УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Марко С. Радовановић

ГРЕБНЕРОВЕ БАЗЕ ЗА МНОГОСТРУКОСТИ ЗАСТАВА И ПРИМЕНЕ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

БЕОГРАД, 2015.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Marko S. Radovanović

GRÖBNER BASES FOR FLAG MANIFOLDS AND APPLICATIONS

DOCTORAL DISSERTATION

BELGRADE, 2015.

МЕНТОР:

проф. др Зоран Петровић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

проф. др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Бранко Малешевић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

проф. др Зоран Петровић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Горан Ђанковић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Бранислав Првуловић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

ГРЕБНЕРОВЕ БАЗЕ ЗА МНОГОСТРУКОСТИ ЗАСТАВА И ПРИМЕНЕ

РЕЗИМЕ

По Бореловом опису, целобројна и mod 2 кохомологија многострукости застава дата је као полиномијална алгебра посечена по одређеном идеалу. У овом раду, Гребнерове базе за ове идеале добијене су у случају комплексних и реалних Грасманових многострукости, као и у случају реалних многострукости застава $F(1,\ldots,1,2,\ldots,2,k,n)$.

У случају Грасманових многострукости, Гребнерове базе примењене су за $\mathbb{Z}$-кохомологију комплексних Грасманових многострукости. Познато је да се, поред Бореловог описа, ова кохомологија може описати и Шубертовим класама. Успостављањем везе између овог описа и добијених Гребнерових база, у овом раду добијене су нове рекурентне једначине којима се могу израчунати (сви) Косткини бројеви. Коришћењем истог метода за малу квантну кохомологију Грасманових многострукости (уместо класичне), ове формуле су додатно побољшане.

У случају реалних многострукости застава $F(1,\ldots,1,2,\ldots,2,k,n)$, добијене Гребнерове базе искоришћене су за добијање нових резултата о утапањима и имерзијама ових многострукости у еуклидске просторе, као и за израчунавање кохомолошке дужине неких многострукости овог типа.

Кључне речи: Гребнерове базе, кохомологија многострукости застава, квантна кохомологија, симетричне функције, Косткини бројеви, кохомолошка дужина, Шубертов рачун, Чернове класе, Штифел-Витнијеве класе, имерзије

Научна област: Математика

Ужа научна област: Алгебра

УДК број: 512.73(043.3)

AMS класификација: 13P10, 14M15, 14N35, 05E05, 57R19

GRÖBNER BASES FOR FLAG MANIFOLDS AND APPLICATIONS

ABSTRACT

By Borel's description, integral and mod 2 cohomology of flag manifolds is a polynomial algebra modulo a well-known ideal. In this doctoral dissertation, Gröbner bases for these ideals are obtained in the case of complex and real Grassmann manifolds, and real flag manifolds $F(1,\ldots,1,2,\ldots,2,k,n)$.

In the case of Grassmann manifolds, Gröbner bases are applied in the study of $\mathbb{Z}$-cohomology of complex Grassmann manifolds. It is well-known that, besides Borel's description, this cohomology can be characterized in terms of Schubert classes. By establishing a connection between this description and Gröbner bases that we obtained, a new recurrence formula that can be used for calculating (all) Kostka numbers is derived. Using the same method for the small quantum cohomology of Grassmann manifolds (instead of the classical), these formulas are improved.

In the case of real flag manifolds $F(1,\ldots,1,2,\ldots,2,k,n)$, Gröbner bases are used to obtain new results on the immersions and embeddings of these manifolds, and for the calculation of the cup-length of some manifolds of this type.

Keywords: Gröbner bases, cohomology of flag manifolds, quantum cohomology, symmetric functions, Kostka numbers, cup-length, Schubert calculus, Chern classes, Stiefel-Whitney classes, immersions

Scientific area: Mathematics

Scientific field: Algebra

UDC number: 512.73(043.3)

AMS Subject Classification: 13P10, 14M15, 14N35, 05E05, 57R19

Садржај

ПРЕДГОВОР

Основу теорије Гребнерових база, пре тачно 50 година, дао је Бруно Бухбергер у својој докторској тези. Његов превасходни циљ био је решавање тзв. *проблема припадности идеалу*, тј. утврђивање да ли се одређени елемент налази у идеалу I датог полиномијалног прстена. Бухбергер је, у случају полиномијалних алгебри над пољима, предложио алгоритам којим се овај проблем може решавати. Основни корак у овом алгоритму је конструкција погодног генераторског скупа за I, који је он, по свом ментору, назвао *Гребнерова база*. Временом, теорија Гребнерових база развила се и у теоријском и у практичном погледу, и данас представља значајан алат у многим областима математике.

Централни објекат који изучавамо у овој докторској дисертацији је кохомолошка алгебра (са целим и модуло 2 коефицијентима) неких типова многострукости застава. По Бореловом опису, ова алгебра је (у општем случају) дата као количник полиномијалне алгебре и одређеног идеала I. Самим тим, да бисмо разумели кохомолошку алгебру многострукости застава потребно је што боље описати идеал I. Инспирисани резултатима у [21, 46, 49, 50, 51, 52, 56], у овој докторској дисертацији тај проблем покушавамо да решимо конструкцијом Гребнерове базе за I. Напоменимо да, иако се за конкретне многострукости застава овако добијене Гребнерове базе могу директно примењивати у одговарајућим алгоритмима (погледати [43]), ми се овим аспектом нећемо бавити, тј.

наше примене биће пре свега „опште” природе.

Кохомолошка алгебра многострукости може се користити за испитивање многих њених тополошких особина. У овој докторској дисертацији посебно ћемо разматрати реалне многострукости застава, чија је $\mathbb{Z}_2$-кохомологија, по Бореловом опису, дата преко Штифел-Витнијевих класа. Један од значајних проблема, а о коме се и данас мало зна, је утврђивање постојања утапања и имерзија дате многострукости застава у еуклидски простор димензије d. Познато је да су (у општем случају) опструкције за постојање имерзија и утапања дате многострукости у неки еуклидски простор најчешће неке карактеристичне класе. У нашем случају, овај проблем може се свести на испитивање да ли је одређена кохомолошка класа, која је задата преко Штифел-Витнијевих класа, нула или не, што се, имајући у виду Борелов опис, своди на проблем припадности идеалу. Друго питање које ћемо разматрати је одређивање *кохомолошке дужине*[1] неких реалних многострукости застава. Познато је да кохомолошка дужина даје ограничења за *Листерник-Шнирелманову категорију*, важну тополошку инваријанту коју је (у општем случају) веома тешко одредити.

Поред Бореловог, постоје и други описи кохомологије многострукости застава. Међу њима, од посебног значаја је опис целобројне кохомологије комплексних Грасманових многострукости преко Шубертових класа (Грасманове многострукости представљају специјалан случај многострукости застава). Са једне стране, овај опис блиско је повезан са симетричним функцијама, па се у њему „виде” комбинаторни објекти као што су Косткини и Литлвуд-Ричардсонови бројеви, док, са друге стране, он (природно) броји пресеке одређених геометријских објеката. Овакви формализми, који повезују комбинаторне објекте са бројевима пресека

[1] cup-length (енг.)

одређених геометријских објеката, од великог су значаја и носе назив *Шубертов рачун*. Између осталог, предмет XV Хилбертовог проблема је проналажење оваквог формализма којим би се доказале тврдње у вези са бројем пресека одређених геометријских објеката које је Шуберт изнео у раду [61] (погледати и [30]).

Један од резултата ове докторске тезе је повезивање Бореловог описа кохомологије комплексних Грасманових многострукости са описом задатим коришћењем Шубертових класа. На овај начин добијене су значајне информације о комбинаторним објектима који описују ову кохомологију, пре свега о Косткиним бројевима.

Прве три главе ове докторске дисертације су уводног карактера – у првој је дат преглед резултата теорије Гребнерових база који ће бити од значаја у наставку текста, друга је посвећена Бореловом опису кохомологије многострукости застава, док је у трећој дат преглед (неопходних) резултата теорије симетричних функција, као и описи $\mathbb{Z}$-кохомологије и мале квантне кохомологије комплексних Грасманових многострукости преко Шубертових класа.

Четврта, пета и шеста глава већим делом посвећене су оригиналним резултатима, који су изложени у [53, 54, 57, 58].

У четвртој глави конструисане су Гребнерове базе за идеале који по Бореловом опису одређују $\mathbb{Z}$-кохомологију комплексних Грасманових многострукости и $\mathbb{Z}_2$-кохомологију реалних Грасманових многострукости, чиме је потврђена (смела) претпоставка 113 из [55]. Поред тога, конструисане су Гребнерове базе за идеале који по опису Сиберта и Тиана дају малу квантну кохомологију Грасманових многострукости.

Пета глава посвећена је Косткиним бројевима и састоји се из два дела. Први део је уводног карактера – у њему је дат преглед метода за израчунавање Косткиних бројева, као и неки (значајни) отворени проблеми везани за њих. У другом делу дати су оригинални резултати. Прво, успостављањем везе између описа $\mathbb{Z}$-кохомологије комплексних Грасманових многострукости датог Шубертовим класама и Гребнерове базе за идеале који одређују ову кохомологију, добијене су рекурентне једначине којима се могу одредити (сви) Косткини бројеви. У наставку, применом сличног метода на малу квантну кохомологију, која је *деформација* класичне, ове једначине су побољшане.

Шеста глава посвећена је реалним многострукостима застава типа $F(1,\ldots,1,2,\ldots,2,k,n)$. У првом делу главе конструисане су Гребнерове базе за идеале који одређују њихову кохомологију. Овај резултат искоришћен је за добијање резултата везаних за имерзије и утапања ових многострукости у еуклидске просторе, као и за одређивање кохомолошке дужине неких многострукости овог типа.

Велику захвалност дугујем ментору професору Зорану Петровићу и доценту Браниславу Првуловићу, без чије помоћи израда ове докторске дисертације не би била могућа. Захваљујем се и осталим члановима комисије, чији су савети и коментари унапредили овај рад.

Ипак, највећу захвалност дугујем својој породици, на безусловној подршци и разумевању, а посебно оцу, који ме је увео у свет математике и због кога сам математику заволео. Њима посвећујем овај рад.

Београд,

мај 2015. године *Марко Радовановић*

ГЛАВА 1

УВОД У ГРЕБНЕРОВЕ БАЗЕ

У овој глави изложени су пре свега они резултати теорије Гребнерових база који су неопходни за доказе основних тврђења у овом раду. Ради комплетности, дати су и неки резултати које у наставку рада нећемо непосредно користити. Приликом писања ослонили смо се на књиге [2] и [3].

1.1 Мономи и мономијални поредак

Током читаве главе са R ће бити означен (комутативни) домен са јединицом, а са $R[x_1, \ldots, x_k]$ полиномијална алгебра k променљивих над овим доменом.

Скуп *чланова* полиномијалне алгебре $R[x_1, \ldots, x_k]$ је

$$\mathbb{T}^k := \{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k} \,:\, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Приметимо да скуп $\mathbb{T}^k$ не зависи од прстена R.

На скупу $\mathbb{T}^k$ можемо увести множење на стандардан начин:

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k} \cdot x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_k^{b_k} := x_1^{a_1+b_1} x_2^{a_2+b_2} \cdots x_k^{a_k+b_k}.$$

Није тешко проверити да је овако дефинисана структура $(\mathbb{T}^k, \cdot)$ комутативан моноид.

На скупу $\mathbb{T}^k$ можемо увести и релацију дељивости (коју означавамо стандардно са $|$):

$$x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k} \mid x_1^{b_1} \cdots x_k^{b_k} \quad \text{ако и само ако} \quad a_i \leqslant b_i \text{ за све } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Релација дељивости није релација линеарног поретка на $\mathbb{T}^k$, али без обзира на то има значајно место у теорији Гребнерових база. За чланове $t_1 = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$ и $t_2 = x_1^{b_1} \cdots x_k^{b_k}$ можемо дефинисати *најмањи заједнички садржалац*, у ознаци $\operatorname{lcm}(t_1, t_2)$, као и *највећи заједнички делилац*, у ознаци $\gcd(t_1, t_2)$, на стандардан начин:

$$\operatorname{lcm}(t_1, t_2) = x_1^{\max\{a_1, b_1\}} \cdots x_k^{\max\{a_k, b_k\}} \quad \text{и} \quad \gcd(t_1, t_2) = x_1^{\min\{a_1, b_1\}} \cdots x_k^{\min\{a_k, b_k\}}.$$

У следећем тврђењу дајемо једну особину релације $|$ која ће бити значајна у наредним разматрањима.

Теорема 1. *Нека је $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ бесконачан низ елемената скупа $\mathbb{T}^k$. Тада постоје природни бројеви $i < j$ такви да $t_i \mid t_j$.*

Доказ. Нека је $A := \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Доказаћемо следеће јаче тврђење:

$$\textit{постоји низ } i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots \textit{ такав да } t_{i_1} \mid t_{i_2} \mid \cdots \mid t_{i_n} \mid \cdots$$

Доказ овог тврђења изводимо применом математичке индукције по k. За $k = 1$ елементи скупа A су облика $t_n = x_1^{m_n}$. Нека је i_1 најмањи природан број за који је m_{i_1} најмањи елемент скупа $\{m_n : n \in \mathbb{N}\}$. Тада очигледно $t_{i_1} \mid t_j$ за све $j > i_1$. На сличан начин (индуктивно) можемо дефинисати и бројеве i_s, за $s \geqslant 2$:

$$i_s \text{ је најмањи природан број за који важи } m_{i_s} = \min\{m_j : j > i_{s-1}\}.$$

Јасно је да за овако дефинисан низ $\{i_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ важи $x_1^{i_p} \mid x_1^{i_l}$ за све $p < l$.

Претпоставимо зато да тврђење важи за $k-1 \geqslant 1$ и докажимо да важи за k. Нека је $t_i = x_1^{a_i^{(1)}} \cdots x_k^{a_i^{(k)}}$ и $t_i^{(k-1)} = x_1^{a_i^{(1)}} \cdots x_{k-1}^{a_i^{(k-1)}}$, за $i \in \mathbb{N}$. По индуктивној претпоставци постоји низ $i_1 < \cdots < i_n < \cdots$ такав да за све $p < l$ важи $t_{i_p}^{(k-1)} \mid t_{i_l}^{(k-1)}$. Посматрајмо низ $t'_{i_s} = x_k^{a_{i_s}^{(k)}}$, $s \in \mathbb{N}$. Применом тврђења за $k=1$ закључујемо да постоји подниз $j_1 < \cdots < j_n < \cdots$ низа $i_1 < \cdots < i_n < \cdots$ такав да за све $p < l$ важи $t'_{j_p} \mid t'_{j_l}$. Како за све $p < l$ важи и $t_{j_p}^{(k-1)} \mid t_{j_l}^{(k-1)}$, закључујемо да за све $p < l$ важи и $t_{j_p} \mid t_{j_l}$, чиме је доказ комплетиран. $\square$

Последица 2. *Нека је S непразан подскуп скупа $\mathbb{T}^k$. Тада је скуп свих минималних елемената B (у односу на релацију дељивости) непразан и коначан. Такође, за свако $t \in S$ постоји $t' \in B$ такво да $t' \mid t$.*

Доказ. Докажимо прво да B није празан. У супротном, постоји бесконачан низ $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ различитих елемената из S такав да $t_i \mid t_j$ за све $i > j$, што је у супротности са теоремом 1.

Докажимо и да је B коначан. У супротном, постоји бесконачан низ $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ елемената из S такав да $t_i \nmid t_j$ за све $i \neq j$, што је опет у супротности са теоремом 1.

Докажимо да важи и последњи део тврђења. Претпоставимо супротно. Како t није минималан елемент скупа S, постоји $t_1 \in S$ тако да $t_1 \mid t$. По претпоставци t_1 није минималан елемент S, па постоји $t_2 \in S$ такав да $t_2 \mid t_1$. Настављајући овај поступак добијамо низ $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ различитих елемената из S за који не важи теорема 1, што је контрадикција. $\square$

Дефиниција 3. Под *мономијалним поретком* скупа $\mathbb{T}^k$ подразумевамо линеарно уређење $\preccurlyeq$ на скупу $\mathbb{T}^k$ које задовољава следећа два услова:

(i) $1 \prec t$ за све $t \in \mathbb{T}^k \setminus \{1\}$;

(ii) ако је $t \prec s$, тада је $t \cdot r \prec s \cdot r$, за све $t, s, r \in \mathbb{T}^k$.

Приметимо да релација дељивости није мономијални поредак, јер није релација линеарног уређења. Ипак, из дефиниције није тешко закључити да је сваки мономијални поредак $\preccurlyeq$ профињење релације дељивости. Прецизније, важи:

Лема 4. *Ако је $\preccurlyeq$ произвољан мономијални поредак на $\mathbb{T}^k$ и $r, s \in \mathbb{T}^k$ такви да важи $r \mid s$, тада је $r \preccurlyeq s$.*

Из ове леме и последице 2 директно закључујемо да је сваки мономијални поредак релација доброг уређења.

Тврђење 5. *Мономијални поредак $\preccurlyeq$ је релација доброг уређења на $\mathbb{T}^k$.*

У наставку ћемо фиксирати мономијални поредак $\preccurlyeq$ и показати како се он може проширити на полиномијалну алгебру $R[x_1, \ldots, x_k]$. Започећемо увођењем неких ознака.

Сваки полином $f \in R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$ се може записати у облику

$$f = a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n,$$

где је $a_i \in R \setminus \{0\}$, а t_i међусобно различити чланови из $\mathbb{T}^k$, за $1 \leqslant i \leqslant n$. Тада (за $f \neq 0$) означавамо са (у трећој једнакости је максимум у односу на релацију $\preccurlyeq$):

- $T(f) := \{t_1, \ldots, t_n\}$ *скуп чланова* полинома f;
- $M(f) := \{a_1 t_1, \ldots, a_n t_n\}$ *скуп монома* полинома f;
- $\mathrm{LT}(f) := \max T(f)$ *водећи члан* полинома f;
- $\mathrm{LC}(f) := a_i$ *водећи коефицијент* полинома f, при чему је t_i водећи члан полинома f;
- $\mathrm{LM}(f) := \mathrm{LC}(f) \cdot \mathrm{LT}(f)$ *водећи моном* полинома f.

Спремни смо да релацију $\preccurlyeq$ скупа $\mathbb{T}^k$ проширимо до релације скупа $R[x_1, \ldots, x_k]$ коју ћемо означавати истим симболом.

Нека су f и g полиноми алгебре $R[x_1, \ldots, x_k]$ и нека је $T(f) = \{t_1, \ldots, t_n\}$ и $T(g) = \{s_1, \ldots, s_m\}$, при чему важи $t_1 \succ \ldots \succ t_n$ и $s_1 \succ \ldots \succ s_m$. Тада је $f \preccurlyeq g$ ако и само ако је:

$$T(f) = T(g) \quad \text{или} \quad \text{за } l := \min\{i : t_i \neq s_i\} \text{ важи } t_l \prec s_l \text{ или } t_l \text{ не постоји.}$$

Овако дефинисана релација на $R[x_1, \ldots, x_k]$ није антисиметрична, али важи следеће тврђење.

Теорема 6. *Не постоји строго опадајући низ полинома у* $R[x_1, \ldots, x_k]$.

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да је $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ строго опадајући низ полинома. Нека је $T(f_i) = \{t_1^{(i)}, \ldots, t_{n_i}^{(i)}\}$, за $i \in \mathbb{N}$, при чему је $t_1^{(i)} \succ \ldots \succ t_{n_i}^{(i)}$.

Посматрајмо скуп $T_1 = \{t_1^{(i)} : i \in \mathbb{N}\}$. Како је $t_1^{(i)} \preccurlyeq t_1^{(j)}$ за $i > j$, овај скуп је по тврђењу 5 коначан. Самим тим, за неко i скуп $\{j \in \mathbb{N} : t_1^{(j)} = t_1^{(i)}\}$ је бесконачан. Означимо тај скуп са I_1. На сличан начин, индуктивно, конструишимо и скупове I_n за $n \in \mathbb{N}$. Нека је $n \geqslant 2$. По тврђењу 5 скуп $I'_{n-1} = \{i : i \in I_{n-1} \text{ и } n_i < n\}$ је коначан, па је скуп $J_{n-1} = I_{n-1} \setminus I'_{n-1}$ бесконачан. Нека је $T_n = \{t_n^{(i)} : i \in J_{n-1}\}$. По тврђењу 5 скуп T_n је коначан, па како је J_{n-1} бесконачан, барем за једно i скуп $\{j \in J_{n-1} : t_n^{(j)} = t_n^{(i)}\}$ је бесконачан. Овај скуп ћемо означити са I_n.

На овај начин конструисали смо опадајући низ $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ бесконачних скупова. Самим тим, ако је $i_n \in I_n$, за $n \in \mathbb{N}$, $\{t_n^{(i_n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ је строго опадајући низ чланова из $\mathbb{T}^k$, што је у контрадикцији са тврђењем 5. $\square$

Примери мономијалног поретка

У овом поглављу даћемо неколико примера мономијалног поретка на $\mathbb{T}^k$. Неке од ових мономијалних поредака ћемо користити у наставку рада.

Пример 7. *Лексикографски поредак* (или *lex* поредак) $\preccurlyeq_{lex}$ задат са $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_k$, дефинисан је на следећи начин: за чланове $t = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$ и $s = x_1^{b_1} \cdots x_k^{b_k}$ важи $t \preccurlyeq_{lex} s$ ако и само ако је $t = s$ или је

$$a_s < b_s, \quad \text{где је } s = \min\{i : a_i \neq b_i\}.$$

Пример 8. *Десни лексикографски поредак* (или *rlex* поредак) $\preccurlyeq_{rlex}$ задат са $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_k$, дефинисан је на следећи начин: за чланове $t = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$ и $s = x_1^{b_1} \cdots x_k^{b_k}$ важи $t \preccurlyeq_{rlex} s$ ако и само ако је $t = s$ или

$$a_s < b_s, \quad \text{где је } s = \max\{i : a_i \neq b_i\}.$$

Пример 9. *Градирани лексикографски поредак* (или *grlex* поредак) $\preccurlyeq_{grlex}$ задат са $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_k$, дефинисан је на следећи начин: за чланове $t = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$ и $s = x_1^{b_1} \cdots x_k^{b_k}$ важи $t \preccurlyeq_{grlex} s$ ако и само ако је $t = s$, или $a_1 + \cdots + a_k < b_1 + \cdots + b_k$, или је $a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_k$ и $t \preccurlyeq_{lex} s$.

Приметимо да мономијални поредак $\preccurlyeq$ на $\mathbb{T}^k$ дефинише добро уређење $\preccurlyeq$ на скупу $\mathbb{N}_0^k$. Наиме, $\preccurlyeq$ можемо дефинисати на следећи начин:

$$(a_1, \ldots, a_k) \preccurlyeq (b_1, \ldots, b_k) \quad \text{ако и само ако} \quad x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k} \preccurlyeq x_1^{b_1} \cdots x_k^{b_k}.$$

Дакле, када говоримо о лексикографском, десном лексикографском или градираном лексикографском уређењу на $\mathbb{N}_0^k$, мислимо на уређење дефинисано одговарајућим мономијалним поретком на $\mathbb{T}^k$.

1.2 Редукција и јака редукција

Дефиниција 10. За полиноме f, h и скуп ненула полинома $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ из $R[x_1, \ldots, x_k]$ кажемо да се f *редукује до* h *по модулу* G *у једном кораку*, и означавамо

$$f \longrightarrow_G h,$$

ако је

$$h = f - (c_1 t_1 g_1 + \cdots + c_s t_s g_s)$$

за неке $c_1, \ldots, c_s \in R$ и чланове $t_1, \ldots, t_s$, при чему је $\mathrm{LT}(f) = t_i \mathrm{LT}(g_i)$ за све $1 \leqslant i \leqslant s$ за које је $c_i \neq 0$, као и $\mathrm{LM}(f) = c_1 t_1 \mathrm{LM}(g_1) + \cdots + c_s t_s \mathrm{LM}(g_s)$.

Приметимо да је у претходној дефиницији допуштена редукција линеарном комбинацијом полинома из G, тачније не захтева се да се редукција врши тачно једним полиномом из G. Разлог због увођења овакве „слабије” дефиниције је пре свега да би се могло радити и са прстенима R у којима „нема довољно дељивости”.

Ово ћемо пробати да илуструјемо следећим примером, у коме упоређујемо редукцију у случају када је R главноидеалски домен (пример ће бити $\mathbb{Z}$) и поље (пример ће бити $\mathbb{Q}$).

Пример 11. Нека је $f = xy - 1$ и $G = \{2x+3, x^3+2y, 3y-7\}$. Користићемо *grlex* мономијални поредак такав да је $x < y$ и размотрити редукцију полинома $f = xy - 1$ по модулу G у случајевима $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Q}$.

$R = \mathbb{Z}$: Приметимо да важи $f \to_G -6y - 7x - 1$, јер је

$$-6y - 7x - 1 = f - (2y(2x+3) - x(3y-7)) \quad \text{и} \quad \mathrm{LM}(2y(2x+3) - x(3y-7)) = \mathrm{LM}(f).$$

Са друге стране, јасно је да се редукција полинома f не може извршити тачно једним полиномом из G.

$R = \mathbb{Q}$: У овом случају полином f се може редуковати једним полиномом из G. На пример, важи $f \to_G -\frac{3}{2}y - 1$, јер је

$$-\frac{3}{2}y - 1 = f - \frac{1}{2}y(2x+3) \quad \text{и} \quad \mathrm{LM}\left(\frac{1}{2}y(2x+3)\right) = \mathrm{LM}(f).$$

Из претходне дефиниције јасно је да важи следеће тврђење.

Тврђење 12. *Ако за* $f, h \in R[x_1, \ldots, x_k]$ *и* $G \subseteq R[x_1, \ldots, x_k] \backslash \{0\}$ *важи* $f \to_G h$, *тада је* $\mathrm{LT}(h) \prec \mathrm{LT}(f)$. □

Из овог и тврђења 5 закључујемо да је сваки низ редукција

$$f \longrightarrow_G f_1 \longrightarrow_G f_2 \longrightarrow_G \cdots$$

коначан.

Дефиниција 13. Нека су f и h полиноми и $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ скуп ненула полинома из $R[x_1, \ldots, x_k]$. Кажемо да се f *редукује до* h *по модулу* G, и означавамо

$$f \longrightarrow_G^* h,$$

ако постоје полиноми $h_1, h_2, \ldots, h_{t-1} \in R[x_1, \ldots, x_k]$ такви да је

$$f \longrightarrow_G h_1 \longrightarrow_G h_2 \longrightarrow_G \cdots \longrightarrow_G h_{t-1} \longrightarrow_G h \quad \text{или је} \quad f = h.$$

Пример 14. Нека су, као у примеру 11, $f = xy - 1$ и $G = \{2x + 3, x^3 + 2y, 3y - 7\}$ из $\mathbb{Z}[x, y]$. Тада, у односу на *grlex* мономијални поредак такав да је $x < y$, важи

$$f \rightarrow_G -6y - 7x - 1 \rightarrow_G -7x - 15,$$

тј. $f \rightarrow_G^* -7x - 15$. Са друге стране, није тешко проверити да се f не може редуковати у једном кораку до $-7x - 15$. □

Дефиниција 15. Полином r је *минималан* у односу на коначан скуп ненула полинома G ако се не може редуковати по модулу G.

Као што се може приметити из дефиниције редукције, од интереса је разматрати водеће мономе полинома скупа по коме редукцију вршимо и полиноме који се редукују. Уведимо зато следећи идеал: за подскуп G, $0 \notin G$, алгебре $R[x_1, \ldots, x_s]$ *идеал водећих монома у* G је

$$\mathrm{LM}(G) := \langle \{\mathrm{LM}(g) \,:\, g \in G\} \rangle.$$

Следећим тврђењем дајемо карактеризацију минималних елемената у односу на коначан скуп $G \subseteq R[x_1, \ldots, x_s]$ преко идеала $\mathrm{LM}(G)$.

Тврђење 16. *Полином* $r \in R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$ *је минималан у односу на коначан скуп* $G \subseteq R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$ *ако и само ако* $\mathrm{LM}(r) \notin \mathrm{LM}(G)$.

Доказ. Ако важи $\mathrm{LM}(r) \notin \mathrm{LM}(G)$, тада се по дефиницији 10 полином r не може редуковати по модулу G, тј. он је минималан.

За доказ другог смера претпоставимо да је r полином такав да важи $\mathrm{LM}(r) \in \mathrm{LM}(G)$. Тада је $\mathrm{LM}(r) = h_1\mathrm{LM}(g_1) + \cdots + h_s\mathrm{LM}(g_s)$, за неке полиноме $h_1, \ldots, h_s \in R[x_1, \ldots, x_k]$ и $g_1, \ldots, g_s \in G$. Одавде је јасно и $\mathrm{LM}(r) = m_1\mathrm{LM}(g_1) + \cdots + m_s\mathrm{LM}(g_s)$, за неке $m_i \in M(h_i) \cup \{0\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, па се r може редуковати до полинома $r - (m_1g_1 + \cdots + m_sg_s)$ по модулу G, тј. r није минималан. $\square$

Тврђење 17. *Нека важи* $f \to_G^* h$. *Тада је* $f - h = 0$ *или постоје мономи* m_i *и полиноми* $g_i \in G$ *(не обавезно различити),* $1 \leqslant i \leqslant n$, *такви да је*

$$f - h = \sum_{i=1}^{n} m_i g_i \quad \text{и} \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{LT}(m_i g_i) \preccurlyeq \mathrm{LT}(f).$$

Доказ. Претпоставимо да је $f \neq h$. По дефиницији релације $\to_G^*$ постоје полиноми $h_1, \ldots, h_{t-1}$ такви да важи

$$f \to_G h_1 \to_G \cdots \to_G h_{t-1} \to_G h.$$

Ради једноставности, нека је $h_0 := f$ и $h_t := h$. Даље, по дефиницији релације $\to_G$, постоје полиноми $g_{i,j} \in G$ и мономи $m_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant s_i$, такви да важи

$$h_{i-1} - h_i = \sum_{j=1}^{s_i} m_{i,j} g_{i,j} \quad \text{и} \quad \mathrm{LT}(h_{i-1}) = \mathrm{LT}(m_{i,j} g_{i,j}),\ 1 \leqslant j \leqslant s_i.$$

Како по тврђењу 12 важи $\mathrm{LT}(h_0) \succ \mathrm{LT}(h_1) \succ \cdots \succ \mathrm{LT}(h_t)$, то је $\mathrm{LT}(f) \succcurlyeq \mathrm{LT}(m_{i,j} g_{i,j})$ за све $1 \leqslant i \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant s_i$, па сабирањем претходних једнакости (уз промену индекса) добијамо

$$f - h = \sum_{i=1}^{n} m_i g_i,$$

при чему је $\mathrm{LT}(f) \succcurlyeq \mathrm{LT}(m_i g_i)$ за све $1 \leqslant i \leqslant n$, тј. $\mathrm{LT}(f) \succcurlyeq \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{LT}(m_i g_i)$. $\square$

Дефиниција 18. Нека је $G \subseteq R[x_1,\dots,x_k] \setminus \{0\}$ и $f \in R[x_1,\dots,x_k] \setminus \{0\}$. Запис

$$f = m_1 g_1 + m_2 f_2 + \cdots + m_s g_s \tag{1.2.1}$$

такав да су m_i мономи и $g_i \in G$ (не обавезно међусобно различити) полиноми за које важи $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \mathrm{LT}(m_i g_i) \preccurlyeq \mathrm{LT}(f)$, називамо *стандардном репрезентацијом полинома f у односу на G*. Скуп свих полинома који имају стандардну репрезентацију у односу на G означаваћемо са $\mathrm{Std}(G)$. Приметимо да је $\mathrm{Std}(G)$ идеал прстена $R[x_1,\dots,x_k]$.

Општије, ако за члан t важи $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \mathrm{LT}(m_i g_i) \preccurlyeq t$, онда запис (1.2.1) називамо *t-репрезентацијом полинома f у односу на G*.

Теорема 19. *Нека је I ненула идеал полиномијалне алгебре $R[x_1,\dots,x_k]$ и G коначан подскуп од $I \setminus \{0\}$. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) $\mathrm{LM}(G) = \mathrm{LM}(I \setminus \{0\})$*;*

(2) *$f \in I$ ако и само ако важи $f \to_G^* 0$;*

(3) $I = \mathrm{Std}(G)$*.*

Доказ. (1)$\Rightarrow$(2): Претпоставимо прво да је $f \in I$. Да бисмо доказали да важи $f \to_G^* 0$, по тврђењу 12 и тврђењу 5 довољно је доказати да се f може редуковати по модулу G. Ово следи из тврђења 16, јер је $\mathrm{LM}(f) \in \mathrm{LM}(G)$. Доказ другог смера следи из тврђења 17.

(2)$\Rightarrow$(3): Јасно је да је $\mathrm{Std}(G) \subseteq I$. Такође, за $f \in I$ важи $f \to_G^* 0$, па је по тврђењу 17 и $f \in \mathrm{Std}(G)$.

(3)$\Rightarrow$(1): Јасно је да је $\mathrm{LM}(G) \subseteq \mathrm{LM}(I \setminus \{0\})$. Нека је зато $\widehat{f} \in \mathrm{LM}(I \setminus \{0\})$, тј.

$$\widehat{f} = p_1 \mathrm{LM}(f_1) + p_2 \mathrm{LM}(f_2) + \cdots + p_s \mathrm{LM}(f_s), \tag{1.2.2}$$

за полиноме $p_1,\dots,p_s \in R[x_1,\dots,x_k]$ и $f_1,\dots,f_s \in I \setminus \{0\}$. Како је $f_i \in \mathrm{Std}(G)$, за $1 \leqslant i \leqslant s$, постоје полиноми $g_j \in G$, $1 \leqslant j \leqslant l_i$, и мономи $m_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant s$,

$1 \leqslant j \leqslant l_i$, такви да за $1 \leqslant i \leqslant s$ важи

$$f_i = m_{i,1}g_1 + m_{i,2}g_2 + \cdots + m_{i,l_i}g_{l_i} \text{ и } \max_{\substack{1\leqslant j\leqslant l_i \\ m_{i,j}\neq 0}} \mathrm{LT}(m_{i,j}g_j) \preccurlyeq \mathrm{LT}(f_i).$$

Заменом овако добијених израза у једнакост (1.2.2) добијамо (за неке полиноме $\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_l \in R[x_1, \ldots, x_k]$)

$$\widehat{f} = \widetilde{p}_1\mathrm{LM}(g_1) + \widetilde{p}_2\mathrm{LM}(g_2) + \cdots + \widetilde{p}_l\mathrm{LM}(g_l),$$

тј. $\widehat{f} \in \mathrm{LM}(G)$. $\square$

Дефиниција 20. За $f, h \in R[x_1, \ldots, x_k]$ и $G \subseteq R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$, кажемо да се f *јако редукује до* h *по модулу* G *у једном кораку*, и означавамо

$$f \twoheadrightarrow_G h,$$

ако је

$$h = f - mg$$

за моном m и $g \in G$ такве да важи $\mathrm{LM}(f) = \mathrm{LM}(mg)$.

Дефиниција 21. За $f, h \in R[x_1, \ldots, x_k]$ и $G \subseteq R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$ кажемо да се f *јако редукује до* h *по модулу* G, и означавамо

$$f \twoheadrightarrow_G^* h,$$

ако постоје полиноми $h_1, h_2, \ldots, h_{t-1} \in R[x_1, \ldots, x_k]$ такви да је

$$f \twoheadrightarrow_G h_1 \twoheadrightarrow_G h_2 \twoheadrightarrow_G \cdots \twoheadrightarrow_G h_{t-1} \twoheadrightarrow_G h \quad \text{или је} \quad f = h.$$

Из ове дефиниције непосредно следи следеће тврђење:

Теорема 22. *Нека је I ненула идеал полиномијалне алгебре $R[x_1, \ldots, x_k]$ и G коначан подскуп од $I \setminus \{0\}$. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) *$f \in I$ ако и само ако важи $f \twoheadrightarrow_G^* 0$;*

(2) *за свако $f \in I \setminus \{0\}$ постоји $g \in G$ такво да $\mathrm{LM}(g) \mid \mathrm{LM}(f)$;*

(3) *скуп умножака водећих монома елемената из G једнак је скупу умножака водећих монома елемената из I.* $\square$

1.3 Гребнерове базе и јаке Гребнерове базе

У овом поглављу даћемо дефиницију и уводна тврђења везана за Гребнерове базе.

Дефиниција 23. Коначан скуп $G \subseteq R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$ је *Гребнерова база* идеала $I \lhd R[x_1, \ldots, x_k]$ уколико задовољава неки од три еквивалентна услова из теореме 19.

Напомена 24. Пре Бухбергера, аналоган концепт за локалне прстене увео је Хиронака у [28] и назвао *стандардна база*.

Теорема 25. *Нека је R Нетерин домен, а I ненула идеал у $R[x_1, \ldots, x_k]$. Тада I има Гребнерову базу.*

Доказ. Како је R Нетерин домен, то је и $R[x_1, \ldots, x_k]$ Нетерин домен по Хилбертовој теореми (погледати [1]). Самим тим, идеал I има коначан генераторски скуп F. Претпоставимо да F није Гребнерова база за I и докажимо да се F може допунити до Гребнерове базе за I. По теореми 19 важи $\mathrm{Std}(F) \neq I$, па постоји $f_1 \in I \setminus \mathrm{Std}(F)$, што значи да важи строга инклузија $\mathrm{Std}(F) \subset \mathrm{Std}(F \cup \{f_1\})$. Нека је $F_1 = F \cup \{f_1\}$. Ако је F_1 Гребнерова база идеала I доказ је завршен, а у супротном, слично као у претходном разматрању, постоји елемент f_2 такав да је $\mathrm{Std}(F_1) \subset \mathrm{Std}(F_1 \cup \{f_2\})$. Настављајући овај поступак добијамо (коначну) Гребнерову базу идеала I, јер у супротном у $R[x_1, \ldots, x_k]$ постоји бесконачан растући низ идеала, што је у супротности са чињеницом да је $R[x_1, \ldots, x_k]$ Нетерин. $\square$

Дефиниција 26. Коначан скуп $G \subseteq R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$ је *јака Гребнерова база* идеала $I \lhd R[x_1, \ldots, x_k]$ уколико задовољава неки од три еквивалентна услова из теореме 22.

Напомена 27. У [3] јаке Гребнерове базе називају се D–Гребнерове базе.

Како из $f \twoheadrightarrow_G^* 0$ следи $f \rightarrow_G^* 0$, на основу дефиниција 23 и 26 имамо:

Тврђење 28. *Ако је $G \subseteq R[x_1, \ldots, x_k]$ јака Гребнерова база идеала I, тада је G и Гребнерова база идеала I.* □

У случају да је R поље није тешко проверити да је свака Гребнерова база уједно и јака Гребнерова база. Међутим, следећи пример показује да то не важи у општем случају.

Пример 29. Нека је $G = \{2x, 3y\} \subset \mathbb{Z}[x, y]$. Тада за $I := \langle G \rangle$ важи

$$I = \{xyf + 2ax + 3by \,:\, a, b, f \in \mathbb{Z}[x, y]\},$$

па је по делу (1) теореме 19 G Гребнерова база идеала I. Међутим, G није јака Гребнерова база идеала I, јер $xy \in I$, а не постоји елемент из G чији водећи моном дели xy. □

У следећем тврђењу даћемо довољне (додатне) услове који обезбеђују да је Гребнерова база уједно и јака Гребнерова база. Приметимо да је, у случају када је R главноидеалски домен, за свака два елемента $a, b \in R$ дефинисан (до на асоцираност) њихов *најмањи заједнички садржалац*, у ознаци $\mathrm{lcm}(a, b)$, као и њихов *највећи заједнички делилац*, у ознаци $\mathrm{gcd}(a, b)$.

Тврђење 30. *Нека је R главноидеалски домен, а G коначан скуп ненула полинома из $R[x_1, \ldots, x_k]$. Уколико G задовољава следећа два услова:*

(1) *за све полиноме $g_1, g_2 \in G$ постоји полином $h \in G$ такав да важи*

$$\mathrm{LT(h)} \mid \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2)) \quad и \quad \mathrm{LC(h)} \mid \mathrm{gcd}(\mathrm{LC}(g_1), \mathrm{LC}(g_2)),$$

(2) *G је Гребнерова база идеала $\langle G \rangle$,*

тада је G јака Гребнерова база идеала $\langle G \rangle$.

Доказ. По делу (1) теореме 22 и тврђењу 5, довољно је доказати да се сваки полином $f \in \langle G \rangle \setminus \{0\}$ може јако редуковати по модулу G. Како је G Гребнерова база, по делу (3) теореме 19 важи $f \in \mathrm{Std}(G)$, тј.

$$f = m_1 g_1 + \cdots + m_s g_s,$$

за неке мономе m_i и полиноме $g_i \in G$, $1 \leqslant i \leqslant s$, такве да је $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \mathrm{LT}(m_i g_i) \preccurlyeq \mathrm{LT}(f)$. Нека је $J \subset \{1, \ldots, s\}$ скуп индекса за које важи $\mathrm{LT}(m_i g_i) = \mathrm{LT}(f)$. Тада је $\mathrm{LM}(f) = \sum_{i \in J} \mathrm{LM}(m_i g_i)$, па

$$\mathrm{lcm}(\{\mathrm{LT}(g_i) \,:\, i \in J\}) \mid \mathrm{LT}(f) \quad \text{и} \quad \gcd(\{\mathrm{LC}(g_i) \,:\, i \in J\}) \mid \mathrm{LC}(f).$$

Како је први услов тврђења задовољен за свака два $g_1, g_2 \in G$, закључујемо (индукцијом) да он важи и за скуп $\{g_i \,:\, i \in J\}$, тј. постоји полином $h \in G$ такав да

$$\mathrm{LT}(h) \mid \widetilde{g} \quad \text{и} \quad \mathrm{LC}(h) \mid \widetilde{c},$$

где је $\widetilde{g} := \mathrm{lcm}(\{\mathrm{LT}(g_i) \,:\, i \in J\})$ и $\widetilde{c} = \gcd(\{\mathrm{LC}(g_i) \,:\, i \in J\})$. Дакле,

$$f \twoheadrightarrow_G f - \frac{\mathrm{LM}(f)}{\mathrm{LM}(h)}\, h,$$

што је и требало доказати. □

У следећој теореми показаћемо како се у случају главноидеалских домена од Гребнерове базе може добити јака Гребнерова база. Да бисмо ово урадили потребно нам је неколико дефиниција.

Нека је R главноидеалски домен и $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ скуп ненула полинома из $R[x_1, \ldots, x_k]$. Нека је $\mathrm{LM}(g_i) = c_i t_i$, где је $c_i \in R$, а t_i члан, за $1 \leqslant i \leqslant s$. Сада, за подскуп $J \subseteq \{1, \ldots, s\}$ означимо

$$t_J = \mathrm{lcm}(\{t_j \,:\, j \in J\}).$$

При томе, кажемо да је J *засићен подскуп од* $\{1, \ldots, s\}$ уколико t_j дели t_J ако и само ако је $j \in J$. Такође, нека је $c_J = \gcd(\{c_j : j \in J\})$ и $a_j \in R$, за $j \in J$, неки елементи такви да је $c_J = \sum_{j \in J} a_j c_j$ (c_J и елементи a_j постоје, јер је R главноидеалски домен). Коначно, нека је

$$g_J = \sum_{j \in J} a_j \frac{t_J}{t_j} g_j.$$

Приметимо да је $\mathrm{LM}(g_J) = \sum_{j \in J} a_j c_j t_J = c_J t_J$.

Теорема 31. *Нека је R главноидеалски домен, I ненула идеал у $R[x_1, \ldots, x_k]$ и $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ Гребнерова база овог идеала. Тада је скуп*

$$\{g_J : J \text{ је засићен подскуп од } \{1, \ldots, s\}\}$$

јака Гребнерова база идеала I. Специјално, сваки ненула идеал прстена $R[x_1, \ldots, x_k]$ има јаку Гребнерову базу.

Доказ. Нека је $f \in I \setminus \{0\}$. По теореми 22, довољно је доказати да постоји засићени подскуп J скупа $\{1, \ldots, s\}$ такав да $\mathrm{LM}(g_J) \mid \mathrm{LM}(f)$.

Како је G Гребнерова база идела I, по делу (1) теореме 19 за неке $d_i \in R$ и чланове e_i важи $\mathrm{LM}(f) = \sum_{i \in J} d_i e_i \mathrm{LM}(g_i)$, где је

$$J = \{j \in \{1, \ldots, s\} : t_j \text{ дели } \mathrm{LT}(f)\}.$$

Јасно је да је J засићен подскуп од $\{1, \ldots, s\}$ и при томе важи да t_J дели $\mathrm{LT}(f)$. Како је $\mathrm{LC}(f) = \sum_{i \in J} d_i c_i$, то c_J дели $\mathrm{LC}(f)$, па $\mathrm{LM}(g_J)$ дели $\mathrm{LM}(f)$, што је требало доказати. $\square$

Тврђење 32. *Нека је R домен са јединственом факторизацијом, такав да сваки ненула идеал I прстена $R[x_1, \ldots, x_k]$ има јаку Гребнерову базу. Тада је R главноидеалски домен.*

Доказ. Претпоставимо прво да постоји прост идеал P прстена R који није главни. Доказаћемо да тада P садржи бесконачно много неасоцираних простих елемената. Претпоставимо супротно. Како је P прост, а R домен са јединственом факторизацијом, за $f \in P$ барем један прост фактор p од f се налази у P. Такође, како P није главни, постоји полином $g \in P$ који није дељив са p, па P садржи барем два проста неасоцирана елемента (p и једног простог делиоца од g). Дакле, нека су $p_1, \ldots, p_n$, $n \geqslant 2$, сви неасоцирани прости елементи у P. Међутим, тада елемент $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} p_j \in P$ није прост, па како је P прост идеал, $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} p_j$ је дељив неким простим елементом из P, што је очигледно контрадикција.

Нека је $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ низ неасоцираних простих елемената из P, I идеал прстена $R[x_1, \ldots, x_k]$ генерисан скупом $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и G јака Гребнерова база идеала I. Како је $p_i \in I$, по делу (2) теореме 22 за свако $i \in \mathbb{N}$ постоји елемент $g_i \in G$ такав да $\mathrm{LM}(g_i) \mid p_i$. Међутим, како $1 \notin G$, то је $g_i = \mathrm{LC}(g_i) \in R$ асоциран елементу p_i, па G садржи бесконачно много елемената, што је контрадикција.

Дакле, сваки прост идеал прстена R је главни. Докажимо да из овога следи и да је R главноидеалски, тј. да је сваки идеал I прстена R главни. Претпоставимо да ово није тачно. Нека је I идеал прстена R који није главни и за који је број простих фактора у елементу који има најмање простих фактора у I минималан. Даље, нека је P прост идеал такав да важи $I \subseteq P$ (овакав идеал постоји, погледати нпр. [1]). По претходно доказаном важи $P = \langle a \rangle$, а по претпоставци $I \neq P$. Посматрајмо идеал $I' := \{r : ar \in I\} (= I : P)$. Како $a \notin I$, то $1 \notin I'$, па је I' прави идеал прстена R. Међутим, I' није главни (јер из $I' = \langle b \rangle$, за неко $b \in R$, следи $I = \langle ab \rangle$), а елемент из I' са најмањим бројем простих фактора има мање простих фактора него било који елемент из I, што је у контрадикцији са начином одабира идеала I. $\square$

Дефиниција 33. За јаку Гребнерову базу $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ идеала $I \subseteq R[x_1, \ldots, x_k]$ кажемо да је *минимална* ако не постоје $i \neq j$ такви да $\mathrm{LM}(g_i)$ дели $\mathrm{LM}(g_j)$.

Теорема 34. *Нека је R главноидеалски домен, а I ненула идеал прстена $R[x_1, \ldots, x_k]$. Тада I има минималну јаку Гребнерову базу.*

Доказ. По теореми 31 идеал I има јаку Гребнерову базу. Доказаћемо да је јака Гребнерова база $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ овог идеала за коју је производ водећих чланова минималан (у односу на мономијални поредак) уједно и минимална јака Гребнерова база. У супротном, постоје $g_i, g_j \in G$, $i \neq j$, такви да $\mathrm{LM}(g_i)$ дели $\mathrm{LM}(g_j)$, па се g_j може јако редуковати по модулу G до полинома g'_j. Нека је $G' = (G \cup \{g'_j\}) \setminus \{g_j\}$. По делу (2) теореме 22, G' је јака Гребнерова база идеала I и при томе је производ водећих чланова полинома из G' мањи него производ водећих чланова полинома из G (јер је $\mathrm{LT}(g'_j) \prec \mathrm{LT}(g_j)$), што је у супротности са начином одабира скупа G. $\square$

1.4 S-полиноми

У овом поглављу прстен R ће увек бити главноидеалски домен.

Дефиниција 35. Нека је $g_i \in R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$, $\mathrm{LC}(g_i) = a_i$, $\mathrm{LT}(g_i) = t_i$, за $i \in \{1, 2\}$. Тада је *S-полином од g_1 и g_2* дефинисан са

$$S(g_1, g_2) := \frac{\mathrm{lcm}(a_1, a_2)}{a_1} \frac{\mathrm{lcm}(t_1, t_2)}{t_1} g_1 - \frac{\mathrm{lcm}(a_1, a_2)}{a_2} \frac{\mathrm{lcm}(t_1, t_2)}{t_2} g_2.$$

Нека су $c_1, c_2 \in R$ такви да је $\gcd(a_1, a_2) = c_1 a_1 + c_2 a_2$. Тада је *$G$-полином од g_1 и g_2 у односу на c_1 и c_2* дефинисан са

$$G_{(c_1, c_2)}(g_1, g_2) = c_1 \frac{\mathrm{lcm}(t_1, t_2)}{t_1} g_1 + c_2 \frac{\mathrm{lcm}(t_1, t_2)}{t_2} g_2.$$

Пример 36. Посматрајмо полиномијалну алгебру $\mathbb{Z}[x, y]$ на којој је задат *lex* мономијални поредак такав да важи $x > y$. Нека је $f = 2x^3 + xy^3$ и $g = 3x^2y + y^3$. Тада је

$$\mathrm{LT}(f) = x^3 \text{ и } \mathrm{LT}(g) = x^2y, \text{ па је } \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(f), \mathrm{LT}(g)) = x^3y$$
$$\mathrm{LC}(f) = 2 \text{ и } \mathrm{LC}(g) = 3, \text{ па је } \mathrm{lcm}(\mathrm{LC}(f), \mathrm{LC}(g)) = 6.$$

Дакле,

$$\begin{aligned} S(f, g) &= \frac{6}{2} \cdot \frac{x^3y}{x^3} \cdot (2x^3 + xy^3) - \frac{6}{3} \cdot \frac{x^3y}{x^2y} \cdot (3x^2y + y^3) \\ &= 3xy^4 - 2xy^3. \end{aligned}$$

Како је $\gcd(\mathrm{LC}(f), \mathrm{LC}(g)) = 1 = -4 \cdot \mathrm{LC}(f) + 3 \cdot \mathrm{LC}(g)$, дефинисан је полином $G_{(-4,3)}(f, g)$ и важи

$$\begin{aligned} G_{(-4,3)}(f, g) &= -4 \cdot \frac{x^3y}{x^3} \cdot (2x^3 + xy^3) + 3 \cdot \frac{x^3y}{x^2y} \cdot (3x^2y + y^3) \\ &= x^3y - 4xy^4 + 3xy^3. \end{aligned}$$

Теорема 37. *Нека је G коначан подскуп од $R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$, такав да за све $g_1, g_2 \in G$ важи $S(g_1, g_2) = 0$ или $S(g_1, g_2)$ има v-репрезентацију у односу на G за неки члан $v \prec \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2))$, а полином $G_{(c_1,c_2)}(g_1, g_2)$ се може јако редуковати по модулу G за неке $c_1, c_2 \in R$. Тада је G Гребнерова база идеала $\langle G \rangle$.*

Доказ. По делу (3) теореме 19 довољно је доказати да за све $f \in \langle G \rangle \setminus \{0\}$ важи $f \in \mathrm{Std}(G)$. Претпоставимо да ово није тачно и нека је при томе f полином који не испуњава овај услов, а за који је $\mathrm{LT}(f)$ најмањи могућ. Такође, нека је

$$f = m_1g_1 + \cdots + m_sg_s, \tag{1.4.1}$$

где су m_i мономи, а $g_i \in G$, $1 \leqslant i \leqslant s$, репрезентација полинома f у односу на G, таква да је $t := \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \mathrm{LT}(m_ig_i) \succ \mathrm{LT}(f)$ најмањи могућ. Означимо са N_t број сабирака m_ig_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, за које је $\mathrm{LT}(m_ig_i) = t$.

Доказ изводимо применом математичке индукције по N_t. Како је $t \succ \mathrm{LT}(f)$, збир коефицијената чланова једнаких t у (1.4.1) једнак је нули. Самим тим, важи $N_t \geqslant 2$.

Размотримо прво случај $N_t = 2$. Нека је, без умањења општости, $t = \mathrm{LT}(m_1 g_1) = \mathrm{LT}(m_2 g_2)$, а самим тим и $m_1 \mathrm{LM}(g_1) + m_2 \mathrm{LM}(g_2) = 0$. Уколико запишемо $m_1 = a_1 t_1$ и $m_2 = a_2 t_2$, за $a_1, a_2 \in R$ и чланове t_1, t_2, важи

$$t = t_1 \mathrm{LT}(g_1) = t_2 \mathrm{LT}(g_2) \quad \text{и} \quad a := a_1 \mathrm{LC}(g_1) = -a_2 \mathrm{LC}(g_2).$$

Из прве једнакости $\mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2)) \mid t$, тј. $t = u \cdot \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2))$, а из друге, слично, $a = b \cdot \mathrm{lcm}(\mathrm{LC}(g_1), \mathrm{LC}(g_2))$. Сада, по дефиницији 35 важи

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 = bu \cdot S(g_1, g_2).$$

Нека је

$$S(g_1, g_2) = m_1' g_1' + \cdots + m_l' g_l'$$

v-репрезентација полинома $S(g_1, g_2)$ за члан $v \prec \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2))$. Тада

$$\mathrm{LT}(u \cdot v) = \mathrm{LT}\left(\frac{t}{\mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2))} \cdot v \right) \prec t,$$

па је

$$f = \sum_{i=3}^{s} m_i g_i + bu \sum_{i=1}^{l} m_i' g_i'$$

репрезентација полинома f у односу на G која противречи минималности репрезентације (1.4.1).

Претпоставимо даље да тврђење важи за све репрезентације у којима је број појављивања члана t једнак $N_t - 1 \geqslant 2$ и докажимо да тврђење важи и за све репрезентације у којима је број појављивања члана t једнак N_t.

Нека је, без умањења општости, $t = \mathrm{LT}(m_1 g_1) = \mathrm{LM}(m_2 g_2)$. Како се $G_{(c_1, c_2)}(g_1, g_2)$ може јако редуковати по модулу G, постоји $h \in G$ такав да

$$\mathrm{LT}(h) \mid \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2)) = \mathrm{LT}(G_{(c_1, c_2)}(g_1, g_2)) \quad \text{и}$$
$$\mathrm{LC}(h) \mid \mathrm{gcd}(\mathrm{LC}(g_1), \mathrm{LC}(g_2)) = \mathrm{LC}(G_{(c_1, c_2)}(g_1, g_2)),$$

па $\mathrm{LT}(h) \mid t$, односно $\mathrm{LC}(h) \mid \mathrm{LC}(g_1)$ и $\mathrm{LC}(h) \mid \mathrm{LC}(g_2)$. Дакле, постоје $b_1, b_2 \in R$, као и члан t' такви да важи

$$\mathrm{LM}(m_1 g_1) = b_1 t' \cdot \mathrm{LM}(h) \quad \text{и} \quad \mathrm{LM}(m_2 g_2) = b_2 t' \cdot \mathrm{LM}(h).$$

Тада је $f = m_1 g_1 - b_1 t' h + m_2 g_2 - b_2 t' h + (b_1 + b_2) t' h + \sum_{i=3}^{n} m_i g_i$.

Размотримо десну страну ове једнакости. Приметимо да је

$$\mathrm{LT}(m_1 g_1 - b_1 t' h) \prec t \quad \text{и} \quad \mathrm{LM}(m_2 g_2 - b_2 t' h) \prec t,$$

па по начину одабира полинома f закључујемо да постоје стандардне репрезентације полинома $m_1 g_1 - b_1 t' h$ и $m_2 g_2 - b_2 t' h$ у односу на G. Уколико у горњој једнакости ове полиноме заменимо тим репрезентацијама, добијамо представљење полинома f у коме се члан t појављује $N_t - 1$ пута, па по индуктивној претпоставци f има стадардну репрезентацију у односу на G. $\square$

Последица 38. *Нека је G коначан подскуп од $R[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$, такав да за све $g_1, g_2 \in G$ важи*

$$S(g_1, g_2) \to_G^* 0,$$

а полином $G_{(c_1,c_2)}(g_1, g_2)$ се може јако редуковати по модулу G за неке $c_1, c_2 \in R$. Тада је G јака Гребнерова база за идеал $\langle G \rangle$.

Доказ. Како из $S(g_1, g_2) \to_G^* 0$, по тврђењу 17, следи $S(g_1, g_2) \in \mathrm{Std}(G)$, и како је $\mathrm{LT}(S(g_1, g_2)) \prec \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2))$, то је, по теореми 37, G Гребнерова база идеала G. Такође, слично као у доказу претходне теореме, из услова да се $G_{(c_1,c_2)}(g_1, g_2)$ може јако редуковати по модулу G закључујемо да је испуњен и услов (1) тврђења 30, па је G јака Гребнерова база идеала $\langle G \rangle$. $\square$

Напомена 39. Тврђења доказана у претходна два поглавља односила су се на случај када је R домен и то најчешће главноидеалски. За примене у овом раду ово ће бити сасвим довољно, али ваља напоменути да се на сличан начин може разматрати и случај главноидеалских прстена у којима има правих делитеља нуле (погледати [48]).

1.5 Гребнерове базе над пољима

У овом поглављу посебно ћемо размотирити случај када је $R = \mathbb{F}$ поље. Тачније, доказаћемо следећа два тврђења, специфична за овај случај, која ћемо директно користити у глави 6.

Теорема 40. *Нека је $G \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k] \setminus \{0\}$ коначан скуп полинома и $I := \langle G \rangle$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) *G је Гребнерова база идеала I;*

(2) *за све $g', g'' \in G$ важи: $S(g', g'') \to_G^* 0$ или $S(g', g'')$ има t-репрезентацију у односу на G за неко $t \prec \operatorname{lcm}(\operatorname{LT}(g'), \operatorname{LT}(g''))$;*

(3) *скуп косета монома из $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ који нису дељиви водећим чланом нити једног полинома из G чини адитивну базу количничке алгебре $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]/I$.*

Доказ. (1)⇒(2): Како је $S(g_1, g_2) \in \langle G \rangle$, то по делу (2) теореме 19 важи $S(g_1, g_2) \to_G^* 0$.

(2)⇒(1): Како је $\operatorname{LT}(G_{(c_1,c_2)}(g_1, g_2)) = \operatorname{lcm}(\operatorname{LT}(g_1), \operatorname{LT}(g_2))$, то се полином $G_{(c_1,c_2)}(g_1, g_2)$ може редуковати по модулу G. Дакле, ако важи $S(g', g'') \to_G^* 0$ ова импликација следи из последице 38, а ако $S(g', g'')$ има t-репрезентацију за неко $t \prec \operatorname{lcm}(\operatorname{LT}(g'), \operatorname{LT}(g''))$ импликација следи из теореме 37.

(1)⇔(3): Докажимо најпре следеће помоћно тврђење: за произвољан идеал I алгебре $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ векторски простор $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]/I$ генерисан је косетима чланова из $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ који нису дељиви водећим чланом нити једног полинома из I. Скуп ових чланова означићемо са S.

Нека је са $[p]$ означен косет полинома $p \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ у количничкој алгебри $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]/I$. Претходно тврђење еквивалентно је са следећим: за све $f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ постоје чланови $t_1, \ldots, t_n \in S$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ такви да важи

$$[f] = a_1[t_1] + \ldots + a_n[t_n].$$

Претпоставимо да ово није тачно: нека је $f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ полином за који је $\mathrm{LT}(f)$ минималан и за који претходно тврђење не важи. Тада $\mathrm{LT}(f) \notin S$, јер се у супротном, због начина одабира полинома $[f]$, косет $[f]$ може представити као линеарна комбинација косета елемената из S. Дакле, постоји $g \in I$ такав да $\mathrm{LM}(g) \mid \mathrm{LM}(f)$, па за

$$h = f - \frac{\mathrm{LM}(f)}{\mathrm{LM}(g)} \cdot g$$

важи $\mathrm{LT}(h) \prec \mathrm{LT}(f)$. Међутим, $[f] = [h]$, а $[h]$ се по начину одабира полинома f може представити у жељеном облику. Контрадикција.

(1)⇒(3): По помоћном тврђењу, довољно је доказати да за различите чланове $t_1, \ldots, t_n \in S$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ важи

$$a_1[t_1] + \cdots + a_n[t_n] = 0 \quad \text{ако и само ако је} \quad a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Једнакост $a_1[t_1] + \cdots + a_n[t_n] = 0$ еквивалентна је са $a_1t_1 + \cdots + a_nt_n \in I$. Ако је $a_1t_1 + \cdots + a_nt_n \neq 0$, по делу (2) теореме 22 закључујемо да је за неко $1 \leqslant i \leqslant n$ члан t_i дељив водећим чланом неког полинома из G, што је контрадикција.

(3)⇒(1): Претпоставимо да G није Гребнерова база идеала. По делу (2) теореме 22, тада постоји полином $f \in I$ такав да $\mathrm{LT}(f)$ није дељив водећим чланом нити једног полинома из G. Такође, по помоћном тврђењу, постоје чланови $t_1, \ldots, t_n$ који нису дељиви водећим чланом нити једног полинома из G, и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, такви да је $\mathrm{LT}(f) \succ t_i$, за $1 \leqslant i \leqslant n$, и да важи једнакост

$$[f - \mathrm{LM}(f)] = a_1[t_1] + \cdots + a_n[t_n].$$

Међутим, одавде је $[\mathrm{LM}(f)] + a_1[t_1] + \cdots + a_n[t_n] = 0$, што је у контрадикцији са претпоставком да су $[\mathrm{LT}(f)], [t_1], \ldots, [t_n]$ линеарно независни. $\square$

Напомена 41. Модификована верзија еквиваленције (1) $\Leftrightarrow$ (2) представља основ Бухбергеровог алгоритма (погледати [2, 3, 13]), којим су постављени темељи теорије Гребнерових база. Ипак, ми смо се определили за ову верзију тврђења, јер га у овом облику директно можемо применити у глави 6.

Лема 42. *Нека су $f, g \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ ненула полиноми и $G = \{f, g\}$. Ако је $\gcd(\mathrm{LT}(f), \mathrm{LT}(g)) = 1$, тада важи $S(f, g) \to_G^* 0$.*

Доказ. Нека је $f = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n$ и $g = b_1 t_1 + b_2 t_2 + \ldots + b_m t_m$, где су за $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $a_i, b_j \in \mathbb{F}$ коефицијенти, а s_i и t_j чланови, такви да важи $s_1 \succ s_2 \succ \ldots \succ s_n$ и $t_1 \succ t_2 \succ \ldots \succ t_m$. Тада је $\gcd(s_1, t_1) = 1$ и важи

$$S(f, g) = b_1 t_1 f - a_1 s_1 g = b_1 t_1 \sum_{i=2}^{n} a_i s_i - a_1 s_1 \sum_{i=2}^{m} b_i t_i.$$

За $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$ нека је

$$h_{i,j} := \sum_{l=i+1}^{n} a_l s_l \sum_{r=1}^{j} b_r t_r - \sum_{l=1}^{i} a_l s_l \sum_{r=j+1}^{m} b_r t_r.$$

Приметимо да је $h_{1,1} = S(f, g)$ и докажимо да за $1 \leqslant i \leqslant m-1$ и $1 \leqslant j \leqslant n-1$ важи

$$h_{i,j} \to_G h_{i+1,j} \qquad \text{или} \qquad h_{i,j} \to_G h_{i,j+1}. \tag{1.5.1}$$

Из дефиниције полинома $h_{i,j}$ јасно је да важи $\mathrm{LT}(h_{i,j}) \preccurlyeq \max\{s_1 t_{j+1}, s_{i+1} t_1\}$. Претпоставимо да је $s_1 t_{j+1} = s_{i+1} t_1$. Како је $\gcd(s_1, t_1) = 1$, тада је $s_1 \mid s_{i+1}$, па и $s_1 \preccurlyeq s_{i+1}$, што је контрадикција. Дакле, $\mathrm{LT}(h_{i,j}) = \max\{s_1 t_{j+1}, s_{i+1} t_1\}$, тј. $\mathrm{LT}(h_{i,j}) = s_{i+1} t_1$ или $\mathrm{LT}(h_{i,j}) = s_1 t_{j+1}$. У првом случају важи

$$h_{i,j} \to_G h_{i,j} - a_{i+1} s_{i+1} g = h_{i+1,j},$$

а у другом

$$h_{i,j} \to_G h_{i,j} - b_{i+1} t_{i+1} f = h_{i,j+1},$$

чиме је (1.5.1) доказано. Коначно, како је $h_{i,m} = g(a_{i+1} s_{i+1} + \ldots + a_n s_n)$ и $h_{n,j} = f(b_{j+1} t_{j+1} + \ldots + b_m s_m)$, за $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$, важи $h_{i,m} \to_G 0$ и $h_{n,j} \to_G 0$, а самим тим и $S(f,g) = h_{1,1} \to_G^* 0$. $\square$

У претходном делу главе доказали смо да, у случају да је R главноидеалски домен, за сваки идеал алгебре $R[x_1, \ldots, x_k]$ постоји минимална јака Гребнерова база. У случају да је R поље доказаћемо да важи и више.

Дефиниција 43. За Гребнерову базу G идеала I кажемо да је *редукована* ако су испуњена следећа два услова:

(1) за све $g \in G$ важи $\mathrm{LC}(g) = 1$;

(2) за све $g, h \in G$, $g \neq h$, и све $t \in T(h)$ важи $\mathrm{LT}(g) \nmid h$.

Теорема 44. *Нека је $\mathbb{F}$ поље, а I ненула идеал прстена $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$. Тада I има јединствену редуковану Гребнерову базу.*

Доказ. Докажимо прво постојање редуковане Гребнерове базе. Претпоставимо супротно. По теореми 34 идеал I има минималну јаку Гребнерову базу G. Нека је она изабрана тако да за свако $g \in G$ важи $\mathrm{LC}(g) = 1$ и да за члан

$$t = \min\{t' : (\exists g \neq h \in G)\ t' \in T(h) \text{ и } \mathrm{LT}(g) \mid t'\}$$

важи да је најмањи могућ и да се при томе појављује најмањи број пута као члан неког полинома из G. Нека су уз то $g', g'' \in G$, $g' \neq g''$, такви да је $t \in T(g'')$ и $\mathrm{LT}(g') \mid t$, и нека је u члан за који важи $t = u \cdot \mathrm{LT}(g')$. Посматрајмо скуп $\widetilde{G} = (G \cup \{\widetilde{g''}\}) \setminus \{g''\}$, где је $\widetilde{g''} = g'' - aug'$, где је $a \in \mathbb{F}$ коефицијент полинома g'' уз члан t. Очигледно је $\mathrm{LM}(G) = \mathrm{LM}(\widetilde{G})$, па је по делу (1) теореме 19 и дефиницији 33 скуп $\widetilde{G}$ минимална јака Гребнерова база која противречи начину одабира скупа G.

Докажимо и јединственост. Претпоставимо супротно, тј. да су G' и G'' различите редуковане Гребнерове базе идеала I. Тада је барем један од скупова $G' \setminus G''$ и $G'' \setminus G'$ непразан. Нека је, без умањења општости, то први скуп и нека је $g' \in G' \setminus G''$. Тада, по делу (2) теореме 22 важи $\mathrm{LT}(g'') \mid \mathrm{LT}(g')$ за неко $g'' \in G''$. Како је G' редукована Гребнерова база идеала I важи $g'' \notin G'$, па је $g'' \in G'' \setminus G'$. Сада, слично као малопре, постоји полином $\widetilde{g}' \in G'$ такав да $\mathrm{LT}(\widetilde{g}') \mid \mathrm{LT}(g'')$, па важи $\widetilde{g}' \in G' \setminus G''$. Међутим, $\mathrm{LT}(\widetilde{g}') \mid \mathrm{LT}(g'') \mid \mathrm{LT}(g')$, па како је G' редукована Гребнерова база важи $g' = \widetilde{g}'$, а самим тим и $\mathrm{LT}(g'') = \mathrm{LT}(g')$.

Нека је $g := g' - g''$. Приметимо да је $T(g) \subseteq T(g') \cup T(g'')$, као и да је $\mathrm{LT}(g) \prec \mathrm{LT}(g') = \mathrm{LT}(g'')$. Нека је без умањења општости $\mathrm{LT}(g) \in T(g')$. Како важи $g \in I \setminus \{0\}$, по делу (2) теореме 22 постоји полином $\overline{g} \in G'$ такав да $\mathrm{LT}(\overline{g}) \mid \mathrm{LT}(g) \in T(g')$, што је у супротности са претпоставком да је Гребнерова база G' редукована. $\square$

ГЛАВА 2

КОХОМОЛОГИЈА МНОГОСТРУКОСТИ ЗАСТАВА

Основни циљ ове главе је формулација Борелових описа мод 2 кохомологије реалних и целобројне кохомологије комплексних многострукости застава, који су дати у радовима [8, 9].

Ради комплетности, дате су и основне особине многострукости застава и њихових векторских раслојења, као и аксиоме и неке особине Штифел-Витнијевих и Чернових класа. Приликом писања пре свега смо се ослонили на књигу [26].

2.1 Многострукости застава

Ово поглавље започећемо дефиницијама реалних и комплексних многострукости застава. Нека је $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ и $n := n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

За $m \in \mathbb{N}$, са $O(m)$ означена је ортогонална група димензије m, а са $U(m)$ унитарна група димензије m.

- *Реална многострукост застава* $F(n_1, \ldots, n_r)$ је глатка многострукост дифеоморфна хомогеном простору

$$F(n_1, \ldots, n_r) \approx O(n)/O(n_1) \times O(n_2) \times \cdots \times O(n_r).$$

- *Комплексна многострукост застава* $F_{\mathbb{C}}(n_1, \ldots, n_r)$ је глатка многострукост дифеоморфна хомогеном простору

$$F_{\mathbb{C}}(n_1, \ldots, n_r) \approx U(n)/U(n_1) \times U(n_2) \times \cdots \times U(n_r).$$

Димензија многострукости $F(n_1, \ldots, n_r)$ једнака је $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} n_i n_j$, а многострукости $F_{\mathbb{C}}(n_1, \ldots, n_r)$ једнака је $2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} n_i n_j$.

Реална (односно комплексна) многострукост застава може се описати као скуп r-торки $(S_1, S_2, \ldots, S_r)$, које ћемо називати *заставама*, векторских потпростора од $\mathbb{R}^n$ (односно $\mathbb{C}^n$) који су међусобно ортогонални и задовољавају $\dim S_i = n_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Овај модел многострукости застава ћемо користити у наставку текста.

Веома сличан претходном је и следећи модел, по коме су многострукости застава и добиле назив. По њему реална (односно комплексна) многострукост застава је скуп низова векторских потпростора $V_1, \ldots, V_r$ од $\mathbb{R}^n$ (односно $\mathbb{C}^n$), тј. застава, који задовољавају

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = \mathbb{R}^n$$

и $\dim V_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Веза ова два модела је јасна – застави $(S_1, \ldots, S_r)$ из првог модела одговара застава $S_1 \subset S_1 \oplus S_2 \subset \cdots \subset S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$ из другог.

Од велике важности су следећи специјални случајеви многострукости застава:

- *реални пројективни простор* $\mathbb{R}P^n := F(1, n)$;
- *комплексни пројективни простор* $\mathbb{C}P^n := F_{\mathbb{C}}(1, n)$;

- *реална Грасманова многострукост* $G_{k,n}(\mathbb{R}) := F(k, n)$;
- *комплексна Грасманова многострукост* $G_{k,n}(\mathbb{C}) := F_{\mathbb{C}}(k, n)$;
- *реална многострукост комплетних застава* $F(1, \ldots, 1)$;
- *комплексна многострукост комплетних застава* $F_{\mathbb{C}}(1, \ldots, 1)$.

Векторска раслојења многострукости застава

Под *i-тим таутолошким векторским раслојењем* над $F(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, подразумевамо векторско раслојење ξ_i дефинисано тоталним простором

$$E(\xi_i) = \{(S_1, \ldots, S_r, v) \in F(n_1, \ldots, n_r) \times \mathbb{R}^n \,:\, v \in S_i\}$$

и пројекцијом $\pi : (S_1, \ldots, S_r, v) \mapsto (S_1, \ldots, S_r)$.

Слично, *i-то таутолошко векторско раслојење* над $F_{\mathbb{C}}(n_1, \ldots, n_r)$, за $1 \leqslant i \leqslant r$, је комплексно векторско раслојење ξ_i дефинисано тоталним простором

$$E(\xi_i) = \{(S_1, \ldots, S_r, v) \in F_{\mathbb{C}}(n_1, \ldots, n_r) \times \mathbb{C}^n \,:\, v \in S_i\}$$

и пројекцијом $\pi : (S_1, \ldots, S_r, v) \mapsto (S_1, \ldots, S_r)$.

Можемо приметити да је $\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_r$ тривијално векторско (односно комплексно векторско) раслојење над $F(n_1, \ldots, n_r)$ (односно $F_{\mathbb{C}}(n_1, \ldots, n_r)$).

Задржимо се на векторском (односно комплексном векторском) раслојењу ξ_1 над $G_{k,n}(\mathbb{R})$ (односно $G_{k,n}(\mathbb{C})$), које још називамо *таутолошким векторским раслојењем* и означавамо са ζ_k. Приметимо да је димензија од ζ_k једнака k.

Утапања $\mathbb{R}^{n+k} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ (односно $\mathbb{C}^{n+k} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+k+1}$) индукују утапања $G_{k,n}(\mathbb{R}) \hookrightarrow G_{k,n+1}(\mathbb{R})$ (односно $G_{k,n}(\mathbb{C}) \hookrightarrow G_{k,n+1}(\mathbb{C})$), па можемо дефинисати директан лимес

$$G_{k,\infty}(\mathbb{R}) := \varinjlim G_{k,n}(\mathbb{R}) \quad (\text{односно } G_{k,\infty}(\mathbb{C}) := \varinjlim G_{k,n}(\mathbb{C})).$$

За овако дефинисане просторе, таутолошка векторска раслојења ζ_k су такође дефинисана и одговарају раслојењима ζ_k над $G_{k,n}(\mathbb{R})$ (односно $G_{k,n}(\mathbb{C})$) у горе наведеним утапањима. Ова раслојења називају се и *универзалним*, јер је свако векторско (односно комплексно векторско) раслојење ξ димензије k над паракомпактним простором X индуковано из ζ_k одговарајућим пресликавањем $X \to G_{k,\infty}(\mathbb{R})$ (односно $X \to G_{k,\infty}(\mathbb{C})$).

2.2 Борелов опис кохомологије многострукости застава

Борелов опис $\mathbb{Z}_2$-кохомологије реалних и $\mathbb{Z}$-кохомологије комплексних многострукости застава задат је преко Штифел-Витнијевих и Чернових класа одговарајућих таутолошких векторских раслојења.

У општем случају, Штифел-Витнијеве и Чернове класе су инваријанте одговарајућих векторских раслојења и имају важну улогу у алгебарској топологији, тако да ово поглавље започињемо навођењем аксиома и неких особина ових класа.

Штифел-Витнијеве класе

Нека је ξ векторско раслојење над простором X. *Штифел-Витнијеве класе* $w_k(\xi)$, за $k \geqslant 0$, овог раслојења су елементи кохомологије $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$, такви да је $w_k(\xi) \in H^k(X;\mathbb{Z}_2)$. При томе, уколико са

$$w(\xi) = w_0(\xi) + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \cdots$$

дефинишемо *тоталну Штифел-Витнијеву класу*, важе следеће аксиоме:

Аксиома 1. $w_0(\xi) = 1$ и $w_i(\xi) = 0$ за све i који су већи од димензије од ξ.

Аксиома 2. (Природност) Ако је $f : Y \to X$ непрекидно пресликавање и $f^*(\xi)$ *повлачење*[1] *векторског раслојења* ξ, тада је $w(f^*(\xi)) = f^*(w(\xi))$.

Аксиома 3. (Витнијева формула) За векторско раслојење η над простором X, тотална Штифел-Витнијева класа векторског раслојења $\xi \oplus \eta$ дата је формулом $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cdot w(\eta)$.

Аксиома 4. (Нормализација) За канонско линијско раслојење η над $\mathbb{R}P^\infty$, $w_1(\eta)$ је генератор од $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$.

Напоменимо да класе које задовољавају ове услове постоје и да су јединствено одређене (погледати [44]).

Наведимо још неке особине Штифел-Витнијевих класа. По аксиоми 1, тоталне Штифел-Витнијеве класе задате су коначним сумама и при томе, по Витнијевој формули, важи

$$w_n(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=n} w_i(\xi) \cdot w_j(\eta).$$

Даље, ако је ε тривијално векторско раслојење над X, тада важи $w(\varepsilon) = 1$ и самим тим $w(\varepsilon \oplus \xi) = w(\xi)$, за свако векторско раслојење ξ над X. Уз то, дефинисана је и *тотална дуална Штифел-Витнијева класа*

$$\overline{w}(\xi) = \overline{w}_0(\xi) + \overline{w}_1(\xi) + \overline{w}_2(\xi) + \cdots$$

тако да задовољава једнакост $w(\xi) \cdot \overline{w}(\xi) = 1$.

Специјално, уколико је са τ означено тангентно векторско раслојење многострукости у еуклидском простору, а са ν нормално векторско раслојење (погледати нпр. [44]), добијамо Витнијеву теорему о дуалности

$$w(\nu) = \overline{w}(\tau).$$

[1] pullback (енг.)

Чернове класе

Нека је ξ комплексно векторско раслојење над простором X. *Чернове класе* $c_k(\xi)$, $k \geqslant 0$, овог раслојења су елементи кохомологије $H^*(X;\mathbb{Z})$, такви да је $c_k(\xi) \in H^{2k}(X;\mathbb{Z})$. При томе, уколико са

$$c(\xi) = c_0(\xi) + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \cdots$$

дефинишемо *тоталну Чернову класу*, важе следеће аксиоме:

Аксиома 1. $c_0(\xi) = 1$ и $c_i(\xi) = 0$ за све i који су већи од димензије од ξ.

Аксиома 2. (Природност) Ако је $f : Y \to X$ непрекидно пресликавање и $f^*(\xi)$ *повлачење векторског раслојења* ξ, тада је $c_k(f^*(\xi)) = f^*(c_k(\xi))$.

Аксиома 3. (Витнијева формула) Ако је η комплексно векторско раслојење над простором X, тада је тотална Чернова класа директне суме $\xi \oplus \eta$ дата формулом $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cdot c(\eta)$.

Аксиома 4. (Нормализација) За канонско линијско раслојење η над $\mathbb{C}P^\infty$, $c_1(\eta)$ је генератор од $H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$.

Као и у случају Штифел-Витнијевих класа, класе које задовољавају ове услове постоје и јединствено су одређене (погледати [44]).

Наведимо и неке битне особине Чернових класа. Слично као у случају Штифел-Витнијевих класа, Чернове класе задате су коначним сумама и по Витнијевој формули важи

$$c_n(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=n} c_i(\xi) \cdot c_j(\eta).$$

Такође, ако је са ε означено тривијално векторско раслојење над X, тада важи $c(\varepsilon) = 1$, а самим тим и $c(\varepsilon \oplus \xi) = c(\xi)$. Уз то, за свако векторско раслојење ξ дефинисана је *тотална дуална Чернова класа*

$$\overline{c}(\xi) = \overline{c}_0(\xi) + \overline{c}_1(\xi) + \overline{c}_2(\xi) + \cdots$$

тако да задовољава једнакост $c(\xi) \cdot \overline{c}(\xi) = 1$.

За свако комплексно векторско раслојење ξ дефинисано је *конјуговано векторско раслојење* $\overline{\xi}$, као комплексно векторско раслојење такво да су припадајућа реална векторска раслојења од ξ и $\overline{\xi}$ иста, али да им је комплексна структура „супротна". За Чернове класе овако дефинисаних комплексних векторских раслојења важи

$$c_k(\xi) = (-1)^k c_k(\overline{\xi}),\ \ k \geqslant 0.$$

Напоменимо да ако комплексно векторско раслојење ξ поседује хермитску метрику, тада је конјуговано раслојење $\overline{\xi}$ изоморфно дуалном векторском раслојењу $\mathrm{Hom}(\xi, \mathbb{C})$.

Чернове и Штифел-Витнијеве класе повезане су следећим тврђењем.

Тврђење 45. *Уколико n-димензионо комплексно векторско раслојење ξ над X посматрамо као $2n$-димензионо (реално) векторско раслојење, тада је $w_{2i+1}(\xi) = 0$, а класа $w_{2i}(\xi)$ је слика класе $c_i(\xi)$ при хомоморфизму $H^{2i}(X;\mathbb{Z}) \to H^{2i}(X;\mathbb{Z}_2)$, којим се коефицијенти редукују по модулу 2.*

Опис кохомологије

Размотримо прво реалну многострукост застава $F(n_1, \ldots, n_r)$. Ако су $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ таутолошка векторска раслојења над овом многострукошћу, тада је $\xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \ldots \oplus \xi_r$ тривијално векторско раслојење, па важи

$$w(\xi_1) \cdot w(\xi_2) \cdots w(\xi_r) = 1. \tag{2.2.1}$$

Борелов опис говори да је ова једнакост и довољна за опис алгебре $H^*(F(n_1, \ldots, n_r); \mathbb{Z}_2)$, тј. имамо следећи резултат.

Теорема 46. *Нека су* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ *таутолошка векторска раслојења над многострукошћу застава* $F(n_1, \ldots, n_r)$. *Тада је алгебра* $H^*(F(n_1, \ldots, n_r); \mathbb{Z}_2)$ *изоморфна количнику полиномијалне алгебре*

$$\mathbb{Z}_2[w_1(\xi_1), \ldots, w_{n_1}(\xi_1), w_1(\xi_2), \ldots, w_{n_2}(\xi_2), \ldots, w_1(\xi_r), \ldots, w_{n_r}(\xi_r)],$$

по идеалу генерисаном хомогеним компонентама у $w(\xi_1) \cdots w(\xi_r)$ *које су позитивног степена.*

Приметимо да је идеал из ове теореме одређен са $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ релација.

У нашим применама користићемо следећу (незнатну) модификацију овог описа. Приметимо да се једнакост (2.2.1) може записати и као

$$w(\xi_r) = \overline{w}(\xi_1) \cdots \overline{w}(\xi_{r-1}),$$

па како $\overline{w}(\xi_1), \ldots, \overline{w}(\xi_{r-1}) \in \mathbb{Z}_2[w_1(\xi_1), \ldots, w_{n_1}(\xi_1), \ldots, w_1(\xi_{r-1}), \ldots, w_{n_{r-1}}(\xi_{r-1})]$, то је алгебра $H^*(F(n_1, \ldots, n_r); \mathbb{Z}_2)$ изоморфна количничкој алгебри

$$\mathbb{Z}_2[w_1(\xi_1), \ldots, w_{n_1}(\xi_1), \ldots, w_1(\xi_{r-1}), \ldots, w_{n_{r-1}}(\xi_{r-1})]/I, \tag{2.2.2}$$

где је I идеал генерисан хомогеним класама из $\overline{w}(\xi_1) \cdots \overline{w}(\xi_{r-1})$ димензије веће од n_r, а не веће од $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

Размотримо посебно алгебру $H^*(G_{k,n}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$. Према претходном, ова алгебра изоморфна је са

$$\mathbb{Z}_2[w_1(\xi_1), \ldots, w_k(\xi_1)]/J_{k,n},$$

где је $J_{k,n} = (\overline{w}_{n+1}(\xi_1), \overline{w}_{n+2}(\xi_1), \ldots, \overline{w}_{n+k}(\xi_1))$. У наставку ћемо скраћено писати w_i уместо $w_i(\xi_1)$, као и $\overline{w}_i$ уместо $\overline{w}_i(\xi_1)$. Наравно, сада се једнакост $w(\xi_1) \cdot \overline{w}(\xi_1) = 1$ може записати и као

$$\sum_{i=0}^{\min\{r,k\}} w_i \cdot \overline{w}_{r-i} = 0, \quad \text{за свако } r \geqslant 1. \tag{2.2.3}$$

За $\mathbb{Z}$-кохомологију комплексних многострукости застава важи тврђење слично теореми 46.

Теорема 47. *Нека су $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ таутолошка векторска раслојења над многострукошћу застава $F_{\mathbb{C}}(n_1, \ldots, n_r)$. Тада је алгебра $H^*(F_{\mathbb{C}}(n_1, \ldots, n_r); \mathbb{Z})$ изоморфна количнику полиномијалне алгебре*

$$\mathbb{Z}[c_1(\xi_1), \ldots, c_{n_1}(\xi_1), c_1(\xi_2), \ldots, c_{n_2}(\xi_2), \ldots, c_1(\xi_r), \ldots, c_{n_r}(\xi_r)],$$

по идеалу генерисаном хомогеним компонентама у $c(\xi_1) \cdots c(\xi_r)$ које су позитивног степена.

Слично као у разматрању после теореме 46, можемо закључити да је алгебра $H^*(F_{\mathbb{C}}(n_1, \ldots, n_r); \mathbb{Z})$ изоморфна количничкој алгебри

$$\mathbb{Z}[c_1(\xi_1), \ldots, c_{n_1}(\xi_1), \ldots, c_1(\xi_{r-1}), \ldots, c_{n_{r-1}}(\xi_{r-1})]/I, \tag{2.2.4}$$

где је I идеал генерисан хомогеним класама из $\overline{c}(\xi_1) \cdots \overline{c}(\xi_{r-1})$ димензије веће од n_r, а не веће од $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

Коначно, алгебра $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ изоморфна је са

$$\mathbb{Z}[c_1(\xi_1), \ldots, c_k(\xi_1)]/I_{k,n},$$

где је $I_{k,n} = (\overline{c}_{n+1}(\xi_1), \overline{c}_{n+2}(\xi_1), \ldots, \overline{c}_{n+k}(\xi_1))$. Слично као у претходном случају, скраћено ћемо писати c_i уместо $c_i(\xi_1)$, као и $\overline{c}_i$ уместо $\overline{c}_i(\xi_1)$. Такође, једнакост $c(\xi_1) \cdot \overline{c}(\xi_1) = 1$ се своди на

$$\sum_{i=0}^{\min\{r,k\}} c_i \cdot \overline{c}_{r-i} = 0, \quad \text{за све } r \geqslant 1. \tag{2.2.5}$$

ГЛАВА 3

СИМЕТРИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ И ШУБЕРТОВ РАЧУН

У овој глави приказаћемо везу кохомологије и квантне кохомологије комплексних Грасманових многострукости са комбинаторним објектима који потичу из теорије симетричних функција.

3.1 Симетричне функције

У овом поглављу даћемо кратак преглед дела теорије симетричних функција који је неопходан за формулацију и доказе тврђења у главама 4 и 5. У презентацији смо се ослонили на књиге [22, 39, 40, 64] у којима је ова теорија изложена на много детаљнији и потпунији начин.

Основне ознаке

Под *партицијом*

$$\lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$$

подразумевамо нерастући коначан низ ненегативних целих бројева

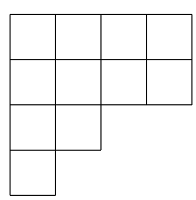
$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_k \geqslant 0.$$

Бројеви $l_1, \dots, l_k$ су *делови* ове партиције. У наставку текста партиције ћемо увек означавати грчким словима, а њене делове одговарајућим словима латинице. Такође, како ће нам од важности бити само позитивни делови партиција, партиције $\lambda = (l_1, \dots, l_k)$ и $\lambda' = (l_1, \dots, l_k, 0, \dots, 0)$ ћемо поистовећивати.

За партицију $\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_k)$ уводимо следеће ознаке:

- $l(\lambda) = \max\{s : l_s \neq 0\}$ је *дужина* партиције λ;
- $|\lambda| = l_1 + l_2 + \cdots + l_k$ је *тежина* партиције λ.

Партицију λ можемо представити *Јанговим дијаграмом*, који добијамо тако што у i-тој врсти, за $1 \leqslant i \leqslant l(\lambda)$, са лева на десно поставимо l_i јединичних квадратића (погледати слику 1).



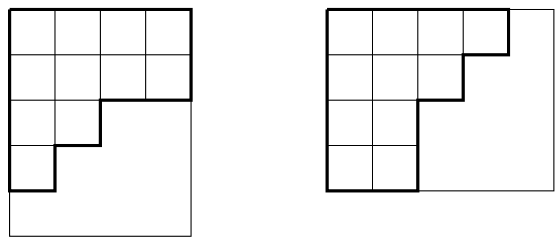
Слика 1. Јангов дијаграм партиције $\lambda = (4, 4, 2, 1)$.

Напомена 48. У литератури се уместо назива Јангов дијаграм често користи и назив Фереров дијаграм (нпр. у [40]).

За партицију λ чији се Јангов дијаграм може сместити у квадрат $k \times n$, тачније, уколико важи $l(\lambda) \leqslant k$ и $l_1 \leqslant n$, пишемо $\lambda \subseteq k \times n$. *Конјугат* партиције λ, који ћемо означавати са λ^*, дефинисан је са

$$l_i^* = |\{j : l_j \geqslant i\}|.$$

Није тешко приметити да Јангов дијаграм партиције λ^* добијамо тако што Јангов дијаграм партиције λ пресликамо симетрично у односу на главну дијагоналу (погледати слику 2).



Слика 2. За партицију $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ важи $\lambda \subseteq 5 \times 4$ и $\lambda^* = (4, 3, 2, 2)$.

На скупу партиција дефинисана је релација $\geq$ са: $\lambda \geq \mu$ ако и само ако је $|\lambda| = |\mu|$ и за свако $i \leqslant \max\{l(\lambda), l(\mu)\}$ важи

$$l_1 + \cdots + l_i \geqslant m_1 + \cdots + m_i.$$

Није тешко проверити да је скуп партиција мрежа у односу на $\geq$.

На скуп партиција на природан начин можемо увести и адитивну структуру: i-ти део партиције $\lambda + \mu$ једнак је збиру i-тог дела партиције λ и i-тог дела партиције μ.

Размотримо дејство групе $\mathbb{S}_m$ на полиномијалну алгебру $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ дефинисано са: за $\sigma \in \mathbb{S}_m$ је $\sigma \cdot p(x_1, \ldots, x_m) = p(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$. Полиноме који су инваријантни у односу на ово дејство називамо *симетричним* , а скуп свих симетричних полинома m промењљивих означавамо са Λ_m.

Посебно издвајамо две класе симетричних полинома:

- *елементарни симетрични полиноми* e_k, за $k \in \mathbb{N}$, задати су са

$$e_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} x_{i_1} \cdots x_{i_k};$$

- *комплетни симетрични полиноми* h_k, за $k \in \mathbb{N}$, задати су са

$$h_k = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant m} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Згодно је ове дефиниције проширити и на случај $k \leqslant 0$, и то на следећи начин:

$$e_0 = h_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad e_k = h_k = 0 \;\; \text{за } k < 0.$$

Елементарни и комплетни симетрични полиноми повезани су следећим идентитетом, који се често назива и *Њутнов идентитет*:

$$(1 + e_1 + e_2 + \cdots + e_m)(1 - h_1 + h_2 - \cdots) = 1. \tag{3.1.1}$$

Додатно, за партицију $\lambda = (l_1, \ldots, l_k)$ дефинишимо

$$e_\lambda = e_{l_1} \cdots e_{l_k} \quad \text{и} \quad h_\lambda = h_{l_1} \cdots h_{l_k}.$$

Значај полинома e_λ и h_λ јасно је исказан у следећој теореми.

Теорема 49. (Основна теорема о симетричним полиномима)
Скуп полинома e_λ (односно h_λ), где су λ партиције такве да је $l_1 \leqslant m$, чини адитивну базу за Λ_m. Другим речима,

$$\Lambda_m = \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_m] \text{ (\textit{односно} } \Lambda_m = \mathbb{Z}[h_1, \ldots, h_m]).$$

Нека је са Λ_m^k означен скуп хомогених полинома степена k алгебре Λ_m. Тада можемо дефинисати рестрикције

$$r_{m+1}^k : \Lambda_{m+1}^k \to \Lambda_m^k,$$

са $x_i \mapsto x_i$, за $1 \leqslant i \leqslant m$, и $x_{m+1} \mapsto 0$, па и

$$\Lambda^k = \varprojlim_m \Lambda_m^k.$$

Коришћењем претходне теореме, није тешко доказати да је за $m \geqslant k$ пресликавање r_{m+1}^k изоморфизам.

Дефиниција 50. Директну суму

$$\Lambda := \bigoplus_{k \geqslant 0} \Lambda^k$$

називамо *прстеном симетричних функција*.

Прстен симетричних функција може се посматрати као градуисана полиномијална алгебра над пребројивим скупом променљивих. Тачније,

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_k,\ k > 0] = \mathbb{Z}[h_k,\ k > 0],$$

где су e_k и h_k степена k. При томе, за природну пројекцију $\pi_m : \Lambda \to \Lambda_m$ важи $e_k \mapsto e_k$, за $1 \leqslant k \leqslant m$, односно $e_k \mapsto 0$, за $k > m$.

Шурове функције

За m-торку ненегативних целих бројева $\lambda = (l_1, \dots, l_m)$ уводимо следећи скраћени запис

$$X^\lambda := x_1^{l_1} \cdots x_m^{l_m}.$$

Да бисмо дефинисали Шурове функције, прво ћемо увести тзв. *основне антисиметричне функције.* За партицију $\lambda = (l_1, \dots, l_m)$ ови полиноми дефинисани су на следећи начин

$$a_\lambda := \sum_{\pi \in \mathbb{S}_m} \mathrm{sgn}(\pi) X^{\pi(\lambda)},$$

где $\mathrm{sgn}(\pi)$ означава знак пермутације π, тј. $a_\lambda = \det(x_i^{l_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$. Специјално, ако је $\delta = (m-1, m-2, \dots, 0)$, тада је a_δ Вандермондова детерминанта, тј.

$$a_\delta = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_i - x_j).$$

Шурова функција партиције λ, такве да је $l(\lambda) \leqslant m$, дефинисана је са

$$s_\lambda := \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}.$$

Приметимо да за партицију λ, такву да је $l(\lambda) \leqslant m$, и $1 \leqslant l < k \leqslant m$ важи

$$(x_l - x_k) \mid \det(x_i^{l_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m},$$

па и $a_\delta \mid a_\lambda$. Специјално, свака Шурова функција је полином, а није тешко закључити и да је тај полином симетричан. Важи и више:

Теорема 51. *Скуп полинома s_λ, за партиције λ такве да је $l(\lambda) \leqslant m$, чини адитивну базу за Λ_m.*

Последица ове теореме је да једну адитивну базу за Λ^k чине елементи, које ћемо такође означавати са s_λ, за све λ такве да је $|\lambda| = k$.

Следеће две партиције биће од значаја у наредним разматрањима

$$k := (k, 0, \ldots, 0) \quad \text{и} \quad 1^k := (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0).$$

Наредно тврђење показује да су елементарни и комплетни симетрични полиноми специјални случајеви Шурових функција.

Тврђење 52. *За $k \geqslant 0$ важе једнакости*

$$h_k = s_k \quad \text{\textit{и}} \quad e_k = s_{1^k}.$$

Један од главних задатака теорије симетричних функција је добијање формула за множење Шурових функција. У следећем тврђењу делимично ћемо решити овај проблем – приказаћемо како се произвољна Шурова функција множи елементарним и комплетним симетричним полиномима.

Теорема 53. (Пијеријева формула)
За партицију λ и цео број $k \geqslant 0$ (у алгебри Λ) важи

$$s_\lambda e_k = \sum s_\mu \quad \text{\textit{и}} \quad s_\lambda h_k = \sum s_\mu,$$

при чему је прва (друга) сума по свим партицијама μ које се добијају тако што се Јанговом дијаграму за λ дода k јединичних квадратића, али тако да никоја два нису у истој врсти (колони).

Претходна теорема даје много више од формула за множење Шурових функција елементарним и комплетним симетричним полиномима – она у потпуности одређује множење Шурових функција. Прецизније, за партиције λ и μ (јединствено) представљање полинома $s_\lambda s_\mu$ у облику линеарне комбинације Шурових функција може се извести из Пијеријеве формуле. Ово тривијално важи за $\lambda = 1^k$ и све μ. Претпоставимо зато да ово тврђење важи за све партиције λ' такве да је $|\lambda'| < k$, или $|\lambda'| = k$ и $\lambda' < \lambda$, и докажимо га за $\lambda > 1^k$ такво да је $|\lambda| = k$. По Пијеријевој формули, примењеној на $t := l(\lambda) < k$ и $\lambda' := (l_1 - 1, l_2 - 1, \ldots, l_t - 1)$, важи

$$s_\lambda = -\sum_\nu s_\nu + s_{\lambda'} e_t,$$

и при томе је $\nu < \lambda$ за све ν који учествују у претходној суми. Тврђење сада следи на основу индуктивне претпоставке.

Овај део завршавамо формулама које дају представљање Шурових функција преко елементарних, односно комплетних симетричних полинома. Напоменимо да у литератури ове формуле често носе и назив *Јакоби-Труди формуле.*

Теорема 54. (Ђамбелијева формула)
За партицију λ дужине највише n важи

$$s_\lambda = \det(h_{l_i - i + j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \textit{u} \quad s_{\lambda^*} = \det(e_{l_i - i + j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Имајући у виду ову теорему, у наставку ћемо радити у алгебри Λ, а затим, када је неопходно, специјализовати број променљивих. При овој специјализацији Шурове функције s_λ за које је $l(\lambda)$ веће од броја променљивих сликају се у нулу.

Јангови таблои и Косткини бројеви

Под *Јанговим таблоом* подразумевамо попуњавање Јанговог дијаграма природним бројевима, такво да ако се у попуњавању појављује број $i+1$, за неко $i \in \mathbb{N}$, појављује се и број i. За Јангов табло кажемо да је *полустандардан* ако бројеви који се налазе у истим врстама чине неопадајуће низове, а бројеви који се налазе у истим колонама чине, читано одозго надоле, растуће низове.

Под *обликом* Јанговог таблоа подразумевамо партицију одговарајућег Јанговог дијаграма, а под *тежином* елемент $\mu = (m_i)_{i\in\mathbb{N}}$, где је m_i број појављивања броја i у овом таблоу (погледати слику 3).

1	2	2	3
2	3	4	4
4	4		
5			

Слика 3. Полустандардан Јангов табло облика $\lambda = (4,4,2,1)$ и тежине $\mu = (1,3,2,4,1)$.

Косткин број, у ознаци $K_{\lambda\mu}$, је број полустандардних Јангових таблоа облика λ и тежине μ.

Значај Косткиних бројева огледа се у следећем тврђењу, које се често узима и за дефиницију Косткиних бројева.

Теорема 55. *За партицију μ важе следеће једнакости:*

$$h_\mu = \sum_{|\lambda|=|\mu|} K_{\lambda\mu} s_\lambda \quad \textit{и} \quad e_\mu = \sum_{|\lambda|=|\mu|} K_{\lambda\mu} s_{\lambda^*}.$$

Ова теорема се може исказати и на следећи начин: Косткини бројеви чине матрицу преласка са базе $\{s_\lambda : l(\lambda) \leqslant m\} = \{s_{\lambda^*} : l_1 \leqslant m\}$ на базу $\{e_\lambda : l_1 \leqslant m\}$. Приметимо да су елементи ове матрице K само они $K_{\lambda\mu}$ за које су и λ и μ партиције, па се може помислити да на овај начин нису дефинисани сви Косткини бројеви. Међутим, ако за тежину μ са μ' означимо (јединствену) партицију која се добија пермутовањем координата од μ, онда важи $K_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu'}$, па су тврђењем 55 заиста дефинисани сви Косткини бројеви.

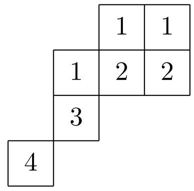
Из дефиниције Косткиних бројева није тешко доказати да је матрица K доње-троугаона са јединицама на главној дијагонали (у односу на поредак $\geq$, допуњен до неког линеарног поретка). Тачније, важи следеће тврђење.

Тврђење 56. *За партиције λ и μ важи $K_{\lambda\mu} \neq 0$ ако и само ако је $\lambda \geq \mu$. Такође, $K_{\lambda\lambda} = 1$.*

У глави 5 детаљније ћемо разматрати особине Косткиних бројева и приказати како се ови бројеви природно појављују у другим областима математике.

Литлвуд-Ричардсонови бројеви

Нека су λ и μ партиције такве да је Јангов табло партиције μ подскуп Јанговог таблоа партиције λ, тј. такве да за све i важи $l_i \geqslant m_i$. Тада *коси дијаграм* λ/μ дефинишемо као разлику Јанговог дијаграма за λ и μ. Под *полустандардним косим таблоом* подразумевамо попуњавање овог дијаграма које задовољава исте услове као и у случају полустандардних Јангових таблоа. Такође, сваком (полустандардном) косом таблоу можемо доделити реч која се добија тако што одозго надоле надовезујемо обрнут садржај врста (садржај се чита са десна на лево). За придружену реч кажемо да је *Јамамучијева* ако за свако i и било који почетни део речи важи да се број i не појављује мање пута него број $i+1$ (погледати слику 4).



Слика 4. Полустандардан коси табло облика λ/μ, где је $\lambda = (4,4,2,1)$ и $\mu = (2,1,1)$, тежине $\nu = (3,2,1,1)$, чија је реч 1122134 Јамамучијева.

Литлвуд-Ричардсонов број (коефицијент), у ознаци $c^{\nu}_{\lambda\mu}$, је број полустандардних косих таблоа облика ν/μ и тежине λ за које је придружена реч Јамамучијева. Уколико ν/μ није дефинисан, број $c^{\nu}_{\lambda\,\mu}$ једнак је 0.

Алтернативна дефиниција, а и мотивација за увођење ових бројева, садржана је у следећем тврђењу.

Теорема 57. (Литлвуд-Ричардсоново правило)
За партиције λ и μ важи

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{|\nu|=|\lambda|+|\mu|} c^{\nu}_{\lambda\,\mu} s_\nu.$$

Тривијална последица овог тврђења је да је $c^{\nu}_{\lambda\mu} = c^{\nu}_{\mu\lambda}$ (што уопште није јасно из дефиниције). Више информација о Литлвуд-Ричардсоновим бројевима даћемо у наставку ове главе као и у глави 5.

3.2 Шубертов рачун за $\mathbb{Z}$-кохомологију комплексних Грасманијана

У овом поглављу презентоваћемо Шубертов рачун за $\mathbb{Z}$-кохомологију комплексних Грасманијана, који је извео Ерсман у [19].

Нека је $n, k \in \mathbb{N}$, $V := \mathbb{C}^{n+k}$ и комплетна застава

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_{n+k} = V.$$

За партицију $\lambda = (l_1, \ldots, l_k)$, такву да је $n \geqslant l_1 \geqslant \cdots \geqslant l_k \geqslant 0$, *Шубертова ћелија* (димензије $2(nk - |\lambda|)$) дефинисана је са

$$\Omega_\lambda = \{W \in G_{k,n}(\mathbb{C}) : \dim(W \cap V_j) = i \text{ ако је } n + i - l_i \leqslant j \leqslant n + i - l_{i+1}\}.$$

Затворење X_λ ове ћелије назива се *Шубертов варијетет* и важи

$$X_\lambda = \{W \in G_{k,n}(\mathbb{C}) : \dim(W \cap V_{n+i-l_i}) \geqslant i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

Шубертове ћелије на $G_{k,n}(\mathbb{C})$ дефинишу структуру CW-комплекса, док Поенкареови дуали Шубертових варијетета, у ознаци $\sigma_\lambda := [X_\lambda]^*$, одређују адитивну структуру кохомологије $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. Класе σ_λ називаћемо *Шубертовим класама.*

Теорема 58. *Скуп*

$$\Sigma_{k,n} := \{\sigma_\lambda : \lambda \subseteq k \times n\}$$

је адитивна база кохомологије $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$.

По овој теореми, да бисмо потпуно описали алгебру $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ довољно је описати множење елемената скупа $\Sigma_{k,n}$. Пре свега, није тешко одредити (кохомолошке) производе $\sigma_\lambda \cdot \sigma_{1^l}$ и $\sigma_\lambda \cdot \sigma_l$. Оно што је кључно за наставак текста је да су ове формуле у потпуности аналогне онима које смо имали за Шурове функције.

За партицију λ, такву да је $l_1 > n$ или $l(\lambda) > k$, дефинишемо $\sigma_\lambda := 0$.

Теорема 59. (Пијеријева формула)
За партицију λ и цео број $l \geqslant 0$ важи

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_{1^l} = \sum \sigma_\mu \quad \text{и} \quad \sigma_\lambda \cdot \sigma_l = \sum \sigma_\mu,$$

при чему је прва (друга) сума по свим партицијама μ које се добијају тако што се Јанговом дијаграму за λ дода l јединичних квадратића, али тако да никоја два нису у истој врсти (колони).

Као у случају Шурових функција, претходним формулама је у потпуности одређено множење Шубертових класа, тј. важи следеће тврђење.

Теорема 60. *Пресликавање*

$$\phi_{k,n} : \Lambda_k \to H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$$

које Шуровој функцији s_λ *додељује* σ_λ *је сурјективни морфизам прстена.*

Ово тврђење успоставља жељену везу између теорије симетричних функција и Шубертовог рачуна за кохомологију комплексних Грасманијана. Између осталог, оно нам говори како идентитете добијене за симетричне полиноме можемо „преводити” у идентитете у кохомологији комплексних Грасманијана. Специјално, из теореме 57 добијамо:

Теорема 61. (Литлвуд–Ричардсоново правило)
За партиције λ *и* μ *важи*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{|\nu|=|\lambda|+|\mu|} c^{\nu}_{\lambda\mu} \sigma_\nu.$$

У глави 2 опис алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ дали смо коришћењем Чернових класа c_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, таутолошког векторског раслојења над $G_{k,n}(\mathbb{C})$. Веза између овог описа и описа датог теоремом 58 успоставља се из једнакости

$$\sigma_{1^i} = (-1)^i c_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Упоређивањем формула (3.1.1) и (2.2.5), из теореме 60 закључујемо да је $\sigma_i = \overline{c}_i$, за $i \geqslant 1$. Осим тога, теореме 54 и 60 дају нам формуле којим се произвољна Шубертова класа представља преко Чернових и дуалних Чернових класа (подразумевамо да је $c_i = \overline{c}_i = 0$ за $i < 0$).

Теорема 62. (Ђамбелијева формула)
За партицију λ *дужине највише* m *важи*

$$\sigma_\lambda = \det(\overline{c}_{l_i-i+j})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \quad \text{\textit{и}} \quad \sigma_{\lambda^*} = (-1)^{|\lambda|} \det(c_{l_i-i+j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}.$$

Коначно, за партицију μ такву да је $k \geqslant m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_l \geqslant 0$, из друге једнакости теореме 55 (посматране у Λ_k) и теореме 60 добијамо

$$c_{m_1} c_{m_2} \cdots c_{m_l} = (-1)^{|\mu|} \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu} \sigma_{\lambda^*}. \tag{3.2.1}$$

Како је Косткина матрица доње-троугаона са јединицама на главној дијагонали, на основу претходног идентитета (за партиције $\mu \subseteq n \times k$) важи:

Теорема 63. *Скуп*

$$\begin{aligned} B_{k,n} &= \{c_{m_1} \cdots c_{m_l} \,:\, 0 \leqslant l \leqslant n,\, 1 \leqslant m_1, \ldots, m_l \leqslant k\} \\ &= \{c_1^{a_1} \cdots c_k^{a_k} \,:\, a_1 + \cdots + a_k \leqslant n\} \end{aligned}$$

чини адитивну базу кохомологије $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$.

Коментар 64. У [14] Черн је развио Шубертов рачун за $\mathbb{Z}_2$-кохомологију реалних Грасманијана, који је веома сличан рачуну који је приказан у овом поглављу.

Коментар 65. Шубертов рачун за (све) комплексне многострукости застава дат је у [25]. Ипак, од посебног интереса, пре свега у комбинаторици, је случај комплексних многострукости комплетних застава. Шубертов рачун у овом случају заснива се на формули аналогној Пијеријевој, тзв. *Монковој формули* (погледати [45]), док „улогу” Шурових функција узимају Шубертови полиноми (погледати [40]).

3.3 Шубертов рачун за малу квантну кохомологију комплексних Грасманијана

Шубертов рачун за малу квантну кохомологију Грасманијана извели су Бертрам (у [6]) и Коскун (у [16]).

У овом поглављу даћемо кратак прегледа резултата о квантној кохомологији Грасманијана. При томе задржаћемо се искључиво на овом специјалном случају – знатно детаљнији и општији третман квантне кохомологије и Громов-Витенових инваријанти може се пронаћи у [42].

Малу квантну кохомологију Грасманове многострукости $G_{k,n}(\mathbb{C})$ означавамо са $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$. Адитивна структура ове алгебре конструише се на основу адититивне структуре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$. Наиме, $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$ је градуисана алгебра над градуисаним прстеном $\mathbb{Z}[q]$, при чему је $|q| = n+k$, која је изоморфна (као $\mathbb{Z}[q]$-модул) са $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q]$. Самим тим, уз ознаке као у поглављу 3.2, класе $\sigma_\lambda \otimes 1$ чине адитивну базу за $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$. Ове класе називаћемо *Шубертовим* и означавати скраћено са σ_λ.

Теорема 66. *Скуп*

$$\mathfrak{S}_{k,n} = \{\sigma_\lambda \,:\, \lambda \subseteq k \times n\},$$

је адитивна база (над $\mathbb{Z}[q]$) алгебре $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$.

Према овој теореми, да бисмо описали алгебру $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$ довољно је утврдити формуле за множење у бази $\mathfrak{S}_{k,n}$.

Уведимо неколико појмова. Нека је $X := G_{k,n}(\mathbb{C})$. *Степен* рационалне криве $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^N$ једнак је броју тачака у инверзној слици хиперравни у општем положају у $\mathbb{P}^N$ при f. Степен рационалне криве $f : \mathbb{P}^1 \to X$ је степен криве добијене композицијом f и Пликеровог утапања $X \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^k \mathbb{C}^{n+k}\right)$. Нека су λ, μ и ν партиције из $k \times n$ и $d \geqslant 0$ цео број такав да је $|\lambda| + |\mu| + |\nu| = kn + d(n+k)$. Тада је *Громов-Витенова инваријанта степена* d, у ознаци $\langle \lambda, \mu, \nu \rangle_d$, дефинисана као број рационалних кривих степена d на X, рачунатих до на аутоморфизам од $\mathbb{P}^1$, које секу сваки од $\Omega_\lambda(F)$, $\Omega_\mu(G)$ и $\Omega_\nu(H)$, за комплетне заставе F, G и H у општем положају. Такође, ако је $|\lambda| + |\mu| + |\nu| \neq kn + d(n+k)$, дефинишемо $\langle \lambda, \mu, \nu \rangle_d = 0$.

Множење у $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$ дефинисано је са

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{d\geq 0} \sum_{\nu \subseteq k\times n} q^d \langle \lambda, \mu, \nu^\vee \rangle_d \sigma_\nu, \tag{3.3.1}$$

где за $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ дефинишемо $\nu^\vee := (n-n_k, n-n_{k-1}, \ldots, n-n_1)$. Руан и Тиан су у [60] доказали да је на овај начин дефинисана асоцијативна операција, тј. да је $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$ прстен.

Мала квантна кохомологија је *деформација* класичне. Наиме, пресликавање $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})/\langle q\rangle \to H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$, индуковано са $\sigma_\lambda \mapsto \sigma_\lambda$, је изоморфизам. Дакле, заменом $q = 0$ у идентитет алгебре $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$ добијамо идентитет алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$. Специјално, заменом $q = 0$ у идентитету (3.3.1) добијамо идентитет из теореме 61, па самим тим важи $c^\nu_{\lambda\mu} = \langle \lambda, \mu, \nu^\vee \rangle_0$.

Одређивање бројева $\langle \lambda, \mu, \nu^\vee \rangle_d$ је веома тешко, што се може наслутити и на основу дефиниције. Иако је познат комбинаторни опис ових бројева (у опису се користе тзв. *Мондријанови таблои* – погледати [16]), још увек постоји много отворених питања везаних за њих. Једно од тих питања је одређивање свих бројева d, тј. степена од q, који се појављују у горњем изразу за λ и μ (погледати [10, 23, 67]).

Шубертов рачун за алгебру $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$ започет је у [6], где су добијене формуле сличне онима у теоремама 59 и 62.

Теорема 67. (Квантна Пијеријева формула)
Ако је $\lambda \subseteq k \times n$, $\lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$ и $p \leqslant n$, тада у $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$ важи

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_p = \sum \sigma_\mu + q \sum \sigma_\nu$$

где је прва сума по свим партицијама $\mu = (m_1, \ldots, m_k)$ таквим да је $|\mu| = |\lambda| + p$ и $n \geqslant m_1 \geqslant l_1 \geqslant m_2 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant m_k \geqslant l_k$, а друга по свим партицијама $\nu = (n_1, \ldots, n_k)$ таквим да је $|\nu| = |\lambda| + p - n - k$ и $l_1 - 1 \geqslant n_1 \geqslant l_2 - 1 \geqslant \cdots \geqslant l_k - 1 \geqslant n_k \geqslant 0$.

Прва сума у овој теореми је (наравно) иста као сума која се појављује у теореми 59, само је услов по коме се сумира записан алгебарски, а не комбинаторно.

Напоменимо да, као и у случају (класичне) кохомологије, Пијеријева формула у потпуности одређује множење у алгебри $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$.

Чернову класу $c_i \otimes 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, скраћено ћемо означавати са c_i. У следећем тврђењу дајемо квантну верзију Ђамбелијеве формуле. Приметимо да у овом случају нема деформације у односу на (класичну) Ђамбелијеву формулу.

Теорема 68. (Квантна Ђамбелијева формула)
За партицију λ дужине највише n важи

$$\sigma_{\lambda^*} = (-1)^{|\lambda|} \det(c_{l_i-i+j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Теорема 69. *Скуп*

$$Q_{k,n} := \{c_{m_1}\cdots c_{m_l} \,:\, 0 \leqslant l \leqslant n,\, 1 \leqslant m_1, \ldots, m_l \leqslant k\}$$

чини адитивну базу (над $\mathbb{Z}[q]$) алгебре $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$.

На основу теореме 66, за партицију $\mu = (m_1, \ldots, m_l)$ за коју је $m_1 \leqslant k$, постоје јединствени бројеви $K^{k,n}_{\lambda\mu}$ такви да важи следећа једнакост:

$$c_{m_1}c_{m_2}\cdots c_{m_l} = (-1)^{|\mu|}\sum_{m\geqslant 0}\sum_{|\lambda|=|\mu|-m(n+k)} q^m K^{k,n}_{\lambda\mu}\sigma_{\lambda^*}. \tag{3.3.2}$$

Бројеви $K^{k,n}_{\lambda\mu}$ називају се *квантни Косткини бројеви*, а уведени су у [7].

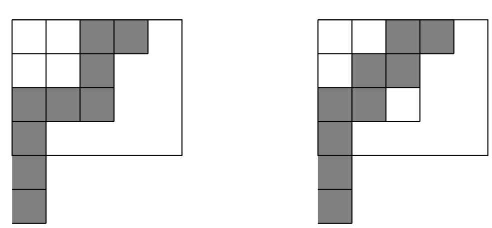
Напомена 70. У [7] квантни Косткини бројеви означени су на другачији начин. Да бисмо избегли могућност забуне, напоменимо да ће у овом раду са $K^{k,n}_{\lambda\mu}$ бити означен број $K^{\lambda}_{\emptyset\mu}(n,k)$ из [7].

Напомена 71. Заменом $q = 0$ идентитет (3.3.2) постаје идентитет (3.2.1). Самим тим, ако је $l(\mu) \leqslant n$ и $m = 0$ важи $K^{k,n}_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu}$, па и

$$K^{k,n}_{\lambda\mu} = \begin{cases} K_{\lambda\mu}, & |\lambda| = |\mu| \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} .$$

За разлику од теореме 55, у којој се на једноставан начин доказује еквиваленција „комбинаторне" и „алгебарске" дефиниције (класичних) Косткиних бројева, у случају квантних Косткиних бројева ово је знатно теже учинити. За почетак уведимо неколико појмова.

Под $(k+n)$-*рамом у облику куке*[1] партиције λ подразумевамо „повезан" скуп од $k+n$ јединичних квадратића у одговарајућем Јанговом дијаграму, али такав да не садржи квадрат 2×2 (скуп јединичних квадратића Јанговог дијаграма је „повезан" уколико је скуп који се добија избацивањем темена ових квадратића повезан). За $(k+n)$-рам у облику куке од λ кажемо да је *дозвољен* ако његовим уклањањем добијамо Јангов дијаграм неке партиције (погледати слику 5). У наставку ће нас занимати само дозвољени рамови у облику куке, тако да ћемо реч „дозвољен" изостављати, а подразумевати.



Слика 5. Дозвољен (лево) и недозвољен (десно) 9-рам у облику куке партиције $\lambda = (4,3,3,1,1,1)$, при чему је $k = 4$ и $n = 5$.

Ширина $(k+n)$-рама у облику куке R, у ознаци $width(R)$, је број колона Јанговог дијаграма са којима има непразан пресек. Даље, ако је $\mu \subseteq k\times n$

[1]rim hook (енг.)

партиција добијена од партиције $\lambda = (l_1, l_2, \ldots)$, која задовољава $l_1 \leqslant n$, узастопним уклањањем $(k+n)$-рамова у облику куке $R_1, R_2, \ldots, R_m$, нека је $\varepsilon(\lambda/\mu) := (-1)^{\sum(n - width(R_i))}$.

Ако $\lambda \nsubseteq k \times n$, у алгебри $QH^*(G_{k,n}; \mathbb{Z})$ не мора да важи $\sigma_\lambda = 0$. У [7] је доказана следећа формула којом се овакви σ_λ могу представити у $\mathfrak{S}_{k,n}$ и која је кључна за добијање комбинаторног описа квантних Косткиних бројева.

Теорема 72. (Алгоритам за уклањање рама у облику куке)
Нека је $\lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_s)$ партиција.

(а) *Ако λ садржи $(k+n)$-рам у облику куке који није дозвољен, или ако је $l_{k+1} > 0$, а λ не садржи $(k+n)$-рам у облику куке, тада је $\sigma_\lambda = 0$.*

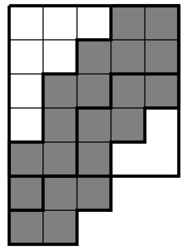
(б) *Ако је партиција μ добијена уклањањем (дозвољеног) $(k+n)$–рама у облику куке R из λ, тада је $\sigma_\lambda = (-1)^{n - width(R)} q \sigma_\mu$.*

Као прва последица овог алгоритма је следећа формула у којој су квантни Косткини бројеви изражени преко (класичних) Косткиних бројева. Наиме, за партиције $\lambda \subseteq k \times n$ и ν, такве да је $|\nu| = |\lambda| + m(k+n)$, важи

$$K_{\lambda\nu}^{k,n} = \sum \varepsilon(\rho/\lambda) K_{\rho\nu}, \tag{3.3.3}$$

где је сума по партицијама $\rho = (r_1, r_2, \ldots)$, таквим да је $r_1 \leqslant n$ и које се добијају од λ додавањем m $(k+n)$-рамова у облику куке.

Вратимо се на комбинаторни опис квантних Косткиних бројева. За партицију $\nu \subseteq k \times n$ означимо са $\nu[m]$ партицију добијену од ν додавањем m пута по $(k+n)$-рам у облику куке, али тако да сваки почиње у првој колони и завршава се у n-тој (погледати слику 6). Приметимо да за сваки додати рам важи да се висина најнижег и највишег додатог јединичног квадратића разликује за k.



Слика 6. Јангов дијаграм партиције $\nu[2]$, при чему је $\nu = (3,2,1,1)$ и $k = n = 5$.

Нека је λ партиција таква да је $l_1 \leqslant n$. За полустандардан Јангов табло облика λ кажемо да је *правилан* ако за свако $p \geqslant 1$ важи: ако је број i уписан у квадратић у првој колони и $(k+p)$-тој врсти, тада је у квадратић у k-тој колони и p-тој врсти уписан број не већи од i.

Теорема 73. *За партиције μ и $\lambda \subseteq k \times n$ такве да је $m_1 \leqslant n$ и $|\mu| = |\lambda| + m(n+k)$, за неко $m \geqslant 0$, број $K^{k,n}_{\lambda\mu}$ једнак је броју правилних полустандардних Јангових таблоа облика $\lambda[m]$ и тежине μ.*

На крају поглавља даћемо још један опис алгебре $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$, који је сличан Бореловом опису алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$.

У [63] Сиберт и Тиан доказали су да важи

$$QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[q][c_1,\dots,c_k]/O_{k,n}, \tag{3.3.4}$$

где је $O_{k,n} := (\sigma_{n+1},\dots,\sigma_{n+k-1},\sigma_{n+k} + (-1)^k q)$. При томе, полиноми σ_r се могу добити на следећи начин: ако дефинишемо да је $\sigma_r = 0$ за $r < 0$ и $\sigma_0 = 1$, тада за $r \geqslant 1$ важи

$$\sigma_r = -\sum_{j=1}^{k} c_j \sigma_{r-j}. \tag{3.3.5}$$

Наравно, ова дефиниција је у складу са претходним, тј. за $1 \leqslant r \leqslant n$ полином σ_r једнак је одговарајућој Шубертовој класи.

Коментар 74. Шубертов рачун изведен је и за малу квантну кохомологију многострукости застава (погледати [11, 15, 20]).

ГЛАВА 4

ГРЕБНЕРОВЕ БАЗЕ ЗА ГРАСМАНОВЕ МНОГОСТРУКОСТИ

У овој глави конструисаћемо Гребнерове базе за идеале који, по резултатима наведеним у глави 2, дефинишу кохомологије реалних и комплексних Грасманијана. Добијени резултати омогућују боље разумевање ових кохомологија и у потпуности одређују множење у базама $B_{k,n}$ и $Q_{k,n}$ (погледати главу 3). Даље примене ових резултата даћемо у глави 5 овог рада.

Текст главе организован је на следећи начин. Поглавље 4.1 представља базу целе главе. У њему су уведене неопходне ознаке и доказана тврђења која ће, уз незнатне модификације, бити коришћена у осталим деловима ове главе. У поглављима 4.2-4.5 дати су главни резултати ове главе: у поглављу 4.2 конструисане су минималне јаке Гребнерове базе за $\mathbb{Z}$-кохомологију комплексних Грасманијана, у поглављу 4.3 редуковане Гребнерове базе за $\mathbb{Z}_2$-кохомологију реалних Грасманијана, а у поглављу 4.4 минималне јаке Гребнерове базе за малу квантну кохомологију комплексних Грасманијана. На овај начин уопштени су одговарајући резултати из [46, 51, 52, 56] и доказана претпоставка 113 из [55].

Сва тврђења дата у овој главе изложена су у радовима [53] и [54].

4.1 Ознаке и уводна тврђења

За $a, b \in \mathbb{Z}$ биномни коефицијент $\binom{a}{b}$ дефинисан је са

$$\binom{a}{b} := \begin{cases} \dfrac{a(a-1)\cdots(a-b+1)}{b!}, & b > 0 \\ 1, & b = 0 \\ 0, & b < 0 \end{cases} .$$

Непосредно се проверава да за све $a, b \in \mathbb{Z}$ важи

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \binom{a}{b}, \tag{4.1.1}$$

као и

$$\text{ако је } \binom{a}{b} \neq 0, \text{ тада је } a \geqslant b \text{ или } a \leqslant -1. \tag{4.1.2}$$

Нека је $m \in \mathbb{N}$ и $f_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $f_m = (0, \ldots, 0, 1)$ вектори стандардне базе простора $\mathbb{Z}^m$, као и $f_0 = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^m$. За m–торку λ целих бројева дефинишимо следеће m-торке целих бројева добијене од λ (за $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$):

- $\lambda^i = \lambda + f_i$ и $\lambda_i = \lambda - f_i$;
- $\lambda^{i,j} = \lambda + f_i + f_j$ и $\lambda_{i,j} = \lambda - f_i - f_j$.

За $k \geqslant 2$, k-торку $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(k-1)$-торку $\mu = (m_2, \ldots, m_k)$ целих бројева нека је:

- $|\alpha| := \sum_{j=1}^{k} a_j$, $\|\alpha\| := \sum_{j=1}^{k} j a_j$ и $|\mu| := \sum_{j=2}^{k} m_j$, $\|\mu\| := \sum_{j=2}^{k} (j-1) m_j$;
- $[\alpha, \mu]_t := \binom{\sum_{j=t-1}^{k} a_j - \sum_{j=t}^{k} m_j}{a_{t-1}}, \quad 2 \leqslant t \leqslant k$;

- $[\alpha,\mu] := \prod_{t=2}^{k}[\alpha,\mu]_t$.

На пример, $[\alpha,\mu]_2 = \binom{|\alpha|-|\mu|}{a_1}$. Такође, $[\alpha,\mathbf{0}] = [a_1,a_2,\ldots,a_k]$, где је са $\mathbf{0}$ означен нула вектор у $\mathbb{Z}^{k-1}$, а са $[a_1,a_2,\ldots,a_k]$ мултиномијални коефицијент $[a_1,a_2,\ldots,a_k] = [\alpha] := \binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1}\binom{a_2+\cdots+a_k}{a_2}\cdots\binom{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}}$.

Напомена 75. Случај $k=1$ је дозвољен. Тада μ мора бити $\emptyset$ и важи $|\mu| = \|\mu\| = 0$, као и $[\alpha,\mu] = 1$ за свако $\alpha = (a_1)$.

Напомена 76. Приметимо да је $(k-1)$-торка $\mu = (m_2,\ldots,m_k)$ индексирана бројевима од 2 до k, а не од 1 до $k-1$. Разлог за ово постаје јасан увидом у тврђење 81.

Напомена 77. У случају да је k-торка α уједно и партиција, дефиниција $|\alpha|$ подудара се са ознаком уведеном у глави 3.

Лема 78. *Ако су k-торка $\alpha = (a_1,\ldots,a_k)$ и $(k-1)$-торка $\mu = (m_2,\ldots,m_k)$ ненегативних целих бројева такве да важи $[\alpha,\mu] \neq 0$, тада је $|\alpha| < |\mu|$ или за све $2 \leqslant t \leqslant k$ важи $\sum_{j=t}^{k} a_j \geqslant \sum_{j=t}^{k} m_j$.*

Доказ. Претпоставимо да важи $|\alpha| \geqslant |\mu|$. Коришћењем математичке индукције по t доказаћемо да је $\sum_{j=t}^{k} a_j \geqslant \sum_{j=t}^{k} m_j$, за све $2 \leqslant t \leqslant k$. Како је

$$\binom{|\alpha|-|\mu|}{a_1} = [\alpha,\mu]_2 \neq 0$$

и $|\alpha|-|\mu| \geqslant 0$, по (4.1.2) је $|\alpha|-|\mu| \geqslant a_1$, а самим тим и $\sum_{j=2}^{k} a_j \geqslant \sum_{j=2}^{k} m_j$.

Претпоставимо сада да је $\sum_{j=t}^{k} a_j \geqslant \sum_{j=t}^{k} m_j$ за неко t такво да важи $2 \leqslant t \leqslant k-1$. Како је $[\alpha,\mu]_{t+1} \neq 0$ и $\sum_{j=t}^{k} a_j \geqslant \sum_{j=t}^{k} m_j \geqslant \sum_{j=t+1}^{k} m_j$, из (4.1.2) закључујемо да важи $\sum_{j=t}^{k} a_j - \sum_{j=t+1}^{k} m_j \geqslant a_t$. Дакле, $\sum_{j=t+1}^{k} a_j \geqslant \sum_{j=t+1}^{k} m_j$, чиме је доказ завршен. $\square$

Пре формулације следеће леме нагласимо да је за $(k-1)$-торку $\mu = (m_2,m_3,\ldots,m_k)$, по нашој дефиницији, $\mu^i = (m_2,m_3,\ldots,m_{i+1}+1,\ldots,m_k)$,

$1 \leqslant i \leqslant k-1$, и слично за $\mu^{i,j}$, $\mu^{i,i}$, μ_i, итд. На пример, $(k-1)$-торка μ^2 једнака је $(m_2, m_3+1, \ldots, m_k)$, а не $(m_2+1, m_3, \ldots, m_k)$.

Лема 79. *Нека је $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ k-торка целих бројева, а $\mu = (m_2, \ldots, m_k)$ $(k-1)$-торка ненегативних целих бројева.*

а) *За $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-2$ важи*

$$[\alpha, \mu^{i,j}] = -[\alpha_i, \mu^j] + [\alpha, \mu^{i-1,j+1}] + [\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}].$$

б) *За $1 \leqslant i \leqslant k-1$ важи*

$$[\alpha, \mu^{i,k-1}] = -[\alpha_i, \mu^{k-1}] + [\alpha_k, \mu^{i-1}].$$

Доказ. Нека је $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-1$. По дефиницији је за $2 \leqslant t \leqslant k$

$$[\alpha, \mu^{i,j}]_t = \binom{a_{t-1} + a_t + \cdots + a_k - m_t - \cdots - m_k - \delta_t}{a_{t-1}},$$

где је $\delta_t = \begin{cases} 2, & t \leqslant i+1 \\ 1, & i+2 \leqslant t \leqslant j+1 \\ 0, & t > j+1 \end{cases}$. Слично, за $t \neq i+1$ важи

$$[\alpha_i, \mu^j]_t = \binom{a_{t-1} + a_t + \cdots + a_k - m_t - \cdots - m_k - \delta_t}{a_{t-1}},$$

а самим тим и

$$[\alpha, \mu^{i,j}]_t = [\alpha_i, \mu^j]_t, \qquad \text{за } t \neq i+1. \tag{4.1.3}$$

Сада, коришћењем формуле (4.1.1) добијамо

$$[\alpha, \mu^{i,j}]_{i+1} + [\alpha_i, \mu^j]_{i+1} = [\alpha, \mu^j]_{i+1}, \tag{4.1.4}$$

јер је лева страна ове једнакости једнака

$$\binom{a_i + \cdots + a_k - m_{i+1} - \cdots - m_k - 2}{a_i} + \binom{a_i + \cdots + a_k - m_{i+1} - \cdots - m_k - 2}{a_i - 1},$$

а десна
$$\binom{a_i + \cdots + a_k - m_{i+1} - \cdots - m_k - 1}{a_i}.$$

а) У овом случају, слично као за једнакости (4.1.3) и (4.1.4), могу се доказати следећи идентитети:

$$[\alpha_i, \mu^j]_t = [\alpha, \mu^{i-1,j+1}]_t, \quad \text{за } t \notin \{i+1, j+2\}; \tag{4.1.5}$$

$$[\alpha, \mu^{i-1,j+1}]_t = [\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}]_t, \quad \text{за } t \neq j+2; \tag{4.1.6}$$

$$[\alpha, \mu^j]_{i+1} = [\alpha, \mu^{i-1,j+1}]_{i+1}; \tag{4.1.7}$$

$$[\alpha_i, \mu^j]_{j+2} = [\alpha, \mu^{i-1,j+1}]_{j+2} + [\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}]_{j+2}. \tag{4.1.8}$$

Коришћењем идентитета (4.1.3)–(4.1.8) добијамо

$$\begin{aligned}
[\alpha, \mu^{i,j}] &= \prod_{t=2}^{k} [\alpha, \mu^{i,j}]_t = [\alpha, \mu^{i,j}]_{i+1} \prod_{\substack{t=2 \\ t \neq i+1}}^{k} [\alpha_i, \mu^j]_t \\
&= \left(-[\alpha_i, \mu^j]_{i+1} + [\alpha, \mu^j]_{i+1}\right) \prod_{\substack{t=2 \\ t \neq i+1}}^{k} [\alpha_i, \mu^j]_t \\
&= -\prod_{t=2}^{k} [\alpha_i, \mu^j]_t + [\alpha, \mu^{i-1,j+1}]_{i+1} \prod_{\substack{t=2 \\ t \neq i+1}}^{k} [\alpha_i, \mu^j]_t \\
&= -[\alpha_i, \mu^j] + [\alpha_i, \mu^j]_{j+2} \prod_{\substack{t=2 \\ t \neq j+2}}^{k} [\alpha, \mu^{i-1,j+1}]_t \\
&= -[\alpha_i, \mu^j] + \left([\alpha, \mu^{i-1,j+1}]_{j+2} + [\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}]_{j+2}\right) \prod_{\substack{t=2 \\ t \neq j+2}}^{k} [\alpha, \mu^{i-1,j+1}]_t \\
&= -[\alpha_i, \mu^j] + [\alpha, \mu^{i-1,j+1}] + [\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}].
\end{aligned}$$

б) Слично као у претходном делу доказа, за $1 \leqslant i \leqslant k-1$ могу се доказати следећи идентитети:

$$[\alpha_i, \mu^{k-1}]_t = [\alpha_k, \mu^{i-1}]_t, \quad \text{за } t \neq i+1; \tag{4.1.9}$$

$$[\alpha, \mu^{k-1}]_{i+1} = [\alpha_k, \mu^{i-1}]_{i+1}. \tag{4.1.10}$$

Коришћењем идентитета (4.1.3)–(4.1.4) и (4.1.9)–(4.1.10) добијамо

$$\begin{aligned}[\alpha, \mu^{i,k-1}] &= \prod_{t=2}^{k} [\alpha, \mu^{i,k-1}]_t = [\alpha, \mu^{i,k-1}]_{i+1} \cdot \prod_{\substack{t=2 \\ t\neq i+1}}^{k} [\alpha_i, \mu^{k-1}]_t \\ &= \big(-[\alpha_i, \mu^{k-1}]_{i+1} + [\alpha, \mu^{k-1}]_{i+1}\big) \cdot \prod_{\substack{t=2 \\ t\neq i+1}}^{k} [\alpha_i, \mu^{k-1}]_t \\ &= -[\alpha_i, \mu^{k-1}] + [\alpha_k, \mu^{i-1}],\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. □

Приметимо да делове а) и б) претходне леме можемо објединити у формулу

$$[\alpha, \mu^{i,j}] = -[\alpha_i, \mu^{j}] + [\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}] + [\alpha, \mu^{i-1,j+1}], \text{ за } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-1,$$

уз конвенцију да је $[\alpha, \mu^{i-1,j+1}] = 0$ за $j = k-1$.

У остатку главе природни бројеви k и n биће фиксирани. До краја овог поглавља радићемо у полиномијалној алгебри $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$ у коју уводимо *grlex* поредак одређен са $x_1 > x_2 > \ldots > x_k$.

Подсетимо се да је за k-торку $\lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$ ненегативних целих бројева

$$X^\lambda = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_k^{l_k}.$$

У следећој дефиницији уводимо полиноме који ће заузимати централно место у даљем разматрању.

Дефиниција 80. За $(k-1)$-торку $\mu = (m_2, \ldots, m_k)$ ненегативних целих бројева и цео број $m \geqslant -k$ нека је

$$\mathfrak{g}_\mu^{(m)} := \sum_{\|\alpha\| = m+1+\|\mu\|} (-1)^{m+1+|\alpha|} [\alpha, \mu] X^\alpha,$$

при чему се сумирање врши по свим k-торкама ненегативних целих бројева $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ за које важи $\|\alpha\| = m + 1 + \|\mu\|$.

У следећем тврђењу разматрамо водећи моном полинома $\mathfrak{g}_\mu^{(m)}$, при чему је $-k \leqslant m \leqslant n$ и $|\mu| \leqslant n+1$.

Тврђење 81. *Нека је* $\mu = (m_2, \ldots, m_k)$ *једна* $(k-1)$*-торка ненегативних целих бројева за коју важи* $|\mu| \leqslant n+1$*. Тада:*

i) $\mathrm{LM}(\mathfrak{g}_\mu^{(n)}) = X^{\overline{\mu}}$*, где је* $\overline{\mu} = (n+1-|\mu|, m_2, \ldots, m_k)$*. Такође, ако је за неку* k*-торку* α *ненегативних целих бројева* $X^\alpha \in T(\mathfrak{g}_\mu^{(n)}) \setminus \{X^{\overline{\mu}}\}$*, онда важи* $|\alpha| < n+1$*.*

ii) ако је $m < n$ *и за* k*-торку* α *ненегативних целих бројева важи* $X^\alpha \in T(\mathfrak{g}_\mu^{(m)})$*, тада је* $|\alpha| \leqslant n$*.*

Доказ. Нека је $-k \leqslant m \leqslant n$ и $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ k-торка ненегативних целих бројева таква да је $\|\alpha\| = m + 1 + \|\mu\|$ и $[\alpha, \mu] \neq 0$, тј. таква да важи $X^\alpha \in T(\mathfrak{g}_\mu^{(m)})$.

Претпоставимо да је $|\alpha| \geqslant n+1$. Тада је $|\mu| \leqslant n+1 \leqslant |\alpha|$, па по леми 78 важи следећих $k-1$ неједнакости:

$$\begin{aligned} a_k &\geqslant m_k, \\ a_{k-1} + a_k &\geqslant m_{k-1} + m_k, \\ &\vdots \\ a_2 + \cdots + a_k &\geqslant m_2 + \cdots + m_k. \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$\sum_{j=2}^{k} (j-1) a_j \geqslant \sum_{j=2}^{k} (j-1) m_j. \tag{4.1.12}$$

Са друге стране, како је $|\alpha| \geqslant n+1$ и $\|\alpha\| = m + 1 + \|\mu\|$ важи

$$\sum_{j=2}^{k} (j-1) a_j = \|\alpha\| - |\alpha| \leqslant \|\alpha\| - (n+1) \leqslant \|\mu\| = \sum_{j=2}^{k} (j-1) m_j.$$

i) За $m_1 := n+1-|\mu|$ очигледно важи $[\overline{\mu}, \mu]_t = \binom{m_{t-1}}{m_{t-1}} = 1$, за све $2 \leqslant t \leqslant k$, а самим тим и $[\overline{\mu}, \mu] = 1$. Takoђе,

$$\|\overline{\mu}\| = \sum_{j=1}^{k} jm_j = n+1-|\mu| + \sum_{j=2}^{k} jm_j = n+1+\sum_{j=2}^{k}(j-1)m_j = n+1+\|\mu\|,$$

па је $X^{\overline{\mu}} \in T(\mathfrak{g}_\mu^{(n)})$.

Са друге стране, ако је $X^\alpha \in T(\mathfrak{g}_\mu^{(n)})$ за неку k-торку ненегативних целих бројева α такву да је $|\alpha| \geqslant n+1$, тада у свим неједнакостима (4.1.11) важе једнакости и мора бити $|\alpha| = n+1$. Дакле, важи $\alpha = \overline{\mu}$.

ii) Приметимо да за $m < n$ важи $\|\mu\| = \|\alpha\| - (m+1) > \|\alpha\| - (n+1)$, па не важи неједнакост (4.1.12), чиме је тврђење доказано. $\square$

Тврђење 82. *Нека је $m \geqslant -k$, $\mu = (m_2, \ldots, m_k)$ једна $(k-1)$-торка ненегативних целих бројева и $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-1$. Тада важи следећи идентитет*

$$\mathfrak{g}_{\mu^{i,j}}^{(m)} = x_i \mathfrak{g}_{\mu^j}^{(m)} - x_{j+1}\mathfrak{g}_{\mu^{i-1}}^{(m)} + \mathfrak{g}_{\mu^{i-1,j+1}}^{(m)},$$

уз конвенцију да је полином $\mathfrak{g}_{\mu^{i-1,j+1}}^{(m)}$ једнак нули за $j = k-1$.

Доказ. По леми 79 имамо

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\mu^{i,j}}^{(m)} &= \sum_{\|\alpha\|=m+1+\|\mu^{i,j}\|} (-1)^{m+1+|\alpha|}[\alpha, \mu^{i,j}]X^\alpha \\
&= \sum_{\|\alpha\|=m+1+\|\mu^{i,j}\|} (-1)^{m+1+|\alpha|}\left(-[\alpha_i, \mu^j] + [\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}] + [\alpha, \mu^{i-1,j+1}]\right)X^\alpha \\
&= \sum_{\|\alpha\|=m+1+\|\mu^{i,j}\|} (-1)^{m+1+|\alpha_i|}[\alpha_i, \mu^j]X^\alpha \\
&\qquad - \sum_{\|\alpha\|=m+1+\|\mu^{i,j}\|} (-1)^{m+1+|\alpha_{j+1}|}[\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}]X^\alpha + \mathfrak{g}_{\mu^{i-1,j+1}}^{(m)},
\end{aligned}$$

јер је $\|\mu^{i,j}\| = \|\mu\| + i + j = \|\mu\| + i - 1 + j + 1 = \|\mu^{i-1,j+1}\|$ (за $j \leqslant k-2$). Приметимо да је једнакост $\|\alpha\| = m+1+\|\mu^{i,j}\|$ еквивалентна са $\|\alpha_i\| = \|\alpha\| - i = m+1+\|\mu^{i,j}\| - i = m+1+\|\mu\|+j = m+1+\|\mu^j\|$, и слично еквивалентна је са $\|\alpha_{j+1}\| = m+1+\|\mu^{i-1}\|$.

Размотримо прву суму у горњој једнакости. Како се сумирање врши по k-торкама $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ненегативних целих бројева (таквим да је $\|\alpha\| = m + 1 + \|\mu^{i,j}\|$), координате вектора α_i су ненегативни цели бројеви, с тим да i-та координата може бити једнака -1 (ако је $a_i = 0$). Међутим, у том случају је $[\alpha_i, \mu^j]_{i+1} = \binom{a_{i+1}+\cdots+a_k-m_{i+1}-\cdots-m_k-2}{-1} = 0$, па и $[\alpha_i, \mu^j] = 0$. Самим тим, можемо претпоставити да важи $a_i \geqslant 1$, па и да α_i пролази k-торкама ненегативних целих бројева (таквим да је $\|\alpha_i\| = m + 1 + \|\mu^j\|$). Дакле,

$$\sum_{\|\alpha\|=m+1+\|\mu^{i,j}\|} (-1)^{m+1+|\alpha_i|}[\alpha_i, \mu^j]X^{\alpha} = x_i \sum_{\|\alpha_i\|=m+1+\|\mu^j\|} (-1)^{m+1+|\alpha_i|}[\alpha_i, \mu^j]X^{\alpha_i} = x_i \mathfrak{g}_{\mu^j}^{(m)}.$$

Преостало је да докажемо да је друга сума у горњој једнакости (за $\mathfrak{g}_{\mu^{i,j}}^{(m)}$) једнака $x_{j+1}\mathfrak{g}_{\mu^{i-1}}^{(m)}$. Нека је $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ једна k-торка ненегативних целих бројева таква да важи $\|\alpha\| = n + 1 + \|\mu^{i,j}\|$, тј. $\|\alpha_{j+1}\| = n + 1 + \|\mu^{i-1}\|$. Довољно је доказати да за $a_{j+1} = 0$ важи $[\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}] = 0$, јер тада доказ следи као за прву суму.

Ако је $j + 1 < k$, тада $a_{j+1} = 0$ имплицира $[\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}]_{j+2} = 0$, па и $[\alpha_{j+1}, \mu^{i-1}] = 0$.

Нека је зато $j = k - 1$. Претпоставимо супротно, тј. да важи $a_k = 0$ и $[\alpha_k, \mu^{i-1}] \neq 0$. Докажимо прво да је тада

$$a_{t-1} + a_t + \cdots + a_{k-1} \leqslant m_t + \cdots + m_k + \varepsilon_t, \qquad \text{за све } 2 \leqslant t \leqslant k, \tag{4.1.13}$$

где је $\varepsilon_t = \begin{cases} 1, & 2 \leqslant t \leqslant i \\ 0, & i+1 \leqslant t \leqslant k \end{cases}$. Доказ изводимо обрнутом математичком индукцијом по t. Докажимо прво да (4.1.13) важи за $t = k$. Како је $\binom{a_{k-1}-1-m_k}{a_{k-1}} = [\alpha_k, \mu^{i-1}]_k \neq 0$ и $a_{k-1} - 1 - m_k < a_{k-1}$, по (4.1.2) закључујемо да је $a_{k-1} - 1 - m_k \leqslant -1$, па је $a_{k-1} \leqslant m_k = m_k + \varepsilon_k$. Докажимо и индуктивни корак. Нека је $2 \leqslant t \leqslant k - 1$ и претпоставимо да важи $a_t + \cdots + a_{k-1} \leqslant m_{t+1} + \cdots + m_k + \varepsilon_{t+1}$. Како је очигледно $\varepsilon_{t+1} \leqslant \varepsilon_t$, из претходне неједнакости добијамо $a_t + \cdots + a_{k-1} \leqslant m_{t+1} + \cdots + m_k + \varepsilon_t$. Такође,

$$[\alpha_k, \mu^{i-1}]_t = \binom{a_{t-1} + a_t + \cdots + a_{k-1} - 1 - m_t - m_{t+1} - \cdots - m_k - \varepsilon_t}{a_{t-1}} \neq 0$$

и $a_{t-1} + a_t + \cdots + a_{k-1} - 1 - m_t - m_{t+1} - \cdots - m_k - \varepsilon_t \leqslant a_{t-1} - 1 - m_t < a_{t-1}$, па је по (4.1.2) $a_{t-1} + a_t + \cdots + a_{k-1} - 1 - m_t - m_{t+1} - \cdots - m_k - \varepsilon_t \leqslant -1$, тј. $a_{t-1} + a_t + \cdots + a_{k-1} \leqslant m_t + m_{t+1} + \cdots + m_k + \varepsilon_t$.

Коначно, сабирањем неједнакости (4.1.13) добијамо

$$\|\alpha\| \leqslant \|\mu\| + \sum_{t=2}^{k} \varepsilon_t = \|\mu\| + i - 1 = \|\mu^{i-1}\| = \|\alpha_k\| - m - 1 < \|\alpha\|,$$

што је очигледно контрадикција. □

За $r \in \mathbb{Z}$ дефинишимо полиноме $\overline{x}_r \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$ на следећи начин: $\overline{x}_r = 0$ за $r < 0$, $\overline{x}_0 = 1$ и

$$\overline{x}_r = -\sum_{j=1}^{k} x_j \overline{x}_{r-j}, \qquad \text{за } r \geqslant 1. \tag{4.1.14}$$

Из дефиниције, индукцијом, није тешко доказати да за сваки члан X^α полинома $\overline{x}_r$ важи $\|\alpha\| = r$. У наредном тврђењу дајемо и експлицитне формуле за $\overline{x}_r$, $r \in \mathbb{Z}$.

Тврђење 83. *За $r \in \mathbb{Z}$ важи*

$$\overline{x}_r = \sum_{\|\alpha\|=r} (-1)^{|\alpha|} [\alpha] X^\alpha.$$

Доказ. Тврђење очигледно важи за $r \leqslant 0$. Нека је даље $r \geqslant 1$. По формули (4.1.14) производ формалног реда $1+\overline{x}_1+\overline{x}_2+\cdots$ и полинома $1+x_1+\cdots+x_k$ једнак је 1. Дакле, важи

$$\begin{aligned} 1 + \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \cdots &= \frac{1}{1 + x_1 + \cdots + x_k} = \sum_{t \geqslant 0} (-1)^t (x_1 + \cdots + x_k)^t \\ &= \sum_{t \geqslant 0} \sum_{|\alpha|=t} (-1)^t [\alpha] X^\alpha = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} [\alpha] X^\alpha. \end{aligned}$$

Дато тврђење сада следи из последње једнакости и коментара после формуле (4.1.14). □

Из претходног тврђења и дефиниције 80 закључујемо да важи $\overline{x}_{m+1} = (-1)^{m+1}\mathfrak{g}_{\mathbf{0}}^{(m)} \in G$, за све $m \geqslant -k$.

У наредној леми успоставићемо везу између полинома $\mathfrak{g}_{(s,0,\ldots,0)}^{(m)}$ и полинома $\overline{x}_s \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$.

Лема 84. *За* $m \geqslant -k$, $s \geqslant 0$ *и* $(k-1)$-*торку* $\mathbf{s} = (s, 0, \ldots, 0)$ *важи*

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{s}}^{(m)} = (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} x_1^{s-i} \overline{x}_{m+1+i}.$$

Доказ. Доказ изводимо применом математичке индукције по $s \geqslant 0$. Како је $\mathfrak{g}_{\mathbf{0}}^{(m)} = (-1)^{m+1}\overline{x}_{m+1}$, идентитет важи за $s = 0$ (и све $m \geqslant -k$). Нека је зато $s \geqslant 1$ и претпоставимо да идентитет важи за $s-1$ и све $m \geqslant -k$. Нека је $\mathbf{s} = (s, 0, \ldots, 0)$. Тада је $\mathbf{s}_1 = (s-1, 0, \ldots, 0) = \mathbf{s} - \mathbf{1}$, па с обзиром на то да за све k-торке α целих бројева важи $[\alpha, \mathbf{s}]_2 = -[\alpha_1, \mathbf{s}-\mathbf{1}]_2 + [\alpha, \mathbf{s}-\mathbf{1}]_2$ (по (4.1.1)) и $[\alpha, \mathbf{s}]_t = [\alpha_1, \mathbf{s}-\mathbf{1}]_t = [\alpha, \mathbf{s}-\mathbf{1}]_t$ за $3 \leqslant t \leqslant k$, имамо

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\mathbf{s}}^{(m)} &= \sum_{\|\alpha\|=m+1+s} (-1)^{m+1+|\alpha|}[\alpha, \mathbf{s}]X^{\alpha} \\
&= \sum_{\|\alpha\|=m+1+s} (-1)^{m+1+|\alpha|} \left((-[\alpha_1, \mathbf{s}-\mathbf{1}]_2 + [\alpha, \mathbf{s}-\mathbf{1}]_2) \prod_{t=3}^{k} [\alpha, \mathbf{s}]_t \right) X^{\alpha} \\
&= x_1 \sum_{\|\alpha_1\|=m+1+s-1} (-1)^{m+1+|\alpha_1|}[\alpha_1, \mathbf{s}-\mathbf{1}]X^{\alpha_1} - \sum_{\|\alpha\|=(n+1)+1+s-1} (-1)^{n+2+|\alpha|}[\alpha, \mathbf{s}-\mathbf{1}]X^{\alpha} \\
&= x_1 \mathfrak{g}_{\mathbf{s}-\mathbf{1}}^{(m)} - \mathfrak{g}_{\mathbf{s}-\mathbf{1}}^{(m+1)} \\
&= x_1(-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} x_1^{s-1-i}\overline{x}_{m+1+i} - (-1)^{m+2} \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} x_1^{s-1-i}\overline{x}_{m+2+i} \\
&= (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{s} \binom{s-1}{i} x_1^{s-i}\overline{x}_{m+1+i} + (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{s} \binom{s-1}{i-1} x_1^{s-i}\overline{x}_{m+1+i} \\
&= (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} x_1^{s-i}\overline{x}_{m+1+i},
\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. $\square$

4.2 Гребнерове базе за $\mathbb{Z}$-кохомологију комплексних Грасманијана

У овом поглављу конструисаћемо Гребнерову базу за идеал $I_{k,n}$ који, по Бореловом опису, дефинише алгебру $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$. Користићемо нотације и тврђења представљена у поглављима 2.2, 3.2 и 4.1.

За k-торку $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ ненегативних целих бројева уводимо

$$C^\alpha := c_1^{a_1} c_2^{a_2} \cdots c_k^{a_k}.$$

Дефиниција 85. За $(k-1)$-торку $\mu = (m_2, \dots, m_k)$ ненегативних целих бројева нека је

$$g_\mu := \sum_{\|\alpha\| = n+1+\|\mu\|} (-1)^{n+1+|\alpha|} [\alpha, \mu] C^\alpha,$$

при чему се сумирање врши по свим k-торкама ненегативних целих бројева $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ за које важи $\|\alpha\| = n+1+\|\mu\|$.

Такође, нека је

$$G^{\mathbb{C}} := \{g_\mu \,:\, |\mu| \leqslant n+1\}.$$

Као у претходном поглављу, у $\mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_k]$ уводимо grlex поредак $\preccurlyeq$ одређен са $c_1 > c_2 > \cdots > c_k$. Приметимо да изоморфизам $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k] \to \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]$ задат са $x_i \mapsto c_i$, за $1 \leqslant i \leqslant k$, слика $\mathfrak{g}_\mu^{(n)}$ у g_μ, као и $\overline{x}_i$ у $\overline{c}_i$ (упоредити рекурентне једначине (2.2.5) и (4.1.14)), тако да можемо користити тврђења доказана у претходном поглављу.

Циљ овог одељка је да докажемо да је $G^{\mathbb{C}}$ Гребнерова база идеала $I_{k,n} = (\overline{c}_{n+1}, \overline{c}_{n+2}, \dots, \overline{c}_{n+k})$. За почетак доказаћемо следеће тврђење.

Тврђење 86. *За сваку $(k-1)$-торку ненегативних целих бројева μ важи $g_\mu \in \langle G^{\mathbb{C}} \rangle$.*

Доказ. Дефинисаћемо добро уређење $\lessdot$ на скупу $(k-1)$-торки ненегативних целих бројева и тврђење доказати индукцијом по $\lessdot$. Уређење

$\lessdot$ дефинисано је на следећи начин: за $(k-1)$-торке ненегативних целих бројева $\mu = (m_2, \dots, m_k)$ и $\nu = (n_2, \dots, n_k)$, прво поредимо $|\mu|$ и $|\nu|$, тј. $m_2 + m_3 + \cdots + m_k$ и $n_2 + n_3 + \cdots + n_k$, па ако су они једнаки поредимо $m_3 + \cdots + m_k$ и $n_3 + \cdots + n_k$, итд. Прецизније, ако означимо $|\mu|_{i\to} := m_i + \cdots + m_k$, за $2 \leqslant i \leqslant k$, тада је

$$\nu \lessdot \mu \text{ ако и само ако је } |\nu|_{s\to} < |\mu|_{s\to}, \text{ где је } s = \min\{i : |\mu|_{i\to} \neq |\nu|_{i\to}\}.$$

Ако је $|\mu| \leqslant n+1$, тада $g_\mu \in G^{\mathbb{C}} \subset \langle G^{\mathbb{C}} \rangle$. Претпоставимо даље да је $|\mu| > n+1$ и $g_\nu \in \langle G^{\mathbb{C}} \rangle$ за све ν такве да је $\nu \lessdot \mu$. Изаберимо i и j тако да важи $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-1$ и тако да су све компоненте $(k-1)$-торке $\mu_{i,j}$ ненегативне (ово је могуће јер је $|\mu| > n+1$). По тврђењу 82 важи

$$g_\mu = g_{\mu_{i,j}^{i,j}} = c_i g_{\mu_i} - c_{j+1} g_{\mu_{i,j}^{i-1}} + g_{\mu_{i,j}^{i-1,j+1}} \in \langle G^{\mathbb{C}} \rangle,$$

јер је $\mu_{i,j}^{i-1} \lessdot \mu_i \lessdot \mu$ и (ако је $j \leqslant k-2$) $\mu_{i,j}^{i-1,j+1} \lessdot \mu$. □

Тврђење 87. $I_{k,n} = \langle G^{\mathbb{C}} \rangle$.

Доказ. Прво ћемо доказати да је $\langle G^{\mathbb{C}} \rangle \subseteq I_{k,n}$. Како је $I_{k,n}$ генерисан полиномима $\overline{c}_{n+1}, \overline{c}_{n+2}, \dots, \overline{c}_{n+k}$, по рекурентној једначини (2.2.5) не само ових k полинома, него сви $\overline{c}_r$ за $r \geqslant n+1$ припадају идеалу $I_{k,n}$. Слично, доказаћемо да $g_\mu \in I_{k,n}$ за све $(k-1)$-торке μ ненегативних целих бројева.

Доказ овог тврђења изводимо индукцијом по поретку $\prec_{rlex}$ (погледати поглавље 1.1.1).

За $(k-1)$-торку $\mathbf{m} = (m, 0, \dots, 0)$, где је $m \geqslant 0$ произвољан цео број, по леми 84 и примедби са почетка доказа, закључујемо да је $g_{\mathbf{m}} \in I_{k,n}$. Нека је зато $\mu = (m_2, m_3, \dots, m_k)$ $(k-1)$-торка ненегативних целих бројева таква да је највећи цео број s за који важи $m_{s+1} > 0$ барем 2. Дакле, $2 \leqslant s \leqslant k-1$ и $\mu = (m_2, \dots, m_{s+1}, 0, \dots, 0)$. Нека је уз то $g_\nu \in I_{k,n}$ за све ν такве да је $\nu \prec_{rlex} \mu$. По тврђењу 82 примењеном на $(k-1)$-торку μ_s, $i = 1$

и $j = s-1$ важи

$$g_\mu = g_{\mu_s^{1,s-1}} - c_1 g_{\mu_s^{s-1}} + c_s g_{\mu_s}.$$

Како је $\mu_s \prec_{rlex} \mu_s^{s-1} \prec_{rlex} \mu_s^{1,s-1} \prec_{rlex} \mu$, закључујемо да је $g_\mu \in I_{k,n}$.

Докажимо и да важи $(\overline{c}_{n+1}, \ldots, \overline{c}_{n+k}) \subseteq \langle G^{\mathbb{C}} \rangle$. Како је $\overline{c}_{n+1} = (-1)^{n+1} g_{\mathbf{0}} \in \langle G^{\mathbb{C}} \rangle$, а по леми 84 и

$$\overline{c}_{n+1+m} = (-1)^{n+1} g_{\mathbf{m}} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} c_1^{m-i} \cdot \overline{c}_{n+1+i}, \text{ за } m \geqslant 1,$$

тврђење следи индукцијом (уз коришћење тврђења 86). □

Коначно, спремни смо да докажемо централну теорему овог поглавља.

Теорема 88. *Скуп $G^{\mathbb{C}}$ је минимална јака Гребнерова база идеала $I_{k,n}$ у односу на поредак $\preccurlyeq$.*

Доказ. По тврђењу 87 скуп $G^{\mathbb{C}}$ генерише идеал $I_{k,n}$. Уз то, по тврђењу 81 важи $0 \notin G^{\mathbb{C}}$, а из дефиниције је јасно да је скуп $G^{\mathbb{C}}$ коначан. Претпоставимо да $G^{\mathbb{C}}$ није јака Гребнерова база идеала $I_{k,n}$. Тада постоји полином $f \in I_{k,n} \setminus \{0\}$ такав да $\mathrm{LM}(g)$ не дели $\mathrm{LM}(f)$ ни за једно $g \in G^{\mathbb{C}}$. По тврђењу 81 важи

$$\{\mathrm{LM}(g) \,:\, g \in G^{\mathbb{C}}\} = \{C^\alpha \,:\, |\alpha| = n+1\}, \tag{4.2.1}$$

па за свако $C^\alpha \in T(f)$ важи $|\alpha| \leqslant n$. Међутим, тада по теореми 63 важи $f = 0$, што је очигледно контрадикција. Дакле, $G^{\mathbb{C}}$ је јака Гребнерова база идеала $I_{k,n}$.

По тврђењу 81 сви полиноми из $G^{\mathbb{C}}$ имају различите водеће чланове, па је по (4.2.1) $G^{\mathbb{C}}$ и минимална јака Гребнерова база. □

Тврђења 81 и 82 омогућују нам да (експлицитно) одредимо полиноме $g_\mu \in G^{\mathbb{C}}$ за $(k-1)$-торке $\mu = (m_2, \ldots, m_k)$ такве да је m_k „блиско” n. Наиме, ако је $g_\mu \in G^{\mathbb{C}}$ и $C^\alpha \in T(g_\mu) \setminus \{C^{\overline{\mu}}\}$ (где је $\overline{\mu} = (n+1-|\mu|, m_2, \ldots, m_k)$), тада по тврђењу 81 важи $|\alpha| \leqslant n$. Самим тим, $\|\alpha\| = \sum_{j=1}^{k} ja_j \leqslant k \sum_{j=1}^{k} a_j = k|\alpha| \leqslant kn$. Са друге стране, $\|\alpha\| = n + 1 + \|\mu\|$, па је $g_\mu = C^{\overline{\mu}}$ кад год важи $\|\mu\| > (k-1)n - 1$.

Нека је ν $(k-1)$-торка $(0, \ldots, 0, n)$. Како је $\|\nu^s\| > \|\nu\| = (k-1)n$, за $1 \leqslant s \leqslant k-1$, из претходног закључујемо да важи

$$g_\nu = c_1 c_k^n \quad \text{и} \quad g_{\nu^s} = c_{s+1} c_k^n, \quad 1 \leqslant s \leqslant k-1 \quad (\text{за } k \geqslant 2). \tag{4.2.2}$$

Даље, применом тврђења 82 на $(k-1)$-торку $\nu_{k-1} = (0, \ldots, 0, n-1)$, $i = 1$ и $j = k-1$, добијамо једнакост $c_k g_{\nu_{k-1}} = c_1 g_\nu - g_{\nu^1}$. Оба сабирка на десној страни ове једнакости садрже c_k као фактор, па скраћивањем са c_k и коришћењем (4.2.2) добијамо

$$g_{\nu_{k-1}} = c_1^2 c_k^{n-1} - c_2 c_k^{n-1} \qquad (\text{за } k \geqslant 2). \tag{4.2.3}$$

Слично, применом тврђења 82 на ν_{k-1}, $i = s+1$ и $j = k-1$, добијамо да важи $c_k g_{\nu_{k-1}^s} = c_{s+1} g_\nu - g_{\nu^{s+1}}$, а самим тим и

$$g_{\nu_{k-1}^s} = c_1 c_{s+1} c_k^{n-1} - c_{s+2} c_k^{n-1}, \quad 1 \leqslant s \leqslant k-2 \quad (\text{за } k \geqslant 3). \tag{4.2.4}$$

Идентитети (4.2.3) и (4.2.4) одређују $g_\mu \in G^{\mathbb{C}}$ када је $m_k = n-1$ и $|\mu| \leqslant n$. Да бисмо одредили $g_\mu \in G^{\mathbb{C}}$ када је $m_k = n-1$ и $|\mu| = n+1$ за неки конкретан природан број k, примењујемо тврђење 82 прво за ν_{k-1}, $i = 1$ и све j такве да важи $1 \leqslant j \leqslant k-2$, затим на ν_{k-1}, $i = 2$ и све j такве да важи $2 \leqslant j \leqslant k-2$, итд. Даље, ако је $n \geqslant 2$, на сличан начин се могу одредити и полиноми $g_\mu \in G^{\mathbb{C}}$ када је $m_k = n-2$. На пример, важе следеће формуле (прва за $k \geqslant 3$, а друга за $k \geqslant 4$):

$$g_{\nu_{k-1,k-1}} = c_1^3 c_k^{n-2} - 2c_1 c_2 c_k^{n-2} + c_3 c_k^{n-2},$$
$$g_{\nu_{k-1,k-1}^s} = c_1^2 c_{s+1} c_k^{n-2} - c_1 c_{s+2} c_k^{n-2} - c_2 c_{s+1} c_k^{n-2} + c_{s+3} c_k^{n-2}, \ 1 \leqslant s \leqslant k-3.$$

Формуле Пијеријевог типа за базу $B_{k,n}$

Нека је $\lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$ k-торка ненегативних целих бројева таква да важи $|\lambda| = n + 1$. Тада за $\underline{\lambda} := (l_2, \ldots, l_k)$ важи $g_{\underline{\lambda}} \in G^{\mathbb{C}}$, па по тврђењу 87 у $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ важи $g_{\underline{\lambda}} = 0$. Дакле,

$$C^\lambda = \sum_{\substack{\|\alpha\| = n+1+\|\underline{\lambda}\| \\ \alpha \neq \lambda}} (-1)^{1+|\alpha|-|\lambda|} [\alpha, \underline{\lambda}]\ C^\alpha \tag{4.2.5}$$

у $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. По тврђењу 81 овај идентитет даје представљање члана C^λ у адитивној бази $B_{k,n}$. Такође, можемо приметити да ове формуле у потпуности одређују множење у $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. Самим тим, формулу (4.2.5) можемо протумачити као формулу Пијеријевог типа за базу $B_{k,n}$ (упоредити са теоремом 53). Прецизније, за $1 \leqslant i \leqslant k$ и $C^\lambda \in B_{k,n}$, ако је $|\lambda| < n$, тада важи $c_i \cdot C^\lambda \in B_{k,n}$, док за $|\lambda| = n$ имамо

$$c_i \cdot C^\lambda = \sum_{\substack{\|\alpha\| = n+1+\|\underline{\lambda^i}\| \\ \alpha \neq \lambda^i}} (-1)^{|\alpha|-|\lambda|} [\alpha, \underline{\lambda^i}]\ C^\alpha \tag{4.2.6}$$

На пример, идентитети са краја претходног поглавља дају следеће:

$$c_1 c_k^n = 0,$$

$$c_{s+1} c_k^n = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant k-1 \quad (k \geqslant 2),$$

$$c_1^2 c_k^{n-1} = c_2 c_k^{n-1} \quad (k \geqslant 2),$$

$$c_1 c_{s+1} c_k^{n-1} = c_{s+2} c_k^{n-1}, \quad 1 \leqslant s \leqslant k-2 \quad (k \geqslant 3),$$

$$c_1^3 c_k^{n-2} = 2c_1 c_2 c_k^{n-2} - c_3 c_k^{n-2} \quad (k \geqslant 3,\ n \geqslant 2),$$

$$c_1^2 c_{s+1} c_k^{n-2} = c_1 c_{s+2} c_k^{n-2} + c_2 c_{s+1} c_k^{n-2} - c_{s+3} c_k^{n-2},\ 1 \leqslant s \leqslant k-3\ (k \geqslant 4,\ n \geqslant 2).$$

4.3 Гребнерове базе за $\mathbb{Z}_2$-кохомологију реалних Грасманијана

У овом поглављу конструисаћемо Гребнерову базу за идеал $J_{k,n}$ који по Бореловом опису одређује алгебру $H^*(G_{k,n}(\mathbb{R});\mathbb{Z}_2)$. При томе, користићемо нотације и тврђења представљена у поглављу 2.2.

Борелов опис алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z}_2)$ може се добити од одговарајућег описа алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$ редукцијом по модулу 2. Како је модуло 2 редукција Чернове класе $c_i \in H^{2i}(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$ канонског (комплексног) векторског раслојења γ_k над $G_{k,n}(\mathbb{C})$ Штифел-Витнијева класа w_{2i} припадајућег реалног векторског раслојења, скуп $\{w_2^{a_1}w_4^{a_2}\cdots w_{2k}^{a_k} : a_1+a_2+\cdots+a_k \leqslant n\}$ је адитивна база алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z}_2)$ и самим тим Гребнерова база идеала у $\mathbb{Z}_2[w_2,w_4,\ldots,w_{2k}]$ који одређује алгебру $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z}_2)$ може се добити на исти начин као у поглављу 4.2 заменом c_i са w_{2i}.

Борелов опис кохомолошке алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{R});\mathbb{Z}_2)$ је суштински исти као опис алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z}_2)$ – једина разлика је у томе да су димензије Штифел-Витнијевих класа које генеришу кохомологију подељене са 2. Дакле, можемо извести исте закључке везане за адитивну базу алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{R});\mathbb{Z}_2)$ и Гребнерову базу идеала који је дефинише.

Посматрајмо полиномијалну алгебру $\mathbb{Z}_2[w_1,w_2,\ldots,w_k]$ у којој уводимо grlex поредак $\preccurlyeq$ одређен са $w_1 > w_2 > \cdots > w_k$. На основу свега што је претходно речено имамо следеће резултате.

Теорема 89. *Скуп* $D_{k,n} := \{W^\alpha : |\alpha| \leq n\}$ *је база векторског простора*

$$H^*(G_{k,n}(\mathbb{R});\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1,w_2,\ldots,w_k]/J_{k,n}.$$

Дефиниција 90. За $(k-1)$-торку $\mu = (m_2,\ldots,m_k)$ ненегативних целих бројева нека је

$$\widetilde{g}_\mu := \sum_{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\|} [\alpha,\mu] W^\alpha,$$

при чему се сумирање врши по свим k-торкама ненегативних целих бројева $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ за које важи $\|\alpha\| = n+1+\|\mu\|$. Такође, нека је

$$G^{\mathbb{R}} := \{\widetilde{g}_\mu : |\mu| \leqslant n+1\}.$$

Главни резултат овог одељка дајемо у следећој теореми.

Теорема 91. *Скуп $G^{\mathbb{R}}$ је редукована Гребнерова база идеала $J_{k,n}$ у односу на поредак $\preccurlyeq$.*

Доказ. На основу претходног $G^{\mathbb{R}}$ је минимална јака Гребнерова база идеала $J_{k,n}$ у односу на поредак $\preccurlyeq$. Докажимо да је ова Гребнерова база и редукована. Како је $\mathrm{LC}(\widetilde{g}_\mu) = 1$ за све $\widetilde{g}_\mu \in G^{\mathbb{R}}$, да бисмо доказали нашу тврдњу довољно је доказати да за $\widetilde{g}_\mu \in G^{\mathbb{R}}$, $\mathrm{LT}(\widetilde{g}_\mu) = W^{\overline{\mu}}$ не дели неки члан из $T(\widetilde{g}_\nu)$, за неко $\widetilde{g}_\nu \in G^{\mathbb{R}} \setminus \{\widetilde{g}_\mu\}$. Ово следи из мод 2 варијанте тврђења 81. Заиста, $W^{\overline{\mu}} \nmid W^{\overline{\nu}}$ (јер је $G^{\mathbb{R}}$ минимална), а за сваки други члан W^α полинома $\widetilde{g}_\nu$ важи $|\alpha| < n+1$, па W^α није дељиво са $W^{\overline{\mu}}$ јер је $|\overline{\mu}| = n+1$. □

Као у поглављу 4.2, доказаћемо да је множење у бази $D_{k,n}$ алгебре $H^*(G_{k,n}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$ одређено Гребнеровом базом $G^{\mathbb{R}}$. Ако је $\lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$ k-торка ненегативних целих бројева таква да је $|\lambda| = n+1$, тада важи

$$W^\lambda = \sum_{\substack{\|\alpha\|=n+1+\|\underline{\lambda}\| \\ \alpha \neq \lambda}} [\alpha, \underline{\lambda}]\; W^\alpha,$$

где је $\underline{\lambda} = (l_2, \ldots, l_k)$. Дакле, производ w_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и члана $W^\lambda \in D_{k,n}$ записује се као линеарна комбинација елемената базе $D_{k,n}$ на следећи начин: ако је $|\lambda| < n$, тада је $w_i \cdot W^\lambda \in D_{k,n}$, а ако је $|\lambda| = n$, тада је

$$w_i \cdot W^\lambda = \sum_{\substack{\|\alpha\|=n+1+\|\underline{\lambda}^i\| \\ \alpha \neq \lambda^i}} [\alpha, \underline{\lambda}^i]\; W^\alpha. \tag{4.3.1}$$

Јасно, идентитети аналогни онима са краја претходног поглавља могу се добити коришћењем формуле (4.3.1) или редукцијом по модулу 2 споменутих идентитета.

4.4 Гребнерова база за малу квантну кохомологију комплексних Грасманијана

У овом поглављу конструисаћемо Гребнерову базу за идеале $O_{k,n}$ који по опису Сиберта и Тиана дефинишу $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$. Користићемо нотацију и тврђења представљена у поглављу 3.3.

Радићемо у полиномијалној алгебри $\mathbb{Z}[q][c_1, c_2, \dots, c_k]$ у коју уводимо grlex поредак $\preccurlyeq$ одређен (опет) са $c_1 > c_2 > \cdots > c_k$. Наравно, пресликавање $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k] \to \mathbb{Z}[q][c_1, \dots, c_k]$ задато са $x_i \mapsto c_i$, за $1 \leqslant i \leqslant k$, је утапање. Нека је за $(k-1)$-торку μ ненегативних целих бројева са $g_\mu^{(n)}$ означена слика полинома $\mathfrak{g}_\mu^{(n)}$, а са $g_\mu^{(-k)}$ слика полинома $\mathfrak{g}_\mu^{(-k)}$ при овом утапању. Такође, приметимо да по формулама (3.3.5) и (4.1.14) важи $\overline{x}_i \mapsto \sigma_i$.

Спремни смо да дефинишемо полиноме за које ћемо доказати да чине Гребнерову базу идеала $O_{k,n}$ (у односу на поредак $\preccurlyeq$).

Дефиниција 92. За $(k-1)$-торку μ ненегативних целих бројева нека је

$$\mathrm{g}_\mu := g_\mu^{(n)} + (-1)^n q g_\mu^{(-k)}.$$

Такође, нека је

$$QG^{\mathbb{C}} := \{\mathrm{g}_\mu \,:\, |\mu| \leqslant n+1\}.$$

Нека је

$$\widetilde{\sigma}_m = \sigma_m + (-1)^k q \sigma_{m-n-k}, \text{ за } m \geqslant 0, \tag{4.4.1}$$

уз подсећање да је $\sigma_j = 0$ за $j < 0$, а $\sigma_0 = 1$. Приметимо да је $\widetilde{\sigma}_{n+i} = \sigma_{n+i}$, за $1 \leqslant i \leqslant k-1$ и $\widetilde{\sigma}_{n+k} = \sigma_{n+k} + (-1)^k q$. Дакле, $\widetilde{\sigma}_{n+i} \in O_{k,n}$, за $1 \leqslant i \leqslant k$. У следећем тврђењу доказаћемо да је $\widetilde{\sigma}_{n+i} \in O_{k,n}$, за све $i \geqslant 1$.

Тврђење 93. *За $m \geqslant k+n+1$ важи*

$$\widetilde{\sigma}_m = -\sum_{i=1}^{k} c_i \widetilde{\sigma}_{m-i}.$$

Доказ. Коришћењем формуле (3.3.5) и дефиниције (4.4.1) имамо

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}_m = \sigma_m + (-1)^k q \sigma_{m-n-k} &= -\sum_{i=1}^{k} c_i \sigma_{m-i} - (-1)^k q \sum_{i=1}^{k} c_i \sigma_{m-n-k-i} \\ &= -\sum_{i=1}^{k} c_i \left(\sigma_{m-i} + (-1)^k q \sigma_{m-i-n-k}\right) = -\sum_{i=1}^{k} c_i \widetilde{\sigma}_{m-i},\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. □

На основу дефиниција полинома g_μ и $\widetilde{\sigma}_i$, као и тврђења 93, јасно је да за њих важе тврђења аналогна онима из поглавља 3.1. Ради комплетности, у наредним тврђењима наводимо ове резултате.

Тврђење 94. *Нека је $\mu = (m_2, \ldots, m_k)$ $(k-1)$-торка ненегативних целих бројева таква да је $|\mu| \leqslant n+1$. Тада важи $\mathrm{LT}(\mathrm{g}_\mu) = C^{\overline{\mu}}$, где је $\overline{\mu} = (n+1-|\mu|, m_2, \ldots, m_k)$. Такође, ако је $C^\alpha \in T(\mathrm{g}_\mu) \setminus \{C^{\overline{\mu}}\}$ за неку k-торку α ненегативних целих бројева, тада је $|\alpha| < n+1$.* □

Тврђење 95. *Нека је $\mu = (m_2, \ldots, m_k)$ $(k-1)$-торка ненегативних целих бројева и $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k-1$. Тада у полиномијалној алгебри $\mathbb{Z}[q][c_1, c_2, \ldots, c_k]$ важи следећи идентитет*

$$\mathrm{g}_{\mu^{i,j}} = c_i \mathrm{g}_{\mu^j} - c_{j+1} \mathrm{g}_{\mu^{i-1}} + \mathrm{g}_{\mu^{i-1,j+1}},$$

при чему узимамо да је полином $\mathrm{g}_{\mu^{i-1,j+1}}$ једнак нули за $j = k-1$. □

Лема 96. *Нека је за $s \geqslant 0$ са* $\mathbf{s}$ *означена $(k-1)$-торка $(s, 0, \dots, 0)$. Тада важи*

$$\mathrm{g}_{\mathbf{s}} = (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} c_1^{s-i} \widetilde{\sigma}_{n+1+i}.$$

Коришћењем претходних тврђења, на исти начин као у поглављу 4.2 добијамо најављени резултат о Гребнеровој бази идеала $O_{k,n}$.

Теорема 97. *Скуп $QG^{\mathbb{C}}$ је минимална јака Гребнерова база идеала $O_{k,n}$ (над $\mathbb{Z}[q]$) у односу на grlex поредак $\preccurlyeq$.* $\square$

Као и у претходним поглављима, доказаћемо да Гребнерова база $QG^{\mathbb{C}}$ идеала $O_{k,n}$ у потпуности одређује множење у $Q_{k,n}$. Заиста, ако је $\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_k)$ k-торка ненегативних целих бројева таква да је $|\lambda| = n+1$ важи

$$C^{\lambda} = \sum_{\substack{\|\alpha\| = n+1+\|\underline{\lambda}\| \\ \alpha \neq \lambda}} (-1)^{n+|\alpha|} [\alpha, \underline{\lambda}] C^{\alpha} + q \sum_{\|\alpha\| = -k+1+\|\underline{\lambda}\|} (-1)^{n-k+|\alpha|} [\alpha, \underline{\lambda}] C^{\alpha}.$$

где је $\underline{\lambda} = (l_2, \dots, l_k)$. Дакле, производ c_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и члана $C^{\lambda} \in Q_{k,n}$ записује се као линеарна комбинација елемената базе $Q_{k,n}$ на следећи начин: ако је $|\lambda| < n$, тада је $c_i \cdot C^{\lambda} \in Q_{k,n}$, а ако је $|\lambda| = n$, тада је

$$c_i \cdot C^{\lambda} = \sum_{\substack{\|\alpha\| = n+1+\|\underline{\lambda}^i\| \\ \alpha \neq \lambda^i}} (-1)^{n+|\alpha|} [\alpha, \underline{\lambda}^i] C^{\alpha} + q \sum_{\|\alpha\| = -k+1+\|\underline{\lambda}^i\|} (-1)^{n-k+|\alpha|} [\alpha, \underline{\lambda}^i] C^{\alpha}. \quad (4.4.2)$$

Приметимо да је деформација формуле (4.4.2) у односу на (4.2.6) слична као деформација квантне Пијеријеве формуле у односу на класичну.

Пример 98. У $QH^*(G_{2,4}; \mathbb{Z})$ важе следећи идентитети (који у потпуности одређују множење):

$$\begin{aligned} c_1^5 &= 4c_1^3 c_2 - 3c_1 c_2^2 & \qquad c_1^4 c_2 &= 3c_1^2 c_2^2 - c_2^3 - q \\ c_1^3 c_2^2 &= 2c_1 c_2^3 + q c_1 & c_1^2 c_2^3 &= c_2^4 + q c_1^2 - q c_2 \\ c_1 c_2^4 &= q c_1^3 - 2q c_1 c_2 & c_2^5 &= q c_1^4 - 3q c_1^2 c_2 + q c_2^2. \end{aligned}$$

ГЛАВА 5

РЕКУРЕНТНЕ ФОРМУЛЕ ЗА КОСТКИНЕ БРОЈЕВЕ

У овој глави искористићемо резултате главе 4 и добити нове рекурентне формуле из којих се могу израчунати (сви) Косткини и квантни Косткини бројеви. Ови резултати изложени су у радовима [53] и [54].

У уводном делу главе даћемо преглед (неких) битних резултата теорије репрезентација група у којима се природно појављују Косткини бројеви. Приликом писања ослонили смо се на књигу [22] у којој је ова тематика знатно темељније обрађена.

5.1 Косткини бројеви у теорији репрезентација

Бројеве $K_{\lambda\mu}$, које смо дефинисали у глави 3, увео је Карл Костка у радовима [35, 36], откуд и потиче њихов назив. Његова дефиниција незнатно се разликује од оне коју смо ми дали, али је, као и наша, „проистекла" из изучавања симетричних функција.

У глави 3 показали смо де се, осим у комбинаторици, Косткини бројеви природно појављују у алгебарској геометрији, тј. у Шубертовом рачуну за кохомологију Грасманијана. У овом поглављу приказаћемо како су Косткини бројеви нераскидиво повезани са још једном облашћу математике, *теоријом репрезентација група.*

Под *репрезентацијом* групе G подразумевамо хомоморфизам

$$\rho : G \to GL(V),$$

где је V неки коначно-димензиони векторски простор, а $GL(V)$ скуп аутоморфизама овог простора. Идеја репрезентација је јасна – елементе групе желимо да „репрезентујемо" линеарним пресликавањима и да особине групе проучавамо кроз ова линеарна пресликавања, што можемо радити добро установљеним техникама линеарне алгебре. Наравно, репрезентација (ρ, V) групе G задаје и дејство групе G на V дефинисано са $g \cdot v = \rho(g)(v)$. Напоменимо да, иако је репрезентација пар (ρ, V), често ћемо изостављати хомомоморфизам ρ и писати „репрезентација V".

Приликом описа репрезентација група, од велике важности су тзв. *иредуцибилне репрезентације*, које дефинишемо на следећи начин. Ако је $\rho : G \to GL(V)$ репрезентација и W векторски потпростор од V који је инваријантан у односу на G, тј. за који је

$$\rho(g)(W) \subseteq W, \qquad \text{за све } g \in G,$$

кажемо да је $g \mapsto \rho(g)|_W$ *подрепрезентација* репрезентације ρ. Коначно, за репрезентацију ρ кажемо да је *иредуцибилна* ако нема правих нетривијалних подрепрезентација.

Напоменимо да се у случајевима које ћемо разматрати свака репрезентација на јединствен начин може записати као директна сума иредуцибилних репрезентација.

5.1.1 Репрезентација симетричних група

У овом поглављу разматраћемо репрезентације $\rho : \mathbb{S}_n \to GL(V)$, где је V коначно-димензиони векторски простор над $\mathbb{C}$.

Као што је напоменуто у претходном делу ове главе, од посебног значаја је наћи све иредуцибилне репрезентације. У случају групе $\mathbb{S}_n$ овај проблем је у потпуности решен: V је иредуцибилна репрезентација ако и само је изоморфна неком *Шпехтовом модулу* S^λ, где је λ партиција за коју важи $|\lambda| = n$ (конструкција ових модула може се наћи у [22]). Други тип репрезентација група $\mathbb{S}_n$ који је од посебног значаја чине *пермутациони модули* M^λ (погледати [22]).

На скуп класа изоморфних репрезентација групе $\mathbb{S}_n$ на природан начин можемо увести адитивну структуру. Ту групу означавамо са R_n, а она је слободна Абелова група генерисана класама иредуцибилних репрезентација групе $\mathbb{S}_n$, тј. за класу $[V]$ репрезентације V важи

$$[V] = \sum m_\lambda [S^\lambda], \quad \text{ако је } V \cong \oplus (S^\lambda)^{\oplus m_\lambda}.$$

Ова структура се може и додатно „обогатити”. Нека је $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ ($R_0 = \mathbb{Z}$). Тада се на R може увести операција $\circ$ таква да је R градуисани прстен (за детаље ове конструкције погледати [22]). При томе, уз ознаке из главе 3, хомоморфизам $\varphi : \Lambda \to R$ задат са

$$\varphi(h_\lambda) = [M^\lambda]$$

је изоморфизам. Такође, важи $\varphi(s_\lambda) = [S^\lambda]$, па и:

(Јангово правило) $M^\lambda \cong \bigoplus_\mu (S^\mu)^{\oplus K_{\lambda\mu}}$;

(Литлвуд-Ричардсоново правило) $S^\lambda \circ S^\mu \cong \bigoplus_\nu (S^\nu)^{\oplus c^\nu_{\lambda\mu}}$.

5.1.2 Репрезентација линеарне групе

У овом поглављу разматраћемо репрезентације $\rho : GL(E) \to GL(V)$, где су E и V коначно-димензиони векторски простори над $\mathbb{C}$. Ако је димензија простора E једнака m уместо $GL(E)$ писаћемо још и $GL_m\mathbb{C}$.

Као у случају симетричних група, иредуцибилне репрезентације групе $GL(E)$ су добро познате (погледати [22]) – између осталог познато је да их можемо параметризовати партицијама λ за које важи $l(\lambda) \leqslant m = \dim E$.

У наставку ћемо приказати како се репрезентација V групе $G = GL_m\mathbb{C}$ може представити као директна сума тзв. *тежинских простора*. Нека је H подгрупа групе G која се састоји од дијагоналних матрица $x = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_m)$. Вектор v простора V је *тежински вектор* са *тежином* $\alpha = (a_1, \ldots, a_m)$, где је $a_i \in \mathbb{Z}$, ако је

$$x \cdot v = x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} v, \quad \text{за све } x \in H.$$

Тежински простори од V, у ознаци V_α, дефинисани су са

$$V_\alpha = \{v \in V \,:\, x \cdot v = x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} v, \text{ за све } x \in H\},$$

и важи

$$V = \bigoplus_{\mu} V_\mu.$$

Специјално, за иредуцибилну репрезентацију V^λ важи $V^\lambda = \bigoplus_{\mu} \left(V^\lambda\right)_\mu$ и при томе су димензије простора $\left(V^\lambda\right)_\mu$ управо једнаке $K_{\lambda\mu}$.

За дате иредуцибилне репрезентације V^λ и V^μ групе $GL_m\mathbb{C}$, тензорски производ $V^\lambda \otimes V^\mu$ је такође репрезентација групе $GL_m\mathbb{C}$ и важи

$$V^\lambda \otimes V^\mu \cong \bigoplus_{l(\nu) \leqslant m} (V^\nu)^{\oplus c^\nu_{\lambda\mu}}. \tag{5.1.1}$$

Додајмо и да се слична тврђења могу добити у случају репрезентација групе $SL(E)$ (за детаље погледати [22]).

Ово поглавље завршићемо са две значајне формуле за израчунавање бројева $K_{\lambda\mu}$ и $c^{\nu}_{\lambda\mu}$, које потичу управо из теорије репрезентација. Прво ћемо увести неколико ознака.

Нека су $f_1, \ldots, f_m$ вектори канонске базе простора $\mathbb{Z}^m$ и $\Delta_+ = \{f_i - f_j : 1 \leqslant i < j \leqslant m\}$. За вектор $v = (v_1, \ldots, v_m)$, такав да је $v_1 + v_2 + \cdots + v_m = 0$, нека је

$$K(v) = \left|\left\{(k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+} \in \mathbb{N}^{|\Delta_+|} \,:\, \sum_{\alpha\in\Delta_+} k_\alpha \alpha = v\right\}\right|.$$

Уколико је за пермутацију $\sigma \in \mathbb{S}_m$ са $\operatorname{sgn}(\sigma)$ означен њен знак, а $2\delta = (m-1, m-3, \ldots, -(m-3), -(m-1))$, тада важе следеће једнакости (прва за $|\lambda| = |\mu|$, а друга за $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$):

(Костантова формула [34]) $K_{\lambda\mu} = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma) K(\sigma(\lambda+\delta) - (\mu+\delta));$

(Стајнбергова формула [65]) $c^{\nu}_{\lambda\mu} = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_m}\sum_{\tau\in\mathbb{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma) K(\sigma(\lambda+\delta)+\tau(\mu+\delta)-(\nu+2\delta)).$

5.1.3 Теорема засићења и хипотезе за Косткине и Литлвуд–Ричардсонове бројеве

Ово поглавље посвећено је теореми засићења и неким уско повезаним проблемима. Први доказ ове теореме дали су Кнутсон и Тао у раду [31], који су касније Бух и Фултон поједноставили у [12] (Фултон је написао додатак овог рада).

Теорема 99 ([31]). *Нека је, уз ознаке из претходног поглавља,*

$$T_m = \{(\lambda, \mu, \nu) \,:\, V^\nu \subset V^\lambda \otimes V^\mu\}.$$

Тада за свако $N \in \mathbb{N}$ важи

$$(\lambda, \mu, \nu) \in T_m \quad \Longleftrightarrow \quad (N\lambda, N\mu, N\nu) \in T_m.$$

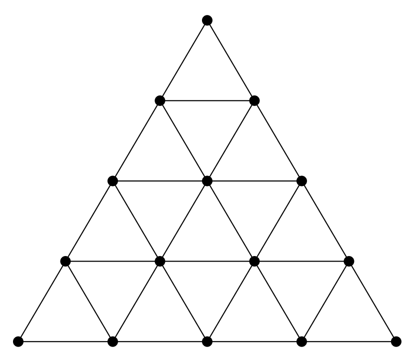
Увидом у формулу (5.1.1), претходна теорема се може записати и као

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c^{N\nu}_{N\lambda,N\mu} \neq 0.$$

Ова реформулација је и коришћена у [31].

Централни део доказа теореме 99 чине нови (комбинаторни) описи Беренштајн-Зелевински политопа (од раније је познато да се овај политоп може користити за одређивање Косткиних и Литлвуд-Ричардсонових бројева – погледати [5, 68]). У [31] аутори су користили два модела, али је у [12] показано да је за доказ теореме засићења довољан само један од њих, назван *модел кошнице*[1], који овде презентујемо.

Посматрајмо једнакостранични троугао странице m који је правама паралелним страницама издељен на m^2 подударних (јединичних) троуглова (погледати слику 7).

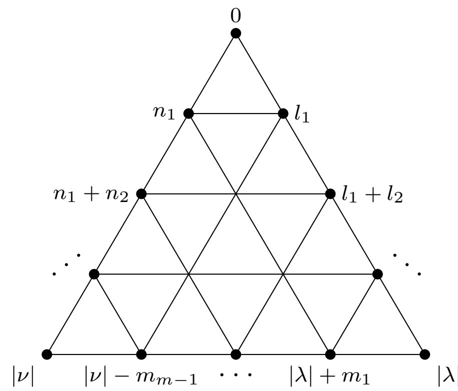


Слика 7. Подела троугла за $m = 4$.

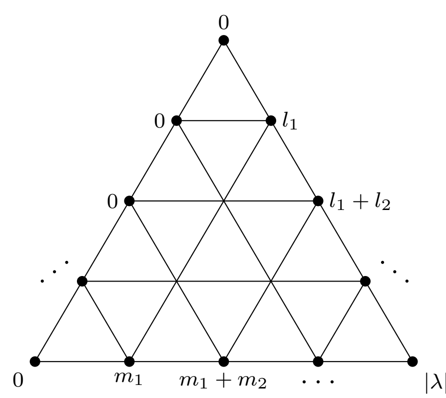
Доделимо сваком темену добијених јединичних троуглова један реалан број. Овакво додељивање чини *кошницу* ако за сваки ромб састављен од два јединична троугла која имају заједничку страницу важи да је збир бројева у теменима краће дијагонале не мањи него збир бројева у теменима дуже дијагонале.

[1]hive model (енг.)

Теорема 100 ([31])**.** *Нека су* $\lambda = (l_1, l_2, \ldots)$, $\mu = (m_1, m_2, \ldots)$ *и* $\nu = (n_1, n_2, \ldots)$ *партиције за које важи* $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$ *и* $l(\lambda), l(\mu), l(\nu) \leqslant m$. *Тада је* $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ *број целобројних кошница чија је граница:*



Теорема 101 ([31])**.** *Нека су* $\lambda = (l_1, l_2, \ldots)$ *и* $\mu = (m_1, m_2, \ldots)$ *партиције за које важи* $|\mu| = |\lambda|$ *и* $l(\lambda), l(\mu) \leqslant m$. *Тада је* $K_{\lambda\mu}$ *број целобројних кошница чија је граница:*



Један од недостатака модела кошнице је што из њега није јасно како $K_{N\lambda,N\mu}$ зависи од $K_{\lambda\mu}$, односно како $c^{N\nu}_{N\lambda,N\mu}$ зависи од $c^{\nu}_{\lambda\mu}$. У вези са тим, у [29] Кинг, Толу и Тумазе дали су следеће хипотезе.

Хипотеза 102. *За све партиције* λ *и* μ, *такве да је* $K_{\lambda\mu} > 0$, *постоји полином* $P_{\lambda\mu}$ *са ненегативним рационалним коефицијентима, такав да је* $P_{\lambda\mu}(0) = 1$ *и* $P_{\lambda\mu}(N) = K_{N\lambda,N\mu}$ *за све* $N \in \mathbb{N}$.

Хипотеза 103. *За све партиције* λ, μ *и* ν, *такве да је* $c^{\nu}_{\lambda\mu} > 0$, *постоји полином* $P^{\nu}_{\lambda\mu}$ *са ненегативним рационалним коефицијентима, такав да је* $P^{\nu}_{\lambda\mu}(0) = 1$ *и* $P^{\nu}_{\lambda\mu}(N) = c^{N\nu}_{N\lambda,N\mu}$ *за све* $N \in \mathbb{N}$.

За обе хипотезе доказано је да је зависност заиста полиномијална и да је одговарајући полином са рационалним коефицијентима. Један доказ ових тврђења дат је у [59], где је конструисан нови политоп који се може користити за одређивање Косткиних и Литлвуд-Ричардсонових бројева. Касније, у [41], одређен је и степен ових полинома коришћењем Гељфанд-Цетлин политопа (опис овог политопа дат је у [24]).

5.2 Формуле за Косткине бројеве

У претходном делу текста описано је неколико начина за одређивање Косткиних бројева. Главни резултат овог поглавља је опис Косткиних бројева (новим) рекурентним једначинама. Напоменимо да је одређивање оваквих једначина предмет многих радова – у [38] комбинаторним методама добијене су рекурентне једначине за Косткине бројеве, док су у [17] и [18] једначине сличног типа добијене за елементе инверзне Косткине матрице.

У наредном делу овог поглавља размотрићемо комплексност израчунавања Косткиних бројева и показати да је проблем њиховог одређивања „тежак".

5.2.1 Комплексност израчунавања Косткиних и квантних Косткиних бројева

Поред многих формула и метода за израчунавање Косткиних бројева, у овом поглављу уверићемо се да нити једна од њих није ефикасна, тј.

да не постоји „лепа” формула нити „брз” алгоритам који их израчунава. Поглавље ћемо започети навођењем неких (стандардних) појмова теорије комплексности.

Под класом $\sharp P$ подразумевамо класу функција $f : \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}^n \to \mathbb{N}_0$ за које постоји Тјурингова машина M која ради у полиномијалном времену и полином p такав да: за све $n \in \mathbb{N}$ и све $x \in \{0,1\}^n$ важи $f(x) = |\{y \in \{0,1\}^{p(n)}$ такав да M прихвата $(x,y)\}|$. За проблем X класе $\sharp P$ кажемо да је $\sharp P$*–потпун* ако, имајући „црну кутију” која решава инстанце проблема X у полиномијалном времену, сваки проблем класе $\sharp P$ можемо решити у полиномијалном времену. Познато је да ако је неки $\sharp P$–потпун проблем решив у полиномијалном времену, тада важи $P = NP$.

У [47] Нарајанан је доказао следећи резултат о комплексности израчунавања Косткиних бројева.

Теорема 104 ([47]). *Проблем израчунавања бројева* $K_{\lambda\mu}$*, чак и када је* $l(\lambda) = 2$*, је* $\sharp P$*–потпун.*

Размотримо сада случај квантних Косткиних бројева. Као што је наведено у глави 3, квантни Косткини бројеви могу се формулом (3.3.3) представити преко (класичних) Косткиних бројева. Приметимо да се све партиције ρ и вредности од $\varepsilon(\rho/\lambda)$ које учествују у овој формули могу израчунати у времену које полиномијално зависи од $\mathbf{size}(\lambda,\mu)$, па је проблем израчунава квантних Косткиних бројева у класи $\sharp P$ (овде је са $\mathbf{size}(\lambda,\mu)$ означен укупан број битова искоришћен у дефиницији партиција λ и μ). Уз то, како је сваки Косткин број уједно и квантни Косткин број, израчунавање квантних Косткиних бројева је $\sharp P$-потпун проблем. Дакле, добили смо следећи резултат.

Последица 105. *Проблем израчунавања бројева* $K^{k,n}_{\lambda\mu}$ *је* $\sharp P$*–потпун.*

На крају овог поглавља размотрићемо резултате тврђења 104 и 105 са становишта главе 3. Размотримо адитивну базу $B_{k,n}$ (слични закључци се могу извести и за адитивне базе $D_{k,n}$ и $Q_{k,n}$ – погледати главу 4). По идентитету (3.2.1) прелаз са адитивне базе $\Sigma_{k,n}$ на адитивну базу $B_{k,n}$ постиже се Косткином матрицом, тако да се може помислити да се рачун у бази $\Sigma_{k,n}$ на овај начин може „пренети” на адитивну базу $B_{k,n}$. Међутим, теорема 104 нам говори да то није могуће, тј. да се посебно мора развити рачун унутар базе $B_{k,n}$, што је и урађено у глави 4.

5.2.2 Рекурентне формуле за Косткине бројеве

У овом поглављу користићемо ознаке из поглавља 4.2 и 4.4, као и главе 3. Уз то, нека је за k-торку $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ ненегативних целих бројева са $\alpha_\to$ означена партиција која садржи a_i компоненти једнаких i, за $1 \leqslant i \leqslant k$. На пример, ако је $\alpha = (3,2,0,3)$, важи $\alpha_\to = (4,4,4,2,2,1,1,1)$. Приметимо да је $|\alpha| = l(\alpha_\to)$ и $\|\alpha\| = |\alpha_\to|$.

По идентитету (3.2.1) у $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$ важи

$$C^\alpha = (-1)^{\|\alpha\|} \sum_{|\lambda|=\|\alpha\|} K_{\lambda\alpha_\to}\, \sigma_{\lambda^*}.$$

Заменом ових идентитета у израз за g_μ, где је μ фиксирана $(k-1)$-торка ненегативних целих бројева и коришћењем чињенице да је $g_\mu = 0$ (у $H^*(G_{k,n}(\mathbb{C});\mathbb{Z})$) добијамо

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\|} (-1)^{n+1+|\alpha|}[\alpha,\mu]C^\alpha \\
&= (-1)^{n+1+\|\mu\|} \sum_{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\|} (-1)^{n+1+|\alpha|}[\alpha,\mu] \sum_{|\lambda|=\|\alpha\|} K_{\lambda\alpha_\to}\, \sigma_{\lambda^*} \\
&= (-1)^{n+1+\|\mu\|} \sum_{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\|} \sum_{|\lambda|=\|\alpha\|} (-1)^{n+1+|\alpha|}[\alpha,\mu] K_{\lambda\alpha_\to}\, \sigma_{\lambda^*} \\
&= (-1)^{\|\mu\|} \sum_{|\lambda|=n+1+\|\mu\|} \left(\sum_{\|\alpha\|=|\lambda|} (-1)^{|\alpha|}[\alpha,\mu] K_{\lambda\alpha_\to} \right) \sigma_{\lambda^*}
\end{aligned}$$

(у овим сумама су са α означене k-торке ненегативних целих бројева, а са λ партиције).

Према томе, посматрањем адитивне базе $\Sigma_{k,n}$, закључујемо да за сваку партицију $\lambda \subseteq n \times k$ такву да је $|\lambda| = n + 1 + \|\mu\|$ важи

$$\sum_{\|\alpha\|=|\lambda|} (-1)^{|\alpha|}[\alpha, \mu]K_{\lambda\alpha_{\rightarrow}} = 0. \tag{5.2.1}$$

За доказ главног резултата овог поглавља биће нам потребне следеће ознаке. За дато $k \in \mathbb{N}$ нека је $\nu = (n_1, n_2, \ldots)$ партиција за коју важи $n_1 \leqslant k$. Дефинишимо $m_i := |\{j : n_j = i\}|$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Приметимо да је тада $\overline{\mu} := (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ јединствена k-торка ненегативних целих бројева за коју важи $\nu = \overline{\mu}_{\rightarrow}$. Такође, за $(k-1)$-торку $\mu := (m_2, \ldots, m_k)$ важи

$$\|\mu\| = \|\overline{\mu}\| - |\overline{\mu}| = |\overline{\mu}_{\rightarrow}| - l(\overline{\mu}_{\rightarrow}) = |\nu| - l(\nu).$$

Приметимо да ако је $n := l(\nu)-1$, тада је $m_1 = |\overline{\mu}|-|\mu| = l(\nu)-|\mu| = n+1-|\mu|$, па важи $\overline{\mu} = (n + 1 - |\mu|, m_2, \ldots, m_k)$. Коначно, нека је

$$\nu_{\leftarrow} = \nu_{\leftarrow}^{(k)} := \mu.$$

Теорема 106. *Нека су $\lambda = (l_1, l_2, \ldots)$ и $\nu = (n_1, n_2, \ldots)$ партиције за које важи $|\lambda| = |\nu|$. Тада важе следеће релације:*

(i) *ако је $\lambda = \nu = \emptyset$, тада је $K_{\lambda\nu} = 1$;*

(ii) *ако је $l(\lambda) < l(\nu)$ и $l_1 \geqslant n_1$, тада важи*

$$K_{\lambda\nu} = \sum_{\substack{\|\alpha\|=|\lambda| \\ \alpha_{\rightarrow}\neq\nu}} (-1)^{1+l(\nu)+|\alpha|}[\alpha, \nu_{\leftarrow}]K_{\lambda\alpha_{\rightarrow}},$$

где је $\nu_{\leftarrow} = \nu_{\leftarrow}^{(l_1)}$, а сумирање се врши по свим l_1-торкама α ненегативних целих бројева које задовољавају наведене услове;

(iii) *ако је $l(\lambda) = l(\nu) = s > 0$, тада је $K_{\lambda\nu} = K_{(l_1-1,\ldots,l_s-1)\,(n_1-1,\ldots,n_s-1)}$;*

(iv) ако је $l(\lambda) > l(\nu)$ или $l_1 < n_1$, тада је $K_{\lambda\nu} = 0$.

Доказ. Приметимо да ако је $l(\lambda) > l(\nu)$ или $l_1 < n_1$, тада важи $\lambda \not\geq \nu$, а самим тим и $K_{\lambda\nu} = 0$, чиме је доказан део *(iv)*.

Нека је $l(\lambda) = l(\nu) = s > 0$. Посматрајмо полустандардан Јангов табло облика λ и тежине ν. Прва колона овог таблоа садржи s различитих бројева, па како је $l(\nu) = s$, може се попунити на јединствен начин (бројевима од 1 до s). Такође, брисањем прве колоне овог таблоа добијамо Јангов табло облика $(l_1 - 1, \ldots, l_s - 1)$ и типа $(n_1 - 1, \ldots, n_s - 1)$, чиме је доказан и део *(iii)* теореме.

Дакле, довољно је још размотрити случај $l(\lambda) < l(\nu)$ и $l_1 \geqslant n_1$. Нека је $k := l_1$ и $n := l(\nu) - 1$. Тада је $\lambda \subseteq n \times k$ (јер је $l_1 = k$ и $l(\lambda) \leqslant l(\nu) - 1 = n$) и важи $|\lambda| = |\nu| = l(\nu) + \|\nu_{\leftarrow}\| = n + 1 + \|\nu_{\leftarrow}\|$. Самим тим, по идентитету (5.2.1) имамо

$$\sum_{\|\alpha\|=|\lambda|} (-1)^{|\alpha|}[\alpha, \nu_{\leftarrow}]K_{\lambda\alpha_{\rightarrow}} = 0. \tag{5.2.2}$$

Ако је $\mu = \nu_{\leftarrow} = (m_2, \ldots, m_k)$, тада за k-торку $\overline{\mu} = (n + 1 - |\mu|, m_2, \ldots, m_k)$ важи $\overline{\mu}_{\rightarrow} = \nu$ и $\|\overline{\mu}\| = |\overline{\mu}_{\rightarrow}| = |\nu| = |\lambda|$. Дакле,

$$(-1)^{|\overline{\mu}|}[\overline{\mu}, \nu_{\leftarrow}]K_{\lambda\nu}$$

је сабирак у претходној суми. Како је $|\overline{\mu}| = l(\nu)$, а по тврђењу 81 $[\overline{\mu}, \nu_{\leftarrow}] = [\overline{\mu}, \mu] = 1$, идентитет у делу *(ii)* следи из (5.2.2). $\square$

Напомена 107. У једнакости у делу *(ii)* претходне теореме, ако је коефицијент $[\alpha, \nu_{\leftarrow}]$ на десној страни различит од нуле, тада је $\alpha_{\rightarrow} \neq \nu$, тј. $\alpha \neq \overline{\mu} = \overline{\nu_{\leftarrow}}$ и $\|\alpha\| = |\lambda| = n + 1 + \|\nu_{\leftarrow}\|$ (погледати доказ теореме). По тврђењу 81 закључујемо да је $l(\alpha_{\rightarrow}) = |\alpha| < n + 1 = l(\nu)$.

Напомена 108. Теорема 106 даје нам рекурентну формулу којом се могу израчунати сви Косткини бројеви. Да бисмо ово доказали уведимо релацију $<_s$ на скупу (свих) партиција на следећи начин:

$$\nu' <_s \nu'' \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad l(\nu') < l(\nu'') \quad \text{или је} \quad l(\nu') = l(\nu'') \text{ и } |\nu'| < |\nu''|.$$

Приметимо да је ова релација транзитивна и да за партицију ν не може постојати бесконачан низ $\{\nu_{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ партиција за које важи $\nu >_s \nu_{(1)} >_s \cdots >_s \nu_{(k)} >_s \cdots$.

Сада, ако λ и ν задовољавају услов из дела *(ii)* теореме 106, $K_{\lambda\nu}$ је према претходној напомени линеарна комбинација Косткиних бројева $K_{\lambda\nu'}$ таквих да је $\nu' <_s \nu$, а ако λ и ν задовољавају услов из дела *(iii)* теореме 106, јасно је да важи $(n_1-1,\ldots,n_s-1) <_s \nu$. Дакле, Косткин број $K_{\lambda\nu}$ једнак је 0 или 1, или се може изразити као функција Косткиних бројева $K_{\lambda'\nu'}$ таквих да је $\nu' <_s \nu$, чиме је доказ тврдње са почетка напомене завршен.

5.2.3 Рекурентне формуле за квантне Косткине бројеве

Уз ознаке из претходног поглавља, формулу (3.3.2) можемо написати на следећи начин: ако је α k-торка ненегативних целих бројева, тада је

$$C^\alpha = (-1)^{\|\alpha\|} \sum_{m\geqslant 0} \sum_{|\lambda|=\|\alpha\|-m(n+k)} q^m K^{k,n}_{\lambda\,\alpha_\to}\, \sigma_{\lambda^*}.$$

Заменом ових једнакости у g_μ, где је μ фиксирана $(k-1)$-торка ненегативних целих бројева, уз чињеницу да за произвољну k-торку ненегативних целих бројева β важи $C^\beta \cdot \mathrm{g}_\mu = 0$ (у $QH^*(G_{k,n};\mathbb{Z})$), имамо

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\|} (-1)^{n+1+|\alpha|}[\alpha,\mu]C^{\alpha+\beta} + q \sum_{\|\alpha\|=-k+1+\|\mu\|} (-1)^{n-k+1+|\alpha|}[\alpha,\mu]C^{\alpha+\beta} \\
&= \sum_{\substack{m\geqslant 0\\ \|\alpha\|=n+1+\|\mu\|}} \sum_{\substack{|\lambda|=\|\mu\|+\|\beta\|\\ +n+1-m(n+k)}} (-1)^{n+1+|\alpha|+\|\alpha\|+\|\beta\|}[\alpha,\mu]q^m K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_\to}\, \sigma_{\lambda^*}
\end{aligned}$$

$$+\, q \sum_{\substack{m\geqslant 0\\ \|\alpha\|=-k+1+\|\mu\|}} \sum_{\substack{|\lambda|=\|\mu\|+\|\beta\|\\ -k+1-m(n+k)}} (-1)^{n-k+1+|\alpha|+\|\alpha\|+\|\beta\|}[\alpha,\mu] q^m K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_\to}\,\sigma_{\lambda^*}$$

$$= (-1)^{\|\mu\|+\|\beta\|} \sum_{|\lambda|=\|\mu\|+\|\beta\|+n+1} \left(\sum_{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\|} (-1)^{|\alpha|}[\alpha,\mu] K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_\to} \right) \sigma_{\lambda^*}$$

$$+\, (-1)^{\|\mu\|+\|\beta\|} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ |\lambda|=\|\mu\|+\|\beta\|+n+1-m(n+k)}} q^m \left(\sum_{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\|} (-1)^{|\alpha|}[\alpha,\mu] K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_\to} \right) \sigma_{\lambda^*}$$

$$+\, (-1)^{\|\mu\|+\|\beta\|} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ |\lambda|=\|\mu\|+\|\beta\|+n+1-m(n+k)}} q^m \left(\sum_{\|\alpha\|=-k+1+\|\mu\|} (-1)^{n+|\alpha|}[\alpha,\mu] K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_\to} \right) \sigma_{\lambda^*}$$

(у овим сумама су са α означене k-торке ненегативних целих бројева, а са $\lambda \subseteq n \times k$ партиције).

Према томе, посматрањем адитивне базе $\mathfrak{S}_{k,n}$, закључујемо да за сваку партицију λ такву да је $l_1 \leqslant k$, $l(\lambda) \leqslant n$ и $|\lambda| = \|\mu\| + \|\beta\| + n + 1 - m(k+n)$, за неко $m \geqslant 0$, важи

$$m = 0: \quad 0 = \sum_{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\|} (-1)^{|\alpha|}[\alpha,\mu] K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_\to}, \tag{5.2.3}$$

$$\begin{aligned} m \geqslant 1: \quad 0 = &\sum_{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\|} (-1)^{|\alpha|}[\alpha,\mu] K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_\to} \\ &+ \sum_{\|\alpha\|=-k+1+\|\mu\|} (-1)^{n+|\alpha|}[\alpha,\mu] K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_\to}. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Доказаћемо да ови идентитети дају рекурентне формуле којим се могу добити сви квантни Косткини бројеви.

Приметимо да за $m = 0$ и $\beta = 0$ важи $K^{k,n}_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu}$, па је идентитет (5.2.3) ништа друго него идентитет (5.2.1). Такође, по напомени 71, ако је $l(\mu) \leqslant n$, тада важи $K^{k,n}_{\lambda\mu} = 0$ за све λ такве да је $|\lambda| \neq |\mu|$. Дакле, довољно је одредити формуле за квантне Косткине бројеве $K^{k,n}_{\lambda\mu}$ такве да је $|\mu| \neq |\lambda|$ и $l(\mu) > n$.

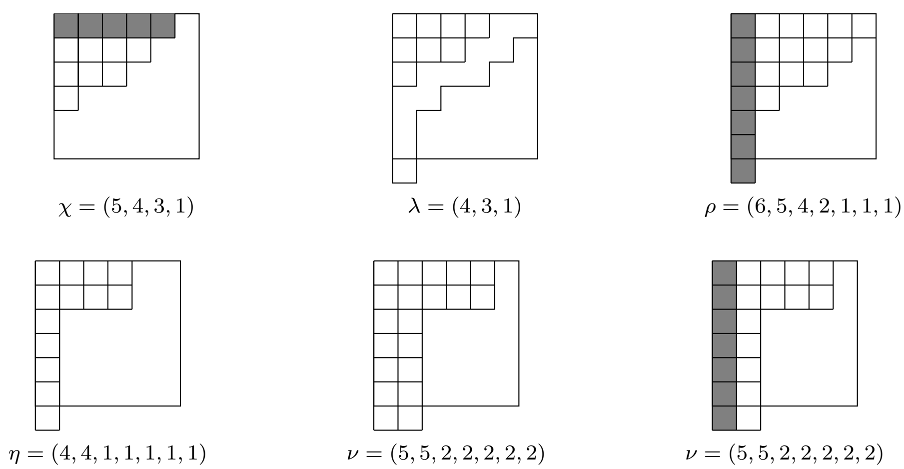
Нека је $K^{k,n}_{\lambda\nu}$ квантни Косткин број, при чему је $|\nu| = |\lambda| + m(n+k)$, за неко $m \geqslant 1$, и $l(\nu) > n$. Покажимо да се идентитет (5.2.4) може користити за добијање оваквих бројева. Прво, постоји јединствена k-торка γ ненегативних целих бројева таква да је $\gamma_{\to} = \nu$. Приметимо да γ задовољава $|\gamma| > n$, па постоје k-торке τ и β ненегативних целих бројева такве да је $\tau+\beta = \gamma$ и $|\tau| = n+1$. Даље, ако је $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, нека је $\mu := (t_2, \dots, t_k)$. Приметимо да је $\|\tau\| = |\tau| + \|\mu\| = n+1+\|\mu\|$. Тада по идентитету (5.2.4) и тврђењу 81 важи

$$K^{k,n}_{\lambda\,\nu} = \sum_{\substack{\|\alpha\|=n+1+\|\mu\| \\ (\alpha+\beta)_{\to}\neq\mu}} (-1)^{n+|\alpha|}[\alpha,\mu]K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_{\to}} + \sum_{\|\alpha\|=-k+1+\|\mu\|} (-1)^{|\alpha|}[\alpha,\mu]K^{k,n}_{\lambda\,(\alpha+\beta)_{\to}}. \tag{5.2.5}$$

По тврђењу 81, за свако α које се појављује у суми на десној страни претходног идентитета важи $|\alpha| \leqslant n$. Самим тим, по идентитету (5.2.5) квантни Косткин број $K^{k,n}_{\lambda\,\nu}$ је линеарна комбинација квантних Косткиних бројева $K^{k,n}_{\lambda\,\nu'}$ таквих да је $l(\nu') < l(\nu)$, што доказује тврдњу са почетка овог пасуса.

Упоредимо идентитете (3.3.3) и (5.2.5) (за $K^{k,n}_{\lambda\,\nu}$). Приметимо да у (3.3.3) сви сабирци имају исто ν, док у (5.2.5) сви сабирци имају исто λ. Ова „дуалност”, искоришћена за $m = 1$ и погодно одабране k и n, даће нам нове рекурентне формуле за (класичне) Косткине бројеве.

Нека је $K_{\chi\eta}$ Косткин број који желимо да одредимо (χ и η су партиције за које важи $|\chi| = |\eta|$). Како за $l(\chi) > l(\eta)$ важи $K_{\chi\eta} = 0$, можемо претпоставити да је $l(\chi) \leqslant l(\eta)$. Нека је $\chi = (h_1, h_2, \dots, h_{s+1})$, $\eta = (e_1, e_2, \dots, e_l)$, $k := h_1 + 1$ и $n := l(\eta) - 1$ (погледати слику 8). Даље, нека је λ партиција добијена од χ брисањем њене прве врсте, тј. $\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_s)$, где је $l_i := h_{i+1}$, за $1 \leqslant i \leqslant s$, и $\nu := (e_1+1, e_2+1, \dots, e_{n+1}+1)$ ($l(\eta) = n+1$). Тада је $|\lambda| = |\nu| - (n+k)$, $l_1 < k$ и $l(\lambda) \leqslant n$, па је $K^{k,n}_{\lambda\,\nu}$ добро дефинисан и можемо применити формулу (3.3.3). По овој формули $K^{k,n}_{\lambda\,\nu}$ је сума бројева $\pm K_{\tau\,\nu}$, где је $\tau = (t_1, t_2, \dots)$ партиција добијена од λ додавањем $(k+n)$-рама у облику куке. Приметимо да за $t_1 < k$ важи $l(\tau) > n+1 = l(\nu)$, па и $K_{\tau\nu} = 0$. Самим тим, $K^{k,n}_{\lambda\nu} = K_{\rho\nu}$, где је $\rho = (r_1, r_2, \ldots, r_{n+1})$ јединствена партиција за коју важи $r_1 = k$ и која је добијена од партиције λ додавањем $(k+n)$-рама у облику куке (алтернативно, ова једнакост се може добити из комбинаторног описа квантних Косткиних бројева). Уз то, како је $l(\rho) = l(\nu)$, из дела (iii) теореме 106 имамо $K_{\chi\eta} = K^{k,n}_{\lambda\nu}$.



Слика 8. Помоћне партиције које добијамо приликом израчунавања $K_{\chi\eta}$, за $\chi = (5,4,3,1)$ и $\eta = (4,4,1,1,1,1,1)$.

Посматрајмо идентитет (5.2.5) за $K^{k,n}_{\lambda\nu}$. Прва сума у овом идентитету је линеарна комбинација елемената $K^{k,n}_{\lambda\nu'}$ таквих да је $l(\nu') < l(\nu) = n+1$ и $|\nu'| = |\nu| > |\lambda|$, који су, по напомени 71, сви једнаки нули. Како су сви квантни Косткини бројеви који се појављују у другој суми у ствари (класични) Косткини бројеви и $\beta = (0, \ldots, 0)$, добијамо следећи идентитет

$$K_{\chi\eta} = \sum_{\|\alpha\| = \|\mu\| - k + 1} (-1)^{|\alpha|} [\alpha, \mu] K_{\lambda\,\alpha_\rightarrow}. \tag{5.2.6}$$

Имајући у виду овај резултат уводимо следеће ознаке. За партицију $\chi = (h_1, h_2, \ldots)$ нека је χ^- партиција добијена од χ брисањем прве врсте. Даље, за партицију $\eta = (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ нека је $\eta^+_\leftarrow = (\eta^+)^{(k)}_\leftarrow$, где је $\eta^+ = (e_1+1, e_2+1, \ldots, e_{n+1}+1)$, а $k = h_1+1$ (приметимо да можемо претпоставити да је $e_1+1 \leqslant h_1+1 = k$, јер је у супротном $K_{\chi\,\eta} = 0$). Како су сви (ненула) делови партиције η^+ већи од 1, важи $|\eta^+_{\leftarrow}| = l(\eta') = l(\eta)$. Такође, имамо и

$$\|\eta^+_{\leftarrow}\| = |\eta^+| - l(\eta^+) = |\eta| = |\chi|.$$

Теорема 109. *За партиције $\chi = (h_1, h_2, \ldots)$ и η такве да је $|\chi| = |\eta|$ и $\chi \geq \eta$, важи следећи идентитет*

$$K_{\chi\,\eta} = \sum_{\|\alpha\| = |\chi| - h_1} (-1)^{|\alpha|} [\alpha, \eta^+_{\leftarrow}] K_{\chi^-\,\alpha_{\rightarrow}},$$

при чему се сумирање врши по свим (h_1+1)-торкама α ненегативних целих бројева које задовољавају $\|\alpha\| = |\chi| - h_1$. □

Ово поглавље завршавамо са два примера.

Пример 110. Приметимо да је по теореми 104 израчунавање $K_{\chi\,\eta}$ тешко чак и када је $l(\chi) = 2$. Применимо теорему 109 у овом случају, тј. за $\chi = (h_1, h_2)$. Како је сваки $K_{\chi^-\,\alpha_{\rightarrow}}$ који се појављује у суми једнак 1 важи

$$K_{\chi\,\eta} = \sum_{\|\alpha\| = h_2} (-1)^{|\alpha|} [\alpha, \eta^+_{\leftarrow}],$$

при чему се сумирање врши по свим (h_1+1)-торкама α ненегативних целих бројева.

Пример 111. Нека је $\chi = (a+1, 1^b)$, тј. χ је тзв. *дијаграм у облику куке.* Како је $\chi^- = (1^b)$, важи $K_{\chi^-\,\alpha_{\rightarrow}} \neq 0$ ако и само ако је $\alpha_{\rightarrow} = (1^b)$, тј. ако је $\alpha = (b, 0, \ldots, 0)$. Самим тим, уз ознаку $\mathbf{b} = (b, 0, \ldots, 0)$, важи

$$K_{\chi\,\eta} = (-1)^b [\mathbf{b}, \eta^+_{\leftarrow}] = (-1)^b \binom{b - |\eta^+_{\leftarrow}|}{b} = (-1)^b \binom{b - l(\eta)}{b} = \binom{l(\eta) - 1}{b}.$$

ГЛАВА 6

ГРЕБНЕРОВЕ БАЗЕ ЗА РЕАЛНЕ МНОГОСТРУКОСТИ ЗАСТАВА ОБЛИКА $F(1,\dots,1,2,\dots,2,k,n)$

Централни резултат ове главе је конструкција редуковане Гребнерове базе за идеал I који по (2.2.2) дефинише $\mathbb{Z}_2$-кохомологију реалне многострукости застава $F(1,\dots,1,2,\dots,2,k,n)$. Овим резултатом уопштени су одговарајући резултати из [49, 50], у којима су добијене Гребнерове базе за случај реалних многострукости застава $F(1,\dots,1,n)$ и $F(1,2,n)$.

Коришћењем добијене Гребнерове базе, у поглављу 6.3 биће доказане нове теореме о непостојању утапања и имерзија одређених многострукости овог типа, док ће у одељку 6.4.2 за неке многострукости овог типа бити срачуната кохомолошка дужина.

Током ове главе, ради једноставности, реалну многострукост застава $F(1,\dots,1,2,\dots,2,k,n)$ код које се јединица појављује j пута, а двојка d пута, означаваћемо са $F(1^{\cdots j},2^{\cdots d},k,n)$ (ознака је преузета из [33]).

Сва тврђења дата у овој глави, а за које извор није наведен, изложена су, уз незнатне измене, у [57] и [58].

6.1 Опис $\mathbb{Z}_2$-кохомологије реалних многострукости застава $F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n)$

У овом кратком одељку општи Борелов резултат из теореме 46 прецизније ћемо описати за реалну многострукост застава $F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n)$. Задржаћемо ознаке из главе 4.

Нека је $j, d \in \mathbb{N}_0$ и $\min\{2, d+1\} \leqslant k \leqslant n$. По Бореловом опису алгебра $H^*(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$ изоморфна је количничкој алгебри

$$\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_j, y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{d,1}, y_{d,2}, w_1, w_2, \dots, w_k]/I_{j,d,k,n}.$$

У овом опису су ($F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n)$ је једноставно означено са F):

- $x_i \in H^1(F; \mathbb{Z}_2)$, за $1 \leqslant i \leqslant j$, Штифел-Витнијеве класе таутолошких линијских раслојења над F;
- $y_{i,l} \in H^l(F; \mathbb{Z}_2)$, за $1 \leqslant i \leqslant d$ и $l \in \{1, 2\}$, Штифел-Витнијеве класе таутолошких дводимензионих векторских раслојења над F;
- $w_l \in H^l(F; \mathbb{Z}_2)$, за $1 \leqslant l \leqslant k$, Штифел-Витнијеве класе таутолошког векторског раслојења димензије k над F;
- $I_{j,d,k,n}$ идеал алгебре $\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_j, y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{d,1}, y_{d,2}, w_1, \dots, w_k]$ генерисан дуалним класама z_{n+1}, $z_{n+2}, \dots,$ $z_{n+j+2d+k}$.

За ове дуалне класе важе следеће једнакости

$$1 + z_1 + z_2 + \cdots = (1 + w_1 + \cdots + w_k)^{-1} \prod_{i=1}^{j} (1 + x_i)^{-1} \prod_{i=1}^{d} (1 + y_{i,1} + y_{i,2})^{-1},$$

из којих добијамо

$$z_s = \sum_{l_1+\cdots+l_j+r_1+\cdots+r_d+t=s} \overline{x}_{1,l_1} \cdots \overline{x}_{j,l_j} \overline{y}_{1,r_1} \cdots \overline{y}_{d,r_d} \overline{w}_t, \tag{6.1.1}$$

при чему се сумирање врши по свим $(j{+}d{+}1)$-торкама ненегативних целих бројева $(l_1, \dots, l_j, r_1, \dots, r_d, t)$ за које важи $l_1 + \cdots + l_j + r_1 + \cdots + r_d + t = s$.

Такође, за $l, r, t \in \mathbb{N}_0$, је

$$\begin{aligned} \overline{x}_{i,l} =& x_i^l,\ 1 \leqslant i \leqslant j, \\ \overline{y}_{i,r} =& \sum_{a+2b=r} \binom{a+b}{a} y_{i,1}^a y_{i,2}^b,\ 1 \leqslant i \leqslant d, \\ \overline{w}_t =& \sum_{\|\alpha\|=t} [a_1, a_2, \dots, a_k] W^\alpha, \end{aligned}$$

при чему је прва сума по свим паровима (a, b) ненегативних целих бројева таквим да је $a + 2b = r$, а друга по свим k-торкама $\alpha = (a_1, a_2 \dots, a_k)$ ненегативних целих бројева таквим да је $\|\alpha\| = t$.

Напомена 112. За непарно r степен од $y_{i,1}$ у сваком моному у $\overline{y}_{i,r}$ је позитиван. Са друге стране, за парно r моном за $b = r/2$ (у претходној суми) је $y_{i,2}^{r/2}$, а степен од $y_{i,1}$ у сваком од преосталих монома у $\overline{y}_{i,r}$ је позитиван.

Нека је са $h_p(x_1, \dots, x_j)$ означен комплетан симетрични полином степена p променљивих $x_1, \dots, x_j$ ($h_{-1}(x_1, \dots, x_j) = 0$). Уз ове ознаке, идентитет (6.1.1) можемо записати у следећем облику

$$z_s = \sum_{l+r_1+\cdots+r_d+t=s} h_l(x_1, \dots, x_j) \overline{y}_{1,r_1} \cdots \overline{y}_{d,r_d} \overline{w}_t, \tag{6.1.2}$$

где се сумирање врши по свим $(d+2)$-торкама $(l, r_1, \dots, r_d, t)$ ненегативних целих бројева таквим да је $l + r_1 + \cdots + r_d + t = s$.

6.2 Гребнерова база идеала $I_{j,d,k,n}$

У овом поглављу задржаћемо ознаке из претходног и све једнакости важиће по модулу 2.

За $1 \leqslant m \leqslant d$, $-2 \leqslant N \leqslant n + j + 2m - 2$ и $r \geqslant 0$, нека је

$$g_{m,r}^{(N)} = \sum_{a+2b=N+1+r} \binom{a+b-r}{a} y_{m,1}^a y_{m,2}^b, \tag{6.2.1}$$

при чему се сумирање врши по свим паровима $(a, b) \in \mathbb{N}_0^2$ таквим да је $a + 2b = N + 1 + r$.

На пример

$$g_{2,2}^{(3)} = \sum_{a+2b=6} \binom{a+b-2}{a} y_{2,1}^a y_{2,2}^b = y_{2,1}^2 y_{2,2}^2 + y_{2,2}^3.$$

Напомена 113. Приметимо да полином $g_{m,r}^{(N)}$ одговара (мод 2 варијанти) полинома $\mathfrak{g}_{(r)}^{(N)}$ дефинисаном у глави 4 (за $k = 2$).

Нека је $\rho = (r_1, \ldots, r_d)$ једна d-торка целих бројева. Тада, за $1 \leqslant m \leqslant d$, са $\rho^{(m)}$ означавамо $(d-m+1)$-торку $(r_m, \ldots, r_d)$. Уколико важи и $r_m \geqslant -1$, а $r_i \geqslant 0$, за $m+1 \leqslant i \leqslant d$, уводимо и следеће ознаке:

- $\rho(m) = \displaystyle\sum_{i=m}^{d} r_i$;
- $\overline{Y}^{\rho_{m+1}} = \overline{y}_{m+1, r_{m+1}} \cdots \overline{y}_{d, r_d}$.

Коначно, ако је $r_i \geqslant 0$, за $1 \leqslant i \leqslant d$, тада је $\overline{Y}^{\rho_1} = \overline{y}_{1,r_1} \cdots \overline{y}_{d,r_d}$.

Мономијални поредак $\preccurlyeq$ на $\mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_j, y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}]$ дефинисан је на следећи начин. Моному

$$t = x_1^{n_1} \cdots x_j^{n_j} y_{1,1}^{n_{1,1}} y_{1,2}^{n_{1,2}} \cdots y_{d,1}^{n_{d,1}} y_{d,2}^{n_{d,2}} w_1^{N_1} \cdots w_k^{N_k},$$

доделимо вектор $D(t) = (n_1, \ldots, n_j, n_{j+1}, n_{1,1}, \ldots, n_{j+d}, n_{d,1}, n_{j+d+1}, N_1, \ldots, N_k)$, где је $n_{j+r} = n_{r,1} + n_{r,2}$, за $1 \leqslant r \leqslant d$, а $n_{j+d+1} = N_1 + N_2 + \cdots + N_k$. Тада је

$$t \preccurlyeq t' \text{ ако и само ако је } D(t) \preccurlyeq_{lex} D(t'),$$

где је $\preccurlyeq_{lex}$ стандардни лексикографски поредак.

Спремни смо да дефинишемо скуп $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ за који ћемо доказати да чини редуковану Гребнерову базу идеала $I_{j,d,k,n}$ у односу на мономијални поредак $\preccurlyeq$.

Нека је $G_1 = \{g_m : 1 \leqslant m \leqslant j\}$, где је

$$g_m = \sum_{l+\rho(1)+t=n+m} h_l(x_m, \ldots, x_j)\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t,$$

а сумирање се врши по свим d-торкама $\rho = (r_1, \ldots, r_d)$ ненегативних целих бројева и $l, t \in \mathbb{N}_0$ таквим да је $l + \rho(1) + t = n + m$.

Нека је $G_2 = \{g_{m,r} : 1 \leqslant m \leqslant d,\ 0 \leqslant r \leqslant n + j + 2m - 1\}$, где је

$$g_{m,r} = \sum_{\rho(m)+t=n+j+2m-1} g_{m,r}^{(r_m-1)}\overline{Y}^{\rho_{m+1}}\overline{w}_t,$$

а сумирање се врши по свим $t \in \mathbb{N}_0$ и $(d-m+1)$-торкама $\rho^{(m)} = (r_m, \ldots, r_d)$ таквим да је $r_m \geqslant -1$, а $r_i \geqslant 0$, за $m+1 \leqslant i \leqslant d$, и важи $\rho(m)+t = n+j+2m-1$.

Нека је $G_3 = \{g_\mu : |\mu| \leqslant n + j + 2d + 1\}$, где је (као у глави 4), за $(k-1)$-торку μ ненегативних целих бројева,

$$g_\mu = \sum_{\|\alpha\|=n+j+2d+1+\|\mu\|} [\alpha, \mu]W^\alpha,$$

а сумирање се врши по свим k-торкама $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ ненегативних целих бројева таквим да је $\|\alpha\| = n + j + 2d + 1 + \|\mu\|$.

Приметимо да је за $d = 0$ и $k = 1$, G Гребнерова база добијана у [49]; за $j = d = 0$, G Гребнерова база добијена у глави 4; за $j = 1$, $d = 0$ и $k = 2$, G Гребнерова база добијена у [50].

Конструкција Гребнерове базе у општем случају, тј. за идеал $I_{j,d,k,n}$, ослања се на претходне резултате. Наиме, имајући на уму ове резултате, у наставку ћемо постепено конструисати нове генераторске скупове за идеал $I_{j,d,k,n}$, замењујући неке полиноме „тренутног” генераторског скупа полиномима у којима учествује мањи број променљивих.

Прво ћемо доказати да је $G_1 \cup \{z'_{n+j+1}, z'_{n+j+2}, \ldots, z'_{n+j+2d+k}\}$ генератриса идеала $I_{j,d,k,n}$, где је

$$z'_{n+j+m} = \sum_{\rho(1)+t=n+j+m} \overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t,\ 1 \leqslant m \leqslant 2d + k,$$

а сумирање се врши по свим d-торкама ненегативних целих бројева $\rho = (r_1, \ldots, r_d)$ и $t \in \mathbb{N}_0$, таквим да важи $\rho(1) + t = n + j + m$.

Да бисмо ово урадили, уводимо следеће полиноме

$$z_{n+m,i} = \sum_{l+\rho(1)+t=n+m} h_l(x_i, \ldots, x_j)\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t,\ 1 \leqslant m \leqslant j+2d+k,\ 1 \leqslant i \leqslant j,$$

где се сумирање врши по свим d-торкама $\rho = (r_1, \ldots, r_d)$ ненегативних целих бројева и $l, t \in \mathbb{N}_0$, таквим да важи $l + \rho(1) + t = n + m$.

По (6.1.2), за $1 \leqslant m \leqslant j + 2d + k$ важи $z_{n+m} = z_{n+m,1}$. Такође, по дефиницији, за $1 \leqslant m \leqslant j$ важи $g_m = z_{n+m,m}$.

Приметимо да за $l \geqslant -1$ и $1 \leqslant i \leqslant j-1$ важи

$$h_{l+1}(x_{i+1}, \ldots, x_j) = h_{l+1}(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j) - x_i h_l(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j),$$

па за $1 \leqslant m \leqslant j + 2d + k - 1$ и $1 \leqslant i \leqslant j - 1$, због $h_{-1}(x_i, \ldots, x_j) = 0$, важи

$$\begin{aligned} z_{n+m+1,i+1} &= \sum_{l+\rho(1)+t=n+m+1} h_l(x_{i+1}, \ldots, x_j)\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t \\ &= \sum_{l+\rho(1)+t=n+m+1} \left(h_l(x_i, \ldots, x_j) - x_i h_{l-1}(x_i, \ldots, x_j)\right)\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t \\ &= z_{n+m+1,i} + x_i \sum_{l-1+\rho(1)+t=n+m} h_{l-1}(x_i, \ldots, x_j)\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t \\ &= z_{n+m+1,i} + x_i z_{n+m,i}. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Такође, за $j \leqslant m \leqslant j + 2d + k - 1$ имамо

$$\begin{aligned} z_{n+m+1,j} - x_j z_{n+m,j} &= \sum_{l+\rho(1)+t=n+m+1} x_j^l\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t - x_j \sum_{l+\rho(1)+t=n+m} x_j^l\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t \\ &= \sum_{l+\rho(1)+t=n+m+1} x_j^l\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t - \sum_{\substack{l+\rho(1)+t=n+m+1 \\ l\geqslant 1}} x_j^l\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t \\ &= z'_{n+m+1}, \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Коришћењем идентитета (6.2.2) и (6.2.3) за генераторе који су у наредним једнакостима уоквирени добијамо

$$
\begin{aligned}
I_{j,d,k,n} &= \left\langle z_{n+1,1}, z_{n+2,1}, \ldots, z_{n+j+2d-2,1}, \boxed{z_{n+j+2d+k-1,1}}, \boxed{z_{n+j+2d+k,1}} \right\rangle \\
&= \left\langle z_{n+1,1}, z_{n+2,1}, \ldots, \boxed{z_{n+j+2d+k-2,1}}, \boxed{z_{n+j+2d+k-1,1}}, z_{n+j+2d+k,2} \right\rangle \\
&\quad \ldots \\
&= \left\langle g_1, z_{n+2,2}, \ldots, z_{n+j+2d+k-2,2}, \boxed{z_{n+j+2d+k-1,2}}, \boxed{z_{n+j+2d+k,2}} \right\rangle \\
&= \left\langle g_1, z_{n+2,2}, \ldots, \boxed{z_{n+j+2d+k-2,2}}, \boxed{z_{n+j+2d+k-1,2}}, z_{n+j+2d+k,3} \right\rangle \\
&\quad \ldots \\
&= \left\langle g_1, \ldots, g_{j-1}, z_{n+j,j}, \ldots, z_{n+j+2d+k-2,j}, \boxed{z_{n+j+2d+k-1,j}}, \boxed{z_{n+j+2d+k,j}} \right\rangle \\
&= \left\langle g_1, \ldots, g_{j-1}, z_{n+j,j}, \ldots, \boxed{z_{n+j+2d+k-2,j}}, \boxed{z_{n+j+2d+k-1,j}}, z'_{n+j+2d+k} \right\rangle \\
&\quad \ldots \\
&= \langle g_1, \ldots, g_j, z'_{n+j+1}, \ldots, z'_{n+j+2d+k} \rangle.
\end{aligned} \tag{6.2.4}
$$

За наставак доказа неопходна нам је следећа лема која је, у нешто слабијој форми, доказана у [51].

Лема 114. *За* $1 \leqslant m \leqslant d$, $-2 \leqslant N \leqslant n+j+2m-2$, $r \geqslant 0$ *и* $s \geqslant 1$ *важе следећи идентитети:*

а) $\mathrm{LT}(g^{(N)}_{m,r}) = y^{N+1-r}_{m,1} y^{r}_{m,2}$ *за* $0 \leqslant r \leqslant N+1$*;*

б) $\overline{y}_{m,r+2} = y_{m,1}\overline{y}_{m,r+1} + y_{m,2}\overline{y}_{m,r}$*;*

в) $g^{(N)}_{m,r+2} = y_{m,1} g^{(N)}_{m,r+1} + y_{m,2} g^{(N)}_{m,r}$*;*

г) $y^{s}_{m,2} g^{(N)}_{m,r} + y^{s}_{m,1} g^{(N)}_{m,r+s} = \sum_{i=0}^{s-1} y^{i}_{m,1} y^{s-1-i}_{m,2} g^{(N)}_{m,r+2+i}$.

д) $g^{(N)}_{m,N+2} = 0$ *и* $g^{(N)}_{m,r} = g^{(r-2)}_{m,N+2}$ *за* $r \geqslant N+3$.

Доказ. а) По (4.1.2), ако је $b < r$ и $a + b \geqslant r$ важи $\binom{a+b-r}{a} = 0$, па за сваки (ненула) моном у

$$g_{m,r}^{(N)} = \sum_{a+2b=N+1+r} \binom{a+b-r}{a} y_{m,1}^{a} y_{m,2}^{b}$$

важи $b \geqslant r$ или $a+b < r$. Дакле, $a + b \leqslant \max\{N+1, r-1\} = N+1$, а самим тим и $\mathrm{LT}(g_{m,r}^{(N)}) = y_{m,1}^{N+1-r} y_{m,2}^{r}$.

б) Важи (по модулу 2)

$$\begin{aligned}
y_{m,1}\overline{y}_{m,r+1} + y_{m,2}\overline{y}_{m,r} &= \\
&= \sum_{a+2b=r+1} \binom{a+b}{a} y_{m,1}^{a+1} y_{m,2}^{b} + \sum_{a+2b=r} \binom{a+b}{a} y_{m,1}^{a} y_{m,2}^{b+1} \\
&= \sum_{a+2b=r+2} \binom{a+b-1}{a-1} y_{m,1}^{a} y_{m,2}^{b} + \sum_{a+2b=r+2} \binom{a+b-1}{a} y_{m,1}^{a} y_{m,2}^{b} \\
&= \sum_{a+2b=r+2} \binom{a+b}{a} y_{m,1}^{a} y_{m,2}^{b}.
\end{aligned}$$

Смена променљивих $a \mapsto a-1$ (односно $b \mapsto b-1$) не нарушава услов $a \geqslant 0$ (односно $b \geqslant 0$), јер је за $a = 0$ (односно $b = 0$) биномни коефицијент $\binom{a+b-1}{a-1}$ (односно $\binom{a+b-1}{a} = \binom{r+1}{r+2}$) једнак 0. Дакле, последња сума једнака је $\overline{y}_{m,r+2}$.

в) Ово тврђење следи из тврђења 82 (редукцијом по модулу 2). Ипак, ради комплетности, дајемо доказ и у овом специјалном случају. Важи

$$\begin{aligned}
y_{m,1}g_{m,r+1}^{(N)} + y_{m,2}g_{m,r}^{(N)} &= \\
&= \sum_{a+2b=N+r+2} \binom{a+b-r-1}{a} y_{m,1}^{a+1} y_{m,2}^{b} + \sum_{a+2b=N+r+1} \binom{a+b-r}{a} y_{m,1}^{a} y_{m,2}^{b+1} \\
&= \sum_{a+2b=N+r+3} \binom{a+b-r-2}{a-1} y_{m,1}^{a} y_{m,2}^{b} + \sum_{a+2b=N+r+3} \binom{a+b-r-1}{a} y_{m,1}^{a} y_{m,2}^{b} \\
&= \sum_{a+2b=N+r+3} \binom{a+b-r-2}{a} y_{m,1}^{a} y_{m,2}^{b}.
\end{aligned}$$

Приметимо да, слично као у делу под б), смена променљивих $a \mapsto a-1$ (односно $b \mapsto b-1$) не нарушава услов $a \geqslant 0$ (односно $b \geqslant 0$). Дакле, последња сума једнака је $g_{m,r+2}^{(N)}$.

г) Доказ изводимо применом математичке индукције по s. За $s=1$ довољно је доказати да важи $g_{m,r+2}^{(N)} = y_{m,2}g_{m,r}^{(N)} + y_{m,1}g_{m,r+1}^{(N)}$, што је део под в). Индуктивни корак следи из следећих једнакости, које такође добијамо применом дела под в):

$$\begin{aligned}
&y_{m,2}^s g_{m,r}^{(N)} + y_{m,1}^s g_{m,r+s}^{(N)}\\
&\quad= y_{m,2}^s g_{m,r}^{(N)} + y_{m,2}y_{m,1}^{s-1}g_{m,r+s-1}^{(N)} + y_{m,2}y_{m,1}^{s-1}g_{m,r+s-1}^{(N)} + y_{m,1}^s g_{m,r+s}^{(N)}\\
&\quad= y_{m,2}\left(y_{m,2}^{s-1}g_{m,r}^{(N)} + y_{m,1}^{s-1}g_{m,r+s-1}^{(N)}\right) + y_{m,1}^{s-1}\left(y_{m,2}g_{m,r+s-1}^{(N)} + y_{m,1}g_{m,r+s}^{(N)}\right)\\
&\quad= y_{m,2}\sum_{i=0}^{s-2} y_{m,1}^i y_{m,2}^{s-2-i} g_{m,r+2+i}^{(N)} + y_{m,1}^{s-1}g_{m,r+s+1}^{(N)}\\
&\quad= \sum_{i=0}^{s-1} y_{m,1}^i y_{m,2}^{s-1-i} g_{m,r+2+i}^{(N)}.
\end{aligned}$$

д) Прво, нека је $r = N+2$. Ако је $a+2b = N+1+r = 2N+3$, за неке $a,b \geqslant 0$, тада је $2a+2b \geqslant 2N+3$, тј. $a+b \geqslant N+2$. Такође, важи и $2b \leqslant 2N+3$, тј. $b < N+2$, па је $0 \leqslant a+b-r < a$, а самим тим и $\binom{a+b-r}{a} = 0$, тј. $g_{m,N+2}^{(N)} = 0$.

Даље, нека су $r \geqslant N+3$ и $a,b \geqslant 0$ такви да важи $a+2b = N+1+r$. Тада је $r-b-1 = a+b-N-2$ и $\binom{a+b-r}{a} = (-1)^a\binom{r-b-1}{a} \equiv \binom{a+b-N-2}{a} \pmod 2$, па и

$$\begin{aligned}
g_{m,r}^{(N)} &= \sum_{a+2b=N+1+r}\binom{a+b-r}{a} y_{m,1}^a y_{m,2}^b\\
&= \sum_{a+2b=N+1+r}\binom{a+b-N-2}{a} y_{m,1}^a y_{m,2}^b\\
&= g_{m,N+2}^{(r-2)}.
\end{aligned}$$ □

Нека је

$$z''_{n+j+m} = \sum_{\rho(2)+t=n+j+m} \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t,\ 1 \leqslant m \leqslant 2d+k,$$

где се сумирање врши по свим d-торкама $\rho^{(2)} = (r_2,\dots,r_d)$ ненегативних целих бројева и $t \in \mathbb{N}_0$ таквим да је $\rho(2)+t = n+j+m$.

Приметимо да, уколико дефинишемо да је $\overline{y}_{m,-1}$ једнако 0, тада део под б) претходне леме важи и за $r=-1$. Дакле, за $1 \leqslant m \leqslant 2d+k-2$ важи

$$\begin{aligned}
z'_{n+j+m+2} &= \sum_{\rho(1)+t=n+j+m+2} \overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t \\
&= \sum_{\substack{\rho(1)+t=n+j+m+2\\ r_1\geqslant 1}} \overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t + \sum_{\rho(2)+t=n+j+m+2} \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t \\
&= \sum_{\substack{\rho(1)+t=n+j+m+2\\ r_1\geqslant 1}} \left(y_{1,1}\overline{y}_{1,r_1-1} + y_{1,2}\overline{y}_{1,r_1-2}\right)\overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t + \sum_{\rho(2)+t=n+j+m+2} \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t \\
&= \sum_{\rho(1)+t=n+j+m+1} y_{1,1}\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t + \sum_{\rho(1)+t=n+j+m} y_{1,2}\overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t + z''_{n+j+m+2} \\
&= y_{1,1}z'_{n+j+m+1} + y_{1,2}z'_{n+j+m} + z''_{n+j+m+2}. \qquad (6.2.5)
\end{aligned}$$

Коришћењем идентитета (6.2.5), слично као у доказу једнакости (6.2.4), добијамо

$$\begin{aligned}
I_{j,d,k,n} &= \langle g_1, \ldots, g_j, z'_{n+j+1}, z'_{n+j+2}, z'_{n+j+3}, \ldots, z'_{n+j+2d+k}\rangle \\
&= \langle g_1, \ldots, g_j, z'_{n+j+1}, z'_{n+j+2}, z''_{n+j+3}, \ldots, z''_{n+j+2d+k}\rangle. \qquad (6.2.6)
\end{aligned}$$

Следећа лема омогућује нам да полиноме z'_{n+j+1} и z'_{n+j+2} у генераторском скупу за $I_{j,d,k,n}$ (датом у (6.2.6)) заменимо елементима из G.

Лема 115. $\langle z'_{n+j+1}, z'_{n+j+2}\rangle = \langle g_{1,0}, g_{1,1}, \ldots, g_{1,n+j+1}\rangle$.

Доказ. Приметимо да је $g_{1,0}^{(r_1-1)} = \overline{y}_{1,r_1}$, за $-1 \leqslant r_1 \leqslant n+j+1$ ($\overline{y}_{1,-1} := 0$), па је

$$g_{1,0} = \sum_{\rho(1)+t=n+j+1} \overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t = z'_{n+j+1}.$$

Како је $g_{1,1}^{(-2)} = 1$ и $g_{1,1}^{(-1)} = 0$ важи

$$g_{1,1} = \sum_{\substack{\rho(1)+t=n+j+1\\ r_1\geqslant -1}} g_{1,1}^{(r_1-1)}\overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\rho(1)+t=n+j+1\\ r_1\geqslant -1}} \sum_{a+2b=r_1+1} \binom{a+b-1}{a} y_{1,1}^a y_{1,2}^b \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t \\
&= \sum_{\substack{\rho(1)+t=n+j+1\\ r_1\geqslant 1}} \sum_{a+2b=r_1-1} \binom{a+b}{a} y_{1,1}^a y_{1,2}^{b+1} \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t + \sum_{\rho(2)+t=n+j+2} \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t \\
&= y_{1,2} \sum_{\rho(1)+t=n+j+1} \overline{y}_{1,r_1-1}\overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t + \sum_{\rho(2)+t=n+j+2} \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t \\
&= y_{1,2} \sum_{\rho(1)+t=n+j} \overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t + \sum_{\rho(2)+t=n+j+2} \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t,
\end{aligned}
$$

а самим тим, по делу б) леме 114, важи

$$
\begin{aligned}
z'_{n+j+2} &= \sum_{\rho(1)+t=n+j+2} \overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t \\
&= \sum_{\substack{\rho(1)+t=n+j+2\\ r_1\geqslant 1}} (y_{1,1}\overline{y}_{1,r_1-1} + y_{1,2}\overline{y}_{1,r_1-2})\overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t + \sum_{\rho(2)+t=n+j+2} \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t \\
&= y_{1,1}z'_{n+j+1} + y_{1,2} \sum_{\rho(1)+t=n+j} \overline{Y}^{\rho_1}\overline{w}_t + \sum_{\rho(2)+t=n+j+2} \overline{Y}^{\rho_2}\overline{w}_t \\
&= y_{1,1}g_{1,0} + g_{1,1}.
\end{aligned}
$$

Дакле, $\langle z'_{n+j+1}, z'_{n+j+2}\rangle \subseteq \langle g_{1,0}, g_{1,1}, \ldots, g_{1,n+j+1}\rangle$.

Да бисмо доказали и другу инклузију, прво приметимо да важи

$$
g_{1,0} = z'_{n+j+1} \quad \text{и} \quad g_{1,1} = z'_{n+j+2} + y_{1,1}z'_{n+j+1} \in \langle z'_{n+j+1}, z'_{n+j+2}\rangle.
$$

Даље, једноставним коришћењем математичке индукције по r, из дела под в) леме 114 добијамо

$$
g_{1,r+2} = y_{1,1}g_{1,r+1} + y_{1,2}g_{1,r} \in \langle z'_{n+j+1}, z'_{n+j+2}\rangle,\ 0 \leqslant r \leqslant n+j-1,
$$

чиме је доказ леме завршен. □

Из претходне леме је

$$
I_{j,d,k,n} = \langle g_1, \ldots, g_j, g_{1,0}, \ldots, g_{1,n+j+1}, z''_{n+j+3}, \ldots, z''_{n+j+2d+k}\rangle.
$$

Приметимо да су полиноми z''_{n+j+i}, $3 \leqslant i \leqslant 2d+k$, истог облика као полиноми z'_{n+j+i}, $1 \leqslant i \leqslant 2d$, са јединим разликом да не садрже променљиве $y_{1,1}, y_{1,2}$. Дакле, поступајући на исти начин као у претходном делу доказа, закључујемо да је идеал $I_{j,d,k,n}$ генерисан скупом

$$G_1 \cup G_2 \cup \{\overline{w}_{n+j+2d+1}, \ldots, \overline{w}_{n+j+2d+k}\}.$$

Како по теореми 91 важи и $\langle \overline{w}_{n+j+2d+1}, \ldots, \overline{w}_{n+j+2d+k} \rangle = \langle G_3 \rangle$, из претходног закључујемо да је

$$I_{j,d,k,n} = \langle G \rangle. \tag{6.2.7}$$

Да бисмо доказали да је G Гребнерова база за идеал $I_{j,d,k,n}$, погодно је дефиницију полинома $g_{m,r}$ проширити и на случај $r = n+j+2m$, и то на следећи начин

$$g_{m,n+j+2m} = \sum_{\rho(m)+t=n+j+2m-1} g_{m,n+j+2m}^{(r_m-1)} \overline{Y}^{\rho_{m+1}} \overline{w}_t, \ 1 \leqslant m \leqslant d,$$

а сумирање се врши по свим $t \in \mathbb{N}_0$ и $(d-m+1)$-торкама $\rho^{(m)} = (r_m, \ldots, r_d)$ таквим да је $r_m \geqslant -1$, а $r_i \geqslant 0$, за $m+1 \leqslant i \leqslant d$, и важи $\rho(m)+t = n+j+2m-1$.

Лема 116. *За* $1 \leqslant m \leqslant d$ *важи*

$$\sum_{r+s=n+j+2m} g_{m,r} \sum_{\rho(m+1)+t=s} \overline{Y}^{\rho_{m+1}} \overline{w}_t = 0,$$

при чему се сумирање врши по свим тројкама ненегативних целих бројева (r,s,t) *и свим* $(d-m)$*-торкама ненегативних целих бројева* $\rho^{(m+1)} = (r_{m+1}, \ldots, r_d)$ *таквим да важи* $r+s = n+j+2m$ *и* $\rho(m+1)+t = s$.

Доказ. Нека је са A означен израз са леве стране тражене једнакости из леме и $N = n+j+2m$. По дефиницији је $g_{m,r} = \sum\limits_{\rho'(m)+t'=N-1} g_{m,r}^{(r'_m-1)} \overline{Y}^{\rho'_{m+1}} \overline{w}_{t'}$. Заменом овог израза у A добијамо

$$\begin{aligned} A &= \sum_{r+s=N} \sum_{\rho'(m)+t'=N-1} g_{m,r}^{(r'_m-1)} \overline{Y}^{\rho'_{m+1}} \overline{w}_{t'} \sum_{\rho(m+1)+t=s} \overline{Y}^{\rho_{m+1}} \overline{w}_t \\ &= \sum_{0 \leqslant r,r' \leqslant N} g_{m,r}^{(r'-2)} \sum_{\rho(m+1)+t=N-r} \sum_{\rho'(m+1)+t'=N-r'} \overline{Y}^{\rho_{m+1}} \overline{Y}^{\rho'_{m+1}} \overline{w}_t \overline{w}_{t'}. \end{aligned}$$

По делу д) леме 114 важи $g_{m,r}^{(r'-2)} = g_{m,r'}^{(r-2)}$, за $r > r'$, и $g_{m,r}^{(r-2)} = 0$, па је $A = 0$. $\square$

Из претходне леме је

$$g_{m,n+j+2m} = \sum_{\substack{r+s=n+j+2m \\ s\geqslant 1}} g_{m,r} \sum_{\rho(m+1)+t=s} \overline{Y}^{\rho_{m+1}} \overline{w}_t. \tag{6.2.8}$$

Приметимо да је сваки полином $g_{m,r}$ који се појављује на десној страни једнакости (6.2.8) елемент скупа G_2.

Спремни смо да докажемо централну теорему ове главе.

Теорема 117. *Скуп G је редукована Гребнерова база идеала $I_{j,d,k,n}$ у односу на мономијални поредак $\preccurlyeq$.*

Доказ. Да бисмо доказали да је G Гребнерова база, по (6.2.7) довољно је доказати да G задовољава део (2) теореме 40. Нека су $g', g'' \in G$, $g' \neq g''$.

Приметимо да за $1 \leqslant m \leqslant j$ важи $\mathrm{LT}(g_m) = x_m^{n+m}$. По делу а) леме 114, за $1 \leqslant m \leqslant d$ и $0 \leqslant r \leqslant n+j+2m-1$ важи

$$\mathrm{LT}(g_{m,r}) = \mathrm{LT}(g_{m,r}^{(n+j+2(m-1))}) = y_{m,1}^{n+j+2m-1-r} y_{m,2}^{r}.$$

Такође, за $(k-1)$-торку $\mu = (m_2, \ldots, m_k)$ ненегативних целих бројева такву да је $|\mu| \leqslant n+j+2d+1$, по тврђењу 81, важи $\mathrm{LT}(g_\mu) = W^{\overline{\mu}}$, где је $\overline{\mu} = (n+j+2d+1-|\mu|, m_2, \ldots, m_k)$.

Дакле, ако је $g' \in G_i$, $g'' \in G_j$, при чему $i \neq j$, или $g', g'' \in G_1$, или $g' = g_{m',r'}$, $g'' = g_{m'',r''}$, при чему је $m' \neq m''$, по леми 42 је $S(g', g'') \to_G^* 0$. Такође, за $g', g'' \in G_3$, по теореми 91 и теореми 40 важи $S(g', g'') \to_G^* 0$ или $S(g', g'')$ има τ-репрезентацију у односу на G за неко $t \prec \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g'), \mathrm{LT}(g''))$.

Дакле, довољно је размотрити случај $g' = g_{m,r'}$ и $g'' = g_{m,r''}$, за неко $1 \leqslant m \leqslant d$ и $0 \leqslant r' < r'' \leqslant n+j+2m-1$. Тада је

$$\mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_{m,r'}), \mathrm{LT}(g_{m,r''})) = y_{m,1}^{n+j+2m-1-r'} y_{m,2}^{r''},$$

па самим тим

$$
\begin{aligned}
S(g_{m,r'}, g_{m,r''}) &= y_{m,2}^{r''-r'} g_{m,r'} + y_{m,1}^{r''-r'} g_{m,r''} \\
&= \sum_{\rho(m)+t=n+j+2m-1} \left(y_{m,2}^{r''-r'} g_{m,r'}^{(r_m-1)} + y_{m,1}^{r''-r'} g_{m,r''}^{(r_m-1)} \right) \overline{Y}^{\rho_{m+1}} \overline{w}_t .
\end{aligned}
$$

Нека је $\delta = r'' - r' - 1$. По делу г) леме 114 је

$$
\begin{aligned}
S(g_{m,r'}, g_{m,r''}) &= \sum_{\rho(m)+t=n+j+2m-1} \sum_{i=0}^{\delta} y_{m,1}^{i} y_{m,2}^{\delta-i} g_{m,r'+2+i}^{(r_m-1)} \overline{Y}^{\rho_{m+1}} \overline{w}_t \\
&= \sum_{i=0}^{\delta} y_{m,1}^{i} y_{m,2}^{\delta-i} \sum_{\rho(m)+t=n+j+2m-1} g_{m,r'+2+i}^{(r_m-1)} \overline{Y}^{\rho_{m+1}} \overline{w}_t \\
&= \sum_{i=0}^{\delta} y_{m,1}^{i} y_{m,2}^{\delta-i} g_{m,r'+2+i}. \qquad (6.2.9)
\end{aligned}
$$

Приметимо да за $r' + 2 + i \leqslant n + j + 2m - 1$ важи

$$
\mathrm{LT}(y_{m,1}^{i} y_{m,2}^{\delta-i} g_{m,r'+2+i}) = y_{m,1}^{n+j+2m-3-r'} y_{m,2}^{r''+1} \prec y_{m,1}^{n+j+2m-1-r'} y_{m,2}^{r''}.
$$

Дакле, ако је $r'' < n+j+2m-1$, тада је (6.2.9) τ-репрезентација полинома $S(g_{m,r'}, g_{m,r''})$, при чему је $\tau \prec \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(g_{m,r'}), \mathrm{LT}(g_{m,r''}))$.

Нека је зато $r'' = n+j+2m-1$. Из идентитета (6.2.8) и (6.2.9) добијамо

$$
\begin{aligned}
S(g_{m,r'}, g_{m,r''}) = &\sum_{i=0}^{\delta-1} y_{m,1}^{i} y_{m,2}^{\delta-i} g_{m,r'+2+i} \\
&+ y_{m,1}^{\delta} \sum_{\substack{r+s=n+j+2m \\ s\geqslant 1}} g_{m,r} \sum_{\rho(m+1)+t=s} \overline{Y}^{\rho(m+1)} \overline{w}_t . \qquad (6.2.10)
\end{aligned}
$$

Приметимо да за полином $h \in \mathbb{Z}_2[y_{m+1,1}, y_{m+1,2}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}, w_1, \ldots, w_k]$ и $0 \leqslant r \leqslant n + j + 2m - 1$ важи

$$
\mathrm{LT}\left(y_{m,1}^{\delta} g_{m,r} h\right) = y_{m,1}^{\delta+n+j+2m-1-r} y_{m,2}^{r} \mathrm{LT}(h) \prec y_{m,1}^{n+j+2m-1-r'} y_{m,2}^{n+j+2m-1},
$$

па је у (6.2.10) полином $S(g_{m,r'}, g_{m,r''})$ представљен у одговарајућем облику, дакле, важи део (2) теореме 40.

Коначно, докажимо да је G редукована Гребнерова база. Претпоставимо супротно, тј. да $\mathrm{LT}(g')$ дели неки члан полинома g'', за неке $g', g'' \in G$, $g' \neq g''$. Јасно, тада је димензија полинома g' не већа од димензије полинома g'', па $g' \notin G_1$, јер, у супротном, чланови полинома g'' не би садржали променљиву која учествује у моному $\mathrm{LT}(g')$. Слично, ако је $g' = g_{m,r'}$, за $1 \leqslant m \leqslant d$ и $0 \leqslant r' \leqslant n+j+2m-1$, закључујемо да је $g'' = g_{m,r''}$, за неко $0 \leqslant r' < r'' \leqslant n+j+2m-1$. Међутим, тада су степени монома $\mathrm{LT}(g')$ и полинома g'' једнаки, па $\mathrm{LT}(g')$ не дели ниједан члан полинома g'' (сви чланови полинома g'' осим водећег су строго мањег степена него што је степен од $\mathrm{LT}(g')$, а $\mathrm{LT}(g') \nmid \mathrm{LT}(g'')$). На сличан начин закључујемо и да случај $g', g'' \in G_3$ није могућ. □

Класу полинома $p \in \mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_j, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}, w_1, \ldots, w_k]$ у алгебри $H^*(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$ у наставку текста означаваћемо истим словом као и сам полином.

Теорема 40 (импликација (1)⇒(3)) даје нам следећу последицу теореме 117.

Последица 118. *Нека је $N_i = n + j + 2i$, за $1 \leqslant i \leqslant d$. Скуп*
$$\left\{ \prod_{i=1}^{j} x_i^{a_i} \prod_{i=1}^{d} \left(y_{i,1}^{b_i'} y_{i,2}^{b_i''} \right) W^{\alpha} \, : \, a_i \leqslant n+i-1, \, b_i' + b_i'' \leqslant N_i - 2, \, |\alpha| \leqslant N_d \right\}$$
је адитивна база за $H^*(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$. □

Адитивну базу добијену у претходној последици означићемо са $B_{j,d,k,n}$. Последица 118 нам неће бити довољна за даља разматрања. Ипак, Гребнерова база добијена у теореми 117 даје више. По дефиницији редукције, ако $p \to_f q$ тада је $\mathrm{LT}(q) \prec \mathrm{LT}(p)$, одакле добијамо следећу последицу.

Последица 119. *За $f \in \mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_j, y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}, w_1, \ldots, w_k]$ постоји (јединствени) полином p такав да је $f = p$ у $H^*(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$, $\mathrm{LT}(p) \preccurlyeq \mathrm{LT}(f)$ и сви мономи полинома p су из $B_{j,d,k,n}$.* □

Из претходне последице следи: уколико полином p не садржи променљиве $x_1, \ldots, x_i$, а полином f је збир елемената из $B_{j,d,k,n}$ такав да важи $f = p$ у $H^*(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$, тада f не садржи променљиве $x_1, \ldots, x_i$. Слично, ако полином q не садржи променљиве $x_1, \ldots, x_j, y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{i,1}, y_{i,2}$, а полином g је збир елемената из $B_{j,d,k,n}$ такав да у $H^*(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$ важи $g = q$, тада g не садржи променљиве $x_1, \ldots, x_j, y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{i,1}, y_{i,2}$. Дакле, важи следећи резултат.

Последица 120. а) *Нека је $1 \leqslant i \leqslant j$, $0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n + i - 1$, а $p_1, p_2, \ldots, p_k$ полиноми такви да важи $\mathrm{LT}(p_l) \prec x_i$, за $1 \leqslant l \leqslant k$. Тада је*

$$\sum_{l=1}^{k} x_i^{a_l} p_l = 0$$

у $H^*(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$ ако и само ако је $p_l = 0$ у $H^*(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$ за све $1 \leqslant l \leqslant k$.

б) *Нека је $1 \leqslant i \leqslant d$, $(b_1, c_1), \ldots, (b_k, c_k)$ различити парови ненегативних целих бројева такви да је $b_l + c_l \leqslant n + j + 2i - 2$, за $1 \leqslant l \leqslant k$, а $p_1, \ldots, p_k$ полиноми такви да важи $\mathrm{LT}(p_l) \prec y_{i,2}$, за $1 \leqslant l \leqslant k$. Тада је*

$$\sum_{l=1}^{k} y_{i,1}^{b_l} y_{i,2}^{c_l} p_l = 0$$

у $H^*(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$ ако и само ако је $p_l = 0$ у $H^*(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, k, n); \mathbb{Z}_2)$ за све $1 \leqslant l \leqslant k$. $\square$

Резултате овог поглавља у наставку главе користићемо искључиво за реалне многострукости застава $F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)$, па, ради једноставности, тврђења у наставку овог поглавља дајемо само за тај случај. Адитивну базу за кохомологију ових застава (добијену из последице 118) означићемо са $B_{j,d,n}$.

По последици 118, ако $p \in B_{j,d,n}$ не садржи променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_i$, тада је степен полинома p не већи од $\displaystyle\sum_{l=i+1}^{j}(n + l - 1) + \sum_{l=1}^{d}(n + j + 2l - 2)$, а димензија не већа од $\sum_{l=i+1}^{j}(n+l-1)+\sum_{l=1}^{d}(2n+2j+4l-4)$. Слично, ако $q \in B_{j,d,n}$ не садржи променљиве $x_1,\ldots,x_j,y_{1,1},y_{1,2},\ldots,y_{i,1},y_{i,2}$, тада је степен полинома q не већи од $\sum_{l=i+1}^{d}(n+j+2l-2)$, а димензија не већа од $\sum_{l=i+1}^{d}(2n+2j+4l-4)$. Самим тим, из последице 119 добијамо следеће тврђење.

Последица 121. *Нека је $a_l \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant j$, и $b_l, c_l \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant d$. Ако је*

а) $\sum_{l=i+1}^{j} a_l + \sum_{l=1}^{d}(b_l+2c_l) > \sum_{l=i+1}^{j}(n+l-1)+\sum_{l=1}^{d}(2n+2j+4l-4)$, *за неко* $0 \leqslant i \leqslant j$, *или*

б) $\sum_{l=i+1}^{d}(b_l+2c_l) > \sum_{l=i+1}^{d}(2n+2j+4l-4)$, *за неко* $0 \leqslant i \leqslant d$,

тада у $H^*(F(1^{\cdots j},2^{\cdots d},n);\mathbb{Z}_2)$ важи

$$\prod_{l=1}^{j} x_l^{a_l} \prod_{l=1}^{d} y_{l,1}^{b_l} y_{l,2}^{c_l} = 0.$$

Напомена 122. Претходну последицу најчешће ћемо примењивати на следећи начин: ако је $a_l \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant j$, и $b_l, c_l \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant d$, и при томе за неко $1 \leqslant i \leqslant j$ важи $a_i < n+i-1$ и

$$\sum_{l=i}^{j} a_l + \sum_{l=1}^{d}(b_l+2c_l) = \sum_{l=i}^{j}(n+l-1)+\sum_{l=1}^{d}(2n+2j+4l-4),$$

тада у $H^*(F(1^{\cdots j},2^{\cdots d},n);\mathbb{Z}_2)$ важи

$$\prod_{l=1}^{j} x_l^{a_l} \prod_{l=1}^{d} y_{l,1}^{b_l} y_{l,2}^{c_l} = 0.$$

Нека је $1 \leqslant m \leqslant d$, $M = n+j+2m-2$, $G_{j,m,n} = \{g_{m,0}, g_{m,1}, \ldots, g_{m,M+1}\}$, и $G'_{j,m,n} = \{g_{m,0}^{(M)}, g_{m,1}^{(M)}, \ldots, g_{m,M+1}^{(M)}\}$. По теореми 91, $G'_{m,j,n}$ је Гребнерова база идеала $\langle G'_{j,m,n}\rangle$ и важи

$$\mathbb{Z}_2[y_{m,1},y_{m,2}]/\langle G'_{j,m,n}\rangle \cong H^*(G_{2,M}(\mathbb{R});\mathbb{Z}_2). \tag{6.2.11}$$

У овом изоморфизму $y_{m,1}$ и $y_{m,2}$ одговарају Штифел-Витнијевим класама u_1 и u_2 таутолошког векторског раслојења γ_2 над Грасманијаном $G_{2,M}(\mathbb{R})$. Такође, ако су p и q полиноми променљивих $y_{m,1}$ и $y_{m,2}$ такви да

$$p \longrightarrow^*_{G'_{j,m,n}} q,$$

заменом сваког полинома $g^{(M)}_{m,i}$ који се појављује у овом низу редукција полиномом $g_{m,i}$ добијамо

$$p \longrightarrow^*_{G_{j,m,n}} q + r,$$

где је r полином променљивих $y_{m,1}, y_{m,2}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}$, такав да у сваком члану полинома r бар једна од променљивих $y_{m+1,1}, y_{m+1,2}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}$ има позитиван степен. Ова примедба, заједно са (6.2.11), даје нам следеће тврђење.

Последица 123. *Нека је $1 \leqslant m \leqslant d$ и $M = n + j + 2m - 2$. Ако су $p, q \in \mathbb{Z}_2[y_{m,1}, y_{m,2}]$ такви да је $p = q$ у $H^*(G_{2,M}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$, тада у $H^*(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n); \mathbb{Z}_2)$ важи $p = q + r$, где је r полином променљивих $y_{m,1}, y_{m,2}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}$, чији је сваки члан у $B_{j,d,n}$ и такав да у сваком члану полинома r бар једна од променљивих $y_{m+1,1}, y_{m+1,2}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}$ има позитиван степен.* $\square$

Висина кохомолошке класе $x \in H^*(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n); \mathbb{Z}_2)$ дефинисана је са $\mathrm{ht}(x) := \max\{n \in \mathbb{N} : x^n \neq 0\}$. Коришћењем претходног резултата у случају $m = d$ закључујемо да су висине класа $y_{d,1}$ и $y_{d,2}$, а самим тим и класа $y_{i,1}, y_{i,2}$, за $1 \leqslant i \leqslant d$, једнаке висинама класа u_1 и u_2, које су добро познате из [66]. На овај начин доказали смо део следећег резултата Корбаша и Леринца (погледати [33, стр. 147]).

Тврђење 124 ([33])**.** *Нека је $d \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, x_i, $1 \leqslant i \leqslant j$, Штифел-Витнијеве класе таутолошких линијских векторских раслојења, а $y_{i,1}, y_{i,2}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, Штифел-Витнијеве класе таутолошких дводимензионих векторских раслојења над $F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)$. Тада је $\mathrm{ht}(x_i) = n + j + 2d - 1$, $1 \leqslant i \leqslant j$, и $\mathrm{ht}(y_{i,2}) =$*

$n+j+2d-2$, $1 \leqslant i \leqslant d$. *Такође, ако је* s *јединствен природан број такав да важи* $2^{s-1} < n+j+2d \leqslant 2^s$, *тада је* $\mathrm{ht}(y_{i,1}) = 2^s - 2$.

Одредимо неколико елемената Гребнерове базе G за идеал који дефинише $H^*(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n); \mathbb{Z}_2)$. За $1 \leqslant m \leqslant d$, нека је $n+j+2m-2 = M$. Из дефиниције (6.2.1) није тешко добити да је $g_{m,M+1}^{(M)} = y_{m,2}^{M+1}$, $g_{m,M}^{(M-1)} = y_{m,2}^{M}$, $g_{m,M-1}^{(M-1)} = y_{m,1}y_{m,2}^{M-1}$, $g_{m,M}^{(M)} = y_{m,1}y_{m,2}^{M}$, $g_{m,M-1}^{(M-2)} = y_{m,2}^{M-1}$, $g_{m,M-1}^{(M)} = y_{m,1}^2 y_{m,2}^{M-1} + y_{m,2}^{M}$ (погледати [51, стр. 118] или доказ леме 114). Ове једнакости, заједно са делом д) леме 114 дају

$$
\begin{aligned}
g_{m,M+1} &= g_{m,M+1}^{(M)} + g_{m,M+1}^{(M-1)}\sigma_1^{(m+1)} + g_{m,M+1}^{(M-2)}\sigma_2^{(m+1)} + g_{m,M+1}^{(M-3)}\sigma_3^{(m+1)} + p,\\
&= y_{m,2}^{M+1} + 0 + g_{m,M}^{(M-1)}\sigma_2^{(m+1)} + g_{m,M-1}^{(M-1)}\sigma_3^{(m+1)} + p\\
&= y_{m,2}^{M+1} + y_{m,2}^{M}\sigma_2^{(m+1)} + y_{m,1}y_{m,2}^{M-1}\sigma_3^{(m+1)} + p, && (6.2.12)\\
g_{m,M} &= g_{m,M}^{(M)} + g_{m,M}^{(M-1)}\sigma_1^{(m+1)} + g_{m,M}^{(M-2)}\sigma_2^{(m+1)} + g_{m,M}^{(M-3)}\sigma_3^{(m+1)} + q\\
&= y_{m,1}y_{m,2}^{M} + y_{m,2}^{M}\sigma_1^{(m+1)} + 0 + g_{m,M-1}^{(M-2)}\sigma_3^{(m+1)} + q\\
&= y_{m,1}y_{m,2}^{M} + y_{m,2}^{M}\sigma_1^{(m+1)} + y_{m,2}^{M-1}\sigma_3^{(m+1)} + q, && (6.2.13)\\
g_{m,M-1} &= g_{m,M-1}^{(M)} + g_{m,M-1}^{(M-1)}\sigma_1^{(m+1)} + g_{m,M-1}^{(M-2)}\sigma_2^{(m+1)} + g_{m,M-1}^{(M-3)}\sigma_3^{(m+1)} + r\\
&= y_{m,1}^2 y_{m,2}^{M-1} + y_{m,2}^{M} + y_{m,1}y_{m,2}^{M-1}\sigma_1^{(m+1)} + y_{m,2}^{M-1}\sigma_2^{(m+1)} + r, && (6.2.14)
\end{aligned}
$$

где је

$$\sigma_k^{(m+1)} = \sum_{r_{m+1}+\cdots+r_d=k} \overline{y}_{m+1,r_{m+1}} \ldots \overline{y}_{d,r_d},\ 1 \leqslant k \leqslant 4,$$

а p, q, r полиноми променљивих $y_{i,1}$ и $y_{i,2}$, $m \leqslant i \leqslant d$, такви да за сваки моном ових полинома важи $a + 2b \leqslant 2M - 4$, где је a изложилац од $y_{m,1}$, а b изложилац од $y_{m,2}$ у том моному.

Пример 125. Нека је $d \geqslant 2$. По последици 118, у $H^*(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n); \mathbb{Z}_2)$ важи $y_{d-1,2}^{n+j+2d-4} y_{d,2}^{n+j+2d-2} \neq 0$ и (симетрично) $y_{d,2}^{n+j+2d-4} y_{d-1,2}^{n+j+2d-2} \neq 0$, па је по последици 120 и

$$y_{d-1,2}^{n+j+2d-4} y_{d,2}^{n+j+2d-2} = y_{d,2}^{n+j+2d-4} y_{d-1,2}^{n+j+2d-2}.$$

Међутим, доказаћемо да је класа $y_{d-1,2}^{n+j+2d-3}y_{d,2}^{n+j+2d-3}$, која је исте димензије као претходне две, једнака нули. По формули (6.2.12)

$$0 = g_{d-1,n+j+2d-3} = y_{d-1,2}^{n+j+2d-3} + y_{d-1,2}^{n+j+2d-4}(y_{d,1}^2 + y_{d,2}) + \widetilde{p},$$

где је $\widetilde{p}$ полином променљивих $y_{d-1,1}, y_{d-1,2}, y_{d,1}, y_{d,2}$, такав да за сваки моном овог полинома важи $a + 2b \leqslant 2n + 2j + 4d - 9$, где је a изложилац од $y_{d-1,1}$, а b изложилац од $y_{d-1,2}$ у том моному. Такође, по формули (6.2.14) је

$$0 = g_{d,n+j+2d-3} = y_{d,1}^2 y_{d,2}^{n+j+2d-3} + y_{d,2}^{n+j+2d-2},$$

а самим тим и

$$\begin{aligned}
&y_{d-1,2}^{n+j+2d-3}y_{d,2}^{n+j+2d-3}\\
&\qquad = \left(y_{d-1,2}^{n+j+2d-4}(y_{d,1}^2 + y_{d,2}) + \widetilde{p}\right) y_{d,2}^{n+j+2d-3}\\
&\qquad = y_{d-1,2}^{n+j+2d-4}y_{d,1}^2 y_{d,2}^{n+j+2d-3} + y_{d-1,2}^{n+j+2d-4}y_{d,2}^{n+j+2d-2} + \widetilde{p}y_{d,2}^{n+j+2d-3}\\
&\qquad = \widetilde{p}y_{d,2}^{n+j+2d-3} = 0,
\end{aligned}$$

где последња једнакост следи из последице 121.

6.3 Примена Гребнерових база: утапања и имерзије

У овом поглављу искористићемо резултате из претходног како бисмо доказали да не постоје одређена утапања и имерзије реалних многострукости застава. Прецизније, предмет овог поглавља је разматрање следећих инваријанти

$$\mathrm{em}(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)) = \min\{m : \text{постоји утапање } F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n) \to \mathbb{R}^m\},$$

$$\mathrm{imm}(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)) = \min\{m : \text{постоји имерзија } F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n) \to \mathbb{R}^m\}.$$

Познато је (погледати [44, стр. 120 и 49]) да ако је $w_t(\nu)$ нетривијално, где је ν стабилно нормално раслојење многострукости $F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)$, тада важи (за многострукост M њену димензију ћемо означавати са $\delta(M)$)

$$\begin{aligned}\operatorname{em}(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)) &\geqslant \delta(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)) + t + 1\\ &= jn + 2dn + 2jd + \binom{j}{2} + 4\binom{d}{2} + t + 1 \qquad (6.3.1)\\ \operatorname{imm}(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)) &\geqslant \delta(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)) + t\\ &= jn + 2dn + 2jd + \binom{j}{2} + 4\binom{d}{2} + t. \qquad (6.3.2)\end{aligned}$$

Основни циљ у овом поглављу је да одредимо (што веће) t за које је $w_t(\nu)$ нетривијално, што ће нам према претходном дати доња ограничења за $\operatorname{em}(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n))$ и $\operatorname{imm}(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)$, за неке $j, d, n \in \mathbb{N}$.

Нека су γ_i, $1 \leqslant i \leqslant j$, γ_i', $1 \leqslant i \leqslant d$, и γ'' таутолошка векторска раслојења над $F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)$ ($\dim(\gamma_i) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant j$, $\dim(\gamma_i') = 2$, $1 \leqslant i \leqslant d$, $\dim(\gamma'') = n$). По Ламовој формули (погледати [37]), за тангентно векторско раслојење τ над $F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)$ имамо

$$\begin{aligned}\tau \cong \bigoplus_{1\leqslant l<k\leqslant j} (\gamma_l \otimes \gamma_k) \oplus \bigoplus_{1\leqslant l<k\leqslant d} (\gamma_l' \otimes \gamma_k') \oplus \bigoplus_{\substack{1\leqslant l\leqslant j\\ 1\leqslant k\leqslant d}} (\gamma_l \otimes \gamma_k')\\ \oplus \bigoplus_{1\leqslant l\leqslant j} (\gamma_l \otimes \gamma'') \oplus \bigoplus_{1\leqslant l\leqslant d} (\gamma_l' \otimes \gamma'').\end{aligned}$$

„Додавањем” $\bigoplus\limits_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant j} (\gamma_l \otimes \gamma_k) \oplus \bigoplus\limits_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant d} (\gamma_l' \otimes \gamma_k') \oplus \bigoplus\limits_{\substack{1\leqslant l\leqslant j\\ 1\leqslant k\leqslant d}} (\gamma_l \otimes \gamma_k')$ обема странама претходног изоморфизма и коришћењем чињенице да је $\bigoplus\limits_{1\leqslant l\leqslant j} \gamma_l \oplus \bigoplus\limits_{1\leqslant l\leqslant d} \gamma_l' \oplus \gamma''$ тривијално $(n + j + 2d)$-димензионо векторско раслојење добијамо

$$\begin{aligned}\tau \oplus \bigoplus_{1\leqslant l\leqslant k\leqslant j} (\gamma_l \otimes \gamma_k) \oplus \bigoplus_{1\leqslant l\leqslant k\leqslant d} (\gamma_l' \otimes \gamma_k') \oplus \bigoplus_{\substack{1\leqslant l\leqslant j\\ 1\leqslant k\leqslant d}} (\gamma_l \otimes \gamma_k')\\ \cong \bigoplus_{1\leqslant l\leqslant j} (n + j + 2d)\gamma_l \oplus \bigoplus_{1\leqslant l\leqslant d} (n + j + 2d)\gamma_l',\end{aligned}$$

а самим тим и

$$w(\tau) \prod_{1\leqslant l<k\leqslant j} w(\gamma_l \otimes \gamma_k) \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant j\\ 1\leqslant k\leqslant d}} w(\gamma_l \otimes \gamma_k') \prod_{1\leqslant l<k\leqslant d} w(\gamma_l' \otimes \gamma_k')$$

$$= \prod_{l=1}^{j}(1+x_l)^{n+j+2d} \prod_{l=1}^{d}(1+y_{l,1}+y_{l,2})^{n+j+2d}. \tag{6.3.3}$$

Коришћењем метода описаног у [44, стр. 87-88] добијамо

$$w(\gamma_l \otimes \gamma_k) = 1 + x_l + x_k,\ \ 1 \leqslant l \leqslant k \leqslant j \tag{6.3.4}$$

$$w(\gamma_l \otimes \gamma_k') = 1 + y_{k,1} + x_l^2 + x_l y_{k,1} + y_{k,2},\ \ 1 \leqslant l \leqslant j,\ 1 \leqslant k \leqslant d \tag{6.3.5}$$

$$\begin{aligned} w(\gamma_l' \otimes \gamma_k') &= 1 + y_{l,1}^2 + y_{k,1}^2 + y_{l,1}y_{k,1} + y_{l,1}^2 y_{k,2} + y_{k,1}^2 y_{l,2} + y_{l,2}^2 + y_{k,2}^2 \\ &\quad + y_{l,1}y_{k,1}(y_{l,1}+y_{k,1}) + y_{l,1}y_{k,1}(y_{l,2}+y_{k,2}),\ \ 1 \leqslant l \leqslant k \leqslant d. \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

Спремни смо да докажемо главну теорему овог поглавља.

Теорема 126. *Ако је* $2^{s-1} < n < n+j+2d \leqslant 2^s$, *тада је* $w_t(\nu) \neq 0$ *за*

$$t = (j+2d)(2^s - n - j) - 2d^2 + \binom{j}{2}.$$

Доказ. По формули (6.3.3) имамо

$$w(\nu) = \prod_{1\leqslant l<k\leqslant j} w(\gamma_l \otimes \gamma_k) \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant j\\ 1\leqslant k\leqslant d}} w(\gamma_l \otimes \gamma_k') \prod_{1\leqslant l\leqslant k\leqslant d} w(\gamma_l' \otimes \gamma_k')$$

$$\times \prod_{l=1}^{j}(1+x_l)^{-n-j-2d} \prod_{l=1}^{d}(1+y_{l,1}+y_{l,2})^{-n-j-2d}.$$

Како је $(1+x_l)^{2^s} = 1 + x_l^{2^s}$ и висина класе x_l је једнака $n+j+2d-1$ (погледати [33, стр. 147]), имамо $x_l^{2^s} = 0$, тј. $(1+x_l)^{2^s} = 1$. Слично, по последици 124 је $(1+y_{l,1}+y_{l,2})^{2^s} = 1$, а самим тим и

$$w(\nu) = \prod_{1\leqslant l<k\leqslant j} w(\gamma_l \otimes \gamma_k) \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant j\\ 1\leqslant k\leqslant d}} w(\gamma_l \otimes \gamma_k') \prod_{1\leqslant l\leqslant k\leqslant d} w(\gamma_l' \otimes \gamma_k')$$

$$\times \prod_{l=1}^{j}(1+x_l)^{2^s-n-j-2d} \prod_{l=1}^{d}(1+y_{l,1}+y_{l,2})^{2^s-n-j-2d}. \tag{6.3.7}$$

Коришћењем формула (6.3.4)–(6.3.6) закључујемо да је највиша класа у (6.3.7) димензије t и да важи

$$w_t(\nu) = \prod_{l=1}^{j} x_l^{2^s-n-j-2d} \prod_{l=1}^{d} y_{l,2}^{2^s-n-j-2d} \prod_{1\leqslant l<k\leqslant j} (x_l + x_k) \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant j\\ 1\leqslant k\leqslant d}} (x_l^2 + x_l y_{k,1} + y_{k,2})$$
$$\times \prod_{l=1}^{d} y_{l,1}^2 \prod_{1\leqslant l<k\leqslant d} (y_{l,1}y_{k,1}(y_{l,2}+y_{k,2}) + y_{l,1}^2 y_{k,2} + y_{k,1}^2 y_{l,2} + y_{l,2}^2 + y_{k,2}^2). \quad (6.3.8)$$

Да бисмо доказали да је $w_t(\nu) \neq 0$, размотримо произвољан моном m у $w_t(\nu)$. Степен променљиве x_l у m је највише $(2^s - n - j - 2d) + (j-1) + 2d = 2^s - n - 1$ за $1 \leqslant l \leqslant j$. Збир степена променљивих $y_{l,1}$ и $y_{l,2}$ у m је највише $(2^s - n - j - 2d) + j + 2 + 2(d-1) = 2^s - n$ за $1 \leqslant l \leqslant d$. Како је $2^s - n - 1 < 2^s - n < n$, по последици 118 после множења у (6.3.8) $w_t(\nu)$ је сума елемената адитивне базе $B_{j,d,n}$. Како се у овој суми члан

$$\prod_{l=1}^{j} x_l^{2^s-n-l} \prod_{l=1}^{d} y_{l,1}^2 y_{l,2}^{2^s-n-j-2l}$$

појављује тачно једном, то је $w_t(\nu) \neq 0$ (овај члан добијамо једино уколико приликом множења увек „бирамо” x_l из $x_l + x_k$, x_l^2 из $x_l^2 + x_l y_{k,1} + y_{k,2}$ и $y_{l,2}^2$ из $y_{l,1}y_{k,1}(y_{l,2}+y_{k,2}) + y_{l,1}^2 y_{k,2} + y_{k,1}^2 y_{l,2} + y_{l,2}^2 + y_{k,2}^2$ у (6.3.8)). □

Претходна теорема, заједно са неједнакостима (6.3.1)–(6.3.2) даје нам следећи резултат.

Последица 127. *Ако је* $2^{s-1} < n < n + j + 2d \leqslant 2^s$ *важи*

$$\mathrm{em}(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)) \geqslant (j+2d)(2^s-1)+1$$
$$\mathrm{imm}(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)) \geqslant (j+2d)(2^s-1).$$

Напомена 128. Последица 127 уопштава теорему 1.1.(a) из [50] и делимично последицу 1.1 и последицу 1.2 из [62].

6.4 Примена Гребнерових база: кохомолошка дужина

Мод 2 кохомолошка дужина путно повезаног простора X, у ознаци $\mathrm{cup}(X)$, је супремум бројева $m \in \mathbb{N}$ за које постоје класе $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \widetilde{H}^*(X; \mathbb{Z}_2)$ чији производ у кохомологији није 0, тј. $a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \neq 0$. Одређивање броја $\mathrm{cup}(M)$ предмет је многих радова, између осталог зато што је познато да $\mathrm{cup}(M)$ даје доње ограничење за Листерник-Шнирелманову категорију простора M (Листерник-Шнирелманова категорија простора M, у ознаци $\mathrm{cat}(M)$, једнака је најмањем од бројева d за које постоје отворени и контрактибилни у M подскупови $A_1, A_2, \ldots, A_d$ такви да је $M = \cup_{i=1}^{d} A_i$). Имамо

$$1 + \dim(M) \geqslant \mathrm{cat}(M) \geqslant 1 + \mathrm{cup}(M). \tag{6.4.1}$$

У овом поглављу радићемо само са $\mathbb{Z}_2$-кохомологијама, па ћемо у наставку писати поједностављено „кохомолошка дужина” уместо „мод 2 кохомолошка дужина”. Такође, радићемо само са реалним Грасмановим многострукостима, па ћемо писати „Грасманове многострукости” уместо „реалне Грасманове многострукости”, као и $G_{k,n}$ уместо $G_{k,n}(\mathbb{R})$.

Мало је познато о кохомолошкој дужини реалних многострукости застава – кохомолошка дужина није позната чак ни за све Грасманове многострукости. Хилер и Стонг су у [27, 66] одредили кохомолошке дужине Грасманових многострукости $G_{2,n}$, $G_{3,n}$ и $G_{4,n}$; у [32] Корбаш је добио нека ограничења за кохомолошку дужину оријентисаних Грасманових многострукости; у [33] Корбаш и Леринц одредили су кохомолошку дужину неких реалних многострукости застава $F(1^{..j}, 2^{..d}, n)$.

У овом поглављу одредићемо $\mathrm{cup}(M)$ за неке реалне многострукости застава M за које то није урађено у горе наведеним радовима.

6.4.1 Неколико речи о кохомолошкој дужини реалних многострукости застава

Тривијално горње ограничење кохомолошке дужине многострукости је њена димензија (за многострукост M њену димензију ћемо означавати са $\delta(M)$). У случају реалних многострукости $F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)$ на овај начин добијамо следећу неједнакост

$$\operatorname{cup}(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)) \leqslant nj + 2nd + \binom{j}{2} + 4\binom{d}{2} + 2jd.$$

Уколико за многострукост M важи $\operatorname{cup}(M) = \delta(M)$, из неједнакости (6.4.1) можемо закључити да је $\operatorname{cat}(M) = \delta(M)+1$. Ово је један од разлога због којих је значајно одредити многострукости датог типа за које је кохомолошка дужина једнака димензији.

У случају Грасманових многострукости овај проблем разрешио је Берштајн.

Теорема 129 ([4])**.** *Кохомолошка дужина Грасманијана $G_{k,n}$ једнака је димензији ако и само ако је $k = 1$, или је $k = 2$ и $n = 2^t - 1$, за неко $t \in \mathbb{N}$.*

Још увек нису познате све реалне многострукости застава за које је кохомолошка дужина једнака димензији; ово питање отворено је чак и за реалне многострукости застава облика $F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)$.

За разрешење ових проблема вероватно је неопходно познавање кохомолошке дужине Грасманијана, која је позната само за неке Грасманијане $G_{k,n}$. У следећем тврђењу наводимо Хилеров резултат за случај $k = 2$ (погледати [27]).

Тврђење 130 ([27])**.** *Нека је $2^{s-1} < n + 2 \leqslant 2^s$. Уколико су $w_i \in H^i(G_{2,n}; \mathbb{Z}_2)$, $i \in \{1, 2\}$, Штифел-Витнијеве класе таутолошког векторског раслојења над $G_{2,n}$, тада у $H^*(G_{2,n}; \mathbb{Z}_2)$ важи $w_1^{2^s-2} w_2^d = w_2^n$, где је $d = n - 2^{s-1} + 1$. Специјално,* $\operatorname{cup}(G_{2,n+2}) = n + 2^{s-1} - 1$.

У [33] (и општије у [32]) аутори су предложили алгоритам за израчунавање кохомолошке дужине реалних многострукости застава. Иако је овај алгоритам веома тешко применити за општу реалну многострукост застава, он нам даје неке смернице за одређивање кохомолошке дужине. Почетни корак овог алгоритма везан је за следећу лему.

Лема 131 ([33]). *За реалну многострукост застава* $F(n_1, n_2, \dots, n_q)$*, нека је* $\delta = \delta(F(n_1, n_2, \dots, n_q))$, $\mathrm{ht}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant q-1$, *висине првих Штифел-Витнијевих класа таутолошких векторских раслојења и* $S = \mathrm{ht}(1) + \cdots + \mathrm{ht}(q-1)$*. Тада важи*

$$\mathrm{cup}(F(n_1, n_2, \dots, n_q)) \leqslant S + \left\lfloor \frac{\delta - S}{2} \right\rfloor.$$

Горњу границу добијену у овој леми у наставку овог поглавља означаваћемо са $\beta(F(n_1, n_2, \dots, n_q))$.

У случају реалне многострукости застава $F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)$, из претходне леме добијамо (s је природан број такав да је $2^{s-1} < n + j + 2d \leqslant 2^s$)

$$\begin{aligned} &\beta(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)) \\ &\qquad = j(n + j + 2d - 1) + d(2^s - 2) + \left\lfloor \frac{2nd + 4\binom{d}{2} - \binom{j}{2} - d(2^s - 2)}{2} \right\rfloor \\ &\qquad = j(n + j + 2d - 1) + d(n + d + 2^{s-1} - 2) + \left\lfloor -\frac{j(j-1)}{4} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

6.4.2 Кохомолошка дужина неких многострукости застава типа $F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)$

Ради једноставности, у овом поглављу уместо $H^*(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n); \mathbb{Z}_2)$ писаћемо H^*. Поглавље започињемо разматрањем случаја $d = 0$, тако што ћемо поново доказати резултат Леринца и Корбаша.

Тврђење 132 ([33]). $\mathrm{cup}(F(1^{\cdots j}, n)) = \dbinom{j}{2} + nj.$

Доказ. Приметимо да је $\delta(F(1^{\cdot\cdot j}, n)) = \binom{j}{2} + nj$, па је $\mathrm{cup}(F(1^{\cdot\cdot j}, n)) \leqslant \binom{j}{2} + nj$. Уз то, по последици 118 у H^* важи $x_1^n x_2^{n+1} \dots x_j^{n+j-1} \neq 0$, чиме је доказ завршен. $\square$

Нека је $s \in \mathbb{N}$ јединствен природан број такав да је $2^{s-1} < n+j+2d \leqslant 2^s$. Такође, нека су за $1 \leqslant m \leqslant d$ са $s(m)$ означени јединствени природни бројеви такви да важи $2^{s(m)-1} < n+j+2m \leqslant 2^{s(m)}$. Ове ознаке користићемо до краја овог поглавља.

Следећа лема директно следи из последице 123 и тврђења 130.

Лема 133. *Нека је $1 \leqslant m \leqslant d$. Тада у H^* важи:*

(1) $y_{m,1}^{2^{s(m)}-2} y_{m,2}^{n+j+2m-1-2^{s(m)-1}} = y_{m,2}^{n+j+2m-2} + p$;

(2) *за* $l \geqslant 2^{s(m)} - 1$, $y_{m,1}^l = q$;

где су p и q полиноми промењљивих $y_{m,1}, y_{m,2}, \dots, y_{d,1}, y_{d,2}$ такви да се сваки моном ових полинома налази у $B_{j,d,n}$ и да је у сваком од тих монома степен барем једне од промењљивих $y_{m+1,1}, y_{m+1,2}, \dots, y_{d,1}, y_{d,2}$ позитиван. $\square$

Лема 134. *У H^* следећи идентитети важе за $1 \leqslant i \leqslant d$:*

а) $$\prod_{t=i}^{d} y_{t,1}^{2^{s(t)}-2} y_{t,2}^{n+j+2t-1-2^{s(t)-1}} = \prod_{t=i}^{d} y_{t,2}^{n+j+2t-2}.$$

б) *ако је $l \geqslant 2^{s(i)} - 1$, тада важи* $$y_{i,1}^l \prod_{t=i+1}^{d} y_{t,1}^{2^{s(t)}-2} y_{t,2}^{n+j+2t-1-2^{s(t)-1}} = 0.$$ $\square$

Доказ. а) Доказ изводимо применом обрнуте индукције по i. За $i = d$ тврђење следи из леме 133. Претпоставимо зато да тврђење важи за неко $i \geqslant 2$ и докажимо да важи и за $i - 1$.

По леми 133 важи $y_{i-1,1}^{2^{s(i-1)}-2} y_{i-1,2}^{n+j+2i-3-2^{s(i-1)-1}} = y_{i-1,2}^{n+j+2i-4} + p$, где је p полином промењљивих $y_{i-1,1}$, $y_{i-1,2}, \dots, y_{d,1}$, $y_{d,2}$, такав да је сваки моном полинома p у $B_{j,d,n}$ и да је степен барем једне од промењљивих $y_{i,1}$, $y_{i,2}, \dots, y_{d,1}$,

$y_{d,2}$ у овом моному позитиван. Самим тим, по последици 121 важи

$$p\prod_{t=i}^{d} y_{t,1}^{2^{s(t)}-2} y_{t,2}^{n+j+2t-1-2^{s(t)-1}} = 0,$$

што по индуктивој претпоставци даје

$$\prod_{t=i-1}^{d} y_{t,1}^{2^{s(t)}-2} y_{t,2}^{n+j+2t-1-2^{s(t)-1}} = \prod_{t=i-1}^{d} y_{t,2}^{n+j+2t-2}.$$

б) По леми 133, $y_{i,1}^{l} = q$, при чему за сваки моном полинома q важи да је у $B_{j,d,n}$ и да је степен барем једне од променљивих $y_{i+1,1}, y_{i+1,2}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}$ у овом моному позитиван. Самим тим, по последици 121 важи

$$q\prod_{t=i+1}^{d} y_{t,1}^{2^{s(t)-2}} y_{t,2}^{n+j+2t-1-2^{s(t)-1}} = 0,$$

чиме је доказ завршен. □

У наредном тврђењу размотрићемо случај $j = 0$ и делимично уопштити Хилеров резултат из тврђења 130.

Тврђење 135. *Ако је са δ означена димензија многострукости $F(2^{\ldots d}, n)$, онда важи*

$$\mathrm{cup}(F(2^{\ldots d}, n)) \geqslant \delta - \sum_{t=1}^{d}(n + 2t - 1 - 2^{s(t)-1}).$$

Специјално, за $2^{s-1} < n + 2 \leqslant n + 2d \leqslant 2^{s}$ важи

$$\mathrm{cup}(F(2^{\ldots d}, n)) = d(n + d + 2^{s-1} - 2).$$

Доказ. По леми 134 је

$$\prod_{t=1}^{d} y_{t,1}^{2^{s(t)}-2} y_{t,2}^{n+2t-1-2^{s(t)-1}} = \prod_{t=1}^{d} y_{t,2}^{n+2t-2},$$

што је по последици 118 различито од нуле. Дакле,

$$\mathrm{cup}(F(2^{\ldots d}, n)) \geqslant \sum_{t=1}^{d}(2^{s(t)} - 2 + n + 2t - 1 - 2^{s(t)-1}) = \delta - \sum_{t=1}^{d}(n + 2t - 1 + 2^{s(t)-1}),$$

чиме је доказан први део тврђења.

Докажимо и други део тврђења. У овом случају важи $s(i) = s$, за $1 \leqslant i \leqslant d$, па из претходног закључујемо да је

$$\mathrm{cup}(F(2^{\cdot\cdot d}, n)) \geqslant (2^s - 2)d + \sum_{i=1}^{d}(n + 2i - 1 - 2^{s-1}) = d(n + d + 2^{s-1} - 2).$$

Са друге стране, из (6.4.2) је

$$\mathrm{cup}(F(2^{\cdot\cdot d}, n)) \leqslant d(n + d + 2^{s-1} - 2),$$

чиме је доказ завршен. □

У наредном тврђењу уопштићемо претходни резултат.

Тврђење 136. *Ако је са δ означена димензија многострукости $F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)$ важи*

$$\mathrm{cup}(F(1^{\cdot\cdot j}, 2^{\cdot\cdot d}, n)) \geqslant \delta - \sum_{t=1}^{d}(n + j + 2t - 1 - 2^{s(t)-1}).$$

Доказ. По леми 134 и последици 118 имамо

$$\prod_{t=1}^{j} x_t^{n+t-1} \prod_{t=1}^{d} y_{t,1}^{2^{s(t)}-2} y_{t,2}^{n+j+2t-1-2^{s(t)-1}} \neq 0.$$

Није тешко проверити да је степен овог монома једнак изразу на десној страни неједнакости из тврђења, чиме је доказ завршен. □

За $1 \leqslant k \leqslant d$ нека је са

$$e_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} y_{i_1,2} \dots y_{i_k,2}$$

означен елементарни симетрични полином степена k променљивих $y_{1,2}, y_{2,2}, \dots, y_{d,2}$ ($e_0 = 1$ и $e_k = 0$ за $k > d$), а са h_k означен комплетни симетрични полином степена k променљивих $y_{1,2}, y_{2,2}, \dots, y_{d,2}$ ($h_0 = 1$). Тада, по Њутновом идентитету, за $k \geqslant 1$ важи следећа једнакост (по модулу 2)

$$\sum_{i=0}^{\min\{d,k\}} e_i h_{k-i} = 0. \tag{6.4.3}$$

Лема 137. *Нека је $1 \leqslant i \leqslant j$, $m = \lfloor \frac{n+i}{2} \rfloor$ и $\alpha = n+i-2m$. Тада у H^* следећи идентитет важи за $0 \leqslant t \leqslant m-1$ и $\beta \in \{0,1\}$*

$$x_i^{n+i+2t+\beta} = x_i^{\beta} \sum_{r=1}^{m-t} x_i^{n+i-2r} \sum_{l=\max\{0,r+t-d\}}^{r-1} h_l e_{r+t-l} + x_i^{\alpha+\beta} \sum_{r=0}^{t-1} x_i^{2r} \sum_{l=0}^{\min\{r,d+r-t\}} h_{m-l} e_{t+l-r} + p,$$

где је p полином променљивих $x_i, \ldots, x_j, y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{d,1}, y_{d,2}$ у чијем је сваком моному барем једна од променљивих $x_{i+1}, \ldots, x_j, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{d,1}$ позитивног степена.

Доказ. По напомени 112 је $\overline{y}_{i,k} = y_{i,2}^{k/2} + p_k$, ако је k паран, а $\overline{y}_{i,k} = p_k$, ако је k непаран, где је p_k полином променљивих $y_{i,1}$ и $y_{i,2}$ такав да је степен променљиве $y_{i,1}$ позитиван у сваком моному полинома p_k. Самим тим, у H^* важи

$$\begin{aligned} 0 = g_i &= x_i^{n+i} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n+i}{2} \rfloor} x_i^{n+i-2r} \sum_{r_1+\cdots+r_d=r} y_{1,2}^{r_1} \cdots y_{d,2}^{r_d} + \widetilde{p} \\ &= x_i^{n+i} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n+i}{2} \rfloor} x_i^{n+i-2r} h_r + \widetilde{p}, \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

где је $\widetilde{p}$ полином у коме је у сваком моному степен барем једне од променљивих $x_{i+1}, \ldots, x_j, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{d,1}$ позитиван. Множењем овог идентитета са x_i^{β} и коришћењем једнакости (6.4.3) добијамо тражени идентитет у случају $t = 0$.

Доказ настављамо применом математичке индукције по $t \geqslant 0$. По индуктивној хипотези, коришћењем идентитета (6.4.3) и (6.4.4), као и чињенице да је $e_{t+1} = 0$ за $t \geqslant d$, добијамо следеће једнакости у H^*:

$$\begin{aligned} x_i^{n+i+2t+2+\beta} = x_i^{\beta} \sum_{r=1}^{m-t} x_i^{n+i-2r+2} &\sum_{l=\max\{0,r+t-d\}}^{r-1} h_l e_{r+t-l} \\ &+ x_i^{\alpha+\beta} \sum_{r=0}^{t-1} x_i^{2r+2} \sum_{l=0}^{\min\{r,d+r-t\}} h_{m-l} e_{t+l-r} + x_i^2 p \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_i^{\beta} x_i^{n+i} e_{t+1} + x_i^{\beta} \sum_{r=1}^{m-t-1} x_i^{n+i-2r} \sum_{l=\max\{0,r+1+t-d\}}^{r} h_l e_{r+1+t-l} \\
&\quad + x_i^{\alpha+\beta} \sum_{r=1}^{t} x_i^{2r} \sum_{l=0}^{\min\{r-1,d+r-1-t\}} h_{m-l} e_{t+l-(r-1)} + x_i^2 p \\
&= x_i^{\beta} \sum_{r=1}^{m-t-1} x_i^{n+i-2r} h_r e_{t+1} + x_i^{\beta} \sum_{r=m-t}^{m} x_i^{2(m-r)+\alpha} h_r e_{t+1} + x_i^{\beta} e_{t+1} \widetilde{p} \\
&\quad + x_i^{\beta} \sum_{r=1}^{m-t-1} x_i^{n+i-2r} \sum_{l=\max\{0,r+1+t-d\}}^{r} h_l e_{r+1+t-l} \\
&\quad + x_i^{\alpha+\beta} \sum_{r=1}^{t} x_i^{2r} \sum_{l=0}^{\min\{r-1,d+r-1-t\}} h_{m-l} e_{t+1+l-r} + x_i^2 p \\
&= x_i^{\beta} \sum_{r=1}^{m-t-1} x_i^{n+i-2r} h_r e_{t+1} + \\
&\quad + x_i^{\beta} \sum_{r=1}^{m-t-1} x_i^{n+i-2r} \sum_{l=\max\{0,r+1+t-d\}}^{r} h_l e_{r+1+t-l} + x_i^{\beta} e_{t+1} \widetilde{p} \\
&\quad + x_i^{\beta} \sum_{r=0}^{t} x_i^{\alpha+2r} h_{m-r} e_{t+1} \\
&\quad + x_i^{\alpha+\beta} \sum_{r=1}^{t} x_i^{2r} \sum_{l=0}^{\min\{r-1,d+r-1-t\}} h_{m-l} e_{t+1+l-r} + x_i^2 p \\
&= x_i^{\beta} \sum_{r=1}^{m-t-1} x_i^{n+i-2r} \sum_{l=\max\{0,r+1+t-d\}}^{r-1} h_l e_{r+1+t-l} \\
&\quad + x_i^{\alpha+\beta} \sum_{r=0}^{t} x_i^{2r} \sum_{l=0}^{\min\{r,d+r-1-t\}} h_{m-l} e_{t+1+l-r} + x_i^{\beta} e_{t+1} \widetilde{p} + x_i^2 p,
\end{aligned}
$$

где су p и $\widetilde{p}$ полиноми такви да је у сваком њиховом моному степен барем једне од променљивих $x_{i+1}, \ldots, x_j, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{d,1}$ позитиван. Како ово важи и за полином $x_i^2 p + x_i^{\beta} e_{t+1} \widetilde{p}$, доказ тврђења је завршен. □

Напомена 138. Приметимо да је за $t \geqslant d$ прва двострука сума у једнакости за $x_i^{n+i+2t+\beta}$ једнака нули, јер у њој нема сабирака.

У следећем тврђењу уопштићемо тврђење 3.2.4 из [33].

Тврђење 139. *Нека је $n \geqslant 3$.*

а) *За природан број s такав да је $2^{s-1} < n+2 < n+1+2d \leqslant 2^s$ важи $\mathrm{cup}(F(1,2^{\cdots d},n)) = n + d(n+d+2^{s-1})$.*

б) *За природан број s такав да је $2^{s-1} < n+2 < n+2+2d \leqslant 2^s$ важи $\mathrm{cup}(F(1,1,2^{\cdots d},n)) = 2n+1+d(n+d+2^{s-1}+2)$.*

Доказ. а) Нека је $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ и $\alpha = n+1-2m$. Приметимо да је $2d \leqslant 2^s - (n+1) \leqslant n+1$, а самим тим и $d-1 \leqslant m-1$. Дакле, по леми 137 важи

$$\begin{aligned} x_1^{n+2d} &= \sum_{r=1}^{m-d+1} x_1^{n+2-2r} \sum_{l=\max\{0,r-1\}}^{r-1} h_l e_{r+d-1-l} + x_1^{\alpha} \sum_{r=0}^{d-2} x_1^{2r+1} \sum_{l=0}^{\min\{r,r+1\}} h_{m-l} e_{d-1+l-r} + p \\ &= \sum_{r=1}^{m-d+1} x_1^{n+2-2r} h_{r-1} e_d + x_1^{\alpha} \sum_{r=0}^{d-2} x_1^{2r+1} \sum_{l=0}^{r} h_{m-l} e_{d-1+l-r} + p, \end{aligned}$$

где је p полином у чијем је сваком моному степен барем једне од променљивих $y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{d,1}$ позитиван. Приметимо да је $2(d-2)+1+\alpha < n$, па је у другој суми степен променљиве x_1 мањи од n. Дакле, по последици 121 и последици 124 важи

$$x_1^{n+2d} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{n+2i-2^{s-1}-1} = x_1^n e_d \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{n+2i-2^{s-1}-1} = x_1^n \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{n+2i-2^{s-1}},$$

што је различито од нуле по леми 134 и последици 118. Уз то, овај моном је максималне димензије и степени првих Штифел-Витнијевих класа у њему једнаки су одговарајућим висинама, па је $\mathrm{cup}(F(1,2^{\cdots d},n)) = n + d(n+d+2^{s-1})$.

б) Слично као у делу под а), доказаћемо да је класа

$$x_1^{n+2d} x_2^{n+1+2d} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{n+2i-1-2^{s-1}} \tag{6.4.5}$$

различита од нуле. Нека је $m' = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, $m'' = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$, $\alpha' = n+1-2m'$ и $\alpha'' = n+1-2m''$. Приметимо да је $2d \leqslant 2^s - (n+2) \leqslant n$, тј. $d-1 \leqslant m'-1 \leqslant m''-1$.

Самим тим, као у делу а), важи

$$x_1^{n+2d} = \sum_{r=1}^{m'-d+1} x_1^{n+2-2r} h_{r-1} e_d + x_1^{\alpha'} \sum_{r=0}^{d-2} x_1^{2r+1} \sum_{l=0}^{r} h_{m'-l} e_{d-1+l-r} + p',$$

где је p' полином у чијем је сваком моному степен барем једне од променљивих $x_2, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{d,1}$ позитиван. Такође, $2(d-2)+1+\alpha' < n$, па је степен променљиве x_1 у другој суми мањи од n. Дакле, по последици 121 и последици 124 класа

$$\left(x_1^{\alpha'} \sum_{r=0}^{d-2} x_1^{2r+1} \sum_{l=0}^{r} h_{m'-l} e_{d-1+l-r} + p' \right) x_2^{n+1+2d} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{n+2i-1-2^{s-1}}$$

је нула, па је класа у (6.4.5) једнака

$$x_1^n e_d x_2^{n+1+2d} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{n+2i-1-2^{s-1}} = x_1^n x_2^{n+1+2d} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{n+2i-2^{s-1}}.$$

Слично као у претходном делу доказа, ова класа је по леми 137, последици 121 и последици 124 једнака

$$x_1^n x_2^{n+1} e_d \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{n+2i-2^{s-1}} = x_1^n x_2^{n+1} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{n+2i+1-2^{s-1}},$$

што је по леми 134 и последици 118 различито од нуле. Коначно, степен класе у (6.4.5) једнак је $2n+1+d(n+d+2^{s-1}+2)$, што је уједно и $\beta(F(1,1,2^{\cdots d},n))$, чиме је доказ завршен. $\square$

Напомена 140. У тврђењу 144 доказаћемо да у случају $n+2 = 2^{s-1}$ важи $\mathrm{cup}(F(1,2^{\cdots d},n)) \neq n+d(n+d+2^{s-1})$, па се услов $2^{s-1} < n+2$ у делу а) не може ослабити.

Доња оцена за кохомолошку дужину добијена у тврђењу 136 често није довољно добра. У следећем тврђењу ову оцену поправићемо за неке реалне многостукости застава $F(1^{\cdots j},2^{\cdots d},n)$.

Тврђење 141. Нека је s природан број такав да важи $2^{s-1} < n+j+2d \leqslant 2^s$. Ако је $n+1 \leqslant 2^{s-1} \leqslant n+j+1 \leqslant \dfrac{2^s d-2}{2d-1}+1$, тада важи

$$\operatorname{cup}(F(1^{\dots j}, 2^{\dots d}, n)) \geqslant \delta(F(1^{\dots j}, 2^{\dots d}, n)) - 2\binom{d}{2}.$$

Доказ. Нека је $g = n+j+1-2^{s-1}$ и δ димензија посматране многострукости (приметимо да је $j \geqslant g$). Прво ћемо обрнутом индукцијом по l доказати да за $2^{s-1}-n \leqslant l \leqslant j$ важи следеће тврђење: ако су испуњена следећа три услова

(1) $a_i \geqslant n+i+2d-1$, $l \leqslant i \leqslant j$;

(2) $1+t_l \leqslant b_l \leqslant 2d(l+n-2^{s-1})+t_l$, где је $t_l = \sum_{i=l}^{j}(n+i+2d-1)$ и $b_l = \sum_{i=l}^{j} a_i$;

(3) p_Y је хомоген полином промењљивих $y_{1,2}, y_{2,2}, \dots, y_{d,2}$ такав да је

$$2\deg p_Y + d(2^s-2) + b_l \geqslant \sum_{i=l}^{j}(n+i-1) + \sum_{i=1}^{d}(2n+2j+4i-4),$$

тада је $p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i} = 0$ (у H^*).

За $l = j$ ово тврђење следи из последице 124 и услова (2). Претпоставимо зато да оно важи за неко $l \geqslant 2^{s-1}-n+1$ и докажимо да важи и за $l-1$. Нека је $a_{l-1} = n+l-1+2t+\beta$, где је $\beta \in \{0,1\}$ и $t \in \mathbb{N}$. Из услова (1) и (2) закључујемо да важи $2t+\beta \leqslant 2d-1+2d(l-1-j+g-1) = 2dn+2dl-2^s d-1$, а самим тим и $t \leqslant dn+dl-2^{s-1}d-1$. Како је $n+l \leqslant n+j \leqslant \frac{2^s d-2}{2d-1}$, важи $2^{s-1}d \geqslant \frac{(2d-1)(n+l)+2}{2}$, а самим тим и $t \leqslant \frac{n+l-2}{2} - 1 \leqslant \lfloor \frac{n+l-1}{2} \rfloor - 1$. Нека је $m = \lfloor \frac{n+l-1}{2} \rfloor$ и $\alpha = n+l-1-2m$. По леми 137 класа $p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l-1}^{j} x_i^{a_i}$ једнака је

$$p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i} \Bigg(x_{l-1}^{\beta} \sum_{r=1}^{m-t} x_{l-1}^{n+l-1-2r} \sum_{\nu=\max\{0,r+t-d\}}^{r-1} h_\nu e_{r+t-\nu} \\ + x_{l-1}^{\alpha+\beta} \sum_{r=0}^{t-1} x_{l-1}^{2r} \sum_{\nu=0}^{\min\{r,d+r-t\}} h_{m-\nu} e_{t+\nu-r} + p \Bigg), \tag{6.4.6}$$

где је p полином у чијем је сваком моному степен барем једне од променљивих $x_l, \dots, x_j, y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{d,1}$ позитиван. Приметимо да је $2(t-1)+\alpha+\beta \leqslant n+l-4$, тако да је у другој суми степен променљиве x_{l-1} мањи од $n+l-2$. Дакле, по последици 121 и како, на основу (1), важи $r+t-d \geqslant 0$, класа у (6.4.6) једнака је

$$\left(x_{l-1}^{n+l-3+\beta} \sum_{\nu=t+1-d}^{0} h_\nu e_{1+t-\nu} + p\right) p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i}. \tag{6.4.7}$$

Докажимо прво да је

$$p p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i} = 0.$$

Нека је p' моном полинома p. Ако је p' дељиво са $y_{i,1}$, за неко $1 \leqslant i \leqslant d$, тада је

$$p' p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i} = 0$$

по последици 124. Дакле, можемо претпоставити да је $p' = q x_f$, за неко $f \geqslant l$. Представимо q као суму монома из $B_{j,d,n}$. Нека је q' један моном у овој репрезентацији. Ако степен променљиве x_{l-1} у q' није $n+l-2$, тада је по последици 121

$$q' x_f p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i} = 0.$$

Дакле, можемо претпоставити да је степен променљиве x_{l-1} у q' једнак $n+l-2$. Тада је

$$q' x_f p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i} = x_{l-1}^{n+l-2} p'_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a'_i},$$

за неки хомоген полином p'_Y променљивих $y_{1,2}, y_{2,2}, \dots, y_{d,2}$, па важи

(1) $a'_i \geqslant a_i \geqslant n+i+2d-1,\ l \leqslant i \leqslant j$;

(2) $\sum_{i=l}^{j} a_i' \geqslant 1 + \sum_{i=l}^{j} a_i \geqslant 1 + \sum_{i=l}^{j}(n+i+2d-1)$ и

$$\begin{aligned}\sum_{i=l}^{j} a_i' &\leqslant \sum_{i=l-1}^{j} a_i - (n+l-2)\\ &\leqslant 2d(l-1-j+g-1) + \sum_{i=l-1}^{j}(n+i+2d-1) - (n+l-2)\\ &= 2d(l-j+g-1) + \sum_{i=l}^{j}(n+i+2d-1);\end{aligned}$$

(3) p_Y' је хомоген полином променљивих $y_{1,2}, y_{2,2}, \ldots, y_{d,2}$ и важи

$$\begin{aligned}2\deg p_Y' + d(2^s-2) + \sum_{i=l}^{j} a_i' &= 2\deg p_Y + d(2^s-2) + \sum_{i=l-1}^{j} a_i - (n+l-2)\\ &\geqslant \sum_{i=l}^{j}(n+i-1) + \sum_{i=1}^{d}(2n+2j+4i-4).\end{aligned}$$

Дакле, по индуктивној хипотези важи $p_Y' \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i'} = 0$, а самим тим

$$pp_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i} = 0.$$

Вратимо се на класу у (6.4.7). Прво, уколико је $t \geqslant d$, тада је сума у (6.4.7) једнака нули, па је и класа у (6.4.6) једнака нули. Зато можемо претпоставити да је $t = d-1$. Тада је на основу (1) $\beta = 1$, $a_{l-1} = n+l+2d-2$, а класа у (6.4.7) једнака је

$$x_{l-1}^{n+l-2} e_d p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i}.$$

Да бисмо завршили доказ помоћног тврђења, по индуктивној хипотези довољно је доказати да $e_d p_Y \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=l}^{j} x_i^{a_i}$ задовољава услове (1)–(3).

Услов (1) је очигледно задовољен. Такође,

$$\sum_{i=l}^{j} a_i = \sum_{i=l-1}^{j} a_i - (n+l+2d-2) \geqslant 1 + \sum_{i=l-1}^{j}(n+i+2d-1) - (n+l+2d-2)$$
$$= 1 + \sum_{i=l}^{j}(n+i+2d-1),$$
$$\sum_{i=l}^{j} a_i \leqslant 2d(l-1-j+g-1) + \sum_{i=l-1}^{j}(n+i+2d-1) - (n+l+2d-2)$$
$$< 2d(l-j+g-1) + \sum_{i=l}^{j}(n+i+2d-1),$$

па је и услов (2) задовољен.

Услов (3) следи на основу следећег: $p'_Y = e_d p_Y$ је хомогени полином променљивих $y_{1,2}, y_{2,2}, \ldots, y_{d,2}$ степена $d + \deg p_Y$, а самим тим

$$2\deg p'_Y + d(2^s-2) + \sum_{i=l}^{j} a_i = 2\deg p_Y + d(2^s-2) + \sum_{i=l-1}^{j} a_i - (n+l-2)$$
$$\geqslant \sum_{i=l}^{j}(n+i-1) + \sum_{i=1}^{d}(2n+2j+4i-4).$$

Вратимо се на доказ датог тврђења. Степен монома

$$\prod_{i=1}^{j-g} x_i^{n+i-1} \prod_{i=j-g+1}^{j} x_i^{n+i+2d-1} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=1}^{d} y_{i,2}^{2i-2}$$

једнак је $\sum_{i=1}^{j}(n+i-1) + 2dg + (2^s-2)d + 2\binom{d}{2} = \delta - 2\binom{d}{2}$, тако да је довољно доказати да ова класа није нула. По леми 137, последицама 121 и 124 и претходно доказаном помоћном тврђењу, ова класа једнака је

$$x_{j-g+1}^{n+j-g+2d} \prod_{i=1}^{j-g} x_i^{n+i-1} \prod_{i=j-g+2}^{j} x_i^{n+i+2d-1} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=1}^{d} y_{i,2}^{2i-2}$$
$$= x_{j-g+1}^{n+j-g} e_d \prod_{i=1}^{j-g} x_i^{n+i-1} \prod_{i=j-g+2}^{j} x_i^{n+i+2d-1} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=1}^{d} y_{i,2}^{2i-2}$$
$$= x_{j-g+2}^{n+j-g+1+2d} \prod_{i=1}^{j-g+1} x_i^{n+i-1} \prod_{i=j-g+3}^{j} x_i^{n+i+2d-1} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=1}^{d} y_{i,2}^{2i-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \prod_{i=1}^{j} x_i^{n+i-1} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} \prod_{i=1}^{d} y_{i,2}^{2i-2+g},
\end{aligned}
$$

што је по леми 134 и последици 118 различито од нуле. $\square$

Напомена 142. Приметимо да за $d = 1$ и $n+1 \leqslant 2^{s-1} \leqslant n+j+1$, по претходном тврђењу важи $\operatorname{cup}(F(1^{\cdots j}, 2, n)) = \delta(F(1^{\cdots j}, 2, n))$, што је специјалан случај теореме 3.1.3 из [33].

У следећем тврђењу представићемо бесконачну фамилију реалних многострукости застава облика $F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)$ за које је кохомолошка дужина мања од $\min\{\delta, \beta\}$, где је $\delta = \delta(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n))$ и $\beta = \beta(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n))$.

Није тешко проверити да, ако је $\binom{j}{2} \leqslant 2d(n+d-2^{s-1})$, тада важи $\beta \leqslant \delta$.

Тврђење 143. *Нека је s природан број такав да је $2^{s-1} < n+j+2d \leqslant 2^s$, $\delta = \delta(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n))$ и $\beta = \beta(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n))$. Ако је $\binom{j}{2}$ паран, $6 \leqslant \binom{j}{2} \leqslant 2d(n+d-2^{s-1})$ и $\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + d \leqslant \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, тада је*

$$\operatorname{cup}(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)) < \beta \leqslant \delta.$$

Доказ. Нека је $\prod_{i=1}^{j} x_i^{a_i} \prod_{i=1}^{d} (y_{i,1}^{b_i} y_{i,2}^{c_i})$ ненула моном за који је вредност

$$\sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=1}^{d} (b_i + c_i) = D$$

максимална. Претпоставимо да је $D \geqslant \beta$. Тада је $\operatorname{cup}(F(1^{\cdots j}, 2^{\cdots d}, n)) = \beta$ (по леми 131). Такође, по последици 124 важи $a_i \leqslant n+j+2d-1$, $1 \leqslant i \leqslant j$, $b_i \leqslant 2^s - 2$, $1 \leqslant i \leqslant d$, а наравно и $\sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=1}^{d} (b_i + 2c_i) \leqslant \delta$. Нека је $S = j(n+j+2d-1) + d(2^s-2)$. Сабирањем претходних неједнакости добијамо

$$2S + 2\left\lfloor \frac{\delta - S}{2} \right\rfloor = 2\beta = 2\sum_{i=1}^{j} a_i + 2\sum_{i=1}^{d} (b_i + c_i) \leqslant S + \delta. \tag{6.4.8}$$

Како је $\delta - S$ паран број, у неједнакости (6.4.8) важи једнакост, па је $a_i = n + j + 2d - 1$, за $1 \leqslant i \leqslant j$, и $b_i = 2^s - 2$, за $1 \leqslant i \leqslant d$. Дакле,

$$\prod_{i=1}^{j} x_i^{n+j+2d-1} \prod_{i=1}^{d} (y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{c_i}) \neq 0. \tag{6.4.9}$$

Нека је $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, $\alpha = n + 1 - 2m$, $t = \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + d - 1$, $\beta = j + 2d - 2 - 2t$. Како је $t \leqslant m - 1$, можемо применити лему 137 да представимо $x_1^{n+j+2d-1}$. Приметимо да је прва дупла сума у овом представљању једнака нули (јер је унутрашња сума празна), па је класа у (6.4.9) једнака

$$\left(x_1^{\alpha+\beta} \sum_{r=0}^{t-1} x_1^{2r} \sum_{l=0}^{d+r-t} h_{m-l} e_{t+l-r} + p \right) \prod_{i=2}^{j} x_i^{n+j+2d-1} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{c_i},$$

где је p полином у чијем је сваком моному степен барем једне од променљивих $x_2, \dots, x_j, y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{d,1}$ позитиван. Како је по последици 124

$$p \prod_{i=2}^{j} x_i^{n+j+2d-1} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{c_i} = 0,$$

и последици 121

$$x_1^{2r+\alpha+\beta} h_{m-l} e_{t+l-r} \prod_{i=2}^{j} x_i^{n+j+2d-1} \prod_{i=1}^{d} y_{i,1}^{2^s-2} y_{i,2}^{c_i} = 0, \qquad \text{за све } r < \frac{n-1}{2},$$

то је класа у (6.4.9) једнака нули, што је контрадикција. □

Ово поглавље завршићемо следећим тврђењем.

Тврђење 144. *За* $s \geqslant 4$ *важи*

$$\operatorname{cup}(F(1, 2, 2, 2^{s-1} - 2)) = \delta(F(1, 2, 2, 2^{s-1} - 2)) - 1.$$

Доказ. Нека је $N = 2^{s-1} - 1$. Представимо прво класу $t = y_{2,1}^{2N} y_{2,2}$ у адитивној бази $B := B_{1,2,N-1}$ (из последице 118). Приметимо да је димензија класе t једнака $2N + 2$. Дакле, по последици 119, како су $y_{2,2}^{N+1}$ и $y_{2,1}^2 y_{2,2}^N$ једини чланови из B променљивих $y_{2,1}$ и $y_{2,2}$, а димензије $2N + 2$, то је

$t=\alpha y_{2,2}^{N+1}+\beta y_{2,1}^2y_{2,2}^N$, за неке $\alpha,\beta\in\{0,1\}$. Приметимо да је висина класе $y_{2,1}$ једнака $2N$, па је $ty_{2,1}=0=\alpha y_{2,1}y_{2,2}^{N+1}+\beta y_{2,1}^3y_{2,2}^N$. Са друге стране,

$$0=g_{2,N}=\sum_{a+2b=2N+3}\binom{a+b-N}{a}y_{2,1}^ay_{2,2}^b=\binom{3}{3}y_{2,1}^3y_{2,2}^N+\binom{2}{1}y_{2,1}y_{2,2}^{N+1}=y_{2,1}^3y_{2,2}^N,$$

а како је $y_{2,1}y_{2,2}^{N+1}\in B$, закључујемо да је $\alpha=0$. Коначно, како је $t\neq 0$, јер је $ty_{2,2}=y_{2,2}^{N+2}\in B$ по леми 133, имамо да је $\beta=1$, тј. $y_{2,1}^{2N}y_{2,2}=y_{2,1}^2y_{2,2}^N$. Симетрично је $y_{1,1}^{2N}y_{1,2}=y_{1,1}^2y_{1,2}^N$.

Докажимо да је $\mathrm{cup}(F(1,2,2,N-1))\neq\delta(F(1,2,2,2^{s-1}-2))$. Како је $\delta(F(1,2,2,N-1))=5N+3$, $\mathrm{ht}(x_1)=N+3$, $\mathrm{ht}(y_{1,1})=\mathrm{ht}(y_{2,1})=2N$, довољно је доказати да је $u:=x_1^{N+3}y_{1,1}^{2N}y_{2,1}^{2N}$ једнако 0. По леми 137 је

$$x_1^{N+3}=x_1^{N-1}y_{1,2}y_{2,2}+p',$$

где је p' полином такав да сваки моном од p' садржи $y_{1,1}$ или $y_{2,1}$, или је степен променљиве x_1 у овом моному мањи од $N-1$. Дакле, по последицама 121 и 124 важи $p'y_{1,1}^{2N}y_{2,1}^{2N}=0$, па је

$$u=x_1^{N-1}y_{1,1}^{2N}y_{1,2}y_{2,1}^{2N}y_{2,2}=x_1^{N-1}y_{1,1}^2y_{1,2}^Ny_{2,1}^2y_{2,2}^N.$$

По формули (6.2.14) је $0=g_{1,N}=y_{1,1}^2y_{1,2}^N+y_{1,2}^{N+1}+y_{1,2}^Ny_{2,2}+p''$, где је p'' полином такав да сваки моном од p'' садржи $y_{2,1}$, или је степен променљиве $y_{2,2}$ у овом моному барем 2. Дакле, по последицама 121 и 124 важи $p''y_{2,1}^{2N}y_{2,2}=0$, а самим тим и $u=x_1^{N-1}(y_{1,2}^{N+1}+y_{1,2}^Ny_{2,2})y_{2,1}^2y_{2,2}^N$. Коначно, по (6.2.12) је $0=g_{1,N+2}=y_{1,2}^{N+1}+y_{1,2}^Ny_{2,2}+p'''$, где је p''' полином такав да сваки моном од p''' садржи $y_{2,1}$, или је степен променљиве $y_{2,2}$ у овом моному барем 2. Примењујући поново последице 121 и 124 закључујемо да је $p'''y_{2,1}^{2N}y_{2,2}=0$, тј. $u=0$.

Да бисмо завршили доказ, довољно је доказати да је $v:=x_1^{N+1}y_{1,1}^{2N}y_{2,1}^{2N}y_{2,2}$ различито од нуле. По леми 137 је

$$x_1^{N+1}=x_1^{N-1}(y_{1,2}+y_{2,2})+q',$$

где је q' полином такав да сваки моном од q' садржи $y_{1,1}$ или $y_{2,1}$, или је степен променљиве x_1 у овом моному мањи од $N-1$. По последицама 121 и 124 важи $q' y_{1,1}^{2N} y_{2,1}^{2N} y_{2,2} = 0$, па је

$$v = x_1^{N-1}(y_{1,2} + y_{2,2}) y_{1,1}^{2N} y_{2,1}^{2N} y_{2,2} = x_1^{N-1} y_{1,1}^{2N} y_{1,2} y_{2,1}^{2N} y_{2,2} + x_1^{N-1} y_{1,1}^{2N} y_{2,1}^{2N} y_{2,2}^2.$$

Како је $x_1^{N-1} y_{1,1}^{2N} y_{1,2} y_{2,1}^{2N} y_{2,2} = u = 0$, а по леми 134 и последици 118 важи $x_1^{N-1} y_{1,1}^{2N} y_{2,1}^{2N} y_{2,2}^2 = x_1^{N-1} y_{1,2}^{N} y_{2,2}^{N+2} \neq 0$, то је $v \neq 0$, чиме је доказ завршен. $\square$

Литература

[1] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[2] W. W. Adams, P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases*, Graduate Studies in Mathematics **3**, AMS 1994.

[3] T. Becker, V. Weispfenning, *Gröbner Bases: a Computational Approach to Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York 1993.

[4] I. Berstein, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Grassmanians*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **79** (1976) 129-134.

[5] A.D. Berenstein, A.V. Zelevinsky, *Triple Multiplicities for* $sl(r+1)$ *and the Spectrum of the Exterior Algebra of the Adjoint Representation*, J. Algebr. Comb. **1:1** (1992) 7-22.

[6] A. Bertram, *Quantum Schubert Calculus*, Adv. Math. **128** (1997), 289-305.

[7] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, W. Fulton, *Quantum Multiplication of Schur Polynomials*, J. Algebra **219** (1999), 728-746.

[8] A. Borel, *La cohomologie mod 2 de certains espaces homogenes*, Comm. Math. Helv. **27** (1953) 165-197.

[9] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. **57** (1953) 115-207.

[10] A. S. Buch, *Quantum cohomology of Grassmannians*, Compositio Math. **137** (2003), 227-235.

[11] A. S. Buch, *Quantum cohomology of partial flag manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 443-458.

[12] A. S. Buch, *The saturation conjecture (after A. Knutson and T. Tao)*, Enseign. Math. **46:2** (2000), 43-60.

[13] B. Buchberger, *A theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms*, ACM SIGSAM Bull. **10/3** (1976) 19-29.

[14] S. S. Chern, *On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle*, Ann. of Math. **49:2** (1948), 362-372.

[15] I. Ciocan-Fontanine, *On quantum cohomology rings of partial flag varieties*, Duke Math. J. **98:3** (1999) 485-524.

[16] I. Coskun, *A Littlewood-Richardson rule for two-step flag varieties*, Invent. Math. **176** (2009), 325-395.

[17] H. Duan, *On the inverse Kostka matrix*, J. Comb. Theory A **103** (2003), 363-376.

[18] O. Egeciouglu, J. B. Remmel, *A combinatorial interpretation of the inverse Kostka matrix*, Linear Multilinear A. **26** (1990), 59-84.

[19] C. Ehresmann, *Sur la cohomologie de certains espaces homogènes*, Ann. of Math. **35** (1934), 396-443.

[20] S. Fomin, S. Gelfand, A. Postnikov, *Quantum Schubert polynomials*, J. Am. Math. Soc. **10:3** (1997) 565-596.

[21] T. Fukaya, *Gröbner bases of oriented Grassmann manifolds*, Homology Homotopy Appl. **10(2)** (2008) 195-209.

[22] W. Fulton, *Young tableaux, with applications to representation theory and geometry*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, 1997.

[23] W. Fulton, C. Woodward, *On the quantum product of Schubert classes*, J. Alg. Geom. **13** (2004), 641661.

[24] I.M. Gelfand, M.L. Tsetlin, *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **71** (1950), 825-828, превод на енглески језик у *Collected Papers, Vol. II*, Springer, Berlin, 1998, 653-656.

[25] S.A. Ilori, *Intersection Formulae in Flag Manifolds*, Ann. Mat. Pur. Appl. **127:1** (1981), 307-319.

[26] J.-C. Hausmann, *Mod Two Homology and Cohomology*, Universitext, Springer 2014.

[27] H. Hiller, *On the cohomology of real Grassmanians*, Trans. Amer. Math. Soc. **257:2** (1980) 512-533.

[28] H. Hironaka, *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero: II*, Ann. of Math. **79:2** (1964), 205-326.

[29] R. C. King, C. Tollu, F. Toumazet, *Stretched Littlewood-Richardson and Kostka coefficients,* CRM Proceedings and Lecture Notes **34** (2004) 99-112.

[30] S.L. Kleiman, D. Laksov, *Schubert Calculus*, Am. Math. Mon. **79:1** (1972) 1061-1082.

[31] A. Knutson, T. Tao, *The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: Proof of the saturation conjecture*, J. Am. Math. Soc. **12:4** (1999) 1055-1090.

[32] J. Korbaš, *Bounds for the cup-length of Poincaré spaces and their applications*, Topology Appl. **153:15** (2006) 2976-2986.

[33] J. Korbaš, J. Lörinc, *The $\mathbb{Z}_2$-cohomology cup-length of real flag manifolds*, Fund. Math. **178** (2003) 143-158.

[34] B. Kostant, *A formula for the multiplicity of weight*, Trans. Amer. Math. Soc. **93:1** (1959) 53-73.

[35] C. Kostka, *Uber den Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **93** (1882) 89-123.

[36] C. Kostka, *Tafeln fur symmetrische Funktionen bis zur elften Dimension*, Wissenschaftliche Beilage zum Pragramm des koning. Gymnasiums und Realgymnaisums zu Insterberg, 1908.

[37] K. Y. Lam, *A formula for the tangent bundle of flag manifolds and related manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **213** (1975) 305-314.

[38] M. Lederer, *On a formula for the Kostka numbers*, Ann. Comb. **10:3** (2006), 389-394.

[39] I.G. MacDonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press 1995.

[40] L. Manivel, *Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci*, SMF/AMS Texts and Monographs **6**, AMS 1998.

[41] T.B. McAllister, *Applications of Polyhedral Geometry to Computational Representation Theory*, PhD thesis, University of California, Davis, 2006.

[42] D. McDuff, D.A. Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, AMS, University Lecture Series **6**, Providence, Rhode Island 1994.

[43] M. P. Mendes, A. Conde, *Gröbner bases and the immersion of real flag manifolds in Euclidean space*, Math. Slovaca **51** (2001) 107-123.

[44] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Ann. of Math. Studies **76**, Princeton University Press, New Jersey 1974.

[45] D. Monk, *The geometry of flag manifolds*, Proc. London Math. Soc. **9** (1959) 253-286.

[46] K. Monks, *Groebner bases and the cohomology of Grassmann manifolds with application to immersion*, Bol. Soc. Mat. Mex. **7** (2001) 123-136.

[47] H. Narayanan, *On the complexity of computing Kostka numbers and Littlewood-Richardson coefficients*, J. Algebr. Comb. **24:3** (2006) 347-354.

[48] G. H. Norton, A. Salagean, *Strong Gröbner bases for polynomials over a principal ideal ring*, Bull. Austral. Math. Soc. **64** (2001) 505-528.

[49] Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *On Gröbner bases for flag manifolds* $F(1,1,\dots,1,n)$, J. Algebra Appl. **12:3** (2013) 1-7.

[50] Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *Groebner bases and non-embeddings of some flag manifolds*, J. Aust. Math. Soc. . **96:3** (2014), 338-353.

[51] Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *On Groebner bases and immersions of Grassmann manifolds* $G_{2,n}$, Homology, Homotopy Appl. **13:2** (2011) 113-128.

[52] Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *Gröbner bases and some immersion theorems for Grassmann manifolds* $G_{3,n}$, arXiv:1306.4814.

[53] Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, M. Radovanović, *Multiplication in the cohomology of Grassmannians via Gröbner bases*, прихваћен за објављивање у часопису Journal of Algebra

[54] Z. Z. Petrović, M. Radovanović, *On the quantum cohomology of Grassmannians and quantum Kostka numbers*, на рецензији

[55] Б. Првуловић, *Гребнерове базе и имерзије Грасманових многострукости*, докторска дисертација, Математички факултет у Београду, 2012.

[56] B. I. Prvulović, *Gröbner bases for complex Grassmann manifold*, Publ. Inst. Math. **90 (104)**, (2011), 23-46.

[57] M. Radovanović, *Gröbner bases for some flag manifolds and applications*, прихваћен за објављивање у часопису Mathematica Slovaca

[58] M. Radovanović, *On the* $\mathbb{Z}_2$*-cohomology cup-length of some real flag manifolds*, прихваћен за објављивање у часопису Filomat

[59] E. Rassart, *Geometric approaches to computing Kostka numbers and Littlewood-Richardson coefficients*, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2004.

[60] Y. Ruan, G. Tian, *A mathematical theory of quantum cohomology*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 269-278.

[61] H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1879.

[62] T. Shimkus, *On Embeddings and Immersions of Real Flag Manifolds*, Int. J. Mod. Math. **5:1** (2010) 1-10.

[63] B. Siebert, G. Tian, *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*, Asian Journ. Math. **1** (1997), 679-695.

[64] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press 1999.

[65] R. Steinberg, *A general Clebsch-Gordan theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961) 406-407.

[66] R.E. Stong, *Cup products in Grassmannians*, Topology Appl. **13** (1982) 103-113.

[67] A. Yong, *Degree bounds in quantum Schubert calculus*, Proc. Amer. Math. Soc. **131:9** (2003), 2649-2655

[68] A.V. Zelevinsky, *Littlewood-Richardson Semigroups*, MSRI Publications **38** (1999) 337-345.

Биографија

Марко Радовановић рођен је 23.10.1985. у Београду. Дипломирао је на Математичком факултету у Београду 2008. године на смеру Теоријска математика и примене са просечном оценом 10. На истом факултету 2009. године одбранио је мастер рад под насловом „О тестовима прималности” (ментор проф. др Жарко Мијајловић). Од 2009. године ради као асистент на Математичком факултету у Београду.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Марко Радовановић

број уписа 2024/2009

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Гребнерове базе за многострукости застава и примене

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 15.5.2015.

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Марко Радовановић

Број уписа: 2024/2009

Студијски програм: Математика

Наслов рада: Гребнерове базе за многострукости застава и примене

Ментор: проф. др Зоран Петровић, ванредни професор

Потписани: Марко Радовановић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 15.5.2015.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Гребнерове базе за многострукости застава и примене

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 15.5.2015.

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.