

**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ**  
**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**



Милош Д. Давидовић

**Б-СПЛАЈН ХЕКСАЕДАРСКИ ЕЛЕМЕНТИ ЗА**  
**3Д ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКО МОДЕЛОВАЊЕ**

Докторска дисертација

Београд, 2014.

**UNIVERSITY OF BELGRADE**  
**SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING**



Miloš D. Davidović

**B-SPLINE HEXAHEDRAL ELEMENTS FOR 3D**  
**ELECTROMAGNETIC MODELING**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2014

Ментор:

др Милан Илић, ванредни професор

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Чланови комисије:

др Милан Илић, ванредни професор

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Бранко Колунџија, редовни професор

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Братислав Миловановић, редовни професор

Универзитет Сингидунум

др Драган Олћан, ванредни професор

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Др Ненад Цакић, редовни професор

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Датум одбране:

## **Сажетак**

У овој тези је размотрена формулација тродимензионе (3Д) методе коначних елемената (МКЕ) уз употребу Б-сплајн функција и коришћење хексаедарских елемената. При томе су Б-сплајн функције коришћене и за геометријско моделовање и за моделовање електричног поља. Будући да нова формулација омогућава независно геометријско моделовање и моделовање поља, проучене су и формулисане две варијанте методе, и то метода која користи хијерархијске полиномске функције за моделовање поља и метода која користи Б-сплајн функције за моделовање поља. Обе варијанте методе користе Б-сплајн функције за геометријско моделовање. Испитана је и веза између две варијанте методе. Како би 3Д геометријски модели могли да се користе у МКЕ потребно је параметризовање и дискретизовање геометрије. Ова тема је додатно размотрена имајући у виду специфичности моделовања геометрије помоћу Б-сплајн функција. Будући да је најзахтевнији део МКЕ алгоритма попуњавање МКЕ матрица, изведени су изрази за њихово попуњавање и приказани у детаљима.

Формулисане методе су примењене на неколико погодних примера који у одређеној мери илуструју реалне инжењерске проблеме као што су нетривијална геометрија, избор функција за апроксимацију поља и слично. При томе су методе упоређене или са аналитичким решењем или са референтним нумеричким решењем. Дат је и пример реалистичне анализе МКЕ конвергенције без употребе референтних решења и модела. На крају су дате смернице за могуће побољшање уведених метода и правци даљег истраживања.

**Кључне речи:** метода коначних елемената, Б-сплајн, геометријско моделовање, моделовање електромагнетског поља, резонантне шупљине, Галеркинова метода, анализа.

**Научна област:** Техничке науке – електротехника

**Ужа научна област:** електромагнетика

**УДК број:** 621.3



## **Summary**

This thesis presents a novel three-dimensional (3D) formulation of the finite element method (FEM) which utilizes B-spline functions and hexahedral elements. B-spline functions were used for both geometric modeling and electric field modeling. Since this novel formulation enables independent geometric and field modeling, two variations of the FEM were studied; the first utilizes hierarchical polynomial functions for field modeling and the second utilizes B-spline functions for field modeling. Both variations of the method utilize B-spline functions for geometric modeling. Possible relations between the two variations of the method were also studied in detail. In order to use 3D geometric models as input for the FEM analysis, further efforts to parametrize and discretize the geometry were needed. These topics were discussed in detail having in mind specificities of the B-spline functions when used for geometric modeling. Since FEM matrix assembly is the most demanding task in implementation of the FEM algorithm, detailed analytic expressions for entries in the FEM matrices were given.

Formulated methods were illustrated using several suitable examples which resemble difficulties met in real-life engineering problems (non trivial geometry, field-approximation choices, etc.). The calculated results were compared either with the analytical solutions, or with the high quality numerical solutions. An example of realistic FEM convergence analysis, which does not use referent solutions and models was also given. Concluding remarks state future research directions and possible improvements of the proposed methods.

**Keywords:** finite element method, B-spline, geometric modeling, electromagnetic field modeling, resonant cavities, Galerkin method, analysis.

**Academic Expertise:** Technical Sciences - Electrical Engineering

**Scientific Area:** Electromagnetics

**UDK number:** 621.3

# Садржај

<b>Увод</b> .....	<b>1</b>
<b>1 Основе методе коначних елемената</b> .....	<b>5</b>
1.1 Математичке основе методе коначних елемената .....	8
1.2 Формулација МКЕ у нумеричкој електромагнетици.....	15
<b>2 Основне дефиниције и особине Б-сплајн функција</b> .....	<b>26</b>
2.1 Основне особине Б-сплајн функција .....	28
2.2 Алгоритми за израчунавање Б-сплајнова.....	31
2.3 Алгоритми додавања чворова и подизања степена.....	33
2.4 Општи алгоритам за проналажење линеарних веза између фамилија на основу матричног представљања Б-сплајнова.....	39
<b>3 Геометријско моделовање у методи коначних елемената вишег реда ....</b>	<b>42</b>
3.1 Б-сплајн хексаедарски елементи .....	42
3.2 Алгоритам за аутоматско параметризовање Б-сплајн хексаедарских елемената.....	46
3.3 Додатне дефиниције неопходне за формулацију МКЕ.....	51
3.4 Алгоритам за прорачун инверзног геометријског пресликавања.....	52
3.5 Особине општег геометријског моделовања и геометријског моделовања у методи коначних елемената .....	53
<b>4 Моделовање електричног поља</b> .....	<b>56</b>
4.1 Апроксимирање електричног поља помоћу хијерархијских полиномских функција .....	56

4.2	Апроксимирање електричног поља помоћу Б-сплајн функција.....	58
4.3	Наметање континуалности тангенцијалне компоненте електричног поља .....	61
4.4	Попуњавање МКЕ матрица .....	72
4.5	Закључак.....	77
<b>5</b>	<b>Нумерички резултати и дискусија .....</b>	<b>78</b>
5.1	Резонантна шупљина облика квадрa .....	80
5.2	Сферична шупљина.....	94
5.3	Шупљина са гребеном.....	111
<b>6</b>	<b>Закључак .....</b>	<b>137</b>
	<b>Референце .....</b>	<b>139</b>

## Увод

Метода коначних елемената (МКЕ) је једна од најзначајнијих нумеричких метода у модерној инжењерској пракси [1-5]. Методе вишег реда [6] (било у смислу вишег реда геометријске апроксимације, било у смислу вишег реда апроксимације поља) су све више заступљене у нумеричкој електромагнетици, јер пружају веће могућности при геометријском моделовању и побољшану конвергенцију и ефикасност [7, 8]. Иако су МКЕ и њене основне поставке већ дуго познате, а нумеричка електромагнетика развијена научна област, истраживачки рад у овој области је врло жив. То је стога што употреба различитих базисних функција у формулацији може довести до драстичних разлика у тачности и ефикасности МКЕ прорачуна [7, 9]. Међутим, успешност инжењерског пројекта из електромагнетике је често у многоме одређена вештином практичара у формулацији проблема. Та вештина лежи у избору и употреби довољног броја детаља при геометријском моделовању и мешовању, затим у задавању разумне тачности у итеративним методама, и најзад у сврсисходној интерпретацији добијених резултата. Појмови геометријског моделовања и мешовања са специфичностима које прате употребу Б-сплајн функција ће бити размотрени у каснијим поглављима. Стога је за сваку нову методу неопходно проучити ове аспекте, како би се метода могла успешно користити у пракси.

Такође, битно је истаћи да у нумеричкој електромагнетици модел геометрије и модел поља треба да задовоље веома различит скуп услова. С једне стране, геометријски модел треба да буде компатибилан са савременим алатима за дизајнирање (енгл. *computer aided design tools*, CAD алати) и могућностима и

ограничењима процеса израде, док с друге стране, апроксимација поља треба да што боље задовољи Максвелове једначине и граничне услове. Стога је битно и значајно испитати аспекте независног моделовање геометрије и поља.

Предмет истраживања у овој дисертацији је коришћење Б-сплајн функција у методи коначних елемената (енгл. *finite element method*, FEM) са применом на тродимензионе (3Д) електромагнетске проблеме. У дисертацији ће бити проучени и проблеми геометријског моделовања и проблеми моделовања електромагнетског поља. Овакав избор функција је природан, будући да се у инжењерској пракси Б-сплајн функције због својих одличних својстава у апроксимирању и геометријском моделовању налазе у широкој и интензивној употреби. У 3Д геометријским моделима би се стога квалитетно геометријско моделовање могло постићи употребом троваријететних Б-сплајн функција (јер Б-сплајн модели геометрије омогућавају компатибилност са САД алатима), док се моделовање поља потом може разматрати засебно и помоћу других (или истих) функција, будући да коришћена МКЕ формулација допушта независно моделовање. У овој дисертацији су за моделовање поља разматране хијерархијске полиномске базисне функције и троваријететне Б-сплајн функције.

Основне особине нових формулација ће бити проучене на проблемима резонантних шупљина, где је могуће директно применити МКЕ без употребе апроксимативних граничних услова или хибридних формулација, што олакшава заснивање и концепцијски развој нове методе.

Осим прецизне МКЕ формулације за хијерархијске полиномске функције и троваријететне Б-сплајн функције, у овој дисертацији ће бити размотрени и неки аспекти тродимензионог геометријског моделовања Б-сплајн функцијама. Ово је нарочито важно имајући у виду да се у широко распрострањеним приступима у геометријском моделовању као последњи степен описа са експлицитно задатом геометријом обично користе површи, док се запреминска тела обично даље описују тополошки. Будући да формулисање МКЕ за 3Д проблеме захтева запреминску параметризацију, геометријски опис се мора проширити и прилагодити овим захтевима. Такође, биће дат осврт на специфичности у погледу

особина меша (дискретизација геометрије разматраног проблема) које су потребне за геометријско моделовање вишег реда.

У оквиру разматрања проблема апроксимације електричног поља биће дискутован проблем формирања тродимензионих функција базиса, полазећи најпре од полиномских хијерархијских базисних функција приказаних у литератури [7]. Будући да Б-сплајн функције не чине хијерархијски базис, али постоји могућност формирања хијерархијских функционалних простора, биће дат осврт на могућности које из тога произилазе. Биће размотрени проблеми  $h$ -профињивања и  $p$ -профињивања [6], и размотрен ред апроксимације поља који даје задовољавајуће резултате у погледу тачности и брзине израчунавања. Профињивање ће бити размотрено пре свега са аспекта употребе Б-сплајн функција за апроксимацију поља.

Можемо резимирати да се истраживање које је спроведено у овој дисертацији заснива на неколико основних полазних претпоставки:

- Геометријско моделовање у МКЕ формулацији треба да буде што усклађеније са моделовањем које се користи у софтверским алатима за унос геометрије. Ово је испуњено коришћењем Б-сплајн функција у геометријском опису.
- Геометријско моделовање и моделовање поља треба да у прихватљивој мери буду одвојени, уважавајући различите критеријуме које треба да испуни модел геометрије и модел поља. Размотрена су два начина моделовања поља, и то путем хијерархијских полиномских функција и путем Б-сплајн функција (из контекста ће бити јасно да ли се ради о Б-сплајн функцијама једне променљиве или о троваријететним Б-сплајн функцијама, па у даљем тексту нећемо користити никакву додатну одредницу).
- Побољшање апроксимације поља не би требало да доводи до значајних промена у геометријском опису, што није случај при коришћену геометријских елемената ниског реда.
- Постоје ефикасни алгоритми за израчунавање Б-сплајн функција, тако да њихова употреба може допринети ефикасности предложене Б-сплајн МКЕ

формулације. У тези су размотрени аспекти употребе Б-сплајн функција који могу довести до ефикаснијих МКЕ прорачуна.

Главни оригиналан научни допринос ове дисертације је формулација нове варијанте тродимензионе методе коначних елемената, где се независно моделују геометрија и поље уз употребу Б-сплајнова. Ове формулације су приказане у нашим радовима објављеним у међународним часописима [9, 10]. При томе су развијени и неки додатни алгоритми који могу бити од интереса при геометријском моделовању вишег реда који су приказани на конференцији [11].

Даља структура дисертације је следећа. Најпре ћемо у првом поглављу представити основе методе коначних елемената, потом ћемо у другом поглављу дати основне особине Б-сплајн функција, будући да су оне коришћене као основа геометријског модела (и делимично основа апроксимације поља). Потом ћемо у трећем поглављу навести основе геометријског моделовања уз осврт на неке специфичности геометријског моделовања вишег реда. У овом поглављу ћемо такође представити и неколико алгоритама који могу бити од користи у геометријском моделовању вишег реда. У четвртом поглављу ћемо дати дефиниције базисних функција за апроксимирање електричног поља и навести изразе за попуњавање МКЕ матрица. Такође ћемо дискутовати проблем наметања континуалности апроксимације поља и апроксимирање граничних услова. У петом поглављу ћемо дати резултате прорачуна који су добијени методама развијеним у овој дисертацији, уз поређење добијених резултата са аналитичким или референтним нумеричким решењима. Потом ћемо дати закључак и смернице за даљи развој представљених метода.

# 1 Основе методе коначних елемената

Принцип на коме се заснива метода коначних елемената је дискретизација парцијалних диференцијалних једначина која доводи до формулисања линеарног система алгебарских једначина [2, 12, 13]. При томе се врши двојака апроксимација, апроксимација диференцијалне једначине и апроксимација граничних услова. Као што је добро познато из класичне теорије диференцијалних једначина, до јединственог решења се долази тек након задовољавања и диференцијалне једначине и одговарајућих граничних услова. Стога и свака апроксимативна метода, да би у што већој мери била близу јединственог и што тачнијег решења, мора што ближе задовољавати и граничне услове и диференцијалну једначину. За неке једноставније видове једначина и гранични услови су једноставнији, па је тако, на пример, познато да једначине другог реда морају имати и два додатна гранична услова за јединствено решење. У случају нумеричке електромагнетике и МКЕ математички модел је заснован на Максвеловим једначинама у диференцијалном облику. Максвелове једначине у диференцијалном облику су систем парцијалних диференцијалних једначина и услови јединственог решења су за овај случај сложенији и дати су теоремом о јединствености решења Максвелових једначина [14, 15].

Историјски гледано, метода је први пут предложена од стране чувеног математичара Рихарда Куранта 1943. године, на конференцији Америчког друштва математичара [16], у вези са нумеричким решавањем проблема устаљеног равнотежног стања и проблема вибрација (проблеми налажења сопствених вредности). Битно је напоменути и рад Исака Шенберга из тог периода [17], у коме се сугерише да су најпогодније функције за апроксимирање



део по део полиномске функције. Шенберг се иначе сматра творцем сплајнова. Интересантан кратак преглед историје методе и неких отворених проблема се може наћи у [18]. Иако је сама метода први пут представљена пред математичарима, за њен развој су у почетку најзаслужнији инжењери који су се бавили теоријом конструкција. И само име методе (иако је наравно она постојала и пре садашњег опште прихваћеног имена) приписује се Реју Клафу, који је по професији био инжењер и бавио се динамиком конструкција у компанији Боинг [19].

Иако ћемо у овој дисертацији проучавати МКЕ у контексту нумеричке електромагнетике, треба имати у виду да је савремена МКЕ општа метода решавања диференцијалних једначина, која се може применити на веома широку класу проблема. Велики број проблема који припадају врло различитим областима се дакле може третирати на сличан начин ако их формулишемо користећи МКЕ. У табели 1-1 дати су примери математичких модела у неколико различитих области.

Табела 1-1: Преглед карактеристичних математичких модела у неколико различитих области

Област	Назив једначине
Класична механика	Лагранжове једначине
Квантна физика	Шредингерова једначина
Теорија поља	Ајнштајн Хилбертове једначине
Механика чврстог тела	Навијеове једначине еластичности
Динамика флуида	Навије Стоксове/ Ојлерове једначине
Класична електромагнетика	Маквелове једначине
Хидраулика	Таласна једначина
Физичка хемија	Кон Шамова једначина
Индустријска економија	Блек Шолова једначина
Нуклеарна техника	Једначина транспорта неутрона
Кинетика гасова	Болцманова једначина
Енергетска ефикасност	Једначина транспорта топлоте
Теорија конструкција	Једначина греде и једначина плоче
Инжењерство хемијских реакција	Једначина конвекције/дифузије/реакције

Интересантно је напоменути да оваква широка применљивост МКЕ, осим развоја инжењерства, резултује и идејама о реформи школства [20], при чему је идеја водила та да би студенти могли да стичу шира практична знања из више области него у уобичајеном моделу школства у коме је скоро свакој ставки у табели 1-1 придружен засебан предмет, катедра или факултет [20].

У нумеричкој електромагнетици МКЕ је први пут примењена у радовима Силвестера [21] за анализу таласовода. За примену на просторно неограничене домене једно од могућих решења је хибридна формулација, коју је међу првима увео Марин [22].

Прве формулације МКЕ које користе Б-сплајнове за развој непознатог поља могу се наћи у [23-25], где су анализирани 2Д проблеми у једноставним регуларним геометријским доменима, и где су дате прве идеје о коришћењу мултиплицитета у вектору чворова. Интересовање за Б-сплајнове као базисне функције у МКЕ је поново оживљено кроз недавне радове Хјуза у изогеометријској анализи [5, 26]. Недавно је изогеометријска анализа примењена и на електромагнетске проблеме, али се ови први радови углавном фокусирају на математички оквир анализе конвергенције [27-29]. Б-сплајн функције су коришћене и за МКЕ у временском домену у [30], квадратни сплајнови су коришћени за базисне функције зависне од времена при решавању интегралних једначина електромагнетског расејања [31], сплајнови су коришћени као базисне функције за развој струје у методи момената за анализу аксијално симетричних антена са рефлектором. У нешто ширем контексту, и не стриктно везано за МКЕ, у [32] је антенски низ оптимизован коришћењем комбинације генетског алгоритма и Б-сплајнова за представљање струјне побуде.

Међутим, у случају када се Б-сплајн функције користе за моделовање поља, није посвећено много пажње независном моделовању геометрије и поља, иако овакав приступ доводи до значајног поједностављења МКЕ алгоритма, може олакшати увид у детаље методе, повећати ефикасност прорачуна и олакшати практичну примену и реализацију методе. Иако Б-сплајнови омогућавају моделовање вишег реда (било у смислу геометријског моделовања било у смислу моделовања поља), што ће бити детаљно размотрено у овој дисертацији, постоје и

друге методе вишег реда, чији се одличан преглед може наћи у [33] и тамо наведеним референцама.

## 1.1 Математичке основе методе коначних елемената

Да бисмо користили МКЕ, потребно је проблем формулисати у облику

$$L(f) = g, \quad (1.1)$$

где је  $L$  линеаран (интегро-)диференцијални оператор,  $f$  непозната функција коју тражимо и  $g$  позната функција која представља побуду. Поред (1.1) потребан је и довољан број граничних услова како бисмо имали једнозначно постављен проблем. У овом тренутку ћемо се само фокусирати на апроксимирање, тј. дискретизацију једначине (1.1) док ћемо наметање граничних услова размотрити на конкретном примеру.

Први корак је да непознату функцију  $f$  апроксимирамо развојем по познатим базисним функцијама. Имамо дакле

$$f \approx \sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i b_i, \quad (1.2)$$

где су  $\alpha_i$  непознати коефицијенти,  $b_i$  познате базисне функције којих укупно има  $N_b$ . Зависно од типа непознате функције (да ли је скаларна или векторска величина) можемо одабрати неколико опција. Уколико је непозната величина скаларна, онда су и базисне функције и коефицијенти у развоју скаларне величине. Уколико је непозната величина векторска, тада су могуће две опције: коефицијенти су векторске величине, а базисне функције скаларне, или су коефицијенти скаларне величине, а базисне функције векторске. Након замене апроксимације (1.2) у (1.1) и имајући у виду да је  $L$  линеаран оператор, имамо

$$L(f) \approx L\left(\sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i L(b_i) \approx g. \quad (1.3)$$

Једначина (1.1) важи у бесконачно много тачака области дефинисаности функција  $f$  и  $g$ . Јасно је да апроксимација (1.3), иако може бити врло добра, у општем случају не може имати нулту грешку у бесконачно много тачака. У МКЕ

постављамо блаже услове једнакости функција него што је то једнакост "тачку по тачку" на целом домену функције. Уместо строге једнакости, користимо тестирање једнакости (1.3) такозваним тест функцијама, тј. захтевамо једнакост унутрашњих производа леве и десне стране са тест функцијама. Унутрашњи производ две функције дефинишемо као  $\langle f_i, f_j \rangle = \int_{\Omega} f_i f_j d\Omega$ , (где смо са  $\Omega$  обележили домен на коме решавамо проблем). Након тестирања једначина (1.3) се своди на линеаран систем једначина

$$\sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i \langle L(b_i), t_j \rangle = \langle g, t_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, N_b. \quad (1.4)$$

Број једначина у систему (1.4) је у општем случају једнак броју тест функција, тј. индекс  $j$  који индексира тест функције узима вредности од 1 до  $N_b$ . Циљ је добити квадратни систем у којем фигуришу само слободне променљиве. Формирање квадратног система у МКЕ није тривијално и биће најпре приказано на једноставном 1Д примеру, а потом и кроз формулацију која се користи у нумеричкој електромагнетици. Након решавања овог система као решење добијамо непознате коефицијенте у развоју (1.2). Од избора базисних функција и тест функција зависи и тачност и ефикасност методе. Уобичајено је да се за тест функције узимају исте функције као за развој непознате величине (тј. базисне функције), а таква верзија методе назива се Галеркинова метода. Могуће је користити и делта функције као тест функције, чиме добијамо тзв. методу подешавања у тачкама (енгл. *point matching*), тј. једначина (1.1) важи у тачкама које одговарају тест делта функцијама. Сада ћемо размотрити један једноставан пример, са 1Д геометријом, на коме ћемо илустровати и наметање граничних услова.

Нека је једнодимензиони електростатички проблем задат диференцијалном једначином  $\Delta\psi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ , где је  $\psi$  електрични скалар потенцијал. Нека је без умањења општости димензија дуж које постоји промена потенцијала  $x$  и нека су просторне границе проблема  $a$  и  $b$ . Апроксимативно решење ћемо пронаћи

користећи МКЕ, а за базисне функције ћемо користити троугаоне базисне функције и исти скуп тест функција (Галеркинова метода).

У каноничкој МКЕ формулацији овај проблем се може записати као  $L(\psi) = g$  где је  $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  (јер посматрамо једнодимензиони проблем) и  $g(x) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ .

Базисна троугаона функција је дата на интервалу  $(x_{n-1}, x_{n+1})$  изразом

$$b_i^{\text{троугаона}}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (1.5)$$

и има вредност 0 ван интервала дефинисаности. Овакав тип функција се назива нецелодоменска функција [34], јер није дефинисана на целом домену  $(a, b)$  који нам је од интереса. Аналогно, целодоменска функција је дефинисана на целом домену од интереса. У инжењерској пракси су међутим домени од интереса исувише велики и геометријски компликовани да би се базисне функције дефинисале директно на целом домену проблема. Стога се у практичној МКЕ користи нешто мање строга дефиниција, па се под нецелодоменским функцијама подразумевају функције чији је домен мањи од домена појединачног елемента. Са друге стране, целодоменске функције су различите од нуле на целом коначном елементу. У пракси су дакле обе врсте функција једнаке нули ван свог (одговарајућег) коначног елемента. У разматраном проблему за тест функције узимамо функције дате изразом (1.5). Унутрашњи производ дефинишемо са  $\langle f_i, f_j \rangle = \int_a^b f_i(x) f_j(x) dx$ . Непознату функцију  $\psi$  развијамо у ред преко  $N_b$

познатих базисних функција, као у изразу (1.2), тј.  $\psi \approx \sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i b_i$ . Будући да су

базисне функције троугаоне, овакав развој нам даје део по део линеарну апроксимацију непознате функције. Троугаоне функције које се налазе на границама интервала  $(a, b)$  не користимо на њиховом целом домену већ само на одговарајућем делу домена којим залазе у домен од интереса. Када наметнемо Дирихлеов гранични услов за функцију  $\psi$  у крајњим тачкама интервала добијамо да је  $\alpha_1 = \psi(a)$  и  $\alpha_{N_b} = \psi(b)$ . Дакле нису сви коефицијенти у развоју непознате

слободне променљиве (непознато тј. слободно је свега  $N_b - 2$  коефицијената), те имамо смањен број непознатих. То захтева и мањи број једначина у систему, па нам је потребан и мањи број тест функција. Да бисмо користили исти скуп функција за развој непознате функције и за тестирање из скупа тест функција избацујемо прву и последњу тест функцију.

Да бисмо могли да поставимо систем линеарних алгебарских једначина потребно је да нађемо унутрашње производе  $\langle Lb_n, b_m \rangle$  где је  $m = 2, 3, \dots, N_b - 1$  а  $n = 1, 2, \dots, N_b$ . Такође су нам потребни и  $\langle g, b_m \rangle$  за  $m = 2, 3, \dots, N_b - 1$ . За израз  $\langle Lb_n, b_m \rangle$  не можемо да користимо нумеричку интеграцију јер  $Lf_n$  има интегрални сингуларитет. Унутрашњи производ можемо наћи аналитички, имајући у виду да важи

$$Lb_n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b_n(x)) = \frac{1}{h} [\delta(x - x_{n-1}) - 2\delta(x - x_n) + \delta(x - x_{n+1})], \quad (1.6)$$

где је  $h$  корак с којим смо вршили поделу интервала  $(a, b)$  на подинтервале. Као тест исправности алгоритма можемо користити једноставне аналитичке примере за које је једноставно директном интеграцијом наћи тачно решење. Аналитички израз на основу кога израчунавамо  $\langle Lb_n, b_m \rangle$  је

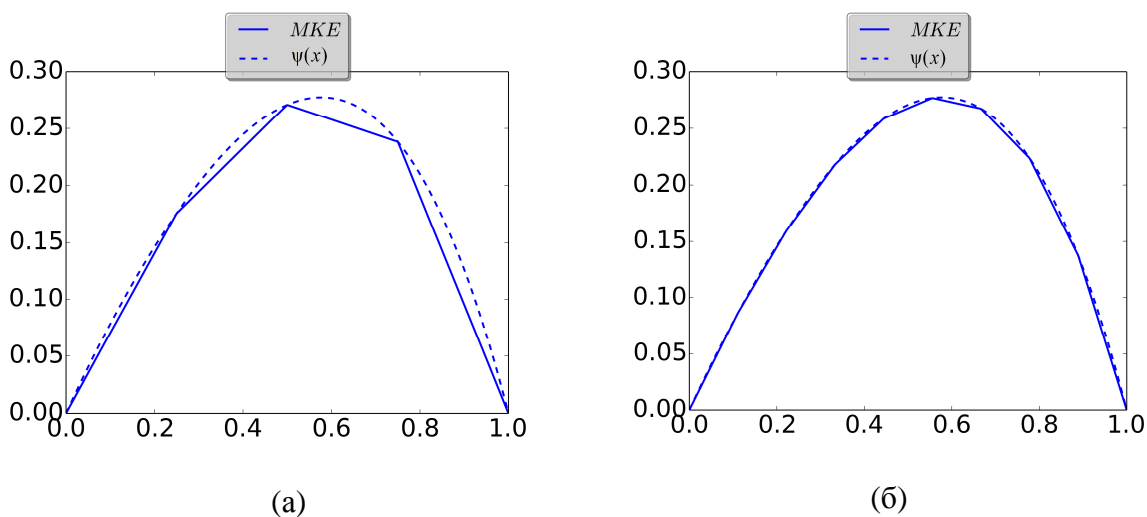
$$\langle Lb_n, b_m \rangle = \begin{cases} \frac{1}{h} & |n - m| = 1 \\ -\frac{2}{h} & |n - m| = 0 \end{cases} \quad \text{а једнак је } 0 \text{ када } |n - m| \notin \{0, 1\} \quad (1.7)$$

За потребе конкретног прорачуна нека је  $\frac{d^2\psi}{dx^2} = g(x) = -1 - 4x^2$ , нека је област проблема задата са  $(a, b) = (0, 1)$  и нека важе гранични услови  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ . Аналитичко решење овог проблема је  $\psi(x) = \frac{5x}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3}$ .

Резултати које добијамо за различите вредности броја базисних функција као и аналитичко решење приказани су на слици 1-1. Са повећањем броја функција грешка апроксимације се видно смањује. Напоменимо да ово не мора увек бити

случај и да конвергенција апроксимације тачном решењу не мора увек бити монотона, што ћемо и видети касније у 3Д нумеричким примерима.

Уочимо образац који ће се поновити и у сложенијим примерима. Коефицијенти у развоју функције нам служе за што боље апроксимирање операторске једначине **и граничних услова**. Природа поступка тестирања операторске једначине омогућава поставку теоријски неограниченог броја линеарних једначина. Ове једначине су последица важења полазне операторске једначине. Њихов број је међутим у општем случају једнак броју тест функција. Гранични услови такође улазе у коначну апроксимацију кроз додатне линеарне једначине. За граничне услове који нису Дирихлеовог типа (нпр. Нојманов или Робинов гранични услов) не бисмо одмах добили вредност коефицијената као у разматраном примеру, већ бисмо МКЕ систему придодали додатне линеарне једначине. Ово је стога што Нојманов и Робинов гранични услов садрже и изводе функције на граници домена (Нојманов услов садржи само изводе функције, док Робинов садржи линеарну комбинацију вредности функције и извода на граници). Интересантно је приметити да су троугаоне базисне функције у ствари Б-сплајн функције првог степена. Нешто више о сплајн функцијама ћемо рећи у наредном поглављу.



Слика 1-1: Део по део линеарна апроксимација непознате функције добијена МКЕ методом: (а) нумеричко решење при  $N_b = 5$  и аналитичко решење, и (б) нумеричко решење при  $N_b = 10$  и аналитичко решење.

Будући да је аналитичко решење у разматраном примеру облика полинома, помоћу МКЕ би се могло добити и тачно решење уз употребу одговарајућих (полиномских) базисних функција. У општем случају је међутим могуће добити само апроксимацију тачног решења.

Иако је то тешко уочљиво на 1Д примеру, општост МКЕ се заснива на могућности дефинисања базисних функција на доменима разних облика. Ово омогућава апроксимирање непознате величине за случај многих практичних улазних геометријских модела који су од интереса у инжењерству. Поступак који смо описали у претходном примеру, иако лежи у основи МКЕ, због геометрије која је једнодимензиона не приказује у довољној мери снагу и општост методе, али илуструје употребу нецелодоменских функција и наметање граничних услова. Проблем практичног 3Д геометријског моделовања и геометријски опис хексаедарских елемената вишег реда ћемо дати у наредним поглављима, а сада ћемо навести још неке додатне математичке дефиниције. У математичкој литератури се појам коначног елемента дефинише на следећи начин [6, 35]:

*Коначни елемент је уређена тројка  $(\omega, P, \Phi)$  где је  $\omega$  затворени подскуп  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \in \{2, 3\}$  са Липшицовом границом  $\partial\omega$ <sup>1</sup> и непразним скупом  $\tilde{\omega}$  унутрашњих тачака тј. чворова ( $\omega$  представља геометријски део коначног елемента),  $P$  је  $t$ -димензиони простор функција дефинисаних на  $\omega$  (базисне функције дефинисане на елементу су базис овог простора, најчешће полиномског облика, при чему се наравно користе полиноми више променљивих),  $\Phi$  је скуп линеарно независних линеарних функционала  $F_i : P \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, t$  (линеарни функционал  $F_i$  неке функције се најчешће дефинише као вредност те функције у неком чвору  $x_i \in \omega$ ).*

---

<sup>1</sup> За формалну дефиницију Липшицове границе видети [36] K. Rektorys, *Variational methods in mathematics, science and engineering* vol. 1: Springer, 1980., а са становишта практичне примене довољно је знати да уобичајени МКЕ домени као што су тетраедар, хексаедар Липшицови домени. Додатно, домени коначних елемената се у пракси добијају пресликавањем полиномског типа а полиноми су континуални у Липшицовом смислу [20] K. Eriksson, D. Estep, and C. Johnson, *Applied mathematics body and soul: vol I-III: Springer-Verlag Publishing* 2003.)



Уколико су базисне функције  $b_j(x)$ ,  $j=1, \dots, m$  интерполаторне (тј. у одговарајућим чворовима само је једна базисна функција различита од нуле и има вредност 1), тада је уз одговарајућу нумерацију линеарних функционала

$$F_i(b_j) = \delta_{ij}. \quad (1.8)$$

Тада се и било која функција из простора  $P$  може представити у облику

$$f(x) = \sum_{i=1}^m F_i(f) b_i(x). \quad (1.9)$$

У општем случају, међутим, базисне функције нису интерполаторне, па се израз за развој не може директно израчунавати. Такође, функције које треба да представимо у одређеном елементу обично нису из простора  $P$ , већ се у њему могу боље или лошије апроксимирати. Ако је дакле такву функцију потребно представити на неком коначном елементу, потребно је решити систем

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i(x).$$

Ово се може учинити Галеркиновом методом која је претходно

описана, где је оператор  $L$  оператор идентичног пресликавања.

Наведена дефиниција коначног елемента има неколико недостатака за примену у практичној нумеричкој електромагнетици са коначним елементима вишег реда. Најпре, базисне функције су скаларне, што нам отежава формулацију у којој је непозната функција векторска величина. Затим, функционали који се помињу у дефиницији коначног елемента обично подразумевају дефинисање чворова који су карактеристични за сваки функционал, тј. одговарајућу интерполаторну базисну функцију. Сваки коефицијент у развоју непознате функције на елементу има дакле директну физичку интерпретацију (као вредност функције у одговарајућем чвору елемента). Познато је међутим да коефицијенти у развоју код елемената вишег реда немају директну физичку интерпретацију, (један од разлога је и што базисне функције код елемената вишег реда нису интерполаторне у општем случају). Стога се у инжењерској пракси под појмом елемента подразумева нешто једноставнија структура, која има своју дефинисану геометрију и базисне функције дефинисане на основном елементу. Домен базисних функција за сваки елемент се потом добија погодним пресликавањем

основног домена у домен сваког појединачног елемента. У тези ћемо засебна поглавља посветити и дефинисању геометрије хексаедарског елемента (и геометријском моделовању) и базисним функцијама за апроксимацију електричног поља. Ипак, треба напоменути и да математичка дефиниција елемента није без своје практичне вредности, нарочито за нодалне елементе, будући да се може користити при формулацији нових типова функција у МКЕ, нпр. хармонијских функција вишег реда [35]. Нодални (енгл. *node* значи чвор) елементи користе интерполаторне базисне функције које су једнаке јединици на чворовима елемента, и при томе број функција одговара броју чворова.

Сада ћемо се осврнути на математичке моделе који се користе у МКЕ у електромагнетици и извести неке карактеристичне једначине.

## 1.2 Формулација МКЕ у нумеричкој електромагнетици

Уобичајена формулација МКЕ у нумеричкој електромагнетици подразумева посматрање устаљеног простопериодичног режима када су Максвелове једначине задате у комплексном домену [14, 37]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} - \mathbf{J}_M \quad (\text{Фарадејев закон}), \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_E \quad (\text{Максвел Амперов закон}), \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_E \quad (\text{Гаусов закон за електричну индукцију}), \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_M \quad (\text{Гаусов закон за магнетску индукцију}), \quad (1.13)$$

где су  $\mathbf{E}$  јачина електричног поља  $[\text{V/m}]$ ,  $\mathbf{H}$  јачина магнетског поља  $[\text{A/m}]$ ,  $\mathbf{D}$  електрична индукција  $[\text{C/m}^2]$ ,  $\mathbf{B}$  магнетска индукција  $[\text{T}] = [\text{Wb/m}^2]$ ,  $\mathbf{J}_E$  густина струје електричних слободних наелектрисања  $[\text{A/m}^2]$ ,  $\mathbf{J}_M$  густина струје магнетских слободних наелектрисања  $[\text{V/m}^2]$ ,  $\rho_E$  запреминска густина електричних слободних наелектрисања  $[\text{C/m}^3]$ ,  $\rho_M$  запреминска густина магнетских слободних наелектрисања  $[\text{T/m}] = [\text{Wb/m}^3]$  и  $\omega$   $[\text{s}^{-1}]$  кружна учестаност.

Приметимо да су једначине формулисане тако да имају врло висок степен симетрије и дуалности и то увођењем магнетских струја и магнетских наелектрисања. Иако су ове величине фиктивне, оне могу имати корисну улогу нарочито у нумеричким методама када се могу користити кроз форме теореме еквиваленције, као и у неким врстама граничних услова [14, 15].

Под претпоставкама да нам је за одређивање једне непознате скаларне (комплексне) величине потребна једна независна скаларна (комплексна) једначина, и ако једна векторска једначина даје три скаларне, уочавамо да нам Максвелове једначине дају свега 8 скаларних једначина [37] (Фарадејев закон и Максвел Амперов закон по 3, и Гаусови закони по 1), док са друге стране имамо 20 скаларних непознатих (сваки од непознатих вектора  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{J}_E, \mathbf{J}_M$  доприноси са по 3 скаларне непознате и имамо још 2 скаларне непознате у виду  $\rho_E$  и  $\rho_M$ , па је  $6 \cdot 3 + 2 = 20$ ). Да бисмо добили довољан број једначина потребно је узети у обзир и тзв. конститутивне релације које одређују везе између  $\mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{J}_E, \mathbf{J}_M$  и  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  и имају форму

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \\ \mathbf{J}_E &= \mathbf{J}_E(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \\ \mathbf{J}_M &= \mathbf{J}_M(\mathbf{E}, \mathbf{B}),\end{aligned}\tag{1.14}$$

које нам дају преосталих 12 независних једначина. Неки аутори конститутивне релације записују у односу на векторе  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , но ово није од пресудне важности, нарочито у случају ако проучавамо линеарне средине где су конститутивне релације једноставније. У случају линеарних средина, конститутивне релације гласе

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mu^{-1}\mathbf{B}, \\ \mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E}, \\ \mathbf{J}_E &= \sigma_E\mathbf{E}, \\ \mathbf{J}_M &= \sigma_M\mathbf{H}\end{aligned}\tag{1.15}$$

где су  $\mu$  [H/m] пермеабилност,  $\varepsilon$  [F/m] пермитивност,  $\sigma_E$  [S/m] специфична проводност електричне струје и  $\sigma_M$  [ $\Omega$ /m] специфична проводност магнетске струје.

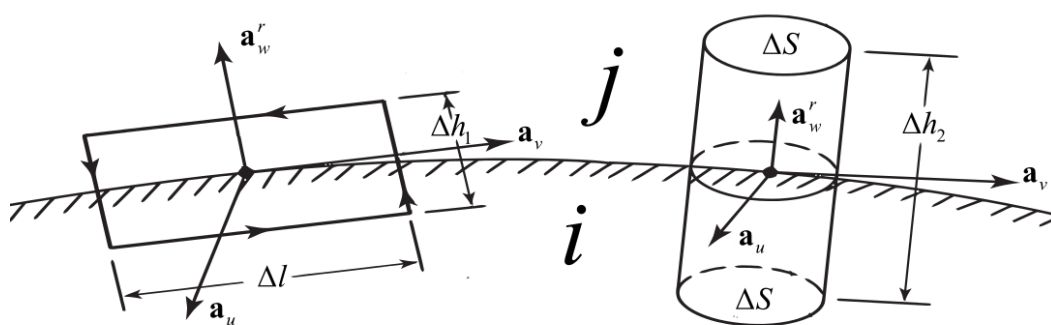
Густина магнетске струје се обично користи при примени теорема еквиваленције, па за њу конститутивне релације нису од посебног интереса, али су наведене у (1.15) зарад комплетности. Такође, користили смо ознаку  $\mu^{-1}$  уместо  $\frac{1}{\mu}$  будући да је нешто општија и може се користити и када су конститутивни параметри тензорске величине, а не скалари. У овој тези нису разматране тензорске величине као конститутивни параметри али је ипак коришћена ова нешто општија формулација. У случају бианизотропних средина, када у конститутивним релацијама постоји зависност од оба поља, потребно је водити рачуна о томе коју од величина користимо (**H** или **V**) са десне стране у релацији (1.15).

Домен у коме решавамо систем Максвелових једначина и конститутивних релација мора бити коначан. Увођењем границе домена морамо дефинисати и додатне граничне услове које величине од интереса морају да задовоље. Једначине које садрже ротор могу се преформулисати у еквивалентне интегралне једначине у којима фигурише интеграл по затвореној контури. На сличан начин се једначине које садрже дивергенцију могу преформулисати у еквивалентне интегралне једначине у којима фигурише интеграл по затвореној површи. Гранични услови се најчешће изводе из ових интегралних једначина, тако што их применимо на елементарну затворену контуру односно елементарну затворену површ које захватају раздвојну површ. Интересантно је напоменути да се гранични услови могу изводити и директно без преласка на интегралну форму уз коришћење генералисаних функција [38]. Скице затворене контуре и затворене површи на раздвојној површи две средине које се могу искористити за извођење граничних услова приказане су на слици 1-2. Гранични услови се изводе тако што пустимо да  $\Delta h_1 \rightarrow 0$  за контуру односно  $\Delta h_2 \rightarrow 0$  за површ. На пример, интегрална форма једначине (1.10) гласи

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int_S \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{S} \quad (1.16)$$

и применом на контуру за слике 1-2, будући да су  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{J}_M$  имају коначну вредност, а да је површ по којој рачунамо флукс произвољно мала (јер  $\Delta h_1 \rightarrow 0$ ), имамо

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Delta l_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta h_1^+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta l_j} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta h_1^-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Delta l_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta l_j} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_S \mathbf{J}_{SM} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.17)$$



Слика 1-2: Раздвојна површ две средине са елементарном затвореном контуром (лево) и елементарном затвореном површи (десно).

У једнакост (1.17) смо увели фиктивне површинске струје јер једино оне могу дати флукс који је различит од нуле кроз површину мере нула. Једнакост (1.17) изједначава два скалара и практично представља гранични услов на раздвојној површи. Уобичајено је међутим да се гранични услов задаје кроз векторску релацију

$$\mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_i + \mathbf{n}_j \times \mathbf{E}_j = -\mathbf{J}_{SM}, \quad (1.18)$$

где су  $\mathbf{n}_i$  и  $\mathbf{n}_j$  јединичне нормале на раздвојну површ усмерене од средине  $i$  и од средине  $j$ , редом,  $\mathbf{E}_i$  и  $\mathbf{E}_j$  представљају електрично поље уз раздвојну површ у средини  $i$  и у средини  $j$ , редом,  $\mathbf{J}_{SM}$  је (фиктивна) површинска густина магнетске струје. Иако фиктивне струје често немају директну физичку интерпретацију, оне могу бити од користи у нумеричким методама и користе се у разним видовима теорема еквиваленције и у сврху апроксимирања граничних услова. Нарочиту

улогу имају у методи момената, видети нпр. [8, 34]. Површинске електричне струје могу имати физичку интерпретацију уколико је једна од средина савршени електрични проводник. Овакав модел је близак реалној физичкој ситуацији у случају постојања струје високе учестаности у веома добром проводнику због такозваног површинског (енгл. *skin*) ефекта. Слично се могу извести гранични услови и за остале величине од интереса и дати су у табели 1-2. Величине  $\rho_{SE}$  и  $\rho_{SM}$  су површинске густине електричног и магнетског наелектривања редом.

Битно је напоменути да су изрази у табели 1-2 наведени уз претпоставку да се материјалне средине и њихове раздвојне површи не крећу у односу на референтни координатни систем. Интересантно извођење граничних услова уз коришћење Диракове делта функције за средине које се крећу се може наћи у [38].

Табела 1-2: Преглед граничних услова за величине  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ .

Раздвојна површ средина у општем случају	Раздвојна површ средина са коначном проводношћу
$\mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_i + \mathbf{n}_j \times \mathbf{E}_j = -\mathbf{J}_{SM}$	$\mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_i + \mathbf{n}_j \times \mathbf{E}_j = 0$
$\mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_i + \mathbf{n}_j \times \mathbf{H}_j = \mathbf{J}_{SE}$	$\mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_i + \mathbf{n}_j \times \mathbf{H}_j = 0$
$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{D}_i + \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{D}_j = \rho_{SE}$	$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{D}_i + \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{D}_j = 0$
$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B}_i + \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{B}_j = \rho_{SM}$	$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B}_i + \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{B}_j = 0$

Апроксимирање граничних услова у МКЕ има и неке додатне специфичности. Осим физичке раздвојне површи у МКЕ и између свака два елемента постоји раздвојна површ. Физичке раздвојне површи су обично дискретизоване помоћу више елемената, тј. обично додирују више елемената са обе стране. Број елемената може бити различит, а у случају да користимо електрички велике елементе, физичка раздвојна површ може додиривати свега два елемента. Ако је запремина средине  $i$  параметризована тако да је раздвојна површ параметризована локалним координатама  $u$  и  $v$ , тада су унитарни вектори  $\mathbf{a}_u$  и  $\mathbf{a}_v$  тангентни на раздвојну површ, док је реципрочни унитарни вектор  $\mathbf{a}_w^r$  нормалан на површ (слика 1-2). Дефиниције унитарних и реципрочних унитарних вектора у

контексту МКЕ реализоване помоћу хексаедарских елемената ћемо дати у поглављу о геометријском моделовању. Ако је средина  $i$  обухваћена и параметризована коначним елементом на начин приказан на слици 1-2, имамо да је

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{a}_w^r}{|\mathbf{a}_w^r|}, \quad \mathbf{n}_j = -\frac{\mathbf{a}_w^r}{|\mathbf{a}_w^r|}. \quad (1.19)$$

Уобичајено је да се векторска МКЕ формулише преко таласне једначине (двоструке роторске једначине) у којој је непозната електрично поље или једначине магнетског вектор потенцијала у којој је непозната магнетски вектор потенцијал [39]. Иако се гранични услови уобичајено наводе само за величине дате у табели 1-2, уколико МКЕ имплементација то захтева, потребно је знати граничне услове и за нешто мање уобичајене величине, као на пример за магнетски (и електрични) вектор потенцијал, преко којих се такође може формулисати МКЕ у нумеричкој електромагнетици. У тези ћемо користити формулацију МКЕ уз коришћење таласне једначине, где је непозната величина електрично поље. У поглављу о апроксимирању електричног поља помоћу векторских базисних функција детаљније ћемо изложити како се гранични услови за електрично поље апроксимирају у МКЕ. Додатни опрез је потребан при утврђивању јединствености решења уколико се користи МКЕ формулација преко једначине магнетског вектор потенцијала, јер осим тога што је теорема јединствености дата преко граничних услова за електрично и магнетско поље, потенцијали нису јединствене величине, већ је за јединственост потребно начинити избор тзв. гејџа (енгл. *gauge*), што се мора наметнути као додатна једначина при формирању МКЕ система.

Таласна једначина за електрично поље се изводи на следећи начин [14, 40]. Полазећи од Фарадејевог закона, уколико обе стране помножимо са  $\mu^{-1}$ , а затим и узмемо ротор обе стране, имамо

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla \times (-j\omega \mathbf{H} - \mu^{-1} \mathbf{J}_M) = \\ &= -j\omega \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times (\mu^{-1} \mathbf{J}_M) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Заменом  $\nabla \times \mathbf{H}$  из Максвел-Амперовог закона добијамо

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) &= -j\omega(j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_E) - \nabla \times (\mu^{-1} \mathbf{J}_M) = \\ &= \omega^2 \epsilon \mathbf{E} - j\omega \mathbf{J}_E - \nabla \times (\mu^{-1} \mathbf{J}_M).\end{aligned}\quad (1.21)$$

У уобичајеној МКЕ формулацији претпоставља се да нема струја у запремини од интереса, па претходна једначина добија једноставнији облик

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 \epsilon \mathbf{E} = 0. \quad (1.22)$$

Претпоставка да нема запреминских струја је испуњена у великом броју проблема од практичног интереса. У случају проучавања проблема резонантних шупљина математички проблем је налажење сопствених вредности и у том случају се побуда путем запреминских струја и не уводи. Са друге стране, у случају да се проучава електромагнетска структура у којој имамо неки извор одређене учестаности, тада је МКЕ формулација нешто сложенија али и даље не захтева увођење запреминских струја. На микроталасним учестаностима структуре су обично са извором и пријемником повезане неком врстом вода (таласовод, микрострип вод итд.). У том случају се поље дуж вода апроксимира развојем по модовима [41], а затим се одговарајућа побуда уводи кроз тангенцијалне граничне услове, при чему је диференцијална једначина и даље истог облика, тј. без запреминских струја.

Дискретизација једначине (1.22) се врши на потпуно аналоган начин као и у 1Д примеру представљеном на почетку овог поглавља, уз незнатне измене. Будући да једначина (1.22) важи у тродимензионом простору и да користимо векторске базисне функције и методу Галеркина, дефиниција унутрашњег производа је дата са

$$\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle = \iiint_{\Omega} \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j dV. \quad (1.23)$$

Интеграл (1.23) се израчунава по целој запремини на којој је дефинисан проблем од интереса. Након тестирања једнакости (1.22) тест функцијама  $\mathbf{f}_t$  добијамо једнакост

$$\langle \mathbf{f}_t, \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 \epsilon \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{f}_t, 0 \rangle = 0. \quad (1.24)$$



Будући да је  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$  ако узмемо да је  $\mathbf{A} = \mathbf{f}_t$  и  $\mathbf{B} = \mu^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$ , имамо да је

$$\mathbf{f}_t \cdot \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \nabla \times \mathbf{f}_t - \nabla \cdot (\mathbf{f}_t \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}). \quad (1.25)$$

Стога се лева страна израза (1.24) своди на

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_t, \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \rangle = \\ \iiint_{\Omega} (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \nabla \times \mathbf{f}_t dV - \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{f}_t \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dV - \omega^2 \iiint_{\Omega} \mathbf{f}_t \cdot \varepsilon \mathbf{E} dV. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Базисне функције су дефинисане на целој запремини или на делу запремине коначног елемента, тако да се запремински интеграл у изразима (1.24) и (1.26), иако је једнакост (1.22) дефинисана за цео домен проблема, свде на запремински интеграл по целој запремини или по делу запремине коначног елемента. Уобичајена форма (1.26) се добија када запремински интеграл дивергенције заменимо површинским интегралом по теорему Гаус-Остроградског. На основу (1.24) имамо:

$$\iiint_{\Omega} (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \nabla \times \mathbf{f}_t dV - \omega^2 \iiint_{\Omega} \mathbf{f}_t \cdot \varepsilon \mathbf{E} dV = \iint_{\partial \Omega} \mathbf{f}_t \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.27)$$

Општа форма израза за МКЕ матрице добија се када у леву страну (1.27) заменимо израз за развој електричног поља

$$\mathbf{E} \approx \sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i \mathbf{f}_i. \quad (1.28)$$

Будући да користимо Галеркинову методу, базисне и тест функције припадају истом скупу, па заменом (1.28) у леву страну (1.27) и тестирањем ове једнакости довољним бројем тест функција добијамо

$$\iiint_{\Omega} (\mu^{-1} \sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i \nabla \times \mathbf{f}_i) \cdot \nabla \times \mathbf{f}_j dV - \omega^2 \iiint_{\Omega} \mathbf{f}_j \cdot \varepsilon \sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i \mathbf{f}_i dV \approx \iint_{\partial \Omega} \mathbf{f}_j \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.29)$$

Приметимо да иако смо у претходном тексту напоменули да је у општем случају број тест функција једнак  $N_b$ , уколико се тополошком анализом утврди да је неки од коефицијената у развоју (1.28) једнак нули тада није потребно вршити тестирање функцијом која одговара том коефицијенту.

Преуређивањем израза (1.29) добијамо

$$\sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i \iiint_{\Omega} (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{f}_i) \cdot \nabla \times \mathbf{f}_j dV - \omega^2 \sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i \iiint_{\Omega} \mathbf{f}_j \cdot \epsilon \mathbf{f}_i dV \approx \iint_{\partial\Omega} \mathbf{f}_j \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.30)$$

Израз (1.30) представља дискретизацију полазне диференцијалне једначине (1.22) и може се написати у матричном облику

$$[A_{ij}] [\alpha_i] - \omega^2 [B_{ij}] [\alpha_i] = [G_i], \quad (1.31)$$

где је  $[A_{ij}] = \left[ \iiint_{\Omega} (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{f}_i) \cdot \nabla \times \mathbf{f}_j dV \right]$ , која се у МКЕ понекад назива матрица

крутости, (енгл. *stiffness matrix*), што води порекло из првих примена МКЕ у теорији конструкција (енгл. *structural analysis*). У примени МКЕ у електромагнетици ова матрица нема општеприхваћено име. Слично се и матрица

$[B_{ij}] = \left[ \iiint_{\Omega} \mathbf{f}_j \cdot \epsilon \mathbf{f}_i dV \right]$ , назива масена матрица, (енгл. *mass matrix*). Матрица

$[G_i] \approx \left[ \iint_{\partial\Omega} \mathbf{f}_i \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right]$  се назива матрица побуде (енгл. *load matrix* или

*excitation vector*).

Иако израз са десне стране једнакости (1.30) представља побуду, као што смо већ напоменули ова побуда није последица запремински распоређених струја. Такође, израз за ротор електричног поља у (1.30) није развијан користећи (1.28), стога што се са десне стране израза (1.31) и не могу налазити непознате величине. У случају да моделујемо електромагнетски систем са побудом, могуће је неколико различитих формулација, од којих су најчешће хибридна МКЕ-МоМ (метода момената) формулација или формулација путем прилагођења модова (*mode matching*). У случају да разматрамо проблеме сопствених вредности, као што је то случај у овој тези, у којима је граница домена обложена савршеним електричним проводником, десна страна (1.31) је нула.

Коефицијенти у развоју (1.28) припадају у општем случају различитим коначним елементима. Додатно, нису сви коефицијенти у развоју независне величине. Наметање граничних услова на прелазу са елемента на елемент, као и на страницама елемента на границама домена од интереса, су разлог наметања

додатних једначина које важе за коефицијенте у развоју (1.28). Процес у коме се одређују ове релације се назива тополошка анализа улазног меша. Уобичајено се низ свих коефицијената у развоју (1.28) назива низ неповезаних коефицијената (енгл. *disconnected*), док се низ коефицијената који су уједно и слободне променљиве назива низ повезаних коефицијената. Однос ова два низа се обично симболички приказује кроз матрицу повезаности, тј. међу њима важе линеарне везе

$$[\alpha_i]_{Ndiss \times 1}^{diss} = [C_{ij}]_{Ndiss \times Nconn} [\alpha_j]_{Nconn \times 1}^{conn} \quad (1.32)$$

Заменом (1.32) у (1.31) добијамо

$$[A_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss} [C_{ij}]_{Ndiss \times Nconn} [\alpha_j]_{Nconn \times 1}^{conn} - \omega^2 [B_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss} [C_{ij}]_{Ndiss \times Nconn} [\alpha_j]_{Nconn \times 1}^{conn} = [G_i]_{Ndiss \times 1} \quad (1.33)$$

Множењем леве и десне стране једнакости (1.33) са  $[C_{ij}]_{Nconn \times Ndiss}^r$  добијамо одређен систем (системска матрица је квадратна за разлику од (1.33)):

$$\begin{aligned} & [C_{ij}]_{Nconn \times Ndiss}^r [A_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss} [C_{ij}]_{Ndiss \times Nconn} [\alpha_j]_{Nconn \times 1}^{conn} - \\ & - \omega^2 [C_{ij}]_{Nconn \times Ndiss}^r [B_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss} [C_{ij}]_{Ndiss \times Nconn} [\alpha_j]_{Nconn \times 1}^{conn} = \\ & = [C_{ij}]_{Nconn \times Ndiss}^r [G_i]_{Ndiss \times 1}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Систем једначина (1.34) представља коначни МКЕ систем једначина у који су укључени и апроксимација полазне диференцијалне једначине кроз тестирање (1.30) и гранични услови кроз релацију (1.32). У практичним реализацијама МКЕ алгоритма матрице  $[A_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss}$ ,  $[B_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss}$  и  $[G_i]_{Ndiss \times 1}$  се не попуњавају засебно и не врши се експлицитно множење матрица дато изразом (1.34) већ се финални изрази формирају одмах. Неки детаљи формирања матрица и алгоритми који се користе ће бити описани у каснијим поглављима. Уочимо да су матрице  $[A_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss}$  и  $[B_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss}$  симетричне, што се може видети на основу дефиниција датих у изразу (1.31). Такође, на основу овога су и матрице

$$[C_{ij}]_{Nconn \times Ndiss}^T [A_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss} [C_{ij}]_{Ndiss \times Nconn} \quad \text{и} \quad [C_{ij}]_{Nconn \times Ndiss}^T [B_{ij}]_{Ndiss \times Ndiss} [C_{ij}]_{Ndiss \times Nconn}$$

симетричне јер за произвољну симетричну матрицу  $M$  и произвољну матрицу  $C$  важи релација  $(C^T M C)^T = C^T M^T (C^T)^T = C^T M C$ . На основу ове особине закључујемо да је за формирање МКЕ матрица потребно попунити само горњу или доњу троугаону матрицу, користећи израз (1.31) чиме се постиже значајно повећање ефикасности МКЕ програма.

## 2 Основне дефиниције и особине Б-сплајн функција

У овом одељку ћемо дати основне дефиниције везане за сплајнове, како бисмо избегли термилошке недоумице и зарад комплетности излагања.

**Б-сплајнови** су дефинисани кроз следећу **рекурентну дефиницију**. Најпре, Б-сплајн фамилија првог реда (и нултог степена тј. фамилија функција које су константне) дата је следећим изразом [42-44]:

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.1)$$

Потом су сви виши редови рекурентно задати изразом:

$$B_{i,m}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+m-1} - u_i} B_{i,m-1}(u) + \frac{u_{i+m} - u}{u_{i+m} - u_{i+1}} B_{i+1,m-1}(u), \quad m > 1 \quad (2.2)$$

где је  $0 \leq i \leq n$ ,  $n > 0$ , и  $U = (u_0, u_1, \dots, u_{n+m})$  је неопадајући низ реалних бројева.  $U$  је ознака за вектор чворова (енгл. *knot vector*) сплајн фамилије, и може се користити да се на флексибилан начин повећава број сплајнова и контролише њихова континуалност на чворовима. Функција  $B_{i,m}(u)$  се зове  $i$ -ти Б-сплајн реда  $m$  и степена  $p = m - 1$ .

Помоћу рекурентне дефиниције се дакле најпре крене од константних функција (које имају вредност 1 на свом домену као што видимо из (2.1)) па се комбинацијом по два сплајна (десна страна у (2.2)) повећава степен сплајна за један у сваком кораку (лева страна у (2.2)). Тако после једног корака имамо сплајнове који су део по део линеарне функције, после два корака имамо сплајнове који су део по део квадратне функције итд. Напоменимо додатно да сабирањем два сплајна који су **део по део** дефинисане функције на начин дат једначином (2.2) као резултат добијамо део по део дефинисану функцију која има

домен једнак унији домена два полазна сплајна. На тај начин се осим реда сплајна са сваким рекурентним кораком повећава и домен сплајна за по један интервал у вектору чворова. Приметимо да у изразу (2.2) може доћи до дељења нулом уколико вектор чворова садржи чворове са истим вредностима. Ако до тога дође, онда израз који има у себи дељење нулом не улази у дефиницију, већ се изоставља. Вектор чворова  $U$  са прецизно наведеним чворовима и бројем њихових понављања неопходан је за потпуну дефиницију Б-сплајн функција. Приметићемо (а касније и детаљније показати на примерима) да је понављање чворова (енгл. *multiplicity*) веома битна карактеристика вектора чворова, будући да може да наруши хијерархију која постоји између Б-сплајн функционалних простора конструисаних на основу одговарајућих Б-сплајн фамилија. Из угла коришћења сплајнова у геометрији ова особина се може схватити кроз чињеницу да крива вишег степена континуалности не може тачно да представи криву са "ћошковима" иако ове две криве могу бити дефинисане на векторима чворова који се разликују једино по броју понављања чворова.

Иако претходно наведена дефиниција вектора чворова не прецизира чворове, у пракси се често користи униформан вектор чворова, тј. вектор код кога су растојања међу чворовима једнака. Прецизније, најчешће се користи униформни вектор чворова али са мултиплицитетима на крајњим чворовима дат изразом

$$u_i = \begin{cases} 0, & 0 \leq i \leq m-1 \\ i-m+1, & m \leq i \leq n \\ n-m+2, & n+1 \leq i \leq n+m. \end{cases} \quad (2.3)$$

Овај вектор је наравно нормализован тако да би параметарски опсег фамилије сплајнова био од  $-1$  до  $1$ , пошто је то погодно при дефинисању полиномијалних функција за развој поља.

Вектор чворова се може користити и како би се функцијама у Б-сплајн базису приписао неки параметар у интервалу  $[-1,+1]$ . То може бити погодно при одабиру тачака за интерполацију јер се једначине за интерполацију могу поставити на начин да до изражаја највише дође само једна функција. У ову сврху се могу користити **Гревиллове тачке** (називају се и **Марсден-Шенбергове тачке**)

[45] које се дефинишу као средња вредност  $m-1$  узастопних чворова за сваку базисну функцију реда  $m$ .

На крају ове секције напоменимо да су могући и други еквивалентни или слични начини формулисања Б-сплајн фамилија, нарочито у случајевима када су чворови у вектору чворова равномерно (униформно) распоређени, видети нпр. *blossoming* [46] и дефиницију путем конволуције [47].

## 2.1 Основне особине Б-сплајн функција

Следеће особине важе за Б-сплајн функције дефинисане у претходном одељку.

1) Б-сплајн функције су позитивне и **сабирају се у јединицу**, тј.

$\sum_{i=0}^n B_{i,m}(u) = 1$  за сваку вредност параметра  $u$ . Као директну последицу имамо да је

$\sum_{i=0}^n \frac{dB_{i,m}(u)}{du} = 0$ , тј. изводи Б-сплајн функција се **сабирају у нулу**, па стога **нису**

**линеарно независни.**

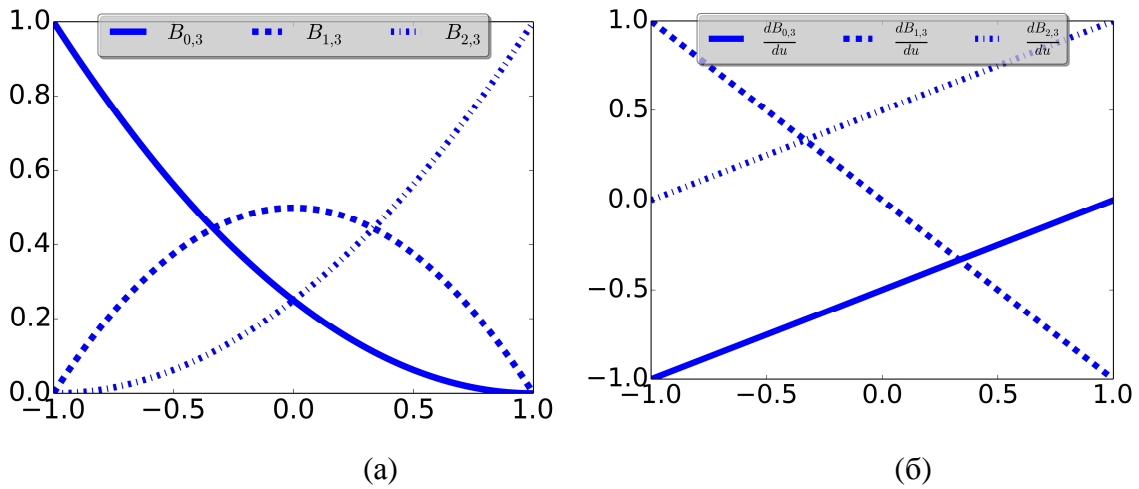
2) Б-сплајн функције су **ограниченог домена**, а ову особину можемо најједноставније видети из рекурентне дефиниције. Наиме, функције реда 1 се протежу само дуж једног интервала у вектору чворова, функције реда 2 дуж два интервала, итд. функције реда  $m$  дуж  $m$  интервала. Када кажемо интервал, у овом контексту мислимо на део реалне праве између два узастопна чвора вектора чворова, а при томе се може радити и о интервалу мере нула уколико је чвор поновљен. Приметимо да су крајње функције у Б-сплајн фамилији (при употреби стандардног униформног вектора чворова) дефинисане само на једном интервалу који има меру већу од нула, док је осталих  $m-1$  интервала мере нула.

3) Б-сплајн функције су линеарно независне (при томе мислимо на локалну линеарну независност пошто су на основу особине 2) Б-сплајн функције дефинисане на коначном домену, а познато је да убацивање нулте функције у скуп ствара скуп линеарно зависних функција).

4) Континуалност Б-сплајн функција је контролисана бројем понављања чворова у вектору чворова. На интервалима између чворова је свака Б-сплајн функција дефинисана као полином. Будући да је сваки полином бесконачно пута

диференцијабилан ( $C^\infty$  континуалност), једино смањење континуалности се може очекивати на самим чворовима где се “спајају” полиноми из суседних интервала. Б-сплајн функције су због овога на чворовима свега  $C^{m-k}$  континуалне (где је  $k$  број понављања чвора).

Претходно наведене особине ћемо најбоље илустровати на пар примера. На слици 2-1(a) је приказана Б-сплајн фамилија која је конструисана над стандардним равномерним вектором чворова (2.3), док су на слици 2-1(б) приказани први изводи сплајнова.



Слика 2-1. Фамилија Б-сплајнова са вектором чворова  $U = [-1, -1, -1, +1, +1, +1]$  и редом  $m = 3$ : (a) функције и (б) први изводи.

Пошто су сви Б-сплајнови позитивни и сабирају се у јединицу, јасно је да је свака појединачна функција из фамилије по вредности између 0 и 1 (што наравно не важи за њене изводе, који морају бити и негативни јер се сабирају у нулу). Ова особина може имати позитиван утицај на нумеричку стабилност алгоритама који користе Б сплајнове, јер се свака линеарна комбинација тачака (било које димензије), која као коефицијенте користи Б-сплајнове због ове особине налази унутар конвексне границе дефинисане тим тачкама. Аналитички изрази за фамилију сплајнова са слике 2-1 могу се добити директном применом дефиниције (2.1) и (2.2) и дати су са



$$\begin{aligned}
B_{0,3}(u) &= +\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}; u \in [-1,+1], \\
B_{1,3}(u) &= -\frac{1}{2}u^2 + 0 \cdot u + \frac{1}{2}; u \in [-1,+1], \\
B_{2,3}(u) &= +\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}; u \in [-1,+1].
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

На основу ових израза, гледајући коефицијенте уз одговарајуће степене параметра  $u$ , јасно је да се за сваку вредност параметра  $u$  сплајнови сабирају у јединицу. Додатно, од интереса је поменути домене функција дате формулом (2.4). Иако је домен  $[-1,+1]$  исти за све функције, што се јасно може видети и са слике 2-1, њихови домени се у формалном смислу дефиниције дате на почетку поглавља, разликују. Наиме, ако у област дефинисаности Б-сплајн функције убројимо и домене дужине 0 (иако је на њима по дефиницији функција једнака 0), функција  $B_{0,3}$  је дефинисана на доменима  $[-1,-1]$ ,  $[-1,-1]$ ,  $[-1,+1]$  тј. на два интервала дужине 0, и само на једном интервалу дужине 2. Слично, функција  $B_{1,3}$  је дефинисана на интервалима  $[-1,-1]$ ,  $[-1,+1]$ ,  $[+1,+1]$ . Ови интервали су, редом, дужине 0, 2 и 0. За последњу функцију,  $B_{2,3}$ , интервали су дужине 2, 0 и 0. Видимо дакле да су функције дефинисане на  $m = 3$  интервала и да не морају бити сви интервали дужине (мере) веће од нула. Значај ове дискусије ћемо увидети у каснијим поглављима, нарочито кад будемо користили компликованије векторе чворова. На овај начин се може уводити смањење континуалности функција у сплајн фамилији, што ће нам бити од интереса приликом апроксимирања сингуларних поља и геометрија. Особина линеарне независности је јасно уочљива на оваквим једноставним примерима, међутим, тачан тест ове особине је формирање Грамове матрице и провера њене детерминанте [48].

Унос у Грамовој матрици је дат са  $G_{i,j} = \langle B_{i,m}, B_{j,m} \rangle = \int_{-1}^1 B_{i,m}(u)B_{j,m}(u)du$  и у

овом конкретном примеру матрица гласи  $[G] = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ , а њена

детерминанта је  $\det([G]) = \frac{2}{135}$ , што је различито од нуле, те су и функције линеарно независне. Коначно, у овом примеру, функције су  $C^\infty$  на целом интервалу  $[-1,+1]$ , пошто нисмо имали унутрашњих чворова и њихових понављања.

## 2.2 Алгоритми за израчунавање Б-сплајнова

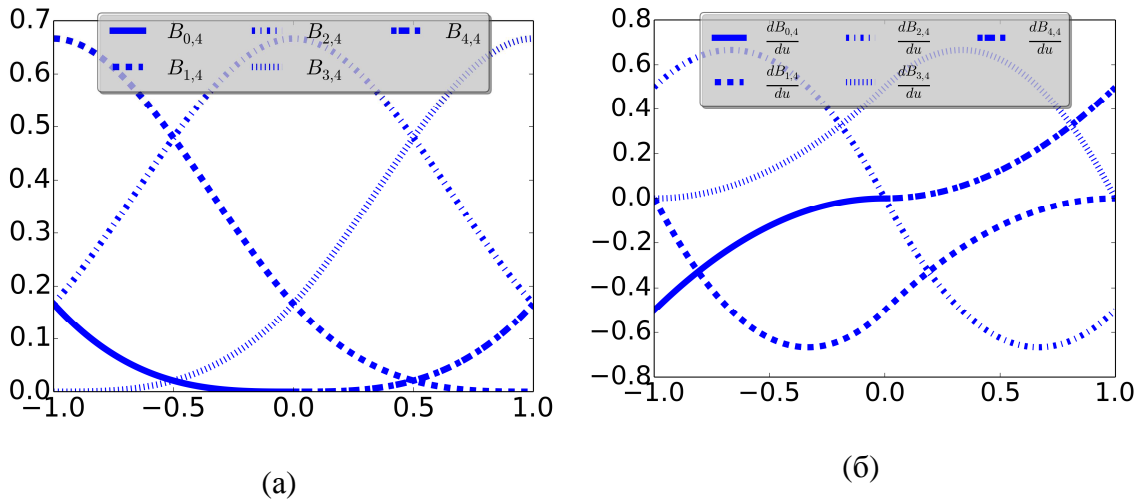
Чест је случај да се алгоритми за Б-сплајнове односе стриктно на њихову примену у геометрији. Тако се, на пример, једнодимензиони Б-сплајнови често користе у контексту израчунавања тачака на тродимензионој кривој, за шта се користи добро познати де Бур-ов (de Boor) алгоритам [43]. За потребе коришћења сплајнова, и у геометријском моделовању и у моделовању поља, погодније је користити нешто другачији приступ, тј. израчунавати директно функције, а потом формирати потребне изразе. Оно што је значајан фактор у ефикасности коришћења сплајнова је да су они, уз погодно дефинисан вектор чворова, дефинисани само на делу параметарског интервала  $[-1,+1]$ , те при прорачунавању израза у појединим тачкама није потребно користити све сплајнове из фамилије. На основу дефиниције Б-сплајна и особине 2, наведене у претходном одељку, може се увидети да је у свакој тачки интервала  $[-1,+1]$  само  $p+1$  сплајнова различито од нуле. Због овога је, на пример, за прорачун положаја једне тачке на тродимензионој кривој  $\mathbf{r}(u) = \sum_i \mathbf{C}_i B_{i,m}(u) = [B_{i,m}(u)]^T [\mathbf{C}_i]$  (где  $[\mathbf{C}_i]$  означава контролне тачке) потребно сабрати највише  $p+1 = m$  чланова суме. Слично, за прорачун положаја тачке у закривљеном хексаедру који је дат изразом

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \sum_{i,j,k} \mathbf{C}_{i,j,k} B_{i,m}(u) B_{j,m}(v) B_{k,m}(w) \quad (2.5)$$

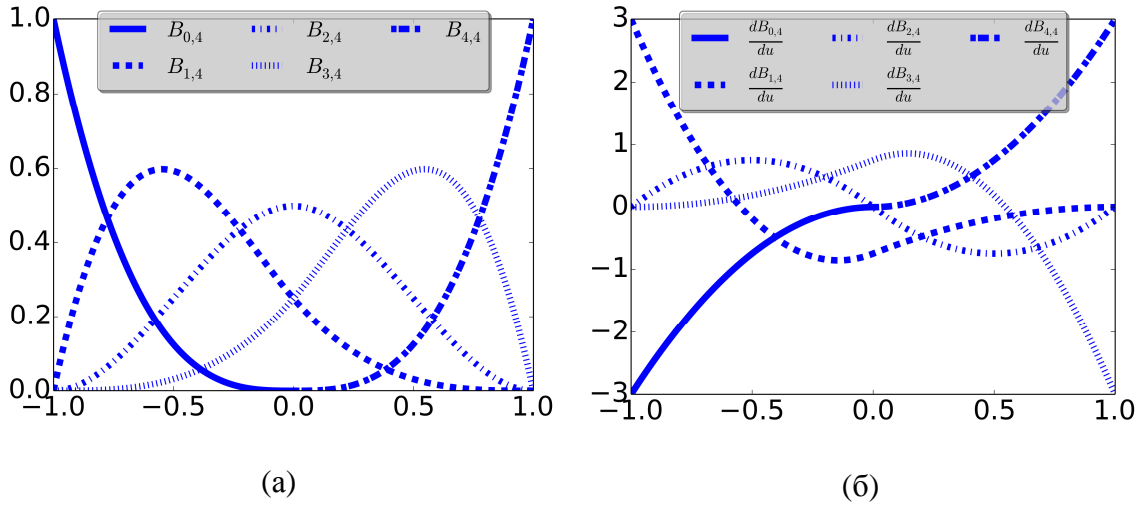
потребно је сабрати највише  $(p+1)^3 = m^3$  чланова суме. Из истог разлога, се и у накнадном анализирању МКЕ решења брже израчунава поље ако је апроксимирано помоћу нецелодоменских Б-сплајн функција, у односу на полиномијалне целодоменске функције или целодоменске Б-сплајн функције (под условом да је једнак укупан број чланова у развоју у три наведена случаја).

Ефикасан алгоритам за прорачун Б-сплајн функција различитих од нуле у некој тачки параметарског интервала може се наћи у [42]. Почевши од редног броја ненултот интервала (енгл. *knot span*) у вектору чворова коме припада тачка у којој вршимо израчунавање, а на основу кога је могуће израчунати коефицијенте у дефиницији (2.2), рекурентно се израчунавају сви Б-сплајнови различити од нуле. Често је потребно израчунати и изводе сплајнова, па се у том случају зарад ефикасности уједно и истовремено са вредностима функција рачунају и њихови изводи, јер су многи коефицијенти од интереса исти и у том случају.

Приметимо на крају да не морамо користити стандардни вектор чворова нормиран на интервал  $[-1,+1]$ , а дат изразом (2.3), већ је могуће користити само део (између параметара  $-1$  и  $+1$ ) нешто већег вектора чворова. У том случају може се догодити да је више него једна функција различита од 0 на крајевима интервала  $[-1,+1]$ . Такав пример је приказан на слици 2-2, док је Б-сплајн фамилија истог реда, са стандардним вектором чворова приказана на слици 2-3. Зависно од дужине вектора чворова који се “скраћује” (тј. користи само на интервалу  $[-1,+1]$ ) неки од крајњих чворова немају утицај на вредност функција у интервалу од интереса.



Слика 2-2. Фамилија Б-сплајнова са вектором чворова  $U = [-3,-3,-3,-3,-2,-1,0,1,2,3,3,3,3]$  и редом  $m = 4$ : (а) функције и (б) први изводи.



Слика 2-3. Фамилија Б-сплајнова са вектором чворова  $U = [-1, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 1]$  и редом  $m = 4$ : (а) функције и (б) први изводи.

### 2.3 Алгоритми додавања чворова и подизања степена

Размотримо најпре алгоритам додавања чворова (енгл. *knot insertion*) који се често користи у контексту интерактивног компјутерског пројектовања. Наиме, ако желимо да имамо више контроле над локалним обликом криве, уобичајена је пракса да додамо још чворова у вектор чворова (тима повећавамо број функција у развоју, па и контролних тачака), али на такав начин да се оригинална крива не промени ни параметарски ни геометријски. Дакле, ако је оригинална крива дата изразом  $\mathbf{r}_1(u) = \sum_i B_{i,m}^1(u) \mathbf{C}_i^1$ , тада је, после додавања чворова, “нова” крива дата са  $\mathbf{r}_2(u) = \sum_j B_{j,m}^2(u) \mathbf{C}_j^2$ , при чему вектор чворова фамилије сплајнова  $B_{j,m}^2(u)$  има све чворове фамилије  $B_{i,m}^1(u)$ , и произвољан број додатих чворова. У сумама које дефинишу криве  $\mathbf{r}_1(u)$  и  $\mathbf{r}_2(u)$  користимо различите индексе, како бисмо нагласили да је број чланова у суми различит. Алгоритам додавања чворова одређује контролне тачке тако да је  $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{r}_2(u)$ . Јасно је да овако формулисан алгоритам има значај за интерактивно геометријско моделовање, али није очигледно како се може односити на случају када користимо Б-сплајн функције за развој поља, пошто тада не користимо сплајнове за опис познатих кривих већ за апроксимацију непознатог поља. Међутим, овај алгоритам, или његова уопштења,

могу бити од користи при спајању елемената како би се успоставиле везе између базисних функција у суседним елементима. Приметимо да нас у овом случају не занимају релације између контролних тачака као у оригиналној верзији алгоритма додавања чворова, већ релације између базисних функција. Ако је веза између контролних тачака дата помоћу матрице трансформације  $\mathbf{T}$  (ова матрица се добија као резултат оригиналне методе додавања чворова), тј. ако је  $[\mathbf{C}_j^2] = \mathbf{T}[\mathbf{C}_i^1]$ , тада имамо [48]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u) &= [\mathbf{B}_{i,m}^1(u)]^T [\mathbf{C}_i^1], \\ \mathbf{r}_2(u) &= [\mathbf{B}_{j,m}^2(u)]^T [\mathbf{C}_j^2] = [\mathbf{B}_{j,m}^2(u)]^T \mathbf{T} [\mathbf{C}_i^1], \end{aligned} \quad (2.6)$$

одакле директно следи  $[\mathbf{B}_{i,m}^1(u)]^T = [\mathbf{B}_{j,m}^2(u)]^T \mathbf{T}$ , тј.

$$[\mathbf{B}_{i,m}^1(u)] = \mathbf{T}^T [\mathbf{B}_{j,m}^2(u)]. \quad (2.7)$$

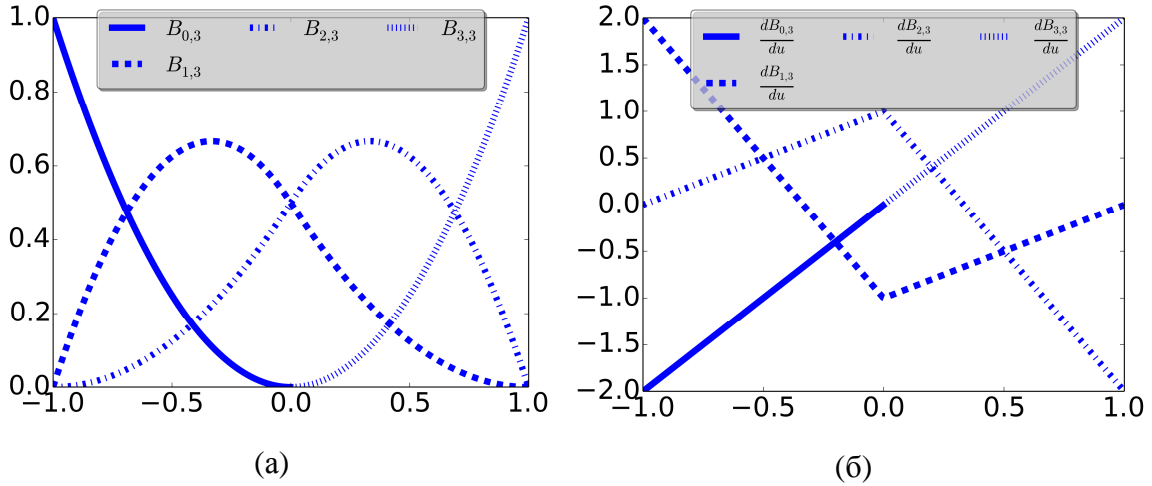
Алгоритми додавања чворова се обично формулишу за случај када се додаје један чвор, и тада постоје изрази за чланове у матрици  $\mathbf{T}$ , задати преко новог и старог вектора чворова. Ако је потребно додати више чворова, тада постоје и нешто оптималнији алгоритми, али је често са становишта ефикасности оправдано применити додавање једног чвора више пута, или користити општи алгоритам који ће бити представљен у наредном одељку. Када директно користимо релацију (2.7), такав приступ се назива **подподела функција** (енгл. *function subdivision*) и најпогоднији је за примену у МКЕ [48].

Када вршимо додавање једног чвора могуће је користити постојеће аналитичке изразе за чланове матрице  $\mathbf{T}$  (мада је нама у ствари потребна матрица  $\mathbf{T}^T$ ) [43]. Као пример алгоритма додавања чворова размотримо додавање чворова сплајновима реда 3 који су дефинисани на вектору чворова  $U_1 = [-1, -1, -1, +1, +1, +1]$ , које смо већ претходно разматрали и који су приказани на слици 2-1. Када додамо чвор на позицији  $u = 0$ , нови вектор чворова је задат са  $U_2 = [-1, -1, -1, 0, +1, +1, +1]$ , а нова фамилија сплајнова је задата са:

$$\begin{aligned} B_{0,3}(u) &= +u^2 + 0 \cdot u + 0; u \in [-1, 0], \\ B_{1,3}(u) &= \begin{cases} -\frac{3}{2}u^2 - u + \frac{1}{2}; u \in [-1, 0] \\ \frac{1}{2}u^2 - u + \frac{1}{2}; u \in [0, +1], \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$B_{2,3}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 + u + \frac{1}{2}; u \in [-1,0] \\ -\frac{3}{2}u^2 + u + \frac{1}{2}; u \in [0,+1], \end{cases}$$

$$B_{3,3}(u) = +u^2 + 0 \cdot u + 0; u \in [0,+1].$$



Слика 2-4. Фамилија Б-сплајнова са вектором чворова  $U = [-1, -1, -1, 0, 1, 1, 1]$  и редом  $m = 3$  добијена додавањем чвора у тачки  $u = 0$ : (а) функције и (б) први изводи.

Ова фамилија сплајнова приказана је на слици 2-4. Применом алгоритма додавања чворова [43], линеарна веза између фамилија сплајнова истог реда 3, са векторима чворова  $U_0$  и  $U_1$ , дата је транспонованом матрицом трансформације:

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Приметимо да су са новим вектором чворова неке функције задате на више подинтервала. Тако на пример, иако је веза између фамилија функција јединствено задата матрицом (2.9), имамо да у параметарском интервалу  $[-1, 0]$  важи:

$$\begin{aligned}
B^1_{0,3}(u) &= 1 \cdot B^2_{0,3}(u) + \frac{1}{2} B^2_{1,3}(u) = \\
1 \cdot (u^2 + 0 \cdot u + 0) + \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2} u^2 - u + \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{4} u^2 - \frac{1}{2} u + \frac{1}{4},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

док у параметарском интервалу  $[0, +1]$  за исту функцију важи:

$$\begin{aligned}
B^1_{0,3}(u) &= 1 \cdot B^2_{0,3}(u) + \frac{1}{2} B^2_{1,3}(u) = \\
1 \cdot (0) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} u^2 - u + \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{4} u^2 - \frac{1}{2} u + \frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Једначине (2.10) и (2.11) показују да иако су функције из две фамилије повезане истим коефицијентима, на различитим подинтервалима оригиналног интервала фигуришу другачији изрази за фамилију са увећаним вектором чворова.

Ово је био пример хијерархијске поделе функција која је остварена додавањем једног чвора. Приметимо да скупови базисних функција нису у хијерархијском односу тј.  $\{B^1_{i,m}(u)\} \not\subset \{B^2_{j,m}(u)\}$ , међутим, њихови линеали (линеал је скуп свих линеарних комбинација) јесу у хијерархијском односу тј.  $L(B^1_{i,m}(u)) \subset L(B^2_{j,m}(u))$ . Поступак додавања чворова увек као резултат даје хијерархијске линеале и могуће је доћи до линеарне везе као што је (2.9). Ако не постоји линеарна веза тог типа између базисних функција, тада ћемо резултујуће просторе називати **нехијерархијским**. При коришћењу сплајнова за апроксимацију електричног поља у методи коначних елемената поступак повећавања скупа функција, без подизања реда, ћемо називати *h*-профињавање (енгл. *h-refinement*) без обзира да ли се при томе користе хијерархијски или нехијерархијски скупови функција.

Број функција у развоју могуће је повећати и на друге начине. Ако се ограничимо на случај да користимо исте чворове а подигнемо степен сплајнова, наилазимо на следећи проблем. Наиме, имајући у виду особину 4) коју смо навели на почетку разматрања, континуалност сплајнова на појединачним чворовима је  $C^{m-k}$ . Стога, ако повећамо ред, а оставимо исти број понављања чворова, повећавамо континуалност сплајнова на том чвору. На овај начин се врши нехијерархијско повећавање броја функција јер се функције ниже континуалности не могу представити линеарном комбинацијом функција више континуалности.

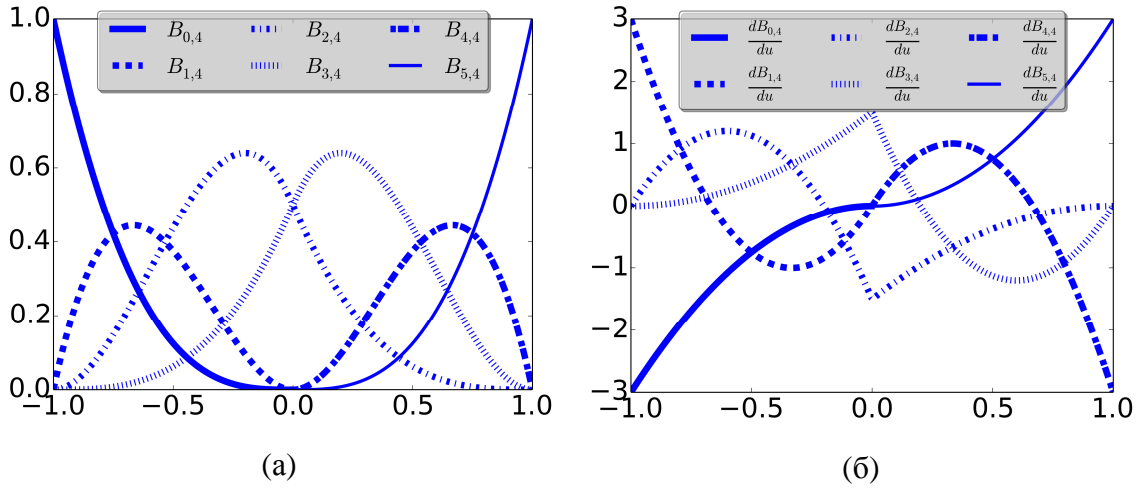
Стога се у примени сплајнова за геометријско моделовање при повећању реда обавезно повећава и број понављања и свих чворова за један. На овакав начин се добија хијерархијско повећање броја функција. При коришћењу сплајнова за апроксимацију електричног поља, поступак повећавања скупа функција, при коме повећавамо ред коришћених сплајнова називаћемо  $p$ -профињавање (енгл. *p-refinement*), без обзира да ли се при томе користе хијерархијски или нехијерархијски скупови функција.

Као пример алгоритма подизања степена (енгл. *degree elevation*) размотримо сплајнове реда 4 који су дефинисани на вектору чворова  $U_3 = [-1, -1, -1, -1, 0, 0, +1, +1, +1, +1]$ , који су добијени од (претходно већ разматране фамилије) сплајнова реда 3 и вектора чворова  $U_2 = [-1, -1, -1, 0, +1, +1, +1]$ . Нова фамилија сплајнова је задата са:

$$\begin{aligned}
 B_{0,4}(u) &= -u^3 + 0 \cdot u^2 + 0 \cdot u + 0; u \in [-1, 0], \\
 B_{1,4}(u) &= 3u^3 + 3u^2 + 0 \cdot u + 0; u \in [-1, 0], \\
 B_{2,4}(u) &= \begin{cases} -\frac{5}{2}u^3 - \frac{9}{2}u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}; u \in [-1, 0] \\ -\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}; u \in [0, +1], \end{cases} \quad (2.12) \\
 B_{3,4}(u) &= \begin{cases} \frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}; u \in [-1, 0] \\ \frac{5}{2}u^3 - \frac{9}{2}u^2 + \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}; u \in [0, +1], \end{cases} \\
 B_{4,4}(u) &= -3u^3 + 3u^2 + 0 \cdot u + 0; u \in [0, +1], \\
 B_{5,4}(u) &= u^3 + 0 \cdot u^2 + 0 \cdot u + 0; u \in [0, +1]
 \end{aligned}$$

и приказана је на слици 2-5.





Слика 2-5. Фамилија Б-сплајнова са вектором чворова  $U_3 = [-1, -1, -1, -1, 0, 0, +1, +1, +1, +1]$  и редом  $m = 4$  добијена подизањем степена: (а) функције и (б) први изводи.

Применом алгоритма подизања степена [42], линеарна веза између разматраних фамилија сплајнова дата је транспонованом матрицом трансформације:

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Тако, на пример, за функцију  $B_{1,3}^2(u)$  која је дефинисана на интервалима  $[-1, 0]$  и  $[0, +1]$ , на интервалу  $[-1, 0]$  имамо:

$$\begin{aligned} B_{1,3}^2(u) &= \frac{2}{3}B_{1,4}^3(u) + \frac{5}{6}B_{2,4}^3(u) + \frac{1}{6}B_{3,4}^3(u) = \\ &= \frac{2}{3}(3u^3 + 3u^2 + 0 \cdot u + 0) + \frac{5}{6}\left(-\frac{5}{2}u^3 - \frac{9}{2}u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(2 - \frac{25}{12} + \frac{1}{12}\right)u^3 + \left(2 - \frac{45}{12} + \frac{3}{12}\right)u^2 + \left(0 - \frac{15}{12} + \frac{3}{12}\right)u + \left(0 + \frac{5}{12} + \frac{1}{12}\right) = -\frac{3}{2}u^2 - u + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

За исту функцију али на интервалу  $[0, +1]$  имамо:

$$\begin{aligned}
B_{1,3}^2(u) &= \frac{2}{3}B_{1,4}^3(u) + \frac{5}{6}B_{2,4}^3(u) + \frac{1}{6}B_{3,4}^3(u) = \\
&= \frac{2}{3}(0) + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}u^3 - \frac{9}{2}u^2 + \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}\right) = \\
&= \left(-\frac{5}{12} + \frac{5}{12}\right)u^3 + \left(\frac{15}{12} - \frac{9}{12}\right)u^2 + \left(-\frac{15}{12} + \frac{3}{12}\right)u + \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2}u^2 - u + \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

што је у сагласности са вредностима функција наведеним у (2.8) и (2.12).

## 2.4 Општи алгоритам за проналажење линеарних веза између фамилија на основу матричног представљања Б-сплајнова

Представићемо алгоритам који је развијен током израде ове тезе за потребе израчунавања линеарних веза (тачних или апроксимативних) између фамилија сплајнова. Треба имати у виду да за имплементацију методе коначних елемената није од пресудног интереса знати везе између разних фамилија сплајнова које користимо, али нам у неким случајевима то може бити од помоћи.

Пошто су сплајнови део по део полиноми, који су највише степена  $p = m - 1$ , сплајнови који су различити од нуле на неком интервалу могу се представити као матрице димензија  $m \times m$ , где свака врста матрице одговара једној ненулној функцији из фамилије, а вредности су коефицијенти полинома који дефинише сплајн на том интервалу. Испоставиће се да је поступак представљања сплајнова у матричном облику, а потом налажење везе (тј. матрице трансформације) између фамилија решавањем система линеарних једначина, уопштенији него вршење попуњавања матрице трансформације на основу аналитичких израза (што је могуће само за случајеве где постоје аналитички изрази као што је нпр. случај додавања једног чвора). Интересантне матричне методе за представљање сплајнова и подизање степена могу се наћи у [49, 50].

Нека су две фамилије сплајнова задате векторима чворова и степенима  $U_1$ ,  $p_1$  и  $U_2$ ,  $p_2$ . Нека је при томе фамилија 2 настала профињивањем могућности апроксимације фамилије 1, било додавањем додатних чворова, било подизањем степена, било неком комбинацијом (или вишеструким комбинацијама) ове две методе. Одређене комбинације профињивања могу као резултат дати



$[K_1]$  - матрица коефицијената који дефинишу функције из фамилије 1,

$[C]$  - матрица повезаности и

$[\alpha]$  - коефицијенти који сваку функцију из фамилије 1 повезују јединствено у линеарну везу са неколико функција из фамилије 2.

Приметимо да овај алгоритам има неколико предности. Најпре, у случају да не постоји тачна линеарна веза између фамилија сплајнова, будући да је систем (2.18) преодређен, тада ће бити пронађена линеарна веза са најмањим средњеквадратним одступањем. Ако постоји линеарна веза, тј. ако се ради о хијерархијским просторима, тада ће бити пронађена тачна линеарна веза. Недостатак овог метода је тај да захтева специјализоване алгоритме за симболични прорачун Б-сплајнова, тј. не могу се користити стандардне методе уобичајене у софтверским пакетима, као што је [45]. Додатно, ефикасност алгоритма за уобичајене случајеве једноструког додавања чвора и подизања степена за један није оптимална и постоје ефикасније имплементације [42]. Међутим, за доказе линеарне независности, показивање независности простора и сл. за потребе методе коначних елемената понекад је оправданије користити се алатима за симболичке прорачуне [51].

### 3 Геометријско моделовање у методи коначних елемената вишег реда

У овом одељку ћемо размотрити основе и неке специфичности геометријског моделовања помоћу Б-сплајн функција. Размотрићемо неколико конкретних примера, а такође ћемо описати и алгоритме за аутоматско параметризовање Б-сплајн хексаедарских елемената као и алгоритам за прорачун инверзног геометријског пресликавања који може бити од користи у накнадној обради резултата МКЕ прорачуна. Такође ћемо се осврнути и на неке уобичајене методе геометријског моделовања у инжењерској пракси.

#### 3.1 Б-сплајн хексаедарски елементи

Опис хексаедарских елемената који ћемо овде изложити у највећој мери прати [9, 10]. Користећи Б-сплајн функције, дефинисане на начин као у претходној глави, дефинишемо део по део гладак хексаедар  $\mathbf{r} : (u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$ , где се тачка параметарског домена  $(u, v, w)$  налази унутар тзв. основног домена  $[-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1]$ . Опсег од  $-1$  до  $+1$  је узет без умањења општости, и зарад усклађености са функцијама за развој поља (било да су у питању хијерархијски полиноми или Б-сплајн функције). Од пресликавања  $\mathbf{r}$  се најчешће захтева да буде интерполаторно у неком одређеном скупу тачака у глобалном Декартовом координатном систему. Конкретан израз за пресликавање  $\mathbf{r}$  је дат са

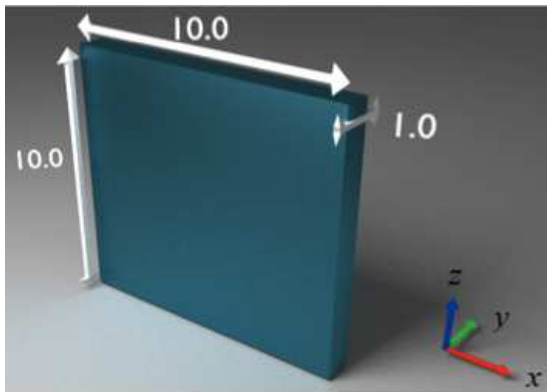
$$\mathbf{r}(u, v, w) = \sum_{i,j,k=0}^{n_u, n_v, n_w} B_{i,m_u}(u) B_{j,m_v}(v) B_{k,m_w}(w) \mathbf{C}_{i,j,k} \quad (3.1)$$

где су  $B_{i,m_u}, B_{j,m_v}, B_{k,m_w}$  сплајнови који одговарају  $u, v$  и  $w$  параметарским правцима и  $C_{i,j,k}$  су вектори положаја контролних тачака. Приметимо да будући да у општем случају сплајн функције нису интерполаторне, хексаедар задат са (3.1) не садржи у себи све контролне тачке (ова особина је уочљивија на површини елемента где ивице које су Б-сплајн криве не пролазе кроз контролне тачке и стране које су Б-сплајн површи не пролазе кроз мрежу контролних тачака). Вектори положаја контролних тачака могу се пронаћи решавањем следећег система линеарних алгебарских једначина:

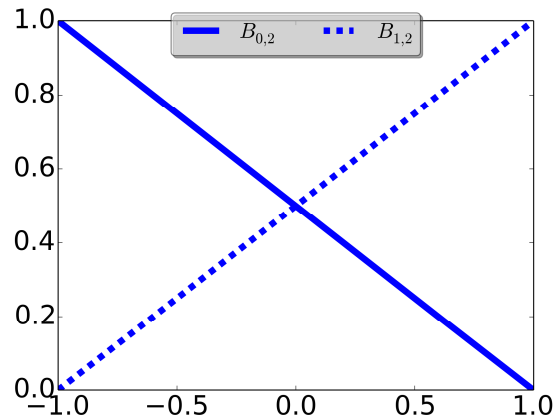
$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 &= \sum_{i,j,k=0}^{n_u, n_v, n_w} B_{i,m}(u^0) B_{j,m}(v^0) B_{k,m}(w^0) C_{i,j,k}, \\
 \mathbf{r}_2 &= \sum_{i,j,k=0}^{n_u, n_v, n_w} B_{i,m}(u^1) B_{j,m}(v^1) B_{k,m}(w^1) C_{i,j,k}, \\
 &\dots \\
 \mathbf{r}_K &= \sum_{i,j,k=0}^{n_u, n_v, n_w} B_{i,m}(u^K) B_{j,m}(v^K) B_{k,m}(w^K) C_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

где су  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_K$  вектори положаја интерполационих тачака (дефинисани у глобалном Декартовом координатном систему) и  $(u^0, v^0, w^0), (u^1, v^1, w^1), (u^K, v^K, w^K)$  параметарске координате интерполационих тачака. У систему (3.2) постоји укупно  $(n_u + 1)(n_v + 1)(n_w + 1)$  непознатих и исто толико интерполационих тачака тј.  $K = (n_u + 1)(n_v + 1)(n_w + 1) - 1$ . Избор интерполационих тачака, вектора чворова и реда коришћених Б-сплајнова зависи од конкретног геометријског тела које разматрамо и биће илустровано на неколико примера.

Размотримо као први пример резонантну шупљину облика квадра испуњену ваздухом, чији се зидови могу апроксимирати савршеним проводником. За потребе геометријског моделовања, материјали који фигуришу у поставци проблема нису од интереса, али ћемо ове примере разматрати и у поглављу са нумеричким резултатима, где ће бити важна укупна поставка. Ова шупљина је приказана на слици 3-1(а), где је моделована као један коначни елемент. Функције које су коришћене за геометријско моделовање приказане су на слици 3-1(б) и исте су у сва три правца због природе геометрије.



(a)



(б)

Слика 3-1. Резонантна шупљина облика квадрата: (а) модел са димензијама у [mm] и (б) породица Б-сплајнова, са  $m_u = m_v = m_w = 2$  и стандардним вектором чворова  $k_u = k_v = k_w = [-1, 1]$  коришћеним у моделу.

Као други пример размотримо сферичну резонантну шупљину, полупречника 1 cm, која је такође моделована једним коначним елементом вишег реда. Због симетрије геометрије проблема, за потребе геометријског моделовања користимо сплајнове истог реда са истим вектором чворова у свим правцима тј.,  $m_u = m_v = m_w = 5$  и  $k_u = k_v = k_w = [-1, 1]$ . Оваква поставка захтева  $5 \times 5 \times 5 = 125$  интерполационих тачака, које се добијају тако што применимо аналитички задато пресликавање тачака задатих на униформној мрежи у параметарском простору. Аналитичко пресликавање је дато изразом

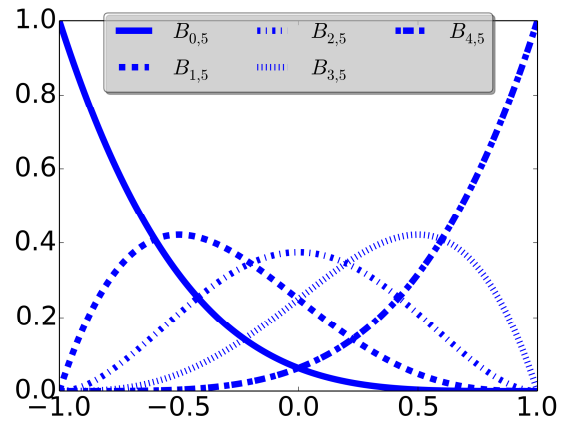
$$\begin{aligned} x &= R_0 u \sqrt{1 - v^2/2 - w^2/2 + v^2 w^2/3}, \\ y &= R_0 v \sqrt{1 - u^2/2 - w^2/2 + u^2 w^2/3}, \\ z &= R_0 w \sqrt{1 - u^2/2 - v^2/2 + u^2 v^2/3}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Приметимо да су могуће разне методе параметризовања сфере, било да се ради о тачном или апроксимативном моделовању сферне површи. Такви примери се могу наћи код моделовања дела кружног лука и код тачног моделовања путем рационалних полиномијалних функција (нпр. рационалне Безијеове криве и неуниформни рационални Б-сплајнови скраћено НУРБС) [52, 53]. Међутим, зарад једноставности и веће ефикасности прорачуна, ми смо се одлучили строго за део по део полиномско геометријско моделовање које, како ћемо видети у наредним

поглављима, боље очувава полиномску структуру подинтегралних израза за попуњавање МКЕ матрице (у целости изузев Јакобијана), и стога омогућава веома ефикасно рачунање интеграла у МКЕ.



(а)

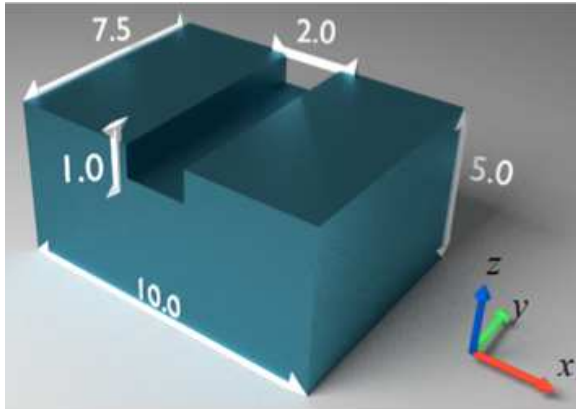


(б)

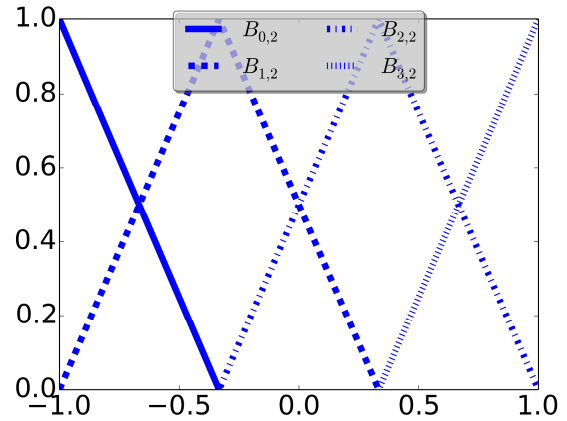
Слика 3-2. Сферична шупљина полупречника 1 cm: (а) модел шупљине и (б) породица Б-сплајнова, са  $m_u = m_v = m_w = 5$  и стандардним вектором чворова  $k_u = k_v = k_w = [-1, 1]$  коришћеним у моделу.

Као трећи пример, размотримо металну шупљину са гребеном (енгл. *ridge cavity*), приказану на слици 3-3(а). Шупљина је моделована коришћењем једног хексаедарског коначног елемента. За геометријско моделовање користимо сплајнове истог реда у свим параметарским правцима, али за разлику од претходна два примера, користимо другачије векторе чворова, тј. имамо  $m_u = m_v = m_w = 2$ , а вектори чворова су  $k_u = [-1, -1/3, 1/3, 1]$  и  $k_v = k_w = [-1, 1]$ . Цела структура се стога може моделовати тачно (у смислу геометрије) уз коришћење свега  $4 \times 2 \times 2 = 16$  сплајн функција (контролних тачака). Један  $w$ -пресек модела шупљине је показан на слици 3-3(в), са које можемо јасно видети да  $u$ -координатне линије (приказане пуном линијом) нису праве, јер прате праве углове шупљине са гребеном. Пошто је апроксимирање поља осетљиво дуж ових углова, морамо бити пажљиви у одабиру функција које апроксимирају поље дуж  $u$  параметарског правца како бисмо постигли високу тачност.

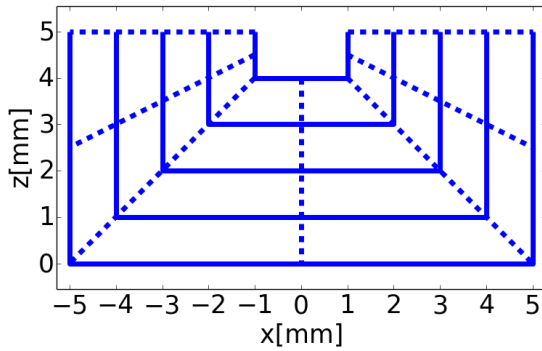




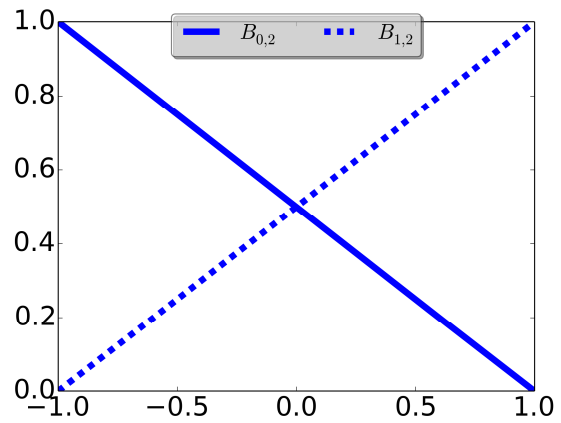
(a)



(б)



(в)



(г)

Слика 3-3. Шупљина са гребеном (енгл. *ridge*): (а) димензија модела у [mm] и (б) породица Б-сплајнова, коришћена у  $u$ -параметарском правцу са  $m_u = 2$  и стандардним вектором чворова  $k_u = [-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, +1]$ , (в)  $u$  -  $v$  координатне линије у једном  $w$ -пресеку и (г) породица Б-сплајнова, коришћена у  $v$  и  $w$ -параметарском правцу са  $m_v = m_w = 2$  и стандардним вектором чворова  $k_u = [-1, +1]$ .

### 3.2 Алгоритам за аутоматско параметривање Б-сплајн хексаедарских елемената

Б-сплајн хексаедарски елементи вишег реда захтевају одговарајућу дискретизацију полазне геометрије да би могла да се постигне оптимална ефикасност алгоритма. Већина (ако не и сви) доступни хексаедарски мешери

дискретизују геометрију проблема користећи трилинеарне хексаедре, уз евентуалну могућност коришћења елемената другог реда. Видели смо на примеру сфере да је понекад погодно користити и елементе још вишег геометријског реда. Додатно, будући да су разматрани елементи запремински, да би се могао решити систем (3.2), потребно је задати интерполационе тачке и унутар самог елемента. Наравно, у неким једноставним случајевима, као што је случај трилинеарних елемената, чворови су управо темена хексаедара, па нити је потребно имати додатне чворове у унутрашњости, нити је потребно решавати систем (3.2), јер су сплајн функције првог реда интерполаторне. Већ код елемената другог реда имамо 27 чворова од којих је један унутар хексаедра. Док за интерполационе чворове који се налазе на површи постоји ограничење да морају бити на површи, за унутрашње чворове постоји одређени степен слободе тј. произвољност у одређивању њихове позиције у параметарском и у глобално Декартовом координатном систему. Уочимо стога да и за фиксиране чворове у Декартовом координатном систему и даље постоји велики број могућих комбинација њихових координата у локалном координатном систему. Алгоритам који ћемо представити има за циљ да олакша дефинисање унутрашњих чворова, и тиме олакша примену МКЕ вишег реда.

Прецизнија формулација проблема који ћемо решавати је следећа. Нека је хексаедарски елемент вишег реда задат преко својих 6 страна, које се у најопштијем случају могу описати као делови 3Д површи ограничени са 4 ивице. Потребно је дефинисати пресликавање (3.1), имајући у виду да је геометријски опис елемента задат једино преко страна које га ограничавају. Доступни хексаедарски мешери као што је [54] могу да реше проблем чије је геометрија задата на овај начин, али се решење заснива на  $h$ -профињивању, што желимо да избегнемо јер у том случају методе вишег реда не дају оптималне резултате. Додатно, за проучавање оптималних пресликавања пожељно је имати што више контроле над геометријском формулацијом.

Решење које ћемо предложити заснива се на следећој физичкој аналогији. Нека је мрежа тачака задата у Декартовом координатном систему (нека се иницијалне позиције тачака по бројној вредности налазе у интервалу од  $-1$  до  $+1$ ) и нека су повезане фиктивним еластичним опругама. Ако тачке на ободу

мреже поставимо на странице хексаедарског елемента вишег реда, тачке које су биле у унутрашњости мреже ће се због дејства еластичних сила распоредити по унутрашњости елемента. Ако сада решимо овај класично механички проблем система деформисаних еластичних опруга, као решење ћемо добити положај тачака у унутрашњости елемента, тј. њихове Декартове координате. Ако су параметарске координате задате полазном мрежом тачака, имаћемо довољно података за поставку система (3.2). Проблем који смо преформулисали у виду физичког аналогона можемо у апроксимативном смислу решити на следећи начин. Наиме, нека је сваком чвору почетне мреже придружена или фиксна позиција (на једној од 6 страна елемента вишег реда) или непознати померај који желимо да пронађемо. Ако за сваку деформисану опругу  $i$  дефинишемо њену енергију деформације као

$$E_i = \frac{1}{2} (k_i(x_1 - x_2)^2 + k_i(y_1 - y_2)^2 + k_i(z_1 - z_2)^2), \quad (3.4)$$

где су  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$  - помераји крајева  $i$ -те опруге у односу на иницијалну позицију (познати или непознати), и  $k$  - коефицијент истезања фиктивне опруге (који може бити различит за сваку опругу у систему), можемо дефинисати укупну енергију деформације као

$$E_d = \sum_i E_i. \quad (3.5)$$

Непознате помераје налазимо из услова минимизације енергије деформације, тј. из система

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_d}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial E_d}{\partial y_i} &= 0, \\ \frac{\partial E_d}{\partial z_i} &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

уз напомену да у систем улазе само непознати помераји, пошто је једино по њима могуће диференцирање. Приметимо да израз за енергију (3.4) не одговара Хуковој апроксимацији физичке опруге код које је енергија деформације пропорционална квадрату истезања опруге, већ је апроксимација која нам омогућава да систем

(3.6) буде линеаран. Уз овакве апроксимације систем (3.6) је могуће поставити директно, јер се за сваки чвор почетне мреже систем сведе на једначину равнотеже сила истезања фиктивних опруга. Ако је почетна мрежа стандардна структурирана тродимензиона мрежа, онда неки чвор у унутрашњости има 6 суседних чворова са којима је повезан опругама, па одговарајући део система (3.6) гласи

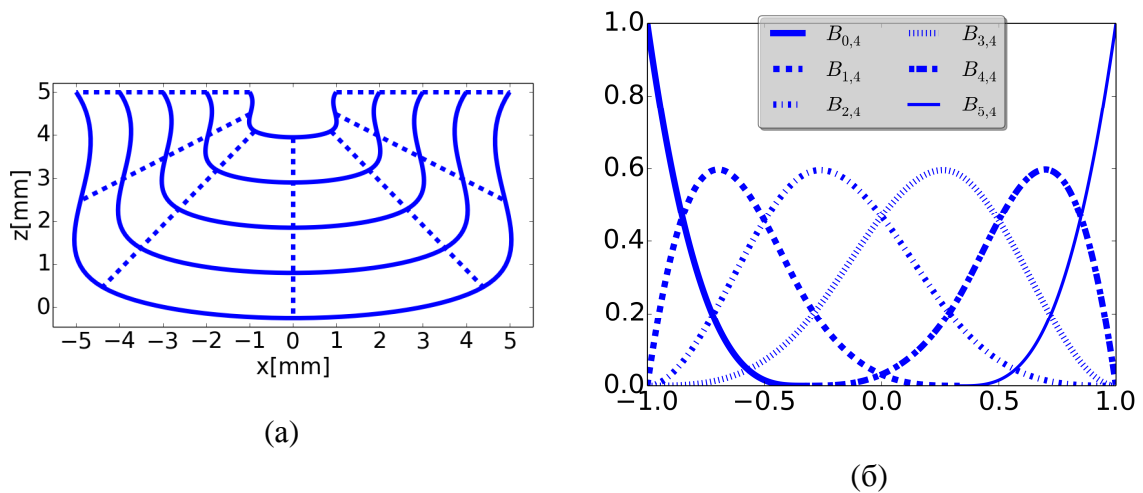
$$\begin{aligned} & k(x_{ijk} - x_{(i-1)jk}) + k(x_{ijk} - x_{(i+1)jk}) + \\ & k(x_{ijk} - x_{i(j-1)k}) + k(x_{ijk} - x_{i(j+1)k}) + \\ & k(x_{ijk} - x_{ij(k-1)}) + k(x_{ijk} - x_{ij(k+1)}) = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

и слично за преостале 2 координате. Приметимо да је, када се непознате групишу на леву страну, а константе на десну, и формира се систем једначина, матрица система иста за све координате, док се једино разликује десна страна. Ако је коефицијент истезања исти за све опруге, онда његова вредност није ни важна, што се лако може увидети на основу (3.7). Приказаћемо неколико примера заснованих на шупљини са гребеном која је приказана на слици 3-3(а), где је параметризација добијена на претходно описани начин.

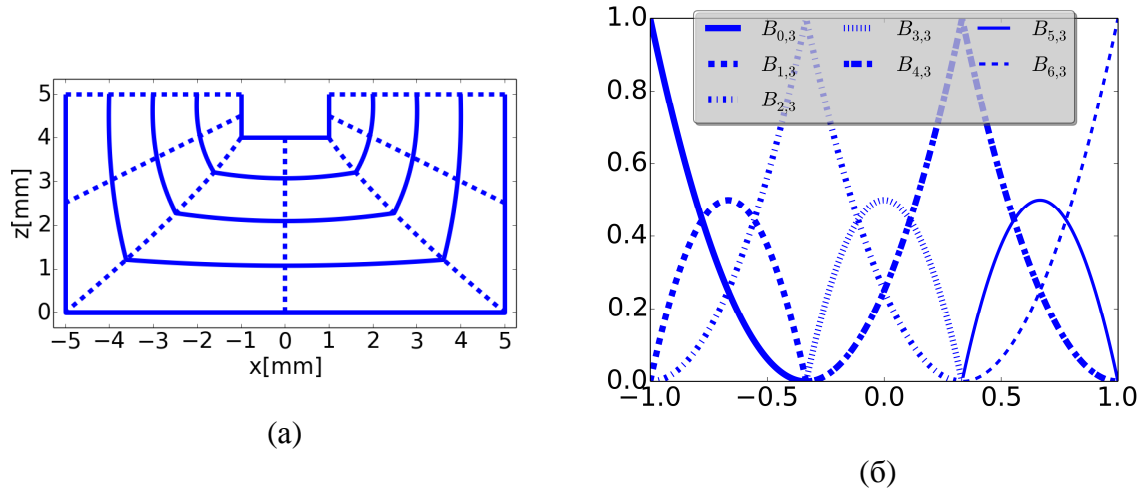
Иако се геометрија површи шупљине потпуно тачно описује параметризацијом помоћу линеарних сплајнова која захтева свега 16 функција у развоју, ако у геометријски опис унесемо и додатне захтеве у виду интерполационих тачака које се налазе у унутрашњости, тада можемо добити практично неограничен број нових параметризација. Алгоритам који смо представили у овом поглављу представља само један од могућих начина пресликавања параметарског домена у коначни елемент вишег реда, где је при томе начин пресликавања задат преко физичког аналогона у виду фиктивних опруга између суседних чворова параметарске мреже. Може се очекивати и да неке од тих параметризација дају боље резултате у погледу апроксимирања поља, чиме ћемо се бавити у наредним поглављима.

Ако повећамо ред функција у  $u$ -координатном правцу, можемо очекивати да унутрашње линије зависно од распореда интерполационих тачака не врше оштар прелаз на ћошковима шупљине. Слика 3-3(в) приказује један  $u$ -координатни пресек и коришћене функције које одговарају  $u$ -координатном

правцу (слика 3-3(б)) при пресликавању које користи само спољних 16 темена шупљине. Слика 3-4(а) приказује један  $w$ -координатни пресек када је извршено нехијерархијско подизање степена функција које одговарају  $u$ -координатном правцу где су додатне интерполаторне тачке добијене коришћењем алгоритма који је представљен у овом поглављу. Проблем са оваквим пресликавањем је тај да иако сада нова фамилија функција има више чланова, они имају виши степен континуалности те не могу тачно да представе праве углове који постоје на спољним ивицама шупљине. Апроксимација поља која би користила овакве функције би имала повећану континуалност, али би сам геометријски опис био нетачан.



Слика 3-4. (а)  $u$  -  $v$  координатне линије у једном  $w$ -пресеку. (б) Породица Б-сплајнова, коришћена у  $u$ -параметарском правцу са  $m_u = 4$  и стандардним вектором чворова.



Слика 3-5. (а)  $u$  -  $v$  координатне линије у једном  $w$ -пресеку. (б) Породица Б-сплајнова, коришћена у  $u$ -параметарском правцу са  $m_u = 3$  и вектором чворова  $k_u = [-1, -1, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1]$ .

Слика 3-5(а) приказује координатне линије када је извршено хијерархијско профињивање подизањем степена за један свих фамилија коришћених у почетном моделу са слике 3-3.

### 3.3 Додатне дефиниције неопходне за формулацију МКЕ

Посматрано на нивоу једног коначног елемента, комплетан геометријски опис је дат изразом (3.1). Базисне функције за развој поља, које ћемо детаљно описати у наредним поглављима, ослањају се на (3.1) за дефинисање “векторског” дела базисне функције [10]. Додатне векторске функције које користимо, а које су засноване на параметризацији (3.1), дате су са

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_u &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \sum_{i,j,k=0}^{n_u, n_v, n_w} \frac{\partial B_{i,m_u}(u)}{\partial u} B_{j,m_v}(v) B_{k,m_w}(w) \mathbf{C}_{i,j,k}, \\
 \mathbf{a}_v &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \sum_{i,j,k=0}^{n_u, n_v, n_w} B_{i,m_u}(u) \frac{\partial B_{j,m_v}(v)}{\partial v} B_{k,m_w}(w) \mathbf{C}_{i,j,k}, \\
 \mathbf{a}_w &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \sum_{i,j,k=0}^{n_u, n_v, n_w} B_{i,m_u}(u) B_{j,m_v}(v) \frac{\partial B_{k,m_w}(w)}{\partial w} \mathbf{C}_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

и називају се унитарни вектори. Реципрочни унитарни вектори су дати са

$$\mathbf{a}_u^r = \frac{\mathbf{a}_v \times \mathbf{a}_w}{\mathcal{J}}, \quad \mathbf{a}_v^r = \frac{\mathbf{a}_w \times \mathbf{a}_u}{\mathcal{J}}, \quad \mathbf{a}_w^r = \frac{\mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v}{\mathcal{J}}, \quad (3.9)$$

где је Јакобијан трансформације (3.1) дат мешовитим векторским производом

$$\mathcal{J} = (\mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v) \cdot \mathbf{a}_w. \quad (3.10)$$

Битно је напоменути да, осим у специјалним случајевима, унитарни и реципрочни унитарни вектори нису јединични вектори. Они не морају бити константни чак и ако је облик елемента врло правилан, нпр. облика квадрата, уколико једнака параметарска растојања не одговарају једнаким растојањима у Декартовом координатном систему. Реципрочност се огледа у особини  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^r = \delta_{ij}$  где  $i, j \in \{u, v, w\}$ , где је  $\delta_{ij}$  Кронекеров симбол.

### 3.4 Алгоритам за прорачун инверзног геометријског пресликавања

Пресликавање дато једначином (3.1) пресликава параметарски домен у глобални Декартов координатни систем. Некад је, међутим, потребно утврдити обрнуто, тј. за задату тачку у глобалном Декартовом координатном систему наћи њене параметарске координате. То је најпогодније (а у општем случају једино и могуће) урадити на апроксимативан начин. Један од начина на који се то може конкретно учинити је следећи. Приликом формирања поделе улазне геометрије на елементе вишег реда, формира се и *kd-дрво*, структура података погодна за проналажење најближег суседа за задат скуп тачака [55, 56]. Ова структура се попуни интерполационим тачкама елемената, за које наравно знамо оба типа координата. Пошто постоје алгоритми за ефикасно налажење најближег суседа унутар *kd-дрвета*, на овај начин формирана структура података нам може послужити да за произвољну тачку глобалног Декартовог координатног система можемо једноставно утврдити у ком, или близу ког, елемента се налази. Најближа интерполаторна тачка елемента нам служи за иницијалну процену локалне координате. Потом итеративно профињујемо ову иницијалну процену унутар одговарајућег елемента на следећи начин:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_i(u_i, v_i, w_i) &= (x, y, z) - \mathbf{r}(u_i, v_i, w_i) \approx \\ &\approx \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v_i, w_i)}{\partial u} \Delta u_i + \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v_i, w_i)}{\partial v} \Delta v_i + \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v_i, w_i)}{\partial w} \Delta w_i, \end{aligned} \quad (3.11)$$

па пошто је  $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{a}_u \Delta u_i + \mathbf{a}_v \Delta v_i + \mathbf{a}_w \Delta w_i$  и  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^r = \delta_{ij}$  где  $i, j \in \{u, v, w\}$  имамо

$$(\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i) = (\Delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}_u^r, \Delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}_v^r, \Delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}_w^r), \quad (3.12)$$

$$(u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1}) = (u_i, v_i, w_i) + (\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i), \quad (3.13)$$

где је  $(u_i, v_i, w_i)$  - процена локалне координате у  $i$ -тој итерацији,  $(\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i)$  - корекција локалне координате у  $i$ -тој итерацији,  $\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_w$  - унитарни вектори,

$\mathbf{a}_u^r, \mathbf{a}_v^r, \mathbf{a}_w^r$  - реципрочни унитарни вектори и  $\delta_{ij}$  - Кронекеров симбол.

Врло велика тачност се може постићи већ након свега неколико итерација, али овај број зависи и од иницијалне процене локалне координате, чији квалитет наравно зависи од броја интерполаторних тачака које смо додали у *kd-дрво* улазне геометрије. У примерима које смо разматрали у овом поглављу машинска тачност се постиже већ након 2-3 интерације.

### 3.5 Особине општег геометријског моделовања и геометријског моделовања у методи коначних елемената

Праксе општег геометријског моделовања и геометријског моделовања које служи као припрема за МКЕ се умногоме разликују. Најраспрострањенија метода општег геометријског моделовања заснива се на техникама представљања површинске границе геометријских тела које се налазе у моделу (енгл. *boundary representation modelling*), са многим доступним платформама за развијање софтвера за 3Д моделовање, од којих су неке и јавно доступне [57]. У оваквом моделу, експлицитан геометријски опис имају само тачке, линије и површи. Наравно, линије и површи је могуће даље разврстати на праве, односно равни, Б-сплајн криве и површи итд. Приметимо да се геометријски опис зауставља на врло једноставним објектима. Компликованији геометријски објекти се представљају чисто тополошки, као комбинација ових једноставнијих објеката. На

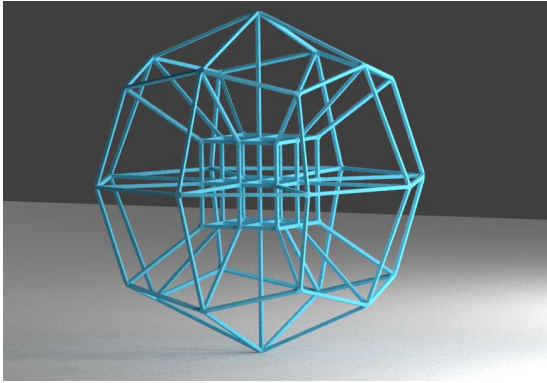


пример запреминско тело је скуп повезаних страна, а свака страна је површ на којој се налазе линије које га ограничавају.

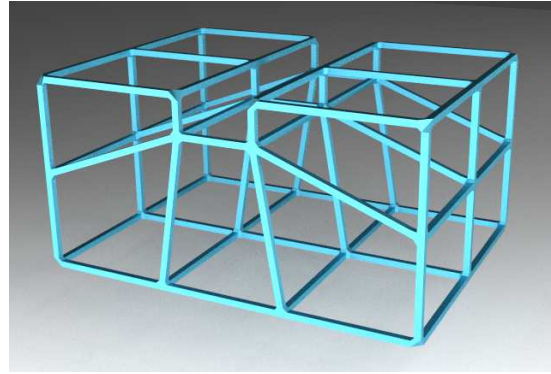
Геометријско моделовање које служи као припрема за уобичајену МКЕ је нешто једноставније. Наиме, у овом случају се геометријска подлога састоји само од тачака. Све остале информације о моделу се задају тополошки. Тако су, на пример, ивице скупови од 2 тачке, елементи су, зависно од типа и димензије, скупови од 3 до 8 тачака.

Геометријско моделовање у МКЕ вишег геометријског реда се по сложености описа налази између претходна два описана типа моделовања. Тако, на пример, хексаедарски елемент вишег реда може бити задат са 6 Б-сплајн површи које га ограничавају. Приметимо да нам је за примену методе потребна и 3Д параметризација, која се може добити помоћу алгоритма аутоматске параметризације који је претходно описан. Методе вишег геометријског реда које су заступљене у широј инжењерској пракси углавном користе елементе највише другог реда. Тако се значајно упрошћава геометријски опис, али се наравно и губи на његовој флексибилности, што се може видети на пар примера моделовања Б-сплајн елементима које смо приказали, а који омогућавају знатно флексибилније геометријско моделовање. Б-сплајн елементи су довољно флексибилни да практично могу да користе излазе аутоматских мешера било ког реда, једино је потребно на прикладан начин формулисати систем (3.2).

Додатна анализа која је потребна да се уради при МКЕ формулацији је тополошка анализа. У МКЕ се тополошка анализа користи за апроксимирање граничних услова, који се у 3Д МКЕ намећу на свим површима модела. Међутим, као што ћемо видети у наредним поглављима, иако је теоретски довољно наметнути граничне услове на површинама модела, у пракси је у тополошкој анализи, осим заједничких страна, погодније посматрати и заједничке ивице елемената. Зато, са становишта имплементације алгоритма, МКЕ структуре података које користимо за меш модела морају имати и погодне методе за упите која два елемента деле неку страну, као и који елементи су заједнички некој одређеној ивици. Ове информације ће бити коришћене у алгоритму спајања елемената који ће бити описан у наредним поглављима.



(a)



(б)

Слика 3-6. Меш добијен помоћу аутоматског хексаедарског мешера: (а) сферична шупљина моделована помоћу 32 елемента и (б) шупљина U типа (*ridge*) моделована помоћу 10 елемената.

Наметање граничних услова у неким случајевима захтева и информацију о геометрији, а не само о топологији модела. Такав је случај, на пример, код тзв. таласних портова, где је неопходан прорачун површинских интеграла по површи порта [41]. У тези нећемо разматрати методе наметања граничних услова које укључују прорачун површинских интеграла, већ ћемо више пажње посветити граничним условима који се могу наметнути стриктном тополошком анализом, конкретно, гранични услов на споју диелектрик-диелектрик и гранични услов на савршеном електричном проводнику.

## 4 Моделовање електричног поља

У овом поглављу ћемо дати детаљан опис функција које су коришћене при апроксимирању електричног поља у разматраној формулацији МКЕ. Основа геометријског моделовања је употреба Б-сплајн функција на начин који је описан у претходним поглављима. Функције које су коришћене за развој електричног поља су хијерархијске полиномске функције описане у [7, 9], и Б-сплајн функције описане у [10].

### 4.1 Апроксимирање електричног поља помоћу хијерархијских полиномских функција

Приликом апроксимирања електричног поља помоћу хијерархијских полиномских функција, у сваком елементу поље се развија на следећи начин

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=0}^{n_{fu}-1} \sum_{j=0}^{n_{fv}-1} \sum_{k=0}^{n_{fw}} \alpha_{uijk} \mathbf{f}_{uijk} + \sum_{i=0}^{n_{fu}} \sum_{j=0}^{n_{fv}-1} \sum_{k=0}^{n_{fw}} \alpha_{vijk} \mathbf{f}_{vijk} + \sum_{i=0}^{n_{fu}} \sum_{j=0}^{n_{fv}} \sum_{k=0}^{n_{fw}-1} \alpha_{wijk} \mathbf{f}_{wijk} . \quad (4.1)$$

У овој дефиницији  $n_{fu}$ ,  $n_{fv}$  и  $n_{fw}$  се користе за нумерисање функција за развој поља (поље енгл. *field*, стога  $f$  у индексу) у једном просторном правцу, и одговарају **реду** полиномске функције једне променљиве у одговарајућем параметарском правцу. Базисне функције су векторске функције три променљиве које су дате са:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{uijk}^e &= u^i P_j(v) P_k(w) \frac{\mathbf{a}_v^e \times \mathbf{a}_w^e}{\mathcal{J}^e}, \\
\mathbf{f}_{vijk}^e &= P_i(u) v^j P_k(w) \frac{\mathbf{a}_w^e \times \mathbf{a}_u^e}{\mathcal{J}^e}, \\
\mathbf{f}_{wijk}^e &= P_i(u) P_j(v) w^k \frac{\mathbf{a}_u^e \times \mathbf{a}_v^e}{\mathcal{J}^e}, \\
P_s(v) &= \begin{cases} 1-v, & s=0 \\ v+1, & s=1 \\ v^s-1, & s \geq 2 \text{ и парно} \\ v^s-v, & s \geq 3 \text{ и непарно,} \end{cases} \\
\mathcal{J}^e &= (\mathbf{a}_u^e \times \mathbf{a}_v^e) \cdot \mathbf{a}_w^e, \mathbf{a}_u^e = \frac{\partial \mathbf{r}^e}{\partial u}, \mathbf{a}_v^e = \frac{\partial \mathbf{r}^e}{\partial v}, \mathbf{a}_w^e = \frac{\partial \mathbf{r}^e}{\partial w},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где је  $\mathcal{J}^e$  Јакобијан коваријантне трансформације, а  $\mathbf{a}_u^e$ ,  $\mathbf{a}_v^e$ , и  $\mathbf{a}_w^e$  су унитарни вектори дуж параметарских координата  $e$ -тог елемента. Израз хијерархијске функције односи се на начин увећавања скупа базисних функција. Наиме, свако повећање реда апроксимације поља по било ком параметарском правцу, доводи до тога да се претходни скуп функција коришћених за апроксимирање у том правцу прошири за додатне чланове, уз задржавање старих чланова. Иако су хијерархијске, функције дефинисане изразом (4.2) нису потпуно интерполаторне, што значи да не можемо за сваку функцију наћи тачку параметарског интервала у којој је само једна функција различита од нуле. Изузетак су прве две функције које су интерполаторне у крајњим тачкама параметарског интервала. То што скуп функција није интерполаторан као последицу има и чињеницу да коефицијенти у развоју поља, дати у изразу (4.1), немају директан физички смисао, као што је то случај код интерполаторних функција.

За потребе попуњавања МКЕ матрица потребни су нам и изрази за роторе базисних функција који су у овом случају дати са

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{f}_{uijk} &= \frac{1}{\mathcal{J}^e} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_u & & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ u^i P_j(v) P_k(w) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
& \frac{1}{\mathcal{J}^e} u^i \left( P_j(v) \frac{\partial P_k(w)}{\partial w} \mathbf{a}_v - \frac{\partial P_j(v)}{\partial v} P_k(w) \mathbf{a}_w \right), \\
\nabla \times \mathbf{f}_{vijk} &= \frac{1}{\mathcal{J}^e} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ 0 & P_i(v) v^j P_k(w) & 0 \end{bmatrix} = \\
& \frac{1}{\mathcal{J}^e} v^j \left( -P_i(u) \frac{\partial P_k(w)}{\partial w} \mathbf{a}_u + \frac{\partial P_i(u)}{\partial u} P_k(w) \mathbf{a}_w \right), \\
\nabla \times \mathbf{f}_{wijk} &= \frac{1}{\mathcal{J}^e} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ 0 & 0 & P_i(v) P_j(w) w^k \end{bmatrix} = \\
& \frac{1}{\mathcal{J}^e} w^k \left( P_i(u) \frac{\partial P_j(v)}{\partial v} \mathbf{a}_u - \frac{\partial P_i(u)}{\partial u} P_j(v) \mathbf{a}_v \right).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

## 4.2 Апроксимирање електричног поља помоћу Б-сплајн функција

У сваком елементу, електрично поље се развија на следећи начин

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=0}^{n_{fmu}} \sum_{j=0}^{n_{fv}} \sum_{k=0}^{n_{fw}} \alpha_{uijk} \mathbf{f}_{uijk} + \sum_{i=0}^{n_{fu}} \sum_{j=0}^{n_{fmv}} \sum_{k=0}^{n_{fv}} \alpha_{vijk} \mathbf{f}_{vijk} + \sum_{i=0}^{n_{fu}} \sum_{j=0}^{n_{fv}} \sum_{k=0}^{n_{fmw}} \alpha_{wijk} \mathbf{f}_{wijk} \tag{4.4}$$

У овој дефиницији  $n_{fu}$ ,  $n_{fmu}$ ,  $n_{fv}$ ,  $n_{fmv}$  и  $n_{fw}$ ,  $n_{fmw}$  се користе за нумерисање функција за развој поља (поље енгл. *field* стога  $f$  у индексу) у једном просторном правцу и одговарају променљивој  $n$  која је коришћена у дефиницији сплајн функција по једној променљивој. Сваки правац има два опсега индекса за нумерисање, који се односе на пун ред фамилије функција и на нижи ред, у складу са тзв. *mixed order* формулацијом. На пример, за функције по правцу  $u$  користимо индексе  $n_{fu}$  и  $n_{fmu}$ . У тези смо користили формулацију у којој се базисне

функције у *mixed order* формулацији конструишу тако што се фамилији нижег реда ред смањује за један, док се мултиплицитет смањује само крајњим чворовима у вектору чворова. У овом случају се број базисних функција подудара за хијерархијске полиномске и Б-сплајн базисне функције, при услову  $n_{fu} = n_u$ ,  $n_{fv} = n_v$  и  $n_{fw} = n_w$ .

Базисне функције су векторске функције три променљиве које су дате са:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{uijk}^e &= B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w) \frac{\mathbf{a}_v^e \times \mathbf{a}_w^e}{\mathcal{J}^e}, \\
 \mathbf{f}_{vijk}^e &= B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w) \frac{\mathbf{a}_w^e \times \mathbf{a}_u^e}{\mathcal{J}^e}, \\
 \mathbf{f}_{wijk}^e &= B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w) \frac{\mathbf{a}_u^e \times \mathbf{a}_v^e}{\mathcal{J}^e}, \\
 \mathcal{J}^e &= (\mathbf{a}_u^e \times \mathbf{a}_v^e) \cdot \mathbf{a}_w^e, \mathbf{a}_u^e = \frac{\partial \mathbf{r}^e}{\partial u}, \mathbf{a}_v^e = \frac{\partial \mathbf{r}^e}{\partial v}, \mathbf{a}_w^e = \frac{\partial \mathbf{r}^e}{\partial w},
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

где је  $\mathcal{J}^e$  Јакобијан коваријантне трансформације, а  $\mathbf{a}_u^e$ ,  $\mathbf{a}_v^e$ , и  $\mathbf{a}_w^e$  су унитарни вектори дуж параметарских координата  $e$ -тог елемента. Треба напоменути да Б-сплајн функције нису хијерархијске, и да је стога наметање континуалности тангенцијалне компоненте поља нетривијално и биће размотрено засебно. Такође, Б-сплајн функције нису ни интерполаторне, тако да коефицијенти у развоју поља (4.4) немају директан физички смисао.

Редови  $m_{fu}$ ,  $m_{fv}$ , и  $m_{fw}$  Б-сплајн функција за развој поља независни су од редова  $m_u$ ,  $m_v$ , и  $m_w$  Б-сплајн функција које се користе за геометријско пресликавање.

За потребе попуњавања МКЕ матрица потребни су нам и изрази за роторе базисних функција који су у овом случају дати са

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{f}_{uijk} &= \frac{1}{\mathcal{J}^e} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_u & & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_w \\ \partial / \partial u & & \partial / \partial v & \partial / \partial w \\ B_{i,m_{f_{uu}}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&\frac{1}{\mathcal{J}^e} B_{i,m_{f_{uu}}}(u) \left( B_{j,m_{fv}}(v) \frac{\partial B_{k,m_{fw}}(w)}{\partial w} \mathbf{a}_v - \frac{\partial B_{j,m_{fv}}(v)}{\partial v} B_{k,m_{fw}}(w) \mathbf{a}_w \right), \\
\nabla \times \mathbf{f}_{vijk} &= \frac{1}{\mathcal{J}^e} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_w \\ \partial / \partial u & \partial / \partial v & \partial / \partial w \\ 0 & B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w) & 0 \end{bmatrix} = \\
&\frac{1}{\mathcal{J}^e} B_{j,m_{fv}}(v) \left( -B_{i,m_{fu}}(u) \frac{\partial B_{k,m_{fw}}(w)}{\partial w} \mathbf{a}_u + \frac{\partial B_{i,m_{fu}}(u)}{\partial u} B_{k,m_{fw}}(w) \mathbf{a}_w \right), \\
\nabla \times \mathbf{f}_{wijk} &= \frac{1}{\mathcal{J}^e} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_w \\ \partial / \partial u & \partial / \partial v & \partial / \partial w \\ 0 & 0 & B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w) \end{bmatrix} = \\
&\frac{1}{\mathcal{J}^e} B_{k,m_{fw}}(w) \left( B_{i,m_{fu}}(u) \frac{\partial B_{j,m_{fv}}(v)}{\partial v} \mathbf{a}_u - \frac{\partial B_{i,m_{fu}}(u)}{\partial u} B_{j,m_{fv}}(v) \mathbf{a}_v \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

На основу претходних дефиниција, као и на основу особина Б-сплајн функција, можемо увидети неке сличности и разлике између два типа векторских базисних функција. Најпре, векторски део оба типа базисних функција и њихових ротора је дефинисан на исти начин, преко унитарних вектора (ротор базисних функција), и реципрочних унитарних вектора (базисне функције). Док су хијерархијске полиномске функције целодоменске, Б-сплајн функције у општем случају нису целодоменске, што у одређеној мери мења алгоритам попуњавања МКЕ матрица. Такође, посматрано на нивоу појединачних функција, полиномске функције дефинисане изразом (4.2) имају исти домен, па се стога користи и исти број одбирака функције при нумеричкој интеграцији. Код Б-сплајн функција ситуација је нешто другачија, јер иако су све функције дефинисане на истом броју подинтервала, неки од ових интервала могу бити мере нула, па гледано по појединачним функцијама при нумеричкој интеграцији немамо исти број одбирака за све функције. Ово уноси разлику при имплементирању МКЕ прорачуна, за ова два типа базисних функција, а због различитих домена

подинтегралних функција се интеграла у МКЕ прорачуну прорачунавају на нешто мање интуитиван начин за Б-сплајн функције него што је то случај са хијерархијским полиномским функцијама.

Што се тиче побољшања квалитета апроксимације поља разматраним базисним функцијама, оно се може постићи повећањем броја базисних функција у развоју, а ово се постиже повећавањем броја функција у појединачним параметарским правцима. Ово се у општем случају може урадити независно у 3 правца, тј. анизотропно, па је у неким случајевима могуће смањити или повећати ред апроксимације само у специфичном правцу који диктира улазна геометрија. Треба напоменути да се оба типа функција које смо дефинисали конструишу преко тензорског производа функција у појединачним параметарским правцима, па стога локално профићење апроксимације унутар једног елемента није могуће. Таква могућност би захтевала употребу сплајн функција које имају локализован домен, као што су на пример Т-сплајнови [48].

### **4.3 Наметање континуалности тангенцијалне компоненте електричног поља**

Осим што бољег апроксимирања диференцијалних једначина, базисне функције треба што боље да апроксимирају и граничне услове. У случају формулације електромагнетског проблема преко електричног поља то значи да базисне функције треба да задовоље граничне услове за електрично поље. Осим физичких граничних услова на стварним раздвојним површима, у апроксимативном решењу и на раздвојним површима елемената намећемо услов континуалности тангенцијалне компоненте електричног поља.

Покажимо најпре да је то могуће учинити коришћењем претходно наведених базисних функција. Ова могућност се заснива на векторском делу базисних функција који је задат преко реципрочних унитарних вектора. Нека је страна елемента параметризована променљивама  $u$  и  $v$ . На основу дефиниција унитарних вектора, знамо да су унитарни вектори који одговарају овим променљивама тј. правцима  $\mathbf{a}_u$  и  $\mathbf{a}_v$  тангентни на површ стране. Реципрочни



унитарни вектор  $\mathbf{a}_w^r = \frac{\mathbf{a}_u^e \times \mathbf{a}_v^e}{\mathcal{J}^e}$  је нормалан на ту страну. Уочимо да у општем случају елемената вишег геометријског реда реципрочни унитарни вектори по правцима  $u$  и  $v$  имају и тангенцијалну и нормалну компоненту на разматраној страни. Наметање континуалности тангенцијалне компоненте се врши на следећи начин. Уз претпоставку да два елемента имају заједничку страну која је параметризована на исти начин (уз евентуалне разлике у именима и знаку променљивих, које ћемо за сада занемарити без умањења општости дискусије), имамо да је  $\mathbf{a}_u^1 = \mathbf{a}_u^2$  и  $\mathbf{a}_v^1 = \mathbf{a}_v^2$ , на основу чега следи да изједначавањем одговарајућих коефицијената уз базисне функције чији векторски део потиче од реципрочних унитарних вектора, ефективно изједначавамо тангенцијалне компоненте апроксимације поља на заједничкој страни, јер је  $\mathbf{a}_u^1 \cdot \mathbf{a}_u^{r1} = \mathbf{a}_u^1 \cdot \mathbf{a}_u^{r2} = 1$ . Приметимо да смо оваквим изједначавањем коефицијената увели и наметање везе између нормалних компоненти за све базисне функције које имају тангенцијалну компоненту на заједничкој страни, будући да, као што смо већ напоменули, реципрочни унитарни вектори имају и нормалну компоненту. Међутим, овај споредни ефекат је исправљен у финалној апроксимацији помоћу функција чији је векторски део  $\mathbf{a}_w^r$  и које имају само нормалну компоненту на заједничкој страни.

Табела 4-1. Базисне функције које не учествују у спајању хијерархијских полиномских елемената.

Базисна ф-ја	3Д скаларно поље	3Д векторско поље	Индекси
$\mathbf{f}_u^e$	$u^i P_j(v) P_k(w)$	$\mathbf{a}_u^{re} = \frac{\mathbf{a}_v^e \times \mathbf{a}_w^e}{\mathcal{J}^e}$	$i$ сви $j$ сви осим 0 и 1 $k$ сви осим 0 и 1
$\mathbf{f}_v^e$	$P_i(v) v^j P_k(w)$	$\mathbf{a}_v^{re} = \frac{\mathbf{a}_w^e \times \mathbf{a}_u^e}{\mathcal{J}^e}$	$i$ сви осим 0 и 1 $j$ сви $k$ сви осим 0 и 1
$\mathbf{f}_w^e$	$P_i(v) P_j(w) w^k$	$\mathbf{a}_w^{re} = \frac{\mathbf{a}_u^e \times \mathbf{a}_v^e}{\mathcal{J}^e}$	$i$ сви осим 0 и 1 $j$ сви осим 0 и 1 $k$ сви

Табела 4-2. Базисне функције које не учествују у спајању Б-сплајн елемената.

Базисна фја	3Д скаларно поље	3Д векторско поље	индекси
$\mathbf{f}_u^e$	$B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w)$	$\mathbf{a}_u^{re} = \frac{\mathbf{a}_v^e \times \mathbf{a}_w^e}{\mathcal{J}^e}$	$i$ сви $j$ сви осим 0 и -1 $k$ сви осим 0 и -1
$\mathbf{f}_v^e$	$B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w)$	$\mathbf{a}_v^{re} = \frac{\mathbf{a}_w^e \times \mathbf{a}_u^e}{\mathcal{J}^e}$	$i$ сви осим 0 и -1 $j$ сви $k$ сви осим 0 и -1
$\mathbf{f}_w^e$	$B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w)$	$\mathbf{a}_w^{re} = \frac{\mathbf{a}_u^e \times \mathbf{a}_v^e}{\mathcal{J}^e}$	$i$ сви осим 0 и -1 $j$ сви осим 0 и -1 $k$ сви

Сада ћемо представити и неке додатне детаље потребне приликом наметања граничних услова у МКЕ. Најпре ћемо разврстати функције у сваком елементу на неколико група, а према улози коју имају у наметању граничних услова. Касније ћемо нешто детаљније размотрити случајеве раздвојне површи диелектрик-диелектрик, као и случај савреног електричног проводника за оба типа базисних функција.

Из претходне дискусије јасно је да у спајању елемената учествују само функције које имају тангенцијалну компоненту на странама елемента. Функције које не учествују у спајању елемената дате су у табелама 1 и 2 за оба типа елемената. Векторска основа базисних функција је, будући да користимо исту геометријску основу, наравно иста у обе табеле, па надаље неће бити навођена. Такође, нумерација функција је различита за два типа елемента, тако да су за хијерархијске полиномске функције од нарочитог интереса индекси 0 и 1 тј. прве две функције, које су једине различите од нуле на крајевима параметарског интервала  $[-1,+1]$ . За Б-сплајн функције је нумерација нешто другачија, па су

једине функције различите од нуле прва и последња функција у фамилији, што смо означили индексима 0 и  $-1$ . Овде је битно напоменути да је претпоставка да дефинишемо Б-сплајн функције на стандардном вектору чворова. При другачијем вектору чворова, и ако се користе скраћивања вектора чворова на интервал  $[-1,+1]$ , више од две функције су различите од нуле на крајевима интервала. Овај случај је знатно компликованији за анализу и неће бити посебно разматран, али је принципе који су овде наведени могуће користити и у том случају. Напоменимо на крају још једном да Б-сплајн функције у *mixed order* формулацији, осим степена, мењају и вектор чворова, па стога функције које се користе у истом параметарском правцу, иако имају сличну ознаку  $B_{i,m_{fmu}}(u)$  и  $B_{i,m_{fu}}(u)$ , припадају значајно различитим фамилијама сплајнова. Можемо још приметити, на основу табела 1 и 2, да је нумерација функција од интереса врло слична за оба типа базисних функција, па ћемо стога преостале таблице наводити само за Б-сплајн функције.

Базисне функције које имају тангенцијалну компоненту, па стога учествују у спајању елемената, могу се разврстати по странама елемента. На основу израза (4.2) и (4.5), функције које учествују у спајању елемената су функције  $\mathbf{f}_{v0,jk}^e, \mathbf{f}_{w0,jk}^e$  на страни  $u = -1$ , функције  $\mathbf{f}_{v(-1),jk}^e, \mathbf{f}_{w(-1),jk}^e$  на страни  $u = 1$ , функције  $\mathbf{f}_{u,i0k}^e, \mathbf{f}_{w,i0k}^e$  на страни  $v = -1$ , функције  $\mathbf{f}_{u,i(-1)k}^e, \mathbf{f}_{w,i(-1)k}^e$  на страни  $v = 1$ , функције  $\mathbf{f}_{u,ij0}^e, \mathbf{f}_{v,ij0}^e$  на страни  $w = -1$ , функције  $\mathbf{f}_{u,ij(-1)}^e, \mathbf{f}_{v,ij(-1)}^e$  на страни  $w = 1$ . Дакле, од функција  $\mathbf{f}_u^e$  у спајању учествују  $\mathbf{f}_{u,i0k}^e, \mathbf{f}_{u,i(-1)k}^e, \mathbf{f}_{u,ij0}^e, \mathbf{f}_{u,ij(-1)}^e$ , затим од функција  $\mathbf{f}_v^e$  у спајању учествују  $\mathbf{f}_{v0,jk}^e, \mathbf{f}_{v(-1),jk}^e, \mathbf{f}_{v,ij0}^e, \mathbf{f}_{v,ij(-1)}^e$  и од функција  $\mathbf{f}_w^e$  у спајању учествују  $\mathbf{f}_{w0,jk}^e, \mathbf{f}_{w(-1),jk}^e, \mathbf{f}_{w,i0k}^e, \mathbf{f}_{w,i(-1)k}^e$ . Приметимо још да се, на пример, за функцију  $\mathbf{f}_u^e$  индекси  $ui0k$  и  $uij0$  преклапају у случају индекса  $ui00$ . Дакле, функција  $\mathbf{f}_u^e$  са индексом  $ui00$  има тангенцијалну компоненту **на две** суседне стране. У *hp*-FEM терминологији овакве функције се обично називају ивичне функције (енгл. *edge functions*). Функције које имају само тангенцијалну компоненту на стриктно једној страни елемента се називају функције стране (енгл. *face functions*), а функције које смо навели у табелама 4-1 и 4-2 називају се запреминске функције (енгл. *volume*

или *cell functions*). Функције стране елемента и ивичне функције дате су у табелама 4-3 и 4-4, редом. За наметање континуалности поља потребно је и довољно наметати континуалност на странама елемената. Међутим, са становишта имплементације алгоритма спајања, нешто је лакше разврстати функције које учествују у спајању на ивичне функције и на функције које имају тангенцијалну компоненту на стриктно једној страни.

Табела 4-3. Базисне функције које учествују у спајању елемената и имају тангенцијалну компоненту на стриктно једној страни, разврстане по странама.

Страна	Базисне ф-је	3Д скаларно поље	Индекси
$u = -1$	$\mathbf{f}_{v0jk}^e$	$B_{0,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}-1}(v)B_{k,m_{fw}}(w)$	$j$ сви $k$ сви осим 0 и -1
	$\mathbf{f}_{w0jk}^e$	$B_{0,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}-1}(w)$	$j$ сви осим 0 и -1 $k$ сви
$u = 1$	$\mathbf{f}_{v(-1)jk}^e$	$B_{-1,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}-1}(v)B_{k,m_{fw}}(w)$	$j$ сви, $k$ сви осим 0 и -1
	$\mathbf{f}_{w(-1)jk}^e$	$B_{-1,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}-1}(w)$	$j$ сви осим 0 и -1 $k$ сви
$v = -1$	$\mathbf{f}_{u i0k}^e$	$B_{i,m_{fu}-1}(u)B_{0,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w)$	$i$ сви $k$ сви осим 0 и -1
	$\mathbf{f}_{w i0k}^e$	$B_{i,m_{fu}}(u)B_{0,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}-1}(w)$	$i$ сви осим 0 и -1 $k$ сви
$v = 1$	$\mathbf{f}_{u i(-1)k}^e$	$B_{i,m_{fu}-1}(u)B_{(-1),m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}}(w)$	$i$ сви $k$ сви осим 0 и -1
	$\mathbf{f}_{w i(-1)k}^e$	$B_{i,m_{fu}}(u)B_{(-1),m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}-1}(w)$	$i$ сви осим 0 и -1 $k$ сви
$w = -1$	$\mathbf{f}_{u ij0}^e$	$B_{i,m_{fu}-1}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{0,m_{fw}}(w)$	$i$ сви $j$ сви осим 0 и -1
	$\mathbf{f}_{v ij0}^e$	$B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}-1}(v)B_{0,m_{fw}}(w)$	$i$ сви осим 0 и -1 $j$ сви
$w = 1$	$\mathbf{f}_{u ij(-1)}^e$	$B_{i,m_{fu}-1}(u)B_{j,m_{fv}}(v)B_{(-1),m_{fw}}(w)$	$i$ сви $j$ сви осим 0 и -1
	$\mathbf{f}_{v ij(-1)}^e$	$B_{i,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}-1}(v)B_{(-1),m_{fw}}(w)$	$i$ сви осим 0 и -1 $j$ сви

Табела 4-4. Базисне функције које учествују у спајању елемената и имају тангенцијалну компоненту на две стране, тзв. ивичне функције, разврстане по ивицама.

Ивица елемента	Базисне ф-је	3Д скаларно поље	индекси
$v = -1, w = -1$	$\mathbf{f}_{ui00}^e$	$B_{i,m_{fu}-1}(u)B_{0,m_{fv}}(v)B_{0,m_{fw}}(w)$	$i$ сви
$v = -1, w = 1$	$\mathbf{f}_{ui0(-1)}^e$	$B_{i,m_{fu}-1}(u)B_{0,m_{fv}}(v)B_{(-1),m_{fw}}(w)$	$i$ сви
$v = 1, w = -1$	$\mathbf{f}_{ui(-1)0}^e$	$B_{i,m_{fu}-1}(u)B_{(-1),m_{fv}}(v)B_{0,m_{fw}}(w)$	$i$ сви
$v = 1, w = 1$	$\mathbf{f}_{ui(-1)(-1)}^e$	$B_{i,m_{fu}-1}(u)B_{(-1),m_{fv}}(v)B_{(-1),m_{fw}}(w)$	$i$ сви
$u = -1, w = -1$	$\mathbf{f}_{v0j0}^e$	$B_{0,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}-1}(v)B_{0,m_{fw}}(w)$	$j$ сви
$u = -1, w = 1$	$\mathbf{f}_{v0j(-1)}^e$	$B_{0,m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}-1}(v)B_{(-1),m_{fw}}(w)$	$j$ сви
$u = 1, w = -1$	$\mathbf{f}_{v(-1)j0}^e$	$B_{(-1),m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}-1}(v)B_{0,m_{fw}}(w)$	$j$ сви
$u = 1, w = 1$	$\mathbf{f}_{v(-1)j(-1)}^e$	$B_{(-1),m_{fu}}(u)B_{j,m_{fv}-1}(v)B_{(-1),m_{fw}}(w)$	$j$ сви
$u = -1, v = -1$	$\mathbf{f}_{w00k}^e$	$B_{0,m_{fu}}(u)B_{0,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}-1}(w)$	$k$ сви
$u = -1, v = 1$	$\mathbf{f}_{w0(-1)k}^e$	$B_{0,m_{fu}}(u)B_{-1,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}-1}(w)$	$k$ сви
$u = 1, v = -1$	$\mathbf{f}_{w(-1)0k}^e$	$B_{-1,m_{fu}}(u)B_{0,m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}-1}(w)$	$k$ сви
$u = 1, v = 1$	$\mathbf{f}_{w(-1)(-1)k}^e$	$B_{(-1),m_{fu}}(u)B_{(-1),m_{fv}}(v)B_{k,m_{fw}-1}(w)$	$k$ сви

Ово је последица тога што се тополошка анализа разликује за ивице и стране, пре свега због чињенице да за типове меша које разматрамо у овој тези једна страна може имати највише два елемента који је додирују, док ивица може бити заједничка за већи број страна и елемената.

Услед чињенице да Б-сплајн функције нису хијерархијске, постоје извесна ограничења при њиховом коришћењу. Као што смо показали у поглављу о основним особинама Б-сплајн функција, чак су и простори које разапињу базисни скупови само под одређеним условима хијерархијски. Стога је за улазне геометрије са великим бројем елемената најпрактичније користити исте скупове сплајнова за све елементе, и у свим правцима. Анизотропија се потом може

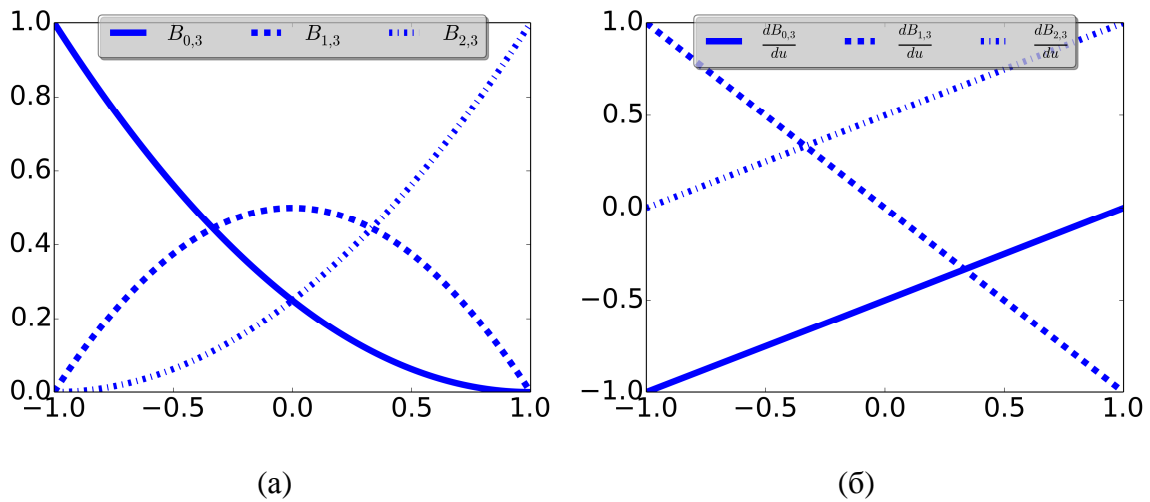
евентуално користити у запреминским базисним функцијама, које не учествују у спајању елемената, али уз поштовање хијерархије простора функција по параметарским правцима. Ми ћемо у нумеричким примерима разматрати анизотропију само у једноставнијим случајевима који се могу моделовати помоћу једног Б-сплајн елемента. Ту спадају сви примери наведени у поглављу о одликама геометријског моделовања. У случајевима компликованијих улазних геометрија, разматраћемо само изотропне и симетричне Б-сплајн елементе, тј. елементе засноване на Б-сплајн функцијама код којих је вектор чворова симетричан у односу на 0. У оваквој поставци, селективно просторно профињивање апроксимације поља једино се може постићи профињивањем меша.

Под претпоставком да разматрамо изотропне и симетричне Б-сплајн елементе, ако број функција у основној фамилији дуж неког параметарског правца означимо са  $b$ , а број функција у фамилији нижег степена по том истом правцу са  $m$ , онда је укупан број базисних функција у том елементу  $3 \cdot m \cdot b \cdot b$ . Функција које не учествују у спајању елемената има  $3 \cdot m \cdot (b-2) \cdot (b-2)$ . Функција које имају тангенцијалну компоненту на стриктно једној страни има  $6 \cdot (1 \cdot m \cdot (b-2) + 1 \cdot (b-2) \cdot m) = 6 \cdot 2 \cdot (b-2) \cdot m = 12 \cdot (b-2) \cdot m$ . Ивичних функција, тј. функција које имају тангенцијалну компоненту на тачно две стране, има  $3 \cdot 4 \cdot m \cdot 1 \cdot 1 = 12 \cdot m$ .

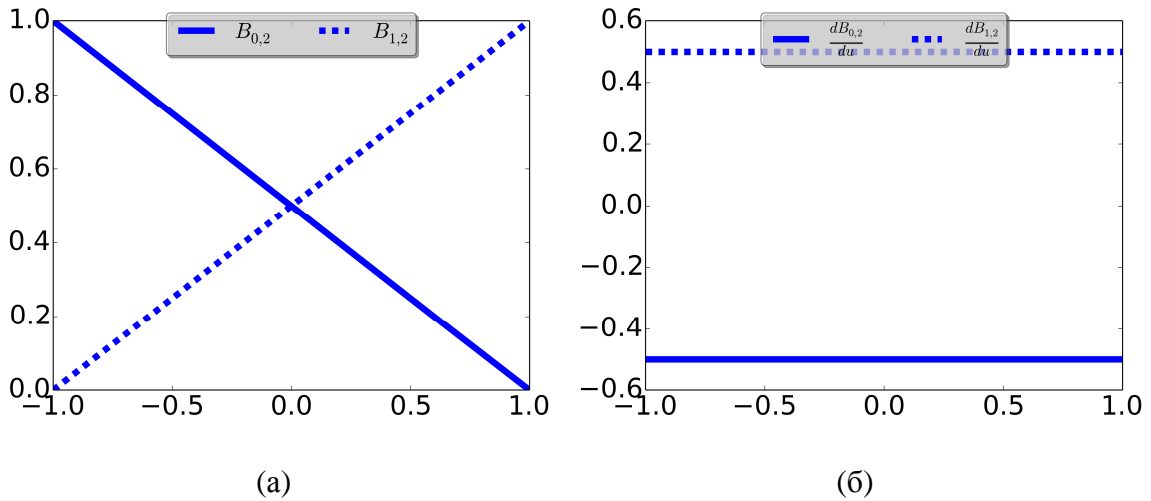
Илустроваћемо претходну дискусију на примеру шупљине са гребеном, која је подељена на  $N_{elemenata} = 10$  изотропних Б-сплајн елемената. Коришћена фамилија Б-сплајн функција приказана је на слици 4-1. У случају функција приказаних на слици 4-1, имамо да је  $b = 3$  и  $m = 2$ . Дакле у случају разматране шупљине са гребеном има укупно  $N_{elemenata} \cdot 3 \cdot m \cdot b \cdot b = 540$  базисних функција. Међутим, имајући у виду претходну дискусију о наметању граничних услова, нису сви коефицијенти стварне слободне променљиве. Стваран број променљивих знамо тек након извршене тополошке анализе. Како у овом примеру постоје само два типа граничних услова, диелектрик-диелектрик спој и услов на савршеном електричном проводнику (енгл. *perfect electric conductor - PEC*), број стварних променљивих износи

$$N_{\text{nakon\_spajanja}} = N_{\text{elemenata}} \cdot 3 \cdot m \cdot (b-2) \cdot (b-2) + N_{\text{dielektrik\_dielektrik\_lica}} \cdot 2 \cdot (b-2) \cdot m + N_{\text{PEC\_lica}} \cdot 0 + N_{\text{ivica\_bez\_PEC\_lica}} \cdot m \quad (4.7)$$

У разматраном случају је  $N_{\text{elemenata}} = 10$ ,  $N_{\text{dielektrik\_dielektrik\_lica}} = 13$ ,  $N_{\text{PEC\_lica}} = 34$ ,  $N_{\text{ivica\_bez\_PEC\_lica}} = 4$ , па је број стварних променљивих, који одређује и величину МКЕ матрица,  $N_{\text{nakon\_spajanja}} = 10 \cdot 6 + 13 \cdot 4 + 0 + 4 \cdot 2 = 120$ , тј. имамо 60 стварних променљивих које одговарају запреминским базисним функцијама, 52 променљиве које одговарају функцијама стране и 8 променљивих које одговарају ивичним функцијама. Видимо да је овај број значајно мањи од  $N_{\text{pre\_spajanja}} = 540$ .



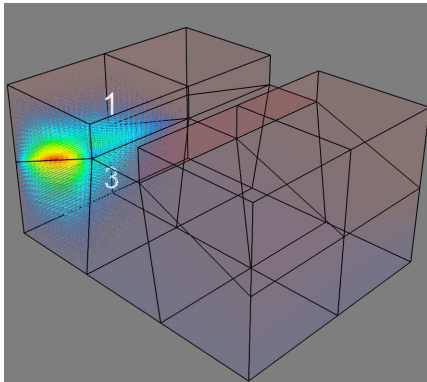
Слика 4-1. Фамилија Б-сплајнова са вектором чворова  $U = [-1, -1, -1, +1, +1, +1]$  и редом  $m = 3$ : (а) функције и (б) први изводи.



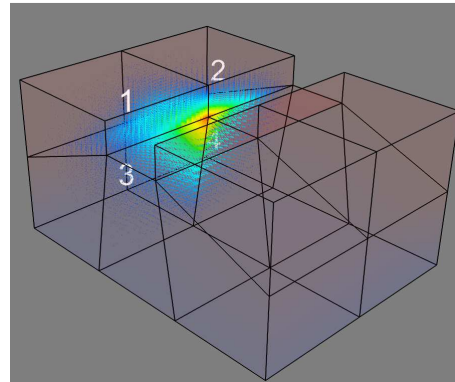
Слика 4-2. Фамилија Б-сплајнова са вектором чворова  $U = [-1, -1, +1, +1]$  и редом  $m = 2$ : (а) функције и (б) први изводи.

На сликама 4-3 и 4-4 приказане су неке од тих 540 базисних функција. Осим што су неки од коефицијената у развоју поља повезани, те стога имамо мањи број стварних слободних променљивих, велики број коефицијената у развоју је 0, због граничног услова на савршеном електричном проводнику, а у нашем примеру овај број износи чак 344 базисне функције. Такође, са слика се може још једном уочити да су, без обзира на поделу на неколико типова базисних функција, све оне дефинисане на делу елемента (у општем случају моделовања поља Б-сплајновима) или на целој запремини елемента (у посебним случајевима моделовања поља Б-сплајновима и у општем случају моделовања хијерархијским полиномима). Ово се наравно може видети и на основу израза који дефинишу базисне функције, па је ово још једна потврда да је подела на неколико типова функција уведена једино зарад једноставније тополошке анализе.



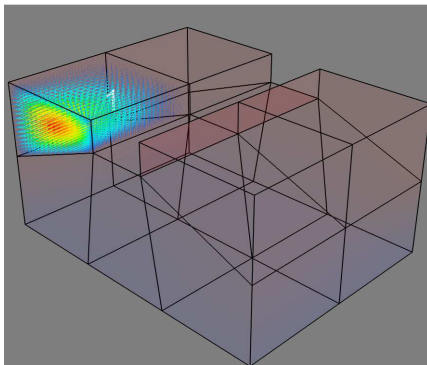


(a)

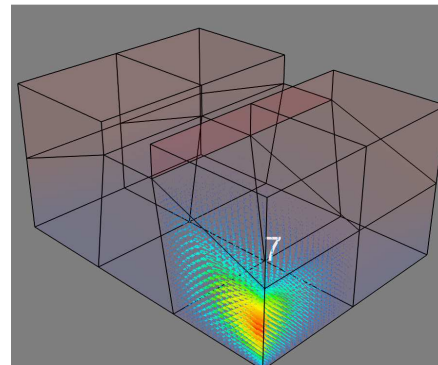


(б)

Слика 4-3. (а) Функције на диелектрик-диелектрик страни,  $\mathbf{f}_{u001}^3$  и  $\mathbf{f}_{u021}^1$  и (б) ивичне функције  $\mathbf{f}_{w020}^2$ ,  $\mathbf{f}_{w000}^4$ ,  $\mathbf{f}_{w200}^3$  и  $\mathbf{f}_{w220}^1$ .



(a)



(б)

Слика 4-4. (а) Запреминска функција  $\mathbf{f}_{u011}^1$ . (б) Функција на PEC страни  $\mathbf{f}_{w010}^7$ .

Вектор повезаности који нам служи за утврђивање везе између стварних променљивих и свих коефицијената у развоју поља може се одредити на следећи начин. Итерацију вршимо по свим елементима меша и за сваки појединачни елемент вршимо својеврсно разврставање и нумерисање коефицијената у развоју поља. Свим коефицијентима који одговарају запреминским базисним функцијама придружује се нова променљива, након чега се број стварних променљивих повећава за  $3 \cdot m \cdot (b-2) \cdot (b-2)$ . Потом се за сваку страну елемента разликује неколико случајева. Уколико се ради о PEC страни тада се свим коефицијентима који одговарају функцијама за ту страну (видети табелу 4-3) придружује вредност нула. При томе разликујемо случај када је PEC страна на граници домена, или

унутар домена од интереса. Ако је PEC страна унутар домена, тада вредност 0 придружимо и функцијама које одговарају тој страни али се доменом налазе у суседном елементу. У овом случају нема повећања броја стварних променљивих. Уколико се ради о диелектрик-диелектрик страни, тада је поступак следећи. Број стварних променљивих се повећава за  $2 \cdot (b-2) \cdot m$ , али је број коефицијената у развоју поља, којима морамо придружити неку од ових стварних променљивих, двоструко већи. Овде треба водити рачуна о чињеници да коефицијенти у два суседна елемента, иако одговарају истој стварној променљивој, могу имати разлику у знаку. Поступак за ивичне функције се нешто разликује, будући да у општем случају у мешу више елемената може имати заједничку ивицу. При наметању континуалности је потребно узети у обзир све ивичне функције из више елемената који деле исту ивицу (видети нпр. слику 3(б) где 4 елемента деле једну ивицу). Уколико су све стране које садрже разматрану ивицу диелектрик-диелектрик типа, једино тада увећавамо стваран број променљивих за  $m$ , а одговарајућим коефицијентима уз ивичне функције из елемената које садрже различиту ивицу придружимо ове стварне променљиве. Уколико је макар једна страна PEC страна тада се не увећава број стварних променљивих, а коефицијентима уз ивичне функције се придружује вредност 0.

Неки детаљи који могу бити од користи при имплементирању претходно наведених алгоритама су следећи. Свака страна у мешу се може јединствено одредити са 4 глобална чвора ( $g_1, g_2, g_3, g_4$ ), при чему су редни бројеви глобалних чворова сортирани у растући низ. Свака ивица се може јединствено одредити помоћу 2 глобална чвора ( $g_1, g_2$ ). При итерацији по елементима коју водимо од најмањег редног броја елемента ка вишим редним бројевима, свака прегледана страна се евидентира у скуп прегледаних страна и свака прегледана ивица се евидентира у скуп прегледаних ивица, чиме се обезбеђује да све функције од интереса евидентирамо само једанпут. Такође водимо и евиденцију стварних променљивих путем бројача који се увећава само у случајевима које смо претходно навели. За сваку нову вредност бројача евидентирају се сви коефицијенти уз базисне функције који су једнаки (изузев можда знака) овој стварној променљивој.

У случају хијерархијских полиномских функција, поступак одређивања вектора повезаности је врло сличан. Под претпоставком неизотропног меша и нехомогених елемената, важе следеће додатне напомене. У случају функција стране, за два правца која параметризују страну узимају се мањи степени тј. ако једном правцу у једном елементу одговара степен  $n_1$ , а у другом елементу степен  $n_2$ , за функције страна које учествују у спајању узимају се само функције до индекса  $\min(n_1, n_2)$  по том правцу. Вишак коефицијената који настаје овом приликом у једном или оба елемента се поставља на 0. Слично, за ивичне функције, број стварних променљивих (под претпоставком да су све стране која садрже разматрану ивицу диелектрик-диелектрик типа) увећава се само за  $\min(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1, \dots)$  где су  $n_1, n_2, n_3, \dots$  степени у параметарском правцу ивице у елементима који садрже ту ивицу.

#### 4.4 Попуњавање МКЕ матрица

Попуњавање матрица у МКЕ је корак на који одлази највише времена током извршавања програма. Стога се при имплементацији овог алгоритама посебна пажња обраћа на што оптималније искоришћавање рачунарских ресурса. Размотримо најпре случај једног елемента, а потом ћемо нешто детаљније размотрити и случај више елемената.

Уноси у матрици  $[A]$  су дати изразом

$$[A]_{\text{tip}_1ijk \text{tip}_2\hat{i}\hat{j}\hat{k}} = \left[ \int_{V^e} \mu_e^{-1} (\nabla \times \mathbf{f}_{\text{tip}_1ijk}) \cdot (\nabla \times \mathbf{f}_{\text{tip}_2\hat{i}\hat{j}\hat{k}}) dV \right] \quad (4.8)$$

где су  $i, j, k$  и  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  индекси базисних функција сагласно дефиницијама (4.2) и (4.5), и  $\text{tip}_1, \text{tip}_2 \in \{u, v, w\}$ . Јасно је да се индексирање матричног елемента мора обављати само помоћу 2 индекса, па се при имплементацији МКЕ алгорита често уводи пресликавање  $\text{tip}_1ijk \rightarrow \text{indeks}$  које пресликава четвороструки индекс у једноструки. Овакав тип пресликавања се често користи када је члановима неког скупа који је коначан и индексан помоћу више индекса потребно приступити секвенцијално. Добро познат пример из рачунарства је када се вишедимензиони низови морају сместити у линеарну секвенцу у меморији.

У случају хијерархијских полиномских функција, израз за унос у матрици  $[A]$  своди се на (навешћемо само израз за случај  $\text{tip}_1 = u$ ,  $\text{tip}_2 = v$  без умањења општости):

$$\begin{aligned}
[A]_{uijk \hat{v} \hat{j} \hat{k}} &= \int_{V^e} \mu_e^{-1} (\nabla \times \mathbf{f}_{uijk}) \cdot (\nabla \times \mathbf{f}_{\hat{v} \hat{j} \hat{k}}) dV = \\
&\int_{u=-1}^{u=+1} \int_{v=-1}^{v=+1} \int_{w=-1}^{w=+1} \mu_e^{-1} \frac{1}{\mathcal{J}^e} u^i \left( P_j(v) \frac{\partial P_k(w)}{\partial w} \mathbf{a}_v - \frac{\partial P_j(v)}{\partial v} P_k(w) \mathbf{a}_w \right) \cdot \\
&\frac{1}{\mathcal{J}^e} v^j \left( -P_{\hat{i}}(u) \frac{\partial P_{\hat{k}}(w)}{\partial w} \mathbf{a}_u + \frac{\partial P_{\hat{i}}(u)}{\partial u} P_{\hat{k}}(w) \mathbf{a}_w \right) \mathcal{J}^e dudvdw
\end{aligned} \quad (4.9)$$

У случају Б-сплајн функција, израз за унос у матрици  $[A]$  своди се на

$$\begin{aligned}
[A]_{uijk \hat{v} \hat{j} \hat{k}} &= \int_{V^e} \mu_e^{-1} (\nabla \times \mathbf{f}_{uijk}) \cdot (\nabla \times \mathbf{f}_{\hat{v} \hat{j} \hat{k}}) dV = \\
&\int_{u=-1}^{u=+1} \int_{v=-1}^{v=+1} \int_{w=-1}^{w=+1} \mu_e^{-1} \frac{1}{\mathcal{J}^e} B_{i,m_{fu}}(u) \left( B_{j,m_{fv}}(v) \frac{\partial B_{k,m_{fw}}(w)}{\partial w} \mathbf{a}_v - \frac{\partial B_{j,m_{fv}}(v)}{\partial v} B_{k,m_{fw}}(w) \mathbf{a}_w \right) \cdot \\
&\frac{1}{\mathcal{J}^e} B_{\hat{j},m_{fv}}(v) \left( -B_{\hat{i},m_{fu}}(u) \frac{\partial B_{\hat{k},m_{fw}}(w)}{\partial w} \mathbf{a}_u + \frac{\partial B_{\hat{i},m_{fu}}(u)}{\partial u} B_{\hat{k},m_{fw}}(w) \mathbf{a}_w \right) \mathcal{J}^e dudvdw
\end{aligned} \quad (4.10)$$

Уноси у матрици  $[B]$  дати су изразом

$$[B]_{tip_1ijk \hat{t}ip_2 \hat{i} \hat{j} \hat{k}} = \left[ \int_{V^e} \varepsilon_e \mathbf{f}_{tip_1ijk} \cdot \mathbf{f}_{\hat{t}ip_2 \hat{i} \hat{j} \hat{k}} dV \right]. \quad (4.11)$$

У случају хијерархијских полиномских функција, израз за унос у матрици  $[B]$  своди се на (навешћемо опет само израз за случај  $\text{tip}_1 = u$ ,  $\text{tip}_2 = v$  без умањења општости) :

$$\begin{aligned}
[B]_{uijk \hat{v} \hat{j} \hat{k}} &= \int_{V^e} \varepsilon_e \mathbf{f}_{uijk} \cdot \mathbf{f}_{\hat{v} \hat{j} \hat{k}} dV = \int_{u=-1}^{u=+1} \int_{v=-1}^{v=+1} \int_{w=-1}^{w=+1} \varepsilon_e u^i P_j(v) P_k(w) \mathbf{a}_u^{re} \cdot \\
&P_{\hat{i}}(v) v^j P_{\hat{k}}(w) \mathbf{a}_v^{re} dV
\end{aligned} \quad (4.12)$$

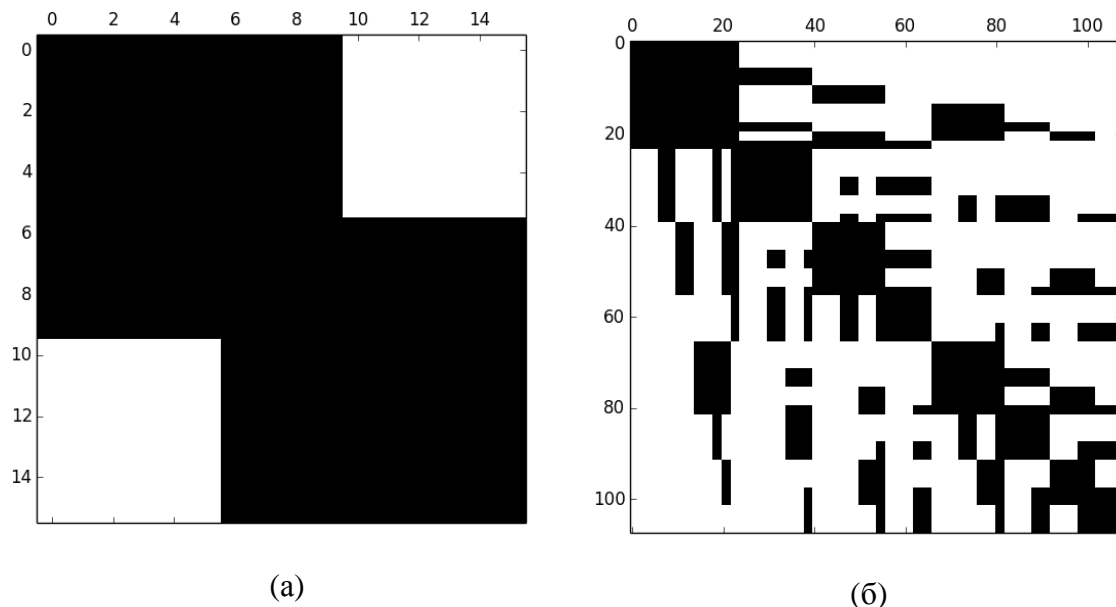
У случају Б-сплајн функција, израз за унос у матрици  $[B]$  своди се на

$$[B]_{\hat{u}\hat{v}\hat{k}} = \int_{V^e} \varepsilon_e \mathbf{f}_{uijk} \cdot \mathbf{f}_{\hat{u}\hat{v}\hat{k}} dV = \int_{u=-1}^{u=+1} \int_{v=-1}^{v=+1} \int_{w=-1}^{w=+1} \varepsilon_e B_{i,m_{fu}}(u) B_{j,m_{fv}}(v) B_{k,m_{fw}}(w) \mathbf{a}_u^{re} \cdot B_{\hat{i},m_{fu}}(u) B_{\hat{j},m_{fv}}(v) B_{\hat{k},m_{fw}}(w) \mathbf{a}_v^{re} dV \quad (4.13)$$

Наведени интегрални изрази могу се једноставно аналитички израчунати једино у случају врло правилних облика елемената, када су подинтегралне функције полиномске. Компликованији геометријски облици елемената резултују Јакобијаном који није константан, па се стога губи полиномска структура подинтегралних функција.

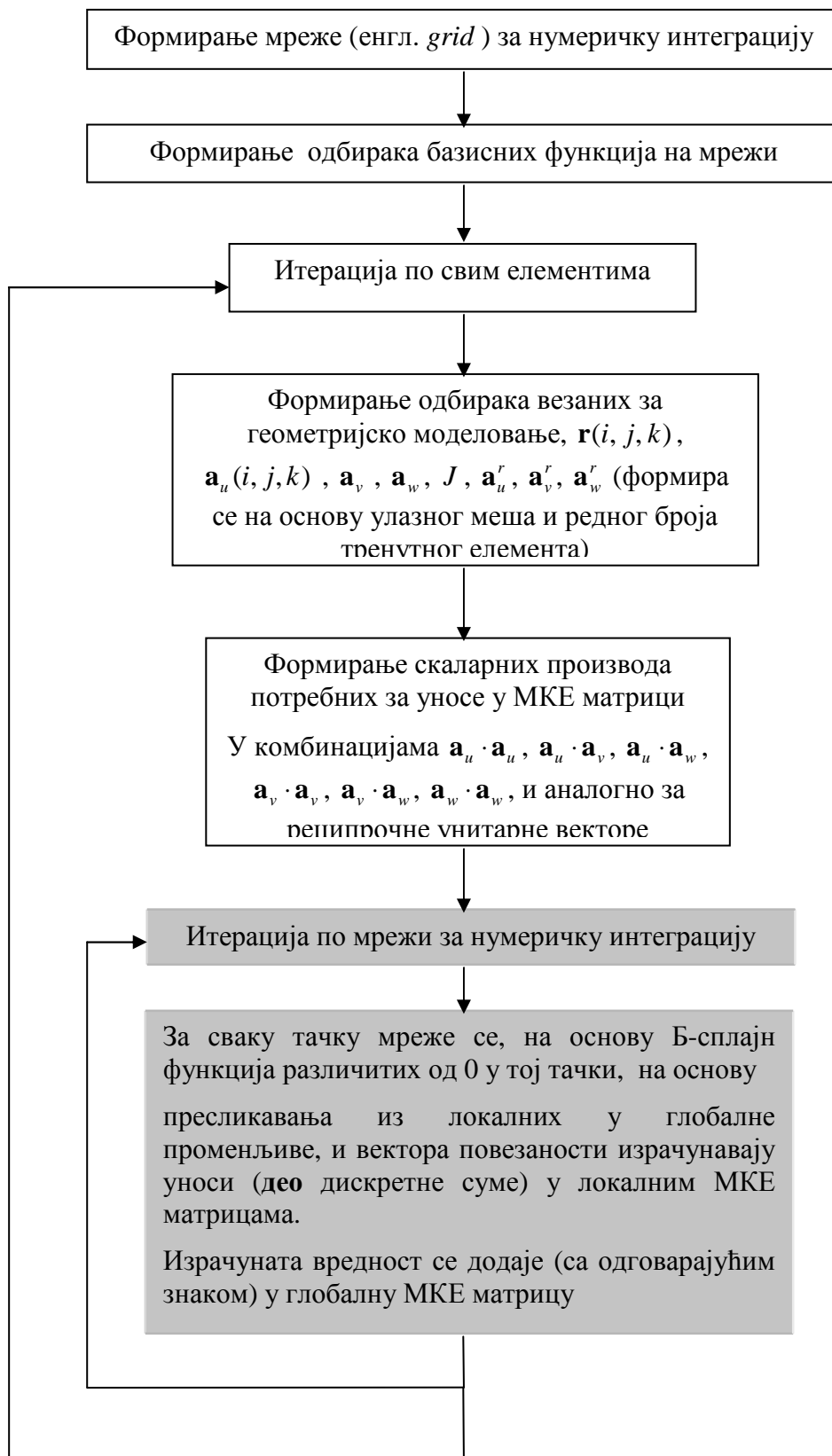
Нумеричка интеграција израза реализује се дискретизацијом подинтегралних функција, њиховим множењем одговарајућим тежинским факторима и потом сумирањем. Различите методе нумеричке интеграције разликују се у одабиру тачака за дискретизацију и наравно у тежинским факторима. Најоптималнији начин нумеричке интеграције за полиномске функције је Гаус-Лежандрова интеграција. Оптималност се огледа у најмањем броју одбирака потребном за тачно израчунавање интеграла, што за Гаус-Лежандрову методу износи  $n$  одбирака помоћу којих се тачно израчунавају интегрални изрази где су подинтегралне функције полиноми степена  $2n-1$  и мањег. Приликом прорачуна интеграла где подинтегралне функције нису полиноми, могуће је вршити процену тачности интеграције, али је потребно вршити неколико израчунавања истог интеграла и након тога оцењивати конвергенцију. У овом случају може се прибећи хијерархијским интеграционим алгоритмима, при којима се скуп одбирака само проширује (а не израчунава из почетка) при свакој итерацији. Један пример таквог интеграционог алгоритма је Гаус-Кронродова интеграција. Ипак, зарад ефикасности МКЕ алгоритама, уобичајено је вршити само један прорачун интеграла, при чему се оптимални редови интеграције задају унапред. Пример одређивања оптималних редова интеграције за хијерархијске полиномске функције у МКЕ/МоМ хибридној методи је дат у [58] при коришћењу Лагранжових полинома за геометријско моделовање. За Б-сплајн функције под одређеним условима могу постојати ефикаснији алгоритми интеграције [59, 60] него што је то Гаус-Лежандрова интеграција. Међутим, за ефикасну примену потребно је да апроксимације користе велики број функција, тако да је у овој тези коришћена Гаус-Лежандрова интеграција и за Б-сплајн функције. Поређења

времена попуњавања МКЕ матрица су на овај начин меродавнија. Ипак, потребно је напоменути да уз оптималну интеграцију, интеграција Б-сплајн функција може бити драматично убрзана [59, 60].



Слика 4-5. Облик попуњености Б-сплајн (двоструких) МКЕ матрица: (а) два елемента и (б) осам елемената.

Алгоритам попуњавања МКЕ матрица за Б-сплајн базисне функције је шематски приказан на слици 4-6. Основна разлика у односу на случај полиномских базисних функција је та што је код полиномских базисних ф-ја при попуњавању локалних МКЕ матрица погодније спољашњу итерацију вршити по функцијама, а не по интеграционим тачкама. Тако се код полиномских базисних ф-ја сваки унос локалне МКЕ матрице, који одговара једном пару базисних функција, попуњава одједном. Код Б-сплајн функција ово није случај, већ се попуњавање МКЕ матрице врши наизменично за разне парове базисних функција, будући да се основна итерација одвија по интеграционим тачкама. Део алгоритма у коме се разликује попуњавање МКЕ матрица за две врсте базисних функција освенчен је на слици 4-6.



Слика 4-6. Дијаграм алгоритма попуњавања МКЕ матрица у случају Б-сплајн базисних функција.

## 4.5 Закључак

У овом поглављу су дате дефиниције два типа базисних функција: дефиниција хијерархијских полиномских функција и дефиниција троваријететних Б-сплајн функција, које су коришћене за апроксимирање електричног поља у 3Д МКЕ формулацији у нумеричкој електромагнетици. Оба типа базисних функција се ослањају на геометријско моделовање засновано на Б-сплајн функцијама које је детаљније описано у претходном поглављу. Такође, дати су изрази за ротор базисних функција који су потребни при формирању МКЕ матрица. Описан је и начин на који се намећу два типа граничних услова, услов на граници савршеног електричног проводника и услов на споју диелектрик-диелектрик. Базисне функције су разврстане на три типа, што је уобичајена пракса у *hp*-МКЕ, а функције су затим и графички приказане на примеру моделовања шупљине се гребеном.

Дати су општи изрази за број базисних функција у случају изотропног (двоструког) Б-сплајн елемента. На крају су наведени изрази који дефинишу уносе у МКЕ матрицама, скицирана је попуњеност МКЕ матрица и наведен је алгоритам попуњавања МКЕ матрица. Наведене су и разлике које постоје у овом алгоритму за два разматрана типа базисних функција.



## 5 Нумерички резултати и дискусија

При нумеричкој анализи резонантних шупљина (које у коришћеној МКЕ формулацији припадају класи генерализаних проблема сопствених вредности) таласни број мода, односно вредност одговарајуће граничне учестаности су погодне величине за потврђивање модела и решења у целисти, као и за анализу конвергенције. У примерима у овом поглављу грешка је процењивана на основу поређења са тачним (аналитичким) решењима или са референтним нумеричким решењима добијеним помоћу комерцијалног софтвера [61]. У пракси је наравно најчешћи случај када немамо референтно решење и тада се анализа конвергенције мора вршити директно на основу добијених нумеричких резултата. Овакав вид анализе ћемо приказати на примеру шупљине са гребеном.

Ефикасност МКЕ прорачуна је процењивана на основу средњег броја интеграционих тачака које су потребне за прорачун једног уноса у МКЕ матрици и величине МКЕ матрице. Најкориснији начин поређења ефикасности МКЕ прорачуна за практичне сврхе је поређење тоталног времена извршавања програма. Међутим, будући да академски кодови у својим почетним верзијама најчешће нису у потпуности оптимизовани, знатно бољи увид у ефикасност алгорита се може добити анализом средњег броја интеграционих (нпр. Гаус-Лежандрових) тачака по уносу у МКЕ матрици. За два модела чије су МКЕ матрице исте величине, однос времена извршавања је пропорционалан односу средњег броја интеграционих тачака.

Због разлике која постоји између целодоменских базисних функција (хијерархијске полиномске функције) и нецелодоменских базисних функција (Б-

сплајн базисне функције у општем случају нису целодоменске) и средњи број интеграционих тачака се разликује у ова два случаја. Будући да базисне функције које за апроксимацију поља користе Б-сплајн функције у општем случају нису различите од нуле на целом параметарском интервалу  $[-1,+1]$  и да се не преклапају домени свих функција, број интеграционих тачака варира од 0 (домени функција се уопште не преклапају) до максималног броја интеграционих тачака (на пример у члановима на главној дијагонали МКЕ матрице где се домени преклапају у потпуности). Са друге стране, базисне функције које садрже хијерархијске полиноме су целодоменске, па при попуњавању МКЕ матрице за сваки унос у матрици имамо једнак број потребних одбирака (под претпоставком да су све функције дефинисане на истој 3Д мрежи).

Додатно, треба напоменути да је Гаус-Лежандрова интеграција оптимална интеграција за случај хијерархијских полиномских функција и у погледу тачности и у погледу минималног броја одбирака за задату тачност. Са друге стране, овај тип интеграције није оптималан у смислу минималног броја одбирака за дату тачност за случај Б-сплајн базисних функција, али и треба имати у виду да су оптимална правила нумеричке интеграције тек у повоју за Б-сплајн функције у МКЕ вишег реда [59, 60]. Проналажење оптималних правила интеграције у МКЕ нумеричким методама представља веома живу истраживачку област, нпр. у методи момената где се при попуњавању матрица јављају интегрални сингуларитети [62], као и у случају Б-сплајн функција где се тежи минимизацији броја потребних одбирака [59, 60]. Овде је веома важно напоменути да се правила нумеричке интеграције у МКЕ уобичајено изводе под претпоставком приближно константних унитарних, реципрочних унитарних вектора и Јакобијана геометријске трансформације. Овај услов није испуњен у општем случају за МКЕ вишег геометријског реда.

Имајући претходно наведене особине у виду, при поређењу два типа базисних функција ћемо користити различите Гаус-Лежандрове тачке. Док се за хијерархијске полиномске функције тачке бирају на целом домену према највишем степену функција, за Б-сплајн функције ћемо тачке бирати “део по део” на вектору чворова, према реду Б-сплајн фамилије. На овај начин се не губи на тачности при попуњавању МКЕ матрица, те је поређење тачности за две врсте

базисних функција оправдано. Са друге стране, иако у неким случајевима постоји могућност за смањење броја одбирака потребних при коришћењу Б-сплајн базисних функција, показаћемо да је ефикасност у односу на целодоменске функције врло добра чак и ако се не користе посебно прилагођена правила нумеричке интеграције. Зарад боље документованости и лакше поновљивости нумеричких резултата, по потреби ћемо табеларно приказивати интеграционе тачке.

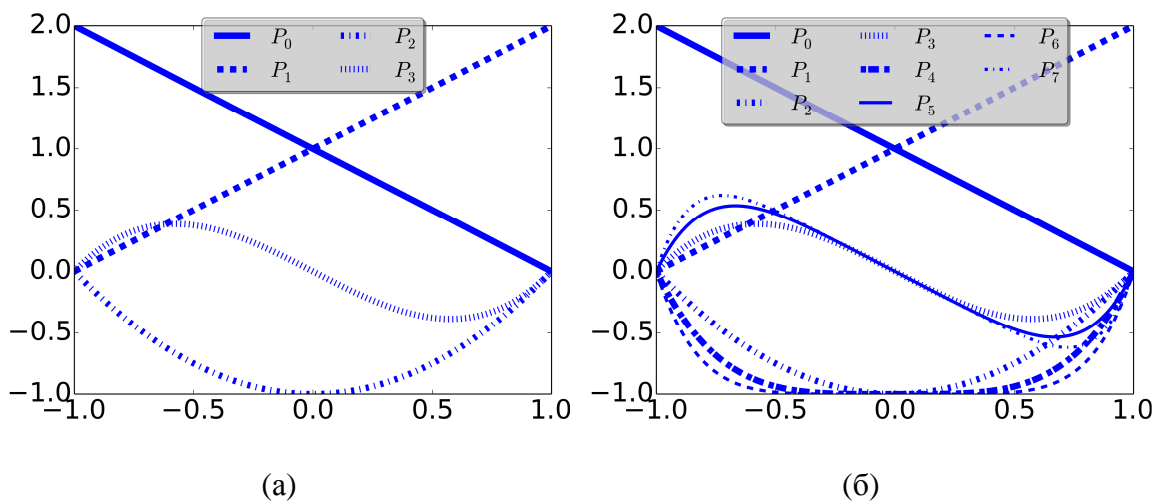
## 5.1 Резонантна шупљина облика квадрa

Размотримо као први пример резонантну шупљину облика квадрa ограниченог савршеним електричном проводником (преграђени кратко спојени таласовод правоугаоног попречног пресека). Шупљина је моделована на начин описан у поглављу о геометријском моделовању уз коришћење једног коначног хексаедарског елемента. Као што смо већ напоменули, за потребне геометријског моделовања користимо сплајнове истог реда и са истим вектором чворова, као што је то приказано на слици 3-1.

Размотримо најпре случај шупљине димензија  $1\text{ cm} \times 0.5\text{ cm} \times 0.75\text{ cm}$ . Овај пример је погодан јер је познато аналитичко решење, а могуће је и упоредити резултате са неколико нумеричких решења [63-65]. За моделовање електричног поља ћемо користити апроксимацију изотропну у свим параметарским правцима. Ово је уобичајен начин апроксимирања поља када немамо могућности да претпоставимо просторне карактеристике расподеле поља, или улазни меш има велик број елемената (што наравно у овом примеру није случај), а не користимо никакав помоћни алгоритам за одређивање реда апроксимације у сваком појединачном елементу.

У табелама 5-1 до 5-3 приказане су грешке у прорачуну таласног броја  $k_0$  за првих неколико модова при коришћењу базисних функција које су разматране у овој тези, за моделовање шупљине димензија  $1\text{ cm} \times 0.5\text{ cm} \times 0.75\text{ cm}$ . Можемо уочити следеће. Табеле које садрже резултате за модел са хијерархијским полиномским функцијама (табела 5-1) и модел са Б-сплајн функцијама имају скоро идентичан садржај (табела 5-2). Потребно је показати грешку користећи до

14 значајних цифара како би се увидела разлика у резултатима прорачуна између два модела. Такође уочавамо да је тачност која се постиже при  $p$ -профињавању неколико редова величина већа од тачности МКЕ формулација нижег реда приказаних у табели 5-6. Међутим, врло добра тачност се постиже и при коришћењу Б-сплајн апроксимације нижег реда која је приказана у табели 5-3, где се врши  $h$ -профињавање равномерним повећавањем броја чворова у вектору чворова. Такође, потребан број одбирака по уносу у МКЕ матрици (који је у директној вези са временом извршавања) је неколико пута мањи у случају Б-сплајн модела нижег реда са  $h$ -профињавањем. Стога се намеће закључак је Б-сплајн функције за моделовање поља оптималније користити у комбинацији са нижим степеном, а већим бројем чворова. На тај начин се често постиже задовољавајућа тачност и веома брзо попуњавање МКЕ матрице.



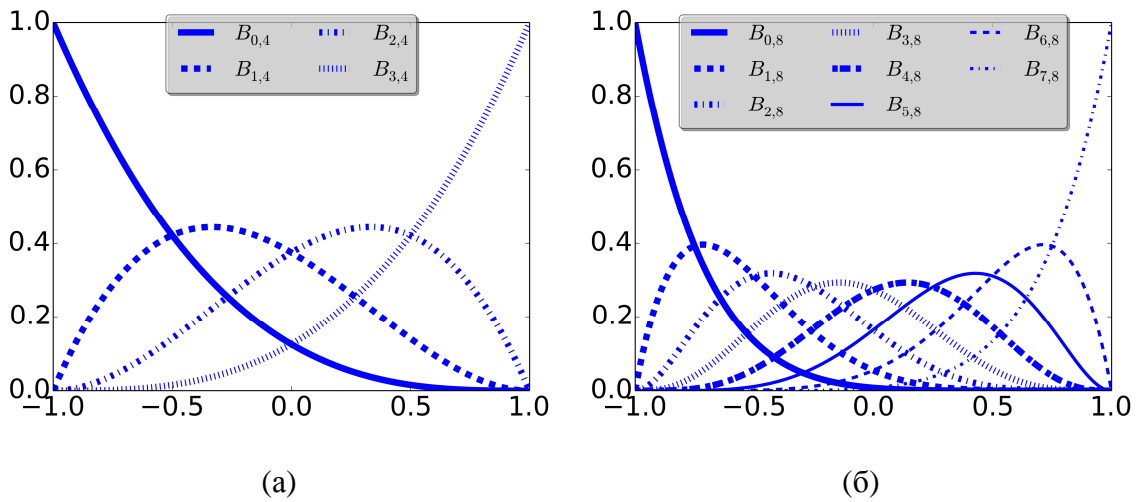
Слика 5-1. Фамилија хијерархијских полинома: (а) реда 3 (одговара моделу са 36 непознатих) и (б) реда 7 (одговара моделу са 756 непознатих).

Табела 5-1: Грешка првих 8 модова при МКЕ моделу заснованом на хијерархијским полиномима за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при  $p$ - профињавању.

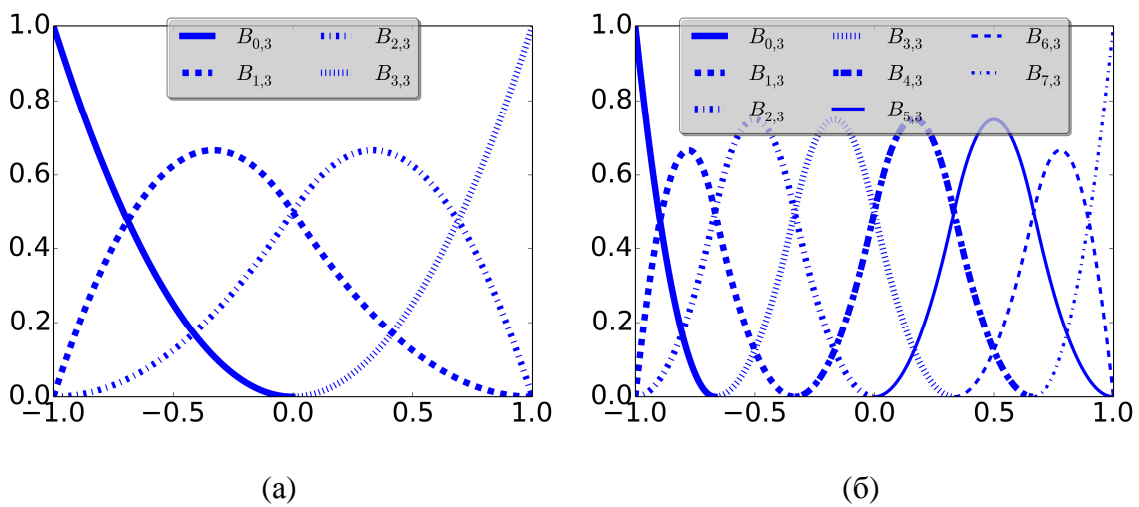
Мод	$k_0$ [cm <sup>-1</sup> ]	Хијерархијски полиноми (Б-сплајн геометрија) $p$ -профињавање  Грешка  [%]					
		Непозн.	Тачно решење	36	108	240	450
TE101	5,236		0,65818882634201	0,00050184688684	0,00050184688641	0,00023367122911	0,00023367122969
TM110	7,025		0,65576956392068	0,00190160840162	0,00190160840156	0,00263710884021	0,00263710883961
TE011	7,551		0,66440869634303	0,00668107709922	0,00668107709909	0,00594551353365	0,00594551353363
TE201	7,551		2,39185542526944	2,19334957816619	0,02645618866126	0,02622990673150	0,00599431547848
TM111	8,179		0,65687765601648	0,00080075642962	0,00080075642905	0,00153626496473	0,00153626496512
TE111	8,179		0,65687765601650	0,00080075642924	0,00080075642894	0,00153626496420	0,00153626496478
TM210	8,886		1,90620231979929	1,58194689814067	0,01238211627210	0,01201441923275	0,00259933318354
TE102	8,947		2,84396067093035	2,76482314739138	0,02868050796042	0,02858984779378	0,00296573194720
средњи број одбирака			64	125	215	343	512
средња грешка			1,3042676018	0,8188507084	0,0097756071	0,0098403748	0,0029310255

Табела 5-2: Грешка првих 8 модова при МКЕ моделу заснованом на Б-сплајн функцијама за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при  $p$ -профињивању

Мод	$k_0$ [cm <sup>-1</sup> ]	Б-сплајн (Б-сплајн геометрија) $p$ -профињивање  Грешка  [%]				
		Непознате	Тачно решење	36	108	240
TE101	5,236	0,65818882634259	0,00050184688732	0,00050184688729	0,00023367122869	0,00023367122867
TM110	7,025	0,65576956392129	0,00190160840086	0,00190160840079	0,00263710883932	0,00263710883916
TE011	7,551	0,66440869634380	0,00668107710002	0,00668107710002	0,00594551353471	0,00594551353479
TE201	7,551	2,39185542526992	2,19334957816710	0,02645618866263	0,02622990673251	0,00599431547851
TM111	8,179	0,65687765601714	0,00080075642870	0,00080075642860	0,00153626496393	0,00153626496396
TE111	8,179	0,65687765601724	0,00080075642869	0,00080075642857	0,00153626496386	0,00153626496330
TM210	8,886	1,90620231979989	1,58194689814138	0,01238211627298	0,01201441923354	0,00259933318290
TE102	8,947	2,84396067093076	2,76482314739208	0,02868050796138	0,02858984779436	0,00296573194649
Средњи број одбирака		64	125	215	343	512
Средња грешка		1,3042676018	0,8188507086	0,0097756073	0,0098403747	0,0029310255



Слика 5-2. Фамилија Б-сплајнова: (а) са вектором чворова  $U = [-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1]$  и редом  $m = 4$  (одговара моделу са 36 непознатих) и (б) са вектором чворова  $U = [-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, +1, +1, +1, +1]$  и редом  $m = 8$  (одговара моделу са 756 непознатих).



Слика 5-3. Фамилија Б-сплајнова: (а) са вектором чворова  $U = [-1, -1, -1, 0, +1, +1, +1]$  и редом  $m = 3$  (одговара моделу са 36 непознатих) и (б) са вектором чворова  $U = \left[-1, -1, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, +\frac{1}{3}, +\frac{2}{3}, +1, +1, +1\right]$  и редом  $m = 3$  (одговара моделу са 756 непознатих).

Табела 5-3. Грешка првих 8 модова при МКЕ моделу заснованом на Б-сплајн функцијама за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при  $h$ -профињивању.

Мод	$k_0$ [cm <sup>-1</sup> ]	Б-сплајн (Б-сплајн геометрија) $h$ -профињивање  Грешка  [%]					
		Непознате	Тачно решење	36	108	240	450
TE101	5,236		0,65819	0,10359	0,02976	0,01152	0,00530
TM110	7,025		0,65577	0,10119	0,02735	0,00911	0,00289
TE011	7,551		0,66441	0,10978	0,03594	0,01770	0,01147
TE201	7,551		0,66441	1,82771	0,47145	0,17194	0,07954
TM111	8,179		0,65688	0,10229	0,02845	0,01022	0,00399
TE111	8,179		0,65688	0,10229	0,02845	0,01022	0,00399
TM210	8,886		0,65577	1,34473	0,34206	0,12053	0,05205
TE102	8,947		0,66135	2,27732	0,58408	0,20994	0,09462
Средњи број одбирака			97,29730	71,73853	45,39585	29,33880	19,76524
Средња грешка			0,65921	0,74611	0,19344	0,07015	0,03173



Размотримо пажљивије случај уочен у табелама 5-1 и 5-2, које наводе практично исту грешку за два модела. Испитаћемо везу између два типа базисних функција. Нека су базисне функције у два модела означене са  $\mathbf{f}_{uijk}^{\text{Pol}}$ ,  $\mathbf{f}_{vijk}^{\text{Pol}}$ ,  $\mathbf{f}_{wijk}^{\text{Pol}}$  и  $\mathbf{f}_{uijk}^{\text{Bspl}}$ ,  $\mathbf{f}_{vijk}^{\text{Bspl}}$ ,  $\mathbf{f}_{wijk}^{\text{Bspl}}$ . При томе су хијерархијске полиномске функције означене са Pol (слика 5-1) док су Б-сплајн функције означене са Bspl (слика 5-2). На сликама је приказан само пун ред апроксимације, а треба имати у виду да су за мешовити ред апроксимације потребне и функције нижег реда, на начин описан у поглављима 4.1 и 4.2. Будући да је параметризација модела у оба случаја урађена на исти начин, векторски део одговарајућих функција је исти, тако да можемо разматрати само скаларни део базисних функције добијен тензорским производом 1Д функција. Јасно је да у општем случају не може постојати тачна линеарна веза између два типа 3Д базисних функција која су разматрана у овој тези. Ипак, на основу резултата датих у табелама 5-1 и 5-2 можемо очекивати да постоји веза између два типа функција, под условом да се профињивање апроксимације врши на описани начин, тј. да са једне стране користимо хијерархијске полиномске функције, а да са друге стране користимо Б-сплајн функције без унутрашњих чворова. Уочимо да везе могу обухватати само базисне функције које одговарају истим параметарским правцима, па је стога у нашем случају довољно разматрати везу функција  $\mathbf{f}_{uijk}^{\text{Pol}}$  и  $\mathbf{f}_{uijk}^{\text{Bspl}}$ . Другим речима, очекујемо да целокупни базиси буду повезани линеарном релацијом

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{uijk}^{\text{Pol}} \\ \mathbf{f}_{vijk}^{\text{Pol}} \\ \mathbf{f}_{wijk}^{\text{Pol}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu}^{\text{PolBspl}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{vv}^{\text{PolBspl}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{ww}^{\text{PolBspl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{uijk}^{\text{Bspl}} \\ \mathbf{f}_{vijk}^{\text{Bspl}} \\ \mathbf{f}_{wijk}^{\text{Bspl}} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Такође, очекујемо да важи и обрнута релација, тј. да је матрица  $[\mathbf{C}^{\text{PolBspl}}]$  у једначини (5.1) инверзибилна.

Везе наведене у релацији (5.1) (под условом да постоје) могу се извести из особина 1Д функција које учествују у формирању 3Д базисних функција.

Функције  $\mathbf{f}_{uijk}^{\text{Pol}}$  су добијене тензорским производом функција  $1, u, u^2, u^3, \dots$ , функција  $1 - v, v + 1, v^2 - 1, v^3 - v, \dots$  и функција  $1 - w, w + 1, w^2 - 1, w^3 - w, \dots$ .

Табела 5-4: Аналитички изрази за 1Д функције помоћу којих се добијају изотропне 3Д базисне функције  $\mathbf{f}_{uijk}^{\text{Bspl}}$ . Ознака \* означава правац по коме се снижава ред да би се добила *mixed order* формулација.

		$\mathbf{f}_{uijk}^{\text{Bspl}}$	
Број пром.	Правац $u^*$ $f_u^{\text{Bspl}}$	Правац $v$ (у правцу $w$ се користе исте функције уз промену имена слободне променљиве) $f_v^{\text{Bspl}}$	
36	$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} +1 & -2 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & +3 & -3 & +1 \\ +3 & -3 & -3 & +3 \\ -3 & -3 & +3 & +3 \\ +1 & +3 & +3 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$	
108	$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & +3 & -3 & +1 \\ +3 & -3 & -3 & +3 \\ -3 & -3 & +3 & +3 \\ +1 & +3 & +3 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ -4 & +8 & 0 & -8 & +4 \\ +6 & 0 & -12 & 0 & +6 \\ -4 & -8 & 0 & +8 & +4 \\ 1 & +4 & +6 & +4 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^4 \\ v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$	
240	$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ -4 & +8 & 0 & -8 & +4 \\ +6 & 0 & -12 & 0 & +6 \\ -4 & -8 & 0 & +8 & +4 \\ 1 & +4 & +6 & +4 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{32} \begin{bmatrix} -1 & +5 & -10 & +10 & -5 & +1 \\ +5 & -15 & +10 & +10 & -15 & +5 \\ -10 & +10 & +20 & -20 & -10 & +10 \\ +10 & +10 & -20 & -20 & +10 & +10 \\ -5 & -15 & -10 & +10 & +15 & +5 \\ +1 & +5 & +10 & +10 & +5 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^5 \\ v^4 \\ v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$	
450	$\frac{1}{32} \begin{bmatrix} -1 & +5 & -10 & +10 & -5 & +1 \\ +5 & -15 & +10 & +10 & -15 & +5 \\ -10 & +10 & +20 & -20 & -10 & +10 \\ +10 & +10 & -20 & -20 & +10 & +10 \\ -5 & -15 & -10 & +10 & +15 & +5 \\ +1 & +5 & +10 & +10 & +5 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{64} \begin{bmatrix} +1 & -6 & +15 & -20 & +15 & -6 & +1 \\ -6 & +24 & -30 & 0 & +30 & -24 & +6 \\ +15 & -30 & -15 & +60 & -15 & -30 & +15 \\ -20 & 0 & +60 & 0 & -60 & 0 & +20 \\ +15 & +30 & -15 & -60 & -15 & 30 & +15 \\ -6 & -24 & -30 & 0 & +30 & +24 & +6 \\ +1 & +6 & +15 & +20 & +15 & +6 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^6 \\ v^5 \\ v^4 \\ v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$	
756	$\frac{1}{64} \begin{bmatrix} +1 & -6 & +15 & -20 & +15 & -6 & +1 \\ -6 & +24 & -30 & 0 & +30 & -24 & +6 \\ +15 & -30 & -15 & +60 & -15 & -30 & +15 \\ -20 & 0 & +60 & 0 & -60 & 0 & +20 \\ +15 & +30 & -15 & -60 & -15 & 30 & +15 \\ -6 & -24 & -30 & 0 & +30 & +24 & +6 \\ +1 & +6 & +15 & +20 & +15 & +6 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^6 \\ v^5 \\ v^4 \\ v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{128} \begin{bmatrix} -1 & +7 & -21 & +35 & -35 & +21 & -7 & +1 \\ +7 & -35 & +63 & -35 & -35 & +63 & -35 & +7 \\ -21 & +63 & -21 & -105 & +105 & +21 & -63 & +21 \\ +35 & -35 & -105 & +105 & +105 & -105 & -35 & +35 \\ -35 & -35 & +105 & +105 & -105 & -105 & +35 & +35 \\ +21 & +63 & +21 & -105 & -105 & +21 & +63 & +21 \\ -7 & -35 & -63 & -35 & +35 & +63 & +35 & +7 \\ +1 & +7 & +21 & +35 & +35 & +21 & +7 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^7 \\ v^6 \\ v^5 \\ v^4 \\ v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$	

Будући да Б-сплајнови нису хијерархијске функције, нешто је теже навести путем којих 1Д функција су добијене базисне функције  $\mathbf{f}_{ijk}^{\text{Bspl}}$ , па ћемо се послужити табеларним приказом. У табели 5-4 су приказани изрази за 1Д функције помоћу којих се добијају изотропне функције  $\mathbf{f}_{ijk}^{\text{Bspl}}$  коришћене у моделу. Приметимо да се број променљивих у моделу (прва колона у табели 5-4) разликује од броја функција у тензорском производу, а ово је последица наметања граничних услова. Такође, приметимо да се о особинама евентуалних линеарних веза између 3Д базисних функција може директно закључивати на основу особина 1Д функција које фигуришу у њиховој дефиницији.

Доказаћемо да су хијерархијске полиномске 3Д базисне функције под одређеним условима линеарна комбинација 3Д Б-сплајн базисних функција. На основу дефиниције хијерархијских полиномских базисних функција знамо да се оне могу представити у базису  $1, u, u^2, u^3, \dots$  (исти овај базис је и по преостала два параметарска правца уз промену имена слободне променљиве). Такође, на основу табеле 5-4, видимо да се и Б-сплајн функције које су добијене  $p$ -профињивањем (и које немају унутрашње чворове у вектору чворова) такође могу представити у истом базису. Стога закључујемо да се, будући да све матрице у табели 5-4 имају исти ранг и димензије, све 1Д функције по свим параметарским правцима у случају хијерархијских полиномских функција могу представити помоћу 1Д Б-сплајн функција које су добијене  $p$ -профињивањем (без додавања унутрашњих чворова у вектору чворова) и обратно.

Илуструјмо ову чињеницу на примеру функција које одговарају броју променљивих 36. Хијерархијске полиномске функције које одговарају броју променљивих 36 дате су у табели 5-5.

Табела 5-5: Аналитички изрази за 1Д функције помоћу којих се добијају изотропне 3Д базисне функције  $\mathbf{f}_{uijk}^{\text{Pol}}$ . Ознака \* означава правац по коме се снижава ред да би се добила *mixed order* формулација.

$\mathbf{f}_{uijk}^{\text{Pol}}$			
Број пром .	Правац $u^*$ $f_u^{\text{Pol}}$	Правац $v$ $f_v^{\text{Pol}}$	Правац $w$ $f_w^{\text{Pol}}$
36	$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^3 \\ w^2 \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$

За параметарски правац  $u$  имамо:

$$f_u^{\text{Bspl}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +1 & -2 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +1 & -2 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix} \text{Inv} \left( \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \right) f_u^{\text{Pol}} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +1 & -2 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix} f_u^{\text{Pol}} \quad , (5.2)$$

$$f_u^{\text{Pol}} = \text{Inv} \left( \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +1 & -2 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix} \right) f_u^{\text{Bspl}} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} f_u^{\text{Bspl}}. \quad (5.3)$$

За параметарски правац  $v$  имамо:

$$f_v^{\text{Bspl}} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & +3 & -3 & +1 \\ +3 & -3 & -3 & +3 \\ -3 & -3 & +3 & +3 \\ +1 & +3 & +3 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & +3 & -3 & +1 \\ +3 & -3 & -3 & +3 \\ -3 & -3 & +3 & +3 \\ +1 & +3 & +3 & +1 \end{bmatrix} \text{Inv} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) f_v^{\text{Pol}} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} +4 & 0 & +3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & +3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & +4 & +3 & +1 \end{bmatrix} f_v^{\text{Pol}}, \quad (5.4)$$

$$f_v^{\text{Pol}} = \text{Inv} \left( \frac{1}{8} \begin{bmatrix} +4 & 0 & +3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & +3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & +4 & +3 & +1 \end{bmatrix} \right) f_v^{\text{Bspl}} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} +3 & +2 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & +3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & +2 & -2 & 0 \end{bmatrix} f_v^{\text{Bspl}}. \quad (5.5)$$

Потпуно аналогно се добија линеарна веза за параметарски правац  $w$ , будући да су у изотропном моделу 1Д функције истог реда исте (једино се разликују у нотацији по имену слободне променљиве). Наравно, о постојању израза (5.2)-(5.5) могло се закључити на основу чињенице да су коришћене 1Д Б-сплајн функције међусобно линеарно независне, као и да су 1Д хијерархијске полиномске функције међусобно линеарно независне и да се обе врсте функција могу представити у истом базису (базис  $\{1, u, u^2, \dots\}$ ). Линеарне везе између ова два скупа (скупа Б-сплајн ф-ја и скупа хијерархијских полиномских ф-ја) су експлицитно наведене зарад комплетности излагања. Сличне везе постоје и могу се добити на аналоган начин и у случају већег броја променљивих (када осим променљиве  $u$  имамо и на пример променљиве  $v$  и  $w$ ). Будући да линеарне везе постоје између 1Д функција, очигледно је да те везе постоје и између 3Д базисних функција које се добијају као тензорски производ 1Д функција. Ово упућује на закључак да апроксимативна решења добијена помоћу оваквих функција, између којих постоје линеарне везе, морају бити веома блиска. Евентуална одступања се могу објаснити лошим кондиционим бројем МКЕ матрица, као и чињеницом да су код Б-сплајн функција све 1Д функције највишег могућег реда (тј. прва колона у матрицама у табели 5-4 је пуна), док је код хијерархијских полиномских функција тек последња функција максималног реда. Ово доводи до тога да постоји могућност да се један део МКЕ матрица за хијерархијске функције нешто прецизније попуњава. Међутим као што видимо из табела 5-1 и 5-2, разлике два модела се виде тек на 14-тој значајној цифри.

Табела 5-6 приказује неколико МКЕ формулација нижег реда које користе призме са троугаоном базом [63], квад्रे [53], и тетраедре [53], као елементе, и МКЕ формулацију која на тетраедрима користи линеарне функције за апроксимацију тангенцијалне компоненте поља и квадратне функције за апроксимацију нормалне компоненте поља [54]. Иако у табели 5-6 нису наведени никакви индикатори ефикасности примењених МКЕ модела, можемо извући

неколико закључака. Најпре, по тачности су резултати наведени у табели 5-6 ближи Б-сплајн моделу са  $h$ -профињавањем. Са сличним бројем променљивих Б-сплајн модел (табела 5-3) има нешто већу тачност од МКЕ модела нижег реда. Такође, Б-сплајн модел са  $p$ -профињавањем има неколико пута већу тачност од МКЕ модела нижег реда (као уосталом и од Б-сплајн модела са  $h$ -профињавањем). Међутим, већа тачност Б-сплајн модела са  $p$ -профињавањем доноси са собом и знатно дуже време извршавања. Иако за МКЕ моделе нижег реда из табеле 5-6 немамо податке о ефикасности прорачуна, можемо претпоставити да, будући да је према табели 5-3 Б-сплајн модел са  $h$ -профињавањем по тачности близак МКЕ моделима нижег реда из табеле 5-6, највероватније деле и сличну ефикасност.

Табела 5-6: Грешка првих 8 модова при МКЕ моделу заснованом на МКЕ формулацијама нижег реда. Резултати су преузети из [63-65], а табела је делом преузета из [7].

Мод	$k_0$ [cm-1]	Призме [63]	Квадри [64]	Тетраедри [64]	LT/QN[65]
Непознате	Тачно решење	382	270	260	204
TE101	5,236	0,73	1,36	0,44	0,54
TM110	7,025	2,32	2,23	0,7	0,57
TE011	7,551	0,53	2,58	1	0,18
TE201	7,551	0,64	3,13	0,56	1,89
TM111	8,179	0,22	2,09	2,29	0,56
TE111	8,179		2,09	0,7	1,57
TM210	8,886		2,98	3,53	0,84
TE102	8,947		5,38	1,7	0,49
Средња грешка		0,88800	2,73000	1,36500	0,83000

Као што смо већ напоменули, апроксимација поља и апроксимација геометрије треба да задовоље врло различите захтеве. Иако је са становишта моделовања геометрије потпуно оправдано користити исте (линеарне) функције у сва три правца (изотропно моделовање), са становишта моделовања поља овај приступ није увек погодан. Предложена метода даје донекле флексибилност у овом погледу, а на следећем примеру ћемо показати како неизотропно профињење апроксимације може да доведе до значајног смањења броја непознатих, а са задржавањем исте тачности. Размотримо пример резонантне шупљина димензија  $1\text{cm} \times 0.1\text{cm} \times 1\text{cm}$ . Како је шупљина 10 пута ужа у правцу одређеном глобалном  $u$ -осом, може се очекивати да су за првих неколико модова

промене у расподели модалних поља израженије дуж  $x$ - и  $z$ -осе, па можемо користити више 1Д функција за апроксимирање поља у ова два правца.

Да бисмо ово потврдили, прво ћемо приказати МКЕ прорачун за шупљину у којој је апроксимација поља профињивана једнако у сва 3 параметарска правца, тј. примењујемо изотропно профињивање унутар елемента. У табели 5-7 је приказана грешка првих 10 модова, заједно са средњим бројем потребних одбирака по уносу МКЕ матрице.

Табела 5-7. Грешка прорачунатих граничних учестаности за првих 10 резонантних модова шупљине облика квадра– конвергенција са **изотропним**  $h$ -профињивањем унутар елемента.

Тачна учестаност [Hz]	Грешка  [%]				
211985280	0,65842421	0,10383	0,0299913	0,01175173	0,00552921
335178157,6	0,65842421	2,08627	0,5330519	0,18995879	0,08417607
335178157,6	0,65842421	2,08627	0,5330519	0,18995879	0,08417607
423970560	0,65842421	2,57590	0,6584242	0,23446104	0,10382812
474013496,3	219,897477	0,60310	3,8903363	1,41278808	0,5933254
474013496,3	219,897477	0,60310	3,8903363	1,41278808	0,5933254
540458539,7	181,95418	1,25228	3,2005121	1,15904237	0,48810526
540458539,7	181,95418	1,25228	3,2005121	1,15904237	0,48810526
618037985	148,967315	3,57666	0,6215662	4,51185432	2,42648712
618037985	148,967315	143,99836	0,6215662	5,11827753	2,42648712
Број непознатих	36	108	240	450	756
Средњи број одбирака за интеграцију	97,2972973	71,7385321	45,395851	29,3388027	19,7652387
Средња грешка	110,427164	15,8138077	1,7179349	1,53999231	0,7293545

Приметимо поново да за разлику од класичне МКЕ формулације, при коришћењу Б-сплајн елемената код којих базисне функције нису целодоменске  $h$ -профињивање не мора да укључује више од једног елемента у мешу. Ово доводи до  $h$ -профињивања код кога су базисне функције за развој поља са већим степеном континуитета. Класично  $h$ -профињивање је могуће имитирати помоћу Б-сплајнова са увећаним бројем унутрашњих чворова који се понављају, што ћемо показати на каснијим примерима. Табела 5-8 приказује грешку првих 10 модова, када се користи анизотропно  $h$ -профињивање, тј. повећан је број функција за

развој поља само у  $u$ - и  $w$ -правцима док је у  $v$ -правцу (који одговара  $u$ -правцу у глобалним координатама по коме је шупљина најужа) задржаван исти број функција при профињавању апроксимације. Ако посматрамо резултате наведене у табелама 5-7 и 5-8 можемо уочити да су грешке у одговарајућим колонама у ове две табеле (са изузетком неколико вредности у прве две колоне) идентичне и да су резултати у табели 5-8 добијени са значајно мањим бројем непознатих. Додатно, због природе сплајн функција, апроксимација поља са сплајновима ниског реда и  $h$ -профињавањем унутар елемента даје одличну ефикасност методе, што можемо видети на основу малог броја потребних одбирака за интеграцију. Приметимо додатно да су, услед тога што геометријски модел има само један коначни елемент, све непознате везане за запреминске функције, тј. нема ивичних функција и функција стране (коэффициенти у развоју поља су нула уз ове функције).

Табела 5-8. Грешка прорачунатих граничних учестаности за првих 10 резонантних модова шупљине облика квадрата – конвергенција са **анизотропним**  $h$ -профињавањем унутар елемента.

Тачна учестаност $ Hz $	Грешка  [%]				
211985280	0,65842421	0,10383	0,0299913	0,01175173	0,00552921
335178157,6	0,65842421	2,08627	0,5330519	0,18995879	0,08417607
335178157,6	0,65842421	2,08627	0,5330519	0,18995879	0,08417607
423970560	0,65842421	2,57590	0,6584242	0,23446104	0,10382812
474013496,3	219,897477	0,60310	3,8903363	1,41278808	0,5933254
474013496,3	219,897477	0,60310	3,8903363	1,41278808	0,5933254
540458539,7	181,95418	1,25228	3,2005121	1,15904237	0,48810526
540458539,7	181,95418	1,25228	3,2005121	1,15904237	0,48810526
618037985	148,967315	3,57666	0,6215662	4,51185432	2,42648712
618037985	148,967315	145,33682	0,6215662	5,11827753	2,42648712
Број непознатих	20	42	72	110	156
Средњи број одбирака за интеграцију	69,9428571	60,4285714	45,493151	34,3415233	26,5281725
Средња грешка	110,427164	15,9476531	1,7179349	1,53999231	0,7293545



## 5.2 Сферична шупљина

Као други пример, размотримо сферичну шупљину, полупречника 1cm моделовану једним хексаедарским коначним елементом, на начин описан у поглављу о геометријском моделовању. Због симетрије проблема и коришћеног пресликавања, природно је профињивати апроксимацију поља једнако у сва три параметарска правца.

Табела 5-9 приказује грешку (преко прорачунатог таласног броја  $k_0$ ) првих 11 модова сферичне шупљине при МКЕ моделу са једним елементом заснованом на хијерархијским полиномима за моделовање поља и Б-сплајн геометрији. Табела 5-10 приказује грешку прорачунатог  $k_0$  у случају  $p$ -профињивања при чему је поље апроксимирано помоћу Б-сплајн функција са векторима чворова  $k_u = k_v = k_w = [-1,1]$  и редовима  $m_f$  од 5 (108 непознатих) до 8 (756 непознатих). Резултати су приказани са великим бројем значајних цифара (до 14) како би још једном потврдили да практично нема разлике између ова два модела, што се може објаснити линеарном везом између два типа базисних функција, уз резонување наведено у претходном одељку. Напоменимо врло важну чињеницу да се упоредиви резултати добијају једино при коришћењу истог пресликавања локалног референтног елемента. Уколико се користе другачија пресликавања, могуће је добити и неколико редова величина различите резултате (видети нпр. [7] где је коришћено пресликавање у коме су интерне тачке распоређене по коцки а граничне на сфери). Можемо дакле закључити да су хијерархијске полиномске базисне функције специјалан случај Б-сплајн функција које су дефинисане на векторима без унутрашњих чворова. Иако је ово тачно са становишта еквивалентности самих базиса, напоменимо да хијерархијске функције омогућавају лакше имплементирање анизотропних апроксимација поља у случају више елемената.

Табела 5-9. Грешка првих 11 модова сферичне шупљине при МКЕ моделу (са 125 интерполационих тачака) заснованом на хијерархијским полиномима за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при  $p$ -профињавању.

Мод	Тачна вредност $k_0$ [ $\text{cm}^{-1}$ ]	Грешка  [%]			
ТМ010	2,744	0,09415549492732	0,06018487313789	0,03601692783280	0,03616386879782
ТМIII,парни		0,09415549492763	0,06018487314164	0,03601692783819	0,03616386880772
ТМIII,непарни		0,09415549492970	0,06018487314191	0,03601692785459	0,03616386883697
ТМ021	3,87	0,30404433023736	0,12055693246786	0,07906106772526	0,02414929306419
ТМ121, парни		0,30404433024556	0,12055693247019	0,07906106773280	0,02414929307275
ТМ121,непарни		3,68685681498489	0,12055693248506	0,07906106773286	0,02414929314612
ТМ221, парни		3,68685681498499	0,35391122278252	0,09694811241778	0,09760277644205
ТМ221,непарни		3,68685681498509	0,35391122282732	0,09694811252872	0,09760277721521
ТЕ011	4,493	6,34979859770187	0,30783679538731	0,22273448024750	0,05782709338923
ТЕIII, парни		6,34979859770188	0,30783679540306	0,22273448028653	0,05782709450330
ТЕIII, непарни		6,34979859770244	0,30783679542745	0,22273448051689	0,05782709486059
Број непознатих		108	240	450	756
Средњи број интеграционих одбирака		125	216	512	729
Средња грешка		2,81822921666625	0,19759620442475	0,10975760479217	0,04996602928509

Табела 5-10. Грешка првих 11 модова сферичне шупљине при МКЕ моделу (са 125 интерполационих тачака) заснованом на Б-сплајн функцијама за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при  $p$ -профињивању.

Мод	Тачна вредност $k_0$ [ $\text{cm}^{-1}$ ]	Грешка  [%]			
ТМ010	2,744	0,09415549492904	0,06018487314032	0,03601692783332	0,03616386880136
ТМIII, парни		0,09415549492904	0,06018487314046	0,03601692783336	0,03616386880163
ТМIII, непарни		0,09415549492908	0,06018487314063	0,03601692783344	0,03616386880186
ТМ021	3,87	0,30404433023638	0,12055693247842	0,07906106775294	0,02414929331128
ТМ121, парни		0,30404433023641	0,12055693247845	0,07906106775297	0,02414929331138
ТМ121, непарни		3,68685681498584	0,12055693247858	0,07906106775310	0,02414929331148
ТМ221, парни		3,68685681498587	0,35391122280971	0,09694811251620	0,09760277705604
ТМ221, непарни		3,68685681498587	0,35391122280973	0,09694811251641	0,09760277705607
ТЕ011	4,493	6,34979859770245	0,30783679539395	0,22273448056624	0,05782709274433
ТЕIII, парни		6,34979859770265	0,30783679539407	0,22273448056626	0,05782709274444
ТЕIII, непарни		6,34979859770267	0,30783679539411	0,22273448056635	0,05782709274446
Број непознатих		108	240	450	756
Средњи број интеграционих одбирака		125	216	512	729
Средња грешка		2,81822921666594	0,19759620442349	0,10975760486278	0,04996602897130

Табела 5-11: Грешка првих 11 модова сферичне шупљине при МКЕ моделу (са 125 интерполационих тачака) заснованом на Б-сплајн функцијама за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при униформном  $h$ -профињавању.

Мод	Тачна вредност $k_0$ [ $\text{cm}^{-1}$ ]	Грешка  [%]			
ТМ010	2,744	0,52873435663313	0,18062848772344	0,09256790382717	0,06266635325402
ТМIII,парни		0,52873435663317	0,18062848772350	0,09256790382767	0,06266635325429
ТМIII.непарни		0,52873435663332	0,18062848772352	0,09256790382769	0,06266635325472
ТМ021	3,87	1,33637432292555	0,49360248499803	0,24903522691419	0,14186529917450
ТМ121, парни		1,33637432292577	0,49360248499811	0,24903522691461	0,14186529917463
ТМ121,непарни		3,11765744195219	0,75812769785896	0,28816097096002	0,14186529917482
ТМ221, парни		3,11765744195221	0,75812769785902	0,28816097096039	0,16647310651443
ТМ221,непарни		3,11765744195221	0,75812769785904	0,28816097096045	0,16647310651446
ТЕ011	4,493	5,10073225410454	1,09804089689599	0,42872124003708	0,22090864073610
ТЕIII, парни		5,10073225410467	1,09804089689621	0,42872124003708	0,22090864073619
ТЕIII, непарни		5,10073225410471	1,09804089689628	0,42872124003713	0,22090864073622
Број непознатих		108	240	450	756
Средњи број интеграционих одбирака		71,7385	45,3959	29,3388	19,7652
Средња грешка		2,62855643672013	0,64523601976656	0,26603825439122	0,14629700841131

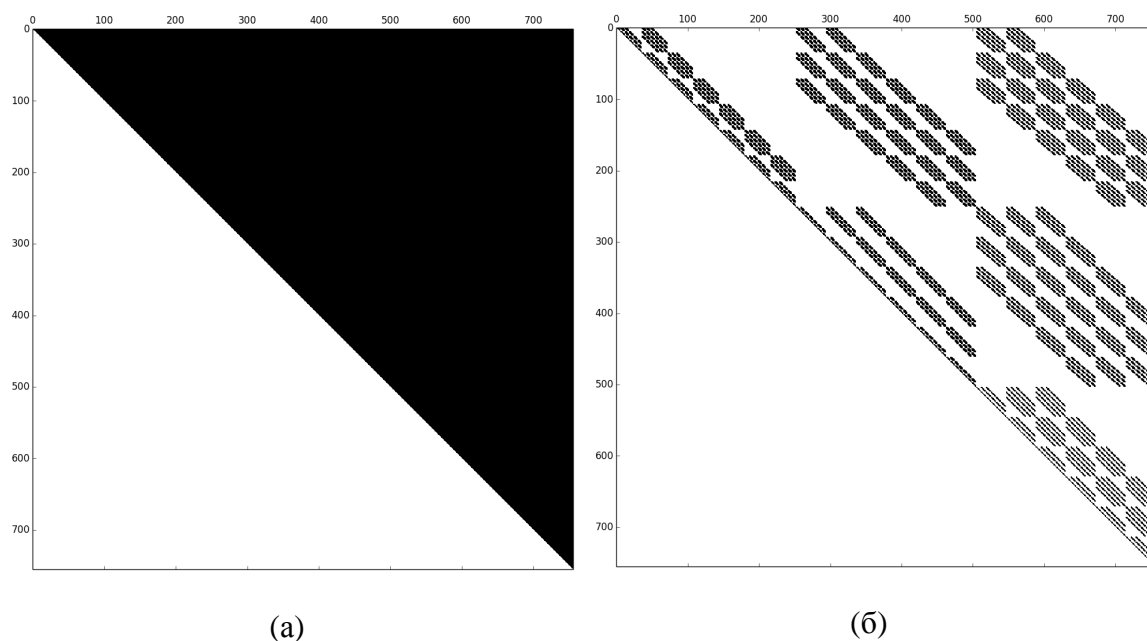
Анизотропна апроксимација поља је наравно могућа и са Б-сплајн функцијама, као што смо и показали на примеру једног елемента у претходном одељку, али би овај тип апроксимације у случају више елемената захтевао посебну пажњу и дефинисање хијерархијских простора Б-сплајн функција, уз специјализоване методе “спајања” елемената. Моделе са више коначних елемената у овој тези ћемо разматрати само уз коришћење изотропних функција за моделовање поља.

Табела 5-11 приказује грешку прорачунатог  $k_0$  у случају  $h$ -профињеног решења са сплајновима фиксираних реда  $m_{fu} = m_{fv} = m_{fw} = 3$ , где све апроксимације користе стандардни униформни вектор чворова и имају од 4 јединствена чвора (108 непознатих) до 7 јединствених чворова (756 непознатих). Коришћене функције су исте као у примеру у претходном одељку и приказане су на сликама 5-1 до 5-3.

На основу овог примера може се јасно видети да су Б-сплајн елементи врло флексибилни јер дозвољавају и  $p$ - и  $h$ -профињивање, и то у оквиру једног коначног елемента. Додатно, можемо закључити да је нешто боље користити квадратне сплајнове и  $h$ -профињивање. Овакав начин коришћења Б-сплајн базисних функција захтева нижи број интеграционих одбирака по уносу у МКЕ матрици (и то неколико пута нижи за мањи број непознатих, до неколико редова величина нижи за велики број непознатих), са сличном (или бољом тачношћу, видети колону која одговара броју 108 непознатих) у односу на модел са једним елементом и  $p$ -профињивањем. Такође је интересантно приметити да се за све модове из табеле 5-11 грешка монотono повећава са учестаношћу и монотono смањује са већим бројем непознатих. Предности  $h$ -профињивања у разматраном случају су следеће. МКЕ матрице које се добијају из модела са  $p$ -профињивањем су пуне (пошто су коришћене базисне функције целодоменске) и сваки унос у матрици уводи грешку због нумеричке интеграције. Такође, модел са једним елементом има изражену деформацију унитарних и реципрочних унитарних вектора (уведена кроз Јакобијан), која се јавља на ивицама и у чворовима, што утиче на прорачун свих уноса у МКЕ матрицама. Са друге стране,  $h$ -профињивање унутар једног елемента даје слабо попуњене матрице (јер

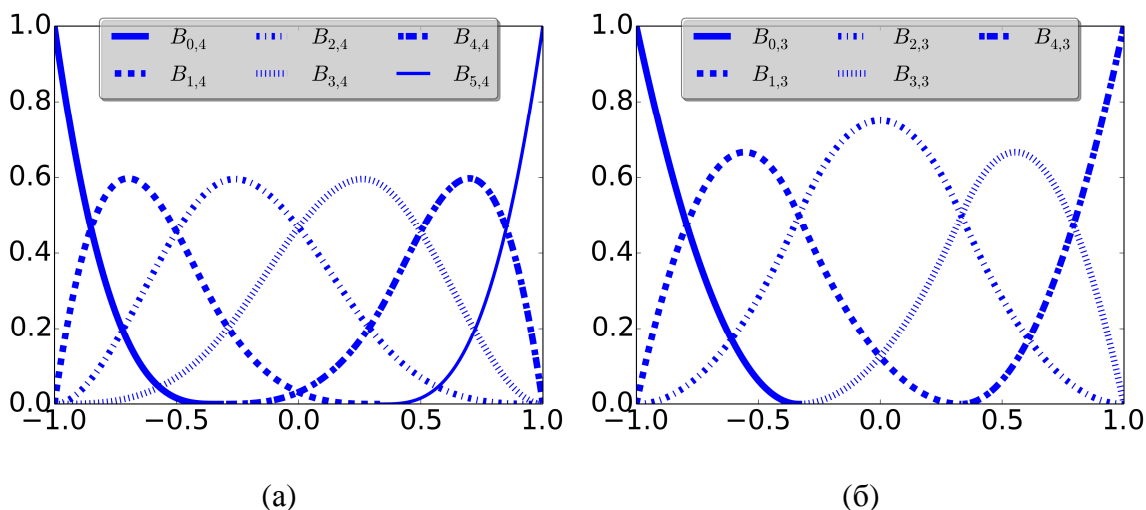
разматрани базиси нису целодоменски и стога се домени базисних функција не преклапају у потпуности) и МКЕ матрице су сваким кораком профињавања све слабије попуњене. Нуле у МКЕ матрицама су стога израчунате тачно, а ненулти уноси у МКЕ матрицама су израчунати тако што су интегралени производи функција које се само делимично преклапају у сферичном домену (већина ових функција није на границама домена близу геометријских сингуларитета). Стога се може очекивати да је већина уноса у МКЕ матрици тачнија у случају  $h$ -профињавања унутар једног елемента него у случају  $p$ -профињавања. МКЕ матрице у моделима  $h$ -профињавањем и  $p$ -профињавањем за случај 756 променљивих су приказане на слици 5-4.

На основу ових разматрања и на основу резултата датих у табелама 5-10 и 5-11, може се закључити да  $h$ -профињавање на моделу са једним елементом и квадратним Б-сплајновима даје резултате са сличном, а понекад и бољом, тачношћу знатно ефикасније него  $p$ -профињен модел (где је вектор чворова без унутрашњих чворова) на примеру сферичне (закривљене) геометрије.

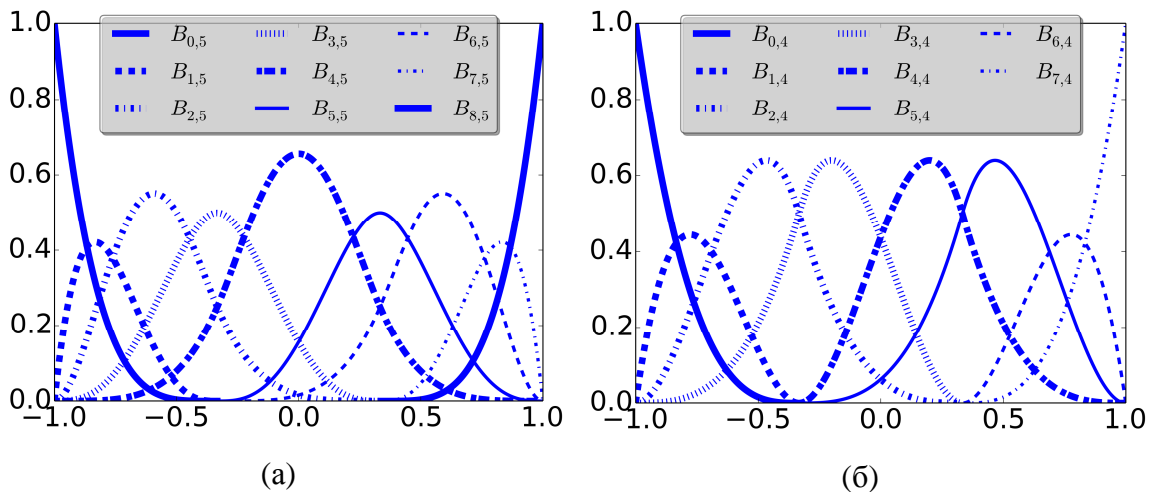


Слика 5-4. МКЕ матрице у моделима са: (а)  $p$ -профињавањем (вектор чворова без унутрашњих чворова) и (б)  $h$ -профињавањем (униформан вектор чворова). Димензије матрица су  $756 \times 756$ .

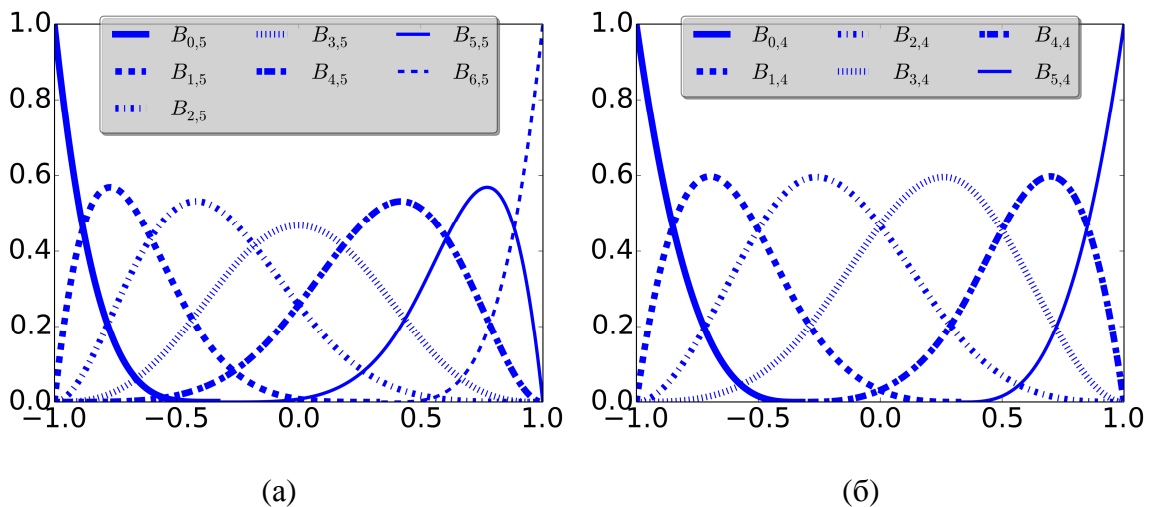
Размотримо сада случај када се  $p$ -профињавање врши а да при том вектор чворова има унутрашње чворове. Полазне функције за модел приказане су на слици 5-5. Видимо да функције имају различите домene и да се не преклапају у потпуности, што побољшава ефикасност попуњавања МКЕ матрица. При хијерархијском  $p$ -профињавању многострукости свих чворова се повећавају за један уз подизање степена за један. На тај начин се простори које функције дефинишу хијерархијски проширују, тј. свака функција из полазног скупа се може представити као линеарна комбинација новодобијених функција. При нехијерархијском  $p$ -профињавању подиже се степен функција, али не и чворова, па због тога полазни простор и новодобијени простор функција нису у хијерархијском односу (ово је последица континуалности на чворовима која је у овом случају различита за функције из полазног и новодобијеног базиса; видети особине Б-сплајн функција наведене у поглављу 2,1).



Слика 5-5. Полазне функције: (а) пун ред  $(-1, -1, -1, -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, +1, +1, +1, +1)$  и (б) снижен ред (формулација са мешовитим редом)  $(-1, -1, -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, +1, +1, +1)$ . Одговара моделу са 240 непознатих.



Слика 5-6. Функције при хијерархијском  $p$ -профињивању: (а) пун ред  $(-1,-1,-1,-1,-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},+\frac{1}{3},+\frac{1}{3},+1,+1,+1,+1,+1)$  и (б) снижен ред (формулација са мешовитим редом)  $(-1,-1,-1,-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},+\frac{1}{3},+\frac{1}{3},+1,+1,+1,+1)$ . Одговара моделу са 1176 непознатих.



Слика 5-7. Функције при нехијерархијском  $p$ -профињивању: (а) пун ред  $(-1,-1,-1,-1,-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},+1,+1,+1,+1,+1)$  и (б) снижен ред (формулација са мешовитим редом)  $(-1,-1,-1,-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},+1,+1,+1,+1)$ . Одговара моделу са 450 непознатих.



Табела 5-12. Грешка првих 11 модова сферичне шупљине при МКЕ моделу (са 125 интерполационих тачака) заснованом на Б-сплајн функцијама за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при хијерархијском и нехијерархијском  $p$ -профињивању.

Мод	Тачна вредност $k_0$ [ $\text{cm}^{-1}$ ]	Грешка  [%]		
ТМ010	2,744	0,07401781241688	0,03636673479439	0,03691415307059
ТМIII,парни		0,07401781241688	0,03636673479446	0,03691415307083
ТМIII,непарни		0,07401781241697	0,03636673479460	0,03691415307090
ТМ021	3,87	0,17024848176398	0,02702997915169	0,10128015741983
ТМ121, парни		0,17024848176401	0,02702997915175	0,10128015741989
ТМ121,непарни		0,17024848176423	0,02702997915182	0,10788809219270
ТМ221, парни		0,38255944934295	0,09817060374891	0,10788809219271
ТМ221,непарни		0,38255944934299	0,09817060374941	0,10788809219280
ТЕ011	4,493	0,22989563519180	0,06335522421309	0,28484058668188
ТЕIII, парни		0,22989563519195	0,06335522421327	0,28484058668200
ТЕIII, непарни		0,22989563519200	0,06335522421329	0,28484058668214
Број непознатих		240	1176 (хијерархијско)	450 (нехијерархијско)
Средњи број интеграционих одбирака		309,74938	126,31452	861,48559
Средња грешка		0,19887315334588	0,05241791108879	0,13558989187966

Резултати прорачуна за случај модела са хијерархијским и нехијерархијским  $p$ -профињивањем дати су у табели 5-12. Приметимо да се значајно разликује број интеграционих одбирака за ова два случаја. Иако су функције истог степена, и са (ако не посматрамо многострукости чворова) истим чворовима у вектору чворова (па стога и истим Гаус-Лежандровим тачкама), због више функција које се преклапају својим доменима нехијерархијско  $p$ -профињивање резултује много већим бројем одбирака. Приметимо додатно да, иако хијерархијско  $p$ -профињивање резултује моделом са 1176 непознатих, средња грешка за првих 11 модова износи 0,05242%, што је врло слично моделу наведеном у табели 5-10, где је средња грешка првих 11 модова 0,04997%, уз свега 756 променљивих. Грешка првог мода у ова два модела је нешто мања, блиска је у оба случаја, и износи 0,03637% и 0,03616%, редом. Разлог за ову грешку се може тражити у следећем.

Таласни број у случају сферичне шупљине је дат изразом

$$k = \frac{u_{np}}{R}, \quad (5.6)$$

где је  $u_{np}$  нула одговарајуће Беселове функције (или њеног извода) [66], а  $R$  је полупречник сферичне шупљине. У нашем примеру, за првих 11 модова релевантне су нуле на позицијама  $u_{np} = 2,744; 3,870$  и  $4,493$ , а  $R = 1$  cm. Израчунајмо промену таласног броја са променом запремине сфере.

$$\frac{dk}{dV} = \frac{dk}{dR} \frac{dR}{dV} = \frac{dk}{dR} \frac{1}{\frac{dV}{dR}} = -\frac{u_{np}}{R^2} \frac{1}{\frac{d}{dR} \left( \frac{4}{3} R^3 \pi \right)} = -\frac{k}{R} \frac{1}{\frac{4}{3} 3R^2 \pi} = -\frac{k}{3V}. \quad (5.7)$$

Одавде имамо да је релативна грешка таласног броја у односу на релативну грешку запремине сфере дата са

$$\frac{\Delta k}{k} \approx -\frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V}. \quad (5.8)$$

Ако сферу моделујемо са 125 интерполационих тачака задатих помоћу пресликавања (3.3) на начин описан у поглављу 3, релативна грешка запремине износи

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_{num} - V}{V} = -0,13966\% , \quad (5.9)$$

где се  $V_{num}$  израчунава на основу Јакобијана коваријантне трансформације. На основу (5.8) имамо да је

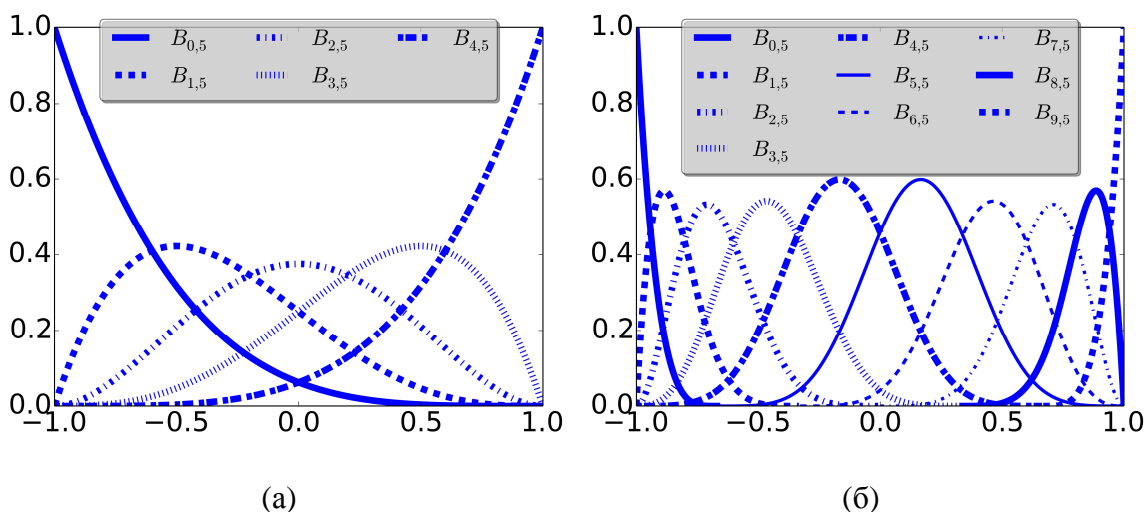
$$\frac{\Delta k}{k} = 0,04655\% . \quad (5.10)$$

Можемо закључити да је једини начин додатног смањивања грешке у табелама 5-10, 5-11 и 5-12, испод границе која је дата са (5.10) могућ уз побољшавање параметризације.

Параметризацију је могуће побољшати на неколико начина. Ми ћемо користити повећање броја интерполационих тачака, као што је учињено и у [9]. Могући су и приступи преко коришћења рационалних функција које, за разлику од полинома, могу тачно да представе сферу, али се за тај приступ нисмо одлучили из разлога што коришћење рационалних функција потенцијално може довести до нумеричких нестабилности. Упркос томе, неки аутори користе рационалне функције и за моделовање геометрије и за моделовање поља (видети нпр. употребу НУРБС функција у МКЕ [5, 27, 67]). За ову опцију се, осим из разлога нумеричке стабилности, нисмо одлучили и из разлога комплексности дефинисања НУРБС функција које, осим навођења вектора чворова и степена, захтевају и навођење тежинских фактора за сваку базисну функцију. У 3Д МКЕ би ово само за геометрију захтевало да се, осим дефинисања вектора чворова, дефинише и 3Д **мрежа** тежинских фактора за геометрију, јер геометријске 3Д НУРБС функције не настају тензорским производом 1Д НУРБС функција.

Ако повећамо број тачака на 1000 интерполационих тачака, можемо значајно повећати тачност апроксимације сфере једним коначним елементом вишег геометријског реда. На слици 5-8 приказане су фамилије сплајнова коришћене у моделу са 125 и са 1000 интерполационих тачака. Приметимо да фамилија на слици 5-8(б) има интерне чворове. Будући да функције које дефинишу геометрију и функције које апроксимирају поље могу имати различите векторе чворова (пошто коришћена формулација допушта независно моделовање геометрије и поља) у општем случају је потребна посебна пажња при избору

интеграционих тачака. Наиме, сплајн функције су део по део дефинисане, а интеграционе тачке се у Гаус-Лежандровој методи бирају на тим “деловима”. Производ (или нека друга основна операција) над сплајн функцијама резултује функцијама које су у општем случају дефинисане на више “делова” од било које појединачне функције која је учествовала у производу. Да би формулација МКЕ била у разумној мери ефикасна, потребно је бирати компатибилне векторе чворова за апроксимацију геометрије и поља. Међутим, постоји и могућност да су геометријске величине од интереса приближно константне, па тада не постоји потреба за строгом применом Гаус-Лежандрове методе, већ се интеграционе тачке могу бирати само на основу функција које апроксимирају поље. Видећемо да је то случај са сфером. Још једном напомињемо да специјализована правила за интеграцију Б-сплајн функција обично подразумевају да је услов приближне константности геометријских величина испуњен.



Слика 5-8. Б-сплајн функције реда 5 коришћене за два модела сфере: (а) модел са 125 интерполационих тачака,  $(-1,-1,-1,-1,+1,+1,+1,+1)$  и (б) модел са 1000 интерполационих тачака  $(-1,-1,-1,-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,+\frac{1}{3},+\frac{2}{3},+1,+1,+1,+1)$ .

Ред функција које су приказане на слици 5-8 је исти у оба случаја, што има интересантну последицу. Наиме, у било којој тачки (па и у интеграционим тачкама које су најбитније са становишта попуњавања МКЕ матрица) је од нуле различито највише 5 функција у **оба** случаја. Због овога се ефикасност израчунавања унитарних вектора, Јакобијана и осталих геометријских величина

од интереса, не разликује за два модела и зависи само од броја интеграционих тачака. При коришћењу модела са 1000 интерполационих тачака, грешка запремине износи  $\frac{\Delta V}{V} = 1,07685E - 04\%$ . Интересантно је уочити да је знак грешке супротан у односу на модел са 125 тачака, што може утицати на знак грешке код решења која су конвергирала.

Појединачне и усредњене грешке за првих 11 модова, са побољшаним геометријским моделом, при  $p$ -профињивању и  $h$ -профињивању су дате у табелама 5-13 и 5-14. Можемо уочити да су у односу на табеле 5-10 и 5-11, грешке значајно смањене при задржавању истог средњег броја одбирака. Ово потврђује да су геометријске величине у довољној мери приближно константне и да не утичу значајно на тачност интеграла у МКЕ матрицама. Можемо запазити да је грешка таласног броја смањена, али не у толикој мери да је грешка запремине ограничавајући фактор као у моделу са 125 интерполационих тачака. Иако модел са  $h$ -профињивањем има већу грешку за исти број променљивих, попуњавање МКЕ матрице је неколико пута брже. Ако два модела имају сличну тачност (посматрајмо на пример модел са 240 променљивих при  $p$ -профињивању из табеле 5-13 са грешком од 0,15% и модел са 756 променљивих при  $h$ -профињивању из табеле 5-14 са грешком од 0,10%), и ако узмемо у обзир да је приближно време извршавања дато са  $T \approx \frac{n(n+1)}{2} \bar{n}_{odbiraka}$ , модел са  $h$ -профињивањем је у благој предности јер је однос времена извршавања два модела

$$\text{дат са } \frac{T_{756}^h}{T_{240}^p} \approx \left( \frac{756}{240} \right)^2 \frac{19,7652}{216} \approx 0,91.$$

Табела 5-13. Грешка првих 11 модова сферичне шупљине при МКЕ моделу (са 1000 интерполационих тачака) заснованом на Б-сплајн функцијама за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при  $p$ -профињивању.

Мод	Тачна вредност $k_0$ [ $\text{cm}^{-1}$ ]	Грешка  [%]			
ТМ010	2,744	0,04627580018467	0,01700213283920	(-)0,01172601948010	(-)0,01301679252138
ТМIII,парни		0,04627580018471	0,01700213283926	(-)0,01172601948002	(-)0,01301679252133
ТМIII,непарни		0,04627580018474	0,01700213283932	(-)0,01172601948002	(-)0,01301679252111
ТМ021	3,87	0,22652610767652	0,10075057506704	0,00504340225972	0,00354492763032
ТМ121, парни		0,22652610767668	0,10075057506711	0,00504340226002	0,00354492763041
ТМ121,непарни		3,67066519804970	0,10075057506714	0,06038859038644	0,00597747844633
ТМ221, парни		3,67066519804970	0,25056637123407	0,06038859038645	0,00597747844638
ТМ221,непарни		3,67066519804983	0,25056637123421	0,06038859038648	0,00597747844639
ТЕ011	4,493	6,27090556852450	0,26726423723666	0,16839137045420	0,00827080549941
ТЕIII, парни		6,27090556852458	0,26726423723668	0,16839137045423	0,00827080549949
ТЕIII, непарни		6,27090556852464	0,26726423723670	0,16839137045425	0,00827080549950
Број непознатих		108	240	450	756
Средњи број интеграционих одбирака		125	216	343	512
Средња грешка		2,76514471960275	0,15056214344522	0,06650952231654	0,00808046224200

Табела 5-14. Грешка првих 11 модова сферичне шупљине при МКЕ моделу (са 1000 интерполационих тачака) заснованом на Б-сплајн функцијама за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при изотропном и униформном  $h$ -профињавању.

Мод	Тачна вредност $k_0$ [ $\text{cm}^{-1}$ ]	Грешка  [%]			
ТМ010	2,744	0,50998283935157	0,14439715574676	0,05077731618448	0,01853204278358
ТМШ,парни		0,50998283935165	0,14439715574699	0,05077731618454	0,01853204278400
ТМШ,непарни		0,50998283935182	0,14439715574709	0,05077731618454	0,01853204278422
ТМ021	3,87	1,33046069362847	0,43423503425333	0,17209132603068	0,08295196678652
ТМ121, парни		1,33046069362854	0,43423503425337	0,17209132603073	0,08295196678670
ТМ121,непарни		3,14168352929182	0,75581354790055	0,27863850573591	0,12871794559327
ТМ221, парни		3,14168352929190	0,75581354790074	0,27863850573604	0,12871794559336
ТМ221,непарни		3,14168352929190	0,75581354790078	0,27863850573607	0,12871794559344
ТЕ011	4,493	5,07744920367403	1,06596539746200	0,38867437841800	0,17727617715408
ТЕШ, парни		5,07744920367413	1,06596539746204	0,38867437841802	0,17727617715453
ТЕШ, непарни		5,07744920367413	1,06596539746213	0,38867437841803	0,17727617715458
Број непознатих		108	240	450	756
Средњи број интеграционих одбирака		71,7385	45,3959	29,3388	19,7652
Средња грешка		2,62256982765545	0,61518167016689	0,22713211391609	0,10358931183348

Табела 5-15. Грешка првих 11 модова сферичне шупљине при МКЕ моделу (са 1000 интерполационих тачака) заснованом на Б-сплајн функцијама за моделовање поља и Б-сплајн геометрији, при хијерархијском и нехијерархијском  $p$ -профињивању.

Мод	Тачна вредност $k_0$ [ $\text{cm}^{-1}$ ]	Грешка  [%]		
ТМ010	2,744	0,02479737195464	(-)0,01004172505012	(-)0,00954103873983
ТМIII,парни		0,02479737195464	(-)0,01004172504998	(-)0,00954103873975
ТМIII.непарни		0,02479737195476	(-)0,01004172504975	(-)0,00954103873959
ТМ021	3,87	0,15410094368628	0,00789956213823	0,01004630048782
ТМ121, парни		0,15410094368629	0,00789956213838	0,01004630048791
ТМ121,непарни		0,15410094368637	0,00957184664742	0,08834341872900
ТМ221, парни		0,27377391337394	0,00957184664750	0,08834341872906
ТМ221,непарни		0,27377391337395	0,00957184664786	0,08834341872911
ТЕ011	4,493	0,18450800584155	0,01693462217771	0,23425346343234
ТЕIII, парни		0,18450800584160	0,01693462217787	0,23425346343241
ТЕIII, непарни		0,18450800584165	0,01693462217806	0,23425346343243
Број непознатих		240	1176 (хијерархијско)	450 (не хијерархијско)
Средњи број интеграционих одбирака		309,74938	126,31452	861,48559
Средња грешка		0,14888789010870	0,01140397326390	0,09240966942539



Размотримо на крају модел у коме је вршено хијерархијско и нехијерархијско  $p$ -профињивање, при побољшаном геометријском моделовању. Резултати су приказани у табели 5-15. Као и у претходним примерима, присутна су приметна побољшања у тачности у односу на модел са 125 интерполационих тачака. Такође, можемо уочити да тачност која се постиже при хијерархијском и нехијерархијском профињивању, иако врло добра, не оправдава велик број интеграционих одбирака. Однос времена извршавања хијерархијског и

нехијерархијског модела је дат са 
$$\frac{T_{\text{хијерархијско}}}{T_{\text{нехијерархијско}}} = \frac{T_{1176}^p}{T_{450}^p} \approx \left(\frac{1176}{450}\right)^2 \frac{126,31452}{861,48559} \approx 1,00$$
, тј.

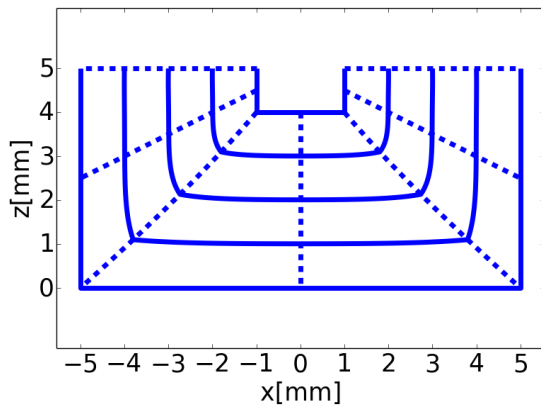
време извршавања је приближно исто. Разлог за предност хијерархијског модела је у следећем. Уочимо најпре да при Гаус-Лежандровој интеграцији за фамилије сплајнова са истим степеном и истим скупом чворова (дакле не гледајући мултиплицитете) користимо исте одбирке и тежине. За моделе из табеле 5-15 где је извршено хијерархијско и нехијерархијско профињење стога користимо исте одбирке и тежине при интеграцији. Предност хијерархијски профињиваних функција је у томе што је због већег броја нултих распона међу чворовима ефективно смањен домен функција, па имамо смањен средњи број одбирака по уносу у МКЕ матрици. Додатно, због већег броја мултиплицитета у вектору чворова имамо повећан број базисних функција, што повећава тачност модела. Зато, иако је време прорачуна слично за два модела, модел са хијерархијским профињењем даје неколико пута бољу тачност. Додатна побољшања у моделима са унутрашњим чворовима у вектору чворова би се могла постићи оптималним размештањем чворова, будући да еквиливантни чворови у општем случају највероватније не сачињавају оптималан распоред. Ово би, међутим, захтевало развој алгоритама за накнадну анализу поља и повећан број итерација, што значајно повећава комплексност МКЕ формулације, и превазилази оквире ове тезе. Напоменимо међутим да понекад могу постојати јасни разлози за одабир унутрашњих чворова, као на пример на местима геометријских сингуларитета, где се може очекивати и компликованије понашање поља. Ово ћемо најбоље видети на примеру шупљине са гребеном.

### 5.3 Шупљина са гребеном

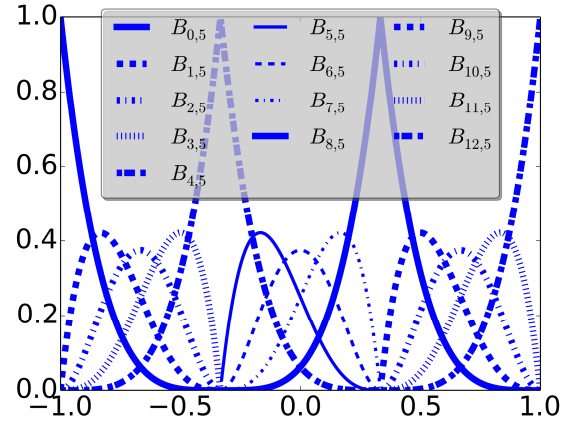
Као последњи пример размотримо шупљину са гребеном (енгл. *ridge cavity*) која је детаљно описана у поглављу о геометријском моделовању. Осим моделовања једним коначним елементом са више различитих параметризација, разматраћемо и моделовање помоћу више коначних елемената. Будући да не располажемо аналитичким решењем, у овом случају су оцене грешке једним делом вршене на основу прорачуна који је добијен помоћу комерцијалног софтвера [61]. Треба напоменути да су овакве процене грешке знатно мање поуздане од процена које су добијене у претходним примерима, где смо имали аналитичко решење на располагању. Такође, одлуке о профињивању апроксимације се у овом случају морају доносити нешто опрезније и при томе ћемо искористити знања о Б-сплајн функцијама добијена из претходна два примера.

Све нумеричке поставке за апроксимацију поља када користимо један елемент ћемо тестирати на три различите параметризације. Ове параметризације су добијене коришћењем алгоритма представљеног у поглављу о геометријском моделовању, према коме се унутрашњи геометријски чворови размештају аналогно механичком систему фиктивних опруга. Ово је погодно како би се избегло укрштање координатних линија, излазак координатних линија ван запремине елемента итд. Приметимо да се осим ових услова могу наметнути и додатни услови, као на пример размештање координатних линија у складу са линијама поља и слично. У овом примеру ће, међутим, бити разматран једноставнији проблем, а то је да ли постоји могућност да различите параметризације донесу бољитак у тачности апроксимирања поља.

Осим параметризација приказаних на сликама 3-3 и 3-5, користимо и параметризацију приказану на слици 5-9.



(a)



(б)

Слика 5-9. (а)  $u$  -  $v$  координатне линије у једном  $w$ -пресеку. (б) Породица Б-сплајнова, коришћена у  $u$ -параметарском правцу са  $m_u = 5$  и вектором чворова

$$k_u = [-1, -1, -1, -1, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, +1, +1, +1, +1, +1].$$

Са ових слика можемо уочити да геометријске величине од интереса нису приближно константне дуж целог  $u$ -параметарског правца (већ су део по део приближно константне), па стога треба водити рачуна о компатибилности сплајн функција које се бирају за апроксимацију поља, апроксимацију геометрије и интеграционих тачака дуж овог правца. У даљем тексту ћемо три параметризације са слика 3-3, 3-5 и 5-9 означавати као почетни модел, модел А и модел Б.

При изотропној апроксимацији поља са Б-сплајновима реда  $m_{fu} = m_{fv} = m_{fw} = 3$  и  $k_{fu} = k_{fv} = k_{fw} = [-1, -1, -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, +1, +1, +1]$ , као и са  $h$ -профињиваним моделима, где је

$$k_{fu} = k_{fv} = k_{fw} = [-1, -1, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, +\frac{2}{3}, +1, +1, +1],$$

добијају се резултати приказани у табели 5-16. Приметимо да нису вршени сви кораци профињивања који су вршени у претходним примерима зарад компатибилности са геометријским вектором чворова.

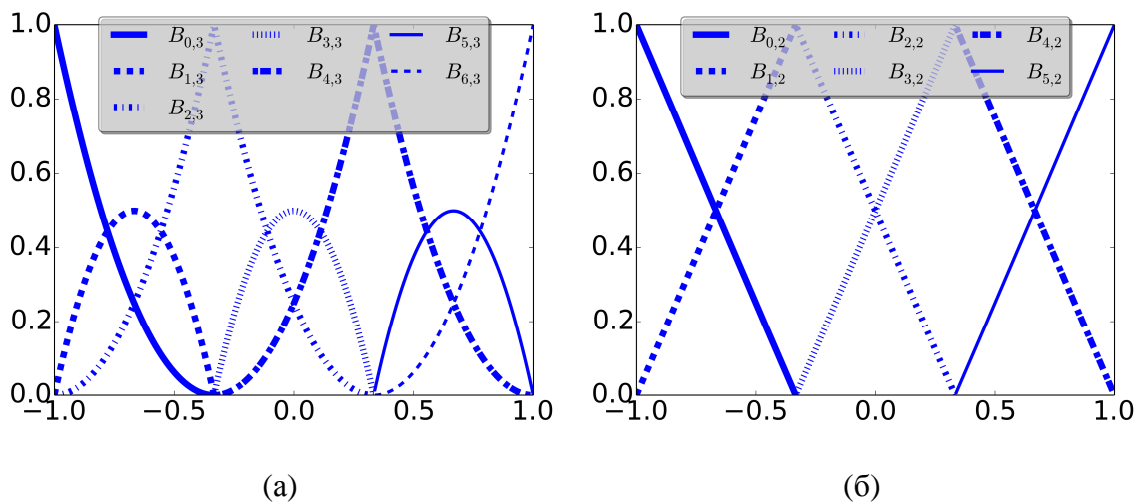
Табела 5-16: Грешка првих 9 модова шупљине са гребеном при МКЕ моделу са једним изотропним елементом и 3 параметризације. Коришћени су Б-сплајнови са  $m=3$  и  $k=[-1,-1,-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},+1,+1,+1]$  (108 непознатих) и са  $m=3$  и  $k=[-1,-1,-1,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},+\frac{2}{3},+1,+1,+1]$  (756 непознатих).

Израчунато $k_0$ [cm <sup>-1</sup> ]												
Модел	Мод 1	Мод 2	Мод 3	Мод 4	Мод 5	Мод 6	Мод 7	Мод 8	Мод 9	Број непознатих	Средњи број одбирака	Средња грешка [%]
HFSS	5,091	7,469	7,853	7,878	8,019	8,863	8,9	9,087	10	3,017 t		
Грешка  [%]												
Почетни модел	0,63038	7,81705	0,13865	5,36959	9,99724	2,03987	4,52071	11,00310	3,80498	108	71,7385	5,32591
Модел А	0,78882	1,75952	1,88276	3,56327	8,82579	2,80778	3,71058	9,63818	4,06818	108	71,7385	4,38528
Модел Б	0,53005	3,36623	1,36739	3,94854	9,34254	2,58933	3,89308	11,08473	4,12103	108	71,7385	4,78508
Почетни модел	0,53402	6,33359	0,68611	1,62970	2,94726	0,08115	3,92662	5,26690	1,04346	756	19,7652	2,51609
Модел А	0,57080	2,73731	1,00917	1,01659	1,28310	0,30316	3,16765	3,62786	2,53799	756	19,7652	1,83651
Модел Б	0,48972	2,63933	0,97324	1,16797	1,50707	0,27119	3,28049	3,76052	2,59280	756	19,7652	1,88792

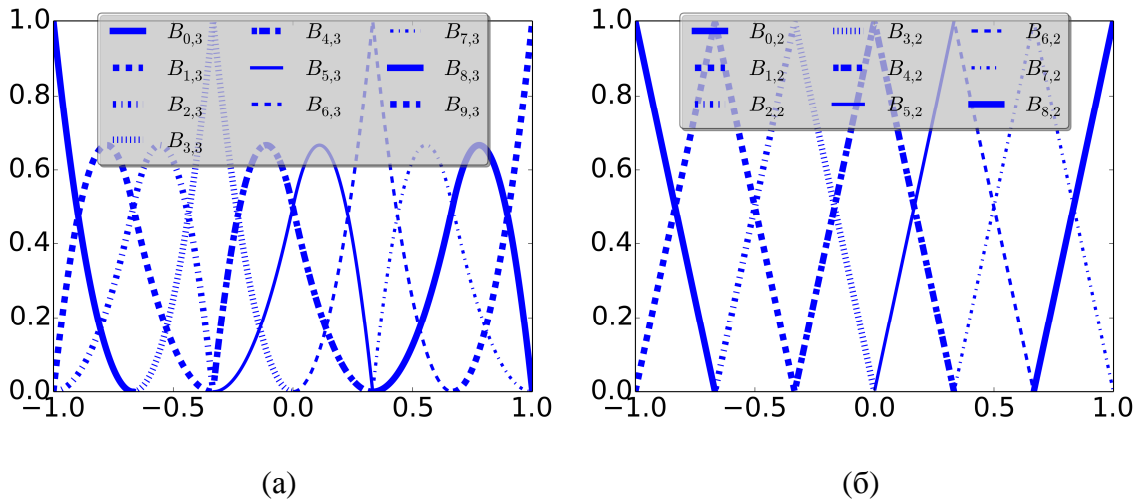
На основу ових резултата можемо уочити следеће. Модели А и Б који имају нешто мање оштре прелазе координатних линија дају боље резултате. Такође, за први мод, модел Б даје најбољи резултат. Приметимо да, у оквиру истог броја непознатих, не постоји конзистентност у смислу да један модел даје увек бољи резултат од преостала два модела за све модове. Ово се може објаснити чињеницом да модови имају различиту просторну расподелу, па неке параметризације боље моделују поље једног мода, а слабије се показују за неки други мод. Напомињемо и да су координатне линије дуж  $u$ -параметарског правца вишег реда у моделима А и Б у односу на почетни модел, али сви модели користе исте интеграционе тачке. Можемо закључити да различити геометријски модели, иако имају исту граничну површ, могу боље или горе апроксимирати електрично поље у зависности од мода као и од распореда координатних линија по унутрашњости модела. Додатно можемо уочити да драстичан пораст у броју променљивих при  $h$ -профињивању у моделу, у овом случају, не доприноси драстичном побољшању тачности. Ово се може објаснити тиме да изотропно моделовање не одговара расподели поља, која је (делом и због моделовања свега једним елементом) компликованије просторне расподеле дуж  $u$ -параметарског правца. Физичка расподела поља наравно не зависи од начина на који извршимо параметризацију, али компоненте поља могу имати једноставнији облик зависно од коришћеног пресликавања. Ово је, на пример, често при аналитичком решавању у класичним каноничким примерима у електромагнетици. Додатно, познато је да “ћошкови” уносе сингуларитете у електрично поље а сингуларитети не могу добро бити представљени коришћеним Б-сплајн функцијама које су глатке на унутрашњим чворовима. Приметимо да се поређење различитих модела може вршити, као и у претходним примерима, на основу броја непознатих и средњег броја интеграционих одбирака. Додатни фактор који може играти улогу при попуњавању МКЕ матрица је и време потребно за израчунавање геометријских величина од интереса, будући да функције коришћене за моделовање геометрије нису истог реда у свим моделима. Овај фактор, међутим, није доминантан уколико се потребне геометријске величине израчунају пре главне МКЕ итерације.

На основу претходних примера смо закључили да се врло добри резултати могу постићи уз коришћење унутар-елементног  $h$ -профињавања. Због компатибилности вектора чворова функција које се користе за геометријско моделовање и вектора чворова функција које се користе за моделовање поља морамо бити пажљиви при додавању нових чворова. Компатибилност се најједноставније постиже хијерархијским односом између вектора чворова за геометрију и поље. При томе се под хијерархијским односом подразумева да је скуп чворова (добijen од вектора чворова тако што не узмемо у обзир мултиплицитете чворова) у функцијама за моделовање геометрије подскуп скупа чворова функција које се користе за моделовање поља.

Додатна могућност при додавању чворова је и понављање већ постојећег чвора. Овако се лакше постиже компатибилност са геометријским чворовима, а могућа је и контрола глаткости функција на чворовима. Ово може бити погодно при моделовању сингуларних поља, која се налазе унутар елемента. У нашем примеру “ћошкови” шупљине са гребеном одговарају вредности параметра  $u = \pm \frac{1}{3}$ , па то можемо искористити при избору функција за моделовање поља које се користе у  $u$ -параметарском правцу. Функције које су коришћене у моделима у табели 5-17 дате су на сликама 5-10 и 5-11.



Слика 5-10. Б-сплајнови реда: (а)  $m_f = 3$  и (б)  $m_f - 1 = 2$  коришћени дуж  $u$ -правца (174 непознате).



Слика 5-11. Б-сплајнови реда: (а)  $m_f = 3$  и (б)  $m_f - 1 = 2$  коришћени дуж  $u$ -правца (273 непознате).

На основу резултата у табели 5-17, и њиховим поређењем са резултатима у табели 5-16 можемо закључити да је моделовање сингуларних поља у значајној мери побољшано коришћењем функција које нису глатке при вредности параметра  $u = \pm \frac{1}{3}$ . Такође, можемо приметити да је неизотропно моделовање поља адекватно, будући да је профињавањем моделовања само дуж  $u$ -параметарског правца (функције су приказане на Сликама 5-10 и 5-11) а да се при томе функције дуж праваца  $v$  и  $w$  не мењају ( $m_{fv} = m_{fw} = 3$  и  $k_{fv} = k_{fw} = [-1, -1, -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, +1, +1, +1]$ ) постигнуто побољшање тачности од око 4 пута (видети однос средњих грешака у табелама 5-17 и 5-16). У моделима са 273 променљиве, уочавамо подједнаку средњу грешку за све три коришћене параметризације. Ово нас упућује на закључак да довољно добро моделовање сингуларитета доприноси тачности знатно више него разматране варијације у параметризацији.

Табела 5-17: Грешка првих 9 модова шупљине са гребеном при МКЕ моделу са једним **неизотропним** елементом и 3 параметризације. Профињавање је вршено само дуж *u*- параметарског правца.

Израчунато $k_0$ [cm <sup>-1</sup> ]												
Модел	Мод 1	Мод 2	Мод 3	Мод 4	Мод 5	Мод 6	Мод 7	Мод 8	Мод 9	Број непознатих	Средњи број одбирака	Средња грешка [%]
HFSS	5,091	7,469	7,853	7,878	8,019	8,863	8,9	9,087	10	3,017 t		
Грешка  [%]												
Почетни модел	0,00405	1,28895	0,72369	1,97711	4,79711	1,01019	1,86006	7,30300	2,44795	174	65,7403	2,37913
Модел А	0,12102	1,30141	0,57162	2,07957	4,14383	0,94446	2,08357	5,62167	2,36494	174	65,7403	2,13690
Модел Б	0,04794	1,42527	0,53444	1,75377	4,62591	0,92449	1,93924	6,44544	2,59648	174	65,7403	2,25478
Почетни модел	0,01201	0,04114	0,57402	0,26892	0,07901	0,89304	1,86262	0,58493	0,56083	273	63,7690	0,54183
Модел А	0,11186	0,05673	0,47655	0,29037	0,08124	0,85345	2,08208	0,63598	0,57070	273	63,7690	0,57322
Модел Б	0,06153	0,01128	0,45850	0,22484	0,04887	0,84284	1,94090	0,52233	0,52533	273	63,7690	0,51516



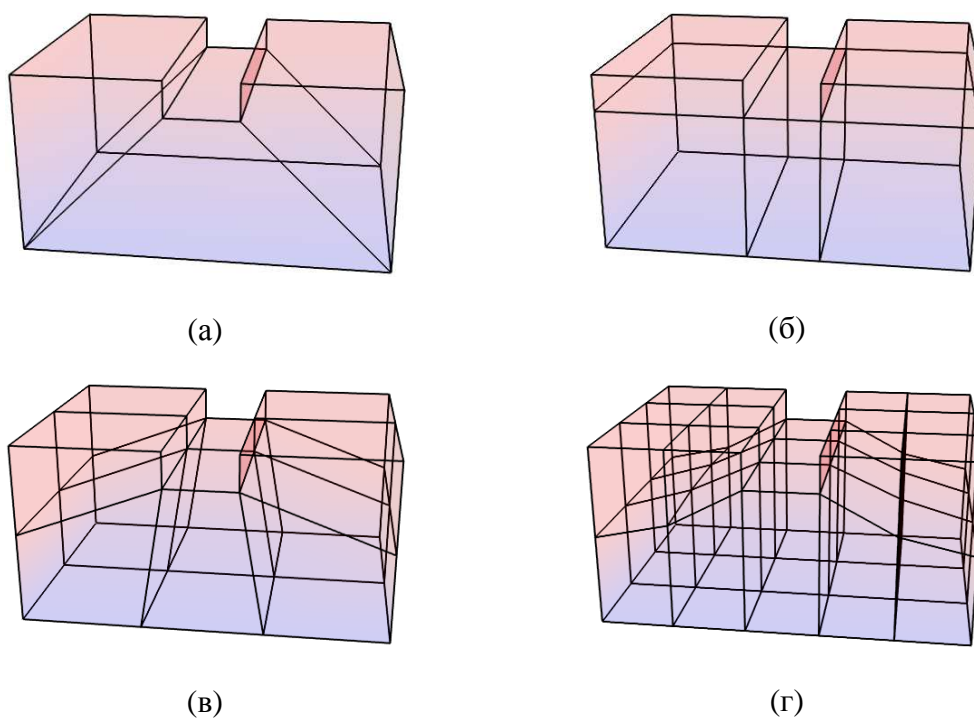
Појаснимо додатно на шта утичу мултиплицитети у вектору чворова дуж  $u$ -правца при вредности параметра  $u = \pm \frac{1}{3}$ . На овај начин се постиже да апроксимација поља има наметнуту континуалност тангенцијалне компоненте у односу на површ  $u = \pm \frac{1}{3}$ , док континуалност нормалне компоненте (у односу на исту површ) није наметнута. Ово се најбоље може видети са Слика 5-10 и 5-11, где су приказани Б-сплајнови коришћени дуж  $u$ -правца у базисним функцијама  $\mathbf{f}_u$ ,  $\mathbf{f}_v$  и  $\mathbf{f}_w$ . Јасно је да континуалност нормалне компоненте поља (одређене базисном функцијом  $\mathbf{f}_u$ ) није експлицитно наметнута, пошто се различити 1Д Б-сплајнови (који одговарају различитим коефицијентима у развоју поља) користе при прелазу са једне на другу страну површи  $u = \pm \frac{1}{3}$  (уочимо различите стилове линија при  $u = \pm \frac{1}{3}$  на сликама 5-10(б) и 5-11(б)). Са друге стране, континуалност тангенцијалне компоненте (тангенцијална компонента је одређена базисним функцијама  $\mathbf{f}_v$  и  $\mathbf{f}_w$ ) је експлицитно наметнута, јер су Б-сплајн функције на сликама 5-10(а) и 5-11(а) континуалне при  $u = \pm \frac{1}{3}$  (уочимо исте стилове линија на слици 5-10(а) и 5-11(а) при  $u = \pm \frac{1}{3}$ ). На овакав начин, уз довољан број мултиплицитета у односу на ред сплајн функција постиже се класично МКЕ  $h$ -профињивање, али у оквиру једног Б-сплајн елемента.

Размотримо сада неколико модела који су засновани на улазном мешу који садржи више елемената. Овакав начин моделовања је уобичајен у инжењерској пракси, и у овом случају, осим ручног дефинисања елемената, постоје и могућност коришћена квалитетних мешера [54]. Осим лакшег дефинисања геометрије, они омогућавају аутоматску поделу улазне геометрије на хексаедре, што је погодно за МКЕ формулацију коришћену у тези. Због геометрије шупљине са гребеном довољно је користити трилинеарне хексаедре. Јасно је да се моделовање Б-сплајн функцијама у овом случају превасходно односи на моделовање поља. У овом случају ћемо анализу конвергенције вршити без било

каких референтних решења, што је наравно најчешћи случај у пракси. У комерцијално доступним МКЕ софтверима [61] уобичајено је да корисник задаје услов при коме се сматра да је нумеричко решење конвергирало. Анализа конвергенције је везана за релевантне величине од интереса, нпр. за параметре расејања (енгл. *scattering parameters*) у случају анализе проблема са простопериодичном побудом или за резонантне учестаности модова у случају проблема сопствених вредности. При томе корисник задаје проценат релативне промене изабране релевантне величине коме тежимо и број конвергираних решења, тј. број итерација које се налазе унутар задате границе процента релативне промене релевантне величине. На пример, уколико је низ величина које одговарају профињиваним моделима дат са  $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$  тада је низ релативних промена у процентима дат са  $\frac{s_2 - s_1}{s_1} \cdot 100\%, \frac{s_3 - s_2}{s_2} \cdot 100\%, \frac{s_4 - s_3}{s_3} \cdot 100\%, \dots$  Због великог опсега од неколико редова величина које се јављају у овом низу, графички приказ ћемо давати користећи логаритамску скалу. Такође, да бисмо избегли негативне вредности, користећемо апсолутну вредност чланова низа. Потребно је да низ конвергира ка нули, а у инжењерској пракси за решење кажемо да је конвергирало уколико се последњих неколико вредности низа налази довољно близу нуле тј. унутар задате границе. Овај услов у некој мери прати математичку дефиницију конвергенције низа, при којој за произвољно малу околину граничне вредности (гранична вредност је нула у нашем случају, а границу задајемо) постоји цео број (у нашем случају број потребних итерација умањен за број конвергираних решења) после кога су сви чланови низа унутар задате границе (будући да смо ограничени расположивом меморијом и временом израчунавања можемо тврдити да је само број конвергираних решења унутар задате границе, а не сви чланови низа). Могуће је користити и неке друге величине за анализу конвергенције, нпр. вредност поља у некој тачки и слично али се у пракси због брже конвергенције [61] користе претходно наведене величине.

На слици 5-12 су приказани модели шупљине са гребеном са 3, 5, 10 и 27 елемената. Модели 5-12(а) и 5-12(б) су преузети из [7] док су модели 5-12(в) и 5-12(г) добијени применом аутоматског мешера [54]. Модели са више елемената и

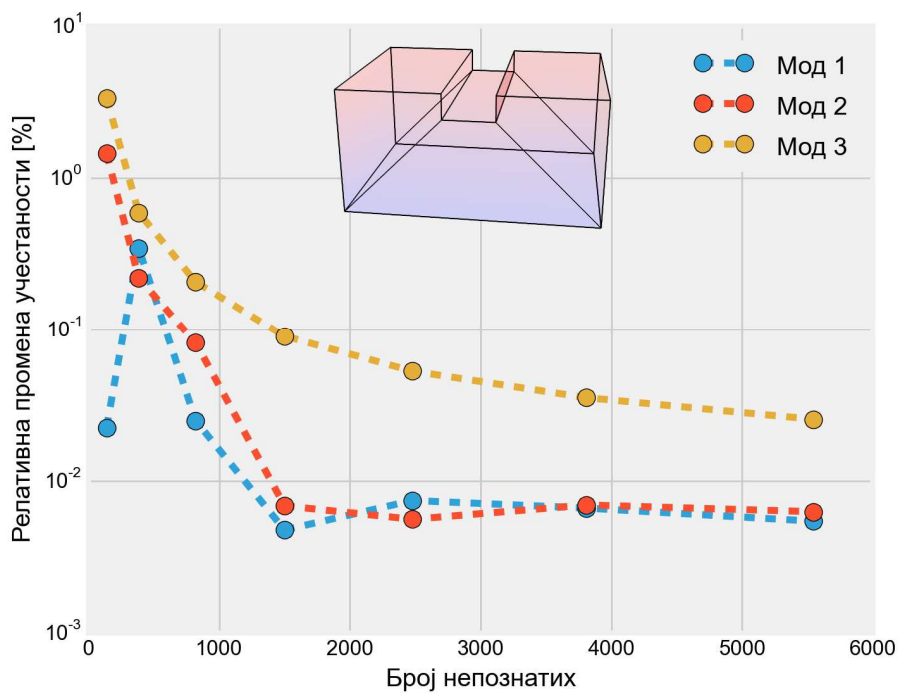
њихове МКЕ матрице врло брзо постану превелики за директно решавање, па је неопходно користити итеративне солвере за слабо попуњене матрице (интересантан преглед и поређење итеративних солвера се може наћи у [68], а у овој тези је коришћен Јакоби-Давидсон алгоритам). Да би матрице биле што мање попуњене, најпогодније је користити Б-сплајнове ниског реда а профињивање апроксимације потом вршити додавањем чворова. Интересантно је напоменути да се у овом случају ради о две различите врсте  $h$ -профињивања, наиме у класичној МКЕ се под  $h$ -профињивањем подразумева коришћење више елемената (што је наравно случај са моделима на слици 5-12), док додатно у случају коришћења Б-сплајн функција за моделовање поља, а при додавању додатних чворова у вектор чворова имамо и  $h$ -профињивање унутар самог елемента (енгл. *intra element h-refinement* [10])



Слика 5-12. Модели шупљине са гребеном са: (а) 3, (б) 5, (в) 10 и (г) 27 елемената.

Таласни бројеви добијени за моделе са слике 5-12 су дати у табелама 5-18 до 5-21. Подаци у овим табелама нису довољно прегледни за детаљнију анализу, али су наведени зарад комплетности. За разлику од претходних примера, где је наведена “грешка” нумеричког решења у односу на референтно решење, табеле 5-18 до 5-21 приказују таласни број одговарајућег мода при унутар-елементном  $h$ -

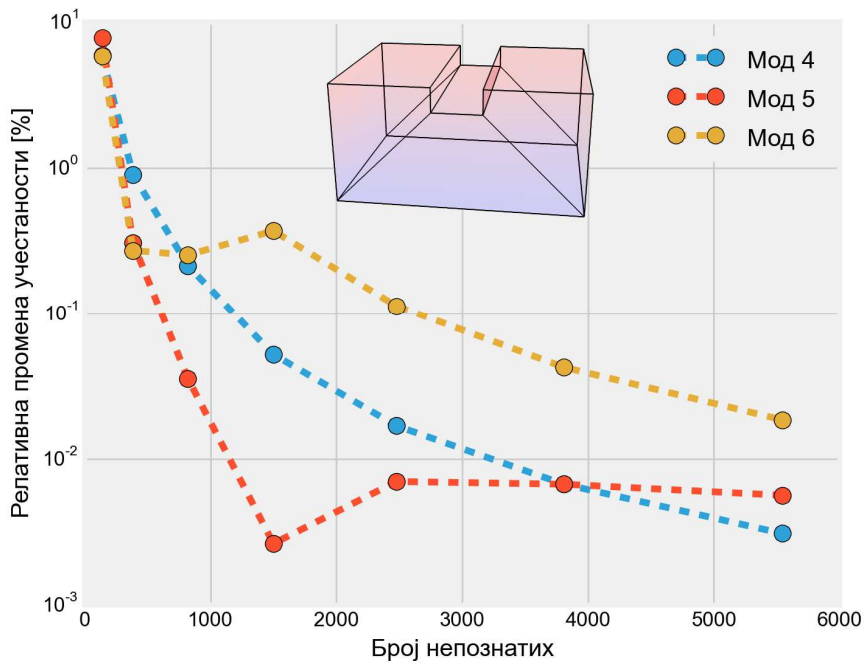
профињавању апроксимације. При томе се у оквиру једног модела број елемената, као и ред апроксимације, не мењају, већ само број чворова у вектору чворова, што је наведено као податак у табели. У претходним примерима смо видели да се коришћењем Б-сплајн функција реда 3 може постићи врло добра тачност и врло ефикасно попуњавање МКЕ матрица. Повећавање реда апроксимације увећава број потребних одбирака и сагласно томе и време попуњавања уноса у матрицама. У граничном случају када Б-сплајн фамилија нема унутрашње чворове, добијамо модел који је еквивалентан моделу са хијерархијским полиномима (ово смо показали и теоријски и нумеричким експериментом на примеру резонантне шупљине облика квадра). Стога је у овом примеру коришћено само  $h$ -профињавање, уз коришћење Б-сплајн функција реда 3.



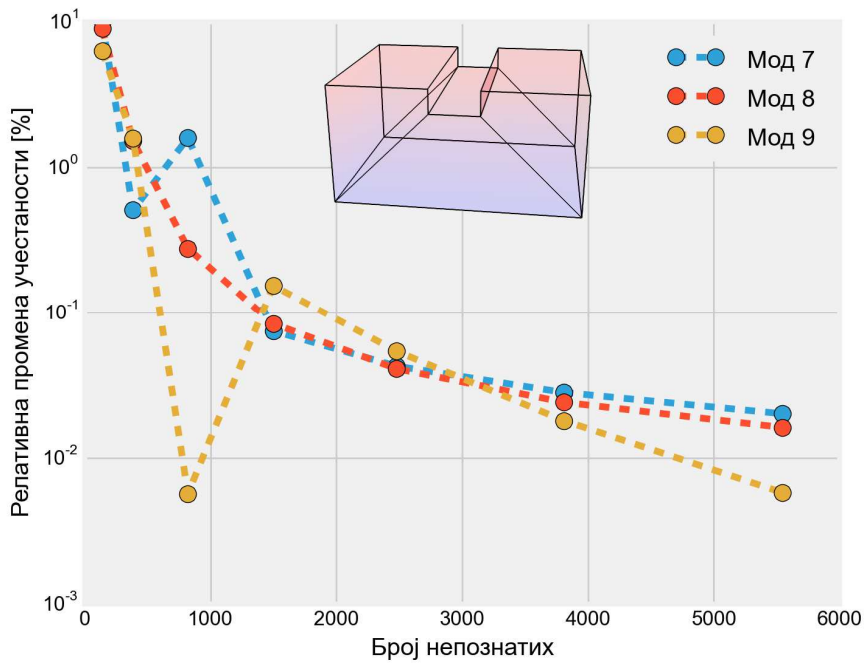
Слика 5-13. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињавању; модови 1, 2, и 3 при моделу шупљине са гребеном са 3 коначна елемента.

Табела 5-18: Таласни број првих 9 модова шупљине са гребеном при МКЕ моделу на слици 5-12(а) са 3 изотропна елемента.

Мод 1	0,51075633	0,51087087	0,50910480	0,50897806	0,50900231	0,50904019	0,50907399	0,50910169
Мод 2	0,76004374	0,74898225	0,74733628	0,74672818	0,74667691	0,74671872	0,74677067	0,74681756
Мод 3	0,82147559	0,79389723	0,78919515	0,78756107	0,78685103	0,78643485	0,78615675	0,78595645
Мод 4	0,84723050	0,79733266	0,79015227	0,78845926	0,78804914	0,78791613	0,78786313	0,78783879
Мод 5	0,87241981	0,80438132	0,80191273	0,80162803	0,80164917	0,80170540	0,80175926	0,80180450
Мод 6	0,94634946	0,89124766	0,89367396	0,89140613	0,88809681	0,88709615	0,88671870	0,88655428
Мод 7	1,00180490	0,90195186	0,90654567	0,89208595	0,89142325	0,89104366	0,89079312	0,89061392
Мод 8	1,01871947	0,92724683	0,91312655	0,91059094	0,90983114	0,90945918	0,90924007	0,90909278
Мод 9	1,08691804	1,01860909	1,00239451	1,00233735	1,00080015	1,00026016	1,00007976	1,00002173
Бр. непоз.	28	138	384	820	1500	2478	3808	5544
Бр. одбир.	14,29802956	30,53862997	21,51124188	13,70269451	8,95550966	6,094592153	4,308604979	3,148023843
Ред Б спл.	2	2	2	2	2	2	2	2
Бр.чворова	2	3	4	5	6	7	8	9



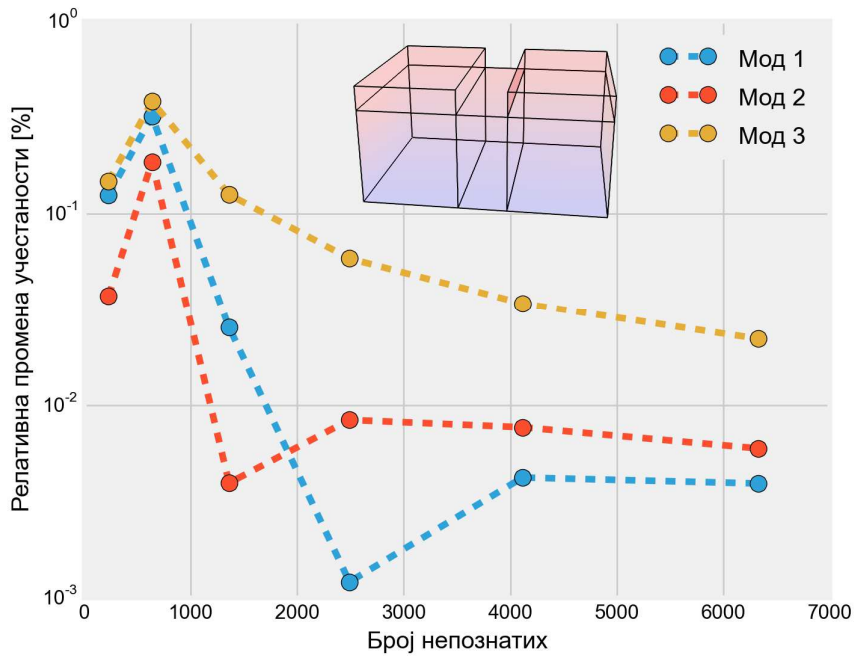
Слика 5-14. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 4, 5, и 6 при моделу шупљине са гребеном са 3 коначна елемената.



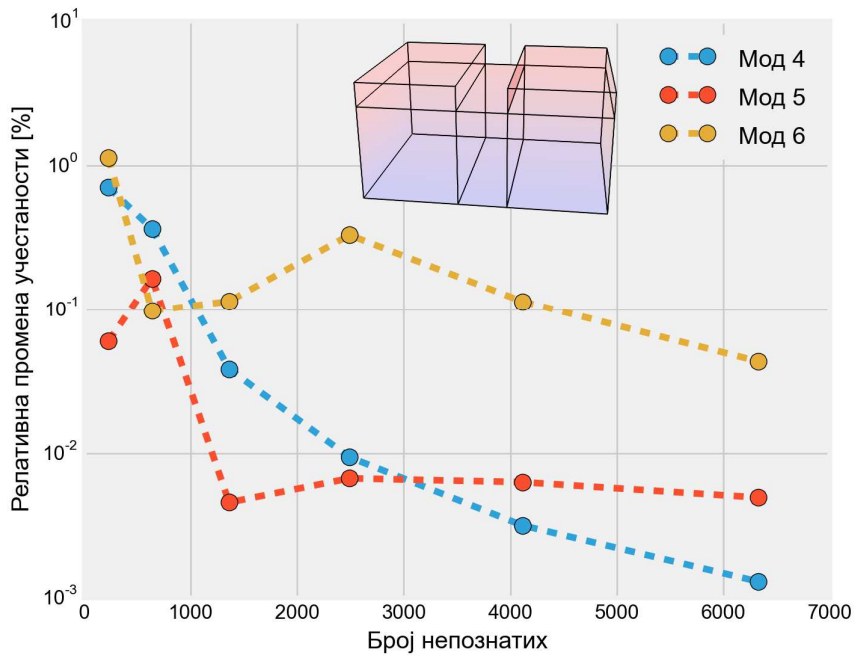
Слика 5-15. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 7, 8, и 9 при моделу шупљине са гребеном са 3 коначна елемената.

Табела 5-19: Таласни број првих 9 модова шупљине са гребеном при МКЕ моделу на слици 5-12(б) са 5 изотропних елемената.

Мод 1	0,51025562	0,51089502	0,50925327	0,50912395	0,50913011	0,50915157	0,50917155
Мод 2	0,74847150	0,74819300	0,74679972	0,74677021	0,74683290	0,74689031	0,74693490
Мод 3	0,79164761	0,79047903	0,78745082	0,78646074	0,78600041	0,78573306	0,78555858
Мод 4	0,79674308	0,79112792	0,78823145	0,78792845	0,78785421	0,78782924	0,78781903
Мод 5	0,80361503	0,80313199	0,80180642	0,80176971	0,80182358	0,80187431	0,80191399
Мод 6	0,90143070	0,89126150	0,89213394	0,89111469	0,88817006	0,88716007	0,88677472
Мод 7	0,91689297	0,89647151	0,90662906	0,89148943	0,89067251	0,89042433	0,89026526
Мод 8	1,00919300	0,91260481	0,91005038	0,90939437	0,90909591	0,90892377	0,90881161
Мод 9	1,01191990	1,00529862	1,00109038	1,00019518	1,00004381	1,00002807	1,00004215
Бр. непоз.	46	228	636	1360	2490	4116	6328
Бр. одбир.	2,174955747	20,22155826	13,67594266	8,568301854	5,549064826	3,754563847	2,64368266
Ред Б-спл.	2	2	2	2	2	2	2
Бр. чворова	2	3	4	5	6	7	8

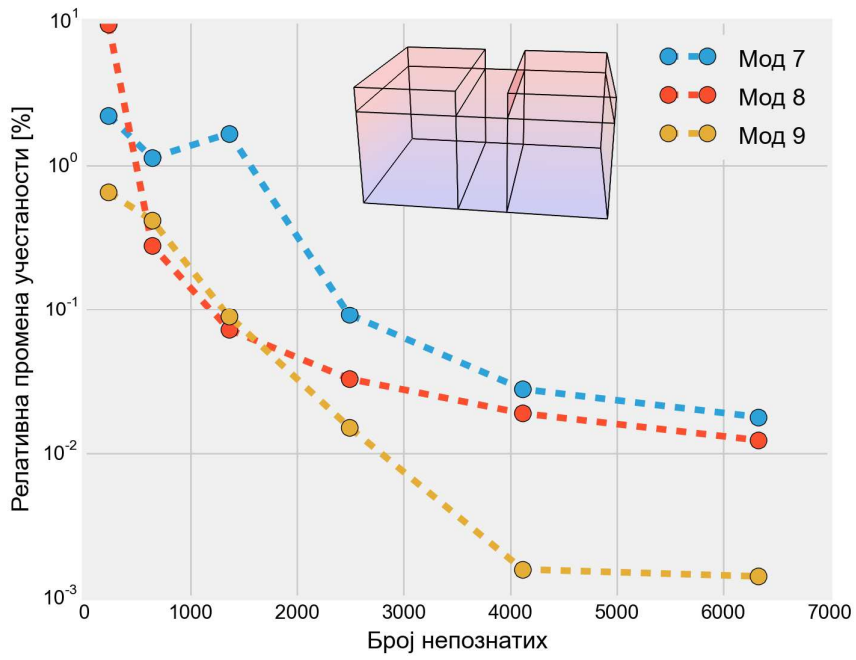


Слика 5-16. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 1, 2, и 3 при моделу шупљине са гребеном са 5 коначних елемената.

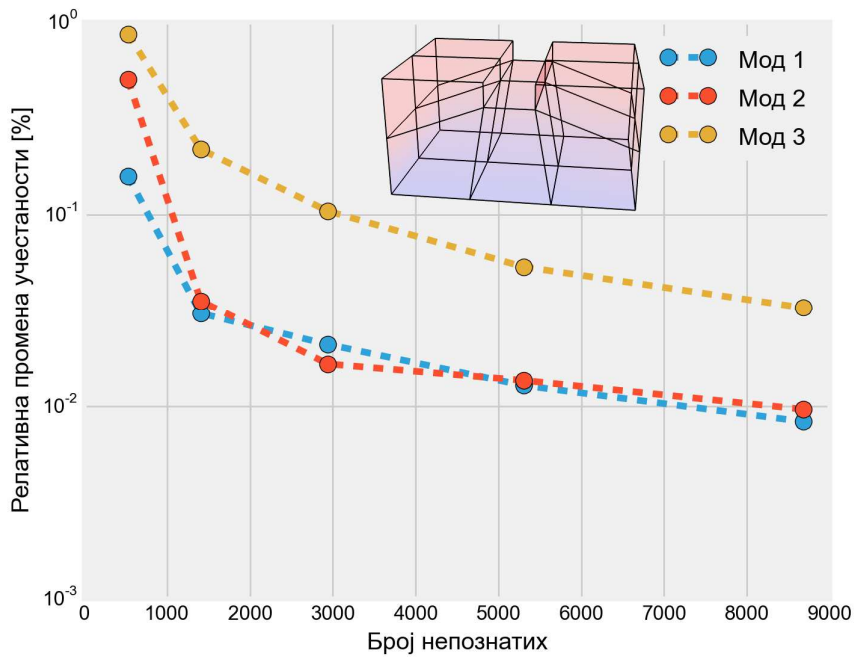


Слика 5-17. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 4, 5 и 6 при моделу шупљине са гребеном са 5 коначних елемената.





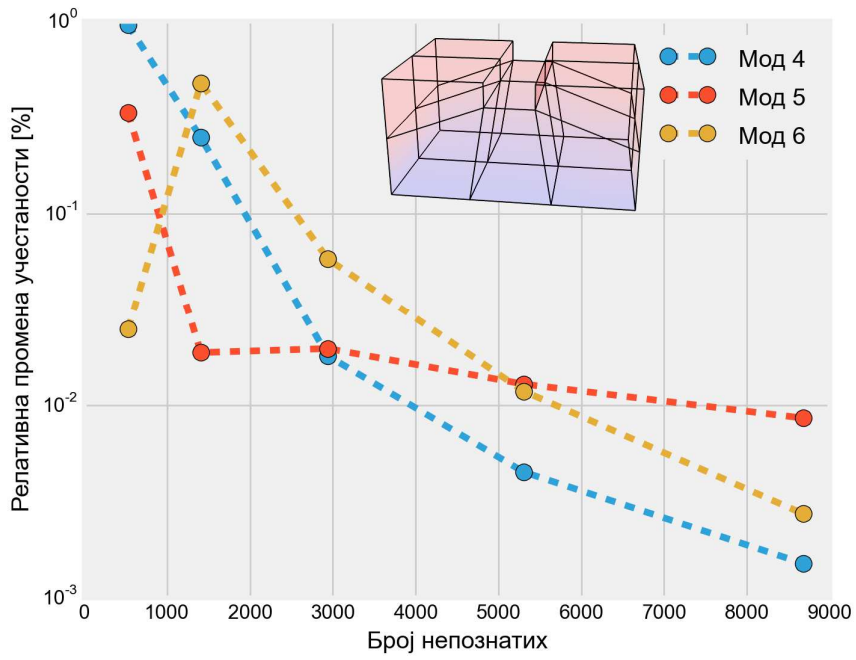
Слика 5-18. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 7, 8 и 9 при моделу шупљине са гребеном са 5 коначних елемената.



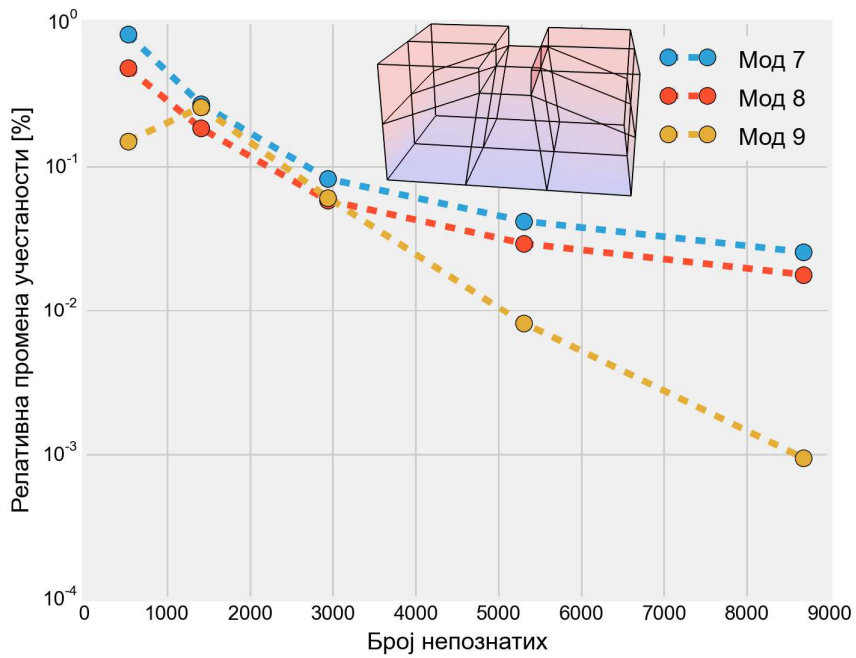
Слика 5-19. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 1, 2 и 3 при моделу шупљине са гребеном са 10 коначних елемената.

Табела 5-20: Таласни број првих 9 модова шупљине са гребеном при МКЕ моделу на слици 5-12(в) са 10 изотропних елемената.

Мод 1	0,50956507	0,50875540	0,50891035	0,50901707	0,50908233	0,50912476
Мод 2	0,75061175	0,74683093	0,74656579	0,74668968	0,74679143	0,74686349
Мод 3	0,79590693	0,78899546	0,78727126	0,78644828	0,78602685	0,78576938
Мод 4	0,79759851	0,78997045	0,78800739	0,78786498	0,78782949	0,78781760
Мод 5	0,80405922	0,80136539	0,80151594	0,80167393	0,80177724	0,80184601
Мод 6	0,89106014	0,89128185	0,88702181	0,88650571	0,88640074	0,88637654
Мод 7	0,90163345	0,89421090	0,89178181	0,89104797	0,89067405	0,89044613
Мод 8	0,91598260	0,91158013	0,90989915	0,90936931	0,90910243	0,90894006
Мод 9	1,00175927	1,00326375	1,00067298	1,00006250	0,99998115	0,99999061
Бр. непоз.	120	528	1408	2940	5304	8680
Бр. одбир.	7,668595041	10,26052586	6,622667188	4,129773991	2,679196609	1,817951488
Ред Б спл.	2	2	2	2	2	2
Бр. чворова	2	3	4	5	6	7



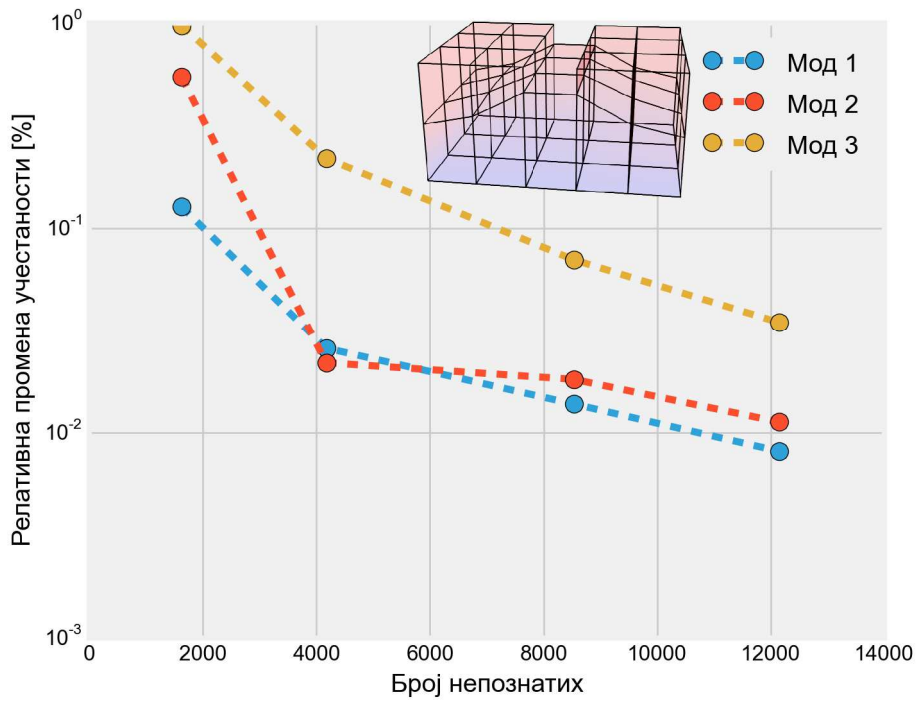
Слика 5-20. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 4, 5 и 6 при моделу шупљине са гребеном са 10 коначних елемената.



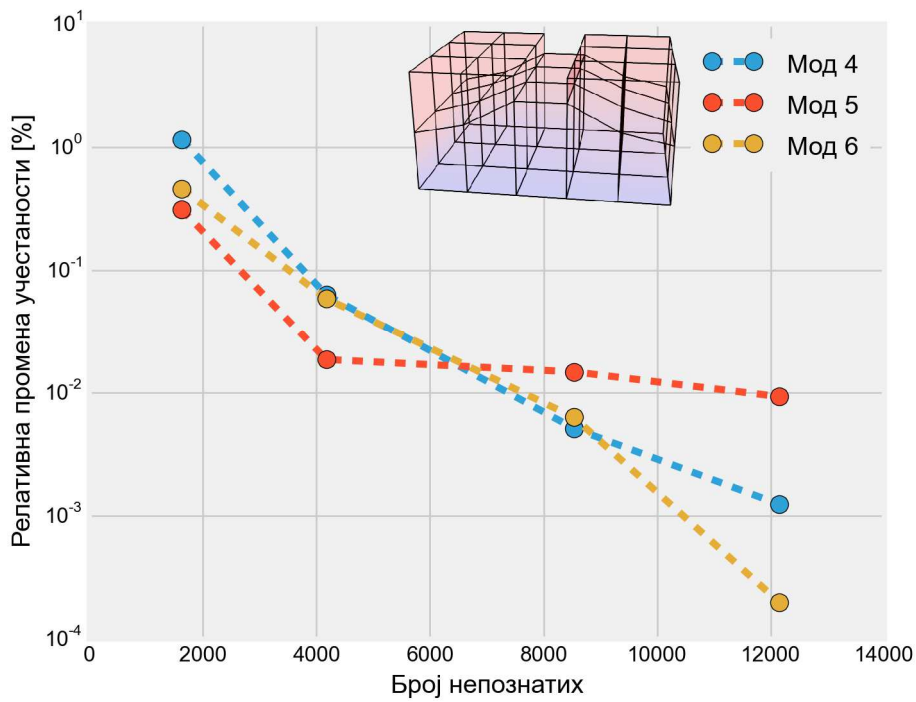
Слика 5-21. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 7, 8 и 9 при моделу шупљине са гребеном са 10 коначних елемената.

Табела 5-21: Таласни број првих 9 модова шупљине са гребеном при МКЕ моделу на слици 5-12(г) са 27 изотропних елемента.

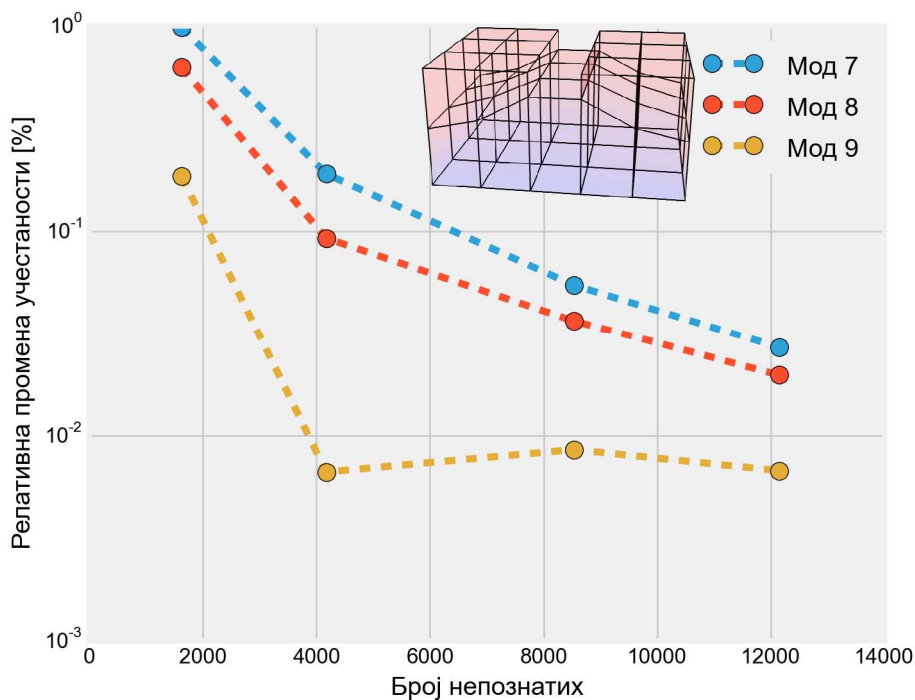
Мод 1	0,50956507	0,50891491	0,50904650	0,50911670	0,50915800
Мод 2	0,75061175	0,74651412	0,74667790	0,74681380	0,74689797
Мод 3	0,79590693	0,78815058	0,78642252	0,78586969	0,78559722
Мод 4	0,79759851	0,78836199	0,78786368	0,78782321	0,78781345
Мод 5	0,80405922	0,80153810	0,80168733	0,80180567	0,80188017
Мод 6	0,89106014	0,88695000	0,88642749	0,88637152	0,88636976
Мод 7	0,90163345	0,89272361	0,89102338	0,89053662	0,89029608
Мод 8	0,91598260	0,91021894	0,90937623	0,90904437	0,90886487
Мод 9	1,00175927	0,99990273	0,99983616	0,99992171	0,99998925
Бр. непоз.	406	1626	4172	8530	12150
Бр. одбир.	3,672831362	3,794673374	2,373914833	1,476493412	0,9598609
Ред Б спл.	2	2	2	2	2
Бр. чворова	2	3	4	5	6



Слика 5-22. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 1, 2 и 3 при моделу шупљине са гребеном са 27 коначних елемената.



Слика 5-23. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 4, 5 и 6 при моделу шупљине са гребеном са 27 коначних елемената.



Слика 5-24. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињавању; модови 7, 8 и 9 при моделу шупљине са гребеном са 27 коначних елемената.

Као што смо већ напоменули, при реалистичној МКЕ анализи се не можемо ослонити на референтно решење, већ анализу конвергенције морамо вршити тако што анализирамо конвергенцију низа релативних промена резонантне учестаности. Приметимо да је при томе могуће да конвергенција буде неуниформна или да поједини чланови низа буду веома блиски нули иако одговарају веома малом броју променљивих. Ово је последица одступања дефиниције конвергенције која се користи у МКЕ пракси од математичке дефиниције конвергенције низа.

Размотримо најпре сваки од модела приказаних на слици 5-12 одвојено. Такво разматрање одговара случају када бисмо појединачно користили сваки модел уз искључиво коришћење унутар-елементног  $h$ -профињавања. Графички приказ конвергенције је приказан уз сваку од табела 5-18 до 5-21 у групама од 3 мода. Овакво раздвајање по модовима је искључиво из разлога прегледности и нема физичку или инжењерску мотивацију. Приметимо да смо, са повећањем броја елемената, принуђени да смањујемо број чворова, како би коришћени модели и даље могли да се користе уз ограничене меморијске и временске

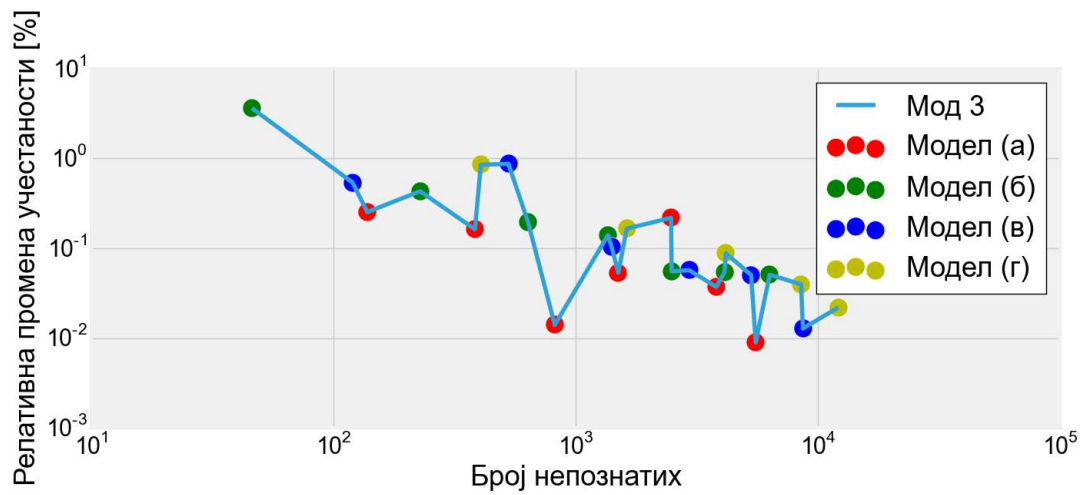
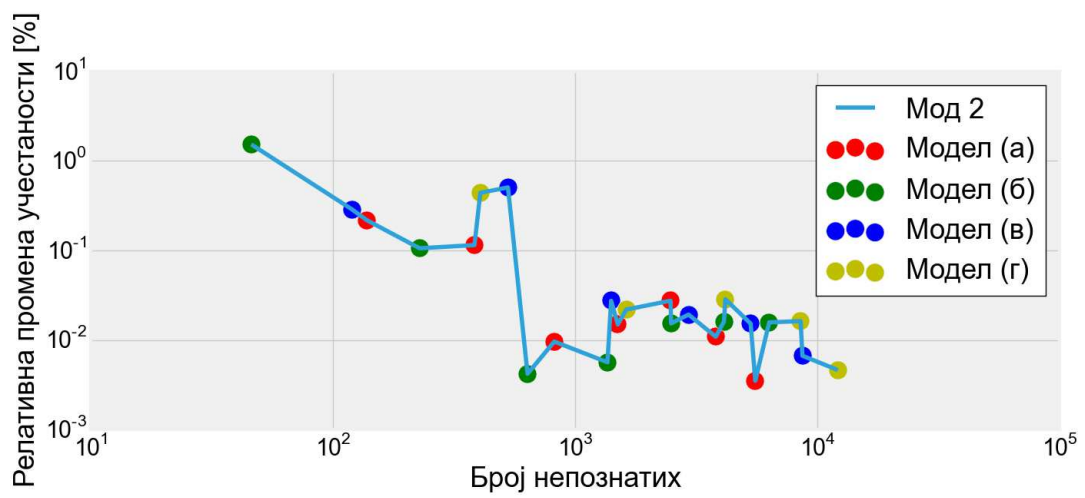
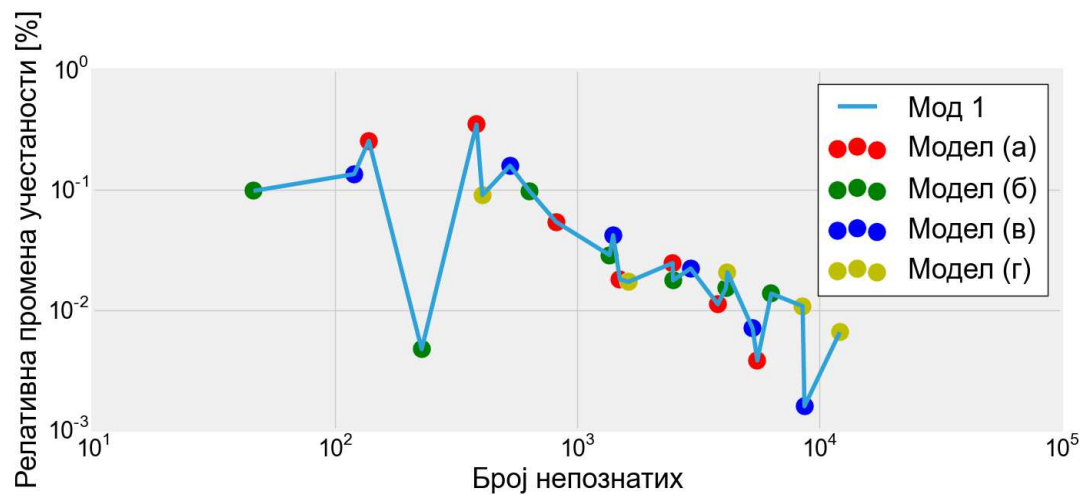
ресурсе. Највећи број итерација је оправдано спровести код првог модела са 3 елемента. Приметимо да је број тачака приказаних на графицима уз табеле 5-18 до 5-21 за један мањи од броја итерација у табелама, будући да за прву итерацију не можемо вршити процену релативне промене учестаности. Приметимо додатно да модели са више коначних елемената имају знатно веће скокове у броју променљивих у узастопним итерацијама (узастопне итерације се при фиксираном моделу тј. мешу разликују по повећању броја чворова за један у коришћеној Б-сплајн фамилији). За све моделе и све модове се може рећи да конвергирају при граници релативне промене од 0,1% и при броју конвергираних решења 2 (мада у великом броју примера има и 3 конвергирана решења). Такође, можемо приметити да нижа учестаност мода (тј. мањи редни број мода) не гарантује и бољу конвергенцију, и да често мод више учестаности има бољу конвергенцију од модова ниже учестаности за исти број променљивих (видети нпр. модел са 27 елемената и Сlike 5-22 до 5-24). Неки модови у појединим моделима конвергирају и са знатно већом тачношћу од 0,1% (видети нпр. модел са 5 елемената и модове 1,2,4,5 који имају 3 конвергирана решења при граници од 0,01%). Графички приказ свих 9 модова за све моделе је дат и из следећег разлога. Ако бисмо посматрали нпр. само прва 3 мода (тј. графикони на сликама 5-13,16,19,22), могли бисмо стећи (погрешан) утисак да је конвергенција модова врло слична за све моделе и да је углавном лошија са порастом учестаности мода (можемо видети да мод 3 за све моделе има лошију конвергенцију од прва 2 мода).

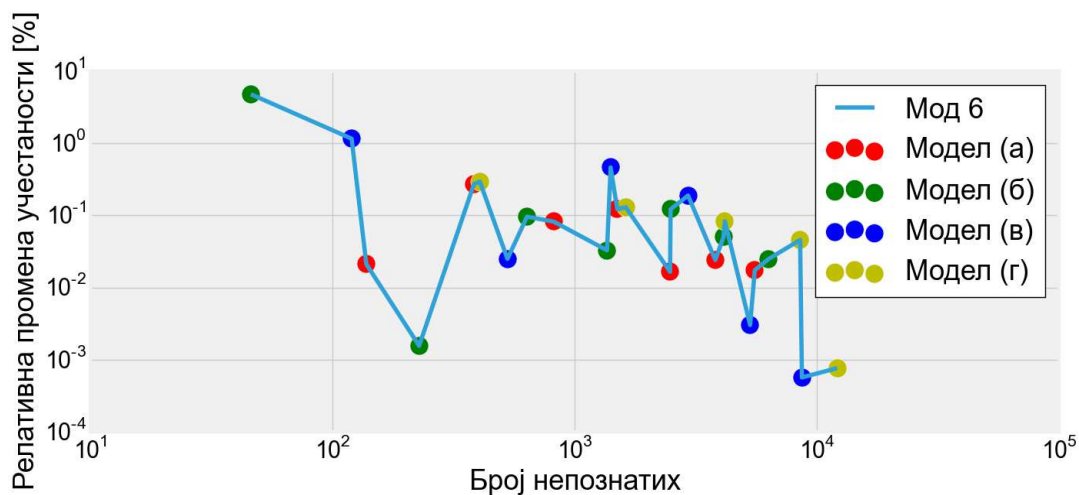
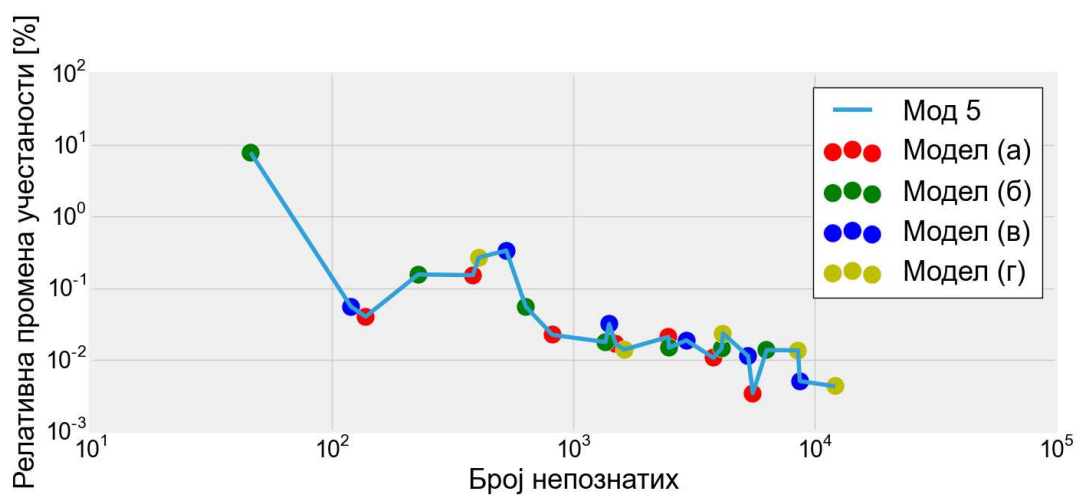
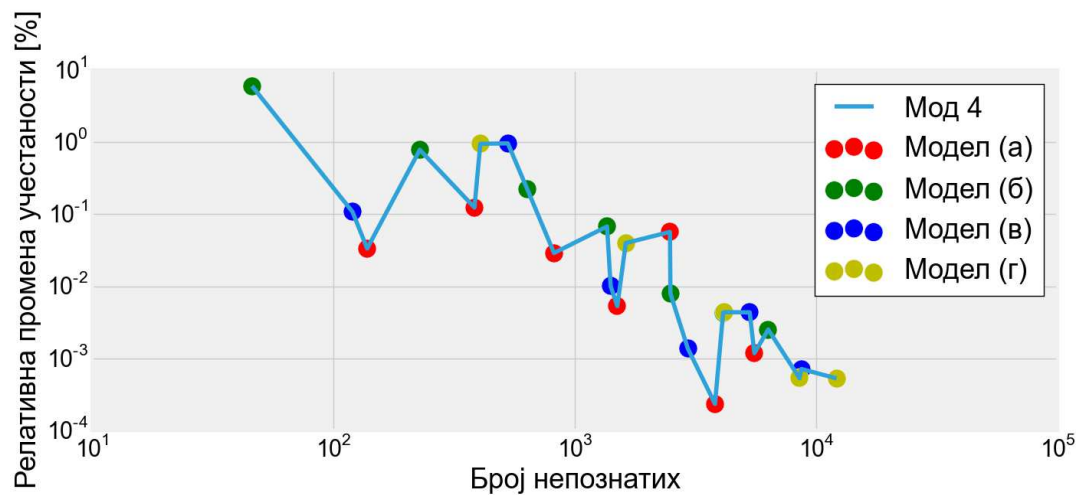
Анализа конвергенције појединачних модела нам не пружа увид у њихов међусобни однос и није једноставно видети да ли различити модели са сличним бројем непознатих дају блиске резултате, и у којој мери, што можемо постићи анализом конвергенције која користи све резултате свих модела. Чланови низа који користимо за анализу конвергенције су добијени на основу секвенце резонантних учестаности добијених различитим нумеричким моделима која је сортирана на основу броја непознатих, почевши од најмањег броја. Дакле, бројне вредности чланова низа које користимо за анализу конвергенције су другачији у односу на чланове низа у анализи конвергенције појединачних модела. Додатно, будући да почетну процену релативне промене учестаности вршимо само

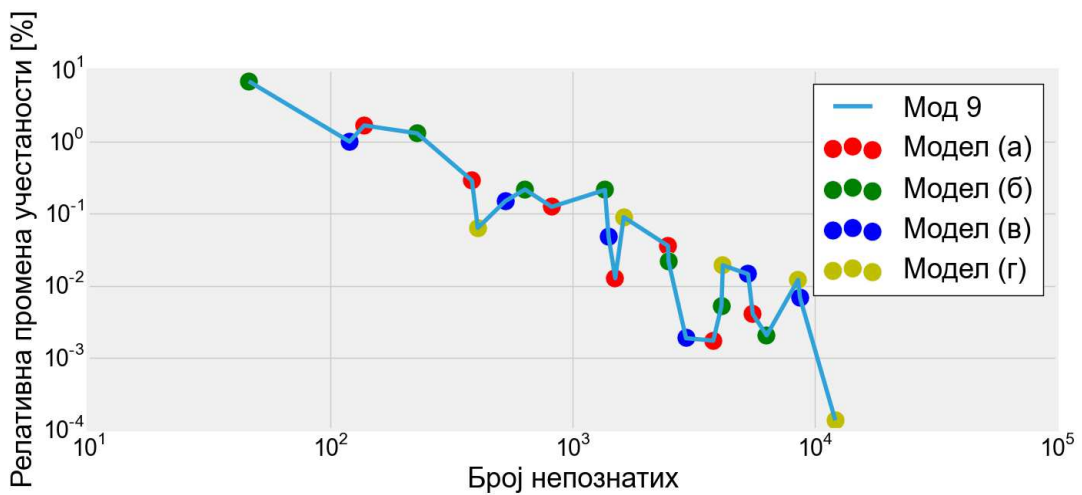
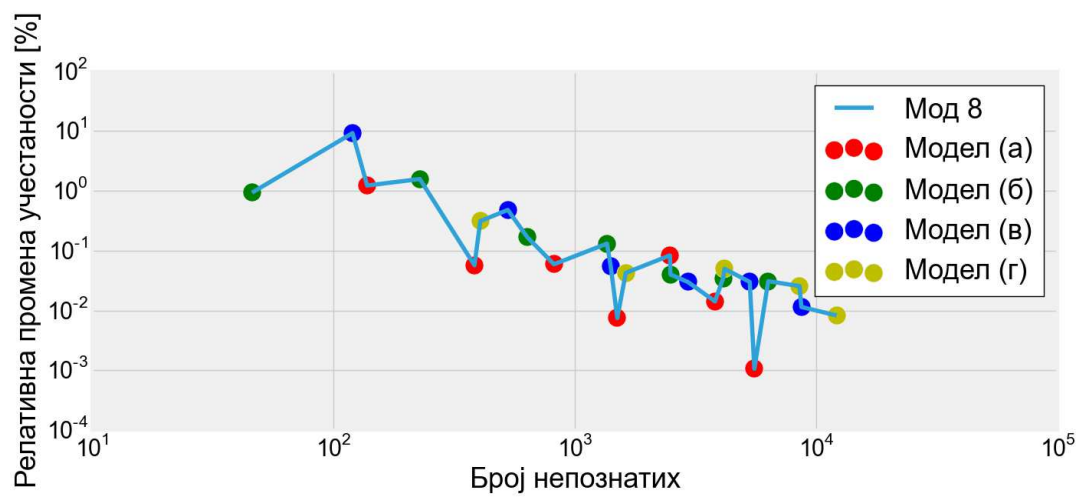
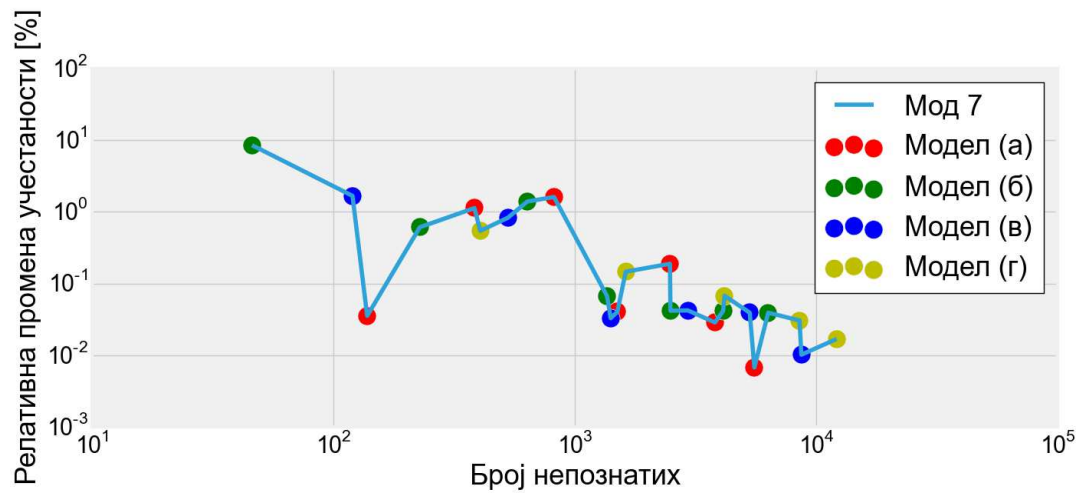
једанпут, можемо приказати више итерација него када разматрамо појединачне моделе. На овом месту напомињемо да иако оваква анализа конвергенције користи само  $h$ -профињивање, ради се о два различита типа овог профињивања; профињивању унутар самог елемента и профињивању уз додавање више елемената. Додатно, иако у узастопним итерацијама број променљивих расте, модели са различитим бројем елемената су “испреплетени” један са другим, што је јасно означено на слици 5-25.

Конвергенција првих 9 модова при коришћењу свих модела са слике 5-12 је приказана графички на слици 5-25. Можемо приметити да је за скоро све модове постигнута конвергенција са врло строгом границом од 0,01% (осим за модове 3 и 7, који су близу ове границе). Разлог што оваква веома строга граница ипак није постигнута за све модове, може се тражити у чињеници да меш није профињен уз коришћење накнадне анализе, тј. не постоји спрега на релацији генерисања меша и расподеле модалног поља. Проблем је двојак. Са једне стране, хексаедарски мешери немају флексибилност и локализованост профињивања каква постоји код тетраедарских мешера. Са друге стране, формулација која би укључивала разматрање модалног поља у генерисање меша би била веома захтевна и комплексна за реализацију, а нарочито имајући у виду стање развијености хексаедарских мешера. Додатно, можемо увидети да је некада могуће постићи веома ниску релативну промену учестаности уз свега неколико итерација (видети нпр. мод 1 и четврту итерацију). Овакав резултат није знак решења које је конвергирало, и обично нема вредност која је блиска суседним итерацијама. Бољи знак конвергираног решења је више блиских итерација које имају и довољно велик број променљивих, потичу из различитих модела и имају релативну промену учестаности унутар задате границе (видети мод 1, строго последње 2 итерације (и 5 од последњих 6 итерација)). У овом погледу најбољу конвергенцију има мод 4 где је чак последњих 10 итерација унутар границе од 0,01%.









Слика 5-25. Релативна промена учестаности при  $h$ -профињивању; модови 1-9 при моделима шупљине са гребеном са слике 5-12.

## 6 Закључак

У овој тези је развијена и представљена формулација методе коначних елемената за решавање 3Д електромагнетских проблема уз употребу Б-сплајн функција. Коришћење Б-сплајн функција је размотрено у два вида, кроз геометријско моделовање и кроз моделовање електричног поља. Две формулације МКЕ које се заснивају на геометријском моделовању помоћу Б-сплајнова су објављене у међународним часописима, и то формулација у којој се поље моделује помоћу хијерархијских полиномских функција [9] и формулација у којој се поље моделује помоћу Б-сплајн функција [10]. Геометријско моделовање помоћу Б-сплајн функција омогућава велику флексибилност у облику коначног елемента, што је у овим радовима по први пут приказано у литератури, и то на примеру шупљине са гребеном која је моделована помоћу свега једног елемента. Такође, побољшања у геометријском моделовању могу веома значајно да утичу на тачност укупног решења што је детаљно обрађено и разјашњено на примеру сферичне резонанте шупљине. На овај начин је постигнута тачност која је и до неколико редова величине већа од најчешће коришћених метода.

Коришћење Б-сплајн функција као основе геометријског моделовања је приказано на неколико карактеристичних примера. Уз коришћење само једног елемента вишег реда веома успешно су моделоване резонантне шупљина облика квадра, сфере и шупљина са гребеном. Размотрен је и један могући алгоритам параметризације 3Д коначних елемената вишег реда који може донети извесна побољшања у тачности нумеричког прорачуна, а употреба алгоритма је илустрована на примеру резонантне шупљине са гребеном.

Моделовање електричног поља је размотрено и формулисано уз коришћење две врсте функција, хијерархијских полиномских функција и Б-сплајн функција. Показано је да су хијерархијске полиномске функције специјалан случај Б-сплајн функција које не садрже унутрашње чворове у вектору чворова. Ова еквивалентност је потврђена кроз нумеричке примере на примерима шупљина облика квадра и сфере, а такође је дато и теоријско објашњење. На основу овог објашњења могуће је увидети и значај геометријског моделовања, будући да је

еквивалентност базисних функција могућа једино уз исти геометријски модел. На примеру шупљине са гребеном су испитани и модели са једним елементом (и неколико различитих параметризација) и модели са више елемената који су преузети из литературе или добијени употребом мешера. У моделима са једним елементом је показана могућност Б-сплајн функција да успешно моделују сингуларна поља, било кроз коришћење континуалних Б-сплајн функција, било кроз коришћење Б-сплајн функција са смањеном континуалношћу на месту очекиваног сингуларитета. Дато је објашњење на који начин понављање чворова опонаша класично  $h$ -профињивање. Разматрани модели су дали одличну тачност у односу на индустријски стандард МКЕ прорачуна у електромагнетици, софтвер HFSS. У моделу резонантне шупљине са више елемената извршена је анализа конвергенције по узору на методу која се користи у HFSS софтверу. Добијене су одличне конвергенције свих коришћених модела и илустрована је потреба за оптималним одређивањем границе конвергенције.

Предмет даљег истраживања могу бити следеће теме. Побољшање које би било најдиректније применљиво у већ развијеном софтверу, а са великим потенцијалом за побољшање тачности и ефикасности је развој оптималних интеграционих тачака за подинтегралне функције које су део по део полиноми. Такође, још један од начина за побољшање ефикасности би био развој базисних функција које су засноване на Т-сплајновима, тј. сплајновима који нису дефинисани на основу тензорског производа. Треба међутим имати у виду да ефикасни алгоритми израчунавања, потребне структуре података, једноставни докази линеарне независности, као и ефикасне методе спајања елемената са Т-сплајновима тренутно нису довољно развијени и морали би бити самостално развијани. Још један пример побољшања предложених метода би био и развој алгоритама за спајање анизотропних Б-сплајн елемената. У овом истраживању би могао бити коришћен и математички апарат који произилази из теорије Гребнерових база, а који омогућава увид у постојање решења система полиномских једначина више променљивих уз нотацију која је коришћена за добијање веза између хијерархијских полиномских функција и Б-сплајн базисних функција.

## Референце

- [1] J.-M. Jin and D. J. Riley, *Finite element analysis of antennas and arrays*: John Wiley & Sons, 2009.
- [2] J. M. Jin, *The finite element method in electromagnetics*: John Wiley & Sons, 2014.
- [3] O. C. Zienkiewicz and P. Morice, *The finite element method in engineering science* vol. 1977: McGraw-hill London, 1971.
- [4] T. J. Hughes, *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*: Courier Dover Publications, 2012.
- [5] J. A. Cottrell, T. J. Hughes, and Y. Bazilevs, *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*: John Wiley & Sons, 2009.
- [6] P. Solin, K. Segeth, and I. Dolezel, *Higher-order finite element methods*: CRC Press, 2004.
- [7] M. M. Ilic and B. M. Notaros, "Higher order hierarchical curved hexahedral vector finite elements for electromagnetic modeling," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, pp. 1026-1033, 2003.
- [8] M. Djordjevic and B. M. Notaros, "Double higher order method of moments for surface integral equation modeling of metallic and dielectric antennas and scatterers," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, pp. 2118-2129, 2004.
- [9] M. D. Davidovic, B. M. Notaros, and M. M. Ilic, "B-spline entire-domain higher order finite elements for 3-D electromagnetic modeling," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 22, pp. 497-499, Oct 2012.
- [10] M. D. Davidovic and M. M. Ilic, "Double B-spline finite elements for 3D electromagnetic," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 56, pp. 619-624, Mar 2014.
- [11] M. Давидовић, Л. Нађђерђ, and М. Илић, "Параметризација хексаедарских елемената у методи коначних елемената вишег реда у 3Д електромагнетици," in *58. Конференција ЕТРАИ*, Врњачка Бања, 2 – 5. јун 2014. , 2014.
- [12] R. F. Harrington, *Field computation by method of moments*: NY Mc Millan, 1968.
- [13] W. G. Strang and G. J. Fix, *Analysis of the finite element method*: Prentice-Hall, 1973.
- [14] J.-M. Jin, *Theory and computation of electromagnetic fields*: John Wiley & Sons, 2011.
- [15] B. D. Поповић, *Elektromagnetika*: Gradjevinska knjiga, 1986.
- [16] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 49, pp. 1-23, 1943.
- [17] I. J. Schönberg, "Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 4, pp. 45-99, 1946.
- [18] G. Strang, "Piecewise polynomials and the finite element method," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 79, pp. 1128-1137, 1973.
- [19] R. W. Clough, "Early history of the finite element method from the view point of a pioneer," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, pp. 283-287, 2004.
- [20] K. Eriksson, D. Estep, and C. Johnson, *Applied mathematics body and soul: vol I-III*: Springer-Verlag Publishing 2003.
- [21] P. Silvester, "Finite element solution of homogeneous waveguide problems," *Alta Frequenza*, vol. 38, pp. 313-317, 1969.
- [22] S. Marin, "Computing scattering amplitudes for arbitrary cylinders under incident plane waves," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, pp. 1045-1049, 1982.
- [23] N. Guangzheng, X. Xiaoming, and J. Baidun, "B-spline finite element method for eddy current field analysis," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26, pp. 723-726, 1990.
- [24] X. Liang and G. Ni, "The B-spline finite element method applied to axi-symmetrical and nonlinear field problems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, pp. 27-30, 1988.
- [25] L. Xuebiao, J. Baidun, and N. Guangzhen, "The B-spline finite element method in electromagnetic field numerical analysis," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 23, pp. 2641-2643, 1987.
- [26] T. J. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.

- [27] A. Buffa, G. Sangalli, and R. Vázquez, "Isogeometric methods for computational electromagnetics: B-spline and T-spline discretizations," *Journal of Computational Physics*, vol. 257, pp. 1291-1320, 2014.
- [28] R. Vázquez and A. Buffa, "Isogeometric analysis for electromagnetic problems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, pp. 3305-3308, 2010.
- [29] A. Buffa, J. Rivas, G. Sangalli, and R. Vázquez, "Isogeometric discrete differential forms in three dimensions," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 49, pp. 818-844, 2011.
- [30] A. Ratnani and E. Sonnendrücker, "An arbitrary high-order spline finite element solver for the time domain maxwell equations," *Journal of Scientific Computing*, vol. 51, pp. 87-106, 2012.
- [31] P. Wang, M. Xia, J. Jin, and L. Zhou, "Time-domain integral equation solvers using quadratic B-spline temporal basis functions," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 49, pp. 1154-1159, 2007.
- [32] W. C. Lue and F. Hsu, "Use of B-spline curves and genetic algorithms to reduce the sidelobe level in array-patterns," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 38, pp. 308-311, 2003.
- [33] B. M. Notaros, "Higher order frequency-domain computational electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, pp. 2251-2276, 2008.
- [34] B. M. Kolundžija and A. R. Djordjević, *Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures*: Artech House, 2002.
- [35] O. Yuldashev and M. Yuldasheva, "3D finite elements with harmonic basis functions for approximations of high order," ed: Препринт ОИЯИ. E11-2008-104. Dubna, 2008.
- [36] K. Rektorys, *Variational methods in mathematics, science and engineering* vol. 1: Springer, 1980.
- [37] A. Zangwill, *Modern electrodynamics*: Cambridge University Press, 2012.
- [38] V. Namias, "Discontinuity of the electromagnetic fields, potentials, and currents at fixed and moving boundaries," *American Journal of Physics*, vol. 56, pp. 898-904, 1988.
- [39] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*: Cambridge University Press, 1996.
- [40] J. L. Volakis, A. Chatterjee, and L. C. Kempel, *Finite element method for electromagnetics*: Universities Press, 1998.
- [41] G. Pelosi, R. Coccioli, and S. Selleri, *Quick finite elements for electromagnetic waves*: Artech House, 2009.
- [42] L. A. Piegl and W. Tiller, *The NURBS book*, 2nd ed. Berlin ; New York: Springer, 1997.
- [43] H. Prautzsch, W. Boehm, and M. Paluszny, *Bézier and B-spline techniques*: Springer, 2002.
- [44] M. K. Agoston, *Computer graphics and geometric modeling : implementation and algorithms*. London: Springer, 2005.
- [45] M. Galassi, B. Gough, G. Jungman, J. Theiler, J. Davies, M. Booth, *et al.*, *The GNU scientific library reference manual*, 2007.
- [46] S. Mann, "A Blossoming development of splines," *Synthesis Lectures on Computer Graphics and Animation*, vol. 1, pp. 1-108, 2006.
- [47] D. Zorin, "Bezier curves and B-splines, Blossoming," in *Lecture Notes in Topics in Computer Graphics: Geometric Modeling*, ed, 2002.
- [48] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, J. A. Evans, T. Hughes, S. Lipton, *et al.*, "Isogeometric analysis using T-splines," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 229-263, 2010.
- [49] K. Qin, "General matrix representations for B-splines," *The Visual Computer*, vol. 16, pp. 177-186, 2000.
- [50] K. Qin, "A matrix method for degree-raising of B-spline curves," *Science in China Series E: Technological Sciences*, vol. 40, pp. 71-81, 1997.
- [51] I. Tsukerman, "Symbolic algebra as a tool for understanding edge elements," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 39, pp. 1111-1114, 2003.
- [52] L. Valle, F. Rivas, and M. Catedra, "Combining the moment method with geometrical modelling by NURBS surfaces and Bézier patches," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* vol. 42, pp. 373-381, 1994.
- [53] R. Coccioli, G. Pelosi, and S. Selleri, "Optimization of bends in rectangular waveguide by a finite-element genetic-algorithm procedure," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 16, pp. 287-290, 1997.
- [54] T. D. Blacker, W. J. Bohnhoff, and T. L. Edwards, "CUBIT mesh generation environment. Volume 1: Users manual," Sandia National Labs., Albuquerque, NM (United States)1994.

- [55] S. Maneewongvatana and D. M. Mount, *On the efficiency of nearest neighbor searching with data clustered in lower dimensions*: Springer, 2001.
- [56] E. Jones, T. Oliphant, and P. Peterson. SciPy: Open source scientific tools for Python [Online]. Available: <http://www.scipy.org/>
- [57] O. C. SAS, "Open CASCADE technology, 3D modeling & numerical simulation," ed, 2008.
- [58] E. M. Klopf, N. J. Sekeljic, M. M. Ilic, and B. M. Notaros, "Optimal modeling parameters for higher order MoM-SIE and FEM-MoM electromagnetic simulations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, pp. 2790-2801, 2012.
- [59] F. Auricchio, F. Calabro, T. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli, "A simple algorithm for obtaining nearly optimal quadrature rules for NURBS-based isogeometric analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 249, pp. 15-27, 2012.
- [60] T. J. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli, "Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 301-313, 2010.
- [61] HFSS, *3D EM-field simulation for high performance electronic design, software manual for HFSS version 11*: Ansoft Corporation, Pittsburgh, PA 2007.
- [62] G. Kaur and A. E. Yilmaz, "A practical implementation and comparative assessment of the radial-angular-transform singularity cancellation method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, pp. 4634-4642, 2011.
- [63] T. Ozdemir and J. L. Volakis, "Triangular prisms for edge-based vector finite element analysis of conformal antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, pp. 788-797, 1997.
- [64] A. Chatterjee, J. Jin, and J. Volakis, "Computation of cavity resonances using edge-based finite elements," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, pp. 2106-2108, 1992.
- [65] J. S. Savage and A. F. Peterson, "Higher-order vector finite elements for tetrahedral cells," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, pp. 874-879, 1996.
- [66] R. F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*: Wiley-IEEE Press, 2001.
- [67] C. De Falco, A. Reali, and R. Vázquez, "GeoPDEs: a research tool for isogeometric analysis of PDEs," *Advances in Engineering Software*, vol. 42, pp. 1020-1034, 2011.
- [68] P. Arbenz, R. B. Lehoucq, A. Zollinger, P. Arbenz, and P. Arbenz, *A comparison of algorithms for modal analysis in the absence of a sparse direct method*: ETH, Swiss Institute of Technology, Department of Computer Science, Institute of Scientific Computing, 2003.



## Биографија

Милош Давидовић је рођен 29.01.1984. године у Београду где је завршио основну школу и Математичку гимназију, обе као носилац Вукове дипломе. Упоредо је завршио нижу и средњу музичку школу “Мокрањац”.

Електротехнички факултет Универзитета у Београду уписао је 2002. године, као најбољи на пријемном испиту. Дипломирао је одбранивши дипломски рад “НМЕА декодирање и приказ података“ са оценом 10, и средњом оценом 9,45 током студија. Упоредо са студијама на Електротехничком факултету, студирао је на гудачком одсеку Филолошко-уметничког факултета Универзитета у Крагујевцу, где је дипломирао са оценом 10 у класи проф. Срђана Стошића и средњом оценом 9,53 током студија.

Као стипендиста Министарства науке, 2008. године уписао је докторске академске студије Електротехнике и рачунарства, модул Микроталасна техника, на Електротехничком факултету Универзитета у Београду.

Године 2011. запослио се у Институту за нуклеарне науке „Винча“, у Лабораторији за заштиту од зрачења и заштиту животне средине. До сада је, као аутор или коаутор, објавио 10 научних радова у међународним часописима, од чега су 3 објављена у врхунским часописима (M21) и више радова на домаћим и међународним конференцијама.

## Списак одабраних радова

- [1] V. A. Andreev, L. Davidović, M. D. Davidović, M. D. Davidović, V. I. Manko, and M. A. Manko, "Operator method for calculating Q symbols and their relation to Weyl-Wigner symbols and symplectic tomogram symbols," *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 179, pp. 559-573, 2014.
- [2] D. M. Davidović, L. J. Nađđerđ, and M. D. Davidović, "Rates of moving clocks in the framework of the special theory of relativity," *Physics Essays*, vol. 27, pp. 63-67, 2014.
- [3] M. D. Davidović and M. M. Ilić, "Double B-spline finite elements for 3D electromagnetic modeling," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 56, pp. 619-624, 2014.
- [4] L. J. Nađđerđ, M. D. Davidović, D. M. Davidović, M. J. Milošević, D. J. Jordanov, S. J. Stanković, *et al.*, "A possible improvement of the determination of Ba<sub>133</sub> activity and detection efficiency by the sum-peak method, by inclusion of the previously neglected transitions," *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 698, pp. 60-65, 2013.
- [5] I. Plećaš, L. J. Nađđerđ, and M. D. Davidović, "Optimisation by mathematical modeling of physicochemical characteristics of concrete containers in radioactive waste management," *Nuclear Technology and Radiation Protection*, vol. 28, pp. 25-30, 2013.
- [6] M. D. Davidovic, B. M. Notaros, and M. M. Ilic, "B-spline entire-domain higher order finite elements for 3-D electromagnetic modeling," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 22, pp. 497-499, 2012.
- [7] L. J. Nađđerđ, D. J. Jordanov, and M. D. Davidović, "A new matrix method for calculating coincidence summing effects for gamma spectroscopy," *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 662, pp. 21-25, 2012.
- [8] M. D. Davidović and M. D. Davidović, "Mode Analysis of the Optical and the Microwave Waveguides Using Electromagnetic Energy Flow Lines," in *Proc. of the International School and Conference on Photonics (PHOTONICA09)*, *Acta Physica Polonica A*, 2009, pp. 672-674.
- [9] M. D. Davidović, M. D. Davidović, and V. Vojisavljevic, "Time-Frequency Analysis of Nonstationary Optical Signals Using Husimi Type Function," *Acta Physica Polonica A*, vol. 116, pp. 675-677, 2009.
- [10] S. J. Stanković, R. D. Ilić, M. Davidović, M. Kovačević, and D. Davidović, "Influence of packaging configuration with kovar lid on RADFET response to proton irradiation," *Nuclear Technology and Radiation Protection*, vol. 23, pp. 37-40, 2008.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а Милош Д. Давидовић

број индекса 5057/07

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**„Б-сплајн хексаедарски елементи за 3Д електромагнетско моделовање“**

---

---

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 28.01.2015

Милош Давидовић



Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милош Давидовић

Број индекса 5057/07

Студијски програм Микроталасна техника

Наслов рада „Б-сплајн хексаедарски елементи за 3Д електромагнетско  
моделовање“

Ментор др Милан Илић, ванредни професор

Потписани/а Милош Давидовић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 28.01.2015

Милош Давидовић



Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

**„Б-сплајн хексаедарски елементи за 3Д електромагнетско моделовање“**

---

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

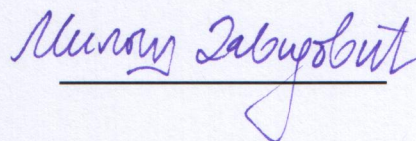
Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 28.01.2015

  
Milica Zabužović



1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.