УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Славко М. Моцоња

Асиметрични правилни типови

Докторска дисертација

Београд, 2015.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Slavko M. Moconja

Asymmetric regular types

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Предраг Тановић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Милан Божић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Небојша Икодиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Dr hab. Krzysztof Krupinski
Универзитет у Вроцлаву, Математички институт

проф. др Зоран Петровић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Предраг Тановић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Изјаве захвалности

Неизмерну захвалност дугујем мом ментору Предрагу Тановићу на свом времену и труду које је уложио да ме уведе у теорију модела, као и на свој помоћи без које не би било ове тезе.

Захвалност дугујем и члановима комисије на корисним саветима и коментарима. Посебно морам да се захвалим професору Кжиштофу Крупинском који ми је указао на грешке у првобитном тексту.

Јелени Катић и професору Зорану Петровићу се захваљујем што су ми указали на велики број правописних грешака.

Својој породици се захваљујем на великој подршци коју су ми пружали током година.

Славко Моцоња

Асиметрични правилни типови

Резиме: У овом раду изучавамо асиметричне глобалне правилне типове. Ако је $\mathfrak{p}$ правилан и асиметричан над A, тада постоји уређење такво да су Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A строго растући. Испоставља се да за сваки мали модел $M \supseteq A$ важи да тип уређења максималног Морлијевог низа у $\mathfrak{p}$ над A чији су елементи из M не зависи од избора низа, тј. то је инваријанта модела M коју означавамо са $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$. У пребројивом случају можемо да одредимо све могућности за $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$: или је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ произвољно пребројиво линеарно уређење или је, под условом да садржи бар две тачке, пребројиво густо линеарно уређење (могуће са једном или обе крајње тачке). Такође, изучавамо везу између $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$, где су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ два правилна и асиметрична над A типа таква да је $\mathfrak{p}_{\restriction A} \not\perp^{w} \mathfrak{q}_{\restriction A}$. Разликујемо две врсте неортогоналности: ограничену и неограничену. Под претпоставком да су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ конвексни, у ограниченом случају добијамо да су $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ изоморфни или антиизоморфни, док под претпоставком јаке правилности, у неограниченом случају добијамо да су Дедекиндова комплетирања од $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ изоморфна или антиизоморфна.

Посебно изучавамо следећу класу структура: експанзије линеарних уређења са пребројиво много унарних предиката и пребројиво много релација еквиваленције са конвексним класама. Обезбеђујемо нове примере правилних типова. Наиме, испоставља се да је сваки глобалан инваријантан тип у овом контексту правилан, као и да сваки неалгебарски тип над A има тачно два глобална инваријантна над A проширења.

Такође изучавамо везу између питања егзистенције квазиминималног модела потпуне теорије првог реда и питања егзистенције јако правилног глобалног типа. Бавимо се и проблемом да ли је свака квазиминимална група Абелова. Испоставља се да ово питање има позитиван одговор у случају да је глобално проширење генеричког типа квазиминималне групе асиметрично над $\emptyset$.

Кључне речи: глобалан тип, инваријантан тип, правилан тип, Морлијев низ, инваријанта, квазиминимална структура, линеарно уређење, оператор алгебарског затворења

Научна област: Математика

Ужа научна област: Математичка логика

УДК број: 510.67(043.3)

AMS класификација: 03C15, 03C45, 03C60, 20A15

Asymmetric regular types

Abstract: In this thesis we study asymmetric regular types. If $\mathfrak{p}$ is regular and asymmetric over A, then there exists an order such that Morley sequences in $\mathfrak{p}$ over A are strictly increasing. It turns out that for every small model $M \supseteq A$, the order type of a maximal Morley sequence in $\mathfrak{p}$ over A whose elements are from M does not depend on the choice of the sequence, i.e. it is an invariant of the model M denoted by $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$. In the countable case we can determine all possibilities for $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$: either $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ is an arbitrary countable linear order or, provided that it contains at least two elements, it is a countable dense linear order (possibly with one or both endpoints). Also, we study the connection between $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ and $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$, where $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ are two regular and asymmetric over A types such that $\mathfrak{p}_{\restriction A} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction A}$. We distinguish two kinds of non-orthogonality: bounded and unbounded. Under the assumption that $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ are convex, in the bounded case we get that $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ and $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ are either isomorphic or anti-isomorphic, while under the assumption of strong regularity, in the unbounded case we get that Dedekind completions of $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ and $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ are either isomorphic or anti-isomorphic.

In particular we study the following class of structures: expansions of linear orderings with countably many unary predicates and countably many equivalence relations with convex classes. We provide new examples of regular types. Namely, it turns out that every global invariant type in this context is regular, and every non-algebraic type over A has precisely two global extensions which are invariant over A.

We also study the connection between the question of existence of a quasi-minimal model of a complete first-order theory and the question of existence of a global strongly regular type. We also deal with the problem whether every quasi-minimal group must be abelian. It turns out that this question has the positive answer provided that the global extension of the generic type of a quasi-minimal group is asymmetric over $\emptyset$.

Key words: global type, invariant type, regular type, Morley sequence, invariant, quasi-minimal structure, linear ordering, algebraic closure operator

Scientific area: Mathematics

Scientific field: Mathematical logic

UDC number: 510.67(043.3)

AMS subject classification: 03C15, 03C45, 03C60, 20A15

Садржај

Увод

Под инваријантом алгебарске структуре, или општије структуре првог реда, мисли се на неко својство структуре које остаје непромењено при изоморфизму. Инваријанта је верна ако одређује структуру до на изоморфизам. Најосновнији примери инваријаната су изражени кардиналним бројевима. На пример, векторски простор над фиксираним пољем је одређен до на изоморфизам кардиналним бројем – његовом димензијом. Према томе, димензија векторских простора је пример верне инваријанте. Такође, степен трансцендентности над базним пољем је инваријанта поља фиксиране карактеристике, али ова инваријанта није верна у општем случају. Међутим, то јесте верна инваријанта алгебарски затворених поља фиксиране карактеристике.

Размотримо следећи тривијалан пример који нам даје другу врсту инваријанте. Нека је $T = \mathrm{Th}(\mathbb{Z}, <)$, где је $\mathbb{Z}$ скуп целих бројева. Теорија T каже да је $<$ линеарно уређење и да сваки елемент има директног претходника и директног следбеника. Модели теорије T су тачно $L \times \mathbb{Z}$, уређени лексикографски, где је L произвољно линеарно уређење. Приметимо да L можемо добити из $L \times \mathbb{Z}$ као количнички скуп релације еквиваленције дефинисане са: $a \sim b$ ако и само ако постоји коначно много елемената између a и b. Ова еквиваленција је дефинабилна бесконачном дисјункцијом, па закључујемо да су $L_1 \times \mathbb{Z}$ и $L_2 \times \mathbb{Z}$ изоморфни ако и само ако су L_1 и L_2 изоморфни. Због тога је линеарно уређење L верна инваријанта модела $L \times \mathbb{Z}$, тј. линеарна уређења се јављају као верне инваријанте модела теорије T. У овој тези нас занимају инваријанте овог облика.

Вилијам Марш је 1966. у својој докторској тези ([**6**]) дао прво модел-теоретско уопштење појма димензије векторских простора и трансцендентног степена поља. Мотивисан чињеницом да су бесконачни векторски простори и алгебарски затворена поља минималне структуре у модел-теоретском смислу (комплемент сваког бесконачног дефинабилног скупа је коначан), доказао је да у свакој минималној структури постоји природно дефинисан оператор предгеометрије, који индукује димензију. У векторским просторима се ова димензија поклапа са уобичајеном димензијом, а у алгебарски затвореним пољима са степеном трансцендентности. Такође, овај оператор предгеометрије је у свакој минималној структури потпуно одређен генеричким типом, тј. скупом формула које дефинишу коконачне скупове.

Шелах је крајем седамдесетих увео појам правилних типова у стабилним теоријама ([**13**]). Сваки правилан тип у стабилној теорији индукује одређени оператор предгеометрије на моделу теорије, и његова димензија је једна од инваријаната модела. Шелах је доказао да ако непребројиви модели неке теорије могу бити одређени неком верном инваријантом, тада је та верна инваријанта, грубо говорећи, дрво чији су чворови означени кардиналним бројем – димензијом одређених правилних типова.

Појам правилног типа у општем случају су увели Пилеј и Тановић 2009. године ([**10**]). Њихов рад је мотивисан Зилберовом хипотезом која тврди да је поље комплексних бројева са експоненцијалном функцијом квазиминимална структура (комплемент сваког непребројивог дефинабилног скупа је пребројив). Они су доказали да постоје две врсте правилних типова: симетрични и асиметрични. Симетрични типови индукују оператор предгеометрије на моделу, и његова димензија је инваријанта модела, док асиметрични индукују на моделу прави оператор алгебарског затворења и парцијално уређење у односу на које су независни низови строго растући. Пилеј и Тановић су такође доказали да у минималним и квазиминималним групама постоји јединствен јако правилан преко $x = x$ тип, па постоје две врсте минималних и квазиминималних група: симетричне и асиметричне. Исто важи и за минимална и квазиминимална поља. Такође, правилни типови имају важну улогу у изучавању хипотезе Подевског, најстаријег проблема алгебарске теорије модела, која тврди да је свако минимално поље алгебарски затворено. Крупински, Тановић и Вагнер су 2013. године, користећи технику правилних типова, свели хипотезу Подевског на одређену поткласу асиметричних поља ([**4**]). Симетричне правилне типове је изучавао Тановић у [**15**].

У овој тези изучавамо асиметричне правилне типове. Теза је подељена на пет поглавља. Прва два су уводна, а последња три су посвећена нашем изучавању асиметричних правилних типова, и она садрже оригиналне резултате изучавања. Резултати трећег и четвртог поглавља су представљени у радовима [**7, 8**], а резултати петог поглавља су повезани са тренутним заједничким радом аутора са Дејаном Илићем и Предрагом Тановићем.

Прво поглавље је уводно. Даћемо преглед појмова из теорије модела које ћемо користити. Сви детаљи везани за ове појмове могу се наћи у књигама [**2, 5, 17, 9**]. Такође ћемо дати кратко излагање о операторима алгебарског затворења и операторима предгеометрије. Посебно, заинтересовани смо за потпуно дегенерисане операторе алгебарског затворења. Овај концепт је скоро уведен у раду [**8**]. Представљени резултати су лаки, али су веома значајни за изучавање асиметричних правилних типова. Такође ћемо се подсетити појма Дедекиндовог комплетирања густих линеарних уређења. Овај појам је добро познат, међутим ми ћемо прилагодити дефиницију нашим потребама.

Друго поглавље је такође уводног типа, али је усмерено ка дефинисању правилних типова. Дајемо дефиницију инваријантних типова, и представљамо резултате који су важни за нас. Специјално, дајемо дефиницију и важна својства Морлијевих низова. Морлијеви низови имају кључну улогу у нашем изучавању асиметричних правилних типова. Појам инваријантног типа је добро познат, а лепо излагање о њима се може наћи у Симоновим лекцијама [**14**]. Потом ћемо показати да се сваком неалгебарском типу p над моделом, може придружити оператор cl_p. Чињеница да је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ оператор алгебарског затворења на неком скупу повезана је са чињеницом да је глобални тип $\mathfrak{p}$ правилан. Ово је резултат Пилеја и Тановића ([**10**]). У овом раду они су увели појмове правилних и јако правилних типова, који ће бити овде представљени. Такође ћемо представити и њихову Теорему дихотомије правилних типова, која каже да постоје две врсте правилних типова: симетрични и асиметрични. Такође, придружен оператор алгебарског затварања $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ је оператор предгеометрије у случају симетричних типова, док $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ индукује специјално дефинабилно парцијално уређење у случају асиметричних типова; кажемо да ово парцијално уређење сведочи асиметричност. Главно својство овог парцијалног уређења је да су Морлијеви низови строго растући у односу на њега. За егзистенцију парцијалног уређења које сведочи асиметричност нам није потребна пуна моћ претпоставке о правилности, па ћемо увести и појам слабо правилних типова.

У трећем поглављу изучавамо квазиминималне структуре, посебно квазиминималне групе. Представићемо оригиналне резултате из [**7**]. Структура на пребројивом језику је квазиминимална ако је непребројива и сваки њен дефинабилан (са параметрима) подскуп је или пребројив или копребројив. Квазиминималност се јавила као важно својство у Зилберовом изучавању комплексног експоненцијалног поља, али такође се може видети као уопштење појма минималности (бесконачна структура је минимална ако је сваки њен дефинабилан са параметрима подскуп или коначан или коконачан). Најпре ћемо истраживати везу између егзистенције квазиминималног модела теорије и егзистенције јако правилног (преко $x = x$) типа. Доказаћемо следећу теорему.

Теорема 1. *Нека је T потпуна теорија на пребројивом језику са бесконачним моделима.*

(i) Ако постоји глобалан и пребројиво инваријантан тип $\mathfrak{p}$ такав да је пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан, тада T има квазиминималан модел.

(ii) Ако је $M \models T$ квазиминималан модел чији је генерички тип p дефинабилан, тада постоји глобалан, пребројиво инваријантан тип $\mathfrak{p}$ такав да је пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан.

Слабију верзију првог дела претходне теореме су независно доказали у необјављеним белешкама Хајказјан и Тановић; они су додатно претпоставили да је тип $\mathfrak{p}$ дефинабилан над $\emptyset$. Други део теореме се може закључити из резултата у [**10**]. Затим се бавимо питањем да ли квазиминимална група мора да буде Абелова. Ово питање је постављено у [**10**] и може се видети као уопштење Рајнекеове теореме која каже да је свака минимална група Абелова ([**12**]). Даћемо парцијалан позитиван одговор на ово питање, тј. доказаћемо следећу теорему.

Теорема 2. *Свака квазиминимална чиста група са $\emptyset$-дефинабилним парцијалним уређењем са непребројивим ланцима је Абелова.*

У четвртом поглављу представљамо оригиналне резултате из [**8**]. Приметићемо да је оператор алгебарског затворења $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$, придружен слабо правилном над A и асиметричном над A типу $\mathfrak{p}$, потпуно дегенерисан. Ова чињеница нам дозвољава да дефинишемо инваријанту $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ модела: то је тип линеарног уређења максималног Морлијевог низа у $\mathfrak{p}$ над A чији су елементи из M. Наш први циљ је да истражимо могућности за $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$. Испоставља се да су два својства релевантна за то питање. Прво је простост над A, тј. релативна дефинабилност над A релације „(x, y) је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A" , а друго је конвексност над A, тј. питање да ли уређење које сведочи асиметричност над A може бити изабрано тако да је локус типа $\mathfrak{p}_{\restriction A}$ конвексан подскуп од $\mathfrak{C}$. Доказаћемо следећу теорему.

Теорема 3 (Моцоња,Тановић). *Нека је T теорија, $\mathfrak{p}$ тип који је слабо правилан и асиметричан над A, и M мали модел од T.*

(i) Ако је $\mathfrak{p}$ прост и конвексан над A и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ садржи бар две тачке, тада је $\mathrm{Inv}_{p,A}(M)$ густо линеарно уређење (могуће са једном или обе крајње тачке).

(ii) Ако су T и A пребројиви, и $\mathfrak{p}$ је прост и неконвексан над A, тада $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ може бити произвољно пребројиво линеарно уређење.

(iii) Ако су T и A пребројиви, и $\mathfrak{p}$ није прост над A, тада $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ може бити произвољно пребројиво линеарно уређење.

Специјално, ако су T и A пребројиви, доказаћемо да имамо тачно 1, 3, 6 или $2^{\aleph_0}$ могућности за $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ када је M пребројив модел, и одредићемо услове под којима се свака од ових могућности јавља.

Даље изучавамо питање (не)ортогоналности правилних типова. Доказујемо следећу теорему.

Теорема 4 (Моцоња,Тановић).

(i) Асиметричан правилан тип је ортогоналан на сваки инваријантан симетричан тип.

(ii) Услови симетричности и асиметричности су сачувани при релацији неортогоналности правилних типова.

(iii) Неортогоналност је релација еквиваленције на скупу асиметричних правилних типова.

На крају, изучавамо везу између $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$, где су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ два типа асиметрична над A и правилна над A, таква да су одговарајуће рестрикције од $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ у релацији $\not\perp^{\mathrm{w}}$. У општем случају, не мора постојати никаква веза између њих, али у случају јако правилних типова, или само конвексних правилних типова у неким случајевима, постоји јака веза. Постоје два типа релације $\not\perp^{\mathrm{w}}$, које ћемо звати ограничен и неограничен тип. У ограниченом случају су $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ или изоморфни или антиизоморфни, док у неограниченом случају су Дедекиндова комплетирања од $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ или изоморфна или антиизоморфна. Да ли је у питању изоморфизам или антиизоморфизам зависи само од питања да ли $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ комутирају. Прецизније, доказаћемо следећу теорему.

Теорема 5 (Моцоња,Тановић). *Нека су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ правилни, конвексни и асиметрични над A, и нека $\mathfrak{p}_{\restriction A} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction A}$.*

(i) Нека је $\mathfrak{p}_{\restriction A} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction A}$ ограниченог типа.
   1) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, тада су $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ изоморфни.
   2) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, тада су $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ антиизоморфни.

(ii) Нека су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ јако правилни и нека је $\mathfrak{p}_{\restriction A} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction A}$ неограниченог типа. Тада су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ прости над A и:
   1) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, тада су Дедекиндова комплетирања од $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ изоморфна.
   2) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, тада су Дедекиндова комплетирања од $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ антиизоморфна.

У петом поглављу изучавамо неке специјалне експанзије линеарних уређења. Представљамо примере теорија у којима је сваки инваријантан тип правилан и асиметричан. И више, сваки неалгебарски тип има тачно два глобална инваријантна проширења. Прецизније, доказаћемо следећу теорему.

Теорема 6 (Моцоња,Тановић). *Нека је* $\mathcal{L} = \{<\} \cup \{P_i \mid i \in I\} \cup \{E_j \mid j \in J\}$ *језик где су сви* P_i *унарни, а* $<$ *и сви* E_j *бинарни предикатски симболи. Нека је* T *потпуна теорија језика* $\mathcal{L}$ *која повлачи да је* $<$ *линеарно уређење, и сви* E_j *су релације еквиваленције са конвексним класама (у односу на* $<$*).*

(i) Сваки инваријантан тип је правилан.

(ii) Сваки неалгебарски тип $p \in \mathrm{S}_1(A)$ *има тачно два инваријантна над* A *глобална проширења.*

ПОГЛАВЉЕ 1

Преглед појмова и нотација

У првом одељку овог поглавља направићемо преглед основних појмова и тврђења из теорије модела. Скоро сви концепти могу се наћи у књигама о теорији модела, као што су [**2, 5, 17**], а неки од њих могу се наћи у [**9**].

У другом одељку ћемо увести појмове оператора алгебарског затворења и предгеометрије и даћемо њихове основне особине. Више о предгеометријама се може наћи у [**17**]. Такође дајемо дефиницију и особине потпуно дегенерисаних оператора затворења. Потпуно дегенерисани оператори затворења су уведени у раду [**8**], и значајни су за наше изучавање.

У трећем одељку уводимо појам Дедекиндовог комплетирања произвољног густог линеарног уређења. Иако је појам Дедекиндовог комплетирања добро познат, прилагодићемо дефиницију нашим потребама, и видећемо један технички резултат који ће нам бити од користи.

1. Преглед основних појмова и нотација

1.1. Модели и теорије.

Ми радимо на језицима првог реда, које обично означавамо са $\mathcal{L}$, и моделима (структурама) на језику $\mathcal{L}$. Такође, $\mathcal{L}$-формуле првог реда су изграђене на уобичајен начин. Ако је ϕ нека $\mathcal{L}$-формула, записујемо је са $\phi(\bar{x})$ како бисмо нагласили да су слободне променљиве у формули ϕ неке од $\bar{x} = x_1 \dots x_n$. Обично није битно која је дужина низа $\bar{x}$, $|\bar{x}|$, па је због тога не наглашавамо експлицитно. $\mathcal{L}$-формула је *$\mathcal{L}$-реченица* ако нема слободне променљиве.

Ако је M нека $\mathcal{L}$-структура и ϕ нека $\mathcal{L}$-реченица, пишемо $M \models \phi$ ако ϕ важи (је тачна) у M. Ако је $\phi(\bar{x})$ нека $\mathcal{L}$-формула, $|\bar{x}| = n$, и $\bar{a} = a_1 \dots a_n$ је низ елемената из M, пишемо $M \models \phi(\bar{a})$ како бисмо рекли да $\bar{a}$ задовољава формулу $\phi(\bar{x})$ у M, тј. $\phi(\bar{x})$ је тачна при валуацији променљивих $\bar{x} \mapsto \bar{a}$. (Формално, $M \models \phi(\bar{a})$ се индуктивно дефинише на природан начин.) Такође, кажемо да је $\bar{a}$ *решење* формуле $\phi(\bar{x})$ у M, ако $M \models \phi(\bar{a})$. Обично пишемо $\bar{a} \in M$ уместо $\bar{a} \in M^{|\bar{a}|}$, јер нам често дужина $|\bar{a}|$ није битна. Слично за $A \subseteq M$, пишемо $\bar{a} \in A$ уместо $\bar{a} \in A^{|\bar{a}|}$. Ако је $\phi(\bar{x})$ нека $\mathcal{L}$-формула и M нека $\mathcal{L}$-структура, означавамо са $\phi(M)$ скуп свих решења формуле $\phi(\bar{x})$ у M, тј. $\bar{a} \in \phi(M)$ ако и само ако $M \models \phi(\bar{a})$. То је подскуп од $M^{|\bar{x}|}$. Слично, ако је $\Sigma(\bar{x})$ неки скуп $\mathcal{L}$-формула, такав да су слободне променљиве у свакој формули из $\Sigma(\bar{x})$ неке од

$\bar{x}$, са $\Sigma(M)$ означавамо скуп решења сваке формуле из $\Sigma(\bar{x})$ у M, тј. $\bar{a} \in \Sigma(M)$ ако и само ако $M \models \phi(\bar{a})$, за све $\phi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$.

Ако је $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ и M је $\mathcal{L}'$-структура, тада је $\mathcal{L}$-*редукт* од M сама M сматрана као $\mathcal{L}$-структура. У том случају, M гледана као $\mathcal{L}'$-структура је *експанзија* од M гледане као $\mathcal{L}$-структура.

Две $\mathcal{L}$-структуре M и N су *елементарно еквивалентне* ако: $M \models \phi$ ако и само ако $N \models \phi$, важи за све $\mathcal{L}$-реченице ϕ. Пишемо $M \equiv N$ да нагласимо да су M и N елементарно еквивалентне. Са $\mathrm{Th}(M)$ се означава скуп $\mathcal{L}$-реченица које су тачне у M; зовемо га *теорија* од M. Дакле, $M \equiv N$ ако и само ако $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$. Ако су M и N изоморфне, тада су M и N елементарно еквивалентне.

$\mathcal{L}$-*теорија* је било који скуп $\mathcal{L}$-реченица. $\mathcal{L}$-структура M је *модел од* T, у ознаци $M \models T$, ако важи $M \models \phi$, са сваку $\phi \in T$. Очигледно, $M \models \mathrm{Th}(M)$. Теорија T је *задовољива* (кажемо још и *сагласна* или *конзистентна*) ако има модел. Задовољива теорија T је *потпуна* ако садржи или ϕ или $\neg\phi$, за сваку $\mathcal{L}$-реченицу ϕ. Очигледно, $\mathrm{Th}(M)$ је потпуна теорија.

Инјективан $\mathcal{L}$-хомоморфизам $f : M \longrightarrow N$, је *елементарно утапање* ако: $M \models \phi(\bar{a})$ ако и само ако $N \models \phi(f(\bar{a}))$, важи за све $\mathcal{L}$-формуле $\phi(\bar{x})$ и све $\bar{a} \in M$. Подструктура M од N је *елементарна подструктура*, у ознаци $M \prec N$, ако је инклузија елементарно утапање. У том случају, N је *елементарна екстензија* од M.

Именовање параметара је следећа процедура: Нека је M нека $\mathcal{L}$-структура и $A \subseteq M$. Означимо са $\mathcal{L}_A$ проширење језика $\mathcal{L}$ новим симболом константе за свако $a \in A$ (овај симбол константе зовемо *име од* a), и посматрајмо $\mathcal{L}_A$-експанзију од M, коју понекад означавамо са (M, A) или M_A, у којој смо интерпретирали одговарајуће симболе константи на природан начин. Приметимо да $M \models \phi(\bar{a})$ ако и само ако $M_A \models \phi(\bar{a})$ где $\phi(\bar{a})$ посматрамо као $\mathcal{L}_{\bar{a}}$-реченицу.

За $\mathcal{L}_A$-формулу кажемо да је *формула са параметрима из* A. Под *формулом са параметрима* подразумевамо формула са параметрима из M. Често кажемо *формула без параметара* да нагласимо да је у питању само $\mathcal{L}$-формула.

Нека је M модел, $A \subseteq M$ и $D \subseteq M^n$. Скуп D је *дефинабилан са параметрима из* A или A-*дефинабилан* ако постоји $\mathcal{L}_A$-формула $\phi(\bar{x})$ таква да је њен скуп решења у M једнак D: $D = \phi(M)$. Скуп је *дефинабилан* ако је дефинабилан са параметрима из M.

Група аутоморфизама од M означава се са $\mathrm{Aut}(M)$. Са $\mathrm{Aut}_A(M)$ означавамо групу свих аутоморфизама од M који фиксирају $A \subseteq M$ тачка-по-тачка. Скуп

$D \subseteq M^n$ је $\mathrm{Aut}_A(M)$-*инваријантан* ако за све аутоморфизме $f \in \mathrm{Aut}_A(M)$ важи $f[D] = D$.

1.2. Теорема компактности.

За скуп $\mathcal{L}$-формула $\Sigma(\bar{x})$ кажемо да је *задовољив* ако постоји модел језика $\mathcal{L}$ у коме $\Sigma(\bar{x})$ има решење; еквивалентно, ако је теорија $\Sigma(\bar{c})$ језика $\mathcal{L}_{\bar{c}}$ задовољива. Теорија T језика $\mathcal{L}$ (скуп $\mathcal{L}$-формула $\Sigma(\bar{x})$) је *коначно задовољива* ако је свака коначна подтеорија од T (сваки коначан подскуп од $\Sigma(\bar{x})$) задовољива. Теорема компактности је један од фундаменталних резултата и један од главних алата теорије модела, која каже да је појам задовољивости еквивалентан појму коначне задовољивости.

Теорема 1.1. *Теорија T је задовољива ако и само ако је коначно задовољива.*

За формулу $\phi(\bar{x})$ (или скуп формула $\Sigma(\bar{x})$) кажемо да је *сагласна са теоријом* T ако је $T \cup \{\phi(\bar{x})\}$ ($T \cup \Sigma(\bar{x})$) задовољив скуп формула. Приметимо да је скуп $\Sigma(\bar{x})$ сагласан са теоријом T ако и само ако је $T \cup \Sigma(\bar{c})$ задовољива теорија (језика $\mathcal{L}_{\bar{c}}$). Према томе имамо директну последицу Теореме компактности (на коју ћемо се такође позивати као на Теорему компактности).

Последица 1.2. *Нека је T задовољива теорија језика $\mathcal{L}$ и $\Sigma(\bar{x})$ скуп $\mathcal{L}$-формула. $\Sigma(\bar{x})$ је сагласан са теоријом T ако и само ако је сваки коначан подскуп $\Sigma_0(\bar{x}) \subseteq \Sigma(\bar{x})$ сагласан са теоријом T.*

1.3. Типови.

Нека је M модел језика $\mathcal{L}$, $A \subseteq M$ и $\mathcal{L}_A$ проширен језик. Нека је $T = \mathrm{Th}(M)$ и $T_A = \mathrm{Th}(M, A)$. Скуп $\mathcal{L}_A$-формула $p(\bar{x})$, $|\bar{x}| = n$, је *n-тип над A*, ако је $p(\bar{x})$ сагласан са T_A. Тип p је *потпун* ако за сваку $\mathcal{L}_A$-формулу $\phi(\bar{x})$ важи $\phi(\bar{x}) \in p$ или $\neg\phi(\bar{x}) \in p$. Скуп свих потпуних n-типова над A означавамо са $\mathrm{S}_n^M(A)$. За скуп A кажемо да је *домен* типа p. Приметимо да за сваку елементарну екстензију N модела M важи $\mathrm{S}_n^N(A) = \mathrm{S}_n^M(A)$.

По Теореми компактности, $p(\bar{x})$ је n-тип ако је сваки коначан подтип $p_0(\bar{x}) \subseteq p(\bar{x})$ сагласан са T_A, другим речима ако конјункција произвољних коначно много формула из $p(\bar{x})$ има решење у неком моделу (због потпуности теорије T_A, свим моделима) теорије T_A.

Свака n-торка $\bar{a} \in M$ одређује потпун n-тип над A:

$$\mathrm{tp}^M(\bar{a}/A) = \{\phi(\bar{x}) \mid \phi(\bar{x}) \text{ је } \mathcal{L}_A\text{-формула и } M \models \phi(a)\}.$$

Приметимо да за сваку елементарну екстензију N модела M важи $\mathrm{tp}^N(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}^M(\bar{a}/A)$. У случају $A = \emptyset$, пишемо само $\mathrm{tp}^M(\bar{a})$ уместо $\mathrm{tp}^M(\bar{a}/\emptyset)$. Ако желимо да нагласимо променљиве $\bar{x}$ у $\mathrm{tp}^M(\bar{a}/A)$, писаћемо $\mathrm{tp}_{\bar{x}}^M(\bar{a}/A)$.

Нека је p n-тип над $A \subseteq M$. Кажемо да је $\bar{a} \in M$ *реализација* типа p, и пишемо $\bar{a} \models p$, ако је $\bar{a}$ решење сваке формуле из p. Модел M *реализује* тип p ако у M постоји реализација типа p; у супротном M *испушта* p. Скуп реализација типа p у моделу M означавамо са $p(M)$. Теорема компактности повлачи да је сваки тип реализован у некој елементарној екстензији модела M. Ако је N елементарна екстензија од M и $\bar{a} \in N$ реализација типа p над A, тада је тачно $p \subseteq \mathrm{tp}^N(\bar{a}/A)$; у случају да је p потпун, тада је $p = \mathrm{tp}^N(\bar{a}/A)$.

Ако је p тип над доменом A и $B \subseteq A$, са $p{\restriction}_B$ означавамо његову *рестрикцију* на домен B, тј. скуп свих формула из p које користе параметре из B. Очигледно, ако $p \in \mathrm{S}_n^M(A)$, тада $p{\restriction}_B \in \mathrm{S}_n^M(B)$.

Формула $\phi(\bar{x})$ са параметрима из M је *алгебарска* ако је $\phi(M)$ непразан и коначан скуп. Тип p над $A \subseteq M$ је *алгебарски* ако је нека конјункција формула из p алгебарска формула. Еквивалентно, у случају потпуног типа p, ако p садржи алгебарску формулу. У супротном, тип је *неалгебарски.*

Ако је $p(\bar{x})$ тип над $A \subseteq M$, $\phi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ алгебарска формула и $|\phi(M)| = m$, тада је „$\phi(\bar{x})$ има тачно m решења" формула првог реда са параметрима из A, која је тачна у M. Због елементарности она је тачна и у сваком $N \succ M$. Према томе $\phi(N \smallsetminus M) = \emptyset$ и такође $p(N \smallsetminus M) = \emptyset$.

На скупу $\mathrm{S}_n^M(A)$ постоји природно дефинисана топологија, коју зовемо *Стонова топологија*, и која је генерисана следећом базом: за сваку $\mathcal{L}_A$-формулу $\phi(\bar{x})$ имамо базни отворен скуп:

$$[\phi] = \{p \in \mathrm{S}_n^M(A) \mid \phi(\bar{x}) \in p\}.$$

Приметимо да су базни скупови затворени за коначне пресеке и уније: $[\phi] \cap [\psi] = [\phi \wedge \psi]$ и $[\phi] \cup [\psi] = [\phi \vee \psi]$. Такође, због потпуности типова у $\mathrm{S}_n^M(A)$, имамо да је $[\neg\phi] = \mathrm{S}_n^M(A) \smallsetminus [\phi]$. Према томе база топологије је сачињена од отворено-затворених скупова. Одатле директно следи да је $\mathrm{S}_n^M(A)$ потпуно неповезан тополошки простор.

Теорема компактности повлачи да је $\mathrm{S}_n^M(A)$ компактан тополошки простор.

Нека је $(I, <)$ линеарно уређење, $A \subseteq M$ и $(a_i)_{i \in I}$ низ елемената у M. За низ $(a_i)_{i \in I}$ кажемо да је *нераспознатљив над* A ако за све $n \geqslant 1$ и све $i_1 < \ldots < i_n$ и $j_1 < \ldots < j_n$ важи:

$$\mathrm{tp}^M(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}^M(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}/A).$$

Низ $(a_i)_{i \in I}$ је *потпуно нераспознатљив над* A ако за сваку пермутацију σ скупа I и све коначне подскупове $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ важи:

$$\mathrm{tp}^M(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}^M(a_{\sigma(i_1)}, \ldots, a_{\sigma(i_n)}/A).$$

1.4. Теорема о испуштању типова.

Нека су T и $\phi(\bar{x})$ редом потпуна теорија и формула језика $\mathcal{L}$ такве да је $T\cup\{\phi(\bar{x})\}$ задовољив скуп, и нека је $p(\bar{x})$ (могуће непотпун) тип над $\emptyset$. Формула $\phi(\bar{x})$ *изолује* p, у ознаци $\phi(\bar{x}) \vdash p(\bar{x})$, ако за све $\mathcal{L}$-формуле $\psi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ важи:

$$T \models \forall x(\phi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})).$$

Тип p је *изолован* ако постоји формула $\phi(\bar{x})$ која га изолује; иначе је *неизолован*.

Сваки изолован тип је реализован у сваком моделу теорије T: ако $\phi(\bar{x}) \vdash p(\bar{x})$, како је $T \cup \{\phi(\bar{x})\}$ задовољив скуп и T потпуна, у сваком моделу M постоји $\bar{a} \in M$ такав да $M \models \phi(\bar{a})$; тада $\bar{a} \models p(\bar{x})$. Према томе, неизолованост је потребан услов да би тип могао бити испуштен. Теорема о испуштању типова тврди да је то и довољан услов у случају пребројивог језика $\mathcal{L}$.

Теорема 1.3. *Нека је $\mathcal{L}$ пребројив језик, T потпуна $\mathcal{L}$-теорија и p (могуће непотпун) неизолован тип над $\emptyset$. Тада постоји пребројив модел $M \models T$ који испушта p.*

1.5. Монструм модел.

Претпоставимо да је T потпуна теорија. Модел $M \models T$ је *κ-засићен* ако је сваки потпун тип над произвољним скупом $A \subseteq M$ кардиналности мање од κ реализован у M. Показује се да је M κ-засићен ако и само ако је сваки (могуће непотпун) тип над произвољним скупом $A \subseteq M$ кардиналности мање од κ реализован у M. Еквивалентно томе, M је κ-засићен ако и само ако је сваки потпун 1-тип над произвољним скупом $A \subseteq M$ кардиналности мање од κ реализован у M. Модел M је *засићен* ако је $|M|$-засићен.

За сваки модел $M \models T$ и сваки бесконачан κ постоји елементарна екстензија N модела M која је κ^+-засићена. И више, N се може изабрати тако да $|N| \leqslant |M|^\kappa$. За доказ егзистенције засићеног модела у општем случају морају се искористити неке скуп-теоретске претпоставке.

Модел $M \models T$ је *κ-хомоген* ако се свако парцијално елементарно пресликавање $f : A \longrightarrow M$ може проширити до парцијално елементарног пресликавања $f' : A \cup \{a\} \longrightarrow M$, где је $A \subseteq M$ произвољан скуп кардиналности мање од κ и $a \in M$ произвољно. Модел M је *хомоген* ако је $|M|$-хомоген.

У хомогеним моделима M се свако парцијално елементарно пресликавање $f : A \longrightarrow M$ може проширити до аутоморфизма модела M, где је A произвољан скуп кардиналности мање од $|M|$.

Модел $M \models T$ је *κ-универзалан* ако се сваки модел N теорије T кардиналности мање од κ може елементарно утопити у M. Модел M је *универзалан* ако је $|M|^+$-универзалан.

За сваки бесконачан кардинал κ важи да је M κ-засићен ако и само ако је κ-хомоген и κ^+-универзалан. За непребројиве кардинале важи да је M κ-засићен ако и само ако је κ-хомоген и κ-универзалан. Специјално, M је засићен ако и само ако је хомоген и универзалан.

Претпоставимо да желимо да изучавамо „мале” моделе теорије T. Прецизније, претпоставимо да нас занимају модели теорије T кардиналности мање од κ. Претпоставимо да је $\mathfrak{C} \models T$ засићен модел кардиналности κ. Због универзалности модела $\mathfrak{C}$, сваки модел кардиналности мање од κ изоморфан је елементарном подмоделу од $\mathfrak{C}$. Према томе, наше изучавање можемо фокусирати на изучавање елементарних подмодела од $\mathfrak{C}$. Модел $\mathfrak{C}$ зовемо *монструм модел* теорије T. Као што смо већ наговестили, егзистенцију монструма можемо оправдати додатним скуп-теоретским претпоставкама.

Овде ћемо навести неке особине монструма $\mathfrak{C}$ које ћемо у даљем тексту имплицитно користити. Такође, дајемо и нотацију које ћемо се до краја придржавати.

1. Већ смо рекли да се сваки модел теорије T кардиналности мање од $|\mathfrak{C}|$ може посматрати као елементарни подмодел од $\mathfrak{C}$. За такве моделе кажемо да су *мали* и обично их означавамо са M и N, могуће са индексима.
2. За подскупове од $\mathfrak{C}$ кардиналности мање од $|\mathfrak{C}|$ кажемо да су мали и обично их означавамо са $A, B, C, \dots$
3. Због засићености, сваки тип над малим скупом параметара је реализован у $\mathfrak{C}$. Специјално, скуп формула над малим скупом је задовољив ако и само ако је реализован у $\mathfrak{C}$.
4. Због елементарности, $\mathrm{S}_n^{\mathfrak{C}}(A) = \mathrm{S}_n^M(A)$, за сваки мали модел $M \supseteq A$. Са $\mathrm{S}_n(A)$ означавамо $\mathrm{S}_n^{\mathfrak{C}}(A)$. Слично, за свако $\bar{a} \in \mathfrak{C}$ имамо $\mathrm{tp}^{\mathfrak{C}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}^M(\bar{a}/A)$, за сваки мали модел M који садржи $\bar{a}$. Са $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ означавамо $\mathrm{tp}^{\mathfrak{C}}(\bar{a}/A)$.
5. *Локус* n-типа над малим скупом A је скуп свих његових реализација у монструму.
6. Пишемо $\models \phi$ уместо $\mathfrak{C} \models \phi$. Због елементарности, $\models \phi$ повлачи $M \models \phi$ за сваки мали модел M који садржи параметре формуле ϕ.
7. Због хомогености, свако парцијално елементарно пресликавање чији је домен мали скуп може се проширити до аутоморфизма. Специјално, ако је $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$, тада постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ такав да је $f(\bar{a}) = \bar{b}$.
8. Ако су $\Pi(\bar{x})$ и $\Sigma(\bar{x})$ скупови формула, кажемо да $\Pi(\bar{x})$ *форсира* $\Sigma(\bar{x})$, у ознаци $\Pi(\bar{x}) \vdash \Sigma(\bar{x})$, ако важи $\Pi(\mathfrak{C}) \subseteq \Sigma(\mathfrak{C})$. Формула $\phi(\bar{x})$ (са параметрима) *изолује* (могуће непотпун) тип $p(\bar{x})$ ако је $\phi(\bar{x})$ сагласна са $p(\bar{x})$ и $\phi(\bar{x}) \vdash p(\bar{x})$. (Могуће непотпун) тип $p(\bar{x})$ је *изолован над* A ако постоји формула са параметрима из A која изолује $p(\bar{x})$.

9. *Глобални тип* је тип над монструмом. Скуп глобалних, потпуних n-типова означавамо са $\mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$. Глобалне типове обично означавамо са $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$.
10. Под *дефинабилним скупом* мислимо подскуп од $\mathfrak{C}^n$ који је дефинабилан са параметрима из $\mathfrak{C}$. Скуп D је *дефинабилан типом над* A ако је пресек (могуће бесконачно много) скупова дефинабилних над A, тј. постоји (могуће непотпун) тип $p(\bar{x})$ над A такав да је $D = p(\mathfrak{C})$. Ако је D дефинабилан типом над A, скуп D' је *релативно дефинабилан унутар* D *над* A ако постоји формула $\phi(\bar{x})$ са параметрима из A таква да је $D' = D \cap \phi(\mathfrak{C})$.
11. За скуп $D \subseteq \mathfrak{C}^n$ кажемо да је *инваријантан над* A или A-*инваријантан* ако је $\mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$-инваријантан. Скуп је *инваријантан* ако је инваријантан над $\emptyset$.
12. По потреби ћемо посматрати и већи монструм $\mathfrak{C}' \succ \mathfrak{C}$.

Надаље подразумевамо да радимо у фиксираном монструму.

1.6. Дефинабилан тип.

Тип $p \in \mathrm{S}_n(A)$ је *дефинабилан над* $B \subseteq A$ ако за сваку формулу $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ без параметара постоји формула са параметрима B, у ознаци $\mathrm{d}_p\phi(\bar{y})$, таква да за све $\bar{a} \in A$ важи:

$$\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in A \text{ ако и само ако } \models \mathrm{d}_p\phi(\bar{a}).$$

За формулу $\mathrm{d}_p\phi(\bar{y})$ кажемо да је *дефиниција над* B формуле $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, а придруживање d_p је *дефинициона схема над* B.

Тип p је *дефинабилан* ако је дефинабилан над A.

Напомена 1.4. Ако радимо у пребројивом језику $\mathcal{L}$, тада је сваки дефинабилан тип p, дефинабилан над неким пребројивим скупом. Заиста, формула без параметара има пребројиво много, и дефиниција сваке користи само коначно много параметара, па ако је B скуп параметара које користе дефиниције свих формула, тада је B пребројив и p је дефинабилан над B.

1.7. Наследник.

Нека је $M \subseteq A$, $p \in \mathrm{S}_n(M)$, $q \in \mathrm{S}_n(A)$ и $p \subseteq q$. Тип q је *наследник* типа p ако за сваку формулу $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ са параметрима из M важи: ако $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q$ за неко $\bar{a} \in A$, тада постоји $\bar{m} \in M$ тако да $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in p$.

У следећој леми ћемо видети да сваки дефинабилан тип над моделом M има јединственог наследника над сваким $A \supseteq M$.

Лема 1.5. *Нека је $p \in \mathrm{S}_n(M)$ дефинабилан тип, d_p његова дефинициона схема над M, и $A \supseteq M$. Тада је:*

$$q(\bar{x}) = \{\phi(\bar{x}, \bar{a}) \mid \phi(\bar{x}, \bar{y}) \text{ је } \mathcal{L}\text{-формула}, \bar{a} \in A \text{ и } \models \mathrm{d}_p\phi(\bar{a})\}$$

јединствени наследник типа p у $\mathrm{S}_n(A)$. Такође, q је дефинабилан над M, и његова дефинициона схема над M је баш $\mathrm{d}_q = \mathrm{d}_p$.

Доказ. Докажимо најпре да за сваку формулу $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ без параметара важи:

$$\models (\forall \bar{y})(\mathrm{d}_p(\neg\phi)(\bar{y}) \Leftrightarrow \neg \mathrm{d}_p\phi(\bar{y})).$$

Како претходна формула користи параметре из M, довољно је да докажемо:

$$M \models (\forall \bar{y})(\mathrm{d}_p(\neg\phi)(\bar{y}) \Leftrightarrow \neg \mathrm{d}_p\phi(\bar{y})).$$

Заиста, за свако $\bar{m} \in M$, $M \models \mathrm{d}_p(\neg\phi)(\bar{m})$ акко $\neg\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in p$ акко $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \notin p$ акко $M \models \neg \mathrm{d}_p\phi(\bar{m})$.

Сада можемо да докажемо да је q потпун. Претпоставимо да $\bar{a} \in A$ и $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \notin q(\bar{x})$. По дефиницији q тада $\models \neg \mathrm{d}_p\phi(\bar{a})$, па према претходном $\models \mathrm{d}_p(\neg\phi)(\bar{a})$, одакле $\neg\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q(\bar{a})$.

Докажимо даље да за формуле без параметара $\phi_i(\bar{x}, \bar{y}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, важи:

$$\models \forall \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_k (\bigwedge_{i=1}^{k} \mathrm{d}_p\phi_i(\bar{y}_i) \Rightarrow \exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^{k} \phi_i(\bar{x}, \bar{y}_i)).$$

Поново је довољно да докажемо:

$$M \models \forall \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_k (\bigwedge_{i=1}^{k} \mathrm{d}_p\phi_i(\bar{y}_i) \Rightarrow \exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^{k} \phi_i(\bar{x}, \bar{y}_i)),$$

па претпоставимо да су $\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_k \in M$ такви да $M \models \mathrm{d}_p\phi_i(\bar{m}_i)$, за све $1 \leqslant i \leqslant k$. Тада $\phi_i(\bar{x}, \bar{m}_i) \in p(\bar{x})$, за све $1 \leqslant i \leqslant k$, па како је p тип постоји $\bar{m} \in M$ такав да $M \models \phi_i(\bar{m}, \bar{m}_i)$, за све $1 \leqslant i \leqslant k$.

Сада можемо да докажемо да је q тип. Нека $\phi_1(\bar{x}, \bar{a}_1), \ldots, \phi_k(\bar{x}, \bar{a}_k) \in q(\bar{x})$, за $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k \in A$. По дефиницији q тада $\models \mathrm{d}_p\phi_i(\bar{a}_i)$, за све $1 \leqslant i \leqslant k$, па према претходном имамо да је скуп $\{\phi_1(\bar{x}, \bar{a}_1), \ldots, \phi_k(\bar{x}, \bar{a}_k)\}$ задовољив.

Дакле, $q \in S_n(A)$. Јасно је да је $p \subseteq q$; ако $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in p(\bar{x})$, тада $\models \mathrm{d}_p\phi(\bar{m})$, одакле $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in q(\bar{x})$ јер је $A \supseteq M$. Преостаје нам да докажемо да је q јединствени наследник типа p у $\mathrm{S}_n(A)$.

Ако је $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ формула са параметрима из M, $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q(\bar{x})$, где $\bar{a} \in A$, тада $\models \mathrm{d}_p\phi(\bar{a})$, одакле $\models \exists \bar{y}\, \mathrm{d}_p\phi(\bar{y})$. Како та формула користи само параметре из M, то $M \models \exists \bar{y}\, \mathrm{d}_p\phi(\bar{y})$, па постоји $\bar{m} \in M$ тако да $M \models \mathrm{d}_p\phi(\bar{m})$, тј. $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in p(\bar{x})$. Дакле, q јесте наследник од p.

Претпоставимо да је $r \in \mathrm{S}_n(A)$ наследник од p. Нека је $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ произвољна формула са параметрима из M. Посматрајмо формулу $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ дефинисану са:

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \neg(\phi(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \mathrm{d}_p\phi(\bar{y})).$$

Тврдимо да $\psi(\bar{x}, \bar{m}) \notin p(\bar{x})$, за све $\bar{m} \in M$. Претпоставимо супротно, тј. да за неко $\bar{m} \in M$, $\psi(\bar{x}, \bar{m}) \in p(\bar{x})$. Ако $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in p$, тада постоји $\bar{m}' \in M$ тако да $M \models \phi(\bar{m}', \bar{m}) \wedge \psi(\bar{m}', \bar{m})$, одакле следи $M \models \neg \mathrm{d}_p\phi(\bar{m})$, што је у супротности са

$\phi(\bar{x},\bar{m}) \in p$. Ако $\neg\phi(\bar{x},\bar{m}) \in p$, тада постоји $\bar{m}' \in M$ тако да $M \models \neg\phi(\bar{m}',\bar{m}) \wedge \psi(\bar{m}',\bar{m})$, одакле следи $M \models \mathrm{d}_p\phi(\bar{m})$, што је у супротности са $\neg\phi(\bar{x},\bar{m}) \in p$. Дакле, заиста $\psi(\bar{x},\bar{m}) \notin p(\bar{x})$, за све $\bar{m} \in M$, па како је r наследник од p, то $\psi(\bar{x},\bar{a}) \notin r(\bar{x})$, за све $\bar{a} \in A$. Према томе $\phi(\bar{x},\bar{a}) \in r$ повлачи да постоји $\bar{a}'$ такав да $\models \phi(\bar{a}',\bar{a}) \wedge \neg\psi(\bar{a}',\bar{a})$, одакле $\models \mathrm{d}_p\phi(\bar{a})$, па $\phi(\bar{x},\bar{a}) \in q(\bar{x})$. Дакле, $r \subseteq q$, па због потпуности је $r = q$ и јединственост је доказана. □

1.8. Конаследник.

Потпун тип $p \in \mathrm{S}_n(B)$ је *коначно задовољив у* $A \subseteq B$ ако сваки коначан подтип $p_0 \subseteq p$ има реализацију у A^n. Еквивалентно, ако свака формула $\phi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ има решење у A^n.

Очигледно је сваки тип над моделом $p \in \mathrm{S}_n(M)$ коначно задовољив у M (по дефиницији типа).

У следећој леми ћемо видети да сваки коначно задовољив у A тип над A има коначно задовољиво проширење у A над било којим $B \supseteq A$.

Лема 1.6. *Нека је $p \in \mathrm{S}_n(A)$ коначно задовољив у A, и нека је $B \supseteq A$.*

(i) Тип $q \in \mathrm{S}_n(B)$ је коначно задовољив у A ако и само ако садржи скуп формула:

$$\Sigma(\bar{x}) = \{\phi(\bar{x}) \mid \phi(\bar{x}) \text{ је } \mathcal{L}_B\text{-формула и } \phi(A) = A^n\}.$$

(ii) Тип p има коначно задовољиво у A проширење у $\mathrm{S}_n(B)$.

Доказ. (i) Нека је $q \in \mathrm{S}_n(B)$. Тип $q(\bar{x})$ није коначно задовољив у A ако и само ако садржи формулу $\phi(\bar{x})$ са параметрима из B такву да $\phi(A) = \emptyset$, тј. такву да $\neg\phi(A) = A^n$. Међутим, ово је еквивалентно са $\neg\phi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x}) \smallsetminus q(\bar{x})$.

(ii) Како је $p(\bar{x})$ коначно задовољив у A, скуп формула $p(\bar{x}) \cup \Sigma(\bar{x})$ је очигледно (непотпун) тип над B. Према томе постоји $q \in \mathrm{S}_n(B)$ такав да $p(\bar{x}) \cup \Sigma(\bar{x}) \subseteq q(\bar{x})$. Тип q је очигледно проширење типа p, а према (i) је коначно задовољив у A. □

Нека је $M \subseteq A$, $p \in \mathrm{S}_n(M)$, $q \in \mathrm{S}_n(A)$ и $p \subseteq q$. Тип q је *конаследник* типа p ако је коначно задовољив у M.

Последица 1.7. *Нека је $M \subseteq A$ и $p \in \mathrm{S}_n(M)$. Тада p има конаследника у $\mathrm{S}_n(A)$.*

Доказ. Тип p је коначно задовољив у M, па тврђење следи из леме 1.6(ii). □

1.9. Слаба ортогоналност и ортогоналност.

Нека су $p \in \mathrm{S}_m(A)$ и $q \in \mathrm{S}_n(A)$. Типови p и q су *слабо ортогонални*, у ознаци $p \perp^{\mathrm{w}} q$, ако $p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ има јединствено проширење у $\mathrm{S}_{m+n}(A)$. Другим речима, ако $\bar{a} \models p$ и $\bar{b} \models q$, тада $p \perp^{\mathrm{w}} q$ ако:

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \vdash \mathrm{tp}_{\bar{x},\bar{y}}(\bar{a}, \bar{b}/A).$$

У супротном су p и q *слабо неортогонални*, $p \not\perp^{\mathrm{w}} q$. Приметимо да су следећи услови еквивалентни са $p \not\perp^{\mathrm{w}} q$:

(1) за све $\bar{a} \models p$, $\bar{b} \models q$, постоји $\bar{a}' \models p$ такав да $\mathrm{tp}(\bar{a}, \bar{b}/A) \neq \mathrm{tp}(\bar{a}', \bar{b}/A)$;
(2) за све $\bar{a} \models p$, $\bar{b} \models q$, постоји $\bar{b}' \models q$ такав да $\mathrm{tp}(\bar{a}, \bar{b}/A) \neq \mathrm{tp}(\bar{a}, \bar{b}'/A)$;
(3) за све $\bar{a} \models p$ и $\bar{b} \models q$, $p(\bar{x}) \nvdash \mathrm{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$;
(4) за све $\bar{a} \models p$ и $\bar{b} \models q$, $q(\bar{y}) \nvdash \mathrm{tp}(\bar{b}/A\bar{a})$.

За глобалне типове $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_m(\mathfrak{C})$ и $\mathfrak{q} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ кажемо да су *ортогонални*, $\mathfrak{p} \perp \mathfrak{q}$, ако су слабо ортогонални; иначе су неортогонални, $\mathfrak{p} \not\perp \mathfrak{q}$.

1.10. Полуизолованост.

Нека $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{C}$. Кажемо да је *$\bar{a}$ полуизолован са $\bar{b}$ над A*, у ознаци $\bar{a} \in \mathrm{Sem}_A(\bar{b})$, ако постоји формула $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}, \bar{b}/A)$ таква да $\phi(\bar{x}, \bar{b}) \vdash \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$.

Полуизолованост над фиксираним скупом A је транзитивна: ако $\bar{a} \in \mathrm{Sem}_A(\bar{b})$ и $\bar{b} \in \mathrm{Sem}_A(\bar{c})$, тада $\bar{a} \in \mathrm{Sem}_A(\bar{c})$. Заиста, ако је $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}, \bar{b}/A)$ таква да $\phi(\bar{x}, \bar{b}) \vdash \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ и $\psi(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}, \bar{c}/A)$ таква да $\psi(\bar{y}, \bar{c}) \vdash \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$, тада $\theta(\bar{x}, \bar{z}) = \exists y\, (\phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{y}, \bar{z})) \in \mathrm{tp}(\bar{a}, \bar{c}/A)$ и $\theta(\bar{x}, \bar{c}) \vdash \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$. Ако је $\bar{a}'$ такво да $\models \theta(\bar{a}', \bar{c})$, тада постоји $\bar{b}'$ такво да $\models \phi(\bar{a}', \bar{b}')$ и $\models \psi(\bar{b}', \bar{c})$. Из $\psi(\bar{b}', \bar{c})$ следи $\mathrm{tp}(\bar{b}'/A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$, због $\psi(\bar{y}, \bar{c}) \vdash \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$, па постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ такав да $f(\bar{b}') = \bar{b}$. Тада $\models \phi(\bar{a}', \bar{b}')$ повлачи $\models \phi(f(\bar{a}'), \bar{b})$, одакле следи $\mathrm{tp}(f(\bar{a}')/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$, због $\phi(\bar{x}, \bar{b}) \vdash \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$. Како је очигледно $\mathrm{tp}(f(\bar{a}')/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}'/A)$, добијамо $\mathrm{tp}(\bar{a}'/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$, као што смо и желели.

1.11. Компактност у монструму.

Нека је T потпуна теорија и $\mathfrak{C}$ фиксирани монструм теорије T. Теорема компактности у монструму може бити формулисана на следећи начин.

Теорема 1.8. *Нека је $\Sigma(\bar{x})$ скуп формула са параметрима A и $\phi(\bar{x})$ формула са параметрима A, где је $A \subseteq \mathfrak{C}$ мали скуп. Ако $\Sigma(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x})$ тада постоји коначан подскуп $\Sigma_0(\bar{x}) \subseteq \Sigma(\bar{x})$ такав да $\Sigma_0(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x})$.*

Доказ. Приметимо да скуп $\Sigma(\bar{x}) \cup \{\neg\phi(\bar{x})\}$ није сагласан са T. У супротном, $\Sigma(\bar{x}) \cup \{\neg\phi(\bar{x})\}$ је (непотпун) тип над малим скупом параметара A, па је реализован у монструму, што је у контрадикцији са $\Sigma(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x})$. По Теореми компактности, постоји коначан подскуп $\Sigma_0(\bar{x}) \subseteq \Sigma(\bar{x})$ такав да $\Sigma_0(\bar{x}) \cup \{\neg\phi(\bar{x})\}$ није сагласан са T. Специјално, $\Sigma_0(\bar{x}) \cup \{\neg\phi(\bar{x})\}$ није задовољив у $\mathfrak{C}$, одакле добијамо $\Sigma_0(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x})$. □

Као пример примене Теореме компактности у монструму доказаћемо следећу лему, коју ћемо касније користити.

Лема 1.9. *Претпоставимо да је $D \subseteq \mathfrak{C}^n$ дефинабилан скуп и $A \subseteq \mathfrak{C}$. Тада је D дефинабилан над A ако и само ако је инваријантан над A.*

Доказ. Смер ($\Rightarrow$) је лакши. Претпоставимо да су $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ формула без параметара и $\bar{a} \in A$ такви да је $D = \phi(\mathfrak{C}^n, \bar{a})$. Ако је $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$, тада је $f(\bar{a}) = \bar{a}$, па:

$$\bar{d} \in D \text{ акко } \models \phi(\bar{d}, \bar{a}) \text{ акко } \models \phi(f(\bar{d}), f(\bar{a})) \text{ акко } \models \phi(f(\bar{d}), \bar{a}) \text{ акко } f(\bar{d}) \in D.$$

Дакле, $f(D) = D$, и D је инваријантан над A.

($\Leftarrow$): Претпоставимо да су $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{b} \in \mathfrak{C}$ такви да је $D = \phi(\mathfrak{C}^n, \bar{b})$, и претпоставимо да је D инваријантан над A. Уочимо тип $p(\bar{y}) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$; тврдимо:

$$p(\bar{y}) \vdash \forall \bar{x} \, (\phi(\bar{x}, \bar{b}) \Leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{y})).$$

Претпоставимо $\bar{b}' \models p(\bar{y})$. Тада је $\mathrm{tp}(\bar{b}'/A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$, па постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ такав да $f(\bar{b}) = \bar{b}'$. Како је D инваријантан над A, то је $f(D) = D$, па добијамо:

$$\models \phi(\bar{d}, \bar{b}) \text{ акко } \bar{d} \in D \text{ акко } \bar{d} \in f(D) \text{ акко } \models \phi(\bar{d}, f(\bar{b})) \text{ акко } \models \phi(\bar{d}, \bar{b}'),$$

што доказује $\models \forall \bar{x} \, (\phi(\bar{x}, \bar{b}) \Leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{b}'))$.

Дакле, $p(\bar{y}) \vdash \forall \bar{x} \, (\phi(\bar{x}, \bar{b}) \Leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{y}))$, па по компактности постоји формула $\theta(\bar{y}) \in p(\bar{y})$ таква да:

$$\theta(\bar{y}) \vdash \forall \bar{x} \, (\phi(\bar{x}, \bar{b}) \Leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{y})).$$

Приметимо да $\theta(\bar{y}) \in p(\bar{y}) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$, тј. $\theta(\bar{y})$ је формула са параметрима из A. Уочимо формулу:

$$\varphi(\bar{x}) = \exists \bar{y} \, (\theta(\bar{y}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{y}));$$

$\varphi(\bar{x})$ је такође формула са параметрима из A и тврдимо да она дефинише D. Ако $\bar{d} \in D$, тада је $\models \phi(\bar{d}, \bar{b})$, и такође је $\models \theta(\bar{b})$ (јер $\theta(\bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$). Дакле, $\bar{b}$ је сведок за егзистенцијални квантификатор у $\models \varphi(\bar{d})$. Обратно, ако $\models \varphi(\bar{d})$, изаберимо сведока $\bar{b}'$ за егзистенцијални квантификатор. Тада $\models \theta(\bar{b}') \wedge \phi(\bar{d}, \bar{b}')$. Како је $\models \theta(\bar{b}')$, то важи $\models \forall \bar{x} \, (\phi(\bar{x}, \bar{b}) \Leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{b}'))$, па како је $\models \phi(\bar{d}, \bar{b}')$, коначно добијамо $\models \phi(\bar{d}, \bar{b})$, тј. $\bar{d} \in D$. Дакле, $D = \varphi(\mathfrak{C}^n)$ је дефинабилан над A. $\Box$

1.12. Испуштање типова у монструму.

Нека је $\mathcal{L}$ пребројив језик, T потпуна $\mathcal{L}$-теорија и $\mathfrak{C}$ фиксиран монструм теорије T. Ми ћемо користити Теорему о испуштању типова у следећем облику.

Теорема 1.10. *Нека је $A \subseteq \mathfrak{C}$ пребројив скуп и p (могуће непотпун) тип са параметрима A. Ако не постоји $\mathcal{L}_A$-формула $\phi(\bar{x})$ која је сагласна са $p(\bar{x})$ и таква да $\phi(\bar{x}) \vdash p(\bar{x})$ (другим речима ако $p(\bar{x})$ није изолован над A), тада постоји пребројив модел $M \prec \mathfrak{C}$ такав да $A \subseteq M$ и M испушта тип p.*

Доказ. Посматрајмо језик $\mathcal{L}_A$ и теорију $T_A = \mathrm{Th}(\mathfrak{C}, A)$. Приметимо да је $\mathcal{L}_A$ пребројив језик, и како смо именовали мали скуп параметара, то је $\mathfrak{C}$ монструм теорије T_A. Такође, ако је $M \models T_A$ мали модел, тада $A \subseteq M$.

По претпоставци, p је неизоловани тип над $\emptyset$, па према Теореми о испуштању типова постоји пребројив модел M теорије T_A који испушта p. $\square$

2. Оператор алгебарског затворења

Дефиниција 1.11. Претпоставимо да је S непразан скуп и да је cl унарна операција на $\mathcal{P}(S)$, $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$. Кажемо да је cl *оператор алгебарског затворења* на S ако задовољава (за све $A, B \subseteq S$):

- $A \subseteq B$ повлачи $A \subseteq \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$; (монотоност)
- $\mathrm{cl}(A) = \bigcup\{\mathrm{cl}(A_0) \mid A_0 \subseteq A,\ A_0$ је коначан$\}$; (коначан карактер)
- $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$. (идемпотенција или транзитивност)

Оператор алгебарског затворења је *оператор предгеометрије* ако додатно задовољава (за све $a, b \in S$ и $A \subseteq S$):

- $b \in \mathrm{cl}(A, a) \smallsetminus \mathrm{cl}(A)$ повлачи $a \in \mathrm{cl}(A, b)$. (својство замене)

У том случају кажемо да је (S, cl) *предгеометрија.*

За оператор алгебарског затворења које не задовољава својство замене кажемо да је *прави оператор алгебарског затворења.*

За сваки $A \subseteq S$, скуп $\mathrm{cl}(A)$ зовемо *затворење* скупа A, а за скуп $B \subseteq S$ кажемо да је затворен ако је $B = \mathrm{cl}(A)$, за неки $A \subseteq S$.

Ако је cl оператор алгебарског затворења на S, онда сваки подскуп $T \subseteq S$ дефинише (на природан начин) два нова оператора алгебарског затворења које зовемо *рестрикција* на T и *релативизација* у T.

Дефиниција 1.12. Нека cl оператор алгебарског затворења на S и $T \subseteq S$. Рестрикција cl на T је оператор cl_T на T дефинисан са:

$$\mathrm{cl}_T(A) = T \cap \mathrm{cl}(A),\ \text{за све } A \subseteq T.$$

Релативизација cl у T је оператор cl^T на S дефинисан са:

$$\mathrm{cl}^T(A) = \mathrm{cl}(T, A),\ \text{за све } A \subseteq S.$$

Напомена 1.13.

(i) Ако оператор cl задовољава услове монотоности и коначног карактера, тада и оператори cl_T и cl^T такође задовољавају услове монотоности и коначног карактера. Ако је cl оператор алгебарског затворења на S, тада су cl_T и cl^T оператори алгебарског затворења редом на T и S. И више, ако је (S, cl) предгеометрија, онда су оба (T, cl_T) и (S, cl^T) такође предгеометрије.

(ii) Ако $T, U \subseteq S$, дефинишемо и оператор cl_T^U на T са:

$$\mathrm{cl}_T^U(A) = T \cap \mathrm{cl}(U, A), \text{ за све } A \subseteq T.$$

Ако оператор cl задовољава услове монотоности и коначног карактера, тада и cl_T^U задовољава услове монотоности и коначног карактера. Такође, ако је cl оператор алгебарског затворења на S, тада је и cl_T^U оператор алгебарског затворења на T, а ако је (S, cl) предгеометрија, тада је и (T, cl_T^U) предгеометрија.

(iii) Обично ћемо писати само cl за оба оператора cl_T и cl^T, па чак и за cl_T^U; овакав запис неће правити нејасноће, јер ће значење увек бити јасно из контекста.

Дефиниција 1.14. За оператор алгебарског затворења cl на S кажемо да је *дегенерисан* ако за сваки коначан подскуп $A \subseteq S$ важи:

$$\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(a).$$

За cl кажемо да је *потпуно дегенерисан* ако важи да за сваки коначан подскуп $A \subseteq S$ постоји елемент $a \in A$ тако да:

$$\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(a).$$

Јасно је да су потпуно дегенерисани оператори алгебарског затворења дегенерисани; видећемо да обратно не важи.

Напомена 1.15. Ако је cl оператор алгебарског затворења на S и $T, U \subseteq S$, и ако је cl дегенерисан (потпуно дегенерисан), тада су и cl_T, cl^T и cl_T^U такође дегенерисани (потпуно дегенерисани) оператори.

Оператори предгеометрије се природно јављају у алгебри како показују следећи примери.

Пример 1.16.

(1) Нека је V векторски простор над пољем k, и нека је $\mathrm{cl}(A)$ потпростор разапет са A. Тада је cl оператор предгеометрије на V.

(2) Нека је F поље чије је базно поље k, и нека је $\mathrm{cl}(A)$ алгебарско затворење поља $k(A)$ у F, тј. $\mathrm{cl}(A)$ је скуп свих елемената из F који су алгебарски над $k(A)$. Тада је cl оператор предгеометрије на F. Својство замене у овом примеру је тврђење: ако је b алгебарски елемент над $k(A, a)$ и трансцендентан над $k(A)$, тада је a алгебарски над $k(A, b)$, што је тврђење познато као Штајницова теорема. Зато се својство замене често назива и Штајницова аксиома.

Постојање оператора предгеометрије cl на скупу S обезбеђује да се на S могу дефинисати појамови независности, базе и димензије. У претходним примерима ови појмови се поклапају са појмовима линеарне независности, базе и димензије векторског простора, односно са појмовима алгебарске независности, трансцендентне базе и трансцендентног степена поља.

Дефиниција 1.17. Нека је cl оператор предгеометрије на S и $A \subseteq S$. Кажемо да је A:

- cl-*независан скуп* ако важи $a \notin \mathrm{cl}(A \smallsetminus \{a\})$, за све $a \in A$;
- cl-*генераторни скуп* ако важи $S = \mathrm{cl}(A)$;
- cl-*база* ако је A независан генераторни скуп.

Користећи својство замене, можемо имитирати доказе одговарајућих тврђења из контекста векторских простора и поља да докажемо следећу теорему, која повлачи да је појам димензије предгеометрије добро дефинисан.

Теорема 1.18. *Нека је* cl *оператор предгеометрије на* S.

(i) Ако је A cl-*независан скуп,* B cl-*генераторни скуп и* $A \subseteq B$, *тада постоји* cl-*база* C *таква да* $A \subseteq C \subseteq B$. *Специјално, предгеометрија* (S, cl) *има базу.*

(ii) Све базе предгеометрије (S, cl) *су исте кардиналности.* □

Дефиниција 1.19. *Димензија* предгеометрије (S, cl), у ознаци $\dim(S)$, је кардиналност било које базе.

У случају када је cl прави оператор алгебарског затворења S (не важи својство замене), природно се појављује нетривијално парцијално уређење на S: ако $a, b \in S$ и $A \subseteq S$ сведоче да не важи својство замене, тј. ако $b \in \mathrm{cl}(A, a) \smallsetminus \mathrm{cl}(A)$ и $a \notin \mathrm{cl}(A, b)$, тада је $\mathrm{cl}(A, b) \subsetneq \mathrm{cl}(A, a)$, па са $x < y$ акко $\mathrm{cl}(A, x) \subsetneq \mathrm{cl}(A, y)$ дефинишемо нетривијално строго парцијално уређење на S. Због тога су сви следећи примери правих оператора алгебарског затворења базирани на парцијалним уређењима.

Пример 1.20. Претпоставимо да је $(P, \leqslant)$ нетривијално парцијално уређење и $(L, \leqslant)$ нетривијално линеарно уређење.

(1) За $A \subseteq P$ дефинишимо $\mathrm{cl}(A) = \{x \in P \mid (\exists\, a \in A)\, x \leqslant a\}$. Лако је проверити да је cl прави оператор алгебарског затворења на P. Приметимо да по дефиницији $x \in \mathrm{cl}(A)$ повлачи $x \in \mathrm{cl}(a)$, за неки $a \in A$, тј. cl је дегенерисани оператор алгебарског затворења. Ако P није линеарно уређење, јасно је да cl није потпуно дегенерисан оператор алгебарског затворења; штавише, cl је потпуно дегенерисан ако и само ако је P линеарно уређење.

(2) Нека је $(Q_p, \leqslant_p)$ фамилија парцијалних уређења индексирана са $p \in P$. Уочимо дисјунктну унију $Q = \bigsqcup_{p\in P} Q_p$, и нека је $\pi : Q \longrightarrow P$ пројекција дата са: $\pi(x) = p$ ако и само ако $x \in Q_p$. Уочимо парцијално уређење на Q дато са: $x \leqslant y$ ако и само ако $\pi(x) < \pi(y)$ или $\pi(x) = \pi(y)$ и $x \leqslant_{\pi(x)} y$. Нека је $\mathrm{cl}(A) = \bigcup\{\pi^{-1}[\pi(x)] \mid (\exists\, a \in A)\, \pi(x) \leqslant \pi(a)\} = \bigcup\{Q_p \mid (\exists\, a \in A)\, p \leqslant \pi(a)\}$.

Поново, cl је прави оператор алгебарског затворења на Q, и из дефиниције лако видимо да је дегенерисан. Овај пример је занимљив јер се уређења $(P, \leqslant)$ и $(Q_p, \leqslant_p)$ могу реконструисати коришћењем cl из $(Q, \leqslant)$: $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$ дефинише релацију еквиваленције на Q чије су класе Q_p; $\mathrm{cl}(Q_p) \subseteq \mathrm{cl}(Q_{p'})$ дефинише уређење на количничком скупу ове еквиваленције које је изоморфно са $(P, \leqslant)$.

(3) Специјално, ако у примеру (2) уместо $(P, \leqslant)$ узмемо $(L, \leqslant)$, и дисјунктну унију парцијалних уређења $(Q_l, \leqslant_l)$ уредимо као у примеру (2), добијамо пример потпуно дегенерисаног оператора алгебарског затворења. Како ћемо видети у тврђењу 1.22, овај пример је канонски у смислу да је сваки скуп S са правим потпуно дегенерисаним оператором алгебарског затворења описаног облика.

Дефиниција 1.21. Нека је cl оператор алгебарског затворења на скупу S.

(i) За $x, y \in S$ дефинишемо: $x \leqslant_{\mathrm{cl}} y$ ако и само ако $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{cl}(y)$.
(ii) $\mathcal{E}$-околина од $x \in S$ је: $\mathcal{E}(x) = \{y \in S \mid \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)\}$.
(iii) $S_{\mathrm{cl}} = \{\mathcal{E}(x) \mid x \in S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)\}$.
(iv) S_{cl} природно наслеђује уређење $\leqslant_{\mathrm{cl}}$ из S: $\mathcal{E}(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(y)$ ако и само ако за све $x' \in \mathcal{E}(x)$ и све $y' \in \mathcal{E}(y)$ важи $x' \leqslant_{\mathrm{cl}} y'$. У доказу тврђења 1.22(ii) ћемо видети да је $\mathcal{E}(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(y)$ еквивалентно са $x \leqslant_{\mathrm{cl}} y$.
(v) $\pi : S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset) \longrightarrow S_{\mathrm{cl}}$ је пресликавање дефинисано са $\pi(x) = \mathcal{E}(x)$.

У следећем тврђењу ћемо описати везу између уведених појмова из претходне дефиниције, и видећемо да су прави потпуно дегенерисани оператори затворења суштински описани у примеру 1.20(3): постоји релација еквиваленције на S и линеарно уређење на количничком скупу такво да је, за свако $A \subseteq S$, $\mathrm{cl}(A)$ унија свих класа које нису веће од класе неког елемента из A.

Тврђење 1.22. *Нека је* cl *потпуно дегенерисани прави оператор алгебарског затворења на* S. *Тада:*

(i) $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(y)$ *ако и само ако* $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$. S_{cl} *је партиција скупа* $S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$.
(ii) Са $\mathcal{E}(x) \mapsto \mathrm{cl}(x)$ *је добро дефинисани изоморфизам линеарних уређења* $(S_{\mathrm{cl}}, \leqslant_{\mathrm{cl}})$ *и* $(\{\mathrm{cl}(x) \mid x \in S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)\}, \subseteq)$.
(iii) За све $A \subseteq S$, $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(\emptyset) \cup \bigcup\{\mathcal{E}(x) \mid (\exists\, a \in A)\, \pi(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \pi(a)\}$.

Доказ. (i) Како очигледно $x \in \mathcal{E}(x)$, то $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(y)$, по дефиницији $\mathcal{E}$, повлачи $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$. Обратно је такође очигледно из дефиниције $\mathcal{E}$.

Да бисмо доказали да је S_{cl} партиција скупа $S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$, претпоставимо да $\mathcal{E}(x) \cap \mathcal{E}(y) \neq \emptyset$. Изаберимо $t \in \mathcal{E}(x) \cap \mathcal{E}(y)$; по дефиницији $\mathcal{E}$ тада је $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(t) = \mathrm{cl}(y)$, па према првом делу тврђења је $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(y)$. Дакле, недисјунктни чланови S_{cl} су једнаки, тј. S_{cl} је партиција скупа $S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$.

Приметимо да у доказу овог дела нисмо користили потпуну дегенерисаност оператора cl.

(ii) Према делу (i), пресликавање $\mathcal{E}(x) \mapsto \mathrm{cl}(x)$ је добро дефинисана бијекција $S_{\mathrm{cl}} \longrightarrow \{\mathrm{cl}(x) \mid x \in S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)\}$. Ако је $\mathcal{E}(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(y)$, тада је специјално $x \leqslant_{\mathrm{cl}} y$, па је $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{cl}(y)$. Обратно, ако је $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{cl}(y)$ и $x' \in \mathcal{E}(x)$, $y' \in \mathcal{E}(y)$, тада је $cl(x') = \mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{cl}(y) = \mathrm{cl}(y')$, па је $\mathcal{E}(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(y)$. Према томе, $\mathcal{E}(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(y)$ ако и само ако $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{cl}(y)$, тј. дефинисано пресликавање јесте изоморфизам уређења.

Остаје да докажемо линеарност датих уређења. Због потпуне дегенерисаности оператора cl имамо да је, за произвољне $x, y \in S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$, затворење $\mathrm{cl}(x, y)$ једнако $\mathrm{cl}(x)$ или $\mathrm{cl}(y)$. Због монотоности, у првом случају је $\mathrm{cl}(y) \subseteq \mathrm{cl}(x)$, а у другом $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{cl}(y)$. Дакле, дата уређења су линеарна.

(iii) Нека је $\bar{A} = \mathrm{cl}(\emptyset) \cup \bigcup\{\mathcal{E}(x) \mid (\exists\, a \in A)\, \pi(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \pi(a)\}$. Тврдимо да је $\mathrm{cl}(A) = \bar{A}$. Претпоставимо да $x \in \mathrm{cl}(A) \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$, тј. због дегенерисаности да $x \in \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(a) \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$. Тада постоји $a \in A$ такав да $x \in \mathrm{cl}(a)$, па имамо $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{cl}(a)$. Према делу (ii) је $\mathcal{E}(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a)$, тј. $\pi(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \pi(a)$, па $x \in \bar{A}$ и $\mathrm{cl}(A) \subseteq \bar{A}$ је доказано.

За другу инклузију претпоставимо да $x \in \bar{A} \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$. Изаберимо $a \in A$ тако да $\pi(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \pi(a)$, тј. $\mathcal{E}(x) \leqslant_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a)$. Према делу (ii) је $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{cl}(a)$, па $x \in \mathrm{cl}(a) \subseteq \mathrm{cl}(A)$. Дакле, $\bar{A} \subseteq \mathrm{cl}(A)$. □

Сада ћемо дефинисати појам cl-*слободног низа* елемената из S, где је cl оператор аглебарског затворења на скупу S. Под низом подразумевамо низ елемената $(a_i)_{i \in I}$ индексиран елементима линеарног уређења $(I, <)$. Обичај је да користимо краћи запис $\bar{a}_{<i}$ и $\bar{a}_{\leqslant i}$ за низове $(a_j)_{j<i}$ и $(a_j)_{j \leqslant i}$. Такође, $\bar{a}_{\neq i}$ користимо за $(a_j)_{j \neq i}$.

Дефиниција 1.23. Нека је cl оператор алгебарског затворења на S и $(I, <)$ линеарно уређење. Низ $(a_i)_{i \in I}$ елемената из $S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$ је cl-слободан ако $a_i \notin \mathrm{cl}(\bar{a}_{<i})$, за све $i \in I$.

Напомена 1.24.

(i) У случају предгеометрије (S, cl), низ $(a_i)_{i \in I}$ је cl-слободан ако и само ако је скуп $\{a_i \mid i \in I\}$ cl-независан. Импликација $(\Leftarrow)$ је очигледна. За $(\Rightarrow)$

претпоставимо да је низ $(a_i)_{i\in I}$ cl-слободан и претпоставимо супротно да $a_{i_0} \in \mathrm{cl}(\bar{a}_{\neq i_0})$. Према коначном карактеру можемо изабрати минимално n такво да $a_{i_0} \in \mathrm{cl}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ и $i_0 \neq j_1, j_2, \ldots, j_n$. Приметимо да је $i_0 < j_n$, јер је низ $(a_i)_{i\in I}$ cl-слободан. Због минималности n имамо да $a_{i_0} \in \mathrm{cl}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n-1}}, a_{j_n}) \smallsetminus \mathrm{cl}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n-1}})$, одакле из својства замене добијамо $a_{j_n} \in \mathrm{cl}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n-1}}, a_{i_0})$. Како је $j_1, \ldots, j_{n-1}, i_0 < j_n$, ово повлачи да $a_{j_n} \in \mathrm{cl}(\bar{a}_{<j_n})$, што је у контрадикцији са чињеницом да је $(a_i)_{i\in I}$ cl-слободан.

(ii) Појам cl-слободних низова се може дефинисати чак и ако cl није оператор алгебарског затворења. Ми ћемо говорити о cl-слободним низовима у случају оператора који задовољавају монотоност и коначан карактер, али можда не транзитивност.

Према претходној напомени појам cl-слободног низа не даје ништа ново ако је (S, cl) предгеометрија. Појам cl-слободног низа има важну улогу у испитивању правих оператора алгебарског затворења, посебно потпуно дегенерисаних.

Тврђење 1.25. *Нека је* cl *потпуно дегенерисани прави оператор алгебарског затворења на* S *и нека су* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$.

(i) Следећи услови су еквивалентни:
   (1) (a_1, a_2) *је* cl-*слободан;*
   (2) $\mathcal{E}(a_1) <_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a_2)$;
   (3) $a_1 <_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a_2)$;
   (4) $\mathcal{E}(a_1) <_{\mathrm{cl}} a_2$.

(ii) Следећи услови су еквивалентни:
   (1) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *је* cl-*слободан;*
   (2) $\mathcal{E}(a_1) <_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a_2) <_{\mathrm{cl}} \ldots <_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a_n)$;
   (3) $\pi(a_1) <_{\mathrm{cl}} \pi(a_2) <_{\mathrm{cl}} \ldots <_{\mathrm{cl}} \pi(a_n)$;
   (4) $\mathrm{cl}(a_1) \subsetneq \mathrm{cl}(a_2) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{cl}(a_n)$.

(iii) Тип уређења сваког максималног cl-*слободног низа је изоморфан* $(S_{\mathrm{cl}}, <_{\mathrm{cl}})$.

(iv) Претпоставимо да је $\leqslant$ *парцијално уређење на* $S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$ *такво да су сви* cl-*слободни низови строго растући. Тада је* $\mathcal{E}(a)$ $\leqslant$-*конвексан скуп и затворен у односу на* $\leqslant$-*неупоредивост (у* $S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$*).*

(v) Ако је $\leqslant$ *парцијално уређење као у (iv), тада се* $<$ *и* $<_{\mathrm{cl}}$ *„генерички" поклапају у смислу да индукују исто уређење на* S_{cl}.

Доказ. (i) Према тврђењу 1.22(ii) имамо да је (a_1, a_2) cl-слободан ако и само ако $\mathrm{cl}(a_1) \subsetneq \mathrm{cl}(a_2)$ ако и само ако $\mathcal{E}(a_1) <_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a_2)$, што доказује (1)$\Leftrightarrow$(2). Импликације (2)$\Rightarrow$(3) и (2)$\Rightarrow$(4) су очигледне. За (3)$\Rightarrow$(2) претпоставимо да $a_1 <_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a_2)$. По дефиницији, то значи да је $\mathrm{cl}(a_1) \subsetneq \mathrm{cl}(a_2)$, па према тврђењу

1.22(ii) имамо да је $\mathcal{E}(a_1) <_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a_2)$, што завршава доказ. Импликација (4)⇒(2) се слично доказује.

(ii) Ово је последица дела (i) и тврђења 1.22.

(iii) Приметимо да је низ $(a_i)_{i\in I}$ елемената из $S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)$ cl-слободан ако и само ако је $(\mathrm{cl}(a_i))_{i\in I}$ $\subsetneq$-растући. Према томе, $(a_i)_{i\in I}$ је максималан cl-слободан низ ако и само ако $\{\mathrm{cl}(a_i) \mid i \in I\} = \{\mathrm{cl}(x) \mid x \in S \smallsetminus \mathrm{cl}(\emptyset)\}$, па је према тврђењу 1.22(ii) његов тип уређења изоморфан $(S_{\mathrm{cl}}, <_{\mathrm{cl}})$.

(iv) Да бисмо доказали $\leqslant$-конвексност скупа $\mathcal{E}(a)$, претпоставимо да $x \leqslant y$ и $x, y \in \mathcal{E}(a)$; тада $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(y) = \mathcal{E}(a)$. Нека $t \notin \mathrm{cl}(\emptyset)$. Ако $t \notin \mathcal{E}(a)$, тада је према тврђењу 1.22(ii) или $\mathrm{cl}(t) \subsetneq \mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(x)$ или $\mathrm{cl}(y) = \mathrm{cl}(a) \subsetneq \mathrm{cl}(t)$. Према делу (ii) то значи да је или (t, x) или (y, t) слободан низ, па према претпоставци тврђења је или $t < x$ или $y < t$; свакако не важи $x \leqslant t \leqslant y$. Према томе, $x \leqslant t \leqslant y$ повлачи $t \in \mathcal{E}(a)$ и $\mathcal{E}(a)$ је конвексан.

Да бисмо доказали затвореност скупа $\mathcal{E}(a)$ у односу на $\leqslant$-неупоредивост, претпоставимо да $x \in \mathcal{E}(a)$; тада $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(a)$. Нека $t \notin \mathrm{cl}(\emptyset)$. Ако $t \notin \mathcal{E}(a)$, слично као и у претходном пасусу закључујемо да је или $x < t$ или $t < x$; свакако t је $\leqslant$-упоредив са x. Према томе, $t \nleqslant x$ и $x \nleqslant t$ повлаче $t \in \mathcal{E}(a)$.

(v) Директно из (iv) можемо да видимо да је $\mathcal{E}(a_1) < \mathcal{E}(a_2)$ ако и само ако је (a_1, a_2) cl-слободан низ, што је према (i) еквивалентно са $\mathcal{E}(a_1) <_{\mathrm{cl}} \mathcal{E}(a_2)$. □

Потпуно дегенерисани оператори алгебарског затворења користе се како би се описали типови уређења као инваријанте структура првог реда, што ћемо приказати у следећем поглављу.

3. Дедекиндово комплетирање

У овом одељку ћемо се подсетити појма Дедекиндовог комплетирања густих линеарних уређења. Овај појам је добро познат, али ми ћемо прилагодити дефиницију нашим потребама, и доказати један чисто технички резултат који ћемо касније користити.

Подскуп I линеарно уређеног скупа L је *почетни сегмент од* L ако за свако $a \in L$ важи следеће:

$$\text{ако} \quad a \in I \quad \text{тада} \quad x \in I, \text{ за све } x < a.$$

Дефиниција 1.26. Нека је $(L, <)$ густо линеарно уређење, можда са једном или обе крајње тачке. *Дедекиндово комплетирање* уређења L је уређење $(\mathcal{D}(L), \subsetneq)$, где је $\mathcal{D}(L)$ скуп који садржи $\emptyset$ и све почетне сегменте од L који немају максимум.

Јасно је да је уређење $\mathcal{D}(L)$ линеарно, има минимум $\emptyset$ и има максимум: ако L нема максимум, L је максимум уређења $\mathcal{D}(L)$; ако је c максимум уређења L,

$\{x \in L \mid x < c\}$ је максимум уређења $\mathcal{D}(L)$. Такође, $\mathcal{D}(L)$ је комплетно у смислу да сваки његов подскуп има супремум (унија подскупа).

Постоји природно утапање уређења L у $\mathcal{D}(L)$: минимум, ако постоји, слика се у $\emptyset$; остали елементи $a \in L$ сликају се у $\{x \in L \mid x < a\}$. На овај начин L се идентификује са густим подскупом од $\mathcal{D}(L)$.

Зарад лакших формулација неких тврђења, усвојићемо конвенцију да је Дедекиндово комплетирање празног скупа једночлано уређење: $\mathcal{D}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Једночлано уређење је по дефиницији густо, и према дефиницији 1.26 његово Дедекиндово комплетирање је такође $\{\emptyset\}$.

Тврђење 1.27. *Претпоставимо да важе следећи услови:*

(1) $(L_1, <_1)$ *и* $(L_2, <_2)$ *су густа линеарна уређења;*
(2) $F : L_1 \longrightarrow \mathcal{D}(L_2)$ *је строго монотоно пресликавање;*
(3) $F[L_1]$ *је густ подскуп од* $\mathcal{D}(L_2)$.

Тада се F *може на природан начин проширити до пресликавања:*

$$\mathcal{D}(F) : \mathcal{D}(L_1) \longrightarrow \mathcal{D}(L_2)$$

на следећи начин:

(i) Ако је F *растуће, тада дефинишемо:*

$$\mathcal{D}(F)(\emptyset) = \emptyset \quad \text{и} \quad \mathcal{D}(F)(I) = \bigcup_{x \in I} F(x), \ \text{за } I \neq \emptyset.$$

У том случају је $\mathcal{D}(F)$ *изоморфизам уређења* $(\mathcal{D}(L_1), \subsetneq)$ *и* $(\mathcal{D}(L_2), \subsetneq)$.

(ii) Ако је F *опадајуће, тада дефинишемо:*

$$\mathcal{D}(\emptyset) = \text{максимум у } \mathcal{D}(L_2) \quad \text{и}$$

$$\mathcal{D}(F)(I) = \bigcup \{J \in \mathcal{D}(L_2) \mid J \subseteq F(x), \ \text{за све } x \in I\}, \ \text{за } I \neq \emptyset.$$

У том случају је $\mathcal{D}(F)$ *изоморфизам уређења* $(\mathcal{D}(L_1), \subsetneq)$ *и* $(\mathcal{D}(L_2), \supsetneq)$.

Доказ. (i) Претпоставимо да је F растуће пресликавање. Очигледно је да $\mathcal{D}(F)(I) \in \mathcal{D}(L_2)$, за $I \in \mathcal{D}(L_1)$, као и да је пресликавање $\mathcal{D}(F)$ хомоморфизам уређења. Да бисмо доказали да је $\mathcal{D}(F)$ инјективно, изаберимо $I, I' \in \mathcal{D}(L_1)$ тако да $I \subsetneq I'$. Како I' нема максимум, можемо изабрати $x, x' \in I'$ тако да $I <_1 x <_1 x'$. За свако $t \in I$, $t <_1 x$ и F је строго растуће повлаче $F(t) \subsetneq F(x)$. Слично, $x <_1 x'$ и F је строго растуће повлаче $F(x) \subsetneq F(x')$. Одатле имамо:

$$\mathcal{D}(F)(I) = \bigcup_{t \in I} F(t) \subseteq F(x) \subsetneq F(x') \subseteq \bigcup_{t \in I'} F(t) = \mathcal{D}(F)(I').$$

Према томе $\mathcal{D}(F)$ је инјективно.

Остаје да докажемо да је $\mathcal{D}(F)$ сурјективно. Изаберимо $J \in \mathcal{D}(L_2)$, $J \neq \emptyset$, и уочимо:

$$I = \{t \in L_1 \mid F(t) \subseteq J\}.$$

Приметимо да $J \neq \emptyset$ и $F[L_1]$ је густ у $\mathcal{D}(L_2)$ повлаче да је $I \neq \emptyset$, и чак бесконачан. Како је F растуће, такође је јасно да је I почетни сегмент од L_1. Ако I садржи максимум, избацимо га; сада $I \in \mathcal{D}(L_1)$ и тврдимо $\mathcal{D}(F)(I) = J$.

Јасно је да $\mathcal{D}(F)(I) \subseteq J$. Изаберимо $y \in J$. Како J нема максимум, изаберимо $y', y'' \in J$ тако да $y <_2 y' <_2 y''$. Тада у $\mathcal{D}(L_2)$ имамо:

$$\{t \in L_2 \mid t <_2 y\} \subsetneq \{t \in L_2 \mid t <_2 y'\} \subsetneq \{t \in L_2 \mid t <_2 y''\} \subseteq J,$$

па поново, како је $F[L_1]$ густ у $\mathcal{D}(L_2)$, можемо изабрати $x, x' \in L_1$ тако да:

$$\{t \in L_2 \mid t <_2 y\} \subsetneq F(x) \subsetneq \{t \in L_2 \mid t <_2 y'\} \subsetneq F(x') \subsetneq \{t \in L_2 \mid t <_2 y''\} \subseteq J.$$

Очигледно је $x <_1 x'$ и $F(x) \subsetneq F(x') \subsetneq J$, па x није једнак евентуално избаченом максимуму скупа $\{t \in L_1 \mid F(t) \subseteq J\}$, тј. $x \in I$. Такође, очигледно $y \in F(x)$, одакле $y \in \mathcal{D}(F)(I)$.

(ii) Претпоставимо да је F опадајуће пресликавање. Поново је јасно да $\mathcal{D}(F)(I) \in \mathcal{D}(L_2)$, за $I \in \mathcal{D}(L_1)$, јер је унија почетних сегмената без максимума такође почетни сегмент без максимума. Такође је јасно да $I \subseteq I'$ повлачи да је $\mathcal{D}(F)(I) \supseteq \mathcal{D}(F)(I')$, тј. $\mathcal{D}(F)$ је хомоморфизам одговарајућих уређења.

Претпоставимо да $I, I' \in \mathcal{D}(L_1)$ и $I \subsetneq I'$. Како I' нема максимум изаберимо $x, x' \in I'$ тако да $I <_1 x <_1 x'$. За свако $t \in I$, $t <_1 x$ и F је строго опадајуће повлаче $F(x) \subsetneq F(t)$. Слично, $x <_1 x'$ и F је строго опадајуће повлаче $F(x') \subsetneq F(x)$. Како $F(x)$ нема максимум изаберимо $y, y' \in F(x)$ тако да $F(x') <_2 y <_2 y'$. Уочимо елемент $J = \{t \in L_1 \mid t <_2 y'\}$ у $\mathcal{D}(L_2)$; приметимо $y \in J \subseteq F(x)$ и $y \in J \setminus F(x')$. За свако $t \in I$ је $J \subseteq F(x) \subsetneq F(t)$, па $J \subseteq \mathcal{D}(F)(I)$ и $y \in \mathcal{D}(F)(I)$ следи. Са друге стране, $y \notin \mathcal{D}(F)(I')$, јер у супротном припада неком $J' \in \mathcal{D}(L_2)$ који је садржан у сваком $F(t)$, за $t \in I'$; специјално $y \in J' \subseteq F(x')$, што је контрадикција. Дакле, $\mathcal{D}(F)$ је инјективно.

Остаје да докажемо да је $\mathcal{D}(F)$ сурјективно. Изаберимо $J \in \mathcal{D}(L_2)$ тако да J није максимум у $\mathcal{D}(L_2)$ и уочимо:

$$K = \{t \in L_1 \mid J \nsubseteq F(t)\} \quad \text{и} \quad I = L_1 \setminus K.$$

Како је F опадајућа, јасно је да је K крајњи сегмент од L_1, па је I почетни сегмент од L_1. Такође, $K \neq L_1$ јер J није максимум у $\mathcal{D}(L_2)$, а $F[L_1]$ је густ у $\mathcal{D}(L_2)$. Према томе $I \neq \emptyset$. Ако I садржи максимум, избацимо га. Тада $I \in \mathcal{D}(L_1)$ и тврдимо $\mathcal{D}(F)(I) = J$.

По дефиницији скупова K и I, имамо да $J \subseteq F(t)$ за све $t \in I$, па је $J \subseteq \mathcal{D}(F)(I)$. Претпоставимо да $y \in \mathcal{D}(F)(I)$. Изаберимо $J' \in \mathcal{D}(L_2)$ тако да $J' \subseteq F(t)$, за све $t \in I$, и $y \in J'$. Претпоставимо супротно да $y \notin J$; тада $J \subsetneq J'$, јер су J, J' почетни сегменти од L_2 и $y \in J' \setminus J$. Како је $F[L_1]$ густ у $\mathcal{D}(L_2)$, изаберимо $x, x' \in L_1$ тако да $J \subsetneq F(x) \subsetneq F(x') \subsetneq J'$. Тада је $x' < x$ јер је F опадајућа, али такође $x, x' \notin K$, па $x' \in I$, јер $x' < x$ повлачи да x' није евентуални максимум од $L_1 \setminus K$. Како $x' \in I$, по дефиницији скупа J', имамо да $J' \subseteq F(x')$. Контрадикција. $\square$

ПОГЛАВЉЕ 2

Правилни типови

У овом поглављу ћемо приказати појам правилног типа. Појам правилног типа увео је Шелах у изучавању стабилних теорија. У општем случају, појам правилног типа су увели Пилеј и Тановић у раду [**10**], у коме су започели њихово изучавање. Они су приметили да постоје две врсте правилних типова: симетрични и асиметрични. Симетричне правилне типове је изучавао Тановић у раду [**15**], а асиметрични правилни типови су изучавани у раду [**8**].

У првом одељку ћемо увести појам глобалног инваријантног типа и дати основне особине инваријантних типова. Дефинисаћемо појам Морлијевог низа инваријантног типа – генеричног низа реализација типа. Видећемо да инваријантни типови имају јединствено инваријантно проширење на већи монструм и да су типови Морлијевих низова јединствени и одређени глобалним типовима – степенима датог типа. Увешћемо појмове симетричног и асиметричног инваријантног типа и доказаћемо да су Морлијеви низови симетричног типа инваријантни у односу на пермутације. Лепо излагање о инваријантним типовима може се наћи у [**14**].

У другом одељку ћемо сваком неалгебарском типу над моделом придружити известан оператор који увек задовољава услове монотоности и коначног карактера, али не мора бити оператор алгебарског затворења.

У трећем одељку дефинишемо појмове слабо правилног, правилног и јако правилног типа. Видећемо да правилност повлачи да је извесна рестрикција придруженог оператора транзитивна, тј. да је у питању оператор алгебарског затворења. Даћемо доказ Теореме дихотомије из [**10**] која каже да је оператор придружен симетричном правилном типу оператор предгеометрије, док асиметричан правилан тип генерише дефинабилно парцијално уређење у односу на које су Морлијеви низови строго растући.

1. Инваријантни типови

Дефиниција 2.1. Нека је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ и $A \subseteq \mathfrak{C}$ мали скуп. Кажемо да је тип $\mathfrak{p}$ *инваријантан над* A или A*-инваријантан* ако за сваки аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$, сваку формулу $\phi(\bar{x},\bar{y})$ и сваки $\bar{m} \in \mathfrak{C}$ важи:

$$\phi(\bar{x},\bar{m}) \in \mathfrak{p} \quad \text{акко} \quad \phi(\bar{x},f(\bar{m})) \in \mathfrak{p}.$$

Кажемо да је глобални тип *инваријантан*, ако је инваријантан над неким малим скупом.

Приметимо да инваријантност над A повлачи инваријантност над сваким надскупом $B \supseteq A$, јер је $\mathrm{Aut}_B(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$.

За инваријантне глобалне типове дефинишемо појам Морлијевог низа.

Дефиниција 2.2. Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ инваријантан тип и $(I, <)$ линеарно уређење. Низ n-торки из $\mathfrak{C}$ $\quad (\bar{a}_i)_{i \in I}$ $\quad$ је *Морлијев низ у* $\mathfrak{p}$ *над* A ако за свако $i \in I$ важи:

$$\bar{a}_i \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{a}_{<i}},$$

где је $\bar{a}_{<i}$ ознака за $\{\bar{a}_j \mid j < i\}$. Специјално, $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m)$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A ако важи:

$$\bar{a}_1 \models \mathfrak{p}_{\restriction A},\ \bar{a}_2 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{a}_1},\ \bar{a}_3 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{a}_1\bar{a}_2},\ \ldots,\ \bar{a}_m \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{m-1}}.$$

Традиционално, ординално уређени низови који задовољавају услове претходне дефиниције се називају Морлијеви низови. Проширили смо дефиницију на произвољно линеарно уређење $(I, <)$.

У следећој леми ћемо доказати да је тип Морлијевог низа инваријантног типа јединствен.

Лема 2.3. *Претпоставимо да је* $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ *инваријантан над* A.

(i) За сваки мали скуп $B \supseteq A$*, ако су* $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m)$ *и* $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$ *Морлијеви низови у* $\mathfrak{p}$ *над* B*, тада је* $\mathrm{tp}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m/B) = \mathrm{tp}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m/B)$.

(ii) За сваки мали скуп $B \supseteq A$ *и свако линеарно уређење* $(I, <)$*, ако су* $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ *и* $(\bar{b}_i)_{i \in I}$ *Морлијеви низови у* $\mathfrak{p}$ *над* B*, тада је* $\mathrm{tp}((\bar{a}_i)_{i \in I}/B) = \mathrm{tp}((\bar{b}_i)_{i \in I}/B)$.

Доказ. (i) Доказ изводимо индукцијом по m. За $m = 1$ тврђење је тривијално. Претпоставимо да тврђење важи за Морлијеве низове дужине $m - 1$ и претпоставимо да су $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m)$ и $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$ Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над B. По индукцијској хипотези имамо да је:

$$\mathrm{tp}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}/B) = \mathrm{tp}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{m-1}/B).$$

Тада постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_B(\mathfrak{C})$ такав да $f(\bar{a}_i) = \bar{b}_i$, за све $i < m$. Због A-инваријантности типа $\mathfrak{p}$, како f фиксира A, из $\bar{a}_m \models \mathfrak{p}_{\restriction B\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_{m-1}}$ следи да $f(\bar{a}_m) \models \mathfrak{p}_{\restriction B\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{m-1}}$. Према томе, имамо:

$$\mathrm{tp}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_m/B) = \mathrm{tp}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{m-1}, f(\bar{a}_m)/B) = \mathrm{tp}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{m-1}, \bar{b}_m/B),$$

где прва једнакост важи јер аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_B(\mathfrak{C})$ слика $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \bar{a}_m)$ у $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{m-1}, f(\bar{a}_m))$, а друга јер $f(\bar{a}_m)$ и b_m оба реализују тип $\mathfrak{p}_{\restriction B\bar{b}_1\ldots\bar{b}_{m-1}}$.

(ii) Претпоставимо супротно, тј. да $\mathrm{tp}((\bar{a}_i)_{i\in I}/B) \neq \mathrm{tp}((\bar{b}_i)_{i\in I}/B)$, за Морлијеве низове $(\bar{a}_i)_{i\in I}$ и $(\bar{b}_i)_{i\in I}$ у $\mathfrak{p}$ над B. Тада постоји коначан подскуп $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq I$, где $i_1 < \dots < i_m$, и формула са параметрима из B, $\phi(\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_m})$, таква да:

$$\models \phi(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_m}) \wedge \neg\phi(\bar{b}_{i_1}, \dots, \bar{b}_{i_m}).$$

Међутим, како су $(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_m})$ и $(\bar{b}_{i_1}, \dots, \bar{b}_{i_m})$ Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над B, то није могуће према (i). $\square$

Приметимо да имамо директну последицу претходне леме.

Последица 2.4. *Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ инваријантан над A. Тада су Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A нераспознатљиви над A.*

Испоставља се да глобалан инваријантан тип има јединствено инваријантно проширење на већи монструм.

Лема 2.5. *Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ инваријантан над A и претпоставимо да је $\mathfrak{C}' \succ \mathfrak{C}$ већи монструм. Тада постоји јединствено A-инваријантно проширење $\mathfrak{p}'$ типа $\mathfrak{p}$ у $\mathrm{S}_n(\mathfrak{C}')$.*

Доказ. Конструишемо тип $\mathfrak{p}'$ на следећи начин: за све формуле $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ без параметара и све $\bar{m}' \in \mathfrak{C}'$:

$$\phi(\bar{x}, \bar{m}') \in \mathfrak{p}' \quad \text{акко} \quad \phi(\bar{x}, \bar{m}) \in \mathfrak{p}, \text{ за неко } \bar{m} \in \mathfrak{C} \text{ такво да } \mathrm{tp}(\bar{m}/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A).$$

Очигледно је $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$. Приметимо да ако $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in \mathfrak{p}$, за неко $\bar{m} \in \mathfrak{C}$ такво да $\mathrm{tp}(\bar{m}/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A)$, тада због A-инваријантности типа $\mathfrak{p}$ важи да $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in \mathfrak{p}$, за свако $\bar{m} \in \mathfrak{C}$ такво да $\mathrm{tp}(\bar{m}/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A)$.

Сада није тешко доказати да $\mathfrak{p}' \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C}')$. Ако $\phi_i(\bar{x}, \bar{m}') \in \mathfrak{p}'$, за $1 \leqslant i \leqslant k$, изаберимо $\bar{m} \in \mathfrak{C}$ такво да је $\mathrm{tp}(\bar{m}/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A)$, и изаберимо аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C}')$ такав да $f(\bar{m}) = \bar{m}'$. Тада $\phi_i(\bar{x}, \bar{m}) \in \mathfrak{p}$, за све $1 \leqslant i \leqslant k$, па постоји $\bar{a} \in \mathfrak{C}$ који задовољава све формуле $\phi_i(\bar{x}, \bar{m})$. Тада $f(\bar{a})$ задовољава све формуле $\phi_i(\bar{x}, \bar{m}')$, па закључујемо да је $\mathfrak{p}'$ коначно задовољив.

За потпуност, ако је $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ формула без параметара и $\bar{m}' \in \mathfrak{C}'$, тада важи или $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in \mathfrak{p}$, за све $\bar{m} \in \mathfrak{C}$ такве да $\mathrm{tp}(\bar{m}/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A)$, или $\neg\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in \mathfrak{p}$, за све $\bar{m} \in \mathfrak{C}$ такве да $\mathrm{tp}(\bar{m}/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A)$. Према томе, или $\phi(\bar{x}, \bar{m}') \in \mathfrak{p}'$ или $\neg\phi(\bar{x}, \bar{m}') \in \mathfrak{p}'$.

Такође, према конструкцији $\mathfrak{p}'$ је инваријантан над A. Ако је $\phi(\bar{x}, \bar{m}') \in \mathfrak{p}'$, тада је $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in \mathfrak{p}$, за неко $\bar{m} \in \mathfrak{C}$ такво да $\mathrm{tp}(\bar{m}/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A)$, па ако је $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C}')$, тада је $\mathrm{tp}(f(\bar{m}')/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}/A)$, па је $\phi(\bar{x}, f(\bar{m}')) \in \mathfrak{p}'$.

Коначно, тврдимо да је $\mathfrak{p}'$ једино проширење типа $\mathfrak{p}$ на $\mathfrak{C}'$ које је A-инваријантно. Нека је $\mathfrak{p}'' \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C}')$ проширење типа $\mathfrak{p}$ које је A-инваријантно и нека $\phi(\bar{x}, \bar{m}') \in \mathfrak{p}''$. Изаберимо $\bar{m} \in \mathfrak{C}$ такво да $\mathrm{tp}(\bar{m}/A) = \mathrm{tp}(\bar{m}'/A)$. Због

A-инваријантности типа $\mathfrak{p}''$ имамо да $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in \mathfrak{p}''$, па како је $\mathfrak{p}'' \supseteq \mathfrak{p}$ и $\bar{m} \in \mathfrak{C}$, добијамо да $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in \mathfrak{p}$. Одатле $\phi(\bar{x}, \bar{m}') \in \mathfrak{p}'$. Дакле, $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{p}'$, па због потпуности имамо $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}'$. □

Сада можемо дефинисати *степене* глобалног инваријантног типа $\mathfrak{p}$.

Дефиниција 2.6. Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ инваријантан тип и претпоставимо да је $\mathfrak{p}' \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C}')$ његово инваријантно проширење на већи монструм $\mathfrak{C}' \succ \mathfrak{C}$.

(i) Нека је $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}'$ над $\mathfrak{C}$. Са $\mathfrak{p}^m$ означавамо тип:

$$\mathfrak{p}^m(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) = \mathrm{tp}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m / \mathfrak{C}).$$

(ii) Нека је $(I, <)$ линеарно уређење и $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}'$ над $\mathfrak{C}$. Са $\mathfrak{p}^I$ означавамо тип:

$$\mathfrak{p}^I(\bar{x}_i)_{i \in I} = \mathrm{tp}((\bar{a}_i)_{i \in I} / \mathfrak{C}).$$

Приметимо да према леми 2.3, дефинисани типови $\mathfrak{p}^m$ и $\mathfrak{p}^I$ не зависе од избора Морлијевог низа у $\mathfrak{p}'$ над $\mathfrak{C}$. Заиста, монструм $\mathfrak{C}$ је мали скуп из угла монструма $\mathfrak{C}'$, па се лема 2.3 може применити. Такође приметимо да је:

$$\mathfrak{p}^I(\bar{x}_i)_{i \in I} = \bigcup_{\substack{\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq I \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_m}} \mathfrak{p}^m(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_m}).$$

Лема 2.7. *Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ инваријантан над A. Нека је $B \supseteq A$ мали скуп и $(I, <)$ линеарно уређење.*

(i) Низ $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B акко $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m) \models (\mathfrak{p}^m)_{\restriction B}$.

(ii) Низ $(\bar{b}_i)_{i \in I}$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B акко $(\bar{b}_i)_{i \in I} \models (\mathfrak{p}^I)_{\restriction B}$.

Доказ. Доказаћемо (i), део (ii) се слично доказује.

Нека је $\mathfrak{p}' \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C}')$ проширење типа $\mathfrak{p}$ на већи монструм $\mathfrak{C}' \succ \mathfrak{C}$ које је A-инваријантно. Нека је $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}'$ над $\mathfrak{C}$; по дефиницији је $\mathfrak{p}^m = \mathrm{tp}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m / \mathfrak{C})$. Специјално је $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}'$ над B и $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \models (\mathfrak{p}^m)_{\restriction B}$.

Претпоставимо да је $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B. Како је $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$, то је $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}'$ над B, па је према леми 2.3, $\mathrm{tp}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m / B) = \mathrm{tp}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m / B)$, тј. $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m) \models (\mathfrak{p}^m)_{\restriction B}$.

Претпоставимо сада да $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m) \models (\mathfrak{p}^m)_{\restriction B}$. Тада постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_B(\mathfrak{C}')$ такав да $f(\bar{a}_i) = \bar{b}_i$, за све $1 \leqslant i \leqslant m$. Како $\bar{a}_i \models \mathfrak{p}'_{\restriction B\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{i-1}}$, због A-инваријантности типа $\mathfrak{p}'$ имамо да $\bar{b}_i \models \mathfrak{p}'_{\restriction B\bar{b}_1 \ldots \bar{b}_{i-1}}$, па како је $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ добијамо да $\bar{b}_i \models \mathfrak{p}_{\restriction B\bar{b}_1 \ldots \bar{b}_{i-1}}$. Према томе, $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B. □

Испоставља се да имамо две врсте инваријантних типова: симетричне и асиметричне.

Дефиниција 2.8. Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ инваријантан тип.

(i) Кажемо да је $\mathfrak{p}$ *симетричан*, ако је $\mathfrak{p}^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \mathfrak{p}^2(\bar{x}_2, \bar{x}_1)$. У супротном кажемо да је *асиметричан*.

(ii) Кажемо да је $\mathfrak{p}$ *асиметричан над* A или A-*асиметричан* ако је инваријантан над A и $(\mathfrak{p}^2)_{\restriction A}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq (\mathfrak{p}^2)_{\restriction A}(\bar{x}_2, \bar{x}_1)$.

Напомена 2.9. Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ инваријантан над A.

(i) Ако је $\mathfrak{p}$ симетричан, према леми 2.7 за свако $B \supseteq A$ важи: ако је $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B, тада је и $(\bar{a}_2, \bar{a}_1)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B.

(ii) Ако је $\mathfrak{p}$ асиметричан, тада формула која сведочи $\mathfrak{p}^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq \mathfrak{p}^2(\bar{x}_2, \bar{x}_1)$ користи коначно много параметара, па постоји коначно проширење A_0 скупа A такво да $(\mathfrak{p}^2)_{\restriction A_0}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq (\mathfrak{p}^2)_{\restriction A_0}(\bar{x}_2, \bar{x}_1)$, тј. $\mathfrak{p}$ је асиметричан над A_0. Према леми 2.7, за свако $B \supseteq A_0$ важи: ако је $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B, тада $(\bar{a}_2, \bar{a}_1)$ није Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B.

Лема 2.10. *Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ инваријантан симетричан тип. Тада:*

(i) $\mathfrak{p}^m(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m) = \mathfrak{p}^m(\bar{x}_{\pi(1)}, \bar{x}_{\pi(2)}, \ldots, \bar{x}_{\pi(m)})$, *за свако $m \geqslant 2$ и сваку пермутацију π скупа $\{1, 2, \ldots, m\}$;*

(ii) $\mathfrak{p}^I(\bar{x}_i)_{i \in I} = \mathfrak{p}^I(\bar{x}_{\pi(i)})_{i \in I}$, *за свако линеарно уређење $(I, <)$ и сваку пермутацију π скупа I.*

Доказ. Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ инваријантан над A. Докажимо најпре следеће *тврђење*. За све $m \geqslant 2$ и све $k < m$ важи:

$$\mathfrak{p}^m(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_m) = \mathfrak{p}^m(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k+1}, \bar{x}_k, \ldots, \bar{x}_m).$$

Нека је $B \supseteq A$ произвољно и нека је $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}, \ldots, \bar{a}_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B. Тада је $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{k-1}, \bar{a}_k, \bar{a}_{k-1})$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B, па је $(\bar{a}_k, \bar{a}_{k+1})$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над $B\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{k-1}$, одакле је због симетричности типа $\mathfrak{p}$, $(\bar{a}_{k+1}, \bar{a}_k)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над $B\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{k-1}$. Одатле се директно може закључити да је $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{k-2}, \bar{a}_{k+1}, \bar{a}_k)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B, и коначно $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{k+1}, \bar{a}_k, \ldots, \bar{a}_m)$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над B. Према леми 2.7 ово доказује да је:

$$(\mathfrak{p}^m)_{\restriction B}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_x, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_m) = (\mathfrak{p}^m)_{\restriction B}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{k+1}, \bar{x}_k, \ldots, \bar{x}_m),$$

за све $B \supseteq A$, одакле следи тврђење.

Како транспозиције облика $(k, k+1)$, за $k < m$, генеришу све пермутације скупа $\{1, 2, \ldots, m\}$, (i) следи према претходном тврђењу. Онда (ii) следи према (i), јер је:

$$\mathfrak{p}^I(\bar{x}_i)_{i\in I} = \bigcup_{\substack{\{i_1,\ldots,i_m\}\subseteq I\\ i_1<i_2<\ldots<i_m}} \mathfrak{p}^m(\bar{x}_{i_1},\ldots,\bar{x}_{i_m}).$$

□

Имамо директну последицу претходне леме.

Последица 2.11. *Претпоставимо да је $\mathfrak{p}\in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ инваријантан над A и симетричан. Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A су потпуно нераспознатљиви.*

Дефиниција 2.12. Претпоставимо да су $\mathfrak{p}\in \mathrm{S}_m(\mathfrak{C})$ и $\mathfrak{q}\in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C})$ два инваријантна глобална типа. Нека су $\mathfrak{p}'\in \mathrm{S}_m(\mathfrak{C}')$ и $\mathfrak{q}'\in \mathrm{S}_n(\mathfrak{C}')$ њихова инваријантна проширења на већи монструм. Дефинишемо тип $\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q}\in \mathrm{S}_{m+n}(\mathfrak{C})$ са:

$$\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q}(\bar{x},\bar{y}) = \mathrm{tp}(\bar{a},\bar{b}/\mathfrak{C}),$$

где је $\bar{a}\models \mathfrak{p}'_{\restriction\mathfrak{C}}$, а $\bar{b}\models \mathfrak{q}'_{\restriction\mathfrak{C}\bar{a}}$.

Као и код дефиниције степена глобалног инваријантног типа, можемо закључити да дефинисани тип не зависи од избора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. И даље, ако су оба типа $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ инваријантни над A, тада за свако $B\supseteq A$ важи (у $\mathfrak{C}$):

$$(\bar{a},\bar{b})\models(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction B} \quad \text{акко} \quad \bar{a}\models \mathfrak{p}_{\restriction B} \text{ и } \bar{b}\models \mathfrak{q}_{\restriction B\bar{a}}.$$

За глобалне инваријантне типове $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ ћемо рећи да комутирају ако је $\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p}$. У том случају, ако су и $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ инваријантни над A, $(\bar{a},\bar{b})\models(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction B}$ ако и само ако $(\bar{b},\bar{a})\models(\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction B}$, за све $B\supseteq A$.

Такође приметимо да за глобалан инваријантан тип $\mathfrak{p}$ важи $\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$.

2. Оператор cl_p

Претпоставимо да је $p\in \mathrm{S}_1(N)$ неалгебарски тип над моделом N, где је можда $N=\mathfrak{C}$. Обичај је да за формуле које припадају типу p кажемо да су *p-велике*, док за њихове негације, формуле које не припадају типу p, кажемо да су *p-мале*. Ако је тип p јасан из контекста, онда само кажемо да је формула велика (мала), ако је p-велика (p-мала). Мотивација за овакву терминологију је природна и биће јасна у поглављу о квазиминималним моделима.

Типу p придружујемо оператор cl_p на N.

Дефиниција 2.13. Претпоставимо да је $p\in \mathrm{S}_1(N)$ неалгебарски тип. Дефинишемо оператор cl_p на N са:

$$\mathrm{cl}_p(X) = \bigcup\{\phi(N)\mid \neg\phi(x)\in p_{\restriction X}\},\ \text{за све } X\subseteq N.$$

Еквивалентно:

$$\mathrm{cl}_p(X) = N\smallsetminus p_{\restriction X}(N) = \{a\in N\mid a\not\models p_{\restriction X}\},\ \text{за све } X\subseteq N.$$

Приметимо да наведене дефиниције скупа $\mathrm{cl}_p(X)$ заиста јесу еквивалентне. Ако је $a \in N$ такав да $a \not\models p_{\restriction X}$, тада постоји формула са параметрима из X, $\neg\phi(x) \in p_{\restriction X}$, коју a не задовољава, тј. $a \in \phi(N)$. Обратно ако $\neg\phi(x) \in p_{\restriction X}$, тада ниједан елемент скупа $\phi(N)$ не може да реализује $p_{\restriction X}$.

Имајући у виду терминологију из уводног пасуса, $\mathrm{cl}_p(X)$ је дакле унија свих скупова дефинабилних малим формулама са параметрима из X.

Лема 2.14. *Претпоставимо да је $p \in \mathrm{S}_1(N)$ неалгебарски тип. Оператор cl_p задовољава услове монотоности и коначног карактера.*

Доказ. Да бисмо доказали монотоност, треба да докажемо да $X \subseteq Y$ повлачи $X \subseteq \mathrm{cl}_p(X) \subseteq \mathrm{cl}_p(Y)$. Како је тип p неалгебарски, формула $x = a$ је мала за свако $a \in N$, па према томе $a \in X$ повлачи $a \in \mathrm{cl}_p(X)$. Услов $\mathrm{cl}_p(X) \subseteq \mathrm{cl}_p(Y)$ је јасан, јер је свака мала формула са параметрима у X, специјално, мала формула са параметрима у Y, када је $X \subseteq Y$.

Доказ услова коначног карактера је такође лак: ако је $\phi(x)$ мала формула са параметрима у X, тада њени параметри припадају неком коначном подскупу $X_0 \subseteq X$. Према томе важи:

$$\mathrm{cl}_p(X) = \bigcup\{\mathrm{cl}_p(X_0) \mid X_0 \subseteq X \text{ је коначан}\}.$$

$\square$

Према претходној леми и напомени 1.13, за све скупове $S, T \subseteq N$ важи да оператор $\mathrm{cl}^T_{p,S}$ задовољава услове монотоности и коначног карактера, где је $\mathrm{cl}^T_{p,S}$ оператор дефинисан са:

$$\mathrm{cl}^T_{p,S}(X) = S \cap \mathrm{cl}_p(T, X).$$

Дакле, $\mathrm{cl}^T_{p,S}$ је оператор алгебарског затворења на скупу S ако и само ако задовољава услов транзитивности.

На крају овог одељка размотримо шта су $\mathrm{cl}^A_{\mathfrak{p}}$-слободни низови, где је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ инваријантан тип. Испоставља се да су у питању баш Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A. Заиста, ако је $(a_i)_{i\in I}$ низ елемената из $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$, тада је $(a_i)_{i\in I}$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A акко за све $i \in I$ важи $a_i \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{a}_{<i}}$, акко за све $i \in I$ важи $a_i \notin \mathrm{cl}^A_{\mathfrak{p}}(\bar{a}_{<i})$, акко је низ $(a_i)_{i\in I}$ $\mathrm{cl}^A_{\mathfrak{p}}$-слободан.

3. Правилни типови

У овом одељку ћемо дефинисати појам правилног типа који је централни појам нашег изучавања. Претпостављамо да радимо у фиксираном монструму $\mathfrak{C}$.

Дефиниција 2.15. Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ глобални неалгебарски тип. За тип $\mathfrak{p}$ кажемо да је *правилан над* A ако је инваријантан над A и ако важи:

$$\text{за све } B \supseteq A \text{ и све } a \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction B}(\mathfrak{C}) \ \text{ важи}: \quad \mathfrak{p}_{\restriction B} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Ba}.$$

Кажемо да је тип $\mathfrak{p}$ *правилан* ако је правилан над неким малим скупом A.

Дакле, $\mathfrak{p}$ је правилан над A ако за сваки надскуп $B \supseteq A$ важи: реализација типа $\mathfrak{p}_{\restriction A}$ или реализује $\mathfrak{p}_{\restriction B}$, или не утиче на реализацију типа $\mathfrak{p}_{\restriction B}$. Ако овај услов важи и мало шире, не само за реализације типа $\mathfrak{p}_{\restriction A}$ него и за елементе неке A-дефинабилне околине типа $\mathfrak{p}_{\restriction A}$, онда говоримо о јако правилном типу.

Дефиниција 2.16. Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ глобални неалгебарски тип и $\phi(x) \in \mathfrak{p}$. За пар $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ кажемо да је *јако правилан над* A ако $\phi(x) \in \mathfrak{p}_{\restriction A}$, $\mathfrak{p}$ је инваријантан над A и ако важи:

$$\text{за све } B \supseteq A \text{ и све } a \in \phi(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction B}(\mathfrak{C}) \ \text{ важи}: \quad \mathfrak{p}_{\restriction B} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Ba}.$$

Специјално, у случају када је $\phi(x)$ формула $x = x$, пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ је јако правилан над A ако је $\mathfrak{p}$ инваријантан над A и ако важи:

$$\text{за све } B \supseteq A \text{ и све } a \in \mathfrak{C} \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction B}(\mathfrak{C}) \ \text{ важи}: \quad \mathfrak{p}_{\restriction B} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Ba}.$$

Кажемо да је пар $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ *јако правилан* ако је јако правилан над неким малим скупом A.

Размотримо неколико примера (испуштамо детаље).

Пример 2.17.

(1) Уочимо модел $(\mathbb{Q}, <)$; његова теорија има елиминацију квантификатора, и нека је $\mathfrak{C}$ његов монструм. Нека је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ тип бесконачно великог елемента, тј. тип који садржи $a < x$, за све $a \in \mathfrak{C}$; он је инваријантан над $\emptyset$. Лако се види да је пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан над $\emptyset$.

(2) Уочимо модел $(\mathbb{Q}, <, P_1, P_2)$, где P_1 и P_2 деле $\mathbb{Q}$ на два дисјунктна густа дела; његова теорија има елиминацију квантификатора, и нека је $\mathfrak{C}$ његов монструм. Нека су $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ типови бесконачно великог елемента који садрже редом $P_1(x)$ и $P_2(x)$; оба су инваријантни над $\emptyset$. Парови $(\mathfrak{p}_1, P_1(x))$ и $(\mathfrak{p}_2, P_2(x))$ су јако правилни над $\emptyset$, али ни $(\mathfrak{p}_1, x = x)$ ни $(\mathfrak{p}_2, x = x)$ нису јако правилни над $\emptyset$: ако $c \models \mathfrak{p}_{1\restriction B}$, изаберимо a такво да $a > c$ и $\models P_2(a)$, тада $a \not\models \mathfrak{p}_{1\restriction B}$ и $c \not\models \mathfrak{p}_{1\restriction Ba}$, одакле $(\mathfrak{p}_1, x = x)$ није јако правилан.

(3) Уочимо модел $(\mathbb{Q}, <, P_i)_{i<\omega}$, где сви P_i деле $\mathbb{Q}$ на дисјунктне густе делове; његова теорија има елиминацију квантификатора, и нека је $\mathfrak{C}$ његов монструм. Нека је $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ тип бесконачно великог елемента који садржи P_i, за сваки $i < \omega$. Нека је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ тип бесконачно великог елемента који садржи $\{\neg P_i(x) \mid i < \omega\}$. Сви $\mathfrak{p}_i$ и $\mathfrak{p}$ су инваријантни над $\emptyset$. Сви парови $(\mathfrak{p}_i, P_i(x))$ су јако правилни над $\emptyset$, и $\mathfrak{p}$ јесте правилан над $\emptyset$. Међутим, $\mathfrak{p}$ није јако правилан над $\emptyset$. Приметимо да је $\mathfrak{p}$ тачка нагомилавања скупа $\{\mathfrak{p}_i \mid i < \omega\}$ у $S_1(\mathfrak{C})$, па ако је $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ јако правилан над $\emptyset$, тада $\phi(x)$ припада неком $\mathfrak{p}_i$, нпр. $\mathfrak{p}_1$. За $c \models \mathfrak{p}_{\restriction B}$ изаберимо $a \models \mathfrak{p}_1$ такво да $a > c$; тада $a \in \phi(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction B}(\mathfrak{C})$ и $c \not\models \mathfrak{p}_{\restriction Ba}$.

Напомена 2.18. Приметимо да је из дефиниције јасно да је тип $\mathfrak{p}$ правилан над A ако и само ако је правилан над свим $B \supseteq A$. Са друге стране, ако је $\mathfrak{p}$ правилан над A, он не мора бити правилан над $B \subseteq A$, чак и ако је инваријантан над B. У случају јако правилних типова ситуација је боља, како ћемо видети у следећој леми.

Лема 2.19. *Претпоставимо да је пар* $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ *јако правилан над* A.

(i) Ако је $B \supseteq A$*, тада је* $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ *јако правилан над* B.

(ii) Ако је $B \subseteq A$ *такав да је* $\mathfrak{p}$ *инваријантан над* B *и* $\phi(x) \in \mathfrak{p}_{\restriction B}$*, тада је* $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ *јако правилан над* B.

(iii) Ако је B *такав да је* $\mathfrak{p}$ *инваријантан над* B *и* $\phi(x) \in \mathfrak{p}_{\restriction B}$*, тада је* $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ *јако правилан над* B.

Доказ. (i) Ово је јасно из дефиниције.

(ii) Претпоставимо да је $B \subseteq A$, $\mathfrak{p}$ је инваријантан над B и $\phi(x) \in \mathfrak{p}_{\restriction B}$. Изаберимо произвољне $C \supseteq B$ и $a \in \phi(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction C}(\mathfrak{C})$. Треба да докажемо да $\mathfrak{p}_{\restriction C} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Ca}$. Претпоставимо да $b \models \mathfrak{p}_{\restriction C}$.

Изаберимо $b' \models \mathfrak{p}_{\restriction AC}$. Како $b' \models \mathfrak{p}_{\restriction C}$, то $\mathrm{tp}(b/C) = \mathrm{tp}(b'/C)$, па изаберимо аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_C(\mathfrak{C})$ тако да $f(b) = b'$. Нека је $a' = f(a)$. Како је $B \subseteq C$, $f \in \mathrm{Aut}_C(\mathfrak{C})$, $\phi(x) \in \mathfrak{p}_{\restriction B}$, то f фиксира скуп $\phi(\mathfrak{C})$, па $a \in \phi(\mathfrak{C})$ повлачи $a' \in \phi(\mathfrak{C})$; такође, $a \notin \mathfrak{p}_{\restriction C}(\mathfrak{C})$ повлачи $a' \notin \mathfrak{p}_{\restriction C}(\mathfrak{C})$. Како је $AC \supseteq A$ и пар $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ јако правилан над A, то из $a' \in \phi(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction AC}(\mathfrak{C})$ закључујемо $\mathfrak{p}_{\restriction AC} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction ACa'}$. Како $b' \models \mathfrak{p}_{\restriction AC}$, добијамо $b' \models \mathfrak{p}_{\restriction ACa'}$; специјално, $b' \models \mathfrak{p}_{\restriction Ca'}$. Због B-инваријантности типа $\mathfrak{p}$, $B \subseteq C$ и $f^{-1} \in \mathrm{Aut}_C(\mathfrak{C})$, коначно добијамо $b \models \mathfrak{p}_{\restriction Ca}$.

(iii) Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ инваријантан над B и $\phi(x) \in \mathfrak{p}_{\restriction B}$. Према делу (i) пар $(\mathfrak{p}, \phi(B))$ је јако правилан над AB, па је према делу (ii) јако правилан и над B. □

За доказе неких тврђења неће нам бити потребна пуна моћ услова правилности. Довољно ће нам бити да реализација типа $\mathfrak{p}_{\restriction A}$ или реализује тип $\mathfrak{p}_{\restriction AX}$ или не утиче на реализацију типа $\mathfrak{p}_{\restriction AX}$, где X није произвољан скуп, него неки скуп реализација типа $\mathfrak{p}_{\restriction A}$. Зато дефинишемо и појам слабо правилног типа, који ће нам у тим ситуацијама бити довољан.

Дефиниција 2.20. Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ глобални неалгебарски тип. За тип $\mathfrak{p}$ кажемо да је *слабо правилан над* A ако је инваријантан над A и ако важи:

$$\text{за све } X \subseteq \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \text{ и све } a \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction AX}(\mathfrak{C}) \text{ важи : } \quad \mathfrak{p}_{\restriction AX} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction AXa}.$$

Кажемо да је тип $\mathfrak{p}$ *слабо правилан* ако је слабо правилан над неким малим скупом A.

Јасно је да услов јаке правилности повлачи правилност, која повлачи слабу правилност. У леми 2.22 ћемо видети да се услови правилности типа могу описати у терминима придруженог оператора алгебарског затворења. Најпре ћемо доказати чисто техничку лему, која следи из дефиниција слабе и јаке правилности.

Лема 2.21. *Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ глобални неалгебарски тип, инваријантан над A.*

(i) Ако је $\mathfrak{p}$ слабо правилан над A, тада:
за све $X \subseteq \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$ и $Y \subseteq \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction AX}(\mathfrak{C})$ важи $\mathfrak{p}_{\restriction AX} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction AXY}$.

(ii) Ако је $\mathfrak{p}$ правилан над A, тада:
за све $B \supseteq A$ и $Y \subseteq \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction B}(\mathfrak{C})$ важи $\mathfrak{p}_{\restriction B} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction BY}$.

(iii) Ако је пар $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ јако правилан над A, тада:
за све $B \supseteq A$ и $Y \subseteq \phi(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction B}(\mathfrak{C})$ важи $\mathfrak{p}_{\restriction B} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction BY}$.

Доказ. Докази свих делова су слични, па ћемо дати доказ само за (i).

Претпоставимо да је $X \subseteq \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$ и $Y \subseteq \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction AX}(\mathfrak{C})$. Претпоставимо супротно, тј. да $\mathfrak{p}_{\restriction AX} \nvdash \mathfrak{p}_{\restriction AXY}$. Тада постоји $a \in \mathfrak{C}$ такво да $a \models \mathfrak{p}_{\restriction AX}$ и $a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction AXY}$. Дакле, a задовољава само велике формуле са параметрима AX, али задовољава неку малу формулу са параметрима AXY. Како та мала формула користи само коначно много параметара из Y, $\bar{b}$, закључујемо да она сведочи да $a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction AX\bar{b}}$. Индукцијом по $|\bar{b}|$ ћемо доказати да $\mathfrak{p}_{\restriction AX} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction AX\bar{b}}$, што је контрадикција.

Ако је $\bar{b} = b$, како $b \in Y$ имамо да $b \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction AX}(\mathfrak{C})$. Како је $\mathfrak{p}$ слабо правилан над A, закључујемо да $\mathfrak{p}_{\restriction AX} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction AXb}$.

Претпоставимо да је $\bar{b} = \bar{b}'b''$ и $\mathfrak{p}_{\restriction AX} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction AX\bar{b}'}$. Како $\bar{b} \in Y$, то $X\bar{b}' \subseteq \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$, и такође $b'' \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction AX}(\mathfrak{C})$. Одатле $b'' \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction AX\bar{b}'}(\mathfrak{C})$, па примењујући услов слабе правилности на скуп $X\bar{b}'$ и елемент b'' добијамо $\mathfrak{p}_{\restriction AX\bar{b}'} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction AX\bar{b}'b''} = \mathfrak{p}_{\restriction AX\bar{b}}$, што, заједно са $\mathfrak{p}_{\restriction AX} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction AX\bar{b}'}$, даје $\mathfrak{p}_{\restriction AX} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction AX\bar{b}}$. Ово завршава доказ. $\square$

У следећој леми ћемо видети да се услови правилности над A могу повезати са понашањем неких рестрикција оператора $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$. Прецизније, $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ ће бити оператор алгебарског затворења на неком подскупу од $\mathfrak{C}$. Да бисмо поједноставили запис, све ове операторе ћемо означавати са $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$, док је скуп на који га рестрикујемо јасан из контекста.

Лема 2.22. *Нека је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ неалгебарски тип, инваријантан над A.*

(i) Тип $\mathfrak{p}$ је слабо правилан над A ако и само ако је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ оператор алгебарског затворења на $\mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$.

(ii) Тип $\mathfrak{p}$ је правилан над A ако и само ако је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}$ оператор алгебарског затворења на $\mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$ за свако $B \supseteq A$.

(iii) Ако је пар $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ јако правилан над A, тада је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ оператор алгебарског затворења на $\phi(\mathfrak{C})$.

(iv) Пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ је јако правилан над A ако и само ако је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ оператор алгебарског затворења на $\mathfrak{C}$.

Доказ. (i) Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ слабо правилан над A. Треба да докажемо:

$$\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X)) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X),$$

за све $X \subseteq \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$. Инклузија $\supseteq$ следи из монотоности. Претпоставимо да $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X))$. По особини коначног карактера можемо изабрати коначан низ $\bar{b} \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X)$ такав да $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(\bar{b})$. Тада је $\bar{b} \in \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{|AX}(\mathfrak{C})$, па према леми 2.21 важи $\mathfrak{p}_{|AX} \vdash \mathfrak{p}_{|AX\bar{b}}$.

Како $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(\bar{b})$, то $a \in \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{|A\bar{b}}(\mathfrak{C})$. Из $a \not\models \mathfrak{p}_{|A\bar{b}}$ следи $a \not\models \mathfrak{p}_{|AX\bar{b}}$, па $a \not\models \mathfrak{p}_{|AX}$. Дакле, $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X)$ и транзитивност је доказана.

Претпоставимо сада да је оператор $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ транзитиван на $\mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$ и докажимо да је $\mathfrak{p}$ слабо правилан над A. Тип $\mathfrak{p}$ је инваријантан над A по претпоставци, па треба да проверимо услов слабе правилности. Нека је $X \subseteq \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$ и $a \in \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{|AX}(\mathfrak{C})$. Докажимо $\mathfrak{p}_{|AX} \vdash \mathfrak{p}_{|AXa}$. Имамо да $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X)$, одакле $Xa \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X)$, па по монотоности и транзитивности важи:

$$\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(Xa) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X)) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X).$$

За произвољно $b \in \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$, ако $b \not\models \mathfrak{p}_{|AXa}$, тада $b \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(Xa)$, па $b \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X)$, тј. $b \not\models \mathfrak{p}_{|AX}$, што доказује $\mathfrak{p}_{|AX} \vdash \mathfrak{p}_{|AXa}$.

(ii) Доказ је сличан доказу из дела (i), али ћемо га изложити.

Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ правилан над A, и нека је $B \supseteq A$. Треба да докажемо:

$$\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(X)) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(X),$$

за сваки $X \subseteq \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$. Како $\supseteq$ важи по монотоности, треба само да докажемо $\subseteq$. Нека $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(X))$. По коначном карактеру, $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(\bar{b})$, за неки коначан низ

$\bar{b} \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(X)$. Тада $\bar{b} \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction BX}(\mathfrak{C})$, и како је $BX \supseteq A$, према леми 2.21 важи $\mathfrak{p}_{\restriction BX} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction BX\bar{b}}$.

Како $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(\bar{b})$, добијамо да $a \notin \mathfrak{p}_{\restriction B\bar{b}}(\mathfrak{C})$ тј. $a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction B\bar{b}}$, што повлачи $a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction BX\bar{b}}$, па $a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction BX}$. Како $a \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$ и $a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction BX}$, добијамо $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(X)$.

Претпоставимо сада да је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}$ транзитиван на $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$ за свако $B \supseteq A$, и докажимо да је $\mathfrak{p}$ правилан над A. Тип $\mathfrak{p}$ је инваријантан над A по претпоставци, па треба да проверимо услов правилности. Нека су $B \supseteq A$ и $a \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction B}(\mathfrak{C})$, и докажимо $\mathfrak{p}_{\restriction B} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Ba}$. Како $a \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction B}(\mathfrak{C})$, имамо да $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(\emptyset)$, па по монотоности и транзитивности имамо:

$$\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(a) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(\emptyset)) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(\emptyset).$$

За свако $b \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(\mathfrak{C})$, ако $b \not\models \mathfrak{p}_{\restriction Ba}$, имамо да $b \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(a)$, па $b \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{B}(\emptyset)$, и одатле $b \not\models \mathfrak{p}_{\restriction B}$. Доказ је завршен.

(iii) Доказ је потпуно аналоган доказу импликације ($\Rightarrow$) из дела (i), па га изостављамо.

(iv) Импликација ($\Rightarrow$) следи директно из (iii), па доказујемо само ($\Leftarrow$). Претпоставимо да је оператор $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ транзитиван на $\mathfrak{C}$ и докажимо да је $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан пар над A. Тип $\mathfrak{p}$ је инваријантан над A по претпоставци, па треба да проверимо услов јаке правилности. Нека је $B \supseteq A$ и $a \in \mathfrak{C} \smallsetminus \mathfrak{p}_{\restriction B}(\mathfrak{C})$. Докажимо $\mathfrak{p}_{\restriction B} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Ba}$. Тада $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(B)$, одакле $Ba \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(B)$, па по монотоности и транзитивности важи:

$$\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(Ba) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(B)) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(B).$$

Ако $b \not\models \mathfrak{p}_{\restriction Ba}$, тада $b \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(Ba)$, па $b \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(B)$, тј. $b \not\models \mathfrak{p}_{\restriction B}$, што доказује да $\mathfrak{p}_{\restriction B} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Ba}$. □

Следећа два тврђења чине теорему познату као Теорема дихотомије правилних типова.

Тврђење 2.23. *Нека је тип $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ инваријантан и симетричан.*

(i) Ако је $\mathfrak{p}$ слабо правилан над A, тада је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ оператор предгеометрије на $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$.

(ii) Ако је пар $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ јако правилан над A, тада је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ оператор предгеометрије на $\phi(\mathfrak{C})$. Специјално, ако је пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан над A, тада је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ оператор предгеометрије на $\mathfrak{C}$.

Доказ. Докази оба дела су слични, па доказ дајемо само за (i).

Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ симетричан и слабо правилан над A. Према леми 2.22, $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ је оператор алгебарског затворења на $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$. Потребно је да докажемо да важи својство замене. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да су

$X \subseteq \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$ и $a, b \in \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$ такви да:

$$a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X, b) \smallsetminus \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X), \text{ али } b \notin \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X, a).$$

Тада $a \models \mathfrak{p}_{|AX}$ и $b \models \mathfrak{p}_{|AXa}$, па је (a, b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над AX. Због симетричности је и (b, a) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над AX, одакле $a \models \mathfrak{p}_{|AXb}$, па $a \notin \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}(X, b)$. Контрадикција. □

Тврђење 2.24. *Нека је тип $\mathfrak{p} \in S_1(\mathfrak{C})$ слабо правилан над A и асиметричан над A. Тада постоји A-дефинабилно парцијално уређење $\leqslant$ такво да су Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A строго растући.*

Доказ. Како је $\mathfrak{p}$ асиметричан над A, имамо да је $(\mathfrak{p}^2)_{|A}(x, y) \neq (\mathfrak{p}^2)_{|A}(y, x)$. Изаберимо Морлијев низ (a, b) у $\mathfrak{p}$ над A; према напомени 2.9, тада (b, a) није Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, и постоји формула $\phi(x, y) \in (\mathfrak{p}^2)_{|A}$ таква да $\models \phi(a, b) \wedge \neg\phi(b, a)$. До на замену формуле $\phi(x, y)$ са $\phi(x, y) \wedge \neg\phi(y, x)$, можемо претпоставити:

$$\models \forall xy\,(\phi(x, y) \Rightarrow \neg\phi(y, x)).$$

Дакле, имамо $\models \phi(a, b)$, $\models \neg\phi(b, a)$, али и $\models \neg\phi(a, a)$.

Како је (a, b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, то $\models \phi(a, b)$ и $\models \neg\phi(b, a)$ повлаче да $\phi(a, t), \neg\phi(t, a) \in \mathfrak{p}_{|Aa}$. *Тврдимо* да:

$$\mathfrak{p}_{|A}(t) \cup \{\phi(t, a)\} \vdash \phi(t, b).$$

Претпоставимо да је $c \in \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C})$ такво да $\models \phi(c, a)$. Из $\models \phi(c, a)$ и $\neg\phi(t, a) \in \mathfrak{p}_{|Aa}$, имамо $c \not\models \mathfrak{p}_{|Aa}$, тј. $c \in \mathfrak{p}_{|A}(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{|Aa}(\mathfrak{C})$, па услов правилности повлачи $\mathfrak{p}_{|Aa} \vdash \mathfrak{p}_{|Aac}$. Како $b \models \mathfrak{p}_{|Aa}$, добијамо $b \models \mathfrak{p}_{|Aac}$, па специјално $b \models \mathfrak{p}_{|Ac}$, тј. (c, b) је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Како $\phi(a, t) \in \mathfrak{p}_{|Aa}$ то и $\phi(c, t) \in \mathfrak{p}_{|Ac}$, због A-инваријантности типа $\mathfrak{p}$. Како је (c, b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, коначно имамо $\models \phi(c, b)$.

Дакле, $\mathfrak{p}_{|A}(t) \cup \{\phi(t, a)\} \vdash \phi(t, b)$, па по компактности постоји формула $\varphi(t) \in \mathfrak{p}_{|A}$ таква да $\varphi(t) \wedge \phi(t, a) \vdash \phi(t, b)$, тј.

$$\models \forall t\,(\varphi(t) \wedge \phi(t, a) \Rightarrow \phi(t, b)).$$

Дефинишимо бинарну релацију $\lesssim$ на $\mathfrak{C}$ са:

$$x \lesssim y \quad \text{акко} \quad \models \forall t(\varphi(t) \wedge \phi(t, x) \Rightarrow \phi(t, y)).$$

Јасно је да је $\lesssim$ предуређење на $\mathfrak{C}$, па је са: $x < y$ акко $x \lesssim y \wedge y \not\lesssim x$, дефинисано строго парцијално уређење на $\mathfrak{C}$. Приметимо да дефинисане релације $\lesssim$ и $<$ користе само параметре из A.

Према конструкцији важи $a \lesssim b$. Како $\models \phi(a, b)$ и $\models \neg\phi(a, a)$, имамо:

$$\not\models \varphi(a) \wedge \phi(a, b) \Rightarrow \phi(a, a),$$

одакле $b \not\lesssim a$. Дакле $a < b$, па $x < y \in \mathrm{tp}(a, b/A) = (\mathfrak{p}^2)_{\restriction A}$, одакле према леми 2.7 закључујемо да је сваки Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A строго растући. $\square$

Последица 2.25. *Нека је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ правилан над A и асиметричан, тада постоји коначно проширење A_0 скупа A и A_0-дефинабилно парцијално уређење $\leqslant$ такво да су Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A_0 строго растући.*

Доказ. Како је $\mathfrak{p}$ асиметричан, према напомени 2.9 постоји коначно проширење A_0 скупа A такво да је $\mathfrak{p}$ асиметричан над A_0. Како из правилности типа $\mathfrak{p}$ над A имамо да је $\mathfrak{p}$ правилан над A_0, па специјално и слабо правилан над A_0, тврђење следи из тврђења 2.24. $\square$

Напомена 2.26. Нека је $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан над A и нека је $\mathfrak{p}$ асиметричан. Сетимо се да је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A$ оператор алгебарског затворења на $\mathfrak{C}$.

(i) Коначно проширење A_0 од A које сведочи асиметричност $\mathfrak{p}$ може се изабрати тако да је $A_0 \smallsetminus A$ коначан Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A (или празно). Заиста, нека је $\bar{c}$ максималан Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, чији елементи припадају $A_0 \smallsetminus A$. (Ако $\bar{c}$ не постоји, тада $A_0 \smallsetminus A$ је већ садржан у $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(\emptyset)$, па $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(A_0) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(\emptyset)$ и A сведочи асиметричност.) Тврдимо да $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(A_0) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(\bar{c})$. Инклузија $\supseteq$ је јасна, јер $\bar{c} \in A_0$. За $\subseteq$ довољно је да приметимо да $A_0 \smallsetminus A \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(\bar{c})$; заиста, за $d \in A_0 \smallsetminus A$, због максималности $\bar{c}$ добијамо да $d \not\models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{c}}$, па $d \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(\bar{c})$. Дакле, $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(A_0) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(\bar{c})$.

   Сада је лако видети да $A\bar{c}$ сведочи асиметричност типа $\mathfrak{p}$.

(ii) Према (i), постоји $m \geqslant 2$ такво да:

$$(\mathfrak{p}^m)_{\restriction A}(x_1, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m) \neq (\mathfrak{p}^m)_{\restriction A}(x_1, \ldots, x_{m-2}, x_m, x_{m-1}).$$

Приметимо да су сви типови из примера 2.17 асиметрични над $\emptyset$. Такође приметимо да је базно уређење $<$ дефинабилно уређење такво да су Морлијеви низови над $\emptyset$ строго растући.

На крају овог одељка дајемо пример инваријантног типа који није правилан.

Пример 2.27. Уочимо групу $G = \mathbb{Z}_4^{\aleph_0}$ и њен монструм $\mathfrak{C}$. Теорија од G има елиминацију квантификатора. Уочимо глобалан тип $\mathfrak{p}$ који садржи:

$$\{x \neq a \mid a \in \mathfrak{C}\} \cup \{2x \neq a \mid a \in \mathfrak{C}\}.$$

Тип $\mathfrak{p}$ је инваријантан над $\emptyset$. Изаберимо $g \models \mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$ и $h \models \mathfrak{p}_{\restriction g}$; приметимо да $h \models \mathfrak{p}_{\restriction g+2h}$. Такође, $g + 2h \models \mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$. Даље приметимо да $g \not\models \mathfrak{p}_{\restriction g+2h}$, па ако је $\mathfrak{p}$ правилан над $\emptyset$, тада $\mathfrak{p}_{\restriction g+2h} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction g+2h,g}$. Али ово није могуће, јер $h \models \mathfrak{p}_{\restriction g+2h}$ и $h \not\models \mathfrak{p}_{\restriction g+2h,g}$. Дакле, $\mathfrak{p}$ није правилан над $\emptyset$.

ПОГЛАВЉЕ 3

Квазиминималност

У овом поглављу изучавамо појам квазиминималности. Структура на пребројивом језику је квазиминимална ако је непребројива и сваки дефинабилан (са параметрима) подскуп је или пребројив или копребројив. Квазиминималне структуре су се појавиле у Зилберовом изучавању комплексног експоненцијалног поља $(\mathbb{C}, +, \cdot, \exp)$. Чувена Зилберова хипотеза тврди да је ова структрура квазиминимална ([**19**]). Изучавање $(\mathbb{C}, +, \cdot, \exp)$ је мотивисано Шануеловом хипотезом из трансцендентне теорије бројева. Потпуни приказ ове теме је дат у Зилберовом раду [**20**]. Ми изучавамо елементарна својства првог реда квазиминималних структура. Ова тема је започета у раду [**3**]. Специјално, заинтересовани смо за квазиминималне групе.

Квазиминималност се може посматрати као природно уопштење појма минималности. Структура је минимална ако је бесконачна и сваки дефинабилан (са параметрима) подскуп је или коначан или коконачан. Минималне групе је класификовао Рајнеке ([**12**]). Он је доказао да је свака минимална група Абелова, па је чисто алгебарским методама успео да их све одреди.

Рајнекеова теорема има природно уопштење у квазиминималном случају: свака квазиминимална група је Абелова. Ова хипотеза је постављена у [**10**] и у скорије време су је изучавали Гогач и Крупински у [**1**]. Они су доказали да су нецентрални елементи неабелове квазиминималне групе конјуговани, као и да су им централизатори пребројиви. Итерирајући поступак HNN екстензија они су конструисали непребројиву групу са тим својствима, међутим остало је отворено да ли је она квазиминимална. Ми ћемо дати парцијалан одговор у супротном смеру.

У првом одељку ћемо дефинисати квазиминималне структуре. Видећемо да оне природно одређују генерички тип над моделом. Доказаћемо да у случају да је генерички тип дефинабилан, придружени оператор генеричком типу је оператор алгебарског затворења на моделу. Овај резултат је у општијем облику доказан у [**10**].

У другом одељку смо заинтересовани за везу појма квазиминималности и глобалне јаке правилности. Видећемо да теорија на пребројивом језику има квазиминималан модел под условом да има глобалан, пребројиво инваријантан, јако правилан (у односу на $x = x$) тип. Овај резултат су независно доказали у необјављеном раду Хајказјан и такође Тановић. Такође ћемо доказати да у случају да је генерички тип квазиминималног модела дефинабилан, тада постоји глобални, пребројиво инваријантан и јако правилан (у односу на $x = x$) тип. Овај резултат се може извести из резултата у [**10**].

У трећем поглављу ћемо представити поменуте резултате о квазиминималним групама.

1. Квазиминималне структуре

Дефиниција 3.1. Структура M на пребројивом језику је *квазиминимална* ако је непребројива и сваки M-дефинабилан подскуп од M је или пребројив или копребројив (комплемент у M му је пребројив).

Нека је M квазиминимална структура. Разликујемо две врсте формула са једном слободном промењљивом са параметрима из M: формуле које дефинишу пребројиве подскупе и формуле које дефинишу копребројиве подскупе. Природно, рећи ћемо да је формула са параметрима из M *мала* ако дефинише пребројив подскуп од M, а да је *велика* ако дефинише копребројив подскуп од M. Јасно је да је свака формула или мала или велика, као и да је негација мале (велике) формуле, велика (мала) формула.

Лема 3.2. *Нека је M квазиминимална структура и нека је p скуп свих великих формула са пареметрима из M. Тада $p \in \mathrm{S}_1(M)$.*

Доказ. Скуп p је затворен за коначне конјункције, јер је пресек коначно много копребројивих скупова такође копребројив. Дакле, p јесте тип. Такође, за сваку формулу важи: или је велика или јој је негација велика, што доказује потпуност типа p. $\square$

Дефиниција 3.3. Тип свих великих формула квазиминималне структуре M се назива *генерички тип* модела M.

Напомена 3.4. Нека је p генерички тип квазиминималне структуре M.

(i) Како је аутоморфна слика пребројивог (копребројивог) скупа пребројива (копребројива), то за сваку формулу $\phi(x, \bar{y})$ без параметара, све $\bar{m} \in M$ и све $f \in \mathrm{Aut}(M)$ важи:
$$\phi(x, \bar{m}) \in p \quad \text{ако и само ако} \quad \phi(x, f(\bar{m})) \in p.$$
(ii) За свако $X \subseteq M$, у складу са дефиницијом 2.13, $\mathrm{cl}_p(X)$ је унија свих пребројивих X-дефинабилних скупова.

(iii) Из (ii) директно следи да за сваки $X \subseteq M$ и сваки $f \in \mathrm{Aut}(M)$ важи:
$$f(\mathrm{cl}_p(X)) = \mathrm{cl}_p(f(X)).$$

(iv) Ако је $X \subseteq M$ пребројив скуп, тада је и $\mathrm{cl}_p(X)$ пребројив. Заиста, ако је X пребројив, тада постоји само пребројиво много формула са параметрима из X, па је $\mathrm{cl}_p(X)$ пребројив према (ii).

Оператор cl_p не мора бити оператор алгебарског затворења на M. Међутим, у следећој леми ћемо видети да извесна релативизација оператора cl_p јесте (нетривијалан) оператор алгебарског затворења на M, под претпоставком да је генерички тип p дефинабилан.

Лема 3.5. *Претпоставимо да је M квазиминимална структура, чији је генерички тип p дефинабилан над пребојивим скупом $A \subseteq M$. Тада је cl_p^A оператор алгебарског затворења на M.*

Доказ. Према леми 2.14, cl_p^A задовољава услове монотоности и коначног карактера, па остаје да докажемо транзитивност, тј. да за сваки $X \subseteq M$ важи $\mathrm{cl}_p^A(\mathrm{cl}_p^A(X)) \subseteq \mathrm{cl}_p^A(X)$ (обратна инклузија важи по монотоности).

Нека $c \in \mathrm{cl}_p^A(\mathrm{cl}_p^A(X))$. Тада постоје формула са параметрима из A, $\phi(x, \bar{y})$, и $\bar{b} = b_1 b_2 \dots b_n \in \mathrm{cl}_p^A(X)$ такви да $\phi(x, \bar{b}) \notin p$ и $M \models \phi(c, \bar{b})$. За свако i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $b_i \in \mathrm{cl}_p^A(X)$ повлачи да постоје формула са параметрима из A, $\psi_i(y_i, \bar{z})$, и $\bar{a} \in X$ такви да $\psi_i(y_i, \bar{a}) \notin p$ и $M \models \psi_i(b_i, \bar{a})$. Како је p дефинабилан, $\phi(x, \bar{b}) \notin p$ и $\psi_i(y_i, \bar{a}) \notin p$ повлаче $M \models \neg \mathrm{d}_p \phi(\bar{b})$ и $M \models \neg \mathrm{d}_p \psi_i(\bar{a})$, где су $\mathrm{d}_p \phi(\bar{y})$ и $\mathrm{d}_p \psi_i(\bar{z})$ дефиниције над A формула $\phi(x, \bar{y})$ и $\psi_i(y_i, \bar{z})$. Дакле, c задовољава следећу формулу са параметрима из $A \cup X$:

$$\theta(x, \bar{a}) = \exists \bar{y} \, [\phi(x, \bar{y}) \wedge \neg \mathrm{d}_p \phi(\bar{y}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(y_i, \bar{a})].$$

Довољно је да докажемо да $\theta(x, \bar{a}) \notin p$; $c \in \mathrm{cl}_p^A(X)$ одатле следи. Приметимо да је:

$$\theta(M, \bar{a}) = \bigcup \{ \phi(M, \bar{d}) \mid \bar{d} \in M,\ M \models \neg \mathrm{d}_p \phi(\bar{d}),\ M \models \psi_i(d_i, \bar{a}),\ \text{за све } 1 \leqslant i \leqslant n \}.$$

Претходни скуп је пребројив јер $M \models \neg \mathrm{d}_p \psi_i(\bar{a})$ повлачи да постоји само пребројиво много избора за $\bar{d} \in M$ таквих да $M \models \psi_i(d_i, \bar{a})$, за све $1 \leqslant i \leqslant n$. Ако још $\bar{d} \in M$ задовољава $M \models \neg \mathrm{d}_p \phi(\bar{d})$, тада $\phi(x, \bar{d}) \notin p$, тј. $\phi(M, \bar{d})$ је пребројив скуп. Према томе $\theta(M, \bar{d})$ је пребројива унија пребројивих скупова, па је пребројив, и одатле $\theta(x, \bar{a}) \notin p$. $\square$

2. Јака правилност и квазиминималност

Циљ овог одељка је да докажемо следећу теорему.

Теорема 3.6. *Претпоставимо да је T потпуна теорија на пребројивом језику са бесконачним моделима.*

(i) Ако постоји глобалан, пребројиво инваријантан и јако правилан тип преко $x = x$, онда T има квазиминималан модел.

(ii) Ако је $M \models T$ квазиминималан модел чији је генерички тип p дефинабилан, тада постоји глобално, пребројиво инваријантно и јако правилно преко $x = x$ проширење типа p.

За доказ претходне теореме ће нам требати неколико лема. Доказ првог дела теореме је дат у тврђењу 3.10, а доказ другог дела теореме је дат у тврђењу 3.12. Без експлицитног наглашавања, у овом одељку претпостављамо да је T потпуна теорија на пребројивом језику са бесконачним моделима, чији је монструм $\mathfrak{C}$.

Лема 3.7. *Нека је M пребројив модел теорије T и $\bar{a} \in \mathfrak{C}$. Тада постоји пребројив модел N теорије T такав да:*

- *$M \subseteq N$ и $\bar{a} \in N$;*
- *за сваки $b \in N \setminus M$, $\operatorname{tp}(b/M\bar{a})$ није коначно задовољив у M.*

Доказ. Уочимо следећи скуп формула са параметрима из $M\bar{a}$:

$$\Sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi(x) \text{ је } M\bar{a}\text{-формула и } \phi(M) = M\} \cup \{x \neq m \mid m \in M\}.$$

Скуп $\Sigma(x)$ је очигледно (непотпун) тип над $M\bar{a}$.

Тврдимо да су следећи услови еквивалентни за сваки $q \in \mathrm{S}_1(M\bar{a})$:

(1) q је коначно задовољив у M и није реализован у M;
(2) $\Sigma(x) \subseteq q(x)$.

(1)⇒(2): Претпоставимо да је q коначно задовољив у M, али није реализован у M. Очигледно $\{x \neq m \mid m \in M\} \in q$, јер је q потпун тип који није реализован у M. Претпоставимо да је $\phi(x) \in \Sigma(x)$ таква да $\phi(M) = M$. Како је q потпун, тачно једна од $\phi(x)$ и $\neg\phi(x)$ припада $q(x)$. Али како је $\phi(M) = M$, то $\neg\phi(x)$ није задовољива у M, па $\neg\phi(x) \notin q$ јер је q коначно задовољив у M. Дакле, $\phi(x) \in q(x)$.

(2)⇒(1): Претпоставимо да $\Sigma(x) \subseteq q(x)$. Како је $\{x \neq m \mid m \in M\} \subseteq q(x)$, то q није реализован у M. Остаје да докажемо да је q коначно задовољив у M. Претпоставимо супротно да q није коначно задовољив у M. Тада постоји формула $\phi(x) \in q(x)$ која није задовољива у M, тј. $\phi(M) = \emptyset$. Одатле $\neg\phi(M) = M$, па $\neg\phi(x) \in \Sigma(x)$ и $\neg\phi(x) \notin q(x)$. Контрадикција.

Према претходном тврђењу, ако је N пребројив модел теорије T такав да $M \subseteq N$, $\bar{a} \in N$ и N испушта $\Sigma(x)$, тада за свако $b \in N \smallsetminus M$ важи да $\mathrm{tp}(b/M\bar{a})$ није коначно задовољив у M. (Приметимо да $\mathrm{tp}(b/M\bar{a})$ не може бити реализован у M, јер у супротном $b \in M$.) Према томе, по Теореми о испуштању типова, довољно је да докажемо да ни за једну задовољиву формулу $\theta(x)$ са параметрима из $M\bar{a}$ не важи $\theta(x) \vdash \Sigma(x)$.

Претпоставимо супротно, тј. да је $\theta(x)$ задовољива формула са параметрима из $M\bar{a}$ таква да $\theta(x) \vdash \Sigma(x)$. Нека је $b \in \mathfrak{C}$ решење формуле $\theta(x)$, тј. $\models \theta(b)$. Како $\theta(x) \vdash \Sigma(x)$, b је реализација типа $\Sigma(x)$, па је према горњем тврђењу $\mathrm{tp}(b/M\bar{a})$ коначно задовољив у M. Специјално, $\theta(x) \in \mathrm{tp}(b/M\bar{a})$ има решење у M. Међутим, ово није могуће јер између осталог $\theta(x) \vdash \{x \neq m \mid m \in M\}$. Контрадикција. □

Лема 3.8. *Нека је $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан пар над A. Нека је M мали модел теорије T који садржи A и нека $a \models \mathfrak{p}_{\restriction M}$. Ако $\mathrm{tp}(b/Ma)$ није коначно задовољив у M, тада $b \models \mathfrak{p}_{\restriction M}$.*

Доказ. Како је $\mathrm{tp}(b/M)$ коначно задовољив у M, према леми 1.6 он има коначно задовољиво у M проширење $q \in \mathrm{S}_1(Ma)$; нека $b' \models q$. Тада $\mathrm{tp}(b'/M) = \mathrm{tp}(b/M)$.

Претпоставимо супротно, тј. да $b \not\models \mathfrak{p}_{\restriction M}$. Тада ни $b' \not\models \mathfrak{p}_{\restriction M}$, па како је пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан, $\mathfrak{p}_{\restriction M} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Mb}$ и $\mathfrak{p}_{\restriction M} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Mb'}$. Одатле $a \models \mathfrak{p}_{\restriction Mb}$ и $a \models \mathfrak{p}_{\restriction Mb'}$, јер $a \models \mathfrak{p}_{\restriction M}$. Према томе, $\mathrm{tp}(b/Ma) = \mathrm{tp}(b'/Ma)$, што није могуће јер је $\mathrm{tp}(b'/Ma)$ коначно задовољив у M, а $\mathrm{tp}(b/Ma)$ није. Контрадикција. □

Последица 3.9. *Нека је $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан пар над пребројивим скупом A. Нека је M пребројив модел теорије T који садржи A и нека $a \models \mathfrak{p}_{\restriction M}$. Тада постоји пребројив модел N теорије T такав да $M \subseteq N$, $a \in N$ и $\mathfrak{p}_{\restriction M}(N) = N \smallsetminus M$.*

Доказ. Према леми 3.7 постоји пребројив модел N теорије T такав да $M \subseteq N$, $a \in N$ и за свако $b \in N \smallsetminus M$ важи да $\mathrm{tp}(b/Ma)$ није коначно задовољив у M. Тада за свако $b \in N \smallsetminus M$ важи $b \models \mathfrak{p}_{\restriction M}$, према леми 3.8. Према томе, $N \smallsetminus M \subseteq \mathfrak{p}_{\restriction M}(N)$. Обратна инклузија је очигледна. □

У следећем тврђењу ћемо доказати први део теореме 3.6.

Тврђење 3.10. *Претпоставимо да је $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан пар и да је $\mathfrak{p}$ пребројиво инваријантан. Тада постоји квазиминималан модел N теорије T.*

Доказ. Нека је A пребројив скуп над којим је $\mathfrak{p}$ инваријантан. Према леми 2.19, пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ је јако правилан над A.

Дефинисаћемо низ $(M_\alpha, a_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ који задовољава следеће услове:

- M_α је пребројив модел теорије T;
- $M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$, $a_\alpha \in M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha$ и $a_\alpha \models \mathfrak{p}_{|M_\alpha}$;
- $p_{|M_\alpha}(M_{\alpha+1}) = M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha$.

Низ дефинишемо индукцијом по α. За $\alpha = 0$, изаберимо било који пребројив модел M_0 теорије T који садржи A, и нека је $a_0 \models \mathfrak{p}_{|M_0}$ произвољна реализација; приметимо да $a_0 \notin M_0$.

Ако је $\alpha < \omega_1$ гранични ординал, узмимо $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ и нека је $a_\alpha \models \mathfrak{p}_{|M_\alpha}$ произвољна реализација. Приметимо да је M_α пребројив модел теорије T и $a_\alpha \notin M_\alpha$.

Ако је (M_α, a_α) дефинисано, где је M_α пребројив модел теорије T и $a_\alpha \models \mathfrak{p}_{|M_\alpha}$, изаберимо према последици 3.9 пребројив модел $M_{\alpha+1}$ такав да $M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$, $a_\alpha \in M_{\alpha+1}$ и $\mathfrak{p}_{|M_\alpha}(M_{\alpha+1}) = M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha$. Нека је $p_{\alpha+1} \models \mathfrak{p}_{|M_{\alpha+1}}$ произвољна реализација; приметимо да $a_{\alpha+1} \notin M_{\alpha+1}$.

Јасно је да дефинисан низ $(M_\alpha, a_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ задовољава жељене услове.

Нека је $N = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$. Очигледно, N је непребројив модел теорије T. Такође, приметимо да $p_{|M_\alpha}(N) = N \setminus M_\alpha$, за све $\alpha < \omega_1$. Заиста, ако $b \in N \setminus M_\alpha$, тада $b \in M_{\beta+1}$, за неко $\beta \geqslant \alpha$. По конструкцији $b \models \mathfrak{p}_{|M_\beta}$, па како је $M_\alpha \subseteq M_\beta$, добијамо $b \models \mathfrak{p}_{|M_\alpha}$. Дакле, $\mathfrak{p}_{|M_\alpha}(N) \supseteq N \setminus M_\alpha$. Друга инклузија је очигледна.

Тврдимо да је N квазиминималан модел. Нека је $\phi(x)$ формула са параметрима из N. Тада је $\phi(x)$ формула са параметрима из M_α, за неко $\alpha < \omega_1$. Ако $\phi(x) \notin \mathfrak{p}_{|M_\alpha}$, тада ниједан елемент скупа $\mathfrak{p}_{|M_\alpha}(N) = N \setminus M_\alpha$ не задовољава $\phi(x)$. Зато $\phi(N) \subseteq M_\alpha$, па је $\phi(N)$ пребројив. Ако $\phi(x) \in \mathfrak{p}_{|M_\alpha}$, тада $\neg\phi(x) \notin \mathfrak{p}_{|M_\alpha}$, па је $\neg\phi(N)$ пребројив, одакле је $\phi(N)$ копребројив. Према томе, N је заиста квазиминималан модел теорије T. □

Последица 3.11. *Претпоставимо да је $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан пар и да је $\mathfrak{p}$ дефинабилан. Тада постоји квазиминималан модел N теорије T.*

Доказ. Према претходној леми, довољно је да докажемо да је $\mathfrak{p}$ пребројиво инваријантан. Како је $\mathfrak{p}$ дефинабилан, према напомени 1.4 он је дефинабилан над неким пребројивим скупом A. Тврдимо да је $\mathfrak{p}$ инваријантан над A. Ако је $\phi(x, \bar{y})$ формула без параметара, $\bar{a} \in \mathfrak{C}$ и $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$, тада имамо:

$$\phi(x, \bar{a}) \in \mathfrak{p} \quad \text{акко} \quad \models \mathrm{d}_{\mathfrak{p}}\phi(\bar{a}) \quad \text{акко} \quad \models \mathrm{d}_{\mathfrak{p}}\phi(f(\bar{a})) \quad \text{акко} \quad \phi(x, f(\bar{a})) \in \mathfrak{p},$$

где друга еквиваленција важи јер дефиниција $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}\phi(\bar{y})$ формуле $\phi(x, \bar{y})$ користи само параметре из A. Према томе $\mathfrak{p}$ је инваријантан над A. □

У следећем тврђењу ћемо доказати други део теореме 3.6.

Тврђење 3.12. *Претпоставимо да је M квазиминималан модел чији је генерички тип p дефинабилан. Ако је $\mathfrak{p}$ глобални наследник типа p, тада је пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан.*

Доказ. Нека је $\mathfrak{C}$ монструм теорије $T = \mathrm{Th}(M)$. Како је p дефинабилан, према напомени 1.4 он је дефинабилан над неким пребројивим скупом $A \subseteq M$. Према леми 1.5, глобални наследник $\mathfrak{p}$ типа p је дефинисан са:

$$\mathfrak{p} = \{\phi(x, \bar{a}) \mid \phi(x, \bar{y}) \text{ је } \mathcal{L}\text{-формула, } \bar{a} \in \mathfrak{C} \text{ и } \models \mathrm{d}_p\phi(\bar{a})\}.$$

Тврдимо да је пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан над A. Најпре приметимо да је $\mathfrak{p}$ инваријантан над A. Ако $\phi(x, \bar{a}) \in \mathfrak{p}$ и $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$, тада $\models \mathrm{d}_p\phi(\bar{a})$, па и $\models \mathrm{d}_p\phi(f(\bar{a}))$ јер $\mathrm{d}_p\phi(\bar{y})$ користи само параметре из A. Дакле, $\phi(x, f(\bar{a})) \in \mathfrak{p}$. Према леми 2.22, остаје да докажемо да је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A$ оператор алгебарског затворења на $\mathfrak{C}$. Оператор $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A$ је дефинисан на $\mathfrak{C}$ са:

$$\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(X) = \bigcup\{\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \mid \phi(x, \bar{y}) \text{ је } \mathcal{L}_A\text{-формула, } \bar{a} \in X \text{ и } \phi(x, \bar{a}) \notin \mathfrak{p}\}.$$

Претпоставимо супротно, тј. да $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A$ није оператор алгебарског затворења на $\mathfrak{C}$. Према леми 2.14, $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A$ не задовољава услов транзитивности, па изаберимо $X \subseteq \mathfrak{C}$ и $c \in \mathfrak{C}$ тако да $c \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(X)) \smallsetminus \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(X)$. Како $c \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(X))$, постоје формула $\phi(x, \bar{y})$ са параметрима из A и $\bar{b} = b_1 b_2 \dots b_n \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(X)$ такви да $\phi(x, \bar{b}) \notin \mathfrak{p}$ и $\models \phi(c, \bar{b})$. За свако i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $b_i \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(X)$ повлачи да постоје формула $\psi_i(y_i, \bar{z})$ са параметрима из A и $\bar{a} \in X$ такви да $\psi_i(y_i, \bar{a}) \notin \mathfrak{p}$ и $\models \psi_i(b_i, \bar{a})$. По дефиницији типа $\mathfrak{p}$, $\phi(x, \bar{b}) \notin \mathfrak{p}$ и $\psi_i(y_i, \bar{a}) \notin \mathfrak{p}$ повлаче $\models \neg\mathrm{d}_p\phi(\bar{b})$ и $\models \neg\mathrm{d}_p\psi_i(\bar{a})$.

Према томе, c задовољава следећу формулу:

$$\theta(x, \bar{a}) := \exists\bar{y}\,[\phi(x, \bar{y}) \wedge \neg\mathrm{d}_p\phi(\bar{y}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(y_i, \bar{a}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\mathrm{d}_p\psi_i(\bar{a})],$$

где је $\theta(x, \bar{z})$ формула са параметрима из A. Како $c \notin \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A(X)$ и $\bar{a} \in X$, закључујемо да $\theta(x, \bar{a}) \in \mathfrak{p}$, тј. $\models \mathrm{d}_p\theta(\bar{a})$, па према томе важи и: $\models \exists\bar{z}\,\mathrm{d}_p\theta(\bar{z})$.

Како је $M \prec \mathfrak{C}$ и $\exists\bar{z}\mathrm{d}_p\theta(\bar{z})$ је формула са параметрима из $A \subseteq M$, $M \models \exists\bar{z}\mathrm{d}_p\theta(\bar{z})$ такође важи, тј. постоји $\bar{a}' \in M$ тако да $M \models \mathrm{d}_p\theta(\bar{a}')$. Ово повлачи да $\theta(x, \bar{a}') \in p$, тј. $\theta(M, \bar{a}')$ је копребројив. Како је $\mathrm{cl}_p^A(\bar{a}')$ пребројив, можемо изабрати $c' \in \theta(M, \bar{a}') \smallsetminus \mathrm{cl}_p^A(\bar{a}')$. Сада $M \models \theta(c', \bar{a}')$ повлачи да постоји $\bar{b}' \in M$ такав да:

$$M \models \phi(c', \bar{b}') \wedge \neg\mathrm{d}_p\phi(\bar{b}') \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(b_i', \bar{a}') \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\mathrm{d}_p\psi_i(\bar{a}').$$

Последња два конјункта повлаче да $\bar{b}' \in \mathrm{cl}_p^A(\bar{a}')$, па прва два повлаче да $c' \in \mathrm{cl}_p^A(\mathrm{cl}_p^A(\bar{a}'))$. Према томе $c' \in \mathrm{cl}_p^A(\mathrm{cl}_p^A(\bar{a}')) \smallsetminus \mathrm{cl}_p^A(\bar{a}')$. Ово је контрадикција, јер по леми 3.5, cl_p^A је оператор алгебарског затворења на M. $\square$

3. О квазиминималним групама

Под појмом *групе* (у модел теоретском смислу) подразумевамо било коју експанзију групе (у алгебарском смислу). Дакле, група G је било који модел језика $\mathcal{L} = \{\cdot, ^{-1}, e\} \cup \mathcal{L}'$ такав да је $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ група, а $\mathcal{L}'$ може бити непразан. Ако је $\mathcal{L}'$ празан, кажемо да је G *чиста група*.

У складу са општом дефиницијом, група G (на пребројивом језику) је квазиминимална ако је непребројива и сваки дефинабилан (са параметрима) подскуп од G је или пребројив или копребројив. Нас занима да ли квазиминимална група мора да буде Абелова. Довољно је посматрати чисте квазиминималне групе: ако је група квазиминимална, тада је очигледно и одговарајућа чиста група (редукт на $\{\cdot, ^{-1}, e\}$) квазиминимална, а такође група је Абелова ако и само ако је одговарајућа чиста група Абелова.

Како ћемо видети, генерички тип p квазиминималне групе G је дефинабилан над $\emptyset$, па је cl_p оператор алгебарског затворења на G. Такође, према тврђењу 3.12, ако је $\mathfrak{p}$ глобални наследник од p, тада је пар $(\mathfrak{p}, x = x)$ јако правилан над $\emptyset$, тј. $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ је оператор алгебарског затворења на $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{C}$ је монструм од G). Ако је $\mathfrak{p}$ симетричан тип, тада је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ оператор предгеометрије на $\mathfrak{C}$, па је и cl_p оператор предгеометрије на G, јер је cl_p рестрикција $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ на G. Ако је $\mathfrak{p}$ асиметричан тип, према напомени 2.26 он је асиметричан над неким коначним Морлијевим низом $\bar{a}$ у $\mathfrak{p}$ над $\emptyset$, па како је тип Морлијевог низа јединствен, $\mathfrak{p}$ је асиметричан над било којим Морлијевим низом у $\mathfrak{p}$ над $\emptyset$ исте дужине као $\bar{a}$; дакле, можемо претпоставити да је $\bar{a} \in G$. Тада постоји $\bar{a}$-дефинабилно парцијално уређење у односу на које су Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над $\bar{a}$ строго растући. Приметимо да то парцијално уређење има непребројиве ланце у G. Заиста, сваки непребројив Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над $\bar{a}$ чији су елементи из G је непребројив ланац у G.

Ми изучавамо питање да ли постоји неабелова квазиминимална група са дефинабилним парцијалним уређењем са непребројивим ланцима, што је према претходном пасусу еквивалентно питању да ли постоји неабелова квазиминимална група чији је глобални наследник генеричког типа асиметричан. Даћемо парцијални одговор на ово питање, тј. циљ нам је да докажемо следећу теорему.

Теорема 3.13. *Свака квазиминимална, чиста група са $\emptyset$-дефинабилним парцијалним уређењем са непребројивим ланцима је Абелова.*

Приметимо да, зависно од тога да ли је глобални наследник генеричког типа симетричан или асиметричан, можемо поделити квазиминималне групе на симетричне и асиметричне. Слично, имамо симетрична и асиметрична квазиминимална поља. Асиметрична квазиминимална поља постоје; пример се може наћи у [**10**]. Исти пример показује да асиметричне квазиминималне Абелове групе постоје.

Најпре ћемо доказати, како смо већ најавили, да је генерички тип квазиминималне групе дефинабилан над $\emptyset$.

Лема 3.14. *Претпоставимо да је G квазиминимална група чији је генерички тип p. Тип p је дефинабилан над $\emptyset$.*

Доказ. Најпре ћемо доказати да за сваки копребројив скуп $S \subseteq G$ постоји $a \in G$ такав да $S \cup aS = G$. Како је S копребројив, тада је и S^{-1} копребројив, као и gS^{-1}, за свако $g \in G$. Тада је фамилија $\{gS^{-1} \mid g \notin S\}$ пребројива фамилија копребројивих скупова, па има непразан (чак копребројив) пресек. Изаберимо a у пресеку. Тада за свако $g \notin S$ имамо да $a \in gS^{-1}$, одакле $g \in aS$. Дакле, $G = S \cup aS$.

Такође, ако је $G = S \cup aS$ за неке $S \subseteq G$ и $a \in G$, тада је S непребројив (јер је G непребројив), па ако је додатно S дефинабилан подскуп, по квазиминималности, S је копребројив.

Претпоставимо да је $\phi(x, \bar{y})$ формула без параметара. За свако $\bar{g} \in G$ тада важи: $\phi(x, \bar{g}) \in p$ акко $\phi(G, \bar{g})$ је копребројив акко $G = \phi(G, \bar{g}) \cup a\phi(G, \bar{g})$ за неко $a \in G$. Према томе, $\phi(x, \bar{g}) \in G$ акко $G \models \mathrm{d}_p\phi(\bar{g})$, где је $\mathrm{d}_p\phi(\bar{y})$ формула:

$$\mathrm{d}_p\phi(\bar{y}) = \exists\, z \forall x\, [\phi(x, \bar{y}) \vee \exists x' (\phi(x', y) \wedge x = zx')].$$

Приметимо да $\mathrm{d}_p\phi(\bar{y})$ нема параметре, па је она дефиниција формуле $\phi(x, \bar{y})$ над $\emptyset$. □

Захваљујући леми 3.5 имамо директну последицу.

Последица 3.15. *Претоставимо да је G квазиминимална група чији је генерички тип p. Тада је $\mathrm{cl}_p = \mathrm{cl}_p^{\emptyset}$ оператор алгебарског затворења на G.*

До краја одељка ћемо радити под следећом претпоставком.

Претпоставка 3.16. Претпоставимо да је G неабелова квазиминимална група.

Лема 3.17.

(i) Свака права дефинабилна подгрупа од G је пребројива.
(ii) Центар $Z(G)$ је пребројив.
(iii) За свако $a \notin Z(G)$, централизатор $C_G(a)$ је пребројив, а класа конјугације a^G је копребројива.
(iv) За свако $a \notin Z(G)$ важи $G = Z(G) \cup a^G$.

Доказ. (i) Претпоставимо да је H дефинабилна права подгрупа од G. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да H није пребројива. По квазиминималности, H је копребројива. Изаберимо $a \notin H$. Тада су H и aH дисјунктни копребројиви подскупови од G, што је контрадикција.

(ii) Како је G неабелова, $Z(G)$ је права дефинабилна подгупа од G. Према (i), $Z(G)$ је пребројив.

(iii) Слично као у (ii), $C_G(a)$ је права дефинабилна подгрупа од G, јер $a \notin Z(G)$. Дакле, $C_G(a)$ је пребројив према (i). Како је $|a^G| = |G : C_G(a)|$ према теореми о орбити и стабилизатору, добијамо да је класа конјугације a^G непребројива, па је по квазиминималности копребројива.

(iv) Изаберимо $a, b \notin Z(G)$. Према (iii), a^G и b^G су копребројиви, па имају непразан пресек. Одатле $a^G = b^G$, и добијамо да је $G = Z(G) \cup a^G$. □

Последица 3.18. *За све $a, b \notin Z(G)$, скуп $\{x \in G \mid a^x = b\}$ је пребројив.*

Доказ. Према леми 3.17(iv) постоји $g \in G$ такво да је $b = a^g$. Тада је $b = a^x$ акко $a^g = a^x$ акко $a^{xg^{-1}} = a$ акко $xg^{-1} \in C_G(a)$ акко $x \in C_G(a)g$. Према томе, постоји бијекција између $\{x \in G \mid a^x = b\}$ и $C_G(a)$, који је пребројив према леми 3.17(iii). □

Ако додатно претпоставимо да је G чиста група, имамо следећу последицу.

Последица 3.19. *$\mathrm{cl}_p(\emptyset) = Z(G)$.*

Доказ. Очигледно је $Z(G) \subseteq \mathrm{cl}_p(\emptyset)$, јер је по леми 3.17(ii), $Z(G)$ пребројив и $\emptyset$-дефинабилан. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да је $Z(G) \subsetneq \mathrm{cl}_p(\emptyset)$ и изаберимо $a \in \mathrm{cl}_p(\emptyset) \setminus Z(G)$. Тада постоји $\emptyset$-дефинабилан пребројив подскуп $D \subseteq G$ који садржи a. Али тада за свако $g \in G$, $a^g \in D^g$, и $D^g = D$ јер је D $\emptyset$-дефинабилан, а конјугација је аутоморфизам чисте групе. Према томе, $a^G \subseteq D$, што није могуће, јер је према леми 3.17(iii), a^G копребројив. Контрадикција. □

До краја одељка ћемо радити под јачом претпоставком.

Претпоставка 3.20. Претпоставимо да је G неабелова, квазиминимална, чиста група са $\emptyset$-дефинабилним парцијалним уређењем $\leqslant$ са непребројивим ланцима.

Лема 3.21. *Тачно један од следећих услова важи:*

(1) $a < x$ дефинише копребројив подскуп од G, за свако $a \notin \mathrm{cl}_p(\emptyset)$;

(2) $x < a$ дефинише копребројив подскуп од G, за свако $a \notin \mathrm{cl}_p(\emptyset)$.

Доказ. Како је $\mathrm{cl}_p(\emptyset)$ пребројив и постоји непребројив ланац $\mathcal{C}$, можемо изабрати елемент $a_0 \in \mathcal{C} \smallsetminus \mathrm{cl}_p(\emptyset)$. Тада бар једна од формула $a_0 < x$ и $x < a_0$ дефинише непребројив подскуп, па по квазиминималности тачно једна од $a_0 < x$ и $x < a_0$ дефинише копребројив подскуп од G.

Претпоставимо да $a_0 < x$ дефинише копребројив подскуп од G и изаберимо произвољно $a \notin \mathrm{cl}_p(\emptyset)$. Према последици 3.19, $\mathrm{cl}_p(\emptyset) = Z(G)$, па према леми 3.17(iv) можемо изабрати елемент $g \in G$ такав да $a_0^g = a$. Како је $\leqslant$, 0-дефинабилно и конјугација је аутоморфизам чисте групе, добијамо да $a < x$ такође дефинише копребројив подскуп од G.

На сличан начин можемо доказати да $x < a$ дефинише копребројив подскуп од G, за свако $a \notin \mathrm{cl}_p(\emptyset)$, под претпоставком да $x < a_0$ дефинише копребројив подскуп од G. $\square$

Лема 3.22. *За све $a, b \notin \mathrm{cl}_p(\emptyset)$ важи:* $\mathrm{cl}_p(a) \subseteq \mathrm{cl}_p(b)$ *или* $\mathrm{cl}_p(b) \subseteq \mathrm{cl}_p(a)$.

Доказ. Према леми 3.21, без умањења општости, претпоставимо да $c < x$ дефинише копребројив подскуп од G, за све $c \notin \mathrm{cl}_p(\emptyset)$. Тада $x < c$ и $c \not< x$ дефинишу пребројиве подскупове од G.

Ако је $a < b$, како $x < b$ дефинише пребројив подскуп од G, добијамо да $a \in \mathrm{cl}_p(b)$, и $\mathrm{cl}_p(a) \subseteq \mathrm{cl}_p(b)$ следи по транзитивности. Ако је $a \not< b$, како $a \not< x$ дефинише пребројив подскуп од G, добијамо да $b \in \mathrm{cl}_p(a)$, и $\mathrm{cl}_p(b) \subseteq \mathrm{cl}_p(a)$ следи по транзитивности. $\square$

Доказ теореме 3.13. Претоставимо супротно, тј. претпоставимо да постоји неабелова, квазиминимална, чиста група G са $\emptyset$-дефинабилним парцијалним уређењем са непребројивим ланцима. Нека је (a, b) cl_p-слободан низ над $\emptyset$. Како $b \notin \mathrm{cl}_p(a)$, према леми 3.22 важи $\mathrm{cl}_p(a) \subsetneq \mathrm{cl}_p(b)$, па је $\mathrm{cl}_p(a, b) = \mathrm{cl}_p(b)$. Према леми 3.17(iv) изаберимо $g \in G$ такво да $b = a^g$. Како $g \in \{x \in G \mid a^x = b\}$, и како је овај скуп пребројив према последици 3.18, добијамо да $g \in \mathrm{cl}_p(a, b) = \mathrm{cl}_p(b)$, одакле $\mathrm{cl}_p(g) \subseteq \mathrm{cl}_p(b)$. Са друге стране, очигледно $b \in \mathrm{cl}_p(a, g)$, па како $b \notin \mathrm{cl}_p(a)$, добијамо да $g \notin \mathrm{cl}_p(a)$. Дакле, према леми 3.22, $\mathrm{cl}_p(a) \subseteq \mathrm{cl}_p(g)$, и коначно $b \in \mathrm{cl}_p(a, g) = \mathrm{cl}_p(g)$. Према томе, $\mathrm{cl}_p(b) = \mathrm{cl}_p(g)$.

Како је $\mathrm{cl}_p(a) \subsetneq \mathrm{cl}_p(b) = \mathrm{cl}_p(g)$ и како је конјугација аутоморфизам чисте групе, према напомени 3.4(iii) имамо да је $\mathrm{cl}_p(a^g) \subsetneq \mathrm{cl}_p(g^g)$, тј. $\mathrm{cl}_p(b) \subsetneq \mathrm{cl}_p(g)$. Контрадикција. $\square$

ПОГЛАВЉЕ 4

Асиметрични правилни типови

У овом поглављу ћемо изучавати асиметричне правилне типове $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$.

У првом одељку ћемо доказати да је оператор алгебарског затворења $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^{A}$ на $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$, који је придружен слабо правилном над A и асиметричном над A типу $\mathfrak{p}$, потпуно дегенерисан. Искористићемо резултате из одељка 1.2 како бисмо описали понашање Морлијевих низова у $\mathfrak{p}$ над A. Специјално, доказаћемо да за сваки мали модел $M \supseteq A$ тип уређења максималног Морлијевог низа у $\mathfrak{p}$ над A чији су сви елементи из M не зависи од избора низа. У питању је инваријанта модела M коју ћемо означавати са $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$. На крају првог одељка ћемо увести и појам конвексног типа.

У другом одељку ћемо се посветити опису $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$-околина, које су придружене потпуно дегенерисаном оператору алгебарског затворења $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$. Видећемо да су оне релативно дефинабилне у типу бесконачном дисјункцијом, и циљ ће нам бити да докажемо да се та дисјункција може изабрати у одређеном облику. Овај опис $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$-околине ће нам бити погодан касније за примену Теореме о испуштању типова како бисмо описали могуће релизације инваријанте $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$.

У трећем одељку ћемо се бавити питањем шта може да буде инваријанта $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ пребројивог модела M. Увешћемо појам простог типа, и доказаћемо да $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ може бити произвољно пребројиво линеарно уређење ако тип $\mathfrak{p}$ није конвексан или ако тип $\mathfrak{p}$ није прост. У случају да је тип $\mathfrak{p}$ прост и конвексан, доказаћемо да ако $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ садржи бар два елемента, онда је то пребројиво густо линеарно уређење (можда са једном или обе крајње тачке). Видећемо да можемо дати и прецизнији опис, и да за $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ имамо тачно 1, 3 или 6 могућности, и сваку од њих ћемо детаљно описати.

У четвртом одељку ћемо се бавити питањем (не)ортогоналности правилних типова. Доказаћемо да је сваки правилан асиметричан тип ортогоналан на сваки инваријантан симетричан тип, одакле следи да релација неортогоналности чува особине симетричности и асиметричности правилних типова. Главни резултат одељка је ипак да је неортогоналност релација еквиваленције на скупу асиметричних правилних типова.

Коначно, у петом одељку ћемо видети како слаба неортогоналност утиче на очување инваријанте $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$. Имамо два случаја: ограничен и неограничен.

Подела је форсирана постојањем формуле која као параметар користи реализацију једног типа, а у локусу другог типа је ограничена. Ако таква формула постоји, говоримо о ограниченом случају, где ћемо доказати да су инваријанте два типа који су правилни, конвексни и асиметрични над A, изоморфне или антиизоморфне. И више од тога, изоморфизам или антиизоморфизам је канонски, у смислу да је независан од избора формуле, као и да је природно индукован. У неограниченом случају ћемо доказати да су Дедекиндова комплетирања инваријаната два типа који су јако правилни и асиметрични над A, изоморфни или антиизоморфни. Поново је изоморфизам или антиизоморфизам природно индукован.

1. **Инваријанте** $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}$

Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ слабо правилан над A и асиметричан над A. У леми 2.22 смо видели да је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A$ оператор алгебарског затворења на $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$. У овом одељку ћемо доказати да услов асиметричности над A повлачи да је оператор $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A$ и потпуно дегенерисан, и навешћемо директне последице ове чињенице које ћемо надаље користити без експлицитног наглашавања.

Почећемо са дефиницијом која је мотивисана тврђењем 2.24.

Дефиниција 4.1. Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ слабо правилан над A и асиметричан над A. За парцијално уређење $\leqslant$ кажемо да *сведочи асиметричност над A типа* $\mathfrak{p}$ ако је A-дефинабилно и ако је сваки Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A строго растући у односу на $\leqslant$. Према тврђењу 2.24 такво уређење постоји, међутим оно не мора бити јединствено.

Претпоставка 4.2. До краја овог одељка ћемо фиксирати тип $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ који је слабо правилан над A и асиметричан над A. Фиксираћемо и парцијално уређење $\leqslant$ које сведочи асиметричност над A типа $\mathfrak{p}$. Скуп A нећемо мењати, па у циљу поједностављења записа писаћемо $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ уместо $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}^A$. Такође означимо $p = \mathfrak{p}_{\restriction A}$. Дакле, $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ је оператор алгебарског затворења на $p(\mathfrak{C})$.

Лема 4.3. *Оператор* $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ *је потпуно дегенерисани оператор алгебарског затворења на* $p(\mathfrak{C})$.

Доказ. Треба да докажемо да за сваки коначан подскуп $B \subseteq p(\mathfrak{C})$ постоји елемент $b \in B$ такав да је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(B) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(b)$. Нека је $B \subseteq p(\mathfrak{C})$ коначан, и нека је b максималан елемент скупа B у односу на $\leqslant$. Тада $B \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(b)$, јер у супротном, ако за неки $b' \in B$ имамо $b' \notin \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(b)$, добијамо да је (b, b') Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, па је он строго растући, тј. $b < b'$, што противречи максималности елемента b. Према томе $B \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(b)$, одакле $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(B) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(b)$. □

Пре него што видимо неке директне последице претходне леме, подсетићемо се и прилагодићемо нотацију коју смо увели у одељку 1.2.

1. $\mathcal{E}$-околине које одговарају оператору $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ ћемо означавати са $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$. Сетимо се $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) = \{b \in p(\mathfrak{C}) \mid \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(a) = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(b)\} = \{b \in p(\mathfrak{C}) \mid b \not\models \mathfrak{p}_{\restriction Aa} \text{ и } a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction Ab}\}$. Другим речима $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ је скуп свих $b \in p(\mathfrak{C})$ таквих да се $\{a, b\}$ не може поређати у Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A.
2. $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p}) = \{\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \mid a \in p(\mathfrak{C})\}$. $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$ одговара скупу S_{cl} дефинисаном у одељку 1.2, где је $S = p(\mathfrak{C})$ и $\mathrm{cl} = \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$.
3. $\pi_{\mathfrak{p}} : p(\mathfrak{C}) \longrightarrow \mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$ је пројекција дефинисана са: $\pi_{\mathfrak{p}}(a) = \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. $\pi_{\mathfrak{p}}$ одговара пројекцији π из одељка 1.2.
4. Уређење $\leqslant_{\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}}$ на $p(\mathfrak{C})$ је дефинисано са: $a \leqslant_{\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}} b$ акко $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(a) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(b)$. $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$ природно наслеђује уређење $\leqslant_{\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}}$: $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \leqslant_{\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b)$ ако и само ако за све $a' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ и $b' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b)$ важи $a' \leqslant_{\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}} b'$. Како смо видели у тврђењу 1.22, $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \leqslant_{\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b)$ ако и само ако $a \leqslant_{\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}} b$.

Сетимо се да се појам Морлијевог низ у $\mathfrak{p}$ над A поклапа са појмом $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$-слободног низа. Имајући то у виду, како је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ потпуно дегенерисан оператор алгебарског затворења на $p(\mathfrak{C})$, имамо следеће директне последице тврђења 1.25 из одељка 1.2.

Последица 4.4.

(i) Скуп $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ је $\leqslant$-конвексан и затворен у односу на $\leqslant$-неупоредивост (у $p(\mathfrak{C})$).

(ii) Уређења $<$ и $<_{\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}}$ индукују исто уређење на $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$.

Доказ. Како $\leqslant$ сведочи A-асиметричност, сви Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A су строго растући, па је ово последица тврђења 1.25 (iv) и (v). □

Имајући у виду други део претходне последице, тврђења 1.25 (i) и (ii) могу бити формулисана на следећи начин.

Последица 4.5. *Нека $a, a_1, \ldots, a_n \in p(\mathfrak{C})$.*

(i) Следећи услови су еквивалентни:

(1) (a_1, a_2) је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A;

(2) $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1) < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_2)$;

(3) $a_1 < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_2)$;

(4) $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1) < a_2$.

(ii) Следећи услови су еквивалентни:

(1) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A;

(2) $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1) < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_2) < \ldots < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_n)$;

(3) $\pi_{\mathfrak{p}}(a_1) < \pi_{\mathfrak{p}}(a_2) < \ldots < \pi_{\mathfrak{p}}(a_n)$;

(4) $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(a_1) \subsetneq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(a_2) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}(a_n)$.

Последица 4.6. *За свако $X \subseteq \mathfrak{C}$, тип уређења максималног Морлијевог низа у $\mathfrak{p}$ над A чији су сви елементи из X не зависи од избора низа.*

Доказ. Посматрајмо рестрикцију оператора $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$ на $p(\mathfrak{C}) \cap X$ (означавамо је такође са $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$). У питању је потпуно дегенерисани оператор алгебарског затворења на $p(\mathfrak{C}) \cap X$, па према тврђењу 1.25 (iii) тип уређења максималног $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$-слободног низа не зависи од избора низа. Довољно је још да приметимо да је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}}$-слободан низ у $p(\mathfrak{C}) \cap X$ исто што и Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A чији су сви елементи из X. $\square$

Дефиниција 4.7. Тип уређења било ког максималног Морлијевог низа у $\mathfrak{p}$ над A чији су сви елементи из X се назива $\mathfrak{p}$-*инваријанта скупа X над A*, и означавамо је са $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(X)$. Ако такав низ не постоји, узећемо $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(X) = \emptyset$.

На крају овог одељка ћемо дефинисати појам конвексног типа.

Дефиниција 4.8. Претпоставимо да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ слабо правилан над A и асиметричан над A. Рећи ћемо да је $\mathfrak{p}$ *конвексан над A* ако постоји парцијално уређење $\leqslant$ које сведочи асиметричност над A у односу на које је $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$ конвексан подскуп од $\mathfrak{C}$.

Конвексан тип не мора задовољавати услов конвексности из претходне дефиниције у односу на произвољно уређење које сведочи асиметричност. Такође, произвољан слабо правилан тип, чак ни правилан тип, не мора бити конвексан. Међутим, у леми 4.10 ћемо доказати да јако правилни типови јесу конвексни.

Пример 4.9. Уочимо модел $(\mathfrak{C}, <, P_i)_{i<\omega}$ из примера 2.17). Нека је $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ тип бесконачно великог елемента који садржи P_i, за све $i < \omega$. Нека је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ тип бесконачно великог елемента који садржи $\{\neg P_i(x) \mid i < \omega\}$. Сетимо се да су сви они правилни над $\emptyset$, и приметимо да $<$ сведочи асиметричност над $\emptyset$ за све $\mathfrak{p}_i$ и $\mathfrak{p}$. Приметимо да $<$ не сведочи конвексност ниједног од њих. Међутим, сваки $\mathfrak{p}_i$ је конвексан над $\emptyset$, и рестрикујући $<$ на $P_i(\mathfrak{C})$ добијамо уређење које сведочи и асиметричност и конвексност над $\emptyset$. Тип $\mathfrak{p}$ није конвексан над $\emptyset$. Да бисмо то доказали, приметимо:

$$\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}(x) \cup \mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}(y) \cup \{x < y\} \vdash x \prec y,$$

за свако уређење $\prec$ које сведочи асиметричност над $\emptyset$. Заиста, ако $a, b \models \mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$ и $a < b$, по елиминацији квантификатора можемо да закључимо да је (a, b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над $\emptyset$, одакле $a \prec b$. Сада по компактности можемо да изаберемо формулу $\phi(x) \in \mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}(x)$ такву да:

$$\phi(x) \wedge \phi(y) \wedge x < y \vdash x \prec y.$$

Како је $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$ тачка нагомилавања скупа $\{\mathfrak{p}_{i\restriction\emptyset} \mid i < \omega\}$, $\phi(x)$ припада неком $\mathfrak{p}_i$, нпр. $\mathfrak{p}_1$. Изаберимо сада $a \models \mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$, $b \models \mathfrak{p}_{1\restriction a}$ и $c \models \mathfrak{p}_{\restriction b}$. Тада $\models \phi(a) \wedge \phi(b) \wedge \phi(c) \wedge a < b \wedge a < c$ ($\models a < b \wedge b < c$ важи јер су и $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}_1$ типови бесконачно великог елемента), па $\models a \prec b \wedge b \prec c$, одакле $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}(\mathfrak{C})$ није конвексан у односу на $\prec$.

Лема 4.10. *Претпоставимо да је пар* $(\mathfrak{p}, \phi(x))$ *јако правилан над* A *и асиметричан над* A*. Тада је* $\mathfrak{p}$ *конвексан над* A*.*

Доказ. Нека $<$ сведочи асиметричност над A. Заменимо $<$ његовом рестрикцијом на $\phi(\mathfrak{C})$. Приметимо да модификовано $<$ сведочи асиметричност над A типа $\mathfrak{p}$, јер је $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C}) \subseteq \phi(\mathfrak{C})$. Тврдимо да је после ове модификације $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$ постао конвексан подскуп од A. Претпоставимо да $a, c \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$ и $a < b < c$; јасно је да $b \in \phi(\mathfrak{C})$. Нека $d \models \mathfrak{p}_{\restriction Abc}$. Тада $a < b < c < d$, па $b < x \in \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$. Ако $b \notin \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$, по услову правилности добијамо $\mathfrak{p}_{\restriction A} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$. Како $a \models \mathfrak{p}_{\restriction A}$, то $a \models \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$, па специјално $b < a$. Контрадикција. Према томе $b \in \mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})$. □

2. $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$-околине слабо правилних типова

Претпоставка 4.11. У овом одељку ћемо фиксирати глобалан, слабо правилан над A и асиметричан над A тип $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$; означимо $p = \mathfrak{p}_{\restriction A}$. Претпоставимо да је $\leqslant$ A-дефинабилно парцијално уређење које сведочи A-асиметричност.

Циљ овог одељка је да ближе опишемо околину $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ када $a \models p$. Ако $a, b \models p$, сетимо се да $b \notin \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ ако и само ако се елементи a и b могу поређати у Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Такође се сетимо да тип $(\mathfrak{p}^2)_{\restriction A}$ дефинише тип Морлијевог низа у $\mathfrak{p}$ над A. Дакле скуп:

$$\{b \mid b \models p,\, b \notin \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)\}$$

је дефинисан бесконачном конјункцијом формула са параметрима из Aa. Одатле видимо да је скуп $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$, као комплемент наведеног скупа у $p(\mathfrak{C})$, релативно дефинисан бесконачном дисјункцијом формула са параметрима Aa. Један од циљева овог одељка је да докажемо да се та дисјункција може изабрати у одређеном облику.

Дефиниција 4.12.

(i) Скуп $D \subseteq \mathfrak{C}$ је $\mathfrak{p}$-*ограничен над* A ако $D \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$ и ако постоје реализације $a, b \models p$ и уређење $\prec$ које сведочи A-асиметричност типа $\mathfrak{p}$ такви да важи:

$$a \prec D \cap p(\mathfrak{C}) \prec b.$$

(ii) Формула $\phi(x)$ је $\mathfrak{p}$-*ограничена над* A ако је скуп $\phi(\mathfrak{C})$ $\mathfrak{p}$-ограничен над A.

(iii) Формула $\phi(x)$ је *јако* $\mathfrak{p}$-*ограничена над* A *у односу на* $\prec$ ако је сагласна са p и постоје реализације $a, b \models p$ такве да $a \prec \phi(\mathfrak{C}) \prec b$.

Напомена 4.13. (i) Приметимо да је скуп D (који сече $p(\mathfrak{C})$) $\mathfrak{p}$-ограничен ако и само ако је $\pi_{\mathfrak{p}}[D \cap p(\mathfrak{C})]$ ограничен са обе стране у $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$: ако је $a \prec D \cap p(\mathfrak{C}) \prec b$ и ако изаберемо $a', b' \models p$ такве да $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a') \prec_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ и $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b) \prec_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b')$, тада су $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$ и $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b')$ границе за $\pi_{\mathfrak{p}}[D \cap p(\mathfrak{C})]$ у $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$. Како уређење на $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$ не зависи од избора уређења $\prec$ које сведочи A-асиметричност типа $\mathfrak{p}$, то ни $\mathfrak{p}$-ограниченост скупа D не зависи од избора уређења $\prec$.

(ii) Јака ограниченост може зависити од избора уређења $\prec$. Обично ће уређење $\prec$ бити јасно из контекста, па га нећемо посебно наглашавати. У овом одељку ћемо разматрати јаку ограниченост у односу на фиксирано уређење $<$, и само ћемо говорити да је формула јако $\mathfrak{p}$-ораничена.

Лема 4.14. *Претпоставимо да је $\theta(x, \bar{y})$ формула са параметрима из A таква да је $\theta(x, \bar{b})$ $\mathfrak{p}$-ограничена над A. Нека су $c, c' \models p$ такви да $c < \theta(\mathfrak{C}, \bar{b}) \cap p(\mathfrak{C}) < c'$. Тада постоји формула $\phi(x) \in p$ таква да $c < \phi(\mathfrak{C}) \cap \theta(\mathfrak{C}, \bar{b}) < c'$, тј. таква да је формула $\phi(x) \wedge \theta(x, \bar{b})$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена.*

Ако је тип $\mathfrak{p}$ додатно $<$-конвексан над A и $a \models p$ задовољава $\theta(x, \bar{b})$, тада формула $\phi(x) \wedge \theta(x, \bar{b})$ сведочи $a \in \mathrm{Sem}_A(\bar{b})$.

Доказ. Како је $\theta(x, \bar{b})$ $\mathfrak{p}$-ограничена то:

$$p(x), \theta(x, \bar{b}) \vdash c < x < c'.$$

По компактности можемо изабрати $\phi(x) \in p$ тако да:

$$\phi(x), \theta(x, \bar{b}) \vdash c < x < c',$$

одакле:

$$\models \forall x \, (\phi(x) \wedge \theta(x, \bar{b}) \Rightarrow c < x < c')$$

и добијамо да је $\phi(x) \wedge \theta(x, \bar{b})$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена.

Ако претпоставимо да је тип $\mathfrak{p}$ и $<$-конвексан над A, тада из претходног закључујемо:

$$\phi(\mathfrak{C}) \cap \theta(\mathfrak{C}, \bar{b}) \ \subseteq \ \{t \mid c < t < c'\} \ \subseteq \ p(\mathfrak{C}),$$

одакле $\phi(x) \wedge \theta(x, \bar{b}) \vdash p(x)$, па $\phi(x) \wedge \theta(x, \bar{b})$ сведочи $a \in \mathrm{Sem}_A(\bar{b})$. □

Лема 4.15. *Претпоставимо да је $\sigma(x, y)$ формула са параметрима из A, $a \models p$ и да је $\sigma(a, x)$ сагласна са p. Следећи услови су еквивалентни:*

(1) формула $\sigma(a, x)$ је јако $\mathfrak{p}$-ограничена над A;

(2) важи $c_1 < \sigma(a, \mathfrak{C}) < c_2$ за све Морлијеве низове (c_1, a, c_2) у $\mathfrak{p}$ над A.

Доказ. (2)⇒(1) следи по дефиницији јаке $\mathfrak{p}$-ограничености.

(1)⇒(2): Претпоставимо да је $\sigma(a, x)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена над A. Изаберимо $c, c' \models p$ такве да $c < \sigma(a, \mathfrak{C}) < c'$. Изаберимо $c_1, c_2 \models p$ тако да $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(c_1) < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(c) \cup \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ и $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(c_2) > \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(c') \cup \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Тада је (c_1, a, c_2) Морлијев низ у

$\mathfrak{p}$ над A и $c_1 < \sigma(a, \mathfrak{C}) < c_2$. Како је то тачно за један Морлијев низ (c_1, a, c_2), тачно је и за све. $\square$

Последица 4.16. *Претпоставимо да $a \models p$ и да је формула $\sigma(a, x)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена над A. Тада $\sigma(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$.*

Ако је $\mathfrak{p}$ додатно $<$-конвексан, тада је $\sigma(a, \mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$.

Доказ. Ако $\sigma(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}) \nsubseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$, можемо изабрати елемент $a' \in \sigma(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C})$ такав да $a' \notin \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Како $a' \notin \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$, елементи a', a могу се поређати у Морлијев низ. Ако је (a', a) Морлијев низ, изаберимо $a'' \models \mathfrak{p}_{\restriction Aa'a}$; (a', a, a'') је Морлијев низ, па према леми 4.15 важи $a' < \sigma(a, \mathfrak{C}) < a''$, што је у контрадикцији са $a' \in \sigma(a, \mathfrak{C})$. Слично закључујемо да није могуће да је (a, a') Морлијев низ.

Ако је $\mathfrak{p}$ додатно $<$-конвексан над A, из јаке $\mathfrak{p}$-ограничености над A формуле $\sigma(a, x)$ закључујемо да је $\sigma(a, \mathfrak{C}) \subseteq p(\mathfrak{C})$. Према томе, $\sigma(a, \mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. $\square$

Лема 4.17. *Претпоставимо да $a \models p$.*

(i) За свако $b \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ постоји симетрична формула $\sigma(x, y) \in \mathrm{tp}(a, b/A)$ таква да је $\sigma(a, y)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена над A.

Претпоставимо додатно да је $\mathfrak{p}$ $<$-конвексан над A.

(ii) Важи $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \subseteq \mathrm{Sem}_A(a)$.

(iii) За свако $b \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ постоји симетрична формула $\sigma(x, y) \in \mathrm{tp}(a, b/A)$ таква да је $\sigma(a, y)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена над A, и формуле $\sigma(x, b)$ и $\sigma(a, y)$ редом сведоче $a \in \mathrm{Sem}_A(b)$ и $b \in \mathrm{Sem}_A(a)$.

Доказ. (i) Нека $b \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Тада (a, b) и (b, a) нису Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A, па постоје формуле $\sigma'(x, y), \sigma''(x, y) \in \mathrm{tp}(a, b/A)$ такве да $\sigma'(a, y) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$ и $\sigma''(x, b) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$. Тада формула:

$$\sigma_0(x, y) = \sigma'(x, y) \wedge \sigma''(x, y)$$

припада типу $\mathrm{tp}(a, b/A)$, али $\sigma_0(a, y) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$ и $\sigma_0(x, b) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$. Сада је формула:

$$\sigma_1(x, y) = \sigma_0(x, y) \vee \sigma_0(y, x)$$

симетрична формула која припада $\mathrm{tp}(a, b/A)$. Како $\sigma_0(x, b) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$, због A-инваријантности типа $\mathfrak{p}$, $\sigma_0(x, a) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$. Како $\sigma_0(a, y) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$, закључујемо да $\sigma_1(a, y) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$. Слично закључујемо да $\sigma_1(x, b) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$.

Докажимо сада да је $\sigma_1(a, y)$ $\mathfrak{p}$-ограничена формула над A. Претпоставимо да $b' \models p$ и $\models \sigma_1(a, b')$. Тада $\sigma_1(a, y) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$ повлачи $b' \not\models \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$. Са друге стране, $\sigma_1(x, b) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$, због A-инваријантности, повлачи $\sigma_1(x, b') \notin \mathfrak{p}_{\restriction Ab'}$, па $a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction Ab'}$. Дакле, ни (a, b') ни (b', a) нису Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A, па $b' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Према томе, $\sigma_1(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$; специјално, $\sigma_1(a, y)$ је $\mathfrak{p}$-ограничена над A.

Према леми 4.14 изаберимо формулу $\phi(y) \in p(y)$ тако да је $\phi(y) \wedge \sigma_1(a, y)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена над A. Тада је формула:

$$\sigma(x, y) = \phi(x) \wedge \phi(y) \wedge \sigma_1(x, y)$$

очигледно симетрична, припада $\mathrm{tp}(a, b/A)$ и $\sigma(a, y)$ је јако $\mathfrak{p}$-ограничена над A.

(ii) Ако $b \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$, према делу (i) постоји $\mathfrak{p}$-ограничена формула над A $\sigma(a, y) \in \mathrm{tp}(b/Aa)$. Према леми 4.14 $b \in \mathrm{Sem}_A(a)$. Дакле, $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \subseteq \mathrm{Sem}_A(p)$. $\square$

Дефиниција 4.18. Са $\mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$ означимо скуп свих симетричних формула $\sigma(x, y)$ са параметрима из A, таквих да је $\sigma(a, y)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена над A за неко (па и све) $a \models p$.

Приметимо да $\mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$ зависи и од A и од избора уређења $<$, али они ће увек бити јасни из контекста, па их нећемо наглашавати.

Лема 4.19.

(i) За све $a \models p$ важи:

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) = \bigcup_{\sigma(x,y) \in \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}} \sigma(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}).$$

(ii) Ако је $\mathfrak{p}$ и $<$-конвексан, тада за све $a \models p$ важи:

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) = \bigcup_{\sigma(x,y) \in \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}} \sigma(a, \mathfrak{C}).$$

Доказ. (i) Ако $\sigma(x, y) \in \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$, тада је формула $\sigma(a, y)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена, па из последице 4.16 имамо да је $\sigma(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Ово доказује инклузију $\supseteq$. Инклузија $\subseteq$ је последица леме 4.17(i): за сваки $b \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ постоји $\sigma(x, y) \in \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$ тако да $\models \sigma(a, b)$.

(ii) Ако је $\mathfrak{p}$ $<$-конвексан, према последици 4.16 за све $\sigma(x, y) \in \mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$ и $a \models p$ важи $\sigma(a, \mathfrak{C}) \subseteq p(\mathfrak{C})$. Према томе тврђење следи из (i). $\square$

3. Реализовање инваријанти

У овом одељку ћемо се бавити питањем шта су могућности за $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$, где је M мали модел. Почећемо са дефиницијом простог типа.

Дефиниција 4.20. Слабо правилан A-асиметричан тип $\mathfrak{p}$ је *прост над A* ако је еквиваленција дата са $x \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(y)$ релативно дефинабилна на $\mathfrak{p}_{\restriction A}(\mathfrak{C})^2$.

Пример 4.21.

(1) Уочимо модел $(\mathbb{Z}, <)$; приметимо да његова теорија повлачи да сваки елемент има непосредног претходника и непосредног следбеника. Нека је $\mathfrak{C}$ његов монструм и нека је $\mathfrak{p} \in S_1(\mathfrak{C})$ тип бесконачно великог елемента; $\mathfrak{p}$ је

правилан над $\emptyset$. За $a \models \mathfrak{p}_{\emptyset}$, приметимо да је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ копија $(\mathbb{Z}, <)$ око a. Како овај скуп није (релативно) дефинабилан, добијамо да $\mathfrak{p}$ није прост над A.

(2) Уочимо модел $(\mathbb{Q}, <)$ и његов монструм $\mathfrak{C}$. Тип бесконачно великог елемента $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ је прост над $\emptyset$, јер је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) = \{a\}$.

(3) Уочимо модел $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}, <, E)$, где је $<$ лексикографско уређење, а E је релација еквиваленције која каже да су два елемента на коначној удаљености. Тип бесконачно далеког елемента $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ је правилан над $\emptyset$. Приметимо, као у (1), да је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ копија $(\mathbb{Z}, <)$ око a, па $b \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ ако и само ако $\models E(a, b)$, одакле следи да је $\mathfrak{p}$ прост над $\emptyset$.

Напомена 4.22. Према леми 4.17, формулу $\sigma_{\mathfrak{p}}(x, y)$ која сведочи да је $\mathfrak{p}$ прост над A можемо изабрати да буде симетрична и јако $\mathfrak{p}$ ограничена над A у односу на унапред одређено уређење $<$ које сведочи A-асиметричност типа $\mathfrak{p}$ над A.

Циљ нам је да докажемо следећу теорему.

Теорема 4.23. *Нека је T теорија, $\mathfrak{p}$ слабо правилан A-асиметричан тип и M мали модел теорије T.*

(i) Ако је $\mathfrak{p}$ прост и конвексан над A и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ садржи бар две тачке, тада је $\mathrm{Inv}_{p,A}(M)$ густо линеарно уређење (можда са једном или обе крајње тачке).

(ii) Ако су T и A пребројиви, и $\mathfrak{p}$ је прост и неконвексан над A, тада $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ може бити произвољно пребројиво линеарно уређење.

(iii) Ако су T и A пребројиви и $\mathfrak{p}$ није прост, тада $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ може бити произвољно пребројиво линеарно уређење.

Доказ теореме 4.23 дајемо у тврђењима 4.25, 4.31 и 4.30. Како постоји континуум много неизоморфних пребројивих линеарних уређења, теорема 4.23 директно повлачи следећу последицу.

Последица 4.24. *Претпоставимо да је T највише пребројива теорија, A коначан, и $\mathfrak{p}$ слабо правилан A-асиметричан тип. Ако је $I(\aleph_0, T) < 2^{\aleph_0}$, тада је $\mathfrak{p}$ прост и конвексан над A.*

Доказ. Означимо са T_A теорију T са именованим елементима из скупа A. Како је A коначан, сваки пребројив модел теорије T има највише пребројиво много неизоморфних експанзија које су модели теорије T_A. Према томе $I(\aleph_0, T_A) = 2^{\aleph_0}$ повлачи $I(\aleph_0, T) = 2^{\aleph_0}$. Дакле, из претпоставке $I(\aleph_0, T) < 2^{\aleph_0}$ имамо $I(\aleph_0, T_A) < 2^{\aleph_0}$.

Ако $\mathfrak{p}$ није прост, према тврђењу 4.30 је $I(\aleph_0, T_A) = 2^{\aleph_0}$, што је контрадикција. Слично, ако је $\mathfrak{p}$ прост и неконвексан над A, према тврђењу 4.31 је $I(\aleph_0, T_A) = 2^{\aleph_0}$, што је опет контрадикција. $\square$

Тврђење 4.25. *Претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ слабо правилан A-асиметричан тип који је конвексан и прост над A. Ако $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ садржи бар два елемента за неки модел $M \supseteq A$, онда је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ густо линеарно уређење (можда са једном или обе крајње тачке).*

Доказ. Претпоставимо да је $<$ уређење које сведочи A-асиметричност и конвексност над A типа $\mathfrak{p}$. Нека је $p = \mathfrak{p}_{\restriction A}$.

Изаберимо симетричну формулу $\sigma_{\mathfrak{p}}(x, y)$ која релативно дефинише $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$ и такву да је $\sigma_{\mathfrak{p}}(a, y)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена за неко (све) $a \models p$. Претпоставимо да $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ има бар две тачке. Нека су $b_1, b_2 \in p(M)$ такви да $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b_1) < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b_2)$; желимо да докажемо да постоји $b \in p(M)$ такво да је (b_1, b, b_2) Морлијев низ. Било који елемент $b' \in \mathfrak{C}$ такав да је (b_1, b', b_2) Морлијев низ задовољава „формулу" :

$$\sigma_{\mathfrak{p}}(b_1, \mathfrak{C}) < x < \sigma_{\mathfrak{p}}(b_2, \mathfrak{C}).$$

Због елементарности, постоји елемент $b \in M$ такав да $\sigma_{\mathfrak{p}}(b_1, M) < b < \sigma_{\mathfrak{p}}(b_2, M)$. Како је $\mathfrak{p}$ $<$-конвексан над A, $b_1 < b < b_2$ повлачи $b \models p$, тј. $b \in p(M)$. Према томе (b_1, b, b_2) је Морлијев низ елемената из M, што завршава доказ. □

За тренутак, фиксирајмо нотацију из претходног тврђења. За $a \models p$, уочимо следећа два типа:

$$\Lambda(x, a) = p(x) \cup \{x < \sigma_{\mathfrak{p}}(a, \mathfrak{C})\} \quad \text{и} \quad \Pi(x, a) = p(x) \cup \{\sigma_{\mathfrak{p}}(a, \mathfrak{C}) < x\}.$$

Приметимо да је b реализација типа $\Lambda(x, a)$ ако и само ако је (b, a) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Слично, b је реализација типа $\Pi(a, x)$ ако и само ако је (a, b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A.

Означимо са η тип уређења $(\mathbb{Q}, <)$ (у питању је тип уређења пребројивог густог линеарног уређења без крајњих тачака). Имамо следећу последицу.

Последица 4.26. *Претпоставимо да су T и A пребројиви. Нека је M пребројив модел који садржи A.*

(i) Ако је p изолован над A, тада је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ једнак η.

(ii) Претпоставимо да је p неизолован над A.

(1) Ако су $\Lambda(x, a)$ и $\Pi(x, a)$ неизоловани над Aa, тада је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ једнако једном од $\emptyset$, 1, η, $\eta + 1$, $1 + \eta$ и $1 + \eta + 1$, и свака од шест могућности се јавља.

(2) Ако је $\Lambda(x, a)$ изолован над Aa, а $\Pi(x, a)$ неизолован над Aa, тада је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ једнако једном од $\emptyset$, η, $\eta + 1$, и свака од три могућности се јавља.

(3) Ако је $\Lambda(x, a)$ неизолован над Aa, а $\Pi(x, a)$ је изолован над Aa, тада је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ једнако једном од $\emptyset$, η, $1 + \eta$, и свака од три могућности се јавља.

(4) Није могуће да су оба $\Lambda(x,a)$ и $\Pi(x,a)$ изоловани над Aa.

Доказ. (i) Нека је $\phi(x)$ формула са параметрима из A таква да $\phi(x) \vdash p(x)$. Формула $\phi(x)$ је задовољива у $\mathfrak{C}$, па је задовољива и у M такође. Ако је $a \in M$ такво да $\models \phi(a)$, тада $a \models p$, и зато је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ непразно. Такође, „формуле" $\phi(x) \wedge x < \sigma_{\mathfrak{p}}(a, \mathfrak{C})$ и $\phi(x) \wedge \sigma_{\mathfrak{p}}(a, \mathfrak{C}) < x$ имају решења у $\mathfrak{C}$, па имају решења и у M. Приметимо да то повлачи да $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ нема ни минимум ни максимум, али има бар два елемента. Према тврђењу 4.25, $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ је густо линеарно уређење, према томе у питању је пребројиво густо линеарно уређење без крајњих тачака, тј. η.

(ii) Најпре ћемо доказати четири става.

Став 1. Ако је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ непразно и $\Lambda(x,a)$ је изолован над Aa, тада $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ нема минимум. Слично, ако је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ непразно и $\Pi(x,a)$ је изолован над Aa, тада $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ нема максимум.

Доказ става 1. Претпоставимо да је $\phi(x,y)$ фромула са параметрима из A таква да $\phi(x,a) \vdash \Lambda(x,a)$, зе неко (све) $a \models p$. Нека $a \in p(M)$. Формула $\phi(a,x)$ је задовољива у $\mathfrak{C}$, па је задовољива и у M такође, нпр. нека јој је $b \in M$ решење. Тада b реализује $\Lambda(x,a)$, па је (b,a) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Ово повлачи да $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ нема минимум.

Став 2. Нека је (a,b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Ако је $\Lambda(x,a)$ изолован над Aab, тада је изолован и над Aa. Слично, ако је $\Pi(x,b)$ изолован над Aab, тада је изолован и над Ab.

Доказ става 2. Претпоставимо да је $\phi(x,y,z)$ формула са параметрима из A таква да $\phi(x,a,b) \vdash \Lambda(x,a)$. Приметимо:

$$(c,a,b) \text{ је Морлијев низ у } \mathfrak{p} \text{ над } A \quad \text{акко} \quad \models \phi(x,a,b).$$

Импликација ($\Leftarrow$) је очигледна. За доказ ($\Rightarrow$), претпоставимо да је (c,a,b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, и изаберимо c' такво да $\models \phi(c',a,b)$. Према ($\Leftarrow$), (c',a,b) је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, па закључујемо да је $\mathrm{tp}(c'/Aab) = \mathrm{tp}(c/Aab)$, одакле $\models \phi(c,a,b)$.

Нека је $f \in \mathrm{Aut}_{Aa}(\mathfrak{C})$ произвољан аутоморфизам. Ако $\models \phi(c,a,b)$, тада је (c,a,b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, па је и $(f(c),a,f(b))$ такође Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Али сада можемо да закључимо да је $(f(c),a,b)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, одакле $\models \phi(f(c),a,b)$. Ово доказује да је $\phi(\mathfrak{C},a,b)$ инваријантан над Aa, одакле је, према леми 1.9, $\phi(\mathfrak{C},a,b)$ дефинабилан над Aa. Ако је $\psi(x,y)$ формула са параметрима из A таква да $\psi(\mathfrak{C},a) = \phi(\mathfrak{C},a,b)$, тада $\psi(x,a) \vdash \Lambda(x,a)$, тј. $\Lambda(x,a)$ је изолован над Aa.

Став 3. Ако је $\bar{a}_\omega = (a_i)_{i\in\omega}$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, тада је тип:

$$\Sigma(x) = p(x) \cup \{\sigma_{\mathfrak{p}}(a_i, \mathfrak{C}) < x \mid i \in \omega\}$$

неизолован над $A\bar{a}_\omega$. Слично, ако је $\bar{a}_{\omega^*} = (a_i)_{i\in\omega^*}$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, тада је тип:

$$\Sigma(x) = p(x) \cup \{x < \sigma_{\mathfrak{p}}(a_i, \mathfrak{C}) \mid i \in \omega^*\}$$

неизолован над $A\bar{a}_{\omega^*}$.

Доказ става 3. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да су $\phi(x, \bar{y})$ формула са параметрима из A и $\bar{a}$ коначан подниз од $\bar{a}_\omega$ такви да $\phi(x, \bar{a}) \vdash \Sigma(x)$. Можемо претпоставити да је $\bar{a} = a_0 a_1 \dots a_n$. Приметимо:

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, b) \text{ је Морлијев низ у } \mathfrak{p} \text{ над } A \quad \text{акко} \quad \models \phi(b, \bar{a}).$$

Импликација ($\Leftarrow$) је очигледна. За доказ смера ($\Rightarrow$) изаберимо b' такво да $\models \phi(b', \bar{a})$. Према ($\Leftarrow$), $(a_0, a_1, \dots, a_n, b')$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Како је $(a_0, a_1, \dots, a_n, b)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, добијамо да је $\mathrm{tp}(b'/A\bar{a}) = \mathrm{tp}(b/A\bar{a})$, одакле $\models \phi(b, \bar{a})$.

Како је $(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, имамо да $\models \phi(a_{n+1}, \bar{a})$, одакле a_{n+1} реализује $\Sigma(x)$. Контрадикција.

Став 4. Претпоставимо да је $\bar{a}_\omega = (a_i)_{i\in\omega}$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Ако је $\Lambda(x, a_0)$ изолован над $A\bar{a}_\omega$, тада је изолован и над Aa_0. Слично, ако је $\bar{a}_{\omega^*} = (a_i)_{i\in\omega^*}$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, и ако је $\Pi(x, a_0)$ изолован над $A\bar{a}_{\omega^*}$, тада је изолован и над Aa_0.

Доказ става 4. Доказ је сличан доказу става 2, па га нећемо наводити.

Сада можемо да докажемо (ii). Према тврђењу 4.25, не постоји више од следећих шест могућности за $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$: $\emptyset, 1, \eta, \eta+1, 1+\eta, 1+\eta+1$. У делу (2), према ставу 1, можемо закључити да су могућности за $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$: $\emptyset, \eta, \eta+1$. Слично у (3), могућности су: $\emptyset, \eta, 1+\eta$. Доказаћемо да се свака од могућности јавља.

Како је $p(x)$ неизолован над A, по Теореми о испуштању типова, постоји пребројив модел M такав да $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M) = \emptyset$.

(1) Претпоставимо да су $\Lambda(x, a)$ и $\Pi(x, a)$ неизоловани над Aa, за неко (све) $a \models p$. По Теореми о испуштању типова, и $\Lambda(x, a)$ и $\Pi(x, a)$ могу бити испуштени у моделу који садржи Aa, према томе постоји пребројив модел M такав да је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ једна тачка.

Изаберимо Морлијев низ (a, b) у $\mathfrak{p}$ над A. По ставу 2 $\Lambda(x, a)$ и $\Pi(x, b)$ су неизоловани над Aab, Па према Теореми о испуштању типова могу бити испуштени у моделу који садржи Aab. Дакле, постоји пребројив модел M такав да су a и b редом минимум и максимум неког максималног у M Морлијевог низа у $\mathfrak{p}$ над A, одакле $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ има и минимум и максимум. Како је то густо линеарно уређење према тврђењу 4.25, добијамо да је једнако $1+\eta+1$.

Да бисмо конструисали модел M такав да је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ једнако $1+\eta$, изаберимо Морлијев низ $\bar{a}_\omega = (a_i)_{i\in\omega}$, и уочимо тип $\Sigma(x)$ као у ставу 3. Према ставовима 3 и 4, и $\Lambda(x, a_0)$ и $\Sigma(x)$ су неизоловани над $A\bar{a}_\omega$, па према Теореми о испуштању типова могу бити испуштени у моделу M који садржи $A\bar{a}_\omega$. Како је $\Lambda(x, a_0)$ испуштен, $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ има минимум, а како је $\Sigma(x)$ испуштен видимо да $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ нема максимум. Слично можемо да конструишемо модел M такав да је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ једнако $\eta+1$.

Остаје да конструишемо модел M такав да је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ једнако η. За то можемо да уочимо Морлијев низ $\bar{a}_\mathbb{Z} = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ у $\mathfrak{p}$ над A и да наставимо слично као претходним случајевима.

У (2) и (3) се модели могу конструисати на сличан начин.

(4) Остаје да докажемо да није могуће да су и $\Lambda(x, a)$ и $\Pi(x, a)$ изоловани над Aa. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да су изоловани над Aa, нпр. $\phi(x, a) \vdash \Lambda(x, a)$ и $\psi(x, a) \vdash \Pi(x, a)$. Можемо доказати да важи:

$$(b, a) \text{ је Морлијев низ у } \mathfrak{p} \text{ над } A \quad \text{акко} \quad \models \phi(b, a),$$

и:

$$(a, b) \text{ је Морлијев низ у } \mathfrak{p} \text{ над } A \quad \text{акко} \quad \models \psi(b, a).$$

Докази обе чињенице су слични доказу одговарајуће чињенице из става 2. Како је $\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a) = \sigma_\mathfrak{p}(\mathfrak{C}, a)$, видимо да је:

$$p(\mathfrak{C}) = \phi(\mathfrak{C}, a) \cup \sigma_\mathfrak{p}(\mathfrak{C}, a) \cup \psi(\mathfrak{C}, a),$$

тј. $p(\mathfrak{C})$ је дефинабилан над Aa. Како је очигледно инваријантан над A, добијамо да је и дефинабилан над A према леми 1.9. Дакле, p је изолован над A. Контрадикција. $\square$

Кроз следеће лаке примере ћемо приказати све ситуације описане у претходној последици.

Пример 4.27. У следећим примерима посматрамо одређене експанзије структуре $(\mathbb{Q}, <)$, и дефинишемо тип $\mathfrak{p}$ који ће бити правилан над $\emptyset$, асиметричан и конвексан над $\emptyset$ (ове особине су сведочене базним уређењем $<$), и прост над $\emptyset$ (заправо $\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a) = \{a\}$, за свако $a \models \mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$). Лако се може проверити да ове чињенице важе због елиминације квантификатора, па ћемо испустити детаље.

(1) Уочимо $M = (\mathbb{Q}, <)$ и његов монструм $\mathfrak{C}$. Нека је $\mathfrak{p}$ тип бесконачно великог елемента. $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}(\mathfrak{C})$ је баш $\mathfrak{C}$, па је $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}(M) = M$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M) = \eta$. Приметимо да је $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$ изолован над $\emptyset$ са $x = x$.

(2) Уочимо $M = (\mathbb{Q}, <, P_i)_{i<\omega}$, где је $P_i(M) = (-\infty, i)$, и уочимо његов монструм $\mathfrak{C}$. Нека је $\mathfrak{p}$ тип бесконачно великог елемента; приметимо да $\mathfrak{p}$ садржи негације свих P_i. $\mathfrak{p}_{|\emptyset}(\mathfrak{C})$ је скуп елемената већих од свих $P_i(\mathfrak{C})$. Дакле, $\mathfrak{p}_{|\emptyset}(M) = \emptyset$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M) = \emptyset$. Приметимо да су следећи модели елементарно еквивалентни са M: $M_1 = (\mathbb{Q}, <, P_i)_{i<\omega}$, где је $P_i(M_1) = (-\infty, -1/i)$, и $M_2 = (\mathbb{Q}, <, P_i)_{i<\omega}$, где је $P_i(M_2) = (-\infty, \sqrt{2} - 1/i)$. Сада, $\mathfrak{p}_{|\emptyset}(M_1) = [0, +\infty)$, па $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M) = 1+\eta$. Такође, $\mathfrak{p}_{|\emptyset}(M_2) = [\sqrt{2}, +\infty) = (\sqrt{2}, +\infty)$, па $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M_2) = \eta$. Такође приметимо да за $a \models \mathfrak{p}_{|\emptyset}$, $\Pi(x, a)$ је изолован над $\{a\}$ са $x > a$, док $\Lambda(x, a)$ је неизолован над $\{a\}$.

(Све поменуте интервале посматрамо као подскупове од $\mathbb{Q}$.)

(3) Претходни пример се може лако модификовати да добијемо тип и моделе такве да је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M)$ једнако $\emptyset, \eta$ или $\eta + 1$.

(4) Уочимо $M = (\mathbb{Q}, <, P_i, Q_i)_{i<\omega}$, $P_i(M) = (-\infty, a_i)$ и $Q_i(M) = (b_i, +\infty)$, где $(a_i)_{i<\omega}$ је строго растући низ рационалних бројева који конвергира ка 0 и $(b_i)_{i<\omega}$ је строго опадајући низ рационалних бројева који конвергира ка 0. Уочимо монструм $\mathfrak{C}$ и тип $\mathfrak{p}$ елемента који је мањи од свих $Q_i(\mathfrak{C})$ и већи од свих осталих елемената из $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{p}_{|\emptyset}(\mathfrak{C})$ је скуп свих елемената који су мањи од свих $Q_i(\mathfrak{C})$ и већи од свих $P_i(\mathfrak{C})$. Дакле, $\mathfrak{p}_{|\emptyset}(M) = \{0\}$, и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M) = 1$. Сада можемо модификовати $P_i(M)$ и $Q_i(M)$ како бисмо добили елементарно еквивалентан модел од M, али и променили $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M)$. Ако изаберемо низове (a_i) и (b_i) да конвергирају $\sqrt{2}$, добићемо да је $\mathfrak{p}_{|\emptyset}(M) = \emptyset$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M) = \emptyset$. Ако изаберемо низове (a_i) и (b_i) да конвергирају редом ка a и b, $a < b$, тада, зависно од тога да ли $a, b \in \mathbb{Q}$, добићемо да је $\mathfrak{p}_{|\emptyset}(M)$ једнак (a, b) (ако $a, b \notin \mathbb{Q}$), $[a, b)$ (ако $a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}$),$(a, b]$ (ако $a \notin \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$) или $[a, b]$ (ако $a, b \in \mathbb{Q}$), и одговарајући $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M)$ су редом једнаки η, $1 + \eta$, $\eta + 1$ или $1 + \eta + 1$. Приметимо да ниједан од $\Lambda(x, a)$ и $\Pi(x, a)$ није изолован над $\{a\}$, за $a \models \mathfrak{p}_{|\emptyset}$.

(Поново, све поменуте интервале посматрамо као подскупове од $\mathbb{Q}$.)

Настављамо ка доказима тврђења 4.30 и 4.31. Потребна нам је техничка лема.

Лема 4.28. *Претпоставимо да су T и A пребројиви, претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ слабо правилан и A-асиметричан, и да је $<$ уређење које сведочи асиметричност над A. Нека је $p = \mathfrak{p}_{|A}$. Претпоставимо да $\mathfrak{p}$ није прост над A и нека $a \models p$. Тада постоји низ симетричних формула $(\sigma_n(x, y))_{n<\omega}$ са параметрима из A, таквих да важе следећи услови:*

1. *Свака $\sigma_n(a, x)$ је јако $\mathfrak{p}$-ограничена.*
2. *Низ $(\sigma_n(a, \mathfrak{C}))_{n<\omega}$ је строго $\subseteq$-растући.*

3. За свако $n < \omega$ постоје елементи $b', b'' \in (\sigma_{n+1}(a, \mathfrak{C}) \smallsetminus \sigma_n(a, \mathfrak{C})) \cap p(\mathfrak{C})$ такви да је $b' < \sigma_n(a, \mathfrak{C}) < b''$.

4. Важи $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) = \bigcup_{n<\omega} \sigma_n(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C})$.

Доказ. Како су T и A пребројиви, то је скуп $\mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$ из дефиниције 4.18 пребројив, па запишимо $\mathcal{B}_{\mathfrak{p}} = \{\sigma_n(x, y) \mid n < \omega\}$; по дефиницији $\sigma_n(a, x)$ су јако $\mathfrak{p}$-ограничене, а према леми 4.19 важи $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) = \bigcup_{n\leqslant\omega} \sigma_n(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C})$. Заменом формула $\sigma_n(x, y)$ са $\bigvee_{i\leqslant n} \sigma_i(x, y)$, можемо да претпоставимо да је $(\sigma_n(x, y))_{n<\omega}$ низ симетричних формула са параметрима из A такав да је низ скупова $(\sigma_n(a, \mathfrak{C}))_{n<\omega}$ растући; остају $\sigma_n(a, x)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничене и остаје $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) = \bigcup_{n<\omega} \sigma_n(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C})$.

Тврдимо да за свако $n < \omega$ постоји $m \geqslant n$ и $b' \in \sigma_m(a, \mathfrak{C}) \smallsetminus \sigma_n(a, \mathfrak{C})$ такав да $b' \models p$ и $b' < \sigma_n(a, \mathfrak{C})$. У супротном, нека је $n_0 < \omega$ такав да за свако $m \geqslant n_0$ и за свако $b \in \sigma_m(a, \mathfrak{C}) \smallsetminus \sigma_{n_0}(a, \mathfrak{C})$, такво да $b \models p$, важи $b \not< \sigma_{n_0}(a, \mathfrak{C})$. Како ова особина важи за a, због A-инваријантности типа $\mathfrak{p}$ важи и за сваку другу реализацију типа p. Тврдимо да „формула" :

$$x \not< \sigma_{n_0}(y, \mathfrak{C}) \ \wedge \ y \not< \sigma_{n_0}(x, \mathfrak{C})$$

релативно дефинише $y \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(x)$, што је у контрадикцији са претпоставком да $\mathfrak{p}$ није прост над A. Ако $b \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$, тада $\models \sigma_k(a, b)$ за неко k; због симетричности важи и $\models \sigma_k(b, a)$. Ако је $k \leqslant n_0$, због монотоности $\models \sigma_{n_0}(a, b)$ и $\models \sigma_{n_0}(b, a)$, па јасно важи $a \not< \sigma_{n_0}(b, \mathfrak{C}) \wedge b \not< \sigma_{n_0}(a, \mathfrak{C})$. Ако је $k > n$, тада је $a \not< \sigma_{n_0}(b, \mathfrak{C}) \wedge b \not< \sigma_{n_0}(a, \mathfrak{C})$ по избору n_0. Са друге стране, ако $b \notin \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ и $b \models p$, тада је или (b, a) или (a, b) Морлијев низ, па је или $b < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ или $a < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b)$. Како је $\sigma_{n_0}(a, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ и како је $\sigma_{n_0}(a, x)$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена, то у сваком случају не важи $a \not< \sigma_{n_0}(b, \mathfrak{C}) \wedge b \not< \sigma_{n_0}(a, \mathfrak{C})$.

На сличан начин можемо да докажемо да за свако $n < \omega$ постоје $m \geqslant n$ и $b'' \in \sigma_m(a, \mathfrak{C}) \smallsetminus \sigma_n(a, \mathfrak{C})$ такви да $b'' \models p$ и $\sigma_n(a, \mathfrak{C}) < b''$.

Сада је јасно да из низа $(\sigma_n(a, b))_{n<\omega}$ можемо издвојити подниз који задовољава жељене особине. □

Последица 4.29. *За све $a, b \models p$ следећи услови су еквивалентни:*

(1) $a < \sigma_n(b, \mathfrak{C})$, за све $n < \omega$;

(2) $\sigma_n(a, \mathfrak{C}) < b$, за све $n < \omega$;

(3) (a, b) је Морлијев низ.

Доказ. Према леми 4.28 (4), (1) је еквивалентно са $a < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(b)$, а (2) је еквивалентно са $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) < b$. Оба услова су еквивалентна са чињеницом да је (a, b) Морлијев низ. □

Тврђење 4.30. *Претпоставимо да су T и A пребројиви и да је $\mathfrak{p}$ слабо правилан A-асиметричан тип који није прост над A и $p = \mathfrak{p}_{\restriction A}$. Тада за свако пребројиво линеарно уређење $\mathbb{I} = (I, <_I)$ постоји пребројиви модел $M_{\mathbb{I}} \supseteq A$ такав да је* $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M_{\mathbb{I}}) \cong \mathbb{I}$.

Доказ. Изаберимо у монструму Морлијев низ $\bar{a}_I = (a_i)_{i \in I}$ у $\mathfrak{p}$ над A и посматрајмо (непотпун) тип над $A\bar{a}_I$:

$$\Sigma(x) = p(x) \cup \bigcup_{i \in I} x \notin \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_i).$$

Приметимо да је према леми 4.28, $\Sigma(x)$ заиста скуп формула:

$$\Sigma(x) = p(x) \cup \{\neg\sigma_n(a_i, x) \mid n < \omega,\, i \in I\},$$

који је задовољен било којом реализацијом типа p у монструму која није ни у једном $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_i)$, нпр. реализацијом типа $\mathfrak{p}_{\restriction A\bar{a}_I}$. Дакле, $\Sigma(x)$ је заиста тип.

Довољно је да докажемо да се $\Sigma(x)$ може испустити у моделу који садржи $A\bar{a}_I$. У супротном, према Теореми о испуштању типова, $\Sigma(x)$ је изолован над $A\bar{a}_I$, па постоји коначан подниз $\bar{a}$ низа $\bar{a}_I$ и формула $\psi(x, \bar{y})$ са параметрима из A таква да:

$$\psi(x, \bar{a}) \vdash \Sigma(x).$$

Претпоставимо да је $\bar{a} = a_1 a_2 \ldots a_m$, где је $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$. Како је:

$$\Sigma(\mathfrak{C}) \subseteq \{t \mid t < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1)\} \cup \bigcup_{k<m} \{t \mid \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_k) < t < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_{k+1})\} \cup \{t \mid \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_m) < t\}$$

и $\psi(x, \bar{a}) \vdash \Sigma(x)$, формула $\psi(x, \bar{a})$ је сагласна са бар једном од формула:

1. $x < a_1$;
2. $a_k < x < a_{k+1}$, за неко $k < m$;
3. $a_m < x$.

Размотримо први случај; нека је $\psi(x, \bar{a})$ сагласна са $x < a_1$. Претпоставимо $\models \psi(b_0, \bar{a}) \wedge b_0 < a_1$. Како $\psi(x, \bar{a}) \vdash \Sigma(x)$, закључујемо:

$$\psi(x, \bar{a}) \wedge x < a_1 \vdash p(x) \cup \{x < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1)\}.$$

Према томе, ако је $\models \psi(b, \bar{a}) \wedge b < a_1$, тада је $b < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1)$, па је $(b, a_1, \ldots, a_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Специјално, $(b_0, a_1, \ldots, a_m)$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Са друге стране, ако је $(b, a_1, \ldots, a_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, тада постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ такав да $f : (b_0, a_1, \ldots, a_m) \mapsto (b, a_1, \ldots, a_m)$, па како је $\models \psi(b_0, \bar{a}) \wedge b_0 < a_1$, то је и $\models \psi(b, \bar{a}) \wedge b < a_1$. Дакле:

$$(b, a_1, \ldots, a_m) \text{ је Морлијев низ у } \mathfrak{p} \text{ над } A \quad \text{акко} \quad \models \psi(b, \bar{a}) \wedge b < a_1. \tag{1}$$

Према последици 4.29, за свако $b \models p$, $(b, a_1, \ldots, a_m)$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A ако и само ако $b < \sigma_n(a_1, \mathfrak{C})$, за све $n < \omega$, где су $\sigma_n(x, y)$ формуле које задовољавају захтеве леме 4.28. Дакле, према (1) имамо:

$$p(x) \cup \{x < \sigma_n(a_1, \mathfrak{C}) \mid n < \omega\} \vdash \psi(x, \bar{a}) \wedge x < a_1.$$

По компактности, користећи чињеницу да је низ скупова $\sigma_n(a_1, \mathfrak{C})$ растући (лема 4.28), закључујемо да постоји $n_0 < \omega$ такво да:

$$p(x) \cup \{x < \sigma_{n_0}(a_1, \mathfrak{C})\} \vdash \psi(x, \bar{a}) \wedge x < a_1. \tag{2}$$

Према леми 4.28, изаберимо $b' \models p$ такво да $b' \in \sigma_{n_0+1}(a_1, \mathfrak{C}) \smallsetminus \sigma_{n_0}(a_1, \mathfrak{C})$ и $b' < \sigma_{n_0}(a_1, \mathfrak{C})$. Тада b' задовољава леву страну у (2), па мора да задовољава и десну, тј. $\models \psi(b', \bar{a}) \wedge b' < a_1$. Према (1) то значи да је $(b', a_1, \ldots, a_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, па је $b' < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1)$. Како је $b' \in \sigma_{n_0+1}(a_1, \mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1)$, где последња инклузија важи према леми 4.28, то је контрадикција.

Други и трећи случај се разматрају потпуно аналогно. За други, претпоставимо да је $\psi(x, \bar{a})$ сагласна са $a_k < x < a_{k+1}$ за неко $k < m$; из $\psi(x, \bar{a}) \vdash \Sigma(x)$ имамо:

$$\psi(x, \bar{a}) \wedge a_k < x < a_{k+1} \vdash \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_k) < x < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_{k+1}).$$

Због претпостављене сагласности директно добијамо:

$$(a_1, \ldots, a_k, b, a_{k+1}, \ldots, a_m) \text{ је Морлијев низ акко } \models \psi(b, \bar{a}) \wedge a_k < b < a_{k+1}.$$

Према леми 4.28 и последици 4.29 добијамо:

$$p(x) \cup \text{„}\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_k) < x\text{''} \cup \{x < \sigma_n(a_{k+1}, \mathfrak{C}) \mid n < \omega\} \vdash \psi(x, \bar{a}) \wedge a_k < x < a_{k+1},$$

па по компактности добијамо:

$$p(x) \cup \text{„}\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_k) < x\text{''} \cup \{x < \sigma_{n_0}(a_{k+1}, \mathfrak{C})\} \vdash \psi(x, \bar{a}) \wedge a_k < x < a_{k+1}.$$

Сада, према леми 4.28, изаберимо $b' \models p$ такво да $b' \in \sigma_{n_0+1}(a_{k+1}, \mathfrak{C}) \smallsetminus \sigma_{n_0}(a_{k+1}, \mathfrak{C})$ и $b' < \sigma_{n_0}(a_{k+1}, \mathfrak{C})$; добијамо контрадикцију на исти начин као у првом случају.

У трећем случају слично добијамо:

$$(a_1, \ldots, a_m, b) \text{ је Морлијев низ акко } \models \psi(b, \bar{a}) \wedge a_m < b,$$

па применимо компактност на:

$$p(x) \cup \{\sigma_n(a_m, \mathfrak{C}) < x \mid n < \omega\} \vdash \psi(x, \bar{a}) \wedge a_m < x,$$

да добијемо:

$$p(x) \cup \{\sigma_{n_0}(a_m, \mathfrak{C}) < x\} \vdash \psi(x, \bar{a}) \wedge a_m < x.$$

За разлику од првог и другог случаја, сада ћемо само, према леми 4.28, изабрати $b'' \models p$ такво да $b'' \in \sigma_{n_0+1}(a_m, \mathfrak{C}) \smallsetminus \sigma_{n_0}(a_m, \mathfrak{C})$ и $\sigma_{n_0}(a_m, \mathfrak{C}) < b''$. Контрадикцију добијамо на исти начин. □

Тврђење 4.31. *Претпоставимо да су T и A пребројиви, да је $\mathfrak{p}$ слабо правилан A-асиметричан тип који је прост и неконвексан над A и $p = \mathfrak{p}_{\restriction A}$. Тада за свако пребројиво линеарно уређење $\mathbb{I} = (I, <_I)$ постоји пребројиви модел $M_{\mathbb{I}} \supseteq A$ такав да је* $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M_{\mathbb{I}}) \cong \mathbb{I}$.

Доказ. Као и у доказу тврђења 4.30, изаберимо у монструму Морлијев низ $\bar{a}_I = (a_i)_{i \in I}$ у $\mathfrak{p}$ над A и посматрајмо тип над $A\bar{a}_I$:

$$\Sigma(x) = p(x) \cup \bigcup_{i \in I} x \notin \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_i).$$

Како је $\mathfrak{p}$ прост над A, изаберимо симетричну формулу $\sigma_{\mathfrak{p}}(x, y)$ која релативно дефинише еквиваленцију $y \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(x)$. Тада је $\Sigma(x)$ скуп формула:

$$\Sigma(x) = p(x) \cup \{\neg\sigma_{\mathfrak{p}}(a_i, x) \mid i \in I\},$$

који је задовољен било којом реализацијом типа p у монструму која није ни у једном $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_i)$, нпр. реализацијом типа $\mathfrak{p}_{\restriction A\bar{a}_I}$.

Довољно је да докажемо да се $\Sigma(x)$ може испустити у моделу који садржи $A\bar{a}_I$. У супротном, према Теореми о испуштању типова, $\Sigma(x)$ је изолован над $A\bar{a}_I$, па постоји коначан подниз $\bar{a}$ низа $\bar{a}_I$ и формула $\psi(x, \bar{y})$ са параметрима из A таква да:

$$\psi(x, \bar{a}) \vdash \Sigma(x).$$

Нека је $\bar{a} = a_1 a_2 \dots a_m$, где је $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Како је:

$$\Sigma(\mathfrak{C}) \subseteq \{t \mid t < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1)\} \cup \bigcup_{k<m} \{t \mid \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_k) < t < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_{k+1})\} \cup \{t \mid \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_n) < t\}$$

и $\psi(x, \bar{a}) \vdash \Sigma(x)$, као и у доказу тврђења 4.30, формула $\psi(x, \bar{a})$ је сагласна са бар једном од формула:

1. $x < a_1$;
2. $a_k < x < a_{k+1}$, за неко $k < m$;
3. $a_m < x$.

Размотримо први случај; нека је $\psi(x, \bar{a})$ сагласна са $x < a_1$. Као и у доказу тврђења 4.30, закључујемо:

$$(b, a_1, \dots, a_m) \text{ је Морлијев низ у } \mathfrak{p} \text{ над } A \text{ акко } \models \psi(b, \bar{a}) \wedge b < a_1. \quad (1)$$

Дакле, можемо закључити:

$$p(x) \cup \bigcup_{j \leqslant m} p(y_j) \cup \{x < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(y_1)\} \cup \bigcup_{j<m} \{y_j < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(y_{j+1})\} \vdash \psi(x, \bar{y}) \wedge x < y_1,$$

тј, како $\sigma_{\mathfrak{p}}(x,y)$ дефинише $y \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(x)$ на $p(\mathfrak{C})^2$, имамо:

$$p(x) \cup \bigcup_{j \leqslant m} p(y_j) \cup \{x < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_1, \mathfrak{C})\} \cup \bigcup_{j<m} \{y_j < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_{j+1}, \mathfrak{C})\} \vdash \psi(x, \bar{y}) \wedge x < y_1.$$

По компактности изаберимо (једну) формулу $\phi(x) \in p(x)$ такву да:

$$\phi(x) \wedge \bigwedge_{j \leqslant m} \phi(y_j) \wedge x < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_1, \mathfrak{C}) \wedge \bigwedge_{j<m} y_j < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_{j+1}, \mathfrak{C}) \vdash \psi(x, \bar{y}) \wedge x < y_1. \tag{2}$$

Заменимо уређење $<$ са: $\phi(\mathfrak{C})^2 \cap <$. Приметимо да $<$ и даље сведочи асиметричност над A типа $\mathfrak{p}$, јер $\phi(x) \in \mathfrak{p}(x)$ повлачи $p(\mathfrak{C}) \subseteq \phi(\mathfrak{C})$. Тврдимо да модификовано уређење $<$ сведочи да је $\mathfrak{p}$ конвексан над A. Претпоставимо да $c, c' \models p$ и изаберимо b' тако да $c < b' < c'$; због начина на који смо модификовали $<$ имамо да је $\models \phi(b')$. Изаберимо Морлијев низ $(a'_1, \ldots, a'_m)$ у $\mathfrak{p}$ над $Acb'c'$; тада је:

$$c < b' < c' < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'_1) < \ldots < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'_m),$$

па је јасно да $b', a'_1, \ldots, a'_m$ задовољава леву страну у (2), према томе задовољава и десну страну, тј. $\models \psi(b', \bar{a}') \wedge b' < a'_1$. Према (1), $(b', a'_1, \ldots, a'_m)$ је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, одакле специјално $b' \models p$, што доказује конвексност типа $\mathfrak{p}$ над A. Контрадикција.

Други и трећи случај се слично разматрају. У другом можемо доказати:

$$(a_1, \ldots, a_k, b, a_{k+1}, \ldots, a_m) \text{ је Морлијев низ акко } \models \psi(b, \bar{a}) \wedge a_k < b < a_{k+1},$$

тј.

$$p(x) \cup \bigcup_{j \leqslant m} p(y_j) \cup \bigcup_{j<m} \{y_j < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_{j+1}, \mathfrak{C})\} \cup \{\sigma_{\mathfrak{p}}(y_k, \mathfrak{C}) < x < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_{k+1}, \mathfrak{C})\} \vdash$$
$$\vdash \psi(x, \bar{y}) \wedge y_k < x < y_{k+1}.$$

Тада по компактности изаберимо формулу $\phi(x) \in p(x)$ такву да:

$$\phi(x) \ \wedge \ \bigwedge_{j \leqslant m} \phi(y_j) \ \wedge \ \bigwedge_{j<m} y_j < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_{j+1}, \mathfrak{C}) \ \wedge \ (\sigma_{\mathfrak{p}}(y_k, \mathfrak{C}) < x < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_{k+1}, \mathfrak{C})) \vdash$$
$$\vdash \psi(x, \bar{y}) \wedge y_k < x < y_{k+1},$$

и заменимо $<$ са $\phi(\mathfrak{C})^2 \cap <$. Као и у првом случају добијамо да је $\mathfrak{p}$ конвексан над A. Изаберемо $c, c' \models p$ и b' такво да $c < b' < c'$; важи $\models \phi(b')$. Изаберимо Морлијев низ $(a'_1, \ldots, a'_m)$ у $\mathfrak{p}$ над A такав да:

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'_1) < \ldots < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'_k) < c < b' < c' < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'_{k+1}) < \ldots < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'_m);$$

за елементе $b', a'_1, \ldots, a'_m$ закључујемо да важи $\models \psi(b', \bar{a}') \wedge a'_k < b' < a'_{k+1}$, па је $(a'_1, \ldots, a'_k, b', a'_{k+1}, \ldots, a'_m)$ Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Специјално, $b' \models p$ и $\mathfrak{p}$ је конвексан над A. Контрадикција.

У трећем случају добијамо:

$$(a_1, \dots, a_m, b) \text{ је Морлијев низ акко } \models \psi(b, \bar{a}) \wedge a_m < b,$$

па применимо компактност на:

$$p(x) \cup \bigcup_{j \leqslant m} p(y_j) \cup \bigcup_{j<m} \{y_j < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_{j+1}, \mathfrak{C})\} \cup \{\sigma_{\mathfrak{p}}(y_m, \mathfrak{C}) < x\} \vdash \psi(x, \bar{y}) \wedge y_m < x,$$

да добијемо $\phi(x) \in p(x)$ такво да:

$$\phi(x) \wedge \bigwedge_{j \leqslant m} \phi(y_j) \wedge \bigwedge_{j<m} y_j < \sigma_{\mathfrak{p}}(y_{j+1}, \mathfrak{C}) \wedge \sigma_{\mathfrak{p}}(y_m, \mathfrak{C}) < x \vdash \psi(x, \bar{y}) \wedge y_m < x.$$

Сада заменимо $<$ са $\phi(\mathfrak{C})^2 \cap <$, и на сличан начин као у првом и другом случају закључимо да је $\mathfrak{p}$ конвексан над A. Контрадикција. □

4. Неортогоналност правилних типова

Претпоставка 4.32. У овом одељку ћемо фиксирати глобалан правилан A-асиметричан тип $\mathfrak{p} \in S_1(\mathfrak{C})$; означимо $p = \mathfrak{p}_{\restriction A}$. Претпоставимо да је $<$ A-дефинабилно парцијално уређење које сведочи асиметричност над A.

Реализацију $a \in \mathfrak{C}$ типа p сматрамо независном од произвољне n-торке $\bar{b} \in \mathfrak{C}$ над A ако $a \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$; у супротном кажемо да је a зависна од $\bar{b}$ над A. Дефинишемо скупове зависних и независних реализација типа p од n-торке $\bar{b}$ над A.

Дефиниција 4.33. За произвољну n-торку $\bar{b} \in \mathfrak{C}$ дефинишемо $I_{\mathfrak{p},A}(\bar{b})$ као скуп реализација типа p независних од $\bar{b}$ над A:

$$I_{\mathfrak{p},A}(\bar{b}) = \mathfrak{p}_{\restriction A,\bar{b}}(\mathfrak{C}),$$

и дефинишемо $D_{\mathfrak{p},A}(\bar{b})$ као скуп реализација типа p зависних од $\bar{b}$ над A:

$$D_{\mathfrak{p},A}(\bar{b}) = \{a \models p \mid a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction A,\bar{b}}\}.$$

Како је обично скуп A јасан из контекста, писаћемо само $I_{\mathfrak{p}}$ и $D_{\mathfrak{p}}$ уместо $I_{\mathfrak{p},A}$ и $D_{\mathfrak{p},A}$. Јасно је да је за свако $\bar{b} \in \mathfrak{C}$ дисјунктна унија скупова $I_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ и $D_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ једнака $p(\mathfrak{C})$, као и да је, због засићености монструма, $I_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \neq \emptyset$.

Лема 4.34. *Нека је $\bar{b} \in \mathfrak{C}$ произвољна n-торка.*

(i) $D_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \neq \emptyset$ *ако и само ако* $\mathrm{tp}(\bar{b}/A) \not\perp^{w} p$.

(ii) Ако $D_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \neq \emptyset$, *тада је он конвексан и на доле затворен подскуп од* $p(\mathfrak{C})$.

(iii) Ако $D_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \neq \emptyset$, *тада је* $D_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) < I_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$.

Доказ. (i) Ако је $D_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \neq \emptyset$ изаберимо $a_1 \in D_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ и $a_2 \in I_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$; тада је $\mathrm{tp}(a_1\bar{b}/A) \neq \mathrm{tp}(a_2\bar{b}/A)$, што доказује да је $\mathrm{tp}(\bar{b}/A) \not\perp^{w} p$. Обратно, ако $\mathrm{tp}(\bar{b}/A) \not\perp^{w} p$, изаберимо две реализације a_1, a_2 типа p тако да $\mathrm{tp}(a_1\bar{b}/A) \neq \mathrm{tp}(a_2\bar{b}/A)$; како је највише једна од a_1, a_2 независна од $\bar{b}$ над A, закључујемо да је $D_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \neq \emptyset$.

(ii) Како су сви на доле затворени скупови конвексни, довољно је да докажемо да је $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ на доле затворен. Нека су a и a' реализације типа p, $a' < a$ и $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Тврдимо да $a' \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да $a' \in \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$, тј. $a' \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$. Како $a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$, то услов правилности повлачи да $\mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}a}$, па $a' \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}a}$. Према томе $a' \models \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$, па је $a < a'$. Контрадикција.

(iii) Претпоставимо да $a_1 \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ и $a_2 \in \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Тада $a_1 \not\models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$, па услов правилности повлачи $\mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}a_1}$; како $a_2 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$, то $a_2 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}a_1}$. Специјално, $a_2 \models \mathfrak{p}_{\restriction Aa_2}$, одакле $a_1 < a_2$. □

Лема 4.35. *Нека су $\bar{b}, \bar{c} \in \mathfrak{C}$ произвољни (можда и различите дужине). Скупови $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ и $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{c})$ су упоредиви (у односу на инклузију). Дакле, и $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ и $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c})$ су упоредиви.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ и $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{c})$ нису упоредиви, и изаберимо $a_1 \in \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \smallsetminus \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{c})$ и $a_2 \in \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{c}) \smallsetminus \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Тада $a_1 \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c})$ и $a_2 \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$, тј. $a_1 \not\models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{c}}$ и $a_2 \not\models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$, па због правилности $\mathfrak{p}_{\restriction A\bar{c}} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{c}a_1}$ и $\mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}} \vdash \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}a_2}$. Како $a_1 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$ и $a_2 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{c}}$, добијамо да $a_1 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}a_2}$ и $a_2 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{c}a_1}$. Специјално, $a_1 \models \mathfrak{p}_{\restriction Aa_2}$ и $a_2 \models \mathfrak{p}_{\restriction Aa_1}$, одакле $a_2 < a_1$ и $a_1 < a_2$. Контрадикција. □

Лема 4.36. *За произвољну n-торку $\bar{b} \in \mathfrak{C}$ скуп $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$-затворен, тј. $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ повлачи $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \subseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$.*

Доказ. Претпоставимо да $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \nsubseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Изаберимо $c \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \smallsetminus \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$; тада $a \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(c)$ и $c \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$. Изберимо реализацију c' типа $\mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}c}$. Како $c \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$, то $c \in \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$, па према леми 4.34(iii) важи $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) < c$. Како $c' \models \mathfrak{p}_{\restriction Ac}$, то је $c < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(c')$. Дакле, $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) < c < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(c')$.

Оба елемента c и c' припадају $\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$, па специјално имају исти тип над $A\bar{b}$; изаберимо аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_{A\bar{b}}(\mathfrak{C})$ такав да је $f(c) = c'$. Нека је $a' = f(a)$. Како $a \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(c)$, то $a' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(c')$, па према горњој неједнакости имамо да је $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) < a'$. Са друге стране, $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ повлачи $a' = f(a) \in f[\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})] = \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$, где последња једнакост важи јер f фиксира $A\bar{b}$ тачку-по-тачку, па фиксира и скуп $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Контрадикција. □

Тврђење 4.37. *Ако су $q, r \in \mathrm{S}(A)$такви да $p \not\perp^{\mathrm{w}} q$ и $p \not\perp^{\mathrm{w}} r$, тада $q \not\perp^{\mathrm{w}} r$.*

Доказ. Докажимо најпре да постоје реализације $\bar{b} \models q$ и $\bar{c} \models r$ такве да $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \subsetneq \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c})$. Нека је $\bar{b} \models q$ произвољно и изаберимо $a \in \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Нека је $\bar{c}_0 \models r$; према претпоставци $p \not\perp^{\mathrm{w}} r$ и леми 4.34(i) имамо да је $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c}_0) \neq \emptyset$. Изаберимо $a_0 \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c}_0)$. Како је $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(a_0/A)(= p)$ можемо изабрати аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ такав да $a = f(a_0)$. Нека је $\bar{c} = f(\bar{c}_0)$; тада $\mathrm{tp}(\bar{c}/A) = \mathrm{tp}(\bar{c}_0/A)$, тј.

$\bar{c} \models r$, и $a_0 \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c}_0)$ повлачи $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c})$. Дакле, $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c}) \smallsetminus \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$, па према леми 4.35 важи $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \subsetneq \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c})$.

Слично, користећи услов $p \not\perp^{\mathrm{w}} q$, можемо да докажемо да постоје реализације $\bar{b}' \models q$ и $\bar{c}' \models r$ такве да $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{c}') \subsetneq \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}')$. Закључујемо да $q(\bar{y}) \cup r(\bar{z})$ има бар два различита комплетирања ($\mathrm{tp}(\bar{b}, \bar{c}/A)$ и $\mathrm{tp}(\bar{b}', \bar{c}'/A)$), па следи $q \not\perp^{\mathrm{w}} r$. □

Лема 4.38. *Нека је* $\mathfrak{q} \in \mathrm{S}(\mathfrak{C})$ *A-инваријантан тип и* $p \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction A}$. *Нека* $(\bar{b}, \bar{b}')$ *реализује* $(\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A}$ *(тј.* $\bar{b} \models \mathfrak{q}_{\restriction A}$ *и* $\bar{b}' \models \mathfrak{q}_{\restriction A\bar{b}}$*).*

(i) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада* $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}') \subsetneq \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$.

(ii) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада* $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \subsetneq \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}')$.

(iii) $\mathfrak{q}$ *је асиметричан.*

Доказ. Нека је $\bar{b} \models \mathfrak{q}_{\restriction A}$.

(i) Из услова $p \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction A}$ према леми 4.34(i) имамо $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \neq \emptyset$; нека $a_0 \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Изаберимо $\bar{b}_0 \models \mathfrak{q}_{\restriction A\bar{b}a_0}$. Како $\bar{b}_0 \models \mathfrak{q}_{\restriction A\bar{b}}$ имамо да је $\mathrm{tp}(\bar{b}_0/A\bar{b}) = \mathrm{tp}(\bar{b}'/A\bar{b})$, па постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_{A\bar{b}}(\mathfrak{C})$ такав да $f(\bar{b}_0) = \bar{b}'$. Нека је $a = f(a_0)$; специјално $a \models p$. Тада $\bar{b}_0 \models \mathfrak{q}_{\restriction A\bar{b}a_0}$ повлачи $\bar{b}' \models \mathfrak{q}_{\restriction A\bar{b}a}$, и како $a_0 \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$ и f фиксира $A\bar{b}$ тачка-по-тачка имамо да $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Из $\bar{b}' \models \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$ следи да $(a, \bar{b}') \models (\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A}$, па из услова симетричности $(\bar{b}', a) \models (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, тј. $a \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}'}$, одакле $a \in \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}')$. Дакле, $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \smallsetminus \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}')$, одакле по леми 4.35 следи $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}') \subsetneq \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$.

(ii) Изаберимо $a_0 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$ и $\bar{b}_0 \models \mathfrak{q}_{\restriction A\bar{b}a_0}$. Слично као у делу (i), како $\bar{b}_0 \models \mathfrak{q}_{\restriction A\bar{b}}$ имамо да је $\mathrm{tp}(\bar{b}_0/A\bar{b}) = \mathrm{tp}(\bar{b}'/A\bar{b})$, па постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_{A\bar{b}}(\mathfrak{C})$ такав да $f(\bar{b}_0) = \bar{b}'$. Нека је $a = f(a_0)$. Тада $a_0 \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$ повлачи $a \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$, а $\bar{b}_0 \models \mathfrak{q}_{\restriction A\bar{b}a_0}$ повлачи $\bar{b}' \models \mathfrak{q}_{\restriction A\bar{b}a}$. Из $a \models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}}$ имамо $a \in \mathrm{I}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$. Из $\bar{b}' \models \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$ имамо да $(a, \bar{b}') \models (\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A}$, па из услова асиметричности $(\bar{b}', a) \not\models (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$. Како $\bar{b}' \models q_{\restriction A}$, закључујемо да $a \not\models \mathfrak{p}_{\restriction A\bar{b}'}$, тј. $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}')$. Дакле, $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}') \smallsetminus \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b})$, одакле по леми 4.35 следи $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}) \subsetneq \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(\bar{b}')$.

(iii) Према (i) и (ii), $\mathrm{tp}(\bar{b}, \bar{b}'/A) \neq \mathrm{tp}(\bar{b}', \bar{b}/A)$, па је $\mathfrak{q}$ асиметричан. □

Из леме 4.38 и тврђења 4.37 имамо следећу теорему.

Теорема 4.39.

(i) Правилан асиметричан тип је ортогоналан на сваки инваријантан симетричан тип.

(ii) Неортогоналност чува особине симетричности и асиметричности правилних типова.

(iii) Релација $\not\perp$ *је еквиваленција на скупу асиметричних правилних типова.*

Доказ. (i) Нека је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ правилан асиметричан тип и нека је $\mathfrak{q} \in \mathrm{S}(\mathfrak{C})$ инваријантан симетричан тип. Нека је $\mathfrak{C}' \succ \mathfrak{C}$ већи монструм и нека су $\mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{q}'$

проширења типова $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ на монструм $\mathfrak{C}'$. Монструм $\mathfrak{C}$ је мали из угла монструма $\mathfrak{C}'$, тип $\mathfrak{p}'$ је правилан и асиметричан над $\mathfrak{C}$, и $\mathfrak{q}'$ је $\mathfrak{C}$-инваријантан тип. Према леми 4.38, $\mathfrak{p}'_{\restriction\mathfrak{C}} \perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}'_{\restriction\mathfrak{C}}$, тј. $\mathfrak{p} \perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}$, одакле $\mathfrak{p} \perp \mathfrak{q}$.

(ii) Ово тврђење следи директно из (i).

(iii) Нека су $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ правилни асиметрични типови и нека је $\mathfrak{p} \not\perp \mathfrak{q}$ и $\mathfrak{p} \not\perp \mathfrak{r}$. Нека је $\mathfrak{C}' \succ \mathfrak{C}$ већи монструм и нека су $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}', \mathfrak{r}'$ проширења типова $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ на монструм $\mathfrak{C}'$. Монструм $\mathfrak{C}$ је мали из угла монструма $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{p}'$ је правилан и асиметричан над $\mathfrak{C}$, и $\mathfrak{p}'_{\restriction\mathfrak{C}} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}'_{\restriction\mathfrak{C}}$ и $\mathfrak{p}'_{\restriction\mathfrak{C}} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{r}'_{\restriction\mathfrak{C}}$. Према тврђењу 4.37, $\mathfrak{q}'_{\restriction\mathfrak{C}} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{r}'_{\restriction\mathfrak{C}}$, тј. $\mathfrak{q} \not\perp \mathfrak{r}$. $\square$

5. Очување инваријанти при $\not\perp^{\mathrm{w}}$

У овом одељку се бавимо питањем очувања инваријанти асиметричних правилних типова при $\not\perp^{\mathrm{w}}$. У општем случају не мора постојати никаква веза.

Пример 4.40. Уочимо модел $(\mathfrak{C}, <, P_i)_{i<\omega}$ из примера 2.17(3). Нека је $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ тип бесконачно великог елемента који садржи P_i, за све $i < \omega$. Нека је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ тип бесконачно великог елемента који садржи $\{\neg P_i(x) \mid i < \omega\}$. Тада $\mathfrak{p} \not\perp \mathfrak{p}_i$ јер је $\mathfrak{p}(x) \cup \mathfrak{p}_i(y)$ сагласан и са $x < y$ и са $y < x$, и слично $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{p}_{i\restriction\emptyset}$. Приметимо да постоје произвољно велики модели који испуштају $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$, па $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p}_i,\emptyset}(M)$ може бити произвољно густо линеарно уређење без крајних тачака, док је $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M)$ празно.

У случају конвексних типова ситуација је много лепша, чиме ћемо се надаље бавити. Видећемо да имамо два типа $\not\perp^{\mathrm{w}}$, које ћемо звати ограничени и неограничени тип. Циљ нам је да докажемо следећу теорему.

Теорема 4.41. *Претпоставимо да су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ правилни, конвексни и A-асиметрични, и $\mathfrak{p}_{\restriction A} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction A}$.*

- *(i) Претпоставимо да је $\mathfrak{p}_{\restriction A} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction A}$ ограниченог типа.*
  - *1) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, тада су $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ изоморфни.*
  - *2) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, тада су $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ антиизоморфни.*
- *(ii) Претпоставимо да су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ јако правилни и да је $\mathfrak{p}_{\restriction A} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction A}$ неограниченог типа. Тада су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ прости над A и:*
  - *1) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, тада су Дедекиндова комплетирања од $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ изоморфна.*
  - *2) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, тада су Дедекиндова комплетирања од $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$ антиизоморфна.*

Претпоставка 4.42. У овом одељку радимо под следећим претпоставкама:

1. $\mathfrak{p}(x)$ и $\mathfrak{q}(y)$ су фиксирани правилни A-асиметрични типови, конвексни над A.
2. Уређења $<_{\mathfrak{p}}$ и $<_{\mathfrak{q}}$ сведоче A-асиметричност и конвексност типова $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$.
3. Важи $p \not\perp^{w} q$, где су $p = \mathfrak{p}_{\restriction A}$ и $q = \mathfrak{q}_{\restriction A}$.

Постоје два суштински различита случаја, које ћемо посебно изучавати:

Ограничен случај Постоје $a \models p$, $b \models q$ и $\theta(x, y) \in \mathrm{tp}(a, b/A)$ такви да је формула $\theta(a, y)$ $\mathfrak{q}$-ограничена над A.

Неограничен случај Иначе.

5.1. Ограничен случај.

Пример 4.43. Примери ограниченог $\not\perp^{w}$.

(1) $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ су прости и $\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q} \neq \mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p}$.

Уочимо $M = (\mathbb{Q} \times \{0, 1\}, <_{\mathfrak{p}}, <_{\mathfrak{q}}, P, Q, S)$, где је $P(M) = \mathbb{Q} \times \{0\}$ и $Q(M) = \mathbb{Q} \times \{1\}$, $<_{\mathfrak{p}}$ и $<_{\mathfrak{q}}$ су природна уређења на $P(M)$ и $Q(M)$, и $S((a, 0), (b, 1))$ важи ако и само ако $a = b$. Дакле, M чине две дисјунктне копије уређених рационалних бројева и изоморфизам између њих (функција дефинисана са $S(x, y)$). Нека су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ типови бесконачно великог елемента који садрже редом $P(x)$ и $Q(x)$. Они су правилни и асиметрични над $\emptyset$. Лако је видети да је $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset} \not\perp^{w} \mathfrak{q}_{\restriction\emptyset}$. Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над $\emptyset$ су произвољне растуће реализације типа $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$; слично важи и за $\mathfrak{q}$. У сваком моделу изоморфизам између $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},\emptyset}(M)$ је одређен са S као функцијом.

(2) $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ су прости и $\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q} = \mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p}$.

Суштински, можемо посматрати претходни пример са истим типом $\mathfrak{p}$ и типом $\mathfrak{q}$ замењеним са типом бесконачно малог елемента који садржи $Q(x)$. Како бисмо добили пример такав да су $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},\emptyset}(M)$ анти-изоморфни, али неизоморфни, можемо модификовати претходни пример тако што заменимо $\mathbb{Q}$ са $\mathbb{Q}_1 = \omega_1 \times \mathbb{Q}$ (уређеним лексикографски) и посматрамо тип бесконачно великог елемента који садржи $P(x)$, $\mathfrak{p}$, и тип бесконачно малог елемента који садржи $Q(x)$, $\mathfrak{q}$. Приметимо да у овом случају $>_{\mathfrak{q}}$ сведочи да је $\mathfrak{q}$ асиметричан над $\emptyset$.

(3) $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ нису прости.

У оба примера (1) и (2), $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(x) = \{x\}$ и $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(x) = \{x\}$, па су оба типа $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ прости. Како бисмо добили примере у којима $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ нису прости, можемо посматрати $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Z}$ (уређене лексикографски) редом уместо $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}_1$ у (1) и (2). Тада је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(x)$ копија $(\mathbb{Z}, <)$ око x, и такође $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(x)$ је копија $(\mathbb{Z}, <)$ око x.

Лема 4.44. *Претпоставимо да* $a \models p$, $b \models q$ *и* $\theta(x,y) \in \mathrm{tp}(a,b/A)$, *и формула* $\theta(a,y)$ *је* $\mathfrak{q}$*-ограничена над* A. *Ако* $a' \models p$, $b' \models q$ *и* $\models \theta(a',b')$, *тада је* $\theta(a',y)$ $\mathfrak{q}$*-ограничена над* A.

Доказ. Изаберимо $c, c' \models q$ такве да је $c < \theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) < c'$. Како $a, a' \models p$, постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ такав да је $f(a) = a'$. Тада је $\theta(a',y)$ сагласна са q, јер $\models \theta(a,b)$ повлачи $\models \theta(a', f(b))$ и $f(b) \models q$. Такође, јасно је да $f(c) < \theta(a',\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) < f(c')$ и $f(c), f(c') \models q$. Према томе, $\theta(a',y)$ је $\mathfrak{q}$-ограничена над A. $\square$

Лема 4.45. *Претпоставимо да* $a \models p$, $b \models q$ *и* $\theta(x,y) \in \mathrm{tp}(a,b/A)$, *и формула* $\theta(a,y)$ *је* $\mathfrak{q}$*-ограничена над* A.

(i) *Ако је* (a,a') *Морлијев низ у* $\mathfrak{p}$ *над* A, *тада су скупови:*

$$\pi_{\mathfrak{q}}[\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})] \quad \textit{и} \quad \pi_{\mathfrak{q}}[\theta(a',\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})]$$

дисјунктни.

(ii) $\pi_{\mathfrak{p}}[\theta(\mathfrak{C},b) \cap p(\mathfrak{C})] = \{\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)\}$.

(iii) *Формула* $\theta(x,b)$ *је* $\mathfrak{p}$*-ограничена над* A.

(iv) $\pi_{\mathfrak{q}}[\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})] = \{\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)\}$.

(v) $\theta(\mathfrak{C},b) \cap p(\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ *и* $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$.

(vi) $a \in \mathrm{Sem}_A(b)$ *и* $b \in \mathrm{Sem}_A(a)$.

Доказ. (i) Да бисмо упростили запис, означимо $\pi_{\mathfrak{q}}[\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})]$ само са $\pi_{\mathfrak{q}}(a)$. Претпоставимо супротно, да важи $\pi_{\mathfrak{q}}(a) \cap \pi_{\mathfrak{q}}(a') \neq \emptyset$ кад год је (a,a') Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Означимо да $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a)$ конвексно затворење $\pi_{\mathfrak{q}}(a)$ у $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})$. Према томе, кад год је (a,a') Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, тада је $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a) \cap \pi^c_{\mathfrak{q}}(a') \neq \emptyset$.

Како је $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ ограничен у $q(\mathfrak{C})$, то је и $\pi_{\mathfrak{q}}(a)$, па и $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a)$, ограничен у $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})$. (Ако су $c, c' \models q$ такви да $c < \theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) < c'$, и ако изаберемо $c_0, c'_0 \models q$ такве да $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(c_0) < c$ и $c' < \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(c'_0)$, тада су $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(c_0)$ и $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(c'_0)$ границе за $\pi_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a)$ у $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})$.)

Према томе, можемо изабрати $a_1, a_2, a_3 \models p$ такве да $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_1) <_{\mathfrak{q}} \pi^c_{\mathfrak{q}}(a_2) <_{\mathfrak{q}} \pi^c_{\mathfrak{q}}(a_3)$; нека $a_4 \models \mathfrak{p}_{\restriction Aa_1a_2a_3}$. Тада су (a_1,a_4), (a_2,a_4) и (a_3,a_4) Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A, па $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_4)$ сече сваки од $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_1)$, $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_2)$ и $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_3)$. Како су сви конвексни у $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})$, то је средњи од њих, $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_2)$, садржан у $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_4)$: $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_2) \subsetneq \pi^c_{\mathfrak{q}}(a_4)$. Како то важи за Морлијев низ (a_2,a_4), важи и за сваки Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A.

Изаберимо сада $a_0 \models p$ такво да је $a_0 < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1) \cup \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_2)$; (a_0,a_1) и (a_0,a_2) су Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A. Према претходном је тада $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_0) \subsetneq \pi^c_{\mathfrak{q}}(a_1), \pi^c_{\mathfrak{q}}(a_2)$, одакле, $\pi^c_{\mathfrak{q}}(a_1) \cap \pi^c_{\mathfrak{q}}(a_2) \neq \emptyset$. Контрадикција.

(ii) Јасно је да $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \in \pi_{\mathfrak{p}}[\theta(\mathfrak{C},b) \cap p(\mathfrak{C})]$. Ако $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a') \neq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ припада скупу $\pi_{\mathfrak{p}}[\theta(\mathfrak{C},b) \cap p(\mathfrak{C})]$, тада је један од (a,a') и (a',a) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, и $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$

припада и $\pi_{\mathfrak{q}}[\theta(a,\mathfrak{C})\cap q(\mathfrak{C})]$ и $\pi_{\mathfrak{q}}[\theta(a',\mathfrak{C})\cap q(\mathfrak{C})]$. Како ово није могуће према (i), закључујемо да је $\pi_{\mathfrak{p}}[\theta(\mathfrak{C},b)\cap p(\mathfrak{C})]=\{\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)\}$.

Сада (iii) следи директно из (ii). Према (iii) можемо да заменимо улоге $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, па (iv) следи из (ii). Тада (v) следи директно из (ii) и (iv).

(vi) Како су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ редом $<_{\mathfrak{p}}$ и $<_{\mathfrak{q}}$ конвексни, и како су $\theta(x,b)$ и $\theta(a,y)$ редом $\mathfrak{p}$-ограничена и $\mathfrak{q}$-ограничена формула над A, према леми 4.14 можемо изабрати $\phi_{\mathfrak{p}}(x)\in p(x)$ и $\phi_{\mathfrak{q}}(y)\in q(y)$ тако да формуле $\phi_{\mathfrak{p}}(x)\wedge\theta(x,b)$ и $\phi_{\mathfrak{q}}(y)\wedge\theta(a,y)$ редом сведоче $a\in \mathrm{Sem}_A(b)$ и $b\in\mathrm{Sem}_A(a)$. □

Лема 4.46. *Претпоставимо да је формула $\theta(x,y)$ сагласна са $p(x)\cup q(y)$. Следећи услови су еквивалентни:*

(1) $\theta(a,y)$ је $\mathfrak{q}$-ограничена над A за неко (све) $a\models p$;
(2) $\theta(x,b)$ је $\mathfrak{p}$-ограничена над A за неко (све) $b\models q$;
(3) Постоје формуле $\phi_{\mathfrak{p}}(x)\in p(x)$ и $\phi_{\mathfrak{q}}(y)\in q(y)$ такве да је формула:

$$\theta'(x,y)=\phi_{\mathfrak{p}}(x)\wedge\phi_{\mathfrak{q}}(y)\wedge\theta(x,y)$$

сагласна са $p(x)\cup q(y)$, и за све $a\models p$ и $b\models q$ такве да $\models\theta'(a,b)$ важи $\theta'(a,\mathfrak{C})\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$ и $\theta'(\mathfrak{C},b)\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$.

Доказ. (1) и (2) су еквивалентни према леми 4.45(v). Очигледно (3) повлачи и (1) и (2).

Претпоставимо да важе (1) и (2), и претпоставимо да су реализације $a\models p$ и $b\models q$ такве да $\models\theta(a,b)$. Тада су $\theta(a,y)$ и $\theta(x,b)$ редом $\mathfrak{q}$-ограничена и $\mathfrak{p}$-ограничена формула, па како су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ редом $<_{\mathfrak{p}}$-конвексан и $<_{\mathfrak{q}}$-конвексан над A, према леми 4.14 постоје формуле $\phi_{\mathfrak{p}}(x)\in p(x)$ и $\phi_{\mathfrak{q}}(y)\in q(y)$ такве да $\phi_{\mathfrak{p}}(x)\wedge\theta(x,b)$ и $\phi_{\mathfrak{q}}(y)\wedge\theta(a,y)$ редом сведоче $a\in\mathrm{Sem}_A(b)$ и $b\in\mathrm{Sem}_A(a)$, тј. такве да важи:

$$\phi_{\mathfrak{p}}(x)\wedge\theta(x,b)\vdash p(x)\quad\text{ и }\quad\phi_{\mathfrak{q}}(y)\wedge\theta(a,y)\vdash q(y).$$

Нека је $\theta'(x,y)=\phi_{\mathfrak{p}}(x)\wedge\phi_{\mathfrak{q}}(y)\wedge\theta(x,y)$. Јасно је да важи $\models\theta'(a,b)$, па је $\theta'(x,y)$ сагласна са $p(x)\cup q(y)$. Такође, $\theta'(a,y)$ је $\mathfrak{q}$-ограничена над A, па према леми 4.45(v) важи $\theta'(\mathfrak{C},b)\cap p(\mathfrak{C})\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ и $\theta'(a,\mathfrak{C})\cap q(\mathfrak{C})\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$, и како:

$$\theta'(x,b)\vdash p(x)\quad\text{ и }\quad\theta'(a,y)\vdash q(y),$$

закључујемо да $\theta'(\mathfrak{C},b)\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ и $\theta'(a,\mathfrak{C})\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$.

Претпоставимо сада да $\models\theta'(a',b')$ важи за неке $a'\models p$ и $b'\models q$. Изаберимо аутоморфизам $f\in\mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ такав да $f(a')=a$. Тада важи $\models\theta'(a,f(b'))$. Према томе $f(b')\in\theta'(a,\mathfrak{C})\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$, па $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(f(b'))=\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$. Сада $\theta'(a,\mathfrak{C})\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(f(b'))$, применом f^{-1}, повлачи $\theta'(a',\mathfrak{C})\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b')$. Слично, $\theta'(\mathfrak{C},b')\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$. □

Мотивисани лемом 4.46 дајемо следећу дефиницију.

Дефиниција 4.47. За формулу $\theta(x,y)$ кажемо да је $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-*ограничена над* A ако је сагласна са $p(x)\cup q(y)$, и ако за произвољне $a\models p$ и $b\models q$ такве да $\models\theta(a,b)$ важи $\theta(\mathfrak{C},b)\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ и $\theta(a,\mathfrak{C})\subseteq\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$.

Напомена 4.48. Према услову (3) у леми 4.46 свака формула $\theta(x,y)$, таква да је $\theta(a,y)$ $\mathfrak{q}$-ограничена над A, може се модификовати (додавањем формуле из $p(x)$ и формуле из $q(x)$) тако да је нова формула $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-ограничена над A.

Лема 4.49. *Претпоставимо да је* $\theta(x,y)\in\operatorname{tp}(a,b/A)$ $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-*ограничена над* A. *За све* $a,a'\models p$ *важи:*

$$a'\in\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)\quad \textit{ако и само ако}\quad \pi_{\mathfrak{q}}[\theta(a,\mathfrak{C})\cap q(\mathfrak{C})]=\pi_{\mathfrak{q}}[\theta(a',\mathfrak{C})\cap q(\mathfrak{C})].$$

Симетрично, за све $b,b'\models q$ *важи:*

$$b'\in\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)\quad \textit{ако и само ако}\quad \pi_{\mathfrak{p}}[\theta(\mathfrak{C},b)\cap p(\mathfrak{C})]=\pi_{\mathfrak{p}}[\theta(\mathfrak{C},b')\cap p(\mathfrak{C})].$$

Доказ. Да бисмо упростили запис, за $a\models p$ и $b\models q$ означимо са $\pi_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\pi_{\mathfrak{p}}(b)$ редом скупове $\pi_{\mathfrak{q}}[\theta(a,\mathfrak{C})\cap q(\mathfrak{C})]$ и $\pi_{\mathfrak{p}}[\theta(\mathfrak{C},b)\cap p(\mathfrak{C})]$.

$\Leftarrow$: Нека је $\pi_{\mathfrak{q}}(a)=\pi_{\mathfrak{q}}(a')=\{\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)\}$. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да $a'\notin\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Тада је или (a,a') или (a',a) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A; без умањења општости, (a,a') је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, тј. $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)<_{\mathfrak{p}}\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$. Како $\pi_{\mathfrak{q}}(a)=\pi_{\mathfrak{q}}(a')$ важи за Морлијев низ (a,a'), то $\pi_{\mathfrak{q}}(c)=\pi_{\mathfrak{q}}(c')$ важи за сваки Морлијев низ (c,c') у $\mathfrak{p}$ над A. Изаберимо $b_0\models q$ тако да $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)\neq\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0)$ и изаберимо аутоморфизам $f\in\operatorname{Aut}_A(\mathfrak{C})$ такав да $f(b)=b_0$. Нека f слика a и a' редом у a_0 и a_0'; тада је $\pi_{\mathfrak{q}}(a_0)=\pi_{\mathfrak{q}}(a_0')=\{\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0)\}$. Како су и (a,a') и (a_0,a_0') Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A, ако је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)<_{\mathfrak{p}}\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_0')$, тада је (a,a_0') Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, а ако је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)\geqslant_{\mathfrak{p}}\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_0')$, тада је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_0)<_{\mathfrak{p}}\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_0')\leqslant_{\mathfrak{p}}\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)<_{\mathfrak{p}}\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$, па је (a_0,a') Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Дакле, бар један од (a,a_0') и (a_0,a') је Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Ако је (a,a_0') Морлијев низ, имамо $\pi_{\mathfrak{q}}(a)=\pi_{\mathfrak{q}}(a_0')$, тј. $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)=\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0)$, што је контрадикција. Слично, ако је (a_0,a') Морлијев низ, имамо $\pi_{\mathfrak{q}}(a_0)=\pi_{\mathfrak{q}}(a')$, па поново имамо контрадикцију $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)=\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0)$.

$\Rightarrow$: Нека је $a'\in\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)\neq\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b')$, где је $\pi_{\mathfrak{q}}(a)=\{\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)\}$ и $\pi_{\mathfrak{q}}(a')=\{\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b')\}$. Тада $b'\notin\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$, па као у доказу ($\Leftarrow$) можемо закључити да $\pi_{\mathfrak{p}}(b)\neq\pi_{\mathfrak{p}}(b')$. Како је $\pi_{\mathfrak{p}}(b)=\{\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)\}$ и $\pi_{\mathfrak{p}}(b')=\{\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')\}$, добијамо $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)\neq\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$, тј. $a'\notin\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Контрадикција. $\square$

Последица 4.50. *Према леми 4.49, за сваку* $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-*ограничену над* A *формулу* $\theta(x,y)$ *са:*

$$F_\theta(\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a))=\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)\quad \textit{акко}\quad \models\theta(a',b'),\ \textit{за неке}\ a'\in\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)\ \textit{и}\ b'\in\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$$
$$\textit{акко}\quad G_\theta(\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b))=\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$$

су добро дефинисана пресликавања:

$$F_\theta : \mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}) \quad \textit{и} \quad G_\theta : \mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}) \longrightarrow \mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p}).$$

Како су $F_\theta \circ G_\theta$ и $G_\theta \circ F_\theta$ идентичка пресликавања, то су F_θ и G_θ узајамно инверзне бијекције.

Фиксираћемо ознаке F_θ и G_θ за пресликавања из претходне последице. У следећој леми ћемо доказати да пресликавања F_θ и G_θ не зависе од избора $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-ограничене над A формуле $\theta(x, y)$. Према томе веза између $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$ и $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})$ је у извесном смислу канонска.

Лема 4.51. *Ако су $\theta(x, y)$ и $\theta'(x, y)$ две $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-ограничене формуле над A, тада је $F_\theta = F_{\theta'}$ и $G_\theta = G_{\theta'}$.*

Доказ. Нека су $\theta(x, y)$ и $\theta'(x, y)$ две $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-ограничене формуле над A, нека су $a \models p$ и $b, b' \models q$ такви да $\models \theta(a, b) \wedge \theta'(a, b')$, тј. $F_\theta(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)) = \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$ и $F_{\theta'}(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)) = \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) \neq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$. Тада је или (b, b') или (b', b) Морлијев низ у $\mathfrak{q}$ над A; без умањења општости нека је (b, b') Морлијев низ у $\mathfrak{q}$ над A, тј. $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) <_\mathfrak{q} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$. Како су $\theta(x, y)$ и $\theta'(x, y)$ $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-ограничене над A, важи $\theta(a, \mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$ и $\theta'(a, \mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$, одакле је $\theta(a, \mathfrak{C}) <_\mathfrak{q} \theta'(a, \mathfrak{C})$.

Нека је $\psi(a, y)$ формула:

$$\theta(a, \mathfrak{C}) <_\mathfrak{q} y <_\mathfrak{q} \theta'(a, \mathfrak{C}).$$

Формула $\psi(a, y)$ је сагласна са $q(y)$, јер је задовољавају сви елементи за које важи $b <_\mathfrak{q} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(y) <_\mathfrak{q} b'$. Такође, формула $\psi(a, y)$ је $\mathfrak{q}$-ограничена над A, јер $b <_\mathfrak{q} \psi(a, \mathfrak{C}) <_\mathfrak{q} b'$. Према леми 4.45(iv), $\pi_\mathfrak{q}[\psi(a, \mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})]$ је једночлани скуп. Са друге стране, по дефиницији формуле $\psi(a, y)$ тај скуп садржи све $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(y)$ тако да $b <_\mathfrak{q} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(y) <_\mathfrak{q} b'$. Контрадикција.

Сличан аргумент доказује $G_\theta = G_{\theta'}$. □

Како пресликавања F_θ и G_θ не зависе од $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-ограничене над A формуле $\theta(x, y)$, надаље ћемо их означавати са F и G.

Лема 4.52. *Претпоставимо да $a \models p$ и $b \models q$. Тада:*

(i) $b' \models \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$ ако и само ако $F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)) <_\mathfrak{q} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$;

(ii) $a' \models \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$ ако и само ако $G(\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)) <_\mathfrak{p} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(a')$.

Доказ. Доказаћемо (i); (ii) се слично доказује. Нека $a \models p$. Изаберимо $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-ограничену формулу над A, $\theta(x, y)$, и $b \models q$ тако да $\models \theta(a, b)$; тада је $F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)) = \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$.

$\Rightarrow$: Претпоставимо да $b' \models \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$. Довољно је да докажемо $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) <_\mathfrak{q} b'$. Сетимо се да је према леми 4.19:

$$\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) = \bigcup_{\sigma(y,z)\in\mathcal{B}_\mathfrak{q}} \sigma(b,\mathfrak{C}),$$

где је $\mathcal{B}_\mathfrak{q}$ скуп формула дефинисан у 4.18. Нека је $c \in \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$ произвољан елемент и изаберимо $\sigma(y,z) \in \mathcal{B}_\mathfrak{q}$ тако да важи $\models \sigma(b,c)$. Уочимо формулу:

$$\theta'(a,y) = \exists z\,(\theta(a,z) \wedge \sigma(z,y)).$$

Јасно је да важи $\models \theta'(a,c)$. Ако $\theta'(a,c_0)$, тада за неко b_0 имамо $\models \theta(a,b_0) \wedge \sigma(b_0,c_0)$. Како $\theta(a,\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$ (због $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-ограничености формуле $\theta(x,y)$) добијамо $b_0 \in \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$. Како је $\sigma(b_0,\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b_0) = \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$ добијамо и $c_0 \in \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$. Дакле, $\theta'(a,\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$, па је $\theta'(a,y)$ $\mathfrak{q}$-ограничена формула. Према томе формула „$\theta'(a,\mathfrak{C}) <_\mathfrak{q} y$" нема горње $<_\mathfrak{q}$-ограничење, па припада типу $\mathfrak{q}_{\restriction Aa}$. Како $c \in \theta'(a,\mathfrak{C})$ и $b' \models \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$ добијамо $c <_\mathfrak{q} b'$.

Дакле, b' је већи од сваког $c \in \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$, па је $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) <_\mathfrak{q} b'$.

$\Leftarrow$: Претпоставимо да $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) <_\mathfrak{q} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$ за $b' \models q$, и претпоставимо супротно да $b' \not\models \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$. Тада постоји формула $\theta'(a,y) \in \mathrm{tp}(b'/Aa)$ таква да је $\theta'(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ одозго $<_\mathfrak{q}$-ограничена. Уочимо формулу $\theta''(a,y)$:

$$\theta(a,\mathfrak{C}) <_\mathfrak{q} y \;\wedge\; \theta'(a,y).$$

Јасно је да важи $\models \theta''(a,b')$, јер је $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) <_\mathfrak{q} b'$ и $\theta(a,\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$ због $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-ограничнености над A формуле $\theta(x,y)$. Формула $\theta''(a,y)$ је $<_\mathfrak{q}$-ограничена одозго, јер је формула $\theta'(a,y)$ таква; формула $\theta''(a,y)$ је $<_\mathfrak{q}$-ограничена одоздо, јер јој је свако решење веће од $b \in \theta(a,\mathfrak{C})$. Према томе, $\theta''(a,y)$ је $\mathfrak{q}$-ограничена над A. Према напомени 4.48, $\theta''(x,y)$ се може модификовати до $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$-ограничене формуле над A; означимо ту модификацију такође са $\theta''(x,y)$, остаје $\models \theta''(a,b')$. Како је $F_\theta(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)) = \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$, $F_{\theta''}(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)) = \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$ и $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) \neq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$, закључујемо да је $F_\theta \neq F_{\theta''}$, што није могуће према леми 4.51. □

Лема 4.53.

(i) $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$ *ако и само ако је* F *растуће.*

(ii) $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$ *ако и само ако је* F *опадајуће.*

Доказ. Нека $(a,a') \models (\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$, тј. $\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a) <_\mathfrak{p} \mathcal{E}_\mathfrak{p}(a')$. Нека су $b,b' \models q$ такви да $F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)) = \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$ и $F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a')) = \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$. Дакле, $G(\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)) <_\mathfrak{p} G(\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b'))$. Јасно је да је $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) \neq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$, па имамо два случаја.

Случај 1. $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) <_\mathfrak{q} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$ (тј. $F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)) <_\mathfrak{q} F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a'))$).

Према леми 4.52 из $F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)) <_\mathfrak{q} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')$ и $G(\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b')) \not<_\mathfrak{p} \mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)$ редом имамо $(a,b') \models (\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A}$ и $(b',a) \not\models (\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$. Према томе, $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$.

Случај 2. $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b') <_\mathfrak{q} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$ (тј. $F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a')) <_\mathfrak{q} F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a))$).

Према леми 4.52 из $F(\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a')) <_\mathfrak{q} \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$ и $G(\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)) <_\mathfrak{p} \mathcal{E}_\mathfrak{p}(a')$ редом имамо $(a', b) \models (\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A}$ и $(b, a') \models (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$. Према томе, $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$.

Доказ леме сада лако следи. $\square$

Из последице 4.50 и леме 4.53 директно добијамо следећу теорему.

Теорема 4.54.

(i) Ако је $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада је* F *изоморфизам уређења* $(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p}), <_\mathfrak{p})$ *и* $(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}), <_\mathfrak{q})$.

(ii) Ако је $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада је* F *изоморфизам уређења* $(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p}), <_\mathfrak{p})$ *и* $(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}), >_\mathfrak{q})$.

Уочимо сада мали модел $M \supseteq A$. Означимо са $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})$ скуп:

$$\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p}) = \{\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a) \cap M \mid a \in p(M)\},$$

и слично скуп $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q})$. Доказаћемо да изоморфизам F индукује изоморфизам између уређења $(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p}), <_\mathfrak{p})$ и једног од уређења $(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q}), <_\mathfrak{q})$ и $(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q}), >_\mathfrak{q})$. Означимо са F_M рестрикцију изоморфизма F на $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})$.

Тврђење 4.55. *Нека је* $M \supseteq A$.

(i) Ако је $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада је* F_M *изоморфизам уређења* $(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p}), <_\mathfrak{p})$ *и* $(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q}), <_\mathfrak{q})$. *Специјално,* $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M) = \mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)$.

(ii) Ако је $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада је* F_M *изоморфизам уређења* $(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p}), <_\mathfrak{p})$ *и* $(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q}), >_\mathfrak{q})$. *Специјално,* $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(M) = \mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},A}(M)^*$.

Доказ. Довољно је доказати да F_M слика $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})$ на $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q})$, јер је F_M 1-1 као рестрикција F и чува одговарајуће уређење. Нека је $\theta(x, y)$ нека $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-ограничена над A формула. Нека $\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a) \cap M \neq \emptyset$ и $a' \in \mathcal{E}_\mathfrak{p}(a) \cap M$, тада $a' \in p(M)$. Нека је $b \models q$ такво да $\models \theta(a', b)$; како је $\theta(x, y)$ $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-ограничена имамо да је $\theta(a', \mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b)$, специјално $\theta(a', y) \vdash q(y)$. Како $\theta(a', y)$ има решење у $\mathfrak{C}$, због елементарности има решење и у M; нека је $b' \in M$ такво да $\models \theta(a', b')$. Из $\theta(a', y) \vdash q(y)$ следи $b' \in q(M)$, па је $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b') \cap M \neq \emptyset$ и F_M слика $\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a) \cap M = \mathcal{E}_\mathfrak{p}(a') \cap M$ у $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b') \cap M$.

Слично доказујемо да је F_M на. Нека $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) \cap M \neq \emptyset$ и $b' \in \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) \cap M$, тада $b' \in q(M)$. Нека је $a \models p$ такво да $\models \theta(a, b')$; због $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-ограничености имамо да је $\theta(\mathfrak{C}, b') \subseteq \mathcal{E}_\mathfrak{p}(a)$, специјално $\theta(x, b') \vdash p(x)$. Како $\theta(x, b')$ има решење у $\mathfrak{C}$, због елементарности има решење и у M; нека је $a' \in M$ такво да $\models \theta(a', b')$. Из $\theta(x, b') \vdash p(x)$ следи $a' \in p(M)$, па је $\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a') \cap M \neq \emptyset$ и F_M слика $\mathcal{E}_\mathfrak{p}(a') \cap M$ у $\mathcal{E}_\mathfrak{q}(b') \cap M = \mathcal{E}_\mathfrak{q}(b) \cap M$. $\square$

5.2. Неограничен случај.

Пример 4.56. Примери неограниченог $\not\perp^{\mathrm{w}}$.

(1) $\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q} \neq \mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p}$.

Уочимо $M = (\mathbb{R}, <_{\mathfrak{p}}, <_{\mathfrak{q}}, P, Q, S)$ где је $P(M)$ скуп ирационалних бројева, $Q(M)$ је скуп рационалних бројева, $<_{\mathfrak{p}}$ и $<_{\mathfrak{q}}$ су рестрикције природног уређења редом на $P(M)$ и $Q(M)$, и $S(a, b)$ важи акко је a ирационалан, b рационалан и $a < b$ (у природном уређењу). Нека су $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ типови бесконачно великог елемента који садрже редом $P(x)$ и $Q(x)$. Оба пара $(\mathfrak{p}, P(x))$ и $(\mathfrak{q}, Q(x))$ су јако правилни над $\emptyset$ и асиметрични над $\emptyset$ (што редом сведоче $<_{\mathfrak{p}}$ и $<_{\mathfrak{q}}$), и $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction\emptyset}$. $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M)$ је једнак типу уређења ирационалних бројева, а $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},\emptyset}(M)$ је једнак типу уређења рационалних бројева. Међутим Дедекиндова комплетирања ових инваријанти су изоморфна и изоморфизам је индукован са S.

(2) $\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q} = \mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p}$.

Суштински, можемо искористити претходни пример са истим типом $\mathfrak{p}$ и типом $\mathfrak{q}$ замењеним са типом бесконачно малог елемента који садржи $Q(x)$. Како бисмо добили пример у коме су Дедекиндова комплетирања од $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},\emptyset}(M)$ антиизоморфна, али неизоморфна, можемо модификовати претходни пример тако што ћемо заменити $\mathbb{R}$ са $\mathbb{R}_1 = \omega_1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ са $\mathbb{Q}_1 = \omega_1 \times \mathbb{Q}$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ са $\mathbb{I}_1 = \omega_1 \times \mathbb{I}$ (сви су уређени лексикографски) и узети да $S((\alpha, a), (\beta, b))$ важи ако и само ако $\alpha < \beta$ или $\alpha = \beta$ и $a < b$. Посматрајмо сада тип бесконачно великог елемента који садржи $P(x)$, $\mathfrak{p}$, и тип бесконачно малог елемента који садржи $Q(x)$, $\mathfrak{q}$. Оба пара $(\mathfrak{p}, P(x))$ и $(\mathfrak{q}, Q(x))$ су јако правилни над $\emptyset$ и асиметрични над $\emptyset$ (што редом сведоче $<_{\mathfrak{p}}$ и $>_{\mathfrak{q}}$), и $\mathfrak{p}_{\restriction\emptyset} \not\perp^{\mathrm{w}} \mathfrak{q}_{\restriction\emptyset}$. $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},\emptyset}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\mathfrak{q},\emptyset}(M)$ су изоморфни лексикографски уређеним $\omega_1 \times \mathbb{I}$ и $\omega_1^* \times \mathbb{Q}$. Њихова Дедекиндова комплетирања су антиизоморфна и антиизоморфизам је индукован са S.

Претпоставка 4.57. Уз претпоставке из 4.42, у овом одељку претпостављамо и да су $(\mathfrak{p}(x), \phi_{\mathfrak{p}}(x))$ и $(\mathfrak{q}(y), \phi_{\mathfrak{q}}(y))$ јако правилни.

Претпоставимо да нисмо у ограниченом случају. Тада за све $a \models p$, $b \models q$ и све формуле $\theta(x, y) \in \mathrm{tp}(a, b/A)$, формула $\theta(a, y)$ није $\mathfrak{q}$-ограничена над A, нити је формула $\theta(x, b)$ $\mathfrak{p}$-ограничена над A. Како су Морлијеви низови у $\mathfrak{q}$ над A $<_{\mathfrak{q}}$-растући, ако додатно формула $\theta(a, y) \notin \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$, тада је $\theta(a, \mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ ограничен одозго (било којом реализацијом типа $\mathfrak{q}_{\restriction Aa}$) и неограничен одоздо у $q(\mathfrak{C})$; слично важи ако $\theta(x, b) \notin \mathfrak{p}_{\restriction Ab}$. Рећи ћемо да је формула $\theta(a, y)$ ограничена одозго (одоздо) у $\mathfrak{q}(\mathfrak{C})$ ако је $\theta(a,y)$ сагласна са $q(y)$ и ако постоји $b \models q$ тако да $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) < b$ $\;(b < \theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}))$.

Ако је $(P,\leqslant)$ парцијално уређење и $X \subseteq Y \subseteq P$, рећи ћемо да је X на доле затворен у Y у односу на $\leqslant$ ако $y \in Y \wedge y \leqslant x \wedge x \in X$ повлачи $y \in X$. Најмањи на доле затворен подскуп од Y који садржи X ћемо звати доње затворење скупа X.

Лема 4.58. *Претпоставимо да $a \models p$, $b \models q$ и $\theta(x,y) \in \mathrm{tp}(a,b/A)$, и претпоставимо да $\theta(a,y) \notin \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$. Тада постоји формула $\theta^{\mathrm{d}}(x,y) \in \mathrm{tp}(a,b/a)$ таква да важе следећи услови:*

(1) $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C})$ је на доле затворен (у односу на $\leqslant_{\mathfrak{q}}$) подскуп од $\phi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{C})$;
(2) $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ је доње затворење скупа $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ у $q(\mathfrak{C})$.

Доказ. Нека $b_1 \models \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$; како $\theta(a,y) \notin \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$, то је b_1 горње ограничење за $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$. Тада важи:

$$\{\theta(a,y)\} \cup q(y) \vdash y <_{\mathfrak{q}} b_1,$$

па по компактности изаберимо $\varphi(y) \in q(y)$ такву да:

$$\models \forall y\, (\theta(a,y) \wedge \varphi(y) \Rightarrow y <_{\mathfrak{q}} b_1).$$

Дефинишимо формулу $\theta^{\mathrm{d}}(a,y)$ са:

$$\theta^{\mathrm{d}}(a,y) = \phi_{\mathfrak{q}}(y) \wedge \exists z\, (\theta(a,z) \wedge \varphi(z) \wedge y \leqslant_{\mathfrak{q}} z).$$

Приметимо да $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C})$ јесте на доле затворен подскуп од $\phi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{C})$: претпоставимо да $\models \phi_{\mathfrak{q}}(b')$, $b' \leqslant_{\mathfrak{q}} b''$ и $\models \theta^{\mathrm{d}}(a,b'')$. Изаберимо c које је сведок за егзистенцијални квантификатор у $\models \theta^{\mathrm{d}}(a,b'')$, тј. $\models \theta(a,c) \wedge \varphi(c) \wedge b'' \leqslant_{\mathfrak{q}} c$. Тада је $b' \leqslant_{\mathfrak{q}} c$, па c сведочи да $\models \exists z\, (\theta(a,z) \wedge \varphi(z) \wedge b' \leqslant_{\mathfrak{q}} z)$, и како $\models \phi_{\mathfrak{q}}(b')$ добијамо $\models \theta^{\mathrm{d}}(a,b')$. Дакле, $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C})$ је на доле затворен подскуп од $\phi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{C})$.

Остаје да докажемо да важи услов (2), тј. да је $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ доње затворење скупа $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ у $q(\mathfrak{C})$. Најпре докажимо да $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) \subseteq \theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$. Нека $b' \in \theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$. Тада $\models \phi_{\mathfrak{q}}(b')$ јер $\phi_{\mathfrak{q}}(y) \in q(y)$. Такође, b' сведочи да важи $\models \exists z\, (\theta(a,z) \wedge \varphi(z) \wedge b' \leqslant_{\mathfrak{q}} z)$ $\;(\models \varphi(b')$ такође важи јер $\varphi(y) \in q(y))$. Према томе, $\models \theta^{\mathrm{d}}(a,b')$.

Претпоставимо сада да $b' \in \theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$. Довољно је да докажемо да је b' $\leqslant_{\mathfrak{q}}$-мањи од неког елемента из $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$. Нека је c сведок за егзистенцијални квантификатор у $\models \theta^{\mathrm{d}}(a,b')$. Тада важи $\models \theta(a,c) \wedge \varphi(c)$, па по избору формуле $\varphi(y)$ имамо да је $c <_{\mathfrak{q}} b_1$, па како је $b' \leqslant_{\mathfrak{q}} c$ имамо $b' \leqslant_{\mathfrak{q}} c <_{\mathfrak{q}} b_1$. Како је $q(\mathfrak{C})$ $\leqslant_{\mathfrak{q}}$-конвексан, добијамо $c \models q$. Дакле, $b' \leqslant_{\mathfrak{q}} c$ и $c \in \theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$, што завршава доказ леме. $\square$

Сетимо се да је према дефиницији 4.33 скуп $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ дефинисан са:

$$\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a) = \{b \models q \mid b \not\models \mathfrak{q}_{\restriction Aa}\}.$$

Лема 4.59. *Претпоставимо да $a \models p$, $b \models q$ и $\theta(x,y) \in \mathrm{tp}(a,b/A)$, и претпоставимо да $\theta(a,y) \notin \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$. Нека је $\theta^{\mathrm{d}}(x,y) \in \mathrm{tp}(a,b/A)$ формула дата у леми 4.58. Тада:*

(i) $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) = \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$*;*

(ii) $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ *је релативно дефинабилан над* Aa *у* $q(\mathfrak{C})$ *и, слично,* $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(b)$ *је релативно дефинабилан над* Ab *у* $p(\mathfrak{C})$.

Доказ. (i) Како је, према леми 4.58, $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ доње затворење скупа $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ у $q(\mathfrak{C})$, и како је $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ ограничен одозго у $q(\mathfrak{C})$ (било којом реализацијом $b_1 \models \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$), то је $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ ограничен одозго у $q(\mathfrak{C})$. Дакле, $\theta^{\mathrm{d}}(a,y) \notin \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$, па је $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$.

Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да је $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) \subsetneq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$; нека је $b' \in \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ и $b' \notin \theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C})$. Претпоставимо да формула $\varphi(a,y) \in \mathrm{tp}(b'/Aa)$ сведочи $b' \in \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$; тада $\varphi(a,y) \notin \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$, па је $\varphi(a,y)$ ограничена одозго у $q(\mathfrak{C})$. Уочимо формулу:

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y) \wedge \neg\theta^{\mathrm{d}}(x,y).$$

Тврдимо да је $\psi(a,y) \in \mathrm{tp}(b'/Aa)$ $\mathfrak{q}$-ограничена формула над A, што је контрадикција. Јасно је да је $\psi(a,y)$ сагласна са $q(y)$ јер је b' задовољава. Такође, $\psi(a,y)$ је ограничена одозго у $q(\mathfrak{C})$ јер је $\varphi(a,y)$ ограничена одозго у $q(\mathfrak{C})$. Доказаћемо да је $\neg\theta^{\mathrm{d}}(a,y)$ ограничена одоздо у $q(\mathfrak{C})$, што повлачи да је $\psi(a,y)$ ограничена одоздо у $q(\mathfrak{C})$ и завршава доказ.

Нека је $b_0 \models q$ такво да $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0) <_{\mathfrak{q}} b$. Како је $b \in \theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$, и како је, према леми 4.58, $\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ доње затворење скупа $\theta(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ у $\mathfrak{q}(\mathfrak{C})$, закључујемо да је $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0) \subseteq \theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$. Дакле:

$$\bigcup\{\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0) \mid b_0 \models q,\ \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0) <_{\mathfrak{q}} b\} \subseteq \theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}).$$

Како је $<_{\mathfrak{q}}$ на $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})$ линеарно, закључујемо да је произвољно $b_0 \models q$, такво да $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0) <_{\mathfrak{q}} b$, доње ограничење за $\neg\theta^{\mathrm{d}}(a,\mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$ у $q(\mathfrak{C})$, што смо и желели да докажемо.

(ii) Према (i) формула $\theta^{\mathrm{d}}(a,y)$ са параметрима из Aa релативно дефинише $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ у $q(\mathfrak{C})$. Симетричан аргумент доказује да је $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(b)$ релативно дефинабилан над Ab у $p(\mathfrak{C})$: ако је $a \models p$ такво да $a \in \mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(b)$, и ако формула $\theta(x,y) \in \mathrm{tp}(a,b/A)$, тада је $\theta(x,b)$ ограничена одозго у $p(\mathfrak{C})$, и докази претходне леме и дела (i) пролазе. $\square$

Лема 4.60. *Претпоставимо да $a, a' \models p$. Следећи услови су еквивалентни:*

(1) $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) = \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$; *(2)* $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a) = \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$; *(3)* $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)] = \pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{q}(a')]$.

Доказ. (2)⇒(3) је тривијално, а (3)⇒(2) важи јер су $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(-)$ затворени за $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(-)$ према леми 4.36. Доказаћемо да је (1)⇔(2).

(2)⇒(1): Ако је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \neq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$, тада је или (a, a') или (a', a) Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A. Према леми 4.38 тада је један од $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$ строго садржан у другом, па је $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a) \neq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$.

(1)⇒(2): Претпоставимо да је $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) = \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$. Нека формула $\theta(a, y)$ релативно дефинише $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ у $q(\mathfrak{C})$; таква формула постоји према леми 4.59. Нека су $a_0, a_1 \models p$ такви да $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_0) <_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) <_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1)$. Како $a' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$, према леми 4.17(i), постоји симетрична формула $\sigma(x, x') \in \mathrm{tp}(a, a'/A)$ таква да је $\sigma(a, x')$ јако $\mathfrak{p}$-ограничена над A. Како је $\mathfrak{p}$ и $<_{\mathfrak{p}}$-конвексан имамо, према последици 4.16, да је $\sigma(a, \mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Дакле, $\sigma(a, x') \vdash x' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Тврдимо да је формула:

$$\psi(a, y) = \exists x' \, (\sigma(a, x') \land \theta(x', y))$$

ограничена одозго у $q(\mathfrak{C})$. Формула $\psi(a, y)$ релативно дефинише скуп:

$$\bigcup_{a'' \in \sigma(a, \mathfrak{C})} \theta(a'', \mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C})$$

у $q(\mathfrak{C})$. Доказаћемо да је:

$$\bigcup_{a'' \in \sigma(a, \mathfrak{C})} \theta(a'', \mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0) \cup \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_1).$$

Како је $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0) \cup \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_1)$ ограничен одозго у $q(\mathfrak{C})$, следи да је $\psi(a, y)$ ограничена одозго у $q(\mathfrak{C})$.

Дакле, претпоставимо да $a'' \in \sigma(a, \mathfrak{C})$. Како $\sigma(a, x') \vdash x \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$, добијамо $a'' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$. Специјално, $a'' \models p$, па $\theta(a'', y)$ релативно дефинише $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a'')$ у $q(\mathfrak{C})$, тј. $\theta(a'', \mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) = \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a'')$. Такође, важи $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_0) <_{\mathfrak{p}} a'' <_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a_1)$, тј. (a_0, a'') и (a'', a_1) су Морлијеви низови у $\mathfrak{p}$ над A. По леми 4.38, $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a'')$ је строго садржан између $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0)$ и $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_1)$ (у неком поретку, зависно од тога да ли $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ комутирају или не). У сваком случају $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a'') \subseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0) \cup \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_1)$, тј. $\theta(a'', \mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0) \cup \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_1)$, што смо и желели.

Дакле, $\psi(a, y)$ је ограничена одозго у $q(\mathfrak{C})$, па $\psi(a, y) \notin \mathfrak{q}_{\restriction Aa}$, и одатле $\psi(a, \mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$. Ако $b \in \theta(a', \mathfrak{C})$, тада $\models \psi(a, b)$, јер можемо узети a' да сведочи егзистенцијалан квантификатор. Према томе $\theta(a', \mathfrak{C}) \subseteq \psi(a, \mathfrak{C})$. Коначно, како $\theta(a', y)$ релативно дефинише $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$ у $q(\mathfrak{C})$, добијамо:

$$\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a') = \theta(a', \mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) \subseteq \psi(a, \mathfrak{C}) \cap q(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a).$$

Дакле, $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a') \subseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$. Слично можемо доказати, заменом a и a', да $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a) \subseteq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$, па важи $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a) = \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$. $\square$

Претходна лема повлачи да $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \mapsto \pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]$ добро дефинише пресликавање из $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$ у $\mathcal{P}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$. Доказаћемо да ово пресликавање индукује изоморфизам или антиизоморфизам Дедекиндових комплетирања уређења $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$ и $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})$.

Лема 4.61. *Претпоставимо да $a \models p$ и да формула $\theta(a, y)$ релативно дефинише $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ у $q(\mathfrak{C})$.*

(i) За $a, a' \models p$ важи:

$$\phi_{\mathfrak{q}}(y) \wedge \neg(\theta(a, y) \Leftrightarrow \theta(a', y)) \vdash q(y).$$

(ii) Формула:

$$\varphi(x, x') = \exists z\, (\phi_{\mathfrak{q}}(z) \wedge \neg(\theta(x, z) \Leftrightarrow \theta(x', z)))$$

релативно дефинише $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(x) \neq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(x')$ у $p(\mathfrak{C})^2$.

(iii) Тип $\mathfrak{p}$, и слично тип $\mathfrak{q}$, је прост над A.

Доказ. (i) Претпоставимо да важи:

$$\models \phi_{\mathfrak{q}}(b) \wedge \neg(\theta(a, b) \Leftrightarrow \theta(a', b)).$$

Нека је $r = \mathrm{tp}(b/A)$. Како је $\models \neg(\theta(a, b) \Leftrightarrow \theta(a', b))$, $\mathrm{tp}(a, b/A)$ и $\mathrm{tp}(a', b/A)$ су два различита комплетирања типа $p(x) \cup r(y)$, па $p \not\perp^{\mathrm{w}} r$. Из $p \not\perp^{\mathrm{w}} q$ и $p \not\perp^{\mathrm{w}} r$, према тврђењу 4.37, следи $q \not\perp^{\mathrm{w}} r$. Изаберимо $b_1, b_2 \models q$ тако да $\mathrm{tp}(b_1, b/A) \neq \mathrm{tp}(b_2, b/A)$; тада $\mathrm{tp}(b_1/Ab) \neq \mathrm{tp}(b_2/Ab)$, па закључујемо да $q \nvdash \mathfrak{q}_{\restriction Ab}$. Како $b \in \phi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{C})$ јер $\models \phi_{\mathfrak{q}}(b)$, и како је $(\mathfrak{q}(y), \phi_{\mathfrak{q}}(y))$ јако правилан, закључујемо:

$$\text{или} \quad b \models q \quad \text{или} \quad q \vdash \mathfrak{q}_{\restriction Ab}.$$

Како смо видели да $q \nvdash \mathfrak{q}_{\restriction Ab}$, закључујемо $b \models q$, што смо и желели да докажемо.

(ii) Приметимо да су, за $a, a' \models p$, следећи услови еквивалентни:

(1) $\models \varphi(a, a')$; (2) $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a) \neq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$; (3) $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \neq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$.

Заиста, (2)$\Leftrightarrow$(3) према леми 4.60. Услов (1) каже да се неки елемент $b \in \phi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{C})$ налази у симетричној разлици скупова $\theta(a, \mathfrak{C})$ и $\theta(a', \mathfrak{C})$, па према (i), $b \models q$. Како формуле $\theta(a, y)$ и $\theta(a', y)$ релативно дефинишу редом $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$ у $q(\mathfrak{C})$, добијамо да b припада симетричној разлици скупова $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$. Дакле, важи (1)$\Rightarrow$(2). (2)$\Rightarrow$(1) важи јер је било који елемент у симетричној разлици $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$ сведок за егзистенцијални квантификатор у $\varphi(a, a')$, па $\models \varphi(a, a')$.

(iii) Следи директно из (ii). $\square$

Сетимо се да је Дедекиндово комплетирање густог линеарног уређења $(L,<)$ уређење $(\mathcal{D}(L),\subsetneq)$, где је $\mathcal{D}(L)$ скуп који садржи $\emptyset$ и све почетне сегменте од L који немају максимум.

Лема 4.62. *За све $a\models p$ важи $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]\in\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$.*

Доказ. Према леми 4.34, $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ је затворен на доле у $q(\mathfrak{C})$, па је $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]$ почетни сегмент уређења $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})$. Треба још да докажемо да $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]$ нема максимум. Претпоставимо супротно, тј. нека је $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$ максимум од $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]$. Изаберимо $c\models q$ такво да $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(c)<_{\mathfrak{q}}\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$. Тврдимо:

$$\mathrm{tp}_y(c/Aa)\vdash y<_{\mathfrak{q}} b.$$

Ако је c' такво да $\mathrm{tp}(c'/Aa)=\mathrm{tp}(c/Aa)$, тада постоји аутоморфизам $f\in\mathrm{Aut}_{Aa}(\mathfrak{C})$ такав да $f(c)=c'$. Како је $f(\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a))=\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$, то је $c'\in\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$; одатле и из чињенице да је $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$ максимум од $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]$, закључујемо да (b,c') није Морлијев низ у $\mathfrak{q}$ над A. Ако $c'\not<_{\mathfrak{q}} b$, тада (c',b) није Морлијев низ у $\mathfrak{q}$ над A, па $c'\in\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$. Међутим, тада $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(c)<_{\mathfrak{q}}\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$ повлачи $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)=\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(c')<_{\mathfrak{q}}\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(f(b))$; како је такође $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(f(b))\in\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]$ јер $f(\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a))=\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$, то противречи чињеници да је $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)$ максимум у $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]$.

Дакле, $\mathrm{tp}_y(c/Aa)\vdash y<_{\mathfrak{q}} b$, па по компактности постоји формула $\psi(a,y)\in\mathrm{tp}(c/Aa)$ таква да $\psi(a,y)\vdash y<_{\mathfrak{q}} b$. Уочимо формулу:

$$\psi(a,\mathfrak{C})<_{\mathfrak{q}} y\ \wedge\ \theta(a,y),$$

где је $\theta(x,y)$ формула са параметрима из A таква да $\theta(a,y)$ релативно дефинише $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ у $q(\mathfrak{C})$. Она је сагласна са $q(y)$ јер је b задовољава. Такође, она је ограничена одоздо са c и ограничена је одозго било којим горњим ограничењем скупа $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$. Дакле, она је $\mathfrak{q}$-ограничена. Контрадикција. □

Према леми 4.60 и леми 4.62 следећа дефиниција је добра:

$$F:\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)\mapsto\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]\quad\text{дефинише}\quad F:\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})\longrightarrow\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})).$$

Лема 4.63.

(i) Пресликавање F је строго монотоно. Прецизније:
- *F је строго растуће ако и само ако $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A}\neq(\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$;*
- *F је строго опадајуће ако и само ако $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A}=(\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$.*

(ii) $F[\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})]$ је густ подскуп од $\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$.

Доказ. (i) Нека је (a,a') Морлијев низ у $\mathfrak{p}$ над A, тј. $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)<_{\mathfrak{p}}\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$. Имамо два случаја.

Случај 1. $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A}\neq(\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$.

Према леми 4.38 је $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)\subsetneq\mathrm{D}_{q}(a')$. Како је, по леми 4.36, $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(-)$ затворено за $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(-)$, то $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]\subsetneq\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')]$, тј. $F(\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a))\subsetneq F(\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'))$.

Случај 2. $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A}=(\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$.

Према леми 4.38 је $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')\subsetneq\mathrm{D}_{q}(a)$. Како је, по леми 4.36, $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(-)$ затворено за $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(-)$, то $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')]\subsetneq\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]$, тј. $F(\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'))\subsetneq F(\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a))$.

Сада лако следи закључак из (i).

(ii) Нека су $I\subsetneq J$ елементи у $\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$. Довољно је да нађемо $a'\models p$ такво да $I\subsetneq\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')]\subsetneq J$. Како J нема максимум, постоје $b,b'\models q$ такви да $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b),\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b')\in J$ и $I<_{\mathfrak{q}}\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)<_{\mathfrak{q}}\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b')$; специјално, (b,b') је Морлијев низ у $\mathfrak{q}$ над A, тј. $b'\models\mathfrak{q}_{\restriction Ab}$. Имамо два случаја.

Случај 1. $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A}\neq(\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$.

Изаберимо $a_0\models\mathfrak{p}_{\restriction Ab}$ и $b_0\models\mathfrak{q}_{\restriction Aba_0}$. Из $b_0\models\mathfrak{q}_{\restriction Ab}$ имамо да је $\mathrm{tp}(b_0/Ab)=\mathrm{tp}(b'/Ab)$, па постоји аутоморфизам $f\in\mathrm{Aut}_{Ab}(\mathfrak{C})$ такав да $f(b_0)=b'$. Нека је $a'=f(a_0)$; важи $a'\models\mathfrak{p}_{\restriction Ab}$ и $b'\models\mathfrak{q}_{\restriction Aba'}$. Из $a'\models\mathfrak{p}_{\restriction Ab}$ имамо $(b,a')\models(\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$, па $(a',b)\not\models(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A}$, одакле $b\not\models\mathfrak{q}_{\restriction Aa'}$, тј. $b\in\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$. Са друге стране, из $b'\models\mathfrak{q}_{\restriction Aa'}$ следи $b'\notin\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$.

Случај 2. $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A}=(\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$.

Изаберимо $a_0\in\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(b)$ и $b_0\models\mathfrak{q}_{\restriction Aba_0}$. Из $b_0\models\mathfrak{q}_{\restriction Ab}$ имамо да је $\mathrm{tp}(b_0/Ab)=\mathrm{tp}(b'/Ab)$, па постоји аутоморфизам $f\in\mathrm{Aut}_{Ab}(\mathfrak{C})$ такав да $f(b_0)=b'$. Нека је $a'=f(a_0)$. Из $a_0\in\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(b)$ следи $a'\in\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}(b)$; тада $a'\not\models\mathfrak{p}_{\restriction Ab}$, тј. $(b,a')\not\models(\mathfrak{q}\otimes\mathfrak{p})_{\restriction A}$, па ни $(a',b)\not\models(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})_{\restriction A}$, тј. $b\not\models\mathfrak{q}_{\restriction Aa'}$ и $b\in\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$. Са друге стране, $b_0\models\mathfrak{q}_{\restriction Aa_0}$ повлачи $b'\models\mathfrak{q}_{\restriction Aa'}$, одакле $b'\notin\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$.

У оба случаја смо закључили да $b\in\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$ и $b'\notin\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$, па $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)\in\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')]$ и $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b')\notin\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')]$. Како је $I<_{\mathfrak{q}}\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b)<_{\mathfrak{q}}\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b')\in J$ и како су I, J и $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$ на доле затворени, закључујемо $I\subsetneq\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')]\subsetneq J$, што завршава доказ. □

Приметимо да за линеарна уређења $(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p}),<_{\mathfrak{p}})$ и $(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}),<_{\mathfrak{q}})$ важи:

1. $(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p}),<_{\mathfrak{p}})$ и $(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}),<_{\mathfrak{q}})$ су густа линеарна уређења;
2. $F:\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})\longrightarrow\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$ је строго монотоно пресликавање;
3. $F[\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})]$ је густ подскуп од $\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$.

Дакле, испуњени су услови тврђења 1.27, па закључујемо да постоји пресликавање:

$$\mathcal{D}(F):\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p}))\longrightarrow\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$$

такво да важи:

(1) ако је F растуће пресликавање, $\mathcal{D}(F)$ је изоморфизам линеарних уређења $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})), \subsetneq)$ и $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})), \subsetneq)$, тј. $\mathcal{D}(F)$ је изоморфизам одговарајућих Дедекиндових комплетирања;

(2) ако је F опадајуће пресликавање, $\mathcal{D}(F)$ је изоморфизам линеарних уређења $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})), \subsetneq)$ и $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})), \supsetneq)$, тј. $\mathcal{D}(F)$ је антиизоморфизам одговарајућих Дедекиндових комплетирања.

Из леме 4.63 директно добијамо следеће тврђење.

Тврђење 4.64.

(i) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада је* $\mathcal{D}(F)$ *изоморфизам линеарних уређења* $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})), \subsetneq)$ *и* $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})), \subsetneq)$.

(ii) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада је* $\mathcal{D}(F)$ *антиизоморфизам линеарних уређења* $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})), \subsetneq)$ *и* $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q})), \subsetneq)$.

Претпоставимо сада да је $M \supseteq A$ мали модел. За $a \in p(M)$ дефинишемо:

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}^M(a) = \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \cap M \quad \text{ и } \quad \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a) = \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a) \cap M.$$

Сетимо се да са $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})$ означавамо:

$$\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p}) = \{\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}^M(a) \mid a \in p(M)\}.$$

Такође са $\pi_{\mathfrak{p}}^M$ означимо пресликавање $p(M) \longrightarrow \mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})$ дато са $\pi_{\mathfrak{p}}^M(a) = \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$.

До краја одељка ћемо радити под претпоставком да је $|\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})| \geqslant 2$. Како је тип $\mathfrak{p}$ конвексан и прост над A (прост према леми 4.61), према тврђењу 4.25, линеарно уређење $(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p}), <_{\mathfrak{p}})$ је густо, па је дефинисано његово Дедекиндово комплетирање. У следећој леми ћемо видети да је под овом претпоставком и уређење $(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q}), <_{\mathfrak{q}})$ густо, па можемо говорити и о његовом Дедекиндовом комплетирању.

Лема 4.65. *Претпоставимо да је* $|\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})| \geqslant 2$. *Нека је:*

$$\varphi(x, x') = \exists z\, (\phi_{\mathfrak{q}}(z) \wedge \neg(\theta(x, z) \Leftrightarrow \theta(x', z))),$$

где формула $\theta(a, y)$ *релативно дефинише* $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$, *за* $a \models p$.

(i) За $a, a' \in p(M)$ *следећи услови су еквивалентни:*

(1) $\models \varphi(a, a')$;

(2) $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a) \neq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$;

(3) $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) \neq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$;

(4) $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a) \neq \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a')$;

(5) $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}^M(a) \neq \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}^M(a')$;

(6) $\pi_{\mathfrak{q}}^M[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a)] \neq \pi_{\mathfrak{q}}^M[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a')]$.

(ii) Уређење $(Lin_A^M(\mathfrak{q}), <_{\mathfrak{q}})$ *је густо.*

(iii) Ако $a \in p(M)$ и $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{p}}(a)$ није ни минималан ни максималан у $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})$, тада $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a) \neq \emptyset$ и $\pi^M_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}^M_q(a)] \in \mathcal{D}(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q}))$.

Доказ. (i) Нека $a, a' \in p(M)$. Услови (1), (2) и (3) су еквивалентни према доказу леме 4.61. Импликације (4)$\Rightarrow$(2), (5)$\Rightarrow$(3) и (6)$\Rightarrow$(4) су очигледне. За (3)$\Rightarrow$(5) приметимо: ако важи (3), тада су $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$ и $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a')$ дисјунктни, па како су $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{p}}(a)$ и $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{p}}(a')$ непразни, то су и они дисјунктни и важи (5). Како је према леми 4.36, $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(-)$ затворен за $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(-)$, то је и $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(-)$ затворен за $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{q}}(-)$. Због тога важи и (4)$\Rightarrow$(6).

Дакле, довољно је да докажемо још (1)$\Rightarrow$(4). Претпоставимо да важи $\models \varphi(a, a')$, тј. $\models \exists z\, (\phi_{\mathfrak{q}}(z) \wedge \neg(\theta(a, z) \Leftrightarrow \theta(a', z)))$. Због елементарности, можемо да изаберемо $b \in M$ које је сведок за егзистенцијални квантификатор у претходној формули. Дакле, $\models \phi_{\mathfrak{q}}(b) \wedge \neg(\theta(a, b) \Leftrightarrow \theta(a', b))$. Према леми 4.61(i), $b \models q$, па b припада симетричној разлици $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$. Како је $b \in M$, то b припада и симетричној разлици скупова $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a')$, тј. $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a) \neq \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a')$.

(ii) Како је $\mathfrak{q}$ конвексан и прост над A, према тврђењу 4.25, довољно је да докажемо да $|\,\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q})| \geqslant 2$. Како је $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})$ густ у односу на $<_{\mathfrak{p}}$ можемо изабрати $a', a, a'' \in p(M)$ тако да $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a') <_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) <_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'')$. Према (1), скупови $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a')$, $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a'')$ су међусобно различити. Према леми 4.38, $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ је строго садржан између $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a')$ и $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a'')$, па је $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$ садржан између $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a')$ и $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a'')$. Штавише, како су $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a')$, $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$ и $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a'')$ међусобно различити, то је $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$ строго садржан између $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a')$ и $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a'')$. Према томе, без обзира да ли је $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a') \subsetneq \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a) \subsetneq \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a'')$ или $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a'') \subsetneq \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a) \subsetneq \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a')$, можемо наћи $b_1, b_2 \in q(M)$ такве да $b_1 \in \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$ и $b_2 \notin \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$. Како је $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(-)$ затворен за $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(-)$ (лема 4.36), то је $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_1) \neq \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_2)$. Како су $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{q}}(b_1)$ и $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{q}}(b_2)$ непразни, то су $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{q}}(b_1)$ и $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{q}}(b_2)$ два различита елемента у $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q})$.

(iii) Нека је $a \in p(M)$ такав да $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{p}}(a)$ није ни минималан ни максималан у $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})$. Изаберимо $a', a'' \in p(M)$ такве да $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a') <_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a) <_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a'')$. Слично као у доказу (ii), можемо закључити да је $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$ строго садржан између $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a')$ и $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a'')$; специјално $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a) \neq \emptyset$. Према томе, $\pi^M_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)]$ је прави почетни сегмент од $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q})$. Да бисмо закључили да $\pi^M_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)] \in \mathcal{D}(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q}))$, потребно је још да докажемо да $\pi^M_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)]$ нема максимум.

Претпоставимо супротно да је $\mathcal{E}^M_{\mathfrak{q}}(c)$ максимум у $\pi^M_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)]$. Како је $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$ строго садржан између $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a')$ и $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a'')$, изаберимо $a_0 \in \{a', a''\}$ тако да $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a_0) \subsetneq \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$. Уочимо формулу:

$$\phi_{\mathfrak{q}}(y) \wedge \theta(a, y) \wedge \neg\theta(a_0, y).$$

Тврдимо да она дефинише скуп $\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a) \smallsetminus \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a_0)$ у моделу M. Јасно је да сваки елемент $b \in \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a) \smallsetminus \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a_0)$ задовољава дату формулу. Обратно, ако за $b \in M$

важи $\models \phi_{\mathfrak{q}}(b) \wedge \theta(a,b) \wedge \neg\theta(a_0,b)$, тада важи и:

$$\models \phi_{\mathfrak{q}}(b) \wedge \neg(\theta(a,b) \Leftrightarrow \theta(a_0,b)),$$

па како $a, a_0 \models p$, према леми 4.61 закључујемо $b \models q$, тј. $b \in q(M)$. Сада, како $\theta(a,y)$ релативно дефинише $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ у $q(\mathfrak{C})$, $\models \theta(a,b)$ каже $b \in \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$, па $b \in \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)$ јер $b \in M$, а $\models \neg\theta(a_0,b)$ каже $b \notin \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0)$, па $b \notin \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a_0)$. Коначно $b \in \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a) \smallsetminus \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a_0)$.

Уочимо сада формулу $\psi(a,a_0,c)$ која каже:

$$\text{„за све } y \in \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a) \smallsetminus \mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a_0)\text{, ако } y \notin \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(c)\text{, тада } y <_{\mathfrak{q}} c\text{“ .}$$

Приметимо да према претходном ово јесте формула, као и да $\models \psi(a,a_0,c)$ важи у M. Због елементарности, $\models \psi(a,a_0,c)$ важи и у $\mathfrak{C}$. Али то значи да је $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(c)$ максимум у $\pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)]$, што је контрадикција према леми 4.62. $\square$

Приметимо да је Дедекиндово комплетирање густог линеарног уређења које евентуално има минимум и/или максимум исто што и Дедекиндово комплетирање тог линеарног уређења када избацимо минимум и максимум. Како ми желимо да докажемо да је Дедекиндово комплетирање од $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})$ изоморфно или антиизоморфно Дедекиндовом комплетирању од $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q})$, под условом да $|\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})| \geqslant 2$, довољно је да докажемо да је Дедекиндово комплетирање од $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})$ са избаченим минимумом и максимумом (ако један или оба постоје) изоморфно или антиизоморфно са Дедекиндовим комплетирањем од $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q})$. Према томе, без умањења општости, можемо претпоставити да $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})$ нема ни минимум ни максимум.

Дакле, претпоставимо да је $|\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})| \geqslant 2$ и да $\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})$ нема минимум и максимум. Према претходној леми:

$$F_M(\mathcal{E}^M_{\mathfrak{p}}(a)) = \pi^M_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}^M_{\mathfrak{q}}(a)] \quad \text{добро дефинише} \quad F_M : \mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q})).$$

У следећој леми ћемо доказати да пресликавање F_M задовољава три услова из тврђења 1.27, који повлаче да се F_M може подићи до изоморфизма или антиизоморфизма између $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})), \subsetneq)$ и $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q})), \subsetneq)$.

Лема 4.66. *Претпоставимо да је* $|\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})| \geqslant 2$.

(i) $(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p}), <_{\mathfrak{p}})$ *и* $(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q}), <_{\mathfrak{q}})$ *су густа линеарна уређења.*

(ii) $F_M : \mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q}))$ *је строго монотоно. Прецизније:*

(а) ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада је* F_M *строго растуће;*

(б) ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада је* F_M *строго опадајуће.*

(iii) $F_M[\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p})]$ *је густ подскуп од* $\mathcal{D}(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q}))$.

Доказ. (i) Како смо већ напоменули, $(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{p}), <_{\mathfrak{p}})$ је густо линеарно уређење према тврђењу 4.25. Уређење $(\mathrm{Lin}^M_A(\mathfrak{q}), <_{\mathfrak{q}})$ је густо према леми 4.65(ii).

(ii) Еквиваленција између (5) и (6) у леми 4.65(i) повлачи да је пресликавање F_M инјективно, па закључак следи из леме 4.38.

(iii) Претпоставимо да су $I \subsetneq J$ елементи у $\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q}))$. Потребно је да нађемо $a \in p(M)$ такво да $I \subsetneq \pi_{\mathfrak{q}}^M[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a)] \subsetneq J$. Како J нема максимум, постоје $b, b' \in q(M)$ такви да $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}^M(b), \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}^M(b') \in J$ и $I <_{\mathfrak{q}} \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}^M(b) <_{\mathfrak{q}} \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}^M(b')$; специјално (b, b') је Морлијев низ у $\mathfrak{q}$ над A. Доказаћемо да постоји $a \in p(M)$ такав да $b' \in \mathrm{I}_{\mathfrak{q}}^M(a)$ и $b \in \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a)$; како су I, J и $\pi_{\mathfrak{q}}^M[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a)]$ почетни сегменти од $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q})$, $I \subsetneq \pi_{\mathfrak{q}}^M[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a)] \subsetneq J$ следи.

Нека је $\theta(x, y)$ формула са параметрима из A таква да $\theta(a, y)$, за $a \models p$, релативно дефинише $\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a)$ у $q(\mathfrak{C})$. Тврдимо да важи:

$$\models \exists x\, (\phi_{\mathfrak{p}}(x) \land \neg(\theta(x, b) \Leftrightarrow \theta(x, b'))).$$

Изаберимо b_0 такво да је (b, b_0, b') Морлијев низ у $\mathfrak{q}$ над A, и уочимо следеће елементе у $\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$:

$$I' = \{\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(t) \mid t \models q,\, \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(t) <_{\mathfrak{q}} \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b_0)\} \quad \text{и} \quad J' = \{\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(t) \mid t \models q,\, \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(t) <_{\mathfrak{q}} \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b')\}.$$

Тада је $I' \subsetneq J'$ у $\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$, $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b) \in I'$ и $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b') \notin J'$. Како је према леми 4.63, $F[\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})]$ густо у $\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{q}))$, изаберимо $a_0 \models p$ такво да је $I' \subseteq \pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0)] \subseteq J'$. Тада $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b) \in \pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0)]$ и $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}(b') \notin \pi_{\mathfrak{q}}[\mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0)]$, па $b \in \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0)$ и $b' \notin \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}(a_0)$, и a_0 је сведок за егзистенцијални квантификатор у:

$$\models \exists x\, (\phi_{\mathfrak{p}}(x) \land \neg(\theta(x, b) \Leftrightarrow \theta(x, b'))).$$

Због елементарности можемо изабрати $a \in M$ које је сведок за егзистенцијални квантификатор у претходној формули. Слично као у доказу леме 4.61(i) закључујемо $a \in p(M)$. Нека је $r = \mathrm{tp}(a/A)$. Како је $\models \neg(\theta(a, b) \Leftrightarrow \theta(a, b'))$, $\mathrm{tp}(a, b/A)$ и $\mathrm{tp}(a, b'/A)$ су два различита комплетирања типа $r(x) \cup q(y)$, па $r \not\perp^{\mathrm{w}} q$. Из $p \not\perp^{\mathrm{w}} q$ и $r \not\perp^{\mathrm{w}} q$, према тврђењу 4.37, следи $p \not\perp^{\mathrm{w}} r$. Изаберимо $a_1, a_2 \models p$ тако да $\mathrm{tp}(a_1, a/A) \neq \mathrm{tp}(a_2, a/A)$; тада $\mathrm{tp}(a_1/Aa) \neq \mathrm{tp}(a_2/Aa)$, па закључујемо да $p \nvdash \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$. Како $a \in \phi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{C})$, и како је $(\mathfrak{p}(x), \phi_{\mathfrak{p}}(x))$ јако правилан, закључујемо:

$$\text{или} \quad a \models p \quad \text{или} \quad p \vdash \mathfrak{p}_{\restriction Aa}.$$

Како смо видели да $p \nvdash \mathfrak{p}_{\restriction Aa}$, закључујемо $a \models p$. Дакле, $a \in p(M)$. Сада чињенице да важи $\models \neg(\theta(a, b) \Leftrightarrow \theta(a, b'))$, да $\mathcal{E}_{\mathfrak{q}}^M(b) <_{\mathfrak{q}} \mathcal{E}_{\mathfrak{q}}^M(b')$ и да је $\mathrm{D}_q^M(a)$ на доле затворен повлаче $b \in \mathrm{D}_{\mathfrak{q}}^M(a)$ и $b' \in \mathrm{I}_{\mathfrak{q}}^M(a)$. $\square$

Следеће тврђење је директна последица претходне леме и тврђења 1.27.

Тврђење 4.67. *Претпоставимо да је* $|\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})| \geqslant 2$.

(i) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} \neq (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада постоји изоморфизам* $\mathcal{D}(F_M)$ *линеарних уређења* $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})), \subsetneq)$ *и* $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q})), \subsetneq)$.

(ii) Ако $(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})_{\restriction A} = (\mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p})_{\restriction A}$, *тада постоји изоморфизам* $\mathcal{D}(F_M)$ *линеарних уређења* $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})), \subsetneq)$ *и* $(\mathcal{D}(\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q})), \supsetneq)$.

Доказ теореме 4.41. Део (i) је у потпуности доказан у тврђењу 4.55. Први део у (ii) је доказан у леми 4.61. Други део у (ii) следи из тврђења 4.67 у случају да $|\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})| \geqslant 2$, али слично важи и ако $|\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q})| \geqslant 2$. У преосталом случају, када $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})$ и $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{q})$ имају по највише један елемент, њихова Дедекиндова комплетирања су једночлана (сетимо се конвенције да је $\mathcal{D}(\emptyset) = \{\emptyset\}$), па су према томе изоморфна. $\square$

ПОГЛАВЉЕ 5

Експанзије линеарних уређења

У овом поглављу ћемо посматрати потпуне теорије линеарног уређења са унарним предикатима и конвексним релацијама еквиваленције. Прецизније, посматрамо језик $\mathcal{L} = \{<\} \cup \{P_i \mid i \in I\} \cup \{E_j \mid j \in J\}$, где су I и J највише пребројиви скупови, сви P_i су унарни релацијски симболи, $<$ и сви E_j су бинарни релацијски симболи. Фиксираћемо потпуну теорију T која садржи аксиоме: $<$ је строго линеарно уређење и сви E_j су релације еквиваленције са конвексним класама (у односу на уређење $<$). Фиксирајмо монструм модел $\mathfrak{C}$ теорије T. Циљ овог поглавља је да докажемо следећу теорему.

Теорема 5.1. *(Под претпоставкама из претходног пасуса.)*

(i) Сваки инваријантан неалгебарски тип је правилан.

(ii) Сваки неалгебарски тип $p \in \mathrm{S}_1(A)$ има тачно два проширења који су инваријантни над A.

Претходна теорема даје читаву фамилију нових примера правилних типова. Сви ови типови су очигледно асиметрични јер говоримо о линеарним уређењима. Према резултатима из претходног поглавља, сваком асиметричном правилном типу придружена је једна линеарна инваријанта модела. Како ћемо видети, инваријанте придружене поменутим проширењима неалгебарског типа су природно антиизоморфне. Према томе, сваком неалгебарском типу у овом контексту такође је природно придружена линеарна инваријанта. Ово оставља отворене могућности за опис верних инваријаната модела поменутих теорија.

У првом одељку ћемо видети да група аутоморфизама $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ задовољава следеће својство: ако је D конвексан скуп и f, g су аутоморфизми који фиксирају D (као скуп), тада је и $f \circledast_D g$ аутоморфизам, где са $f \circledast_D g$ означавамо пресликавање чија је рестрикција на D једнака f, а рестрикција на $\mathfrak{C} \setminus D$ једнака g. Испоставља се да је ова особина врло моћна. Најпре, она нам омогућава да сведемо изучавање типова над малим скуповима параметара на изучавање типова над $\emptyset$. Такође, она повлачи и јако својство да реализације датог типа имају исти тип над „крајевима” локуса.

У другом одељку ћемо се фокусирати на локус фиксираног неалгебарског типа над $\emptyset$. Тачније, посматраћемо понашање формула са параметрима на

„крајевима” локуса. Видећемо да је свака формула са параметрима или лево (десно) ограничена у типу или је њена негација лево (десно) ограничена у типу.

Из резултата другог одељка видимо да сваки неалгебарски тип p над $\emptyset$ има два природна глобална проширења: лево $\mathfrak{p}_l$ и десно $\mathfrak{p}_r$ глобално проширење. У трећем одељку ћемо доказати да су то једина два инваријантна над $\emptyset$ глобална проширења типа p. Такође ћемо доказати да су типови $\mathfrak{p}_l$ и $\mathfrak{p}_r$ правилни асиметрични типови, као и да су њихове инваријанте $\mathrm{Inv}_{\emptyset,\mathfrak{p}_l}(M)$ и $\mathrm{Inv}_{\emptyset,\mathfrak{p}_r}(M)$ природно антиизоморфне за сваки мали модел M.

1. О аутоморфизмима

Дефиниција 5.2. Нека су f и g пресликавања на $\mathfrak{C}$ и $D \subseteq \mathfrak{C}$. Дефинишемо пресликавање $f \circledast_D g$ на $\mathfrak{C}$ са:

$$f \circledast_D g\,(a) = \begin{cases} f(a) & \text{ако } a \in D; \\ g(a) & \text{ако } a \notin D. \end{cases}$$

Лема 5.3. *Нека су $f, g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ и нека је D конвексан подскуп од $\mathfrak{C}$ такав да $f[D] = D$ и $g[D] = D$. Тада $f \circledast_D g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$.*

Доказ. Из услова $f[D] = D$ и $g[D] = D$, пресликавање $f \circledast_D g$ је очигледно добро дефинисана бијекција. Треба да проверимо да је хомоморфизам. Ако је $a < b$ и ако $a, b \in D$ или $a, b \notin D$, тврђење је јасно. Претпоставимо да је $a < b$ и нпр. $a \in D, b \notin D$. Тада је због конвексности скупа D, $D < b$, па је $f[D] = D = g[D] < g(b)$, одакле је $f \circledast_D g\,(a) = f(a) < g(b) = f \circledast_D g\,(b)$.

Нека је P унарни релацијски симбол. Треба да докажемо:

$$a \in P^{\mathfrak{C}} \quad \text{акко} \quad f \circledast_D g(a) \in P^{\mathfrak{C}}.$$

Али то је јасно јер $a \in P^{\mathfrak{C}}$ акко $f(a) \in P^{\mathfrak{C}}$ акко $g(a) \in P^{\mathfrak{C}}$, а $f \circledast_D g(a) \in \{f(a), g(a)\}$.

Коначно, нека је E бинарни релацијски симбол такав да је $E^{\mathfrak{C}}$ релација еквиваленције са конвексним класама. Треба да докажемо:

$$(a, b) \in E^{\mathfrak{C}} \quad \text{акко} \quad (f \circledast_D g(a), f \circledast_D g(b)) \in E^{\mathfrak{C}}.$$

Ако $a, b \in D$ или $a, b \notin D$, тврђење је јасно. Претпоставимо да $a \in D$ и $b \notin D$, и без умањења општости претпоставимо да је $a < b$, тј. $D < b$. Треба да докажемо:

$$(a, b) \in E^{\mathfrak{C}} \quad \text{акко} \quad (f(a), g(b)) \in E^{\mathfrak{C}}.$$

Ако $(a, b) \in E^{\mathfrak{C}}$, тј. $a/E^{\mathfrak{C}} = b/E^{\mathfrak{C}}$, тада $(f(a), f(b)) \in E^{\mathfrak{C}}$, па како је $f(a) \in D$ и $D < f(b)$, имамо да је или $f(a) < a < f(b)$ или $a < f(a) < b$. Како су класе конвексне, закључујемо да је $f(a)/E^{\mathfrak{C}} = a/E^{\mathfrak{C}}$. Слично можемо закључити да је $g(b)/E^{\mathfrak{C}} = b/E^{\mathfrak{C}}$, одакле следи да је $f(a)/E^{\mathfrak{C}} = g(b)/E^{\mathfrak{C}}$, тј. $(f(a), g(b)) \in E^{\mathfrak{C}}$.

Ако $(a,b) \notin E^{\mathfrak{C}}$, због конвексности класа тада је $a/E^{\mathfrak{C}} < b/E^{\mathfrak{C}}$, одакле је $f(a)/E^{\mathfrak{C}} < g(b)/E^{\mathfrak{C}}$ јер $f \circledast_D g$ чува уређење. Дакле, $(f(a), g(b)) \notin E^{\mathfrak{C}}$.

Према томе, $f \circledast_D g$ заиста јесте аутоморфизам. $\square$

Напомена 5.4. Приметимо да претходна лема важи чак и ако имамо (произвољно много) константних симбола у језику. Како се наше излагање у овом поглављу ослања само на претходну лему, оно остаје тачно и ако именујемо неки (мали) скуп параметара. Дакле, без умањења општости, посматраћемо типове над $\emptyset$, али такође сви резултати важи и за типове над малим скуповима параметара.

Како је уређење $<$ линеарно на $\mathfrak{C}$, писаћемо $(-\infty, a)$ да означимо скуп $\{t \in \mathfrak{C} \mid t < a\}$. Оваква нотација је и природна и корисна, јер упрошћује запис. Али приметимо да записом $(-\infty, a)$ никако не имплицирамо да $\mathfrak{C}$ нема минимум. Слично, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$ и $[a, +\infty)$ су природно дефинисани.

Последица 5.5.

(i) Ако $a \in \mathfrak{C}$ и $f, g \in \mathrm{Aut}_{\{a\}}(\mathfrak{C})$, тада $f \circledast_{(-\infty,a)} g \in \mathrm{Aut}_{\{a\}}(\mathfrak{C})$.

(ii) Ако $a, b \in \mathfrak{C}$ и $f, g \in \mathrm{Aut}_{\{a,b\}}(\mathfrak{C})$, тада $f \circledast_{(a,b)} g \in \mathrm{Aut}_{\{a,b\}}(\mathfrak{C})$.

Доказ. (i) Скуп $(-\infty, a)$ је очигледно конвексан, и како су f и g аутоморфизми који фиксирају a, имамо $f[(-\infty, a)] = g[(-\infty, a)] = (-\infty, a)$, па је $f \circledast_{(-\infty,a)} g$ аутоморфизам према претходној леми. Такође, $f \circledast_{(-\infty,a)} g\,(a) = g(a) = a$.

Део (ii) се слично доказује. $\square$

Последица 5.6.

(i) Ако за $b, b' < a$ важи $\mathrm{tp}(b/a) = \mathrm{tp}(b'/a)$, тада $\mathrm{tp}(b/(a, +\infty) = \mathrm{tp}(b'/(a, +\infty))$.

(ii) Ако за $b, b' > a$ важи $\mathrm{tp}(b/a) = \mathrm{tp}(b'/a)$, тада $\mathrm{tp}(b/(-\infty, a) = \mathrm{tp}(b'/(-\infty, a))$.

Доказ. Доказаћемо само део (i). Претпоставимо да за неке $b, b' < a$ важи $\mathrm{tp}(b/a) = \mathrm{tp}(b'/a)$. Тада постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_{\{a\}}(\mathfrak{C})$ такав да $f(b) = b'$. Према последици 5.5, $f \circledast_{(-\infty,a)} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$. Приметимо да $f \circledast_{(-\infty,a)} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ слика b у b', а скуп $(a, +\infty)$ фиксира тачка-по-тачка, одакле директно следи $\mathrm{tp}(b/(a, +\infty)) = \mathrm{tp}(b'/(a, +\infty))$. $\square$

За подскуп $D \subseteq \mathfrak{C}$ ћемо рећи да је *лево (десно) затворен подскуп од* $\mathfrak{C}$ ако $a \in D$ повлачи $(-\infty, a) \subseteq D$ ($(a, +\infty) \subseteq D$), за све $a \in \mathfrak{C}$.

Лема 5.7. *Нека је $p \in \mathrm{S}_1(\emptyset)$ неалгебарски тип и $a, b \models p$. Тада постоје скупови D_l и D_r такви да:*

- *D_l и D_r су тип-дефинабилни са пребројиво много параметара;*

- *D_l је лево, а D_r десно затворен подскуп од $\mathfrak{C}$;*
- *$D_l \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$ и $D_r \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$;*
- *$\mathrm{tp}(a/D_l \cup D_r) = \mathrm{tp}(b/D_l \cup D_r)$.*

Доказ. Претпоставимо да је нпр. $a < b$. Тада постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ такав да $f(a) = b$. Дефинишемо низ $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ са:

$$a_0 = a, \qquad a_{n+1} = f(a_n), \text{ за } n \geqslant 0, \qquad a_{n-1} = f^{-1}(a_n), \text{ за } n \leqslant 0.$$

Приметимо да је $a_1 = b$, као и да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ строго растући низ реализација типа p. Уочимо следећи скуп:

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [a_n, a_{n+1}].$$

Јасно је да је D конвексан скуп и да га f фиксира, па је према леми 5.3, $f \circledast_D \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$. Нека су D_l и D_r дефинисани (непотпуним) типовима:

$$\Sigma_l(x) = \{x < a_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{и} \quad \Sigma_r(x) = \{a_n < x \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Јасно је да је D_l лево, а D_r десно затворен подскуп од $\mathfrak{C}$. Такође је јасно да су $\Sigma_l(x) \cup p(x)$ и $\Sigma_r(x) \cup p(x)$ задовољиви, одакле следи да је $D_l \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$ и $D_r \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$.

Коначно, аутоморфизам $f \circledast_D \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ слика a у b и фиксира $D_l \cup D_r$ тачка-по-тачка (приметимо да је $D_l \cup D_r = \mathfrak{C} \smallsetminus D$), одакле директно закључујемо да је $\mathrm{tp}(a/D_l \cup D_r) = \mathrm{tp}(b/D_l \cup D_r)$. □

Лема 5.8. *Нека је $p \in \mathrm{S}_1(\emptyset)$ неалгебарски тип и $a \models p$. Тада постоје скупови C_l и C_r такви да:*

- *C_l и C_r су дефинабилни типом;*
- *C_l је лево, а C_r десно затворен подскуп од $\mathfrak{C}$;*
- *$C_l \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$ и $C_r \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$;*
- *за све $b \models p$ такве да $b < a$ важи $\mathrm{tp}(b/C_r) = \mathrm{tp}(a/C_r)$ и за све $b \models p$ такве да $b > a$ важи $\mathrm{tp}(b/C_l) = \mathrm{tp}(a/C_l)$.*

Доказ. Доказаћемо егзистенцију скупа C_r; егзистенција скупа C_l се слично доказује. Уочимо скуп $S = (-\infty, a) \cap p(\mathfrak{C})$ и уочимо на S релацију еквиваленције $\sim$ дефинисану са: $b' \sim b''$ акко $\mathrm{tp}(b'/a) = \mathrm{tp}(b''/a)$. Изаберимо скуп представника свих класа S_0; приметимо да је овај скуп мали.

За свако $b \in S_0$, према леми 5.7, постоји скуп D_r^b такав да:

- D_r^b је тип-дефинабилан са пребројиво много параметара;
- D_r^b на десно затворен подскуп од $\mathfrak{C}$;
- $D_r^b \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$;
- $\mathrm{tp}(b/D_r^b) = \mathrm{tp}(a/D_r^b)$.

Посматрајмо следећи скуп:

$$C_r = \bigcap_{b \in S_0} D_r^b.$$

Јасно је да је C_r десно затворен подскуп од $\mathfrak{C}$, као и да је дефинабилан типом (над малим скупом параметара). Такође, $C_r \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$, јер у супротном, због засићености монструма, тип који дефинише C_r није сагласан са $p(x)$. По компактности, неки његов коначан део није сагласан са $p(x)$, па за неке $b_1, \ldots, b_n \in S_0$ важи $D_r^{b_1} \cap \ldots \cap D_r^{b_n} \cap p(\mathfrak{C}) = \emptyset$. Ово није могуће јер сваки $D_r^{b_i}$ сече $p(\mathfrak{C})$ и десно је затворен у $\mathfrak{C}$.

Остаје да докажемо да за све $b \models p$ такве да $b < a$ важи $\mathrm{tp}(b/C_r) = \mathrm{tp}(a/C_r)$. Нека је $b \models p$ такав да $b < a$. Изаберимо $b' \in S_0$ такав да $b \sim b'$. Како је $\mathrm{tp}(b/a) = \mathrm{tp}(b'/a)$, према последици 5.6, $\mathrm{tp}(b/(a, +\infty)) = \mathrm{tp}(b'/(a, +\infty))$. Како је очигледно $D_r^{b'} \subseteq (a, +\infty)$, то повлачи да је $\mathrm{tp}(b/D_r^{b'}) = \mathrm{tp}(b'/D_r^{b'}) = \mathrm{tp}(a/D_r^{b'})$. Како је још $D_r^{b'} \supseteq C_r$, коначно добијамо $\mathrm{tp}(b/C_r) = \mathrm{tp}(a/C_r)$. □

2. Понашање формула на крајевима локуса

Лема 5.9. *Претпоставимо да је $\phi(x, \bar{y})$ формула без параметара, и претпоставимо да је $\bar{a} = a_1 a_2 \ldots a_n$ где $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тада су скупови:*

$$\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap (-\infty, a_1), \quad \phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap (a_i, a_{i+1}) \quad и \quad \phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap (a_n, +\infty),$$

редом дефинабилни над $\{a_1\}$, $\{a_i, a_{i+1}\}$ и $\{a_n\}$.

Доказ. Скуп $\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap (-\infty, a_1)$ је дефинабилан формулом:

$$\phi(x, \bar{a}) \wedge x < a_1.$$

Према леми 1.9, довољно је да докажемо да је инваријантан над $\{a_1\}$. Нека је $f \in \mathrm{Aut}_{\{a_1\}}(\mathfrak{C})$; према последици 5.5, $f \circledast_{(-\infty, a_1)} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \in \mathrm{Aut}_{\{a_1\}}(\mathfrak{C})$, па је:

$$\begin{aligned} f[\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap (-\infty, a_1)] &= f \circledast_{(-\infty, a_1)} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} [\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap (-\infty, a_1)] \\ &= \phi(\mathfrak{C}, f \circledast_{(-\infty, a_1)} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} (\bar{a})) \cap (-\infty, f \circledast_{(-\infty, a_1)} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} (a_1)) \\ &= \phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap (-\infty, a_1), \end{aligned}$$

где је $f \circledast_{(-\infty, a_1)} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} (\bar{a}) = \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}(\bar{a})$ јер $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Слично, користећи да је $f \circledast_{(a_i, a_{i+1})} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \in \mathrm{Aut}_{\{a_i, a_{i+1}\}}(\mathfrak{C})$ за $f \in \mathrm{Aut}_{\{a_i, a_{i+1}\}}(\mathfrak{C})$, и користећи да је $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \circledast_{(-\infty, a_n)} f \in \mathrm{Aut}_{\{a_n\}}(\mathfrak{C})$ за $f \in \mathrm{Aut}_{\{a_n\}}(\mathfrak{C})$, можемо доказати да су скупови $\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap (a_i, a_{i+1})$ и $\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap (a_n, +\infty)$ редом дефинабилни над $\{a_i, a_{i+1}\}$ и $\{a_n\}$. □

Дефиниција 5.10. Нека је $p \in S_1(\emptyset)$.

(i) За скупове $D_1, D_2 \subseteq \mathfrak{C}$ кажемо да су једнаки на p, у ознаци $D_1 \approx_p D_2$, ако задовољавају:

$$D_1 \cap p(\mathfrak{C}) = D_2 \cap p(\mathfrak{C}).$$

(ii) За формуле $\phi_1(t), \phi_2(t)$ са параметрима из $\mathfrak{C}$ кажемо да су једнаке на p, у ознаци $\phi_1(t) \approx_p \phi_2(t)$, ако важи $\phi_1(\mathfrak{C}) \approx_p \phi_2(\mathfrak{C})$.

(iii) За скупове $D_1, D_2 \subseteq \mathfrak{C}$ кажемо да су једнаки у левом (десном) делу на p, у ознаци $D_1 \approx_p^l D_2$ ($D_1 \approx_p^r D_2$), ако постоји $c \models p$ такав да:

$$D_1 \cap p(\mathfrak{C}) \cap (-\infty, c) = D_2 \cap p(\mathfrak{C}) \cap (-\infty, c)$$

$$(D_1 \cap p(\mathfrak{C}) \cap (c, +\infty) = D_2 \cap p(\mathfrak{C}) \cap (c, +\infty)).$$

За c кажемо да сведочи $D_1 \approx_p^l D_2$ ($D_1 \approx_p^r D_2$).

(iv) За скупове $\phi_1(t), \phi_2(t)$ са параметрима из $\mathfrak{C}$ кажемо да су једнаки у левом (десном) делу на p, у ознаци $\phi_1(t) \approx_p^l \phi_2(t)$ ($\phi_1(t) \approx_p^r \phi_2(t)$), ако важи $\phi_1(\mathfrak{C}) \approx_p^l \phi_2(\mathfrak{C})$ ($\phi_1(\mathfrak{C}) \approx_p^r \phi_2(\mathfrak{C})$).

(v) Формула $\phi(t)$ је *лево (десно) ограничена на локусу од p* ако је $\phi(\mathfrak{C}) \approx_p^l \emptyset$ ($\phi(\mathfrak{C}) \approx_p^r \emptyset$).

Напомена 5.11.

(i) Релација $\approx_p$ је релација еквиваленције на скупу $\mathcal{P}(\mathfrak{C})$ и скупу формула са параметрима из $\mathfrak{C}$.

(ii) Ако су два скупа или формуле $\approx_p$ једнака, тада су они и $\approx_p^l$ и $\approx_p^r$ једнаки.

(iii) Ако $c \models p$ сведочи $\approx_p^l$ ($\approx_p^r$) једнакост нека два скупа или формуле, тада и било који $d \models p$ такав да $d < c$ ($d > c$) такође сведочи исто.

(iv) Релација $\approx_p^l$ ($\approx_p^r$) је релација еквиваленције на скупу $\mathcal{P}(\mathfrak{C})$ и скупу формула са параметрима из $\mathfrak{C}$.

(v) За скуп D важи $D \approx_p^l p(\mathfrak{C})$ ако и само ако $\mathfrak{C} \setminus D \approx_p^l \emptyset$. Слично, $D \approx_p^r p(\mathfrak{C})$ ако и само ако $\mathfrak{C} \setminus D \approx_p^r \emptyset$

(vi) За формулу $\phi(t)$ са параметрима из $\mathfrak{C}$ важи $\phi(\mathfrak{C}) \approx_p^l p(\mathfrak{C})$ ако и само ако $\neg\phi(\mathfrak{C}) \approx_p^l \emptyset$. Слично, $\phi(\mathfrak{C}) \approx_p^r p(\mathfrak{C})$ ако и само ако $\neg\phi(\mathfrak{C}) \approx_p^r \emptyset$.

Занима нас понашање произвољне формуле са параметрима у левом и десном крају локуса типа. У следећој леми ћемо видети да то понашање зависи само од једног параметра, који можемо да узмемо да је реализација типа.

Лема 5.12. *Нека је $p \in \mathrm{S}_1(\emptyset)$ и $\phi(t)$ формула са параметрима из $\mathfrak{C}$.*

(i) Постоји формула $\psi(t)$ са параметрима из конвексног затворења скупа $p(\mathfrak{C})$ таква да $\phi(t) \approx_p \psi(t)$.

(ii) Постоји реализација $a \models p$ и формула $\psi(t, x)$ без параметара таква да $\phi(t) \approx_p^l \psi(t, a)$.

(iii) Постоји реализација $a \models p$ и формула $\psi(t,x)$ без параметара таква да $\phi(t) \approx_p^r \psi(t,a)$.

Доказ. (i) Поделимо параметре који се јављају у формули $\phi(t)$ на три дела: $\bar{a}$ који су у конвексном затворењу скупа $p(\mathfrak{C})$, $\bar{b} = b_1, b_2, \ldots, b_m$ такве да $b_1 < b_2 < \ldots < b_m < p(\mathfrak{C})$, и $\bar{c} = c_1, c_2, \ldots, c_n$ такве да $p(\mathfrak{C}) < c_1 < c_2 < \ldots < c_n$. Претпоставимо за почетак да су $\bar{b}$ и $\bar{c}$ непразни. Приметимо да тада важи:

$$p(t) \vdash b_m < t \ \wedge \ t < c_1.$$

По компактности постоји формула $\varphi(t) \in p(t)$ таква да $\varphi(t) \vdash b_m < t \ \wedge \ t < c_1$. Ако са $\varphi_c(t)$ означимо формулу која описује конвексно затворење скупа $\varphi(\mathfrak{C})$:

$$\varphi_c(t) = \exists t' t'' \, (\varphi(t') \wedge \varphi(t'') \wedge t' \leqslant t \leqslant t''),$$

тада је јасно да $\varphi_c(t) \vdash b_m < t \wedge t < c_1$, као и да је $\varphi_c(\mathfrak{C})$ конвексан скуп. Како је $\varphi_c(t)$ формула без параметара, то је скуп $\varphi_c(\mathfrak{C})$ фиксиран сваким аутоморфизмом монструма. Према леми 5.3, за сваки $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ важи $f \circledast_{\varphi_c(\mathfrak{C})} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$.

Тврдимо да је скуп $\phi(\mathfrak{C}) \cap \varphi_c(\mathfrak{C})$ дефинабилан са параметрима $\bar{a}$. Према леми 1.9 довољно је да докажемо да је $\bar{a}$-инваријантан. Нека је $f \in \mathrm{Aut}_{\bar{a}}(\mathfrak{C})$. Тада је:

$$f[\phi(\mathfrak{C}) \cap \varphi_c(\mathfrak{C})] = f \circledast_{\varphi_c(\mathfrak{C})} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \, [\phi(\mathfrak{C}) \cap \varphi_c(\mathfrak{C})] = \phi(\mathfrak{C}) \cap \varphi_c(\mathfrak{C}),$$

где прва једнакост важи јер $\phi(\mathfrak{C}) \cap \varphi_c(\mathfrak{C}) \subseteq \varphi_c(\mathfrak{C})$, а друга јер аутоморфизам $f \circledast_{\varphi_c(\mathfrak{C})} \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ фиксира све параметре формуле $\phi(t) \wedge \varphi_c(t)$ која дефинише $\phi(\mathfrak{C}) \cap \varphi_c(\mathfrak{C})$. Дакле, $\phi(\mathfrak{C}) \cap \varphi_c(\mathfrak{C})$ је заиста $\bar{a}$-инваријантан, па је дефинабилан формулом $\psi(t)$ са параметрима $\bar{a}$. Како је $p(\mathfrak{C}) \subseteq \varphi(\mathfrak{C}) \subseteq \varphi_c(\mathfrak{C})$, то је:

$$\psi(\mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}) = \phi(\mathfrak{C}) \cap \varphi_c(\mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}) = \phi(\mathfrak{C}) \cap p(\mathfrak{C}),$$

што доказује $\phi(t) \approx_p \psi(t)$.

У случају да је $\bar{b}$ празан и $\bar{c}$ непразан, формулу $\varphi(t) \in p(t)$ можемо изабрати по компактности из $p(t) \vdash t < c_1$, и наставити доказ као у првом случају. Слично, у случају да је $\bar{b}$ непразан и $\bar{c}$ празан, формулу $\varphi(t) \in p(t)$ можемо изабрати по комактности из $p(t) \vdash b_m < t$, и наставити доказ као у првом случају. У случају да су $\bar{b}$ и $\bar{c}$ празни, $\phi(t)$ је већ формула са параметрима у конвексном затворењу скупа $p(\mathfrak{C})$, па можемо узети $\psi(t) = \phi(t)$.

(ii) Према делу (i) постоји формула $\psi'(t)$ са параметрима из конвексног затворења $p(\mathfrak{C})$ таква да $\phi(t) \approx_p \psi'(t)$. Изаберимо $a \models p$ тако да је a мање од свих параметара у формули $\psi'(t)$. Према леми 5.9, скуп $\psi'(\mathfrak{C}) \cap (-\infty, a)$ је дефинабилан над $\{a\}$; нека је $\psi(t,a)$ формула која га дефинише. Како је $\psi'(\mathfrak{C}) \cap (-\infty, a) = \psi(\mathfrak{C}, a)$, то a сведочи $\psi'(t) \approx_p^l \psi(t,a)$, па како је $\phi(t) \approx_p \psi'(t)$, то је $\phi(t) \approx_p^l \psi(t,a)$.

Део (iii) се доказује слично као (ii). $\square$

У следеће две леме ћемо видети да је произвољна формула или лево (десно) ограничена у типу или је њена негација лево (десно) ограничена у типу.

Лема 5.13. *Нека је* $p \in S_1(\emptyset)$ *неалгебарски тип. Претпоставимо да је* $\phi(t, x)$ *формула без параметара и* $a \models p$. *Тада је:*

$$\text{или} \quad \phi(\mathfrak{C}, a) \approx^l_p \emptyset \quad \text{или} \quad \phi(\mathfrak{C}, a) \approx^l_p p(\mathfrak{C}),$$

и слично:

$$\text{или} \quad \phi(\mathfrak{C}, a) \approx^r_p \emptyset \quad \text{или} \quad \phi(\mathfrak{C}, a) \approx^r_p p(\mathfrak{C}).$$

Доказ. Према леми 5.8 можемо изабрати скуп C_l такав да:

- C_l је лево затворен подскуп од $\mathfrak{C}$;
- $C_l \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$;
- за све $a' \models p$ такве да $a' > a$ важи $\mathrm{tp}(a'/C_l) = \mathrm{tp}(a/C_l)$.

Изаберимо произвољно $c \in C_l \cap p(\mathfrak{C})$.

Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да $\phi(\mathfrak{C}, a) \not\approx^l_p \emptyset$ и $\phi(\mathfrak{C}, a) \not\approx^l_p p(\mathfrak{C})$. Тада лево од c и формула $\phi(t, a)$ и формула $\neg\phi(t, a)$ имају решење у локусу $p(\mathfrak{C})$. Изаберимо $b_0, b_1 \models p$, $b_0, b_1 < c$, такве да $\models \phi(b_0, a) \wedge \neg\phi(b_1, a)$. Приметимо да $b_0, b_1 \in C_l$.

Према леми 5.7 можемо изабрати скуп D_r такав да:

- D_r је десно затворен подскуп од $\mathfrak{C}$;
- $D_r \cap p(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$;
- $\mathrm{tp}(b_0/D_r) = \mathrm{tp}(b_1/D_r)$.

Приметимо да можемо изабрати $a' \models p$ такав да $a' > a$ и $a' \in D_r$. Тада $\mathrm{tp}(a'/C_l) = \mathrm{tp}(a/C_l)$, јер $a' > a$, па како $b_0, b_1 \in C_l$ добијамо:

$$\models \phi(b_0, a') \wedge \neg\phi(b_1, a').$$

Међутим ово је контрадикција јер $a' \in D_r$, а $\mathrm{tp}(b_0/D_r) = \mathrm{tp}(b_1/D_r)$. $\square$

Лема 5.14. *Нека је* $p \in S_1(\emptyset)$ *неалгебарски тип. Претпоставимо да је* $\phi(t)$ *формула са параметрима у* $\mathfrak{C}$. *Тада је:*

$$\text{или} \quad \phi(t) \approx^l_p \emptyset \quad \text{или} \quad \phi(t) \approx^l_p p(\mathfrak{C}),$$

и слично:

$$\text{или} \quad \phi(t) \approx^r_p \emptyset \quad \text{или} \quad \phi(t) \approx^r_p p(\mathfrak{C}).$$

Доказ. Према леми 5.12(ii) постоји $a \models p$ и формула без параметара $\psi(t, x)$ таква да $\phi(t) \approx^l_p \psi(t, a)$. Према леми 5.13, за формулу $\psi(t, a)$ важи или $\psi(\mathfrak{C}, a) \approx^l_p \emptyset$ или $\psi(t, a) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$. Према томе или $\phi(\mathfrak{C}) \approx^l_p \emptyset$ или $\phi(\mathfrak{C}) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$. $\square$

3. Глобална проширења

Претпоставка 5.15. У овом одељку фиксирамо неалгебарски тип $p \in \mathrm{S}_1(\emptyset)$.

Дефиниција 5.16. Са $\mathfrak{p}_l$ и $\mathfrak{p}_r$ означавамо следеће скупове формула:

$$\mathfrak{p}_l = \{\phi(t) \mid \phi(t) \text{ је формула са параметрима из } \mathfrak{C} \text{ и } \phi(\mathfrak{C}) \approx^l_p p(\mathfrak{C})\},$$

$$\mathfrak{p}_r = \{\phi(t) \mid \phi(t) \text{ је формула са параметрима из } \mathfrak{C} \text{ и } \phi(\mathfrak{C}) \approx^r_p p(\mathfrak{C})\}.$$

Циљ нам је да докажемо да су $\mathfrak{p}_l$ и $\mathfrak{p}_r$ глобална $\emptyset$-инваријантна проширења типа p, као и да су то једина глобална, $\emptyset$-инваријантна проширења типа p. Зваћемо их лево и десно глобално проширење типа p. Такође ћемо доказати и да су типови $\mathfrak{p}_l$ и $\mathfrak{p}_r$ правилни над $\emptyset$. Представићемо доказе наведених тврђења који се тичу $\mathfrak{p}_l$, аналогни докази пролазе за $\mathfrak{p}_r$.

Тврђење 5.17. *Скуп $\mathfrak{p}_l$ је потпуни тип над $\mathfrak{C}$ и $p \subseteq \mathfrak{p}_l$. Слично, $\mathfrak{p}_r$ је потпуни тип над $\mathfrak{C}$ и $p \subseteq \mathfrak{p}_r$.*

Доказ. Да је $p \subseteq \mathfrak{p}_l$ је јасно: ако формула $\phi(t) \in p(t)$, тада је $p(\mathfrak{C}) \subseteq \phi(\mathfrak{C})$, па специјално $\phi(\mathfrak{C}) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$, тј. $\phi(t) \in \mathfrak{p}_l(t)$.

Да бисмо доказали да је $\mathfrak{p}_l$ коначно задовољив, изаберимо $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t) \in \mathfrak{p}_l(t)$. Тада је $\phi_i(\mathfrak{C}) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$ за све i, па изаберимо $c_i \models p$ које то сведоче. Изаберимо $a \models p$, $a < c_1, \dots, c_n$. Тада је из $\phi_i(\mathfrak{C}) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$ јасно да важи $\models \phi_1(a) \wedge \ldots \wedge \phi_n(a)$, одакле следи да је $\mathfrak{p}_l$ коначно задовољив.

Коначно, за доказ потпуности, приметимо да према леми 5.14 за сваку формулу $\phi(t)$ са параметрима из $\mathfrak{C}$ важи или $\phi(\mathfrak{C}) \approx^l_p \emptyset$ или $\phi(\mathfrak{C}) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$, тј. за сваку формулу $\phi(t)$ са параметрима из $\mathfrak{C}$ важи или $\neg\phi(\mathfrak{C}) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$ или $\phi(\mathfrak{C}) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$, па или $\neg\phi(t)$ или $\phi(t)$ припада $\mathfrak{p}_l$, што доказује потпуност. $\square$

Тврђење 5.18. *Типови $\mathfrak{p}_l$ и $\mathfrak{p}_r$ су једина два $\emptyset$-инваријантна проширења типа p у $\mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$.*

Доказ. Најпре ћемо доказати да је $\mathfrak{p}_l$ инваријантан над $\emptyset$. Нека је $\phi(t, \bar{a}) \in \mathfrak{p}_l(t)$ и $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$. Тада је $\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$. Ово значи да је:

$$\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap p(\mathfrak{C}) \cap (-\infty, c) = p(\mathfrak{C}) \cap (-\infty, c),$$

за неко $c \models p$. Међутим, применом аутоморфизма f добијамо:

$$\phi(\mathfrak{C}, f(\bar{a})) \cap p(\mathfrak{C}) \cap (-\infty, f(c)) = p(\mathfrak{C}) \cap (-\infty, f(c)),$$

одакле закључујемо $\phi(\mathfrak{C}, f(\bar{a})) \approx^l_p p(\mathfrak{C})$, па $\phi(t, f(\bar{a})) \in \mathfrak{p}_l$.

Слично, $\mathfrak{p}_r$ је инваријантан над $\emptyset$.

Претпоставимо сада да је $\mathfrak{p} \in \mathrm{S}_1(\mathfrak{C})$ неко $\emptyset$-инваријантно проширење типа p. Нека $a \models p$; због потпуности или $t < a$ или $t \not< a$ припада $\mathfrak{p}$.

Ако $t < a \in \mathfrak{p}$, због $\emptyset$-инваријантности, тада $t < b \in \mathfrak{p}$ за све $b \models p$. Нека је $\phi(t) \in \mathfrak{p}_l$, тј. $\phi(\mathfrak{C}) \approx_p^l p(\mathfrak{C})$. Тада $\neg\phi(\mathfrak{C}) \approx_p^l \emptyset$, и изаберимо сведока $c \models p$ за то. Формула $\neg\phi(t)$ није сагласна са подскупом $p(t) \cup \{t < c\} \subseteq \mathfrak{p}(t)$, па $\neg\phi(t) \notin \mathfrak{p}$, одакле $\phi(t) \in \mathfrak{p}$. Дакле, $\mathfrak{p}_l \subseteq \mathfrak{p}$, па због потпуности је $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_l$.

Ако $t \not< a \in \mathfrak{p}$, тада $a < t \in \mathfrak{p}$, па сличним закључивањем као у претходном пасусу добијамо $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_r$. □

Пре него што докажемо да су $\mathfrak{p}_l$ и $\mathfrak{p}_r$ правилни, докажимо једну техничку лему.

Лема 5.19. *Нека је $A \subseteq \mathfrak{C}$ и $b \models p$.*

(i) Елемент $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A}$ ако и само ако постоје формула $\phi(t, \bar{x})$ и $\bar{a} \in A$ такви да $\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \approx_p^l \emptyset$ и $\models \phi(b, \bar{a})$.

(ii) Ако $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A}$ и $c \models p$, $b < c$, тада $c \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A}$.

(iii) Ако је $A_0 = A \cap p_c(\mathfrak{C})$, где је $p_c(\mathfrak{C})$ конвексно затворење скупа $p(\mathfrak{C})$, тада $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A}$ ако и само ако $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A_0}$.

Доказ. (i) За $\bar{a} \in A$, формула $\phi(t, \bar{a}) \notin \mathfrak{p}_l$ ако и само ако, по дефиницији $\mathfrak{p}_l$ и леми 5.14, $\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \approx_p^l \emptyset$, па (i) следи директно.

(ii) Претпоставимо да $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A}$ и $c \models p$, $b < c$. Изаберимо формулу $\phi(t, \bar{x})$ и $\bar{a} \in A$ такве да $\models \phi(b, \bar{a})$ и $\phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \approx_p^l \emptyset$. Тада можемо изабрати $d \models p$ такво да $d < \phi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap p(\mathfrak{C})$, па приметимо да имамо:

$$p(t) \cup \{\phi(t, \bar{a})\} \vdash d < t.$$

По компактности изаберимо формулу $\varphi(t) \in p(t)$ такву да:

$$\varphi(t) \wedge \phi(t, \bar{a}) \vdash d < t.$$

Уочимо формулу $\psi(t, \bar{a})$:

$$\psi(t, \bar{a}) = \exists x\, (\varphi(x) \wedge \phi(x, \bar{a}) \wedge x \leqslant t).$$

Тврдимо да $\psi(t, \bar{a}) \notin \mathfrak{p}_l$. Ако је $e \models p$ такав да $\models \psi(e, \bar{a})$, изаберимо e' које је сведок за егзистенцијални квантификатор у $\models \psi(e, \bar{a})$; дакле, $\models \varphi(e') \wedge \phi(e', \bar{a}) \wedge e' \leqslant e$. Из $\models \varphi(e') \wedge \phi(e', \bar{a})$ следи $d < e'$, што заједно са $e' \leqslant e$ повлачи $d < e$. Дакле, $d < \psi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \cap p(\mathfrak{C})$, па је $\psi(\mathfrak{C}, \bar{a}) \approx_p^l \emptyset$, тј. $\psi(t, \bar{a}) \notin \mathfrak{p}_l$.

Сада приметимо да је b сведок за егзистенцијални квантификатор у $\models \psi(c, \bar{a})$ ($\models \varphi(b)$ важи јер $b \models p$ и $\varphi(t) \in p(t)$). Према томе $c \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A}$.

(iii) Импликација ($\Leftarrow$) је тривијална. Претпоставимо $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A}$. Изаберимо формулу $\phi(t)$ са параметрима из A такву да $\models \phi(b)$ и $\phi(\mathfrak{C}) \approx_p^l \emptyset$. Према леми 5.12 постоји формула $\psi(t)$ са параметрима из A_0 таква да $\phi(t) \approx_p \psi(t)$. Тада је јасно $\models \psi(b)$ и $\psi(\mathfrak{C}) \approx_p^l \emptyset$, па $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A_0}$. □

Тврђење 5.20. *Типови* $\mathfrak{p}_l$ *и* $\mathfrak{p}_r$ *су правилни над* $\emptyset$.

Доказ. Претпоставимо да је $A \subseteq \mathfrak{C}$ и $a \in p(\mathfrak{C}) \smallsetminus \mathfrak{p}_{l\restriction A}(\mathfrak{C})$. Треба да докажемо да $\mathfrak{p}_{l\restriction A} \vdash \mathfrak{p}_{l\restriction Aa}$. Према леми 5.19(iii) можемо претпоставити да је $A \subseteq p_c(\mathfrak{C})$, где је $p_c(\mathfrak{C})$ конвексно затворење скупа $p(\mathfrak{C})$. Уочимо рестрикцију $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}$ на $p(\mathfrak{C})$ (такође је означавамо са $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}$):

$$\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}(A) = \{c \models p \mid c \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction A}\}.$$

Према леми 5.19(ii), $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}(A)$ је затворен на десно у $p(\mathfrak{C})$. Означимо са D конвексно затворење скупа $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}(A)$.

Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да $\mathfrak{p}_{l\restriction A} \nvdash \mathfrak{p}_{l\restriction Aa}$, и изаберимо $b \models p$ такво да $b \models \mathfrak{p}_{l\restriction A}$ и $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction Aa}$; тада $b \notin \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}(A)$. Како је $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}(A)$ на десно затворен у $p(\mathfrak{C})$, то је $b < \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}(A)$, па је и $b < D$. Како $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction Aa}$, према леми 5.19(i), постоји формула $\phi(t,x)$ са параметрима из A, таква да $\models \phi(b,a)$ и $\phi(\mathfrak{C},a) \approx_p^l \emptyset$. Из $\phi(\mathfrak{C},a) \approx_p^l \emptyset$, можемо изабрати $b' \models p$ такво да $\models \neg\phi(b',a)$ и $b' < b$. Специјално, $b' < b$ нам још каже да $b' \notin D$ и $b' \models \mathfrak{p}_{l\restriction A}$.

Како $\mathrm{tp}(b/A) = \mathrm{tp}(b'/A) = \mathfrak{p}_{l\restriction A}$, постоји аутоморфизам $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathfrak{C})$ такав да $f(b) = b'$. Како f фиксира A, то f фиксира скуп $\mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}(A)$, па је и $f[D] = D$. Према леми 5.3, $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \circledast_D f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$. Приметимо да $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \circledast_D f$ слика пар (a,b) у (a,b') ($\mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \circledast_D f$ фиксира a, јер $a \in \mathrm{cl}_{\mathfrak{p}_l}(A) \subseteq D$), што је у контрадикцији са $\models \phi(b,a) \land \neg\phi(b',a)$.

Слично, тип $\mathfrak{p}_r$ је правилан над $\emptyset$. $\square$

Сада можемо да докажемо теорему 5.1. Други део следи из напомене 5.4 и тврђења 5.18. За доказ првог дела претпоставимо да је $\mathfrak{p}$ инваријантан неалгебарски тип. Према напомени 5.4 можемо претпоставити да је инваријантан над $\emptyset$. Дакле, $\mathfrak{p}$ је инваријантно над $\emptyset$ проширење од $p = \mathfrak{p}_{\restriction\emptyset}$, па према тврђењу 5.18, $\mathfrak{p}$ је једнако или $\mathfrak{p}_l$ или $\mathfrak{p}_r$ (лево и десно глобално проширење од p). Према тврђењу 5.20, $\mathfrak{p}$ је правилан.

На крају, размотримо Морлијеве низове у $\mathfrak{p}_l$ над $\emptyset$. Ако је (a,b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}_l$ над $\emptyset$, тада према леми 5.19(ii) следи да је $b < a$. Заиста, ако је $a \leqslant b$, тада $a \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction a}$ повлачи $b \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction a}$. Према томе $\mathfrak{p}_l$ је асиметричан тип над $\emptyset$. Такође, сваки Морлијев низ у $\mathfrak{p}_l$ над $\emptyset$ је строго опадајући у односу на базно уређење. Дакле, уређење које сведочи $\emptyset$-асиметричност типа $\mathfrak{p}_l$, $<_{\mathfrak{p}_l}$, је уређење $>$.

Слично, ако је (a,b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}_r$ над $\emptyset$, тада је $a < b$, одакле директно закључујемо $\emptyset$-асиметричност типа $\mathfrak{p}_r$, као и да су сви Морлијеви низови у $\mathfrak{p}_r$ над $\emptyset$ строго растући у односу на базно уређење, тј. уређење које сведочи $\emptyset$-асиметричност, $<_{\mathfrak{p}_r}$, је баш базно уређење $<$.

Тврђење 5.21.

(i) Претпоставимо да $a, b \models p$, $a < b$. Тада је (b, a) Морлијев низ у $\mathfrak{p}_l$ над $\emptyset$ ако и само ако је (a, b) Морлијев низ у $\mathfrak{p}_r$ над $\emptyset$.

(ii) За свако $a \models p$ важи:

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}_l}(a) = \mathcal{E}_{\mathfrak{p}_r}(a).$$

Доказ. (i) Претпоставимо да (b, a) није Морлијев низ у $\mathfrak{p}_l$ над $\emptyset$. Тада $a \not\models \mathfrak{p}_{l\restriction b}$, па према леми 5.19 постоји формула $\phi(t, b)$ таква да $\models \phi(a, b)$ и $\phi(\mathfrak{C}, b) \approx^l_p \emptyset$. Приметимо да тада за свако $c \models p$ важи $\phi(\mathfrak{C}, c) \approx^l_p \emptyset$. Ако је c такво да $a < b < \mathcal{E}_{\mathfrak{p}_l}(c)$, тада (c, a) јесте Морлијев низ у $\mathfrak{p}_l$ над $\emptyset$, па мора бити $\models \neg\phi(a, c)$. Према томе за формулу $\neg\phi(a, t)$ важи $\neg\phi(a, \mathfrak{C}) \approx^r_p p(\mathfrak{C})$. Одатле $\phi(a, \mathfrak{C}) \approx^r_p \emptyset$, па $\phi(a, t) \notin \mathfrak{p}_r$, и како $\models \phi(a, b)$, добијамо $b \not\models \mathfrak{p}_{r\restriction a}$, тј. (a, b) није Морлијев низ у $\mathfrak{p}_r$ над A. Други смер је потпуно аналоган.

(ii) Претпоставимо да $a \models p$. Тада према (i) имамо:

$$\begin{aligned} b \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}_l}(a) \quad & \text{акко} \quad a \text{ и } b \text{ се не могу поређати у Морлијев низ у } \mathfrak{p}_l \text{ над } \emptyset \\ & \text{акко} \quad a \text{ и } b \text{ се не могу поређати у Морлијев низ у } \mathfrak{p}_r \text{ над } \emptyset \\ & \text{акко} \quad b \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}_r}(a), \end{aligned}$$

Дакле, $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}_l}(a) = \mathcal{E}_{\mathfrak{p}_r}(a)$. □

Према претходном тврђењу, Морлијев низ у $\mathfrak{p}_l$ над $\emptyset$ је исто што и Морлијев низ у $\mathfrak{p}_r$ над $\emptyset$, али обратно уређен. Дакле, имамо следећу директну последицу.

Последица 5.22.

(i) $\mathrm{Lin}_\emptyset(\mathfrak{p}_l) = \mathrm{Lin}_\emptyset(\mathfrak{p}_r)$ и $(\mathrm{Lin}_\emptyset(\mathfrak{p}_l), <_{\mathfrak{p}_l}) \cong (\mathrm{Lin}_\emptyset(\mathfrak{p}_r), <_{\mathfrak{p}_r})^*$.

(ii) $\mathrm{Lin}^M_\emptyset(\mathfrak{p}_l) = \mathrm{Lin}^M_\emptyset(\mathfrak{p}_r)$ и $(\mathrm{Lin}^M_\emptyset(\mathfrak{p}_l), <_{\mathfrak{p}_l}) \cong (\mathrm{Lin}^M_\emptyset(\mathfrak{p}_r), <_{\mathfrak{p}_r})^*$, за сваки мали модел M.

Литература

1. Gogacz, T., Krupinski, K. (2014). On regular groups and fields. The Journal of Symbolic Logic, 79(3), 826-844.
2. Hodges, W. (1993). Model theory (Vol. 42). Cambridge: Cambridge University Press.
3. Itai, M., Tsuboi, A., Wakai, K. (2004). Construction of saturated quasi-minimal structure. The Journal of Symbolic Logic, 69(1), 9-22.
4. Krupinski, K., Tanović, P., Wagner, F.O. (2013). Around Podewski's conjecture. Fundamenta Mathematicae, 22, 175-193.
5. Marker, D. (2002). Model theory: an introduction. Springer Science & Business Media.
6. Marsh, W. (1966). On ω_1-categorical but not ω-categorical theories (Doctoral dissertation, Dartmouth College Hanover, New Hampshire).
7. Moconja, S. (2015). On commutativity of quasi-minimal groups. Publications de l'Institut Mathématique. DOI: 10.2298/PIM150510030M.
8. Moconja, S., Tanović, P. (2015). Asymmetric regular types. Annals of Pure and Applied Logic, 166(2), 93-120.
9. Pillay, A. (2008). An introduction to stability theory. Dover publications, inc., Mineola, New York.
10. Pillay, A., Tanovic, P. (2011). Generic stability, regularity, and quasiminimality. Models, Logics and Higher-Dimensional Categories (A Tribute to the Work of Mihly Makkai), CRM Proceedings and Lecture Notes, 53, 189-211.
11. Podewski, K.P. (1973). Minimale Ringe. Math. Phys. Semesterberichte, 22, 193-197.
12. Reineke, J. (1975). Minimale gruppen. Mathematical Logic Quarterly, 21(1), 357-359.
13. Shelah, S. (1978). Classification theory: and the number of non-isomorphic models. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier.
14. Simon, P. (2012). Lecture notes on NIP theories. arXiv preprint arXiv:1208.3944.
15. Tanović, P. (2015). Generically stable regular types, Journal of Symbolic Logic, 80(1), 308-321.
16. Тановић, П. (2015). Минималне структуре првог реда, Академска мисао, Београд.

17. Tent, K., Ziegler, M. (2012). A course in model theory (Vol. 40). Cambridge University Press.
18. Wagner, F. O. (2000). Minimal fields. The Journal of Symbolic Logic, 65(4), 1833-1835.
19. Zilber, B. (2000). Dimensions and homogeneity in mathematical structures. Connections between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry (edited by A. Macintyre), Quaderni di matematica, 6.
20. Zilber, B. (2015). Model theory of special subvarieties and Schanuel-type conjectures. arXiv preprint arXiv:1501.03301.

Листа симбола

$\models$	релација задовољења (7, 10, 12)
$\vdash$	релација форсирања (11, 12)
$\perp^{\mathrm{w}}, \not\perp^{\mathrm{w}}$	релација слабе (не)ортогоналности (15)
$\perp, \not\perp$	релација (не)ортогоналности (16)
$\otimes$	операција производа инваријантних типова (33)
$\circledast_D$	операција на скупу пресликавања линеарног уређења (96)
$\approx_p$	релација једнакости на локусу типа p (100)
$\approx_p^l, \approx_p^r$	релација једнакости на левом (десном) крају локуса типа p (100)
$\mathrm{Aut}(M)$	група аутоморфизама модела M (8)
$\mathcal{B}_{\mathfrak{p}}$	скуп јако $\mathfrak{p}$-ограничених симетричних формула (60)
$\mathfrak{C}$	монструм (11)
cl	уобичајена ознака за оператор затворења (18)
cl_p	оператор придружен типу p (33)
cl_T,	рестрикција оператора cl на T (18)
cl^T	релативизација оператора cl у T (18)
$\mathrm{d}_p\,\phi$	дефиниција формуле ϕ (13)
$\mathcal{D}(L)$	Дедекиндово комплетирање уређења L (24)
$\mathrm{D}_{\mathfrak{p},A}(\bar{b})$	скуп зависних реализација типа $\mathfrak{p}_{\restriction A}$ од $\bar{b}$ (72)
$\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}^M(b)$	скуп зависних реализација типа $\mathfrak{p}_{\restriction A}$ од b у M (90)
$\mathcal{E}(a)$	$\mathcal{E}$-околина елемента a (21)
$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(a)$	$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$-околина елемента a (55)
$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}^M(a)$	$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}^M$-околина елемента a (90)
$\mathrm{I}_{\mathfrak{p},A}(\bar{b})$	скуп независних реализација типа $\mathfrak{p}_{\restriction A}$ од $\bar{b}$ (72)
$\mathrm{Inv}_{\mathfrak{p},A}(X)$	$\mathfrak{p}$-инваријанта над A скупа X (56)
$\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$	количнички скуп релације $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$ (55)
$\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})$	количнички скуп релације $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}^M$ (82)
$p, q, \ldots$	уобичајене ознаке за потпун тип (9)
$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$	уобичајене ознаке за глобалан потпун тип (13)
$\mathfrak{p}^m, \mathfrak{p}^I$	степен инваријантног типа $\mathfrak{p}$ (31)
$p_{\restriction B}$	рестрикција типа p на домен B (10)
$p(M)$	скуп реализација типа p у моделу M (10)
$\phi(M)$	скуп решења формуле ϕ у моделу M (7)

π	пројекција на S_{cl} (21)
$\pi_{\mathfrak{p}}$	пројекција на $\mathrm{Lin}_A(\mathfrak{p})$ (55)
$\pi_{\mathfrak{p}}^M$	пројекција на $\mathrm{Lin}_A^M(\mathfrak{p})$ (90)
$\mathrm{S}_n(A)$	скуп потпуних типова над скупом параметара A (9, 12)
S_{cl}	количнички скуп релације $\mathcal{E}$ (21)
$\mathrm{Sem}_A(\bar{b})$	скуп полуизолованих низова са $\bar{b}$ над A (16)
$\Sigma(M)$	скуп решења скупа формула Σ у моделу M (8)
$\mathrm{Th}(M)$	теорија модела M (8)
$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$	тип низа $\bar{a}$ над скупом параметара A (9, 12)

Биографија

Славко Моцоња рођен је 11.10.1984. у Сремској Митровици. Дипломирао је на Математичком факултету у Београду 2007. године на смеру Теоријска математика и примене. Школске 2007/2008. године је уписао докторске студије на истом факултету. Од 2007. до 2009. године био је запослен као сарадник у настави, а од 2009. године запослен је као асистент на Математичком факултету у Београду.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Славко Моцоња

број уписа 2007/2007

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Асиметрични правилни типови

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 13.7.2015.

Славко Моцоња

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Славко Моцоња

Број уписа: 2007/2007

Студијски програм: Математика

Наслов рада: Асиметрични правилни типови

Ментор: др Предраг Тановић, доцент

Потписани: Славко Моцоња

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 13.7.2015.

Славко Моцоња

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Асиметрични правилни типови

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 13.7.2015.

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.