30* извршићемо и декомпозицију тангенцијалне матрице крутости, односно:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_e$$

*Израз 34*

при чему

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{C}_i^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_i^T \mathbf{U}^2 \mathbf{L}^{-2} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{C}_i$$

*Израз 35*

представља геометријску, а

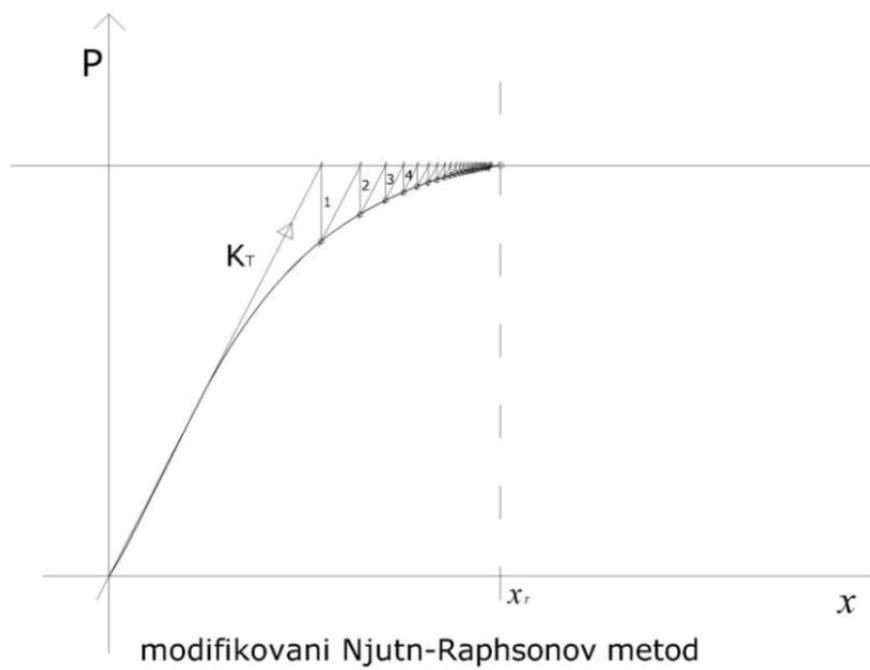
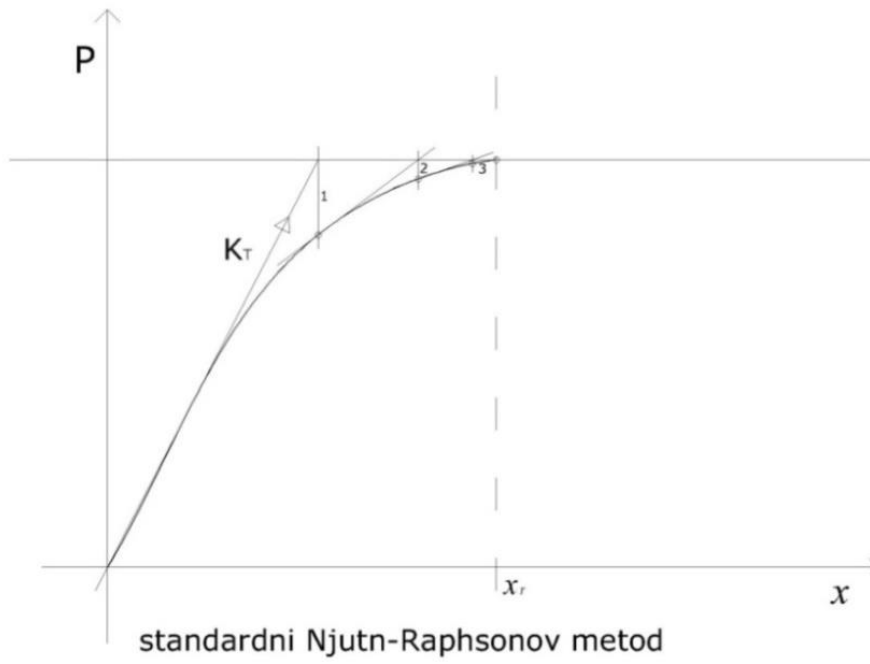
$$\mathbf{K}_e = \mathbf{C}_i^T \mathbf{U}^2 \mathbf{L}^{-2} \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{C}_i$$

*Израз 36*

еластичну матрицу крутости, тј. геометријски и еластични (материјални) део крутости целокупне кабловске мреже. Ближе о геометријској и еластичној матрици крутости у ПРИЛОГУ 1.

Систем једначина у *Изразу 25* можемо решити коришћењем стандардног Њутн-Рафсоновог (*Слика 24а*) или модификованог Њутн-Рафсоновог итеративног поступка (*Слика 24б*). Имајући на уму да процес изналажења тангенцијалне матрице крутости представља сложен проблем, модификовани Њутн-Рафсонов поступак, који користи непроменљиву тангенцијалну крутост у оквиру једног корака (инкремента) итерације често показује ефикасније решење.

Софтвер EASY немачког произвођача Technet GmbH развијен је осамдесетих година прошлог века од стране инжењера геодезије у сарадњи са немачким Универзитетима. Софтверски пакет има 5 модула, од којих су 3 од директног интереса за пројектовање мембранских конструкција: EASY Form, EASY Stat и EASY Cut. Примена ова три софтверска модула биће приказана у другом делу рада. Лиценца ова три модула програма EASY је љубазношћу фирме Technet дата аутору на располагање за израду докторске дисертације.

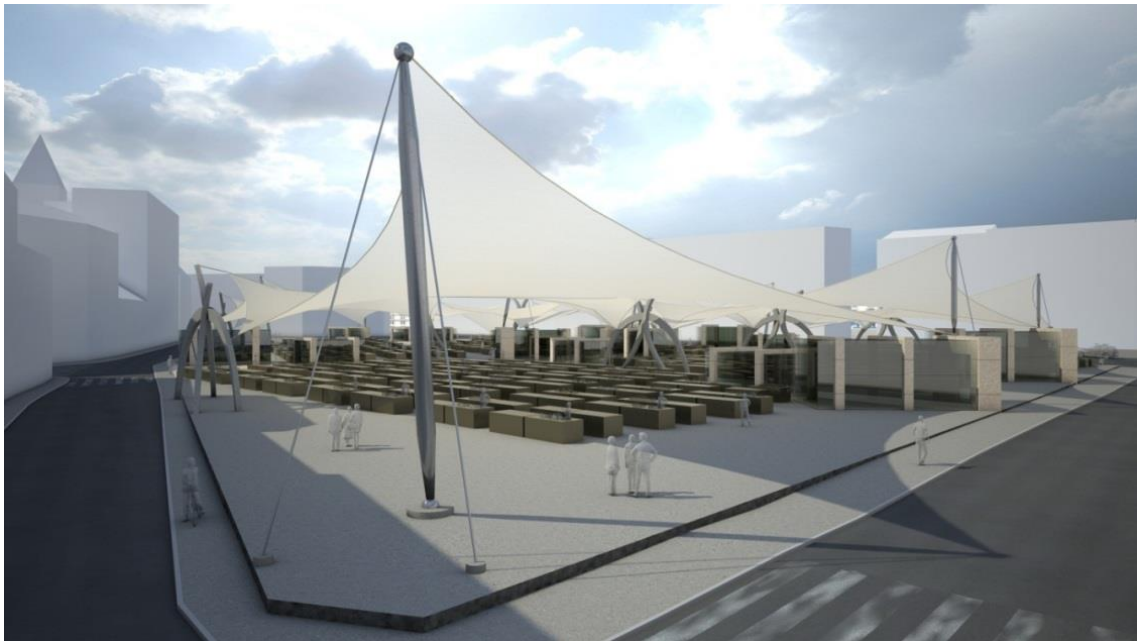
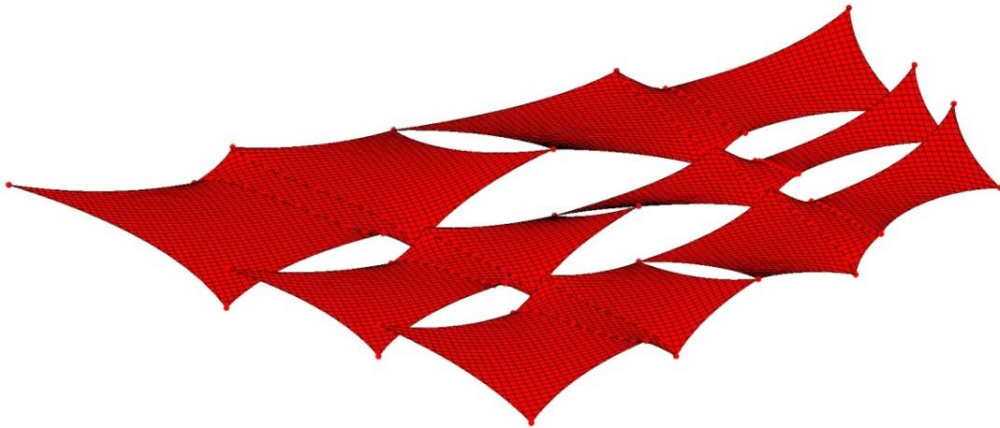


Слика 24а и б– решавање система једначина за тангенцијалну матрицу крутости стандардним и модификованим Њутн-Рафсоновим методом (извор: аутор)





Слика 25 – пример примене ФДМ у софтверском пакету EASY  
„Кан Шатир“, Астана, Казахстан  
Архитекта: Сир Норман Фостер,  
Инжењери: Биро Хаполд, Мајк Кук  
(извор:[20])



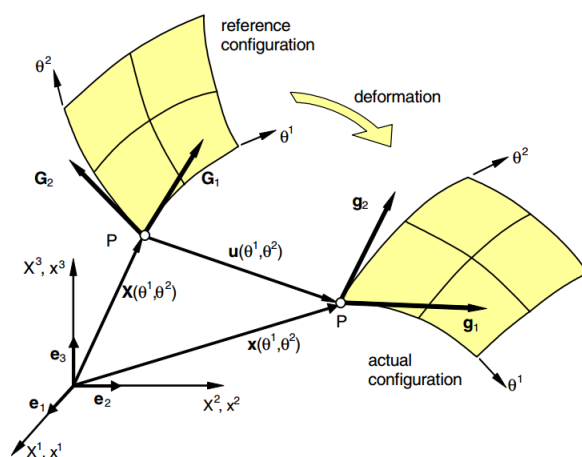
Слика 26а и б– пример примене ФДМ  
у софтверском пакету EASY  
пројекат наткривања пијаце „Скадарлија“, Београд  
(извор: аутор)

### 3.2.2. Стратегија ажурирања референтног положаја са хомотопским пресликавањем (*енг. Updated Reference Strategy with Homotopy Mapping*)

Ова метода новијег је датума и заправо сродна је методи густине силе – у стручној литератури се назива и „генерализованом“ методом густине силе. Стратегија ће укратко бити представљена, пошто се један од комерцијалних софтверских пакета – Rhino Membrane који ће бити анализиран у поглављу о софтверу базира на њој.

Аутор методе су проф. К.-У. Блечингер са сарадницима са Техничког универзитета у Минхену, а у [33] је као година настанка назначена 1999. Метода припада по систематизацији истих аутора у [33] методама геометријске крутости и може се извести како за површинске коначне елементе (мембранске конструкције), тако и за линијске (мреже каблова).

Ова метода се базира на идеји да се претходно затезање (напони) дефинише својим правцима и величинама на додатној, референтној површи, која мора бити линијска површ тј. таква да може да се развије у равни – као нпр. раван, цилиндрична или купаста површ. Напони се пресликавају („мапирају“) приликом нумеричке итерације на деформисану („стварну“) површ.



Слика 27 – деформација референтне у актуелну површ (извор: [21])

На слици 27, приказана је референтна конфигурација (површ која се може развити у раван) чија је деформација у „реалну“ или актуелну конфигурацију приказана градијентом деформације  $\mathbf{F}$ , који је једнак:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i; \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i; \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i; \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i$$

Израз 37

где су  $\mathbf{g}$  коваријантни базни вектори референтне конфигурације и  $\mathbf{G}$  базни вектори деформисане или реалне конфигурације.

Померање  $\mathbf{u}$  тачке  $P$  изражено преко површинских координата  $\theta^1, \theta^2$  изражено је као:

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2) - \mathbf{X}(\theta^1, \theta^2)$$

Израз 38

Површина деформисане („реалне“) конфигурације  $a$  може се изразити као:

$$a = \int_{\theta^1} \int_{\theta^2} j \, d\theta^1 d\theta^2 = \int_{\theta^1} \int_{\theta^2} \|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\| \, d\theta^1 d\theta^2 = \int_A \det \mathbf{F} \, dA$$

Израз 39

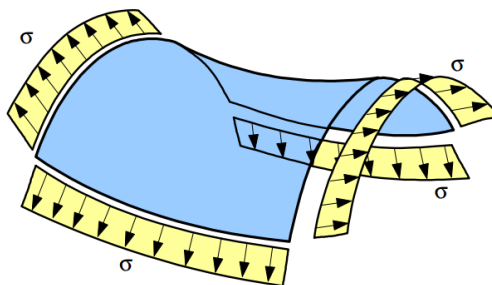
Минимизацијом површине варијација  $\delta a$  нестаје и може се математички записати као:

$$\delta a = \int_A \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} \, dA = 0$$

Израз 40

што је заправо један облик једначине минималне површи.

Метода УРС користи принцип виртуелног рада. На слици 28 приказано је тангенцијално напонско поље дела површи које треба да буде у равнотежном стању.



Слика 28– тангенцијално напонско поље посматраног дела површи (извор: [21])

Проблем формфајндинга је да се пронађе површ, која задовољава услов да са задатим напонским пољем буде у равнотежном стању. Виртуелни рад се преко градијента деформације изражава као:

$$\delta w = t \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} \, dA = 0$$

Израз 41a

или

$$\delta w = t \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}): \delta \mathbf{F} dA = 0$$

Израз 41b

Ово једначина је теоретска основа на којој је заснована метода ажуриране референтне конфигурације (УРС). Виртуелни рад изражен је преко градијента деформације  $\mathbf{F}$  и Кошијевог (Cauchy) тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ , тј. 2. Пиола-Кирхофовог (Piola-Kirchoff) тензора  $\mathbf{S}$ . Једначина у *Изразу 41a* се своди на *Израз 40* ако је напонско поље  $\boldsymbol{\sigma}$  константно у свим правцима – у том случају тражена равнотежна површ јесте заправо минимална површ. Ова чињеница названа је у [33] „аналогијом сапунске мембране“ („*soap film analogy*“). Претходна једначина се решава нумерички помоћу методе коначних елемената.

Геометрија површи и померања се дискретизују интерполацијом координата и померања чворова:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{k=1}^{nel} N^k(\theta^1, \theta^2) \bar{\mathbf{X}}_k \\ \mathbf{u} &= \sum_{k=1}^{nel} N^k(\theta^1, \theta^2) \bar{\mathbf{u}}_k \\ \mathbf{x} &= \sum_{k=1}^{nel} N^k(\theta^1, \theta^2) (\bar{\mathbf{X}}_k + \bar{\mathbf{u}}_k) \end{aligned}$$

Израз 42

Притом су  $\mathbf{X}$  координате референтног система,  $\bar{\mathbf{X}}_k$  је референтни вектор положаја  $k$ -тог чвора коначног елемента.  $N^k$  су стандардне непрекидне класе  $C_0$  функције облика (*shape functions*), а  $nel$  број чворова коначног елемента (2 за линијске, 3 и више за мембранске елементе). Померања чворова су непозната и сврстана су у вертикалну матрицу  $\mathbf{b}$  димензије  $ndof$  (број степени слободе тј. чворова).

Нелинеарни систем једначина које се решавају за  $ndof$  чворова је:

$$\frac{\partial w}{\partial b_r} = t \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}): \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_r} dA = 0$$

Израз 43

Систем је нелинеаран у односу на  $b_r$  и решава се итеративно линеаризацијом и применом Њутн-Рафсоновог поступка (види претходно поглавље).

Линеаризација система једначина дата је следећим изразом:

$$\begin{aligned} \text{LIN}\left(\frac{\partial w}{\partial b_r}\right) &= t \int_A \det \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_r} dA + \Delta b_s t \int_A \frac{\partial}{\partial b_s} \left( \det \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_r} \right) dA \\ &= R_r + K_{rs} \Delta b_s = 0 \end{aligned}$$

Израз 44

где су  $R_r$  вектор резидуалних сила,  $K_{rs}$  матрица крутости,  $\Delta b_s$  – вектор померања. Збир резидуалних сила и сила које делују у систему једнак је нули када је систем у равнотежи.

$R_r$  и  $K_{rs}$  израчунавају се уз помоћ следећих израза:

$$R_r = t \int_A \det \mathbf{F} \sigma^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_{\alpha,r} \mathbf{g}_\beta) dA$$

Израз 45a

$$K_{rs} = t \int_A \left[ \det \mathbf{F} \sigma^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_{\alpha,r} \mathbf{g}_{\beta,s}) + (\det \mathbf{F} \sigma^{\alpha\beta})_{,s} (\mathbf{g}_{\alpha,r} \mathbf{g}_\beta) \right] dA$$

Израз 45b

Изрази се свде на FDM када се *израз 41a* свде на једну димензију. Ово се примењује када се ради о мрежама челичних каблова, као и за добијање облика затезних каблова по ободу мембране.

Проблем који настаје при нумеричком решавању, јесте да приликом тангенцијалних варијација облика матрица крутости постаје сингуларна, те нумерички поступак не конвергира. Овај проблем се може једноставно превазићи ако се могућност кретања чворова ограничи на нормалну компоненту (анулира се тангенцијална компонента). У пракси – поготово по ободу мембранске конструкције где се налазе кабови – ова рестрикција није могућа, те се приступа другим методама регуларизације овог проблема.

Метода коју Блещингер и Вихнер примењују у [33] назива се хомотопска регуларизација. Ове методе се користе у нелинеарним зависностима оптерећења и деформације у граничним стањима конструкције. Идеја хомотопије је да се уместо првобитног математичког проблема посматра слични који конвергира ка свом решењу, а затим се у конвексној комбинацији полазног и новог проблема регуларизациони параметар смањује тако да то решење постаје све ближе решењу оригиналног проблема:

$$\min f_{\lambda}(x) = \min[\lambda f(x) + (1 - \lambda)f'(x)]$$

*Израз 46*

Решење проблема  $f(x) \rightarrow \min$  је сингуларно, али постоји сродан проблем  $f'(x) \rightarrow \min$  који није сингуларан. Функција  $f'(x)$  користи се за регуларизацију оригиналног проблема са фактором континуације  $\lambda$ . Параметар  $\lambda$  се приликом решавања креће од 0 (што одговара проблему минимизације  $f'(x)$ ) до 1 (што одговара полазном проблему минимизације  $f(x)$ ). Што је функција регуларизације ближа оригиналу, метода је успешнија.

Примењено на URS једначину поступка формфајндинга, тј. виртуелног рада, модификована једначина гласи:

$$\delta w_{\lambda} = \lambda t \int_A \det \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}) : \delta \mathbf{F} dA + (1 - \lambda) t \int_A \det \mathbf{F}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA = 0$$

*Израз 47*

Разлика у односу на оригинални проблем јесте претпоставка да су дати Пиола-Кирхофови напони  $\mathbf{S}$ , уместо Кошијевих  $\boldsymbol{\sigma}$ . Модификована матрица крутости  $K_{(\lambda)rs}$  се изражава:

$$K_{(\lambda)rs} = \lambda t \int_A (\det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}})_{,s} : \mathbf{F}_{,r} dA + (1 - \lambda) t \int_A (\mathbf{F}_{,s} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,r} dA$$

*Израз 48*

при чему је други члан познат као геометријска матрица крутости у нелинеарној анализи.

Геометријска матрица крутости једнака је:

$$(1 - \lambda) t \int_A (\mathbf{F}_{,s} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,r} dA = t \int_A S^{\alpha\beta} \mathbf{g}_{\alpha,r} \mathbf{g}_{\beta,s} dA$$

*Израз 49*

Модификовани вектор резидуума једнак је:

$$R_{(\lambda)r} = \lambda t \int_A \det \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}) : \mathbf{F}_{,r} dA + (1 - \lambda) t \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \mathbf{F}_{,r} dA$$

*Израз 50*

Да би се правилно одабрао фактор  $\lambda$ , аутор методе предлаже стратегију ажурирања референце. Решење модификованог проблема са произвољним  $\lambda$  користи се као нова почетна референца у следећем кораку решавања. Референтна

конфигурација се итеративно ажурира, приближавајући се коначном – оптималном решењу. Апроксимација се зауставља када је разлика између две референтне конфигурације „довољно мала“. Овако формулисана стратегија конвергира оптимуму за било које  $\lambda$  које је довољно мало да би се обезбедила регуларизација матрице крутости. Практично, апроксимација се започиње са неколико корака у којима је  $\lambda \leq 0.5$ , а затим се постепено повећава да би се побољшала конвергенција. Оваква процедура даје поуздане резултате врло брзо.

Ова стратегија је имплементирана у софтверском додатку RhinoMembrane који се користи као плаг-ин за софтверски пакет Rhino.

Неки од пројеката изведени у овом софтверском пакету базираном на URS приказани су на *сликама 29 и 30*.



Слика 29 – SAMBIL тржни центар, Венецуела  
(извор: [22])



Слика 30 – различити пројекти, пројектовани у RhinoMembrane  
(извор: [23])



### 3.2.3 Метода динамичке релаксације (*енг. Dynamic relaxation*)

Динамичка релаксација је нумеричка метода, која има широк спектар примене. Развијена је и први пут примењена 1965 од стране А. Ц. Деја (види [9]) за статичку анализу бетонских силоса, тј. судова.

Осим примене у области формфајндинга, користи се као векторска метода у нелинеарној статичкој анализи. Метода не користи матрицу крутости система и због тога је прикладна за решавање геометријски и материјално нелинеарних проблема. Пошто је метода изражена увек преко координата деформисаног система, дозвољава решавање геометријски нелинеарних проблема, односно структура са великим померањима. Метода није прикладна за динамичку анализу, пошто се користи фиктивно пригушење система, да би се дошло до решења статичког проблема.

Барнс је развио ову методу 70-тих и 80-тих година прошлог века и применио је на процес формфајндинга тензилних конструкција (детаљније у [3-5]). Предност методе у односу на методе матрице крутости јесте што није потребно да се формира матрица крутости система, метода је векторска.



Слика 31 - пример примене DR:  
ЕКСПО 1988, Бризбејн, Аустралија  
(извор: [13])

У [12] ова метода је окарактерисана као нумеричка метода заснована на коначним разликама. У почетку је коришћена за моделовање танких љуски, а

затим је примена проширена на мреже каблова и плоче. Метода се ослања на дискретизовани континуум у којем је маса конструкције концентрисана у чворовима мреже. Модел мреже користи се и за дискретизацију површи. Систем концентрованих маса се уводи у осцилацију око равнотежног стања под утицајем спољног оптерећења, које систем изводи из почетне равнотеже. Концентроване масе осцилују око равнотежног стања и заузимају положај статичке равнотеже захваљујући вискозном пригушењу. Итеративни процес симулира псеудо-динамички процес у посматраном временском интервалу који конвергира статичкој равнотежи.

Динамичка релаксација почива на другом Њутновом закону кретања, који доводи у везу силу, масу и убрзање сваког чвора у посматраном временском периоду. Притом су масе и пригушење чворова фиктивне и могу се подешавати ради убрзања процеса итерације.

Други Њутнов закон може се записати:

$$R_{ix} = M_i A_{ix}(t) + C_{ix}$$

*Израз 51*

где је  $R$  резидуална сила,  $M$  маса концентрисана у чвору,  $A$  убрзање чвора  $i$ ,  $C$  фактор вискозног пригушења у случају да се користи ради побољшања конвергенције.

У дискретизованом систему мреже са  $i \times j$  чворова ова једначина се може записати и као:

$$P_{ij} = \Sigma[K\delta]_{ij} + M_{ij}\delta_{ij} + C_{ij}\delta_{ij}$$

*Израз 52*

где је  $\Sigma[K\delta]_{ij}$  вектор унутрашњег оптерећења ( $K$  – крутост,  $\delta$  – померање),  $M$  маса чвора,  $C$  вискозно пригушење, а  $\ddot{\delta}_{ij}$  убрзање чвора  $ij$ , а  $\delta_{ij}$  његова брзина. Разлика између вектора спољног и унутрашњег оптерећења је

$$R_{ij} = P_{ij} - \Sigma[K\delta]_{ij}$$

*Израз 53a*

односно

$$R_{ij} = M_{ij}\ddot{\delta}_{ij} + C_{ij}\dot{\delta}_{ij}$$

Израз 53б

Ова једначина изражава да је кретање система изазвано неуравнотеженим (резидуалним) силама и да се статичка равнотежа постиже када разлика ових сила буде једнака нули.

Последњи израз могуће је апроксимирати уз помоћ централних коначних разлика, како је то учињено у [12], при чему је убрзање представљено као варијација брзине у току временског интервала  $\Delta t$ , а сама брзина као просек у току истог временског интервала. Једначина описане апроксимације је:

$$R_{ij}^n = M_{ij} \frac{\dot{\delta}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \dot{\delta}_{ij}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + C_{ij} \frac{\dot{\delta}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \dot{\delta}_{ij}^{n-\frac{1}{2}}}{2}$$

Израз 54

Из овог израза се добија итеративна шема за израчунавање брзине:

$$\dot{\delta}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \left( \dot{\delta}_{ij}^{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{M_{ij} - \frac{C}{2}}{\Delta t}}{\frac{M_{ij} + \frac{C}{2}}{\Delta t}} \right) + \frac{R_{ij}^n}{\frac{M_{ij} + \frac{C}{2}}{\Delta t}}$$

Израз 55

што чини основу за прогнозу померања:

$$\delta_{ij}^{n+1} = \delta_{ij}^n + \dot{\delta}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t$$

Израз 56

Последња два израза се користе као кораци итеративног поступка, све док се резидуалне силе не приближе нули. Резидуалне силе се рачунају из следећег израза:

$$R_{ij}^n = P_{ij} - \left[ \sum K\delta \right]_{ij}^{n-1}$$

Израз 57

Да би се итеративни поступак започео, морају се унети следеће непознате величине: масе, коефицијенти пригушења и временски интервал. Пошто није

неопходно да се прикаже стварно кретање, ови параметри могу бити релативно произвољни. Притом се мора обратити пажња на обезбеђење конвергенције.

Стабилност итеративног поступка зависи од масе и крутости, тачније од највеће сопствене вредности матрице  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ . Ради убрзања конвергенције за  $\Delta t$  би требало изабрати вредност  $\Delta t$  приближно:

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\mu_1}}$$

*Израз 58*

У пракси ова вредност није позната, али ако се  $\mathbf{M}$  изабере тако, да вредности матрице буду  $\alpha$  пута елементи главне дијагонале матрице крутости  $\mathbf{K}$ , онда ће горња граница  $\mu_1$  бити  $2\alpha$ . Ако претпоставимо да је  $\mu_1 \approx 2/\alpha$ , максимални временски интервал  $\Delta t$  је:

$$\Delta t_{max} \approx \sqrt{2\alpha} = \sqrt{2 \frac{M}{K}}$$

*Израз 59*

С обзиром да се феномен не посматра у реалном времену,  $\Delta t$  може имати тривијалну вредност 1, и тада је  $M/K=1/2$ . Ако је  $\alpha=1/2$ , добија се  $\mu_1 \sim 4$ , а граница стабилности је  $\Delta t \sim 1$ .

Дакле, ако је  $\alpha > 1/2$ ,  $\Delta t$  ће се кретати у границама стабилности. За произвољно  $\Delta t$ , маса произвољног чвора треба да буде изабрана према следећем изразу:

$$M_{ij} = \frac{\Delta t^2 K_{ij}}{2}$$

*Израз 60*

Да би се дошло до решења, потребно је увести и коефицијент вискозног или кинетичког пригушења, у супротном ће систем заувек осциловати око равнотежног стања.

Критично пригушење се може добити из следећег израза:

$$C = 4\pi m f$$

*Израз 61*

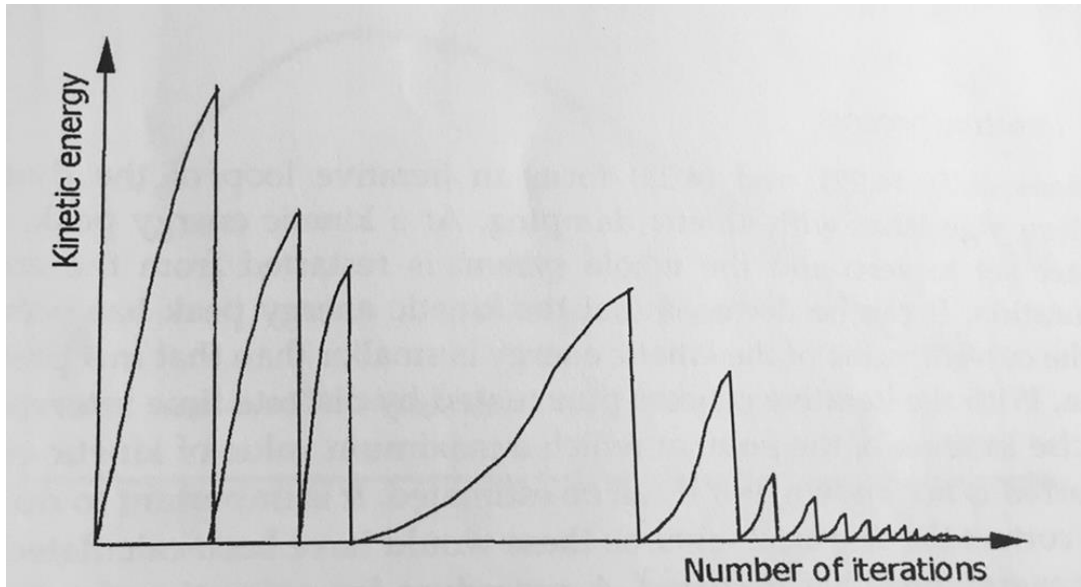
где је  $f$ , основна фреквенција осцилација, и израчунава се уз помоћ  $N$ , који представља број итерација које су потребне за један циклус осцилација у основном моду:

$$f = \frac{1}{N\Delta t}$$

*Израз 62*

Из приказаног се види да је за израчунавање коефицијента вискозног пригушења потребно да се поступак примени једном без пригушења ( $C = 0$ ) да би се добила непригушена осцилација конструкције. Онда се може израчунати коефицијент вискозног пригушења (*Израз 61*) који ће касније бити употребљен за побољшање конвергенције итеративног поступка.

У случају примене кинетичког пригушења, вискозно пригушење је једнако нули. Примена вискозног пригушења за контролу стабилности конвергенције базира се на феномену клатна: у тренутку када је потенцијална енергија на минимуму, кинетичка енергија је на максимуму. Принцип је примењен на мрежу чворова, који под утицајем спољног оптерећења осцилују око равнотежног стања док не достигну минимум потенцијалне енергије (равнотежно стање). У тренутку, тј. у кораку итерације, када чворови достигну максимум кинетичке енергије, итеративни поступак се зауставља, јер се претпоставља да је то стање еквивалентно стабилном (равнотежном) стању. Немогуће је да сви чворови мреже достигну овај максимум у истом тренутку, због разлика у њиховим осцилацијама. Зато се процес зауставља после првог максимума кинетичке енергије, брзина чворова се изједначава са нулом и процес се рестартује. Као почетна геометрија се узима коначна геометрија из последње итерације. Понављање ових корака најчешће доводи до стабилне конфигурације система, као што је приказано на *Слици 32*, јер се пикови кинетичке енергије са бројем итерација смањују и резидуалне силе се у великом броју случајева приближавају нули, тј. систем конвергира ка равнотежном стању.



Слика 32 – варијација кинетичке енергије у алгоритму DR  
(извор: [7])

Обзиром на то да је вискозно пригушење изједначено нули, итеративни поступак DR са кинетичким пригушењем се своди на решавање следећих једначина:

$$R_{ij} = M_{ij} \ddot{\delta}_{ij}$$

Израз 63

што се, апроксимирано методом коначних разлика, може записати и као:

$$R_{ij}^n = M_{ij} \frac{\delta_{ij}^{n+1/2} - \delta_{ij}^{n-1/2}}{\Delta t}$$

Израз 64

Из тога се изводе једначине за брзину и убрзање:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{ij}^{n+1/2} &= \dot{\delta}_{ij}^{n-1/2} + \frac{R_{ij}^n \Delta t}{M_{ij}} \\ \delta_{ij}^{n+1} &= \delta_{ij}^n + \dot{\delta}_{ij}^{n+1/2} \Delta t \end{aligned}$$

Израз 65а и б

Ако се за  $\Delta t$  узме тривијална вредност 1, једначина се поједностављује и постаје:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{ij}^{n+1/2} &= \dot{\delta}_{ij}^{n-1/2} + \frac{R_{ij}^n}{\frac{1}{2}K_{ij}} \\ \delta_{ij}^{n+1} &= \delta_{ij}^n + \dot{\delta}_{ij}^{n+1/2} \times 1 \end{aligned}$$

Израз 66а и б

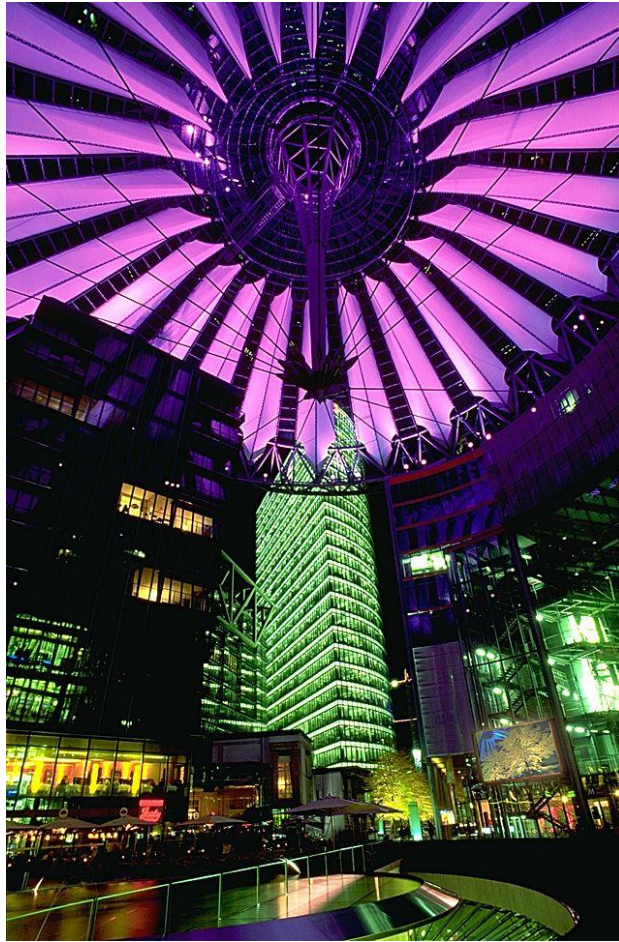
Итеративни поступак се формира на основу последње две једначине уз:

$$R_{ij} = P_{ij} - \Sigma [K\delta]_{ij}^{n-1}$$

*Израз 67*

Метода динамичке релаксације захтева следеће претпоставке које архитекта, односно инжењер морају успоставити пре итеративног поступка: концентрисане масе, коефицијенти пригушења (ако се користи) и временски интервал  $\Delta t$ . Притом се вредности масе  $M$  и пригушења  $C$  морају одабрати тако да се обезбеди конвергенција ка равнотежном стању. Уз помоћ пригушења могуће је обезбедити и убрзати конвергенцију (додуше не у свим случајевима).

Метода динамичке релаксације успешно је имплантирана у софтверски пакет GS SUITE, који је развила инжењерска фирма Ове Аруп и партнери. У склопу комерцијалног софтвера (нпр. горе наведеног) претпоставке из претходног одељка су унапред начињене, те није неопходно да сам пројектант задаје ове параметре (модалне масе, пригушење система итд.), међутим постоје случајеви када се ови параметри морају мануелно задати или мењати.



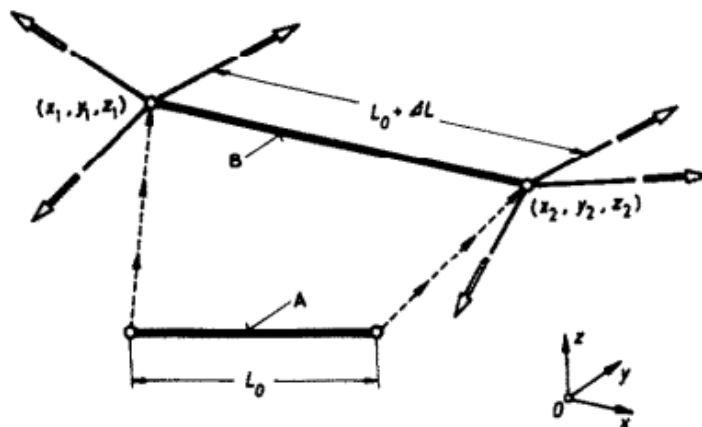
Слика 33а и б - пример примене DP: SONY CENTRE, Берлин  
Архитекта: Хелмут Јан, Инжењери: Ове Аруп и Партнери  
(извор:[9])



### 3.2.4. Методе матрице крутости (*Stiffness Matrix Method - SM*)

Већ је наведено, да је ова група метода најразуђенија у литератури. Стога ће у овом раду бити представљена метода, која спада у ову групу, коју су 1974. године предложили Аргирис, Ангелопулос и Биша (Argyris, Angelopoulos, Bichat; 1974), која је резултат сарадње Лондонског Универзитета и Универзитета у Штутгарту и први пут је примењена на деловима крова Олимпијског стадиона у Минхену (Источне трибине).

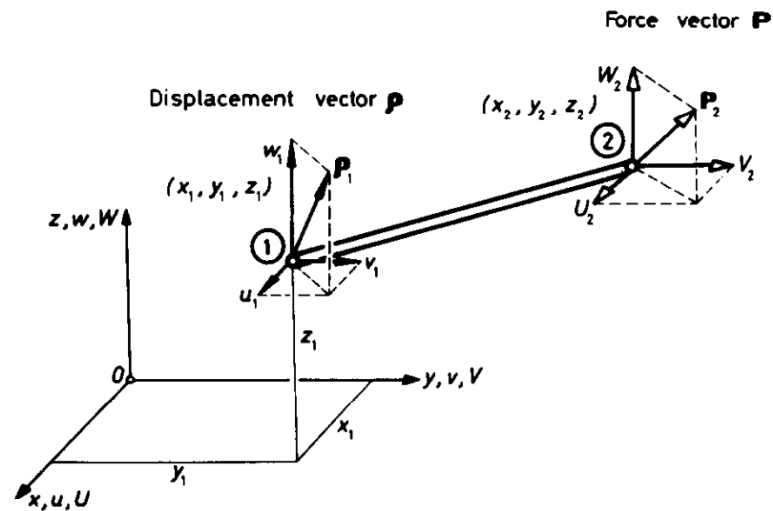
Формфајндинг почиње, попут осталих приказаних метода са мрежом у равни, са идеализованим кабловима који задовољавају Хуков закон. Слика приказује почетни положај кабла (у неистегнутом стању) и положај кабла у затегнутом стању са координатама чворова и дужином кабла.



Слика 34 – кабл/штап у неистегнутом (А) и истегнутом стању (В)  
(извор: [24])

3

а претходно затегнуту мрежу каблова која се састоји од  $s$  елемената са  $n$  степена слободе, можемо дефинисати на следећи начин: производ  $E \times A$  је производ модула еластичности челичног кабла и површине попречног пресека, затим  $L_0$  које означава неистегнуту дужину кабла, затим  $L = L_0 + \Delta L$  – које означава истегнуту дужину и  $x$  је вектор координата чворова мреже груписаних у паровима.



Слика 35 – геометрија, померања и силе које утичу на елемент (извор: [24])

Вектор координата чворова означава се као:

$$\mathbf{x} = [x_1 x_2 \dots x_q \dots x_s]$$

Израз 68а

где је

$$\mathbf{x}_g = [x_1 x_2]_g = [x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2]_g$$

Израз 68б

Вектор  $\rho$  је вектор померања елемената:

$$\rho = [\rho_1 \rho_2 \dots \rho_g \dots \rho_s]$$

Израз 69а

са

$$\rho_g = [\rho_1 \rho_2]_g = [u_1 v_1 w_1 u_2 v_2 w_2]_g$$

Израз 69б

а са  $\mathbf{P}_N$  су означене аксијалне (нормалне) резидуалне силе

$$\mathbf{P}_{Ng} = [P_{N1} P_{N2} \dots P_{Ng} \dots P_{Ns}]$$

Израз 70

уз

$$\mathbf{P}_{Ng} = \frac{E_g A_g}{L_{0g}} (l_g - l_{0g})$$

*Израз 71*

где је  $\mathbf{P}$  вектор резидуалних сила у Декартовом координатном систему.

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_g \dots \mathbf{P}_s]$$

*Израз 72a*

и

$$\mathbf{P}_g = [\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2]_g = [U_1 V_1 W_1 U_2 V_2 W_2]_g$$

*Израз 72б*

а

$$\mathbf{a}_N = [\mathbf{a}_{N1} \mathbf{a}_{N2} \dots \mathbf{a}_{Ng} \dots \mathbf{a}_{Ns}]$$

*Израз 73*

$$\mathbf{a}_{Ng} = [-\mathbf{c}^t \mathbf{c}^t] = \frac{1}{L} [-(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) - (z_2 - z_1)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)]$$

*Израз 73б*

где  $\mathbf{a}_N$  представља матрицу трансформације у Декартове координате.

Као што је поменуто приликом анализе претходних метода тангенцијална матрица крутости система  $\mathbf{K}_T$  састављена је од геометријске и еластичне матрице крутости:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_e$$

*Израз 74*

Инкрементални вектор померања означен је са  $\mathbf{r}_\Delta$ , затим инкрементални вектор оптерећења  $\mathbf{R}_\Delta$  и вектор резидуалних сила у чвору  $\mathbf{R}_u$ . Веза при великим померањима између вектора оптерећења и вектора померања је такође већ поменута и изражена је као:

$$\mathbf{R}_\Delta = (\mathbf{K}_g + \mathbf{K}_e) \mathbf{r}_\Delta$$

*Израз 75*

Да би се добило почетно стање претходног затезања унутар мреже, спољне силе се изједначавају са нулом, тиме се  $\mathbf{R}_\Delta$  састоји само од резидуалних сила.

Аргирис користи у [1] инкрементални поступак да би постепено дошао до коначног положаја тачака ослонаца. Овакав поступак није неопходан, већ се укупна резидуална сила  $\mathbf{R}_u$  може применити одједном. Овај инкрементални поступак Аргирис користи у случају да је укупна резидуална сила јако велика, да би се обезбедила стабилност система.

Резидуалне силе се израчунавају:

$$\mathbf{R}_u = -\mathbf{a}^t \mathbf{P} = -\mathbf{a}^t \mathbf{a}^t \mathbf{P}_N$$

*Израз 76*

где је  $\mathbf{a}$  матрица повезаности елемената, тј. топологија мреже (названа "Kanten-Knoten-Matrix" или "branch-node-matrix" -  $\mathbf{C}$  у претходно анализираној ФДМ). До равнотежног стања се долази у приказаном итеративном поступку:

1)

$$\mathbf{R}_{ui} = -\mathbf{a}^t \mathbf{a}^t \mathbf{P}_{Ni}$$

*Израз 77*

2)

$$\mathbf{r}_{\Delta i} = [\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G]_i^{-1} \mathbf{R}_{ui}$$

*Израз 78*

3)

$$\boldsymbol{\rho}_{\Delta i} = \mathbf{a} \mathbf{r}_{\Delta i}$$

*Израз 79*

4)

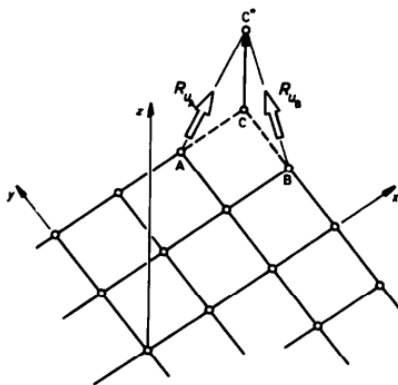
$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\rho}_{\Delta i}$$

*Израз 80*

после последњег корака враћа се на први корак итерације. Итерација се завршава када се достигне задата толеранција. Овако добијена равнотежна геометрија не обећава уједно и добру расподелу претходног затезања. Енергија се распоређује у мрежи да би се добила равнотежна геометрија. Квалитет улазних података се одражава на регионе који могу бити „презатегнути“ или недовољно затегнути. Дакле за успешан резултат је од пресудног значаја, да ли смо унели добре улазне податке, који нису унапред познати. Још један проблем који настаје приликом примене ове методе, да је конвергенција у великом броју случаја немогућа, што и сами аутори наводе као ману методе у [1]. Разлог је што је у току итеративног

поступка могуће да крутост постане не позитивно дефинитна. Често није могуће наћи директно решење за почетну геометрију, већ је инжењер принуђен да „напишава“ решење мењањем улазних података. Углавном је напрезање у кабловима у унутрашњости конструкције могуће модификовати само силама у граничном (спољном) каблу, јер је због извођења конструкције нужно да све иницијалне дужине каблова буду међусобно једнаке.

У процесу формфајндинга се симулира материјал са линеарном зависношћу силе и напрезања до врло великих напрезања. У почетку се конструише мрежа у равни која задовољава овај услов. Задају се координате фиксних тачака. Као најједноставнији пример Аргирис и др. наводе седло ослоњено на 4 тачке (попут типског примера разрађеног у наставку овог рада). Претпоставља се да се у почетку итеративног поступка мрежа налази у равни и у стању равнотеже, тако да су резидуалне силе  $R_u$  једнаке нули. Померањем тачака ослонаца у нове положаје се структура изводи из равнотеже, јављају се резидуалне силе и почиње инкрементални поступак – Слика 36.



Слика 36 – Резидуалне силе, настале померањем граничног чвора (извор: [24])

Настале резидуалне силе се израчунавају на следећи начин:

$$R_{uA} = [R_{ux} R_{uy} R_{uz}]_A; R_{uB} = [R_{ux} R_{uy} R_{uz}]_B$$

Израз 81a

$$R_u = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ R_{uA} \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ R_{uB} \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

Израз 81б

$$R_u = [K_E + K_G] r_\Delta$$

Израз 82

Решењем система једначина добија се нова равнотежна геометрија, додавањем инкременталних померања претходној геометрији. Ново равнотежно стање је добијено Ојлеровом екстраполацијом (на овај начин аутори су штедели време калкулације 70-тих година). Добијена геометрија постаје почетна при новом кораку. Аутори наводе, да је могуће да се при итерацијама деси, да неки од елемената буде напрегнут притиском (уместо затезањем), овај елемент мора да се елиминише из калкулације и да се поново узме у обзир када је поново под силом затезања. Резултат оваквог поступка није практично употребљив, јер су унутрашња оптерећења огромна и мора се трансформисати на следећи начин: претходно затезање мора да се прилагоди „стварном“ систему. Дакле, оригиналне, неистегнуте дужине морају се поново прерачунати, да би се добило жељено претходно затезање. Сваки елемент се приликом померања тачака ослоња у току поменутог поступка истеже за  $\Delta L$ . Под претпоставком да су еластичне особине у „моделу“ и „стварној“ конструкцији исте, истежање је:

$$\varepsilon = \frac{P_{NP}}{EA}$$

Израз 83

Такође и укупна дужина елемената у почетном „моделу“ и „стварном“ систему мора бити једнака, те се може записати:

$$\bar{L}_0 + \Delta \bar{L} = L_0 + \Delta L$$

Израз 84а

Из ове једнакости може се добити оригинална, неистегнута дужина, а тиме и жељене силе истежања.

$$L_0 = \frac{\bar{L}_0 + \Delta \bar{L}}{1 + \varepsilon} = \frac{\bar{L}_0 + \Delta \bar{L}}{1 + \frac{P_{NP}}{EA}}$$

Израз 84б

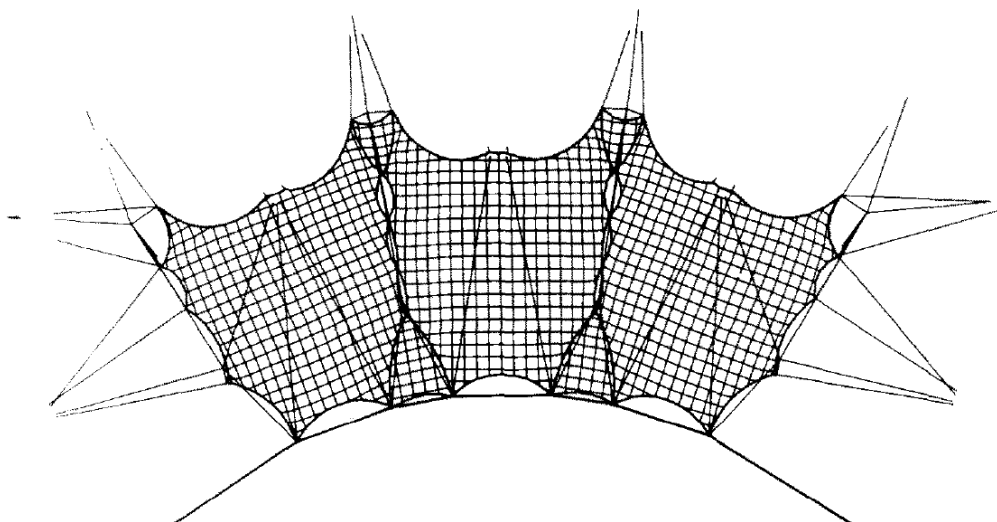
Пошто се ова трансформација примењује на оригиналне дужине елемената, систем се не налази у равнотежи и мора се применити опет итеративни поступак

да би се достигло равнотежно стање, овог пута укључујући и елементе који су се претходним поступком нашли у сабијању (под притиском).

Цео процес се може резимирати дијаграмом приказаним на *Слици 39*, који су Аргирис, Ангелопулос и Биша представили у [1].

Метода је „позајмљена“ из статичке анализе, и као што сам аутор признаје, има и доста негативних аспеката у односу на друге методе. Најважније су нестабилност система и чињеница, да се унапред морају задати еластичне особине материјала и попречни пресек каблова – два податка која су најчешће унапред непозната.

О сличностима и разликама између метода, детаљно у [12] и [8].

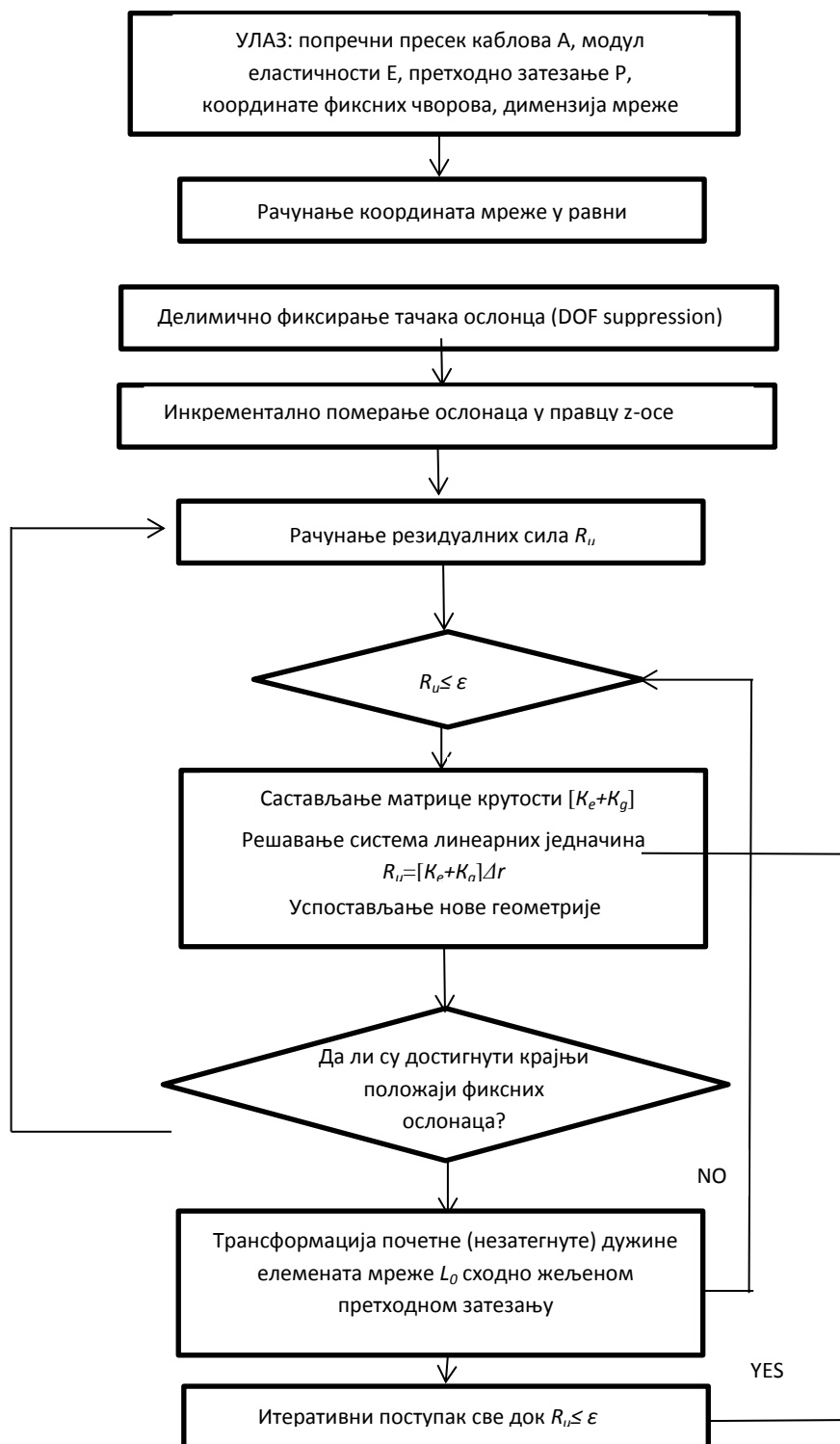


*Слика 37* – пример примене SM  
Источна трибина Олимпијског  
стадиона у Минхену (извор: [24])



*Слика 38 – Источна трибина  
Олимпијског стадиона у Минхену  
(извор: [25])*





Слика 39 – алгоритам итеративног поступка SM методе (извор: [24])

### 3.3. Сличности и разлике представљених метода

У претходним поглављима су анализирани и представљени три различите „групе“ метода са основним математичким апаратом који је неопходан за њихову примену.

Пре него што ће се поредити по њиховој ефикасности и оптималности, корисно је кратко прокоментерисати сличности и разлике поменутих метода.

Све приказане методе су итеративног и нумеричког карактера, што значи да се „коначној“ геометрији приближавају „корак по корак“ и „коначна“ геометрија је приближно решење система једначина равнотеже. Ова геометрија је само условно „коначна“ – она је то само у смислу формфајдинга – без дејства спољног оптерећења (тзв. PRESTRESS стање), а не у смислу коначне деформације под дејством спољног или сопственог оптерећења.

Док су једначине равнотеже код SM и FDM постављене као једначине статичке равнотеже, у DR се ради о једначинама динамичке равнотеже (други Њутнов закон).

За све методе је потребно да се унапред знају координате фиксних тачака конструкције (гранични услов). Ове фиксне тачке су најчешће одређене пројектним задатком, као и типологијом саме конструкције (конусни шатор, седло, итд.). Веома је корисно приступити физичком моделовању да би се приближно одредиле координате фиксних тачака и да би се стекла представа о површи која ће се формирати. Скоро све методе у оптицају мембранску површ моделују уз помоћ дискретизације у виду мреже штапова (евентуално троуглова).

FDM у инпуту користи само координате фиксних тачака и параметар „густине силе“. Испитивања су показала да релативно добре резултате даје тривијална вредност, попут јединице. Дакле, за пројектанта – почетника ова

метода је једна од најједноставнијих, јер уз минимум предзнања даје добре резултате.

URS, Стратегија ажурирања референтног положаја јесте заправо општи облик FDM примењив не само на мреже штапова, већ и на површинске елементе. Уместо густине силе – претпоставља се и задаје напонско стање у површинском елементу.

У SM је унос компликованији. У овој методи, мора се унапред унети попречни пресек каблова, модул њихове еластичности, сила претходног затезања, као и координате фиксних чворова. Због тога је ова метода помало заборављена, јер претпоставља доста предзнања о конструкцији, коју најчешће архитекте, поготово у процесу пројектовања, не поседују.

Слична ситуација је са DR, у којој се уносе концентрисане масе, пригушење и временски интервал у којем се врши итерација. За временски интервал се такође најчешће задаје тривијална вредност  $\Delta t=1$ .

Предност DR и FDM у односу на SM је и чињеница, да се не мора приступити састављању матрице крутости система.

А предност FDM у односу на DR је мањи број параметара уноса пре почетка итерације.

Осим тога, наведене методе се могу разликовати и по нумеричкој методи која се користи за решавање система једначина равнотеже – нпр. Њутн – Рафсонова метода (приказана у поглављу о FDM) или метода коначних разлика, која се користи при апроксимацији у DR.

Резултат приказаних метода заправо није „минимална“ површ – као што ће бити показано у предстојећим поглављима, већ њена апроксимација. У пракси су се ова решења показала (бар за сада) довољно „тачним“ у сврху пројектовања мембранских конструкција и мрежа челичних каблова.

### 3.4. Досадашња поређења метода у стручној литератури

Крајем прошлог века су већ постављене и формулисане практично све суштински различите методе формфајндинга, те су започета прва истраживања која су се бавила њиховом класификацијом, као и њиховом ефикасношћу.

Сигнификантни радови из ове области ће бити дати у виду прегледа у овом поглављу.

Луис је у [12] упоређивала резултате добијене методом „променљиве крутости“ (*Transient stiffness method*), како ју је она назвала, која се сврстава у методе матрице крутости, са резултатима добијеним методом динамичке релаксације. Поређење је вршено на врло једноставним типским примерима са малим бројем чворова. Луис је поредила време конвергенције (рачунско време), број итерација и време потребно за окончање једног корака итерације. Резултати су приказани у табели 1 из које се види да најбољу конвергенцију даје метода динамичке релаксације са вискозним пригушењем. Иако метода „променљиве крутости“ (*TSM*) захтева веома мали број итерација да би се дошло до резултата, итеративни кораци трају до 10 пута више у поређењу са динамичком релаксацијом. Са повећањем броја степена слободe, тј. чворова, *TSM* у последњем тестираном примеру, чак ни не конвергира, а најбољу конвергенцију даје метода динамичке релаксације са вискозним пригушењем.

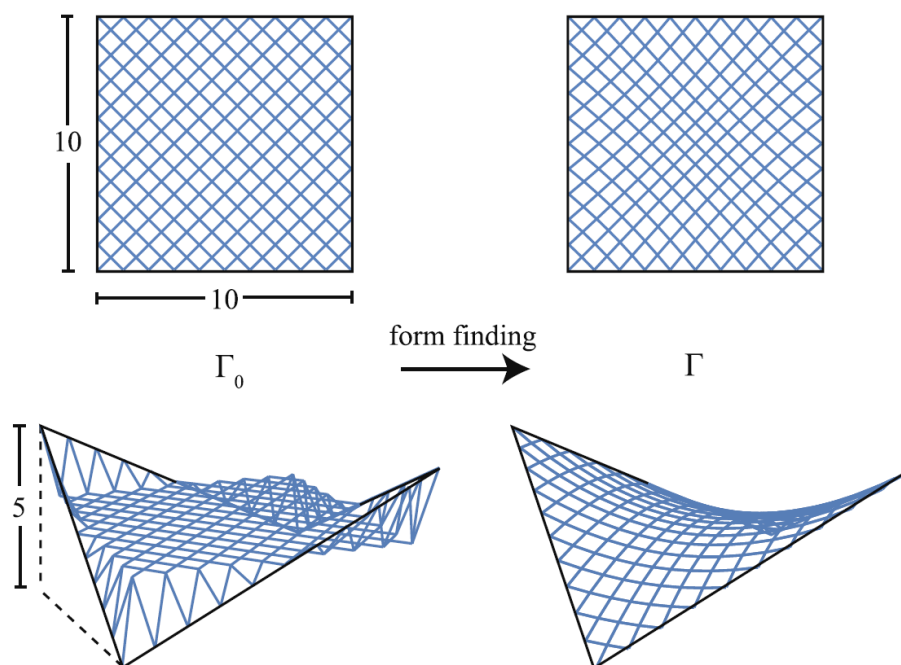
Табела 1 – Поређење брзине конвергенције *TSM* и ДР (извор: [7])

Table 4.1. Efficiency of the numerical algorithms

Example	Transient stiffness algorithm				Dynamic relaxation algorithm					
	No. of degrees of freedom	Total no. of iterations	CPU time per iteration: s	Total CPU time: s	Viscous damping			Kinetic damping		
					Total no. of iterations	CPU time per iteration: s	Total CPU time: s	Total no. of iterations	CPU time per iteration: s	Total CPU time: s
4.3.1. Simple net	3	3	0.043	0.13	34	0.0056	0.19	46	0.0067	0.31
4.3.2. (2 × 1) cable net	6	7	0.067	0.47	35	0.0086	0.30	39	0.016	0.61
4.3.3. (2 × 2) cable net	12	4	0.168	0.66	113	0.0095	1.07	148	0.016	2.32
4.3.4. Hupar net	36	6	1.33	7.98	176	0.021	3.62	263	0.032	8.33
4.3.5. Spatial net	45	5	3.14	15.71	132	0.027	3.50	139	0.055	7.64
4.3.6. Saddle net	189	–	1.60	–	262	0.090	23.70	329	0.14	46.32

Обухватније резултате истраживања на ову тему забележили су Венендаал и Блок у [8]. Они су на два типска примера, конкретно на примеру седласте површи и на примеру Шеркове минималне површи анализирали време неопходно за добијање прелиминарне геометрије уз помоћ великог броја метода. Неке од тих метода су анализирани у склопу ове дисертације, док су неке модификације поменутих метода.

Табела коју су аутори приказали у [8] дата је као *Табела 2* у овом раду. У легенди су обележене скраћенице које су коришћене за појединачне методе.



Слика 40 – типски пример: дискретизована мрежа седласте површи са 543 степена слободе (извор: [26])

Табела 2– Поређење нормализованог времена које је потребно за генерисање геометрије приказане површи са различитим бројем dof (извор: [26])

dof's	75	183	339	543
SM	1.25 ( <b>8</b> )	N/A	N/A	N/A
SM <sub>ULF</sub>	1.44 (13)	4.22 (16)	6.26 (18)	9.93 (17)
MFDF	<b>1.00</b> (14)	<b>1.00</b> (16)	<b>1.00</b> (18)	<b>1.00</b> (17)
GSM	1.52 (16)	2.64 (15)	3.77 (14)	3.73 (13)
URS <sub>HM</sub>	1.38 (10)	3.13 ( <b>8</b> )	4.31 ( <b>9</b> )	5.36 ( <b>8</b> )
DR <sub>vis</sub>	1.22 ( <b>8</b> )	5.40 (34)	15.54 (63)	24.66 (96)
DR <sub>kin</sub>	1.41 (16)	5.19 (32)	10.36 (42)	13.16 (50)
PS <sub>RK4,vis</sub>	1.78 (17)	3.68 (22)	6.74 (28)	11.30 (50)
PS <sub>RK4</sub>	4.10 (39)	6.58 (39)	13.57 (60)	22.73 (67)
PS <sub>BE</sub>	6.31 (37)	11.30 (32)	14.44 (30)	20.33 (30)
t <sub>min</sub> [s]	0.007	0.015	0.026	0.040
ΣL [m]	117.66	176.16	235.11	293.47

Легенда:

SM – метода матрице крутости

SM<sub>ULF</sub> – метода матрице крутости са ажурираном Лагранжовом формулацијом

MFDF – метода густине силе са прилагођавањем силе током итеративног поступка

GSM – метода геометријске матрице крутости

URS<sub>HM</sub> – стратегија ажурирања референтног положаја са хомотопским пресликавањем

DR<sub>vis</sub>-динамичка релаксација са вискозним пригушењем

DR<sub>kin</sub> –динамичка релаксација са кинетичким пригушењем

PS – метода „система честица и опруга“

T<sub>min</sub> – минимално време у секундама

ΣL[m] - најкраћа укупна дужина штапова у метрима

Дата табела приказује време које је потребно за генерисање прелиминарне геометрије дискретизоване седласте површи у виду мреже штапова великим бројем метода и њихових модификација. Интересантан је резултат, да се у овом испитивању најбоље показала модификована метода „Густине силе“ са прилагођавањем силе (MFDF – Multistep Force Density with Force Adjustment). Ова метода је заправо унапређена метода „густине силе“ и

развили су је Маурин и Мотро 1997. Детаљно је приказана у [15-17]. Разлика у односу на првобитну методу „густине силе“ је што се итерације започињу са једном вредношћу густине силе, а затим се силе у сваком итеративном кораку мењају.

Занимљиви су и резултати методе динамичке релаксације са вискозним и кинетичким пригушењем. Док се при малом броју чворова време конвергенције које два различита пригушења дају не разликује битно, са све већим бројем степени слободe јасно је да је динамичка релаксација у којој је коришћено кинетичко пригушење, далеко ефикаснија од DR са вискозним пригушењем. Метода динамичке релаксације са вискозним пригушењем даје у овом случају веома лоше резултате са великим бројем итерација и веома дугим минималним временом за генерисање геометрије у поређењу са другим наведеним методама.

Оно што такође скреће пажњу јесте, да је у *Табели 1* из [12] ДР са кинетичким пригушењем приказана као мање ефицијентна метода (број итерација, укупно време калкулације) у односу на DR са вискозним пригушењем – за разлику од поређења у *табели 2* које су дали Венендаал и Блок у [8]. Узроци супротних резултата добијених у ова два истраживања су вредни додатног испитивања.

Занимљиво је такође, да се метода „честица и опруга“ (PS – Particle Spring System), као друга псеудодинамичка метода, такође није показала као веома ефикасна у погледу времена конвергенције и броја итерација. Ова метода конкурише другим методама само уз додавање вискозног пригушења (резултат  $PS_{RK4,vis}$ ).

Исто као у примеру који је приказала Луис (види *Табела 1*) метода матрице крутости (SM – Stiffness matrix method) ни у [8] није конвергирала за комплекснију мрежу од више од 183 степена слободe. Венендаал и Блок су методу модификовали да би постигли конвергенцију.

Аутори закључују да су методе које користе геометријску матрицу крутости (GSM), у које спадају FDM, MFDF и др. ефикасније од оних које користе еластичну матрицу крутости (SM). За конкретан пример који су користили у поређењу (налажења мреже најкраћих дужина седласте површи) закључили су да је најефикаснија Маурин и Мотроова MFDF, која почиње од геометрије генерисане уз помоћ обичне FDM у првом итеративном кораку.

Разни прикази, класификације и даље поређење метода форфмајндинга могу се наћи код Тана [28], Луис [12], Хабера и Абела [29] и других.



## 4. Анализа генерисаних геометрија на типским примерима

### 4.1. Избор типских примера за анализу

#### 4.1.1. Дефинисање облика, степена комплексности, броја чворова, типа мреже, граничних услова

За испитивање оптималности примене анализираних метода у овом раду коришћени су типски примери најкаректеристичнијих и најчешћих мембранских конструкција. Као што је приказано најчешћи пример за тестирање метода јесте седласта површ (заправо њена дискретизација) изнад квадратне основе. Овај пример изабран је у склопу ове дисертације као први, због своје широке примене у пројектовању мембранских конструкција.

Као други пример, изабрана је веома позната минимална површ до које је нумерички дошао Паул Конкус (1967). Гранични услов ове минималне површи је крива, тј. лук и три дужи које се налазе у равни. Мембранске конструкције са луковима као граничним условом су такође веома честе у грађевинској пракси, те је овај пример такође изабран јер је близак често извођеним конструкцијама.

За трећи пример изабрана је модификација Конкусове површи, а то је опет седласта површ, али настала тако, што је гранични услов који је наспрам лука из претходног примера, такође дефинисан као лук.

Четврти и последњи пример чини, типолошки (а и математички) другачија површ, која се такође веома често среће у грађевинској пракси, а то је пример шаторасте мембране, дакле мембране са централним пилоном (сингуларни гранични услов). Овај пример је аутор изабрала, јер је суштински различит од свих претходно наведених примера, што ће показати и резултати.

Сви примери су генерисани над правоугаоном мрежом у равни димензија  $2 \times 2$  м, изнад домена  $U = (-1,1) \times (-1,1)$ . Мрежа има  $n = m = 21$  чворова, односно 20 сегмената.

#### 4.1.2. Коришћене методе

Као што је показано у првом делу рада геометрија мембранских конструкција се често описује и моделује уз помоћ минималних површи. Уз помоћ методе централних коначних разлика, дат је нелинеарни итеративни поступак за изналажење минималних површи над фиксним граничним условима. Овај поступак програмиран је у Mathematica<sup>®</sup>. Резултати добијени овом методом упоређени су са резултатима који су добијени уз помоћ софтверског пакета EASY<sup>®</sup>, који је аутору уступљен на ограничено коришћење од стране Technet GmbH из Штутгарта/Берлина.

За пример је изабрана правоугаона еквидистантна мрежа. Дуж  $x$ - осе су распоређени  $n + 1$  чворови, дуж  $y$ -осе чворови  $m + 1$ , са кораком  $h$  и  $k$ , гранични услови су подељени тачкама  $x_i = a + ih, y_j = c + jk$ , а унутрашњи чворови мреже  $P_{ij} = P_{ij}(x_i, y_j)$  ( $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$ ).

#### 4.1.3. Директно нелинеарно итеративно решење проблема за изналажење геометрије минималне површи (сапунске мембране)

У сврху дисертације, користи се експлицитна формулација проблема са две непознате, као квази-линеарна парцијална дифренцијална једначина другог реда са граничним условима, изведена из Ојлер-Лангранжовог (Euler- Lagrange) услова минимизације површи. За дати домен  $U \subset \mathbb{R}^2$  са крутом ивицом  $B = \partial U$  тражи се функција  $z = f(x, y): U \rightarrow \mathbb{R}$ , која задовољава следећу једначину:

$$(1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} = 0.$$

Израз 73

Користи се стандардна нотација за парцијалне изводе ( $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  итд.).

Дискретизација се врши уз помоћ централних коначних разлика, што је честа метода апроксимације. Апроксимација парцијалних извода у унутрашњим тачкама мреже гласи:

$$\begin{aligned}
 f_x(P_{ij}) &\approx \frac{1}{2h}(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \\
 f_y(P_{ij}) &\approx \frac{1}{2k}(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) \\
 f_{xx}(P_{ij}) &\approx \frac{1}{h^2}(f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) \\
 f_{yy}(P_{ij}) &\approx \frac{1}{k^2}(f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}) \\
 f_{xy}(P_{ij}) &\approx \frac{1}{4hk}(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1})
 \end{aligned}$$

*Израз 74а-д*

где индекси представљају вредности функције  $f$  у чворовима мреже  $f_{i,j} = f(P_{ij}) = f(x_i, y_j)$ . Грешка апроксимације је другог реда у односу на  $h, k$ . Ово води ка систему не линеарних, већ кубних једначина са  $(n - 1) \times (m - 1)$  непознатим вредностима функције  $f$  у тачкама унутрашњих чворова мреже:

$$\begin{aligned}
 &(4h^2 + (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})^2)(f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}) + \\
 &+ (4k^2 + (f_{i,j+1} - f_{i,j-1})^2)(f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) - \\
 &- \frac{1}{2}(f_{i+1,j} - f_{i-1,j})(f_{i,j+1} - f_{i,j-1})(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}) = 0.
 \end{aligned}$$

*Израз 75*

Обзиром на оригиналну дискретизацију, овај нелинеарни систем трансформише се лако у итеративни поступак:

$$\begin{aligned}
 f_{i,j} &= \frac{1}{2(4h^2 + (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})^2) + 2(4k^2 + (f_{i,j+1} - f_{i,j-1})^2)} \times \\
 &\times [(4h^2 + (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})^2)(f_{i,j+1} + f_{i,j-1}) + (4k^2 + (f_{i,j+1} - f_{i,j-1})^2)(f_{i+1,j} + f_{i-1,j}) - \\
 &- \frac{1}{2}(f_{i+1,j} - f_{i-1,j})(f_{i,j+1} - f_{i,j-1})(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1})]
 \end{aligned}$$

*Израз 76*

где је, у циљу проналажења вредности (положаја) једног чвора мреже, узето у обзир осам околних тачака (четири хоризонтално и вертикално повезано, али и четири дијагоналне тачке). Иако је коришћена метода у духу методе коришћене у [32] а и на другим местима (Њутнова итерација са параметрима релаксације) ова метода је нелинеарна и не-Њутнова.

Као почетну вредност  $f^{(0)}$  функције  $f$  у итеративном процесу узимамо решење једноставније, Лапласове једначине:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

*Израз 77*

са задатим граничним условом. Уз коришћење истих формула централних разлика, ова се једначина линеаризује на једноставан линеарни систем у стандардној итеративној форми

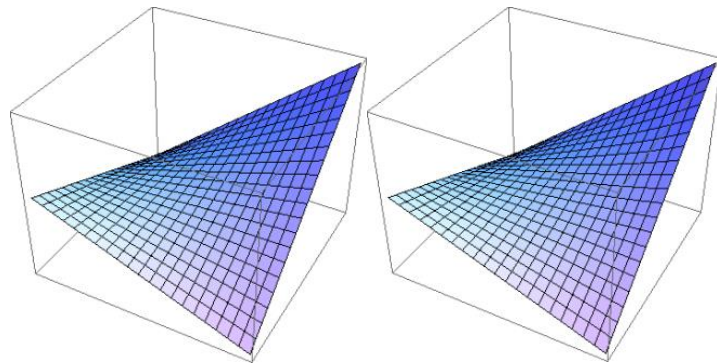
$$f_{ij} = \frac{1}{4}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}).$$

*Израз 78*

У израчунатим примерима користе се линеарни гранични услови (ГУ у даљем тексту). Вредност функције  $f(x, y)$  је висина тачке у простору изнад мреже  $(x, y) \in B$ , ГУ су представљени као просторни четвороугаоник  $Q = \{(x, y, f(x, y)): (x, y) \in B\}$ .

#### 4.1.4. Резултати формфајдинга

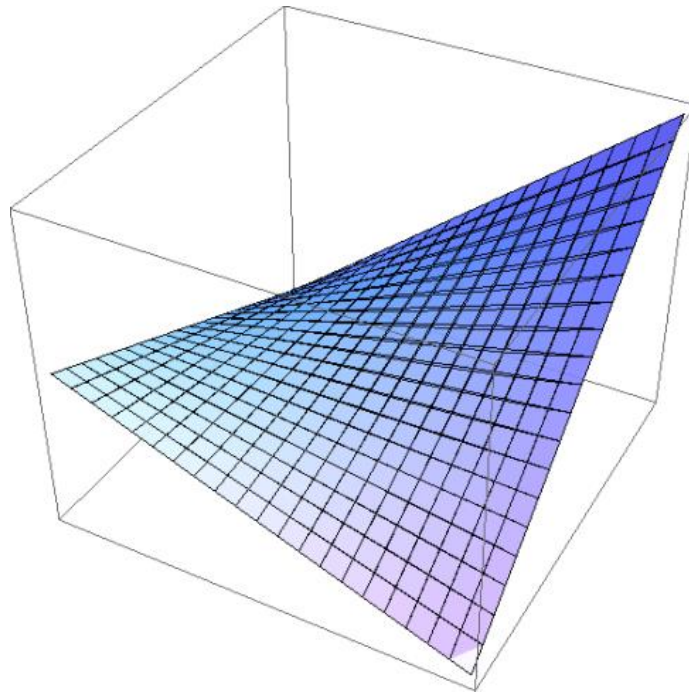
Први пример за тестирање метода, јесте асиметрична мембрана, тј. њена дискретизација у виду правоугаоне мреже изнад домена  $U = (-1,1) \times (-1,1)$  са различитим висинама две супротне фиксне тачке  $z = 8$  и  $z = 16$  и  $z = 0$  у преостала два темена четвороугла, мрежа је правоугаона са  $n = m = 21$  чворова, односно 20 сегмената. Процес који је претходно описан програмиран је у програмском пакету Mathematica<sup>®</sup>, у сарадњи са проф. др Александром Липковски, са Математичког факултета у Београду. Итеративни процес успостављен на начин описан у ПРИЛОГУ 3 конвергира решењу једначине минималне површи. Почетна апроксимација  $f^{(0)}$  (решење Лапласове једначине) добијено је у 761 итерација са задатом тачношћу од  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Као што је очекивано, добија се хиперболично- параболоидна мембрана.



Слика 41 – почетна апроксимација  $f^{(0)}$  (лево)  
и минимална површ  $f$  (десно)  
(извор: [аутор])

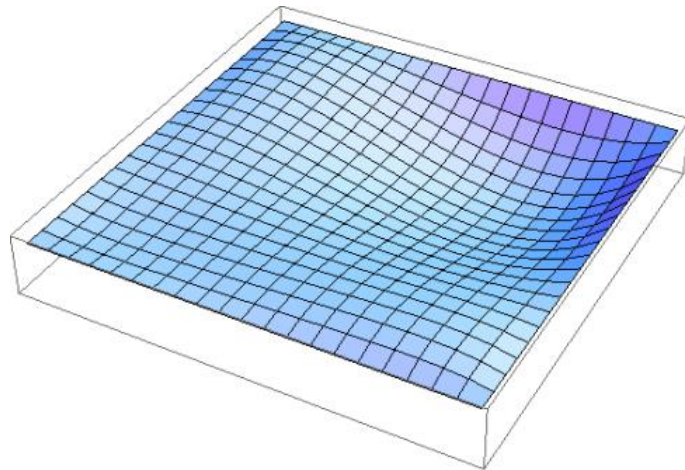
На слици 41 приказана је минимална површ  $f$  добијена итеративним процесом од почетне апроксимације  $f^{(0)}$ , тј. решења Лапласове једначине у 427 итерација са тачношћу  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Максимална разлика у добијеним геометријама између  $f^{(0)}$  и  $f$  за задате граничне услове изнад датог домена је  $\max_U |f - f^{(0)}| = 0.2390$ . Графичка презентација разлике приказана је на слици 43. Решење  $f$  може се посматрати као егзактна минимална површ за задате граничне услове. Та геометрији одговара геометрији сапунске мембране, „идеалној“ конфигурацији у којој је површински напон константан у свим правцима, тј. изотропан.

Коришћењем специјализованог комерцијалног софтвера EASY<sup>®</sup>, произведеног од стране немачке компаније Technet GmbH, који је специјализован за формфајндинг, статичку анализу и кројење мембранских конструкција, методом FDM добија се дискретизована површ  $g$  под истим граничним условима и са истом мрежом. Ова површ је практично идентична нашој почетној апроксимацији у итеративном поступку  $f^{(0)}$  (види слику 41 лево) која је добијена решавањем Лапласове (а не Ојлер-Лагранжове) једначине. Максимална разлика између две добијене површи изнад задатог домена износи  $\max_U |g - f^{(0)}| = 0.00789$ .



Слика 42 – егзактна минимална површ  $f$  и површ  $g$  генерисана методом густине силе са EASY<sup>®</sup> (извор: [аутор])

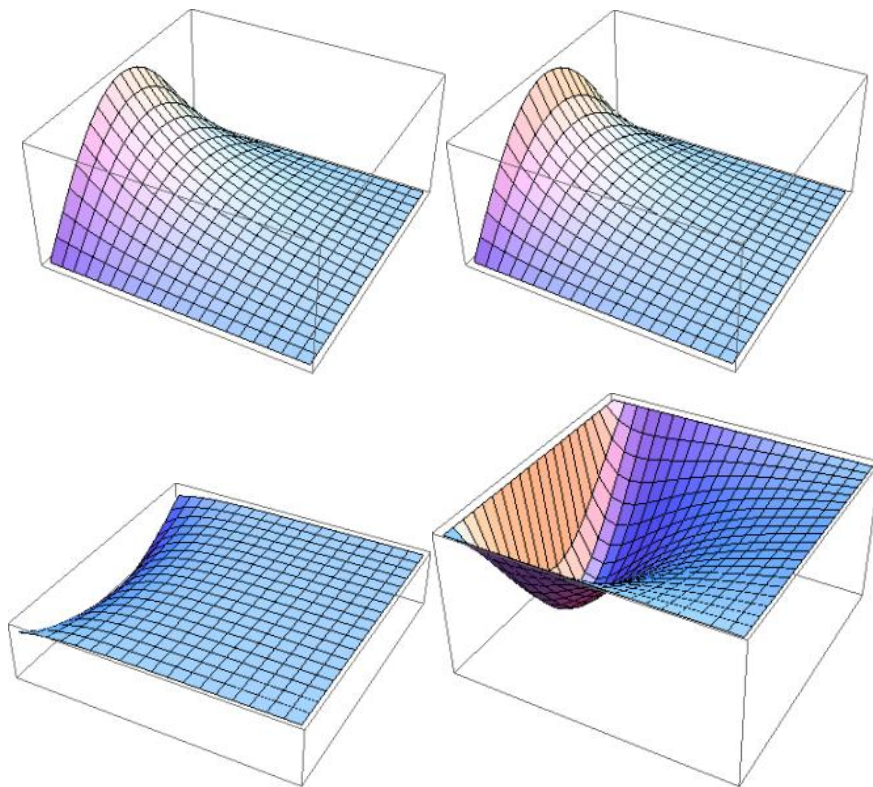
Слика 42 приказује егзактну минималну површ  $f$  и површ која је генерисана методом густине силе применом софтверског пакета EASY<sup>®</sup> на истом графику. Као што се може запазити, највеће разлике између минималне површи и другог решења се налазе у близини фиксне тачке која има највећу висину, дакле у региону око високог пилона – посматрано у реалној конструкцији. То је уједно и регион највеће закривљености површи и у њему ће се формирати највеће затезне силе и напони у реалној мембрани.



Слика 43 –Разлика између површи  $f - g$ .  
(извор: [аутор])

Слика 43 показује разлику између минималне површи  $f$  добијене наведеном методом за решавање Ојлер- Лагранжове једначине и површи  $g$ , која је увећана фактором 10 ради јаснијег приказа највећег одступања два решења. Максимална разлика између два решења износи  $\max_U |f - g| = 0.23942$ . Ово је негде око 1.50% укупне висине.

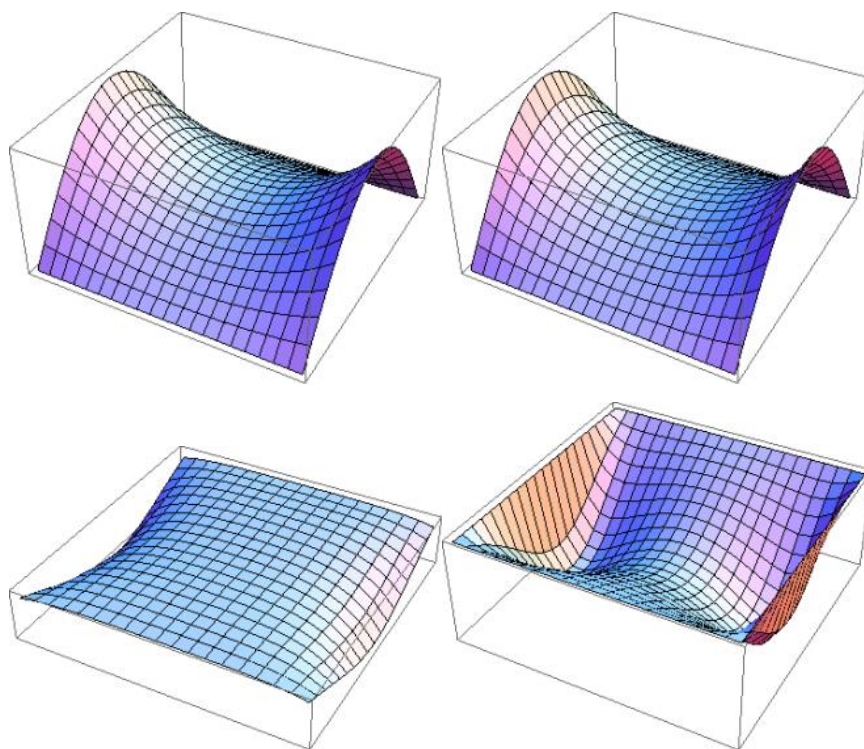
Други пример је Конкусова минимална површ из [32]. Сви гранични услови су једнаки нули, осим једног који се састоји од синусоидалног лука. Основна апроксимација  $f^{(0)}$  (решење Лапласове једначине) се добија после 670 итерација са тачношћу од  $\varepsilon = 10^{-5}$ , а минимална површ  $f$  за 620 итерација са истом тачношћу. Максимална разлика између  $f^{(0)}$  и  $f$  на датом домену је  $\max_U |f - f^{(0)}| = 0.1990$ . Графички приказ  $f^{(0)}$ ,  $f$ , средње кривине  $f^{(0)}$  (која у овом случају није једнака нули, пошто ово није минимална површ) и разлика између  $f^{(0)}$  и  $f$  скалирана са фактором 10.0 показане су на Слици 44.



Слика 44 - Пример из [32] (са лева на десно):  
 $f^{(0)}$ ,  $f$ , средња кривина  $f^{(0)}$  и  $f - f^{(0)}$   
 (извор: [аутор])

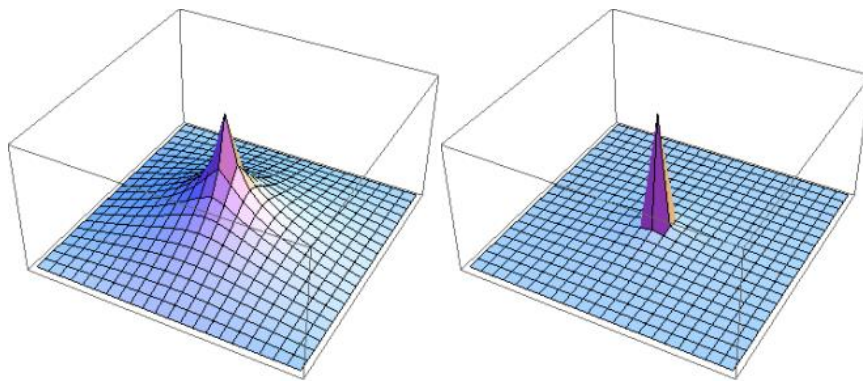
У трећем примеру се гранични услов мења у смислу да имамо два наспрамна синусоидална лука који формирају седласту површину. Почетна апроксимација  $f^{(0)}$  (такође решење Лапласове једначине) добија се после 726 итерација са тачношћу од  $\varepsilon = 10^{-5}$ , а егзактна минимална површ  $f$  после 761 итерација са истом тачношћу. Максимална разлика између почетне апроксимације површи  $f^{(0)}$  и  $f$  над задатима доменом износи  $\max_U |f - f^{(0)}| = 0.2011$ . Одговарајући графички приказ дат је у Слици 45.





Слика 45- Седласта структура са синусоидалним луковима као граничним условима (с лева на десно):  $f^{(0)}$ ,  $f$ , средња кривина  $f^{(0)}$  и  $f - f^{(0)}$ .  
(извор: [аутор])

У последњем примеру испитује се, у грађевинској пракси чест конусни шатор, са централном фиксном тачком у средини мембране. У овом посебном случају, када је гранични услов затворена линија, а централна тачка фиксирана (сингуларни гранични услов), наш приступ није примењив, а решавање Лапласове једначине даје разумна решења после 570 итерација, са тачношћу  $\varepsilon = 10^{-5}$ , што је приказано на *Слици 46* лево. Решење минималне површи, после 719 итерација, исте тачности, приказано на *Слици 46* десно, постаје равна површ са дисконтинуитетом у фиксној тачки.



Слика 46- Случај конусног шатора -  
сингуларни гранични услов  
(извор: [аутор])

Из последњег примера се види, да за последњи испитивани пример, геометрија минималне површи не даје разумно решење, примењиво за мембранску конструкцију. Као што је познато, овај проблем се у грађевинској пракси превазилази тако, што се уместо сингуларне тачке (пилоне у средини конструкције) задаје гранична крива на врху шатора, попут модела сапунске мембране приказане на *Слици 47*.

## **5. Поређење софтверских пакета за формфајдинг са аспекта уграђених метода и њихове ефикасности, компатибилности, приступачности и економичности**

Седамдесетих година прошлог века после разраде успешно примењених метода формфајдинг-а (наведених у претходним одељцима), с обзиром да је решавање великих система немогуће без помоћи рачунара, неколико универзитета у сарадњи са софтверским фирмама, развили су софтвере којим је могућ формфајдинг произвољних облика конструкције са великим бројем чворова.

До скоријег времена, софтверски пакети коришћени за решавање овог проблема, били су веома скупи – готово недостижни за услове мале до средње пројектантске куће или извођачке фирме.

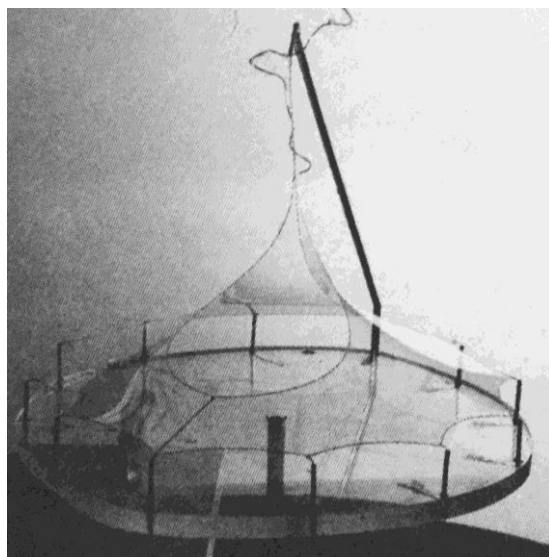
И у данашње време је софтвер који омогућава професионалан, егзактан и свеобухватан приступ формфајдинг-у и статичкој анализи ових конструкција за услове наше привреде веома скуп. На пример, два најраспрострањенија софтверска пакета европске производње који су специјализовани за ову врсту конструкција, примењиви и за пнеуматске конструкције су: GSuite (или OASYS), развијен у познатој инжењерској кући OveArup и EASY, развијен у сарадњи са Универзитетом у Штутгарту, Универзитетом у Берлину од стране Technet GmbH, држе и даље цену близу 20.000 евра.

У међувремену се повећао и број мањих програма, који су веома корисни у почетној фази пројектовања и идејног решавања конструкције или за само изучавање и упознавање геометрија које задовољавају било Лапласову, било Ојлер-Лагранжову диференцијалну једначину. Ови програми су често врло повољни, а неки од њих су и бесплатно доступни преко интернета. То су на пример: FORMFINDER (омогућава извоз добијених геометрија директно у EASY), затим MEMBRANE (некада SURFACE), SURFACE EVOLVER (за генерисање минималних површи), и напослетку плаг-ин за софтверски пакет RHINO – RHINOMEMBRANE.

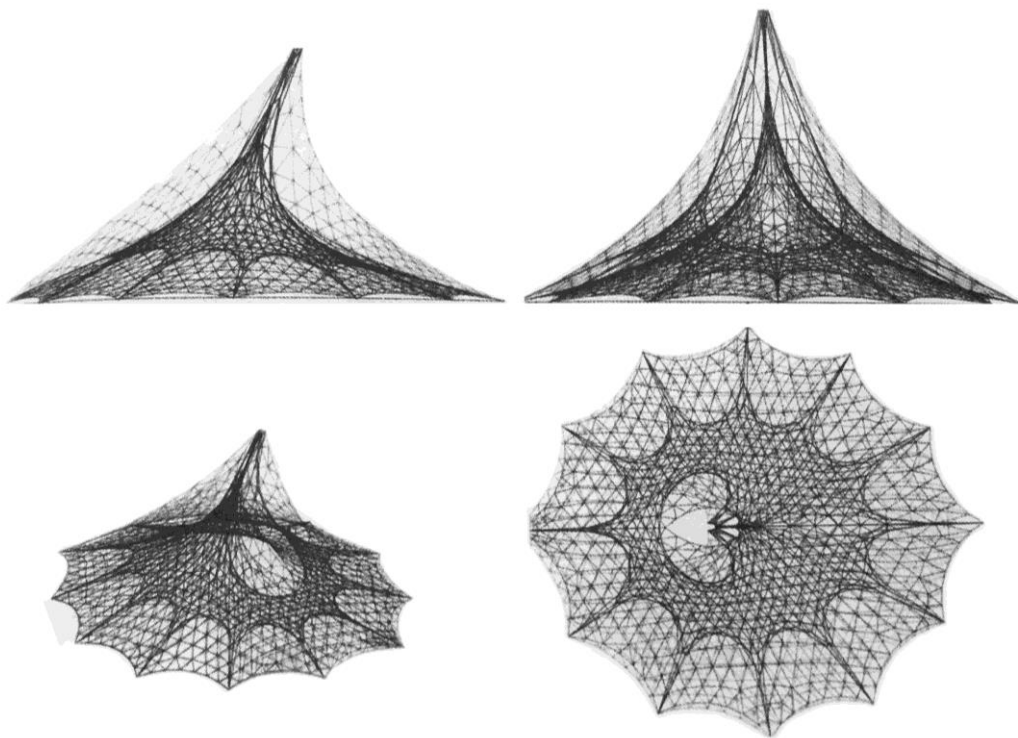
Иако су наведени мањи програми и плаг-инови веома корисни у почетној фази пројектовања, као и за стицање осећаја за геометрију тензилне конструкције за архитекте, мора се подвући да они не представљају замену за горе наведене

професионалне и свеобухватне софтверске пакете. Најчешћа разлика између ове две категорије је да горе наведени мањи програми не поседују могућност статичке анализе мембранских конструкција, затим кројења мембранског дела конструкције, као и да врло често постоји ограничење у типологији геометрије или у броју чворова конструкције. Такође се разликују и методе коришћене за добијање почетне геометрије и статичку анализу у одређеном софтверу: док се EASY и FORMFINDER базирају на FDM, GSASuite (OASYS) примењује динамичку релаксацију када је у питању формфајндинг мембранских површи а могућа је опција да се формфајндинг изврши и уз помоћ FDM ако је потребно моделовати мрежу каблова, RHINOMEMBRANE користи стратегију ажурирања референтног положаја (URS). Неке методе уз помоћ којих се врши формфајндинг повлаче и својеврсне рестрикције у геометрији мреже, које се морају поштовати. Генерисана геометрија може такође веома вариирати, не само у зависности од задатих параметара који су неопходни за формфајндинг, већ и од саме методе која се користи за калкулацију (види *Слике47-50*) како је показао и Ралф Хелер у [30], а и аутор дисертације у следећем поглављу.

На *Слици 47* приказан је експериментално добијен модел – сапунска мембрана за кров зграде Института за лаке конструкције у Штутгарту (IL, данас ILEK) , коју је пројектовао Фрај Ото заједно са своји тимом.



*Слика 47.* Сапунска мембрана зграде Института за лаке конструкције (IL) (извор: [27])

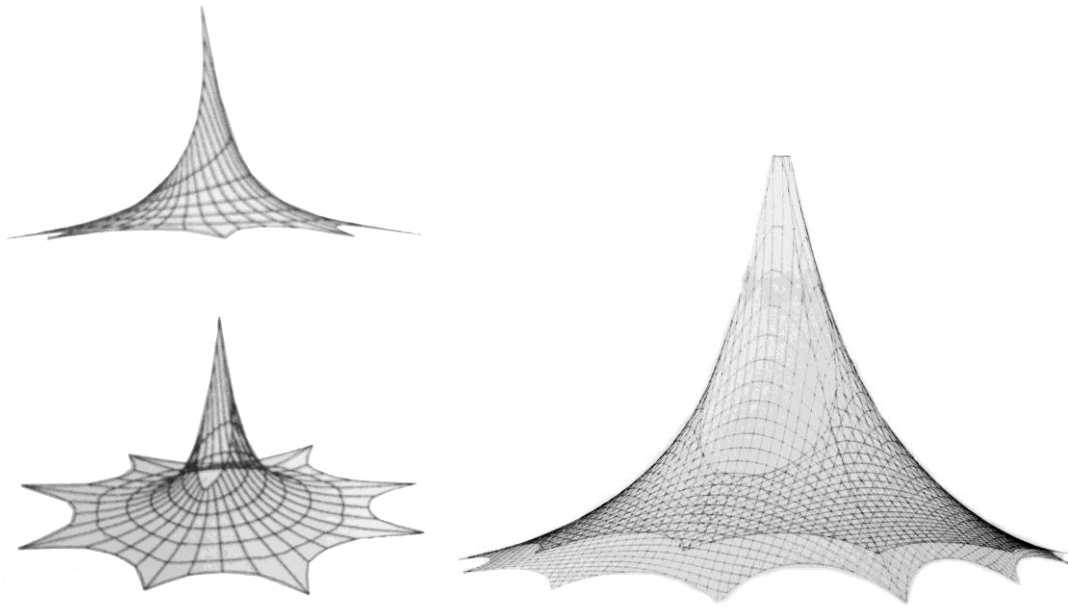


Слика 48. Разлике у геометријама у процесу формфајндинга зграде  
Института за лаке конструкције (IL)  
(извор: [27])

На следећој приказаној *слици 48* Хелер у [30] даје визуелно поређење софтверски генерисане геометрије за зграду Института за лаке конструкције (IL) у Штутгарту, који је пројектовао Фрај Ото. Све приказане геометрије на овој слици генерисане уз помоћ FDM са три различита типа мреже (троугаона, четвороугаона, итд.) и параметра густине силе. На први поглед се види да се резултати формфајндинга одиста разликују.

На *слици 49б* је приказана геометрија истог крова, која је генерисана уз помоћ DR. И у овом случају видљива је јасна разлика између претходно приказаних геометрија.

Напокон, на *слици 49а* приказана је и геометрија која је добијена уз помоћ оптимизације коначним елементима и методе матрице крутости. У поређењу ова три случаја формфајндинга са 3 различите методе – разлика се уочава голим оком. Финим подешавањем параметара, тј. величине коначних елемената, евентуално би се могло доћи и до приближнијих геометрија уз улагање додатног напора.



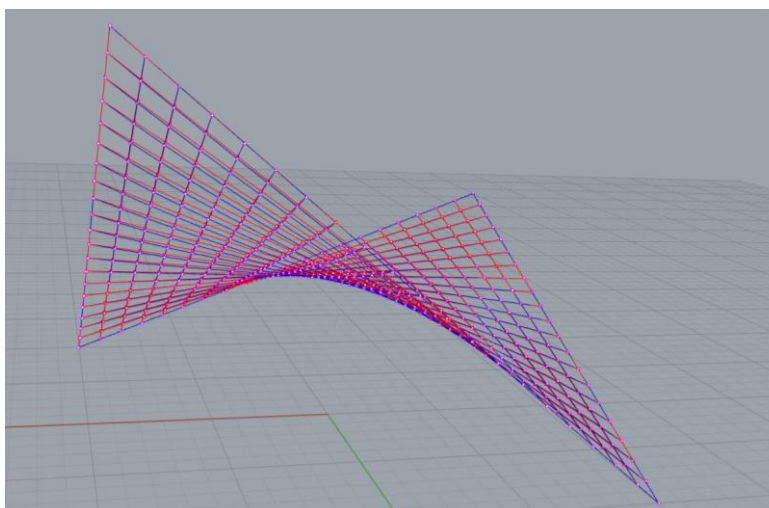
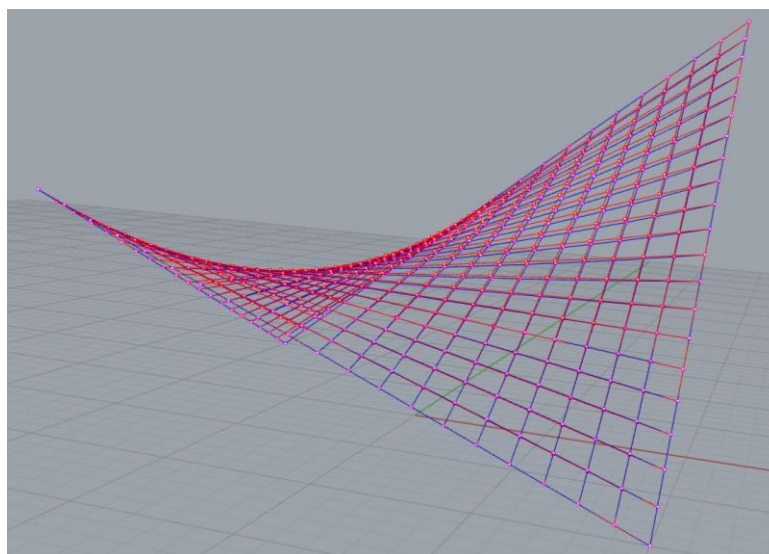
Слика 49а и б. Геометрија добијена оптимизацијом FEM и DR  
зграде Института за лаке конструкције (ИЛ)  
(извор: [27])

Преглед и поређење најчешће коришћеног софтвера са применом,  
могућностима и комерцијалном ценом, изведено у овом раду, приказано је у  
Табели 3 у поглављу 5.2.

## 5.1 Поређење софтверских пакета за формфајдинг са аспекта генерисане геометрије

У склопу овог рада вршено је и поређење добијене геометрије софтверским пакетом EASY<sup>®</sup> (који користи FDM) и Rhinoceros<sup>®</sup> уз помоћ Rhinomembrane додатка који се базира на URS.

Резултати добијене површи (односно мреже) су такође уочљиви голим оком и приказани су на *Слици 50 а и б*. Црвеном бојом приказан је резултат добијен у EASY<sup>®</sup>-ју а плавим резултат добијен у Rhinoceros<sup>®</sup>-у. Разлика у добијеној геометрији је најуочљивија у чворовима на које гранични услов има мање утицаја – а то су чворови у средини конструкције – површ добијена у EASY<sup>®</sup> има мању закривљеност од површи добијене у Rhinoceros<sup>®</sup>-у. Максимална разлика у правцу z-осе, дакле висине конструкције износи до 19.7 cm у средини поља на распону од 20 m, тј. око 1%. Разлика између генерисане геометрије у EASY<sup>®</sup>-ју и Rhinoceros<sup>®</sup>-у мања је од диференције у поређењу са егзактном минималном површи која је добијена у претходном поглављу (програмирано у Mathematica<sup>®</sup>) и која износи 1.5% за задату геометрију. Узимајући у обзир угибе конструкције приликом нагомилавања кише или снега ово би могла бити незанемарљива разлика при великим распонима конструкције. Почетна апроксимација геометрије коју генерише Rhinoceros<sup>®</sup> применом URS базира се на НУРБС-у (Non-linear Rational B-Spline).



Слика 50а и б. Геометрија асиметричне седласте површи добијена применом FDM и URS  
(извор: [аутор])

Последњи софтверски пакет који је аутор анализирао у склопу овог рада је GSA Suite британске фирме OASYS. GSA Suite користи динамичку релаксацију за формфајндинг без спољног оптерећења мембранских површи.

Последњи пример који је упоређен у склопу овог рада јесте мембрана коју је аутор статички анализирао у склопу магистарског рада, као део крова над пијациом „Скадарлија“ у Београду.

У питању је симетрична седласта површ која је разапета над ромбом димензија: 6.6 x 3.8 m. На *Сликама 51а-д* приказане су три површи (односно њихове дискретизације у виду мреже), добијене различитим методама у различитим софтверским пакетима. Црвеном бојом приказана је првобитно

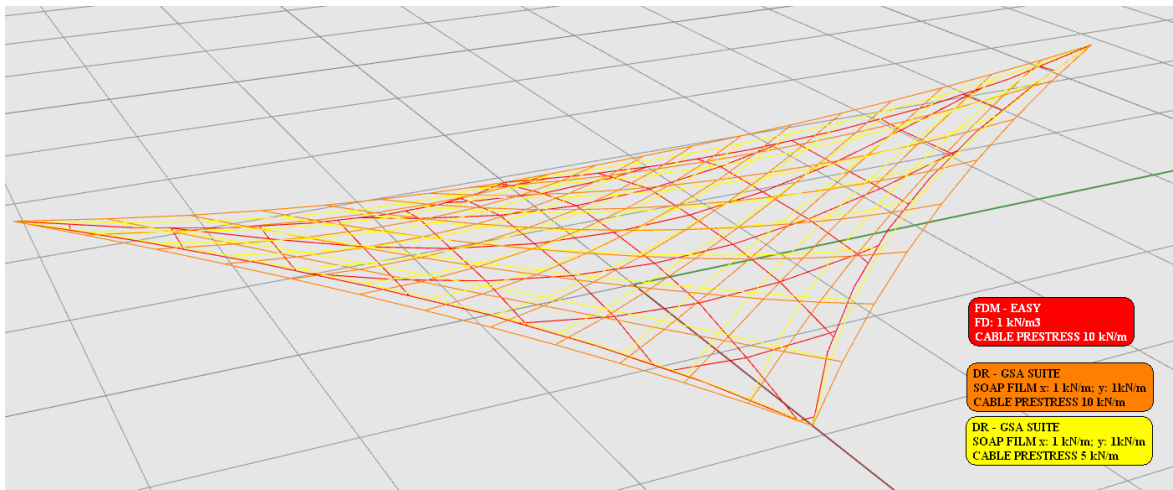
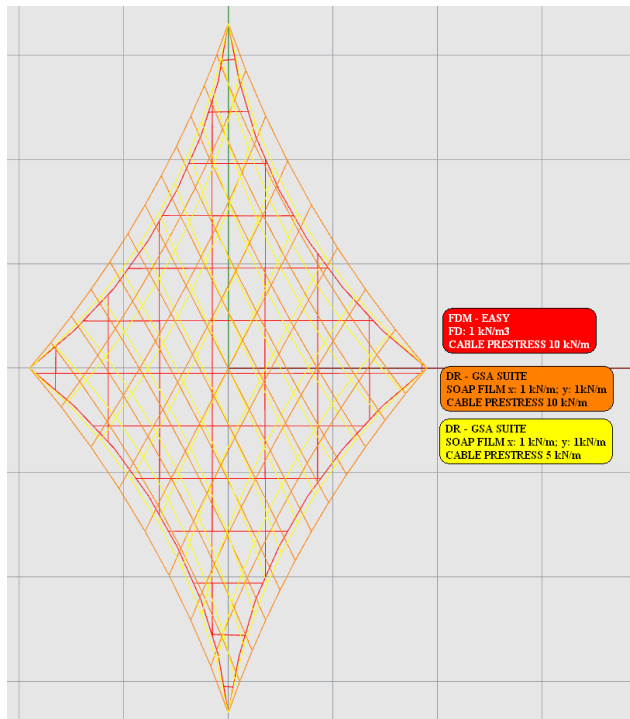


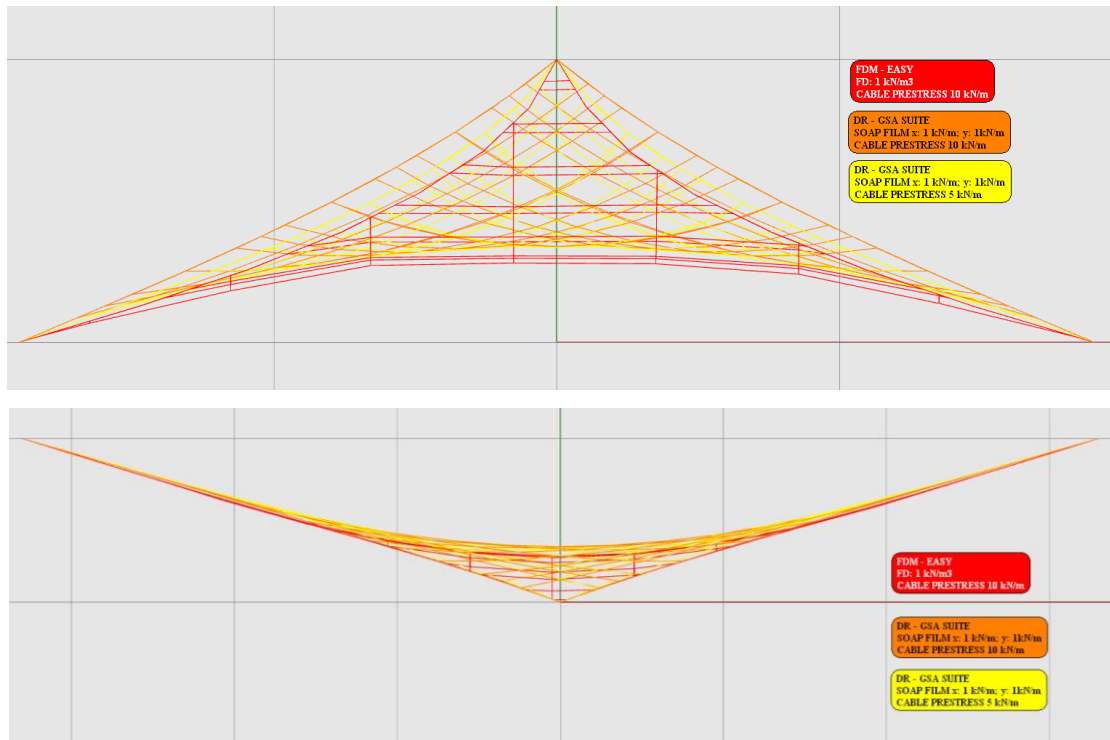
моделирана површ уз помоћ FDM у EASY-ју. Задати параметри приказани су одговарајућом бојом на *Слици 51а-д*. Наранџастом и жутом бојом приказане су површи генерисане у GSA Suite, са параметрима претходног затезања приказаним такође на слици одговарајућом бојом.

Мрежа четвороугаоних елемената приказана на сликама модела добијеног формфајндингом у GSA Suite (жуто и наранџасто) не може имати комбинацију троугаоних и четвороугаоних елемената на ободу конструкције, попут модела добијеног у EASY-ју (црвено). Степен чвора на ободу мреже мора бити 2 (у угаоном случају) или 3 (у осталим случајевима), али не 4 и више. То значи да се у угаоном чвору могу сустицати само два штапа, а у осталим рубним чворовима само 3. Разлика у топологији мреже у ова два програма види се и на *Сликама 52а и б*. Ограничење у топологији мреже у GSA Suite настаје зато што се за дискретизацију проблема користи метода коначних разлика. У овој методи се полазни систем парцијалних диференцијалних једначина који описује проблем дискретизује на равномерној правоугаоној мрежи, при чему се парцијални изводи апроксимирају коначним разликама дуж две фамилије ортогоналних координатних кривих. Тиме се добија једноставнији линеарни систем и нестaje потреба за матрицом инциденције (Kanten-Knoten Matrix). С друге стране, у EASY-ју се за дискретизацију користи метода коначних елемената у којој је дозвољена сложенија топологија мреже са већим бројем штапова који се могу сустицати у једном чвору, али је зато линеарни систем који се добија компликованији и захтева коришћење матрице инциденције.

Из приложеног се види да се најприближнија геометрија оној генерисаној у EASY-ју постиже са параметрима претходног затезања од 1 kN/m у правцу x и y-осе и претходног затезања од 5 kN/m у ивичним кабловима – приказана жутом бојом. Исто тако се на *Слици 51а-д* види да површ генерисана уз помоћ FDM има већу закривљеност од било које површи генерисане уз помоћ DR.

Добијене геометрије се доста разликују у средишњем делу конструкције, а и у облику ободних кривих. Разлика у висини конструкције са истим фиксним тачкама износи до 1.6% висине конструкције.

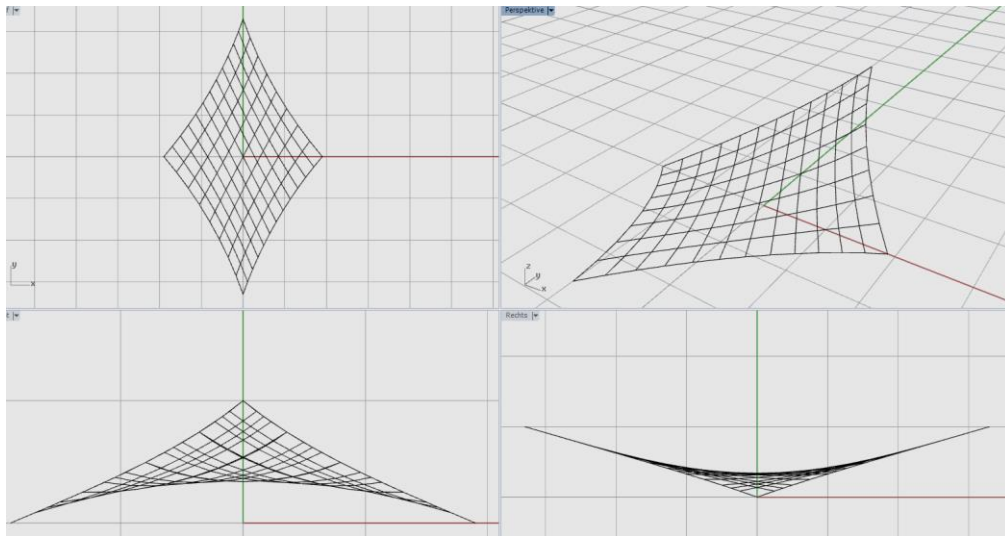




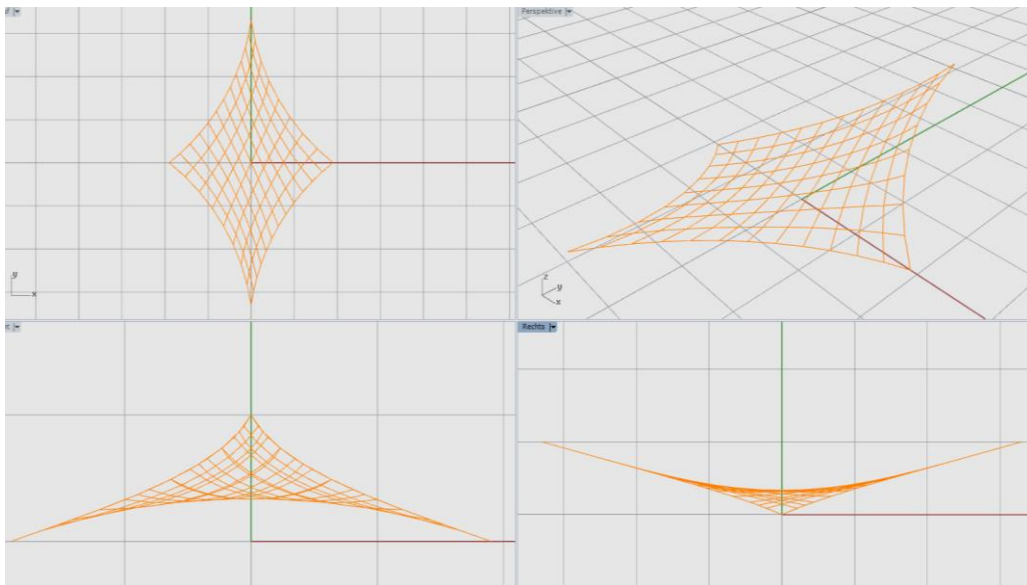
Слика 51а,б,в,г. Поређење геометрије симетричне седласте површи добијена применом FDM у EASY и DR у GSA SUITE (извор: [аутор])

Варирање параметара дводимензионалног претходног затезања (2D soap-film formfinding properties) у GSA Suite, доводи до варијација у почетној геометрији приказаној на *Сликама 52а-в*. Максималан износ дводимензионалног претходног затезања за који се постиже конвергенција у датом примеру, износи 3 kN/m у правцу x и y-осе.

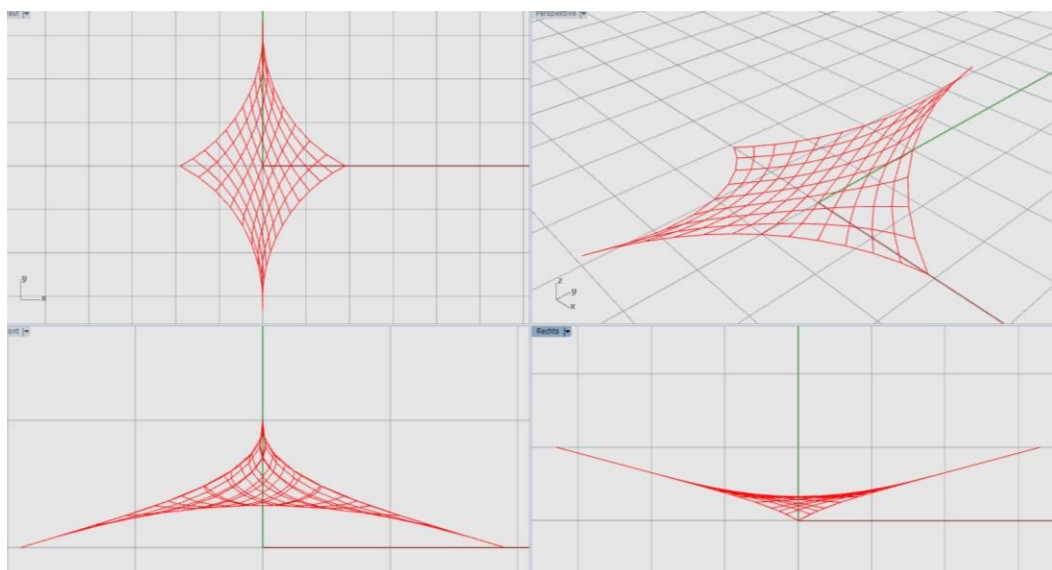
Из приказаних примера се да уочити да само поље претходног затезања од 1 и 2 kN/m даје употребљиве резултате, а већ поље од 3 kN/m даје грађевински неупотребљиве резултате.



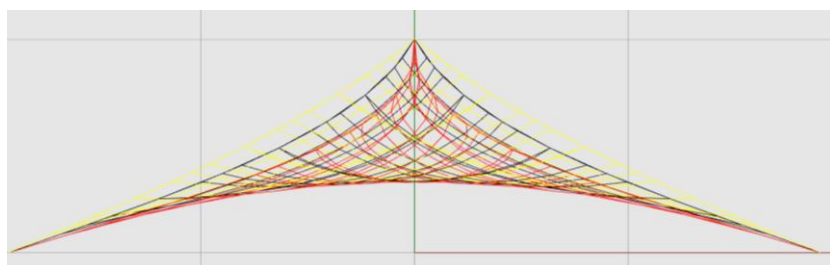
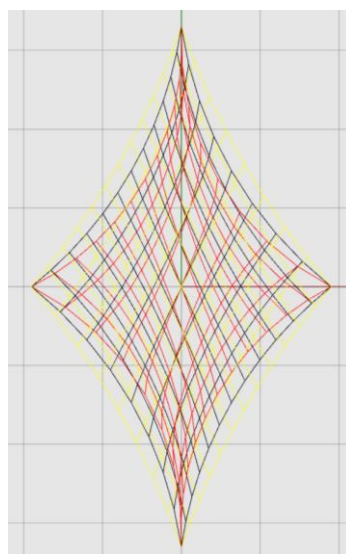
Слика 51а - Геометрија добијена са претходним затезањем од 1 kN/m у оба главна правца (извор: [аутор])



Слика 51б - Геометрија добијена DR са претходним затезањем од 2 kN/m у оба главна правца (извор: [аутор])



Слика 51в - Геометрија добијена у DR са претходним затезањем од 3 kN/m у оба главна правца (извор: [аутор])



Слика 51г - Упоредни приказ геометрије са претходним затезањемод 1 (жуто), 2 (црно) и 3 kN/m (црвено) у оба главна правца (извор: [аутор])

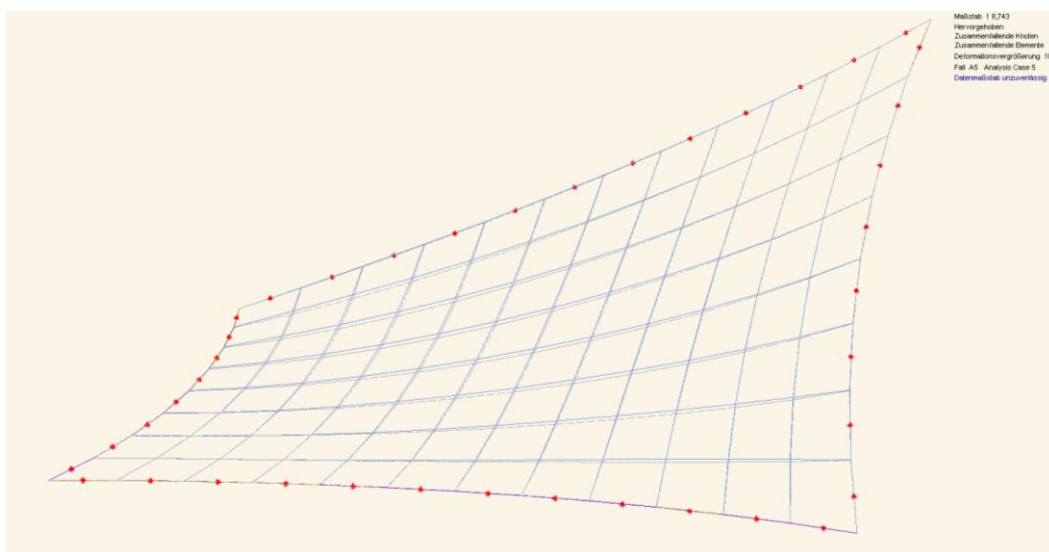
## 5.2. Поређење резултата добијених под утицајем спољног оптерећења

Пошто само два софтверска пакета (EASY и GSA Suite) од анализираних имају могућност и статичке анализе генерисане конструкције, биће упоређени резултати добијени њиховом применом. Анализирани је пример из претходног поглавља, чија је генеза описана у [13]. С обзиром да је анализа утицаја ветра веома комплексна код ових конструкција, биће упоређена деформација под дејством снега у нашем поднебљу и сопственог оптерећења.

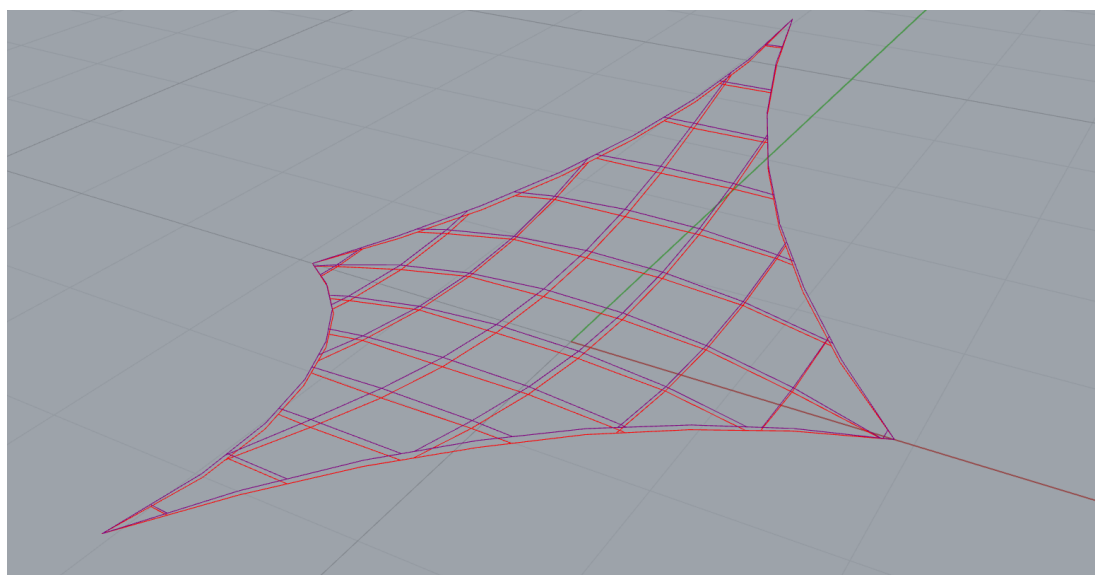
За анализу деформације под оптерећењем снегом задата је вредност од  $0.75 \text{ kN/m}^2$ , а сопствена тежина рачуната је као  $1 \text{ kg/m}^2$  (одговара  $0,001 \text{ kN/m}^2$ ) по спецификацији немачког произвођача MЕНLER. Поређења ради, задати модул еластичности материјала обе мембране износи:  $E=1200 \text{ N/mm}^2$  у правцу основе, и  $800 \text{ N/mm}^2$  у правцу потке. За пројектовање реалне мембранске конструкције, избор материјала мембране са својим еластичним и другим карактеристикама (нпр. незапаљивост, стабилност мембране после кидања, итд.) мора се усагласити са произвођачем за конкретан пројектни задатак, дизајн и геометрију мембранске конструкције. У супротном може доћи до фаталних грешака приликом избора материјала.

Прва нелинеарна анализа урађена је у програмском пакету EASY. Под оптерећењем снегом и сопственом тежином конструкције добијена максимална деформација ромбичног седластог једра наведених карактеристика, приказаног у претходном поглављу, димензија  $6,60 \times 3,80 \text{ m}$  износи  $5,1 \text{ mm}$ . Анализом исте конструкције под истим оптерећењем у GSA Suite, динамичком релаксацијом, добијена је највећа вредност деформације од  $2,9 \text{ mm}$ . Притом се мора имати на уму и додатна разлика у коначној геометрији, која настаје и разликом у методи формфајндинга. Разлика у прорачунима деформације није занемарљива.

Резултати анализе графички су приказани на *Сликама 52а-б*.



Слика 52а- Приказ деформисане геометрије у GSA Suite, деформација је скалирана 10 пута (извор: [аутор])



Слика 52б - Приказ деформисане геометрије у EASY, деформација је скалирана 10 пута (извор: [аутор])

Узимајући у обзир да је распон задатог елемента релативно мали у односу на распоне који се срећу код оваквих конструкција, те да су и очекиване разлике у деформацијама релативно мале, вредело би испитати које разлике у статичким прорачунима се јављају код конструкција великих распона и како ове разлике утичу на даљи ток пројекта

### 5.3. Дефинисање критеријума

Ниво обраде пројекта је један од најважнијих критеријума за избор оптималног софтвера – тј. да ли је са датим софтвером могуће испројектовати конструкцију од идејног решења до фазе израде (да ли је могуће генерисање кројних листи, декомпензација приликом израде кроја, итд.). Да ли софтвер омогућује и статичку анализу у свом склопу или је потребан додатни софтвер којим ће се испитати статички утицаји и одговор конструкције?

Следећи, веома утицајни критеријум јесте економски. Поред цене софтвера, мора се узети у обзир и брзина којом се долази до коначног решења.

Критеријум који је такође узет у обзир јесте компатибилност софтвера са другим софтверским пакетима, могућност извоза добијених података у друге CAD програме са форматима - екстензијама .dxf, .dwg, .3dm, .3ds и сл. ради архитектонске и графичке обраде добијених података.

Потом је узета у обзир могућност софтвера да генерише геометрију без превеликог броја рестрикција – дакле да ли су могући сви типични геометријски облици карактеристични за тензилне конструкције. Има ли рестрикција по питању мреже чворова? Има ли рестрикција по питању броја чворова мреже?

Последњи критеријум посматран у овом раду јесте прегледност, једноставност и пријемљивост графичког интерфејса. Архитекти или инжењеру, тј. кориснику може од пресудног значаја бити изглед и прегледност графичког интерфејса, као и једноставност руковања софтвером. Од овог фактора у великој мери зависи и ефикасност корисника софтвера.

Анализирано је више софтверских пакета и софтверских додатака који служе за пројектовање мембранских конструкција и/или генерисање минималних површи. То су: EASY, GSUITE, RHINO MEMBRANE PLUG-IN, MEMBRANE, FORMFINDER, SURFACE EVOLVER.



#### 5.4. Поређење софтверских пакета – Табеларни и графички прикази

Табела 3. Поређење софтверских пакета са аспекта метода и степена обраде пројекта (извор: [аутор])

ИМЕ	Формулација	Мин. Површ	Мет. Формфај ндинга	Стат. Анал.	Кројне листе	Огран. Мреже /геометрије
EASY	Лаплас	Не	ФДМ	ДА	ДА	НЕ
GSUITE	Лаплас/ Једначина динамичке равнотеже		ДР /ФДМ	ДА	ДА	ДЕЛИ МИЧ НО
RHINO MEMBR PLUG-IN	Принцип виртуелног рада	Не	УРС	НЕ, Могуће уз додатни софтвер  ixForten	НЕ, Могуће уз додатни софтвер  ixForten	ДА
MEM- BRANE	Нема података	Не	Нема података	НЕ	ДА	ДА
FORM- FINDER	Лаплас	Не	ФДМ	НЕ	НЕ	НЕ
SUR- FACE EVOL- VER	Задате диференц. једначине потенцијалне или друге врсте енергије	Да	Минимиз а-цијом пот. ен. / методом оппадају- ћег гради- јента	НЕ	НЕ	ДА

Табела 4. Поређење софтверских пакета са економског аспекта  
(извор: [аутор])

<b>ИМЕ</b>	<b>ЦЕНА КОМЕРЦИЈАЛНОГ ПАКЕТА</b>	<b>ЦЕНА АКАДЕМСКА ВЕРЗИЈА</b>
<b>EASY</b>	КОМПЛЕТАН ПАКЕТ око 20.000, доступни су и појединачни модули	ДА (око 11.000 ЕУР)
<b>GSA SUITE</b>	Око 13.500 ЕУР	ДА (нема података о цени)
<b>RHINO MEMBR.</b>	БЕСПЛАТАН УЗ RHINO (око 1200 ЕУР)	НЕ, могућа је лиценца са макс. 3000 чворова
<b>MEMBRANE</b>	Око 300 ЕУР	НЕ
<b>FORMFINDER</b>	БЕСПЛАТАН	НЕ
<b>SURFACE EVOLVER</b>	БЕСПЛАТАН	НЕ

Табела 5. Преглед могућих екстензија за импорт и експорт фајлова за статичку анализу и даљу графичку обраду (извор: [аутор])

ИМЕ	ФОРМАТ УВЕЗЕНИХ ПОДАТАКА	ФОРМАТ ИЗЛАЗНИХ ПОДАТАКА	КОМПАТ. СА СОФТВ. ЗА СТАТ. АНАЛИЗУ КОН. ЕЛ.
<b>EASY</b>	.dxf (AutoCAD)	.dxf (AutoCAD)  Експорт тачака: .txt, .ein	<b>EASY-</b> статичка анализа у склопу софтверског пакета
<b>GSA SUITE</b>	.txt, .gwa, .csv .dxf, .dwg (AutoCAD) и др.	.dxf, .dwg (AutoCAD)  Комуникација са другим софтвером за стат. анал.: .S2K (SAP2000), NASTRAN, .asas (ANSYS), .tcl(OpenSees), .key, .ptf(LS-DYNA), и др. Експорт тачака: .txt, .gwa	<b>GSA SUITE</b> статичка анализа у склопу софтверског пакета
<b>RHINO MEMBR.</b>	.3dm, .rws (Rhino) .3ds (3D Studio) .ai (Adobe Illustrator) .dwg, .dxf (AutoCAD) .x (DirectX) .off (Geomview) .eps .gf, .gft (GHS Geometry), .skp (SketchUp) и др. Унос тачака: .asc, .csv, .txt, .xyz, и други	.3dm (Rhino), .3ds (3D Studio), .ai (Adobe Illustrator), .dwg, .dxf (AutoCAD), .cd (Cut3D), .sat (ACIS) и други  Експорт тачака: .txt, .emf и други	<b>ixForten4000</b> и др.
<b>MEMBRANE</b>	.dxf (AutoCAD), .dc2 (DesignCAD)	.tnt (Membrane), .dxf (AutoCAD), .dc2 (DesignCAD)	<b>STRAUS</b> и др.
<b>FORMFINDER</b>	.dxf (AutoCAD)	.dxf (AutoCAD)	EASY, EASYStat

## 6. Закључак и препоруке

### 6.1. Анализа и дискусија резултата истраживања

Физички модели површи сапунске мембране са којим су експериментисали Фрај Ото и његови сарадници да би истражили облике мембранских површи и отворили пут тензилној архитектури, су уједно створили илузију да је минимална површ оптимално решење архитектонског проблема изналажења геометрије мембранских конструкција и конструкција од челичних каблова. Иако је јасно да је у случају минималне површи површински напон изотропан – константан у свим правцима мембране – то заправо не одговара механичким својствима мембранске конструкције. Материјал од којег су сачињене мембранске конструкције има различита механичка својства у правцима основе и потке – стога је модел минималне површи доведен у питање као оптимални модел геометрије мембранских конструкција. Осим тога, као што тврде Блецингер и Вихнер, а исто показују и анализирани примери у овом раду, минималне површи су претежно равне површи, што је често непожељно својство мембранских конструкција, јер се у равним пределима конструкција могу формирати увале под утицајем падавина – што може угрозити стабилност конструкције.

Рачунске методе за одређивање почетне геометрије тензилних конструкција развијене су убрзо после физичких експеримената – када су инжењери и архитекте увидели границе физичког моделирања. У самом почетку настало је неколико различитих метода за решавање овог проблема, које су касније унапређиване и модификоване. Притом је важно подвући, да геометрије добијене помоћу ових метода нису идентичне минималној површи, а и да се међусобно веома разликују, што је овим радом и показано.

У склопу дисертације анализиране су најчешће методе за формфајндинг тензилних конструкција. То су: метода „густине силе“ (FDM), стратегија ажурирања референтног положаја (URS), динамичка релаксација (DR), метода матрице крутости (SM или TSM).

FDM у инпуту користи само координате фиксних тачака, силе претходног затезања челичних каблова по ободу конструкције и параметар „густине силе“,

који је тривијална вредност. Испитивања су показала да релативно добре резултате даје јединична густина силе. Дакле, за пројектанта – почетника ова метода је једна од најоптималнијих, јер уз минимум предзнања даје добре резултате.

URS, стратегија ажурирања референтног положаја јесте заправо општи облик FDM примењив не само на мреже штапова, већ и на површинске елементе. Уместо густине силе – претпоставља се и задаје напонско стање у површинском елементу.

У SM је унос компликованији. У овој методи, мора се унапред унети попречни пресек каблова, модул њихове еластичности, сила претходног затезања, као и координате фиксних чворова. Због тога је ова метода помало заборављена, јер претпоставља доста предзнања о конструкцији, коју најчешће архитекте, поготово у процесу пројектовања, не поседују.

Слична ситуација је са DR, у којој се уносе концентрисане масе, кинетичко или вискозно пригушење и временски интервал у којем се врши итерација. За временски интервал се такође најчешће задаје тривијална вредност  $\Delta t = 1$ . Затим мора такође да се унесе напонско стање претходног затезања (које не одговара реалном стању, али доста утиче на геометрију и употребљивост резултата), као и претходно затезање каблова.

Предност DR и FDM у односу на SM је и чињеница да се не мора приступити састављању матрице крутости система.

А предност FDM у односу на DR је једноставност методе и мањи број параметара уноса пре почетка итерације.

У досадашњим поређењима наведених метода, која су вршена од стране Луис у [12] и Венендаал и Блок у [8] јасно је да је најмање оптимална метода матрице крутости.

Венендаал и Блок у свом поређењу као оптималну методу виде модификовану FDM – MFDM (Multi-step Force density method), у којој се у сваком итеративном кораку прилагођава сила у кабловима. Ову модификацију су предложили Маурин и Мотро у [15-17].

У склопу овог рада упоређена је геометрија типских примера добијена рачунском симулацијом сапунске мембране, тј. генерисањем минималне површи над задатим граничним условима, са геометријом добијеном применом комерцијалних софтвера, који користе различите методе формфајндинга.

За симулацију минималне површи коришћен је нелинеаран итеративни процес који за дате граничне, фиксне услове даје минималну површ изнад правоугаоног домена. Комерцијални софтверски пакети, приказани у овом раду, већински не дају минималну површ као резултат, нити решавају Ојлер-Лангражову диференцијалну једначину, већ једноставнију, Лапласову једначину или друге диференцијалне једначине.

Једноставна метода коначних разлика са правоугаоним елементима програмирана од стране аутора, свакако нема флексибилност као приступ са коначним елементима (нпр. троугаоним) који користи комерцијални софтвер, стога су и примери ограничени на круте, непроменљиве граничне услове (дакле попут ивичних греда, а не ивичних каблова). Комерцијални софтвер је програмиран тако, да користи флексибилне граничне услове, што са методом коначних разлика није могуће. Такође метода коначних разлика није примењива на последњи анализирани пример, са сингуларним граничним условом.

У склопу ове дисертације су анализирана четири примера: асиметрични хиперболоид (тзв. „једро“), Конкусова минимална површ са синусоидалним луком као граничним условом, модификована седласта структура и конични шатор са сингуларним граничним условом. Разлика између ова симулације минималне површи и резултата генерисаног уз помоћ комерцијалног софтвера у анализираним примерима није премашивала 1.50% укупне висине конструкције (негде око 0,3м на распону од 20м).

Разлика између геометрије генерисане уз помоћ URS са RHINOMEMBRANE износи свега 1% укупне висине конструкције (негде око 0,2м на распону од 20м).

Методом DR је у склопу софтверског пакета GSA Suite анализиран пример из магистарског рада аутора (види [13]) који је део ауторовог решења за

наткривање пијаце „Скадаралија“ у Београду. Овај пример упоређен је са решењем до којег је аутор дошла уз помоћ FDM и софтверског пакета EASY.

Добијене геометрије се доста разликују у средишњем делу конструкције, као и у облику ивичних кривих по самом ободу конструкције. Површ добијена уз помоћ FDM закривљенија је у односу на површ добијену DR за приказане параметре. Разлика у висини конструкције са истим фиксним тачкама износи до 1.6% укупне висине.

У ступњу формфајндинга ова разлика није од сигнификантног значаја. Али под утицајем великог оптерећења снегом или ветром ова разлика може бити знатна и захтева додатно испитивање.

Под оптерећењем снегом, анализиран је исти пример (део крова над пијацом „Скадарлија“ у Београду димензија 6,60 x 3,80 m) и то уз помоћ два софтверска пакета: EASY и GSA Suite, динамичком релаксацијом. Разлика у добијеним деформацијама система није занемарљива. Максимално померање чворова износи у првом случају 5,1 mm, а у другом 2,9 mm.

## 6.2. Препоруке за архитекте и инжењере

У поглављу о комерцијалним софтверским пакетима упоређени су често коришћени и аутору доступни софтвери, са више аспеката.

Када се пореде резултати комерцијалних софтверских пакета који користе различите методе за формфајндинг долази се до закључка да се софтверским пакетом EASY<sup>®</sup> немачке производње постиже жељени резултат у веома кратком року и са најмање предзнања, поготово ако се за првобитно моделирање користи уводни, веома повољни програм FORMFINDER<sup>®</sup> (може се добити чак и бесплатно) који је користан архитектама за стицање првог знања из ове области. Софтверски пакет EASY<sup>®</sup> нуди и комплетан процес пројектовања све до извођачких планова, што укључује статичку анализу и кројење мембране. Овај софтверски пакет је специјализован за тензилне конструкције. За формфајндинг користи FDM, што се показала као најоптималнија, али и најједноставнија метода за генерисање почетне геометрије мембранских конструкција и челичних мрежа. Унос фиксних тачака се решава преко графичког интерфејса, што даје могућност пројектанту да наслути резултат, као и да га брзо прилагоди у циљу добијања жељене геометрије. За добијање прелиминарне геометрије, није потребан унос еластичних карактеристика материјала, већ тек приликом статичке анализе.

GSA Suite, британске производње, потекао из инжењерске куће Ove Arup, је веома обиман софтвер за статичку и динамичку анализу конструкција са линеарним и нелинеарним понашањем. Део софтвера за формфајндинг мембранских површи (у софтверу назван Soap Film generation) користи динамичку релаксацију, а за формфајндинг мрежа каблова FDM. Овај софтверски пакет је веома обиман и комплексан и првенствено је инжењерског карактера. Служи преваходно за линеарну и нелинеарну статичку и динамичку анализу, као нпр. сеизмичку анализу и анализу интеракције са тлом (Soil Structure Interaction) код крутих конструкција. Као такав, захтева одређено предзнање о конструкцији (нпр. еластичне карактеристике материјала) – које углавном није доступно просечном архитекти. Унос параметара за динамичку релаксацију је максимално поједностављен (сви параметри итерације су аутоматски подешени), али је ипак



честа појава да итеративни поступак не конвергира, поготово ако се унос података врши лаички. Такође, почетна „мрежа“ чворова мора да испуњава одређене услове да би метода могла бити примењена (нису могући троугласти елементи по ободу четвороугаоне мреже). Стога аутор овај софтверски пакет само условно препоручује архитектама или почетницима који желе да „истражују“ геометрију тензилних конструкција или се уче процесу формфајндинга. Овај софтверски пакет има одличну комуникацију са осталим програмима из области анализе статике и динамике конструкција, те је веома користан за комплетну статичку и динамичку анализу претходно дизајниране конструкције.

За разлику од претходно поменутог софтвера, RHINOCEROS®-RHINOMEMBRANE, као и FORMFINDER може послужити архитектама у стадијуму идејног решавања пројекта мембране – без статичке анализе и без развијања мембране у раван. Притом се RHINOMEMBRANE показао као флексибилнији у комуникацији са другим CAD софтверима, било у сврху графичке презентације резултата (рендеринг) или у сврху статичке анализе (експорт података за обраду у неком од програма за FEM анализу). FORMFINDER треба посматрати као увод у софтверски пакет EASY® и са том идејом је и развијен. Одличан је за почетнике, а и доступан је чак и бесплатно преко интернета (уз податке о кориснику).

Софтвер MEMBRANE може се користити за мање пројекте, надстрешнице, привремене кровове. Софтвер има доста ограничења, од геометрије, до прављења кројних листи, али је веома повољан, те је у практичној употреби код нас. Није предвиђен за анализу статичких утицаја на конструкцију.

SURFACE EVOLVER не спада у софтвере за формфајндинг тензилних конструкција, већ за калкулисање минималних површи за задате граничне услове. Овде је наведен, јер је уз помоћ њега могуће експериментисање са минималним површима, занимљиво за архитекте у потрази за необичним геометријама, иако софтвер не омогућује пројектовање тензилних конструкција.

Закључак аутора је да само два комерцијална софтверска пакета испуњавају критеријуме за оптимални, професионални, свеобухватни процес пројектовања у мембранским конструкцијама – а то су EASY® (који користи FDM

за формфајндинг) немачке производње и GSA SUITE (који користи DR/FDM за формфајндинг) британске производње. Ова два софтверска пакета нуде све сегменте пројектовања под „истим кровом“: формфајндинг, анализу статичких утицаја и кројење мембранске конструкције, те су погодни за све врсте пројектних задатака и стадијума пројектовања до фабрикације мембране.

На жалост, са економског аспекта анализе, ради се и о најскупљим софтверским пакетима, са могућношћу куповине приступачније академске лиценце.

Компромисно „решење“, погодно за архитекте, који су већ упознати са материјом, али немају потребе за детаљном статичком анализом, може се постићи са бесплатним додатком за RHINOCEROS®-RHINOMEMBRANE уз лиценцу RHINOCEROS®-а која се плаћа (веома је повољна за студенте). Иако овај софтвер не поседује капацитет за статичку анализу, као ни за кројење делова мембране, довољан је за почетну фазу – идејно разрешавање, као и прелиминарну анализу претходног затезања у мембрани (без спољног оптерећења). Уз евентуалну инсталацију даљих додатака, вероватно је могућа и статичка анализа добијене геометрије.

## ПРИЛОГ 1

### Геометријска нелинеарност, геометријска и еластична матрица крутости, теорије I, II и III реда

У елементарној механици се примењује претпоставка да је зависност деформације  $\epsilon$  и померања  $\mathbf{u}$  линеарна. Ова зависност  $\epsilon(\mathbf{u})$  се назива кинематиком деформације. Када под утицајем спољних сила долази до великих померања у систему (што је случај код мембранских конструкција и мрежа челичних каблова), ова линеарна зависност не доводи до тачних прогноза напона и деформације. Нелинеарна формулација основних једначина кинематике се назива „геометријска нелинеарност“. Геометријска нелинеарност као резултат увек има нелинеарну зависност напона од померања  $\sigma(\mathbf{u})$ , тј. истезања  $\epsilon(\mathbf{u})$ , чак и када постоји материјална линеарност. Пошто се напони мере у деформисаном стању елемента конструкције и услови равнотеже морају да буду постављени на деформисаном стању посматраног елемента. Ово се у механици назива и теорија II реда.

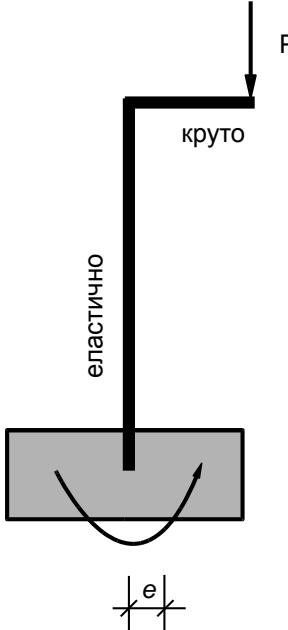
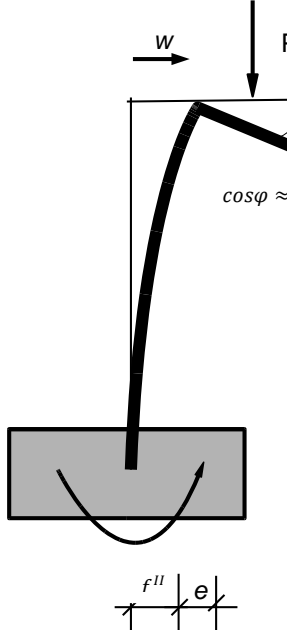
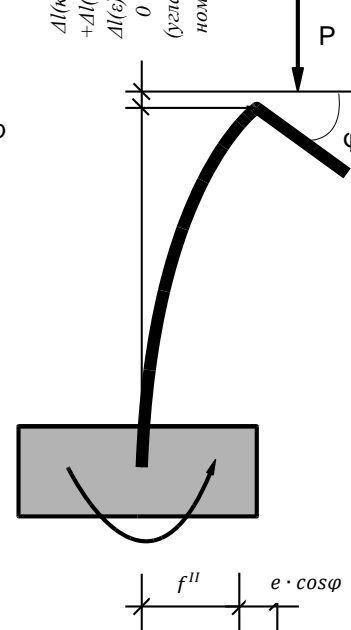
У механици континуума, материјална тела се описују својим материјалним особинама и својом запремином, док су за кинематичко описивање понашања тела материјалне особине ирелевантне. У почетку се у кинематици испитују само померање и истезање (сабијање) тела и то под основном претпоставком да су материјалне честице које чине тело „густо“ (тј. континуално) распоређене по целој запремини посматраног тела.

Претходно затегнуте конструкције попут мрежа каблова или мембране, поседују геометријску нелинеарност. То значи да:

- су њихове деформације коначне или велике
- постоји нелинеарна зависност између истезања и померања
- се услови равнотеже морају постављати на деформисаном систему

Да би илустровали разлику између теорије I, II и III реда (у којој су допуштена велика померања) приложена је следећа табела:

Табела 6 - Теорија штапова I, II и III реда  
(извор: [аутор])

Теорија (ред)	I	II	III
 <p><math>M_A^I = P \cdot e</math></p>	 <p><math>M_A^{II} = P \cdot (f^{II} + e)</math></p>	 <p><math>M_A^{III} = P \cdot (f^{III} + e \cdot \cos \varphi)</math></p>	
Формулисање услова равнотеже	на недеформисаном систему	на деформисаном систему	на деформисаном систему
Деформација у односу на димензије система	занемарљиво мале ( $\ll 1$ )	коначне, али мале ( $\ll 1$ )	неограничене, велике
$\Delta l$ услед извијања штапа занемарљ.	Да	Да	Не
Кривина штапа $\kappa$	$\kappa^I = -w'' = M^I/EI$	$\kappa^{II} = -w'' = M^{II}/EI$	$\kappa^{III} = -w''/(1 + w'^2)^{3/2} = M^{III}/EI$
Однос између оптерећења и промењљ. стања	Линеарни	Нелинарни	Нелинарни
Оптерећење	радно оптерећење	радно оптерећење са фактором $\lambda$	радно оптерећење са фактором $\lambda$

- У теорији I реда се услови равнотеже постављају на недеформисаном систему – дакле претпоставља се да деформација нема. На недеформисаном стању се посматрају утицаји и одговор конструкције. Ова теорија задовољава велику већину статичких задатака.
- У теорији II реда се услови равнотеже постављају на деформисаном систему. Претпоставља се да су деформације мале. Апроксимативно се посматра један део штапа, али се математички модел линеаризује и на таквом моделу се анализирају утицаји на конструкцију. Ова теорија се користи за проблеме стабилности и велике угибе штапа до  $20^\circ$ .
- У теорији III реда се услови равнотеже постављају на знатно деформисаном систему. Претпоставља се да су деформације система велике. Апроксимативно се посматра један део деформисаног штапа. Математички модел се не линеаризује. Ова теорија се користи у малом броју случајева – када су померања велика и код угиба већих од  $20^\circ$ .

Теорија II реда је апроксимација теорије великих померања или теорије III реда. Однос сила на крајевима штапа и деформације на истом се изражава матрицом крутости елемента. Ова матрица мора да се изведе за деформисани елемент. Матрица крутости се саставља или помоћу хомогеног решења диференцијалне једначине или уз помоћ формула.

Да би се анализирана сила која делује у правцу штапа, матрица крутости се разлаже на еластичну и геометријску матрицу крутости. Еластична матрица крутости је матрица крутости у складу са теоријом I реда (услови равнотеже су постављени на линеарном, недеформисаном елементу). Геометријски део матрице крутости је додатак који настаје услед деформације елемента која се мора узети у обзир.

Више о теоријама деформације може се прочитати у [40].

Што се тиче изналажења геометрије тензилних конструкција, као што је поменуто у делу рада који се бави класификацијом ових метода, постоје методе које у кораку формфајндинга користе искључиво геометријску матрицу крутости (FDM) и које користе и геометријску и еластичну матрицу крутости (SM).

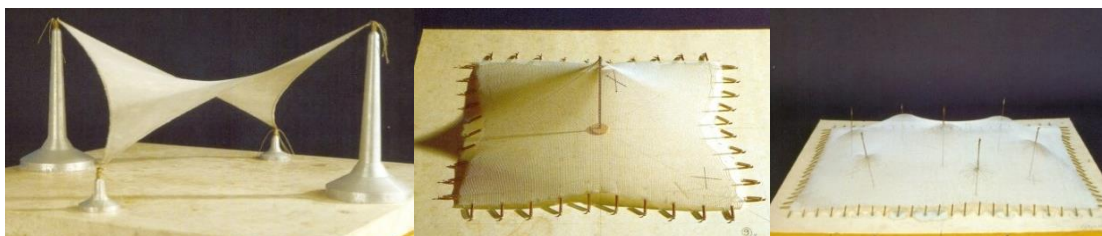
## ПРИЛОГ 2

### Експериментални формфајндинг – физичко моделирање

Најочигледнији начин моделирања мембранских конструкција у идејној фази врши се путем физичког моделирања. Притом је могуће користити различите технике моделирања. Једна од могућности је прављење модела од сапунице. Због комплексне апаратуре, непостојаности тих модела и отежане конзервације, за добијање почетних идејних модела препоручљиви су модели од најлон чарапе или еластичног тила.

Фрај Ото је подвукао значај физичког моделирања. Детаљна истраживања уз помоћ физичких модела изведена су у Институту IL у Штутгарту током 1950-их и 1960-их година. За дизајн нове железничке станице у Штутгарту, Фрај Ото израдио је преко 100 модела до данас. Физички модели коришћени су углавном за истраживање и формирање минималних површи, за истраживање путања сила и разумевање равнотежне геометрије.

Физички модели се могу лако модификовати до постизања оптималних статичких и просторних услова. Модели од сапунице, гуме, најлон чарапе и еластичног тила прављени су за изучавање минималних површи и формфајндинг претходно затегнутих мембранских конструкција и конструкција од челичних каблова. Модели за мерење утицаја са опругама и теговима користе за утврђивање сила у кабловима и мембрани. Неки од формфајндинг модела направљених у Институту IL у Штутгарту су приказани на *Слици 51а, б и в*.

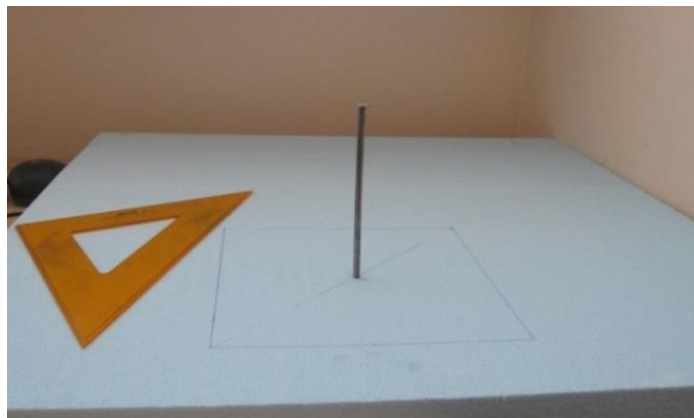


*Слика 51а, б и в*– Модели седласте површи, централно ослоњене мембране са приближно једнаким напоном у мембрани и модел површи ослоњене на ламеле (*извор*: [6])

У склопу овог Прилога ће бити објашњен процес добијања модела од најлона за најједноставнији конусни шатор са централним пилоном. Заинтересовани могу испробати даље могућности.

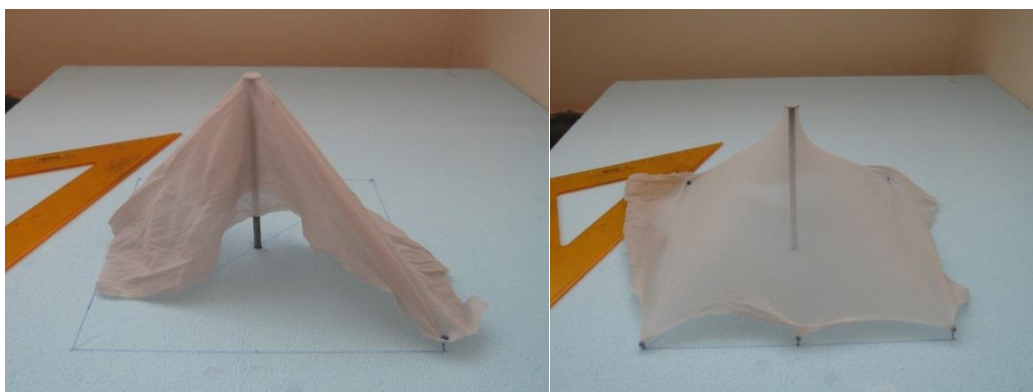
Потребан материјал: плоча стиродура, дугачак ексер (100-140 мм), шпенадле, најлон чарапа, туткало за дрво (еластично, нпр. ПОНАЛ експрес), маказице за нокте

1) Корак 1: на стиродуру означити места на којима се мембрана причвршћује за чврсту конструкцију – тачке ослонца. За форму мембране потребна је и једна централна тачка која ће бити ван равни осталих тачака. Тај „пилон“ симулира заправо један већи ексер који се лако забија у стиродур.



Слика 52 – први корак моделирања једноставног мембранског крова  
(извор: аутор)

2) Корак 2: најлон чарапа се сече у облику правоугаоника или квадрата и причвршћује се шпенадлама за означена места на стиродуру (тачке ослонца) равномерно се натежући у свим правцима. Ако је тачака ослонца мало, додају се и друге тачке, равномерно распоређене по ивицама „мембране“, да би се затегла равномерно у свим правцима – ово је јако важно да би модел био што веродостојнији и да се мембрана не би наборала.



Слике 53а и 53б– затезање мембране једноставног мембранског крова (извор: аутор)

- 3) Корак 3: благо затегнуту „мембрану“ сечемо по ивицама од једне тачке планираног ослонца до следеће. Притом се, чак иако се трудимо да сечемо праволинијски, чарапа већ деформише у карактеристичне криве које виђамо по ободу сваке мембранске конструкције. Кроз те ивице пролазе сајле за затезање мембране на изведеној конструкцији. Уочава се следећа законитост : што је чарапа затегнутија, то је крива по ободу закривљенија, што значи да ни изглед ових кривих по ивицама мембранске конструкције није произвољан, већ зависи од силе затезања сајли дуж ивица мембране. Уобичајен угиб криве по ободу конструкције емпиријски износи око 10% растојања између два ослонца.



Слике 54а и 54б – опсецање мембране једноставног мембранског крова (извор: аутор)

- 4) Корак 4: Уз помоћ туткала за дрво чарапу причврстимо за ексер, ради бољег очувања модела. Овај корак можемо урадити и на почетку, ако ће то побољшати могућност затезања мембране.



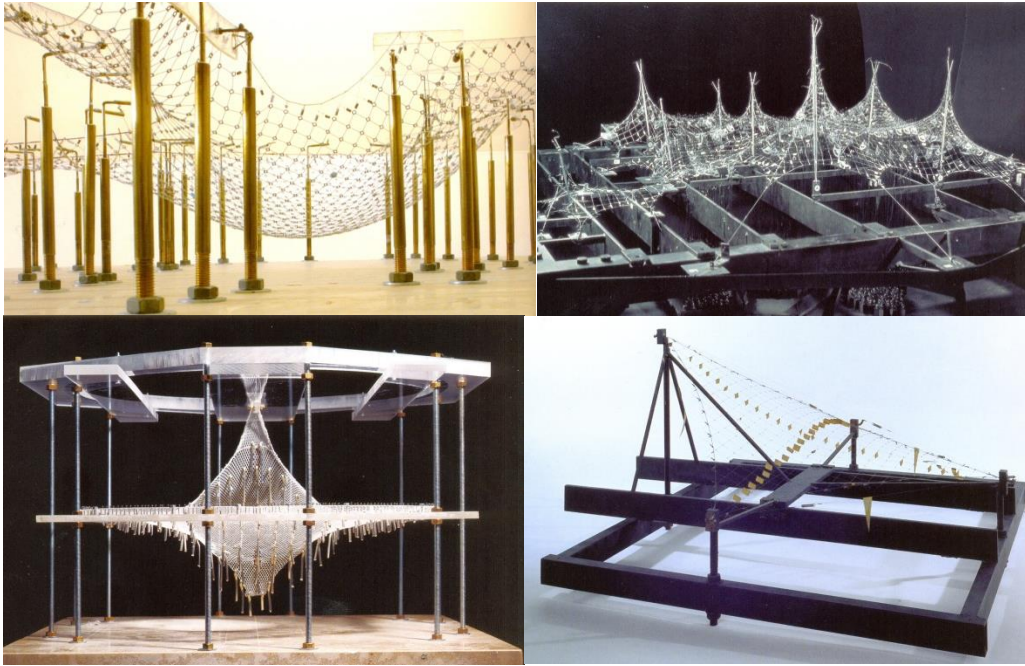


Слике 55а и 55б – фиксирање потпорне тачке једноставног мембранског крова (извор: аутор)

Већи модели се производе од жерсеј материјала за производњу купаћих костима, који има приближније особине реалном материјалу (мања еластичност, транспарентност итд.).

Искључиво експериментално добијање модела није довољно за статичку анализу мембранских конструкција, већ се мора приступити и софтверском моделирању, јер се у зависности од технике моделирања (чарапа, тил или сапуница) успостављају и различите геометрије, због различитих еластичних својстава ових материјала.

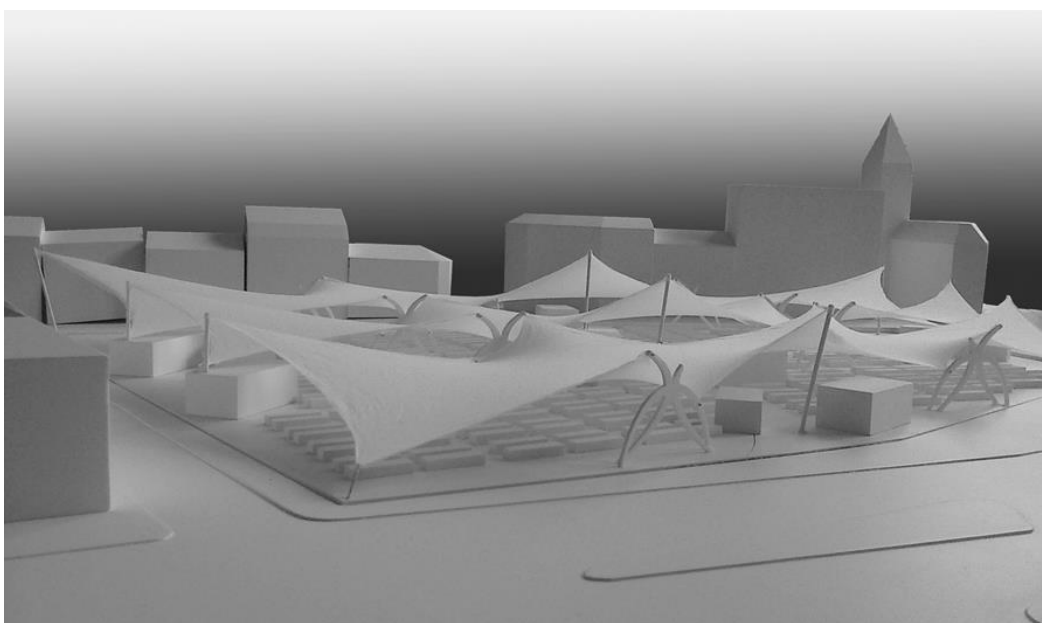
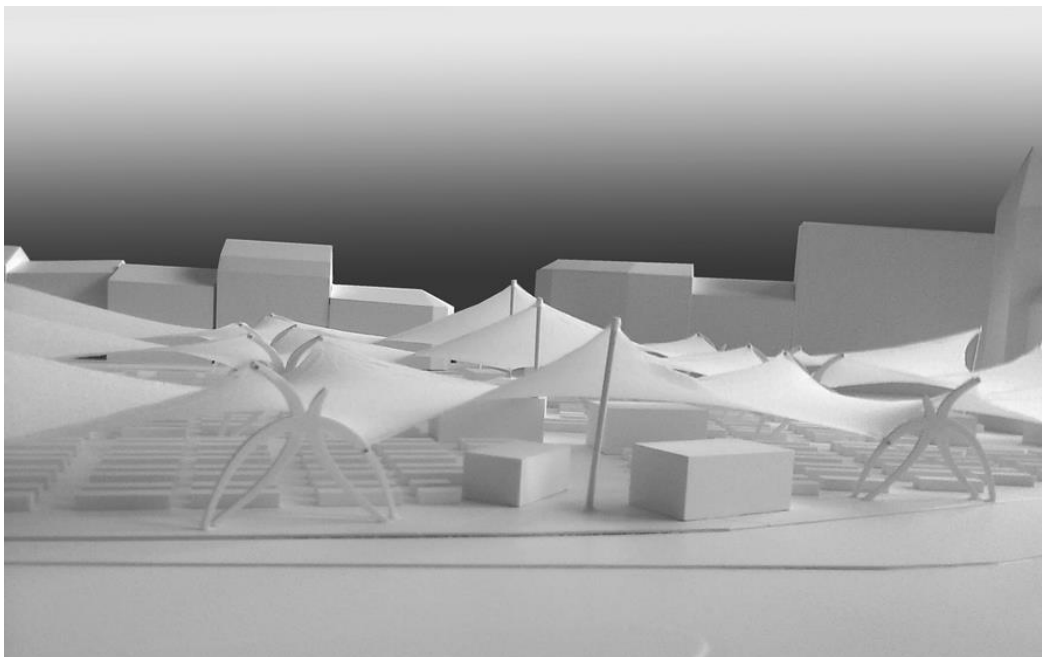
Модели прављени за мерење утицаја оптерећења, које је Фрај Ото конструисао 1950-их година, комплексне су апаратуре. У њих се уграђују и врло прецизне опруге и сензори, који су у стању да опишу статичке утицаје и померања тачака на моделу. Обзиром на комплексност и неопходну технику, мерни модели, попут ових приказаних на Слици 32, доста су скупи. Из тог разлога, рачунско одређивање утицаја на мембранску конструкцију уз помоћ софтвера, ипак је економичнији и бржи начин за прелиминарну статичку анализу. У последњем стадијуму испитивања статичких утицаја, нпр. приликом испитивања у ваздушном тунелу, мора се вратити на физички модел, ради прецизније симулације, односно провере рачунских резултата.



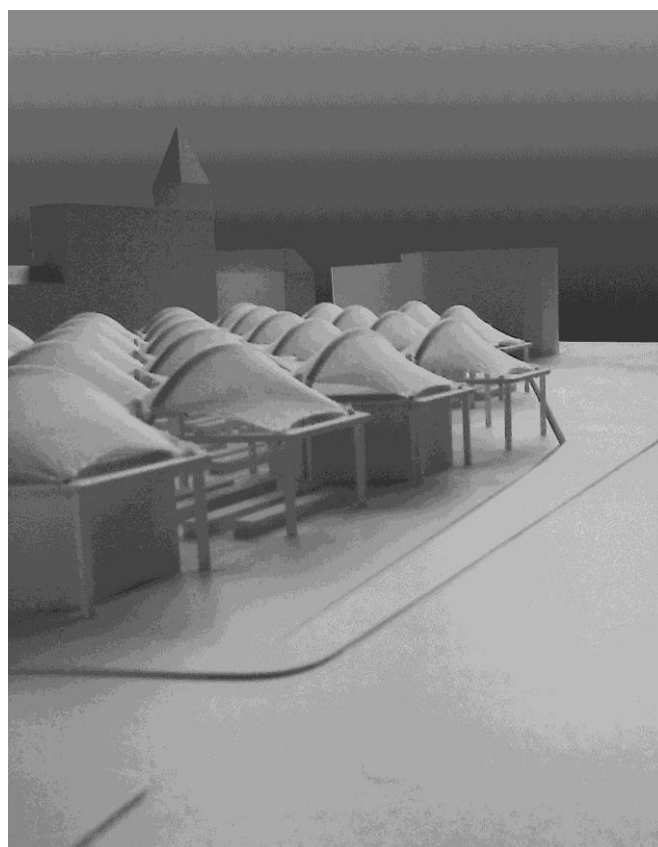
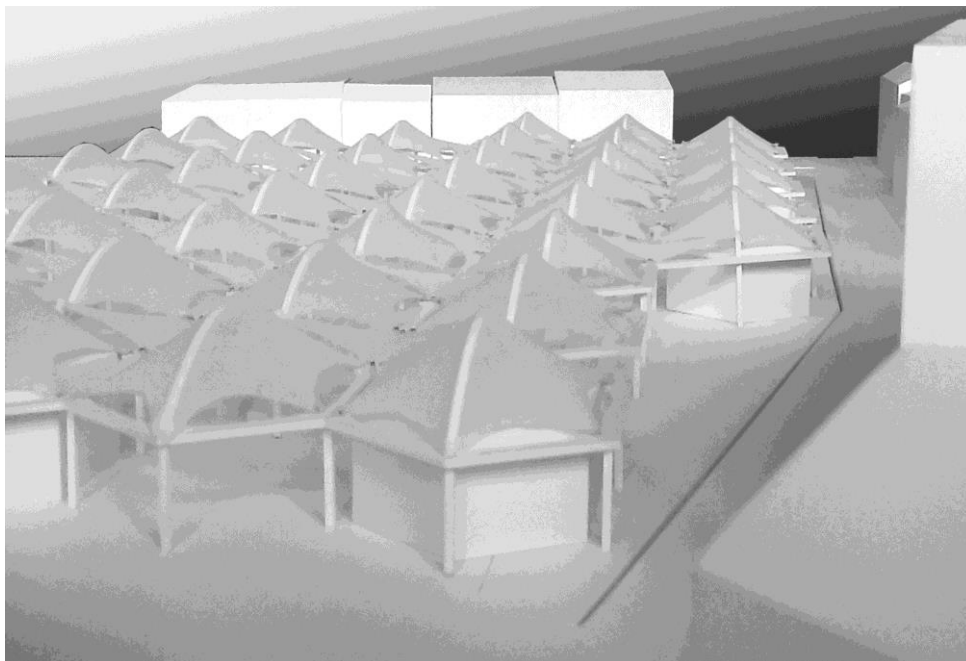
Слике 56 а, б, в и г – модели за мерење статичких утицаја (извор: [6])

Без почетног експерименталног моделирања, нема спознаје процеса формфајдинга мембранских конструкција. Физички модел развија интуицију за равномерно затегнуту конструкцију - мембрану без набора, за геометрију са одговарајућом закривљеношћу, за двоструку закривљеност површи, за пределе у којима се може гомилати вода, снег, итд.

У фази идејног решења, када још не постоји коначна представа о дефинитивном изгледу конструкције, најбоље је експериментисати са радним моделима од најлон-чарапе, еластичног тила или сапунице, попут приказаних на *Сликама 57а и б, 58а и б* које је аутор израдила као варијанте идејног решења у склопу магистарског рада чији је предмет истраживања било наткривање пијаце Скадарлија у Београду. Детаљније о паралелном моделирању уз помоћ физичких и рачунских модела у [13].



*Слика 57а и б – радни модел прве разрађене алтернативе  
за наткривање пијаце Скадарлија у Београду  
(извор: аутор)*



*Слика 58а и б – радни модел друге разрађене алтернативе  
за наткривање пијаце Скадарлија у Београду  
(извор: аутор)*

### ПРИЛОГ 3

#### Програмски код за генерисање минималне површи над задатим, крутим граничним условима у Mathematica®

```
MakePolygons[vl_]:=
Block[
{l=vl,l1=Map[RotateLeft,vl],mreza},
mreza={l,l1,RotateLeft[l1],RotateLeft[l]};
mreza=Map[Drop[#, -1]&,mreza,{1}];
mreza=Map[Drop[#, -1]&,mreza,{2}];
Polygon /@ Transpose[Map[Flatten[#,1]&,mreza]]
]
(* Pocetna mreza na kvadratu [-10,10]x[-10,10] *)
n=20;m=n; h=N[20/n]; k=N[20/m]; step=h;
Do[x[i,j]=-10.+20.*i/n;y[i,j]=-10.+20.*j/m;z[i,j]=0; nepokretno[i,j]=0,{j,0,m},{i,0,n}];(*
pocetno sve 0 *)
(* Granicni uslovi *)
alpha=10.;
Do[z[0,j]=alpha*N[Cos[Pi*y[0,j]/20]]; nepokretno[0,j]=1,{j,0,m}];(*x=0*)
Do[z[n,j]= 0; nepokretno[n,j]=1,{j,0,m}];(*x=xmax*)
Do[z[i,0]= 0; nepokretno[i,0]=1,{i,0,n}];(*y=0*)
Do[z[i,m]= 0; nepokretno[i,m]=1,{i,0,n}];(*y=ymax*)
(* z[n/2,m/2]=10.; nepokretno[n/2,m/2]=1; *)
(* granuslovi=Import["C:\\Documents and
settings\\AL\\Desktop\\Jana_poslednje\\jana_koordinate\\concus_fest.dat"]; *)
(* Laplasova jednacina *)
iteracije=1; epsilon=1;
While[epsilon>0.00001,
Do[znova[i,j]=z[i,j],{j,0,m},{i,0,n}];
epsilon=0;
Do[
If[nepokretno[i,j]==1,Goto[kraj]];
```

```

znova[i,j]=1/4 (z[i-1,j]+z[i+1,j]+z[i,j-1]+z[i,j+1]);
Label[kraj];
epsilon=Max[epsilon,Abs[znova[i,j]-z[i,j]]]
,{j,0,m},{i,0,n}];
iteracije=iteracije+1;
Do[z[i,j]=znova[i,j],{j,0,m},{i,0,n}]
]
Print[epsilon]
Print[iteracije]
(* Krivina *)
Do[kr[i,j]=0,{j,0,m},{i,0,n}];
Do[
If[nepokretno[i,j]==1, Goto[krajkr]];
a1=1/2 (z[i-1,j]+z[i+1,j]);a2=1/2 (z[i,j-1]+z[i,j+1]);
b=(z[i+1,j]-z[i-1,j])/(2*h);c=(z[i,j+1]-z[i,j-1])/(2*k);
d=1/4 (z[i+1,j+1]+z[i-1,j-1]-z[i-1,j+1]-z[i+1,j-1]);
kr[i,j]=(2/step^2)*((a1+a2+b^2*a2+c^2*a1-b*c*d)-(2+b^2+c^2)*z[i,j]);
Label[krajkr]
,{j,0,m},{i,0,n}];
(* Ojler-Lagranzova jednacina *)
Do[z1[i,j]=z[i,j],{j,0,m},{i,0,n}];
iteracije=1; epsilon=1;
While[epsilon>0.00001,
Do[znova[i,j]=z1[i,j],{j,0,m},{i,0,n}];
epsilon=0;
Do[
If[nepokretno[i,j]==1, Goto[kraj1]];
a1=1/2 (z1[i-1,j]+z1[i+1,j]);a2=1/2 (z1[i,j-1]+z1[i,j+1]);
b=(z1[i+1,j]-z1[i-1,j])/(2*h);c=(z1[i,j+1]-z1[i,j-1])/(2*k);
d=1/4 (z1[i+1,j+1]+z1[i-1,j-1]-z1[i-1,j+1]-z1[i+1,j-1]);
znova[i,j]=(a1+a2+b^2*a2+c^2*a1-b*c*d)/(2+b^2+c^2);
Label[kraj1];
epsilon=Max[epsilon,Abs[znova[i,j]-z1[i,j]]]
,{j,0,m},{i,0,n}];

```

```

iteracije=iteracije+1;
Do[z1[i,j]=znova[i,j],{j,0,m},{i,0,n}
]
Print[epsilon]
Print[iteracije]
(* Krivina *)
Do[kr1[i,j]=0,{j,0,m},{i,0,n}];
Do[
If[nepokretno[i,j]==1, Goto[krajkr1]];
a1=1/2 (z1[i-1,j]+z1[i+1,j]);a2=1/2 (z1[i,j-1]+z1[i,j+1]);
b=(z1[i+1,j]-z1[i-1,j])/(2*h);c=(z1[i,j+1]-z1[i,j-1])/(2*k);
d=1/4 (z1[i+1,j+1]+z1[i-1,j-1]-z1[i-1,j+1]-z1[i+1,j-1]);
kr1[i,j]=(2/step^2)*((a1+a2+b^2*a2+c^2*a1-b*c*d)-(2+b^2+c^2)*z1[i,j]);
Label[krajkr1]
,{j,0,m},{i,0,n}];
(* Laplas, Ojler, krivina Laplas, krivina Ojler, razlika Ojlera i Laplasa *)
Table[z[i,j],{j,0,m},{i,0,n}]
funkcija=Table[{x[i,j], y[i,j],z[i,j]},{j,0,m},{i,0,n}];
Table[z1[i,j],{j,0,m},{i,0,n}]
funkcija1=Table[{x[i,j], y[i,j],z1[i,j]},{j,0,m},{i,0,n}];
Table[10.*kr[i,j],{j,1,m-1},{i,1,n-1}]
krivina=Table[{x[i,j], y[i,j],10.*kr[i,j]},{j,1,m-1},{i,1,n-1}];
krivina1=Table[{x[i,j], y[i,j],10.*kr1[i,j]},{j,1,m-1},{i,1,n-1}];
Table[10.*(z1[i,j]-z[i,j]),{j,0,m},{i,0,n}]
razlika=Table[{x[i,j], y[i,j],10.*(z1[i,j]-z[i,j])},{j,0,m},{i,0,n}];
(* Ucitavanje spoljne funkcija *)
funkcsp=Import["C:\\Documents and
settings\\AL\\Desktop\\Jana_poslednje\\jana_koordinate\\FOFIN_proba21x21_h16_asymm.dat"
];funkcsp=Transpose[{Transpose[funkcsp][[2]],Transpose[funkcsp][[3]],Transpose[funkcsp][[4
]]}];
funkcsp=Sort[funkcsp, Or[#1[[2]]<#2[[2]],And[#1[[2]]==#2[[2]],#1[[1]]<#2[[1]]]&];
funkcsp=Partition[funkcsp,n+1];
(* razlika Ojlera i spoljne, razlika Laplasa i spoljne *)
razlika1=razlika;

```

```

razlika2=razlika;
razlika1[[All,All,3]]=10.*(funkcija1[[All,All,3]]-funkcsp[[All,All,3]]);
razlika2[[All,All,3]]=10.*(funkcija[[All,All,3]]-funkcsp[[All,All,3]]);
(* Crtanje *)
Graphics3D[MakePolygons[funkcija]] (* Laplas *)
Graphics3D[MakePolygons[funkcija1]] (* Ojler *)
Graphics3D[MakePolygons[funkcsp]] (* spoljna *)
Graphics3D[MakePolygons[krivina]] (* krivina Laplas *)
Graphics3D[MakePolygons[krivina1]] (* krivina Ojler *)
Graphics3D[MakePolygons[razlika]] (* razlika Ojlera i Laplasa *)
Graphics3D[MakePolygons[razlika1]] (* razlika Ojlera i spoljne *)
Graphics3D[MakePolygons[razlika2]] (* razlika Laplasa i spoljne *)

```



## Литература (непосредно коришћена)

- 1) Argyris JH, Angelopoulos T, Bichat B: A General Method for the Shape Finding of Lightweight Tension Structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3:135-149, 1974
- 2) Bach K, Burkhardt B, Otto F: IL 18 – Seifenblasen, Forming Bubbles. Krämer Stuttgart, 1988 (ISBN 3782820185)
- 3) Barnes MR: Computer Aided Design of the Shade Membrane Roofs for EXPO 88. *Structural Engineering Review*, 1:3-13, 1988.
- 4) Barnes MR: Formfinding and Analysis of Prestressed Nets and Membranes. *Computers & Structures* 30 (3) 685-695, 1988
- 5) Barnes MR: Form finding and analysis of tension space structure by dynamic relaxation. *PhD Thesis*, Department of Civil Engineering, The City University, London, 1977
- 6) Berger H.: Light Structures – structures of light: the art and engineering of tensile architecture. Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser 1996
- 7) Berger H: Light structures, structures of light: The art and engineering of tensile architecture. Birkhäuser Verlag, 1996 (ISBN 3-7643-5352-X)
- 8) Veenendaal D., Block P.: An overview and comparison of structural form finding methods for general networks. *International Journal of Solids and Structures* 49 (3741-3753), 2012
- 9) Day A.S.: An introduction to dynamic relaxation. *Engineer Lond*, 219:218–221, 1965
- 10) Engel H., Hatje: Tragsysteme – Structure Systems. Cantz Verlag GmbH & Co KG, Stuttgart 1998
- 11) Zellinger M., Zur Formfindung, Berechnung und Konstruktion von Membrantragwerken. Graz: Verl. Der Techn. Univ. Graz, 2005
- 12) Lewis W: Tension Structures – Form and Behaviour. London, Thomas Telford, 2003
- 13) Lipkovski J: Form-finding and Modeling of Membrane Structures based on Minimal Surfaces. University of Belgrade - Faculty of Civil Engineering, Master thesis, 1-79, 2013
- 14) Martins L. C.: Morphologie der gekrümmten Flächentragwerke. Institut für Baustatik und Konstruktion, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Mai 1996
- 15) Maurin B, Motro R: Investigation of minimal forms with conjugate gradient method. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2387-2399), 2001
- 16) Maurin B, Motro R: Investigation of minimal forms with density methods. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 38 (143-154), 1997

- 17) Maurin B, Motro R: The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. *Engineering Structures* 20 (712-719), 1998
- 18) Mollaert M.: *Membrane structures: understanding their forms*. Vrije Universiteit Brussel
- 19) Nerdinger W., Meissner I., Möller E., Grdjanski, M.: *Frei Otto Complete Works – Lightweight Construction/Natural Design*. Architekturmuseum der TU München, Birkhäuser, Basel 2005
- 20) Osserman R: *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover Publ NY, 2002
- 21) Otto, F., Rasch, B.: *Gestaltfinden*. Edition Axel Menges, 1995
- 22) Саопштења Института за лаке носеће конструкције Универзитета у Штутгарту - „IL 16 – Zelte”
- 23) Саопштења Института за лаке носеће конструкције Универзитета у Штутгарту - „IL 18 – Seifenblasen“
- 24) Siev A, Eidelman J: Stress analysis of prestressed suspended roofs. *Journal of the Structural Division*. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 103–121, 1964
- 25) Ströbel D, Singer P: *Computational Modelling of Lightweight Structures – Formfinding, Load Analysis and Cutting Pattern Generation*. [www.technet-gmbh.com](http://www.technet-gmbh.com)
- 26) Ströbel D., Singer P.: *Computational Modelling of Lightweight Structures – Formfinding, Load Analysis and Cutting Pattern Generation*. [www.technet-gmbh.com](http://www.technet-gmbh.com)
- 27) Schek H-J: The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 3:115-134, 1974
- 28) Tan KY: *The Computer Design of Tensile Membrane Structures*. PhD thesis, University of Queensland, Brisbane, Australia
- 29) Haber RB, Abel JF: Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part I – Formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 30:263-284, 1982
- 30) Höller R.: *FormFindung: architektonische Grundlagen für den Entwurf von mechanisch vorgespannten Membranen und Seilnetzen*. Mähringen, Balistier 1999
- 31) Chen Z, Zhang Q, Xue W: Experimental Research on Mechanical Properties of PVC. Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2013 „BEYOND THE LIMITS OF MAN” 23-27 September, Wroclaw, Poland
- 32) Concus P: Numerical Solution of the Minimal Surface Equation. *Math Comput* 20 (340-350), 1967

- 33) Wüchner R., Bletzinger K.-U.: Stress-adapted numerical form finding of pre-stressed surfaces by the updated reference strategy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64 (143–166), 2005
- 34) Yang L, Cui J, Wu M: Low-temperature Mechanical Properties of ETFE Film. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2013 „BEYOND THE LIMITS OF MAN” 23-27 September, Wrocław, Poland*
- 35) Yoshino T, Kato S: Formulation of non-linear incremental constitutive equation of ETFE film structure considering the dependence on temperature change. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2013 „BEYOND THE LIMITS OF MAN” 23-27 September, Wrocław, Poland*

Интернет:

- 36) [www.baunetzwissen.de](http://www.baunetzwissen.de)
- 37) [www.birdair.com](http://www.birdair.com)
- 38) [www.mathematica.com](http://www.mathematica.com)
- 39) [www.murphyjahn.com](http://www.murphyjahn.com)
- 40) [www.nadirpoint.de/Verformungstheorien.pdf](http://www.nadirpoint.de/Verformungstheorien.pdf)
- 41) [www.solarnext.de](http://www.solarnext.de)
- 42) [www.wernersobek.com](http://www.wernersobek.com)

## Извор илустрација

- 1) Otto F., Rasch B.: „Gestaltfinden“; 1995 Edition Axel Menges
- 2) „Tensile Steel Lattice Shell of Oval Pavilion by Vladimir Shukhov 1895“ von Andreï Osipovich Karelin - old photo. Лиценцирано од:  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tensile\\_Steel\\_Lattice\\_Shell\\_of\\_Oval\\_Pavilion\\_by\\_Vladimir\\_Shukhov\\_1895.jpg#/media/File:Tensile\\_Steel\\_Lattice\\_Shell\\_of\\_Oval\\_Pavilion\\_by\\_Vladimir\\_Shukhov\\_1895.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tensile_Steel_Lattice_Shell_of_Oval_Pavilion_by_Vladimir_Shukhov_1895.jpg#/media/File:Tensile_Steel_Lattice_Shell_of_Oval_Pavilion_by_Vladimir_Shukhov_1895.jpg)
- 3) Prof. Dr.-Eng. Mollaert, M.: „Membrane structures: understanding their forms“; Vrije Universiteit Brussel
- 4) Engel H. : „Tragsysteme – Structure Systems“, Hatje Cantz Verlag GmbH & Co KG, Stuttgart 1998.
- 5) Величковић, В. „Визуализација у математици помоћу објектно-оријентисаног програмског пакета за линијску графику“, Универзитет у Нишу, Природно математички факултет, докторска дисертација, Ниш 2011
- 6) Nerdinger W. , Meissner I., Möller E., Grdjanski M.: „Frei Otto, CompleteWorks – Lightweight Construction / Natural Design“, Architekturmuseum der TU München, Birkhäuser, Basel 2005
- 7) Lewis, W. „Tension Structures – Form and Behaviour“, London, Thomas Telford, 2003
- 8) [www.google.com](http://www.google.com)
- 9) [http://en.wikipedia.org/wiki/Sony\\_Center](http://en.wikipedia.org/wiki/Sony_Center)
- 10) [www.detail.de](http://www.detail.de)
- 11) [www.wernersobek.com](http://www.wernersobek.com)
- 12) [www.birdair.com](http://www.birdair.com)
- 13) [http://en.wikipedia.org/wiki/World\\_Expo\\_88](http://en.wikipedia.org/wiki/World_Expo_88)
- 14) [www.solarnext.de](http://www.solarnext.de)
- 15) [www.mathematica.com](http://www.mathematica.com)
- 16) „Shukhov Tower photo by Sergei Arsenyev 2006“ , Sergei Arsenyev; лиценцирано од:  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shukhov\\_Tower\\_photo\\_by\\_Sergei\\_Arsenyev\\_2006.JPG#/media/File:Shukhov\\_Tower\\_photo\\_by\\_Sergei\\_Arsenyev\\_2006.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shukhov_Tower_photo_by_Sergei_Arsenyev_2006.JPG#/media/File:Shukhov_Tower_photo_by_Sergei_Arsenyev_2006.JPG)
- 17) „Shukhov Tower photo by Maxim Fedorov. Night“ , Maxim Fedorov; лиценцирано од:

- [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shukhov\\_Tower\\_photo\\_by\\_Maxim\\_Fedorov.\\_Night.jpg#/media/File:Shukhov\\_Tower\\_photo\\_by\\_Maxim\\_Fedorov.\\_Night.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shukhov_Tower_photo_by_Maxim_Fedorov._Night.jpg#/media/File:Shukhov_Tower_photo_by_Maxim_Fedorov._Night.jpg)
- 18) [www.dexigner.com](http://www.dexigner.com)
  - 19) [www.archello.com](http://www.archello.com)
  - 20) [www.technet-gmbh.com](http://www.technet-gmbh.com)
  - 21) Wüchner R., Bletzinger K.-U. : „Stress-adapted numerical form finding of pre-stressed surfaces by the updated reference strategy“ , International Journal for Numerical Methods in Engineering Int. J. Numer. Meth. Engng 2005; 64:143–166#
  - 22) <http://www.flickr.com>
  - 23) <http://www.ixforten.com/>
  - 24) Argyris, J. H.; Angelopoulos, T.; Bichat, B.: “A General Method for the Shape Finding of Lightweight Tension Structures”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3 (1974) 135-149, North-Holland Publishing Company
  - 25) [www.staedte-fotos.de/](http://www.staedte-fotos.de/)
  - 26) Veenendaal D., Block P.: „An overview and comparison of structural form finding methods for general networks“, International Journal of Solids and Structures 49, 2012. (3741-3753)
  - 27) Höller R.: „FormFindung: architektonische Grundlagen für den Entwurf von mechanisch vorgespannten Membranen und Seilnetzen“; Mähringen : Balistier, 1999

## БИОГРАФИЈА АУТОРА

Кандидат Јана Липковски, дипл. инж. арх. рођена је 14.12.1979. године у Београду. Основну школу завршила у Београду, где је завршила V београдску гимназију. Уписала Факултет за архитектуру и урбанизам Универзитета у Штутгарту, школске 1998/1999.године са конструктивним тежиштем. Студије завршила 2004. године одбраном дипломског рада са оценом 1.7 на тему: „Реконструкција Зеленог Венца у Београду – наткривање простора пијаце мембранском конструкцијом“ и стекла звање дипломираног инжењера архитектуре.

Постдипломске студије „Computational Engineering” уписала је школске 2005/2006. године на Грађевинском факултету Универзитета у Београду и 2013. одбранила магистарску тезу под насловом: „*Form-finding and Modeling of Membrane Structures based on Minimal Surfaces*“.

Након завршетка редовних студија, од 2005. запослена у звању самосталног стручног сарадника у Заводу за унапређивање образовања и васпитања Републике Србије.

Од 2007. спољни сарадник атељеа за архитектонске моделе и прототипове Florian Weinmann, Штутгарт – Београд.

Од 2013. спољни сарадник архитектонског бироа NP Architekten, Гепинген – Београд.

Говори енглески и немачки језик.

Мајка троје деце.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а \_\_\_\_\_  
број индекса \_\_\_\_\_

**Изјављујем**

да је докторска дисертација под насловом

---

---

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске  
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора \_\_\_\_\_

Број индекса \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада \_\_\_\_\_

Ментор \_\_\_\_\_

Потписани/а \_\_\_\_\_

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада. Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



### Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

---

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

---

1. Ауторство - Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.