UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

NEKE KLASE SEMIGRUPA

(Doktorska disertacija)

Siniša Dj. Crvenković

NOVI SAD

1981.

S A D R Ž A J

GLAVA IV

PODALGEBRE POLUMREŽA

UVOD

Teorija semigrupa razvija se kao samostalna oblast savremene algebre.

Predmet izučavanja teorije semigrupa su razne klase semigrupa tj. semigrupe koje zadovoljavaju dati uslov.

U ovom radu razmatramo semigrupe iz nekih podklasa klase regularnih semigrupa. Pojam regularnosti, koji je uveo J. von Neumann [31] za prstene, su Thierrin i Вагнер preneli u teoriju semigrupa što se pokazalo značajnim za razvoj teorije semigrupa uopšte.

Ovde se posebno ispituje jedna podklasa klase kompletno regularnih semigrupa tzv. klasa $(m,n)^*$-anti-inverznih semigrupa. Ova klasa obuhvata klasu anti-inverznih semigrupa [1] .

Pojam bazisne klase, neke klase semigrupa, uveo je E.C. Ляпин [25]. U radu odredjujemo bazisne klase za razne klase semigrupa.

Značajnu klasu semigrupa čine polumreže. P.M. Cohn [9] i Ю. Ребане su 1965. godine pokazali da je svaka algebra podalgebra neke semigrupe. U Glavi IV opisujemo klasu algebri koje su podalgebre polumreža.

U Glavi I su navedeni elementarni pojmovi o semigrupama, grupama, algebrama, idealima, kongruencijama, itd. Dati su dokazi nekih teorema koje se koriste u radu. Ovaj materijal uzet je iz [7] i [22]. Takodje, dat je dokaz G. Čupone za teoremu Cohn-Ребана.

U Glavi II ispituju se $(m,n)^*$-anti-inverzne semigrupe. Materijal ove glave preuzet je iz [6], [11] i [12]. U tački 2. date su neke dekompozicije $(m,n)^*$-anti-inverznih semigrupa. Teorema 2.3. glavni je rezultat ove glave. Green-ove relacije razmatraju se u tački 3. Dobija se niz karakterizacija semigrupa iz klase $S^*_{m,n}$. Na kraju Glave II navedena su tvrdjenja čiji dokazi su izostavljeni jer su slični dokazima teorema u [2].

U Glavi III ispituju se bazisne klase raznih klasa semigrupa. Dat je algoritam kojim odredjujemo bazisnu klasu bilo koje klase $(m,n)^*$-anti-inverznih semigrupa. Primeri bazisnih klasa za razne $S^*_{m,n}$ semigrupe dati su u tački 2. Materijal za tačke 1. i 2. uzet je iz [12]. U tački 3. razmatraju se $QS^*_{m,n}(QS_{m,n})$ semigrupe tj. semigrupe čije sve prave podsemigrupe pripadaju klasi $S^*_{m,n}(S_{m,n})$. Teoremom 3.1. data je karakterizacija semigrupa klase $QS^*_{m,n}(QS_{m,n})$. Problem egzistencije bazisne klase semigrupa čije sve prave podsemigrupe zadovoljavaju uslov oblika $(\forall x)(\exists y)\Phi(x,y)$ rešen je u tački 4. Na kraju 4. dato je nekoliko primera. Materijal iz tačaka 3. i 4. ovde je prvi put izložen.

U Glavi IV opisane su podalgebre polumreža. Potreban i dovoljan uslov da neka algebra bude podalgebra polumreže dat je u tački 1. Lema 1.3. je ključna lema u dokazu teoreme 1.1.

Dokaz ove leme izvodi se koristeći pojam transformacije [ ]. U tački 2. navedeni su neki specijalni slučajevi koji su neposredna posledica teoreme 1.1. Materijal za ovu glavu uzet je iz [18].

Literatura koja je korišćena u ovom radu navedena je na kraju i čine je 44 bibliografske jedinice.

Dr Stojan Bogdanović svojim idejama i savetima pomogao mi je pri izradi ovog rada zbog čega mu dugujem trajnu zahvalnost.

Akademik profesor Ѓорѓи Чупона velikodušno je pristao na saradnju sa autorom ovog rada. Zahvaljujem se profesoru Čuponi što je prihvatio moju saradnju i omogućio mi da rezultate zajedničkog rada izložim u Glavi IV.

Profesor Svetozar Milić prihvatio se da bude mentor pri izradi ove disertacije. Imam prijatnu dužnost da se zahvalim profesoru Miliću za nesebičnu pažnju koju posvećije mom radu.

GLAVA I

ELEMENTARNI POJMOVI I KARAKTERIZACIJE SEMIGRUPA IZ NEKIH KLASA SEMIGRUPA

1.1. <u>Binarna operacija</u> na skupu S je svako preslikavanje skupa SxS u S, gde je SxS skup svih uredjenih parova elemenata iz S. Sliku elemenata (a,b) iz SxS u skupu S označavaćemo sa ab.

1.2. <u>Grupoid</u> je uredjena dvojka $(S,\cdot)$ nepraznog skupa S i binarne operacije "$\cdot$" definisane na S. Pišemo S umesto $(S,\cdot)$.

1.3. Binarna operacija "$\cdot$" na grupoidu S je <u>asocijativna</u> ako je ispunjeno

$$(\forall a,b,c \in S)(a(bc) = (ab)c).$$

1.4. <u>Semigrupa</u> je grupoid $(S,\cdot)$ pri čemu je operacija "$\cdot$" asociajtivna. Dalje ćemo kraće pisati "S je semigrupa". Podgrupoid semigrupe S je <u>podsemigrupa.</u>

1.5. Ako postoji element e u semigrupi S takav da je

$$(\forall x \in S)xe = ex = x,$$

onda e zovemo <u>jedinica</u> semigrupe S i kažemo da je S semigrupa sa jedinicom. Ako semigrupa S nema jedinicu onda možemo dodati element 1 skupu S. Definišimo

$$(\forall s \in S)1s = s1 = s$$

i $11 = 1$. $S \cup \{1\}$ postaje semigrupa sa jedinicom. Označavaćemo S^1 semigrupu definisanu na sledeći način

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{ako je } S \text{ semigrupa sa jedinicom} \\ S \cup \{1\} & \text{ako } S \text{ nema jedinicu.} \end{cases}$$

1.6. Ako semigrupa S, sa najmanje dva elementa, sadrži element 0 takav da je

$$(\forall x \in S)x0 = 0x = 0,$$

onda element 0 nazivamo <u>nula</u> semigrupe S. Analogno prethodnom definišemo

$$S^0 = \begin{cases} S & \text{ako } S \text{ ima nulu} \\ S \cup \{0\} & \text{ako } S \text{ nema nulu.} \end{cases}$$

1.7. Semigrupa S je <u>komutativna</u> ako

$$(\forall x,y \in S)xy = yx$$

1.8. <u>Grupa</u> je semigrupa S sa osobinom

$$(\forall x \in S)(xS = S \wedge Sx = S).$$

Podgrupa semigrupe S je podsemigrupa od S koja je grupa.

1.9. Element x semigrupe S je <u>idempotent</u> ako je $x^2 = x$.

1.10. Semigrupa S je <u>generisana</u> svojim podskupom A ako je svaki element iz S jednak proizvodu nekih elemenata iz A. Semigrupa generisana jedno-elementnim podskupom naziva se <u>monogena</u> semigrupa. Monogenu semigrupu generisanu skupom $\{a\}$ označavaćemo sa $\langle a \rangle$. Ako je u semigrupi $\langle a \rangle$: $a^m = a^{m+r}$ onda m nazivamo <u>indeks</u> a r <u>period</u> semigrupe $\langle a \rangle$. Neka je

m indeks i r period semigrupe $\langle a\rangle$ tada je

$$\langle a\rangle = \{a,a^2,\dots,a^{m+r-1}\}$$

i $|\langle a\rangle| = m+r-1$. Kažemo da je element a <u>konačnog reda</u>. Podskup $K_a = \{a^m,a^{m+1},\dots,a^{m+r-1}\}$ od $\langle a\rangle$ je podgrupa od $\langle a\rangle$. Monogena semigrupa koja je grupa naziva se <u>ciklička</u> grupa pa ja K_a ciklička grupa reda r. Lako se pokazuje (Howie [22]) da je $K_a = \langle a^{m+g}\rangle$ gde je $g \in N$ takav da

$$0 \leqslant g \leqslant r-1 \quad \text{i} \quad m+g \equiv 1 (\mathrm{mod}\, r).$$

Ako izaberemo z takvo da je

$$0 \leqslant z \leqslant r-1 \quad \text{i} \quad m+z \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, r)$$

onda imamo da je a^{m+z} idempotent odnosno jedinica grupe K_a.

1.11. Semigrupa S je <u>periodička</u> ako su svi njeni elementi konačnog reda.

1.12. Element a semigrupe S je <u>regularan</u> ako je

$$a = axa$$

za neko $x \in S$. Semigrupa S je <u>regularna</u> ako je svaki element iz S regularan.

Pojam regularnosti prvi je uveo J. von Neumann (On regular rings, Proc.Nat.Acad. USA, 22(1936), 707-713) za elemente prstena. U teoriji semigrupa regularne semigrupa, pod nazivom demi-groups inversif, su prvi put razmatrane od strane G. Thierrin-a (Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semigroupe soit un groupe, C.R.Acad.Sci., Paris, 232 (1951), 376-378.

1.13. Semigrupa S je kompletno regularna ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = axa \wedge ax = xa)$$

1.14. Označimo sa E skup idempotenata semigrupe S. Regularna semigrupa S je <u>ortodoksna</u> ako je E podsemigrupa od S. <u>Ortogrupa</u> je kompletno regularna ortodoksna semigrupa.

1.15. Neka je a element semigrupe S. Element x iz S je <u>inverzan</u> za a ako je

$$a = axa \quad \text{i} \quad x = xax.$$

<u>Inverzna</u> semigrupa je regularna semigrupa u kojoj svaki element ima jedinstven inverzni element.

Pojam inverzne semigrupe prvi put se javlja u radovima В.В. Вагнера (Обобщенье группь, ДАН, СССР, 84(1952), 1119-1122) i G. Thierrin-a (Sur les éléments inversif et les elements unitaires d' un demi-groupe inversif, C.R.Acad.Sci., Paris, 234(1952), 33-34).

1.16. Semigrupa S je <u>intra-regularna</u> ako

$$(\forall x \in S)(\exists a,b, \in S)(x = ax^2b).$$

Semigrupa S je <u>levo</u> <u>regularna</u> ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = xa^2).$$

Semigrupa S je <u>desno</u> <u>regularna</u> ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = a^2x).$$

Ove pojmove uveo je R. Croisot (Demi-groupes inversif et demi-groupes réunion de demi-groupes simples, Ann.Sci. Ecole Nor. Sup.(3), 70(1953), 361-379).

1.17. Semigrupa S je <u>anti-inverzna</u> ako

$$(\forall x \in S)(\exists y \in S)(xyx = y \wedge yxy = x).$$

Pojam anti-inverzne semigrupe uveli su S. Milić, S. Bogdanović i V. Pavlović u radu: Anti-inverse semigroups, Publ.Inst.Math. Belgrade, 24(38) 1978. Izmedju ostalog dokazana je sledeća teorema

<u>*Teorema.*</u> Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in A \leftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^2 = y^2 \wedge yx = x^3y \wedge x^5 = x),$$

gde je sa A označena klasa anti-inverznih semigrupa.

1.18. Semigrupa S je (m,n)-anti-inverzna ako

$$(\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^m = y^m = (xy)^m \wedge x^n = x).$$

(m,n)-anti-inverzne semigrupe uveli su S. Milić i S. Bogdanović u radu: On a class of anti-inverse semigroups, Publ.Inst.Math., Beograd, 25(39), 1979, 95-100. (m,n)-anti-inverzne semigrupe označavamo sa $S_{m,n}$. U istom radu dat je algoritam kojim se utvrdjuje da li semigrupe iz klase $S_{m,n}$, gde su m i n proizvoljni brojevi, pripadaju klasi A-anti-inverznih semigrupa.

1.19. Semigrupa S je $(m,n)^*$-anti-inverzna ako

$$(\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1}y \wedge x^n = x).$$

$(m,n)^*$-anti-inverzne semigrupe uvedene su u radu [6]. U ovom radu, izmedju ostalog, razmatramo i $(m,n)^*$-anti-inverzne semigrupe.

1.20. Semigrupa u kojoj su svi elementi idempotentni naziva se bend. Komutativni bend je polumreža. Semigrupa S je Y polumreža semigrupa S_α ako postoji preslikavanje ϕ semigrupe S na polumrežu Y takvo da je

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \text{i} \quad S_\alpha = \phi^{-1}(\alpha) ,$$

za svako $a,b \in S$ i svako $\alpha \in Y$. Označimo sa E_S skup svih idempotenata semigrupe S u kome je definisana relacija

$$e \leq f \leftrightarrow e = ef = fe.$$

Važi sledeća teorema

Teorema. Neka je S regularna semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni

(i) E_S je podsemigrupa od S.

(ii) Za bilo koje $a,b \in S$ i njihove inverzne elemente a',b' važi da je $b'a'$ inverzan element elementu ab.

(iii) Za svako $a,b,x,y \in S$, $a = axa$ i $b = byb$ implicira $ab = abyxab$.

(iv) Inverzan element svakog idempotenta je idempotent.

1.21. E.S. Ljapin je u [25] dao sledeću definiciju.

Definicija. Neka su M, N, P tri klase semigrupa, pri čemu je $M \subset N \subset P$. Klasa M je bazisna klasa za klasu N u odnosu na P ako je ispunjeno

a) Svaka semigrupa iz N se može pretstaviti kao unija svojih podsemigrupa koje su iz klase M.

b) Svaka semigrupa iz P koja se može pretstaviti kao unija svojih podsemigrupa koje su iz klase M je iz klase N.

c) Nijedna podklasa M' klase M ne zadovoljava uslov a).

2.

2.1. Podsemigrupa I semigrupe S je njen <u>levi (desni) ideal</u> ako je $SI \subset I$ $(IS \subset I)$.
Podsemigrupa I semigrupe S je <u>dvostrani ideal</u> ako je istovremeno levi i desni ideal od S.

Ako je A neprazan podskup semigrupe S, tada presek svih levih ideala od S, koji sadrže A, je levi ideal koji sadrži A. Za taj ideal kažemo da je <u>levi ideal generisan skupom</u> A. Slično imamo za desni, odnosno dvostrani ideal. Levi (desni, dvostrani) ideal semigrupe S generisan skupom A je oblika

$$A \cup SA \ (A \cup AS,\ A \cup SA \cup AS \cup SAS).$$

Ako je A jednočlan skup, tada <u>levi glavni ideal</u>, u oznaci $L(a)$, je oblika

$$L(a) = a \cup Sa.$$

Analogno, <u>desni glavni ideal</u> je oblika

$$R(a) = a \cup aS.$$

<u>Dvostrani glavni ideal</u> je

$$J(a) = a \cup Sa \cup aS \cup SaS.$$

Značajnu karakterizaciju regularnih semigrupa pomoću ideala dao je K. Iséki [23].

Označimo sa $\mathcal{U}$ skup svih levih ideala semigrupe S

i sa $\mathcal{V}$ skup svih desnih ideala semigrupe S.

Teorema. Neka je S semigrupa. Tada je S regularna semigrupa ako i samo ako

$$(\forall R \in \mathcal{V})(\forall L \in \mathcal{U})(R \cap L = RL),$$

gde smo sa R i L označili proizvoljan desni ideal iz $\mathcal{V}$, odnosno proizvoljan levi ideal iz $\mathcal{U}$.

Dokaz. Neka je S regularna semigrupa. Tada za proizvoljan $R \in \mathcal{V}$ je $RS \subseteq R$, pa je

(1) $$RL \subseteq RS \subseteq R.$$

Slično, za proizvoljan $L \in \mathcal{U}$ je

(2) $$RL \subseteq SL \subseteq L.$$

Iz (1) i (2) imamo

$$RL \subseteq R \cap L.$$

Neka je sada $a \in R \cap L$, tada $a \in R$ i $a = a(xa)$ za neko $x \in S$, jer je S regularna semigrupa. Kako $xa \in L$, to je $a \in RL$. Sledi da je

$$R \cap L \subseteq RL$$

tj.

$$R \cap L = RL.$$

Obratno, za proizvoljno $a \in S$ imamo

$$a \in R(a) \cap L(a) = R(a)L(a) = (a \cup aS)(a \cup Sa) =$$
$$= a^2 \cup aSa \cup aS^2a = a^2 \cup aSa,$$

pa je $a = a^2$ ili $a \in aSa$. Dakle, S je regularna semigrupa.

Posledica. U regularnoj semigrupi S je

$$(\forall L \in \mathcal{U})(L = SL),$$
$$(\forall R \in \mathcal{V})(R = RS),$$
$$S^2 = S.$$

U regularnoj semigrupi S je

$$L(a) = Sa, \quad R(a) = aS, \quad J(a) = SaS.$$

Zaista,

$$L(a) = SL(a) = S(a \cup Sa) = Sa \cup SSa = Sa.$$

Slično se dokazuje da je $R(a) = aS$ i $J(a) = SaS$.

Primedba. Jedno uopštenje teoreme K. Iśeki-a dao je S. Bogdanović u [3].

Dvostrani ideal I semigrupe S nazivaćemo ideal semigrupe S.

Podsemigrupa B semigrupe S jeste biideal ako je

$$BSB \subseteq B.$$

Podsemigrupa $A \neq \emptyset$ semigrupe S jeste kvaziideal ako je

$$AS \cap SA \subseteq A.$$

Preslikavanje f semigrupe S u semigrupu T je homomorfizam ako je $(af)(bf) = (ab)f$, za svako $a,b \in S$. Ako je f preslikavanje "na", onda T nazivamo homomorfnom slikom od S. Ako je f 1-1 i "na" onda f nazivamo izomorfizmom.

2.2. Neka je S semigrupa. Relacija R skupa S je levo saglasna sa operacijom semigrupe S ako

$$(\forall s,t,a \in S)((s,t) \in R \Rightarrow (as,at) \in R),$$

i desno saglasna ako

$$(\forall s,t,a \in S)((s,t) \in R \Rightarrow (sa,ta) \in R).$$

Relacija R skupa S je saglasna sa operacijom semigrupe S ako

$$(\forall s,t,s',t' \in S)(((s,s') \in R \land (t,t') \in R) \Rightarrow (st,s't') \in R).$$

Levo (desno) saglasna relacija ekvivalencije naziva se leva (desna) kongruencija. Saglasna relacija ekvivalencije zove se kongruencija.

Propozicija 2.2. Relacija ρ semigrupe S je kongruencija ako i samo ako je leva i desna kongruencija.

Dokaz. $(\leftarrow)$ Ako je ρ leva i desna kongruencija onda iz $(s,s'),(t,t') \in \rho$ sledi $(st,s't) \in \rho$ i $(s't,s't') \in \rho$ zbog leve i desne saglasnosti. Iz tranzitivnosti ρ sledi da je $(st,s't') \in \rho$ pa je ρ kongruencija.

$(\rightarrow)$. Neka je ρ kongruencija. Ako $(s,t) \in \rho$ i $a \in S$ onda $(a,a) \in \rho$ zbog refleksivnosti pa je $(as,at) \in \rho$ i $(sa,ta) \in \rho$ tj. ρ je leva i desna kongruencija.

Neka je ρ kongruencija semigrupe S. Skup klasa ekvivalencije relacije ρ, u oznaci $S/_{\rho}$, nazivamo skup količnik. Preslikavanje $a \to a_\rho$, gde je a_ρ klasa ekvivalencije elementa a, je prirodni homomorfizam od S na $S/_{\rho}$, pri čemu je u $S/_{\rho}$ operacija definisana na sledeći način

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho \ , \quad \text{za} \quad a\rho, b\rho \in S/_{\rho}.$$

Neka je I ideal semigrupe S. Relacija ρ_I na S definisana na sledeći način

$$a\rho_I b \leftrightarrow a = b \vee a,b \in I$$

je Rees-ova kongruencija [39]. Količnik semigrupu $S/_{\rho_I}$ označavamo sa $S/_I$. Klase ekvivalencije su ideal I i jednočlani skupovi $\{a\}$, u slučaju kada $a \in S \setminus I$.

2.3. J. A. Green je 1951. svojim radom "On the structure of semigroups", Ann. of Math., 54, 163-172., dao studiju fundamentalnu za razvoj teorije semigrupa. U ovom radu Green je definisao izvesne relacije ekvivalencije na semigrupi koristeći pojam glavnog ideala semigrupe.

Relacije L, R, J, H, D definisane na semigrupi S na sledeći način

(1) $aLb \iff L(a) = L(b)$

(2) $aRb \iff R(a) = R(b)$

(3) $aJb \iff J(a) = J(b)$

(4) $H = R \cap L$

(5) $D = R.L$ - najmanja ekvivalencija koja sadrži R i L,

su relacije ekvivalencije i nazivaju se Green-ovim ekvivalencijama.

Na osnovu 2.1. imamo da u regularnoj semigrupi S važi

(i) $aLb \iff Sa = Sb$

(ii) $a\mathcal{R}b \iff aS = bS$

(iii) $a\mathcal{J}b \iff SaS = SbS$

Neka je S semigrupa. Tada je

$$a\mathcal{L}b \iff S^1a = S^1b,$$

$$a\mathcal{R}b \iff aS^1 = bS^1,$$

$$a\mathcal{J}b \iff S^1aS^1 = S^1bS^1.$$

$S^1aS^1 = S^1bS^1$ ako i samo ako postoje $x,y,u,v \in S^1$ takvi da je $xay = b$ i $ubv = a$. Neposredno imamo da je $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$ i $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$ pa sledi da je $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. U komutativnim semigrupama imamo $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{J} = \mathcal{D}$.

<u>*Propozicija.*</u> Ako je S periodička semigrupa onda je $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

<u>*Dokaz.*</u> Neka je $a,b \in S$ i $a\mathcal{J}b$. Tada postoje $x,y,u,v \in S^1$ takvi da je

(*) $$xay = b \quad \text{i} \quad ubv = a.$$

Pokažimo da postoji $c \in S$ takvo da je $a\mathcal{L}c$ i $c\mathcal{R}b$.
Iz (*) imamo

$$a = (ux)a(yv) = (ux)^2a(yv)^2 = (ux)^3a(yv)^3 = \ldots,$$

$$b = (xu)b(vy) = (xu)^2b(vy)^2 = (xu)^3b(vy)^3 = \ldots$$

Kako je S periodička semigrupa na osnovu 1.10 možemo naći m takvo da je $(ux)^m$ idempotent.
Ako stavimo $c = xa$ imamo

$$a = (ux)^m a(yv)^m = (ux)^m(ux)^m a(yv)^m = (ux)^m a = (ux)^{m-1}uc,$$

pa je $a\mathcal{L}c$. Takodje, $cy = xay = b$ i možemo naći n takvo da je $(vy)^n$ idempotent. Imamo

$$c = xa = x(ux)^{n+1}a(yv)^{n+1} = (xu)^{n+1}xay(vy)^n v =$$

$$= (xu)^{n+1}b(vy)^{2n}v = (xu)^{n+1}b(vy)^{n+1}(vy)^{n-1}v =$$

$$= b(vy)^{n-1}v$$

pa je $c\mathcal{R}b$.

Za svako $a \in S$ definišimo preslikavanje $\rho_a : S^1 \mapsto S^1$ na sledeći način

$$x\rho_a = xa\ , \quad x \in S^1$$

Preslikavanje ρ_a nazivamo <u>desna</u> <u>translacija</u>. Analogno definišemo preslikavanje $\lambda_a : S^1 \mapsto S^1$ kao

$$x\lambda_a = ax, \quad x \in S^1$$

i nazivamo ga <u>leva</u> <u>translacija</u>.

Svaka $\mathcal{D}$ klasa neke semigrupe je unija $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ klasa. Presek $\mathcal{L}$-klase i $\mathcal{R}$-klase je ili prazan skup ili je $\mathcal{H}$-klasa. Po definiciji imamo

$$a\mathcal{D}b \iff R_a \cap L_b \neq \emptyset \iff L_a \cap R_b \neq \emptyset.$$

Prema tome, pogodno je svaku $\mathcal{D}$-klasu posmatrati kao kvadrat podeljen na vrste i kolone tako da svaka vrsta pretstavlja $\mathcal{R}$-klasu, svaka kolona $\mathcal{L}$-klasu i svaki presečni kvadrat $\mathcal{H}$-klasu. Ako je D proizvoljna $\mathcal{D}$-klasa semigrupe S i $a,b \in D$ su takvi da je $a\mathcal{R}b$, onda po definiciji postoje $s,s' \in S^1$ takvi da je

$$as = b \quad i \quad bs' = a.$$

Desna translacija $\rho_s : S \mapsto S$ preslikava a u b. ρ_s preslikava L_a u L_b jer ako $x \in L_a$ onda $xs\mathcal{L}as$ po definiciji relacije $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ je desna kongruencija) pa je $x\rho_s \in L_{as} = L_b$. Lako se pokazuje da $\rho_{s'}$ preslikava L_b u L_a. $\rho_s\rho_{s'}$ preslikava L_a u L_a pa imamo za bilo koje $x = ua \in L_a$

$$x\rho_s\rho_{s'} = uass' = ubs' = ua = x.$$

Sledi da je $\rho_s\rho_{s'}$ identično preslikavanje na L_a. Slično pokazujemo da je $\rho_{s'}\rho_s$ identično preslikavanje na L_b pa vidimo da su $\rho_s|L$ i $\rho_{s''}|L$ uzajamno inverzne bijekcije L_a na L_b i L_b na L_a. Ako $x \in L_a$ onda element $y = x\rho_s$ iz L_b ima svojstvo da je $y = xs$ i $ys' = x$. Prema tome $y\mathcal{R}x$ pa preslikavanje ρ_s očuvava $\mathcal{R}$-klase. ρ_s preslikava svaku $\mathcal{H}$-klasu u L_a 1-1 na odgovarajuću (tj. $\mathcal{R}$-ekvivalentnu) $\mathcal{H}$-klasu u L_b. Slično važi i za $\rho_{s'}$. Na taj način dokazali smo sledeće:

Lema 2.3. (Green-ova lema). Neka su a,b $\mathcal{R}$-ekvivalentni elementi semigrupe S i neka su $s,s' \in S^1$ takvi da je $as = b$, $bs' = a$. Tada su $\rho_s|L_a$, $\rho_{s'}|L_b$ uzajamno inverzne bijekcije L_a na L_b odnosno L_b na L_a koje očuvavaju $\mathcal{R}$-klase.

Lema 2.4. (Green-ova lema). Neka su a,b $\mathcal{L}$-ekvivalentni elementi semigrupe S i neka su $t,t' \in S^1$ takvi da je $ta = b$ i $t'b = a$. Tada su leve translacije $\lambda_t|R$, $\lambda_{t'}|R$ uzajamno inverzna preslikavanja (bijekcije) R_a na R_b odnosno R_b na R_a i očuvavaju $\mathcal{L}$-klase.

Kombinacijom ovih lema dobijamo:

Lema 2.5. Ako su a,b $\mathcal{D}$-ekvivalentni elementi u semigrupi S, onda $|H_a| = |H_b|$.

Dokaz. Ako je c takav da je $a\mathcal{R}c$, $c\mathcal{L}b$ i $s,t,s',t' \in S^1$ takvi da je $as = c$, $cs' = a$, $tc = b$, $t'b = c$, onda na osnovu Green-ovih lema $\rho_s|H_a$ je bijekcija na H_c i $\lambda_t|H_c$ je bijekcija na H_b. Prema tome $\rho_s\lambda_t : y \mapsto txs$ je bijekcija H_a na H_b (sa inverznim preslikavanjem $\lambda_{t'}\rho_{s'} : y \mapsto t'ys$) pa sledi $|H_a| = |H_b|$.

Kao specijalan slučaj dobijamo

Lema 2.6. Ako $x,y \in S$ i $xy \in H_x$ onda $\rho_y|H_x$ je bijekcija H_x na H_x. Ako $xy \in H_y$ onda je $\lambda_x|H_y$ bijekcija H_y na H_y.

Sada imamo

Teorema 2.7. (Green-ova teorema). Ako je H $\mathcal{H}$-klasa semigrupe S onda je ili $H^2 \cap H = \emptyset$ ili $H^2 = H$ i H je podgrupa od S.

Dokaz. Neka je $H^2 \cap H \neq \emptyset$ tako da postoje $a,b \in H$ takvi da je $ab \in H$. Prema prethodnoj lemi ρ_b i λ_a su bijekcije H na H. Sledi da $hb \in H$ i $ah \in H$ za svako $h \in H$. Prema prethodnoj lemi sledi da su ρ_h i λ_h bijekcije H na H pa je $Hh = hH = H$ za svako $h \in H$ tj. $H^2 = H$ pa je H grupa.

Posledica. Ako je e idempotent semigrupe S, onda je H_e podgrupa od S. Svaka $\mathcal{H}$-klasa nema više od jednog idempotenta.

Propozicija 2,8. Ako je a regularan element semigrupe S onda je svaki element klase D_a regularan.

Dokaz. Ako $b \in D_a$ onda $a\mathcal{L}c$, $c\mathcal{R}b$ za neko $c \in S$, pa postoje $u,v,z,t \in S^1$ takvi da je

$$ua = c\ ,\quad vc = a\ ,\quad cz = b\ ,\quad bt = c\ .$$

Ako je x takvo da je $axa = a$, onda je

$$b(txv)b = cxvcz = uaxaz = uaz = cz = b,$$

pa je b regularan element.

Prorozicija 2.9. U regularnoj $\mathcal{D}$-klasi svaka $\mathcal{L}$-klasa i svaka $\mathcal{R}$-klasa sadrže bar jedan idempotent.

Dokaz. Ako je a element regularne $\mathcal{D}$-klase D u semigrupi S, i ako $x \in S$ tako da je $axa = a$, onda je xa idempotent i $a\mathcal{L}xa$. Slično, ax je idempotent u $a\mathcal{R}ax$.

Propozicija 2.10. Svaki idempotent e u semigrupi S je leva jedinica za R_e i desna jedinica za L_e.

Dokaz. Ako $a \in R_e$ onda $a = ex$ za neko $x \in S^1$ pa je $ea = e(ex) = e^2x = ex = a$. Slično $be = b$ za svako $b \in L_e$.

3.

3.1. Neka je A proizvoljan skup, tada sa A^n označavamo skup svih uredjenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gde je $a_i \in A$. Svako preslikavanje ω skupa A^n u A nazivamo <u>n-arna operacija</u> (ili operacija dužine n) u A. Ako se n-torka $(a, a_2, \ldots, a) \in A^n$ sa ω preslika u $b \in A$, pišemo

$$b = \omega(a_1, a_2, \ldots, a_n), \text{ odnosno } b = \omega a_1 a_2 \ldots a_n .$$

Svaki fiksan element iz A nazivamo nularna operacija.u A. Svaku n-arnu operaciju ω nazivamo: <u>unarna</u>, <u>binarna</u>, <u>ternarna</u> ako je n: 1,2,3 respektivno. Svaka unarna operacija u A je <u>transformacija</u> na A, tj. preslikavanje A u A. Neka je Ω neki skup operacija u skupu A. Par (A, Ω) nazivamo <u>algebra.</u> Skup A nazivamo <u>nosač</u> algebre a za Ω kažemo da je <u>tip algebre</u>. Skup n-arnih operacija koje pripadaju Ω označavamo sa $\Omega(n)$. Neka je A dati skup i neka svakom operatoru $\omega \in \Omega(n)$ odgovara n-arna operacija ω_A na A, tada na skupu A imamo algebru (A, Ω_A) tipa Ω.

Neka su (A, Ω_A) i (B, Ω_B) algebre istog tipa Ω. Za preslikavanje $\phi : A \mapsto B$ kažemo da je <u>homomorfizam</u> algebre (A, Ω_A) u algebru (B, Ω_B) ako važi

$$(\forall \omega \in \Omega(n) \subseteq \Omega)(\forall a_1, \ldots a_n \in A)\phi(\omega_A a_1 \ldots a_n) = \omega_B \phi(a_1) \ldots \phi(a_n).$$

Podskup B skupa A nazivamo <u>podalgebra</u> od (A, Ω) ako važi

$$\Omega_o \in B\ ,$$

$$(\forall \omega \in \Omega(n), b_1, \dots, b_n \in B)\, \omega b_1 \dots b_n \in B.$$

Neka je $\mathcal{T}$ klasa algebri tipa Ω, $(A,\Omega) \in \mathcal{T}$ i B generatorni skup za (A,Ω). Za (A,Ω) kažemo da je <u>slobodno generisana</u> sa B u klasi $\mathcal{T}$, ako važi sledeći uslov:

(i) Za svaku algebru $(A',\Omega) \in \mathcal{T}$ i svako preslikavanje $\lambda : B \mapsto A'$ postoji homomorfizam $\phi : A \mapsto A'$ koji je proširenje preslikavanja λ.

3.2. Neka je $\mathcal{A} = (A,\Omega)$ algebra, S semigrupa i $\omega \mapsto \bar{\omega}$ preslikavanje Ω u S takvo da je $A \subseteq S$ i

$$\omega(a_1, \dots, a_n) = \bar{\omega} a_1 \dots a_n$$

za svaki n-arni operator $\omega \in \Omega$ i $a_1, \dots, a_n \in A$. $\mathcal{A} = (A,\Omega)$ nazivamo <u>podalgebra</u> <u>semigrupe</u> S.

<u>*Teorema*</u> (Cohn-Ребане) Svaka algebra jeste podalgebra neke semigrupe.

<u>*Dokaz.*</u> (G. Čupona) Neka je $\Omega' = \Omega \setminus \Omega_o$ i svakom elementu $\omega \in \Omega'$ pridružimo simbol $\bar{\omega}$ na sledeći način

$$\omega \neq \tau \Longrightarrow \bar{\omega} \neq \bar{\tau}\ , \qquad \{\bar{\omega} \mid \omega \in \Omega'\} \cap A = \emptyset\ .$$

Formirajmo semigrupu F koja je slobodno generisana sa $B = A \cup D$, gde je $D = \{\bar{\omega} \mid \omega \in \Omega \setminus \Omega_o\}$. Pored toga F se sastoji od svih konačnih nizova $u = b_1 b_2 \dots b_k$ gde je $b_i \in B$. Za $u \in F$ kažemo da je <u>reducibilan</u> element u F ako ima oblik:

(1) $$u = b_1 \dots b_{i-1} \bar{\omega} a \dots a_n b_{i+n+1} \dots b_k,$$

gde $\omega \in \Omega(n)$ i $a_1, \ldots, a_n \in A$. U protivnom, za u kažemo da je <u>reduciran</u> element iz F. Označimo sa S skup svih reduciranih elemenata iz F. Jasno je da

$$A \bigcup D \subseteq F.$$

Definišimo preslikavanje $\phi : F \mapsto F$ na sledeći način

$$u \in S \Rightarrow \phi(u) = u.$$

Ako $u \in F \setminus S$ tada u pretstavljamo u obliku (1) pri čemu za $i = 1$ u ima oblik

(1') $$u = \bar{\omega} a \ldots a_n b_{n+2} \ldots b_k,$$

ili je $v = b_1 \ldots b_{i-1}$ reduciran. Tada je

$$\phi(u) = b_1 \ldots b_{i-1} a b_{i+n+1} \ldots b_k,$$

gde je $a = \omega(a_1, \ldots, a_n)$ u (A, Ω). Iz definicije ϕ jasno je da $\phi(u) = u \Leftrightarrow u \in S$ i da ako $u \in F \setminus S$, onda $\phi(u) \neq u$ i $\phi(u)$ ima manju dužinu od u (dužina od u je k, ako je $u = b_1, , , b_k$, gde $b_1, \ldots, b_k \in B$). Pored toga, za svako $u \in F$ postoji $p \in N$, takav da $\phi^p(u) \in S$ i tada imamo $\phi^{p+1}(u) = \phi^p(u)$. U tom slučaju stavljamo $\psi(u) = \phi^p(u)$. Pored toga, $\psi(u) \in S$, za svako $u \in F$, tj. ψ je preslikavanje F u S. Pokažimo da je

(2) $$(\forall u, v \in F) \psi(uv) = \psi(\phi(u)v) = \psi(\psi(u)v).$$

Imajući u vidu da je (2) očigledno tačno za $u \in S$, pretpostavićemo da je u reducibilan. Tada, po definiciji ϕ sledi da je $\phi(\phi(u)v) = \phi^2(uv)$. Pretpostavimo da je $\psi(uv) = \phi^p(uv)$, $\psi(u) = \phi^q(u)$.

Tada imamo

$$\psi(uv) = \phi(\psi(uv)) = \phi^{p+1}(uv) = \phi^{p}(\phi(uv)) = \phi^{p}(\phi(u)v),$$

tj. $\psi(uv) = \phi(\phi(u)v)$. Sledi da je

$$\psi(uv) = \psi(\phi(u)v) = \psi(\phi^2(u)v) = \ldots = \psi(\phi^q(u)v) = \psi(\psi(u)v),$$

čime završavamo dokaz za (2).

Pokazaćemo da je

$$(3) \qquad (\forall u,v \in F)\,\psi(uv) = \psi(u\psi(v)).$$

U ovom slučaju, takodje, pretpostavimo da $v \in F\backslash S$, budući da za $v \in S$ tvrdjenje sledi neposredno. Dokaz dajemo indukcijom u odnosu na dužinu od v.

Ako je $v = \bar{\omega}a_1 \ldots a_n$, gde je $a = \omega(a_1, \ldots, a_n)$ u (A,Ω), onda $\psi(v) = \phi(u) = a$ pa imamo

$$\psi(uv) = \psi(\psi(u)v) = \psi(\phi(\psi(u)v)) = \psi(\psi(u)\phi(v)) =$$

$$= \psi(\psi(u)a) = \psi(ua) = \psi(u\psi(v)).$$

Pretpostavimo da je $v = v_1v_2$ gde je v_1 ili v_2 reducibilan niz. Tada, ako se ima u vidu induktivna pretpostavka, dobijamo

$$\psi(uv) = \psi(uv_1v_2) = \psi(\psi(uv_1)v_2) = \psi(\psi(uv_1)\psi(v_2)) =$$

$$= \psi(\psi(u\psi(v_1))\psi(v_2)) = \psi(u\psi(v_1)\psi(v_2)) =$$

$$= \psi(u\psi(\psi(v_1)\psi(v_2))) = \psi(u\psi(v_1v_2)),$$

čime završavamo dokaz za (3).

Definišimo operaciju $*$ u S sa:

$$u*v = \psi(uv).$$

Ako imamo u vidu (2) i (3) dobijamo

$$(u*v)*w = \psi(\psi(uv)w) = \psi(uvw) = \psi(u\psi(vw)) =$$

$$= u*(v*w),$$

tj. $(S,*)$ je semigrupa. Ako $\bar{\omega} \in D$, $a_1,\dots,a_n \in A$ i $\omega(a_1,\dots,a_n) = a$ u (A,Ω) onda imamo

$$\bar{\omega}*a_1*\dots*a_n = \psi(\bar{\omega}a_1\dots a_n) = a = \omega(a_1,\dots,a_n),$$

tj. dobijamo da je $(S,*)$ polugrupa sa traženim osobinama.

Ю.Н. Ребане je u radu: О представлении универсалньх алгебр в коммутативньх полугруппах, Сиб.Мат.Жўр., Том VII, N° 4, 1966, dokazao sledeću teoremu

Teorema. (Ю. Рабане) Potreban i dovoljan uslov da algebra (A,Ω) bude podalgebra komutativne semigrupe jeste da u (A,Ω) važi identitet:

$$\phi(x_1,\dots,x_{i-1},\omega(x_i,\dots,x_{i+n-1}),x_{i+n},\dots,x_{n+m-1}) =$$

$$= \omega(x_{j_1},\dots,x_{j_{k-1}},\phi(x_{j_k},\dots,x_{j_{k+m-1}}),x_{j_{k+m}},\dots,x_{j_{n+m-1}})$$

gde su $\omega \in \Omega(n)$, $\phi \in \Omega(m)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$, a $\pi = (j_1 j_2 \dots j_{n+m-1})$ proizvoljna permutacija skupa $\{1,2,\dots,n+m-1\}$.

U Glavi IV ispitujemo podalgebre polumreža.

GLAVA II

(m,n)* - ANTI-INVERZNE SEMIGRUPE

1. DEFINICIJA I NEKE OSOBINE $(m,n)^*$-ANTI-INVERZNIH SEMIGRUPA

U ovoj tački dajemo definiciju i neke karakterizacije semigrupa iz klase $S^*_{m,n}$.

Klasa $S^*_{m,n}$ nastala je kao jedno od mogućih uopštenja klase A, anti-inverznih semigrupa. U radu [1] dokazana je sledeća

<u>*Teorema 1.1.*</u> Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in A \leftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^2 = y^2 \wedge yx = x^3 y \wedge x^5 = x).$$

Ako sa $S^*_{m,n}$ označimo klasu semigrupa koja zadovoljava uslov

(1) $$(\forall x)(\exists y)(x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1} y \wedge x^n = x)$$

tj.

$$S \in S^*_{m,n} \leftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1} y \wedge x^n = x)$$

onda neposredno sledi da je

$$A = S^*_{2,5}$$

Semigrupa

	a	b
a	a	b
b	b	b

pripada svim klasama $S^*_{m,n}$ za proizvoljne m,n.

Neka je $s \in S^*_{m,n}$ i $x \in S$. Tada za y, čija egzistencija sledi iz definicije klase $S^*_{m,n}$, kažemo da je $(m,n)^*$-anti-inverzan za x. Za semigrupe iz klase $S^*_{m,n}$ kažemo da su $(m,n)^*$-anti-inverzne.

Lema 1.1. Neka je $\mathcal{B}$ klasa svih bendova. Tada je $S^*_{1,n} = \mathcal{B}$.

Dokaz. Uslov (1) za $m = 1$ glasi

$$(\forall x)(\exists y)(x = y \wedge yx = x^2 y \wedge x^n = x)$$

pa imamo

$$x^2 = x^3, \quad x^n = x$$

tj.

$$x^2 = x.$$

Svaki bend je anti-inverzna semigrupa pa imamo da je

$$S^*_{1,n} \subset \mathcal{A}.$$

U daljim razmatranjima klase $S^*_{m,n}$ pretpostavljamo da je $n > 1$.

Lema 1,2. Neka je $s \in S^*_{m,n}$. Tada

$$(\forall x \in S)(\forall k \in N)(\exists t \in N)(x^k = x^t \wedge n \geq t).$$

Dokaz. Sledi neposredno.

Lema 1.3.

$$S^*_{m,2} = \mathcal{B}.$$

Dokaz. Za $n = 2$ uslov (1) glasi

$$(\forall x)(\exists y)(x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1}y \wedge x^2 = x).$$

Sledi

$$x^2 = x,$$

pa je

$$S^*_{m,2} = B$$

Lema 1.4. Ako je $n > 1$ onda je $S^*_{n,n} = B$.

Dokaz. Neka je $n = m > 1$, tada uslov (1) glasi

$$(\forall x)(\exists y)(x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1}y \wedge x^m = x)$$

odakle imamo

$$x = y \wedge yx = x^2y \wedge x^m = x$$

tj.

$$x^2 = x.$$

Na osnovu leme 1.2. sledi da se ispitivanje semigrupa iz klase $S^*_{m,n}$ za $m > n > 1$ svodi na ispitivanje semigrupa iz klase $S^*_{m_1,n}$ gde je $n > m_1$.

U daljim razmatranjima pretpostavljamo da je

$$n > m.$$

2. NEKE DEKOMPOZICIJE SEMIGRUPA IZ KLASE $S^*_{m,n}$

Ovde dokazujemo osnovne teoreme kojima se karakterišu semigrupe iz klase $S^*_{m,n}$.

Lema 2.1. Neka je $x \in S$ i $S \in S^*_{m,n}$. Tada je x^{n-1} idempotent u S.

Dokaz. Neposredno imamo

$$(x^{n-1})^2 = x^{2n-2} = x^n x^{n-2} = x^{n-1}.$$

Lema 2.2. (m,n)*-anti-inverzni elementi semigrupe S imaju istu jedinicu.

Dokaz. Neka je y (m,n)*-anti-inverzan za x. Označimo sa e_x sopstvenu jedinicu elementa x. Tada, koristeći lemu 2.1. imamo da je

$$e_x = x^{n-1} = (x^{n-1})^m = (x^m)^{n-1} = (y^m)^{n-1} = (y^{n-1})^m = y^{n-1} = e_y.$$

Označimo sa M^*_a skup svih elemenata semigrupe S koji su (m,n)*-anti-inverzni sa $a \in S$. Dalje, neka je P neprazan podskup od S. Označimo sa $[P]$ podsemigrupu semigrupe S generisanu skupom P.

Teorema 2.1. Neka je $S \in S^*_{m,n}$. Tada je za svako $a \in S$ i svaki $B^*_a \subseteq M^*_a$

$$GB^*_a = [a \cup B^*_a]$$

grupa.

Dokaz. Dovoljno je da svaka od jednačina $cx = b$ i $yc = b$ ima rešenje po x, odnosno y, u GB_a^*. Zaista, elementi c i b su oblika

$$c = c_1c_2\dots c_k \quad , \quad b = b_1b_2\dots b_s \quad (c_i, b_j \in a \cup B_a^*).$$

Koristeći lemu 2.2. neposredno imamo da je rešenje jednačine $cx = b$

$$x = c_k^{n-2}c_{k-1}^{n-2}\dots c_1^{n-2}b_1b_2\dots b_s.$$

Slično za drugu jednačinu.

Posledica 2.1. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in S_{m,n}^* \Rightarrow S = \bigcup_{a \in S} GB_a^*.$$

Teorema 2.2. Neka je $S \in S_{m,n}^*$. Tada

$$GB_a^* \in S_{m,n}^*$$

ako i samo ako

$(\forall \alpha \in \bar{N})(\forall b \in [B_a^*])(\exists \beta \in \bar{N})(\exists c \in [B_a^*])(a^\beta c$ $(m,n)^*$-anti--inverzan za $a^\alpha b)$ $\quad (\bar{N} = N \cup \{0\})$.

Dokaz. $(\to) GB_a^* \in S_{m,n}^*$. Tada $a^\alpha b \in GB_a^*$, gde je α proizvoljan element skupa $\bar{N}$ i b proizvoljan element semigrupe $[B_a^*]$. Na osnovu definicije klase $S_{m,n}^*$ sledi da postoji $y \in GB_a^*$ $(m,n)^*$-anti-inverzno za $a^\alpha b$. Iz $y \in GB_a^*$ sledi da je

$$y = a^{\gamma_1}b^{\alpha_{i_1}}a^{\gamma_2}b^{\alpha_{i_2}}\dots a^{\gamma_k} \quad (\gamma_j, \alpha_{i_j} \in \bar{N},\ j=1,\dots,k).$$

Iz uslova (1) sledi

$$a^p b_{i_j}^q = a^{p(m+1)^q} b_{i_j}^q \qquad (j=1,\dots,k)$$

pa postoje $\beta \in \bar{N}$ i $c \in [B_a^*]$ takvi da je $a^\beta c$ $(m,n)^*$-anti-inverzno za $a^\alpha b$.

($\leftarrow$) Neka je $x \in GB_a^*$. Na osnovu predhodnog sledi da je $x = a^\alpha b$ za neko $\alpha \in \bar{N}$ i neko $b \in [B_a^*]$. Kako za svako $a^\alpha b$ postoji $(m,n)^*$-anti-inverzan element $a^\beta c$ sledi da $GB_a^* \in \mathcal{S}_{m,n}^*$.

Lema 2.3. Neka je $S \in \mathcal{S}_{m,n}^*$. Tada

$$(\forall x \in S)(x^{m^2} = e_x).$$

Dokaz. Neka je $S \in \mathcal{S}_{m,n}^*$ i neka je $y \in S$ $(m,n)^*$-anti-inverzno za $x \in S$. Tada iz (1) i teoreme 2.1. imamo

$$yxy^{-1} = x^{m+1}.$$

Stepenovanjem ove jednakosti sa m dobijamo

$$yx^m y^{-1} = x^{(m+1)m}$$

tj.

$$x^m = x^{m^2+m}$$

odnosno

$$x^{m^2} = e_x.$$

Lema 2.4. Neka je y $(m,n)^*$-anti-inverzno za x u semigrupi $S \in \mathcal{S}_{m,n}^*$. Tada je proizvoljan element grupe $[\{x,y\}]$ oblika

$$x^s y^t,$$

gde je $s,t \in N$, $n > s \geqslant 0$, $m > t \geqslant 0$ $(x^0 \overset{def}{=} e_x)$.

Dokaz. Na osnovu (1) sledi da je

$$yx = xy^{m+1}. \tag{2.1}$$

Iz (2.1) imamo

$$y^l x = y^{l-1} x y^{m+1} = y^{l-2} x y^{2(m+1)} = \ldots = x y^{l(m+1)}. \tag{2.2}$$

Iz (2.2) imamo

$$y^l x^2 = y^l x x = x y^{l(m+1)} x = x^2 y^{l(m+1)(m+1)} = x^2 y^{l(m+1)^2}.$$

Analogno dobijamo

$$y^l x^k = x^k y^{l(m+1)^k}.$$

Na osnovu leme 1.2. imamo da se k redukuje po n, a broj $l(m+1)^k$ po m i n.

Posledica 2.2. Grupa $[\{x,y\}]$ je konačna.

Teorema 2.3. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in \mathcal{S}^*_{m,n} \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)([\{x,y\}] \in \mathcal{S}^*_{m,n}).$$

Dokaz. ($\rightarrow$). Na osnovu teoreme 2.1. imamo da je $[\{x,y\}]$ grupa. Neka je $x^s y^t$ proizvoljan element ove grupe. Dokažimo da je tada

$$(x^s y^t) = x^{m(\frac{m(m+1)}{2} st+s+t)}.$$

Zaista,

$$(x^s y^t)^m = x^s y^t \ldots y^t x^s y^t x^s y^t$$

pa je

$$(x^s y^t)^m = x^s y^t \ldots y^t x^{2s} y^{t(m+1)^s} y^t$$

tj.

$$(x^s y^t)^m = x^s y^t \ldots x^{3s} y^{t(m+1)^{2s}} y^{t(m+1)^s} y^t.$$

Nastavljajući dolazimo do

$$(x^s y^t)^m = x^{ms} y^{t(m+1)^{(m-1)s}} y^{t(m+1)^{(m-2)s}} \ldots y^{t(m+1)^s} y y^t.$$

Na osnovu leme 2.3. imamo

$$(x^s y^t)^m = x^{ms} y^{mt(\frac{m(m-1)}{2} s+1)}.$$

Kako je

$$x^m = y^m$$

imamo

$$(x^s y^t)^m = x^{m(\frac{m(m-1)}{2} st+s+t)}.$$

Kako $s \in S^*_{m,n}$, grupa $[\{x,y\}] \in S^*_{m,n}$ ako i samo ako jednačine

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} (x^s y^t)^m &= \alpha^m \\ \alpha x^s y^t &= (x^s y^t)^{m+1} \alpha, \end{aligned}$$

$x^s y^t$ je proizvoljan element $[\{x,y\}]$, imaju rešenja po α u grupi $[\{x,y\}]$.

Ako postoji takvo α, onda je

$$\alpha = x^k y^l$$

za neke $k,l \in N \cup \{0\}$. Sistem jednačina (2.3) postaje

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} (x^s y^t)^m &= (x^k y^l)^m \\ x^k y^l x^s y^t &= (x^s y^t)^{m+1} x^k y^l , \end{aligned}$$

pa je rešenje (2.3) rešenje (2.4) i obratno.

Sistem (2.4) ekvivalentan je sa sistemom

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} x^{m(\frac{m(m-1)}{2}(st-kl)+s+t-k-l)} &= e \\ x^{m(\frac{m(m-1)}{2}st+s+t-ls+kt)} &= e \end{aligned}$$

Rešenje po k i l sistema (2.5) nalazimo koristeći lemu 2.3. tj.

$$x^{m^2} = e$$

za svako $x \in S$.

Ako je m neparan broj, za k i l možemo uzeti

$$k = s - 1$$

odnosno

$$l = t + 1$$

pa je

$$\alpha = x^{s-1} y^{t+1}$$

rešenje sistema (2.5), tj. sistema (2.4).

Neka je m paran broj. Razlikujemo tri slučaja:

1°

a) $m = 4q$

s-parno(uključujući $s = 0$)

t-parno(uključujući $t = 0$)

Tada je

$$\alpha = x^{s-1+\frac{m}{2}}y^{t+1}$$

rešenje sistema (2.4) što se neposredno proverava.

b) $m = 4q + 2$

s-parno(uključujući $s = 0$)

t-parno(uključujući $t = 0$).

U tom slučaju

$$\alpha = x^{s-1+\frac{m}{2}}y^{t+1+\frac{m}{2}}$$

je rešenje sistema (2.4).

2°

s-neparno

t-neparno

Za α možemo uzeti

$$\alpha = x^{s-1}y^{t+1-\frac{m}{2}}.$$

3°

$$\alpha = x^{s-1}y^{t+1}$$

je rešenje sistema (2.4) u ostalim slučajevima.

Kako je

$$\alpha^n = \alpha,$$

sledi da su α i $x^s y^t$ $(m,n)^*$-anti-inverzni.

Na osnovu dokazanog sledi da je

$$[\{x,y\}] \in S^*_{m,n}.$$

Obratno, neposredno sledi.

<u>*Posledica 2.3.*</u> Neka je S semigrupa. Tada $S \in S^*_{m,n}$ ako i samo ako S je unija grupa iz $S^*_{m,n}$.

<u>*Posledica 2.4.*</u> Neka je G grupa. Tada

$$G \in S^*_{m,n} \iff (\forall x \in G)(\exists y \in G)([\{x,y\}] \in S^*_{m,n}.$$

<u>*Teorema 2.4.*</u> Označimo sa $|G|$ red grupe G. Tada

$$(\forall k \in N)(|G| = k \Rightarrow G \in S^*_{k,k+1}).$$

<u>*Dokaz.*</u> Neka je G grupa reda $k \in N$. Tada, na osnovu poznate teoreme iz teorije grupa, sledi

(2.6) $$x^k = e$$

za svako $x \in G$. Na osnovu (2.6) imamo da je

(2.7) $$x^{k+1} = x.$$

Iz (2.6) i (2.7) sledi da je

$$x^k = e^k = e,$$

$$ex = x^{k+1}e = x$$

i

$$x^{k+1} = x$$

pa je

$$G \in S^*_{k,k+1}.$$

Posledica 2.5. Neka je G konačna grupa. Tada postoji bar jedna klasa semigrupa $S^*_{m,n}$ takva da je $G \in S^*_{m,n}$.

Označimo sa I_m skup ostataka po modulu m, gde je m prost broj. Neka je

$$I_m[x] = \{p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1 x \dots a_n x^n,\ a_i \in I_m,\ n \in N\}$$

Za proizvoljne $p(x), q(x) \in I_m[x]$ je

$$p(x) \oplus q(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \oplus (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) =$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + a_n x^n \quad \text{za } n > m.$$

$I_m[x]$ je grupa u odnosu na operaciju "$\oplus$". Kako je $mp(x) = 0$ za svako $p(x) \in I_m[x]$, sledi

$$I_m[x] \in S^*_{m,m+1}.$$

Ovaj primer pokazuje da ne važi obrat teoreme 4.

Propozicija 2.1. Neka je S semigrupa i $s \in S^*_{m,mq+r} (m,q,r \in N)$.
Tada

$$x^{(r-1)^2} = e_x,$$

gde e_x označava sopstvenu ~~jedinicu~~ elementa x.

Dokaz. Neka je S semigrupa iz $S^*_{m,mq+r}$ i neka je y $(m,n)^*$-anti-inverzan za x u S. Prema teoremi 2.1. sledi da je $[\{x,y\}]$ grupa. Lema 2.3. daje $(\forall x \in S) x^{m^2} = e_x$. Iz $x^{mq+r} = x$ stepenovanjem sa m dobijamo

$$x^{mr} = x^m$$

odakle sledi da je

$$x^{mq+r} = x^{mrq+r} = x^{mrq+r+r^2-r^2} = x^{(mq+r)r-r^2+r} = x^{2r-r^2} = x$$

tj.

$$x^{(r-1)^2} = e_x.$$

Propozicija 2.2. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in S^*_{m,mq+3} \to S \in A.$$

Dokaz. Na osnovu propozicije 2.1. i leme 2.3. sledi da

$$x^{m^2} = x^{(3-1)^2} = e_x.$$

1° Za m neparno imamo da je $(4,m^2) = 1$ pa je $x^{(4,m^2)} = x = e_x$ tj. S je bend.

2° Za $m = 4k(k \in N)$, koristeći $x^4 = e_x$, imamo

$$x^{mq+3} = x^{4kq+3} = x^3 = x$$

pa $S \in A$.

3° Za $m = 4k+2(k \in N)$ imamo $x^m = x^2 = y^2$ tj. $yx = x^3y$ pa prema teoremi 1.1. sledi da $S \in A$.

Posledica 2.6. Za $m \equiv 2(\text{mod}4)$ i q neparno imamo

$$S^*_{m,mq+3} = A.$$

Dokaz. Na osnovu prepozicije 2.2. sledi da je

$$S^*_{m,mq+3} \subset A.$$

Neka je $S \in A$. Tada je $x^2 = y^2$ pa imamo

$$(x^2)^{2k+1} = (y^2)^{2k+1}$$

tj.

$$x^m = y^m$$

gde je $m = 4k+2$. Kako je $x^4 = e_x$ sledi da je

$$x^m = x^{4k+2} = x^2$$

tj.

$$x^{m+1} = x^3.$$

Neka je $q = 2t+1$. Tada je

$$x^n = x^{(4k+2)(2t+1)+3} = x^5 = x$$

pa važi uslov (1) tj. $S \in S^*_{m,mq+3}$ odnosno

$$S^*_{m,mq+3} = A.$$

3. IDEALI $(m,n)^*$-ANTI-INVERZNIH SEMIGRUPA

Dajemo neke karakterizacije semigrupa iz klase $S^*_{m,n}$ pomoću ideala semigrupe.

Lema 3.1. Neka je S semigrupa i I ideal od S (levi, desni), tada

$$S \in S^*_{m,n} \rightarrow I \in S^*_{m,n}.$$

Dokaz. Neka je $S \in S^*_{m,n}$ i I ideal od S. Ako $x \in I$, onda $x^m \in I$. Kako za $x \in I$ postoji $y \in S$ da je

$x^m = y^m$, sledi $y^m \in I$ pa, obzirom da je $n > m$,

$$y^n \in I, \qquad \text{tj.} \qquad y \in I.$$

Lema 3.2. Neka je S semigrupa. Tada $S \in S^*_{m,n}$ ako i samo ako svaki ideal $I \in S^*_{m,n}$ i za svako $x \in S \setminus I$ postoji $y \in S \setminus I$ da važi uslov (1).

Dokaz. Sledi neposredno.

Lema 3.3. Neka je y $(m,n)^*$-anti-inverzno za x u semigrupi $S \in S^*_{m,n}$. Tada

$$L(x) = L(y)$$

$$R(x) = R(y)$$

$$H(x) = H(y)$$

i

$$J(x) = J(y).$$

Dokaz. Kako je $S \in S^*_{m,n}$ levo regularna semigrupa, onda na osnovu poznate teoreme iz [7] sledi

$$L(x) = L(x^2) \qquad x \in S,$$

pa imamo

$$L(x) = L(x^m).$$

Iz $x^m = y^m$ sledi $L(x) = L(y)$.

Slično dokazujemo da je $R(x) = R(y)$, $H(x) = H(y)$, $J(x) = J(y)$.

Lema 3.4. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in \mathcal{S}^*_{m,n} \leftrightarrow (\forall a \in S)(L_a \in \mathcal{S}^*_{m,n}),$$

$$S \in \mathcal{S}^*_{m,n} \leftrightarrow (\forall a \in S)(R_a \in \mathcal{S}^*_{m,n}).$$

Dokaz. Neka je $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$ i L_a proizvoljna $\mathcal{L}$-klasa. Kako je S levo regularna to je, na osnovu poznate teoreme iz [7], L_a podsemigrupa semigrupe S. Za $x \in L_a$ postoji $(m,n)^*$-anti-inverzan $y \in S$ pa je, na osnovu leme 3.3.,

$$L(x) = L(y). \tag{3.1}$$

Kako je i

$$L(x) = L(a) \; , \tag{3.2}$$

iz (3.1) i (3.2) sledi

$$L(y) = L(a)$$

tj. $y \in L_a$.

Obrat sledi neposredno.

Lema 3.5. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in \mathcal{S}^*_{m,n} \leftrightarrow (\forall a \in S)(H_a \in \mathcal{S}^*_{m,n}).$$

Dokaz. $H = L \cap R$ pa na osnovu leme 3.4. tvrdjenje neposredno sledi.

Teorema 3.1. Neka je S semigrupa. Tada $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$ ako i samo ako S jeste levo regularna i svaki njen levi ideal je iz $\mathcal{S}^*_{m,n}$.

Dokaz. Neka je $S \in S^*_{m,n}$, tada je S levo regularna i svaki njen levi ideal je iz $S^*_{m,n}$ (lema 3.1.).

Obratno, neka je S levo regularna semigrupa. Tada proizvoljna $\mathcal{L}$-klasa L_a semigrupe S je podsemigrupa od S (lema 3.4.). Kako je

$$L_a \subseteq L(a) \in S^*_{m,n}$$

za $x \in L_a$ postoji $(m,n)^*$-anti-inverzan $y \in L(a)$.

Teorema 3.2. Neka je S semigrupa i I njen dvostrani ideal. Tada

$$S \in S^*_{m,n} \leftrightarrow (\forall I)(I \in S^*_{m,n} \wedge S/_I \in S^*_{m,n}).$$

Dokaz. Neka $S \in S^*_{m,n}$. Tada na osnovu leme 3.1. i činjenice da je homomorfna slika semigrupe iz $S^*_{m,n}$ semigrupa iz $S^*_{m,n}$, sledi tvrdjenje.

Obratno, neka je proizvoljan ideal I semigrupe S iz $S^*_{m,n}$ i neka $S/_I \in S^*_{m,n}$. Tada razlikujemo dva slučaja:

1° Ako $x \in I$, onda x ima $(m,n)^*$-anti-inverzan element $y \in I$.

2° Ako $x \in S \setminus I$, tada $x^m \in S \setminus I$. Za $x \in S \setminus I$ postoji $xf \in S/_I$ gde je f prirodni homomorfizam. Za xf postoji $(m,n)^*$-anti-inverzan element yf iz $S/_I$, pa je

(a) $\quad (xf)^m = (yf)^m, \ (yf)(xf) = (xf)^{m+1}(yf), \ (xf)^n = (xf).$

$y \notin I$ pa iz (a) imamo

(b) $x^m f = y^m f, \quad (yx)f = (x^{m+1}y)f, \quad x^n f = xf.$

Kako je f izomorfizam na $S\setminus I$, to iz (b) dobijamo $x^m = y^m$, $yx = x^{m+1}y$, $x^n = x$. Sledi $S \in S^*_{m,n}$.

Na osnovu Ieme 3.3. neposredno se dokazuje

Lema 3.6. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in S^*_{m,n} \leftrightarrow (\forall a \in S)(J_a \in S^*_{m,n}).$$

Na osnove propozicije 2.3., Glava I, imamo

$$S \in S^*_{m,n} \to \mathcal{J} = \mathcal{D}.$$

Označimo sa D_a $\mathcal{D}$-klasu elementa a iz S. Na osnovu leme 3.6. imamo

(*) $$S \in S^*_{m,n} \leftrightarrow (\forall a \in S)(D_a \in S^*_{m,n}).$$

Lema 3.7. Neka je S semigrupa sa dva idempotenta. Tada

$$S \in S^*_{m,n} \to S \text{ je ortodoksna semigrupa.}$$

Dokaz. Ako $S \in S^*_{m,n}$ onda je S unija disjunktnih grupa. Kako S ima dva idempotenta, sledi da postoje grupe G_1 i G_2 takve da je $S = G_1 \cup G_2$ i $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Neka su $e_1 \in G_1$ i $e_2 \in G_2$ jedinični elementi grupe G_1 i G_2. Ako je $e_1e_2 = x$, $x \in G_1$ onda

$$e_1(e_1e_2) = e_1e_2 = x = (e_1e_2)e_2 = xe_2$$

tj.

$$xe_2 = x.$$

$$x(e_1e_2) = xx = x^2 = (xe_1)e_2 = xe_2 = x$$

pa je $x = e_1$. Analogno za $e_1e_2 = y$, $y \in G_2$.

Lema 3.8. ([34]) Ako je S polumreža regularnih semigrupa S_α takvih da je E_{S_α} podsemigrupa od S_α, onda je E_S podsemigrupa od S.

Dokaz. Ako $a \in S_\alpha$ i $x \in S_\beta$ je inverzan za a, onda a = axa implicira $\alpha \leq \beta$ i x = xax implicira $\beta \leq \alpha$ pa je $\alpha = \beta$. Prema tome, ako $e \in E_{S_\alpha}$ i x je inverzan za e, onda $x \in S_\alpha$ pa na osnovu teoreme 1.20, Glava I, sledi da je x idempotent. Ista teorema implicira da je onda E_S podsemigrupa od S.

Lema 3.9. Neka je S semigrupa sa tri idempotenta. Tada

$$S \in \mathcal{S}^*_{m,n} \rightarrow S \text{ je ortodoksna semigrupa.}$$

Dokaz. Ako je $\mathcal{D} = S \times S$ onda je $\mathcal{D} = \mathcal{L}$ ili $\mathcal{D} = \mathcal{R}$ pa je svaki idempotent desna, odnosno leva, jedinica semigrupe S. Ako je $\mathcal{D} = \mathcal{H}$ onda na osnovu leme 3.8. sledi tvrjdenje. Neka su e_1, e_2, e_3 idempotenti semigrupe S i neka je, na primer, $D_{e_1} = D_{e_2} \neq D_{e_3}$. Na osnovu leme 3.7. D_{e_1} je ortodoksna semigrupa pa iz ove činjenice i leme 3.8. sledi tvrdjenje.

Teorema 3.3. Neka je S semigrupa iz $\mathcal{S}^*_{m,n}$. Tada

$$S \text{ je ortogrupa} \leftrightarrow (\forall a \in S) D_a \text{ je ortogrupa.}$$

Dokaz. ($\rightarrow$) Neka je S ortogrupa. $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$ pa je svaka podsemigrupa od S ortodoksna. Prema (*) sledi da je D_a ortogrupa za svako $a \in S$.

($\leftarrow$) Sledi na osnovu leme 3.8. i teoreme 4.6. str. 170 u [7].

Za svako $m,n \in N$ klasa $S^*_{m,n}$ nije klasa ortodoksnih semigrupa. Na primer, semigrupa data tablicom

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	1	2	5	6	6	5
2	2	1	2	1	6	5	5	6
3	3	4	3	4	8	7	7	8
4	4	3	4	3	7	8	8	7
5	1	2	2	1	5	6	5	6
6	2	1	1	2	6	5	6	5
7	4	3	3	4	7	8	7	8
8	3	4	4	3	8	7	8	7

je iz klase $S^*_{2,5}$ tj. anti-inverzna ali nije ortodoksna.

Teorema 3.4. Neka je S semigrupa iz $S^*_{m,n}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni

(i) S je unija disjunktnih grupa iz $S^*_{m,n}$ generisanih sa dva $(m,n)^*$-anti-inverzna elementa.

(ii) Svaka H-klasa je grupa generisana sa dva $(m,n)^*$-anti-inverzna elementa.

Dokaz. *(i)* → *(ii)*. Prema lemi 3.5. i činjenici da je S kompletno regularna semigrupa sledi da je svaka H-klasa grupa iz $S^*_{m,n}$. S je unija grupa pa sledi da svaka grupa ove unije pripada jednoj i samo jednoj H-klasi. Ove grupe su disjunktne, pa sledi da je svaka grupa jednaka svojoj H-klasi.

(ii) → *(i)*. Sledi neposredno.

Teorema 3.5. Neka je $\mathcal{B}$ skup svih bi-ideala semigrupe S. Tada

$$S \in \mathcal{S}^*_{m,n} \leftrightarrow (\forall B \in \mathcal{B}) B \in \mathcal{S}^*_{m,n}.$$

Dokaz. ($\rightarrow$) Neka je $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$ i neka je B proizvoljan bi-ideal od S. Tada

$$SBS \subseteq B.$$

Ako $x \in B$ onda postoji y takvo da je $x^m = y^m \in B$. Za $n = m + 1$ imamo

$$y^{m+1} = y = y^{2m+1}$$

tj.

$$y^m y^m y = y$$

pa sledi

$$y \in B \quad \text{tj.} \quad B \in \mathcal{S}^*_{m,n}.$$

Za $n > m + 1$ imamo

$$y^{n-m-1} y^m y = y$$

pa

$$y \in B \quad \text{tj.} \quad B \in \mathcal{S}^*_{m,n}.$$

($\leftarrow$) Sledi iz činjenice da je $SSS \subseteq S$.

Posledica. Neka je $\mathcal{B}$ skup svih bi-ideala semigrupe S. Tada

$$S \in \mathcal{A} \leftrightarrow (\forall B \in \mathcal{B}) B \in \mathcal{A}.$$

Teorema 3.6. Neka je $\mathcal{Q}$ skup svih kvazi-ideala semigrupe S. Tada

$$S \in \mathcal{S}^*_{m,n} \leftrightarrow (\forall Q \in \mathcal{Q}) Q \in \mathcal{S}^*_{m,n}.$$

Dokaz. (→) Neka je $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$ i Q proizvoljan kvazi-ideal od S. Tada

$$QS \cap SQ \subseteq Q.$$

Ako $x \in Q$ onda

$$x^m = y^m \in Q.$$

$$y = y^n = y^m y^{n-m} = y^{n-m} y^m$$

pa

$$y \in y^m S \cap S y^m$$

tj.

$$y \in Q \qquad \text{odnosno} \quad Q \in \mathcal{S}^*_{m,n}.$$

(←) Sledi iz $SS \cap SS \subseteq S.$

Posledica. Neka je $\mathcal{Q}$ skup svih kvazi-ideala semigrupe S. Tada

$$S \in A \leftrightarrow (\forall Q \in \mathcal{Q}) Q \in \mathcal{S}^*_{m,n}.$$

Navodimo neke karakterizacije semigrupa iz klase $\mathcal{S}^*_{m,n}$ bez dokaza. Dokazi su analogni dokazima sličnih tvrdjenja u [2], [7]

Teorema 3.7. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$

(ii) Svaka $\mathcal{L}$-klasa semigrupe S je levo prosta podsemigrupa iz klase $\mathcal{S}^*_{m,n}$

(iii) S je unija disjunktnih levo prostih podsemigrupa iz klase $\mathcal{S}^*_{m,n}$.

Teorema 3.8. Neka je S semigrupa. Tada

$S \in S^*_{m,n} \leftrightarrow S$ je levo regularna i svaki levi ideal je iz $S^*_{m,n}$.

Teorema 3.9. Neka je S invezna semigrupa. Tada $S \in S^*_{m,n} \leftrightarrow S$ je polumreža (disjunktnih) podgrupa iz $S^*_{m,n}$.

Teorema 3.10. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni

(i) $S \in S^*_{m,n}$

(ii) S je regularna, levo regularna i svaki desni ideal od S je u klasi $S^*_{m,n}$

(iii) S je regularna, desno regularna i svaki levi ideal od S je u $S^*_{m,n}$.

Ako $S \in S^*_{m,n}$ onda je S intr-regularna semigrupa pa je J kongruencija semigrupe S. Na osnovu leme 3. [7] sledi da su J-klase ekvivalencije proste podsemigrupe.

Teorema 3.11. Neka je S semigrupa. Tada $S \in S^*_{m,n} \leftrightarrow S$ je intra-regularna semigrupa i svaki ideal od S je iz $S^*_{m,n}$.

Teorema 3.12. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni

(i) $S \in S^*_{m,n}$

(ii) Svaka J-klasa J_a semigrupe S je iz $S^*_{m,n}$

(iii) S je unija (disjunktnih) prostih podsemigrupa iz $S^*_{m,n}$

(iv) S je unija kompletno prostih podsemigrupa iz $S^*_{m,n}$

Teorema 3.13. Neka je S semigrupa. Tada $S \in \mathcal{S}^*_{m,n} \leftrightarrow S$ je polumreža kompletno prostih podsemigrupa iz $\mathcal{S}^*_{m,n}$.

G L A V A   III

BAZISNE KLASE NEKIH KLASA SEMIGRUPA

1. ALGORITAM ZA ODREDJIVANJE BAZISNE KLASE $(m,n)^*$-ANTI-INVERZNIH SEMIGRUPA

Neposredna posledica teoreme 2.3. dokazane u Glavi II jeste postojanje bazisne klase za klasu $S^*_{m,n}$ u odnosu na klasu svih semigrupa.

Neka je P klasa svih semigrupa i $N = S^*_{m,n}$. Prema lemi 2.4. i teoremi 2.3. u Glavi II sledi da je svaka semigrupa $S \in S^*_{m,n}$ unija konačnih grupa generisanih sa dva elementa koji su $(m,n)^*$-anti-inverzni.

Ako za klasu M uzmemo sve grupe generisane sa dva $(m,n)^*$-anti-inverzna elementa, koje se ne mogu predstaviti kao unija svojih pravih podgrupa iz $S^*_{m,n}$, onda je M bazisna klasa za $S^*_{m,n}$ u odnosu na klasu svih semigrupa.

Neka je S semigrupa iz $S^*_{m,n}$. Ako je $x \in S$ i

$$x^m = x^{n-1} = e_x,$$

onda x generiše cikličnku grupu reda m u kojoj je svaki element $(m,n)^*$-anti-inverzan sam sebi. Ako je

$$x^m \neq e_x,$$

onda postoji najmanje jedan element $y \in S$ takav da je

$$x^m = y^m, \quad yx = x^{m+1}y.$$

$$y \neq x^k$$

za svako $k \in N$ jer iz

$$x^k x = x^{m+1} x^k$$

sledi

$$x^m = e_x.$$

Grupa $[\{x,y\}]$ je konačna i pripada $S^*_{m,n}$. Neka su

$\alpha, \beta \in [\{x,y\}]$ $(m,n)^*$-anti-inverzni elementi.

$$\alpha = x^s y^t \quad (s,t \in N \cup \{0\}, 0 \leq s < n, \quad 0 \leq t < m)$$

i

$$\beta = x^k y^l \quad (k,l \in N \cup \{0\}, 0 \leq k < n, \quad 0 \leq l < m).$$

Neka je Z skup celih brojeva. Sa $|a|$ označavaće-mo apsolutnu vrednost elementa $a \in Z$.

$$[\{\alpha,\beta\}] = [\{x,y\}] \leftrightarrow (\exists A,B,C,D \in Z), (x^s y^t)^A (x^k y^l)^B = x \wedge (x^s y^t)^C (x^k y^l)^D = y.$$

Neka je $q \in Z$ i $q < 0$. Tada

$$x^q = x^{(n-2)|q|} = x^{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in N.$$

$$xy^{\varepsilon} = x^{m+1} yx^{\varepsilon-1} = x^{m+1} x^{m+1} yx^{\varepsilon-2} = \ldots = x^{\varepsilon(m+1)} y$$

tj.

$$yx^{\varepsilon} = x^{\varepsilon} yx^{m\varepsilon} = x^{\varepsilon} yy^{m\varepsilon}$$

pa imamo

$$xy^q = x^q yx^{mq} = x^q yy^{mq}.$$

Neka je $p \in Z$ i $p < 0$. Tada

$$y^p = y^{(n-2)|p|} = y^{\xi} (\xi \in N).$$

$$y^2 x^{\varepsilon} = yyx^{\varepsilon} = yx^{\varepsilon} yy^{m\varepsilon} = x^{\varepsilon} yyy^{m\varepsilon} y^{m\varepsilon} = x^{\varepsilon} y^2 y^{2m\varepsilon}.$$

Analogno dobijamo

$$y^{\xi}x^{\varepsilon} = x^{\varepsilon}y^{\xi}y^{m\xi\varepsilon} = x^{\varepsilon}y^{\xi}x^{m\xi\varepsilon}$$

pa je

$$y^{p}x^{q} = x^{q}y^{p}x^{mpq} = x^{q}y^{p}y^{mpq}$$

Neka je $A \in Z$ i $A < 0$. Tada

$$(x^{s}y^{t})^{A} = (x^{s}y^{t})^{(n-2)|A|} = (x^{s}y^{t})^{M} \qquad ((n-2)|A| = M)$$

gde su $s,t,M \in N \cup \{0\}$. Kako je

$$x^{A} = x^{(n-2)|A|} = x^{M}$$

sledi

$$(x^{s}y^{t})^{A} = (x^{s}y^{t})^{M} \leftrightarrow x^{A} = x^{M}$$

i

$$(x^{s}y^{t})^{A} = (x^{s}y^{t})^{M} \leftrightarrow y^{A} = y^{M}.$$

$$(x^{s}y^{t})^{M} = x^{s}y^{t}\ldots x^{s}y^{t}x^{s}y^{t} =$$

$$= x^{s}y^{t}\ldots x^{s}x^{s}y^{t}y^{mst}y^{t} = x^{s}y^{t}\ldots x^{s}y^{t}x^{2s}y^{2t}y^{mst} =$$

$$= x^{s}y^{t}\ldots x^{s}x^{2s}y^{t}y^{m2st}y^{2t}y^{mst} = x^{s}y^{t}\ldots x^{3s}y^{3t}y^{2mst+mst} =$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$= x^{Ms}y^{Mt}y^{mst(1+2\ldots+(M-1))} =$$

$$= x^{Ms}y^{Mt}y^{mst}y^{2mst}\ldots y^{mst(M-1)} =$$

$$= x^{As}y^{At}y^{mst}y^{2mst}\ldots y^{mst(A-1)} =$$

$$= x^{As}y^{At}y^{m\frac{A(A-1)}{2}st} = x^{As}y^{At}x^{m\frac{A(A-1)}{2}st}.$$

Cikličke grupe

$$H = \{e,x,x\ ,\ldots,x^{n-2}\}$$

$$K = \{e,y,y\ ,\ldots,y^{n-2}\}$$

su podgrupe grupe $[\{x,y\}]$. Presek

$$P = H \bigcap K = \{x^{\tau}, x^{2\tau}, \ldots, x^{r\tau} = e\} = \{y^{\lambda}, y^{2\lambda}, \ldots, y^{r\lambda} = e\}, \tau, \lambda \in N \bigcup \{0\},$$

odredjuje broj elemenata grupe $[\{x,y\}]$.

$$(x^s y^t)^A (x^k y^l)^B = x$$

ako i samo ako je

$$(*) \qquad x^{As} y^{At} y^{m\frac{A(A-1)}{2} st} x^{Bk} y^{Bl} y^{m\frac{B(B-1)}{2} kl} = x$$

Jednakost (*) je ekvivalentna sa

$$(**) \qquad x^{As} y^{At} x^{Bk} y^{Bl} y^{m\left(\frac{A(A-1)}{2} st + \frac{B(B-1)}{2} kl\right)} = x.$$

Jednakost (**) ekvivalentna je sa

$$x^{As} x^{Bk} y^{At} y^{mABkt} y^{Bl} y^{m\frac{A(A-1)}{2} st + \frac{B(B-1)}{2} kl} = x$$

tj.

$$(***) \qquad x^{As+Bk} y^{At+Bl+ABmkt+m\frac{A(A-1)}{2} st + m\frac{B(B-1)}{2} kl} = x.$$

Iz (***) dobijamo ekvivalentnu jednakost

$$(a) \qquad x^{As+Bk-1} = y^{-(At+Bl+m\frac{A(A-1)}{2} st + m\frac{B(B-1)}{2} kl + ABmkt)} .$$

Jednakost (a) važi ako i samo ako postoje $q_\tau, q_\lambda \in Z$. takvi da je

$$As + Bk - 1 = q_\tau \tau$$

$$-(At + Bl + m\frac{A(A-1)}{2} st + m\frac{B(B-1)}{2} kl + ABmkt) = q_\lambda \lambda$$

i

$$x^{q_\tau \tau} = y^{q_\lambda \lambda} .$$

Pretpostavimo da je

(1.1) $$x^{\tau} = y^{q\lambda}, \quad q \in \{1,2,\ldots,r\}.$$

Neka su $p_1, p_2 \in Z$. Tada

$$y^{p_1\lambda} = y^{p_2\lambda} \leftrightarrow p_1 \equiv p_2 (\mathrm{mod}\, r).$$

Iz (1.1) imamo

$$x^{q_\tau \tau} = y^{q_\tau q\lambda}$$

pa sledi da je

(1.2) $$y^{q_\tau q\lambda} = y^{q_\lambda \lambda}.$$

Iz (1.2) imamo

$$x^{q_\tau \tau} = y^{q_\lambda \lambda}$$

ako i samo ako je

$$q_\tau q \equiv q_\lambda (\mathrm{mod}\, r).$$

Označimo sa

$$C_i = \{a \mid a \equiv i (\mathrm{mod}\, p), a \in Z, p \in N, i \in \{0,1,2,\ldots,p-1\}\}$$

klasu kongruencije po modulu p elementa i. Za ceo broj q_τ važi jedna i samo jedna kongruencija

$$q_\tau \equiv 0 (\mathrm{mod}\, r), q_\tau \equiv 1 (\mathrm{mod}\, r), \ldots, q_\tau \equiv r-1 (\mathrm{mod}\, r).$$

$q_\tau \in C_i$ ako i samo ako je

$$q_\tau = i + Jr$$

za neko $J \in Z$. Na taj način nalaženje A, B, q_τ, u Diofantovoj jednačini

$$As + Bk - 1 = q_\tau \tau,$$

svodimo na nalaženje rešenja Diofantove jednačine

$$(i) \qquad As + Bk + Jr\tau = 1 + i\tau$$

po A,B i J.

Jednačina *(i)* ima rešenje po A,B i J ako i samo ako je

$$(s,k,r\tau) \mid (1 + i\tau)$$

za dato $i \in \{0,1,\ldots,r-1\}$.

Prema poznatoj teoremi, iz teorije brojeva, rešenje jednačine *(i)* zavisi od dva parametra koji prolaze skupom celih brojeva tj.

$$A = A(\varepsilon,\eta)$$
$$B = B(\varepsilon,\eta)$$
$$J = J(\varepsilon,\eta)$$

Uzimajući za ε,η različite vrednosti iz skupa Z imamo da A,B prolaze raznim klasama kongruencije po modulu $2r\lambda$. Broj $A(\varepsilon,\eta)$ pripada C_j klasi kongruencije po modulu $2r\lambda$ ako i samo ako Diofantova jednačina

$$(ii) \qquad A(\varepsilon,\eta) + 2r\lambda\omega = j$$

ima rešenje po $\varepsilon,\eta,\omega \in Z$. Ako jednačina *(ii)* ima rešenje po ε,η,ω, onda rešenje zavisi od najviše dva parametra $\varepsilon_1,\eta_1, \in Z$ tj.

$$\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_1,\eta_1)$$
$$\eta = \eta(\varepsilon_1,\eta_1)$$
$$\omega = \omega(\varepsilon_1,\eta_1) .$$

U tom slučaju $B(\varepsilon(\varepsilon_1,\eta_1),\eta(\varepsilon_1,\eta_1))$ pripada C_g klasi kongruencije po modulu $2r\lambda$ ako i samo ako Diofantova jednačina *(iii)* $$B(\varepsilon(\varepsilon_1,\eta_1),\eta(\varepsilon_1,\eta_1)) + 2r\lambda\delta = g$$

ima rešenje po $\varepsilon_1,\eta_1,\delta,\in Z$.

Iz

$$-(At + Bl + m\frac{A(A-1)}{2}st + m\frac{B(B-1)}{2}kl + ABmkt) = q_\lambda \lambda$$

imamo

$$-(2At + 2Bl + mA(A-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt) = q_\lambda 2\lambda .$$

q_λ pripada klasi C_h ostataka po modulu r ako i samo ako je

$$-(2At + 2Bl + mA(A-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt) = (h + rz)2\lambda$$

gde $z \in Z$ tj. ako i samo ako

$$-(2At + 2Bl + mA(A-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt) \in C_{2h\lambda}$$

gde je $C_{2h\lambda}$ klasa ostataka po modulu $2r\lambda$.

Na osnovu prethodnog sledi da postoje $A,B \in Z$ takvi da je

$$(x^s y^t)^A (x^k y^l)^B = x$$

ako i samo ako za svako nadjeno q_τ iz $q_\tau q \in C_h$ $(h \in \{0,1,\ldots,r-1\})$ sledi da

$$-(2At + 2Bl + mA(a-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt) \in C_{2h\lambda}$$

$(2h\lambda \in \{0,1,\ldots,2r\lambda-1\})$

tj.

$$q_\tau q \equiv q_\lambda (\mathrm{mod}\, r).$$

Analogno proveravamo da li postoje $C,D \in Z$ takvi da je

$$(x^s y^t)^C (x^k y^l)^D = y .$$

Neka je data linearna Diofantova jednačina oblika

$$(\square) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c, \quad a_1,a_2,a_3,c \in Z \quad i \quad a_1a_2a_3 \neq 0.$$

Jednačina ($\square$), kao što je poznato, ima rešenje ako i samo ako je

$$(\bigcirc) \qquad (a_1,a_2,a_3)\,|\,c.$$

Rešenje jednačine ($\square$) nalazimo na sledeći način:

$$x_2 = \alpha u + \beta n$$

$$x_3 = \gamma u + \delta n$$

gde su $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in Z$ takvi da je

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$$

Ako uzmemo

$$\beta = \frac{a_3}{(a_2,a_3)} \quad , \qquad \delta = \frac{-a_2}{(a_2,a_3)}$$

onda je $(\beta,\delta) = 1$ pa možemo uvek naći α i γ takve da je

$$\delta\alpha - \beta\gamma = 1 .$$

Jednačina ($\square$) svodi se na jednačinu

$$a_1x_1 + (a_2\alpha + a_3\gamma)u = c$$

sa dve nepoznate x_1 i u.

Kako je

$$a_2\alpha + a_3\gamma = -(a_2,a_3)\delta\alpha + (a_2,a_3)\beta\gamma = -(a_2,a_3)$$

jednačina ($\square$) svodi se na jednačinu

$$(\triangle) \qquad a_1x_1 - (a_2,a_3)u = c .$$

Kako rešenje linearne Diofantove jednačine sa dve nepoznate zavisi od jednog parametra, koji prolazi skupom Z, imamo da je

$$x_1 = x_1(\varepsilon)$$
$$u = u(\varepsilon)$$

tj.

$$x_1 = x_1(\varepsilon)$$
$$x_2 = \alpha u(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)$$
$$x_3 = \gamma u(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \ .$$

Na primer, jednačina

$$5x - 2y - 4z = 1$$

ima rešenje

$$x = 1 - 2\varepsilon$$
$$y = -2 + 5\varepsilon - 2\eta$$
$$z = 2 - 5\varepsilon + 2\eta \ .$$

Iz prethodnog vidimo da, u jednačini *(i)*, A zavisi samo od jednog parametra ε.

Algoritam za nalaženje celih brojeva A i B takvih da je

$$(x^s y^t)^A (x^k y^l)^B = x$$

može se podeliti na tri dela.

PRVI KORAK. Ako Diofantova jednačina *(i)* nema rešenje po A,B i J onda je grupa $[\{x^s y^t, x^k y^l\}]$ prava podgrupa grupe $[\{x,y\}]$. Ako jednačina *(i)* ima rešenje, odredjujemo, za dato i, klasu ostatka po modulu r broja $q_\tau q$.

<u>*DRUGI KORAK.*</u> Jednačina *(ii)* ima rešenje za bar jedno $j \in \{0,1,\ldots,2r\lambda-1\}$ jer $A(\varepsilon,\eta) = A(\varepsilon)$ mora pripadati za razne ε bar jednoj od klasa ostatka po modulu $2r\lambda$. Za svako rešenje jednačine *(ii)* (kada menjamo j) utvrdjujemo kojoj klasi ostatka po modulu $2r\lambda$ pripada $B = B(\varepsilon(\varepsilon_1),\eta(\varepsilon_1))$ tj. kada g prolazi skupom $\{0,1,\ldots,2r\lambda-1\}$ ispitujemo da li *(iii)* ima rešenje. Kao što je rečeno za ovo je dovoljno ispitati da li važi uslov ($\bigcirc$).

<u>*TREĆI KORAK.*</u> Pošto smo našli sve klase ostatka po modulu $2r\lambda$, kojima istovremeno mogu pripadati A i B, pod uslovom da jednačina *(i)* ima rešenje, odredjujemo klasu ostatka po modulu $2r\lambda$ za izraz

$$(\nabla) \qquad -(2At + 2Bl + mA(A-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt).$$

Umesto brojeva koji figurišu u izrazu (∇) unosimo njihove klase ostataka po modulu $2r\lambda$ i na taj način ispitujemo kojoj klasi pripada izraz (∇). Prema prethodnom, izraz (∇) pripada klasi $C_{2h\lambda}$ ostataka po modulu $2r\lambda$ ako i samo ako q_λ pripada klasi C_h ostataka po modulu r. Ako brojevi $q_\tau q$ i q_λ nemaju istu klasu ostataka po modulu r tj. ako nije $q_\tau q \equiv q_\lambda (\mathrm{mod}\, r)$, onda je grupa $[\{x^s y^t, x^k y^l\}]$ prava podgrupa grupa $[\{x,y\}]$.

Analogno proveravamo da li postoje $C,D \in Z$ takvi da je

$$(x^s y^t)^C (x^k y^l)^D = y .$$

2. PRIMERI

Pokažimo na nekoliko primera primenu gornjeg algoritma. Kod efektivnog nalaženja grupa koje pripadaju bazisnoj klasi date klase $S^*_{m,n}$ polazimo od elementa x, odnosno y. Za generator x nalazimo sve $(m,n)^*$-anti-inverzne elemente u grupi $[\{x,y\}]$. Ako x sa svim svojim $(m,n)^*$-anti-inverznim elementima generiše celu grupu $[\{x,y\}]$, onda $[\{x,y\}]$ pripada bazisnoj klasi klase $S^*_{m,n}$. Analogno radimo sa y.

2.1. Posmatrajmo klasu $S^*_{4,9}$. Tada je

$$H = \{e,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^7\}$$

$$K = \{e,y,y^2,y^3,y^4,y^5,y^6,y^7\}.$$

Neka je $H \cap K = \{e,x^4\}$ tj. $\tau = \lambda = 4$. Grupa $[\{x,y\}]$ ima 32 elementa. x^4y^3 je $(4,9)^*$-anti-inverzan za x.

$$x^4y^3 = y^7$$

pa je

$$(x^4y^3)^4 = (y^7)^4 = y^{28} = y^{24}y^4 = y^4 = x^4 .$$

$$y^7x = xy^7y^{4\ 7} = xy^7y^4 = xy^7x^4 = x^5y^7 .$$

$$x^C(x^4y^3)^D = y$$

za $C = 4$ i $D = 3$ jer

$$x^4(x^4y^3)^3 = x^4(y^7)^3 = y^4y^{21} = y^{25} = y^{24}y = y .$$

$x^{-4} \in [\{x,x^4y^3\}]$pa $x^{-4}x^4y^3 \in [\{x,x^4y^3\}]$ tj. $y^3 \in [\{x,x^4y^3\}]$.

$(y^3)^3 = y^9 = y \in [\{x, x^4y^3\}]$ pa je jasno (i bez nalaženja C i D) da je

$$[\{x,y\}] = [\{x,y^7\}] .$$

Ako je $(4,9)^*$-anti-inverzan element za x oblika $x^s y^2$ $(s \geq 0)$, onda je

$$x^s y^2 x = x^{4+1} x^s y^2 = x^{4+s+1} y^2 .$$

Kako je

$$x^s y^2 x = x^s x y^2 y^{4\cdot 2\cdot s} = x^{s+1} y^2$$

sledi

$$x^{4+s+1} y^2 = x^{s+1} y^2$$

pa je posle skraćivanja

$$x^4 = e$$

što je suprotno pretpostavci. Na osnovu ovoga zaključujemo da element x sa svakim svojim $(4,9)^*$-anti-inverznim elementom generiše celu grupu $[\{x,y\}]$. Sledi da grupa G_{32} od 32 elementa generisana sa x i y, pripada bazisnoj klasi klase $S^*_{4,9}$.

Neka je, dalje, $P = H \cap K = \{e, x^2, x^4, x^6\} = \{e, y^2, y^4, y^6\}$. Tada grupa $[\{x,y\}]$ ima 16 elemenata. Slično prethodnom pokazuje se da x sa svakim svojim $(4,9)^*$-anti-inverznim elementom generiše celu grupu $[\{x,y\}]$ pa grupa G_{16} (postoji samo jedna) pripada bazisnoj klasi.

Ako je $P = H \cap K = H = K$ sledi da je $x = y^k (k \in \{1,2,\ldots,7\})$ pa imamo da je $x^4 = e$ tj. ciklička grupa C_4 pripada bazisnoj klasi. Kako je $(4,8) = 4$ sledi da je i ciklička grupa C_2 element bazisne klase.

Prema tome, grupe $G_{32}, G_{16}, C_4, C_2, \{e\}$ čine bazisnu klasu klase $S^*_{4,9}$ tj.

$$M = \{\{e\}, C_2, C_4, G_{16}, G_{32}\} .$$

2.2. Posmatrajmo sada klasu $S^*_{6,13}$.

$$H = \{e, x, x^2, \ldots, x^{11}\}$$

i

$$K = \{e, y, y^2, \ldots, y^{11}\} .$$

Ako je $P = H \cap K = \{e, x^6\} = \{e, y^6\}$, onda imamo grupu G_{72} od 72 elementa. Pokazaćemo da $G_{72} = [\{x,y\}]$ ne pripada bazisnoj klasi klase $S^*_{6,13}$. Elementi

$$x^2y^2, x^4y^2, x^6y^2, x^8y^2, x^{10}y^2, x^2y^4, x^4y^4, x^6y^4, x^8y^4, x^{10}y^4$$

su reda 6 i sami sebi $(6,13)^*$-anti-inverzni pa pripadaju grupi $C_6 \in S^*_{6,13}$ koja je u bazisnoj klasi klase $S^*_{6,13}$. Za element x^5y $(6,13)^*$-anti-inverzni element je $x^{10}y^5$ zbog

$$(x^5y)^6 = x^{5\,6}y^6x^{6\frac{6\cdot 5}{2}5\cdot 1} = x^6x^6\,(x^6)^{45} = x^{18} = x^6,$$

$$(x^{10}y^5)^6 = x^{10\,6}y^{5\,6}x^{6\frac{6\cdot 5}{2}10\cdot 5} = y^6 = x^6,$$

$$x^{10}y^5x^5y = x^{10}x^5y^5x^{6\cdot 5\cdot 5}y = x^{21}y^6 = x^{27} = x^3,$$

$$(x^5y)^7x^{10}y^5 = x^6x^5yx^{10}y^5 = x^{11}x^{10}yx^{6\cdot 10\cdot 1}y^5 = x^{21}y^6 = x^{27} = x^3.$$

Kako je

$$(x^5y)^{10} = (x^{10}y^5)^2 = x^2y^4 ,$$

$$(x^5y)^6 = (x^{10}y^5)^6 = x^6 ,$$

sledi da je

$$(x^5y)^2 = (x^{10}y^5)^{10} ,$$

$$(x^5y)^4 = (x^{10}y^5)^8 ,$$

$$(x^5y)^8 = (x^{10}y^5)^4 ,$$

pa je grupa $[\{x^5y,x^{10}y^5\}]$ izomorfna sa grupom $G_{24} \in S^*_{6,13}$ generisanom sa 2 $(6,13)^*$-anti-inverzna elementa tj.

$$[\{x^5y,x^{10}y^5\}] \neq G_{72}.$$

Elementi ove grupe su

$$x^5y,x^{10}y^5,xy^5,x^4y^5,x^{11}y,x^7y^5,x^2y,xy^2,x^7y^2,x^8y,x^{11}y^4,x^3,e$$

$$x^5y^4,x^6,y^3,x^9y^3,x^8y^4,x^3y^3,x^6y^3,x^9,x^4y^2,x^2y^4,x^{10}y^2 .$$

y^3 je $(6,13)^*$-anti-inverzno za x pa $[\{x,y^3\}] \in S^*_{6,13}$. $[\{x,y^3\}] \neq G_{72}$ i elementi ove grupe su

$$e,x,x^2,\dots,x^{11},y^3,xy^3,\dots,x^{11}y^3.$$

Za x^3 $(6,13)^*$-anti-inverzan element je y i $[\{x^3,y\}] \neq G_{72}$

$e,y,y^2,y^3,y^4,y^5,x^3y,x^3y^2,x^3y^4,x^3y^5,x^6y,x^6y^5,x^9y,x^9y^2,x^9y^4,xy^5$

su elementi grupe $[\{x^3,y\}]$.

Za xy $(6,13)^*$-anti-inverzan element je y^3. Pokažimo, koristeći prethodna razmatranja, da je

$$[\{xy,y^3\}] \neq G_{72}.$$

$$(xy)^A(y^3)^B = x$$

ako i samo ako

$$A - 1 = 6q_\tau ,$$

$$-\ (A + 3B + 6\ \frac{A(A-1)}{2}\ ) = 6q_\lambda$$

i

$$x^{6q_\tau} = y^{6q_\lambda}$$

gde je $s = 1$, $t = 1$, $k = 0$, $l = 3$, $r = 2$, $\tau = 6$, $\lambda = 6$, $q = 1$.

Sistem je ekvivalentan sa

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &A + 12J = 1 \\ &-(2A + 6B + 6A(A-1)) \in C_0 \quad (0 \in \{0,1,\dots,23\}) \\ &x^{6q_\tau} = y^{6q_\lambda} \end{aligned}$$

odnosno

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} &A + 12J = 7 \\ &-(2A + 6B + 6A(A-1)) \in C_{12} \quad (12 \in \{0,1,\dots,23\}) \\ &x^{6q_\tau} = y^{6q_\lambda}\ . \end{aligned}$$

Iz sistema (I) imamo

$$A = 13 + 12\varepsilon$$

pa kao jednačinu (*ii*) dobijamo

$$(13 + 12\varepsilon) + 24\omega = j\ , \qquad j \in \{0,1,\dots,23\}\ .$$

Kako je $(12,24) = 12$ jedine mogućnosti su da A pripada klasama C_1 i C_{13} po modulu 24. Ako $A \in C_1$ izraz $-(2A + 6B + 6A(A-1))$ se transformiše u

$$-(2 + 6B) = -2 - 12B.$$

Kako je

$$22 \equiv -2(\text{mod}24)$$

$$12 \equiv -12(\text{mod}24)$$

imamo da je

$$22 + 12B \equiv -(2 + 6B)(\mathrm{mod}\,24).$$

$22 + 12B \in C_0$, za B iz proizvoljne klase ostataka po modulu 24, ako i samo ako jednačina

$$22 + 12B = 24J$$

ima rešenje po B i J. Kako je $(12,24) = 12$ i $12 \nmid 22$ sledi da za $A \in C_1$

$$-(2A + 6B + 6A(A-1)) \notin C_0$$

ni za jedno B.

Neka je $A \in C_{13}$. Tada izraz $-(2A + 6B + 6A(A-1))$ postaje kongruentan izrazu $-(26 + 6B + 0)$.

$$-(26 + 6B) \equiv -(2 + 6B) \equiv 22 + 12B(\mathrm{mod}\,24).$$

Kao i u prethodnom slučaju imamo da

$$-(2A + 6B + 6A(A-1)) \notin C_0.$$

Iz sistema (II) imamo

$$A = 91 + 12\varepsilon$$

pa jednačina *(ii)* postaje

$$(91 + 12\varepsilon) + 24\omega = j, \quad j \in \{0,1,\dots,23\}.$$

Na osnovu ovoga imamo da A može pripadati klasama C_7 i C_{19}. Ako $A \in C_7$ izraz $-(2A + 6B + 6A(A-1))$ je kongruentan sa $22 + 12B$ pa imamo Diofantovu jednačinu

$$22 + 12B = 12 + 24J$$

koja zbog $12 \nmid -10$ nema rešenja. Ako $A \in C_{19}$ izraz

$-(2A + 6B + 6A(A-1))$ je kongruentan sa izrazom $22 + 12B$ pa ne pripada klasi C_{12} ni za jedno B. Na osnovu prethodnog zaključujemo da je $[\{xy,y\}]$ prava podgrupa grupe G_{72}.

Neka je $P = H \cap K = \{e,x^3,x^6,x^9\}=\{e,y^3,y^6,y^9\}$. Tada imamo $x^6 = e$ što sledi iz $yx = x^7y$ tj. $x = y^{-1}x^7y$.

Ako je $P = H \cap K = \{e,x^2,x^4,x^6,x^8,x^{10}\}$ dobija se, kao što je rečeno, grupa $G_{24} = [\{x,y\}]$ od 24 elementa.

$$G_{24} = \{e,x,x^2,\ldots,x^{11},y,xy,\ldots,x^{11}y\}$$

pa je jasno da x ne pripada ni jednoj pravoj podgrupi grupe G_{24}.

Ako je $P = H \cap K = \{e,x^2\} = \{e,y^2\}$ imamo grupu od osam elemenata $G_8 = [\{x,y\}]$. Lako se pokazuje da je G_8 Kvaternionska grupa. Na osnovu gornjeg razmatranja zaključujemo da bazisnu klasu M klase $S^*_{6,13}$ čine grupe $\{e\},C_2C_6,G_8,G_{24}$ tj.

$$M = \{\{e\},\ C_2,\ C_6,\ G_8,\ G_{24}\}$$

2.3. Posmatrajmo sada klasu $S^*_{6,9}$.

$$H = \{e,x,\ldots,x^7\}$$

$$K = \{e,y,\ldots,y^7\}$$

Ako je $P = H \cap K = \{e,x^6\} = \{e,y^6\}$ onda je

$$x^{12} = e$$

tj.

$$x^4 = e$$

pa imamo

$$H \cap K = \{e,x^2\} = \{e,y^2\}.$$

U tom slučaju, grupa $[\{x,y\}]$ je Kvaternionska grupa.

Naka je $H \cap K = \{e,x^2,x^4,x^6\} = \{e,y^2,y^4,y^6\}$. Na osnovu leme 2.3. u Glavi II imamo da je $x^{36} = e$. Sledi da je

$$x^4 = e ,$$

pa je $H \cap K = \{e,x^2\} = \{e,y^2\}$ pa ponovo imamo Kvaternionsku grupu.

Ako je $H \cap K = \{e\}$ tj. $x^2 = e$, onda dobijamo da je $[\{x,y\}]$ Klajnova grupa koja je unija cikličnih grupa reda 2 i $C_2 \in S^*_{6,9}$. Prema tome, bazisnu klasu M, klase $S^*_{6,9}$, čine grupe e, C_2, G_8 tj.

$$M = \{\{e\}, C_2, G_8\}.$$

Na osnovu prethodnog imamo sledeću posledicu

Posledica. (S. Bogdanović [2]) Klasa M je Bazisna klasa, u smislu Ljapina, za klasu A u odnosu na klasu svih semigrupa.

Dokaz. Prema posledici 2.6. u II imamo $S^*_{6,9} = A$.

Kod nalaženja grupa iz bazisne klase $S^*_{m,n}$ možemo postupiti na sledeći način

Neka je $a \in [\{x,y\}]$ i β njemu $(m,n)^*$-anti-inverzan element. $[\{\alpha,\beta\}]$ je podgrupa grupe $[\{x,y\}]$ i $[\{\alpha,\beta\}] \in S^*_{m,n}$. Ako je

$$H = \{e,x,x^2,\dots,x^{n-2}\}$$

i

$$K = \{e,y,y^2,\dots,y^{n-2}\}$$

onda

$$P = H \cap K = \{x^{\tau},x^{2\tau},\dots,x^{r\tau} = e\} = \{y^{\lambda},y^{2\lambda},\dots,y^{r\lambda} = e\}$$

odredjuje broj elemenata grupa $[\{x,y\}]$. Neka je

$$H' = \{e,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-2}\}$$

i

$$K' = \{e,\beta,\beta^2,\ldots,\beta^{n-2}\} .$$

Ako je H' izomorfno sa H tj. ako su svi stepeni od α različiti i K' izomorfno sa K, onda je

$$[\{\alpha\ \beta\}] = [\{x,y\}] .$$

Ako H' nije izomorfno sa H ili K' nije izomorfno sa K, onda je grupa $[\{\alpha,\beta\}]$ prava podgrupa grupe $[\{x,y\}]$. Pretpostavlja se, naravno, da P ima definitivan oblik tj. da smo izvršili sva moguća uprošćavanja. Pokažimo ovo na primeru klase $S^*_{6,13}$.

Imali smo da je $[\{xy,y^3\}] \in S^*_{6,13}$.

$$(xy)^2 = x^8y^2$$

$$(xy)^3 = x^9y^3$$

$$(xy)^4 = x^4y^4$$

$$(xy)^5 = x^5y^5$$

$$(xy)^6 = x^6$$

$$(xy)^7 = x^7y$$

$$(xy)^8 = x^2y^2$$

$$(xy)^9 = x^3y^3$$

$$(xy)^{10} = x^{10}y^4$$

$$(xy)^{11} = x^{11}y^5$$

pa je H' izomorfno sa H. $K' = \{e,y^3,y^6,y^9\}$ pa je jasno da je grupa $[\{xy,y^3\}]$ prava podgrupa grupe G_{72}. Na taj način moguće je ispitati da li proizvoljna grupa $[\{x,y\}] \in S^*_{m,n}$ pripada bazisnoj klasi M klase $S^*_{m,n}$.

Ako je u proizvoljnoj klasi $S^*_{m,n}$ $H' = H$ i $K' = K$ pokažimo da je tada $[\{x,y\}] \cong [\{\alpha,\beta\}]$.

Neka je

$$P = \{x^{\tau},x^{2\tau},\ldots,x^{r\tau} = e\} = \{y^{\lambda},y^{2\lambda},\ldots,y^{r\lambda} = e\}.$$

Preslikavanje $f\colon [\{x,y\}] \to [\{\alpha,\beta\}]$ dato sa

$$f(x^s y^t) = \alpha^s \beta^t \qquad (0 \leqslant s < n, \quad 0 \leqslant t < m)$$

je traženi izomorfizam.

$$f((x^s y^t)(x^k y^l)) = f(x^s x^k x^{mkt} y^t y^l) =$$

$$= f(x^{s+k+mkt} y^{t+l}) = \alpha^{s+k+mkt}\beta^{t+l} = (\alpha^s\beta^t)(\alpha^k\beta^l)$$

pa je f homomorfizam. Ako je $\alpha^p\beta^q \in [\{\alpha,\beta\}]$, onda je

$$f(x^p y^q) = \alpha^p\beta^q$$

pa je f presliaavanje "na". Pokažimo da je f 1-1. Neka je

$$f(x^s y^t) = \alpha^s\beta^t$$

i

$$f(x^k y^l) = \alpha^s\beta^t$$

tj.

$$(s) \qquad \alpha^s\beta^t = \alpha^k\beta^l$$

Iz (s) sledi

$$(t) \qquad \alpha^{s-k} = \beta^{l-t}.$$

Neka je λ_o najmanji ceo broj takav da je $\beta^{\lambda_o} \in P'$. Sledi da je $l < \lambda_o$ i $t < \lambda_o$. Ako je $l-t > 0$ onda je

$l-t < \lambda_o - t < \lambda_o$ pa, pošto iz *(t)* sledi da

$\beta^{l-t} \in P'$,

sledi da je

$$\beta^{l-t} = e$$

tj.

$$\beta^l = \beta^t .$$

Iz *(s)* neposredno imamo

$$\alpha^s = \alpha^k$$

pa je $s = k$ i $l = t$ odnosno f je izomorfizam.

Koristeći prethodna razmatranja možemo zaključiti da ako postoji grupa $[\{x,y\}] \in S^*_{m,n}$ reda k onda postoji samo jedna takva grupa.

3. $QS^*_{m,n}$ I $QS_{m,n}$ SEMIGRUPE

U ovoj tački dajemo jednu karakterizaciju semigrupa iz klase $QS^*_{m,n}$, odnosno $QS_{m,n}$.

Definicija. Neka je S semigrupa.

$S \in QS^*_{m,n}(QS_{m,n}) \leftrightarrow$ Svaka prava podsemigrupa semigrupe S pripada $S^*_{m,n}(S_{m,n})$.

Teorema. Neka je S semigrupa.

$S \in QS^{*}_{m,n}(QS_{m,n}) \leftrightarrow$ Važi jedan i samo jedan od uslova:

1° $(\forall a \in S)$ $a = a^{(m,n-1)+1}$ $((m,n-1)$ je NZD)

2° S je ciklička grupa $|S| = p^{\alpha} \nmid (\alpha \in N, p\text{-prost})$, $p^{\alpha-1} \mid (m,n-1)$ i $p^{\alpha} \nmid (m,n-1)$

3° S je monogena semigrupa indeksa 2 i $r \mid (m,n-1)$ (r je period semigrupe S).

Dokaz. Neka $S \in QS^{*}_{m,n}(QS_{m,n})$ i neka je $x \in S$. Ako S nije monogena $\langle x\rangle \in S^{*}_{m,n}(S_{m,n})$, gde $\langle x\rangle$ označava monogenu semigrupu generisanu sa x.

Sledi

$$x^{n} = x \quad i \quad (x^{\varepsilon})^{m} = x^{m} \quad i \quad x^{\varepsilon}x = x^{m+1}x^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon \in N)$$

$$(\, x^{n} = x \quad i \quad (x^{\varepsilon})^{m} = x^{m} = (x^{\varepsilon}x)^{m}\,)$$

tj. $[\{x,x^{\varepsilon}\}]$ čine grupu pa je

$$x^{m} = e_{x} = x^{n-1} .$$

Sledi

$$x^{(m,n-1)} = e_{x}$$

tj.

$$x^{(m,n-1)+1} = x.$$

Ako je S monogena tj. $S = \langle x\rangle$ onda važi

(1) S je ciklička grupa

ili

(2) S je monogena semigrupa.

Razmotrimo (1).

Neka je $|S| = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_k}^{\alpha_k}$. Tada je $\langle a^{p_{i_j}} \rangle$ podgrupa od S $(j=1,\ldots,k)$.

Sledi $\langle a^{p_{i_j}} \rangle \in S^*_{m,n}(S_{m,n})$ pa je

$$a^{p_{i_1}(m,n-1)} = a^{p_{i_2}(m,n-1)} = \ldots = a^{p_{i_k}(m,n-1)} = e.$$

Označimo sa $a^{(m,n-1)} = b$. Tada je

$$b^{p_{i_1}} = b^{p_{i_2}} = e.$$

Sledi

$$b^{(p_{i_1}, p_{i_2})} = e.$$

Kako je

$$(p_{i_1}, p_{i_2}) = 1$$

Sledi da je

$$a^{(m,n-1)} = e$$

odnosno $|S| \mid (m,n-1)$ tj. važi 1°.

Ako je $|S| = p^\alpha (\alpha \in N$, p-prost) onda je $\langle a^p \rangle$ podgrupa od S pa je

$$\langle a^p \rangle \in S^*_{m,n}(S_{m,n}).$$

Sledi da je

$$(a^p)^{(m,n-1)} = (a^p)^{p^{\alpha-1}} = e.$$

Za $\alpha = 1$ i $p \nmid (m,n-1)$ 2° neposredno sledi.

Za $\alpha > 1$ imamo

$$a^{p((m,n-1),p^{\alpha-1})} = e.$$

$(m,n-1) \geqslant p^{\alpha-1}$ (u protivnom $|S| < p^\alpha$).

Neka je $((m,n-1),p^{\alpha-1}) = p^{\beta}$ i $\beta < \alpha-1$. Sledi da je

$$(a^p)^{p^{\beta}} = e$$

pa je $|S| < p^{\alpha}$.

Na osnovu prethodnog sledi

$$p^{\alpha-1} \mid (m,n-1).$$

Ako je $S = \langle a \rangle$ monogena semigrupa tj. važi (2), onda je S konačna (u protivnom $S \notin QS^*_{m,n}(QS_{m,n})$).

$S = \{a,a^2,\dots,a^{\bar{m}+r-1}\}$ tj.

$$a^{\bar{m}} = a^{\bar{m}+r} \quad (\bar{m} \text{ - indeks i } r \text{ - period, } \bar{m} > 1)$$

$K_a = \{a^{\bar{m}},a^{\bar{m}+1},\dots,a^{\bar{m}+r-1}\}$ je grupa.

$K_{a'} = K_a \cup \{a^{\bar{m}-1}\}$ je podsemigrupa od S i nije regularna $(S^2 \neq S)$ pa $K_{a'} \notin S^*_{m,n}$ $\bar{m} \geq 3$.

Sledi $\bar{m} = 2$ tj.

$$a^2 = a^{2+r}.$$

K_a je ciklička grupa reda r generisana elementom a^{m+g} gde je $0 \leq g \leq r-1$ i $m + g \equiv 1(\mathrm{mod}\, r)$ (Howie [22] str. 9).

Sledi

$$K_a = \langle a^{2+g} \rangle .$$

$$2 + g \equiv 1(\mathrm{mod}\, r) \text{ pa je } g + 1 = kr \ (k \in N) \text{ tj.}$$

$$g = kr - 1$$

$$kr-1 \leq r-1 \text{ pa je } k = 1 \text{ tj. } g = r-1.$$

Sledi

$$K_a = \langle a^{r+1} \rangle.$$

Dalje je

$$\langle a^{r+1}\rangle \in S^{*}_{m,n}(S_{m,n})$$

pa je

$$(a^{r+1})^{(m,n-1)} = (a^{r+1})^{r} = e.$$

Sledi da je

$$((m,n-1),r) = r$$

tj.

$$r \mid (m,n-1).$$

(←) Ako važi 1°, sledi da je $a^{(m,n-1)}$ jedinica za a. Neka je $m = k_1(m,n-1)$ i $n-1 = k_2(m,n-1)(k_1,k_2 \in N)$. Tada imamo

$$a^{m} = e_{a} = a^{n-1}$$

pa je

$$a^{m} = a^{m}\ ,\quad aa = a^{m+1}a\ ,\quad a^{n} = a$$

$$(a^{m} = a^{m} = e_{x} = a^{m}a^{m} = (aa)^{m},\ a^{n} = a)$$

Iz prethodnog sledi da je svaki element semigrupe S sam sebi $(m,n)^{*}$-anti-inverzan $((m,n))$ pa $S \in S^{*}_{m,n}(S_{m,n})$ i svaka podsemigrupa od S pripada $S^{*}_{m,n}(S_{m,n})$.

Neka važi uslov 2°. Tada je

$$\langle a^{p^{\beta}}\rangle \in S^{*}_{m,n}(S_{m,n})$$

jer je

$$(a^{p^{\beta}})^{(m,n-1)} = (a^{p})^{m} = e \qquad (1 \leqslant \beta \leqslant \alpha)$$

pa svaka podgrupa od S pripada $S^{*}_{m,n}(S_{m,n})$ tj.

$$S \in QS^{*}_{m,n}(QS_{m,n}).$$

3° Podsemigrupe od S su K_a i podgrupe od K_a. Kako je $r \mid (m,n-1)$ sledi da je

$$(a^{r+1})^{(m,n-1)} = e$$

pa imamo da je svaki element sam sebi $(m,n)^*$-anti-inverzan i svaka podgrupa pripada $S^*_{m,n}(S_{m,n})$. Sledi

$$S \in QS^*_{m,n}(QS_{m,n}).$$

POSLEDICA 1. $QS^*_{m,n} = QS_{m,n}$.

POSLEDICA 2. (S. Bogdanović [5]). Semigrupa S je QA semigrupa ako i samo ako važi jedan od uslova

1° $(\forall a \in S)\quad a^3 = a$

2° S je ciklička grupa prostog reda

3° S je ciklička grupa reda 4

4° S je monogena semigrupa indeksa 2 i perioda 1

5° S je monogena semigrupa indeksa 2 i perioda 2.

4. BAZISNE KLASE SEMIGRUPA ČIJE SVE PRAVE PODSEMIGRUPE ZADOVOLJAVAJU NEKI ZAKON

Neka je $\phi(x,y)$ formula u jeziku $L = \{\cdot\}$.

Definicija 4.1. Neka je S semigrupa.

$$S \in S_{\phi} \leftrightarrow (\forall x \in S)(\exists y \in S)\phi(x,y).$$

Teorema 4.1. Neka je S semigrupa. Tada su sledeća dva tvrdjenja ekvivalentna:

(i) QS_ϕ ima bazisnu klasu u odnosu na klasu svih semigrupa,

(ii) $QS_\phi \subseteq S_\phi$.

Dokaz. $(\rightarrow)$. QS_ϕ ima bazisnu klasu u odnosu na klasu svih semigrupa. Ako nije $QS_\phi \subseteq S_\phi$ onda postoji semigrupa $S \in QS_\phi$ i $S \not\in S_\phi$. Semigrupa

$$S^0 = S \cup \{0\}$$

jeste unija semigrupa iz QS_ϕ ali $S^0 \not\in QS_\phi$ pa sledi da QS_ϕ nema bazisnu klasu, obzirom da ne važi tačka b) definicije bazisne klase.

$(\leftarrow)$ $QS_\phi \subseteq S_\phi$.

Neka skup M čine sve monogene semigrupe koje su iz QS_ϕ. Svaka ciklička grupa prostog reda pripada QS_ϕ pa M nije prazan skup.

Ako $S \in QS_\phi$ onda je $S = \bigcup_{x \in S} \langle x \rangle$. Svaka prava podsemigrupa od $\langle x \rangle$ jeste podsemigrupa od S pa je $\langle x \rangle \in QS_\phi$.

Neka je $S = \bigcup_{\alpha \in I} \langle x \rangle_\alpha$ i $\langle x \rangle_\alpha \in M$. Ako je S_1 prava podsemigrupa od S tada iz $a \in S_1$ sledi $a \in \langle x \rangle_{\alpha_0}$ $(\alpha_0 \in I)$. Ako je

$$\langle a \rangle = \langle x \rangle_{\alpha_0}\ , \qquad QS_\phi \subseteq S_\phi\ ,$$

onda $\langle a \rangle \in S_\phi$ tj. postoji b takvo da važi $\phi(a,b)$. Ako je $\langle a \rangle$ prava podsemigrupa od $\langle x \rangle_{\alpha_0}$ onda $\langle a \rangle \in S_\phi$ pa postoji $b \in \langle a \rangle$ takvo da važi $\phi(a,b)$. Na osnovu prethodnog sledi da $S_1 \in S_\phi$ pa $S \in QS_\phi$.

Nijedna semigrupa iz M ne može se predstaviti kao unija pravih podsemigrupa iz QS_ϕ pa je M najmanja klasa.

Definicija 4.2. $s \in \mathcal{S} \leftrightarrow s$ je regularna (kompletno, levo, desno, intra)

Propozicija 4.1. $s \in Q\mathcal{S} \leftrightarrow$ Važi jedan i samo jedan od uslova

1° s je monogena indeksa 2

2° $(\exists n \geqslant 2)\ x^n = x.$

Dokaz. Sledi neposredno.

Definicija 4.3. $s \in \mathcal{S} \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\ xy = y$

$(yx = y\ ,\ \ xy = yx = y)$

Propozicija 4.2. $s \in Q\mathcal{S} \leftrightarrow$ Važi jedan i samo jedan od uslova

1° s je ciklička grupa prostog reda

2° $x^{m+1} = x^m$ za neko $m \in N$.

Dokaz. $(\rightarrow)$ Sledi neposredno.

$(\leftarrow)$ Ako je S monogena semigrupa tada

S je grupa $\rightarrow S$ je prostog reda.

Ako je S semigrupa sledi da je $K_a = \{a^m\}$, trivijalna grupa, pa sledi 2°.

Ako S nije monogena i $x \in S$ sledi da je $\langle x\rangle$ podsemigrupa od S i x ima nulu u $\langle x\rangle$. Kako važi sledeće

$\langle x\rangle$ ima nulu (levu, desnu) $\leftrightarrow x^{m+1} = x^m$

sledi tvrdjenje.

PRIMERI:

1° Neka je $s \in \mathcal{S} \leftrightarrow (\forall x \in s)(\exists y \in s)(xy = y^2)$. Tada je $\mathcal{S}$ klasa svih semigrupa pa je $\mathcal{S} = Q\mathcal{S}$. Iz teoreme 4.1. sledi da klasa svih semigrupa ima bazisnu klasu (klasa svih monogenih semigrupa)

2° Neka je klasa $\mathcal{S}$ klasa svih regularnih (kompletno, levo, desno, intra). Monogena semigrupa $\langle a\rangle = \{a, a^2, \ldots, a^{r+1}\}$ tj. semigrupa u kojoj važi $a^2 = a^{2+r}$ pripada klasi $Q\mathcal{S}$ ali $\langle a\rangle \notin \mathcal{S}$ pa $Q\mathcal{S}$ nema bazisnu klasu.

3° Neka je klasa $\mathcal{S}$ klasa inverznih semigrupa. Iz prethodnog sledi da klasa $Q\mathcal{S} = QI$ nema bazisnu klasu.

4° Neka je klasa $\mathcal{S}$ klasa $\mathcal{S}^*_{m,n}$. Iz definicije klase $\mathcal{S}^*_{m,n}$ sledi $x^{n-1} = e_x$. Neka je p prost broj takav da je $p > n-1$. Tada $C_p \notin \mathcal{S}$ i $C_p \in Q\mathcal{S}$. Sledi da $Q\mathcal{S}^*_{m,n}$ nema bazisnu klasu.

5° Klasa $Q\mathcal{S}_{m,n}$ takodje nema bazisnu klasu (slično prethodnom)

6° $s \in \mathcal{S} \leftrightarrow (\forall x \in s)(\exists y \in s)(xy = y \wedge (\exists z \in s)(xz = y))$. $Q\mathcal{S}$ nema bazisnu klasu (sledi iz primera 2°). $\mathcal{S}$ je klasa grupa.

7° $s \in \mathcal{S} \leftrightarrow (\forall x \in s)(\exists y \in s)(x^2 = xyx)$. $Q\mathcal{S}$ ima bazisnu klasu. Neka $s \in Q\mathcal{S}$. Ako je s monogena onda je s ili ciklička grupa ili je s monogena indeksa 2 i perioda 3. Ako s nije monogena onda je $s = \bigcup_{x \in s} \langle x\rangle$ i $\langle x\rangle \lhd s$ pa je $\langle x\rangle$ ili ciklička grupa ili je $x^2 = x^3$. Sledi da je $s \in Q\mathcal{S} \rightarrow s \in \mathcal{S}$. Na osnovu teoreme 4.1. sledi da $Q\mathcal{S}$ ima bazisnu klasu.

PRIMEDBA. Neka je $\mathcal{S}$ proizvoljna klasa semigrupa i neka je semigrupa $A = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$, $S_\alpha \in \mathcal{S}$. Tada

$$A \not\subseteq S \rightarrow S \quad \text{nema bazisnu klasu.}$$

Neka je G klasa svih grupa i neka je C_n proizvoljna ciklička grupa. Tada je $C_n^o = C_n \cup \{0\}$ $(\{0\}, C_n \in G)$ i $C_n^o \not\in G$. Sledi da klasa svih grupa nema bazisnu klasu u odnosu na klasu svih semigrupa.

G L A V A IV

PODALGEBRE POLUMREZA

1. JEDNA KARAKTERIZACIJA PODALGEBRI POLUMREŽA

U ovoj tački dajemo opis klase podalgebri polumreža.

Teorema 1.1. Algebra $A = (A, \Omega)$ je podalgebra neke polumreže ako i samo ako zadovoljava sledeći uslov:

(*) Za svaki par terma t_1 i t_2, sa jednakim skupovima simbola, $t_1 = t_2$ je identitet u A.

Dokaz. $(\rightarrow)$ Jasno je da svaka podalgebra polumreže zadovoljava uslov (*).

$(\leftarrow)$ Pretpostavimo da algebra $A = (A, \Omega)$ zadovoljava uslov (*). Dokazaćemo da se ova algebra može potopiti u polumrežu. Uočimo da se opštost razmatranja ne smanjuje ako pretpostavimo sledeće:

(i) A i Ω su disjunktni skupovi;

(ii) Različiti operatori iz Ω definišu različite operacije u A;

(iii) Ω ne sadrži 0-arne operatore, tako da su operatori tj. elementi Ω, operacije u A.

Neka je $K = A \bigcup \Omega$, neka je M familija konačnih podskupova skupa K (uključujući i prazan skup) M je polumreža u odnosu na običnu operaciju unije skupova. Ako je $x \in K$ onda ćemo smatrati da je $x = \{x\}$ tako da dobijamo $K \subseteq M$, pa možemo smatrati da je M slobodna polumreža sa jedinicom i bazom K.

U M uvodimo relaciju "susedstva" na sledeći način. Ako su $S,T \in M$ takvi da je

$$S = S' \cup a, \quad T = S' \cup \{\omega, a_1, \ldots, a_n\},$$

gde je $a = \omega(a_1,\ldots,a_n)$ u algebri A, onda kažemo da su (S,T) i (T,S) parovi susednih elemenata iz M generisani operacijom ω.

Ako postoji niz $S_o, S_1, \ldots, S_p$ takav da je $S = S_o$, $T = S_p$, $p \geq 0$ i (S_{i-1}, S_i) par susednih elemenata iz M za svako $i \in \{1,\ldots,p\}$, onda kažemo da su S,T ekvivalentni i to označavamo sa $S \sim T$.

Jasno je da je $\sim$ kongruencija polumreže M, kao i da je

(1.1) $\quad a = \omega(a_1,\ldots,a_n)$ (u A) $\Rightarrow$ $a \sim \{\omega, a_1, \ldots, a_n\}$.

Dokazaćemo da važi implikacija

(1.2) $\quad a,b \in A \Rightarrow (a \sim b \Rightarrow a = b)$,

iz čega, zbog (1.1), dolazimo do zaključka da je algebra podalgebra polumreže $P = M/_{\sim}$.

Izvršićemo odgovarajuću pripremu, sa ciljem da dokažemo tvrdjenje (1.2).

Prvo, svakom elementu $S \in M$ pridružimo njegovu "vrednost" $[S]$ na sledeći način. Ako je jedan od skupova $S_\Omega = S \cap \Omega$, $S_A = S \cap A$ prazan, onda stavljamo

$$[S] = S.$$

Neka su skupovi

$$S_\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}, \quad S_A = \{a_1, \ldots, a_s\}$$

neprazni. Ako su sve operacije iz S_Ω unarne onda stavljamo

$$[S] = \{b_1, \ldots, b_s\},$$

gde je

$$b_\nu = \omega_1 \ldots \omega_r(a\ ), \quad \text{za} \quad \nu = 1,\ldots,s .$$

I na kraju, pretpostavimo da je bar jedna operacija iz S_Ω, na primer ω_r,neunarna. Tada postoje prirodni brojevi i i j takvi da je

$$\omega_1 \ldots \omega_r^i(a_1^j,\ldots,a_n)$$

osmišljen "proizvod" u algebri A. Ako je a vrednost tog proizvoda onda stavljamo

$$[S] = a .$$

Iz uslova (*) sledi da $[S]$ ne zavisi od izbora četvorke ω_r, a , i, j.

Radi jednostavnosti, umesto $[S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k]$ ćemo pisati $[S_1, S_2,\ldots, S_k]$.

Iz definicije transformacije $[\ \ ]$, kao i iz uslova (*), lako se dobija da su tačne sledeće leme.

Lema 1.1. $[[S]] = [S]$, za svako $S \in M$.

Dokaz. Ako je S prazna reč onda je $[S] = \emptyset$ pa tvrdjenje neposredno sledi. Ako je jedan od skupova S_Ω, S_A prazan, $[S] = S$ pa sledi tvrdjenje. Neka su skupovi

$$S_\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_r\} , \qquad S_A = \{a_1,\ldots,a_s\}$$

neprazni. Ako su sve operacije iz S_Ω unarne onda je

$$[[S]] = [b_1,\ldots,b_s] = \{b_1,\ldots,b_s\} = [S],$$

gde je $b_\nu = \omega_1 \ldots \omega_r(a_\nu)$, za $\nu = 1,\ldots,s$. Ako je bar jedna operacija iz S_Ω, na primer ω_r, neunarna onda je

$$[S] = a,$$

gde je $a = \omega_1 \ldots \omega_r^i(a_1^j,\ldots,a_n)$ za neke $i,j \in N$.

Kako je $[a] = a$ sledi tvrdjenje.

Lema 1.2. Ako je $S_A = T_A = \emptyset$, onda je

$$[S,T,U] = [S,[T,U]]$$

za svako $U \in M$.

Dokaz. Za $S = \emptyset$, ovo je posledica leme 1.1., a za $U_A = \emptyset$ tvrdjenje sledi iz definicije transformacije $[\ \ ]$. Ako su sve operacije iz $S \cup T \cup U$ unarne tvrdjenje sledi neposredno. Ako $U_A \neq \emptyset$, ako $S \cup T \cup U$ sadrži bar jednu neunarnu operaciju onda tačnost tvrdjenja sledi iz uslova (*) i definicije transformacije $[\ \ ]$. Neka je, na primer

$$S=\{f_1,\dots,f_k\},\ T=\{g_1,\dots,g_l\},\ U=\{h_1,\dots,h_m,a_1,\dots,a_s\}$$

i neka su operacije f_1, g_1 neunarne. Tada je

$$[T,U] = g_1^i\dots g_l\ h_1\dots h_m(a_1^j,\dots,a_s) = c \quad , \quad c \in A,$$

$$[S,[T,U]] = f_1^{i'}\dots f_k(c^{j'}).$$

$$[S,T,U] = f_1^{i''}\dots f_k g_1\dots g_l h_1\dots h_m(a_1^{j''},\dots a_s) =$$

$$= f_1^{i'}\dots f_k((g_1^i\dots g_l h_1\dots h_m(a_1^j,\dots,a_s))^{j'}) =$$

$$= f_1^{i'}\dots f_k(c^{j'}) = [S,[T,U]].$$

Lema 1.3. Neka je u A tačna jednakost $a = \omega(a_1,\dots,a_n)$ i neka je $[S,a] \in A$. Tada je tačna jednakost

$$[S,a] = [S, \{\omega,a_1,\dots,a_n\}].$$

Dokaz. Uočimo prvo da je

$$\omega(a^n) = \omega((\omega(a_1,\dots,a_n))^n) = \omega(a_1,\dots,a_n) = a.$$

Moguća su sledeća dva slučaja

(I) $\qquad a \in S$

(II) $\qquad a \notin S$.

Posmatraćemo prvo slučaj (I).

Neka je $S = \{\omega_1,\dots,\omega_r,\ b_1,\dots,b_s,\ a\}$ gde je $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ i $a \neq b_\lambda$, $\lambda = 1,\dots,s$.

Ako je $r \geqslant 1$ i ako neka operacija, na primer ω_r, nije unarna, onda za podesno izabrane pozitivne brojeve i,j $(j \geqslant 2)$ imamo

$$[S,a] = [S] = \omega_1\dots\omega_r^i(b_1,\dots,b_s,\ a^j) =$$

$$= \omega_1\dots\omega_r^i(b_1,\dots,b_s,\ \omega(a_1,\dots,a_n),\ a^{j-1}) =$$

$$= [S,\ \{\omega,a_1,\dots,a_n\}].$$

Pretpostavimo da je $r \geqslant 1$ i da su sve operacije $\omega_1,\dots,\omega_r$ unarne. Tada imamo

$$[S,a] = \{\omega_1\dots\omega_r(b_1),\dots,\omega_1\dots\omega_r(b_s),\dots,\omega_1\dots\omega_r(a)\}.$$

Iz pretpostavke da je $[S,a] \in A$ dobijamo

$$\omega_1\dots\omega_r(b_1) = \dots = \omega_1\dots\omega_r(b_s) = \omega_1\dots\omega_r(a) = c,\ c \in A.$$

Neka je i ω unarna operacija, tj $n = 1$. U ovom slučaju imamo

$$[S,\{\omega,a_1\}] = \{\omega(c),\ \omega\omega_1\dots\omega_r(a_1)\}.$$

Treba pokazati da je $c = \omega(c) = \omega\omega_1\dots\omega_r(a_1)$.

$$\omega\omega_1\dots\omega_r(a_1) = \omega_1\dots\omega_r(\omega(a_1)) = \omega_1\dots\omega_r(a) = c,$$

pa sledi

$$\omega(c) = \omega\omega_1\dots\omega_r(a) = \omega_1\dots\omega_r(\omega(a)) = \omega_1\dots\omega_r(a) = c$$

Pretpostavimo da je $n > 1$. U ovom slučaju imamo

$$[S,\{\omega,a_1,\dots,a_n\}] = \omega_1\dots\omega_r\omega^i(b_1,\dots,b_s,a^j,a_1,\dots,a_n) =$$

$$= \omega_1 \ldots \omega_r \omega^i(b_1,\ldots,b_s,a^{j+n-1},\omega(a_1,\ldots,a_n)) =$$

$$= \omega_1 \ldots \omega_r \omega^i(b_1,\ldots,b_s,a^{j+n}) =$$

$$= \omega^i(\omega_1 \ldots \omega_r(b_1),\ldots,\omega_1 \ldots \omega_r(b_s),(\omega_1 \ldots \omega_r(a))^{j+n}) =$$

$$= \omega^i(c^{s+j+n}) = \omega(c^n) =$$

$$= \omega((\omega_1 \ldots \omega_r(a))^n) = \omega_1 \ldots \omega_r(\omega(a^n)) =$$

$$= \omega_1 \ldots \omega_r(a) = c = [S,a].$$

Preostaje slučaj kada je $r = 0$, tj. $S = \{b_1,\ldots,b_s,a\}$. Iz $[S,a] = [S] = c$, $c \in A$, sledi da je $S = a$.
Sada imamo

$$[S,\{\omega,a_1,\ldots,a_n\}] = [\{a,\omega,a_1,\ldots,a_n\}] = \omega(a^{n-1},\omega(a_1,\ldots,a_n)) =$$
$$= \omega(a^n) = a = [S,a]$$

za $n > 1$ i

$$[S,\{\omega,a_1\}] = [\{\omega,a,a_1\}] = \{\omega(a),\omega(a_1)\} = \{a,a\} = a =$$
$$= [S,a]$$

za $n = 1$.

Time smo ispitali slučaj (I). Preostaje nam slučaj (II). Neka je

$$S = \{\omega_1,\ldots,\omega_r,b_1,\ldots,b_s\}$$

gde je $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $b_\lambda \neq a$ $(\lambda = 1,\ldots,s)$.
Neka je $r \geqslant 1$.

Ako je na primer ω_r, neunarna operacija onda, za podesno izabrane prirodne brojeve i,j imamo

$$[S,a] = \omega_1 \ldots \omega_r^i(b_1,\ldots,b_s,a^j) =$$

$$= \omega_1 \ldots \omega_r^i(b_1,\ldots,b_s,(\omega(a_1,\ldots,a_n))^j) =$$

$$= [S,\{\omega,a_1,\ldots,a_n\}].$$

Ako su sve operacije $\omega_1,\ldots,\omega_r$ unarne onda je

$$[S,a] = \{\omega_1\ldots\omega_r(b_1),\ldots,\omega_1\ldots\omega_r(b_s),\omega_1\ldots\omega_r(a)\}$$

pri čemu je

$$c = \omega_1\ldots\omega_r(b_1) = \ldots = \omega_1\ldots\omega_r(b_s) = \omega_1\ldots\omega_r(a).$$

Ako je $n = 1$, onda

$$[S,\{\omega,a_1\}] = \{\omega(c),\omega_1\ldots\omega_r(a_1)\} = \{\omega(c),c\}.$$

Iz $c = \omega_1\ldots\omega_r(a)$ sledi $\omega(c) = \omega_1\ldots\omega_r\omega(a) = \omega_1\ldots\omega_r(a) = c$. Prema tome, imamo

$$[S,a] = c = [S,\{\omega,a_1\}].$$

Za $n > 1$ imamo

$$[S,\{\omega,a_1,\ldots,a_n\}] = \omega_1\ldots\omega_r\omega^i(b_1,\ldots,b_s,a_1^j,\ldots,a_n) =$$

$$= \omega^i(\omega_1\ldots\omega_r(b_1),\ldots,\omega_1\ldots\omega_r(b_s),a_1^j,\ldots,a_n) =$$

$$= \omega^i(c^s,a_1^j,\ldots,a_n) =$$

$$= \omega^i(c^s,(\omega(a_1,\ldots,a_n))^k) =$$

$$= \omega^i(c^s,a^k) = \omega_1\ldots\omega_r(\omega(a^n)) =$$

$$= \omega_1\ldots\omega_r(a) = c = [S,a],$$

za $s > 1$. Ako je $s = 0$ tj. $S = \{\omega_1,\ldots,\omega_r\}$, onda je

$$[S,\{\omega,a_1,\ldots a_n\}] = \omega_1\ldots\omega_r(\omega(a_1,\ldots,a_n)) = \omega_1\ldots\omega_r(a) = c =$$

$$= [S,a] .$$

Preostaje slučaj $r = 0$. Sada je $[S,a] \in A$ moguće ako je $S \neq \emptyset$, tj. $[S,a] = [a] = a$.

Imamo

$$[S,\{\omega,a_1,\dots,a_n\}] = [\{\omega,a_1,\dots,a_n\}] = \omega(a_1,\dots,a_n) = a = [S,a].$$

Time je završen dokaz leme 1.3.

Dokazaćemo sledeću lemu iz koje će neposredno slediti da je tvrdjenje (1.2) tačno

Lema 1.4. Neka je $a = S_0, S_1, \dots, S_p$ niz elemenata iz M takav da je $p \geq 0$ i za svako $i \in \{1,2,\dots,p\}$ par (S_{i-1}, S_i) jeste par susednih elemenata generisan operacijom ω_i. Tada je

$$a = [\omega_\nu, a] = [\omega_1,\dots,\omega_p, S_\nu]$$

za svako $\nu \in \{1,2,\dots,p\}$.

Dokaz. Za $p = 0$ tvrdjenje neposredno sledi. Pretpostavimo da je

$$a = [\omega_\nu, a] = [\omega_1,\dots,\omega_q, S_\nu]$$

za svako $\nu \in \{1,2,\dots,q\}$, gde je $0 \leq q < p$. Označimo ω_{q+1} sa ω. Tada je

(I) $\qquad S_q = S' \cup b, \quad S_{q+1} = S' \cup \{\omega,b_1,\dots,b_n\}$

ili

(II) $\qquad S_q = S' \cup \{\omega,b_1,\dots,b_n\}, \quad S_{q+1} = S' \cup b,$

gde je $b = \omega(b_1,\dots,b_n)$ u algebri A.

U prvom slučaju imamo

$$[\omega,a] = [\omega,[\omega_1,\dots,\omega_q,S_q]] =$$

$$= [\omega,\omega_1,\dots,\omega_q,S',b] =$$

$$= [\omega,\omega_1,\dots,\omega_q,S',\omega,b_1,\dots,b_n] =$$

$$= [\omega_1,\dots,\omega_q,S',\omega,b_1,\dots,b_n] =$$

$$= [\omega_1,\dots,\omega_q,S',b] = [\omega_1,\dots,\omega_q,S_q] = a$$

$$[\omega_1,\dots,\omega_q,\omega,S_\nu] = [\omega,\omega_1,\dots,\omega_q,S_\nu] =$$

$$= [\omega,[\omega_1,\dots,\omega_q,S_\nu]] =$$

$$= [\omega,a] = a\ ,$$

za svako $\nu \in \{1,\dots,q\}$. Isto tako

$$[\omega_1,\dots,\omega_q,\omega,S_{q+1}] = [\omega_1,\dots,\omega_q,\omega,S',\omega,b_1,\dots,b_n] =$$

$$= [\omega_1,\dots,\omega_q,S',\omega,b_1,\dots,b_n] =$$

$$= [\omega_1,\dots,\omega_q,S',b] =$$

$$= [\omega_1,\dots,\omega_q,S_q] = a\ .$$

Preostaje nam slučaj (II).

Uočimo da u ovom slučaju imamo $\omega \in \{\omega_1,\dots,\omega_q\}$, pa prema tome potrebno je dokazati samo jednakost

$$[\omega_1,\dots,\omega_q,S_{q+1}] = a,$$

koja se dobija kao posledica leme 1.3. i transformacije $[\ \ ]$. Ako $\{\omega_1,\dots,\omega_q\} \cup S_{q+1}$ sadrži bar jednu neunarnu operaciju onda je $[\omega_1,\dots,\omega_q,S_{q+1}] \in A$ pa je

$$[\omega_1,\dots,\omega_q,S_{q+1}] = [\omega_1,\dots,\omega_q,S',b] = [\omega_1,\dots,\omega_q,S',\omega,b_1,\dots,b_n] =$$

$$= [\omega_1,\dots,\omega_q,S_q] = a\ .$$

Neka su sve operacije iz $\{\omega_1,\dots,\omega_q\} \cup S_q$ unarne

i neka je $S' = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}, a_1, \ldots, a_s\}, \omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k} \in \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$.
Iz $[\omega_1, \ldots, \omega_q, S_q] = a$ sledi da je

$$\omega_1 \ldots \omega_q \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k}(a_1) = \ldots = \omega_1 \ldots \omega_q \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k}(a_s) = \omega_1 \ldots \omega_q \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k}(b_1) =$$

Tada je

$$[\omega_1, \ldots, \omega_q, S_{q+1}] = \{\omega_1 \ldots \omega_q \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k}(a_1), \ldots, \omega_1 \ldots \omega_q \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k}(a_s),$$
$$\omega_1 \ldots \omega_q \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k}(b)\}.$$

Kako je $\omega_1 \ldots \omega_q \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k}(b) = \omega_1 \ldots \omega_q \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k}(\omega(b_1)) =$
$= \omega_1 \ldots \omega_q \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k}(b_1) = a \quad (\omega \in \{\omega_1, \ldots, \omega_q\})$ sledi da je

$$[\omega_1, \ldots, \omega_q, S_{q+1}] = [\omega_1, \ldots, \omega_q, S_q] = a.$$

Time je kompletiran dokaz leme 1.4.

Sada se implikacija (1.2) jednostavno dokazuje
Naime, ako je $a, b \in A$ i $a \sim b$, onda postoji niz

$$a = S_o, S_1, \ldots, S_p = b$$

takav da je par (S_{i-1}, S_i) par susednih elemenata iz M za svako $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Ako je $p = 0$, onda $a = S_o = b$. Neka je $p \geq 1$ i neka je par (S_{i-1}, S_i) generisan operacijom ω_i. Na osnovu leme 1.4. imamo da je

$$[\omega_1, a] = [\omega_2, a] = \ldots = [\omega_p, a] = [\omega_1, \ldots, \omega_p, b] = a.$$

Ako posmatramo niz $b = S_p, \ldots, S_1, S_o = a$ imamo da je

$$b = [\omega_1, \ldots, \omega_p, a] = [\omega_1, \ldots, [\omega_p, a]] = [\omega_1, \ldots, \omega_{p-1}, a] = \ldots = [\omega_1, a] = a$$

Time je dokaz kompletiran.

2. NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI

Ovde dajemo neke specijalne slučajeve koji neposredno slede iz teoreme 1.1.

2.1. Ako Ω ne sadrži unarne operatore i svakom n-arnom operatoru $\omega \in \Omega$ opredelimo binarni operator ω' na sledeći način

$$\omega'(x,y) = \omega(x^{n-1},y) ,$$

onda imamo algebru (A,Ω') sa binarnim operacijama, koja zadovoljava uslov (*) ako i samo ako algebra (A,Ω) zadovoljava isti uslov. Takodje, imamo da je

$$\omega(x_1,\ldots x_n) = \omega'^{n-1}(x_1,\ldots,x_n).$$

2.2. Algebru (A,Ω) nazivamo Ω-polumreža ako postoji polumreža P takva da je $A \subseteq P$ i

(1') $$\omega(a_1,\ldots,a_n) = a_1\ldots a_n$$

za svaki n-arni operator $\omega \in \Omega$ i $a_1,\ldots,a_n \in A$. Lako se dokazuje da je (A,Ω) Ω-polumreža ako i samo ako je zadovoljen sledeći uslov:

(*) Za svaki par terma t_1,t_2, sa istim skupom promenljivih, $t_1 = t_2$ je identitet u (A,Ω).

Očigledno, uslov (*) je potreban.

Ako (*) važi u (A,Ω) onda svi operatori, iste arnosti n, definišu jednake n-arne operacije, tako da možemo uzeti da za svako n postoji najviše jedna operacija u Ω. Ako postoji unarna operacija $\omega \in \Omega$ imamo da je $\omega(x) = x$ za svako $x \in A$. Neka je ω n-arna operacija u Ω $(n \geq 2)$, i neka je "$\cdot$" binarna operacija definisana sa

$$x \cdot y = \omega(x^{n-1}, y).$$

Tada dobijamo polumrežu $(A, \cdot)$ takvu da je

$$\rho(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \ldots x_m$$

za svaku m-arnu operaciju $\rho \in \Omega$.

2.3. Algebra A zadovoljava uslov (*) ako i samo ako važe sledeći identiteti u algebri A:

3.1. $\omega x_1 \ldots x_n = \omega x_{i_1} \ldots x_{i_n}$;

3.2. $\omega\rho\, x_1 \ldots x_m = \rho\omega x_1 \ldots x_m$;

3.3. $\omega\rho x_1 \ldots x_m = \omega x_1 \ldots x_{i-1} \rho x_{i+1} \ldots x_m$;

3.4. $\omega_1^{r_1} \ldots \omega_p^{r_p} x_1^{\alpha_1} \ldots x_q^{\alpha_q} = \omega_1^{s_1} \ldots \omega_p^{s_p} x_1^{\beta_1} \ldots x_q^{\beta_q}$.

A zadovoljava (*') ako zadovoljava sve identitete 3.1, 3.2, 3.3 i 3.4' gde je

3.4' $\omega_1 \ldots \omega_r x_1^{\alpha_1} \ldots x_q^{\alpha_q} = \rho_1 \ldots \rho_s x_1^{\beta_1} \ldots x_q^{\beta_q}$

($\omega, \rho, \omega_\nu, \rho_\nu$ su proizvoljni elementi Ω ; $i_1, \ldots, i_n$ je proizvoljna permutacija $1, \ldots, n$ i $n, m, r_\nu, s_\nu, \alpha_\nu, \beta_\nu$ su pozitivni brojevi takvi da su obe strane odgovarajućih identiteta Ω-termi).

LITERATURA

[1] S. Bogdanović, S. Milić, V. Pavlović, *Anti-inverse semigroups*, Pub.Inst.Math. Beograd, 24(38)1978, 19-28.

[2] S. Bogdanović, *On anti-inverse semigroups*, Publ.Inst. Math. Beograd, 25(39),1979, 25-31.

[3] S. Bogdanović, *Prilog teoriji regularnih semigrupa*, Doktorska disertacija, Novi Sad, 1980.

[4] S. Bogdanović, *Sur les demi-groupes dans lesquels sous-demi-groupes propres sont idempotents I*, Mathematics seminar notes, Kobe University (u štampi).

[5] S. Bogdanović, *Sur les demi-groupes dans lesquels sous-demi-groupes propres sont idempotents II*, Matematički vesnik, Beograd (u štampi).

[6] S. Bogdanović, S. Crvenković, *On some classes of semigroups*, Zbornik radova PMF Novi Sad, 8(1978), 69-77.

[7] A.H. Clifford, *Semigroups admiting relative inverses*, Ann. of Math., 42(1941), 1037-1049.

[8] A.H. Clifford, G.B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, 1964, Vol. II (in Russian) Moscow.

[9] P.M. Cohn, *Universal algebra*, New York, 1965.

[10] R. Croisot, *Demi-groupes inversife et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, Ann.Sci. Ecole Norm. Sup (3), 70(1953), 361-379.

[11] S. Crvenković, *O jednoj klasi regularnih semigrupa*, (magistarski rad), Beograd, 1978.

[12] S. Crvenković, *On some properties of a class of the completely regular semigroups*, Zbornik radova PMF Novi Sad, br. 9, 1979, 153-160.

[13] S. Crvenković, *Basis class of one class of semigroups*, Algebraic conference, Skopje, 1980.

[14] Г. Чупона, За теоремата на Кон-Ребане, Год.Збор. ПМФ, Скопје, Книга 20(1970) А.

[15] Г. Чупона, Б. Трпеновски, Предавање по алгебра, Скопје 1973.

[16] Г. Чупона, С. Марковски, Сместување на универзални алгебри, Год.Збор. ПМФ, Скопје, Книга 25-26 (1975/76) А.

[17] Г. Чупона, Подалгебри на полугрупи, Билтен на Друшт. на мат. и физ. од СР Македонија, Книга XIX.

[18] G. Čupona, G. Vojvodić, S. Crvenković, *Subalgebras of semilattices*, Zbornik radova PMF Novi Sad, br. 10, 1980, (u štampi).

[19] P. Dubreil, *Théorie des groupes*, Dunod, 1972, Paris.

[20] J.A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. of Math., 54(1951), 163-172.

[21] M. Hall, *The theory of groups*, (на руском), Москва 1962.

[22] J.M. Howie, *An Introduction to semigroups Theory*, Acad. Press, 1976.

[23] K. Iséki, *A characterisation of regular semigroup*, Proc. Japon Acad., 32(1956), 676-677.

[24] K. Iséki, *Contribution to the Theory of semigroups I*, Proc. Japon Acad., 32(1956), 174-175.

[25] Е.С. Ляпин, Полугруппь, ФМ Москва, 1960.

[26] С. Марковски, Подалгебри на групоиди, Докторска дисертација, Скопје 1980.

[27] S. Milić, S. Bogdanović, *On a class of anti-inverse semigroups*, Publ.Inst.Math., Beograd, 29(39), 1979, 95-100.

[28] S. Milić, *O n-anti-inverznim semigrupama*, Zbornik radova PMF Novi Sad, br. 9, 1979.

[29] S. Milić, *On some classes of semigroups*, Algebraic conference, Skopje 1980.

[30] W.D. Munn, R. Penrose, *A note on inverse semigroups*, Proc. Cambrige Phil.Soc., 51(1955), 396-399.

[31] J. von Neumann, *On regular rings*, Proc.Math.Acad.Sci. USA, 22(1936), 707-713.

[32] T.E. Nordahl, *Commutative semigroups whose proper subsemigroups are power joined*, Semigroup Forum, Vol. 6 (1973), 35-41.

[33] M. Petrich, *The maximal semilattice decomposition of a semigroup*, Math.Zeitsch., 85(1964), 68-82.

[34] M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Merill Publ. Company, 1973.

[35] M. Petrich, *Lectures in semigroups*, Akad. Verlog, Berlin, 1977.

[36] M. Petrich, *Structure of regular semigroups*, Cahiers Math., Mountpellier, 1977.

[37] S. Prešić, M. Prešić, *On the embedding of Ω-algebras in groupoids*, Publ. de l' inst.Math., 21(35), 1977, Beograd.

[38] Ю.Н. Ребане, О представлении универсальных алгебр в коммутативных полугруппах, Сиб.Мат. Журнал, VII, No. 4, 1966.

[39] D. Rees, *On semigroups*, Cambridge Phil.Soc., 36(1940), 387-400.

[40] G. Thierrin, *Sur une condition necessaire et suffisate pour qu'un semigroupe soit un groupe*, C.R.Acad. Sci. Paris, 232(1951), 376-378.

[41] G. Thierrin, *Sur les élements unitaires d'un demi-groupe inversif*, C.R.Acad.Sci., Paris, 234(1952), 33-34.

[42] ——————, *Sur quelques proprietes de certaines classes de demi-groupes*, C.R.Acad.Sci., Paris, 239(1954), 1335-1337.

[43] ——————, *Contribution a la théorie des éqivqlences dans les demi-groupes*, Bull.Soc.Math., France, 83(1955), 103-159.

[44] В.В. Вагнер, Обобщенные группы, ДАН, СССР, 84(1952), 1119-1122.