



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Миодраг Жигић

**ОСЦИЛАЦИЈЕ КОНСТРУКЦИЈЕ
СА ПАСИВНИМ ПРИГУШИВАЧИМА
ФРАКЦИОНОГ ТИПА И СУВИМ ТРЕЊЕМ
ПРИ СЕИЗМИЧКОМ ДЕЈСТВУ**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2011.

Prolog

Predmet proučavanja ove doktorske disertacije je oscilatorno kretanje i disipacija energije stuba napravljenog od nekoliko krutih blokova, koji pri horizontalnom prinudnom dejstvu mogu da klize jedan po drugom. Pored međusobnog kontakta sa trenjem, koje se saglasno Kulonovom zakonu modelira neglatkom viševrednosnom funkcijom, veze između blokova sadrže i viskoelastične elemente. Konstitutivne relacije kojima se opisuju viskoelastični elementi uključuju frakcione izvode, tj. izvode proizvoljnog realnog reda i ograničenja na koeficijente koja slede iz Klauzijus-Dijemove nejednakosti. Kretanje koje započinje pod dejstvom prinudne sile koja odgovara krajnje jednostavnom modelu seizmičkog dejstva će se uz izabrani model disipacije zaustaviti u zoni zastoja. Radi se o nelinearnim prinudnim oscilacijama konstrukcije oblika stuba od dva i tri bloka sa standardnim frakcionim viskoelastičnim prigušivačima pri čemu je uzrok nelinearnosti prisustvo suvog trenja u sistemu. Frakcioni tip disipacije opisan nelokalnim izvodima i model disipacije koji usled relativnog kretanja blokova uključuje suvo trenje opisano neglatkim viševrednosnim funkcijama, zajedno dovode do diferencijalnih jednačina kretanja mehaničkog sistema datih u formi viševrednosnih diferencijalnih jednačina proizvoljnog realnog reda. Ovaj tip jednačina predstavlja frakciono uopštenje običnih diferencijalnih jednačina tipa Filipova čije je intenzivno proučavanje započelo šezdesetih godina prošlog veka. Konveksifikacija prekidnih desnih strana frakcionih diferencijalnih jednačina, koja se postiže izabranim modelom sile trenja, obezbeđuje korrektni model potpunog zaustavljanja sistema po prestanku dejstva prinudne sile. Sa aspekta numeričke analize problem je posebno zanimljiv jer povezuje algoritme za rešavanje frakcionih diferencijalnih jednačina sa algoritmima neglatke analize.

Proučavanje problema oscilacija nezaobilazno je u inženjerstvu jer one imaju primenu u mnogim oblastima tehnike, dok u nekim slučajevima predstavljaju neželjenu pojavu koja ometa pravilan rad određenih uređaja. Naročita pažnja poklanja se oscilatornom kretanju građevinskih objekata pod dejstvom zemljotresa, pri čemu su ljudski životi dovedeni u opasnost, tako da se metode pasivne i aktivne zaštite konstrukcija neprekidno razvijaju. S tim u vezi proučavanje prinudnih oscilacija se smatra klasičnim problemom sa kojim se može povezati veliki broj radova. Naime, posle serije rezultata Beglija i Torvika iz kasnih osamdesetih godina prošlog veka pojavljuje se čitav niz radova na temu prinudnih oscilacija sa frakcionim tipom disipacije, v. Koh i Keli [72, 1990], Bejer i Kemfle [19, 1995], Enelund i Lezetr [45, 1999], Čang i Sing [26, 2002], Narahari Akar i dr. [87, 2002], Spasić i Haralambakis [116, 2002], Rozikin i Šitikova [106, 2010]. Gotovo u svim tim radovima frakcioni račun se predstavlja kao matematički aparat kojim se izuzetno dobro opisuju viskoelastična

svojstva novih materijala prisutnih u novim konstrukcijama. Nekako u isto vreme, poslednjih dvadesetak godina prošlog veka dolazi i do naglog razvoja neglatke analize, a time i neglatke mehanike, v. npr. reference u radu Demjanov [34, 2002], kao i u monografijama Fajfer i Gloker [97, 1996], Broljato [21, 1999], Kunce [73, 2000], te radovima Broljato i dr. [22, 2002], Papaloizou i dr. [93, 2007], Stein i dr. [119, 2008], Flores i dr. [51, 2009]. Napominje se da je tek upotrebom neglatkih viševrednosnih funkcija korektno opisan proces zaustavljanja mehaničkih sistema u konačnom vremenu, Lejn i Nijmejer [74, 2004]. Povezivanje neglatke analize i diferencijalnih jednačina sa necelim izvodima predmet je radova El-Sayed i Ibrahim [43, 1995], El-Sayed i Ibrahim [44, 2001], Ouahab [92, 2008], Černea [25, 2010], Čikon i Salem [28, 2010], Danca [31, 2010]. Najzad, u radu Grahovac i dr. [60, 2011] proučena je viševrednosna diferencijalna jednačina proizvoljnog realnog reda koja modelira sudar krutog tela sa frakcionim viskoelastičnim slojem u prisustvu suvog trenja. Termodinamička konzistentnost modela viskoelastičnog sloja obezbeđena je ograničenjima na koeficijente koja slede iz Klauzijus-Dijemove nejednakosti, v. Atanacković [7, 2002]. Suvo trenje kao strogo disipativni proces zahteva korektno modeliranje prekidnih faza kretanja, v. Tarner [122, 2001]. Kako se radi o potpuno istim fizičkim modelima kao u ovde postavljenom problemu, metodologija iz tog rada će se delimično primeniti i ovde, s tim da je sada situacija složenija. Naime, pored većeg broja stepeni slobode kretanja sistema, kod izbranog oscilatornog kretanja interval integracije je duži, moguće je više promena smera kretanja tako da je primena numeričkih metoda za rešavanje frakcionih diferencijalnih jednačina u kombinaciji sa upravljanjem prekidnim modelima različitih faza kretanja znatno složenija.

Struktura ovog rada je sledeća. Prvo poglavlje predstavlja polazne stavove i u njemu je opisana primena frakcionih izvoda u analizi ponašanja viskoelastičnih tela, razmotreno je nekoliko modela suvog trenja, kao i nekoliko modela horizontalnog seizmičkog dejstva. U drugom poglavlju postavljen je problem oscilacija sistema od dva kruta bloka pri seizmičkom dejstvu, a uvođenjem bezdimenzijskih veličina, sistem diferencijalnih jednačina koji opisuje ponašanje proučavane konstrukcije prikazan je u bezdimenzijskom obliku. Upotrebom Laplasovih transformacija problem je preveden u oblik diferencijalno-integralne inkluzije, pogodan za kvalitativnu analizu, kojom se dokazuje egzistencija rešenja postavljenog problema. Neglatki sistem tipa Filipova koji uključuje i frakcione izvode rešen je numeričkim postupkom i upotrebom monotono-opadajućih, sa nulom ograničenih nezavisno promenljivih, sa kojima se prošireni sistem stanja integrali da bi se u jednoj iteraciji odredio trenutak kada se ostvaruje jednakost u unilateralnom ograničenju. Ispitano je kretanje sistema za razne vrednosti uvedenih parametara i prikazani su dobijeni rezultati. Treće poglavlje predstavlja proširenje problema postavljenog u drugom poglavlju, i u njemu se pomoću uvedenih metoda daje postavka, rešenje i prikaz rezultata problema oscilovanja konstrukcije od tri bloka. Kombinatorni problem u ovom slučaju dovodi do devet mogućih scenarija kretanja sistema, gde je za svaki scenario formiran dinamički model, kao i uslovi pod kojima se dati model primenjuje. U četvrtom poglavlju data su zaključna razmatranja i pravci daljih istraživanja. Postupak rešavanja postavljenih problema zahteva i pisanje odgovarajućeg programskog koda, a grafički prikaz algoritma za rešavanje prikazan je u dva dodatka na kraju rada.

Sadržaj

1. Polazni stavovi	1
1.1 Primena frakcionih izvoda u analizi viskoelastičnih tela	1
1.2 Modeli suvog trenja	6
1.3 Modeli horizontalnog seizmičkog dejstva	10
2. Problem oscilacija konstrukcije u obliku stuba pri seizmičkom dejstvu - slučaj dva bloka	13
2.1 Postavka problema	13
2.2 O egzistenciji rešenja problema	19
2.3 Numerički metod rešavanja problema	21
2.4 Rezultati	30
3. Slučaj tri bloka	39
3.1 Postavka problema	39
3.2 Rešenje za slučaj tri bloka	42
3.2.1 Dinamički modeli za devet različitih kretanja	43
3.2.2 Određivanje trenutka promene stanja sistema za slučaj klizanja u oba kontakta	46
3.2.3 Određivanje trenutka promene stanja sistema za slučaj klizanja samo u jednom kontaktu	47
3.2.4 Uslovi koji određuju novo stanje sistema po završetku faze klizanja u određenom kontaktu	48
3.3 Rezultati	50
4. Zaključna razmatranja	59
A. Dijagram toka podataka za slučaj dva bloka	61
B. Dijagram toka podataka za slučaj tri bloka	63

Spisak slika

1.1	Eksperiment relaksacije napona: a) Zatezanje uzorka konstantnom brzinom do trenutka t_a , b) Relaksacija napona tokom vremena.	6
1.2	Modeli trenja: a) Regularizovani model, b) Neglatki model kod kojeg sila trenja zavisi od relativne brzine, c) Neglatki model, d) Viševrednosna funkcija znaka.	8
1.3	Akcelerogram zemljotresa El Centro iz 1940. godine.	11
2.1	a) Konstrukcija u obliku stuba koja se sastoji od donjeg bloka (osnova) i gornjeg bloka, b) Uvećan detalj B_1 , c) Dekomponovani sistem.	14
2.2	Dinamički modeli neglatkog sistema u zavisnosti od relativne brzine bloka.	23
2.3	Faze kretanja neglatkog sistema tokom vremena.	25
2.4	Povećanje koraka integracije primenom metoda slek promenljive i ponavljanje integracije na intervalu dok traje jedna faza kretanja.	28
2.5	Rešenje za vrednosti parametara $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 1$, $\kappa = 0.05$	31
2.6	Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 1$, $\kappa = 0.05$	32
2.7	Trajektorija u prostoru mehaničkog stanja za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 1$, $\kappa = 0.05$	32
2.8	Rešenje za vrednosti parametara $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$	33
2.9	Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$	33
2.10	Disipacija energije za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$	34
2.11	Rešenje za vrednosti parametara $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.6$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$	34
2.12	Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.6$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$	35
2.13	Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.9$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$	35
2.14	Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = 0.886$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$, $\Delta(T) = 2.192$, gde je $\Delta_{VE}(T) = 0.963$, $\Delta_{TR}(T) = 1.229$	36
2.15	Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = 0.886$, $\mu = 0.6$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$, $\Delta(T) = 1.769$, gde je $\Delta_{VE}(T) = 0.463$, $\Delta_{TR}(T) = 1.306$	37

2.16	Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = 0.886$, $\mu = 0.9$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$, $\Delta(T) = 0.809$, gde je $\Delta_{VE}(T) = 0.107$, $\Delta_{TR}(T) = 0.702$	37
2.17	Rešenje za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$	38
2.18	Rešenje za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $\Omega = 0.5$, $U = 1.5$	38
3.1	a) Konstrukcija od tri bloka, sa zonama za disipaciju energije, b) Uvećani detalji B_2 i B_3 viskoelastičnih elemenata, c) Dekomponovani sistem.	39
3.2	Dinamički modeli u ravni $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$	43
3.3	Rešenje za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 1$, $\varepsilon = 1$	51
3.4	Trajektorije u faznim ravnima za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 1$, $\varepsilon = 1$	52
3.5	Trajektorije u faznim ravnima za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 0.886$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 1$, $\varepsilon = 1$	53
3.6	Trajektorije u faznim ravnima za vrednosti parametara $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.3$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 1$, $\varepsilon = 1$, a parametri viskoelastičnih štapova su: a) $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\beta} = 1.183$, b) $\alpha = \beta = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.886$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 5 \cdot 10^{-8}$	54
3.7	Rešenje za $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 0.2$, $\varepsilon = 1$	55
3.8	Trajektorije u faznim ravnima za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 0.2$, $\varepsilon = 1$	56
3.9	Trajektorije u faznim ravnima za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 5$, $\varepsilon = 1$	57
3.10	Dva različita načina kretanja srednjeg bloka za: $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.3$, $U = \pi^2/4$, $\Omega = \pi/4$, $\kappa = 0.05$, $\varepsilon = 1$. Isprekidanom linijom označeno je relativno pomeranje x_1 u slučaju $\xi = 0.5$, dok deblja puna linija predstavlja x_1 za $\xi = 3$	57
A.1	Grafički prikaz algoritma za rešavanje problema kod slučaja dva bloka.	61
B.1	Grafički prikaz delova algoritma za rešavanje problema za slučaj tri bloka - modeli kod kojih je u jednom kontaktu klizanje a u drugom stik.	63
B.2	Grafički prikaz delova algoritma za rešavanje problema za slučaj tri bloka - modeli kod kojih je u oba kontakta klizanje.	64
B.3	Grafički prikaz dela algoritma za rešavanje problema za slučaj tri bloka - model Iss kod kojeg je u oba kontakta stik.	65

Spisak tabela

3.1 Dinamički modeli za devet mogućih kontaktnih situacija kod sistema sa dve hrapave kontaktne površine, sa uslovima pod kojim oni egzistiraju. . .	43
3.2 Uslovi koji određuju novu fazu ponašanja sistema prema analizi prvog kontakta.....	49
3.3 Uslovi koji određuju novu fazu ponašanja sistema prema analizi drugog kontakta.....	49

1. Polazni stavovi

„Ako želimo da predvidimo budućnost matematike, pravi put ka tome je da proučimo istoriju i trenutno stanje u toj nauci.”

Anri Poenkare

1.1 Primena frakcionih izvoda u analizi viskoelastičnih tela

Frakcioni račun ili „fractional calculus” je matematička disciplina stara više od tri veka. Nakon objavljivanja rezultata svojih istraživanja u vezi sa diferencijalnim računom 1695. godine, gde je uveo oznaku $\frac{d^n y}{dx^n}$ za n -ti izvod funkcije $y(x)$, Lajbnic je primio pisma od Bernulija i Lopitala sa pitanjima: šta bi bilo ukoliko bi red izvoda iznosio $1/2$, odnosno kakvo značenje bi imao izvod ako je n razlomak. Lajbnicov odgovor je glasio: „To dovodi do paradoksa iz kojeg će se jednog dana doneti važni zaključci, jer ne postoji beskoristan paradoks”. Kasnija pitanja bila su da li n može biti iracionalan, realan ili kompleksan broj. Na taj način privučena je pažnja mnogih poznatih matematičara od kojih je važno pomenuti Ojlera, Lagranža, Furijeja, Laplasa, Abela, Ljuvila, Rimana i Lorena. Oni su direktno ili indirektno doprineli razvoju ove discipline. Teorija je proširena i samim tim je naziv „frakcioni račun” postao neprikladan, pri čemu bi možda bolje ime bilo diferenciranje ili integracija proizvoljnog realnog ili necelog reda, v. Miler i Ros [86, 1993], Čen i dr. [79, 2010]. I pored toga vrlo često se koristi ustaljeni naziv „frakcioni račun” koji datira još od vremena Lopitala.

Prvi objavljeni rezultati gde se pominje izvod proizvoljnog reda nalaze se u tekstu Lekroa iz 1819. godine. Uzevši da je $y = x^m$, gde je m pozitivan prirodan broj, on je izveo izraz za n -ti izvod

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad (1.1)$$

a zamenjujući faktorijel Ojlerovom Gama funkcijom dobio je izraz za izvod proizvoljnog reda

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.2)$$

Na primeru gde je $m = 1$ i $n = 1/2$ pokazao je da je

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, \quad (1.3)$$

i vrlo je interesantno da se ovaj rezultat u potpunosti slaže sa rezultatom dobijenim primenom današnjih saznanja u teoriji frakcionog računa.

Nakon toga Furije je 1822. godine definisao izvod proizvoljnog reda koristeći svoju integralnu reprezentaciju funkcije $f(x)$

$$\frac{d^u f(x)}{dx^u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos \left[p(x - \alpha) + \frac{1}{2}u\pi \right] dp, \quad (1.4)$$

gde u može imati bilo koju vrednost.

Ipak prvu svoju primenu frakcioni račun našao je 1823. godine kada ga je Abel upotrebio u rešenju integralne jednačine koja se koristi za formulaciju problema tautohrone¹. Smatra se da su najranije sistematične studije na ovu temu nastale tek sredinom XIX veka i da su one bile sprovedene od strane Ljuvila, Rimana i Holmgrina. Ljuvil je dao razvoj funkcija u eksponencijalne redove

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad \operatorname{Re}(a_n) > 0 \quad (1.5)$$

i definisao izvod takvih redova diferencirajući član po član, kao u slučaju kada je red izvoda pozitivan ceo broj

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = c_n a_n^\alpha e^{a_n x}, \quad (1.6)$$

što predstavlja *Ljuvilovu prvu definiciju* frakcionih izvoda. Pošto je ona ograničena samo na funkcije oblika (1.5) Ljuvil je, da bi proširio svoju definiciju, formulisao tzv. *Ljuvilovu drugu definiciju* frakcionih izvoda

$$\frac{d^\alpha x^{-\beta}}{dx^\alpha} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}, \quad \beta > 0, \quad (1.7)$$

koja je primenljiva samo za racionalne funkcije.

Riman je uveo drugačiju definiciju koja uključuje određeni integral i primenljiva je na stepene redove sa necelim eksponentima. Zahvaljujući Grunvaldu i Krugu koji su prvi objedinili ove rezultate, kao i radovima Sonina i Lorena, nastala je jedna od najpoznatijih definicija koja spada u okvir frakcionog računa, *Riman-Ljuvilov*

¹ Od grčke reči „tauto” - isto i „chronos” - vreme. Predstavlja problem određivanja oblika ravanske krive takve da kada se po njoj bez trenja kreće materijalna tačka samo u prisustvu gravitacionog polja, tačka stiže do najnižeg dela krive uvek za isto vreme, bez obzira sa kog mesta na toj istoj krivoj započinje svoje kretanje. Problem je prvi rešio Kristijan Hajgens 1659. godine. On je pokazao da je reč o cikloidi.

frakcioni integral. Polazeći od Košijeve formule (1.8) za rešenje linearne nehomogene obične diferencijalne jednačine n -tog reda

$$J^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.8)$$

gde je funkcija $f(t)$ definisana

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

a J^n integralni operator, i uopštavajući je korišćenjem Ojlerove Gama funkcije umesto faktorijela $(n-1)! = \Gamma(n)$ i uvođenjem pozitivnog realnog broja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ umesto $n \in \mathbb{N}$, dobija se izraz za Riman-Ljuvilov frakcioni integral

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.9)$$

pri čemu J^α predstavlja Riman-Ljuvilov integralni operator. Jedan od načina za definisanje frakcionog izvoda je korišćenje operatora D^α koji je definisan kao leva inverzija operatora J^α

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} D^m J^{m-\alpha} f(t), & m-1 < \alpha < m, \\ D^m f(t), & \alpha = m, \end{cases} \quad (1.10)$$

gde je $D^n f(t) \equiv \frac{d^n f}{dt^n}$. U razvijenom obliku relacija (1.10) glasi

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.11)$$

što predstavlja Riman-Ljuvilov frakcioni izvod funkcije $f(t)$, pri čemu je $m-1 < \alpha < m$.

Krajem XIX veka Hevisajd je objavio nekoliko radova u kojima je pokazao kako se neke linearne diferencijalne jednačine mogu rešiti primenom uopštenih operatora.

U periodu do 1941. godine, pored pomenutih naučnika svoj doprinos u razvoju frakcionog računa dali su i: De Morgan, Hadamard, Hardi, Vejl, Ris, Dejvis, Markaud, Litlvud, Post, Lav, Nađ, Erdelji i Kober, v. Hilfer [62, 2000]. Intenzivan razvoj frakcionog računa počinje 1974. godine nakon održane prve međunarodne konferencije iz ove oblasti. Matematička disciplina za koju se smatralo da nema neku posebnu primenu, doživela je u poslednjih nekoliko decenija pravu eksploziju istraživačkih aktivnosti, u smislu primene frakcionog računa u različitim naučnim oblastima:

- upravljanje inženjerskim sistemima,

- analitički i numerički alati i tehnike,
- osnovna istraživanja mehaničkih, električnih i toplotnih konstitutivnih relacija i druga svojstva različitih inženjerskih materijala kao što su viskoelastični polimeri, pene, gelovi, tkiva, i inženjerske i naučne primene ovih relacija,
- osnovno razumevanje fenomena difuzije i talasa,
- primene u bioinženjerstvu i biomedicini,
- toplotno modeliranje inženjerskih sistema kao što su kočnice i mašine alatke,
- obrada slike i signala,

videti na primer Oldham i Spanier [90, 1974], Podlubni [98, 1999], Megin [81, 2006], Hilfer [62, 2000], Sabatier i dr. [108, 2007], Čen i dr. [79, 2010].

Detaljan prikaz značajnih publikacija, kao što su Oldham i Spanier [90, 2010], Samko i dr. [109, 1987], Kirjakova [70, 1993], Miler i Ros [86, 1993], Podlubni [98, 1999], Čen i dr. [79, 2010], i istraživanja iz oblasti frakcionog računa od 1974. do 2010. godine može se videti u Rozikin i Šitikova [104, 1997], Debnath [33, 2003], Mačado i dr. [80, 2010], dok su Rozikin i Šitikova [106, 2010] analizirali rezultate primene necelih izvoda u problemima dinamike čvrstog tela u poslednjih deset godina, kao i najnovije trendove istraživanja iz ove oblasti.

Smatra se da frakcioni račun ima svoju najveću primenu u opisivanju reoloških svojstava viskoelastičnih materijala, a jedan od razloga leži u činjenici da se polimerni i elastomerni materijali u velikoj meri koriste u inženjerstvu. Viskoelastični materijali koje odlikuje visok stepen prigušenja našli su brojne primene, kao na primer kod zaštite značajnih konstrukcija pri seizmičkom dejstvu i dejstvu vetra, za prigušenje oscilacija postolja motora i rotora helikoptera, v. Ramrakjani i dr. [75, 2004]. Oni uglavnom ispoljavaju neelastične osobine kao što su puzanje, relaksacija napona, prigušenje, kao i efekat memorije. Ovakvo ponašanje materijala se uspešno opisuje uvođenjem frakcionih (nelokalnih) operatora u konstitutivne relacije, čime se broj potrebnih parametara značajno smanjuje, v. Enelund i Lezetr [45, 1999], Adolfson i dr. [4, 2004]. U prvoj polovini XX veka pioniri iz ove oblasti bili su Gemant, Skot-Bler, Gerasimov i Rabotnov, v. Mainardi [83, 2010], izučavajući primenu frakcionih operatora za opisivanje relaksacionih krivih. Nakon toga neceli izvodi i integrali našli su primenu i kod disipacije energije u seizmologiji a u drugu generaciju istraživača spadaju Kaputo, Mainardi, Begli i Torvik. Begli i Torvik su na osnovu eksperimenata utvrdili korektnost reoloških modela sa frakcionim izvodima za više od 160 materijala, v. Klimek [71, 2009]. Danas se ovaj matematički aparat uspešno primenjuje za proučavanje dinamičkog ponašanja linearnih i nelinearnih sistema sa jednim, dva ili više stepeni slobode, kao i sistema sa beskonačno mnogo stepeni slobode (oscilacije štapova, ploča, ljuski, višeslojnih sistema). Značajna je i primena u teoriji sudara kod štapova i ploča, v. Rozikin i Šitikova [106, 2010].

Kod idealno elastičnih tela napon zavisi od deformacije (nultog izvoda deformacije), dok je kod njutnovskih fluida on proporcionalan prvom izvodu deformacije. Ovo su matematički modeli idealizovanih materijala, dok realni materijali imaju osobine obe navedene grupe i one se nalaze negde između pomenutih graničnih slučajeva. Zato je prirodno pretpostaviti da za opisivanje viskoelastičnih materijala napon zavisi od α -tog izvoda deformacije, pri čemu je α realan broj i $0 < \alpha < 1$. Na taj način nastali su brojni konstitutivni modeli koji uključuju izvode necelog reda.

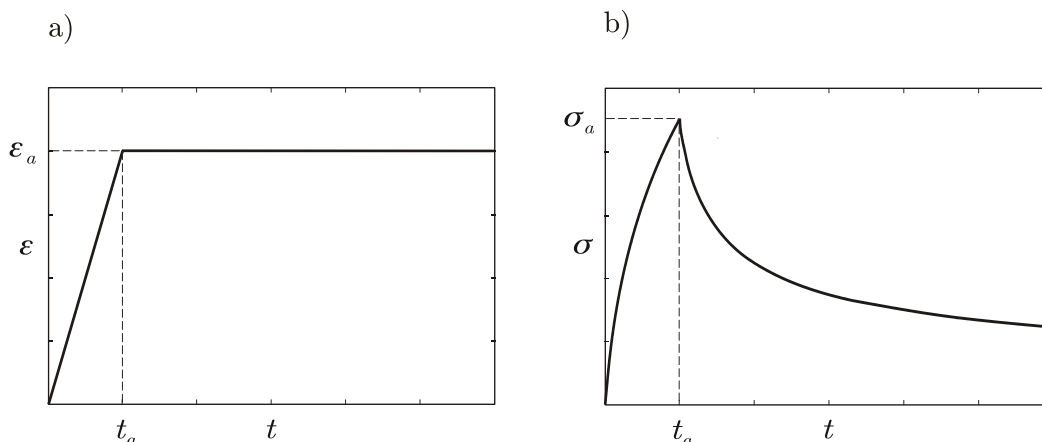
Osim dobrog opisivanja mehaničkih svojstava realnih materijala, što je dokumentovano u brojnim radovima, kao na primer Begli i Torvik [15, 1983], Torvik i Begli [121, 1984], Begli i Torvik [16, 1986], Fenander [47, 1997], Fenander [48, 1998], Enelund i dr. [46, 1999], Petrović i dr. [95, 2005], Katania i Sorrentino [24, 2007], Levandovski i Korazicevski [76, 2010], Dankuc i dr. [32, 2010], ovi modeli su konzistentni sa fizičkim principima, a odlikuju se i malim brojem parametara, kao i histerezisom u dijagramu napon-deformacija. Neki frakcioni modeli nastali su jednostavno zamjenjivanjem celobrojnog izvoda frakcionim kod standardnih konstitutivnih modela kao što su Kelvin-Vojtov, Maksvelov ili Zenerov. Neki modeli uključuju jedan, a neki više frakcionih operatora istog ili različitog reda. Postoje i modeli koji sadrže necele izvode raspoređenog reda, v. Atanacković [8, 2003].

Veliku primenu ovakvi modeli našli su u oblasti vibroizolacije. Brojni objavljeni radovi pisani su na temu prigušenja oscilacija mehaničkih sistema sa jednim ili više stepeni slobode u prisustvu viskoelastičnih elemenata za disipaciju energije, modeliranih uz pomoć frakcionog računa, v. Rozikin i Šitikova [103, 1997], Spasić i Haralambakis [116, 2002], Rozikin i Šitikova [105, 2008], Rozikin i dr. [107, 2010], Atanacković i dr. [12, 2010], Atanacković i dr. [13, 2011].

Poznato je da postoje različiti metodi za određivanje vrednosti parametara konstitutivnih modela, koji uključuju frakcione izvode, v. Levandovski i Korazicevski [76, 2010]. Podaci iz relativno jednostavnih eksperimenata relaksacije napona i puzanja za razne materijale često se mogu sresti u literaturi, a na osnovu njih se može izvršiti identifikacija parametara odabranog modela. Takav model može se koristiti za predviđanje ponašanja proučavanog materijala pri različitim slučajevima opterećenja, v. Šen i Song [113, 1995], Fenander [48, 1988], Atanacković i Spasić [9, 2004], Petrović i dr. [95, 2005], Nasuno i dr. [88, 2007], Fukunaga i Šimicu [53, 2010a], Fukunaga i Šimicu [54, 2010b], Grahovac i Žigić [59, 2010], Žigić i Grahovac [127, 2011]. Tokom eksperimenta relaksacije napona, u prvoj fazi uzorak se zateže konstantnom brzinom deformacije do trenutka t_a , kada deformacija dostigne vrednost $\varepsilon = \varepsilon_a$, slika 1.1. a), pri čemu i napon σ raste do vrednosti σ_a , slika 1.1. b). Nakon toga, deformacija ε ostaje konstantna tokom vremena, a napon opada, tj. dolazi do relaksacije napona u materijalu, slika 1.1.

Često se, zbog velike brzine deformacije i kratkog trajanja prve faze, prikazuju samo rezultati iz druge faze eksperimenta, koja traje duže i u kojoj se odvija čista relaksacija napona. Procedura za određivanje parametara modela, kojom se mogu uzeti u obzir eksperimentalni podaci iz obe faze ukoliko su poznati, predložena je u radu Dankuc i dr. [32, 2010].

Pravi razlog superiornosti frakcionih modela u odnosu one sa celobrojnim izvodima ne leži u činjenici da je kod prvih dovoljan manji broj parametara za predviđanje ponašanja relanih materijala sa dovoljnom tačnošću, nego je razlog tome različita priroda ove dve grupe modela, što rezultuje većom tačnošću frakcionih modela pri istom broju parametara, v. Podlubni [98, 1999]. Polimeri i elastomeri, čije se ponašanje dobro modelira izvodima necelog reda, postaju sve popularniji kod primene za smanjenje vibracija u inženjerskim konstrukcijama, naročito kod zaštite od zemljotresa, pri čemu oni predstavljaju samo jednu grupu pasivnih sistema seizmičke zaštite. Jedan takav polimer, proučen je u radu Šen i Song [113, 1995]. Na osnovu eksperimen-



Slika 1.1. Eksperiment relaksacije napona: a) Zatezanje uzorka konstantnom brzinom do trenutka t_a , b) Relaksacija napona tokom vremena.

menata iz pomenutog rada, Žigić [126, 2008] je odredio realne vrednosti kako reda necelog izvoda tako i koeficijenata u modelu koji zadovoljavaju ograničenja diktirana drugim zakonom termodinamike, da bi zatim, za te vrednosti, na bazi linearnih diferencijalnih jednačina proizvoljnog realnog reda ispitao oscilacije konstrukcije oblika stuba sa četiri bloka pri jednostavnom seizmičkom dejstvu. Taj problem će sada biti proširen uvođenjem nelinearnosti kao posledice prisustva suvog trenja među blokovima.

1.2 Modeli suvog trenja

Suvo trenje u kontaktnim površinama predstavlja drugačiji vid disipacije energije. Sila trenja definiše se kao sila koja se suprotstavlja relativnom kretanju između površina tela u kontaktu, a tokom njihovog relativnog kretanja ima strogo disipativan karakter. Naime, površine u kontaktu nisu idealno glatke jer postoje izbočine koje se protive tom relativnom kretanju i koje treba savladati bilo smicanjem bilo deformacijom. Trenje, eng. „friction” je reč koja je u engleskom jeziku zastupljena još od XV veka, a nastala je od latinske reči „fricare”, što znači trljati. Još od drevnih vremena ljudi su bili svesni ovog fenomena, i bez naučnih objašnjenja koristili su ga za svoje potrebe, kao na primer za pravljenje vatre trljanjem drveta, izum točka. Još je Aristotel uočio postojanje sile trenja, a tek krajem XV veka je Leonardo da Vinči izveo prve naučne zaključke. Kasnije su ovu pojavu izučavali Galilej, Amon-ton, Hladni, Helmholtz, Kulon, Stribek, i na osnovu toga su nastali razni matematički modeli. U skorije vreme razvijena je nova klasa modela koja uključuje diferencijalne jednačine.

Trenje predstavlja kompleksan proces i ne postoji jedinstven matematički model ili teorija koji mogu da objasne mehanizme i procese povezane sa trenjem. Tu spadaju histerezisno ponašanje, mala pomeranja koja se mogu javiti dok još nije započelo klizanje, oscilacije sa povremenim zaustavljanjem (stik-slip oscilacije), razlike u intenzitetu sile potrebne da izazove klizanje, zavisnost sile trenja od brzine klizanja.

Izučavanje ove oblasti predstavlja kombinaciju teorijskih, numeričkih i eksperimentalnih istraživanja. Pri matematičkom modeliranju, trenje se često opisuje kao proces koji ima neku vrstu prekida. Ono utiče na rad i trajanje mnogih konstrukcija među čijim elementima postoji klizanje, v. Ibrahim [65, 1994]. Prema radu Popa [99, 2000], ranije su u realnim praktičnim problemima, pojave neglatke prirode uzrokovane trenjem ili udarima smatrane za greške, tako da su one dugi period bile potpuno zanemarivane. Njihovo razmatranje je započeto tek kasnije i to obično kroz približne i glatke modele. Tek u poslednjih dvadesetak godina razvijeni su suptilni i mnogo precizniji modeli koji korektno izražavaju neglatke efekte.

U nekim slučajevima trenje se javlja kao neželjena pojava u mehaničkim sistemima, dok se sa druge strane ono može koristiti sa namerom da se poveća prigušenje u sistemu na jednostavan i jeftin način. Razvijena društva puno ulažu u proučavanje problema trenja. Naime tamo gde je ono nepotrebno a ima ga, uzalud se troši energija, a tamo gde ga nema dovoljno, a ono je preko potrebno, može doći do nezgoda čije posledice povlače značajna društvena sredstva, v. Spasić [118, 2011]. Pored toga trenje je i uzrok za trošenje kontaktnih površina i otkaz ili zamenu delova čijih su one deo. Međutim najvažnije svojstvo prisustva suvog trenja se ogleda u činjenici da mehanički sistemi mogu doći u stanje mirovanja u konačnom vremenu. Iako spada u najsloženije pojave u mehanici, ovaj fenomen se već godinama koristi u inženjerstvu, kao na primer za disipaciju kinetičke energije kod kočionog sistema vozila. Osim toga, primena ovog fenomena široko je zastupljena i u oblasti vibroizolacije konstrukcija gde su razvijeni brojni uređaji za prigušenje prinudnih oscilacija sistema u cilju komfornijeg života ljudi, kao i u cilju zaštite konstrukcija od razornog dejstva snažnih vetrova i zemljotresa.

Sila trenja zavisi od više faktora, kao što su: svojstva materijala od kojih su sačinjena tela u kontaktu, stanje dodirnih površina, brzina klizanja, temperatura, postojanje fluidnog filma među površinama. Obzirom da ravne površine realnih tela nisu idealno glatke, već imaju neravnine koje se izražavaju u mikro i nanometrma, stvarna površina kontakta je mnogo manja od vidljive i proporcionalna je normalnoj kontaktnoj sili, a nezavisna je od vidljive površine kontakta, v. Lejn i Nijmejer [74, 2004]. Tokom relativnog klizanja površina u kontaktu, sila trenja q približno je proporcionalna stvarnoj kontaktnoj površini, tako da je proporcionalna normalnoj sili pritiska p . Naime što je veći pritisak to izbočine jedne površine više prodiru među izbočine druge površine tako da je za relativno kretanje potrebna veća sila koja se troši na deformacije i smicanje izbočina. Vezu između normalne kontaktne sile i sile trenja izučavao je Amonton, dok je Kulon proučavao uticaj brzine i smera relativnog klizanja na silu trenja. Tako je nastao čuveni Amonton-Kulonov zakon sile trenja, poznatiji pod imenom Kulonov zakon

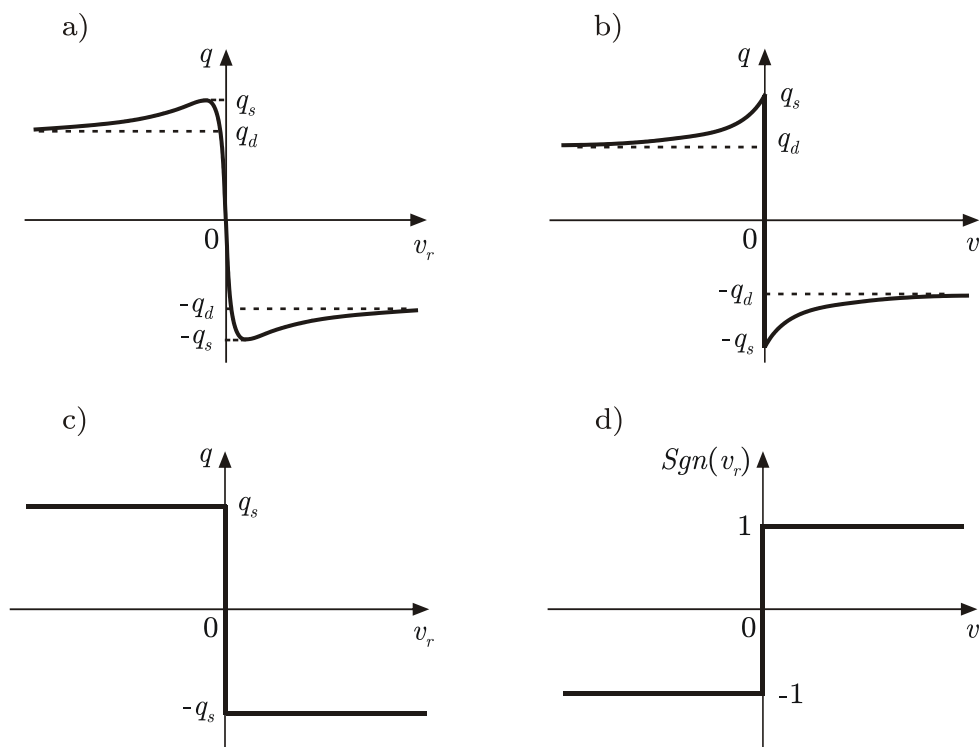
$$q = -\mu p \cdot \operatorname{sgn}(v_r), \quad v_r \neq 0, \quad \operatorname{sgn}(v_r) = \begin{cases} 1 & \text{za } v_r > 0, \\ -1 & \text{za } v_r < 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

gde μ predstavlja koeficijent trenja, koji je prema Kulonovim istraživanjima gotovo nezavisan od relativne brzine klizanja v_r , a $\operatorname{sgn}(\cdot)$ je obična funkcija znaka.

U praktičnim inženjerskim primenama često se zanemaruju razni složeni procesi koje uključuje trenje, i na taj način se dobijaju jednostavniji matematički modeli. Na slici 1.2 prikazana su tri modela trenja, kao i viševrednosna funkcija znaka $Sgn(v_r)$, koja ima fundamentalnu ulogu u opisivanju neglatkih modela. q_s predstavlja graničnu silu trenja ili maksimalnu statičku silu trenja, koju ona mora prevazići da bi do relativnog kretanja došlo, a q_d je vrednost sile trenja kojoj ona asimptotski teži pri većim relativnim brzinama. Kod slučaja na slici 1.2.a) sila trenja je modelirana glatkom funkcijom relativne brzine

$$q = -\arctan(\vartheta v_r) \left(\frac{q_s - q_d}{1 + \delta |v_r|} + q_d \right),$$

gde je $\vartheta \gg 1$ i $\delta > 0$. Ovakav model omogućava primenu standardnih metoda u rešavanju diferencijalnih jednačina, ali osnovni nedostatak mu je što ne može korektno da opiše slučaj u kojem postoji sila trenja manja od granične a ne postoji relativno kretanje. Kod ovog modela će do relativnog kretanja doći za bilo koju vrednost sile trenja različitu od nule, što ne odgovara stvarnosti.



Slika 1.2. Modeli trenja: a) Regularizovani model, b) Neglatki model kod kojeg sila trenja zavisi od relativne brzine, c) Neglatki model, d) Viševrednosna funkcija znaka.

Kod modela na slici 1.2.b) i 1.2.c) taj problem je prevaziđen tako što je sila trenja q opisana viševrednosnom funkcijom, koja za $\dot{x} = 0$ može imati bilo koju vrednost iz zatvorenog intervala $[-q_s, q_s]$. Na taj način je faza u kojoj nema relativnog kretanja

(stik faza) korektno modelirana, v. Lejn i Nijmejer [74, 2004], tako što za vrednosti sile trenje između $-q_s$ i q_s neće doći do relativnog kretanja. Model sa slike 1.2 b) može se opisati relacijom

$$q(v_r) \in \begin{cases} -\frac{q_s - q_d}{1 + \delta|v_r|} - q_d, & v_r > 0, \\ [-q_s, q_s], & v_r = 0, \\ \frac{q_s - q_d}{1 + \delta|v_r|} + q_d, & v_r < 0, \end{cases}$$

gde je $q(v_r)$ funkcija skoro svuda (dalje sk. sv.), osim za vrednost $v_r = 0$. Model na slici 1.2.c) predstavlja uprošćenu verziju modela pod b), kod kojeg je $q_s = q_d$, i koji se može predstaviti pomoću neglatke viševrednosne funkcije znaka relativne brzine $Sgn(v_r)$, tj. konveksikacije obične funkcije $sgn(v_r)$ u tački $v_r = 0$, koja ima vrednost -1 za $v_r < 0$, 1 za $v_r > 0$, dok za $v_r = 0$ ona uzima vrednost na skupu $[-1, 1]$, slika 1.2.d)

$$q \in -q_d \cdot Sgn(v_r), \quad Sgn(v_r) = \begin{cases} 1 & \text{za } v_r > 0, \\ [-1, 1] & \text{za } v_r = 0, \\ -1 & \text{za } v_r < 0, \end{cases} \quad \text{ili } q \in -q_d \delta |v_r|, \quad (1.13)$$

gde poslednja formulacija odgovara argumentima neglatke mehanike da sila trenja pripada subdiferencijalu neglatkog potencijala (ili pseudopotencijala) sile trenja koji je dat u obliku apsolutne vrednosti relativne brzine klizanja, v. Lejn i Nijmejer [74, 2004]. Napominje se da Fajfer i Gloker [97, 1995] i Gloker [56, 2001] preporučuju da se u inženjerskim problemima ne prave razlike između dinamičkog i statičkog koeficijenta trenja, što će i ovde biti korišćeno. Matematičko opravdanje za to sa aspekta jedinstvenosti rešenja diferencijalne inkluzije čiji je zakon trenja dat u formi viševrednosne funkcije može se naći u knjizi Lejna i Nijmejera [74, 2004].

Od modela koji spadaju u grupu statičkih modela trenja, pored navedenih važno je pomenuti i Armstrongov i Karnopov model. Prvi od njih pogodan je kod modela sa viskozним trenjem i dobro opisuje Stribekov efekat², v. Keli i Lamas [68, 1999], dok je Karnopov model pogodan za numeričke simulacije, v. Aih-Šelner i Firer [42, 1998], jer se u području malih relativnih brzina uzima da je relativna brzina jednaka nuli, čime se izbegava određivanje tačnog trenutka u kojem v_r postaje jednako nuli., v. Karnop [67, 1985], Ričard i Cutkoski [101, 2002]. Zbog prirode statičkog preslikavanja između relativne brzine klizanja i sile trenja, statički modeli su jednostavni i pogodni za primenu, ali upravo zbog toga oni nisu u stanju da opišu neke procese karakteristične za trenje, jer ono nema trenutni odziv na promenu brzine, već ima svoju unutrašnju dinamiku.

U problemima u kojima se zahteva visoka preciznost modela, mala pomeranja tokom faze priljublivanja ili stik faze, kao i druge pojave vezane za trenje, a pomenute na početku ovog odeljka, mogu biti od velikog značaja. Zato je u tim slučajevima pogodno koristiti neki od dinamičkih modela trenja, kao na primer Dalov,

² Stribekov efekat predstavlja pojavu smanjenja sile trenja sa povećanjem relativne brzine, u zoni malih brzina, v. [74, 2004].

Lu-Gre ili Elasto-plastični model. Kod njih se mikroskopske neravnine površina u kontaktu modeliraju pomoću elastičnih i viskoznih elemenata, a zavisnost sile trenja od relativne brzine izražena je diferencijalnim jednačinama, v. Dal [30, 1976], Keli i Lamas [68, 1999], Kanudas i dr. [23, 1995], Dupont i dr. [40, 2000], Dupont i dr. [41, 2002], Penestri [94, 2007], Garsia [55, 2008]. Oni mogu relativno dobro da opišu razne procese uključene u fenomen trenja, i samim tim su složeniji za upotrebu. Model trenja preporučeno je izabrati u skladu sa zahtevima konkretnih problema. Kako je predmet ove teze ulazak sistema u zonu zastoja - zaustavljanje ili priljubljanje - nakon seizmičkog dejstva, ovde će se koristiti model suvog trenja koji to obezbeđuje i to kao viševrednosna funkcija relativne brzine klizanja (1.13).

1.3 Modeli horizontalnog seizmičkog dejstva

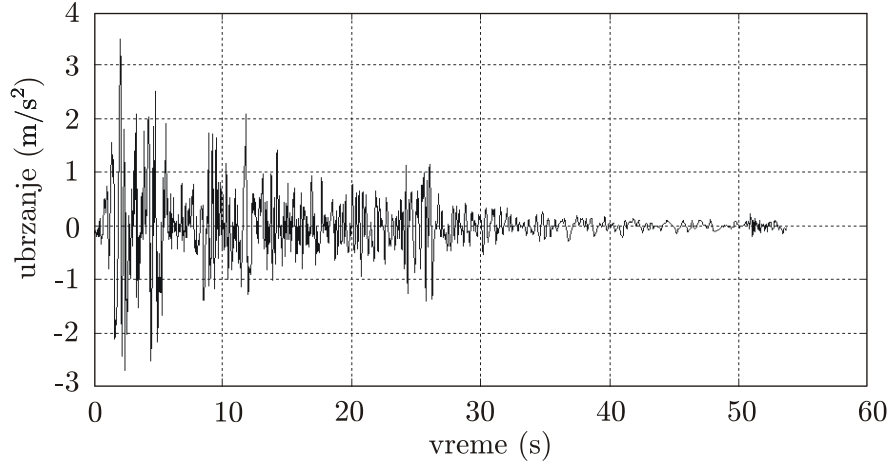
Zemljotres predstavlja prirodnu nepogodu sa kojom se čovečanstvo susreće najverovatnije još od svog postanka. Ta pojava odnela je nebrojeno mnogo ljudskih života, ali najčešće ne direktno, već izazivajući rušenje građevinskih objekata. Ljudi su vekovima sticali iskustvo posmatrajući posledice seizmičkih dejstava, i usavršavali način gradnje preduzimajući mere da umanje nepovoljne efekte ovih dejstava. Iako se malo znalo o mehanici i tehnologiji materijala, ljudi su nalazili način da poboljšaju svoje konstrukcije, a o tome svedoče brojne drevne građevine, kao što su antički stubovi ili kineski zid, koje vekovima opstaju iako su svedoci mnogobrojnih zemljotresa.

Razvoj nauke i tehnike doprineo je nastanku sistema za zaštitu konstrukcija od ovih razornih dejstava, tako da se počeci moderne seizmologije vezuju za kraj XIX veka. Od tada su razvijeni brojni sistemi pasivne i aktivne zaštite, ali povremeni snažni zemljotresi i njihove katastrofalne posledice konstantno demonstriraju svoju snagu i podstiču ljude na razvoj novih i unapređenje postojećih sistema zaštite. Savremeni trendovi u oblasti seizmičke zaštite čine ugradnju zona plastične deformacije na pogodnim mestima kako bi se sačuvali vitalni delovi konstrukcije.

Zemljotres predstavlja kretanje tla koje se povremeno dešava zbog iznenadnih pomaka u Zemljinoj kori. Prilikom projektovanja konstrukcija na područjima izloženim dejstvu zemljotresa, u proračun bi trebalo uključiti i seizmičko opterećenje koje konstrukcija treba da izdrži tokom perioda eksploatacije, a koje nije poznato unapred. Za procenu budućih seizmičkih dejstava, koristi se ono što je dostupno, a to su podaci o takvim dejstvima iz prošlosti, koji su za neka područja, za jače zemljotrese, poznati za period i od nekoliko hiljada godina, v. Aničić i dr. [6, 1990].

Od kraja XIX veka vibracije tla mere se odgovarajućim uređajima pa su i zabeleženi podaci precizniji. Iako se zemljotres ne ponavlja na potpuno isti način, na osnovu tih podataka, u vidu seizmograma i akcelerograma, mogu se doneti važni zaključci o fenomenološkim karakteristikama podrhtavanja tla, rekonstruisati zabeležena pomeranja ili ubrzanja, i odgovarajućim simulacijama ispitati ponašanje proučavane konstrukcije, v. Abdel-Gafar i Rud [1, 1982], Pekan i dr. [96, 1995], Čopra [27, 2001]. Za tu svrhu razvijeni su razni matematički modeli zemljotresa, pomoću kojih se, sa manjom ili većom tačnošću mogu modelirati vibracije tla izazvane zemljotresom, a koje predstavljaju strogo stohastički proces, nestacionaran

i u vremenskom i u frekventnom domenu. Na slici 1.3 prikazan je akcelerogram zemljotresa koji se 1940. godine dogodio u El Ćentru, zabeležen u pravcu sever-jug, a različiti modeli koji ga opisuju mogu se naći u objavljenim radovima, videti na primer rad Zanga i dr. [124, 2007].



Slika 1.3. Akcelerogram zemljotresa El Ćentru iz 1940. godine.

Postojeći modeli podrhtavanja tla usled dejstva zemljotresa, najčešće uključuju horizontalna pomeranja, neki opisuju vertikalna, dok postoje i trodimenzijski modeli kod kojih se razmatraju pomeranja u dva horizontalna i jednom vertikalnom pravcu. Pored toga oni mogu biti stacionarni i nestacionarni, kako u vremenskom, tako i u frekventnom domenu, v. Ših i Lin [114, 1982], Šakib i dr. [112, 1991], Miksat i dr. [85, 2010], Rezeian i Kuregian [100, 2011].

U radu Šakib i dr. [112, 1991] razmatran je model zemljotresa gde je ubrzanje tla³ u horizontalnom pravcu predstavljeno funkcijom

$$\ddot{u}(t) = \omega(t)\ddot{u}_{st}(t), \quad (1.14)$$

gde $\ddot{u}_{st}(t)$ označava stacionarno ubrzanje tla, koje se dobija sumiranjem frekventnih komponenti, dok $\omega(t)$ predstavlja obvojnju funkciju oblika

$$\omega(t) = \begin{cases} (t/t_1)^2, & 0 \leq t < t_1, \\ 1, & t_1 \leq t < t_2, \\ e^{-c(t-t_2)}, & t \geq t_2, \end{cases} \quad (1.15)$$

gde se odgovarajućim izborom vremenskih konstanti t_1 , c i t_2 utiče na trajanje pojedinih faza zemljotresa.

U radu Baturst i Hatami [18, 1998], korišćen je model horizontalnog seizmičkog dejstva oblika

³ Ako je $\theta = \theta(t)$, oznake $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ i $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ korišće se da označe prvi i drugi izvod date funkcije po vremenu.

$$\ddot{u}(t) = \sqrt{u_0 e^{\kappa t} t^{-\zeta}} \sin(\Omega t), \quad (1.16)$$

gde su u_0 , κ , ζ , konstantni koeficijenti, a Ω kružna frekvencija.

Analizom postojećih modela zemljotresa, kao i na osnovu raznih zabeleženih akcelerograma, jedan od uprošćenih modela koji bi mogao naći primenu u proučavanju seizmičkog odziva konstrukcija bio bi oblika

$$\ddot{u}(t) = U e^{-\kappa t} \sin(\Omega_1 t) \cos(\Omega_2 t), \quad (1.17)$$

pri čemu su U , κ , Ω_1 i Ω_2 konstante, jer je u stanju da opiše povećanje i smanjenje amplituda tokom vremena, što se može uočiti kod mnogih zabeleženih zemljotresa, a obvojnica eksponencijalnog tipa doprinosi da se odgovarajućim izborom U i κ može uticati na dužinu efektivnog seizmičkog dejstva.

Pri proučavanju seizmičkog odgovora konstrukcija, nije retka primena Rikerovih seizmičkih talasa, v. Riker [102, 1977], Adam i dr. [3, 2000].

Za potrebe proučavanja oscilacija konstrukcije u ovoj tezi odabraće se jedan od jednostavnijih modela zemljotresa, jer je njena problematika sama po sebi dovoljno složena, a nakon izvršenih razmatranja, izbor složenijeg seizmičkog modela ne bi trebao da predstavlja naročit problem.

2. Problem oscilacija konstrukcije u obliku stuba pri seizmičkom dejstvu - slučaj dva bloka

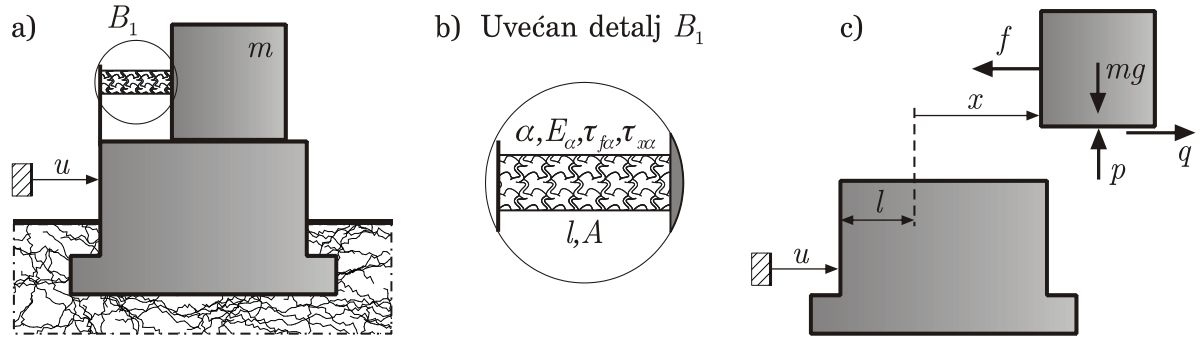
Svaka konstrukcija koja osciluje, povlači disipaciju energije usled unutrašnjih napreznja, plastičnih deformacija, trenja, a što je veća disipacija to su amplitude oscilovanja manje. U inženjerskim primenama koriste se različiti metodi za povećanje disipacije energije u sistemima, i oni pokazuju efikasnost kod smanjenja amplituda oscilovanja. Sistemi pasivne seizmičke zaštite odlikuju se jednostavnošću izrade i funkcionisanja. Oni ne zahtevaju dodatni izvor energije za svoj rad, već generišu disipativne sile kao posledicu pomeranja delova unutar konstrukcije.

2.1 Postavka problema

U ovom poglavlju proučava se sistem koji se sastoji od dva kruta bloka postavljena jedan na drugi, pri čemu donji predstavlja osnovu (temelj) konstrukcije koja se usled horizontalnog seizmičkog dejstva kreće zajedno sa podlogom (tлом) čineći prenosni deo kretanja gornjeg bloka. Blokovi mogu da klize jedan po drugom a među hrpavim kontaktnim površinama prisutno je suvo trenje. Osim ovog načina disipacije energije, u sistemu postoji i viskoelastični element koji se deformiše prilikom relativnog kretanja blokova i na taj način doprinosi zaštiti konstrukcije, apsorbujući deo energije koja se unese u sistem pod dejstvom seizmičkih poremećaja. Opisani sistem prikazan je na slici 2.1 i da bi se videlo kakav je njegov odziv na seizmičku pobudu koja se manifestuje kroz kretanje donjeg bloka, neophodno je odrediti kretanje gornjeg bloka. Kako je kretanje tla, a samim tim i donjeg bloka zadato, potrebno je razmotriti kretanje gornjeg bloka mase m , pa posmatrani sistem ima jedan stepen slobode kretanja koji treba odrediti. Na ovom mestu uvode se sledeće pretpostavke:

1. u početnom trenutku sistem se nalazi u stanju mirovanja,
2. blokovi su predstavljeni krutim telima,
3. raspored brzina svih tačaka je uniforman za svaki blok,
4. ne dolazi do razdvajanja blokova tokom kretanja,
5. element za prigušenje oscilacija predstavljen je viskoelastičnim štapom čija masa je zanemarena,
6. deformacija viskoelastičnog štapa je uniaksijalna, izotermna i afina¹.

¹ Pretpostavku o afinoj deformaciji viskoelastičnog štapa, gde je deformacija proporcionalna rastojanju od kraja štapa, moguće je isključiti pa posmatrati talase u viskoelastičnom štapu, kao u radovima Atanacković i dr. [12, 2010] i Atanacković i dr. [13, 2011].



Slika 2.1. a) Konstrukcija u obliku stuba koja se sastoji od donjeg bloka (osnova) i gornjeg bloka, b) Uvećan detalj B_1 , c) Dekomponovani sistem.

Pomeranje osnove opisano je koordinatom u merenom u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, a posredstvom sile trenja i sile u viskoelastičnom štapu to kretanje se prenosi na gornji blok. Slika 2.1.b) predstavlja uvećan detalj B_1 na kojem se vidi viskoelastični štap dužine l , površine poprečnog preseka A , gde su α , E_α , $\tau_{f\alpha}$ i $\tau_{x\alpha}$ veličine koje opisuju viskoelastična svojstva materijala od kojeg je štap napravljen i one će biti objašnjene kasnije. Na slici 2.1.c) prikazan je dekomponovani sistem gde koordinata x označava relativno pomeranje bloka, f je sila u viskoelastičnom štapu, g je gravitaciono ubrzanje Zemlje, $p = mg$ predstavlja normalnu kontaktnu silu, a q silu trenja, koja se suprotstavlja relativnom kretanju blokova. Sila f data je kao $f = \sigma A$ gde je σ normalni napon u viskoelastičnom štapu, dok je $x = \varepsilon l$ relativno pomeranje bloka izraženo kroz dilataciju štapa ε .

U ovoj tezi koristi se model zemljotresa po ugledu na (1.14), a zbog jednostavnosti je uzeta samo jedna frekventna komponenta sinusnog oblika, kao i eksponencijalna obvojna funkcija, tako da je pretpostavljeno ubrzanje tla

$$\ddot{u} = e^{-\kappa t} [-u_0 \Omega^2 \sin(\Omega t)], \quad (2.1)$$

gde su κ , u_0 i Ω , (a , $u_0 > 0$), parametri čijim izborom se utiče na oblik i trajanje modeliranog seizmičkog poremećaja, a njihove dimenzije su: $[\text{vreme}]^{-1}$, $[\text{dužina}]$ i $[\text{vreme}]^{-1}$, respektivno.

Primenom osnovne aksiome dinamike i principa određenosti Njutn Laplase na proučavani sistem dobija se sledeća diferencijalna jednačina kretanja bloka mase m :

$$m(\ddot{x} + \ddot{u}) = -f + q \quad (2.2)$$

koju treba rešavati uz početne uslove:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad (2.3)$$

Da bi postavljeni Košijev problem mogao da se reši neophodno je definisati strukturu kontaktnih sila f i q . Iz prethodno pomenutih razloga, za konstitutivni model

viskoelastičnog tela odabraćé se modifikovani Zenerov model, koji sadrži frakcione izvode napona i deformacije, a relacija između sile u štapu i relativnog pomeranja data je sledećim izrazom:

$$f + \tau_{f\alpha} D^\alpha f = \frac{E_\alpha A}{l} (x + \tau_{x\alpha} D^\alpha x), \quad (2.4)$$

gde je α realan broj ($0 < \alpha < 1$), E_α modul elastičnosti, $\tau_{f\alpha}$ i $\tau_{x\alpha}$ su konstante relaksacije koje imaju dimenziju [vreme] $^\alpha$. U relaciji (2.4) su prisutni izvodi necelog reda sile u viskoelastičnom štapu i relativnog pomeranja kraja štapa, pri čemu se koristi Riman-Ljuvilova definicija (1.11). Iz te definicije jasno je da sila u viskoelastičnom štapu u svakom trenutku zavisi od istorije deformacije posmatrano od početnog trenutka $t = 0$. Važno je napomenuti da postoje ograničenja na parametre prikazanog modela koja slede iz Klauzijus-Dijemove nejednakosti, v. Atanacković [7, 2002], data u obliku sledećih nejednakosti:

$$E_\alpha > 0, \quad \tau_{f\alpha} > 0, \quad \tau_{x\alpha} > \tau_{f\alpha}. \quad (2.5)$$

Kod klasičnog Zenerovog modela je $\alpha = 1$, i u tom slučaju konstante τ_{f1} i τ_{x1} predstavljaju vremena relaksacije, a takva konstitutivna jednačina ne obezbeđuje uvek dobro slaganje sa eksperimentalnim rezultatima pri ispitivanju polimernih i elastomernih materijala. Kod modifikovanog Zenerovog modela umesto prvog izvoda koristi se neceli izvod ($0 < \alpha < 1$), tako da se lokalni operator zamenjuje nelokalnim čime se istorija deformacije uzima u razmatranje. Sa povećanjem reda izvoda α i razlike $\Delta\tau_\alpha = \tau_{x\alpha} - \tau_{f\alpha}$ raste i disipacija energije, v. Spasić i Haralambakis [116, 2002], tako da je za $\alpha = 1$ disipacija najveća. Pošto se realni materijali bolje modeliraju sa $\alpha < 1$, izborom $\alpha = 1$ moguće je preceniti količinu apsorbovane energije tako da višak energije, koji izborom nepogodnog modela zapravo i nije apsorbovan, ostaje u sistemu i može prouzrokovati oštećenje konstrukcije. Za isto α izborom materijala sa većom razlikom $\Delta\tau_\alpha$ obezbeđuje se veća apsorbovana energija u slučaju seizmičkog dejstva što povećava verovatnoću opstanka date konstrukcije. Dakle viskoelastični element odabran kao standardno frakciono viskoelastično telo obezbeđuje realnu procenu disipacije energije v. Žigić [126, 2008]. Međutim samo taj model ne dovodi do potpunog umirivanja konstrukcije po prestanku seizmičke pobude. To potpuno zaustavljanje može obezbediti suvo trenje u kontaktnoj površini između dva bloka i to je centralna tema ovog rada.

Disipacija energije usled prisustva suvog trenja u sistemu može se uzeti u razmatranje korišćenjem nekog od postojećih modela trenja. U prvoj glavi videlo se da danas postoje brojni modeli za matematičko opisivanje ovog složenog fenomena i da se oni uglavnom razlikuju u načinu modeliranja sile trenja u zoni oko stanja mirovanja. Ovde će se koristiti Kulonov model zbog svoje jednostavnosti i univerzalnosti, jer uzima u obzir osnovna svojstva suvog trenja, a pri tome daje zadovoljavajuće rezultate. Kod ovog modela prelazak sistema iz stanja mirovanja u stanje relativnog kretanja i obratno iz faze klizanja u stanje mirovanja sa netrivialnom vrednošću sile trenja, na šta se obično referiše kao na fazu priljublivanja ili „stik

fazu", v. Lejn i Nijmejer [74, 2004], odvija se trenutno, kao posledica neglatkog modela. Sila trenja u zavisnosti od relativne brzine klizanja \dot{x} se modelira kao neglatka viševrednosna funkcija tj. multifunkcija ili funkcija koja uzima vrednosti na skupu jer je to funkcija skoro svuda, tj. funkcija za $\dot{x} \geq 0$, dok za $\dot{x} = 0$ može imati bilo koju vrednost iz zatvorenog intervala $[-q_d, q_d]$, gde je $q_d = \mu mg$ granična vrednost sile trenja, μ je koeficijent trenja uz napomenu da ne treba praviti razliku između statičkog i dinamičkog koeficijenta suvog trenja klizanja, v. Fajfer i Gloker [97, 1995]. Na osnovu izloženog, sila trenja q predstavljena je kao:

$$q \in \begin{cases} -\mu mg, & \dot{x} > 0, \\ \mu mg [-1, 1], & \dot{x} = 0, \\ \mu mg, & \dot{x} < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

ili drugačije

$$q \in -\mu mg \cdot Sgn(\dot{x}), \quad (2.7)$$

gde je umesto klasične funkcije znaka $sgn(\dot{x})$ korišćena neglatka viševrednosna funkcija $Sgn(\dot{x})$, tj.

$$Sgn(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0, \\ [-1, 1], & \dot{x} = 0, \\ -1, & \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Napominje se da za vrednosti $\dot{x} = 0$, v. Lejn i Nijmejer [74, 2004], Kunce [73, 2000], [56, 2001], Grahovac i dr. [60, 2011], tj. kada ne postoji relativno kretanje gornjeg bloka u odnosu na osnovu, sila trenja q može imati bilo koju vrednost između $-\mu mg$ i μmg . U slučaju kada blok mase m vrši relativno kretanje na desnu stranu, tj. za $\dot{x} > 0$, sila trenja je $q = -\mu mg$, a kada vrši relativno kretanje na levu stranu, za $\dot{x} < 0$, sila trenja iznosi $q = \mu mg$. Tokom seizmičkog dejstva osnova se kreće zajedno sa tlom, dok kretanje gornjeg bloka i sile koje se na njega prenose zavise od više uticajnih faktora, kao što su karakteristike same pobude, viskoelastična svojstva elementa za prigušenje, koeficijent trenja i masa bloka. Jedna od osnovnih ideja o izolaciji konstrukcija od zemljotresa predstavlja njihovo postavljanje na podlogu sa ograničenim koeficijentom trenja kako bi seizmičke sile imale ograničenu vrednost, v. Aničić i dr. [6, 1990].

Sa usvojenim modelom disipacije, deo dovedene energije koji za to predviđene oblasti konstrukcije apsorbuju tokom vremena, može se izračunati na sledeći način:

$$\Delta(t) = \int_0^t (f\dot{x} + |q\dot{x}|)dt. \quad (2.9)$$

gde integral prvog sabirka predstavlja rad sile u viskoelastičnom štapu, Δ_{VE} , a integral drugog je rad sile trenja, Δ_{TR} .

Ukoliko koeficijent trenja ima manju vrednost, time je manja i granična vrednost sile trenja pa će gornji blok lakše ući u fazu klizanja po osnovi, rasipajući na taj način deo energije koja se dovodi seizmičkim dejstvom. Sila trenja će u tom slučaju imati ulogu otporne sile koja je strogo disipativnog karaktera, a takođe će i prigušivač dodatno apsorbovati deo energije usled svog deformisanja. Ipak, pri manjim vrednostima koeficijenta trenja manja je i disipacija energije, dok njegovim većim vrednostima odgovara veća disipacija, kao i veće sile koje deluju na gornji deo konstrukcije. Zbog toga je potrebno napraviti povoljan kompromis između željenog nivoa seizmičkih sila i stepena prigušenja koji se želi postići, odnosno maksimalnog horizontalnog pomeranja koje se sme dozvoliti, v. Aničić i dr. [6, 1990].

U okviru pripreme za rešavanje, uvešće se sledeće bezdimenzijske veličine:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t\sqrt{\frac{E_\alpha A}{ml}}, & \bar{x} &= \frac{x E_\alpha A}{mgl}, & \bar{f} &= \frac{f}{mg}, & \bar{q} &= \frac{q}{mg}, \\ \bar{\kappa} &= \kappa\sqrt{\frac{ml}{E_\alpha A}}, & \bar{\Omega} &= \Omega\sqrt{\frac{ml}{E_\alpha A}}, & \bar{u}_0 &= \frac{u_0 E_\alpha A}{mgl}, \\ \bar{\tau}_{f\alpha} &= \tau_{f\alpha} \left(\frac{E_\alpha A}{ml}\right)^{\alpha/2}, & \bar{\tau}_{x\alpha} &= \tau_{x\alpha} \left(\frac{E_\alpha A}{ml}\right)^{\alpha/2}, & \bar{U} &= \bar{u}_0 \bar{\Omega}^2,\end{aligned}\tag{2.10}$$

pomoću kojih će se diferencijalne jednačine zajedno sa odgovarajućim početnim uslovima i ograničenjima prikazati u bezdimenzijskom obliku. Izostavljanjem crtice u označavanju bezdimenzijskih veličina radi jednostavnijeg zapisa, tj. smenom simbola: $\bar{t} \rightarrow t$, $\bar{x} \rightarrow x$, $\bar{f} \rightarrow f$, $\bar{q} \rightarrow q$, $\bar{\kappa} \rightarrow \kappa$, $\bar{\Omega} \rightarrow \Omega$, $\bar{U} \rightarrow U$, $\bar{\tau}_{f\gamma} \rightarrow \tau_{f\gamma}$, $\bar{\tau}_{x\gamma} \rightarrow \tau_{x\gamma}$, problem oscilovanja opisane konstrukcije predstavljen je diferencijalnom jednačinom kretanja u bezdimenzijskoj formi:

$$\ddot{x} = U e^{-\kappa t} \sin(\Omega t) - f + q,\tag{2.11}$$

pri čemu je bezdimenzijska sila trenja:

$$q \in -\mu Sgn(\dot{x}),\tag{2.12}$$

dok je konstitutivna jednačina oblika:

$$f + \tau_{f\alpha} D^\alpha f = x + \tau_{x\alpha} D^\alpha x.\tag{2.13}$$

Da bi se odredilo kretanje gornjeg bloka neophodno je rešiti sistem koji se sastoji od diferencijalne jednačine drugog reda (2.11) sa neglatkom viševrednosnom funkcijom (2.12) i diferencijalne jednačine realnog reda (2.13), kojima odgovaraju bezdimenzijski početni uslovi koji su istog oblika kao (2.3), i ograničenja nametnuta na koeficijente konstitutivnog modela u bezdimenzijskoj formi koja su istog oblika kao (2.5)_{2,3}.

Treba primetiti da diferencijalna jednačina (2.11) zbog Kulonovog modela suvog trenja ima prekidnu desnu stranu pa se ovaj problem svrstava u domen kretanja neglatkih mehaničkih sistema. Napominje se da neglatki modeli opisuju mnoge praktične probleme u nauci i inženjerstvu. Ove probleme karakteriše prisustvo različitih faza kretanja gde u svakoj od njih važi odgovarajući dinamički model. Zbog toga se standardni koncepti teorije dinamičkih sistema najčešće ne mogu primeniti u ovim slučajevima, v. Kunce [73, 2000], Tarner [122, 2001]. Prisustvo neglatke viševrednosne funkcije usložnjava matematičku analizu problema ali obezbeđuje fizički korektan pristup u slučaju da se sistem može zaustaviti u zoni zastoja u konačnom vremenu. Ni numerička analiza problema nije jednostavna. Jedan od problema koji se ovde javlja je utvrđivanje trenutka u kojem dolazi do prelaska sa jednog dinamičkog modela na drugi. Sa aspekta procene disipacije energije tačnost određivanja tog trenutka je izuzetno važna. Ni problem utroška vremena za njegovo određivanje nije trivijalan.

U specijalnom slučaju kada je f funkcija celobrojnih izvoda pomeranja x , konveksifikacijom prekidne desne strane pomoću neglatke viševrednosne funkcije $Sgn(\dot{x})$, sistem jednačina (2.11) - (2.13) se može predstaviti u formi klasične diferencijalne inkluzije ili obične diferencijalne jednačine tipa Filipova, v. Filipov [50, 1964], Markes [84, 1993], Fajfer i Gloker [97, 1996], Kunce [73, 2000], Gloker [56, 2001], Smirnov [115, 2002], Lejn i Nijmejer [74, 2004], Fidlin [49, 2006], Akari i Broljato [2, 2008]. Prekid o kome je reč je na nivou ubrzanja dok su x i \dot{x} neprekidne funkcije. Međutim, u opštem slučaju konstitutivna jednačina (2.13) spada u oblast frakcionog računa jer su u njoj prisutni neceli izvodi sile f i relativnog pomeranja x kao nelokalni operatori, tako da sistem (2.11) - (2.13) odgovara viševrednosnoj diferencijalnoj jednačini proizvoljnog realnog reda. Ovakve jednačine zahtevaju paralelnu studiju sa problemima Filipova za diferencijalne jednačine sa celobrojnim izvodima v. El-Sayed i Ibrahim [44, 2001], Ouahab [92, 2008], Černea [25, 2010], Čikon i Salem [28, 2010], Danca [31, 2010]. Istovremeno prisustvo i disipacije frakcionog tipa i suvog trenja u sistemu, čime se neglatke viševrednosne funkcije u jednačinama modela kombinuju sa frakcionim izvodima, postavlja nove zahteve u pogledu i matematičke i numeričke analize problema. Jedan takav problem sa konstitutivnom jednačinom Zenerovog tipa prvi put je postavljen u radu Grahovac i dr. [60, 2011], gde je sa istim oblikom disipacije energije analiziran problem udara tela u nepokretni zid. Metodologija iz tog rada će se primeniti na rešavanje sistema (2.11) - (2.13) sa (2.3), i (2.5)_{2,3}. Pri tome se napominje da vreme trajanja procesa oscilovanja više nije veoma kratko kao u slučaju sudara. Pored toga što je interval integracije znatno duži, moguć je i veći broj promena smera kretanja tako da je primena numeričkih metoda za rešavanje frakcionih diferencijalnih jednačina u kombinaciji sa upravljanjem prekidnim modelima različitih faza kretanja znatno složenija. Pre nego što se pristupi numeričkom rešavanju problema sistem (2.11) - (2.13) sa (2.3), i (2.5)_{2,3} će se primenom metoda Laplasovih transformacija prevesti u oblik pogodan za primenu argumenata matematičke analize kojima se može dokazati egzistencija rešenja.

2.2 O egzistenciji rešenja problema

Metod Laplasove transformacije predstavlja moćan alat u polju primenjene matematike, a klasa funkcija na koje se on može primeniti uključuje one koje su zastupljene u mnogim fizičkim problemima, v. Tomson [120, 1960], Deč [39, 1961]. Primenom ove transformacije na konstitutivnu jednačinu (2.13) dobija se veza između kontaktne sile u viskoelastičnom štapu f i relativnog pomeranja x u prostoru slika, u sledećem obliku:

$$F = \frac{1 + \tau_{x\alpha} s^\alpha}{1 + \tau_{f\alpha} s^\alpha} X, \quad (2.14)$$

gde je s kompleksna promenljiva, $X = X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt$, i $F = F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ predstavljaju Laplasove transformacije funkcija $x(t)$ i $f(t)$ respektivno, dok je za Laplasovu transformaciju izvoda necelog stepena korišćen standardni izraz:

$$\mathcal{L}[y(t)] = s^\alpha Y(s) - \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right] \Big|_{t=0},$$

pri čemu izraz u zagradi iščezava ako je $y(t)$ ograničeno kada $t \rightarrow 0$, v. Oldham i Spanier [90, 2010]. Inverzijom (2.14) dobija se izraz za silu f u funkciji relativnog pomeranja x u prostoru originala u obliku

$$f(t) = \frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{f\alpha}} x(t) + \frac{1}{\tau_{f\alpha}} \left(1 - \frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{f\alpha}}\right) \int_0^t e_{\alpha,\alpha} \left(t - \tau, \frac{1}{\tau_{f\alpha}}\right) x(\tau) d\tau, \quad (2.15)$$

gde oznaka $e_{\alpha,\beta}(t, \lambda) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)$ stoji za generalisanu Mittag-Lefflerovu funkciju, v. Gorenflo i Mainardi [58, 1997], Mainardi i Gorenflo [82, 2000], Kilbas i dr. [69, 2006], str. 45 i gde je $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$, $\alpha, \beta > 0$, $z \in \mathbb{C}$. Napominje se da Mittag-Lefflerova funkcija predstavlja uopštenje eksponencijalne funkcije. Ta specijalna, strogo monotona funkcija je od fundamentalnog značaja u teoriji diferencijalnih jednačina proizvoljnog realnog reda, pa se na nju nailazi u brojnim fizičkim primenama².

Zamenom (2.15) u (2.11) postavljeni problem prinudnih oscilacija (2.11) - (2.13) sa (2.3), prelazi u Košijev problem za diferencijalno-integralnu inkluziju

² U cilju povećanja tačnosti i stabilnosti numeričke procedure pri izračunavanju generalisane Mittag-Lefflerove funkcije, osim prikazane definicije razvijene su i druge, kao na primer integralna i asimptotska, a svaka od njih pogodna je za određenu oblast kompleksne z-ravni, v. Gorenflo i dr. [57, 2002], Hilfer i Seibold [63, 2006], Seibold i Hilfer [111, 2008].

$$\ddot{x} \in -\frac{1}{\tau_{f\alpha}} \left(1 - \frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{f\alpha}}\right) \int_0^t e_{\alpha,\alpha} \left(t - \tau, \frac{1}{\tau_{f\alpha}}\right) x(\tau) d\tau + U e^{-\kappa t} \sin(\Omega t) - \frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{f\alpha}} x(t) - \mu Sgn(\dot{x}), \quad \text{sk. sv. na } [0, T_p], \quad (2.16)$$

sa početnim uslovima koji su istog oblika kao (2.3)_{1,2}, a koji treba rešavati uz ograničenja (2.5)_{2,3}, i gde važi $0 < T_p < \infty$. Dokaz egzistencije rešenja za Košijev problem (2.16) u prostoru apsolutno neprekidnih funkcija na $[0, T_p]$ se može naći u monografiji Agarval i dr. [5, 2001], v. Teoremu 2.1, str. 270.

U analizi problema pošlo se od pretpostavke da sistem započinje kretanje iz mira, tj. iz stanja $v(0) = \dot{x}(0) = 0$. Intuitivno je jasno da će sistem započeti kretanje udesno tek kada prenosna sila inercije postane veća od granične sile trenja tj. kada je

$$\ddot{x}(t_0) = U e^{-\kappa t_0} \sin(\Omega t_0) - \mu > 0,$$

pri čemu je $x(t) \equiv 0$ i $\dot{x}(t) \equiv 0$ za $0 < t < t_0$. Kako u sistemu postoji disipacija energije delom i zbog prisustva suvog trenja logično je postaviti pitanje da li tokom kretanja, a posle izvesnog vremena sistem može ući u zonu zastoja, tj. da li za neko T , $0 < T < \infty$ može da bude $v(T) = 0$, pri čemu će relativna brzina bloka $v(t) = \dot{x}(t)$, još izvesno vreme T_1 nakon $t = T$ zadržati vrednost 0. Opet je intuitivno jasno da će ulaskom sistema u zonu zastoja u viskoelastičnom štapu na neki način započeti proces relaksacije napona. Taj proces se ovde ne razmatra jer se u problemu zanemaruje masa viskoelastičnog štapa, mada bi proširenje problema u tom pravcu bilo moguće, v. Atanackovic i dr. [12, 2010], [13, 2010]. Saglasno usvojenom modelu za $T < t < T + T_1$ važno bi $x(t) = x_T = const.$, $\dot{x}(t) = 0$, pri čemu bi se sila f u tom intervalu menjala po zakonu (2.15) i opadala bi zbog monotonosti Mittag-Lefflerove funkcije, v. Dankuc i dr. [32, 2010]. Izborom neglatke viševrednosne funkcije za model trenja dozvoljava se da u tom intervalu vremena prenosna sila inercije i sila u viskoelastičnom štapu u zbiru budu manje od granične sile trenja tako da je u intervalu vremena $T < t < T + T_1$ obezbeđen uslov $\ddot{x}(t) = 0$ koji se ostvaruje viševrednosnom promenom sile trenja. Ako prinudna sila opet postane dovoljno velika da obezbedi uslov $\ddot{x}(T + T_1) \neq 0$ kretanje se može nastaviti do ponovnog ulaska u zonu zastoja. Ako je prestalo dejstvo prinudne sile sistem može ostati u zoni zastoja.

Interesantno je da se može govoriti o periodičnosti rešenja sistema (2.11) - (2.13) sa (2.3)₂, i (2.5)_{2,3} u smislu ulaska u zonu zastoja $v(T) = \dot{x}(T) = 0$. U tu svrhu, može se pokazati da iz izraza (2.14) sledi

$$F = \left[\frac{1}{s} + \left(\frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{f\alpha}} - 1 \right) \frac{s^{\alpha-1}}{\frac{1}{\tau_{f\alpha}} + s^\alpha} \right] sX$$

čijom inverzijom, v. Mainardi i Gorenflo [82, 2000], se dobija veza između sile u viskoelastičnom štapu f i brzine kraja viskoelastičnog štapa v

$$f(t) = \int_0^t \left[1 + \left(\frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{f\alpha}} - 1 \right) \cdot e_\alpha \left(t - \tau, \frac{1}{\tau_{f\alpha}} \right) \right] v(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

pri čemu je $e_\alpha(t, \lambda)$ Mittag-Lefflerova funkcija i predstavlja specijalni slučaj generalisane Mittag-Lefflerove funkcije kada je $\beta = 1$. Uvrštavanjem (2.17) u (2.11) dobija se diferencijalno-integralna inkluzija

$$\dot{v} \in - \int_0^t \left[1 + \left(\frac{\tau_{x\alpha}}{\tau_{f\alpha}} - 1 \right) \cdot e_\alpha(t - \tau, \frac{1}{\tau_{f\alpha}}) \right] v(\tau) d\tau + U e^{-\kappa t} \sin(\Omega t) - \mu Sgn(v),$$

sk. sv. na $[0, T]$,

(2.18)

koju treba posmatrati uz uslov periodičnosti

$$v(0) = v(T). \tag{2.18a}$$

Dokaz egzistencije rešenja za problem (2.18), (2.18a) u prostoru apsolutno neprekidnih funkcija na $[0, T]$ se može naći u monografiji Agarval i dr. [5, 2001], v. Teoremu 11.3.4, str. 277. Posle izvesnog vremena provedenog u zoni zastoja sistem opet može započeti kretanje sa analognim ciklusom.

Sada je neophodna priprema urađena pa se može preći na numeričku analizu problema.

2.3 Numerički metod rešavanja problema

O značaju i primeni diferencijalnih jednačina realnog reda u fizici, inženjerstvu, teoriji upravljanja, biologiji i drugim disciplinama svedoči sve veći broj objavljenih radova i knjiga koje se bave tom problematikom, kao na primer: Sabatier i dr. [108, 2007], Rozikin i Šitikova [106, 2010], Monje i dr. [79, 2010], Ortigueira [91, 2011]. Mnoge diferencijalne jednačine koje uključuju frakcione izvode i opisuju realne probleme nemaju analitičko rešenje pa su zbog toga razvijeni brojni numerički metodi za njihovo rešavanje, a neki od njih mogu se videti u Oldham i Spanier [90, 1974], Diethelm [35, 1997], Podlubni [98, 1999], Diethelm i Ford [36, 2001], Diethelm i dr. [37, 2005], Džafari i Daftardar-Gei [66, 2006], Odibat i Momani [89, 2008], Atici i Šengul [14, 2010], Diethelm [38, 2009], Baleanu i dr. [17, 2011].

Za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina drugog i proizvoljnog realnog reda (2.11) i (2.13) koje uz (2.3) i (2.5)_{2,3} modeliraju postavljeni problem, koristiće se jedan od postojećih numeričkih metoda. Treba imati u vidu da se ovde osim prisustva frakcionih izvoda radi o neglatkom sistemu, koji zahteva primenu različitih dinamičkih modela u različitim fazama kretanja. Zbog pojednostavljenja rešavanja ovako kompleksnog problema, od ponuđenih numeričkih postupaka frakcionog računa odabrace se numerička šema koja sadrži Grunvald-Letnikovljevu definiciju frakcionih izvoda, koja je za probleme u fizičkim i inženjerskim primenama ekvivalentna Riman-Ljuvilovoj definiciji, a odlikuje se efikasnošću i jednostavnošću, v. Podlubni [98, 1999], str. 199. Neglatki karakter proučavanog sistema usled prisustva neglatke viševrednosne funkcije $Sgn(\cdot)$ kojom je modelirano suvo trenje, dovodi do problema određivanja trenutka t^* u kojem dolazi do promene iz jedne faze kretanja u drugu, tj. iz jednog smera u suprotan, koji će se rešiti proverom određenih uslova nakon svakog koraka integracije i upotrebom slek promenljive, videti rad Tarnera

[122, 2001]. Reč slek ovde stoji za monotono-opadajuću, sa nulom ograničenu nezavisno promenljivu, sa kojom se prošireni sistem stanja integrali da bi se u jednoj iteraciji odredio trenutak kada se ostvaruje jednakost u unilateralmom ograničenju. Ovde neće biti jedini zadatak ugraditi odabrani numerički algoritam za izračunavanje necelih izvoda i primeniti metod predložen u Tarnerovom radu, već će se kao rezultat implementacije postupka rešavanja viševrednosnih diferencijalnih jednačina proizvoljnog realnog reda kojim se povezuju nelokalni izvodi sa neglatkim funkcijama javiti dodatne teškoće prilikom izračunavanja, što će biti navedeno i diskutovano kasnije.

Započinje se diskretizacijom vremenskog domena tj. uvođenjem koraka integracije h što dovodi do diskretnih trenutaka $t_n = n \cdot h$, ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Za aproksimaciju prvog i drugog izvoda koriste se standardni izrazi

$$\dot{z} = \frac{z_{n+1} - z_n}{h}, \quad \ddot{z} = \frac{z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}}{h^2}, \quad (2.19)$$

dok je Grunvald-Letnikovljeva definicija frakcionog izvoda

$$D^\alpha z = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} z_{n-j}, \quad (2.20)$$

v. Podlubni [98, 1999], str. 223, gde se koeficijenti $\omega_j^{(\alpha)}$ ($j = 0, 1, \dots, n$) računaju rekurzivnom formulom

$$\omega_0^{(\alpha)} = 1, \quad \omega_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\psi + 1}{j}\right) \omega_{j-1}^{(\alpha)}, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.21)$$

Iz početnih uslova koji imaju isti oblik kao izraz (2.3)_{1,3} sledi da je $x_0 = 0$, $f_0 = 0$, dok je iz (2.3)₂ i (2.19)₁ $(x_1 - x_0)/h = 0$, pa sledi $x_1 = 0$. Zamenom (2.20) u konstitutivnu jednačinu (2.13) dobija se

$$f_n + \tau_{f\alpha} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} f_{n-j} = x_n + \tau_{x\alpha} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} x_{n-j}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

odakle se nakon elementarnih transformacija dobija algoritam za izračunavanje sile u štapu

$$f_n = \frac{1}{1 + \tau_{f\alpha} h^{-\alpha}} \left\{ x_n (1 + \tau_{x\alpha} h^{-\alpha}) + h^{-\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} (\tau_{x\alpha} x_{n-j} - \tau_{f\alpha} f_{n-j}) \right\}. \quad (2.22)$$

Uvrštavanjem (2.19)₂ u diferencijalnu jednačinu kretanja sistema (2.11) i uzimajući u obzir da sila trenja menja smer u zavisnosti od smera relativnog kretanja gornjeg bloka (2.12), za $\dot{x} > 0$ i $q = -\mu$ dobija se

$$\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2} = Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - f_n - \mu,$$

odakle sledi algoritam za izračunavanje relativnog pomeranja

$$x_{n+1} = h^2 [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - f_n - \mu] + 2x_n - x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.23)$$

koji zajedno sa (2.22) i odgovarajućim početnim uslovima predstavlja dinamički model za izračunavanje numeričkog rešenja prilikom relativnog kretanja bloka na desnu stranu i nazvaće se model „Ad”. Naravno sve to uz napomenu da kretanje započinje tek kada prenosna sila inercije postane veća od granične sile trenja.

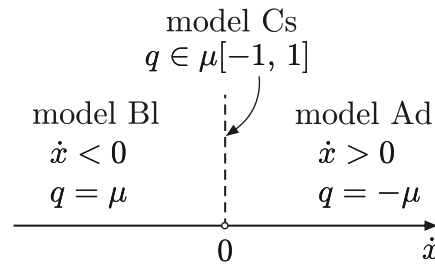
Za slučaj relativnog kretanja na levu stranu, tj. za $\dot{x} < 0$ i $q = \mu$, sledi

$$x_{n+1} = h^2 [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - f_n + \mu] + 2x_n - x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.24)$$

pa se dinamički model u tom slučaju razlikuje od prethodnog jer umesto izraza (2.23) sadrži (2.24), i zvaće se model „Bl”.

U fazi priljublivanja - stik fazi - gde je $\dot{x} = 0$ na nekom intervalu vremena, a sila trenja q može da se menja u intervalu $\mu[-1, 1]$, relativno pomeranje x ostaje konstantno, a u dinamički model uključen je samo izraz (2.22), koji će dati vrednost sile u viskoelastičnom štapu tokom stik faze i predstavljaće model „Cs”. Ovde se, kao što je već rečeno, očekuje opadanje vrednosti sile f , jer taj slučaj podseća na eksperimente relaksacije napona, koja je karakteristična za viskoelastične materijale izložene konstantnoj deformaciji. U ovoj fazi prinudna sila može a ne mora da izazove ponovno kretanje. Dakle sa ovde uvedenim nazivima dinamičkih modela Ad označava slučaj relativnog kretanja udesno, tj. $\dot{x} > 0$, Bl stoji za relativno kretanje ulevo, $\dot{x} < 0$, dok Cs predstavlja stik fazu, $\dot{x} = 0$.

U zavisnosti od parametara seizmičkog dejstva i parametara sistema, nakon što relativna brzina \dot{x} postane nula može nastupiti jedno od moguća tri stanja, $\dot{x} > 0$, $\dot{x} = 0$, ili $\dot{x} < 0$, gde se u svakom od njih koristi odgovarajući dinamički model, što je prikazano na slici 2.2.



Slika 2.2. Dinamički modeli neglatkog sistema u zavisnosti od relativne brzine bloka.

Kada kretanje započne po jednom modelu, nakon izvesnog vremena moguće je da se steknu određeni uslovi za promenu stanja sistema, nakon čega bi on započeo

fazu kretanja (ili relativnog mirovanja) po nekom drugom modelu. Ovde se radi o složenom kretanju u redoslednom smislu, ali kod kojeg sila u viskoelastičnom štapu koja ograničava kretanje bloka u svakom trenutku zavisi od čitave istorije deformacije mereno od početnog trenutka $t = 0$. Taj problem predstavlja specifičnu teškoću izabranog modela. Naime, nije jednostavno uključiti istoriju deformacije iz prethodne faze kretanja posle prelaza na model koji odgovara narednoj fazi.

Može se primetiti da je seizmičko dejstvo u diferencijalnoj jednačini relativnog kretanja (2.11) predstavljeno prvim članom na desnoj strani jednačine koji odgovara prenosnoj sili inercije i koji ima ulogu prinudne sile. Zbog svoje neprekidnosti i vrednosti nula za $t = 0$, kao i pretpostavke da se sistem u početnom trenutku nalazi u stanju mirovanja, gornji blok neće započeti relativno kretanje sve dok član koji predstavlja prinudnu silu, tokom vremena ne postane veći od granične sile trenja. Tu se sreće sa dualnom prirodom sile trenja, v. Spasić [118, 2011]. Naime, sila trenja je na početku reakcija veze koja sprečava kretanje, tj. klizanje među kontaktnim hrapavim površinama između gornjeg i donjeg bloka, da bi zatim kada to klizanje počne, sila trenja dobila ulogu zadate otporne sile, suprotstavljajući se ovom kretanju i sa težnjom da se sistem ponovo nađe u stanju relativne ravnoteže.

Imajući u vidu da pobuda sadrži sinusnu funkciju, koja nakon $t = 0$ počinje da raste, i ukoliko pređe graničnu vrednost sile trenja, započće relativno kretanje udesno sa silom trenja kao otpornom silom. Nakon toga, prinudna sila opada a može i da promeni smer tako da brzina relativnog kretanja počinje da opada, a u određenom trenutku t^* može ponovo imati vrednost nula. Određivanje tog trenutka će se razmotriti kasnije, a ovde se napominje da posle tog trenutka brzina može ostati nula ili promeniti smer. Na ovom mestu analiziraće se uslovi koji obezbeđuju da gornji blok nakon faze relativnog kretanja i dostizanja $\dot{x}(t^*) = 0$, ili ponovo započne relativno kretanje po drugom modelu (u suprotnu stranu) ili ostane priljubljen za donji blok (u stik fazi). Iz jednačine (2.11) sledi da ukoliko je u t^* horizontalna projekcija rezultante spoljašnjih sila koje deluju na blok (seizmičko dejstvo predstavljeno je pobudnom silom $Ue^{-\kappa t} \sin(\Omega t)$)

$$\ddot{x}(t^*) = Ue^{-\kappa t^*} \sin(\Omega t^*) - f(t^*) + q = 0$$

jednaka nuli, uz $\dot{x}(t^*) = 0$, blok će ostati u stanju relativne ravnoteže, tj. u stik fazi, pri tome će sila trenja po svojoj apsolutnoj vrednosti biti manja od svoje granične vrednosti μ . To stanje može biti privremenog karaktera jer sve tri pomenute sile menjaju svoju vrednost tokom vremena, pri čemu se može narušiti relativna ravnoteža i doći do ponovnog relativnog kretanja i to kada zbir prinudne sile i sile u viskoelastičnom štapu po intenzitetu postane veći od granične sile trenja. U tom trenutku menja se smer kretanja, a dalje izračunavanje treba vršiti po drugom dinamičkom modelu.

Ovakva analiza daje iste rezultate kao i razmatranje opisano u Fajfer i Gloker [97, 1995] i Lejn i Nijmejer [74, 2004], koje bi ovde bilo interesantno prikazati, a odnosi se na definisanje sile trenja tokom stik faze. Naime, izrazom (2.12) definisan je Kulonov zakon na nivou brzine, tj. prikazane su vrednosti sile trenja u zavisnosti od relativne brzine, i u tom obliku on je pogodan za opisivanje trenja među tačkama

u kontaktu kod kojih postoji klizanje. Kada su kontaktne tačke u stik fazi, relativna brzina je jednaka nuli, pa je pogodno Kulonov zakon definisati preko relativnog ubrzanja. To je moguće uraditi jer relativna brzina i relativno ubrzanje imaju isti znak pri promeni iz $\dot{x} = 0$ u $\dot{x} \neq 0$. Na nivou relativnih brzina i relativnih ubrzanja Kulonov zakon glasi:

$$\begin{cases} \dot{x} > 0 & \Rightarrow & q = -\mu, \\ \dot{x} = 0 & \Rightarrow & q \in \mu[-1, 1], \\ \dot{x} < 0 & \Rightarrow & q = \mu, \end{cases} \quad \text{ali} \quad \begin{cases} q = -\mu & \Rightarrow & \ddot{x} > 0, \\ q \in \mu[-1, 1] & \Rightarrow & \ddot{x} = 0, \\ q = \mu & \Rightarrow & \ddot{x} < 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Na osnovu ovog razmatranja i iz jednačine (2.11) sledi da će iz zaustavne pozicije $\dot{x}(t^*) = 0$ po završetku faze klizanja ulevo, doći do relativnog kretanja udesno ukoliko je ispunjen uslov $\ddot{x}(t^*) > 0$, tj. kada je

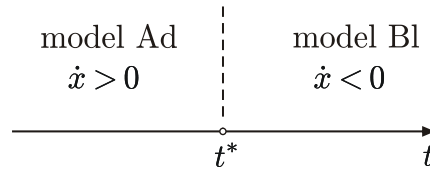
$$Ue^{-\kappa t^*} \sin(\Omega t^*) - f(t^*) - \mu > 0, \quad (2.26)$$

na koji će se kasnije referisati sa „UBI”, gde je sila trenja dostigla svoju donju graničnu vrednost $-\mu$, a relativno kretanje ulevo će nastupiti pri ispunjenom uslovu $\ddot{x} < 0$, tj. za

$$Ue^{-\kappa t^*} \sin(\Omega t^*) - f(t^*) + \mu < 0, \quad (2.27)$$

ili „UAd” kada je $q = \mu$. Ako nije ispunjen ni jedan od uslova (2.26), (2.27) nastupiće faza relativnog mirovanja.

Tokom faze kretanja, ograničenje u vidu nejednakosti koje obezbeđuje da blok vrši relativno kretanje na desnu stranu je $\dot{x} > 0$, a na levu stranu je $\dot{x} < 0$. Na slici 2.3 prikazan je slučaj prelaska sistema iz jedne faze kretanja u drugu.



Slika 2.3. Faze kretanja neglatkog sistema tokom vremena.

Problem određivanja tačnog trenutka u kojem se završava jedna od ovih faza i započinje nova spada u domen analize neglatkih mehaničkih sistema, za koje su razvijene posebne metode rešavanja, v. Fajfer i Gloker [97, 1995], Lejn i Nijmejer [74, 2004], Akari i Broljato [2, 2008]. Ignorisanje postojanja neglatkih promena atributa kretanja kod neglatkih sistema može dovesti do pojave nestabilnosti numeričkog algoritma kao i do velike greške integracije. Postoje razni načini da se odredi trenutak

t^* , v. Tarner [122, 2001], a ovde će se koristiti metod predložen u pomenutom radu. Uvođenjem slek promenljive koja je uvedena na bazi unilateralnog ograničenja i zamenjuje vreme kao nezavisno promenljivu, dolazi se do proširenog prostora stanja, a zatim se integracijom u jednom koraku određuje tražena vrednost t^* . Otežavajuća okolnost pri nalaženju ovog trenutka leži u činjenici da je vreme kao nezavisno promenljiva implicitno zadato ograničenjem u vidu nejednakosti $C(\mathbf{x}, t) > 0$, gde je $\mathbf{x} = [x, \dot{x}]^T$ vektor stanja sistema.

Konkretno, neka je u trenutku $t_{n_0} > 0$, što odgovara koraku $n = n_0 > 0$, sistem započeo fazu relativnog kretanja bloka udesno, gde važi dinamički model Ad. Nakon svakog izvršenog koraka numeričkog algoritma (2.22), (2.23) proverava se da li je zadovoljeno ograničenje $\dot{x}_n > 0$. Algoritam se izvršava sve dok se ne naruši ovo ograničenje. Ako je ono narušeno u koraku između t_{n_1} i $t_{n_1} + h$, gde trenutku t_{n_1} odgovaraju x_{n_1} i f_{n_1} , uvodi se slek promenljiva $r = C(\mathbf{x}, t) = \dot{x}$ koja zamenjuje vreme t kao nezavisno promenljivu, $t = t(r)$, i koja služi za određivanje vremenskog koraka od t_{n_1} do trenutka t^* u kojem je ispunjeno $C(\mathbf{x}(t^*), t^*) = \dot{x}(t^*) = 0$, što predstavlja uslov za promenu modela po kome se odvijalo kretanje od t_{n_0} do t^* , a sa ograničenja u vidu nejednakosti $C(\mathbf{x}, t) > 0$ prelazi se na ograničenje tipa jednakosti. Pošto je $r = C(\mathbf{x}(t(r)), t(r))$ sledi da je

$$\frac{dt}{dr} = \left[\left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial C}{\partial t} \right]^{-1} = \frac{1}{Ue^{-at} \sin(\Omega t) - f - \mu},$$

odakle se dobija

$$dt = \frac{dr}{Ue^{-at} \sin(\Omega t) - f - \mu}.$$

Sada integracijom u jednom koraku primenom Ojlerovog metoda sledi

$$t^* - t_{n_1} = \frac{1}{Ue^{-at} \sin(\Omega t) - f_{n_1} - \mu} (r^* - r_0),$$

gde je $r^* = \dot{x}(t^*) = 0$ i $r_0 = \dot{x}_{n_1} = \dot{x}(t_{n_1})$, odakle se lako dobija izraz za određivanje traženog trenutka u kojem relativna brzina postaje jednaka nuli

$$t^* = t_{n_1} + \frac{-\dot{x}_{n_1}}{Ue^{-at} \sin(\Omega t) - f_{n_1} - \mu}, \quad (2.28)$$

koji se nalazi između t_{n_1} i $t_{n_1} + h$. Na ovom mestu je važno napomenuti da bi se za neglatki sistem koji ne sadrži konstitutivnu jednačinu sa frakcionim izvodima sada mogle odrediti i vrednosti relativnog pomeranja i sile u viskoelastičnom štapu u poznatom trenutku t^* , a na osnovu njihovih vrednosti u t_{n_1} . Ali kako se u razmatranom sistemu, uvođenjem nelokalnog operatora putem Grunvald-Letnikovljevog algoritma, uzima u obzir i istorija deformacije, vrednost $f(t^*)$ ne može se odrediti

u proširenom prostoru stanja. Slek promenljiva je ovde zapravo poslužila samo za određivanje trenutka t^* . Ovo predstavlja dodatnu teškoću pri rešavanju neglatkih sistema koji sadrže izvode proizvoljnog realnog reda, a koja je bila nagoveštena na početku ovog odeljka. Ostaje da se reši problem nalaženja $x(t^*)$ i $f(t^*)$.

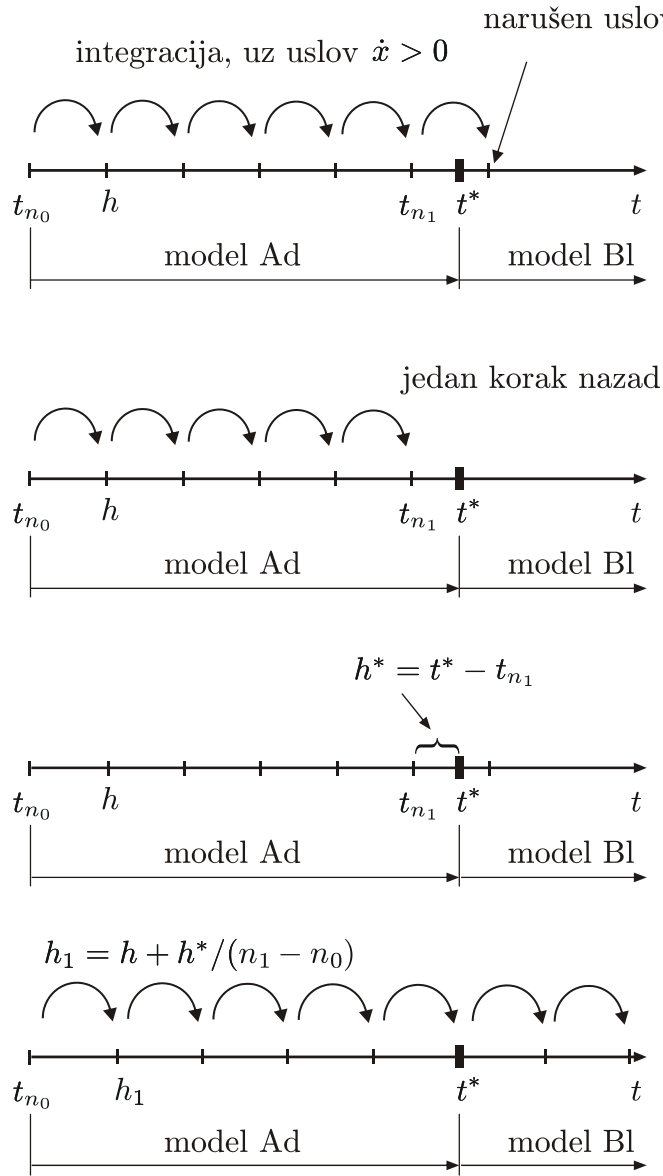
Korak h^* kojim se iz t_{n_1} stiže u t^* manji je od h , tj. $h^* = t^* - t_{n_1}$, a da bi se odredile vrednosti $x(t^*)$ i $f(t^*)$ potrebno je izvršiti jednu iteraciju nakon t_{n_1} sa smanjenim korakom integracije. Pošto odabrana Grunvald-Letnikovljeva numerička šema podrazumeva fiksni korak h , utvrđeni vremenski interval $t^* - t_{n_0}$ tokom kojeg je trajala faza relativnog kretanja udesno može se podeliti na $n_1 - n_0$ jednakih intervala, gde bi novi korak bio veći od prethodnog i iznosio bi $h_1 = h + h^*/(n_1 - n_0)$. Tada je potrebno ponoviti integraciju po modelu Ad od t_{n_0} ali sada sa novim korakom h_1 koji obezbeđuje da se iz t_{n_0} nakon $n_1 - n_0$ koraka stigne tačno u t^* , gde se i završava jedna faza kretanja neglatkog sistema, pri čemu će u tom trenutku biti izračunate vrednosti relativnog pomeranja i sile u štapu, dok istoriju deformacije treba uzimati od početnog trenutka $t = 0$. Ova procedura prikazana je na slici 2.4.

Pri ponavljanju integracije od t_{n_0} javlja se teškoća u izračunavanju, koja nastaje kao rezultat objedinjavanja necelih izvoda kao nelokalnih operatora sa teorijom neglatkih viševrednosnih funkcija, što je pomenuto u prethodnom tekstu. Problem se ogleda u tome što je korak integracije na intervalu $t_{n_0} \leq t \leq t^*$, tj. pri relativnom kretanju bloka udesno, povećan i razlikuje se od koraka na intervalu $0 \leq t \leq t_{n_0}$. Numerički algoritam (2.22) za izračunavanje sile u viskoelastičnom štapu u zoni $t_{n_0} \leq t \leq t^*$ zahteva podatke za x i f na čitavom intervalu $0 < t < t^*$ u ekvidistantnim trenucima sa korakom h_1 , pri čemu takvi podaci za $0 \leq t < t_{n_0}$ i ne postoje, jer su relativno pomeranje i sila na tom intervalu određeni u drugačijim vremenskim trenucima od ovde potrebnih, jer je korak integracije bio manji. Ovaj problem može se prevazići formiranjem interpolacionih funkcija $x_{int}(t)$ i $f_{int}(t)$ koje predstavljaju relativno pomeranje i silu u viskoelastičnom štapu kao funkcije vremena, tako da one omogućavaju odabir podataka iz istorije, neophodnih za dalja izračunavanja, i to u bilo kom trenutku iz oblasti svoje definisanosti. Modifikovani izraz (2.22) sa interpolacionim funkcijama je oblika:

$$f_n = \frac{1}{1 + \tau_{f\alpha} h^{-\alpha}} \left\{ x_n \cdot (1 + \tau_{x\alpha} h^{-\alpha}) + h^{-\alpha} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\alpha)} (\tau_{x\alpha} \cdot x_{int}(t_{n-j}) - \tau_{f\alpha} \cdot f_{int}(t_{n-j})) \right\}, \quad (2.29)$$

gde je $t_{n-j} = h(n-j)$, pri čemu treba voditi računa da se veličina koraka h mora odrediti tokom svake faze klizanja. Za izračunavanje atributa kretanja i sile u štapu u dinamičkim modelima Ad, Bl i Cs, umesto (2.22) koristiće se izraz (2.29).

Druga mogućnost je da se umesto uvođenja interpolacionih funkcija koristi poznati princip kratke ili fiksne memorije („short memory principle”), v. Podlubni [98, 1999]. On se prvenstveno koristi za smanjenje vremena potrebnog za izračunavanje kod problema sa frakcionim izvodima, koje je često, zbog uzimanja u obzir celokupne istorije deformacije u svakom koraku, numerički skupo. Ovaj princip zasnovan je na činjenici da su podaci iz skorije istorije deformacije uticajni, dok se oni iz dalje



Slika 2.4. Povećanje koraka integracije primenom metoda slek promenljive i ponavljanje integracije na intervalu dok traje jedna faza kretanja.

istorije zbog svog manjeg uticaja zanemaruju, pri čemu se svesno skraćuje vreme potrebno za izračunavanje na račun tačnosti. Ovde bi taj metod služio za odbacivanje podataka iz istorije u vremenskom intervalu u kojem je manji korak integracije, i na taj način bi se prevazišao problem promenljivog koraka. Greška koja se javlja na ovaj način data je sa $\epsilon < ZT_1^{-\alpha}/\Gamma(1 - \alpha)$, gde je $Z = \sup_{z \in 0, t} |z(t)|$, T_1 je vremenska dužina memorije. Na ovaj način prevazilazi se problem odabira neophodnih podataka iz istorije deformacije, ali zbog značajnije vrednosti greške pri nekim vrednostima parametara sistema, ovaj način se neće koristiti. Bilo bi interesantno razmotriti princip logaritamske memorije, koja daje veću tačnost, o kome govore Ford i Simpson [52, 2001].

Još jedna mogućnost rešavanja problema sa odabirom podataka iz istorije deformacije je korišćenje numeričkih procedura pomoću kojih se diferencijalne jednačine proizvoljnog realnog reda transformišu u sistem običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, v. Juan i Agraval [123, 2002], Atanacković i Stanković [10, 2004], Atanacković i Stanković [11, 2008], Šmit i Gaul [110, 2006]. Takođe, umesto odabranog numeričkog postupka koji ima fiksni korak, mogao bi se odabrati neki drugi numerički algoritam koji ima promenljiv korak integracije, kao na primer L1, v. Oldham i Spanier [90, 1974], Adolfson i dr. [4, 2004], Kuesta [29, 2010], čime bi se integracija od t_{n_1} do t^* izvršila sa smanjenim korakom, a zatim opet nastavilo računanje sa korakom h . U ovom radu korišćen je metod sa interpolacionim funkcijama, a ostale opcije su samo razmotrene i ostavljene kao mogućnost daljeg istraživanja ove problematike.

Ukoliko je u t^* ispunjen uslov (2.27) blok će od tog trenutka započeti relativno kretanje ulevo po modelu Bl sa korakom h_1 , koje će trajati sve dok važi $\dot{x} < 0$. Ako se poslednji uslov naruši između t_{n_2} i $t_{n_2} + h_1$, zbog ograničenja koje ima oblik $C(\mathbf{x}, t) > 0$, uvešće se slek promenljiva $r_2 = C(\mathbf{x}, t) = -\dot{x}$, a gore opisanim postupkom će se na sličan način odrediti vreme završetka ove faze kretanja bloka

$$t^* = t_{n_2} + \frac{-\dot{x}_{n_2}}{Ue^{-at} \sin(\Omega t) - f_{n_2} + \mu}. \quad (2.30)$$

Sada se ponavlja postupak nalaženja novog koraka $h_2 = h_1 + h^{**}/(n_2 - n_1)$, pri čemu je $h^{**} = t^{**} - t_{n_2}$, i ponovljenom integracijom po modelu Bl od t^* sa novim korakom h_2 nakon $(n_2 - n_1)$ koraka stiže se u t^{**} , sa izračunatim vrednostima relativnog pomeranja i sile u viskoelastičnom štapu. Sledi ispitivanje uslova (2.26) čije ispunjenje vodi ka novoj fazi relativnog kretanja udesno, dok u suprotnom, gornji blok započinje fazu relativnog mirovanja, što odgovara modelu Cs.

Kod faze u kojoj blok ne vrši relativno kretanje, tj. uslovi (2.26) i (2.27) nisu ispunjeni, koordinata x ostaje konstantna, relativna brzina \dot{x} je nula, a sila u štapu se računa pomoću izraza (2.29), pri čemu se nakon svakog koraka numeričkog algoritma iz pomenutog izraza proverava da li je sila trenja u okviru svojih graničnih vrednosti, $-\mu < q < \mu$, što predstavlja uslov za ostanak u stik fazi. Ukoliko je taj uslov ispunjen, korak se povećava za jedan, a nova vrednost sile u štapu računa po modelu (2.29), te ponovo ispituje navedeni uslov. Ova procedura se ponavlja sve dok se u određenom koraku ne detektuje da je uslov narušen. U tom slučaju započinje faza klizanja bloka po modelu Ad ili Bl, u zavisnosti od toga da li je sila trenja prevazišla svoju donju ili gornju graničnu vrednost, respektivno. Da se ova, već dosta složena, procedura za određivanje kretanja opisane konstrukcije ne bi dalje komplikovala, neće se sprovoditi određivanje tačnog trenutka metodom slek promenljive u kojem prestaje stik faza, već čim se detektuje ispunjenje jednog od navedenih uslova, smatraće se da u tom koraku započinje klizanje.

Tokom seizmičkog dejstva relativni položaj gornjeg bloka određuje se po jednom od tri navedena dinamička modela, koji se tokom vremena smenjuju jedan za drugim, u zavisnosti od ispunjenja uslova pod kojima važe i uslova pod kojima započinju. U početku će se u opštem slučaju smenjivati klizanje na desnu i levu stranu, dok će

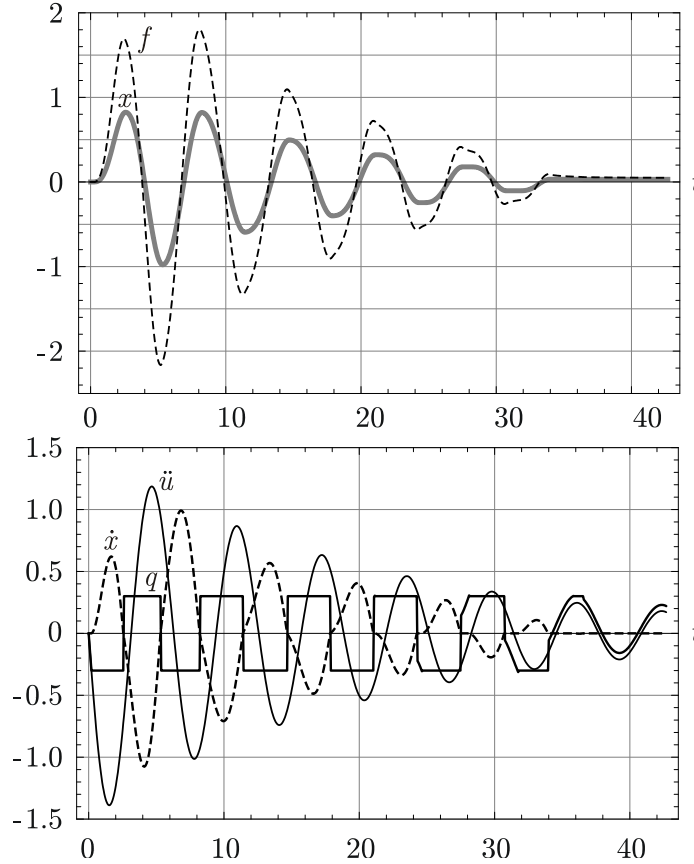
kasnije zbog eksponencijalne obvojnice i smanjenja amplituda pobude, između faza klizanja postojati faza relativne ravnoteže sve dok se amplituda pobude toliko ne umanji da blok ostane priljubljen tako da više ne može započeti relativno kretanje.

Zbog složenosti problema i postupka za njegovo numeričko rešavanje, pogodno je napraviti odgovarajući program koji će sprovesti proceduru opisanu u prethodnom tekstu. Na slici A.1 u dodatku na kraju rada prikazan je dijagram toka podataka koji obuhvata prethodna razmatranja, a na osnovu kojeg je napravljen program za rešavanje postavljenog problema, u programskom paketu Mathematica. Na istoj slici, T označava trenutak do kojeg se posmatra kretanje sistema, a određuje se dodavanjem perioda seizmičke pobude $2\pi/\Omega$ na trenutak poslednje promene faze sistema T_1 , tj. na trenutak kada je sistem poslednji put ušao u stik fazu. Ukoliko se sistem zadrži u stik fazi duže od perioda seizmičke pobude, smatraće se da on više neće započeti fazu relativnog kretanja, jer amplituda pobude nakon tog perioda može biti samo manja, zbog eksponencijalne obvojnice pobudnog dejstva. Izračunata rešenja, koja podrazumevaju relativno pomeranje gornjeg bloka, silu u viskoelastičnom štapu, disipaciju energije i analizu uticaja ulaznih parametara na ponašanje sistema, prikazana su u sledećem odeljku.

2.4 Rezultati

Pomoću pripreme izvršene u prethodnom delu rada određeno je ponašanje proučavanog sistema za različite vrednosti parametara. Na slici 2.5 prikazano je rešenje za slučaj kada je viskoelastični štap sačinjen od realnog materijala, za podatke $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, koji su preuzeti iz rada Fenander [48, 1998], pri vrednosti koeficijenta trenja $\mu = 0.3$, i pri parametrima seizmičke pobude $U = 1.5$, $\Omega = 1$, $\kappa = 0.05$. Prvo su prikazani relativno pomeranje x i sila f u štapu, a zatim ubrzanje tla \ddot{u} , relativna brzina \dot{x} i sila trenja q , kao funkcije vremena.

Pri odabranim vrednostima parametara, primećuje se da relativno pomeranje x i sila u štapu f u prvom delu kretanja imaju oscilatorni karakter sa kružnom frekvencijom približnom kružnoj frekvenciji pobude, i sa amplitudama koje se smanjuju tokom vremena. Funkcija brzine nije glatka, što i jeste karakteristično za neglatke sisteme tipa Filipova. Negde od polovine posmatranog vremenskog intervala, za vrednost bezdimenzijskog vremena $t \approx 24$ blok počinje da se zadržava izvesno vreme u svom levom i desnom krajnjem relativnom položaju, zahvaljujući prisustvu sile trenja, koja je modelirana viševrednosnom funkcijom. Pri tom povremenom zaustavljanju x koordinata je konstantna a sila u štapu blago opada. Tokom kretanja sistema, silu trenja karakterišu skokovite promene iz $-\mu$ u μ naizmenično prilikom promene smera relativnog kretanja. Kasnije, tokom zadržavanja bloka u krajnjim položajima, sila trenja kontinualno menja svoju vrednost imajući pri tome ulogu reakcije veze, da bi nakon određenog vremena provedenog u zoni zaustavljanja, kada dostigne svoju graničnu vrednost, započela faza relativnog kretanja a sila trenja preuzela ulogu otporne sile. U određenom trenutku, amplituda pobude se toliko smanjila da sila trenja uspešno održava blok u stanju relativne ravnoteže i više ne može da se izazove relativno kretanje. U nastavku delovanja pobude, relativna brzina bloka je jednaka nuli, x koordinata je konstantna i različita od nule u opštem

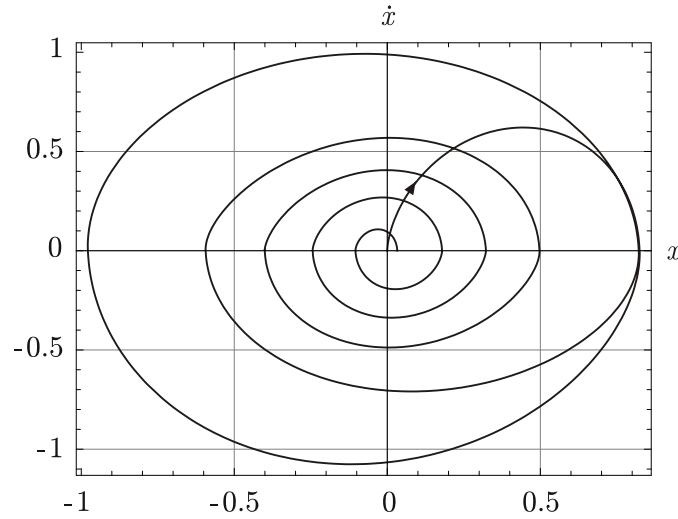


Slika 2.5. Rešenje za vrednosti parametara $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 1$, $\kappa = 0.05$.

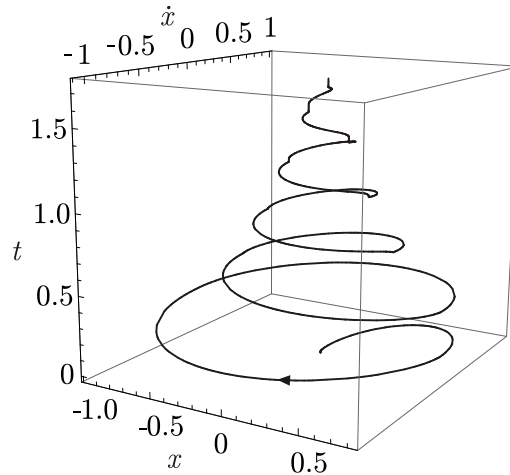
slučaju, dok se sila u štapu relaksira. Ovaj zaustavni položaj bloka u kojem je $x \neq 0$, $\dot{x} = 0$, vidi se i na slici 2.6, na kojoj je prikazan fazni portret za razmatrani slučaj. Na slici 2.7 data je trajektorija u faznom prostoru, na kojoj se mogu uočiti zaustavne pozicije bloka.

Uticaј kružne frekvencije na odziv proučavanog sistema može se videti upoređivanjem prethodnog slučaja sa sledećim, prikazanim na slikama 2.8 i 2.9, u kojem je $\Omega = 0.5$, a vrednosti ostalih parametara su nepromenjene. Smanjenjem Ω smanjuju se frekvencija, brzina i amplitude relativnog kretanja, kao i sile u štapu. U ovom slučaju, do zastoja dolazi odmah nakon dostizanja krajnjeg relativnog položaja bloka, a tranzicija iz jedne faze relativnog kretanja u drugu se odvija uvek sa fazom zastoja između.

Od interesa je izračunati disipaciju energije pri relativnom kretanju bloka, izazvanog seizmičkim dejstvom. Na slici 2.10 prikazana je ukupna disipacija $\Delta(t)$ u funkciji vremena, ostvarena i dejstvom suvog trenja i deformacijom štapa, data izrazom (2.9), a prikazan je i udeo u disipaciji oba ova mehanizma, za slučaj sa slika 2.8 i 2.9. U zonama zastoja nema disipacije energije jer je tada $\dot{x} = 0$. Sila trenja ima strogo disipativan karakter pa je zato njen udeo $\Delta_{TR}(t)$ monotono neopadajuća funkcija, dok sila u viskoelastičnom štapu vrši i pozitivan i negativan rad tokom faza relativnog kretanja, što se vidi u ponašanju funkcije $\Delta_{VE}(t)$ na slici 2.10. Disipacija



Slika 2.6. Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 1$, $\kappa = 0.05$.

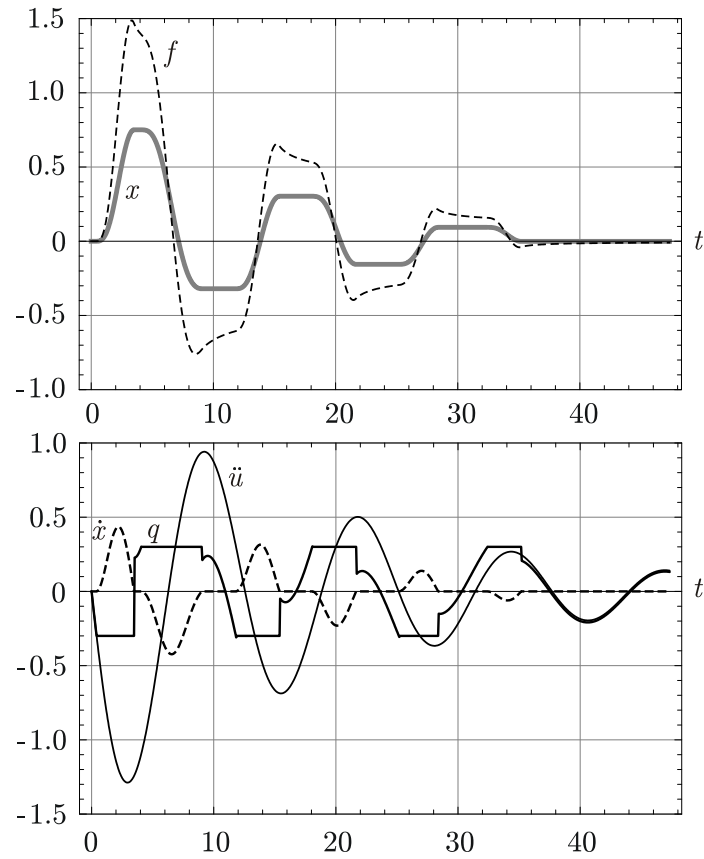


Slika 2.7. Trajektorija u prostoru mehaničkog stanja za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 1$, $\kappa = 0.05$.

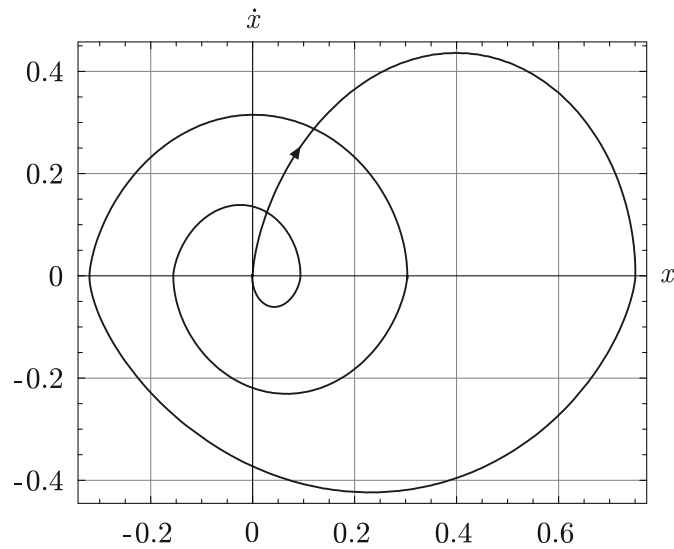
energije za ovaj slučaj, do trenutka posle kojeg sistem neće više započeti relativno kretanje iznosi $\Delta(T) = 1.44$, gde je $\Delta_{VE}(T) = 0.466$, a $\Delta_{TR}(T) = 0.974$. Primetna je razlika udela ova dva mehanizma u disipaciji.

Na ovom mestu analiziraće se uticaj koeficijenta trenja na ponašanje konstrukcije. Njegovim povećanjem javlja se veća sila trenja, što tokom faze klizanja dovodi do veće disipacije energije. Na slici 2.11 date su krive kojima se opisuje ponašanje sistema pri povećanom koeficijentu trenja $\mu = 0.6$ i ostalim parametrima kao u prethodnom slučaju, dok je na slici 2.12 prikazan fazni portret za razmatrani slučaj.

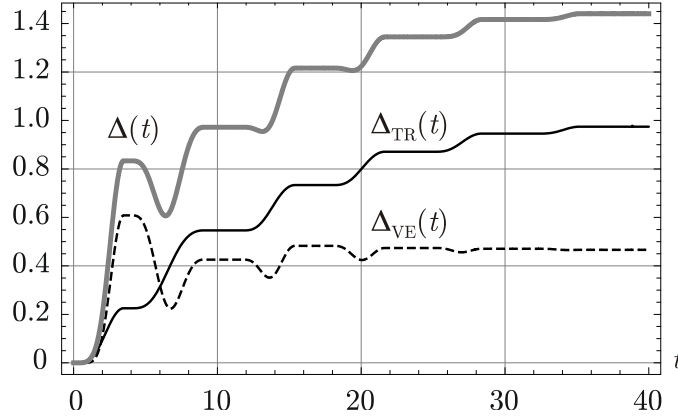
Povećanjem koeficijenta trenja povećane su granične vrednosti sile trenja, a umanjile su se amplitude relativnog pomeranja i brzine, kao i sile u štapu, dok sistem za kraće vreme stiže u stanje relativne ravnoteže. Disipacija energije u ovom slučaju iznosi $\Delta(T) = 1.418$, pri čemu je $\Delta_{VE}(T) = 0.265$, a $\Delta_{TR}(T) = 1.153$.



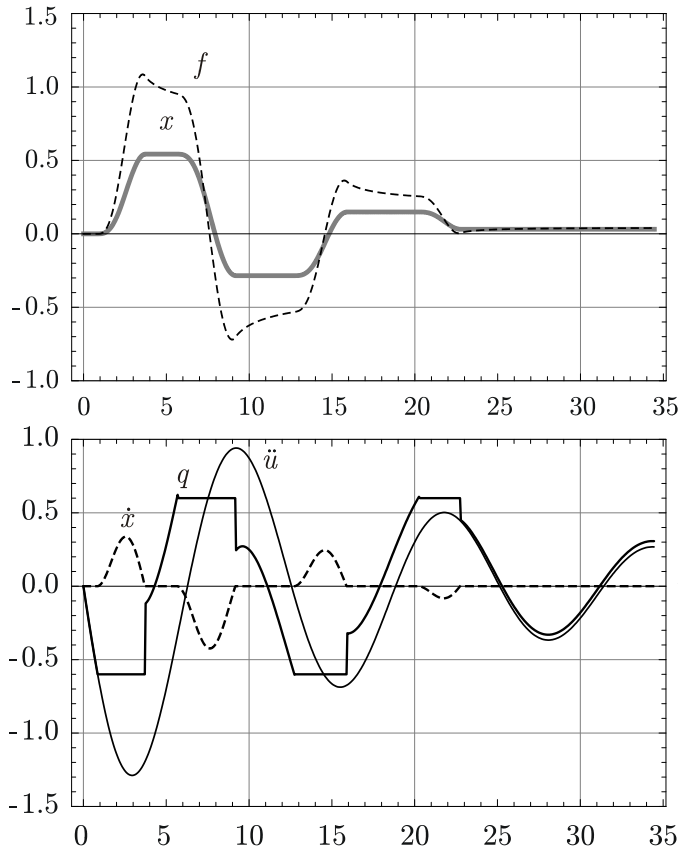
Slika 2.8. Rešenje za vrednosti parametara $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$.



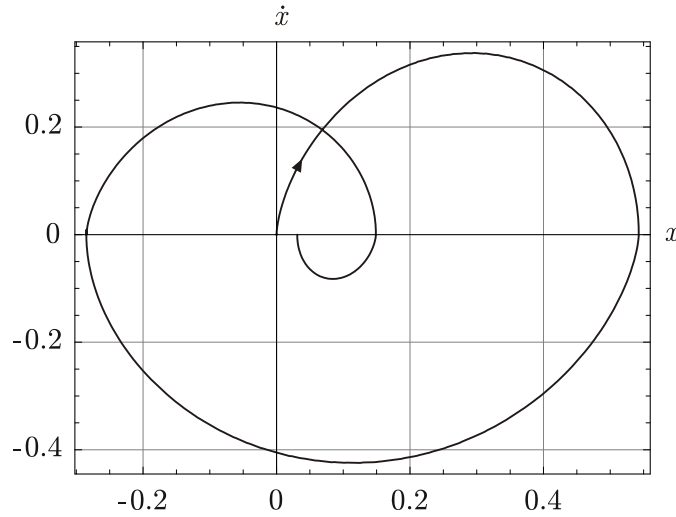
Slika 2.9. Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$.



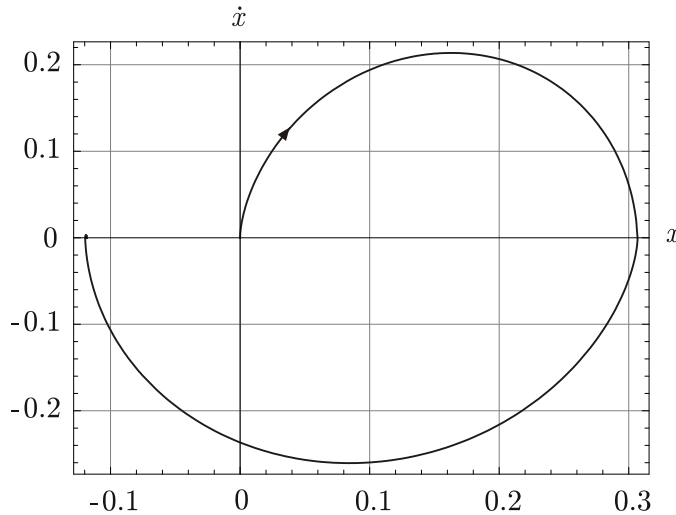
Slika 2.10. Disipacija energije za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$.



Slika 2.11. Rešenje za vrednosti parametara $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.6$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$.



Slika 2.12. Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.6$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$.



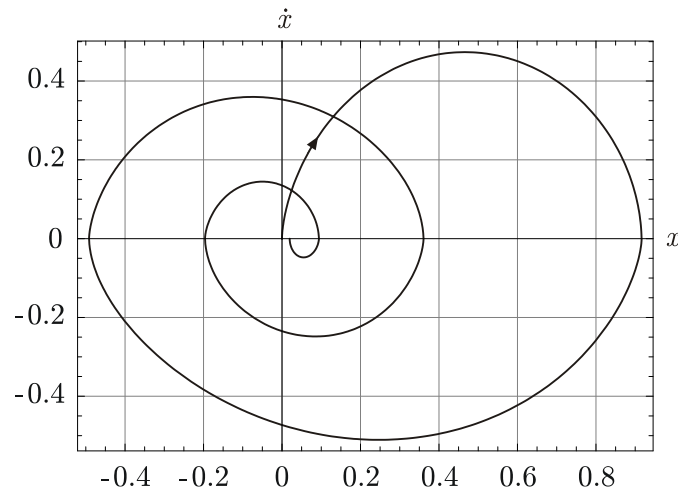
Slika 2.13. Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.9$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$.

U slučaju kada koeficijent trenja ima još veću vrednost $\mu = 0.9$ fazni portret prikazan je slici 2.13. U tom slučaju sistem se još brže umiruje u smislu relativnog kretanja, pri čemu je disipacija energije $\Delta(T) = 0.744$, gde je $\Delta_{VE}(T) = 0.084$ mnogo manje u odnosu na $\Delta_{TR}(T) = 0.66$. Ovde se vidi da se povećanjem koeficijenta trenja disipacija energije sistema smanjuje, ali to je iz razloga što trenje utiče i na vreme trajanja procesa relativnog kretanja, od kojeg takođe zavisi disipacija. Logičan zaključak je da će sistem kod kojeg se pre umiri relativno kretanje nastaviti da se kreće zajedno sa donjim blokom sa većim amplitudama prenosnog kretanja.

Ukoliko se koeficijent trenja smanji na vrednost ispod 0.3, na primer, $\mu = 0.15$, disipacija energije iznosi $\Delta(T) = 1.191$, sa $\Delta_{VE}(T) = 0.557$ i $\Delta_{TR}(T) = 0.634$, što je opet manje nego za slučaj $\mu = 0.3$. Na osnovu poslednja tri primera može se

zaključiti da se povećanjem trenja u sistemu skraćuje vreme potrebno za postizanje trajne relativne ravnoteže, a povećava se udeo trenja u disipaciji. U oblasti malih vrednosti koeficijenta trenja, gde je udeo deformacije viskoelastičnog štapa u disipaciji značajan, sa povećanjem μ povećava se i ukupna disipacija energije, dok se u oblasti njegovih većih vrednosti, sa povećanjem μ ukupna disipacija smanjuje.

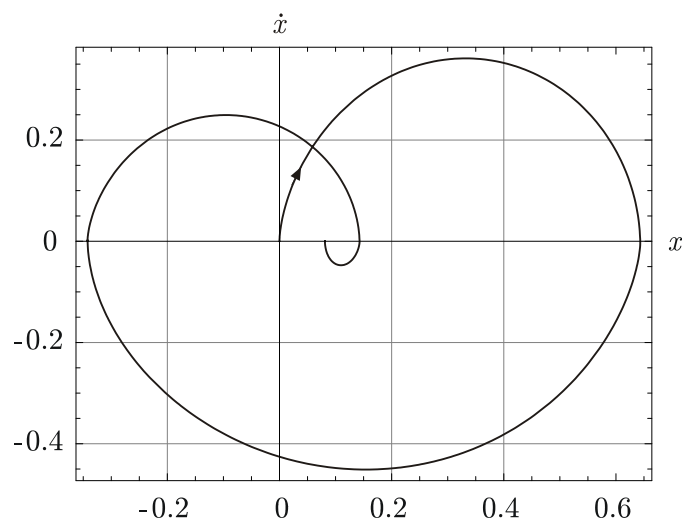
Ako se u poslednja tri prikazana primera, za vrednosti $\mu = 0.3, 0.6$ i 0.9 , promeni materijal viskoelastičnog štapa, i uzme realni materijal sa vrednostima parametara $\alpha = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = 0.886$, videti rad Fenander [48, 1998], dobijaju se rešenja, koja su u faznoj ravni prikazana na slikama 2.14 - 2.16, respektivno. Disipacija energije za ova tri slučaja navedena je na pomenutim slikama. Upoređivanjem sa slučajevima sa slika 2.9, 2.12 i 2.13, može se primetiti da je veća disipacija energije ostvarena kod materijala sa većim redom izvoda α .



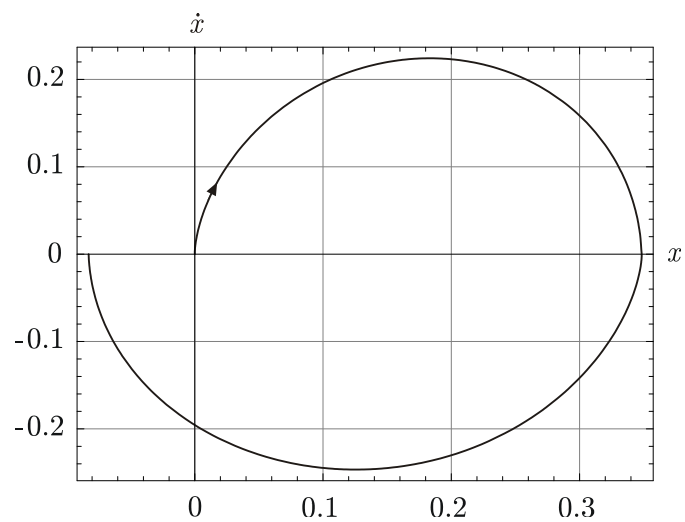
Slika 2.14. Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = 0.886$, $\mu = 0.3$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$, $\Delta(T) = 2.192$, gde je $\Delta_{VE}(T) = 0.963$, $\Delta_{TR}(T) = 1.229$.

Na slikama 2.17 i 2.18 u faznoj ravni je prikazan uticaj amplitude U i koeficijenta prigušenja κ na kretanje konstrukcije pod dejstvom zemljotresa. Vidi se da se povećanjem amplitude seizmičke pobude povećavaju amplitude oscilacija konstrukcije i broj faza potrebnih za postizanje umirivanja gornjeg bloka, dok se povećanjem koeficijenta prigušenja seizmičkog dejstva ostvaruje suprotan efekat.

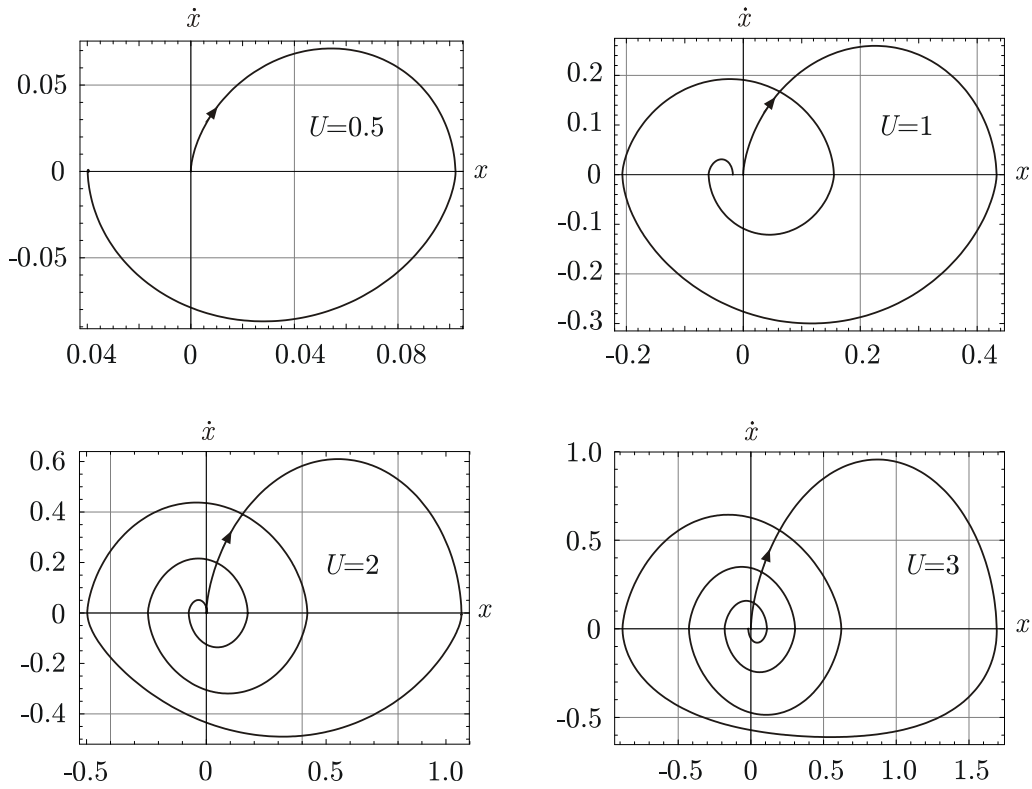
Prikazani rezultati odnose se na sistem sa jednim nepoznatim stepenom slobode kretanja. Dobijena rešenja, koja se mogu smatrati potpuno novim, mogu da pomognu u izboru materijala koji može da obezbedi potrebnu disipaciju u slučaju hipotetičkog seizmičkog dejstva. Izložena metodologija se može primeniti za proučavanje ponašanja konstrukcija oblika stuba sa više blokova o čemu će biti reči u sledećem poglavlju.



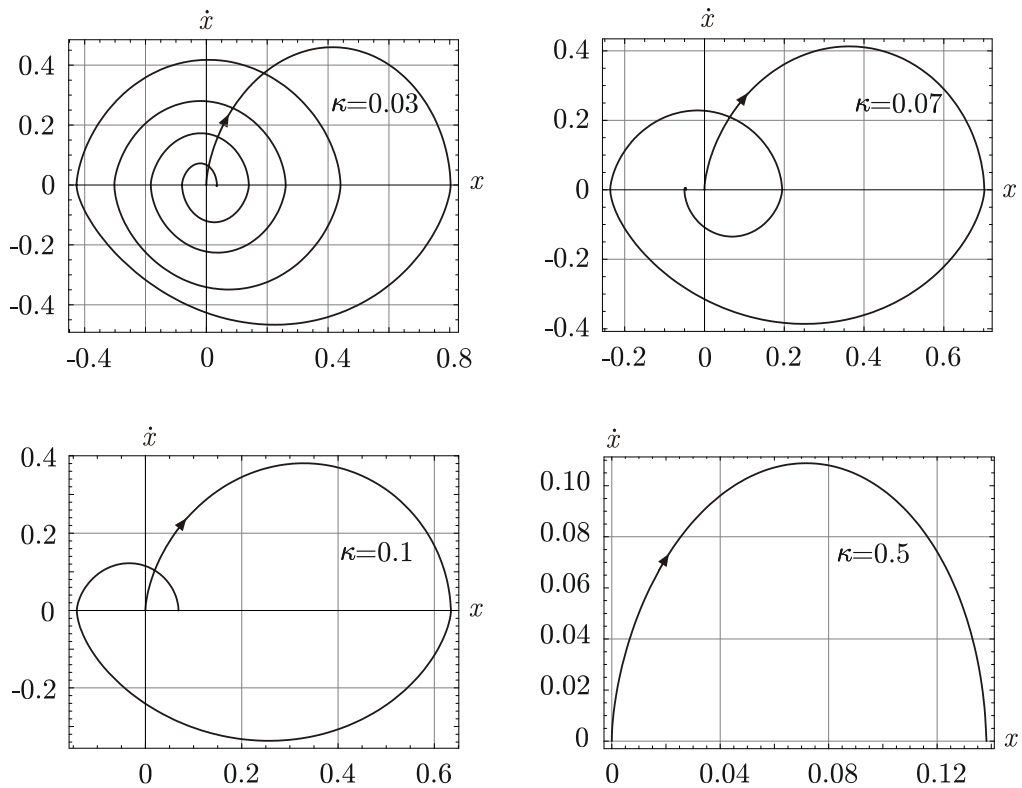
Slika 2.15. Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = 0.886$, $\mu = 0.6$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$, $\Delta(T) = 1.769$, gde je $\Delta_{VE}(T) = 0.463$, $\Delta_{TR}(T) = 1.306$.



Slika 2.16. Trajektorija u faznoj ravni za vrednosti $\alpha = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = 0.886$, $\mu = 0.9$, $U = 1.5$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$, $\Delta(T) = 0.809$, gde je $\Delta_{VE}(T) = 0.107$, $\Delta_{TR}(T) = 0.702$.



Slika 2.17. Rešenje za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $\Omega = 0.5$, $\kappa = 0.05$.



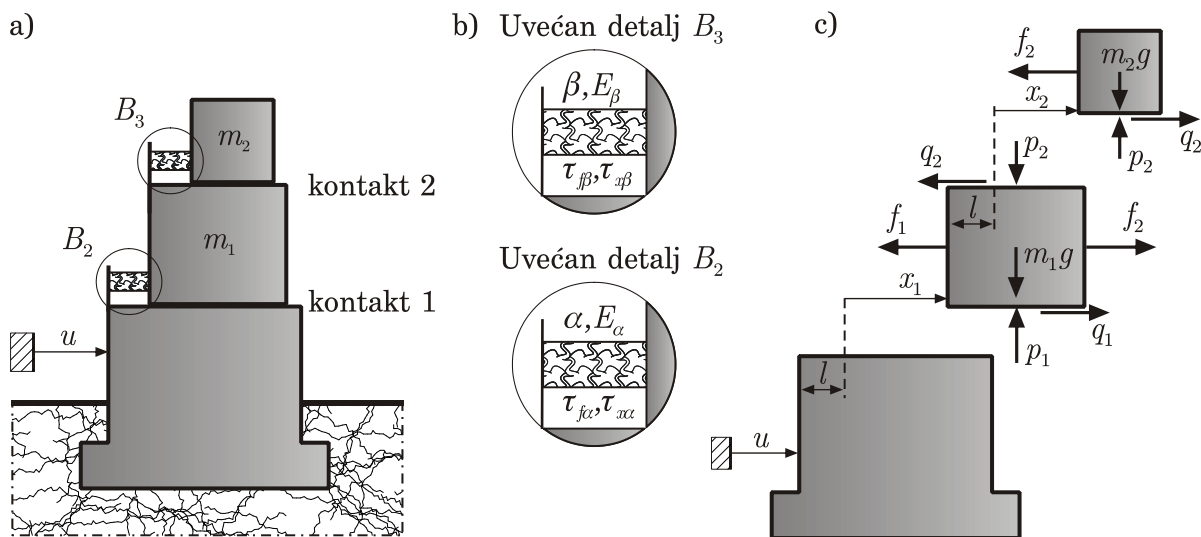
Slika 2.18. Rešenje za vrednosti $\alpha = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = 1.183$, $\mu = 0.3$, $\Omega = 0.5$, $U = 1.5$.

3. Slučaj tri bloka

Kod višespratnih konstrukcija koje se mogu modelirati sa više od dva bloka, u svakom kontaktu može se postaviti frikcioni i viskoelastični element, što bi predstavljalo oscilatorni sistem istog tipa ali sa više stepeni slobode. U ovom poglavlju proučiće se kretanje konstrukcije koja se sastoji od tri bloka poređana jedan na drugi.

3.1 Postavka problema

Posmatra se sistem tri bloka pri čemu je kretanje najnižeg - baznog - poznato. Kretanje srednjeg po najnižem kao i najvišeg po srednjem bloku neka ograničavaju viskoelastični štapovi i sila trenja u kontaktnim površinama. Dakle, razmatra se sistem sa dva nepoznata stepena slobode kretanja koje je izazvano dejstvom zadate seizmičke pobude na bazni blok, slika 3.1.



Slika 3.1. a) Konstrukcija od tri bloka, sa zonama za disipaciju energije, b) Uvećani detalji B_2 i B_3 viskoelastičnih elemenata, c) Dekomponovani sistem.

Sa uvedenim pretpostavkama kao u prethodnom poglavlju, kao i pretpostavkom da je kretanje donjeg bloka određeno oscilatornim kretanjem pomoću izraza (2.1), ponašanje sistema sa dva stepena slobode relativnog kretanja pod uticajem seizmičkog

dejstva biće poznato kada se odredi kretanje srednjeg i gornjeg bloka. Neka su mase blokova redom m_1 i m_2 , i neka koordinate x_1 i x_2 , određuju relativni položaj bloka u odnosu na onaj ispod njega, respektivno. Neka viskoelastični štapovi imaju istu dužinu l i istu površinu poprečnog preseka A , ali neka su izrađeni od različitih materijala, čije su viskoelastične karakteristike prikazane na slici 3.1. b). Uzimajući u obzir da su sa f_i , ($i = 1, 2$), označene sile u štapovima, sa p_i normalne kontaktne sile, a sa q_i sile trenja u prvoj i drugoj kontaktnoj površini, slika 3.1 c), diferencijalne jednačine kretanja sistema date su u obliku

$$m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{u}) = -f_1 + f_2 + q_1 - q_2, \quad m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{u}) = -f_2 + q_2. \quad (3.1)$$

Ove jednačine treba rešavati sa početnim uslovima

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad f_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \quad f_2(0) = 0. \quad (3.2)$$

Neka se konstitutivne jednačine viskoelastičnih štapova odaberu saglasno modifikovanom Zenerovom modelu u obliku

$$f_1 + \tau_{f\alpha} D^\alpha f_1 = \frac{E_\alpha A}{l}(x_1 + \tau_{x\alpha} D^\alpha x_1), \quad f_2 + \tau_{f\beta} D^\beta f_2 = \frac{E_\beta A}{l}(x_2 + \tau_{x\beta} D^\beta x_2), \quad (3.3)$$

gde je $0 < \gamma < 1$, ($\gamma = \alpha, \beta$), sa ograničenjima koja diktira Klauzsius-Dijemova nejednakost

$$E_\gamma > 0, \quad \tau_{f\gamma} > 0, \quad \tau_{x\gamma} > \tau_{f\gamma}. \quad (3.4)$$

Kulonov model trenja za prvi i drugi kontakt, uz $p_1 = (m_1 + m_2)g$ i $p = m_2g$, daje sile trenja u obliku neglatkih viševrednosnih funkcija

$$q_1 \in -\mu_1(m_1 + m_2)g \cdot Sgn(\dot{x}_1), \quad q_2 \in -\mu_2 m_2 g \cdot Sgn(\dot{x}_2). \quad (3.5)$$

U specijalnom slučaju $\mu_i = 0$, $i = 1, 2$ sistem se svodi na linearne oscilacije sa frakcionim tipom disipacije koje su proučene u radu Žigić i dr. [125, 2007].

Disipacija energije tokom vremena u slučaju dve kontaktne površine i dva viskoelastična elementa za prigušenje, biće:

$$\Delta(t) = \Delta_1(t) + \Delta_2(t), \quad (3.6)$$

gde izrazi

$$\Delta_i(t) = \int_0^t (f_i \dot{x}_i + |q_i \dot{x}_i|) dt, \quad (i = 1, 2), \quad (3.7)$$

predstavljaju disipaciju energije pri relativnom kretanju x_i , ($i = 1, 2$).

Uvođenjem bezdimenzijskih veličina

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t \sqrt{\frac{E_\alpha A}{m_2 l}}, \quad \bar{x}_i = \frac{x_i E_\alpha A}{m_2 g l}, \quad \bar{f}_i = \frac{f_i}{m_2 g}, \quad \bar{q}_i = \frac{q_i}{m_2 g}, \quad \xi = \frac{m_2}{m_1}, \quad (i = 1, 2), \\ \eta &= \frac{1 + \xi}{\xi}, \quad \bar{\kappa} = \kappa \sqrt{\frac{m_2 l}{E_\alpha A}}, \quad \bar{u}_0 = \frac{u_0 E_\alpha A}{m_2 g l}, \quad \bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\frac{m_2 l}{E_\alpha A}}, \quad \bar{u}_0 = \frac{u_0 E_\alpha A}{M g l}, \quad (3.8) \\ \varepsilon &= \frac{E_\beta}{E_\alpha}, \quad \bar{U} = \bar{u}_0 \bar{\Omega}^2, \quad \bar{\tau}_{f\gamma} = \tau_{f\gamma} \left(\frac{E_\alpha A}{m_2 l} \right)^{\gamma/2}, \quad \bar{\tau}_{x\gamma} = \tau_{x\gamma} \left(\frac{E_\alpha A}{m_2 l} \right)^{\gamma/2}, \quad (\gamma = \alpha, \beta), \end{aligned}$$

kao i smenom simbola: $\bar{t} \rightarrow t$, $\bar{x}_i \rightarrow x_i$, $\bar{f}_i \rightarrow f_i$, $\bar{q}_i \rightarrow q_i$, $\bar{\kappa} \rightarrow \kappa$, $\bar{\Omega} \rightarrow \Omega$, $\bar{U} \rightarrow U$, $\bar{\tau}_{f\gamma} \rightarrow \tau_{f\gamma}$, $\bar{\tau}_{x\gamma} \rightarrow \tau_{x\gamma}$, radi jednostavnijeg zapisa, sistem diferencijalnih jednačina kretanja u bezdimenzijskom obliku postaje

$$x_1^{(2)} = U e^{-\kappa t} \sin(\Omega t) + \xi(-f_1 + f_2 + q_1 - q_2), \quad x_1^{(2)} + x_2^{(2)} = U e^{-\kappa t} \sin(\Omega t) - f_2 + q_2, \quad (3.9)$$

gde su bezdimenzijske sile trenja

$$q_1 \in \begin{cases} -\mu_1 \eta, & \dot{x}_1 > 0, \\ \mu_1 \eta [-1, 1], & \dot{x}_1 = 0, \\ \mu_1 \eta, & \dot{x}_1 < 0, \end{cases} \quad q_2 \in \begin{cases} -\mu_2, & \dot{x}_2 > 0, \\ \mu_2 [-1, 1], & \dot{x}_2 = 0, \\ \mu_2, & \dot{x}_2 < 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

dok su konstitutivne jednačine sada

$$f_1 + \tau_{f\alpha} D^\alpha f_1 = x_1 + \tau_{x\alpha} D^\alpha x_1, \quad f_2 + \tau_{f\beta} D^\beta f_2 = \varepsilon(x_2 + \tau_{x\beta} D^\beta x_2). \quad (3.11)$$

Zamenom (3.9)₁ u (3.9)₂ dobija se diferencijalna jednačina relativnog kretanja gornjeg bloka u bezdimenzijskoj formi

$$x_2^{(2)} = \xi f_1 - (1 + \xi) f_2 - \xi q_1 + (1 + \xi) q_2. \quad (3.12)$$

Za određivanje kretanja konstrukcije u obliku stuba, koja se sastoji od tri bloka gde se disipacija vrši zbog prisustva viskoelastičnih elemenata i suvog trenja, potrebno je rešiti sistem koji se sastoji od diferencijalnih jednačina drugog reda (3.9)₁ i (3.12) i diferencijalnih jednačina realnog reda (3.11) zajedno sa bezdimenzijskim početnim uslovima koji su istog oblika kao (3.2) uz ograničenja koja su istog oblika kao (3.4)_{2,3}.

Kao u slučaju dva bloka iz prethodnog poglavlja, i ovde bi se sistem diferencijalnih jednačina koji opisuje postavljeni problem, primenom Laplasovih transformacija mogao prikazati u obliku sistema od dve spregnute diferencijalno-integralne inkluzije, a sa ciljem dokaza egzistencije rešenja, iako to ovde neće biti urađeno. Pomenuti sistem

jednačina rešice se numeričkim postupkom, koji je analogan postupku iz prethodnog poglavlja ali mnogo složeniji i zahteva komplikovaniju kombinatornu analizu. Naime, prilikom proučavanja ponašanja opisane konstrukcije pri seizmičkom dejstvu može se uočiti nekoliko različitih načina njenog kretanja. Moguće je na primer da blokovi mase m_1 i m_2 klize na desnu stranu u smislu relativnog kretanja, tj. da je $\dot{x}_1 > 0$ i $\dot{x}_2 > 0$, ili da jedan od njih ili oba klize na levu stranu, ili da tokom određenog vremenskog perioda nema relativnog kretanja jednog ili oba bloka što bi predstavljalo fazu priljublivanja ili stik fazu. Dok su za sistem sa jednim stepenom slobode postojala tri moguća stanja, iz navedenog sledi da su u oba kontakta moguća po tri različita stanja, relativno kretanje udesno gde je $\dot{x}_i > 0$, relativno kretanje ulevo $\dot{x}_i < 0$, ili priljublivanje $\dot{x}_i = 0$, ($i = 1, 2$), tako da ovde postoji $3^2 = 9$ mogućih scenarija kretanja sistema, od kojih se tokom vremena uvek odvija samo jedan, a po ispunjenju specificiranih uslova datih unilateranim ograničenjima, sistem prelazi iz jednog modela koji odgovara jednom scenariju u drugi.

3.2 Rešenje za slučaj tri bloka

U poglavlju 2 ovog rada već je prikazano da osim diskretizacije diferencijalnih jednačina u cilju formiranja numeričkog algoritma za izračunavanje rešenja, poseban zadatak predstavlja i sagledavanje mogućih stanja neglatkog sistema, određivanje odgovarajućih dinamičkih modela, te analiza uslova pod kojim ti modeli važe. Zbog postojanja dve kontaktne površine kao i dva frakciona viskoelastična elementa, ovde će analiza biti znatno složenija.

Diskretizacijom vremena i primenom izraza (2.19) i (2.20) sa (2.21) za različite vrednosti reda izvoda α i β , na sistem diferencijalnih jednačina (3.9)₁, (3.11), (3.12) dobija se sledeći algoritam za određivanje sila u viskoelastičnim štapovima, kao i relativnih pomeranja blokova:

$$\begin{aligned} f_{1,n} &= \frac{1}{1 + \tau_{f\alpha} h^{-\alpha}} \left\{ x_{1,n}(1 + \tau_{x\alpha} h^{-\alpha}) + h^{-\alpha} \sum_{j=1}^n \omega_j^{(\alpha)} (\tau_{x\alpha} x_{1,n-j} - \tau_{f\alpha} f_{1,n-j}) \right\}, \\ f_{2,n} &= \frac{1}{1 + \tau_{f\beta} h^{-\beta}} \left\{ \varepsilon x_{2,n}(1 + \tau_{x\beta} h^{-\beta}) + h^{-\beta} \sum_{j=1}^n \left[\omega_j^{(\beta)} (\varepsilon \tau_{x\beta} x_{2,n-j} - \tau_{f\beta} f_{2,n-j}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$x_{1,n+1} = h^2 [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - \xi f_{1,n} + \xi f_{2,n} + \xi q_{1,n} - \xi q_{2,n}] + 2x_{1,n} - x_{1,n-1},$$

$$x_{2,n+1} = h^2 [\xi f_{1,n} - (1 + \xi) f_{2,n} - \xi q_{1,n} + (1 + \xi) q_{2,n}] + 2x_{2,n} - x_{2,n-1},$$

za $n = 1, 2, 3, \dots$, jer iz početnih uslova (3.2)_{1,3,4,6} sledi $x_{1,0} = x_{2,0} = 0$, $f_{1,0} = f_{2,0} = 0$, dok je iz (3.2)_{2,5} $(x_{1,1} - x_{1,0})/h = (x_{2,1} - x_{2,0})/h = 0$, odakle se dobija $x_{1,1} = x_{2,1} = 0$.

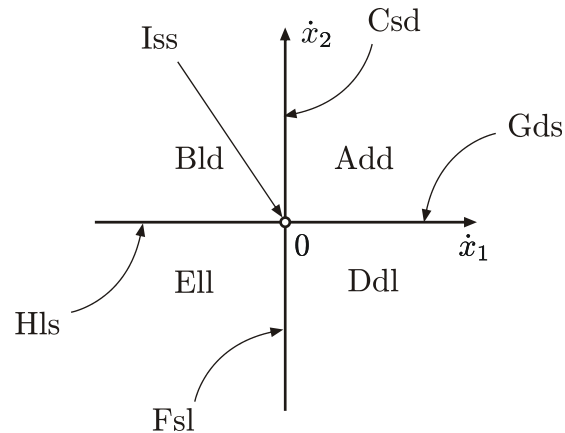
3.2.1 Dinamički modeli za devet različitih kretanja

U cilju definisanja i razlikovanja 9 identifikovanih mogućih kretanja sistema od tri bloka, za svako od njih uvodi se karakteristična oznaka na sličan način kao u prethodnom poglavlju, a koja se sastoji od jednog velikog slova (A, B, C, ...) i dva mala slova, od kojih se prvo odnosi na prvi kontakt a drugo na drugi kontakt („d” označava kretanje udesno, „l” kretanje ulevo, a „s” stik ili priljubljivanje). Tako će se oznaka Add koristiti za kretanje gde se u oba kontakta vrši relativno kretanje udesno, oznaka Fsl za slučaj kada je u prvom kontaktu stik a u drugom kretanje ulevo. U tabeli 3.1 prikazano je devet mogućih kontaktnih situacija kao i sile trenja q_1 i q_2 pri svakoj od njih:

Tabela 3.1. Dinamički modeli za devet mogućih kontaktnih situacija kod sistema sa dve hrapave kontaktne površine, sa uslovima pod kojim oni egzistiraju.

	$\dot{x}_1 > 0$	$\dot{x}_1 < 0$	$\dot{x}_1 = 0$
$\dot{x}_2 > 0$	Add $q_1 = -\mu_1\eta$ $q_2 = -\mu_2$	Bld $q_1 = \mu_1\eta$ $q_2 = -\mu_2$	Csd $q_1 \in \mu_1\eta[-1, 1]$ $q_2 = -\mu_2$
$\dot{x}_2 < 0$	Ddl $q_1 = -\mu_1\eta$ $q_2 = -\mu_2$	Ell $q_1 = \mu_1\eta$ $q_2 = -\mu_2$	Fsl $q_1 \in \mu_1\eta[-1, 1]$ $q_2 = -\mu_2$
$\dot{x}_2 = 0$	Gds $q_1 = -\mu_1\eta$ $q_2 \in \mu_2[-1, 1]$	Hls $q_1 = \mu_1\eta$ $q_2 \in \mu_2[-1, 1]$	Iss $q_1 \in \mu_1\eta[-1, 1]$ $q_2 \in \mu_2[-1, 1]$

U ravni relativnih brzina \dot{x}_1 i \dot{x}_2 dinamički modeli su zastupljeni kao što je prikazano na slici 3.2.



Slika 3.2. Dinamički modeli u ravni $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$.

U svakom od devet različitih modela koji opisuju kretanje proučavane konstrukcije, sile f_1 i f_2 u viskoelastičnim štapovima računaju se pomoću izraza (3.13)_{1,2}, dok se relativni položaji blokova i sile trenja u svakoj fazi računaju na poseban način, kao što sledi:

model Add:

$$\begin{aligned}x_{1,n+1} &= h^2 [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - \xi f_{1,n} + \xi f_{2,n} + \xi(-\mu_1\eta) - \xi(-\mu_2)] + 2x_{1,n} - x_{1,n-1}, \\x_{2,n+1} &= h^2 [\xi f_{1,n} - (1 + \xi)f_{2,n} - \xi(-\mu_1\eta) + (1 + \xi)(-\mu_2)] + 2x_{2,n} - x_{2,n-1}, \\q_{1,n} &= -\mu_1\eta, \quad q_{2,n} = -\mu_2,\end{aligned}$$

model Bld:

$$\begin{aligned}x_{1,n+1} &= h^2 [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - \xi f_{1,n} + \xi f_{2,n} + \xi\mu_1\eta - \xi(-\mu_2)] + 2x_{1,n} - x_{1,n-1}, \\x_{2,n+1} &= h^2 [\xi f_{1,n} - (1 + \xi)f_{2,n} - \xi\mu_1\eta + (1 + \xi)(-\mu_2)] + 2x_{2,n} - x_{2,n-1}, \\q_{1,n} &= \mu_1\eta, \quad q_{2,n} = -\mu_2\end{aligned}$$

Model Csd:

$$\begin{aligned}q_{1,n} &= \frac{1}{\xi} [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) + \xi f_{1,n} - \xi f_{2,n} + \xi(-\mu_2)], \\x_{2,n+1} &= h^2 [\xi f_{1,n} - (1 + \xi)f_{2,n} - \xi q_{1,n} + (1 + \xi)(-\mu_2)] + 2x_{2,n} - x_{2,n-1}, \\x_{1,n} &= const, \quad q_{2,n} = -\mu_2\end{aligned}$$

model Ddl:

$$\begin{aligned}x_{1,n+1} &= h^2 [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - \xi f_{1,n} + \xi f_{2,n} + \xi(-\mu_1\eta) - \xi\mu_2] + 2x_{1,n} - x_{1,n-1}, \\x_{2,n+1} &= h^2 [\xi f_{1,n} - (1 + \xi)f_{2,n} - \xi(-\mu_1\eta) + (1 + \xi)\mu_2] + 2x_{2,n} - x_{2,n-1}, \\q_{1,n} &= -\mu_1\eta, \quad q_{2,n} = \mu_2,\end{aligned}$$

model Ell:

$$\begin{aligned}x_{1,n+1} &= h^2 [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - \xi f_{1,n} + \xi f_{2,n} + \xi\mu_1\eta - \xi\mu_2] + 2x_{1,n} - x_{1,n-1}, \\x_{2,n+1} &= h^2 [\xi f_{1,n} - (1 + \xi)f_{2,n} - \xi\mu_1\eta + (1 + \xi)\mu_2] + 2x_{2,n} - x_{2,n-1}, \\q_{1,n} &= \mu_1\eta, \quad q_{2,n} = \mu_2,\end{aligned}$$

model Fsl:

$$\begin{aligned} q_{1,n} &= \frac{1}{\xi} [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) + \xi f_{1,n} - \xi f_{2,n} + \xi \mu_2], \\ x_{2,n+1} &= h^2 [\xi f_{1,n} - (1 + \xi) f_{2,n} - \xi q_{1,n} + (1 + \xi) \mu_2] + 2x_{2,n} - x_{2,n-1}, \\ x_{1,n} &= \text{const}, \quad q_{2,n} = \mu_2, \end{aligned}$$

model Gds:

$$\begin{aligned} q_{2,n} &= \frac{1}{1 + \xi} [-\xi f_{1,n} + (1 + \xi) f_{2,n} + \xi(-\mu_1 \eta)], \\ x_{1,n+1} &= h^2 [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - \xi f_{1,n} + \xi f_{2,n} + \xi(-\mu_1 \eta) - \xi q_{2,n}] + 2x_{1,n} - x_{1,n-1}, \\ q_{1,n} &= -\mu_1 \eta, \quad x_{2,n} = \text{const}, \end{aligned}$$

model Hls:

$$\begin{aligned} q_{2,n} &= \frac{1}{1 + \xi} [-\xi f_{1,n} + (1 + \xi) f_{2,n} + \xi \mu_1 \eta], \\ x_{1,n+1} &= h^2 [Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) - \xi f_{1,n} + \xi f_{2,n} + \xi \mu_1 \eta - \xi q_{2,n}] + 2x_{1,n} - x_{1,n-1}, \\ q_{1,n} &= \mu_1 \eta, \quad x_{2,n} = \text{const}, \end{aligned}$$

model Iss:

$$\begin{aligned} q_{1,n} &= -Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) \eta + f_{1,n}, \\ q_{2,n} &= -Ue^{-anh} \sin(\Omega nh) + f_{2,n}, \\ x_{1,n} &= \text{const}, \quad x_{2,n} = \text{const}. \end{aligned}$$

Smenjivanje stanja sistema tokom dejstva izabrane pobude na kraju će se završiti modelom Iss u kojem je prestalo relativno kretanje blokova, a reč je o onom Iss posle kojeg to kretanje više neće započeti, jer se tokom vremena amplituda pobude smanjuje i u određenom trenutku postaje nedovoljna da izazove relativno kretanje bilo kojeg bloka. Za određivanje trenutaka u kojima sistem prelazi sa jednog dinamičkog modela na neki drugi, ponovo će se koristiti metod slek promenljive za slučaj kada se završava jedna faza relativnog kretanja određenog kontakta, a u slučaju da je indikovano završetak stik faze u nekom kontaktu, proverom određenih uslova ustanoviće se koja faza sledi, i bez utvrđivanja tačnog trenutka promene, po odgovarajućem dinamičkom modelu integracija će se nastaviti.

U tabeli 3.1 prikazani su i uslovi pod kojima je odgovarajući dinamički model validan, i koji će se koristiti za ispitivanje trajanja različitih faza sistema. Za postojanje klizanja u prvom i drugom kontaktu, treba da su zadovoljeni uslovi u vidu nejednakosti za \dot{x}_1 i \dot{x}_2 , dok je stik faza u nekoj od kontaktnih površina obezbeđena pod uslovom da je odgovarajuća sila trenja u okviru svojih graničnih vrednosti, videti tabelu 3.1.

3.2.2 Određivanje trenutka promene stanja sistema za slučaj klizanja u oba kontakta

Sada će se razmotriti četiri dinamička modela, Add, Bld, Ddl i Ell, u kojima postoji relativno kretanje srednjeg i gornjeg bloka, pri čemu sile trenja imaju konstantnu vrednost.

Završetak faze relativnog kretanja u prvom kontaktu. Za modele Add i Ddl srednji blok vrši klizanje udesno sa $\dot{x}_1 > 0$, a narušavanje ove nejednakosti, recimo u t_{n_1+1} , označava da je ta faza kretanja završena negde između t_{n_1} i t_{n_1+1} , pa se iz t_{n_1} uvođenjem slek promenljive $r = \dot{x}_1$ i već opisanim postupkom određuje trenutak t^* prestanka primene dinamičkog modela Add, odnosno Ddl. Kod modela Bld i Ell važi $\dot{x}_1 < 0$, čijim narušavanjem i uvođenjem slek promenljive $r = -\dot{x}_1$ se određuje trenutak prestanka faze relativnog klizanja srednjeg bloka ulevo¹.

Trenutak završetka faze klizanja u prvom kontaktu, primenom metoda slek promenljive, za četiri navedena dinamička modela dat je u obliku:

Add:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{1,n_1}^{(1)}}{-[Ue^{-an_1h} \sin(\Omega n_1 h) - \xi f_{1,n_1} + \xi f_{2,n_1} + \xi(-\mu_1\eta) - \xi(-\mu_2)]},$$

Ddl:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{1,n_1}^{(1)}}{-[Ue^{-an_1h} \sin(\Omega n_1 h) - \xi f_{1,n_1} + \xi f_{2,n_1} + \xi(-\mu_1\eta) - \xi\mu_2]},$$

Bld:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{1,n_1}^{(1)}}{-[Ue^{-an_1h} \sin(\Omega n_1 h) - \xi f_{1,n_1} + \xi f_{2,n_1} + \xi(-\mu_1\eta) - \xi(-\mu_2)]},$$

Ell:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{1,n_1}^{(1)}}{-[Ue^{-an_1h} \sin(\Omega n_1 h) - \xi f_{1,n_1} \xi f_{2,n_1} + \xi\mu_1\eta - \xi\mu_2]},$$

¹ r je promenljiva lokalnog karaktera.

Završetak faze relativnog kretanja u drugom kontaktu. Analogno prethodnom razmatranju, trenutak prestanka relativnog kretanja gornjeg bloka, dat je sledećim izrazima, za odgovarajuće modele i to:

Add:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{2,n_1}^{(1)}}{-[\xi f_{1,n_1} - (1 + \xi)f_{2,n_1} - \xi(-\mu_1\eta) + (1 + \xi)(-\mu_2)]},$$

Bdl:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{2,n_1}^{(1)}}{-[\xi f_{1,n_1} - (1 + \xi)f_{2,n_1} - \xi\mu_1\eta + (1 + \xi)(-\mu_2)]},$$

Ddl:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{2,n_1}^{(1)}}{-[\xi f_{1,n_1} - (1 + \xi)f_{2,n_1} - \xi(-\mu_1\eta) + (1 + \xi)\mu_2]},$$

Ell:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{2,n_1}^{(1)}}{-[\xi f_{1,n_1} - (1 + \xi)f_{2,n_1} - \xi\mu_1\eta + (1 + \xi)\mu_2]},$$

Tokom izvršavanja bilo kojeg od navedena četiri dinamička modela, nakon svakog izvršenog koraka numeričkog algoritma za određivanje atributa kretanja i sila u štapovima, vrši se provera uslova za \dot{x}_1 i \dot{x}_2 pod kojima ti modeli važe, v. tabelu 3.1, i u zavisnosti od toga u kom kontaktu se prvo naruši uslov, u njemu se t^* određuje opisanim načinom.

3.2.3 Određivanje trenutka promene stanja sistema za slučaj klizanja samo u jednom kontaktu

Modeli kod kojih je u jednom kontaktu klizanje a u drugom stik su Csd, Fsl, Gds i Hls. Ukoliko se tokom izvršenja odgovarajućih numeričkin algoritama ustanovi da je narušen uslov koji obezbeđuje klizanje, uvođenjem slek promenljive se trenutak završetka faze klizanja određuje pomoću sledećih izraza, i to za

Csd:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{2,n_1}^{(1)}}{-[-f_{2,n_1} + Ue^{-an_1h} \sin(\Omega n_1 h) - \mu_2]},$$

Fsl:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{2,n_1}^{(1)}}{-[-f_{2,n_1} + Ue^{-an_1h} \sin(\Omega n_1 h) + \mu_2]},$$

Gds:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{1,n_1}^{(1)}}{-Ue^{-an_1h} \sin(\Omega n_1 h) - \xi \left[-f_{1,n_1} + f_{2,n_1} - \mu_1 \eta - \frac{-\xi f_{1,n_1} + (1 + \xi)f_{2,n_1} + \xi(-\mu_1 \eta)}{1 + \xi} \right]},$$

Hls:

$$t^* = t_{n_1} + \frac{x_{1,n_1}^{(1)}}{-Ue^{-an_1h} \sin(\Omega n_1 h) - \xi \left[-f_{1,n_1} + f_{2,n_1} + \mu_1 \eta - \frac{-\xi f_{1,n_1} + (1 + \xi)f_{2,n_1} + \xi \mu_1 \eta}{1 + \xi} \right]},$$

Kod ova četiri stanja sistema, nakon svakog izvršenog koraka u odgovarajućem dinamičkom modelu, proveravaju se po dva uslova, jedan za klizanje a jedan za stik fazu, pa se za slučaj dijagnostikovanja prestanka klizanja, trenutak t^* određuje na gore opisan način, a u slučaju prestanka stik faze, sam trenutak u kom je on detektovan uzeće se kao trenutak završetka te faze. U slučaju da se prvo završava stik faza u jednom kontaktu, tako što sila trenja prevaziđe graničnu vrednost, u zavisnosti od toga da li je po apsolutnoj vrednosti veća od donje ili gornje granične vrednosti, u tom kontaktu će nastupiti klizanje udesno ili ulevo, tj. zapoćeće računanje atributa kretanja i sila u štapovima po novom modelu, i to od trenutka kada je ustanovljeno da je uslov za stik narušen.

3.2.4 Uslovi koji određuju novo stanje sistema po završetku faze klizanja u određenom kontaktu

Ako se u oba kontakta sila trenja definiše Kulonovim zakonom na nivou ubrzanja, iz diferencijalnih jednačina kretanja (3.9)₁ i (3.12) može se ustanoviti kako će se proučavani sistem ponašati nakon trenutka t^* , u kojem je završena faza relativnog kretanja

Tabela 3.2. Uslovi koji određuju novu fazu ponašanja sistema prema analizi prvog kontakta.

Završen	Uslov	Da	Ne
Add	$U_1\text{Add: } \xi f_1(t^*) - \xi \mu_2 > U \sin(\Omega t^*) + \xi \mu_1 \eta + \xi f_2(t^*) \rightarrow$	Bld	Csd
Bld	$U_1\text{Bld: } \xi f_1(t^*) - \xi \mu_2 < U \sin(\Omega t^*) - \xi \mu_1 \eta + \xi f_2(t^*) \rightarrow$	Add	Csd
Ddl	$U_1\text{Ddl: } \xi f_1(t^*) + \xi \mu_2 > U \sin(\Omega t^*) + \xi \mu_1 \eta + \xi f_2(t^*) \rightarrow$	Ell	Fsl
Ell	$U_1\text{Ell: } \xi f_1(t^*) + \xi \mu_2 < U \sin(\Omega t^*) - \xi \mu_1 \eta + \xi f_2(t^*) \rightarrow$	Ddl	Fsl
Gds	$U_1\text{Gds: } \xi f_1(t^*) + \xi q_2(t^*) > U \sin(\Omega t^*) + \xi \mu_1 \eta + \xi f_2(t^*) \rightarrow$	Hls	Iss
Hls	$U_1\text{Hls: } \xi f_1(t^*) + \xi q_2(t^*) < U \sin(\Omega t^*) - \xi \mu_1 \eta + \xi f_2(t^*) \rightarrow$	Gds	Iss

Tabela 3.3. Uslovi koji određuju novu fazu ponašanja sistema prema analizi drugog kontakta.

Završen	Uslov	Da	Ne
Add	$U_2\text{Add: } (1 + \xi) f_2(t^*) - \xi \mu_1 \eta > \xi f_1(t^*) + (1 + \xi) \mu_2 \rightarrow$	Ddl	Gds
Bld	$U_2\text{Bld: } (1 + \xi) f_2(t^*) + \xi \mu_1 \eta > \xi f_1(t^*) + (1 + \xi) \mu_2 \rightarrow$	Ell	Hls
Csd	$U_2\text{Csd: } (1 + \xi) f_2(t^*) + \xi q_1(t^*) > \xi f_1(t^*) + (1 + \xi) \mu_2 \rightarrow$	Fsl	Iss
Ddl	$U_2\text{Ddl: } (1 + \xi) f_2(t^*) - \xi \mu_1 \eta < \xi f_1(t^*) - (1 + \xi) \mu_2 \rightarrow$	Add	Gds
Ell	$U_2\text{Ell: } (1 + \xi) f_2(t^*) - \xi \mu_1 \eta < \xi f_1(t^*) - (1 + \xi) \mu_2 \rightarrow$	Bld	Hls
Fsl	$U_2\text{Fsl: } (1 + \xi) f_2(t^*) + \xi q_1(t^*) < \xi f_1(t^*) - (1 + \xi) \mu_2 \rightarrow$	Csd	Iss

u nekom kontaktu. U sledećim tabelama prikazani su uslovi koji se proveravaju u slučaju da je u prvom (tabela 3.2) ili u drugom (tabela 3.3) kontaktu završena faza relativnog kretanja, kao i dinamički modeli koji slede u zavisnosti od ispunjenosti odgovarajućeg uslova.

Svakom uslovu iz prethodne dve tabele dat je naziv tako što je uz ime modela na koji se odnosi dodata oznaka U_1 ili U_2 u zavisnosti od toga da li se radi o prvom ili drugom kontaktu.

Treba napomenuti da se i prilikom određivanja ponašanja sistema sa tri bloka pri seizmičkom dejstvu, javlja problem usled smanjenja koraka integracije neposredno pred promenu dinamičkog modela, ukoliko je završena faza klizanja u jednom kontaktu. Da bi se održao konstantan korak tokom jedne faze kretanja, kako to zahteva odabrani Grunvald-Letnikovljev numerički postupak, primeniće se metod koji je opisan u prethodnom poglavlju, tako što će se i ovde izvršiti povećanje koraka integracije kako bi se iz t^* stiglo u t^{**} sa celim brojem koraka koji su konstantne veličine, uz primenu interpolacionih funkcija $x_{1int}(t)$, $x_{2int}(t)$, $f_{1int}(t)$, $f_{2int}(t)$ za korektan odabir podataka iz istorije deformacije. Sa t^* i t^{**} označeni su trenutak početka i završetka aktuelne faze sistema.

U dodatku B na kraju rada dat je grafički prikaz opisanog algoritma za rešavanje problema sa tri bloka. Program za izračunavanje rešenja napravljen je na osnovu tog algoritma u programskom paketu Mathematica.

Od interesa je prikazati i analizirati dobijena rešenja pri različitim vrednostima ulaznih parametara sistema. Zbog sinusne pobude, određeno vreme nakon početka njenog dejstva blokovi neće vršiti relativno kretanje, Iss, da bi nakon toga nastupila faza relativnog kretanja jednog ili oba bloka. Kretanje ove konstrukcije pod dejstvom seizmičke pobude posmatraće se samo do ulaska u zonu zastoja Iss prvi put, tj. do trenutka kada oba bloka uđu u fazu relativne ravnoteže. Do tog trenutka su,

zbog prirode odabranog modela pobude, najveća relativna kretanja i brzine blokova, pa samim tim i najveća disipacija energije. Nakon toga, postoji mogućnost da u nastavku delovanja opterećenja, do relativnog kretanja više i ne dođe, dok je druga mogućnost da će jedan ili oba bloka ponovo ući u fazu relativnog kretanja, što bi na neki način predstavljalo ponavljanje ciklusa, samo ovaj put pri manjim amplitudama pobude.

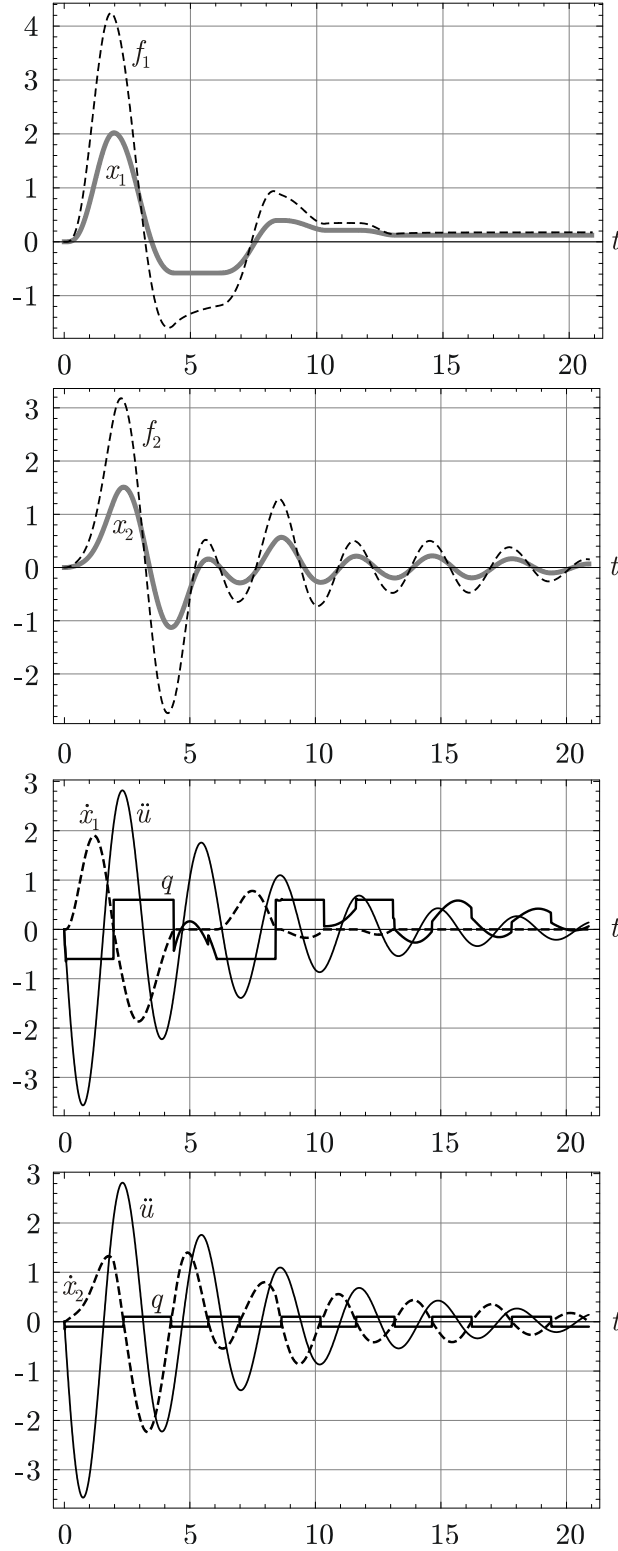
Oznaka „n.r.” označava slučaj koji se ne uzima u razmatranje, a to je onaj u kojem do promene stanja u oba kontakta dolazi istovremeno, tj. u istom koraku integracije. Zbog relativno malih vrednosti koraka integracije uvedena je pretpostavka da se ovakav slučaj neće dogoditi posle završetka bilo koje faze osim Iss, iz koje sistem započinje kretanje, kada još nije bilo deformacije štapova. Tokom deformisanja viskoelastičnih štapova dolazi i do pomeranja ravnotežnog položaja sistema usled procesa relaksacije, v. Rozikin i dr. [107, 2010], koji je karakterističan za realne materijale. Iako pri odabranom modelu zemljotresa sistem iz stanja ravnoteže može da uđe samo u fazu relativnog kretanja blokova udesno, grafičkim prikazom algoritma u dodatku B na kraju rada, obuhvaćene su i sve ostale mogućnosti, čime je omogućeno određivanje ponašanja sistema i pri drugačijim modelima seizmičkog dejstva.

3.3 Rezultati

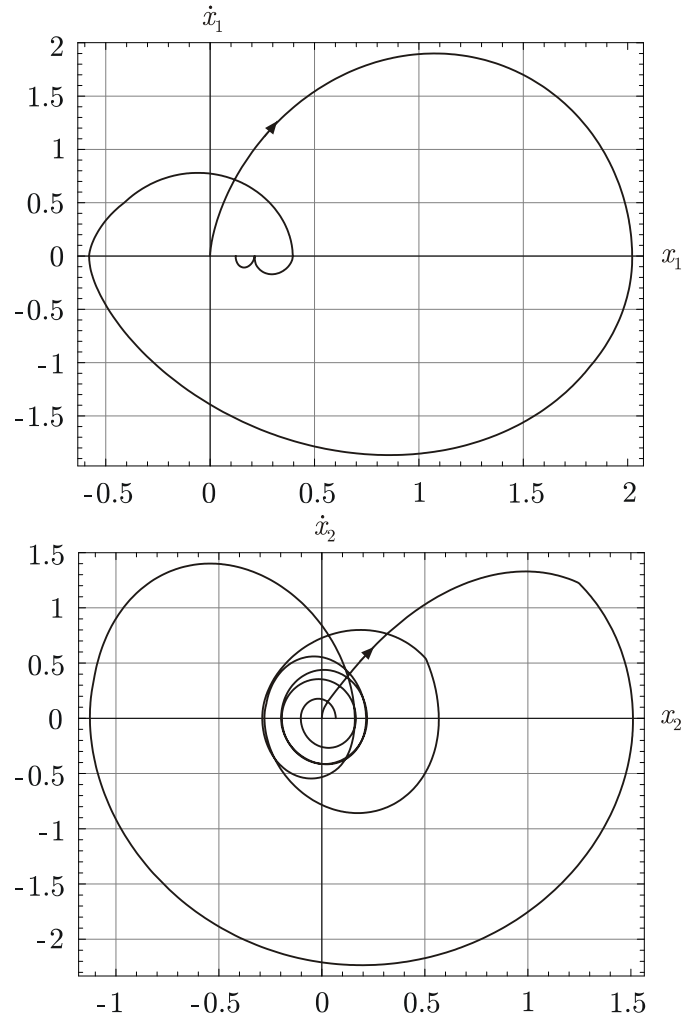
Većina objavljenih rezultata vezanih za probleme koji uključuju suvo trenje odnosi se na sisteme sa jednim stepenom slobode, v. [65, 1994], Lopez i dr. [77, 2004], Lopez i Nijmejer [78, 2005], Stein i dr. [119, 2007]. Pomoću numeričke procedure i algoritma za rešavanje, opisanih u prethodnom odeljku, ovde će se prikazati rešenja problema oscilovanja sistema sa dva stepena slobode, za različite slučajeve viskoelastičnih materijala, različite vrednosti koeficijenata trenja i odnosa masa blokova. Posmatraće se ponašanje konstrukcije od tri bloka pri seizmičkom dejstvu do trenutka T_{ss} kada sistem prvi put uđe u zonu zastoja Iss, tj. kada prestane relativno kretanje oba bloka. I rezultati ove sekcije se mogu smatrati potpuno novim.

Kao prvi slučaj uzeće se sistem kod kojeg su srednji i gornji blok iste mase pa je $\xi = 1$, oba viskoelastična štapa su od istog materijala, $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\varepsilon = 1$, koeficijenti trenja među kontaktnim površinama su $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, dok su parametri seizmičke pobude $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$. Na slici 3.3 prikazana su relativna pomeranja i brzine, sile u štapovima, sile trenja, kao i funkcija pobude, u zavisnosti od vremena, dok je na slici 3.4 dato rešenje u faznoj ravni za isti sistem. U trenutku $T_{ss} = 20.891$ relativne brzine oba bloka postaju jednake nuli i sistem tada ulazi u zonu zastoja. Disipacija energije za to vreme iznosi $\Delta(T_{ss}) = 7.402$, gde je disipacija u prvom kontaktu $\Delta_{1VE}(T_{ss}) = 2.499$, $\Delta_{1TR}(T_{ss}) = 1.761$, dok je u drugom kontaktu $\Delta_{2VE}(T_{ss}) = 2.555$, $\Delta_{2TR}(T_{ss}) = 0.587$. Kao i u slučaju dva bloka, iz ovog primera se vidi da pri manjim vrednostima koeficijenata trenja, disipacija putem deformacije viskoelastičnih elemenata ima značajan udeo u ukupnoj disipaciji.

Ako se sada u konstrukciju ugrade prigušivači od drugog materijala, te se ona izloži istoj pobudi kao u prethodnom primeru, dobijaju se rešenja koja u faznoj ravni



Slika 3.3. Rešenje za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 1$, $\varepsilon = 1$.

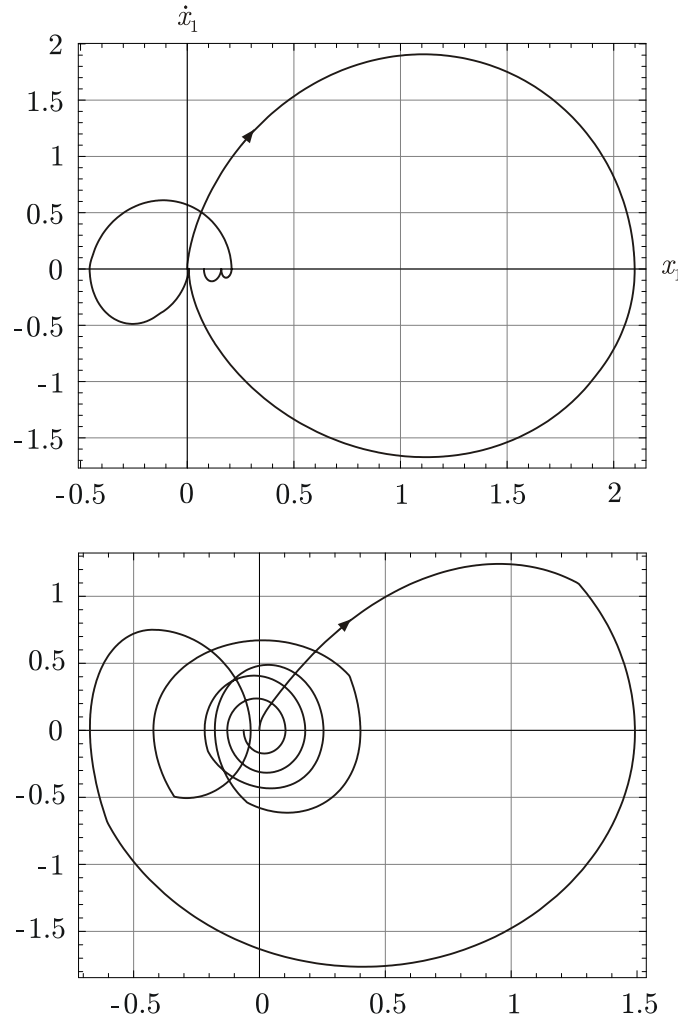


Slika 3.4. Trajektorije u faznim ravnima za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 1$, $\varepsilon = 1$.

izgledaju kao na slici 3.5. Vreme potrebno za ulazak u zonu zastoja je nešto kraće nego u prethodnom slučaju i iznosi $T_{ss} = 19.241$, dok je disipacija energije veća, tj. $\Delta(T_{ss}) = 8.454$, gde je u prvom kontaktu $\Delta_{1VE}(T_{ss}) = 3.315$, $\Delta_{1TR}(T_{ss}) = 1.635$, dok je u drugom kontaktu $\Delta_{2VE}(T_{ss}) = 2.96$, $\Delta_{2TR}(T_{ss}) = 0.545$. Značajne razlike su u delovima koji se odnose na prigušenje viskoelastičnim elementima, pri čemu se pokazuje da materijal sa većim redom izvoda ostvaruje veću disipaciju energije.

Ukoliko se poveća koeficijent trenja μ_2 , i uzme se da je $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$, vreme potrebno za ulazak u zonu zastoja se skraćuje tako da je za prvi slučaj $T_{ss} = 11.334$, pri čemu je disipacija energije $\Delta(T_{ss}) = 8.365$, dok u drugom slučaju, gde je $\alpha = 0.49$, to vreme iznosi $T_{ss} = 11.322$, a $\Delta(T_{ss}) = 9.458$. Povećano trenje u ova dva slučaja dovelo je do veće disipacije energije, mereno do trenutka kada prestaje relativno kretanje blokova. Fazni portreti za ova dva slučaja prikazani su na slici 3.6.

Kod proučavanog sistema sa dva stepena slobode može se ispitati uticaj odnosa ξ masa gornjeg i srednjeg bloka na njihovo kretanje. Slučaj gde je $\xi = 1$ je već prikazan kao prvi primer ovog odeljka, dok je slučaj kada gornji blok ima pet puta manju masu

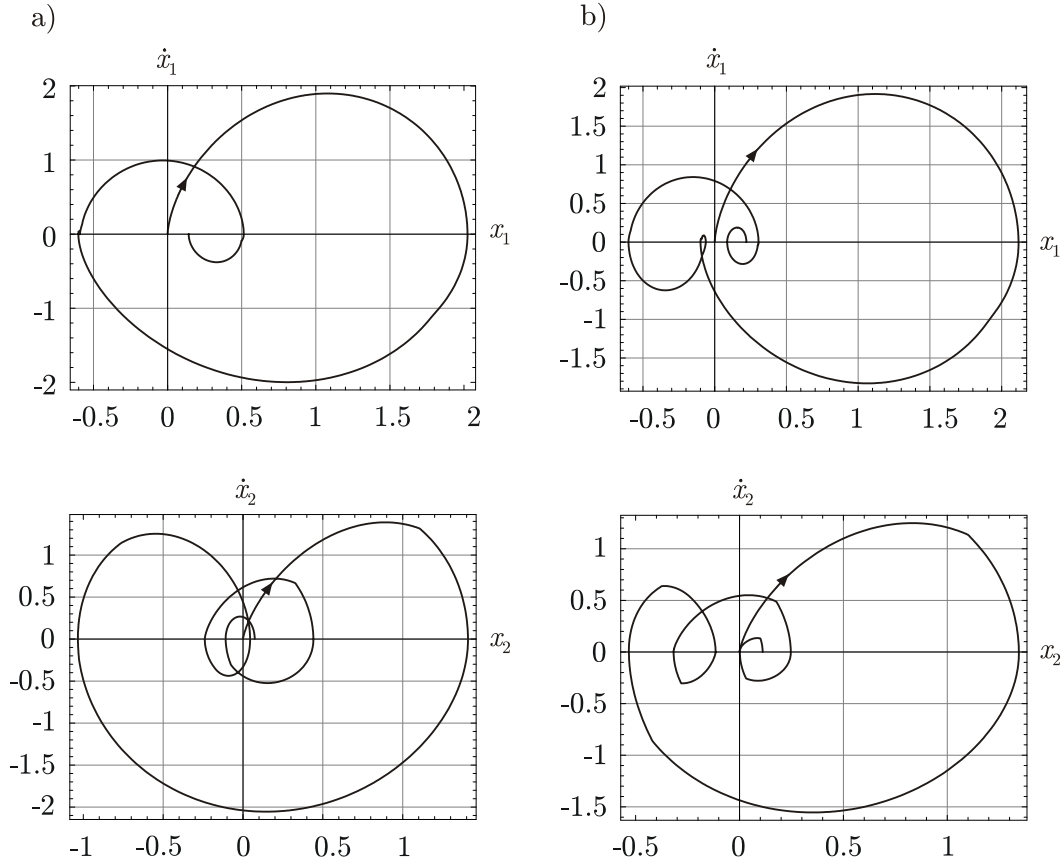


Slika 3.5. Trajektorije u faznim ravnima za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 0.886$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 1$, $\varepsilon = 1$.

od srednjeg, tj. $\xi = 0.2$ dat na slikama 3.7 i 3.8. Ovde je $T_{ss} = 23.741$, a disipacija energije iznosi $\Delta(T_{ss}) = 9.618$, pri čemu najveći doprinos ima $\Delta_{1VE}(T_{ss}) = 5.368$.

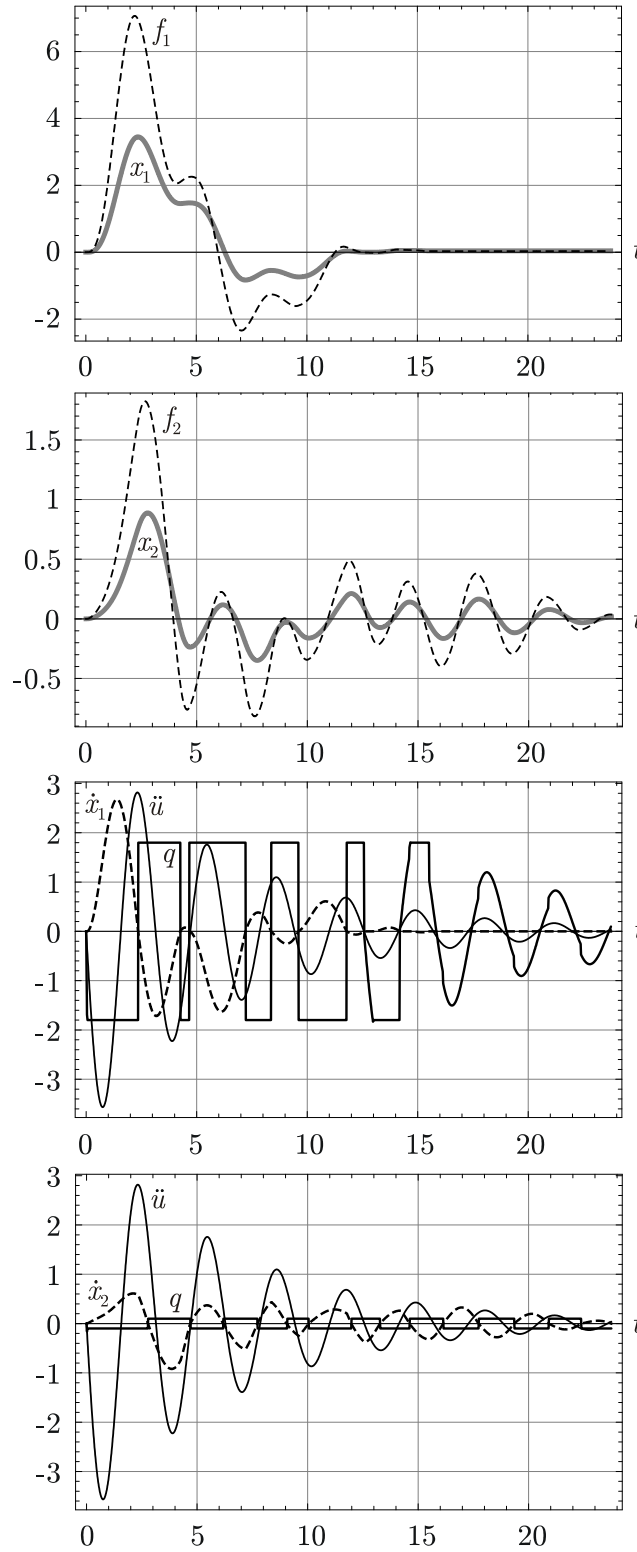
Ukoliko je situacija obrnuta, pa gornji blok ima pet puta veću masu od srednjeg, za $\xi = 5$, rešenje u faznoj ravni može se videti na slici 3.9. U tom slučaju amplitude oscilovanja i relativne brzine oba bloka su mnogo manje, što se odražava na disipaciju, pa je ona znatno manja, $\Delta(T_{ss}) = 5.706$, pri čemu je i vreme do prvog ulaska u zonu zastoja kraće i iznosi $T_{ss} = 8.341$.

Pri manjim kružnim frekvencijama seizmičke pobude očekuju se i manje frekvencije oscilovanja blokova. Vrednosti relativnog pomeranja srednjeg bloka x_1 u slučaju $\xi = 0.5$ kao i $\xi = 3$ prikazane su na slici 3.10. Primećuje se bitna razlika između ova dva slučaja, jer za $\xi = 0.5$ kretanje srednjeg bloka prelazi iz jedne faze klizanja u drugu, isprekidana linija, dok u slučaju u kojem srednji blok ima tri puta manju masu od gornjeg, srednji blok vrši oscilovanje sa zaustavljanjem, stik-slip, gde se uočavaju dva zastoja tokom jednog perioda, deblja puna linija.

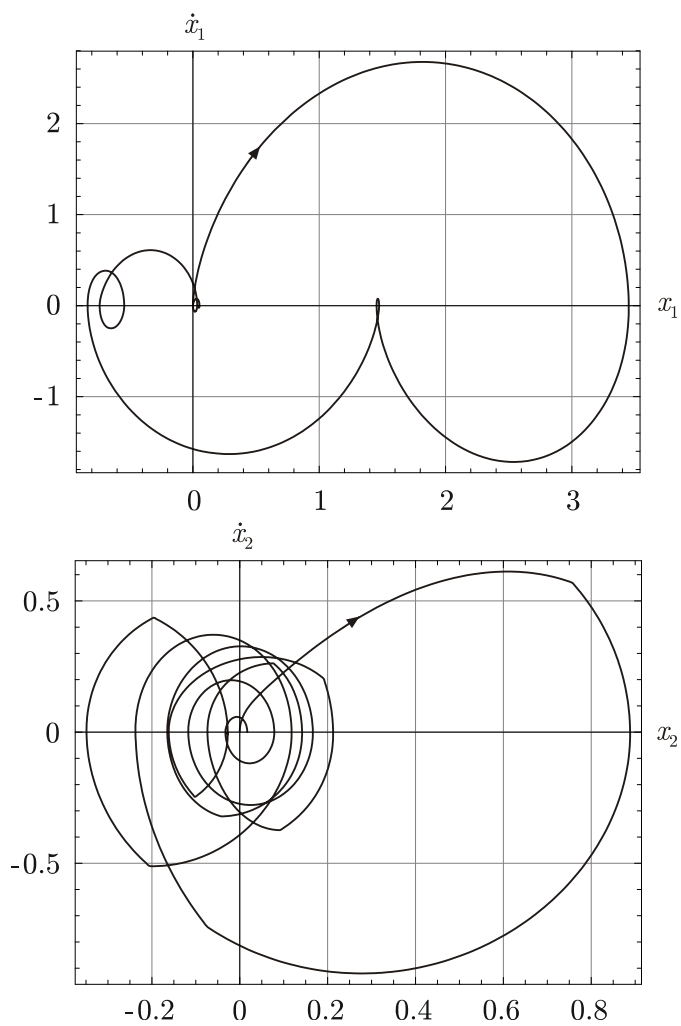


Slika 3.6. Trajektorije u faznim ravnima za vrednosti parametara $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.3$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 1$, $\varepsilon = 1$, a parametri viskoelastičnih štapova su: a) $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\beta} = 1.183$, b) $\alpha = \beta = 0.49$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.886$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 5 \cdot 10^{-8}$.

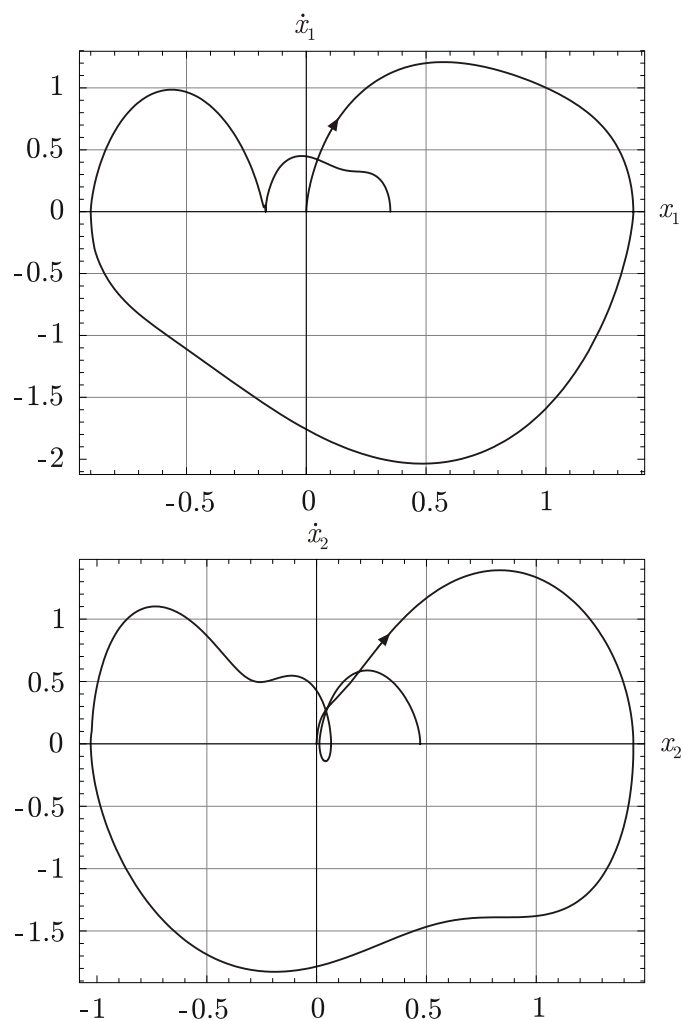
Analiza uticaja odnosa masa blokova kod sistema sa dva stepena slobode relativnog kretanja pokazala je da se veća disipacija u sistemu ostvaruje kada je masa gornjeg bloka manja od mase srednjeg bloka. Promenom frekvencije seizmičkog dejstva registruje se promena frekvencije relativnog kretanja blokova, koje se može vršiti na dva načina, i to: prelazak iz jedne faze klizanja u drugu, ili oscilacije sa povremenim zaustavljanjem (stik-slip), na šta se može uticati odnosom masa blokova ξ , kao na slici 3.10, ali i drugim parametrima.



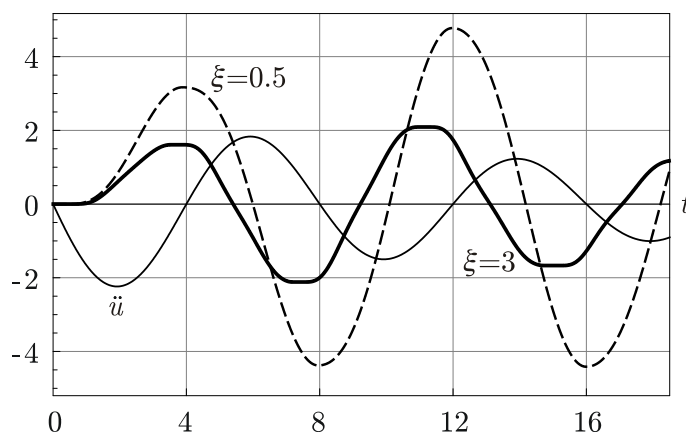
Slika 3.7. Rešenje za $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 0.2$, $\varepsilon = 1$.



Slika 3.8. Trajektorije u faznim ravnima za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 0.2$, $\varepsilon = 1$.



Slika 3.9. Trajektorije u faznim ravninama za vrednosti parametara $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $U = 4$, $\Omega = 2$, $\kappa = 0.15$, $\xi = 5$, $\varepsilon = 1$.



Slika 3.10. Dva različita načina kretanja srednjeg bloka za: $\alpha = \beta = 0.23$, $\tau_{f\alpha} = \tau_{f\beta} = 0.004$, $\tau_{x\alpha} = \tau_{x\alpha\beta} = 1.183$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.3$, $U = \pi^2/4$, $\Omega = \pi/4$, $\kappa = 0.05$, $\varepsilon = 1$. Isprekidanom linijom označeno je relativno pomeranje x_1 u slučaju $\xi = 0.5$, dok deblja puna linija predstavlja x_1 za $\xi = 3$.

4. Zaključna razmatranja

U ovoj tezi proučene su nelinearne prinudne oscilacije konstrukcije u obliku stuba, čije kretanje je izazvano specijalno izabranim horizontalnim seizmičkim dejstvom. Nelinearnost u sistemu je posledica prisustva suvog trenja između blokova, modeliranog Kulonovim zakonom uzetim u obliku neglatke viševrednosne funkcije. Pored strogog disipativnog procesa kao posledice prisustva suvog trenja, do disipacije energije u sistemu dolazi i zbog deformacije viskoelastičnih elemenata, za čije opisanje je korišćen modifikovani Zenerov model, koji sadrži frakcione izvode napona i deformacije, kao i ograničenja na koeficijente u modelu koja su posledica drugog zakona termodinamike. Ove konstitutivne jednačine zajedno sa osnovnom aksiomom dinamike i principom određenosti Njutn-Laplase, dovode do sistema koji odgovara viševrednosnim diferencijalnim jednačinama proizvoljnog realnog reda. Egzistencija rešenja takvog sistema potvrđena je primenom Laplasovih transformacija i formulacijom problema u ekvivalentnom obliku Košijevog problema za diferencijalno-integralne inkluzije, za koji postoji rezultat o egzistenciji. Taj deo teze predstavlja proširenje studije običnih diferencijalnih jednačina tipa Filipova na diferencijalne jednačine proizvoljnog realnog reda. Postavljeni Košijev problem predstavlja uopštenje klasičnog problema ponašanja konstrukcija pod dejstvom seizmičkog opterećenja, jer objedinjuje necele izvode kao nelokalne operatore sa teorijom neglatkih viševrednosnih funkcija, što je potpuno nov rezultat. Potpuno novim se smatra i predložena numerička procedura za rešavanje postavljenog problema u ovom radu. Ta procedura bazira se na upotrebi slek promenljive kojom se određuju trenuci u kojima sistem prelazi sa jednog dinamičkog modela na drugi. Ovaj prelaz praćen je i promenom koraka integracije u pojedinim fazama kretanja, koja sa primenom interpolacionih funkcija služi za korektno odabiranje podataka iz istorije deformacije, čime je omogućeno rešavanje problema koji kombinuje istovremeni rad sa viševrednosnim funkcijama i nelokalnim operatorima.

Za svaku fazu kretanja (kod sistema sa jednim relativnim stepenom slobode ima ih tri, a kod sistema od tri bloka sa dva stepena slobode relativnog kretanja ima ih devet) formirani su odgovarajući dinamički modeli, kao i uslovi pri kojima dolazi do prelaza sa jednog modela na drugi. Grafički prikaz algoritma za rešavanje postavljenog problema prikazan je u dva dodatka na kraju rada.

Simulacijom kretanja proučavane konstrukcije, odgovarajućim izborom ulaznih parametara uočeno je postojanje zona u kojima nema relativnog kretanja, i pojava tzv. stik-slip prelaza tokom oscilovanja, koji su karakteristična posledica prisustva suvog trenja u sistemu. Pri promenama smera relativnog kretanja nastaju skokovite promene vrednosti sile trenja sa jedne granične vrednosti na drugu, dok

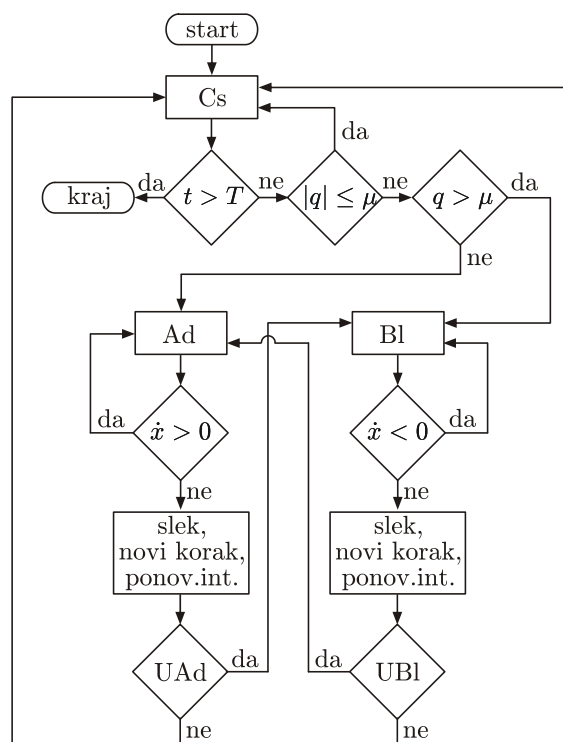
u stik fazi ona menja svoju vrednost održavajući fazu relativne ravnoteže sve dok se ne prekorači njena granična vrednost, kada sistem ulazi u fazu relativnog kretanja blokova, slike 2.5 i 2.8. Tokom integracije diferencijalnih jednačina kretanja praćena je disipacija energije, kao zbir članova koji predstavljaju udeo suvog trenja i udeo deformisanja viskoelastičnog elementa. Kvantitativno je ustanovljeno kako red izvoda u modifikovanom Zenerovom modelu, razlika u relaksacionim konstantama i koeficijent suvog trenja klizanja utiču na disipaciju energije, što nije bez značaja za inženjerske primene.

Na kraju evo i mogućih pravaca za nastavak ovih istraživanja.

Sa aspekta inženjerske analize prvo bi se mogao ispitati odziv proučavane konstrukcije pri složenijim modelima seizmičkog dejstva. Zatim bi se moglo analizirati redno postavljanje viskoelastičnog i frikcionog elementa, gde bi prvi mehanizam rasipao energiju pri dejstvu vetra i zemljotresa srednje jačine, dok bi pri jačim zemljotresima bio aktiviran i mehanizam sa suvim trenjem, v. Hausner i dr. [61, 1997]. Druga mogućnost je da se dve obližnje konstrukcije, od kojih je svaka snabdevena viskoelastičnim sistemom zaštite, povežu međusobno frikcionim elementom, gde bi se optimalnim izborom parametara trenja značajno umanjile amplitude oscilovanja tako uparenih konstrukcija, v. Baskararao i Jangid [20, 2006]. Važno je napomenuti da je prilikom upotrebe elemenata zaštite na principu trenja, potrebno minimizirati povremeno zaustavljanje kliznih elemenata tokom jednog perioda oscilovanja (stik-slip efekat) kako ne bi došlo do pobude visoke frekvencije, v. Hausner i dr. [61, 1997], Hong i Lu [64, 1997]. U praksi se pokazalo da ugradnja viskoelastičnih i frikcionih prigušivača u konstrukcije izložene seizmičkim dejstvima smanjuje prouzrokovana oštećenja. Odgovarajućim izborom viskoelastičnih materijala u kombinaciji sa suvim trenjem, šteta bi se mogla još umanjiti ili čak potpuno eliminisati, pa bi se istraživanje moglo nastaviti u pravcu optimizacije izbora parametara sistema pasivne seizmičke zaštite, gde bi se kao kriterijumi optimizacije koristile amplitude oscilovanja konstrukcije ili disipacija energije, v. Lopez i dr. [77, 2004], Baskararao i Jangid [20, 2006]. Može se pretpostaviti da se vrednosti parametara konstitutivnog modela viskoelastičnog tela (2.4), određene relativno jednostavnim eksperimentima puzanja i relaksacije napona, mogu koristiti za precizna predviđanja ponašanja sistema prilikom izlaganja drugoj vrsti opterećenja, tj. tokom oscilovanja, ali bi eksperimentalna potvrda ove pretpostavke bila korisna. Dakle jedan deo budućih istraživanja se može vezati za eksperimente.

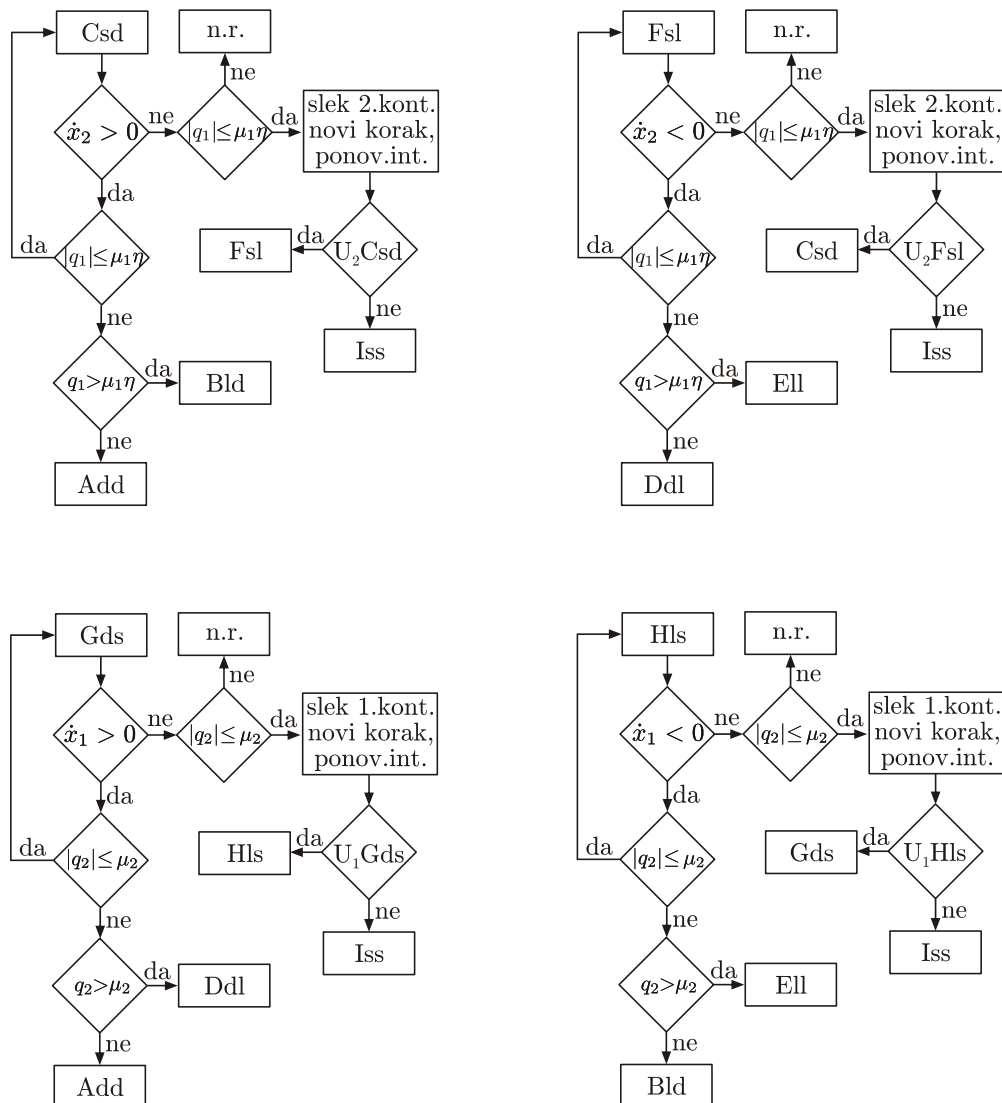
Predloženi postupak rešavanja problema koji povezuje neglatke sisteme sa frikcionim izvodima mogao bi se modifikovati zamenom Grunvald-Letnikovljeve numeričke procedure nekim od numeričkih postupaka sa promenljivim korakom integracije, čime bi se mogla povećati efikasnost metoda. Takođe, bi se mogla koristiti Atanackovićeva i Stankovićeva ekspanzija Riman-Ljuvilovih izvoda proizvoljnog realnog reda preko momenata funkcije i običnih - celobrojnih izvoda kojom se sistem viševrednosnih diferencijalnih jednačina proizvoljnog realnog reda svodi na sistem viševrednosnih diferencijalnih jednačina znatno višeg ali celobrojnog reda. Pored prednosti, jer se za numericko rešavanje u tom slučaju mogu koristiti standardni metodi neglatke analize, ta ekspanzija dozvoljava i primenu klasičnih rezultata za diferencijalne jednačine tipa Filipova u kvalitativnoj analizi problema.

A. Dijagram toka podataka za slučaj dva bloka

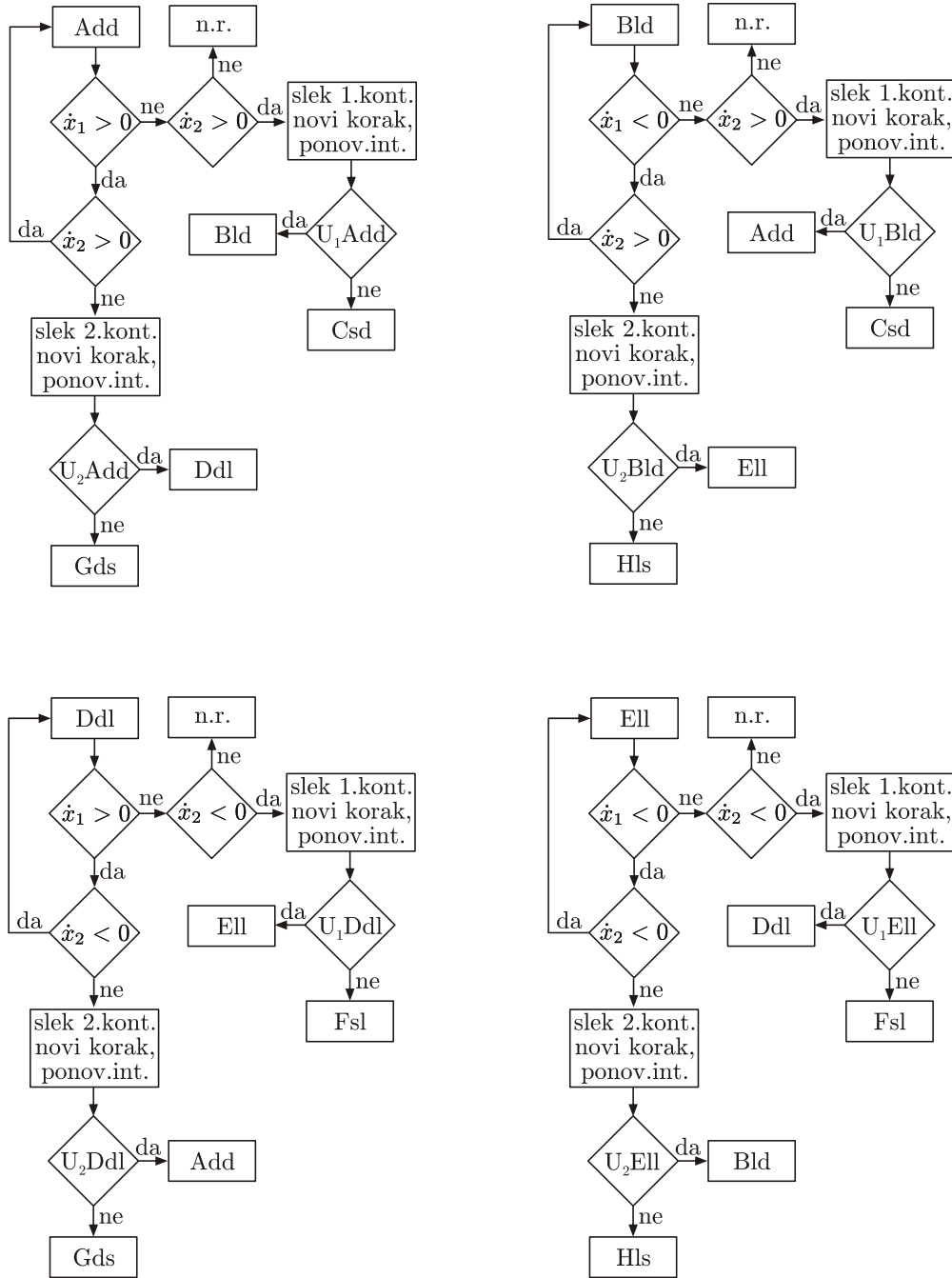


Slika A.1. Grafički prikaz algoritma za rešavanje problema kod slučaja dva bloka.

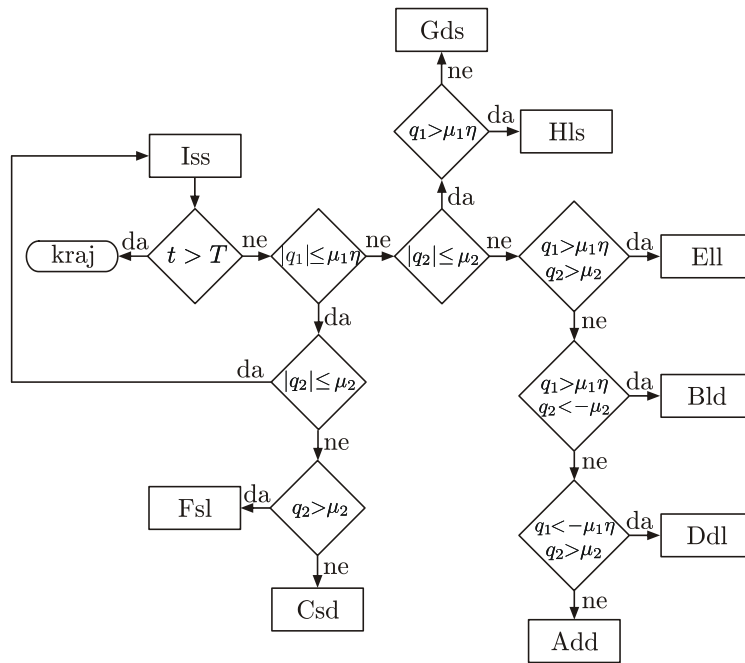
B. Dijagram toka podataka za slučaj tri bloka



Slika B.1. Grafički prikaz delova algoritma za rešavanje problema za slučaj tri bloka - modeli kod kojih je u jednom kontaktu klizanje a u drugom stik.



Slika B.2. Grafički prikaz delova algoritma za rešavanje problema za slučaj tri bloka - modeli kod kojih je u oba kontakta klizanje.



Slika B.3. Grafički prikaz dela algoritma za rešavanje problema za slučaj tri bloka - model Iss kod kojeg je u oba kontakta stik.

Literatura

1. Abdel-Ghaffar, A. M. & Rood, J. D. [1982] Simplified Earthquake Analysis of Suspension Bridge Towers, *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, **108** (EM2), 291–308.
2. Acary, V. & Brogliato, B. [2008] *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems: Applications in Mechanics and Electronics*, (Springer, Berlin).
3. Adam, M., Schmid, G. & Chouw, N. [2000] Investigation of ground motions and structural responses in near field due to incident waves, *Proceedings of 12th World Conference on Earthquake Engineering*, (New Zealand).
4. Adolfson, K., Enelund, M. & Larsson, S. [2004] Adaptive discretization of fractional order viscoelasticity using sparse time history, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **193**, 4567–4590.
5. Agarwal, R. P., Meehan, M. & O'Regan, D. [2001] *Nonlinear Integral Equations and Inclusions*, (Nova Science Publishers, New York).
6. Aničić, D., Fajfar, P., Petrović, B., Szavits A. & Tomažević, M. [1990] *Zemljotresno Inženjerstvo*, (Građevinska knjiga, Beograd).
7. Atanackovic, T. M. [2002] A modified Zener model of a viscoelastic body, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **14**, 137–148.
8. Atanackovic, T. M. [2003] On a distributed derivative model of a viscoelastic body, *C. R. Mecanique*, **331**, 687–692.
9. Atanackovic, T. M. & Spasic, D. T. [2004] On viscoelastic compliant contact-impact models, *Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics*, **71**, 134–138.
10. Atanackovic, T. M. & Stankovic, B. [2004] An expansion formula for fractional derivatives and its applications, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **3**, 365–378.
11. Atanackovic, T. M. & Stankovic, B. [2008] On a numerical scheme for solving differential equations of fractional order, *Mechanics Research Communications*, **35**, 429–438.
12. Atanackovic, T. M., Pilipovic, S. & Zorica, D. [2010] Distributed-order fractional wave equation on a finite domain: creep and forced oscillations of a rod, *Continuum Mech. Thermodyn.*, doi: 10.1007/s00161-010-0177-2.
13. Atanackovic, T. M., Pilipovic, S. & Zorica, D. [2011] Distributed-order fractional wave equation on a finite domain. Stress relaxation in a rod, *International Journal of Engineering Science*, **49**, 175–190.
14. Atici, F. M. & Sengul, S. [2010] Modeling with fractional difference equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **369**, 1–9.
15. Bagley, R. L. & Torvik P. J. [1983] Fractional Calculus—A different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures, *AIAA*, **21**, 741–748.
16. Bagley, R. L. & Torvik P. J. [1986] On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior, *Journal of Rheology*, **30**, 133–155.
17. Baleanu, D., Guvenc, Z. B. & Terneiro Machado, J. A. [2011] *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, (Springer, Dordrecht).
18. Bathurst, R. J. & Hatami, K. [1998] Seismic Response Analysis of a Geosynthetic-Reinforced Soil Retaining Wall, *Geosynthetics International*, **5**, 127–166.
19. Beyer, H. & Kempfle, S. [1995] Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **75**, 623–635.
20. Bhaskararao, A. V. & Jangid, R. S. [2007] Harmonic response of adjacent structures connected with a friction damper, *Journal of Sound and Vibration*, **292**, 710–725.
21. Brogliato, B. [1999] *Nonsmooth mechanics*, (Springer London).
22. Brogliato, B., Dam, A., Paoli, L., Genot, F. & Abadie, M. [2002] Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems, *Applied Mechanics Reviews* **55**, 107–150.
23. Canudas, C., Olsson, H., Astrom, K. J. & Lischinsky, P. [1995] A New Model for Control Systems with Friction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, 419–425.
24. Catania, G. & Sorrentino, S. [2007] Analytical modelling and experimental identification of viscoelastic mechanical systems, *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, 403-416, (Springer).
25. Cernea, A. [2010] Continuous version of Filipov's theorem for fractional differential inclusions, *Nonlinear Analysis*, **72**, 204–208.

26. Chang, T-s. & Singh, M. P. [2002] Seismic analysis of structures with a fractional derivative model of viscoelastic dampers, *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, **1**, 251–260.
27. Chopra, A. K. [2001] *Dynamics of Structures - Theory and Application to Earthquake Engineering*, (Prentice Hall, New Jersey).
28. Cichon, M. & Salem, H. A. H. [2010] Set-valued system of fractional differential equations with hysteresis, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3824–3829.
29. Cuesta, E. [2010] A variable step size numerical method based on fractional type quadratures for linear integro-differential equations, *Advances in Engineering Software*, **41**, 64–69.
30. Dahl, P. R. [1976] Solid Friction Damping of Mechanical Vibrations, *AIAA Journal*, **14**, 1675–1682.
31. Danca, M. F. [2010] Chaotic behavior of a class of discontinuous dynamical systems of fractional-order, *Nonlinear Dynamics*, **60**, 525–534.
32. Dankuc, D. V., Kovincic, N. I. & Spasic, D. T. [2010] *Proceedings of FDA'10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications*, (Badajoz, Spain), October 18-20, (Eds: I. Podlubny, B. M. Vinagre Jara, YQ. Chen, V. Feliu Batlle, I. Tejado Balsera). ISBN 9788055304878, Article No FDA10_156.
33. Debnath, L. [2004] A brief historical introduction to fractional calculus, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **35**, 487–501.
34. Demyanov, V. F. [2002] The rise of nonsmooth analysis: its main tools, *Cybernetics and System Analysis*, **38**, 527-547.
35. Diethelm, K. [1997] An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **5**, 1–6.
36. Diethelm, K. & Ford, N. J. [2001] Numerical solution of linear and non-linear fractional differential equations involving fractional derivatives of several orders, *Numerical Analysis Report*, No. 379, (The University of Manchester).
37. Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D. & Luchko, Yu. [2005] Algorithms for the fractional calculus: A selection on numerical methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrng*, **194**, 743–773.
38. Diethelm, K. [2009] An Improvement of a Nonclassical Numerical Method for the Computation of Fractional Derivatives, *Journal of Vibration and Acoustics*, **131**, article 014502.
39. Doetsch, G. [1961] *Guide to the Applications of Laplace Transforms*, (D. Van Nostrand Company LTD, London).
40. Dupont, P., Armstrong, B. & Hayward, V. [2000] Elasto-Plastic Friction Model: Contact Compliance and Stiction, *Proceedings of American Control Conference*, (Illinois, USA), 1072–1077.
41. Dupont, P., Hayward, V., Armstrong, B. & Altpeter, F. [2002] Single State Elasto-Plastic Models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**, 787–792.
42. Eich-Soelner, E. & Fuhrer, C. [1998] *Numerical Methods in Multibody Dynamics*, (B. G. Teubner, Stuttgart).
43. El-Sayed, A. M. A. & Ibrahim, A. G. [1995] Multivalued fractional differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, **68**, 15–25.
44. El-Sayed, A. M. A. & Ibrahim, A. G. [2001] Set-valued integral equations of fractional-orders, *Applied Mathematics and Computation*, **118**, 113–121.
45. Enelund, M. & Lesieutre G. A. [1999] Time domain modeling of damping using unelastic displacement fields and fractional calculus, *International Journal of Solids and Structures*, **36**, 4447–4472.
46. Enelund, M., Mahler, L., Runesson, K. & Josefson, B. L. [1999] Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws, *International Journal of Solids and Structures*, **36**, 2417–2442.
47. Fenander, A. [1997] Frequency dependent stiffness and damping of railpads, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F, Journal of Rail and Rapid Transit*, **211**, 51–62.
48. Fenander, A. [1998] A fractional derivative viscoelastic model included in a railway track model, *J. Sound Vibr.*, **212**, 889–903.
49. Fidlin, A. [2006] *Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering*, (Springer, Berlin).
50. Filippov, A. F. [1964] Differential equations with discontinuous right-hand side, *American Mathematical Society Translations*, **242**, 199–223.
51. Flores, P., Leine, R. & Glocker, Ch. [2009] Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach, *Multibody Syst Dyn*, doi:10.1007/s11044-009-9178-y.
52. Ford, N. J. & Simpson, A. C. [2001] Numerical and analytical treatment of differential equations of fractional order, *Numerical Analysis Report*, No. 387, (The University of Manchester).
53. Fukunaga, M. & Shimizu, N. [2010a] Nonlinear fractional-derivative models for viscoelastic materials. I. Physics and constitutive equations, In: *Proceedings of FDA'10. The 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, (Badajoz).
54. Fukunaga, M. & Shimizu, N. [2010b] Nonlinear fractional-derivative models for viscoelastic materials. II. Comparison of models with experimental data, In: *Proceedings of FDA'10. The 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, (Badajoz).
55. Garcia, C. [2008] Comparison of friction models applied to a control valve, *Control Engineering Practice*, **16**, 1231–1243.

56. Glocker, Ch. [2001] *Set-Valued Force Laws*, (Springer, Berlin).
57. Gorenflo, R., Loutchko, J. & Luchko Y. [2002] Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivative, *Fractional Calculus & Appl. Anal.*, **5**, 491–518.
58. Gorenflo, R. & Mainardi, F. [1997] Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order, In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, 223–276, (Springer Verlag, Wien and New York, 1997).
59. Grahovac, N. M. & Zigic, M. M. [2010] Modelling of the hamstring muscle group by use of fractional derivatives, *Computers and Mathematics with applications*, **59**, 1695–1700.
60. Grahovac, N. M., Zigic, M. M. & Spasic, D. T. [2011] On impact scripts with both fractional and dry friction type of dissipation, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, IJBC-D-11-00125, accepted for publication.
61. Hausner, G. W., Bergman, L. A., Caughey, T. K., Chassiakos, A. G., Claus, R. O., Masri, S. F., Skelton, R. E., Soong, T. T., Spencer, B. F. & Yao, J. T. P. [1997] Structural Control: Past, Present, and Future, *Journal of Engineering Mechanics*, **123**, 897–971.
62. Hilfer, R. [2000] *Applications of Fractional Calculus in Physics*, (World Scientific Publishong, Singapore).
63. Hilfer, R. & Seybold, H. [2006] Computation of the generaliyed Mittag-Leffler function and its inverse in the complex plane, *Integral Transforms and Special Functions*, **9**, 637–652.
64. Hong, H. K. & Liu, C. S. [2000] *Journal of Sound and Vibration*, **229**, 1171–1192.
65. Ibrahim, R. [1994] *Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos. Part II: Dynamics and modeling*, Appl Mech Rev, **47**, 227–253.
66. Jafari, H. & Daftardar-Gejji, V. [2006] Revised adomain decomposition for solving systems of ordinary and fractional differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, **181**, 598–608.
67. Karnopp, D. [1985] Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems, *Transactions of the ASME*, **107**, 100–103.
68. Kelly, R. & Lamas, J. [1999] Determination of viscous and Coulomb friction by using velocity responses to torque ramp inputs, *Proceedings of the 1999 IEEE, International Conference on Robotics & Automation*, (Detroit, Michigan).
69. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. & Trujillo, J. J. [2006] *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, (Elsevier, Amsterdam).
70. Kiryakova, V. S. [1993] *Generalized Fractional Calculus and Applications*, (Chapman & Hall).
71. Klimek, M. [2009] *On solutions of linear fractional differential equations of a variational type*, (Czestochowa University of Technology, Czestochowa).
72. Koh, C. G. & Kelly, J. M. [1990] Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **19**, 229–241.
73. Kunze, M. [2000] *Non-Smooth Dynamical Systems*, (Springer, Berlin).
74. Leine, R. I. & Nijmeijer, H. [2004] *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*, (Springer Verlag, Berlin).
75. Ramrakhiani, D. S., Lesieutre G. A. & Smith E. C. [2004] Modeling of elastomeric materials using nonlinear fractional derivative and continuously yielding friction elements, *International Journal of Solids and Structures*, **41**, 3929–3948.
76. Lewandowski, R. & Chorazyczewski, B. [2010] Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers, *Computers and Structures*, **88**, 1–17.
77. Lopez, I., Busturia, J. M. & Nijmeijer, H. [2004] Energy dissipation of a friction damper, *Journal of Sound and Vibration*, **278**, 539–561.
78. Lopez, I. & Nijmeijer, H. [2005] How important is the friction model on the modeling of energy dissipation?, *Proceedings of ENOC-2005*, August 7–12, Vol. 6, (Eindhoven).
79. Monje, A., Chen, YQ., Vinagre, B., Xue, D. & Feliu, V. [2010], *Fractional-order Systems and Controls*, (Springer, London).
80. Machado J. T., Kiryakova, V. & Mainardi, F. [2010] Recent history of fractional calculus, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, doi: 10.1016/j.cnsns.2010.5.027.
81. Magin, R. [2006] *Fractional Calculus in Bioengineering*, (Begell House, USA).
82. Mainardi, F. & Gorenflo, R. [2000] On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, **118**, 283–299.
83. Mainardi, F. [2010] *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, (Imperial College Press, London).
84. Monteiro Marques, M. D. P. [1993] *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems: Shocks and Dry Friction*, (Birkhauser, Basel).
85. Miksat, J., Wen, K. L., Wenzel, F., Sokolv, V. & Chen, C. T. [2010] Numerical modelling of ground motion in the Taipei Basin: basin and source effects, *Geophysical Journal International*, **183**, 1633–1647..
86. Miller, K. i Ross, B. [1993] *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, (John Willey, New York).
87. Narahari Achar, B. N., Hanneken, J. W. & Clarke, T. [2002] Response characteristics of a fractional oscillator, *Physica A*, **309**, 275–288.

88. Nasuno, H., Shimizu, N. & Fukunaga, M. [2007] Fractional derivative consideration on nonlinear viscoelastic statical and dynamical behavior under large pre-displacement, *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, 363-376, (Springer).
89. Odibat, Z. M. & Momani, S. [2008] An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order, *J. Appl. Math. & Informatics*, **26**, 15–27.
90. Oldham, K. B. & Spanier J. [1974] *The Fractional Calculus*, (Academic Press, London).
91. Ortigueira, M. D. [2011] *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*, (Springer, Dordrecht).
92. Ouahab, A. [2008] Some results for fractional boundary value problem of differential inclusions, *Non-linear Analysis*, **69**, 3877–3896.
93. Papaloizou, L., Polycarpou, P. & Komodromos, P. [2007] Investigation of the response of ancient columns under seismic excitations, *Proceedings of 8th HSTAM International Congress on Mechanics*, (Patras).
94. Penestri, E., Valentini, P. P. & Vita, L. [2007] Multibody dynamics simulation of planar linkages with Dahl friction, *Multibody Syst Dyn*, **17**, 321–347, doi:10.1007/s11044-007-9047-5.
95. Petrović, Lj. M. Spasić, D. T. & Atanacković, T. M. [2005] On a mathematical model of a human root dentin, *Dental Materials*, **21**, 125–128.
96. Pekcan, G., Mander J. B. & Chen, S. S. [1995] The Seismic Response of a 1:3 Scale Model R. C. Structure with Elastomeric Spring Dampers, *Earthquake Spectra*, **11**, 249–267.
97. Pfeifer, F. & Glocker, C. [1995] *Multybody Dynamics with Unilateral Contacts*, (John Wiley, New York).
98. Podlubny, I. [1999] *Fractional Differential Equations*, (Academic Press, San Diego).
99. Popp, K. [2000] Nonsmooth mechanical systems, *J. Appl. Maths Mechs*, **64**, 765–772.
100. Rezaeian, S. & Kiureghian, A. D. [2011] Simulation of orthogonal horizontal ground motion components for specified earthquake and site characteristics, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, doi: 10.1002/eqe.1132.
101. Richard, C. & Cutkosky, M. R. [2002] Friction modeling and display in haptic applications involving user performance, *Proceedings of the 2002 IEEE, International Conference on Robotics & Automation*, (Washington, DC).
102. Ricker, N. H. [1977] *Transient waves in viscoelastic media*, (Elsevier, Amsterdam).
103. Rossikhin, Y. A. & Shitikova, M. [1997] Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass systems, *Acta Mechanica.*, **120**, 109–125.
104. Rossikhin, Y. A. & Shitikova, M. [1997] Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids, *Appl. Mech. Rev.*, **50**, 15–67.
105. Rossikhin Y. A. & Shitikova, M. [2008] Free damped vibrations of a viscoelastic oscillator based on Rabotnov's model, *Mech Time-Depend Mater*, **12**, 129–149, doi: 10.1007/s11043-008-9053-x.
106. Rossikhin, Y. A. & Shitikova, M. [2010] Application of fractional calculus to dynamic problems of solid mechanics: Novel Trends and Recenr Results, *Appl. Mech. Rev.*, **63**, 1–52.
107. Rossikhin, Y. A., Shitikova, M. & Shcheglova, A. [2010] Analysis of free vibrations of a viscoelastic oscillator via the models involving several fractional parameters and relaxation/retardation times, *Computers and Mathematics with Applications*, **59**, 1727–1744.
108. Sabatier, J., Agrawal, O. P. & Tenreiro Machado, J. A. [2007] *Advances in Fractional Calculus*, (The Netherlands).
109. Samko, S. G., Kilbas, A. K. & Marichev, O. I. [1987] *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, (Nauki i Tekhnika, Minsk).
110. Schmidt, A. & Gaul, L. [2006] On a critique on a numerical scheme for the calculation of fractionally damped dynamical systems, *Mechanics Research Communications*, **33**, 99–107.
111. Seybold, H. & Hilfer, R. [2008] Numerical algorithm for calculating the generalized Mittag-Leffler Function, *SIAM J. Numer. Anal.*, **47**, 69–88.
112. Shakib, H., Datta, T. K. & Kazimi S. M. A. [1991] Response of torsionally coupled systems to random ground motion, *J. Eur. Earth. Eng.*, **3**, 16–21.
113. Shen, K. L. & Soong, T. T. [1995] Modeling of Viscoelastic Dampers for Structural Applications, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, **121**, 694-700
114. Shih, T. Y. & Lin, Y. K. [1982] Vertical seismic load effect on hysteretic columns, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, **108**, 242–254.
115. Smirnov, G. V. [2002] *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, (American Mathematical Society, USA).
116. Spasic, D. T. & Charalambakis, N. C. [2002] Forced vibrations with fractional type of dissipation, *Proceedings of the International Conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering*, Thessaloniki, 323-330.
117. Spasic, D. T., Nedeljkov, M. & Milutinovic, M. [2004] A note on airplane landing problem, *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, (Bordeaux, France).
118. Spasić, D. T. [2011] *Mehanika: osnove, opšte, proširenja*, Univerzitet u Novom Sadu, u pripremi.
119. Stein, G. J., Zahoransky, R. & Mucka, P. [2008] On dry friction modelling and simulation in kinematically excited oscillatory systems, *Journal of Sound and Vibration*, **311**, 74–96.
120. Thomson, W. T. [1960] *Laplace Transformation*, (Prentice-Hall, New Jersey).

121. Torvik, P. J. & Bagley, R. L. [1984] On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials, *Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics*, **51**, 294–298.
122. Turner, J. D. [2001] On the simulation of discontinuous functions, *Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics*, **68**, 751–757.
123. Yuan, L. & Agrawal, O. P. [2002] A numerical scheme for dynamic systems containing fractional derivatives, *Journal of Vibration and Acoustics*, **124**, 321–324.
124. Zhang, C., Chen, H. & Li, M. [2007] Earthquake accelerogram simulation with statistical law of evolutionary power spectrum, *Acta Seismologica Sinica*, doi: 10.1007/s11589-007-0435-y.
125. Zigic, M. M., Grahovac, N. M. & Spasic, D. T. [2007] A Simplified Earthquake Dynamics of a Column Like Structure With Fractional Type of Dissipation, *Proceedings of 1st International Congress of Serbian Society of Mechanics*, (Serbia).
126. Žigić, M. [2008] *Oscilacije strukture sa frakcionim tipom disipacije pri seizmičkom dejstvu*, (Magistarska teza, Univerzitet u Novom Sadu).
127. Zigic, M. M. & Grahovac, M. N. [2011] Dynamical behavior of a polymer gel during impact. Fractional derivative viscoelastic model, *Proceedings of 3rd International Congress of Serbian Society of Mechanics*, (Serbia).



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	монографска публикација
Тип записа, ТЗ:	текстуални штампани материјал
Врста рада, ВР:	докторска дисертација
Аутор, АУ:	Миодраг Жигић
Ментор, МН:	проф. др Драган Спасић
Наслов рада, НР:	Осцилације конструкције са пасивним пригушивачима фракционог типа и сувим трењем при сеизмичком дејству
Језик публикације, ЈП:	српски (латиница)
Језик извода, ЈИ:	српски (ћирилица) / енглески
Земља публикавања, ЗП:	Србија
Уже географско подручје, УГП:	Војводина
Година, ГО:	2011.
Издавач, ИЗ:	ауторски репринт
Место и адреса, МА:	21000 Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	4 / 71+8 / 127 / 3 / 35 / 0 / 2
Научна област, НО:	Механика
Научна дисциплина, НД:	Механика
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Сеизмички одговор, осцилације, фракциони извод, вискоеластичност, трење, неглатка вишесредносна функција
УДК	
Чува се, ЧУ:	Библиотека Факултета техничких наука, 21000 Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Важна напомена, ВН:	
Извод, ИЗ:	Проучено је осцилаторно кретање и дисипација енергије стуба направљеног од неколико крутих блокова, који при хоризонталном сеизмичком дејству могу да клизе један по другом. Поред међусобног контакта са трењем, које је моделирано неглатком вишесредносном функцијом, везе између блокова садрже и вискоеластичне елементе, чије конститутивне релације укључују фракционе изводе, као и ограничења на коефицијенте која следе из Клаузиус-Дијемове неједнакости. Постављени Кошијев проблем представља уопштење класичног проблема понашања конструкција под дејством сеизмичког оптерећења, јер обједињује изводе произвољног реалног реда са теоријом неглатких вишесредносних функција. Предложена је нумеричка процедура за решавање постављеног проблема.
Датум прихватања теме, ДП:	
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник: академик Теодор Атанацковић
	Члан: др Михајло Лазаревић
	Члан: др Душан Зорица
	Члан: др Србољуб Симић
	Члан, ментор: др Драган Спасић
	Потпис ментора



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	monographic publication
Type of record, TR :	textual material, printed
Contents code, CC :	doctoral thesis
Author, AU :	Miodrag Žigić
Mentor, MN :	dr Dragan Spasić, full professor
Title, TI :	Seismic response of a column like structure with both fractional and dry friction type of dissipation
Language of text, LT :	Serbian (Roman)
Language of abstract, LA :	Serbian (Cyrilic) / English
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Vojvodina
Publication year, PY :	2011.
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	4 / 71+8 / 127 / 3 / 35 / 0 / 2
Scientific field, SF :	Mechanics
Scientific discipline, SD :	Mechanics
Subject/Key words, S/KW :	Seismic response, vibrations, fractional derivative, viscoelasticity, friction, set valued function
UC	
Holding data, HD :	The Library of the Faculty of Technical Sciences, 21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Note, N :	
Abstract, AB :	Seismic response and energy dissipation of a column made of several rigid blocks, which can slide along each other, was considered. Besides friction contact, which was modeled by a set valued function, viscoelastic elements whose constitutive equations include fractional derivatives as well as restrictions on the coefficients that follow from Clausius-Duhem inequality are present in connections between blocks. The posed Cauchy problem represents the generalization of a classical problem of seismic response because it merges fractional derivatives with the theory of set valued functions. The numerical procedure for solving the problem was suggested.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	President: academician Teodor Atanacković
	Member: dr Mihajlo Lazarević
	Member: dr Dušan Zorica
	Member: dr Srboljub Simić
	Member, Mentor: dr Dragan Spasić
	Mentor's sign