

Наставно-научно веће
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Универзитет у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета која је одржана дана 29. марта 2013. г. одређени смо у Комисију за преглед и оцену докторске дисертације Јелене Грујић. После прегледа рукописа њене дисертације *ГЕОМЕТРИЈСКА МОДИФИКАЦИЈА АЈНШТАЈНОВЕ ТЕОРИЈЕ ГРАВИТАЦИЈЕ* подносимо следећи

ИЗВЕШТАЈ

1) БИОГРАФИЈА ЈЕЛЕНЕ ГРУЈИЋ

Јелена Грујић је рођена 18.01.1984. г. у Славонској Пожеги, Р. Хрватска (Југославија). Дипломирала је 2007. г. на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене, са просечном оценом 9.78. Докторске студије је уписала 2007. на Математичком факултету у Београду, смер Геометрија, и положила све испите са оценом 10. Од 2008. г. запослена је на Учитељском факултету у Београду, где је држала вежбе из предмета Математика 1, Математика 2 и Елементарни математички појмови. Учесник је на пројекту "Геометрија, образовање и визуелизација са применама" Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије од 2007. г.

Јелена Грујић је више пута излагала резултате своје дисертације на семинару *Геометрија, образовање и визуелизација са применама*. Учествовала је на 9 научних скупова, од чега на 5 скупова са научним саопштењем. Објавила је 6 научних радова (од чега 2 са СЦИ листе, остали су такође рецензирани), 2 рада су примљена за публикавање у часописима (1 је са СЦИ листе) и 1 рад је у завршној фази припреме за часопис. Има 2 самостална рада.

2) ПРОБЛЕМ И САДРЖАЈ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ове године навршава се 100 година од формулације опште теорије релативности, која се сматра једном од најлепших по форми и најфундаменталнијих по садржају физичких теорија. И поред њеног великог успеха у описивању гравитационих феномена, она није прихваћена као крајња теорија гравитације и истражују се њене разне могуће модификације. Један од проблема је постојање космолошког сингуларитета, који се састоји у томе да космолошка решења у тренутку настанка васионе одговарају

бесконечној густини материје. Тражење решења за овај проблем, и неке друге проблеме, довело је до увођења и разматрања нелокалне модификације Ајнштајнове теорије гравитације, односно опште теорије релативности. Нелокална модификација опште теорије релативности је један вид њене генерализације у оквиру псеудо-Риманове геометрије укључујући у формулацију модификације изводе по просторно-временским координатама до бесконачног реда. Ова дисертација је посвећена управо изучавању геометријске модификације Ајнштајнове теорије гравитације помоћу додавања просторно-временске нелокалности.

Дисертација Ј. Грујић *Геометријска модификација Ајнштајнове теорије гравитације* написана је на 112 страна. Поред наслова и апстракта на српском и енглеском језику, података о ментору и члановима комисије, захвалности и литературе од 57 референци, дисертација садржи следеће делове:

- Увод
- Псеудо-Риманова геометрија
- Ајнштајнова теорија гравитације
- Нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације
- Космолошка решења у моделима нелокалне модификације
- Закључак
- Додатак: Увод у варијациони рачун .

Увод. У уводу је наведено шта је Ајнштајнова теорија гравитације, проблем космолошког сингуларитета и проблем објашњења убрзаног ширења васионе. Наведени су разлози за модификацију опште теорије релативности и уведен појам нелокалне модификације. Наведен је и модел нелокалне гравитације који се у дисертацији детаљно разматра.

Псеудо-Риманова геометрија. У овом поглављу дати су основни појмови из псеудо-Риманове геометрије потребни за разумевање опште теорије релативности и њене модификације. Ово је релативно опширно написано, али је корисно за разматрање разних модификација Ајнштајнове теорије гравитације у њеном геометријском сектору.

Ајнштајнова теорија гравитације. Ово поглавље садржи кратак приказ опште теорије релативности, која је Ајнштајнова теорија гравитације. Дате су формулације њених двају принципа. Наведена је Ајнштајнова једначина за гравитационо поље, која повезује метрику псеудо-Римановог простора са расподелом материје преко тензора енергије-импулса. Истакнута је применљивост Ајнштајнове једначине у космологији. Дат је израз за Фридман-Робертсон-Вокерову метрику која одговара хомогеној и изотропној васиони. Показани су основни елементи псеудо-Риманове геометрије за описивање васионе помоћу Фридманових једначина за космички скалирајући фактор. Побројане су класичне експерименталне потврде опште теорије релативности. Указано је на космолошке проблеме опште теорије релативности, укључујући проблем тамне

материје, тамне енергије и космолошког сингуларитета, и потребу њене модификације. Наведена су два важна случаја модификације: $f(R)$ гравитација и нелокална гравитација.

Нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације. Ово поглавље садржи разне детаље око увођења и разраде модела нелокалне модификације опште теорије релативности. Уведена је једна класа модела нелокално модификоване гравитације помоћу дејства датог изразом (3.1). Изведени су и наведени многи изрази из псеудо-Риманове геометрије који се користе у анализи уведеног нелокалног модела. Овде је детаљно представљено извођење одговарајућих једначина кретања за гравитационо поље, што представља уопштење Ајнштајнове једначине и веома важан резултат ове дисертације. Ове диференцијалне једначине садрже изводе по просторно-временским координатама до бесконачног реда и доста су сложене за детаљну анализу у општем случају. За случај хомогеног и изотропног простора показано је да се систем од 10 једначина своди на две линеарно независне једначине, за које је у космолошком случају погодено узети траг и 00-компоненту.

Космолошка решења у моделима нелокалне модификације. У оквиру доста опште класе нелокалних модела, за које су добијене једначине кретања за гравитационо поље у претходној глави, у овој глави разматрају се детаљно два конкретна модела са њиховим космолошким решењима за скалирајући фактор $a(t)$. За први модел, који је уведен раније другим ауторима, добијена су овде нова решења у облику линеарне комбинације експоненцијалних функција. Други нелокални модел формулисан је у току израде ове дисертације и његова космолошка решења су представљена детаљно. У овом моделу нелокални додатак је инваријантан у односу на скалирање скаларне кривине R . Посебно су анализирана космолошка решења када је скаларна кривина R константна. Међу овим решењима постоје решења де Ситеровог типа која немају проблем космолошког сингуларитета. Ради комплетности, истражена су и наведена такође решења за скалирајући фактор степеног облика.

Закључак. У овом делу дисертације сумирано је шта дисертација садржи. Посебно су истакнути: добијена једначина кретања за гравитационо поље (метрички тензор), R инваријантни нелокални модел и несингуларна космолошка решења.

Додатак. У додатку је дат увод у варијациони рачун, који се доста користи у овој дисертацији при извођењу једначина кретања за гравитационо поље.

3) МЕТОДИ КОРИШЋЕНИ У ИСТРАЖИВАЊУ

У току истраживачког рада на проблематици ове докторске дисертације коришћени су разни методи псеудо-Риманове геометрије. Коришћењем тензорског рачуна разматрани изрази имају исти облик у свим системима референције који су повезани

општим координатним трансформацијама. Варијациони рачун је коришћен у извођењу једначина кретања за гравитационо поље, односно елементе метричког тензора, у оквиру принципа минималног дејства. Просторно-временски изводи су прво уграђени у Даламберов оператор, који потом постаје аргумент неке аналитичке функције. Идеја о нелокалности помоћу просторно-временских извода до бесконачног реда потиче из теорије струна, која садржи гравитацију кроз динамику струна као веома малих 1-димензионих објеката. Решавање сложених диференцијалних једначина кретања, које садрже изводе до бесконачног реда, рађено је углавном помоћу погодних анзаца, јер још нису пронађени општи методи за њихово решавање.

4) НАУЧНИ ДОПРИНОС ДИСЕРТАЦИЈЕ

Главни научни допринос састоји се у конструкцији и разradi једног новог модела нелокално модификоване Ајнштајнове теорије гравитације, чија нелокалност је инваријантна у односу на скалирање скаларне кривине R . Посебно треба истаћи:

- извођење једначина кретања за гравитационо поље (метрички тензор)
- добијена несингуларна космолошка решењима (де Ситеровог типа)
- добијена космолошка решења степеног облика
- изучавање неких конкретних диференцијалних једначина са изводима до бесконачног реда
- погодност модела за даља испитивања нелокалности гравитације.

5) РЕФЕРЕНЦЕ ГЕНЕРИСАНЕ У ТОКУ РАДА НА ДИСЕРТАЦИЈИ

а) Публиковани радови

- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *New cosmological solutions in in nonlocal modified gravity*, Romanian Journal of Physics **58** (5-6), 550-559 (2013).
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *A new model of nonlocal modified gravity*, Publications de l' Institut Mathematique - Beograd, **94** (108), 187-196 (2013). DOI: 10.2298/PIM1308187D.
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *On modified gravity*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **36**, 251-259 (2013). DOI: 10.1007/978-4-431-54270-4 .
- J. Grujic, *Equations of motions in nonlocal modified gravity*, Proceedings of the 7th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, SFIN XXVI, Series A: Conferences A1, 181-196 (2013). ISBN 978-86-82441-38-0.
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *Some power-law cosmological solutions in nonlocal modified gravity*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **111**, 241-250 (2014). DOI:10.1007/978-4-431-55285-7.

- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *Constant curvature cosmological solutions in nonlocal gravity*, AIP Conference Proceedings **1634**, 18-23 (2014). DOI:10.1063/1.4903008.

б) Радови прихваћени за публикување

- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *Some cosmological solutions of a nonlocal modified gravity*, Filomat (2015).
- J. Grujic, *On a new model of nonlocal modified gravity*, Kragujevac Journal of Mathematics (2015).

в) Научна саопштења кандидата на конференцијама

- J. Grujic, *Some cosmological aspects of nonlocal gravity*, XVI National Conference of Astronomers of Serbia, Belgrade, 10-12.10.2011.
- J. Grujic, *Equations of motion in nonlocal modified gravity*, VII Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, Belgrade, 9-19.09.2012.
- J. Grujic, *On bounce cosmological solutions in nonlocal modified gravity*, Lie Theory and its Applications in Physics, Varna (Bulgaria), 17-23.06.2013.
- J. Grujic, *Nonsingular bounce cosmological solutions in nonlocal modified gravity*, XVIII Geometrical Seminar, Vrnjačka Banja, 25-28.05.2014.
- J. Grujic, *Cosmology of nonlocal gravity*, XVII National Conference of Astronomers of Serbia, Belgrade, 23-27.09.2014.

б) ЗАКЉУЧАК

На основу свега наведеног, сматрамо да овај рукопис представља значајан научни допринос истраживању нелокалне модификације Ајнштајнове теорије релативности. Имамо задовољство да предложимо Наставно-научном већу Математичког факултета, Универзитета у Београду, да прихвати као докторску дисертацију рукопис *Геометријска модификација Ајнштајнове теорије гравитације* кандидаткиње Јелене Грујић, и одреди комисију за јавну одбрану.

Београд, 20. марта 2015

КОМИСИЈА ЗА ПРЕГЛЕД И ОЦЕНУ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Др Зоран Ракић, ментор, ред. професор, Математички факултет, Бгд

Др Бранко Драговић, научни саветник, Институт за физику, Бгд

Др Стана Никчевић, ред. професор, Фармацеутски факултет, Бгд

Др Воја Радовановић, ред. професор, Физички факултет, Бгд

Др Мирослава Антић, доцент, Математички факултет, Бгд

Др Владица Андрејић, доцент, Математички факултет, Бгд