УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Тијана З. Шукиловић

Геометрија четвородимензионих нилпотентних Лијевих група

докторска дисертација

Београд, 2015

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Tijana Z. Šukilović

Geometry of four-dimensional nilpotent Lie groups

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор

др Срђан Вукмировић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије

др Срђан Вукмировић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Божидар Јовановић, научни саветник,
Математички институт САНУ

проф. др Мирјана Ђорић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Мирослава Антић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Геометрија четвородимензионих нилпотентних Лијевих група

Резиме: У овом раду излажемо класификацију лево-инваријантних метрика произвољне сигнатуре на четвородимензионим нилпотентним Лијевим групама. Детаљно испитујемо њихову геометрију, са посебним нагласком на групе холономија и декомпозабилност метрика. Такође, потпуно описујемо групе изометрија и налазимо примере метрика за које су задовољене строге неједнакости $I^{split} < I^{aut} < I$. У случају метрика неутралне сигнатуре на нилпотентним Лијевим групама са дегенерисаним центром добијамо Вокерове метрике. Формулишемо и доказујемо потребан и довољан услов да оне допуштају нилпотентну групу изометрија.

На крају, дајемо одговор на питање егзистенције пројективно еквивалентних метрика. Показујемо да су на четвородимензионим нилпотентним Лијевим групама све лево-инваријантне метрике или геометријски ригидне или постоје њима пројективно еквивалентне метрике које су истовремено и афино еквивалентне. Иако су све афино еквивалентне метрике лево-инваријантне, њихова сигнатура може бити различита.

Кључне речи: нилпотентне Лијеве групе, групе холономија, групе изометрија, геодезијски еквивалентне метрике.

Научна област: Математика
Ужа научна област: Геометрија

УДК број: 514.765(043.3)

Geometry of four-dimensional nilpotent Lie groups

Abstract: In the present work we classify left invariant metrics of arbitrary signature on four-dimensional nilpotent Lie groups. Their geometry is extensively studied with special emphasis on holonomy groups and decomposability of metrics. Also, isometry groups are completely described and we give examples of metrics where strict inequalities $I^{split} < I^{aut} < I$ hold. It is interesting that Walker metrics appear as the underlying structure of neutral signature metrics on the nilpotent Lie groups with degenerate center. We find necessary and sufficient condition for them to locally admit nilpotent group of isometries.

Finally, we solve the problem of projectively equivalent metric on four-dimensional nilpotent Lie groups by showing that left invariant metric is either geometrically rigid or have projectively equivalent metrics that are also affinely equivalent. All affinely equivalent metrics are left invariant, while their signature may change.

Key words: nilpotent Lie group, holonomy groups, isometry groups, geodesically equivalent metrics.

Academic discipline : Mathematics
Academic sub-discipline : Geometry

UDK number: 514.765(043.3)

Предговор

Истраживањем у овој области почели смо да се бавимо покушавајући да боље разумемо везу између наизглед различитих области математике и механике. Велики број резултата добијен је управо током стручних дискусија са колегама проф. др Недом Бокан и ментором др Срђаном Вукмировићем. У току боравка на Фридрих Шилер Универзитету (Friedrich-Schiller-Universität) у Јени, дошли смо на идеју да се бавимо истраживањем пројективне еквивалентности метрика. Дискусије које смо тада водили са др Владимиром Матвејевим и др Владимиром Киосаком биле су нам од суштинске помоћи.

Ментору, др Срђану Вукмировићу, дугујем неизмерну захвалност на стрпљењу и знању које је несебично преносио. Већина резултата директна је последица заједничке сарадње и бројних стручних дискусија.

Проф. др Неди Бокан захвална сам пре свега на пријатељству и подршци, али и на саветима и помоћи указаној приликом израде ове дисертације.

Посебну захвалност дугујем члановима комисије, др Божидару Јовановићу, проф. др Мирјани Ђорић и др Мирослави Антић. Њихови стручни коментари и сугестије значајно су допринели квалитету овог рукописа и указали су на смернице за даљи наставак истраживања.

На крају, желела бих да се захвалим својој породици на дугогодишњој подршци и разумевању.

Београд, јануар 2015. године — Тијана Шукиловић

Садржај

Резиме (српски/енглески)

Предговор

Увод **1**

1 Геометрија Лијевих група и алгебри **4**
1.1 Лијеве групе и алгебре 4
1.1.1 Основне дефиниције 4
1.1.2 Нилпотентне Лијеве групе и алгебре 6
1.2 Хајзенбергова група 7
1.2.1 Група H_3 8
1.2.2 Уопштене Хајзенбергове групе 10
1.3 Кривина 11
1.4 Холономије 13
1.4.1 Лоренцове групе холономија 16
1.4.2 Холономије у неутралној сигнатури 19
1.5 Килингова поља 20

2 Класификација лево-инваријантних метрика **22**
2.1 Аутоморфизми 22
2.2 Класификација скаларних производа 24
2.2.1 Риманов случај 24
2.2.2 Лоренцова сигнатура 25
2.2.3 Неутрална сигнатура 29
2.3 Лево-инваријантне метрике 31

3 Геометријска својства **36**
3.1 Кривине 36
3.1.1 Риманов случај 37
3.1.2 Псеудо-Риманов случај 38
3.2 Холономије 39
3.2.1 Лоренцова сигнатура 40
3.2.2 Неутрална сигнатура 41
3.3 Вокерове метрике 42
3.4 Додатне структуре 50

4 Изометрије **52**
4.1 Групе изометрија . . . 53
4.1.1 Недегенерисан центар . . . 54
4.1.2 Дегенерисан центар . . . 54

5 Пројективна еквивалентност метрика **57**
5.1 Алгоритам за налажење пројективно еквивалентних метрика . . . 57
5.2 Пројективна еквивалентност метрика . . . 59

Закључак **66**

Литература **68**

Прилози
А Табеле
Б Речник страних појмова и имена

Биографија

Увод

Нилпотентне и решиве Лијеве групе са лево-инваријантним метрикама имају важну улогу у Римановој геометрији. У многим случајевим појављују се на сасвим природан начин, на пример у Ивасава декомпозицији група изометрија некомпактних Риманових симетричних простора. Такође, свака повезана хомогена Риманова многострукост са непозитивном секционом кривином може се представити као повезана решива Лијева група са лево-инваријантном метриком.

У теорији нилпотентних Лијевих група посебно место заузимају 2-степ нилпотентне групе. П. Еберлан [22] је детаљно изучавао њихову геометрију, са посебним нагласком на Хајзенбергове групе, као значајну подкласу просто повезаних 2-степ нилпотентних Лијевих група са лево-инваријантном метриком. Уопштене Хајзенбергове групе дефинисао је А. Каплан [33] 80-тих година XX века у склопу истраживања хипоелиптичких парцијалних диференцијалних једначина. Полазећи од репрезентације Клифордових алгебри, А. Каплан је дефинисао класу просто повезаних 2-степ нилпотентних Лијевих група са лево-инваријантном метриком, која је обухватала и класичне Хајзенбергове групе. Наиме, свакој уопштеној Хајзенберговој групи са n-димензионим центром може се придружити репрезентација Клифордове алгебре у $\mathbb{R}^n$, у односу на негативно дефинитну квадратну форму. Нилмногострукости, које се јављају као компактни количници уопштених Хајзенбергових група, представљају неисцрпан извор примера и контрапримера у спектралној геометрији.

Разлика између Риманове и псеудо-Риманове геометрије долази до изражаја већ у најједноставнијем примеру Хајзенбергове групе H_3. Док у Римановом случају постоји само једна фамилија лево-инваријантних метрика на H_3, у Лоренцовом случају, С. Рахмани [50] је показала да постоје три фамилије неизометричних метрика, од којих је једна равна. Интересантно је да у општем случају, за $n > 1$, на Хајзенберговој групи H_{2n+1} такође постоје три фамилије метрика, али ни једна од њих није равна [58].

Групе изометрија додатни су индикатор различитости дефинитног и индефинитног случаја. Посматрамо три типа изометрија: групе изометријских аутоморфизама I^{aut}, групе изометрија I^{split} које чувају разлагање $TN = \upsilon N \oplus \xi N$ и групе свих изометрија I, за које важи $I^{split} \leq I^{aut} \leq I$. Од посебног значаја су примери метрика за које важе строге неједнакости. Показано је да се у Римановом случају група изометријских аутоморфизама поклапа са групом изометрија Лијеве групе N која фиксира јединични елемент и претходно разлагање, тј. важи $I^{split} \cong I^{aut} \cong I$. Ситуација је битно различита у псеудо-Римановом случају. Наиме, ако је центар групе дегенерисан, група изометрија може бити знатно већа него у дефинитном случају, или индефинитном са недегенерисаним центром. Л. Кордеро и Ф. Паркер су у [19] изучавали групе изометрија на псеудо-Римановим 2-степ нилпотентним групама са лево-инваријантном метриком, док су В. дел Барко и Г. Овандо разматрале би-инваријантне метрике на 2-степ нилпотентним Лијевим групама [20].

Интеграбилност Хамилтонових система на Лијевим алгебрама још је једна од значајних тема везаних за теорију Лијевих група и алгебри (видети [56], [57]), посебно ако се има у виду веза са пројективном еквивалентношћу метрика. Пројективна или геодезијска еквивалентност метрика интензивно се проучава у области опште теорије релативности. Иако се први примери пројективно еквивалентних метрика јављају крајем XIX века у радовима Ж. Лагранжа и Е. Белтрамија, тек са појавом Н. Сињукова и његових ученика ова област доживљава прави процват. Показано је да су на симетричним просторима све геодезијски еквивалентне метрике и афино еквивалентне (видети [52]). Површи константне кривине допуштају геодезијски еквивалентне метрике. Користећи различите приступе, В. Матвејев и В. Киосак са једне, а Г. Хал и Д. Лони са друге стране, конструисали су примере четвородимензионих Лоренцових метрика које су пројективно еквивалентне, а нису афино еквивалентне. Иако постоје резултати у неким специјалним случајевима, попут Ајнштајновог, питање пројективне еквивалентности, у општем случају Лијевих група, још увек је отворено.

Теза је подељена у пет поглавља.

У Глави 1 подсећамо се основних појмова и својстава Лијевих групи и алгебри. Посебну пажњу посвећујемо класичним и уопштеним Хајзенберговим групама. Дефинишемо тензор кривине, Ричијев тензор, конформни и пројективни Вејлов тензор, као и скаларну кривину. Дејство групе холономија $Hol(M,g)$ омогућава нам да пратимо како се од тачке до тачке мења понашање објеката дефинисаних на многострукости M. Од посебног је значаја начин на који $Hol(M,g)$ дејствује на кривинском тензору R који прати инфинитезималне ефекте паралелног померања. Стога не изнанађује блиска повезаност кривине и холономије. На крају, дајемо дефиницију и примере Килингових поља на многострукости M.

Л. Мањин је показао да, до на изоморфизам, постоје само две четвородимензионе нилпотентне Лијеве алгебре, $\mathfrak{g}4$ и $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$, које нису Абелове [39]. Глава 2 посвећена је класификацији скаларних производа свих сигнатура на тим алгебрама. Риманов случај проучавао је Х. Лаурет [36], док је резултате у псеудо-Римановом случају аутор добио у сарадњи са Н. Бокан и С. Вукмировићем (видети [14], [54]). Теореме 2.7 и 2.8 дају координатни запис лево-инваријантних метрика дефинисаних скаларним производима из класификације. Иако је геометрија 2-степ нилпотентне алгебре $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ детаљно изучавана од стране бројних аутора, то није случај са 3-степ нилпотентном алгебром $\mathfrak{g}4$. Управо ће одговарајућа Лијева група G_4 бити права ризница примера и контрапримера, почев од чињенице да на њој постоје примери геодезијски некомплетних метрика, док су све метрике на групи $H_3 \times \mathbb{R}$ геодезијски комплетне.

Глава 3 садржи оригиналне резултате и у њој проучвамо геометријска својства четвородимензионих нилпотентних Лијевих група. Показујемо да на њима не постоје Ајнштајнове метрике и дајемо примере равних, конформно равних и ауто-дуалних метрика. Занимљиво је да су све метрике на групи G_4 недекомпозабилне, док на групи $H_3 \times \mathbb{R}$, у случају недегенерисаног центра, налазимо метрике које се распадају на директан производ метрика одговарајуће сигнатуре на Хајзенберговој групи H_3 са једнодимензионим равним фактором $\mathbb{R}$. У Лоренцовој сигнатури, све лево-инваријантне метрике на нилпотентним четвородимензионим Лијевим групама са алгебром холономије $\mathbb{R}^2$ су хомогени пп-таласи (видети Последицу 3.1). Метрике овог типа имају велики значај у гравитацији. У неутралној сигнатури, када је центар групе дегенерисан, одговарајуће метрике су Вокерове. Лема 3.8 нам даје потребан и довољан услов да Вокерова метрика локално допушта нилпотентну групу изометрија.

У Глави 4 је изложена потпуна класификација група изометрија. Употпуњени су и систематизовани резултати Л. Кордера и Ф. Паркера из [19]. Показано је да је неједнакост $I^{aut} < I$ задовољена за све метрике на нилпотентним Лијевим групама са дегенерисаним центром. Такође, пронађене су све метрике за које важе строге неједнакости $I^{split} < I^{aut} < I$. Резултати изложени у овој глави предмет су проучавања аутора у [55].

Питањем пројективне еквивалентности лево-инваријантних метрика на четвородимензионим нилпотентним Лијевим групама бавимо се у Глави 5. Одељак 5.2 садржи оригиналне резултате делом објављене у [14]. У Теореми 5.3 тврдимо да ако је метрика g лево-инваријантна, а метрика $\bar{g}$ јој је геодезијски еквивалентна, тада су оне или афино еквивалентне, или је g геодезијски ригидна. За лево-инваријантну метрику g сигнатуре (p, q), метрика $\bar{g}$ такође мора бити лево-инваријантна, али не нужно исте сигнатуре као g.

1 Геометрија Лијевих група и алгебри

1.1 Лијеве групе и алгебре

1.1.1 Основне дефиниције

Дефиниција 1.1. **Лијева група** G је диференцијабилна многострукост на којој је задата и структура групе тако да су операције множења и инверзног елемента глатка пресликавања.

Примедба 1.1. *У дефиницији Лијеве групе довољно је претпоставити да је операција множења глатка јер из тога следи да је и инверз глатко пресликавање.*

Нека је G Лијева група и нека је са $\mathit{Diff}(M)$ означена група дифеоморфизама многострукости M, која у општем случају не мора бити Лијева група.

Дефиниција 1.2. Хомоморфизам $\varphi : G \to \mathit{Diff}(M)$ назива се **дејство** групе G на многострукост M ако је пресликавање

$$\begin{array}{rcl} G \times M & \to & M \\ (g, x) & \mapsto & \varphi(g)x \end{array}$$

глатко.

Дефиниција 1.3. Дејство L групе G на саму себе, дефинисано са

$$L : G \to \mathit{Diff}(G), \quad g \mapsto L_g, \quad L_g(h) = L_g h := g \cdot h, \quad g, h \in G,$$

назива се **дејство левим транслацијама**, а L_g је **лева транслација** за елемент $g \in G$.

Слично се дефинише **дејство десним транслацијама** R, односно **десне транслације** R_g за елемент $g \in G$.

Дефиниција 1.4. **Лијева алгебра** $\mathfrak{g}$ над пољем $\mathbb{R}$ је реални векторски простор са дефинисаном билинеарном операцијом $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ таквом да

а) $[x, y] = -[y, x]$, (антикомутативност)
б) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$, (Јакобијев идентитет)

важи за све $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Простор $\mathfrak{X}(M)$ векторских поља на многострукости M идентификујемо са простором деривација алгебре $C^\infty(M)$ глатких функција на M. У односу на операцију комутатора векторских поља

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

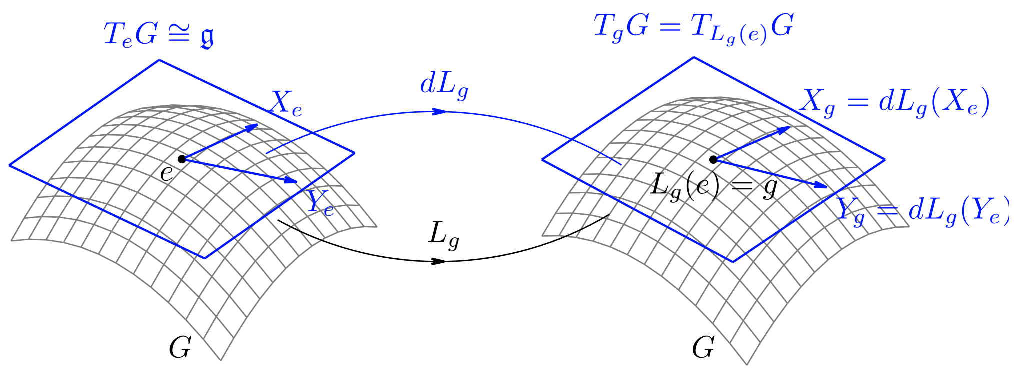
где X и Y посматрамо као деривације, $\mathfrak{X}(M)$ је бесконачнодимензиона Лијева група. Приметимо да је скуп свих лево-инваријантних векторских поља $\mathfrak{X}_L(M)$ на Лијевој групи G подалгебра од $\mathfrak{X}(G)$. Такође, свако лево-инваријантно векторско поље X је одређено својом вредношћу у јединичном елементу e групе:

$$X_g \ := \ X(g) \ = \ dL_g X_e, \quad g \in G.$$

Овде смо са dL_g означили леве транслације векторских поља које представљају диференцијал левих транслација у групи. Када вектору X доделимо његову вредност у јединичном елементу $e \in G$, успостављамо изоморфизам векторских простора $\mathfrak{X}_L(M)$ и T_eG.

Дефиниција 1.5. Лијева алгебра Лијеве групе G, у ознаци $\mathfrak{g} = Lie\, G$, је тангентни простор T_eG са операцијом комутатора

$$[X_e, Y_e] := [X, Y]_e, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(G), \ X_e, Y_e \in T_eG.$$



Слика 1.1: Лијева група G и Лијева алгебра $\mathfrak{g}$

Дефиниција 1.6. Метрика g на Лијевој групи G је **лево-инваријантна** ако важи

$$g(X, Y) = g(dL_p(X), dL_p(Y)), \quad \forall p, q \in G, \ \forall X, Y \in T_qG.$$

Слично, метрика g је **десно-инваријантна** ако је свака десна транслација R_p изометрија.

Лема 1.1. *Постоји „$1-1$” кореспонденција између скупа метрика на Лијевој групи G и скупа скаларних производа на Лијевој алгебри $\mathfrak{g} = Lie\, G$.*

Доказ. За $p \in G$ и $X, Y \in T_pG$ метрику g дефинишемо са

$$g(X, Y) = \langle dL_{p^{-1}}(X), dL_{p^{-1}}(Y) \rangle.$$

У обрнутом смеру, дата функција $g(X, Y)(\cdot) : G \to \mathbb{R}$ је константна на групи G. Заиста, за $p \in G$ и $X, Y \in \mathfrak{g}$, користећи особину леве-инваријантности векторских поља, имамо

$$g(X_p, Y_p) = g(dL_p(X), dL_p(Y)) = g(X, Y) = \langle X, Y \rangle,$$

па $\langle \cdot, \cdot \rangle$ дефинише скаларни производ на $\mathfrak{g}$. $\square$

Свако $X \in \mathfrak{g}$ представља лево-инваријантно векторско поље на G, те одређује ток $\Phi^X : \mathbb{R} \times G \to G$. Глатко пресликавање

$$exp_{\mathfrak{g}} : \ \mathfrak{g} \to G, \quad X \mapsto \Phi^X(1, e)$$

назива се Лијево **експоненцијално пресликавање**.

Свака Лијева група G има природну репрезентацију у својој алгебри $\mathfrak{g} = Lie\, G$. За произвољни елемент $g \in G$, са M_g означавамо унутрашњи аутоморфизам групе одређен елементом g :

$$M_g : G \to G, \quad x \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1}.$$

Приметимо да је $M_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$.

Дефиниција 1.7. Придружена репрезентација Лијеве групе G је пресликавање

$$Ad : \ G \to GL(\mathfrak{g}), \ g \mapsto Ad_g := (dM_g)_e,$$

где $(dM_g)_e$ означава диференцијал пресликавања M_g у јединичном елементу e.

Примедба 1.2. *За произвољно $x \in \mathfrak{g}$ дефинишемо оператор $\operatorname{ad} x$ као линеарно пресликавање $\operatorname{ad} x : \ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$*

$$\operatorname{ad} x(y) = [x, y], \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Приметимо да је $\operatorname{ad} x = d(Ad)_x$. Из Јакобијевог идентитета следи да се пресликавање $\operatorname{ad} x$ може посматрати као „диференцирање" Лијеве алгебре, тј. $\operatorname{ad} x$ задовољава Лајбницово правило

$$\operatorname{ad} x([y, z]) = [\operatorname{ad} x(y), z] + [y, \operatorname{ad} x(z)].$$

Нека је $\gamma(t)$ крива на Лијевој групи G. Крива $\Gamma(t)$ дефинисана са

$$\Gamma(t) = dL^{-1}_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t)$$

назива се крива у алгебри $\mathfrak{g}$ придружена кривој $\gamma(t)$.

Лема 1.2. *Крива $\gamma(t)$ је геодезијска на (G, g) ако и само ако је придружена крива $\Gamma(t)$ решење једначине*

$$\dot{x} = ad^t_x x,$$

где смо са ad^t_x означили придружено дејство алгебре у односу на индуковани скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.1.2 Нилпотентне Лијеве групе и алгебре

Дефиниција 1.8. Центар Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$ сачињавају сви елементи $x \in \mathfrak{g}$ за које важи $[x, y] = 0$, за свако $y \in \mathfrak{g}$.

Дефиниција 1.9. Комутаторска подалгебра или **изводна подалгебра** $\mathfrak{g}'$ Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$ је идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ генерисан са $[x, y]$, за све $x, y \in \mathfrak{g}$.

Дефиниција 1.10. Кажемо да је Лијева алгебра $\mathfrak{n}$ **нилпотентна** ако постоји коначан опадајући низ $(\mathfrak{n}_i)_{i\in[0,k]}$ идеала такав да је $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_k = 0$ и $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_i] \subset \mathfrak{n}_{i+1}$ за све $i \in [0, k-1]$. Ако је k најмањи број за који ово важи, тада кажемо је алгебра **k-степ нилпотентна**. Лијева група N је **нилпотентна** ако је њена Лијева алгебра $\mathfrak{n}$ нилпотентна.

Теорема 1.1. *Лијева алгебра $\mathfrak{n}$ је нилпотентна ако и само ако је линеарно пресликавање $\operatorname{ad} x$ нилпотентно за свако $x \in \mathfrak{g}$.*

Нека је са (N, g) означена нилпотентна Лијева група са лево-инваријантном метриком g и нека је $\mathfrak{n} = Lie\, N$ њена Лијева алгебра са индукованим скаларним производом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ произвољне сигнатуре.

Теорема 1.2. *Експоненцијално пресликавање $exp_{\mathfrak{n}} : \mathfrak{n} \to N$ је дифеоморфизам.*

Последица 1.1. *Нилпотентна Лијева група N је дифеоморфна са $\mathbb{R}^n$, те је она просто повезана.*

Л. Мањин је у раду [39] класификовао све нилпотентне Лијеве алгебре димензије ≤ 7. У чет製 четвородимензионом случају показао је да, до на изоморфизам, постоје само две нилпотентне Лијеве алгебре које нису Абелове: $\mathfrak{g}4$ и $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ редом, са одговарајућим просто повезаним Лијевим групама G_4 и $H_3 \times \mathbb{R}$.

Алгебра $\mathfrak{g}4$, у бази $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, дефинисана је ненула комутаторима

$$[x_1, x_2] = x_3, \qquad [x_1, x_3] = x_4. \tag{1.1}$$

Она је 3-степ нилпотентна са једнодимензионим центром $Z(\mathfrak{g}4) = \mathcal{L}(x_4)$ и дводимензионом комутаторском подалгебром

$$\mathfrak{g}4' := [\mathfrak{g}4, \mathfrak{g}4] = \mathcal{L}(x_3, x_4).$$

Алгебра $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ је у бази $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ задата ненула комутатором

$$[x_1, x_2] = x_3. \tag{1.2}$$

Као и Хајзенбергова алгебра $\mathfrak{h}_3$, 2-степ нилпотентна је и има дводимензиони центар $Z(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) = \mathcal{L}(x_3, x_4)$ и једнодимензиону комутаторску подалгебру разапету са x_3.

1.2 Хајзенбергова група

Хајзенбергова група игра важну улогу у теорији репрезентације нилпотентних Лијевих група. Такође, представља најједноставнији пример простора са природном контактном структуром.

Уведимо на простору $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n}_{(x,y)} \times \mathbb{R}_t$ операцију множења $\cdot$ са

$$(x, y, t) \cdot (x', y', t') = \left(x + x', y + y', t + t' + 2\sum_{j=1}^{n} a_j (x'_j y_j - x_j y'_j) \right), \tag{1.3}$$

где су $x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n$ и $a_1, \ldots, a_n$ су позитивне константе.

Дефиниција 1.11. Лијева група $H_{2n+1} = (\mathbb{R}^{2n+1}, \cdot)$ назива се **$(2n+1)$-димензиона Хајзенбергова група**.

Из дефиниције операције $\cdot$ следи да група H_{2n+1} није Абелова.

1.2.1 Група H_3

Постоји неколико начина да дефинишемо Хајзенбергову групу H_3. Један је да на $\mathbb{R}^3$ дефинишемо операцију множења са

$$(x, y, t) \cdot (x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + x'y - xy') .$$

Са друге стране, реална тродимензиона Хајзенбергова група H_3 је Лијева подгрупа од $SL(3, \mathbb{R})$ задата са

$$H_3 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ово следи директно из чињенице да је пресликавање задато са

$$(x, y, t) \ \mapsto \ \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}(xy - t) \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

изоморфизам. У наставку користимо матричну репрезентацију групе H_3.

Одговарајућа Лијева алгебра $\mathfrak{h}_3$ идентификује се са тангентним простором T_eH_3 на H_3 у јединичном елементу e. Постоји база $\{x_1, x_2, x_3\}$, у којој су структурне једначине Лијеве алгебре $\mathfrak{h}_3$ дате са

$$[x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = 0, \quad [x_2, x_3] = 0.$$

Алгебра $\mathfrak{h}_3$ је 2-степ нилпотентна са једнодимензионим центром

$$Z(\mathfrak{h}_3) = [\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3] = \mathcal{L}(x_3).$$

У бази $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ тангентног простора T_gH_3 посматрамо лево-инваријантна векторска поља, која у јединици e узимају вредости стандардних базних вектора простора $\mathbb{R}^3$:

$$x_1 = X_1|_e, \quad x_2 = X_2|_e, \quad x_3 = X_3|_e.$$

Покажимо да су та векторска поља дата са

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.4}$$

где је $g \in H_3$ произвољна тачка са координатама (x, y, z). Приметимо да за $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ важи

$$L_g(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + a & z + xb + c \\ 0 & 1 & y + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

односно

$$L_g(a, b, c) = (x + a, y + b, z + xb + c).$$

Одавде следи да је

$$dL_g(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Сада се лако проверава да важи:

$$\begin{aligned}
X_1(g) &= dL_g(a,b,c)(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}, \\
X_2(g) &= dL_g(a,b,c)(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \\
X_3(g) &= dL_g(a,b,c)(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

У Римановом случају постоји само једна фамилија лево-инваријантних метрика

$$g = \frac{1}{\lambda^2}dx^2 - dy^2 + (xdy - dz)^2,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

и тада је центар позитивно дефинитан. У Лоренцовом случају, С. Рахмани је показала да постоје три фамилије метрика које одговарају трима различитим могућностима за природу центра алгебре.

Теорема 1.3. *[50] Све лево-инваријантне Лоренцове метрике на H_3 су изоморфне, до на аутоморфизам, једној од следећих метрика*

$$\begin{aligned}
g_1 &= -\frac{1}{\lambda^2}dx^2 + dy^2 + (xdy + dz)^2, \\
g_2 &= \frac{1}{\lambda^2}dx^2 + dy^2 - (xdy + dz)^2,\ \lambda > 0, \\
g_3 &= dx^2 + (xdy + dz)^2 - ((1-x)dy - dz)^2.
\end{aligned}$$

Штавише, ове метрике су неизометричне и g_3 је равна.

Примедба 1.3. *Интересантно је да пример равне метрике налазимо само на групи H_3. У вишим димензијама, тј. на H_{2n+1}, $n > 1$, нема равних метрика.*

Лема 1.3. *[5] Све метрике на H_3 су геодезијски комплетне.*

Интересантно је и да постоји веза између изопериметријског проблема на Римановим површима и суб-Риманове геометрије тродимензионих многострукости. Најважнији пример представља изопериметријски проблем у равни који одговара геометрији Хајзенбергове групе H_3.

1.2.2 Уопштене Хајзенбергове групе

Уопштене Хајзенбергове групе увео је А. Каплан 80-тих година XX века. Дефинисао је класу 2-степ нилпотентних Лијевих група са лево инваријантном метриком која је укључивала и класичне Хајзенбергове групе. У литератури се ове групе називају још и групама Ха-типа.

Нека су ν и ξ реални векторски простори димензија $n, m \in \mathbb{N}$, редом, и нека је са $\beta: \ \nu \times \nu \to \xi$ означено кососиметрично билинеарно пресликавање. Нека је

$$\begin{aligned} J: \xi &\to End(\nu), \\ Z &\mapsto J_Z \end{aligned}$$

хомоморфизам алгебри дефинисан са

$$\langle J_Z U, V\rangle = \langle \beta(U,V), Z\rangle, \quad \text{за све } \ U,V \in \nu, \ Z \in \xi.$$

Посматрамо директну суму $\mathfrak{n} = \nu \oplus \xi$ са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ таквим да су ν и ξ ортогонални.

Структуру Лијеве алгебре на $\mathfrak{n}$ задајемо са

$$[U+X, V+Y] := \beta(U,X), \quad \text{за све } \ U,V \in \nu, \ X,Y \in \xi.$$

Дефиниција 1.12. Лијева алгебра $\mathfrak{n}$ назива се **уопштена Хајзенбергова алгебра** ако за свако $Z \in \xi$ важи

$$J_Z^2 = -\langle Z, Z\rangle \, id_\nu.$$

Одговарајућа просто повезана Лијева група N са лево-инваријантном метриком g назива се **уопштена Хајзенбергова група** или **група Ха-типа**.

Из претходне конструкције је очигледно да је ξ центар уопштене Хајзенбергове алгебре $\mathfrak{n}$.

Лема 1.4. *Свака уопштена Хајзенбергова алгебра $\mathfrak{n}$ је 2-степ нилпотентна.*

Доказ. Тврђење следи директно из чињенице да је $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \xi$ и $[\mathfrak{n}, \xi] = 0$. □

Последица 1.2. *Свака уопштена Хајзенбергова група N је 2-степ нилпотентна Лијева група.*

Потпуна класификација уопштених Хајзенбергових група се може извести коришћењем теорије репрезентације Клифордових алгебри. Наиме, постоји кореспонденција између репрезентације Клифордове алгебре $Cliff(\xi, q)$ са негативно дефинитном квадратном формом q и уопштене Хајзенбергове групе са m-димензионим центром. Ова кореспонденција је „1-1” ако је $m \not\equiv 3 (mod\ 4)$ и тада постоји јединствени иредуцибилан Клифордов модул ∂ и сваки Клифордов модул ν над $Cliff(\xi, q)$ је изоморфан са

$$\nu = \oplus^k \partial.$$

Ако је $m \equiv 3(mod\ 4)$, тада постоје два иредуцибилна Клифордова модула ∂_1 и ∂_2, $\dim \partial_1 = \dim \partial_2$, и сваки Клифордов модул ν над $Cliff(\xi, q)$ је изоморфан са

$$\nu = (\oplus^{k_1}\partial_1) \oplus (\oplus^{k_2}\partial_2),$$

за неке $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. Приметимо да различити Клифордови модули могу да дефинишу исту уопштену Хајзенбергову алгебру.

За детаљнији приказ уопштених Хајзенбергових група читаоце упућујемо на [10].

1.3 Кривина

Претпоставимо да је M многострукост димензије n на којој је дефинисана метрика g произвољне сигнатуре чија је Леви-Чивита повезаност означена са ∇. Нека је $\mathfrak{X}(M)$ скуп свих векторских поља класе C^∞ на многострукости M и нека је $\mathfrak{D}(M)$ прстен реалних функција класе C^∞ на M. Из практичних разлога, идентификујемо поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ са тензором $X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{D}(M)$ задатим са $X(Y) = g(X, Y)$, за све $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Дефиниција 1.13. Пресликавање $R :\ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ дефинисано са

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{1.5}$$

назива се **кривина** многострукости M за линеарну повезаност ∇.

Кривински тензор $R :\ \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{D}(M)$ дефинисан је са

$$R(X,Y,Z,W) = g\left(R(X,Y)Z, W\right), \quad X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.6}$$

Из дефиниције кривине директно следи да важи

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= -R(Y,X,Z,W) \\ g(R(X,Y)Z,W) &= -g(R(X,Y)W,Z). \end{aligned}$$

За локалне координате $x_1, \ldots, x_n$, лако се проверава да је R тензор 4. реда чије су компоненте у реперу $\left\{X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ дате са

$$R(X_i, X_j, X_k, X_l) = R_{ijkl}.$$

Дефиниција 1.14. Нека су $X, Y \in T_pM$. Билинеарна форма на простору T_pM дефинисана са

$$\rho(X,Y) = Tr(Z \mapsto R(Z,X)Y), \tag{1.7}$$

назива се **Ричијев тензор**.

Дефиниција 1.15. Скаларна кривина многострукости M је траг Ричијевог тензора и дата је формулом

$$\tau = \sum_i \rho_i^i = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ji}, \tag{1.8}$$

где смо са $R_{ij} = R^k_{ikj}$ означили компоненте Ричијевог тензора.

Дефиниција 1.16. Многострукост M је Ајнштајнова ако је Ричијев тензор ρ пропорционалан метричком тензору g.

Показује се да је коефицијент пропорционалности константа $\frac{\tau}{n}$, где је τ скаларна кривина, а n димензија многострукости. Уколико је та константа једнака нули, кажемо да је многострукост M **Ричи-равна**. Многострукост M је **равна** ако је кривина свуда једнака нули.

Дефиниција 1.17. За $n \geq 3$ дефинишемо **конформни Вејлов тензор** C у односу на метрику g и повезаност ∇ као тензор $(1,3)$ типа чије су компоненте дате се

$$\begin{aligned} C^i_{jkl} = R^i_{jkl} \quad &+ \quad \frac{1}{n-2}\left(\delta^i_l R_{jk} - \delta^i_k R_{jl} + g_{jk}R^i_l - g_{jl}R^i_k\right) \\ &+ \quad \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}\right). \end{aligned}$$

Дефиниција 1.18. За $n \geq 2$ дефинишемо **пројективни Вејлов тензор** W у односу на повезаност ∇ као тензор $(1,3)$ типа чије су компоненте дате се

$$W^i_{jkl} := R^i_{jkl} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^i_l R_{jk} - \delta^i_k R_{jl}\right). \tag{1.9}$$

Примедба 1.4. *Ако је $n = 2$, тада тензор C није дефинисан, а W је идентички једнак нули на M. У случају димензије $n = 3$ тензор C је свуда једнак нули на M, па се аналогно Вејловом тензору дефинише **Котонов тензор** као тензор 3. реда са компонентама*

$$C_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} + \frac{1}{2(n-1)}\left(\nabla_j \tau g_{ik} - \nabla_k \tau g_{ij}\right).$$

Примедба 1.5. *У даљем тексту и конформни и пројективни Вејлов тензор означавамо са W, уз јасно наглашавање о ком типу је реч.*

Дефиниција 1.19. Псеудо-Риманова многострукост M је **конформно равна** ако околина сваке њене тачке конформним пресликавањем може да се преслика на раван простор.

Лема 1.5. *а) Свака дводимензиона псеудо-Риманова многострукост је конформно равна.*
б) Псеудо-Риманова многострукост димензије $n = 3$ је конформно равна ако и само ако је Котонов тензор једнак нули.
в) Псеудо-Риманова многострукост димензије $n \geq 4$ је конформно равна ако и само ако је конформни Вејлов тензор једнак нули.

Подсетимо се да у случају четвородимензионих многострукости M Риманове и неутралне сигнатуре кривински тензор можемо посматрати као самоконјуговано пресликавање

$$R : \Lambda^2 T^*M \to \Lambda^2 T^*M$$

шестодимензионог простора $\Lambda^2 T^* M$ 2-форми на многострукости M. Постоји декомпозиција
$$\Lambda^2 T^* M = \Lambda^2_+ T^* M \oplus \Lambda^2_- T^* M = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$
простора 2-форми на тродимензиони простор ауто-дуалних и анти-ауто-дуалних 2-форми, које су редом $+1$ и -1 сопствени потпростори Хоџовог $*$ оператора. Имајући у виду ову декомпозицију, кривински тензор се може разложити у облику
$$R = \begin{pmatrix} W^+ & B \\ B^* & W^- \end{pmatrix} + \frac{\tau}{12} I, \tag{1.10}$$
где су са W^+ и W^- означене редом ауто-дуална и анти-ауто-дуална компонента конформног Вејловог тензора $W = W^+ \oplus W^-$, B је Ричијев тензор чији је траг једнак нули, а τ означава скаларну кривину.

Многострукост M назива се **ауто-дуална** ако је $W^- = 0$. Слично, ако је $W^+ = 0$, многострукост M је **анти-ауто-дуална.** Метрика g је Ајнштајнова акко је $B = 0$ и конформно равна акко је $W = 0$.

1.4 Холономије

Нека је M глатка многострукост димензије n и нека ∇ означава линеарну повезаност на тангентном раслојењу TM. За сваку криву $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ која почиње у тачки $p \in M$, тј. $\gamma(0) = p$, пресликавање
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\gamma(t)} : T_{\gamma(0)} &\longrightarrow T_{\gamma(t)} M \\ X &\longmapsto \mathcal{P}_{\gamma(t)}(X) := X(t) \end{aligned}$$
је изоморфизам векторских простора који се назива **паралелно померање**. Овде смо са $P_{\gamma(t)}(X)$ означили паралелно померање векторског поља X дуж криве γ.

Дефиниција 1.20. За линеарну повезаност ∇ **групу холономије** у тачки p дефинишемо са
$$Hol_p(M, \nabla) := \{\mathcal{P}_{\gamma(1)} \big| \gamma(0) = \gamma(1) = p\},$$
где $P_{\gamma(1)}$ означава паралелно померање вектора дуж петље $\gamma : [0,1] \mapsto M$ са почетком и крајем у тачки p, тј. $\gamma(0) = \gamma(1)$. Дакле, група холономије је подгрупа линеарне групе”
$$Hol_p(M, \nabla) \leq Aut(T_p(M)) \cong Gl_n(\mathbb{R}).$$
Њена компонента повезаности назива се **повезана група холономије**, у ознаци $Hol^0_p(M, \nabla)$, и то је група генерисана паралелним померањем дуж хомотопски тривијалних петљи.

Лема 1.6. *Ако је M просто повезана многострукост, тада је за сваку повезаност група холономије повезана, тј. $Hol_p(M, \nabla) = Hol^0_p(M, \nabla)$.*

Означимо са L_p скуп свих линеарних трансформација тангентног простора $T_p M$ у тачки p.

Дефиниција 1.21. **Инфинитезимална група холономије** $Hol(M,\nabla)$ је Лијева подгрупа од L_p која је генерисана скупом свих ендоморфизама простора T_pM облика

$$R(X,Y),\nabla R(X,Y),\nabla^2 R(X,Y),\ldots,\quad X,Y\in T_pM.$$

Одговарајућа Лијева алгебра означава се са $\mathfrak{hol}(M,\nabla)$ и у случају глатких повезаности може се израчунати помоћу кривинског тензора и његових коваријантних извода.

Лема 1.7. *[34] За глатке C^∞ повезаности, Лијева алгебра $\mathfrak{hol}(M,\nabla)$, као векторски простор, генерисана је линеарним пресликавањима*

$$\nabla^k R(X,Y;Z_1,\ldots,Z_k),\quad X,Y,Z_1,\ldots,Z_k\in T_pM,\ 0\le k<\infty.$$

Лема 1.8. *[34] За групе холономија реалних аналитичких повезаности на реалним аналитичким многострукостима важи*

$$Hol(M,\nabla)=Hol_p^0(M,\nabla).$$

Јасно је да $Hol_p(M,\nabla)\subset Gl(n,\mathbb{R})$ до на конјугацију. Свака затворена подгрупа од $Gl(n,\mathbb{R})$ може се реализовати као група холономије неке линеарне повезаности, али та повезаност може имати торзију.

Да бисмо израчунали групу холономија, користимо Амброз-Сингерову теорему о холономијама:

Теорема 1.4. *[1] За многострукост M са линеарном повезаношћу ∇ алгебра холономије је*

$$\mathfrak{hol}_p(M,\nabla)=\mathcal{L}\left\{\mathcal{P}^{-1}_{\gamma(t)}\circ R(\mathcal{P}_{\gamma(t)}X,\mathcal{P}_{\gamma(t)}Y)\circ\mathcal{P}_{\gamma(t)}\middle|\ \gamma(0)=p,\ X,Y\in T_pM\right\},$$

где је R оператор кривине за повезаност ∇.

Кривински ендоморфизам подалгебре $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ дефинисан је са

$$\mathcal{K}(\mathfrak{g}):=\left\{R\in\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes\ \mathfrak{g}\ \middle|\ R(x,y)z+R(y,z)x+R(z,x)y=0\right\}.$$

$\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ је $\mathfrak{g}$-модул, а простор $\mathfrak{g}^{\mathcal{K}}:=\mathcal{L}\left\{R(x,y)|\ x,y\in\mathbb{R}^n,R\in\mathcal{K}(\mathfrak{g})\right\}$ је идеал у $\mathfrak{g}$.

Дефиниција 1.22. $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ назива се **Бержеова алгебра** ако је $\mathfrak{g}^{\mathcal{K}}=\mathfrak{g}$.

Директна последица теореме Амброз-Сингера је следећа теорема:

Теорема 1.5. *Лијева алгебра групе холономије за повезаност без торзије на глаткој многострукости је Бержеова алгебра.*

Ако је g метрика сигнатуре (p,q) на Римановој многострукости M, тада је $Hol_p(M,\nabla)=Hol_p(M,g)$, где ∇ представља Леви-Чивита повезаност. Пошто је ∇ Леви-Чивита повезаност, паралелно померање чува метрику. Одавде следи да је група холономије, са једне стране, подгрупа од $O(T_pM,g)\cong O(p,q)$ и може се посматрати као подгрупа ортогоналне групе $O(p,q)$, која је дефинисана до на конјугацију у $O(p,q)$. Са друге стране, обезбеђено је да је за сваки потпростор $\mathcal{D} \in T_pM$ који је инваријантан при дејству групе холономије и његов ортокомплемент $\mathcal{D}^{\perp}$ такође инваријантан. Подсетимо се да сваком потпростору кога група холономија оставља инваријантним одговара дистрибуција инваријантна при паралелном померању.

Кажемо да група холономија дејствује **иредуцибилно** ако на тангентном раслојењу не постоје паралелни потпростори. У том случају група холономија је затворена. За позитивно дефинитне метрике група холономија дејствује потпуно редуцибилно, тј. тангентни простор се разлаже на потпросторе на којима је дејство тривијално или иредуцибилно. Ситуација је другачија у случају индефинитних метрика. Кажемо да група холономије дејствује **недекомпозабилно** ако је метрика дегенерисана на сваком инваријантном правом потпростору. У том случају и за саму многострукост кажемо да је **недекомпозабилна**. У Римановом (позитивно дефинитном) случају, недекомпозабилност је исто што и иредуцибилност.

Наредну теорему је у Римановом случају доказао Џ. де Рам, а касније је Х. Ву његов резултат уопштио на произвољну сигнатуру.

Теорема 1.6. *([21], [65]) Свака просто повезана, комплетна псеудо-Риманова многострукост (M,g) је изометрична производу просто повезаних, комплетних псеудо-Риманових многострукости од којих једна може бити равна, а на осталима холономија дејствује недекомпозабилно. Група холономије (M,g) је такође производ ових група холономија које дејствују недекомпозабилно.*

У Римановом случају, на основу претходне теореме, добијамо комплетну класификацију група холономија.

Теорема 1.7. *Свака просто повезана, комплетна Риманова многострукост (M,g) је изометрична производу просто повезаних, комплетних Риманових многострукости од којих једна може бити равна, а остале су или локално симетричне или им је група холономије једна од следећих:*

$$SO(n),\ U(n),\ SU(n),\ Sp(n),\ Sp(n)\cdot Sp(1),\ G_2 \ \text{ или } \ Spin(7).$$

За псеудо-Риманове метрике може се десити да један од фактора из Теореме 1.6 буде недекомпозабилан, али не и иредуцибилан. Ово значи да репрезентација холономије допушта инваријантни потпростор на коме је метрика дегенерисана, али не и прави недегенерисани инваријантни потпростор.

Ако група холономије $Hol_p(M,g) \subset SO_0(p,q)$ дејствује недекомпозабилно и редуцибилно, остављајући инваријантним дегенерисани потпростор $\mathcal{D} \subset T_pM$, тада она допушта тотално изотропни инваријантни потпростор

$$\mathcal{I} \ := \ \mathcal{D} \cap \mathcal{D}^{\perp}.$$

Ово значи да је $Hol_p(M,g)$ садржана у стабилизатору тотално изотропног потпростора

$$Hol_p(M,g) \subset SO_0(p,q)_{\mathcal{I}} \ := \ \{A \in SO_0(p,q) |\, A\mathcal{I} \subset \mathcal{I}\},$$

или у терминима одговарајуће Лијеве алгебре

$$\mathfrak{hol}_p(M,g) \subset so(p,q)_{\mathcal{I}} \ := \ \{a \in so(p,q) |\, a\mathcal{I} \subset \mathcal{I}\}.$$

1.4.1 Лоренцове групе холономија

Нека је M Лоренцова многострукост димензије $n+2$. Једина иредуцибилна група холономије многострукости M је максимална холономија $SO_0(1,n+1)$. У Лоренцовом случају, из Теореме 1.6 директно следи:

Последица 1.3. *Свака просто повезана, комплетна Лоренцова многострукост (M,g) је изометрична следећем производу просто повезаних, комплетних псеудо-Риманових многострукости*

$$(N,h)\times(M_1,g_1)\times\ldots\times(M_k,g_k),$$

где су (M_j,g_j), $j=1,\ldots,k$, или равне или иредуцибилне Риманове многострукости, а (N,h) је или $(\mathbb{R},-dt^2)$ или недекомпозабилна Лоренцова многострукост, чија је холономија или $SO_0(n+1,1)$ или је садржана у стабилизатору $SO_0(1,n+1)_{\mathcal{I}}$ нул линије $\mathcal{I}$. Група холономије многострукости (M,g) је производ група холономија подмногострукости (N,h) и (M_j,g_j), $j=1,\ldots,k$.

Посматрамо Лоренцове групе холономија које дејствују недекомпозабилно, али редуцибилно, односно оне групе које су садржане у стабилизатору $SO_0(n+1,1)$ нул линије $\mathcal{I}$ у T_pM. Тај стабилизатор је параболичка група $SO_0(1,n+1)_{\mathcal{I}}$ у конформној групи $SO_0(n+1,1)$. Ако идентификујемо T_pM са простором Минковског $\mathbb{R}^{1,n+1}$ и фиксирамо базу у којој је скаларни производ представљен матрицом

$$\begin{pmatrix} 0 & 0^t & 1\\ 0 & \mathbb{I}_n & 0\\ 1 & 0^t & 0\end{pmatrix},$$

где је са $\mathbb{I}_n$ означена n-димензиона јединична матрица, тада се Лијева алгебра повезане компоненте стабилизатора од $\mathcal{I}=\mathbb{R}\cdot X$ унутар конформне групе $SO_0(1,n+1)$ може записати као

$$so(1,n+1)_{\mathcal{I}}=\left\{\left.\begin{pmatrix} a & v^t & 0\\ 0 & A & -v\\ 0 & 0^t & -a\end{pmatrix}\ \right|\ a\in\mathbb{R}, v\in\mathbb{R}^n, A\in so(n)\right\}.$$

Очигледно, ова Лијева алгебра је полудиректни производ

$$so(1,n+1)_{\mathcal{I}}=(\mathbb{R}\oplus so(n))\ltimes\mathbb{R}^n, \tag{1.11}$$

где је комутатор задат на следећи начин:

$$[(a,A,v),(b,B,w)]=(0,[A,B]_{so(n)},(A+a\,Id)w-(B+b\,Id)v).$$

У декомпозицији (1.11) $\mathbb{R}$ је Абелова подлагебра од $so(1,n+1)_{\mathcal{I}}$ која комутира са $so(n)$, а $\mathbb{R}^n$ је Абелов идеал у $so(1,n+1)_{\mathcal{I}}$, $so(n)$ је полупрост, а $\mathbb{R}\oplus so(n)$ је редуктивни део од $so(1,n+1)_{\mathcal{I}}$. Одговарајуће повезане Лијеве групе у $SO(1,n+1)_{\mathcal{I}}$ су $\mathbb{R}_+, SO(n)$ и $\mathbb{R}^n$, док је $SO(1,n+1)_{\mathcal{I}}=(\mathbb{R}_+\times SO(n))\ltimes\mathbb{R}^n$.

Подалгебри $\mathfrak{h}\subset so(1,n+1)_{\mathcal{I}}$ можемо доделити пројекције $pr_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h})$, $pr_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{h})$ и $pr_{so(n)}(\mathfrak{h})$. Подалгебра $\mathfrak{g}:=pr_{so(n)}(\mathfrak{h})$ назива се **ортогонални део од $\mathfrak{h}$.** Приметимо да ако $\mathfrak{h}\subset so(1,n+1)_{\mathcal{I}}$ дејствује недекомпозабилно, тада је $pr_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}^n$, и

$\mathfrak{h}$ је Абелова ако и само ако је $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^n$. Штавише, $\mathfrak{h}$ има тривијалну репрезентацију ако и само ако је $pr_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}) = 0$. У овом случају (M, g) допушта паралелно нул векторско поље. Коначно, $\mathfrak{g} := pr_{so(n)}(\mathfrak{h}) \subset so(n)$ је компактна, тј. на њој постоји позитивно дефинитна инваријантна симетрична билинеарна форма. Ово значи да је $\mathfrak{g}$ редуктивна, односно да је њена Левијева декомпозиција $\mathfrak{g} = \xi \oplus \mathfrak{g}'$, где је ξ центар алгебре $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \xi^{\perp}$ полупроста Лијева алгебра.

Изложимо сада класификацију Лоренцових холономија.

Теорема 1.8. *[8] Нека је $\mathfrak{h}$ подалгебра од $so(1, n+1)_{\mathcal{I}} = (\mathbb{R} \oplus so(n)) \ltimes \mathbb{R}^n$ која дејствује недекомпозабилно на $\mathbb{R}^{n+2}$, и нека је $\mathfrak{g} := pr_{so(n)}(\mathfrak{h}) = \xi \oplus \mathfrak{g}'$ Левијева декомпозиција ортогоналног дела. Тада $\mathfrak{h}$ припада једном од следећих типова.*

1. *Ако $\mathfrak{h}$ садржи $\mathbb{R}^n$, тада постоје три типа:*

   Тип 1: *$\mathfrak{h}$ садржи $\mathbb{R}$. Тада је $\mathfrak{h} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}) \ltimes \mathbb{R}^n$.*

   Тип 2: *$pr_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}) = 0$. Тада је $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \ltimes \mathbb{R}^n$.*

   Тип 3: *не припада ни једном од претходна два типа. Тада постоји епиморфизам $\varphi : \xi \to \mathbb{R}$ такав да је $\mathfrak{h} = (\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}') \ltimes \mathbb{R}^n$, где је $\mathfrak{l} = \{\, (\psi(t), t) |\ t \in \xi\} \subset \mathbb{R}^l \oplus \xi$.*

2. *Ако $\mathfrak{h}$ не садржи $\mathbb{R}^n$, тада имамо*

   Тип 4: *Постоји нетривијална декомпозиција $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l,\ 0 < k, l < n$, и епиморфизам $\psi :\ \xi \to \mathbb{R}^l$ такав да је $\mathfrak{h} = (\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}') \ltimes \mathbb{R}^k \subset so(1, n+1)_{\mathcal{I}}$, где је $\mathfrak{l} = \{\, (\varphi(t), t) |\ t \in \xi\} \subset \mathbb{R} \oplus \xi$, и $\mathfrak{g} \subset so(k)$.*

Теорема 1.9. *[24] Нека је H повезана подгрупа од $SO_0(1, n+1)$ која дејствује недекомпозабилно и редуцибилно. Тада је H Лоренцова група холономије ако и само ако је њен ортогонални део Риманова група холономије.*

Од посебног значаја су Лоренцове многострукости са рекурентним и паралелним векторским пољима.

Дефиниција 1.23. Лоренцова многострукост са паралелним нул векторским пољем назива се **Бринкманов талас**.

Лема 1.9. *[37] Бринкманов талас (M, g) са паралелним нул векторским пољем X и индукованим паралелним дистрибуцијама $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^{\perp}$ је **пп-талас** ако и само ако тензор кривине R задовољава услов*

$$R(U, V) :\ \mathcal{D}^{\perp} \to \mathcal{D}, \quad \text{за све } U, V \in TM,$$

или, еквивалентно,

$$R(Y_1, Y_2) = 0, \quad \text{за све } Y_1, Y_2 \in \mathcal{D}^{\perp}.$$

Дефиниција 1.24. Лоренцова многострукост са рекурентним нул векторским пољем X назива се **пр-талас** ако је $R(U, V) :\ \mathcal{D}^{\perp} \to \mathcal{D}$, за све $U, V \in TM$, или, еквивалентно, $R(Y_1, Y_2) = 0$, за све $Y_1, Y_2 \in X^{\perp}$.

Лема 1.10. *[37] Лоренцова многострукост (M, g) са рекурентним нул векторским пољем X је пр-талас ако и само ако (M, g) има решиву холономију садржану у $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$. Додатно, (M, g) је пп-талас ако и само ако је холономија Абелова, односно садржана у $\mathbb{R}^n$.*

Постоји неколико значајних поткласа пп-таласа. Прва су **равански таласи** који представљају пп-таласе са квази-рекурентном кривином, тј. $\nabla R = \xi \oplus \widetilde{R}$, где су $\xi = g(X,)$ и $\widetilde{R}$ $(4,0)$-тензори.

На крају, размотримо случај четвородимензионих Лоренцових многострукости сигнатуре $(- + ++)$. Изложена класификација је преузета из [24]. Нека је H повезана група холономија четвородимензионе Лоренцове многострукости. Тада разликујемо следеће случајеве:

1. H дејствује иредуцибилно, односно $H = SO_0(1, 3)$, што може бити реализовано четвородимензионим де Ситеровом простору $S^{1,3}$.

2. H дејствује недекомпозабилно, али не и иредуцибилно. Тада H припада једном од следећих типова:

   а) $H = (\mathbb{R}_+ \times SO(2)) \ltimes \mathbb{R}^2$,

   б) $H = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$,

   в) $H = L \ltimes \mathbb{R}^2$, где је L задат графиком епиморфизма $\varphi : \ so(2) \to \mathbb{R}$,

   г) $H = \mathbb{R}^2$, тј. холономија четвородимензионог пп-таласа,

   д) $H = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$, тј. холономија четвородимензионог пр-таласа.

3. H дејствује декомпозабилно. Тада је:

   а) $H = SO(2)$, тј. холономија производа 2-сфере S^2 и дводимензионог простора Минковског $\mathbb{R}^{1,1}$,

   б) $H = SO(1, 1)$, тј. холономија производа дводимензионог де Ситеровог простора $S^{1,1}$ и $\mathbb{R}^2$,

   в) $H = SO(3)$, тј. холономија производа праве $(\mathbb{R}, -dt^2)$ и 3-сфере S^3,

   г) $H = SO(1, 2)$, тј. холономија производа реалне праве $\mathbb{R}$ и тродимензионог де Ситеровог простора $S^{1,3}$,

   д) $H = SO(1, 1) \times SO(2)$, тј. холономија производа дводимензионог де Ситеровог простора $S^{1,1}$ и 2-сфере S^2,

   ђ) $H = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}$, тј. холономија производа реалне праве $\mathbb{R}$ и тродимензионе Лоренцове многострукости која поседује рекурентни, али не и паралелни нул вектор (заправо, то је тродимензиони пр-талас),

   е) $H = \mathbb{R}$, тј. холономија производа реалне праве $\mathbb{R}$ и тродимензионе Лоренцове многострукости која поседује паралелни нул вектор (односно тродимензионим пп-таласом),

   ж) H је тривијална, односно то је холономија равног простора Минковског $\mathbb{R}^{1,3}$.

1.4.2 Холономије у неутралној сигнатури

Неутрална (n,n) сигнатура има најбогатији скуп иредуцибилних, несиметричних група холономија. Осим $SO(n,n)$ јављају се још и унитарне групе $U(p,p)$ и $SU(p,p)$, као и симплектичке групе $Sp(q,q)$ и $Sp(1)\cdot Sp(q,q)$, али и

$$SO(r,\mathbb{C}),\ Sp(p,\mathbb{R})\cdot SL(2,\mathbb{R}) \ \text{ и } \ Sp(p,\mathbb{C})\cdot SL(2,\mathbb{C}),$$

и на крају специјалне групе

$$G_2^{\mathbb{C}} \subset SO(7,7),\ Spin(4,3) \subset SO(4,4) \ \text{ и } \ Spin(7)^{\mathbb{C}} \subset SO(8,8).$$

Ипак, да би се добила комплетна класификација, потребно је разматрати и недекомпозабилне групе које нису иредуцибилне. Проблем класификације у општем случају још увек није решен, али је за $n=2$ потпуна класификација изложена у [9].

Ради компактнијег записа, уведимо следеће матрице:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Нека је M четвородимензиона многострукост сигнатуре $(2,2)$ и нека је H недекомпозабилна, редуцибилна група холономије од (M,g). Инваријантни тотално изотропни потпростор је нул линија или тотално изотропна раван. Приметимо да је први случај садржан у другом: ако је (e_1,e_2,e_3,e_4) база простора T_pM таква да метрика има облик

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

где e_1 разапиње инваријантну нул линију, тада је раван разапета са e_1 и e_2 такође инваријантна јер је Ae_2 ортогонално на e_1 за $A \in H$. Стога, у оба случаја, H оставља инваријантном тотално изотропну раван $\mathcal{I}$, односно Лијева алгебра $\mathfrak{h}$ од H је садржана у

$$so(2,2)_{\mathcal{I}} = \left\{ \begin{pmatrix} U & aJ \\ 0 & -U^T \end{pmatrix} \middle| \ U \in gl(2,\mathbb{R}), a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Алгебра $so(2,2)_{\mathcal{I}}$ је полудиректна сума $so(2,2)_{\mathcal{I}} = gl(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathcal{A}$, где је $\mathcal{A}$ идеал разапет са $\begin{pmatrix} 0 & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а комутатор је задат са

$$[(U,a),(V,b)] = ([U,V], b\cdot tr(U) - a\cdot tr(V)).$$

Може се показати да важи следећа теорема:

Теорема 1.10. *[9] Нека је $\mathfrak{h}$ недекомпозабилна подалгебра од $so(2,2)_{\mathcal{I}} \subset so(2,2)$. Тада је $\mathfrak{h}$ или садржана у идеалу који је у $SO_0(2,2)$ конјугован са $\mathcal{A}$ или је конјугован једном од следећа три изузетка*

$$\mathfrak{h}_1 = so(2) \oplus \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} rI + sJ & 0 \\ 0 & -rI + sJ \end{pmatrix} \middle| \ r,s \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{h}_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} K & J \\ 0 & K \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{h}_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} J & J \\ 0 & J \end{pmatrix}.$$

Примедба 1.6. *Алгебре $\mathfrak{h}_2$ и $\mathfrak{h}_3$ нису Бержеове алгебре, стога се не могу јавити као алгебре холономија.*

Последица 1.4. *Нека је $\mathfrak{h}$ недекомпозабилна Бержеова алгебра у $so(2,2)_{\mathcal{I}} \subset so(2,2)$. Тада је $\mathfrak{h}$ конјугована подалгебри која је или садржана у $\mathfrak{g}$ или садржи идеал $\mathcal{A}$.*

На основу овога, у [9] је изложена комплетна класификација недекомпозабилних, редуцибилних псеудо-Риманових многострукости сигнатуре $(2,2)$.

Теорема 1.11. *[9] Нека је $H \subset SO(2,2)$ недекомпозабилна, редуцибилна група холономије четвородимензионе псеудо-Риманове многострукости сигнатуре $(2,2)$ и нека је $\mathfrak{h}$ њена Лијева алгебра. Тада H оставља инваријантном тотално изотропну раван $\mathcal{I}$ и важи један од следећих случајева:*

1. *H оставља инваријантном још једну тотално изотропну раван комплементарну са $\mathcal{I}$. У том случају $\mathfrak{h} \subset gl(2,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{h}$ је конјугована у $SO_0(2,2)$ једној од следећих алгебри: $gl(2,\mathbb{R})$, $sl(2,\mathbb{R})$, алгебри строго горње троугаоних и горње троугаоних матрица,*

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_\lambda &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & \lambda a \end{array} \right) \middle| \ a,b \in \mathbb{R} \right\}, \ \textit{за } \lambda \in \mathbb{R}, \ \textit{или} \\ \mathfrak{h}_1 &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right) \middle| \ a,b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

2. *H не оставља инваријантном комплементарну тотално изотропну раван. Тада је Лијева алгебра $\mathfrak{h}$ конјугована семидиректној суми $\mathfrak{h}' \ltimes \mathcal{A}$, где је $\mathfrak{h}'$ конјугована једној од подалгебри из претходног случаја, $\mathbb{R} \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ или $\mathfrak{u}_\mu = \mathbb{R} \cdot \left(\begin{array}{cc} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{array} \right)$.*

Последица 1.5. *Група холономије четвородимензионе псеудо-Риманове многострукости неутралне $(2,2)$ сигнатуре је затворена.*

1.5 Килингова поља

Нека M означава многострукост са метриком g и Леви-Чивита повезаношћу ∇. Изометрија на M је трансформација која метрику g оставља инваријантном.

Дефиниција 1.25. Векторско поље X на многострукости M назива се **инфинитезимална изометрија** или **Килингово векторско поље** ако се локална једнопараметарска група локалних трансформација, генерисана пољем X у околини сваке тачке $p \in M$, састоји из локалних изометрија.

Лема 1.11. *[34] Векторско поље X на многострукости M је Килингово ако и само ако важи*

$$\mathfrak{L}_X g = 0, \tag{1.13}$$

где је $\mathfrak{L}$ Лијев извод, а g метрички тензор на M.

У терминима Леви-Чивита повезаности, услов (1.13) се записује као

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0, \quad \forall Y, Z \in M.$$

У локалним координатама, Килингову једначину записујемо у коваријантном облику

$$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0. \tag{1.14}$$

Пример 1. Размотримо еуклидску раван са метриком $g_{ij} = \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, 2\}$. Килингова једначина (1.14) своди се на систем линеарних једначина

$$\frac{\partial}{\partial x_1} X_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} X_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} X_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} X_2 = 0,$$

чије је опште решење векторско поље

$$X = a\frac{\partial}{\partial x_1} + b\frac{\partial}{\partial x_2} + c\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \qquad \diamond$$

Пример 2. На сфери S^2 посматрајмо стандардну метрику

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2.$$

Није тешко израчунати да постоје тродимензиона алгебра Килинговиx векторских поља дата са

$$X^1 = -\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad X^2 = \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad X^3 = \frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Директно се проверава важе релације

$$[X^1, X^2] = -X^3,\ [X^2, X^3] = -X^1 \ \text{ и } \ [X^3, X^1] = -X^2,$$

односно да Килингова векторска поља генеришу Лијеву алгебру $so(3)$. $\diamond$

Ако су X и Y Килингова векторска поља на многострукости M, тада је и $[X, Y]$ Килингово поље на M. Одавде директно следи да Килингова векторска поља $\mathfrak{X}_{Kil}(M)$ на многострукости M чине Лијеву подалгебру векторских поља $\mathfrak{X}(M)$ на M. Приметимо да, уколико је M комплетна, $\mathfrak{X}_{Kil}(M)$ представља Лијеву алгебру групе изометрија.

Пример 3. На простору Минковског једначина (1.13) имплицира да је векторско поље X инфинитезимални генератор једнопараметарске фамилије дифеоморфизама у односу на метрику простора (тј. изометрије). Другим речима, Килингова векторска поља на простору Минковског су управо генератори Поенкареове групе, односно групе коју сачињавају Лоренцове трансформације и транслације. $\diamond$

2 Класификација лево-инваријантних метрика

Први резултати у области класификације лево-инваријантних метрика везани су за позитивно дефинитни случај. У чувеном раду Милнора [45] проучавана је геометрија лево-инваријантних метрика на различитим типовима Лијевих група: компактним, унимодуларним, тродимензионим...

Шестодимензионе нилпотентне Лијеве групе класификовао је В. Морозов (видети [46]). Касније је Л. Мањин у [39] дао потпуну класификацију нилпотентних Лијевих група у малим димензијама ($n \leq 7$).

Х. Лаурет је детаљно изучавао Риманове нилмногострукости димензије 3 и 4, док су се Лоренцовим случајем у раду [18] бавили Л. Кордеро и Ф. Паркер. Аутори су у [16] класификовали четвородимензионе Лијеве групе са Ајнштајновим и Ричи-равним лево-инваријантним метрикама Лоренцове сигнатуре. Нилмногострукости димензије 5 проучаване су у [31].

Детаљан приказ лево-инваријантних метрика на Лијевим групама малих димензија може се наћи у књизи [3].

У Одељку 2.1 представљене су групе аутоморфизама алгебри $\mathfrak{g}4$ и $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$. Класификација скаларних производа у свим сигнатурама предмет је разматрања Одељка 2.2. У Римановом случају, потпуну класификацију је дао Х. Лаурет [36]. Резултате у Лоренцовом случају изложили су Н. Бокан, С. Вукмировић и аутор у раду [14], док је неутралну сигнатуру аутор разматрао у [54]. Координатни запис метрика у лево-инваријантној бази дат је у Одељку 2.3.

2.1 Аутоморфизми

Нека је N нилпотентна четвородимензиона Лијева група и $\mathfrak{n} = Lie\,N$ њена Лијева алгебра. Означимо са $Aut(\mathfrak{n})$ групу аутоморфизама Лијеве алгебре $\mathfrak{n}$ дефинисану са

$$Aut(\mathfrak{n}) := \{F : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n} \ \mid F \text{ - линеарно}, \ \ [Fx, Fy] = F[x, y], \ \ x, y \in \mathfrak{n}\}.$$

Лема 2.1. *[61] Нека су са $Aut(G)$ и $Aut(\mathfrak{g})$ означене редом групе аутоморфизама Лијеве групе G и њене Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$, а са $Aut_0(G)$ и $Aut_0(\mathfrak{g})$ њихове компоненте јединице. Ако је Лијева група G просто повезана, тада $Aut_0(G) \cong Aut_0(\mathfrak{g})$.*

Последица 2.1. $Aut(N) \cong Aut(\mathfrak{n})$.

У Одељку 1.1.2 дефинисали смо једине две четвородимензионе нилпотентне Лијеве алгебре које нису Абелове: $\mathfrak{g}4$ и $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$. Подсетимо се да је $\mathfrak{g}4$ алгебра задата ненула комутаторима (1.1). То је 3-степ нилпотентна алгебра која има једнодимензиони центар $Z(\mathfrak{g}4) = \mathcal{L}(x_4)$ и дводимензиону комутаторску подалгебру $\mathfrak{g}4' = \mathcal{L}(x_3, x_4)$.

Лема 2.2. *[36] Група* $Aut(\mathfrak{g}4)$ *аутоморфизама Лијеве алгебре* $\mathfrak{g}4$*, у бази* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$*, састоји се из реалних матрица облика:*

$$Aut(\mathfrak{g}4) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & a_1 b_2 & 0 \\ a_4 & b_4 & a_1 b_3 & a_1^2 b_2 \end{array} \right) \middle| \, a_1, b_2 \neq 0 \right\}. \tag{2.1}$$

Доказ. Нека су прве две колоне матрице $F \in Aut(\mathfrak{g}4)$, у бази $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, дате са

$$f_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4, \quad f_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4.$$

За последње две колоне матрице F важи:

$$\begin{array}{rcl} f_3 & = & F[x_1, x_2] = [Fx_1, Fx_2] = a_1 b_2 [x_1, x_2] + a_1 b_3 [x_1, x_3] = a_1 b_2 x_3 + a_1 b_3 x_4 \\ f_4 & = & F[x_1, x_3] = [Fx_1, Fx_3] = a_1^2 b_2 [x_1, x_3] = a_1^2 b_2 x_4. \end{array}$$

Приметимо да услов $[x_2, x_3] = 0$ повлачи $[f_2, f_3] = 0$, односно $b_1 = 0$. □

Алгебра $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ дефинисана је са (1.2). Она је 2-степ нилпотентна, има дводимензиони центар $Z(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) = \mathcal{L}(x_3, x_4)$ и једнодимензиону комутаторску подалгебру разапету са x_3.

Лема 2.3. *[36] Група* $Aut(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R})$ *аутоморфизама Лијеве алгебре* $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$*, у бази* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$*, састоји се из реалних матрица облика:*

$$Aut(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} A & 0 & 0 \\ b_1 & \det A & \mu \\ b_2 & 0 & \lambda \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} A \in GL(2, \mathbb{R}),\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2, \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 \end{array} \right\}. \tag{2.2}$$

Доказ. Центар алгебре $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ остаје очуван при дејству $F \in Aut(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R})$, односно

$$Fz = \alpha z, \quad z \in Z(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) = \mathcal{L}(x_3, x_4), \quad \text{за неко } \alpha \neq 0.$$

Са друге стране, из структурних једначина (1.2) следи да је $[Fx_1, Fx_2] = Fx_3$ и $[Fx_i, Fx_j] = 0$ у свим осталим случајевима. Одавде лако добијамо да матрица F има тражени облик (2.2). □

Лема 2.4. *Декомпозиција* $Aut(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R})$ *је*

$$Aut(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) = Aut(\mathfrak{h}_3) \cdot Aut(\mathbb{R}) \cdot M \cdot \mathbb{R}^2,$$

где је $M = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}.$

Доказ. Матрица

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & d & \mu \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in Aut(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}),\ d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

може се записати као производ матрица $F = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4$, где су

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu/\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Овде смо са α, β, γ и δ означили константе

$$\alpha = \frac{b_{11}\lambda - b_{21}\mu}{\lambda}, \quad \beta = \frac{b_{12}\lambda - b_{22}\mu}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{b_{21}}{\lambda}, \quad \delta = \frac{b_{22}}{\lambda}.$$

Приметимо да $M_1 \in Aut(\mathfrak{h}_3)$ и $M_2 \in Aut(\mathbb{R})$. Матрица $M_3 \in M$ не фиксира читав центар $Z(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) = \mathcal{L}(x_3, x_4)$, али фиксира прва три координатна вектора x_1, x_2 и x_3. Вектори $x_3, x_4 \in Z(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R})$ су фиксни при дејству матрице M_4, али је $\mathcal{L}(x_1, x_2) \subset \mathcal{L}(x_1, x_2, x_4) :\ x_1 \mapsto x_1 + \gamma x_4,\ x_2 \mapsto x_2 + \delta x_4$. Матрице M_4 чине алгебру изоморфну са $\mathbb{R}^2$. □

2.2 Класификација скаларних производа

Нека $\mathcal{S}(\mathfrak{n})$ означава скуп нееквивалентних скаларних производа $\langle \cdot, \cdot \rangle$ алгебре $\mathfrak{n}$. Ако је S симетрична матрица која представља скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ у једној бази, тада је $F^T S F,\ F \in Aut(\mathfrak{n})$ матрица истог скаларног производа у другој бази са идентичним комутаторима Лијеве алгебре. Проблем класификације скаларних производа сводимо на одређивање класа $F^T S F,\ F \in Aut(\mathfrak{n})$, где је S симетрична матрица задате сигнатуре.

2.2.1 Риманов случај

Наредне две теореме наводимо без доказа.

Теорема 2.1. *[36] На алгебри $\mathfrak{g}4$ позитивно дефинитни скаларни производ дат је матрицом*

$$S_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix},$$

уз услов $ac - b^2 > 0$.

Теорема 2.2. *[36] На алгебри $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ позитивно дефинитни скаларни производ дат је матрицом*

$$S_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mu > 0.$$

Примедба 2.1. *Ако допустимо хомотетију, тј. ако, уместо дејства*

$$S \mapsto F^T S F, \quad F \in Aut(\mathfrak{n}),$$

посматрамо

$$S \mapsto (\alpha F^T) S (\alpha F), \quad F \in Aut(\mathfrak{n}), \ \alpha \neq 0,$$

тада можемо постићи да је $ac - b^2 = 1$, за скаларни производ S_A на алгебри $\mathfrak{g}4$, и $\mu = 1$, у случају алгебре $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$.

2.2.2 Лоренцова сигнатура

Теорема 2.3. *[14] Скуп $\mathcal{S}(\mathfrak{g}4)$ нееквивалентних скаларних производа Лоренцове сигнатуре на алгебри $\mathfrak{g}4$ у бази $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ може се представити следећим матрицама*

$$\begin{aligned}
S_A^{\pm} &= \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}, & S_A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}, \\
S_1^{\lambda} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & S_2^{\lambda} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
S_3^{\lambda} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & S_4^{\lambda} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где су $\lambda > 0$, $b \geq 0$. Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ испуњава услов $\det A > 0$ за $S_A^{\pm}$ и $\det A < 0$ за S_A.

Доказ. Основна идеја је да посматрамо рестрикцију скаларног производа на дводимензиону комутаторску подалгебру $\mathfrak{g}4'$. Ако је рестрикција сигнатуре $(+,+)$ или $(+,-)$, добијамо редом скаларне производе $S_A^{\pm}$ и S_A. Ако је рестрикција дегенерисана, тј. сигнатуре $(+,0)$, тада разматрамо карактер центра $Z(\mathfrak{g}4) \subset \mathfrak{g}4'$. Производи представљени матрицама S_1^{λ}, S_2^{λ} и S_3^{λ}, S_4^{λ} одговарају редом нула и ненула центру.

Нека је S, $S^T = S$, произвољна симетрична матрица сигнатуре $(3,1)$, која представља скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ у бази $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. У истој бази аутоморфизам F алгебре $\mathfrak{g}4$ дат је Лемом 2.2. Потражимо базу $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ у форми

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4, & f_2 &= b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4, \\
f_3 &= a_1 b_2 x_3 + a_1 b_3 x_4, & f_4 &= a_1 b_2^2 x_4,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

која представља колоне матрице F, такву да је скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ у тој бази најједноставнијег облика. Приметимо да сигнатура скаларног производа $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на алгебри $\mathfrak{g}4'$ зависи од детерминанте доње десне 2×2 подматрице A матрице S.

Случај 1. $\mathfrak{g}4'$ је сигнатуре $(+,+)$ $(\det A>0)$.

Тада је ортокомплемент $\mathfrak{g}4'^{\perp}$ сигнатуре $(+,-)$ и $\mathfrak{g}4=\mathfrak{g}4'\oplus\mathfrak{g}4'^{\perp}$. Нека је $\{e_1,e_2\}$ ортонормирана база подалгебре $\mathfrak{g}4'^{\perp}$. Параметар $t\in\mathbb{R}$ хиперболичке ротације

$$f_1=\cosh t\, e_1+\sinh t\, e_2,\quad f_2=\sinh t\, e_1+\cosh t\, e_2$$

може се изабрати тако да је прва координата вектора f_2 једнака нули, те f_2 добија форму (2.3). Овакав избор f_1,f_2 такође одређује базу $\{f_3,f_4\}$ подалгебре $\mathfrak{g}4'$. Зато, у новој бази, матрица скаларног производа $\langle\cdot,\cdot\rangle$ има облик $S_A^{\pm}$. Знак „$\pm$" проистиче из чињенице да хиперболичка ротација не може да промени карактер вектора f_2, односно $\operatorname{sign}\langle f_2,f_2\rangle$. Може се показати да су скаларни производи, чија је матрична репрезентација $S_A^{\pm}$, међусобно нееквивалентни при дејству $F\in Aut(\mathfrak{g}4)$. Ипак, аутоморфизам F са ненула параметрима $a_1=-1,b_2=1$ може да промени знак елементу b у матрици A, па морамо поставити услов $b\geq 0$.

Случај 2. $\mathfrak{g}4'$ је сигнатуре $(+,-)$ $(\det A<0)$.

У овом случају ортокомплемент $\mathfrak{g}4'^{\perp}$ је сигнатуре $(+,+)$. Доказ је сличан претходном случају, али користи еуклидске ротације. Приметимо да овде нема „$\pm$" знака јер су сви јединични вектори из $\mathfrak{g}4'^{\perp}$ истог карактера.

Случај 3. $\mathfrak{g}4'$ је дегенерисана $(\det A=0)$.

Овде матрица A рестрикције скаларног производа $\langle\cdot,\cdot\rangle$ има облик

$$A=\begin{pmatrix} a & \sqrt{ac}\\ \sqrt{ac} & c\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

У $\mathfrak{g}4'$ постоји јединствени нул правац L и сви остали вектори $X\in\mathfrak{g}4'$ су просторни и ортогонални на L :

$$\langle L,L\rangle=0,\ \ \langle X,X\rangle=\lambda>0,\ \ \langle L,X\rangle=0.$$

Занимљиво је да је $\mathfrak{g}4'^{\perp}$ такође дегенерисана

$$\mathfrak{g}4'^{\perp}\cap\mathfrak{g}4'=\mathcal{L}(L).$$

Стога, сума $\mathfrak{g}4'^{\perp}+\mathfrak{g}4'$ представља тродимензиони векторски простор који не разапиње $\mathfrak{g}4$.

Случај 3а. Центар алгебре $\mathfrak{g}4$ је дегенерисан.

Дакле, за централни вектор x_4 важи $0=\langle x_4,x_4\rangle=c$. Одавде следи да је $b=0$ и матрица рестрикције скаларног производа је $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Сада се матрица S своди на облик

$$S = \begin{pmatrix} p & r & e & f \\ r & q & g & h \\ e & g & \lambda & 0 \\ f & h & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0.$$

Ставимо $f_3 = x_3$, $f_4 = x_4$ и $f_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$. Услов $f_1 \in \mathfrak{g}4'^{\perp}$, односно $\langle f_1, f_3\rangle = 0 = \langle f_1, f_4\rangle$, еквивалентан је са

$$a_1f + a_2h = 0, \ \ a_1e + a_2g + a_3\lambda = 0.$$

Претпоставимо да је $eh - fg \neq 0$, тако да систем има решење по a_1, a_2, уз услов $a_3 \neq 0$ да бисмо обезбедили да f_1 не буде колинеаран са $f_4 = x_4$. Нека је $f_2 = b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4$. Тада услов $\langle f_1, f_2\rangle = 0$ постаје

$$a_4h(fg - eh) + a_3(-egh + hr\lambda + f(g^2 - q\lambda)).$$

Под претпоставком $h \neq 0$, можемо одредити a_4 тако да важи $\langle f_1, f_2\rangle = 0$. Штавише, ако је $h \neq 0, eh - fg \neq 0$, можемо наћи b_3 тако да је $\langle f_2, f_3\rangle = 0$ и b_4 тако да је испуњено $\langle f_2, f_2\rangle = 0$. Такође, важи

$$\langle f_2, f_4\rangle = b_2h = t \neq 0.$$

У овако изабраној бази $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, матрична репрезентација скаларног производа $\langle\cdot,\cdot\rangle$ дата је са

$$S'(\lambda, \mu, t) = F^TSF = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где су $\lambda, \mu > 0$ и $t \neq 0$. Из релације

$$S'(\lambda_1, \mu_1, t_1) = F^TS'(\lambda, \mu, t)F, \tag{2.5}$$

директним рачуном, добијамо F тако да је $\mu_1 = 1 = t_1$, и матрица скаларног производа се своди управо на S_1^{λ}.

Ако је $h = 0$, ставимо $f_3 = x_3, f_4 = x_4$ и одредимо

$$f_2 = b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 \in \mathfrak{g}4'^{\perp}.$$

Примењујући поступак сличан претходном, добијамо да скаларни производ има облик S_2^{λ}.

На крају, услов $eh - fg = 0$ је еквивалентан услову да за неко $t \in \mathbb{R}$ важи $(e, f) = t(g, h)$. Другим речима, $x_1 - tx_2 \in \mathfrak{g}4'^{\perp}$. Због тога бирамо $f_1 \in \mathfrak{g}4'^{\perp}$ облика $f_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_4x_4$. Једноставном анализом долазимо до закључка да је и у овом случају скаларни производ S_1^{λ}.

Случај 3б. Центар алгебре $\mathfrak{g}4$ је недегенерисан.

Аналогно претходном, показује се да, ако је $g = 0$, скаларни производ је представљен матрицом S_3^{λ}, а ако је $g \neq 0$, матрицом S_4^{λ}. □

Теорема 2.4. *[14] Скуп $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R})$ нееквивалентних скаларних производа Лоренцове сигнатуре на алгебри $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ у бази $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ може се представити следећим матрицама*

$$
\begin{aligned}
S_\mu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad & S_\lambda^{\pm} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}, \\
S_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & & \\
S_{01} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & S_{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

за $\mu, \lambda > 0$.

Доказ. Примењујемо сличан поступак као у случају алгебре $\mathfrak{g}4$, само што се овде врши разматрање у односу на центар алгебре $Z(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) = \mathcal{L}(x_4, x_3)$.

Случај 1. Центар Z је позитивно дефинитан.

Посматрајмо аутоморфизам (2.2). Пошто је ортокомплемент $Z^\perp$ сигнатуре $(+,-)$, лако се проверава да матрице A, b_1, b_2 можемо увек изабрати тако да је:

$$F^T S F = S_\mu = diag(1, -1, d^2, 1), \ \mu = d^2 > 0.$$

Случај 2. Z је сигнатуре $(+,-)$.

Ортокомплемент је сигнатуре $(+,+)$. Разликујемо два случаја.

Случај 2а. $\langle x_3, x_3\rangle = \epsilon, \ \langle x_4, x_4\rangle = -\epsilon, \ \epsilon \in \{-1, 1\}$.

Слично првом случају, за одговарајући избор матрица A, b_1, b_2 у (2.2), добијамо да је

$$F^T S F = diag(1, 1, \epsilon d^2, -\epsilon).$$

За $\epsilon = 1$ одговарајући скаларни производ дат је матрицом S_λ^+, а за $\epsilon = -1$ матрицом S_λ^-.

Случај 2б. $\langle x_3, x_3\rangle = \langle x_4, x_4\rangle = 0, \ \langle x_3, x_4\rangle > 0$.

Како је $\langle x_3, x_4\rangle^\perp$ позитивно дефинитан, можемо изабрати $x_1', x_2' \in \langle x_3, x_4\rangle^\perp$ тако да је $\langle x_1', x_1'\rangle = \langle x_2', x_2'\rangle = 1, \ \langle x_1', x_2'\rangle = 0$. Ако ставимо

$$x_3' = \frac{1}{\sqrt{\langle x_3, x_4\rangle}} x_3, \quad x_4' = \frac{1}{\sqrt{\langle x_3, x_4\rangle}} x_4,$$

добијамо скаларни производ S_1.

Случај 3. Нека је Z дегенерисан.

Постоје тачно две могућности: или x_3 или x_4 је нул вектор.

Случај 3а: Ако је $\langle x_3, x_3\rangle = 0$, тада постоји $v \in \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ тако да је $\langle x_3, v\rangle \neq 0$. Ставимо $x_2' = -\frac{\langle v,v\rangle^2}{2\langle x_3,v\rangle^2}x_3 + \frac{1}{\langle x_3,v\rangle}v$. Приметимо да је $\langle x_2', x_2'\rangle = 0$ и $\langle x_3, x_2'\rangle = 1$.

Раван разапета векторима x_2' и x_3 је сигнатуре $(+,-)$, а $\mathcal{L}(x_3, x_2')^\perp$ је позитивно дефинитан. Покажимо да, за погодан избор $s \in \mathbb{R},\ t \neq 0$, вектор sx_3+tx_4 припада $\mathcal{L}(x_3, x_2')^\perp$:

$$\begin{aligned}
\langle x_3, sx_3+tx_4\rangle &= s\langle x_3,x_3\rangle + st\langle x_3,x_4\rangle = 0\\
\langle x_2', sx_3+tx_4\rangle &= s\langle x_2',x_3\rangle + t\langle x_2',x_4\rangle\\
&= s + t\langle -\frac{\langle v,v\rangle^2}{2\langle x_3,v\rangle^2}x_3 + \frac{1}{\langle x_3,v\rangle}v, x_4\rangle\\
&= s - \frac{t\langle v,v\rangle^2}{2\langle x_3,v\rangle^2}\langle x_3,x_4\rangle + \frac{t}{\langle x_3,v\rangle}\langle v,x_4\rangle\\
&= \frac{1}{\langle x_3,v\rangle}(s\langle x_3,v\rangle + t\langle v,x_4\rangle).
\end{aligned}$$

Ако је $\langle v, x_4\rangle = 0$, ставимо $s = 0,\ t \neq 0$. Иначе, $t = -\frac{\langle x_3,v\rangle}{\langle v,x_4\rangle}s,\ s \neq 0$. Сада векторе $x_1', x_4' \in \mathcal{L}(x_3, x_2')^\perp$ можемо изабрати тако да важи:

$$x_4' = \lambda(sx_3+tx_4),\ \langle x_1',x_1'\rangle = \langle x_4',x_4'\rangle = 1,\ \langle x_1',x_4'\rangle = 0.$$

Нека је

$$\begin{array}{lcrcrcrcl}
x_1' &=& a_{11}x_1 &+& a_{21}x_2 &+& a_{31}x_3 &+& a_{41}x_4,\\
x_2' &=& a_{12}x_1 &+& a_{22}x_2 &+& a_{32}x_3 &+& a_{42}x_4,\\
x_3' &=& & & & & x_3 & & ,\\
x_4' &=& & & & & a_{34}x_3 &+& a_{44}x_4, \quad a_{44}\neq 0
\end{array} \tag{2.6}$$

и нека је $d^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Тада је

$$Aut(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \ni F = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{d} & 0 & 0\\ a_{21} & \frac{a_{22}}{d} & 0 & 0\\ a_{31} & \frac{a_{32}}{d} & d & a_{34}\\ a_{41} & \frac{a_{42}}{d} & 0 & a_{44}\end{pmatrix} \implies F^TST = S_{01}.$$

Случај 3б: $\langle x_4, x_4\rangle = 0$.

Примењујући сличан поступак као у претходном случају, добијамо да је одговарајући скаларни производ S_{02}. □

2.2.3 Неутрална сигнатура

Теорема 2.5. *Скуп $\mathcal{S}(\mathfrak{g}4)$ нееквивалентних скаларних производа неутралне сигнатуре на алгебри $\mathfrak{g}4$ у бази $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ представљен је следећим матри-*

цама

$$\begin{aligned}
S_A &= \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}, \\
S_1^{\pm\lambda} &= \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2^{\pm\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
S_3^{\pm\lambda} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\lambda \end{pmatrix}, \quad S_4^{\pm\lambda} = \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\lambda \end{pmatrix}, \\
S_1^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где је $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1, 1\}$, $\lambda > 0$. *Матрица* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *има* $(+, -)$ *сигнатуру за* $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ *и* $(+, +)$, *односно* $(-, -)$, *сигнатуру за* $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \mp 1$.

Доказ. Доказ је потпуно аналоган случају Лоренцове сигнатуре (Теорема 2.3).

Ако је комутаторска подалгебра $\mathfrak{g}4'$ сигнатуре $(+, +), (-, -)$ или $(+, -)$, добијамо скаларне производе S_A (за одговарајуће вредности $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1, 1\}$).

Ако је $\mathfrak{g}4'$ делимично дегенерисана, разликујемо случајеве када је центар дегенерисан (скаларни производи $S_1^{\pm\lambda}$ и $S_2^{\pm\lambda}$) и када није (скаларни производи $S_3^{\pm\lambda}$ и $S_4^{\pm\lambda}$).

Испитајмо детаљније случај када је $\mathfrak{g}4'$ тотално дегенерисана, пошто овај случај није могућ у Лоренцовој сигнатури. Матрица S скаларног производа је облика

$$S = \begin{pmatrix} p & r & e & f \\ r & q & g & h \\ e & g & 0 & 0 \\ f & h & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Како дејство $F \in Aut(\mathfrak{g}4)$ не може да промени сигнатуру елемента h, након краћег рачуна, показује се да за $h = 0$ скаларни производ је представљен матрицом S_1^0, а за $h \neq 0$ постоје два нееквивалентна производа S_2^0 (у зависности од знака h). □

Теорема 2.6. *Скуп* $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R})$ *нееквивалентних скаларних производа неутралне сигнатуре на алгебри* $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ *у бази* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *представљен је следећим* *матрицама*

$$\begin{aligned}
S_\mu^\pm &= \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad & S_\lambda^\pm &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix}, \\
S_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad & S_0^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
S_{01}^\pm &= \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad & S_{02}^\pm &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где су $\lambda, \mu > 0$.

Доказ. Аналогно претходним случајевима, разматрање вршимо у зависности од сигнатуре центра $Z(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R})$ и тако добијамо изложену класификацију.

За недегенерисан центар, скаларни производи су дати матрицама $S_\mu^\pm, S_\lambda^\pm$ и S_1. У случају делимично дегенерисаног центра, скаларни производи су $S_{01}^\pm, S_{02}^\pm$, а у тотално дегенерисаном случају постоји јединствени производ S_0^0. □

2.3 Лево-инваријантне метрике

Скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на Лијевој алгебри $\mathfrak{n}$ дефинише лево-инваријантну метрику g на одговарајућој Лијевој групи N. У наставку дајемо координатни опис метрика дефинисаних скаларним производима из наше класификације.

Нека су са X_1, X_2, X_3, X_4 означена лево-инваријантна векторска поља на групи G_4, дефинисана са $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathfrak{g}4$:

$$x_1 = X_1|_e, \quad x_2 = X_2|_e, \quad x_3 = X_3|_e, \quad x_4 = X_4|_e. \tag{2.7}$$

Тада су за глобалне координате (x, y, z, w) на G_4 испуњене релације

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial w}, \\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial w}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial w}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Лијева група G_4, која одговара Лијевој алгебри $\mathfrak{g}4$, има матричну репрезентацију

$$G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & w \\ 0 & 1 & x & z \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Нека је $g \in G_4$ произвољна тачка са координатама (x, y, z, w). За $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, имамо да су леве транслације дате са

$$\begin{aligned} L_g(a,b,c,d) &= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & w \\ 0 & 1 & x & z \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} & d \\ 0 & 1 & a & c \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a+x & \frac{a^2}{2}+ax+\frac{x^2}{2} & d+cx+b\frac{x^2}{2}+w \\ 0 & 1 & a+x & c+bx+z \\ 0 & 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= L_g\left(a+x, b+y, c+bx+z, d+cx+b\frac{x^2}{2}+w\right). \end{aligned}$$

Сада се лако уочава да је

$$dL_g(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{2} & x & 1 \end{pmatrix},$$

односно

$$X_1(g) = dL_g(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{2} & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Остала векторска поља добијају се на сличан начин.

Аналогно претходном, у глобалним координатама (x, y, z, w) на $H_3 \times \mathbb{R}$, лево-инваријантна векторска поља су дата са:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Приметимо да су X_1, X_2 и X_3 управо лево-инваријантна поља групе H_3 дата формулом (1.4).

На основу резултата претходног одељка, директним рачуном се показују следеће теореме.

Теорема 2.7. *Свака лево-инваријантна метрика на групи G_4, до на аутомор-*

физме од G_4, изометрична је једној од следећих:

$$
\begin{aligned}
g_A &= \epsilon_1 dx^2 + \epsilon_2 dy^2 + a(xdy - dz)^2 - b(xdy - dz)(x^2dy - 2xdz + 2dw) \\
&+ \frac{c}{4}(x^2dy - 2xdz + 2dw)^2; \\
g_1^\lambda &= \epsilon_1 dx^2 + 2dydw + xdy(xdy - 2dz) + \epsilon_2\lambda(xdy - dz)^2; \\
g_2^\lambda &= \epsilon_1 dy^2 + 2dxdw + xdx(xdy - 2dz) + \epsilon_2\lambda(xdy - dz)^2; \\
g_3^\lambda &= \epsilon_1 dy^2 - 2dx(xdy - dz) + \epsilon_2\frac{\lambda}{4}(x^2dy - 2xdz + 2dw)^2; \\
g_4^\lambda &= \epsilon_1 dx^2 - 2dy(xdy - dz) + \epsilon_2\frac{\lambda}{4}(x^2dy - 2xdz + 2dw)^2; \\
g_1^0 &= x^2dxdy + 2dwdx + 2dydz - 2x(dy^2 + dxdz); \\
g_2^0 &= 2dxdz - 2xdxdy \pm dy(2dw - 2xdz + x^2dy).
\end{aligned}
$$

Примедба 2.2. *Приметимо да смо у претходној теореми, ради компактнијег записа метрика свих сигнатура, увели константе $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1, 1\}$.*

У зависности од константи $\epsilon_1, \epsilon_2, a, b, c$, метрика g_A може бити произвољне сигнатуре, док су метрике g_1^0 и g_2^0 неутралне сигнатуре. Метрике g_k^λ, $k = 1, \ldots, 4$, су Лоренцове сигнатуре за $\epsilon_1 = \epsilon_2$, а неутралне за $\epsilon_1 = -\epsilon_2$.

Теорема 2.8. *Свака лево-инваријантна метрика на групи $H_3 \times \mathbb{R}$, до на аутоморфизам од $H_3 \times \mathbb{R}$, изометрична је једној од следећих:*

$$
\begin{aligned}
g_\lambda^\epsilon &= \epsilon_1 dx^2 + \epsilon_2 dy^2 + \epsilon_3\lambda(xdy - dz)^2 + \epsilon_4 dw^2; \\
g_1 &= dx^2 + \epsilon_1 dy^2 - 2dw(xdy - dz); \\
g_{01} &= \epsilon_1 dx^2 - 2dy(xdy - dz) + \epsilon_2 dw^2; \\
g_{02} &= 2dwdx + \epsilon_1 dy^2 + \epsilon_2(xdy - dz)^2; \\
g_0^0 &= 2dwdx - 2dy(xdy - dz).
\end{aligned}
$$

Примедба 2.3. *У Теореми 2.8, увођењем константи $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4 \in \{-1, 1\}$, објединили смо позитивно дефинитну метрику g_μ, метрике g_μ и $\mathfrak{g}_\lambda^\pm$ Лоренцове сигнатуре и метрике $g_\mu^\pm$ и $\mathfrak{g}_\lambda^\pm$ неутралне сигнатуре.*

Метрике g_{01} и g_{02} имају Лоренцову сигнатуру ако је $\epsilon_1 = \epsilon_2$, односно неутралну ако је $\epsilon_1 = -\epsilon_2$.

Метрика g_1 има Лоренцову сигнатуру за $\epsilon_1 = 1$, а неутралну за $\epsilon_1 = -1$, док је метрика g_0^0 неутралне сигнатуре.

Како је експоненцијално пресликавање на нилпотентној Лијевој групи дифеоморфизам (Теорема 1.2), према теореми Хопф-Ринова [32], све позитивно дефинитне метрике на нилпотентној Лијевој групи N су геодезијски комплетне. У псеудо-Римановом случају, одговор на питање комплетности дао је М. Гдири у [27].

Теорема 2.9. *[27] Све лево-инваријантне метрике на 2-степ нилпотентној Лијевог групи $H_3 \times \mathbb{R}$ су геодезијски комплетне.*

Доказ. Свака крива $\gamma = \gamma(t)$ на групи $H_3 \times \mathbb{R}$ одређена је левом транслацијом криве $L^{-1}_{\gamma(t)*}\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$. Криве $\Gamma = \Gamma(t)$ на алгебри $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ придружене геодезијским кривама су решења једначине

$$\dot{x} = ad^t_x(x). \tag{2.10}$$

Посматрамо центар Z алгебре $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$.

Случај 1: Z је недегенерисан у односу на скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Тада је $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R} = Z \oplus Z^\perp$ и постоји пресликавање $J : Z \longrightarrow End(Z^\perp)$ дефинисано са

$$J(u)v = ad^t_v(u), \quad \forall v \in Z^\perp, u \in Z,$$

односно

$$\langle J(z)y, x\rangle = \langle z, [y,x]\rangle, \quad \forall x \in \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}, y \in Z^\perp, z \in Z.$$

Штавише, ако је γ геодезијска крива на $H_3 \times \mathbb{R}$ и ако је

$$L^{-1}_{\gamma(t)*}\dot{\gamma}(t) = y(t) + z(t), \quad y(t) \in Z^\perp, z(t) \in Z,$$

једначина (2.10) постаје

$$\dot{y} = J(z)y, \quad \dot{z} = 0.$$

Уз претпоставку да је $z(0) = z_0$ и $A = J(z_0)$, добијамо $\dot{y} = A(y)$. Решавањем ове једначине са почетним условом $y(0) = y_0$, добијамо да је $y(t) = e^{tA}y_0$.

Дакле, геодезијска крива γ се може продужити, па је метрика комплетна.

Случај 2: Z је дегенерисан у односу на скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Доказ изводимо само у Лоренцовом случају, пошто се случај неутралне сигнатуре разматра аналогно.

Можемо изабрати вектор $v \in Z, \langle v,v\rangle = 0$, и потпростор $\xi \subset Z$, $\xi = \mathcal{L}(v)^\perp$, тако да је $Z = \mathbb{R}v \oplus \xi$. Затим, изаберимо вектор $u \in \xi^\perp$ који задовољава услове $\langle u,u\rangle = 0,\ \langle v,u\rangle = -1$. Другим речима, постоји декомпозиција

$$\mathfrak{h}_3 = \mathcal{L}(u,v) \oplus \nu \oplus \xi,$$

таква да је рестрикција скаларног производа на простор $\nu \oplus \xi$ позитивно дефинитна. Уведимо пресликавање $J : \xi \oplus \mathbb{R}u \longrightarrow End(\mathcal{L}(u,v) \oplus \nu)$.

За геодезијску криву γ на групи $H_3 \times \mathbb{R}$ важи

$$L^{-1}_{\gamma(t)*}\dot{\gamma}(t) = z(t)v + y(t)u + p(t) + q(t),\ p \in \nu,\ q \in \xi,$$

па се једначина (2.10) своди на

$$\dot{z}v + \dot{y}u + \dot{p} + \dot{q} = y(J(q)u) + J(q)p + y^2(J(u)u) + y(J(u)p).$$

Пошто десна страна претходне једнакости припада потпростору $\nu \oplus \mathbb{R}v$, следи да је $\dot{y} = \dot{q} = 0$. Са друге стране, важи $J(q)v = J(u)v = 0$, па добијамо нехомогени систем линеарних једначина

$$(zv+p)' = J(q_0 + y_0u)(zv+p) + y_0(J(q_0+y_0u)u), \quad \text{са} \quad q_0 = q(0),\ y_0 = y(0),$$

или, у компактнијем облику, $\dot{X} = A(X) + b$.

Јасно је да се геодезијска крива γ може продужити, па је метрика комплетна и у овом случају. $\square$

Пример 4. У истом раду [27], дат је пример метрике на 3-степ нилпотентној групи G_4 која није геодезијски комплетна. То је управо метрика g_A Лоренцове сигнатуре из наше класификације (за параметре $\epsilon_2 = -\epsilon_1 = 1,\ b = 0,\ a = c = 1$).

У бази $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \in \mathfrak{g}4$ важи

$$ad^t_{x_1} x_3 = x_2, \quad ad^t_{x_1} x_4 = x_3, \quad ad^t_{x_2} x_3 = x_1, \quad ad^t_{x_3} x_4 = x_1.$$

Из једначине (2.10) следи

$$\dot{x} = z(y + w), \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = xw, \quad \dot{w} = 0,$$

за $L^{-1}_{\gamma(t)*}\dot{\gamma}(t) = x(t)x_1 + y(t)x_2 + z(t)x_3 + w(t)x_4$. Решавањем овог система добијамо да је

$$w = C_1, \quad 2C_1 y = z^2 + C_2, \quad -x^2 + y^2 + z^2 + C_1^2 = C_3^2,$$

за неке константе C_1, C_2, C_3. Претпоставимо да је $C_1 \neq 0$ и ставимо $C_2 = C_3 = 0$. Тада добијамо да је

$$x = \pm \left(\frac{z^2}{2C_1} + C_1 \right), \quad y = \frac{z^2}{2C_1},$$

одакле следи да је

$$\dot{z} = \pm \left(\frac{z^2}{2} + C_1^2 \right),$$

односно

$$z = \sqrt{2} C_1 \tan \frac{C_1}{\sqrt{2}} \left(2C_4 \pm t \right).$$

Јасно је да $z = z(t)$ тежи бесконачности кад t тежи коначној вредности, те метрика није комплетна.

Приметимо да геодезијске криве леже у пресеку двограног хиперболоида $x^2 - y^2 - z^2 = C_1^2$ и параболичког цилиндра $2C_1 y = z^2$ смештених у хиперравни $w = C_1$.

$\diamond$

3 Геометријска својства

У овом поглављу детаљно проучавамо геометријска својства нилпотентних алгебри. До изражаја нарочито долази разлика између Римановог и псеудо-Римановог случаја.

Одељак 3.1 посвећен је проучавању својстава кривинских тензора. Показано је да на четвородимензионим нилпотентним Лијевим групама не постоје примери Ајнштајнових метрика. Са друге стране, налазимо примере равних, конформно равних и ауто-дуалних метрика. Такође, у Одељку 3.2, проучаване су алгебре холономија у свим сигнатурама. Посебна пажња посвећена је декомпозабилности метрика и показано је да на групи G_4 не постоје декомпозабилне метрике, за разлику од групе $H_3 \times \mathbb{R}$, где се такве метрике јављају у случају недегенерисаног центра. Интересантно је да се, у зависности од природе центра групе, јављају још две специјалне групе метрика: пп-таласи и Вокерове метрике. Посебна пажња им је посвећена у Одељку 3.3, где у Теореми 3.8 налазимо потребне и довољне услове да Вокерова метрика допушта локалну нилпотентну групу изометрија. На крају, у Одељку 3.4, проучавамо услове под којима се на овим групама могу дефинисати разне лево-инваријантне структуре: комплексна, хиперкомплексна, пара-хиперкомплексна...

Подразумевамо ознаке и дефиниције уведене у Поглављу 1.

3.1 Кривине

У лево-инваријантној бази $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ метрика g је представљена симетричном матрицом S у свакој тачки Лијеве групе. За израчунавање Леви-Чивитине повезаности ∇ метрике g користимо Козулову формулу:

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_X Y, Z\right) &= X.g\left(Y,Z\right) - Y.g\left(Z,X\right) - Z.g\left(X,Y\right) \\ &+ g\left([X,Y],Z\right) - g\left([Y,Z],X\right) + g\left([Z,X],Y\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Пошто су векторска поља и метрика на Лијевој групи лево-инваријантни, први ред претходне формуле ишчезава. Нека је са $[v]$ означен вектор колона $v = \nabla_{X_i} X_j,\ \ i,j = 1,\dots,4$ у бази $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Тада имамо

$$[v] = S^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T,$$

где је

$$\alpha_k := g\left(v, X_k\right) = \frac{1}{2}\left(g\left([X_i, X_j], X_k\right) - g\left([X_j, X_k], X_i\right) + g\left([X_k, X_i], X_j\right)\right).$$

Тензор кривине рачунамо по формули (1.5), Ричијев тензор користећи (1.7), а скаларну кривину помоћу (1.8).

3.1.1 Риманов случај

Размотримо прво групу G_4 и позитивно дефинитну метрику g_A дефинисану на њој:

$$g_A = dx^2+dy^2+a(xdy-dz)^2-b(xdy-dz)(x^2dy-2xdz+2dw)+\frac{c}{4}(x^2dy-2xdz+2dw)^2.$$

У лево-инваријантној бази (2.8), ненула коваријантни изводи су:

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1}X_2 &= \frac{1}{2}X_3 = -\nabla_{X_2}X_1,\\
\nabla_{X_1}X_3 &= -\frac{a}{2}X_2 - \frac{bc}{2d}X_3 + \frac{ac}{2d}X_4 = \nabla_{X_3}X_1 + X_4,\\
\nabla_{X_1}X_4 &= -\frac{b}{2}X_2 - \frac{c^2}{2d}X_3 + \frac{bc}{2d}X_4 = \nabla_{X_4}X_1,\\
\nabla_{X_2}X_3 &= \frac{a}{2}X_1 = \nabla_{X_3}X_2,\\
\nabla_{X_2}X_4 &= \frac{b}{2}X_1 = \nabla_{X_4}X_2,\\
\nabla_{X_3}X_3 &= bX_1,\\
\nabla_{X_3}X_4 &= \frac{c}{2}X_1 = \nabla_{X_4}X_3,
\end{aligned}$$

где смо из практичних разлога увели ознаку $d = \det A = ac - b^2$.

Сви оператори кривине $R(X_i, X_j)$ су различити од нуле. Ненула компоненте Ричијевог тензора су

$$\rho_{11} = -\frac{1}{2d}(c^2+ad), \quad \rho_{22} = -\frac{a}{2}, \quad \rho_{23} = -\frac{b}{2},$$

$$\rho_{33} = \frac{1}{2d}(a^2d - cd + cb^2), \quad \rho_{34} = \frac{b}{2d}(c^2+ad), \quad \rho_{44} = \frac{1}{2d}(b^2d + c^3).$$

Лако се проверава да услов Ајнштајновости повлачи да је $b = c = 0$, што је немогуће. Скаларна кривина је

$$\tau = -\frac{1}{2d}(c^2+ad) < 0.$$

Посматрајмо сада групу $H_3 \times \mathbb{R}$ и позитивно дефинитну метрику

$$g_\mu = dx^2 + dy^2 + \mu(xdy - dz)^2 + dw^2.$$

У бази (2.9), Леви-Чивитина повезаност метрике g_μ је дата релацијама:

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1}X_2 &= -\nabla_{X_2}X_1 &&= \tfrac{1}{2}X_3\\
\nabla_{X_1}X_3 &= \nabla_{X_3}X_1 &&= -\tfrac{\mu}{2}X_2\\
\nabla_{X_2}X_3 &= \nabla_{X_3}X_2 &&= \tfrac{\mu}{2}X_1.
\end{aligned}$$

Сада је лако израчунати кривински тензор

$$R^2_{112} = \frac{3\mu}{4},\ R^1_{212} = -\frac{3\mu}{4},\ R^3_{113} = -\frac{\mu}{4},\ R^1_{313} = \frac{\mu^2}{4},\ R^3_{223} = -\frac{\mu}{4},\ R^2_{323} = \frac{\mu^2}{4},$$

као и ненула компоненте Ричијевог тензора

$$\rho_{11} = \rho_{22} = -\frac{\mu}{2}, \ \rho_{33} = \frac{\mu^2}{2}.$$

Скаларна кривина је негативна

$$\tau = -\frac{\mu}{2}.$$

Преходном анализом, у специјалном случају нилпотентне групе, проверили смо тачност следећег тврђења:

Лема 3.1. *[45] Нека је G решива Лијева група. Тада је свака лево-инваријантна позитивно дефинитна метрика на G или равна или има строго негативну скаларну кривину.*

3.1.2 Псеудо-Риманов случај

Компоненте тензора кривине, Ричијевог тензора и скаларна кривина за метрике Лоренцове и неутралне сигнатуре изложене су табеларно у Прилогу А.

Приметимо да Лема 3.1 у псеудо-Римановом случају не важи јер смо пронашли примере метрика са позитивном скларном кривином, као и метрике са нула скаларном кривином које нису равне. И следећа лема се директно проверава:

Лема 3.2. *На четвородимензионим нилпотентним Лијевим групама не постоје лево-инваријантне метрике које су Ајнштајнове.*

Интересантно је да се, за разлику од Римановог случаја, примери равних метрика појављују и у Лоренцовој и у неутралној сигнатури.

Лема 3.3. *На групи G_4 не постоје равне метрике Лоренцове сигнатуре. У неутралној сигнатури, метрике g_1^0 и g_1^λ, $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = -1$, за $\lambda = 1$, су равне.*

Лема 3.4. *На групи $H_3 \times \mathbb{R}$ равне метрике су g_{01} (и у Лоренцовој и у неутралној сигнатури) и метрика неутралне сигнатуре g_0^0.*

Примедба 3.1. *Приметимо да метрике неутралне сигнатуре g_λ^ϵ и g_{01}, одговарају директном производу Лоренцове метрике на Хајзенберговој групи H_3 са $\mathbb{R}$, док метрика Лоренцове сигнатуре g_λ^ϵ, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -\epsilon_4 = 1$, одговара производу позитивно дефинитне метрике на H_3 са $\mathbb{R}$ (видети Одељак 1.2.1).*

Лема 3.5. *У случају неутралне сигнатуре, на групи G_4 метрике g_2^0 су ауто-дуалне и нема примера конформно равних метрика.*

Доказ. Метрике неутралне сигнатуре допуштају декомпозицију кривинског тензора (1.10). Одатле читамо ауто-дуалну W^+ и анти-ауто-дуалну компоненту W^- Вејловог конформног тензора.

За метрике g_2^0 је

$$W^+ = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{2} & 0 & \pm\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mp\frac{1}{2} & 0 & \mp\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad W^- = 0,$$

па су ауто-дуалне.

Може се проверити да су за све друге метрике $W^+ \neq 0$ и $W^- \neq 0$. □

Лема 3.6. *На групи $H_3 \times \mathbb{R}$ метрика g_1 неутралне сигнатуре је конформно равна.*

Доказ. Из декомпозиције (1.10) се види да једина ненула компонента припада Ајнштајновом делу. Дакле,

$$W^+ = W^- = 0 \implies W = 0.$$

Пошто је $B \neq 0$, метрика није ни Ајнштајнова, ни равна. $\square$

3.2 Холономије

Приметимо да је нилпотентна Лијева група просто повезана, па се повезана група холономије $Hol^0(N, g)$ поклапа са пуном групом холономије $Hol(N, g)$ (видети Лему 1.6). Према теореми Амброз-Сингера алгебра $hol(g)$ је генерисана операторима кривине $R(X_i, X_j)$ и њиховим коваријантним изводима произвољног реда. Познато је да је алгебра холономије подалгебра алгебре изометрија, тј.

$$hol(g) \leq so(S) = \{A \mid A^T S + SA = 0\},$$

где је са S означена матрица метрике g. Да бисмо израчунали изводе оператора кривине $\nabla_{X_m} R(X_k, X_l)$, користимо формулу

$$(\nabla_{X_m} R(X_k, X_l))(X_j) = \nabla_{X_m}(R(X_k, X_l)(X_j)) - R(X_k, X_l)(\nabla_{X_m} X_j).$$

Изводе вишег реда рачунамо на сличан начин.

У даљем тексту, одговарајуће базе дате су у терминима лево-инваријантних векторских поља X_1, X_2, X_3, X_4 група G_4 и $H_3 \times \mathbb{R}$, дефинисаних редом релацијама (2.8) и (2.9).

Размотримо детаљније само случај позитивно дефинитне метрике на групи $H_3 \times \mathbb{R}$ (слично се разматра случај групе G_4). Интересантно је да је овде холономија генерисана само операторима кривине, тј. коваријантни изводи не дају нове генераторе. Директним рачуном добијамо да базу алгебре холономија чине матрице

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приметимо да важи

$$[A_1, A_2] = \lambda A_3, \quad [A_2, A_3] = A_1, \quad [A_3, A_1] = A_2,$$

стога је одговарајућа алгебра холономије $so(3)$. Ради компактнијег записа генератора, уводимо операцију $\wedge$ са:

$$(X_k \wedge X_j)X_l = g(X_k, X_l)X_j - g(X_j, X_l)X_k.$$

Сада се лако види да је

$$A_1 = X_1 \wedge X_3, \quad A_2 = X_2 \wedge X_3, \quad A_3 = X_1 \wedge X_2.$$

Из претходног разматрања и де Рамове теореме [21] следи:

Теорема 3.1. *На групи $H_3 \times \mathbb{R}$ позитивно дефинитне метрике имају алгебру холономија $so(3)$, па се разлажу на директну суму тродимензионе и једнодимензионе подмногострукости. Са друге стране, фамилија метрика g_A на групи G_4 има максималну алгебру холономије $so(4)$. Стога су све лево-инваријантне, позитивно дефинитне метрике на G_4 недекомпозабилне.*

Ситуација је другачија у псеудо-Римановом случају.

3.2.1 Лоренцова сигнатура

Користећи нотацију као у [51], алгебре холономија смо приказали у наредној табели.

Табела 3.1. Алгебре холономија лево-инваријантних метрика Лоренцове сигнатуре на Лијевим групама G_4 и $H_3 \times \mathbb{R}$

група	**метрика**	$hol(g)$	**нотација**	**база**	**паралелни вектор**	**декомпозабилност**
G_4	g_A	$so(3,1)$	R15		не	не
	$g_1^{\pm\lambda}$	$\mathbb{R}^2$	R8	$X_1 \wedge X_4, X_3 \wedge X_4$	X_4	не
	$g_2^{\pm\lambda}$	$\mathbb{R}^2$	R8	$X_2 \wedge X_4, X_3 \wedge X_4$	X_4	не
	$g_3^{\pm\lambda}$	$so(3,1)$	R15		не	не
	$g_4^{\pm\lambda}$	$so(3,1)$	R15		не	не
$H_3 \times \mathbb{R}$	g_μ	$so(2,1)$	R10	$X_1 \wedge X_2, X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3$	X_4	да
	g_λ^+	$so(3)$	R13	$X_1 \wedge X_2, X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3$	X_4	да
	g_λ^-	$so(2,1)$	R10	$X_1 \wedge X_2, X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3$	X_4	да
	g_1	$\mathbb{R}^2$	R8	$X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3$	X_3	не
	$g_{01}^\pm$	равна				
	$g_{02}^\pm$	$\mathbb{R}^2$	R8	$X_1 \wedge X_4, X_3 \wedge X_4$	X_4	не

Размотримо прво декомпозабилност метрика.

У случају холономија $so(2,1)$ и $so(3)$, паралелно глобално векторско поље није нул. То векторско поље и његов ортогонални комплемент су недегенерисани и инваријантни у односу на холономију. Према Теореми 1.6, одговарајуће многострукости се разлажу на производ једнодимензионе и тродимензионе многострукости.

Код метрика са холономијом $\mathbb{R}^2$ паралелно глобално нул векторско поље је очувано. Наиме, само су дегенерисани простори инваријантни при дејству холономије, па су ове метрике недекомпозабилне.

Подсетимо се да метрика g представља пп-талас ако постоји паралелна нул дистрибуција $\mathcal{D}$ тако да $R(U,W) = 0$ за све $U, W \in \mathcal{D}^\perp$ (видети Лему 1.9).

Последица 3.1. *Све лево-инваријантне метрике на нилпотентним четводимензионим Лијевим групама са алгебром холономије* $\mathbb{R}^2$ *су хомогени пп-таласи.*

Ова последица наглашава општију чињеницу да се n-димензиони пп-таласи карактеришу Абеловом алгебром холономије $\mathbb{R}^{n-2}$ (видети Лему 1.10). Такође, пп-таласи су Петров типа O или N, са вишеструким главним нул правцем датим коваријантно константним нул векторским пољем V (видети [49]).

Метрике овог типа имају великог значаја у општој теорији релативности и теорији струна (видети [12], [48]).

3.2.2 Неутрална сигнатура

Резултати су сумирани у наредној табели.

Табела 3.2. Алгебре холономија лево-инваријантних метрика неутралне сигнатуре на Лијевим групама G_4 и $H_3 \times \mathbb{R}$

група	**метрика**	$hol(g)$	**база**	**паралелни вектор**	**декомпозабилност**
G_4	g_A	A_{32}		не	не
	$g_1^{\pm\lambda}$	A_{17}	$X_1 \wedge X_4, X_3 \wedge X_4$	X_4	не
	$g_2^{\pm\lambda}$	A_{17}	$X_2 \wedge X_4, X_3 \wedge X_4$	X_4	не
	$g_3^{\pm\lambda}$	A_{32}		не	не
	$g_4^{\pm\lambda}$	A_{32}		не	не
	g_1^0	равна			
	g_2^0	A_{17}	$X_3 \wedge X_4, X_1 \wedge X_4$	X_4	не
$H_3 \times \mathbb{R}$	$g_\mu^\pm$	A_{22}	$X_1 \wedge X_2, X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3$	X_4	да
	$g_\lambda^\pm$	A_{22}	$X_1 \wedge X_2, X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3$	X_4	да
	g_1	A_{17}	$X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3$	X_3	не
	$g_{01}^\pm$	равна			
	$g_{02}^\pm$	A_{17}	$X_2 \wedge X_4, X_3 \wedge X_4$	X_4	не
	g_0^0	равна			

За класификацију алгебри холономија, користили смо нотацију предложену у [25]. У наредној табели смо представили генераторе ових подалгебри, где су са I, J, K и L означене реалне матрице дефинисане у (1.12).

Табела 3.3. Подалгебре од $o(2,2)$

алгебра	база Лијеве подалгебре	димензија
A_{17}	$\begin{pmatrix} -J & J \\ -J & J \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J & L \\ L & J \end{pmatrix}$	2
A_{22}	$\begin{pmatrix} 0 & I+K \\ I+K & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2J \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & J+L \\ -J+L & 0 \end{pmatrix}$	3
A_{32}	$\begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & L \\ L & 0 \end{pmatrix}$	6

Од три алгебре наведене у претходној табели, једино је максимална алгебра холономија A_{32} иредуцибилна, те су одговарајуће метрике недекомпозабилне. Испитајмо детаљније геометријску структуру друге две алгебре.

У случају алгебре A_{17} имамо паралелну дводимензиону нул дистрибуцију која садржи паралелно нул векторско поље. Четвородимензиони простори неутралне сигнатуре који поседује паралелну нул раван допуштају Вокерове метрике. Њих детаљније разматрамо у Одељку 3.3.

На основу Теореме 1.6, алгебра A_{22} одговара производу иредуцибилне тродимензионе Лоренцове метрике и једнодимензионог равног фактора. Лако се проверава да A_{22}, разапета са $X_1 \wedge X_2, X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3$, одговара подалгебри $3(c)$ из класификације [60].

3.3 Вокерове метрике

Дефиниција 3.1. Ако псеудо-Риманова многострукост (M, g) димензије n допушта нетривијалне тотално изотропне паралелне дистрибуције $\mathcal{D}$, тада се она назива **Вокерова многострукост**, а метрику g зовемо **Вокерова метрика**.

Пошто важи $\dim \mathcal{D} \leq \frac{n}{2}$, у четвородимензионом случају паралелне дистрибуције могу бити једнодимензионе или дводимензионе. У Лоренцовој сигнатури је $\dim \mathcal{D} = 1$ и одговарајуће Вокерове метрике су заправо пп-таласи, које смо разматрали у претходном поглављу. Са друге стране, метрике неутралне сигнатуре са дегенерисаним центром поседују паралелну дистрибуцију $\mathcal{D}$ максималне димензије и тада допуштају канонску форму погодног облика. Управо ове метрике предмет су нашег даљег разматрања.

Подсетимо се да постоје локалне координате (x, y, z, w) такве да Вокерова метрика, у односу на репер $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w}\}$, има облик

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где су a, b и c глатке функције. Важно је приметити да ове координате нису јединствене.

Идеја је да за метрике неутралне сигнатуре из наше класификације (видети Поглавље 2.2.3) одредимо што једноставнију форму (3.2). Стога, пратимо алгоритам за налажење одговарајућих координата, који је у [59] предложио А. Вокер, тако да метрика има канонски облик (3.2).

Нека је $\mathcal{D}$ дводимензиона нул дистрибуција. Пошто је амбијентни простор димензије четири, важи $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\perp}$. Због паралелности, постоје локалне координате (x_1, x_2, x_3, x_4) такве да је $\mathcal{D}$ разапета са $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$. Како је $\mathcal{D}$ тотално дегенерисана,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 0.$$

Сада, размотримо векторска поља $\{\xi_i\}$, $i \in \{1, 2\}$ дефинисана са

$$g(\xi_i, X) = dx^{i+2}(X).$$

Следи да су векторска поља $\{\xi_i\}_{i=1}^2$ ортогонална на свако $X \in \mathcal{D}^{\perp}$ и зато леже у $\mathcal{D}$. Штавише, та векторска поља су линеарно независна. Због тога за наш нови координатни репер можемо узети

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{j=1}^{4} \xi_1^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sum_{j=1}^{4} \xi_2^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Показује се да Вокерова метрика g поседује паралелно векторско поље ако и само ако постоје локалне координате такве да функције a, b и c не зависе од променљиве x. Пошто желимо да очувамо канонску форму (3.2) метрике g, узимамо трансформацију координата дату са

$$\begin{aligned}
\widetilde{x} &= \frac{\partial z}{\partial \widetilde{z}}\, x + \frac{\partial z}{\partial \widetilde{w}}\, y + S^1(z, w) \\
\widetilde{y} &= \frac{\partial w}{\partial \widetilde{z}}\, x + \frac{\partial w}{\partial \widetilde{w}}\, y + S^2(z, w) \\
\widetilde{z} &= \alpha(z, w) \\
\widetilde{w} &= \beta(z, w),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где су S^1, S^2, α, β функције променљивих (z, w) (за више детаља погледати [6]).

Стога, можемо прећи на нову координатну базу у којој метрика g има најједноставнији облик. Одговарајуће Вокерове форме дате су у Табели 3.4.

Табела 3.4. Вокерова форма метрика

група	метрика	база нул дистрибуције	Вокерова форма метрика
G_4	g_1^λ	$X_1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_3, X_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \pm\frac{1}{\lambda \pm 1} y^2 & y \\ 0 & 1 & y & \pm\lambda \end{pmatrix}$
	g_2^λ	$X_2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_3, X_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \pm\frac{1}{\lambda}(y+z)^2 & y \\ 0 & 1 & y & \pm\lambda \end{pmatrix}$
	g_2^0	X_3, X_4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \pm w^2 & y \\ 0 & 1 & y & 2 \end{pmatrix}$
$H_3 \times \mathbb{R}$	g_1	$X_1 + X_2, X_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & y & -1 \end{pmatrix}$
	g_{02}	$X_2 + X_3, X_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \mp y^2 & y \\ 0 & 1 & y & \mp 1 \end{pmatrix}$

Директним рачуном се може проверити да важи следећа техничка лема:

Лема 3.7. *Кристофелови симболи за метрику (3.2) су дати са*

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_x}\partial_z &= \frac{1}{2}a_x\partial_x + \frac{1}{2}c_x\partial_y, \qquad \nabla_{\partial_x}\partial_w = \frac{1}{2}c_x\partial_x + \frac{1}{2}b_x\partial_y,\\
\nabla_{\partial_y}\partial_z &= \frac{1}{2}a_y\partial_x + \frac{1}{2}c_y\partial_y, \qquad \nabla_{\partial_y}\partial_w = \frac{1}{2}c_y\partial_x + \frac{1}{2}b_y\partial_y,\\
\nabla_{\partial_z}\partial_z &= \frac{1}{2}(aa_x + ca_y + a_z)\partial_x + \frac{1}{2}(ca_x + ba_y - a_w + 2c_z)\partial_y - \frac{1}{2}a_x\partial_z - \frac{1}{2}a_y\partial_w,\\
\nabla_{\partial_z}\partial_w &= \frac{1}{2}(a_w + ac_x + cc_y)\partial_x + \frac{1}{2}(b_z + cc_x + bc_y)\partial_y - \frac{1}{2}c_x\partial_z - \frac{1}{2}c_y\partial_w,\\
\nabla_{\partial_w}\partial_w &= \frac{1}{2}(ab_x + cb_y - b_z + 2c_w)\partial_x + \frac{1}{2}(cb_x + bb_y + b_w)\partial_y - \frac{1}{2}b_x\partial_z - \frac{1}{2}b_y\partial_w,
\end{aligned}$$

где индекси означавају парцијалне изводе.

Лема 3.8. *Четвородимензионе Вокерове метрике (3.2) неутралне сигнатуре локално допуштају нилпотентну групу изометрија ако и само ако постоје координате (x, y, z, w) такве да је a квадратна функција облика $a(y, z, w) = A_1(y + A_2z)^2 + A_3w^2$, b је константа која зависи од почетне метрике и $c = c(y) = y$.*

Доказ. Директним рачуном се проверава да свака Вокерова метрика g на нилпотентној четвородимензионој Лијевој групи зависи од полиномијалних функција a, b и c, где је a квадратна функција, c је линеарна, а b је константа различита од 0. Ако уз то захтевамо да је $c = c(y) = y$, променом координатне базе (3.3) добијамо тачно метрике из Табеле 3.4. Илуструјмо промену координатне базе на примеру метрике $g = g_1^{\lambda}$ на групи G_4.

Нека (x_1, x_2, x_3, x_4) представљају оригиналне координате, а (y_1, y_2, y_3, y_4) нове координате. Тада је инваријантна нул дистрибуција $\mathcal{D}$ разапета векторима

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial}{\partial x_4} \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Наиме, лако се проверава да је

$$g\left(X_1, X_1\right) = 0, \quad g\left(X_1, X_2\right) = 0, \quad g\left(X_2, X_2\right) = 0.$$

Вектори

$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{и} \quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

чине допуну до базе.

Нека је $V = v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathcal{D}^{\perp},\ k = 1, \ldots, 4$. Дефинишимо векторе $Y_1,\ Y_2 \in \mathcal{D}$ тако да је испуњено:

$$\begin{aligned}
g\left(Y_i, V\right) &= dY_{i+2}\left(V\right) = dY_{i+2}\left(v_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \\
&= dY_{i+2}\left(v_k \frac{\partial y_m}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_m}\right) \\
&= v_k \frac{\partial y_m}{\partial x_k} dY_{i+2}\left(\partial y_m\right) = v_k \frac{\partial y_m}{\partial x_k}\delta_m^{i+2} \\
&= \left(C^{-1}\right)_{i+2} V,
\end{aligned}$$

где је са C означена матрица преласка. Сада имамо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial x_4}, \\
\frac{\partial}{\partial y_2} &= \frac{-\epsilon}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\epsilon}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\epsilon + \lambda}{\lambda} x \frac{\partial}{\partial x_4}, \\
\frac{\partial}{\partial y_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2}, \\
\frac{\partial}{\partial y_4} &= \frac{\partial}{\partial x_3},
\end{aligned}$$

за $\epsilon \in \{-1, 1\}$. У новој бази метрика има облик:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{\epsilon+\lambda}{\epsilon\lambda} y_2^2 & \frac{\epsilon+\lambda}{\sqrt{\lambda}} y_2 \\ 0 & 1 & \frac{\epsilon+\lambda}{\sqrt{\lambda}} y_2 & \epsilon\lambda \end{pmatrix}.$$

Промена координата (3.3)

$$x = \frac{\epsilon + \lambda}{\sqrt{\lambda}} y_1, \quad y = y_2, \quad z = \frac{\sqrt{\lambda}}{\epsilon + \lambda} y_3, \quad w = y_4,$$

даје управо метрику из Табеле 3.4.

Приметимо да се свака Вокерова метрика g облика

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & A_1(y + A_2 z)^2 + A_3 w^2 & y \\ 0 & 1 & y & b \end{pmatrix}, \; A_1, A_2, A_3, b \in \mathbb{R},$$

може записати као сума

$$g = \sum_k \mu_k g_k, \quad \text{са} \quad \sum_k \mu_k = 1,$$

где су g_k метрике из Табеле 3.4 са ненегативним коефицијентима уз y^2 у полиному a. Стога, без губитка општости, у даљем доказу претпостављамо да је $A_1 \geq 0$ и $A_1 A_3 = 0$.

Посматрајмо Килингове векторе $X = \{f^1, f^2, f^3, f^4\}$. Користећи повезаност из Леме 3.7, добијамо да Килингов систем једначина (1.14) има облик:

$$\begin{gathered} f^3_x = f^4_y = 0, \\ f^3_y + f^4_x = 0, \\ f^1_x + a f^3_x + f^3_z + y f^4_x = 0, \\ f^2_x + y f^3_x + f^3_w + b f^4_x = 0, \\ f^1_y + a f^3_y + y f^4_y + f^4_z = 0, \\ f^2_y + y f^3_y + b f^4_y + f^4_w = 0, \\ a_y f^2 + a_z f^3 + a_w f^4 + 2(f^1_z + a f^3_z + y f^4_z) = 0, \\ f^1_w + f^2 + f^2_z + y f^3_z + a f^3_w + b f^4_z + y f^4_w = 0, \\ f^2_w + y f^3_w + b f^4_w = 0. \end{gathered}$$

Решавањем система, добијамо да су Килингова векторска поља облика

$$\begin{aligned} f^1 &= -\left(x + \frac{1}{2} y w\right) h^3_z - (y + bw) h^4_z + \frac{b}{4} w^2 h^3 - w(h^2 + h^2_z) + h^1, \\ f^2 &= -\frac{1}{2}(y + bw) h^3 + h^2, \\ f^3 &= h^3 + C_0, \\ f^4 &= \frac{1}{2} h^3 w + h^4, \end{aligned}$$

где су $h^k = h^k(z) \in C^\infty(\mathbb{R}), k = \{1, 2, 3, 4\}, C_0 \in \mathbb{R}$, и задовољавају услов

$$a_y f^2 + a_z f^3 + a_w f^4 + 2(f^1_z + a f^3_z + y f^4_z) = 0. \tag{3.4}$$

Ако додатно искористимо специјалан облик функције a, добијамо да функција h^3 мора бити константна. Разликујемо два случаја.

Случај 1: $A_1 = 0$.

Услов (3.4) постаје

$$A_3 h^3 = 0, \quad h^1_z = 0, \quad h^4_z - h^4_{zz} = 0, \quad -A_3 h^4 + h^2_z + h^2_{zz} + b h^4_{zz} = 0.$$

Решење је облика

$$\begin{aligned} h^1 &= C_6, \\ h^2 &= \frac{A_3}{2} e^z C_2 - \frac{b}{2} e^z C_2 + A_3 z C_5 - e^{-z} C_4 + C_3, \\ h^3 &= C_1, \\ h^4 &= e^z C_2 + C_5, \end{aligned}$$

уз услов $A_3 C_1 = 0$. Килингова векторска поља су:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \frac{bw^2}{2}\frac{\partial}{\partial x} - (bw + y)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + w\frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^2 &= -e^z(A_3 w + y)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_3 - b}{2} e^z \frac{\partial}{\partial y} + e^z \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^3 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \xi^4 &= -e^{-z}\frac{\partial}{\partial y}, \\ \xi^5 &= -A_3 z w \frac{\partial}{\partial x} + A_3(z-1)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^6 &= -A_3 w \frac{\partial}{\partial x} + A_3 \frac{\partial}{\partial y}, \\ \xi^7 &= A_3 \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ако је $A_3 = 0$, алгебра Килинговових векторских поља је петодимензиона и разапета са $\{\xi^1, \dots \xi^5\}$. Лако се проверава да је

$$[\xi^4, \xi^2] = \xi^3,$$

те $\{\xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5\}$ разапињу 2-степ нилпотентну алгебру.

Алгебра Килингових векторских поља је шестодимензиона за $C_1 = 0$. Разапета је векторима $\{\xi^2, \dots \xi^7\}$ и важи

$$[\xi^7, \xi^5] = A_3^2 \xi^6, \quad [\xi^6, \xi^5] = A_3 \xi^3.$$

Осим тога, $\{\xi^3, \xi^5, \xi^6, \xi^7\}$ генеришу 3-степ нилпотентну алгебру.

Када је $A_1 = A_3 = 0$, тачно добијамо метрику g_1. Приметимо да је то једина Вокерова метрика која одговара недегенерисаном центру. За $A_1 = 0$, $A_3 \neq 0$ увек можемо извршити промену координата тако да A_3 постане 1 или -1, и као резултат добијамо метрику g_2^0.

Случај 2: $A_1 > 0$, $A_3 = 0$.

У овом случају h^3 мора бити 0. Систем Килингових једначина се своди на

$$\begin{aligned} A_1A_2z(h^2+A_2C_0)+h^1_z &= 0, \\ A_1(h^2+A_2C_0)+h^4_z-h^4_{zz} &= 0, \\ h^2_z+h^2_{zz}+bh^4_{zz} &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из практичних разлога уведимо ознаку $\mu = 1 - A_1 b$. Да бисмо решили систем (3.5), морамо одвојено анализирати три случаја.

Случај 2а: $\mu > 0$.

После дугог, али директног рачуна, закључујемо да Килингова векторска поља формирају нилпотентну алгебру ако и само ако је $A_2 = 0$. Та поља су дата са:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= e^{z\sqrt{\mu}}\left(-\frac{y\sqrt{\mu}}{1-\sqrt{\mu}}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{\mu}}{A_1}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{1-\sqrt{\mu}}\frac{\partial}{\partial w}\right), \\ \xi^2 &= e^{-z\sqrt{\mu}}\left(\frac{y\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{\mu}}{A_1}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{1+\sqrt{\mu}}\frac{\partial}{\partial w}\right), \\ \xi^3 &= \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^4 &= (-y+\frac{\mu}{A_1}w)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^5 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \xi^6 &= \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Метрика g^λ_1, $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = -1$, је представник овог случаја.

Четвородимензиона подалгебра генерисана са $\{\xi^3, \xi^4, \xi^5, \xi^6\}$ је 3-степ нилпотентна алгебра чије су структурне константе

$$[\xi^5,\xi^4]=\xi^3, \quad [\xi^3,\xi^4]=\frac{\mu}{A_1}\xi^6.$$

Случај 2б: $\mu < 0$.

Слично претходном случају, алгебра Килингових поља је генерисана са

$$\begin{aligned} \xi^1 &= -A_1y\sqrt{-\mu}\sin(z\sqrt{-\mu})\frac{\partial}{\partial x} \\ &- (\mu\cos(z\sqrt{-\mu})-\sqrt{\mu}\sin(z\sqrt{-\mu}))\frac{\partial}{\partial y}+A_1\cos(z\sqrt{-\mu})\frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^2 &= A_1y\sqrt{-\mu}\cos(z\sqrt{-\mu})\frac{\partial}{\partial x} \\ &- \left(\sqrt{-\mu}\cos(z\sqrt{-\mu})+\mu\sin(z\sqrt{-\mu})\right)\frac{\partial}{\partial y}+A_1\sin(z\sqrt{-\mu})\frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^3 &= \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^4 &= \left(-y-\frac{\mu}{A_1}w\right)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^5 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \xi^6 &= \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

и садржи четвородимензиону подалгебру $\{\xi^3, \xi^4, \xi^5, \xi^6\}$ која је 3-степ нилпотентна. Метрика g_1^λ, $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$, $0 < \lambda < 1$, припада овом разматрању.

Случај 2в: $\mu = 0$.
У последњем случају, такође добијамо 6 Килингових векторских поља:

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= \left(-\frac{6}{A_1}w - 3yz^2 + \frac{A_2}{4}z^3(3z-8)\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{A_1}z(z-2)\frac{\partial}{\partial y} + z^3\frac{\partial}{\partial w},\\
\xi^2 &= \frac{1}{3}z\left(-6y + A_2 z(2z-3)\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{A_1}(z-1)\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial w},\\
\xi^3 &= \left(-y + \frac{A_2}{2}z^2\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial w},\\
\xi^4 &= \frac{\partial}{\partial w},\\
\xi^5 &= A_2 w\frac{\partial}{\partial x} - A_2\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},\\
\xi^6 &= \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Алгебра разапета са $\{\xi^3, \xi^4, \xi^5, \xi^6\}$ је 2-степ нилпотентна ако је $A_2 = 0$ и 3-степ нилпотентна, иначе. Приметимо да ове две могућности одговарају редом метрикама g_{02} и g_2^λ, за $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$. □

Примедба 3.2. *Свим метрикама из Табеле 3.4 скаларна кривина једнака је нули. Компоненте ауто-дуалног дела Вејловог тензора дате су са*

$$W_{11}^+ = W_{13}^+ = W_{33}^+ = 2A_3 + \frac{A_1 b^2}{2}, \quad W_{12}^+ = W_{22}^+ = W_{23}^+ = 0.$$

Ако је скаларна кривина нула, тада важи следеће (видети [15])

а) W^+ је једнак нули ако и само ако је $W_{11}^+ = W_{12}^+ = 0$,

б) W^+ је 2-степ нилпотентан оператор ако и само ако је $W_{11}^+ \neq 0$, $W_{12}^+ = 0$,

в) W^+ је 3-степ нилпотентан оператор ако и само ако је $W_{12}^+ \neq 0$.

Примећујемо да све наше метрике имају 2-степ нилпотентни оператор W^+, осим метрике g_1, за коју смо у Леми 3.6 показали да је конформно равна.

Конформно равне Вокерове метрике у димензији 4 изучаване су у раду [2]. Приметимо да наша метрика g_1 није разматрана у њиховом истраживању, јер је $c \neq 0$.

Примедба 3.3. *Ако посматрамо дејство оператора кривине R на $\Lambda^2 T_p N = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ као у (1.10), подразумевајући стандардну идентификацију*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix},$$

закључујемо да метрике g_2^0 на групи G_4 задовољавају услов $W^- = 0$, $B^2|\,\Lambda^- = 0$ (овде Λ^- представља скуп анти-ауто-дуалних бивектора) и скаларна кривина је константна. Метрике са овим особинама предмет су изучавања групе аутора у [11].

3.4 Додатне структуре

Дефиниција 3.2. **Комплексна структура** на Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ је ендоморфизам $J_1 \in End(\mathfrak{g})$ такав да важи

$$J_1^2 = -Id, \tag{3.6}$$

$$J_1[x,y] = J_1[J_1x, J_1y] + J_1[J_1x, y] + J_1[x, J_1y], \ \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{3.7}$$

Услов (3.7) назива се **услов интеграбилности**.

Нека је $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathfrak{g}\}$ комплексификација алгебре $\mathfrak{g}$ и нека је са σ означена конјугација у $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, тј. $\sigma : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\sigma(x+iy) = x - iy$. Постоји природно продужење J_1 на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ које такође означавамо са J_1. Можемо формулисати услов еквивалентан претходној дефиницији:

Лема 3.9. *Реална Лијева група G има комплексну структуру ако и само ако $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ допушта разлагање*

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m} \oplus \sigma, \tag{3.8}$$

где је $\mathfrak{m}$ подалгебра од $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Доказ. Услов (3.6) је еквивалентан постојању разлагања $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ на директну суму два потпростора (од којих је један конјугат другог). Услов (3.7) одговара чињеници да су ти потпростори подалгебре.

Дакле, постоји „1-1” кореспонденција између комплексне структуре J_1 и подалгебри које задовољавају (3.8). □

Инваријантне комплексне структуре на четвородимензионим решивим реалним Лијевим групама класификоване су у [53] и [47].

Лема 3.10. *[17] Група $H_3 \times \mathbb{R}$ допушта лево-инваријантну комплексну структуру.*

Доказ. Уместо Лијевих заграда [], за опис Лијеве алгебре $\mathfrak{g}$ користимо спољашњи диференцијал d на 1-формама:

$$d\alpha(x,y) = -\alpha([x,y]), \ x, y \in \mathfrak{g}, \ \alpha \in \mathfrak{g}^*.$$

За фиксирану базу $\{\alpha, \beta, \mu, \nu\}$ 1-форми на $\mathbb{R}^4$, Лијева алгебра $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ се описује са

$$d\alpha = d\beta = d\nu, \qquad d\mu = \alpha \wedge \beta.$$

Ставимо $\varphi = \alpha + i\beta$, $\psi = \mu + i\nu$. Тада се структурне једначине за $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ записују у облику

$$d\varphi = 0, \qquad d\psi = \frac{i}{2}\varphi \wedge \bar{\varphi}, \text{ где је } \bar{\varphi} = \sigma(\varphi).$$

Интеграцијом ових једначина добијамо Лијеву групу са комплексном структуром. Заправо, комплексификација групе $H_3 \times \mathbb{R}$ се може реализовати као матрична група облика

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & w \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

□

Примедба 3.4. *Према теореми Маљцева [40], група G_4 има компактне количнике. Ипак, ни један компактни количник нема дефинисану комплексну структуру (хомогену или не). Због тога ни G_4 не може да има лево-инваријанту комплексну структуру. Доказ се може наћи у [23].*

Дефиниција 3.3. **Продукт структура** на Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ је линеарни ендоморфизам $J_2 \in End(\mathfrak{g})$ који задовољава следеће услове:

$$J_2^2 = Id, \quad J_2 \neq \pm Id, \tag{3.9}$$

$$J_2[x,y] = [J_2x, y] + [x, J_2y] - J_2[J_2x, J_2y], \ \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{3.10}$$

Дефиниција 3.4. Пар (J_1, J_2), где је са J_1 означена комплексна, а са J_2 продукт структура на Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$, за које важи $J_1J_2 = -J_2J_1$, назива се **пара-хиперкомплексна структура**.

Ако је и J_2 комплексна структура, пар (J_1, J_2) представља **хиперкомплексну структуру**.

Иако ни једна од наше две алгебре не допушта хиперкомплексну структуру [4], Н. Блажић и С. Вукмировић су у [13] показали да алгебра $\mathfrak{g}_4$ не допушта ни пара-хиперкомплексну структуру и одредили су услове под којим се на алгебри $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ она може дефинисати.

Лема 3.11. *[13] Алгебра $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ допушта интеграбилну пара-хиперкомплексну структуру ако јој је центар тотално дегенерисан. Одговарајућа метрика је равна.*

Примедба 3.5. *Услове претходне леме испуњава управо наша метрика g_0^0.*

4 Изометрије

Групе изометрија још један су индикатор битне разлике између Римановог и псеудо-Римановог случаја. Показано је да се у Римановом случају група изометријских аутоморфизама поклапа са групом изометрија Лијеве групе N која фиксира јединични елемент и дистрибуцију

$$TN = \upsilon N \oplus \xi N. \tag{4.1}$$

Овде смо подразумевали раслојења добијена левим транслацијама разлагања на нивоу Лијеве алгебре $\mathfrak{n} = \upsilon \oplus \xi$, где смо са $\mathfrak{n}$ означили Лијеву алгебру групе N, са ξ њен центар, а са υ ортокомплемент од ξ у односу на скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Први резултати за позитивно дефинитне метрике дати су у [33] и [22].

Нилмногострукост је псеудо-Риманова многострукост M која допушта транзитивно дејство изометрија нилпотентне Лијеве групе. Групе изометрија свих хомогених Риманових нилмногострукости у димензијама 3 и 4 одређене су у [36], док је димензији 5 разматран само случај 2-степ нилпотентих група (видети [31]).

У псеудо-Римановом случају са дегенерисаним центром, група изометрија може бити значајно већа него у Римановом случају или чак псеудо-Римановом случају са недегенерисаним центром групе. Л. Кордеро и Ф. Паркер су у [19] изучавали групе изометрија на псеудо-Римановим 2-степ нилпотентним групама са лево-инваријантном метриком: групе изометријских аутоморфизама I^{aut}, групе изометрија I^{split} које чувају разлагање (4.1) и групе свих изометрија I. Њихови резултати су допуњени и унапређени у [20]. У истом раду, В. дел Барко и Г. Овандо су разматрале би-инваријантне метрике на 2-степ нилпотентним Лијевим групама и нашле су примере изометријских аутоморфизама који не чувају ни једно разлагање.

У општем случају важи да је $I \geq I^{aut} \geq I^{split}$. Нас занимају примери метрика за које су испуњене строге неједнакости. Л. Кордеро и Ф. Паркер су нашли пример такве матрике на $H_3 \times \mathbb{R}$, док је аутор у [55] допунио њихов резултат, показавши да и на групи G_4 постоји пример метрика са овим својством.

Равански таласи су специјална врста пп-таласа са константном амплитудом. У општем случају, ове метрике имају Хајзенбергову алгебру изометрија (видети [12]) која дејствује транзитивно на нул хиперравнима. Са друге стране, у неким специјалним случајевима, могу се појавити додатна Килингова векторска поља, на пример код конформно равних раванских таласа.

4.1 Групе изометрија

Нека је са $I(N)$ означена група изометрија нилпотентне Лијеве групе N. Нека је $O(N) = Aut(N) \cap I(N)$ и $I^{aut}(N) = O(N) \ltimes N$, где N дејствује левим транслацијама, а $\ltimes$ означава полудиректни производ. Означимо са $\widetilde{O}(N)$ подгрупу од $I(N)$ која фиксира јединични елемент групе N. На крају, размотримо и подгрупу од $I(N)$ која чува разлагање (4.1); ову подгрупу обележавамо са $I^{split}(N)$.

Примедба 4.1. *Приметимо да разлагање на нивоу Лијевих алгебри*

$$\mathfrak{n} = \upsilon \oplus \xi = \xi^{\perp} \oplus \xi$$

не важи у општем псеудо-Римановом случају. Наиме, ако је центар ξ дегенерисан, онда ξ садржи инваријантни нул потпростор $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^{\perp}$. Ипак, постоји декомпозиција

$$\mathfrak{n} = \mathcal{U} \oplus \Upsilon \oplus \mathcal{D} \oplus \Xi,$$

где су $\upsilon = \mathcal{U} \oplus \Upsilon$, $\xi = \mathcal{D} \oplus \Xi$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{D}$ су комплементарни нул потпростори, и $\mathcal{U} \oplus \mathcal{D} = \Upsilon \oplus \Xi$. Иако избор $\mathcal{U}$ није јединствено одређен, за фиксирано $\mathcal{U}$, простори Ξ и Υ су добро дефинисани и јединствени. Заиста, Ξ је део центра ξ садржан у $\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{D}^{\perp}$, а Υ је његов ортокомплемент у $\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{D}^{\perp}$.

Лема 4.1. *[19] Ако је N просто повезана нилпотентна Лијева група са дефинисаном лево-инваријантном метриком, тада је $I^{split}(N) \leq I^{aut}(N) \leq I$.*

Следећа теорема кључна је за наше даље разматрање.

Теорема 4.1. *[19] Нека је N четвородимензиона нилпотентна Лијева група.*
а) Ако је центар од N дегенерисан, тада $I(N) \cong \widetilde{O}(N) \ltimes N$, где N дејствује левим транслацијама.
б) Ако је центар од N недегенерисан, тада $I(N) \cong I^{aut}(N) \cong I^{split}(N)$.
в) Ако је N равна, тада $I(N) \cong O^p_q \ltimes N$, где O^p_q означава псеудо-ортогоналну Лијеву групу и (p, q) је сигнатура псеудо-Риманове метрике.

Примедба 4.2. *Претходна теорема је доказана само у случају 2-степ нилпотентних група. Ипак, тврђење важи и за 3-степ нилпотентне групе.*

Доказ дела а) следи директно из дефиниције подгрупе $\widetilde{O}$, а део в) важи за сваку равну, просто повезану групу N. Иако је доказ дела б) у [19] изложен тако да одговара конструктивном доказу А. Каплана за групе Ха-типа у Римановој сигнатури (видети [33]), тврђење следи директно из општијег резултата Е. Вилсона [64].

Пошто су све лево-инваријантне псеудо-Риманове метрике на $H_3 \times \mathbb{R}$ геодезијски комплетне (Теорема 2.9), скуп Килингових поља је Лијева алгебра пуне групе изометрија. Изометрије добијене интеграцијом Килингових поља на $H_3 \times \mathbb{R}$ су глобалне. Важно је приметити да нису све метрике на G_4 комплетне, па су изометрије локалне.

4.1.1 Недегенерисан центар

Следеће две леме следе директно из Теореме 4.1.

Лема 4.2. *Ако је центар групе G_4 недегенерисан, тада је $O(G_4)$ дискретна и група изометрија $I(G_4)$ је дата са*

$$I(G_4) \cong diag(\epsilon, \bar{\epsilon}, \epsilon\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}) \ltimes G_4, \ \ \epsilon, \bar{\epsilon} \in \{-1, 1\}.$$

Лема 4.3. *Ако је центар групе $H_3 \times \mathbb{R}$ недегенерисан, тада је* $\dim O(H_3 \times \mathbb{R}) = 1$ *и групе изометрија су дате са*

$$I(H_3 \times \mathbb{R}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon \cos t & -\epsilon \sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\epsilon} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} t \in \mathbb{R}, \\ \epsilon, \bar{\epsilon} \in \{-1, 1\} \end{array} \right\} \ltimes (H_3 \times \mathbb{R}), \quad (4.2)$$

у случају метрика $g_\lambda^\epsilon, \epsilon_1 = \epsilon_2$, и g_1, $\epsilon_1 = 1$, и са

$$I(H_3 \times \mathbb{R}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon \cosh t & \epsilon \sinh t & 0 & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\epsilon} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} t \in \mathbb{R}, \\ \epsilon, \bar{\epsilon} \in \{-1, 1\} \end{array} \right\} \ltimes (H_3 \times \mathbb{R}), \quad (4.3)$$

за метрике $g_\lambda^\epsilon, \epsilon_1 \neq \epsilon_2$, и g_1, $\epsilon_1 = -1$.

Последица 4.1. *За сваку лево-инваријантну метрику важи*

$$\dim I(H_3 \times \mathbb{R}) > \dim(H_3 \times \mathbb{R}).$$

Примедба 4.3. *Приметимо да претходна последица, у случају групе G_4, не важи.*

Примедба 4.4. *У доказу Леме 3.8 показали смо да је метрика g_1, $\epsilon_1 = -1$, Вокерова и да је алгебра Килингових векторских поља петодимензиона и садржи чет练вородимензиону подалгебру изоморфну са $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$. Интеграцијом Килингових векторских поља, након одговарајуће промене базе, добили бисмо управо групу изометрија (4.3).*

4.1.2 Дегенерисан центар

Размотримо прво тривијални случај равних метрика. Из Теореме 4.1 в) и Лема 3.3 и 3.4 директно следи:

Последица 4.2. *а) За метрике Лоренцове сигнатуре g_{01}^ϵ, $\epsilon_1 = \epsilon_2$, на групи $H_3 \times \mathbb{R}$ група изометрија је $O(3,1) \ltimes (H_3 \times \mathbb{R})$.*
б) За метрике неутралне сигнатуре g_{01}^ϵ, $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, и g_0^0 на групи $H_3 \times \mathbb{R}$ група изометрија је $O(2,2) \ltimes (H_3 \times \mathbb{R})$.
в) За метрике неутралне сигнатуре g_1^0 и g_1^λ $(\lambda = 1, \ \epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1)$, на групи G_4 група изометрија је $O(2,2) \ltimes G_4$.

Приметимо да смо у Последици 3.1 закључили да су Лоренцове метрике које одговарају дегенерисаном центру заправо пп-метрике. Услов да је вектор X_4 паралелан, тј. коваријантно константан, еквивалентан је условима да је X_4 истовремено и Килингов и градијентни вектор.

Пример 5. Разматрајући метрике на $H_3 \times \mathbb{R}$ са делимично дегенерисаним центром, аутори су у [19] показали да за метрику, која одговара нашој метици g_{02}, важи $I^{split} < I^{aut} < I$. Наиме, групу изометријских аутоморфизама представљају хороцикличке транслације и $\dim O = 1$. Са друге стране, алгебра Килингових векторских поља X је димензије 6, па је $\dim \widetilde{O} = 2$.

У случају неутралне сигнатуре, користећи други приступ, потврдили смо њихове закључке (видети Теорему 4.2). $\diamond$

Пример 6. Посматрајмо сада на групи G_4 метрику g_2^λ Лоренцове сигнатуре која одговара дегенерисаном центру. Килингова векторска поља су дата са

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \left(y - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x}{24}\left(-24y + x^3 - \frac{12x}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial w};\\
\xi^2 &= \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \left(z - \frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial w};\\
\xi^3 &= -x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \left(y - \frac{x^3}{6}\right)\frac{\partial}{\partial w};\\
\xi^4 &= \frac{\partial}{\partial w};\\
\xi^5 &= \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial w};\\
\xi^6 &= \frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Приметимо да је ξ^4 паралелно нул векторско поље. Вектори $\{\xi^1, \xi^4, \xi^5, \xi^6\}$ генеришу 3-степ нилпотентну Лијеву алгебру чије су структурне једначине:

$$[\xi^1, \xi^5] = -2\xi^6, \quad [\xi^1, \xi^6] = -\xi^4.$$

Избором погодне базе, можемо постићи да је $[\xi^2, \xi^3] = 0$, одакле следи да је $\dim I = 6$ и алгебра изометрија изоморфна је са $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{g}4$.

Интересантно је да смо нашли још један пример метрике где су задовољене строге неједнакости $I^{split} < I^{aut} < I$. Наиме, решавањем једначине

$$F^T S_2^\lambda F = S_2^\lambda, \quad F \in Aut(\mathfrak{g}4),$$

добијамо 1-параметарску фамилију изометријских аутоморфизама, односно важи $\dim I^{aut} = 5$. Са друге стране, лако се уочава да једино леве транслације чувају разлагање (4.1), те је $\dim I^{split} = 4$. $\diamond$

Слично се разматра и случај Лоренцове метрике g_1^λ.

Сада можемо доказати главно тврђење:

Теорема 4.2. *Ако је центар нилпотентне Лијеве групе N дегенерисан, одговарајућа алгебра изометрија је $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{n}$.*

Доказ. Случај Лоренцове сигнатуре размотрен је у Примерима 5 и 6.

У случају неутралне сигнатуре, у доказу Леме 3.8 је показано да Килингова поља генеришу шестодимензиону алгебру која садржи четвородимензиону подалгебру левих транслација. Пренумеришимо базу тако да прва четири вектора одговарају левим транслацијама. За преостала два вектора важи:

$$[\xi^5, \xi^6] = C\xi^1, \ C = const.$$

Наиме, ξ^5 и ξ^6 не разапињу алгебру (за $C \neq 0$), па морамо извршити промену базе. Лако се проверава да у новој бази важи

$$[\bar{\xi}^5, \bar{\xi}^6] = 0,$$

па је алгебра изометрија изоморфна са $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{n}$.

На групи $H_3 \times \mathbb{R}$ постоји само једна Вокерова метрика (у дегенерисаном случају) и њена алгебра изометрија је нилпотентна. Са друге стране, на групи G_4 метрике g_1^λ и g_2^0 имају решиву алгебру изометрија, док је алгебра изометрија за g_2^λ нилпотентна. □

Последица 4.3. *Ако је центар четвородимензионе нилпотентне Лијеве групе N дегенерисан и одговарајућа метрика није равна, тада је $I^{aut} < I$.*

Доказ. Из претходне теореме следи $\dim I = 6$. За скаларни производ $S \in \mathcal{S}(\mathfrak{n})$ и аутоморфизам $F \in Aut(\mathfrak{n})$, решавањем једначине $F^T S F = F$, добијамо да је $\dim O = 1$ у случају скаларних производа S_2^λ на алгебри $\mathfrak{g}4$ и S_0^2 на алгебри $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$. Очигледно, $\dim I^{aut} = 5$. За преостала два скаларна производа на алгебри $\mathfrak{g}4$, подгрупа O је дискретна, те је $\dim I^{aut} = 4$. □

Примедба 4.5. *Приметимо да Последица 4.1 важи и у случају дегенерисаног центра, укључујући и случај равних метрика.*

5 Пројективна еквивалентност метрика

Прве примере геодезијски еквивалентних метрика дао је Ж. Лагранж [35] крајем XVIII века. Касније, Е. Белтрами [7] је уопштио његов пример разматрајући метрике константне негативне кривине и псеудо-Риманове метрике константне кривине. Иако су примери Ж. Лагранжа и Е. Белтрамија дати у димензији 2, лако се могу уопштити на произвољну димензију и произвољну сигнатуру.

Вејл [63] је показао да су две метрике, које су конформно и геодезијски еквивалентне, пропорционалне са константним коефицијентом пропорционалности. Према Н. Сињукову [52], на симетричним просторима, све геодезијски еквивалентне метрике су афино еквивалентне. Ајнштајнове метрике дугогодишњи су предмет проучавања Ј. Микеша и коатора. Опширни приказ њихових резултата може се наћи у [44].

Појам геодезијски еквивалентних метрика уско је везан са теоријом интеграбилних Хамилтонових система (погледати радове В. Матвејева [41],[42]). Такође, четвородимензионе метрике Лоренцове сигнатуре се разматрају у општој теорији релативности. Од посебног су значаја случајеви када су једна или обе метрике Ричи-равне ($R_{ij} = 0$), Ајнштајнове ($R_{ij} = \frac{\tau}{4} g_{ij}$) или, општије, задовољавају Ајнштајнову једначину ($R_{ij} - \frac{\tau}{2} g_{ij} = 8\pi G T_{ij}$, где је G гравитациона константа, а T_{ij} представља тензор енергије-импулса). За детаљнији приказ резултата из ове области погледати [26], [28], [43].

Основне дефиниције и алгоритам за одређивање пројективно еквивалентних метрика изложени су у Одељку 5.1. Иако не зависи од сигнатуре метрике, димензија простора представља ограничавајући фактор у ефикасности предложеног алгоритма.

Питање пројективне еквивалентности метрика на Лијевим групама у општем случају још увек је отворено питање. У Одељку 5.2 дат је одговор у специјалном случају четвородимензионих нилпотентних Лијевих група. Други приступ овом проблему заснива се на теорији холономија и заступљен је у радовима Г. Хала и коаутора. Наше резултате поредимо са њиховим.

5.1 Алгоритам за налажење пројективно еквивалентних метрика

Дефиниција 5.1. Кажемо да су метрике g и $\bar{g}$ **пројективно** или **геодезијски еквивалентне** ако је свака геодезијска крива метрике g уједно и (репараметризована) геодезијска крива метрике $\bar{g}$.

Дефиниција 5.2. Метрике су **афино еквивалентне** ако се њихове Леви-Чивитине повезаности поклапају.

Дефиниција 5.3. Метрику g називамо **геодезијски ригидном** ако је свака метрика $\bar{g}$, која је геодезијски еквивалентна са g, пропорционална са g.

Као што је већ Т. Леви-Чивити било познато [38], две повезаности $\nabla = \{\Gamma^i_{jk}\}$ и $\bar{\nabla} = \{\bar{\Gamma}^i_{jk}\}$ имају исте непараметризоване геодезијске криве ако и само ако постоји $(0,1)$-тензор ϕ такав да важи

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_k \phi_j + \delta^i_j \phi_k \ . \tag{5.1}$$

Репараметризација геодезијских кривих за повезаности ∇ и $\bar{\nabla}$, повезане релацијом (5.1), врши се по следећем правилу: за параметризовану геодезијску криву $\gamma(\tau)$ од $\bar{\nabla}$, крива $\gamma(\tau(t))$ је параметризована геодезијска крива повезаности ∇ ако и само ако трансформација параметра $\tau(t)$ задовољава обичну диференцијалну једначину

$$\phi_\alpha \dot{\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\log\left|\frac{d\tau}{dt}\right|\right) \ .$$

Овде смо са $\dot{\gamma}$ означили вектор брзине криве γ у односу на параметар t.

Ако ∇ и $\bar{\nabla}$ повезане релацијом (5.1) представљају редом Леви-Чивитине повезаности метрика g и $\bar{g}$, тада је могуће експлицитно одредити функцију ϕ на многострукости такву да се њен диференцијал $\phi_{,i}$ поклапа са ковектором ϕ_i. Заиста, контракцијом (5.1) у односу на i и j, добијамо

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha i} = \Gamma^\alpha_{\alpha i} + (n+1)\phi_i.$$

Са друге стране, за Леви-Чивитину повезаност ∇ у односу на метрику g имамо

$$\Gamma^\alpha_{\alpha k} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log|\det(g)|}{\partial x_k}.$$

Стога је

$$\phi_i = \frac{1}{2(n+1)}\frac{\partial}{\partial x_i}\log\left|\frac{\det(\bar{g})}{\det(g)}\right| = \phi_{,i} \tag{5.2}$$

за функцију $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ задату са

$$\phi := \frac{1}{2(n+1)}\log\left|\frac{\det(\bar{g})}{\det(g)}\right| \ . \tag{5.3}$$

Специјално, извод ϕ_i је симетричан, тј. $\phi_{i,j} = \phi_{j,i}$.

Из релације (5.1) следи да су ове две метрике геодезијски еквивалентне ако и само ако за функцију ϕ, дефинисану са (5.3), важи

$$\bar{g}_{ij;k} - 2\bar{g}_{ij}\phi_k - \bar{g}_{ik}\phi_j - \bar{g}_{jk}\phi_i = 0, \tag{5.4}$$

где „тачка и зарез” представљају коваријантни извод у односу на повезаност ∇. Заиста, лева страна једначине је коваријантни извод у односу на $\bar{\nabla}$, и једнака је нули ако и само ако је $\bar{\nabla}$ Леви-Чивитина повезаност у односу на $\bar{g}$.

Посматрајмо Вејлов пројективни тензор дефинисан са (1.9). У [62] је показано да он не зависи од избора повезаности у оквиру пројективне класе: ако су повезаности ∇ и $\bar{\nabla}$ повезане релацијом (5.1), тада се њихови пројективни

Вејлови тензори поклапају. Приметимо да обратно тврђење не важи (видети [30]).

Да бисмо одредили пројективне класе наших четвородимензионих метрика, користимо формулу

$$-2g^{a(i}W^{j)}_{akl} = g^{ab}W^{(i}_{ab[l}\delta^{j)}_{k]}, \tag{5.5}$$

коју је предложио В. Матвејев [43]. Овде заграде „[ ]" означавају антисиметризацију без дељења, а заграде „( )" симетризацију без дељења.

Једначину (5.5) можемо посматрати као систем хомогених линеарних једначина: свака метрика g геодезијски еквивалентна са $\bar{g}$ задовољава систем једначина (5.5) са истим коефицијентима W^i_{jkl}. У тачки x_0, ово представља систем са десет непознатих $g(x_0)^{ij}$. Знамо да постоји бар једно нетривијално решење, тј. $\bar{g}(x_0)^{ij}$, па је ранг система највише девет.

Како је систем симетричан по i, j и антисиметричан по k, l, имамо систем од 60 једначина (заправо, број једначина је мањи због симетрија скривених унутар њега). Треба истаћи да је већ у димензији 4 систем веома компликован, те примена ове технике у већим димензијама није од користи.

Алгоритам за налажење пројективно еквивалентних метрика:

Да бисмо пронашли све метрике $\bar{g}$ пројективно еквивалентне са g, прво треба да нађемо решења хомогеног система једначина (5.5). Услов (5.5) је потребан, али не и довољан, па метрике које га задовољавају називамо *кандидатима*. Потребно је проверити да ли кандидати испуњавају услов (5.4) који јесте довољан услов за пројективну еквивалентност. Ако су сви кандидати који задовољавају (5.4) пропорционални са g, према резултатима Вејла, метрика g је геодезијски ригидна. Ако је функција ϕ која испуњава (5.4) константна, тада је $\bar{g}$ афино еквивалентна са g.

Приметимо да изложени алгоритам не зависи од сигнатуре метрике g.

5.2 Пројективна еквивалентност метрика

Сада смо спремни да докажемо главни резултат овог поглавља.

Теорема 5.1. *Нека је на Лијевој групи G_4 дефинисана лево-инваријантна метрика g, произвољне сигнатуре, која није равна. Ако је метрика $\bar{g}$ геодезијски еквивалентна са g, тада је испуњена једна од следеће две могућности:*

1) *Ако је центар групе G_4 дегенерисан, тада су g и $\bar{g}$ афино еквивалентне. Фамилија метрика $\bar{g}$ је дводимензиона. Свака метрика $\bar{g}$ је лево-инваријантна и исте сигнатуре као и метрика g.*

2) *Ако је центар групе G_4 недегенерисан, тада је метрика g геодезијски ригидна, тј. $\bar{g} = cg$, $c \in \mathbb{R}$.*

Примедба 5.1. *У лево-инваријантној бази $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ метрика g је представљена симетричном матрицом S у свакој тачки Лијеве групе. Због компактности записа, у наредним табелама користимо матрични запис метрика.*

Доказ. За метрике из Теореме 2.7, након дугог, али директног рачуна, применом услова (5.5), добијамо све метрике кандидате које су дате у другој колони Табеле 5.1. Подразумевамо да су p, q, r, s глатке функције на групи, а $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ константе, $c_1 \neq 0$.

Табела 5.1. Пројективно еквивалентне метрике на Лијевој групи G_4

оригинална метрика (g)	**метрике кандидати**	**еквивалентне метрике** ($\bar{g}$)
$g_A = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}$	$p \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}$	$c_1 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}$
$g_1^\lambda = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \epsilon_2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ случај 1 $\lambda \neq \frac{1}{3}$, $\epsilon_2 = 1$ или $\lambda \neq 1$, $\epsilon_2 = -1$ случај 2 $\lambda = \frac{1}{3}$, $\epsilon_2 = 1$	$p \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -pq & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \epsilon_2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} q & -pqr & 0 & 0 \\ -pqr & p^2(qr^2 - s) & 0 & p \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}p & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_1 c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & \epsilon_2\lambda c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$g_2^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$p \begin{pmatrix} -pq & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & \epsilon_1 c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2\lambda c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$g_3^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2\lambda \end{pmatrix}$	$p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2\lambda \end{pmatrix}$	$c_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2\lambda \end{pmatrix}$
$g_4^\lambda = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2\lambda \end{pmatrix}$	$p \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2\lambda \end{pmatrix}$	$c_1 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2\lambda \end{pmatrix}$
$g_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -pq & 0 & \epsilon_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \epsilon_1 c_1 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Из претходне табеле можемо закључити да су за метрике типа g_A, g_3^λ и g_4^λ једини кандидати $\bar{g}$ метрике хомотетичне са g. Према резултатима Вејла (видети [62]), оне су пропорционалне са g, тј. облика $\bar{g} = cg$, $c = const$. Дакле, метрике које одговарају случају недегенерисаног центра групе G_4 су геодезијски ригидне.

Доказ у случају дегенерисаног центра разматрамо на примеру метрике $g = g_1^\lambda$. Остали случајеви доказују се аналогно.

За почетак, посматрајмо случај када је $\lambda \neq \frac{1}{3}, \epsilon_2 = 1$ или $\lambda \neq 1, \epsilon_2 = -1$.

У координатној бази (2.8) матрице метрике g и кандидата $\bar{g}$ имају облик

$$g = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2(1+\epsilon_2\lambda) & -x(1+\epsilon_2\lambda) & 1 \\ 0 & -x(1+\epsilon_2\lambda) & \epsilon_2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^2q + px^2(1+\epsilon_2\lambda) & -px(1+\epsilon_2\lambda) & p \\ 0 & -px(1+\epsilon_2\lambda) & p\epsilon_2\lambda & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

где $p, q \in C^\infty(G_4),\ p \neq 0$. Њихове компоненте задовољавају релације

$$\bar{g}_{ab} = pg_{ab}, \quad \text{за} \quad (a,b) \neq (2,2), \tag{5.8}$$

$$\bar{g}_{22} = pg_{22} - qp^2 e^2 \otimes e^2, \tag{5.9}$$

а детерминанте су

$$\det g = -\epsilon_1\epsilon_2\lambda, \qquad \det \bar{g} = -\epsilon_1\epsilon_2\lambda p^4. \tag{5.10}$$

Комбинујући (5.3) и (5.10), добијамо

$$\phi = \frac{2}{5}\log p, \quad \phi_d = \frac{2}{5}\frac{p_d}{p}, \tag{5.11}$$

где ϕ_d и p_d, $d = 1, \ldots, 4$, означавају парцијалне изводе у односу на координате x, y, z, w, редом. Помоћу формуле

$$\Gamma^a_{bd} = \frac{1}{2}g^{am}\left(\frac{\partial g_{mb}}{\partial x_d} + \frac{\partial g_{md}}{\partial x_b} - \frac{\partial g_{bd}}{\partial x_m}\right) \tag{5.12}$$

израчунавамо Кристофелове симболе повезаности ∇ у односу на метрику g :

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= -\epsilon_1(1+\epsilon_2\lambda)x, \\ \Gamma^1_{23} &= \Gamma^1_{32} = -\Gamma^4_{13} = -\Gamma^4_{31} = \epsilon_1\frac{1+\epsilon_2\lambda}{2}, \\ \Gamma^4_{12} &= \Gamma^4_{21} = \epsilon_2\frac{\lambda^2-1}{2\lambda}x, \\ \Gamma^3_{12} &= \Gamma^3_{21} = -\epsilon_2\frac{1+\epsilon_2\lambda}{2\lambda}, \\ \Gamma^a_{bd} &= 0, \quad \text{иначе.} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Приметимо да је у случају $\lambda = 1, \epsilon_2 = -1$ метрика g равна, те је искључена из нашег разматрања. У остатку доказа сви коваријантни изводи ће бити рачунати у односу на Леви-Чивитину повезаност метрике g.

Коваријантним диференцирањем (5.8) за $(a,b) = (1,1)$, добијамо

$$\bar{g}_{11;d} = p_d, \tag{5.14}$$

одакле, из (5.11) и (5.4), следи

$$\bar{g}_{11;d} = 2p\phi_d + 2\bar{g}_{1d}\phi_1. \tag{5.15}$$

Из претходних релација директно следи да је $p_d = 0$, за $1 \leq d \leq 4$. Стога, p мора бити константна функција, па је $\phi_d = 0$ за свако d. Слично, узимајући сада $(a, b) = (2, 2)$, коваријанти извод је

$$\bar{g}_{22;d} = -p^2 q_d, \tag{5.16}$$

па користећи (5.11) и $\phi_d = 0$, добијамо да важи следећа релација

$$\bar{g}_{22;d} = 2\bar{g}_{22}\phi_d + 2\bar{g}_{2d}\phi_2 = 0. \tag{5.17}$$

Дакле, $q = const$ и наше метрике g и $\bar{g}$ су афино еквивалентне.

Посматрајмо сада случај $\lambda = \frac{1}{3}$ који се специјално издваја када је $\epsilon_2 = 1$. Тада су у координатној бази метрике g и $\bar{g}$ задате матрицама

$$g = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}x^2 & -\frac{4}{3}x & 1 \\ 0 & -\frac{4}{3}x & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} q & -pqr & 0 & 0 \\ -pqr & p^2(qr^2 - s) + \frac{4}{3}px^2 & -\frac{4}{3}px & p \\ 0 & -\frac{4}{3}px & \frac{1}{3}p & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

где су $p, q, r, s \in C^\infty(G_4), p, q \neq 0$. Метрике задовољавају следећи услов

$$\bar{g} = pg + \begin{pmatrix} q - \epsilon_1 p & -pqr & 0 & 0 \\ -pqr & p^2(qr^2 - s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Њихове детерминанте су

$$\det g = -\frac{\epsilon_1}{3}, \qquad \det \bar{g} = -\frac{1}{3}p^3 q, \tag{5.21}$$

па комбинујући (5.3) и (5.21) добијамо

$$\phi = \epsilon_1 \frac{3}{10} \log p + \epsilon_1 \frac{1}{10} \log q, \tag{5.22}$$

$$\phi_d = \epsilon_1 \frac{3}{10} \frac{p_d}{p} + \epsilon_1 \frac{1}{10} \frac{q_d}{q}. \tag{5.23}$$

Кристофелови симболи одговарајуће метрике g дати су релацијама:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= -\epsilon_1 \frac{4}{3}x, \\ \Gamma^4_{12} &= \Gamma^4_{21} = -\frac{4}{3}x, \\ \Gamma^1_{23} &= \Gamma^1_{32} = \epsilon_1 \frac{2}{3}, \\ \Gamma^4_{13} &= \Gamma^4_{31} = -\frac{2}{3}, \\ \Gamma^3_{12} &= \Gamma^3_{21} = -2, \\ \Gamma^a_{bd} &= 0, \quad \text{иначе.} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Ако запишемо релацију (5.20) у облику

$$\bar{g} = pg + (q - \epsilon_1 p)e^1 \otimes e^1 - 2pqre^1 \otimes e^2 + p^2(qr^2 - s)e^2 \otimes e^2, \tag{5.25}$$

коваријантним диференцирањем добијамо

$$\begin{aligned} \nabla_d \bar{g} \quad = \quad & p_d g + (q_d - \epsilon_1 p_d)e^1 \otimes e^1 - 2(q - \epsilon_1 p)\Gamma^1_{dj} e^j \otimes e^1 \\ & - 2(p_d qr + pq_d r + pqr_d)e^1 \otimes e^2 + 2pqr\Gamma^2_{dj} e^j \otimes e^2 \\ & + (2pp_d(qr^2 - s) + p^2(q_d r^2 - 2qrr_d - s_d))e^2 \otimes e^2. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Погодним избором a, b и d, закључујемо да је

$$p_d = 0, \quad \phi_d = 0 \ \text{ за } \ d = 1, \ldots, 4, \quad \text{тј.} \quad p = const.$$

Слично, за $(a, b) = (1, 1)$ добијамо да је и $q = const$.

Из претходног, лако изводимо

$$r_1 = r_4 = 0, \quad r_2 = \frac{4}{3}\frac{q - \epsilon_1 p}{pq}\epsilon_1 x, \quad r_3 = -\frac{2}{3}\frac{q - \epsilon_1 p}{pq}\epsilon_1. \tag{5.27}$$

Поновним диференцирањем (5.27), добија се

$$r_{12} = 0, \quad r_{21} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{4}{3}\frac{q - \epsilon_1 p}{pq}\epsilon_1.$$

Дакле, пошто је $r \in C^\infty(G_4)$, мора бити испуњено $q = \epsilon_1 p$, те је и r константна функција. Штавише, за избор $(a, b) = (2, 2)$, закључујемо да је $s = const$ и $r = 0$.

Како су p, q, s константне функције $(p, q \neq 0)$ и $r = 0$, метрика $\bar{g}$ је истог облика као и у претходном случају. Дакле, метрике g и $\bar{g}$ су афино еквивалентне. □

Теорема 5.2. *Нека су g и $\bar{g}$ геодезијски еквивалентне метрике на групи $H_3 \times \mathbb{R}$ и нека је g лево-инваријантна метрика која није равна, тада су g и $\bar{g}$ афино еквивалентне метрике. Фамилија метрика $\bar{g}$ је дводимензиона. Метрика $\bar{g}$ је такође лево-инваријантна, а ако је g недекомпозабилна, тада су метрике исте сигнатуре, у супротном сигнатура може бити промењена.*

Доказ. Доказ је сличан доказу претходне теореме. Представљамо само табелу у којој су у првој колони дате оригиналне метрике, у другој кандидати, а у трећој колони пројективно еквивалентне метрике.

Табела 5.2. Пројективно еквивалентне метрике на Лијевој групи $H_3 \times \mathbb{R}$

оригинална метрика (g)	**метрике кандидати**	**еквивалентне метрике** ($\bar{g}$)
$g_\lambda^\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_1 p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_4 q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_1 c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3\lambda c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_4 c_2 \end{pmatrix}$
$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & p & -p^2 q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$
$g_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -p^2 q & 0 & 0 & p \\ 0 & \epsilon_1 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & \epsilon_1 c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

У Табели 5.2 су са $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0$ означене константе, а са $p, q \in C^\infty(H_3 \times \mathbb{R})$ глатке функције на групи. □

Последица 5.1. *У позитивно дефинитном случају, све лево-инваријантне метрике на групи G_4 су геодезијски ригидне. На групи $H_3 \times \mathbb{R}$ све метрике су декомпозабилне, па тривијално допуштају дводимензиону фамилију афино еквивалентних метрика које су такође лево-инваријантне.*

Упоредимо наше резултате са радовима Г. Хала и коаутора. У Лоренцовом случају из [29] следи да пројективно еквивалентне метрике са холономијама R8 и R13 морају бити афино еквивалентне. То је управо закључак до кога смо и ми дошли у Теоремама 5.1 и 5.2. Ипак, ми смо успели да покажемо и више: простор таквих метрика има димензију 2. Штавише, Г. Хал и Д. Лони нису дали одговор о пројективној еквиваленцији метрика у случају максималне холономије R15. Егзистенција пројективно еквивалентних метрика се тада мора проверити директно, на пример коришћењем предложеног алгоритма.

У случају метрика неутралне сигнатуре, аутори су у [60] показали да све пројективно еквивалентне метрике, чије су алгебре холономија димензије два или три (уз додатни услов за ранг оператора кривине), морају бити афино еквивалентне. Као и у Лоренцовом случају, за метрике са максималном алгебром холономије, на основу њихових резултата, не може се дати одговор на питање пројективне еквивалентности. Наше метрике имају или максималну алгебру холономија A_{32}, или тродимензиону алгебру A_{22} или дводимензиону A_{17} (видети Одељак 3.2).

На основу претходне две теореме, можемо да формулишемо опште тврђење:

Теорема 5.3. *Нека је g лево-инваријантна метрика на четвородимензионој нилпотентној Лијевој групи. Ако је g геодезијски еквивалентна са $\bar{g}$, тада су оне или афино еквивалентне или је g геодезијски ригидна. Метрика $\bar{g}$ је такође лево-инваријантна, али не мора бити исте сигнатуре као метрика g.*

Примедба 5.2. *Афино еквивалентне метрике* g *и* $\bar{g}$, *које нису пропорционалне, повезане су аутоморфизмом групе. Ово значи да нилпотентна група* (N, g) *поседује једнопараметарску фамилију аутоморфизама који нису изометрије, али чувају геодезијске линије.*

Примедба 5.3. *Приметимо да недекомпозабилне лево-инваријантне метрике, које допуштају афино еквивалентне метрике, имају алгебру холономије* $\mathbb{R}^2$. *Стога оне имају паралелни нул вектор облика* $v = v^\alpha X_\alpha$. *Фамилија афино еквивалентних метрика је дата са*

$$\bar{g} = \lambda\, g + \mu\, \left(v^\alpha v^\beta\, X^\alpha \otimes X^\beta\right),$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *где* X^α *означава вектор у дуалној бази.*

Закључак

За разлику од тродимензионог простора, где су метрике и Риманове и Лоренцове сигнатуре детаљно изучене, потпуна класификација метрика произвољне сигнатуре на четвородимензионим Лијевим групама још увек није позната. Класификоване су позитивно дефинитне метрике, као и Ајнштајнове и Ричи-паралелне метрике Лоренцове сигнатуре, а један од главних резултата ове тезе јесте класификација лево-инваријантних метрика свих сигнатура на нилпотентним Лијевим групама. Преласком са Риманове на псеудо-Риманову сигнатуру број лево-инваријантних метрика на групи се знатно повећава, тако да се поставља питање да ли и у којим случајевима треба тражити потпуну класификацију.

Геометрију 2-степ нилпотентних група проучавали су бројни аутори, али мало тога је било познато о 3-степ нилпотентним групама. Проучавајући њихова својства, уочили смо бројне сличности и разлике између ове две групе: све метрике на $H_3 \times \mathbb{R}$ су геодезијски комплетне, док на G_4 постоје примери некомплетних метрика; уколико је центар групе $H_3 \times \mathbb{R}$ недегенерисан, одговарајуће метрике се могу разложити на директан производ метрика на Хајзенберговој групи H_3 са једнодимензионим равним фактором $\mathbb{R}$; метрике на G_4 су недекомпозабилне; ни једна четвородимензиона нилпотентна Лијева група не допушта Ајнштајнове метрике, али се у случају дегенерисаног центра групе јављају пп-таласи и Вокерове метрике... Управо за Вокерове метрике смо одредили потребан и довољан услов да допуштају локалну нилпотентну групу изометрија.

Групе изометрија нилпотентних Лијевих група последњих година привлаче све више пажње. Најчешће питање је како уопштити на псеудо-Риманов случај већ позната својства Риманове сигнатуре. Иако се у Римановом случају група свих изометрија поклапа са групом изометријских аутоморфизама и групом изометрија које чувају разлагање $TN = \upsilon N \oplus \xi N$, у псеудо-Римановом случају то није испуњено. Штавише, показали смо да ако је центар групе дегенерисан и одговарајућа метрика није равна, тада је $I^{aut} < I$. Такође, нашли смо све примере метрика за које су испуњене строге неједнакости $I^{split} < I^{aut} < I$. Наставак истраживања би требало да обухвати дејства групе изометрија на нилмногострукостима. Парцијални резултати су већ познати у 2-степ нилпотентном случају, али 3-степ нилпотентни случај још увек није разматран.

У општој теорији релативности пројективна еквивалентност метрика отвара два веома значајна питања: Како конструисати метрику на основу њене (непараметризоване) геодезијске криве? Да ли је тако конструисана метрика јединствена? С тим у вези, од интереса су примери „физички интересантних" метрика које су геодезијски ригидне, као и како конструисати **све** парове непропорционалних геодезијски еквивалентних метрика. Упркос бројним примерима за специјалне класе метрика, питање пројективне еквивалентности је и даље отворено. У тези је дат одговор само у случају четвородимензионих нилпотентних Лијевих група: ако је метрика g лево-инваријантна, а метрика $\bar{g}$ јој је геодезијски еквивалентна, тада су оне или афино еквивалентне, или је g геодезијски ригидна. Следећи корак јесте да се утврди да ли на Лијевим групама уопште постоје примери лево-инваријантних метрика које су пројективно еквивалентне, а нису афино еквивалентне. Наша прелиминарна истраживања упућују да такве метрике, ако постоје, треба тражити на групама са дегенерисаним центром.

Литература

[1] W. Ambrose, I. M. Singer, *A theorem on holonomy*, Transactions of the American Mathematical Society 75.3 (1953): 428-443.

[2] S. Azimpour, M. Chaichi, M. Toomanian, *A note on 4-dimensional locally conformally flat Walker manifolds*, Journal of Contemporary Mathematical Analysis 42.5 (2007): 270-277.

[3] В. В. Балащенко, Ю. Г. Никоноров, Е. Д. Родионов, В. В. Славский, *Однородные пространства: теория и приложения: монография*, Ханты-Мансийск: Полиграфист (2008).

[4] M. L. Barberis, *Hypercomplex Structures on Four-dimensional Lie Groups*, Proceedings of the American Mathematical Society 128.4 (1997): 1043-1054.

[5] W. Batat,S. Rahmani, *Isometries, Geodesics and Jacobi Fields of Lorentzian Heisenberg Group*, Mediterranean journal of mathematics 8.3 (2011): 411-430.

[6] A. Bejancu, H. R. Farran, *Foliations and geometric structures*, vol. 580 Springer (2006).

[7] E. Beltrami, *Saggio di interpetazione della geometria non-euclidea*, Giornale di matematiche VI (1868).

[8] L. Bérard-Bergery, A. Ikemakhen, *On the holonomy of Lorentzian manifolds*, In Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 54.2 (1993): 27-40.

[9] L. Bérard-Bergery, A. Ikemakhen, *Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature* (n, n), Bulletin de la Société Mathématique de France, 125.1 (1997): 93-114.

[10] J. Berndt, L. Vanhecke, F. Tricerri, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Springer, (1995).

[11] D. E. Blair, J. Davidov, O. Muškarov, *Isotropic Kähler hyperbolic twistor spaces*, Journal of Geometry and Physics 52.1 (2004): 74-88.

[12] M. Blau, M. O'Loughlin, *Homogenous plane waves*, Nuclear Physics B654 (2003): 135-176.

[13] N. Blažić, S. Vukmirović, *Four-dimensional Lie algebras with a para-hypercomplex structure*, Rocky Mountain Journal of Mathematics 40.5 (2010): 1391-1439.

[14] N. Bokan, T. Šukilović, S. Vukmirović, *Lorentz geometry of 4-dimensional nilpotent Lie groups*, Geometriae Dedicata, DOI 10.1007/s10711-014-9980-4.

[15] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević, R. Vázquez-Lorenzo, *The geometry of Walker manifolds*, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics 4.1 (2009): 1-179.

[16] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Four-dimensional Lorentzian Lie groups*, Differential Geometry and its Applications 31 (2013): 496-509.

[17] L. A. Cordero, M. Fernández, A. Gray, *Lie groups with no left invariant complex structures*, Portugaliae mathematica 47.2 (1990): 183-190.

[18] L. A. Cordero, P. E. Parker, *Left-invariant Lorentz metrics on 3-dimensional Lie groups*, Rendiconti di Matematica e sue Applicazioni 17 (1997): 129-155.

[19] L. A. Cordero, P. E. Parker, *Isometry Groups of Pseudoriemannian 2-step nilpotent Lie groups*, Houston Journal of Mathematics 35.1 (2009): 49-72.

[20] V. del Barco, G. P. Ovando, *Isometric actions on pseudo-Riemannian nilmanifolds*, Annals of Global Analysis and Geometry (2013): 1-16.

[21] G. de Rham, *Sur la réducibilité d'un espace de Riemann*, Commentarii Mathematici Helvetici 26 (1952): 328-344.

[22] P. Eberlein, *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 27.5 (1994): 611-660.

[23] M. Fernández, M. J. Gotay, A. Gray, *Four-dimensional compact parallelizable symplactic and complex manifolds*, Proceedings of the American Mathematical Society 103 (1988): 1209-1212.

[24] A. Galaev, T. Leistner, *Recent developments in pseudo-Riemannian holonomy theory*, Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry (2010): 581-627.

[25] R. Ghanam, G. Thompson, *The holonomy Lie algebras of neutral metrics in dimension four*, Journal of Mathematical Physics 42.5 (2001): 2266-2284.

[26] P. B. Gilkey, *Geometric properties of natural operators defined by the Riemann curvature tensor*, World Scientific (2001).

[27] M. Guediri, *Sur la complétude des pseudo-métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie nilpotents*, Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino 52 (1994): 371-376.

[28] G. S. Hall, D. P. Lonie, *Geodesic equivalence of Einstein spaces in general relativity*, Classical and Quantum Gravity 26, (2009): 125009.

[29] G. S. Hall, D. P. Lonie, *Projective Structure and Holonomy in* 4*-dimensional Lorentz manifolds*, Journal of Geometry and Physics 61.2 (2011): 381-399.

[30] G. S. Hall, *On the Converse of Weyl's conformal and projective theorems*, Publications de l'institut mathématique (2013).

[31] Sz. Homolya, O. Kowalski, *Simply connected two-step homogeneous nilmanifolds of dimension 5*, Note di Matematica 26.1 (2006): 69-77.

[32] H. Hopf, W. Rinow, *Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Commentarii Mathematici Helvetici 3.1 (1931): 209-225.

[33] A. Kaplan, *Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules*, Geometriae Dedicata 11.2 (1981): 127-136.

[34] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Wiley Classics Library, vol. 1 (1963).

[35] J. L. Lagrange, *Sur la construction des cartes géographiques*, Novéaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Bell-Lettres de Berlin (1779).

[36] J. Lauret, *Homogeneous nilmanifolds of dimension* 3 *and* 4, Geometriae Dedicata 68 (1997): 145-155.

[37] T. Leistner, *Conformal holonomy of C-spaces, Ricci-flat, and Lorentzian manifolds*, Differential Geometry and its Applications, 24.5 (2006): 458-478.

[38] T. Levi-Civita, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 24 (1896): 255-300.

[39] L. Magnin, *Sur les algébres de Lie nilpotents de dimension* ≤ 7, Journal of Geometry and Physics, 3.1 (1986): 119.

[40] А. И. Мальцев, *Об одном классе однородных пространств*, Известия Российской академии наук, Серия математическая 13:1 (1949): 9-32.

[41] V. S. Matveev, P. Ĭ. Topalov, *Trajectory Equivalence and Corresponding Integrals*, Regular and Chaotic Dynamics 3.2 (1998): 30-45.

[42] V. S. Matveev, P. Ĭ. Topalov, *Geodesic equivalence via integrability*, Geometriae Dedicata 96 (2003): 91-115.

[43] V. Matveev, *Geodesically equivalent metrics in general relativity*, Journal of Geometry and Physics 62.3 (2012): 675-691.

[44] J. Mikeš, A. Vanžurová, I. Hinterleitner, *Geodesic mappings and some generalizations*, Palacký University, Olomouc, (2009), ISBN 978-80-244-2524-5.

[45] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Advances in Mathematics 21.3 (1976): 293-329.

[46] В. В. Морозов, *Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка*, Известия высших учебных заведений. Математика, 4 (1958): 161-171.

[47] G. Ovando, *Invariant complex structures on solvable real Lie groups*, Manuscripta Mathematica 103.1 (2000): 19-30.

[48] R. Penrose, *Any space-time has a plane wave as a limit*, Differential Geometry and Relativity, Mathematical Physics and Applied Mathematics 3 (1976): 271-275.

[49] А. З. Петров, *Классификация пространств определяющих поля тяготения*, Учёные записки Казанского государственного университета 114.8 (1954): 55-69.

[50] S. Rahmani, *Metriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension* 3, Journal of Geometry and Physics 9 (1992): 295-302.

[51] J. F. Schell, *Classification of four-dimensional Riemannian spaces*, Journal of Geometry and Physics 2 (1961): 202.

[52] Н. С. Синюков, *О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства*, Доклады Академии Наук СССР, 98 (1954): 21-23.

[53] J. E. Snow, *Invariant Complex Structures on Four Dimensional Solvable Real Lie Groups*, Manuscripta Mathematica 66 (1990): 397-412.

[54] T. Šukilović, *Geometric properties of neutral signature metrics on 4-dimensional nilpotent Lie groups*, na recenziji

[55] T. Šukilović, *Isometry groups of 4-dimensional nilpotent Lie groups*, prihvaćen za štampu u Fundamental and Applied Mathematics

[56] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли*, Успехи математических наук, 39.2 (1984), 3-56.

[57] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли*, Динамические системы - 7, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 16, ВИНИТИ, М., (1987), 227-299.

[58] S. Vukmirović, *Classification of Left-invariant Metrics on Heisenberg group*, Journal of Geometry and Physics, DOI 10.1016/j.geomphys.2015.01.005

[59] A. G. Walker, *Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes*, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford 1.2 (1950): 69-79.

[60] Z. Wang, G. S. Hall, *Projective structure in 4-dimensional manifolds with metric signature* $(+,+,-,-)$, Journal of Geometry and Physics (2013): 37-49.

[61] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, “Glenview:Scott”, Foresman, (1971).

[62] H. Weyl, *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffasung*, Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Mathematisch-Physikalische Klasse (1921); "Selecta Herman Weyl", Birkhäuser Verlag, Basel und Stutgart (1956).

[63] H. Weyl, *Geometrie und Physik*, Die Naturwissenschaftler 19 (1931), 49-58, "Herman Weyl Gesammelte Abhandlungen", band 3, "Springer-Verlag", (1968).

[64] E. N. Wilson, *Isometry groups on homogeneous nilmanifolds*, Geometriae Dedicata 12.3 (1982): 337-346.

[65] H. Wu, *Holonomy groups of indefinite metrics*, Pacific Journal of Mathematics 20.2 (1967): 351-392.

Прилози

A Табеле

Табела A1. Кривина лево-инваријантних метрика Лоренцове сигнатуре на $H_3 \times \mathbb{R}$

метрика g	**тензор кривине** R^l_{ijk} **(ненула компоненте)**	**Ричијев тензор** R_{ij}	**скаларна кривина**
g_μ	$R^2_{112} = -\frac{3\mu}{4}$ $R^1_{212} = -\frac{3\mu}{4}$ $R^3_{113} = \frac{\mu}{4}$ $R^1_{313} = -\frac{\mu^2}{4}$ $R^3_{223} = -\frac{\mu}{4}$ $R^2_{323} = -\frac{\mu^2}{4}$	$R_{11} = \frac{\mu}{2}$ $R_{22} = -\frac{\mu}{2}$ $R_{33} = -\frac{\mu^2}{2}$	$\frac{\mu}{2}$
$g^\pm_\lambda$	$R^2_{112} = \pm\frac{3\lambda}{4}$ $R^1_{212} = \mp\frac{3\lambda}{4}$ $R^3_{113} = \mp\frac{\lambda}{4}$ $R^1_{313} = \frac{\lambda^2}{4}$ $R^3_{223} = \mp\frac{\lambda}{4}$ $R^2_{323} = \frac{\lambda^2}{4}$	$R_{11} = \mp\frac{\lambda}{2}$ $R_{22} = \mp\frac{\lambda}{2}$ $R_{33} = \frac{\lambda^2}{2}$	$\mp\frac{\lambda}{2}$
g_1	$R^3_{114} = -\frac{1}{4}$ $R^3_{224} = -\frac{1}{4}$ $R^1_{414} = \frac{1}{4}$ $R^2_{424} = \frac{1}{4}$	$R_{44} = \frac{1}{2}$	0
g_{01}	равна		0
g_{02}	$R^4_{112} = \frac{3}{4}$ $R^1_{212} = -\frac{3}{4}$ $R^4_{323} = \frac{1}{4}$ $R^3_{232} = -\frac{1}{4}$	$R_{22} = -\frac{1}{2}$	0

Табела A2. Кривина лево-инваријантних метрика Лоренцове сигнатуре на G_4

метрика g	тензор кривине R^l_{ijk} (ненула компоненте)		Ричијев тензор R_{ij}	скаларна кривина
$g_A^{\pm}$ g_A	$R^2_{112} = \frac{3\epsilon_2}{4}a$ $R^3_{112} = \frac{3}{4d}bc$ $R^4_{112} = \frac{ac-4b^2}{4d}$ $R^2_{113} = \epsilon_2 b$ $R^3_{113} = \frac{3c^2-\epsilon_2 ad}{4d}$ $R^4_{113} = -\frac{bc}{d}$ $R^2_{114} = \frac{\epsilon_2}{4}c$ $R^3_{114} = -\frac{\epsilon_2}{4}b$ $R^4_{114} = -\frac{c^2}{4d}$ $R^3_{224} = -\frac{\epsilon_1}{4}b$ $R^2_{324} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{4}ab$ $R^3_{324} = \frac{\epsilon_1}{4d}b^2c$ $R^4_{324} = -\frac{\epsilon_1}{4d}abc$ $R^3_{223} = -\frac{\epsilon_1}{4}a$ $R^2_{323} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{4}a^2$ $R^3_{323} = \frac{\epsilon_1(b^3-bd)}{4d}$ $R^4_{323} = -\frac{\epsilon_1}{4d}abc$ $R^3_{234} = \frac{\epsilon_1}{4}c$ $R^4_{234} = -\frac{\epsilon_1}{2}b$ $R^2_{334} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2(b^2-d)}{4}$ $R^3_{334} = \frac{\epsilon_1}{4d}bc^2$ $R^4_{334} = -\frac{\epsilon_1}{4d}ac^2$	$R^1_{212} = -\frac{3\epsilon_1}{4}a$ $R^1_{312} = -\epsilon_1 b$ $R^1_{412} = -\frac{\epsilon_1}{4}c$ $R^1_{213} = -\epsilon_1 b$ $R^1_{313} = \frac{3cd-b^2c-\epsilon_2 a^2 d}{4\epsilon_1 d}$ $R^1_{413} = \frac{\epsilon_1 b(\epsilon_2 c+ad)}{4d}$ $R^1_{214} = -\frac{\epsilon_1}{4}c$ $R^1_{314} = \frac{\epsilon_1 b(\epsilon_2 c^2+ad)}{4d}$ $R^1_{414} = \frac{\epsilon_1(c^3+\epsilon_2 b^2 d)}{4d}$ $R^2_{424} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{4}b^2$ $R^3_{424} = \frac{\epsilon_1}{4d}bc^2$ $R^4_{424} = -\frac{\epsilon_1}{4d}b^2c$ $R^2_{423} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{4}b^2$ $R^3_{423} = \frac{\epsilon_1(b^3-bd)}{4d}$ $R^4_{423} = -\frac{\epsilon_1(b^3-bd)}{4d}$ $R^2_{434} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{4}bc$ $R^3_{434} = \frac{\epsilon_1}{4d}c^3$ $R^4_{434} = -\frac{\epsilon_1}{4d}bc^2$	$R_{11} = -\frac{c^2+\epsilon_2 ad}{2d}$ $R_{22} = -\frac{\epsilon_1 a}{2}$ $R_{23} = -\frac{\epsilon_1 b}{2}$ $R_{33} = \frac{\epsilon_1(\epsilon_2 a^2 d-cd+cb^2)}{2d}$ $R_{34} = \frac{\epsilon_1 b(c^2+\epsilon_2 ad)}{2d}$ $R_{44} = \frac{\epsilon_1(\epsilon_2 b^2 d+c^3)}{2d}$	$\frac{-\epsilon_1(c^2+\epsilon_2 ad)}{2d}$
g_1^{λ}	$R^4_{112} = \frac{(3\lambda-1)(\lambda+1)}{4\lambda}$ $R^1_{212} = \frac{(1-3\lambda)(\lambda+1)}{4\lambda}$	$R^3_{223} = -\frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda}$ $R^4_{323} = \frac{(\lambda+1)^2}{4}$	$R_{22} = -\frac{\lambda^2-1}{2\lambda}$	0
g_2^{λ}	$R^2_{112} = \frac{3\lambda}{4}$ $R^4_{212} = -\frac{3\lambda}{4}$	$R^3_{113} = -\frac{\lambda}{4}$ $R^4_{313} = \frac{\lambda^2}{4}$	$R_{11} = -\frac{\lambda}{2}$	0
g_3^{λ}	$R^4_{112} = \frac{1}{2}$ $R^3_{412} = -\frac{\lambda}{2}$ $R^2_{114} = \frac{\lambda}{2}$ $R^3_{214} = -\frac{\lambda}{2}$ $R^4_{134} = \frac{\lambda}{4}$	$R^1_{113} = \frac{3\lambda}{4}$ $R^3_{313} = -\frac{3\lambda}{4}$ $R^4_{314} = \frac{\lambda}{4}$ $R^1_{414} = -\frac{\lambda^2}{4}$ $R^3_{434} = -\frac{\lambda^2}{4}$	$R_{13} = \frac{\lambda}{2}$ $R_{44} = -\frac{\lambda^2}{2}$	$\frac{\lambda}{2}$
g_4^{λ}	$R^2_{113} = \frac{3\lambda}{4}$ $R^1_{313} = -\frac{3\lambda}{4}$ $R^2_{224} = \frac{\lambda}{2}$ $R^3_{324} = -\frac{\lambda}{2}$	$R^4_{223} = \frac{1}{2}$ $R^3_{423} = -\frac{\lambda}{2}$ $R^4_{334} = -\frac{\lambda}{4}$ $R^2_{434} = \frac{\lambda^2}{4}$	$R_{24} = \frac{\lambda}{2}$ $R_{33} = -\frac{\lambda}{2}$	0

Примедба. Три фамилије скаларних производа S_A и $S_A^{\pm}$ записали смо помоћу матрице

$$S = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix},$$

где су $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{1, -1\}$ и $sign(detA) = -\epsilon_1\epsilon_2$. Одговарајуће метрике записане у лево-инваријантној координатној бази коришћене су у претходној табели. Такође, означили смо са $d = ac - b^2 = \det A$.

Табела А3. Кривина лево-инваријантних метрика неутралне сигнатуре на $H_3 \times \mathbb{R}$

метрика g	**тензор кривине** R_{ijk}^l **(ненула компоненте)**	**Ричијев тензор** R_{ij}	**скаларна кривина**
$g_\mu^\pm$	$R_{112}^2 = -\frac{3\mu}{4}$ $R_{212}^1 = \frac{3\mu}{4}$ $R_{113}^3 = \frac{\mu}{4}$ $R_{313}^1 = \frac{\mu^2}{4}$ $R_{223}^3 = \frac{\mu}{4}$ $R_{323}^2 = \frac{\mu^2}{4}$	$R_{11} = \frac{\mu}{2}$ $R_{22} = \frac{\mu}{2}$ $R_{33} = \frac{\mu^2}{2}$	$\mp\frac{\mu}{2}$
$g_\lambda^\pm$	$R_{112}^2 = \mp\frac{3\lambda}{4}$ $R_{212}^1 = \mp\frac{3\lambda}{4}$ $R_{113}^3 = \pm\frac{\lambda}{4}$ $R_{313}^1 = -\frac{\lambda^2}{4}$ $R_{223}^3 = \mp\frac{\lambda}{4}$ $R_{323}^2 = -\frac{\lambda^2}{4}$	$R_{11} = \pm\frac{\lambda}{2}$ $R_{22} = \mp\frac{\lambda}{2}$ $R_{33} = -\frac{\lambda^2}{2}$	$\pm\frac{\lambda}{2}$
g_1	$R_{114}^3 = \frac{1}{4}$ $R_{414}^1 = -\frac{1}{4}$ $R_{224}^3 = -\frac{1}{4}$ $R_{424}^2 = -\frac{1}{4}$	$R_{44} = -\frac{1}{2}$	0
$g_{01}^\pm$	равна		0
$g_{02}^\pm$	$R_{112}^2 = -\frac{3}{4}$ $R_{212}^4 = \pm\frac{3}{4}$ $R_{113}^3 = \frac{}{4}$ $R_{313}^4 = \pm\frac{1}{4}$	$R_{11} = \frac{1}{2}$	0
g_0^0	равна		0

Табела А4. Кривина лево-инваријантних метрика неутралне сигнатуре на G_4

метрика g	**тензор кривине** R^l_{ijk} **(ненула компоненте)**	**Ричијев тензор** R_{ij}	**скаларна кривина**
g_A	$R^2_{112}=\frac{3a\epsilon_2}{4}$ $R^2_{113}=b\epsilon_2$ $R^3_{112}=\frac{3bc}{4d}$ $R^3_{113}=\frac{3c^2-ad\epsilon_2}{4d}$ $R^4_{112}=\frac{d-3b^2}{4d}$ $R^4_{113}=\frac{-bc}{d}$ $R^1_{212}=-\frac{3a\epsilon_1}{4}$ $R^1_{213}=-b\epsilon_1$ $R^1_{312}=-b\epsilon_1$ $R^1_{313}=\frac{a^2d\epsilon_2-c(3d-b^2)}{4\epsilon_1 d}$ $R^1_{412}=-\frac{c\epsilon_1}{4}$ $R^1_{413}=\frac{b(ad\epsilon_2+c^2)\epsilon_1}{4d}$ $R^2_{114}=\frac{c\epsilon_2}{4}$ $R^3_{223}=-\frac{a\epsilon_1}{4}$ $R^3_{114}=-\frac{b\epsilon_2}{4}$ $R^2_{323}=\frac{a^2\epsilon_1\epsilon_2}{4}$ $R^4_{114}=-\frac{c^2}{4d}$ $R^3_{323}=\frac{b(b^2-d)\epsilon_1}{4d}$ $R^1_{214}=-\frac{c\epsilon_1}{4}$ $R^4_{323}=\frac{a(b^2-d)\epsilon_1}{4d}$ $R^1_{314}=\frac{b(ad\epsilon_2+c^2)}{4\epsilon_1 d}$ $R^2_{423}=\frac{ab\epsilon_1\epsilon_2}{4}$ $R^1_{414}=\frac{(b^2d\epsilon_2+c^3)}{4\epsilon_1 d}$ $R^3_{423}=\frac{c(b^2-d)\epsilon_1}{4d}$ $R^3_{234}=\frac{c\epsilon_1}{4}$ $R^4_{423}=\frac{b(d-b^2)\epsilon_1}{4d}$ $R^4_{234}=-\frac{b\epsilon_1}{2}$ $R^3_{224}=-\frac{b\epsilon_1}{4}$ $R^2_{334}=\frac{(b^2-d)\epsilon_1\epsilon_2}{4}$ $R^2_{324}=\frac{ab}{4}\epsilon_1\epsilon_2$ $R^3_{334}=\frac{bc^2\epsilon_1}{4d}$ $R^3_{324}=\frac{b^2c\epsilon_1}{4d}$ $R^4_{334}=-\frac{ac^2\epsilon_1}{4d}$ $R^4_{324}=-\frac{abc\epsilon_1}{4d}$ $R^2_{434}=\frac{bc\epsilon_1\epsilon_2}{4}$ $R^2_{424}=\frac{b^2\epsilon_1\epsilon_2}{4}$ $R^3_{434}=\frac{c^3\epsilon_1}{4d}$ $R^4_{424}=\frac{bc^2\epsilon_1}{4d}$ $R^4_{434}=-\frac{bc^2\epsilon_1}{4d}$ $R^4_{424}=-\frac{b^2c\epsilon_1}{4d}$	$R_{11}=-\frac{ad\epsilon_2+c^2}{2d}$ $R_{22}=-\frac{a\epsilon_1}{2}$ $R_{23}=-\frac{b\epsilon_1}{2}$ $R_{33}=\frac{(a^2d\epsilon_2-c(d-b^2))\epsilon_1}{2d}$ $R_{34}=\frac{b(ad\epsilon_2+c^2)}{2d}$ $R_{44}=\frac{(b^2d\epsilon_2+c^3)\epsilon_1}{2d}$	$\frac{-(c^2\epsilon_2+ad)\epsilon_1}{2d}$
$g_1^{\pm\lambda}$	$R^4_{121}=\frac{(\lambda\pm1)(3\lambda\mp1)}{4\lambda}$ $R^3_{223}=\frac{(\lambda\pm1)^2}{4\lambda}$ $R^1_{212}=\frac{(\lambda\pm1)(3\lambda\mp1)}{4\lambda}$ $R^4_{323}=\frac{\mp(\lambda\pm1)^2}{4}$	$R_{22}=\frac{\lambda^2-1}{2\lambda}$	0
$g_2^{\pm\lambda}$	$R^2_{112}=-\frac{3\lambda}{4}$ $R^3_{113}=\frac{\lambda}{4}$ $R^4_{212}=\mp\frac{3\lambda}{4}$ $R^4_{313}=\mp\frac{\lambda^2}{4}$	$R_{11}=\frac{\lambda}{2}$	0
$g_3^{\pm\lambda}$	$R^4_{112}=\frac{1}{2}$ $R^2_{114}=-\frac{\lambda}{2}$ $R^3_{412}=\mp\frac{\lambda}{2}$ $R^3_{214}=\mp\frac{\lambda}{2}$ $R^1_{113}=\pm\frac{\lambda}{4}$ $R^4_{134}=\pm\frac{\lambda}{4}$ $R^3_{313}=\mp\frac{\lambda}{4}$ $R^3_{434}=-\frac{\lambda^2}{4}$	$R_{13}=\pm\frac{\lambda}{2}$ $R_{44}=-\frac{\lambda^2}{2}$	$\pm\frac{\lambda}{2}$
$g_4^{\pm\lambda}$	$R^2_{113}=\pm\frac{3\lambda}{4}$ $R^2_{224}=-\frac{\lambda}{2}$ $R^1_{313}=\frac{3\lambda}{4}$ $R^3_{324}=\frac{\lambda}{2}$ $R^4_{223}=\mp\frac{1}{2}$ $R^4_{334}=\frac{\lambda}{4}$ $R^3_{423}=\frac{\lambda}{2}$ $R^2_{434}=\mp\frac{\lambda^2}{4}$	$R_{24}=-\frac{\lambda}{2}$ $R_{33}=\frac{\lambda}{2}$	0
g_1^0	равна		0
g_2^0	$R^4_{112}=1$ $R^4_{123}=-\frac{1}{4}$ $R^1_{212}=-\frac{1}{4}$ $R^3_{223}=\frac{1}{4}$ $R^3_{212}=-1$ $R^4_{312}=\frac{1}{4}$	$R_{22}=-\frac{1}{2}$	0

Б Речник страних појмова и имена

афино еквивалентне метрике	affinely equivalent metrics
ауто-дуалан	self-dual
инфинитезимална група холономије	infinitesimal holonomy group
геодезијски ригидне метрике	geodesically rigid metrics
групе Ха-типа	H-type groups
група холономије	holonomy group
изводна алгебра	derived algebra
иредуцибилно дејство	irreducible action
комутаторска подалгебра	commutator subalgebra
недекомпозабилно дејство	indecomposable action
нилмногострукост	nilmanifold
нул вектор	null (light-like) vector
паралелно померање	parallel displacement
повезана група холономије	restricted holonomy group
повезаност	connection
пп-талас	pp-wave (plane-fronted wave with parallel rays)
пр-талас	pr-wave (plane-fronted wave with recurrent rays)
равански талас	plane wave
разлагање	splitting
раслојење	bundle

Абел	Niels Henrik Abel (1802–1829)
Ајнштајн	Albert Einstein (1879–1955)
Амброз	Warren Arthur Ambrose (1914–1995)
Белтрами	Eugenio Beltrami (1835–1899)
Берже	Marcel Berger
Вејл	Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955)
Вилсон	Edward N. Wilson
Вокер	Arthur Geoffrey Walker (1909–2001)
Ву	Hung-Hsi Wu
Гдири	Mohammed Guediri
дел Барко	Viviana del Barco
де Рам	Georges de Rham (1903–1990)
де Ситер	Willem de Sitter (1872–1934)
Ивасава	Kenkichi Iwasawa (1917–1998)
Каплан	Aroldo Kaplan
Килинг	Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923)
Киосак	Володимир Киосак
Клифорд	William Kingdon Clifford (1845–1879)
Козул	Jean-Louis Koszul
Кордеро	Luis A. Cordero
Котон	Émile Clément Cotton (1872–1950)
Кристофел	Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)
Лагранж	Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)
Лајбниц	Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)
Лаурет	Jorge Lauret
Леви	Eugenio Elia Levi (1883–1917)
Леви-Чивита	Tullio Levi-Civita (1873–1941)
Ли	Marius Sophus Lie (1842–1899)
Лони	David P. Lonie
Лоренц	Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928)
Маљцев	Анатолий Иванович Мальцев (1909–1967)
Мањин	Louis Magnin
Матвејев	Владимир Сергеевич Матвеев
Микеш	Josef Mikeš
Милнор	John Willard Milnor
Минковски	Hermann Minkowski (1864–1909)
Морозов	Владимир Владимирович Морозов (1910–1975)
Овандо	Gabriela P. Ovando
Паркер	Phillip E. Parker
Петров	Алексей Зиновьевич Петров (1910–1972)
Поенкаре	Jules Henri Poincaré (1854–1912)
Рахмани	Salima Rahmani
Риман	Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)
Ринов	Willi Ludwig August Rinow (1907–1979)
Ричи	Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925)
Сингер	Isadore Manuel Singer
Сињуков	Николай Степанович Синюков (1925–1992)
Хајзенберг	Werner Karl Heisenberg (1901–1976)
Хал	Graham S. Hall
Хамилтон	William Rowan Hamilton (1805–1865)
Хопф	Heinz Hopf (1894–1971)
Хоџ	William Vallance Douglas Hodge (1903–1975)

Биографија

Тијана Шукиловић рођена је 02. децембра 1983. године у Ужицу.

На Математичком факултету, Универзитета у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, дипломирала је 2007. године. Школске 2007/08 године уписала је докторске студије Математичког факултета, смер Геометрија.

У периоду од 2007. до 2010. године била је запослена као сарадник у настави на Математичком факултету, а од 2010. године ради као асистент за ужу научну област Геометрија. Коаутор је уџбеника „Геометрија за информатичаре”, који је на рецензији.

Области истраживања су: Диференцијална геометрија, Дискретна диференцијална геометрија, Операциона истраживања и Методика наставе геометрије. У склопу програма размене и стручног усавршавања студената, у периоду од јуна до септембра 2010. године боравила је на Техничком Универзитету у Минхену, Немачка (Technische Univerzität München). Такође, више пута је била у истраживачким посетама Фридрих Шилер Универзитету у Јени, Немачка (Friedrich-Schiller-Universität Jena).

Ангажована је као стручни консултант UNICEF-а.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Тијана Шукиловић

број уписа 2014/2007

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Геометрија четвородимензионих нилпотентних Лијевих група

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 15.01.2015. године

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Тијана Шукиловић

Број уписа 2014/2007

Студијски програм Математика

Наслов рада Геометрија четвородимензионих нилпотентних Лијевих група

Ментор др Срђан Вукмировић

Потписани Vukmirović Srđan

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 15.01.2015. године

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Геометрија четвородимензионих
нилпотентних Лијевих група

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 15.01.2015. године

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.